

TARTU RIIKLIK ÜLIKOO



L. Luit

ARVUTUSMEETODID

II

TARTU 1964

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI
Arvutusmatemaatika kateeder

L. Luht

ARVUTUSMEETODID

II

Interpolatsioon ja kvadra-
tuurvalemid

TARTU 1964

Тартуский государственный университет
СССР, г. Тарту, ул. Пилкооли, 18

Л. Лухт

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

II

Интерполяция и квадратурные формулы
На эстонском языке

Vastutav toimetaja L. Võhandu
Korrektor A. Norberg

TRÜ rotaprint 1964. Trükipoognald 13,56
Arvestuspoognald 7,50. Trüklarv 650.
Paljundamisele antud 4. VI 1964.
MB 04259. Tell. nr. 1419.
Hind 38 kop.

I. I N T E R P O L A T S I O O N I M E E T O D .

Uuritavate funktsioonide lähendamisel lihtsamate funktsioonidega on oluline tähtsus paljudes arvutusmatemaatika küsimustes. Tooksime selle kohta mõned näited.

Kui meil on kasutada mingi funktsiooni väärtuste tabel, siis funktsiooni väärtuse leidmiseks tabelis mitteantud kohal lähendatakse teda mingi lihtsama funktsiooniga (näit. lineaarse või kõrgema astme polünoomiga) ning arvutatakse viimase väärtus. Keerukamate integraalide arvutamiseks lähendatakse integreeritav funktsioon lihtsama funktsiooniga (näit. polünoomiga) ja integreeritakse see.

Funktsioonide lähendamist kasutatakse väga laialt ka elektronarvutites. Juba selliste tuntud funktsioonide, nagu e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\arctan x$ jms. väärtused arvutatakse kui neid lähendavate polünoomide või ratsionaalfunktsioonide väärtused.

Funktsioonide lähendamisele tuginevad ka paljud diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudse lahendamise meetodid.

Et leida antud funktsioonile $f(x)$ lähendfunktsiooni $\phi(x)$, valitakse teatav funktsioonide klass, mille hulgas teda otsitakse. Nendeks võivad olla näiteks astmefunktsioonid.

sioonid, trigonomeetrilised funktsioonid, ratsionaalfunktsioonid, eksponentfunktsioonid jt.

Tavaliselt otsitakse lähendfunktsiooni kujul

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x),$$

kus $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ on antud funktsioonid ja $c_0, c_1, \dots, c_n$ - nende kordajad (konstandid). Kordajad c_k leitakse teatud tingimustest lähendfunktsiooni $\phi(x)$ kohta (näiteks $f(x)$ ja $\phi(x)$ väärtused ühtivad teatud punktides, $f(x)$ ja $\phi(x)$ erinevus on teatud lõigul minimaalne jms.). Sõltuvalt püstitatud tingimustest $\phi(x)$ kohta võime saada erinevaid lähendusmeetodeid.

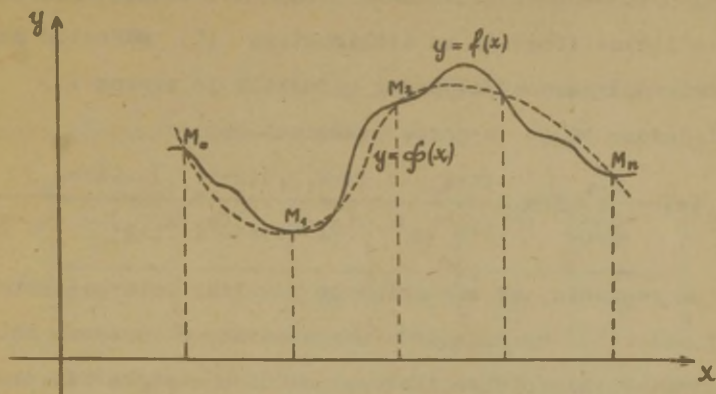
Kõige lihtsamaks funktsioonide lähendamise meetodiks on interpolatsiooni meetod. Sel juhul antakse ette $n + 1$ punkti - nn. interpolatsioonisõlmed - $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ja funktsiooni $f(x)$ väärtused neis. Interpolatsiooningimustena nõutakse, et lähendfunktsiooni $\phi(x)$ ja antud funktsiooni $f(x)$ väärtused interpolatsioonisõlmedes ühtiksid:

$$\phi(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Geomeetriliselt see tähendab kõvera $y = \phi(x)$ leidmist, mis läbib etteantud $n + 1$ punkti $M_i(x_i, y_i)$ (vt. joon. 1).

Interpolatsiooningimused kujutavad enesest lineaarset võrrandisüsteemi lähendfunktsiooni kordajate c_k leidmiseks. Nimetatud võrrandisüsteemi otsene lahendamine on aga küllaltki tülikas, seepärast kasutatakse enamasti interpolatsiooni-funktsiooni $\phi(x)$ leidmiseks kaudseid võtteid.

Käesolevas peatükis vaatleme lähemalt interpoleerimist, kui valida funktsioonideks $\varphi_k(x)$ astmefunktsioonid x^k .



Joon. 1.

§ 1. LAGRANGE'I INTERPOLATSIOONIVALEM.

1. Lagrange'i interpolatsioonipolünoom. Olgu antud $n + 1$ erinevat interpolatsioonisõlme $x_0, x_1, \dots, x_n$ ning funktsiooni $f(x)$ väärtused nendes punktides $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Interpolatsioonipolünoomi

$$\varphi(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

kordajad c_k tuleb leida interpolatsioonitingimustest

$$(1) \quad P_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

On võimalik otseselt veenduda, et tingimustest (1) saada-
va lineaarse võrrandisüsteemi ($n + 1$ võrrandit $n + 1$
tundmatuga) determinant ei võrdu nulliga (vt. näit. [1],

lk. 85). Süsteemi lahendamise teel võime leida kordajad α_k . Järgnevas aga kasutame interpolatsioonipolünoomi leidmiseks kaudset, kuid mõnevõrra lihtsamat teed. Sel korral on suhteliselt lihtne tõestada ka tingimustega (1) määratud n -astme interpolatsioonipolünoomi olemasolu ja ainsust.

Kirjutame välja n -astme polünoomi kujul

$$(2) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}.$$

Lihtne on veenduda, et see polünoom rahuldab interpolatsioonitingimusi (1) (veenduda!). Seega näeme, et eespool esitatud tingimustel interpolatsioonipolünoom eksisteerib. Kujul (2) kirjutatud interpolatsioonipolünoomi nimetatakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.

Näitame, et valemiga (2) antud interpolatsioonipolünoom on ainus ülimalt n -astme polünoom, mis rahuldab tingimusi (1). Oletame vastuväiteliselt, et leidub veel teine n -astme polünoom $Q_n(x) \neq P_n(x)$, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi, s.t.

$$Q_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Siis vahe

$$P_n(x) - Q_n(x)$$

on ülimalt n -astme polünoom, mis rahuldab tingimusi

$$P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

s.t. temal on $n + 1$ erinevat nullkohta, mis on vastuolus algebra põhiteoreemiga (nullist erineval n -astme polünoomil on ülimalt n nullkohta).

Seega on interpolatsioonipolünoom tingimustega (1) üheselt määratud. Hiljem esitame ta küll ka teistes kujudes, kuid nad kujutavad endast ikka sama interpolatsioonipolünoomi.

N ä i d e 1. Leida Lagrange'i interpolatsioonipolünoom järgmiste andmete järgi:

x	-1	0	1	3	5
$f(x)$	4	-5	-6	-32	70

Antud näite korral $n = 4$ ja valemi (2) abil leiame:

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 4 \frac{x(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-6)} - 5 \frac{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}{1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-5)} - \\
 &- 6 \frac{(x+1)x(x-3)(x-5)}{2 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-4)} - 32 \frac{(x+1)x(x-1)(x-5)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-2)} + 70 \frac{(x+1)x(x-1)(x-3)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2} = \\
 &= x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5.
 \end{aligned}$$

Tihti antakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomile (2) mõnevõrra lühem kuju, tuues sisse tähistuse

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Siis

$$\omega'_{n+1}(x_1) = (x_1-x_0)(x_1-x_1)\dots(x_1-x_{1-1})(x_1-x_{1+1})\dots(x_1-x_n)$$

ning valem (2) omandab kuju

$$(3) \quad P_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Funktsiooni väärtuse arvutamiseks selle valemiga kohal $x \neq x_i$

võib soovitada arvutusskeemi, mis on toodud tabelis 1.

T a b e l 1 .

x_i	$x_i - x_j, \quad i \neq j$					D_i	$f(x_i)$	$\frac{f(x_i)}{D_i}$
x_0	<u>$x - x_0$</u>	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	...	$x_0 - x_n$	D_0	$f(x_0)$	$f(x_0):D_0$
x_1	$x_1 - x_0$	<u>$x - x_1$</u>	$x_1 - x_2$	...	$x_1 - x_n$	D_1	$f(x_1)$	$f(x_1):D_1$
x_2	$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	<u>$x - x_2$</u>	...	$x_2 - x_n$	D_2	$f(x_2)$	$f(x_2):D_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_n	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	...	<u>$x - x_n$</u>	D_n	$f(x_n)$	$f(x_n):D_n$
$\omega_{n+1}(x)$						$\sum$		

Kirjutuste lihtsustamiseks on seal kasutatud sümbolit

$$D_i = (x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)$$

ja

$$\sum = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{D_i}.$$

Märgime, et D_i on samas reas olevate vahede korrutis.

N ä i d e 2 . Leida näites 1 toodud andmete järgi $f(2)$.

Arvutused on tabelis 2. Antud juhul $x = 2$.

Valemi (3) järgi

$$f(2) \approx P_4(2) = 18.(-0,944\ 444) = -17,0000.$$

T a b e l 2 .

x_1	$x_1 - x_j, \quad i \neq j$					D_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_1)}{D_1}$
-1	<u>3</u>	-1	-2	-4	-6	144	4	$\frac{1}{36} = 0,027\ 778$
0	1	<u>2</u>	-1	-3	-5	-30	-5	$\frac{1}{6} = 0,166\ 667$
1	2	1	<u>1</u>	-2	-4	16	-6	$-\frac{3}{8} = -0,375\ 000$
3	4	3	2	<u>-1</u>	-2	48	-32	$-\frac{2}{3} = -0,666\ 667$
5	6	5	4	2	<u>-3</u>	-720	70	$-\frac{7}{72} = -0,097\ 222$
$\omega_5(x) = 18$						$\Sigma = -\frac{17}{18} = -0,944\ 444$		

M ä r k u s : Seda arvutusskeemi on otstarbekohane kasutada ainult siis, kui pole tarvis leida interpolatsioonipolünoomi. Antud juhul oleks võinud arvutada $f(2)$ vahetult näites 1 leitud interpolatsioonipolünoomist.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi kasutamine lihtsustub mõnevõrra juhul, kui interpolatsioonisõlmed asetsevad võrdsete vahemike järel, s.t.

$$x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Suurust h nimetatakse tabelisammuks. Tähistades

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

saame

$$x = x_0 + th$$

ning interpolatsioonisõlmed avalduvad kujul

$$x_1 = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Asendades need valemissse (3) saame peale lihtsaid teisendusi (läbi teha!)

$$(4) \quad P_n(x) = P_n(x_0 + th) = \frac{\omega_{n+1}(t)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-1} \binom{n}{1}}{t-1} f(x_1),$$

kus

$$\omega_{n+1}(t) = t(t-1) \dots (t-n).$$

Valemis (4) sõltuvad konkreetse n korral $f(x_1)$ kordajad $(-1)^{n-1} \frac{\binom{n}{1} \omega_{n+1}(t)}{n!(t-1)}$ ainult muutujast t ja neid on võimalik esitada tabelina. Vastavaid kordajate tebeleid on antud raamatus [15], lk. 270-272 ning nende kasutamine on lihtne (funktsiooni väärtused tuleb korrutada vastavate kordajatega ja summeerida).

Tabelite puudumisel võib kasutada arvutuskeemi, mis on toodud tabelis 3.

T a b e l 3 .

1	x_1	$t-1$	$f(x_1)$	$(-1)^{n-1} \binom{n}{1}$	$\frac{(-1)^{n-1} \binom{n}{1}}{t-1} f(x_1)$
0	x_0	t	$f(x_0)$	$(-1)^n$	$(-1)^n f(x_0) : t$
1	x_1	$t-1$	$f(x_1)$	$(-1)^{n-1} n$	$(-1)^{n-1} n f(x_1) : (t-1)$
2	x_2	$t-2$	$f(x_2)$	$(-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2}$	$(-1)^{n-2} \binom{n}{2} f(x_2) : (t-2)$
...	...	...	...		
n	x_n	$t-n$	$f(x_n)$	1	$f(x_n) : (t-n)$
$\omega_{n+1}(t)$				Σ	

N ä i d e 3 . Funktsioon $f(x) = \sin x$ on antud alljärgneva tabeliga. Leida $\sin 21^{\circ}15'$.

x	10°	20°	30°	40°	50°
$\sin x$	0,1736	0,3420	0,5000	0,6428	0,7660

Antud juhul $x_0 = 10^{\circ} = \frac{\pi}{18}$,

$h = 10^{\circ} = \frac{\pi}{18}$, $x = 21^{\circ}15' = \frac{2,125}{18}\pi$,

ja

$$t = \frac{x - x_0}{h} = 1,125.$$

Arvutused on tabelis 4.

Valemi (4) kohaselt

$$\sin 21^{\circ}15' \approx P_4(21^{\circ}15') = \frac{1}{4!} (-0,66330)(-13,113) = 0,3624.$$

T a b e l 4 .

i	x_i	$t - i$	$\sin x_i$	$(-1)^{4-i} \binom{4}{i}$	$\frac{(-1)^{4-i} \binom{4}{i}}{t - i} f(x_i)$
0	10°	1,125	0,1736	1	0,1543
1	20°	0,125	0,3420	-4	- 10,9440
2	30°	-0,875	0,5000	6	- 3,4286
3	40°	-1,875	0,6428	-4	1,3713
4	50°	-2,875	0,7660	1	- 0,2664
$\omega_5(t) = -0,66330$				$\Sigma = - 13,113$	

Nagu näidete järgi võime veenduda, nõuab Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi kasutamine küllaltki palju arvutus-

tööd. Kuigi interpolatsioonipolünoomi väljakirjutamine valemite (2), (3) või (4) järgi on lihtne, on saadud polünoomi lihtsustamine tülikas. Ebameeldiv on ka asjaolu, kui mingi n -astme polünoomi korral leitud funktsiooni $f(x)$ lähendväärtus $P_n(x)$ ei rahulda nõutud täpsust, siis tuleb täpsema lähendi $P_{n+1}(x)$ leidmiseks peaaegu kogu arvutustöö uuesti teha.

Praktikas mõnevõrra sobivama eeskirja funktsiooni $f(x)$ lähendava interpolatsioonipolünoomi väärtuse arvutamiseks annab nn. Aitkeni interpolatsiooniskeem.

2. Aitkeni interpolatsiooniskeem. Tuletame kõigepealt seose, mille abil n -astme interpolatsioonipolünoomi saab avaldada kahe $(n-1)$ -astme interpolatsioonipolünoomi kaudu.

Tähistame sümboliga

$$P_{i_0, i_1, \dots, i_k}(x)$$

k -astme interpolatsioonipolünoomi, mis on moodustatud funktsioonile $f(x)$ sõlmede $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ järgi. Valemi (3) järgi

$$P_{0,1,\dots,n}(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

ja

$$P_{0,1,\dots,p-1,p+1,\dots,n}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_p} \sum_{i=0}^n \frac{(x_i-x_p)f(x_i)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)},$$

$$P_{0,1,\dots,q-1,q+1,\dots,n}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_q} \sum_{i=0}^n \frac{(x_i-x_q)f(x_i)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Siit

$$\begin{aligned}
 & (x - x_p)^{P_{0,1,\dots,p-1,p+1,\dots,n}(x)} - \\
 & - (x - x_q)^{P_{0,1,\dots,q-1,q+1,\dots,n}(x)} = \\
 & = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=1}^n \frac{(x_1 - x_p - x_1 + x_q) f(x_1)}{(x - x_1) \omega'_{n+1}(x_1)} = (x_q - x_p)^{P_{0,1,\dots,n}(x)}.
 \end{aligned}$$

Seega, kui $p \neq q$, saame

$$(5) \quad P_{0,1,\dots,n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1,\dots,p-1,p+1,\dots,n}(x) & x - x_q \\ P_{0,1,\dots,q-1,q+1,\dots,n}(x) & x - x_p \end{vmatrix}}{x_q - x_p}$$

Tuginedes valemile (5) saame sõltuvalt p ja q valikust moodustada mitmesuguseid arvutusskeeme interpolatsioonipolünoomi väärtuse arvutamiseks. Esitame alljärgnevalt arvutusskeemi, mis on tuntud Aitkeni skeemi nime all.

Moodustame lineaarsed interpolatsioonipolünoomid valemi

(5) abil. Arvestades, et $P_1(x) = f(x_1)$, saame

$$P_{0,1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_1) & x - x_1 \end{vmatrix}}{x_0 - x_1}, \quad P_{0,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_2) & x - x_2 \end{vmatrix}}{x_0 - x_2},$$

$$P_{0,3}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_3) & x - x_3 \end{vmatrix}}{x_0 - x_3} \text{ jne.}$$

Nende abil moodustame ruutinterpolatsioonipolünoomid

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x - x_1 \\ P_{0,2}(x) & x - x_2 \end{vmatrix}}{x_1 - x_2}, \quad P_{0,1,3}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x - x_1 \\ P_{0,3}(x) & x - x_3 \end{vmatrix}}{x_1 - x_3} \text{ jne.}$$

Sama eeskirja kohaselt moodustame ka kõrgema astme interpolatsioonipolünoomid.

Arvutamiseks võib kasutada arvutuseskeemi, mis on toodud tabelis 5.

Skeemi koostamine on lihtne ja šabloonne (teist järku determinantide arvutamine).

T a b e l 5 .

x_1	$f(x_1)$	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,1}(x)$	$P_{0,1,2,1}(x)$	...	$x - x_1$
x_0	$f(x_0)$					$x - x_0$
x_1	$f(x_1)$	$P_{0,1}(x)$				$x - x_1$
x_2	$f(x_2)$	$P_{0,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$			$x - x_2$
x_3	$f(x_3)$	$P_{0,3}(x)$	$P_{0,1,3}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$		$x - x_3$
x_4	$f(x_4)$	$P_{0,4}(x)$	$P_{0,1,4}(x)$	$P_{0,1,2,4}(x)$		$x - x_4$
...	...	...	...	...	...	...

Funktsiooni $f(x)$ väärtuse arvutamisel ulatusliku tabeli korral kohal x kerkib probleem, kuidas valida interpolatsioonisõlmed ja kui kaugele minna arvutustes.

Paneme tähele, et $P_{0,i}(x)$ on sõlmede x_0 ja x_i järgi moodustatud lineaarse interpolatsiooni väärtused punktis x , $P_{0,1,i}(x)$ on aga sõlmede x_0 , x_1 ja x_i järgi saadud ruutinterpolatsiooni väärtused kohal x jne. Seega kogu tabel koosneb $f(x)$ lähisväärtustest. Juhul, kui interpolatsiooniprotsess koondub, hakkavad need väärtused kõrgemate interpolatsioonijärkude korral järjest suurema täpsusega ühtima. Arvutusi teostamegi seni, kui viimases veerus $f(x)$ lähisväärtused soovitud täpsusega ühtivad. Seejuures on soo-

vitav paranduseks arvutada veel üks kõrgema astmega interpolatsioonipolünoomi väärtus.

Sõlmede valiku kohta võib märkida, et seda kiiremini saavutame soovitud täpsuse, mida lähemal asetsevad valitud sõlmed punktile x (põhjendus järgmises punktis). Seetõttu on soovitav valida sõlmeks x_0 punktile x lähim sõlm, sõlmeks x_1 ülejäänud sõlmede hulgast lähim jne.

Tuleb veel märkida, et ainult paberi ja pliiatsi abil on arvutamine Aitkeni skeemi järgi küllaltki ebamugav, sest tuleb palju korrutada. Sellisel juhul on otstarbekohasem kasutada järgmises paragrahvis vaadeldavat Newtoni interpolatsioonivalemit. Kui on aga kasutada abivahend korrutamise teostamiseks (näit. aritmomeeter), siis on Aitkeni skeem üsna sobiv.

N ä i d e 4 . Antud on järgnev gammafunktsiooni $\Gamma(x)$ tabel. Arvutada $\Gamma(1,16)$ 4 õige tüvikohaga Aitkeni skeemi abil.

x	1,00	1,10	1,25	1,35	1,40	1,50
$\Gamma(x)$	1,00000	0,95135	0,90640	0,89115	0,88726	0,88623

Arvestused on koondatud tabelisse 6. Seal ühtivad 4 tüvikohaga kuupinterpolatsiooni tulemused. Seega $\Gamma(1,16)$ peaks võrduma 0,9297. Leides veel neljanda astme interpolatsioonipolünoomi väärtuse, näeme, et $\Gamma(1,16) = 0,9298$.

Kontrollides saadud tulemust gammafunktsioonide tabelist, selgub, et õige ongi

$$\Gamma(1,16) = 0,9298.$$

T a b e l 6 .

x_1	$\Gamma(x_1)$	$P_{0,i}(x)$	$P_{0,1,i}(x)$	$P_{0,1,2,1}(x)$	$P_{0,1,2,3,1}(x)$	$x - x_1$
1,10	0,95135					0,06
1,25	0,90640	0,93337				-0,09
1,00	1,00000	0,92216	0,92933			0,16
1,35	0,89115	0,93690	0,93019	0,92973		-0,19
1,40	0,88726	0,93853	0,93027	0,92971	0,92979	-0,24
1,50	0,88623					-0,34

M ä r k u s . Soovitav on arvutada ridade järgi, sest alati pole nõutava täpsuse saavutamiseks kõiki tabelis antud sõlmi tarvis (antud juhul $x_5=1,50$).

3. Interpolatsioonivalemi jääkliige. Interpolatsiooni-tingimuste (1) kohaselt ühtivad antud funktsiooni $f(x)$ ja interpolatsioonipolünoomi $P_n(x)$ väärtused interpolatsioonisõlmedes x_1 ($i = 0, 1, \dots, n$). Tekib küsimus, kui hästi lähendab saadud interpolatsioonipolünoom antud funktsiooni teistes punktides, s.t. kui suur on vahe $f(x) - P_n(x)$.

Tähistades

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

saame funktsiooni $f(x)$ jaoks

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Viimast seost nimetatakse interpolatsioonivalemiks ja liiget $R_n(x)$ - interpolatsioonivalemi jääkliikmeks.

Selleks et hinnata jääkliikme suurust, seame funktsioonile $f(x)$ kitsendavad tingimused. Asugu interpolatsioonisõlmed $x_0, x_1, \dots, x_n$ ja meid huvitav argumendi väärtus x lõigul $[a, b]$. Oletame, et funktsioonil $f(x)$ eksisteerivad lõigul $[a, b]$ pidevad tuletised kuni järguni $n + 1$.

Fikseerime punkti x , milles tahame hinnata jääkliikme $R_n(x)$ väärtust. Seejuures oletame, et x erineb kõigist sõlmedest x_1 . Jääkliikmele sobiva avaldise tuletamiseks moodustame abifunktsiooni

$$F(z) = f(z) - P_n(z) - K\omega_{n+1}(z),$$

kus K on mingi konstant ja

$$\omega_{n+1}(z) = (z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_n).$$

Ilmselt $F(x_1) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Kordaja K määrame nii, et ka $F(x) = 0$, s.t.

$$K = \frac{R_n(x)}{\omega_{n+1}(x)},$$

siis funktsioonil $F(z)$ on lõigul $[a, b]$ $n + 2$ erinevat nullkohta.

Matemaatilise analüüsi kursusest tuntud Rolle'i teoreemi põhjal saame väita, et funktsioonil $F'(z)$ on vahemikus (a, b) vähemalt $n + 1$ nullkohta, funktsioonil $F''(z)$ - vähemalt n nullkohta jne. Korduvalt Rolle'i teoreemi kasutades jõuame tulemuseni, et funktsioonil $F^{(n+1)}(z)$ peab vahemikus (a, b) olema vähemalt üks nullkoht, mille tähistame sümboliga ξ (veenduda, et Rolle'i teoreemi eeldused on rahuldatud!).

Funktsiooni $F(z)$ diferentseerides saame

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)!.$$

Konstandi K avaldist arvestades jõuame seoseni

$$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{R_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} (n+1)! = 0,$$

millest

$$(6) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

kus $a < \xi < b$.

Kerge on vahetult kontrollida, et saadud jääkliikme avaldis jääb kehtima ka siis, kui x võrdub mingi sõlmega x_1 . Seega valem (6) on kasutatav mis tahes $x \in [a, b]$ korral.

Suurus ξ valemis (6) sõltub argumendi väärtusest x .

Seos nende vahel aga pole teada. Seega ka $f^{(n+1)}(\xi)$ täpne väärtus ei ole üldiselt teada. Sellest hoolimata saab valemist (6) kasutada interpolatsioonitäpsuse hindamiseks. Tähistades

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|,$$

saame valemist (6) veahinnangu

$$(7) \quad |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Viimase rakendamiseks toome mõned näited.

N ä i d e 5. Millise täpsusega saab leida $\sin 10^\circ$ Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi abil, teades $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$ ja $\sin 90^\circ$?

Antud näite puhul $f(x) = \sin x$, $n = 4$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $f^{(v)}(x) = \cos x$ ja $M_5 = 1$.

Hinnangu (7) kohaselt

$$\begin{aligned} |R_4(10^\circ)| &\leq \frac{1}{5!} \cdot \left| \left(\frac{\pi}{18} - 0 \right) \left(\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{2} \right) \right| = \\ &= \frac{7\pi^5}{3 \cdot 18^5} < 3,8 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

(Vea väärtus tuleb alati ümardada ülespoole!) Seega on viga neljandas kümnendkohas mitte üle 4 ühiku.

N ä i d e 6. Olgu tabelis esitatud ruutjuured arvudest 10,0; 10,1; 10,2; ...; 99,9; 100,0. Leiame lineaarse interpolatsiooni kasutamisel tekkiva maksimaalse vea.

Valemi (7) põhjal

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|,$$

kus $x_0 < x < x_1$. Et

$$|(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{4} = \frac{0,01}{4}$$

ja

$$M_2 = \max_{10 \leq x \leq 100} |(\sqrt{x})''| = \max_{10 \leq x \leq 100} \left| -\frac{1}{4x \cdot \sqrt{x}} \right| = \frac{1}{40 \cdot \sqrt{10}} ,$$

siis

$$|R_1(x)| \leq \frac{0,01}{320 \cdot \sqrt{10}} < 0,00001 .$$

Seega viiekohaliste ruutjuurte tabelite puhul lineaarsest interpolatsioonist tingitud viga ei ületa $\frac{1}{10}$ viimase koha ühikut ning kuuekohaliste tabelite puhul võib ulatuda kuni ühe viimase koha ühikuni. Märgime, et tegelikult arvutustes ruutjuure väärtuste viga on mõnevõrra suurem, sest lineaarse interpolatsiooni veale lisanduvad veel tabeli andmete ebatäpsused.

Muidugi vähegi keerukama funktsiooni $f(x)$ korral pole enam praktiliselt võimalik leida $f^{(n+1)}(x)$ tõket, kuid tuletatud jääkliikme avaldis etendab küllaltki olulist osa paljude teoreetiliste probleemide lahendamisel. Tema põhjal saame iseloomustada näiteks jääkliikme vähenemist tabelisammu vähendamisel. Ka mitmed tõenäolised veahinnangud, mille ni jõudmisel oletatakse, et $f^{(n+1)}(x)$ on lõigul $[a, b]$ peaaegu konstantne, saadakse jääkliikme avaldisest (neil hinnangutel peatutakse järgmistes paragrahvides).

Ka küsimusele, kuidas valida interpolatsioonisõlmi ulatuslikust tabelist, saame vastuse uurides jääkliikme avaldist. Tuletise $f^{(n+1)}(\xi)$ sõltuvust sõlmedest pole praktiliselt

võimalik hästi kasutada. Seetõttu lähjutakse interpolatsioonisõlmede valikul enamasti nõudest, et

$$|\omega_{n+1}(x)| = |(x - x_0)| \cdot |(x - x_1)| \cdot \dots \cdot |(x - x_n)|$$

oleks võimalikult väiksem. Siit nähtub, et fikseeritud x korral tuleb valida sõlmed x_i nii, et vahed

$$|x - x_i| \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

oleksid võimalikult väikesed. Seega saimegi eelmises punktis antud juhise sõlmede valiku kohta.

Mõnevõrra teistsugune sõlmede valiku probleem kerkib siis, kui tahame leida funktsioonile $f(x)$ võimalikult head lähendpolünoomi $P_n(x)$ kogu lõigu $[a, b]$ jaoks. Siis tuleb sõlmed võimaluse korral valida nii, et

$\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$ oleks minimaalne. Lähemalt peatutakse sellel küsimusel arvutusmeetodite edaspidises kursuses ([6], II ptk., § 1, punkt 5).

§ 2. NEWTONI INTERPOLATSIOONIVALEMID.

1. Diferentsjagatised. Olgu antud punktides $x_0, x_1, x_2, \dots$, funktsiooni $f(x)$ väärtused $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$.

Moodustatud suhet

$$f(x_p, x_q) = \frac{f(x_p) - f(x_q)}{x_p - x_q}$$

nimetatakse esimest järku diferentsjagatiseks. Esimest järku diferentsjagatiste abil moodustame teist järku diferents-

jagatise:

$$f(x_p, x_q, x_r) = \frac{f(x_p, x_q) - f(x_q, x_r)}{x_p - x_r}$$

jne.

Üldiselt k-järku diferentsjagatiseks nimetatakse avaldist, mis on moodustatud (k - 1)-järku diferentsjagatistest järgmiselt:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_k) - f(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_k)}{x_q - x_p}$$

Diferentsjagatiste arvutamiseks saab induktiivselt tulutada ka teise valemi:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_k)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_k)} + \dots + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

(vt. näit. [1], lk. 104).

Viimasest seosest järeldub, et diferentsjagatised on oma argumentide sümmeetrilised funktsioonid, s.t. diferentsjagatise väärtus ei sõltu argumentide järjekorrast.

2. Newtoni interpolatsioonivalem. Olgu antud n+1 erinevat interpolatsioonisõlme $x_0, x_1, \dots, x_n$ ning funktsiooni $f(x)$ väärtused nendes sõlmades: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Kasutades diferentsjagatise mõistet anname interpolatsioonivalemile teise kuju.

Oletades, et x on erinev kõigist sõlmedest x_1 , kirjutame välja diferentsjagatised:

$$f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f(x, x_0, x_1) = \frac{f(x, x_0) - f(x_0, x_1)}{x - x_1},$$

.....

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f(x, x_0, \dots, x_{n-1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_n)}{x - x_n}.$$

Teisendades need seosed kujule

$$f(x) = f(x_0) + f(x, x_0)(x - x_0),$$

$$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + f(x, x_0, x_1)(x - x_1),$$

.....

$$f(x, x_0, \dots, x_{n-1}) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) + f(x, x_0, \dots, x_n)(x - x_n)$$

ning järk-järgult asendades, jõuame valemini

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ (8) \quad &+ \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\ &+ f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \end{aligned}$$

mida nimetatakse Newtoni interpolatsioonivalemiks.

Tähistades nn. Newtoni interpolatsioonipolünoomi

$$\begin{aligned} (9) \quad P_n(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ja jääkliikme

$$(10) \quad R_n(x) = f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) \omega_{n+1}(x),$$

kus

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n),$$

saame valemile (8) anda kuju

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Vahetult saab kontrollida, et $P_n(x)$ on n -astme polünoom, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi (veenduda selles !):

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Arvestades asjaolu, et interpolatsioonipolünoom on üheselt määratud, peab äsja defineeritud polünoom $P_n(x)$ olema identne valemiga (2) määratud Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiga.

Newtoni interpolatsioonipolünoomi (9) väljakirjutamiseks on vaja arvutada diferentsjagatise. Nende leidmiseks võib soovitada arvutusskeemi, mis on toodud tabelis 7.

M ä r k u s : Newtoni interpolatsioonivalemis on kõik sõlmed $x_0, x_1, \dots, x_n$ samaväärsed. Valem jääb kehtima, kui muudame sõlmede tähistust. See võimaldab interpolatsioonipolünoomi väljakirjutamisel kasutada ka teisi tabelis esitatud diferentsjagatise. Näiteks võime interpolatsioonipolünoomi kirjutada kujul:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_2) + f(x_2, x_3)(x-x_2) + f(x_1, x_2, x_3)(x-x_2)(x-x_3) + \\ & + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \dots + \\ & + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Illustreerimiseks vaatam. näidet 7, lk. 26.

T a b e l 7 .

$x_n - x_0$	...	$x_{1+2} - x_1$	$x_{1+1} - x_1$	x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_{1+1})$	$f(x_1, x_{1+1}, x_{1+2})$	...	$f(x_0, x_1, \dots, x_n)$
			$x_1 - x_0$	x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$			
		$x_2 - x_0$		x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$		
	...		$x_2 - x_1$			$f(x_1, x_2)$		...	
		$x_3 - x_1$		x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$		
$x_n - x_0$	...		$x_3 - x_2$			$f(x_2, x_3)$		...	$f(x_0, x_1, \dots, x_n)$
		...		x_3	$f(x_3)$		...		
	...		...			...		...	
		$x_n - x_{n-2}$		...	...		$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		
			$x_n - x_{n-1}$			$f(x_{n-1}, x_n)$			
				x_n	$f(x_n)$				

N ä i d e 7 . Leida Newtoni interpolatsioonipolünoom näites 1 antud andmete järgi!

Diferentsjagatised on arvatatud tabelis 8.

Valemist (9) saame

$$P_4(x) = 4 - 9(x+1) + 4(x+1)x - 2(x+1)x(x-1) + \\ + 1(x+1)x(x-1)(x-3) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5.$$

Tulemus ühtib näites 1 saadud polünoomiga.

Võime polünoomi välja kirjutada ka lähtudes mingist teisest sõlmede järjestusest. Näiteks järjestades nad 0, 1, 3, 5, -1, saame

$$P_4(x) = -5 - 1x - 4x(x-1) + 4x(x-1)(x-3) + \\ + 1x(x-1)(x-3)(x-5) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5$$

ehk, järjestades 1, 0, 3, -1, 5, saame

$$P_4(x) = -6 - 1(x-1) - 4(x-1)x - 2(x-1)x(x-3) + \\ + 1(x-1)x(x-3)(x+1) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5.$$

Nagu näha, tulemused ühtivad.

Newtoni interpolatsioonipolünoomi on arvutustes sageli lihtsam kasutada kui Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi. Eriti on Newtoni interpolatsioonivalemi korral lihtne suu-
rendada sõlmede arvu (liidame eelmisele lähendväärtusele parandusliikmed).

Newtoni interpolatsioonivalemi jääkliige (10) peab loomulikult olema identne Lagrange'i interpolatsioonivalemi jääkliikmega. Me nägime § 1 punktis 3, et interpolatsioonivalemi jääkliikmele saab anda kuju (6), kui eeldada, et funktsioon $f(x)$ on punkti x ja sõlmi $x_0, x_1, \dots, x_n$

T a b e l 8 .

$x_4 - x_0$	$x_{1+3} - x_1$	$x_{1+2} - x_1$	$x_{1+1} - x_1$	x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_{1+1})$	$f(x_1, \dots, x_{1+2})$	$f(x_1, \dots, x_{1+3})$	$f(x_0, \dots, x_4)$
6	4 5	2 3 4	1	-1	<u>4</u>	-9			
				0	<u>-5</u>		<u>4</u>		
			1			<u>-1</u>		<u>-2</u>	
				1	-6		<u>-4</u>		<u>1</u>
			2			-13		<u>4</u>	
				3	-32		16		
		4	2			51			
				5	70				

sisaldaval lõigul $n + 1$ korda pidevalt diferentseeritav. Seda eeldades peavad ühtima valemitega (6) ja (10) antud jääkliikmete avaldised, millest järeldub, et

$$f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

kus ξ asetseb punkti x ja sõlmede $x_0, x_1, \dots, x_n$ vahel. Muutes veidi tähistust saame n -järku diferentsjagatise jaoks valemi

$$(11) \quad f(x_1, x_{1+1}, \dots, x_{1+n}) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

kus ξ asub punktide $x_1, x_{1+1}, \dots, x_{1+n}$ vahel.

Newtoni interpolatsioonivalemi üheks oluliseks eeliseks võrreldes Lagrange'i interpolatsioonivalemiga on asjaolu, et tema korral on märksa lihtsam praktiliselt hinnata interpolatsiooniviga. Nimelt kui oletada, et meid huvitavas piirkonnas $(n + 1)$ -järku diferentsjagatised muutuvad vähe (nad on konstantsed kõigi $(n + 1)$ -astme polünoomide korral), siis

$$f(x, x_0, \dots, x_n) \approx f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$$

ning valemist (10) saame praktilise veahinnangu

$$(12) \quad R_n(x) \approx f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \omega_{n+1}(x).$$

Viimase seose võime sõnastada:

Kui $(n + 1)$ -järku diferentsjagatised vaadeldavas piirkonnas ei muutu eriti palju, siis interpolatsiooniviga on ligikaudu võrdne esimese ärajäetud liikmega interpolatsioonivalemist (8). Kui aga $(n + 1)$ -järku diferentsjagatise oluliselt muutub, siis võime valemist (10) saada hinnangu jääkliikme jaoks, kui asendada $f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ $(n + 1)$ -

järku diferentsjagatise maksimaalse väärtusega vaadeldavas piirkonnas.

Diferentsjagatise leidmist ja Newtoni valemi rakendamist vaatleme alljärgnevas näites.

N ä i d e 8 . Antud on sin x väärtuste tabel

x	$\sin x$
0,00	0,00000
0,10	0,09983
0,19	0,18886
0,27	0,26673
0,34	0,33349
0,40	0,38942
0,45	0,43497
0,50	0,47943

Arvutada diferentsjagatiseid ja leida $\sin 0,20$

Diferentsjagatiste skeem on koostatud tabelis 9. Seda uurides näeme, et kolmandat järku diferentsjagatiseid on peaaegu võrdsed. Neljandat järku diferentsjagatiseid aga tulevad enamikus nullid (nullideks nad ei oleks saanud, kui funktsiooni tabel oleks võimaldanud arvutada rohkem kohti) ja seega pole põhjust neid lugeda usaldusväärseteks.

Teostades ruutinterpolatsiooni vaadeldavas piirkonnas, võime viga hinnata valemiga (12). Näiteks arvutame $\sin 0,20$ ruutinterpolatsiooni abil ja hindame tema viga.

Newtoni interpolatsioonipolünoomist (9) saame:

$$\begin{aligned}
 P_2(0,20) &= 0,18886 + 0,9734(0,20 - 0,19) - \\
 &- 0,093(0,20 - 0,19)(0,20 - 0,27) = \\
 &= 0,18886 + 0,009734 + 0,000065 = 0,19866
 \end{aligned}$$

T a b e l 9 .

$x_{i+3}-x_i$	$x_{i+2}-x_i$	$x_{i+1}-x_i$	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$(f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}))$	$f(x_i, \dots, x_{i+3})$
			0,00	0,00000			
		0,10			0,9983		
	0,19		0,10	0,09983		-0,048	
0,27		0,09			0,9892		-0,17
	0,17		0,19	0,18886		-0,093	
0,24		0,08			0,9734		-0,16
	0,15		0,27	0,26673		-0,131	
0,21		0,07			0,9537		-0,16
	0,13		0,34	0,33349		-0,165	
0,18		0,06			0,9322		-0,16
	0,11		0,40	0,38942		-0,193	
0,16		0,05			0,9110		-0,16
	0,10		0,45	0,43497		-0,218	
		0,05			0,8892		
			0,50	0,47943			

ja ligikaudne viga

$$R_2(0,20) = 0,16(0,20 - 0,19)(0,20 - 0,27)(0,20 - 0,10) < 1,2 \cdot 10^{-5}.$$

Kuupinterpolatsiooni teostamiseks võime liita saadud tulemusele tema vea (võetud üks lisakoht).

$$P_3(0,20) = 0,198659 + 0,000011 = 0,19867.$$

Valemist (10) saame aga leida kuupinterpolatsiooni vea

$$\begin{aligned} R_3(0,20) &= \\ &= f(x, x_0, x_1, x_2, x_3)(0,20-0,19)(0,20-0,27)(0,20-0,10)(0,20-0,34) = \\ &= 0,98 \cdot 10^{-5} f(x, x_0, x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Kuna neljandat järku diferentsjagatised on tunduvalt väiksemad ühest, s.t.

$$f(x, x_0, x_1, x_2, x_3) \ll 1,$$

siis kuupinterpolatsiooni viga ei saa ületada antud tabeli viga. Seega

$$\sin 0,20 = 0,19867.$$

3. Interpoleerimine kordsete sõlmedega. Vaatleme interpolatsioonivalemi konstrueerimist, kui interpolatsioonisõlmedes $x_0, x_1, \dots, x_n$ on antud peale funktsiooni väärtuste ka tema tuletiste väärtusi, s.t. üldistame interpolatsioonivalemi kordsete sõlmede juhule.

Interpolatsiooningimusteks seame nüüd nõude, et interpolatsioonipolünoomi $P_m(x)$ ja antud funktsiooni $f(x)$ ning nende teatava arvu tuletiste väärtused ühtiksid interpolatsioonisõlmedes. Muidugi eeldame, et kõik nõutavad tuletised

eksisteerivad ja on pidevad lõigul $[a, b]$, kuhu kuuluvad sõlmed x_i . Sümbolites võime väljendada interpolatsiooni-tingimusi järgmiselt:

$$(13) \quad P_m^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i),$$

kus $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$ ja $\sum_{i=0}^n \alpha_i = m + 1$

(α_i tähendab sõlme x_i kordsust ning nulljärku tuletise väärtus - funktsiooni väärtust).

Peatume lähemalt Newtoni interpolatsioonivalemi (8) üldistusel. Viimases ei ole võimalik võtta otseselt sõlmi kordseteks, sest diferentsjagatiste moodustamisel esineb jagamine 0-ga. Sellest ülesaamiseks kasutame piirprotsessi.

Tingimusi (13) rahuldava interpolatsioonipolünoomi saamiseks vaatleme lõigul $[a, b]$ kõrvuti sõlmedega $x_0, x_1, \dots, x_n$ ka sõlmi $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}$, mis on valitud nii, et kõik $m + 1$ sõlme: $x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, x_n, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}$ oleksid erinevad. Nende sõlmede korral omandab valem (8) kuju:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f(x_0, x_0^{(1)})(x-x_0) + f(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})(x-x_0)(x-x_0^{(1)}) + \\ & + \dots + f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)})(x-x_0)(x-x_0^{(1)}) \dots (x-x_0^{(\alpha_0-2)}) + \\ & + f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1)(x-x_0)(x-x_0^{(1)}) \dots (x-x_0^{(\alpha_0-1)}) + \\ & + f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1, x_1^{(1)})(x-x_0) \dots (x-x_0^{(\alpha_0-1)})(x-x_1) + \end{aligned}$$

$$+ \dots + f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)})(x-x_0) \dots (x-x_n^{(\alpha_n-2)}) + \\ + f(x, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)})(x-x_0) \dots (x-x_n^{(\alpha_n-1)}) .$$

Et saadud avaldises teostada piirprotsess $x_1^{(j)} \rightarrow x_1$,
toome sisse kordsete sõlmedega k-järku diferentsjagatise
($k = k_0 + k_1 + \dots + k_n - 1$) sümboli

$$f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{k_0 \text{ korda}}, \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k_1 \text{ korda}}, \dots, \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{k_n \text{ korda}}) = \\ = \lim_{x_1^{(j)} \rightarrow x_1} f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k_0-1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(k_1-1)}, \dots, x_n, \\ x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(k_n-1)}).$$

Uurime neid lähemalt. Vaatleme esmalt diferentsjagatist,
mis sisaldavad ainult üht sõlme. Näiteks esimest järku dife-
rentsjagatis

$$f(x_0, x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_0, x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0).$$

Üldiselt saame valemi (11) abil:

$$f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{k+1 \text{ korda}}) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

sest ξ asub sõlmede $x_0, x_1, \dots, x_n$ vahel. Seega k-järku
diferentsjagatis, mis sisaldab ainult üht sõlme, on k-järku

tuletis selles sõlmes jagatud suurusega $k!$.

Vaatleme nüüd kordsete sõlmedega diferentsjagatist, mis sisaldavad peale ühe sõlme ka teisi sõlmi. Kergesti võib veenduda, et nende diferentsjagatiste arvutamise eeskiri ühtib ühekordsete sõlmedega diferentsjagatiste arvutamise eeskirjaga. Näiteks,

$$f(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k \text{ korda}}, x_j) = \frac{f(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k \text{ korda}}) - f(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1, x_j}_{k-1 \text{ korda}})}{x_1 - x_j}$$

ja

$$f(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1 \text{ korda}}, \dots, \underbrace{x_j, \dots, x_j}_{k_j \text{ korda}}) =$$

$$= \frac{f(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_j-1}) - f(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1-1}, \dots, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_j})}{x_1 - x_j}.$$

Seega kõik kordsete sõlmedega k -järku diferentsjagatist, mis sisaldavad vähemalt kaht erinevat sõlme, on arvutatavad kordsete sõlmedega $(k-1)$ -järku diferentsjagatiste kaudu.

Pöördume nüüd tagasi eespool Newtoni interpolatsioonivalemist (8) väljakirjutatud tulemuse juurde. Teostades seal piirprotsessi $x_1^{(j)} \rightarrow x_1$, saame

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_0)(x - x_0) + f(x_0, x_0, x_0)(x - x_0)^2 +$$

$$+ \dots + f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{\alpha_0 \text{ korda}})(x - x_0)^{\alpha_0-1} + f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0, x_1}_{\alpha_0 \text{ korda}})$$

$$(14) \quad (x - x_0)^{\alpha_0} + f(\underbrace{x_0, \dots, x_0, x_1, x_1}_{\alpha_0 \text{ korda}})(x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1) +$$

$$+ \dots + f(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{\alpha_0 \text{ korda}}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1 \text{ korda}}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n \text{ korda}})(x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \dots$$

$$\dots (x - x_n)^{\alpha_n - 1} + R_m(x),$$

kus

$$R_m(x) = f(\underbrace{x, x_0, \dots, x_0}_{\alpha_0 \text{ korda}}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1 \text{ korda}}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n \text{ korda}}) \cdot (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_n)^{\alpha_n - 1}.$$

Avaldise (14) parem pool ilma viimase liikmeta $R_m(x)$ on mingi $(m = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1)$ -astme polünoom $P_m(x)$, mis täidab interpolatsioonitingimusi (13) sõlmes x_0 (veenduda!). Peale mõningat teisendust võib otseselt veenduda, et on täidetud üldistatud interpolatsioonitingimused (13) ka teistes sõlmedes x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Selleks on ehk mõnevõrra lihtsam kasutada järgmist võtet. Kuna enne üleminekut piirile võib algsõlmeks võtta suvalise sõlme x_1 , siis, tänu interpolatsioonipolünoomi (9) ühesusele, saame piirväärtusena sama polünoomi, kuid erinevalt kirjutatuna

$$f(x_1) + f(x_1, x_1)(x - x_1) + \dots + f(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1 \text{ korda}})(x - x_1)^{\alpha_1 - 1} +$$

$$+ f(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1, x_1}_{\alpha_1 \text{ korda}})(x - x_1)^{\alpha_1} + \dots$$

See aga rahuldab tingimusi (13) sõlmes x_1 .

Et $P_m(x)$ täidab interpolatsioonitingimusi (13) kõigis sõlmedes x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), siis avaldis (14) on interpolatsioonivalem, mida nimetatakse kordsete sõlmedega Newtoni interpolatsioonivalemiks.

Kuna seos (11) kehtib ka kordsete sõlmede korral, ning eeldades, et $f(x)$ on punkti x ja sõlmi $x_0, x_1, \dots, x_n$ sisaldaval lõigul $[a, b]$ $m + 1$ korda pidevalt diferentseeruv, siis võime jääklilikke kirjutada kujul

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_n)^{\alpha_n},$$

kus $a < \xi < b$.

Lihtne on näha, et kordsete sõlmedega Newtoni interpolatsioonivalemist (14) saame erijuhtudel:

a) hariliku Newtoni interpolatsioonivalemi (ei esine kordseid sõlmi) ja

b) Taylorigi valemi (esineb üks m -kordne sõlm).

Võib saada ka interpolatsioonivalemi, mis üldistaks Lagrange'i interpolatsioonivalemi kordsete sõlmede juhule. Vastav valem kannab Hermite'i interpolatsioonivalemi nime (vt. näit. [1], lk. 163-173).

N ä i d e 9 . Leida interpolatsioonipolünoom, kui $f(x)$ ja tema tuletised on antud järgmises tabelis:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$
-1	1	-5	38	-
0	0	0	2	0
1	3	15	-	-

Diferentsjagatiste arvutamiseks on sobiv kasutada analoogilist arvutusskeemi, mis on antud tabelis 7. Nüüd aga kirjutame sinna sõlme niimitu korda kui suur on tema kordus. Kanname sinna ka vastavad funktsiooni ja faktoriaalidega jagatud tuletiste väärtused (vt. tabel 10). Puuduvad diferentsjagatised arvutame.

Antud näite korral on diferentsjagatiste skeem toodud tabelis 10 (alla on kriipsutatud tuletised, mis tuleb kanda skeemile). Interpolatsioonipolünoomiks saame:

$$\begin{aligned} P_8(x) &= 1 - 5(x + 1) + 19(x + 1)^2 - 15(x + 1)^3 + 12(x + 1)^3x - \\ &- 9(x + 1)^3x^2 + 6(x + 1)^3x^3 - 2(x + 1)^3x^4 + 1(x + 1)^3x^4(x - 1) = \\ &= x^8 + x^5 + x^2 = x^2(x^6 + x^3 + 1). \end{aligned}$$

§ 3. KONSTANTSE SAMMUGA TABELID.

1. Diferents skeem. Vaatleme nüüd funktsioonide tabelleid, kus sõlmed on antud võrdsete vahemike tagant, s.o. interpolatsioonisõlmed on $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh$. Funktsiooni väärtused aga märgime $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_0 + h), f_2 = f(x_0 + 2h), \dots, f_n = f(x_0 + nh)$.

Moodustame vahed

$$f_{i+1} - f_i = f_{i+0,5}^1,$$

mida nimetatakse esimest järku diferentsideks.

Esimest järku diferentsidest moodustame teist järku diferentsid

$$f_{i+1,5}^1 - f_{i+0,5}^1 = f_{i+1}^2$$

jne.

Üldiselt, k-järku diferentsid moodustatakse $k - 1$ -järku diferentsidest

$$f_i^k = f_{i+0,5}^{k-1} - f_{i-0,5}^{k-1}.$$

M ä r k u s : Kirjanduses kasutatakse diferentside tähistamiseks ka sümboleid:

$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_{1+1} - \Delta^{k-1} y_1 = f_{1+k/2}^k,$$

$$\nabla^k y_1 = \nabla^{k-1} y_1 - \nabla^{k-1} y_{1-1} = f_{1-k/2}^k$$

ja

$$\delta^k y_1 = \delta^{k-1} y_{1+1/2} - \delta^{k-1} y_{1-1/2} = f_1^k,$$

kus $y_1 = f_1$.

Diferentside arvutamiseks on sobiv koostada nn. diferentsiskeem, mis on esitatud tabelis 11.

T a b e l 11.

x_1	f_1	f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	...	f_1^n
x_0	f_0	$f_{0,5}^1$					
x_1	f_1	$f_{1,5}^1$	f_1^2	$f_{1,5}^3$			
x_2	f_2	$f_{2,5}^1$	f_2^2	$f_{2,5}^3$	f_2^4	...	
x_3	f_3	$f_{3,5}^1$	f_3^2	...	...	...	$f_{n/2}^n$
x_4	f_4	...	...	$f_{n-1,5}^3$	f_{n-2}^4	...	
...	...	$f_{n-0,5}^1$	f_{n-1}^2				
x_n	f_n						

Diferentsiskeemis kehtivad ilmselt seosed:

$$f_{0,5}^1 + f_{1,5}^1 + f_{2,5}^1 + \dots + f_{n-0,5}^1 = f_n - f_0,$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_{n-1}^2 = f_{n-0,5}^1 - f_{0,5}^1$$

jne., s.t. k -järku diferentside summa on võrdne $(k-1)$ -järku äärmiste diferentside vahega.

Seda omadust kasutatakse vigade avastamiseks diferentside arvutamisel. Oluline on ka, et vigu ei esineks funktsiooni enda väärtustes. Vea leviku jälgimiseks diferentskeemis koostame nn. ε -skeemi (tabel 12), kus f_k arvutamisel on tehtud viga suurusega ε .

T a b e l 1 2 .

x_1	f_1	f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4
...	...	...			
x_{k-4}	f_{k-4}	$f_{k-3,5}^1$	...	...	
x_{k-3}	f_{k-3}	$f_{k-2,5}^1$	f_{k-3}^2	$f_{k-2,5}^3$	...
x_{k-2}	f_{k-2}	$f_{k-1,5}^1$	f_{k-2}^2	$f_{k-1,5+\varepsilon}^3$	$f_{k-2+\varepsilon}^4$
x_{k-1}	f_{k-1}	$f_{k-0,5+\varepsilon}^1$	$f_{k-1+\varepsilon}^2$		$f_{k-1-4\varepsilon}^4$
x_k	$f_{k+\varepsilon}$	$f_{k+0,5-\varepsilon}^1$	$f_{k-2\varepsilon}^2$	$f_{k-0,5-3\varepsilon}^3$	$f_{k+6\varepsilon}^4$
x_{k+1}	f_{k+1}	$f_{k+1,5}^1$	$f_{k+1+\varepsilon}^2$	$f_{k+0,5+3\varepsilon}^3$	$f_{k+1-4\varepsilon}^4$
x_{k+2}	f_{k+2}	$f_{k+2,5}^1$	f_{k+2}^2	$f_{k+1,5-\varepsilon}^3$	$f_{k+2+\varepsilon}^4$
x_{k+3}	f_{k+3}	$f_{k+3,5}^1$	f_{k+3}^2	$f_{k+2,5}^3$	...
x_{k+4}	f_{k+4}	...	...	...	
...	...				

Nagu näha, viga kasvab järgu suurenemisel, kusjuures kordajateks on binoomvalemi kordajad vahelduvate märkidega. Maksimaalne viga on aga selles reas, kus juhuslik viga esineb.

Mis tahes järku diferentsi võib arvutada ka vahetult funktsiooni väärtuste kaudu valemi

$$(15) \quad f_1^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f_{1+n/2-k}$$

abil (ise tuletada!).

Diferentsjagatise ja diferentsi vahel aga kehtib seos (veenduda!)

$$(16) \quad f(x_1, x_{1+1}, \dots, x_{1+n}) = \frac{f_{1+n/2}^n}{n! h^n}.$$

Eeldades, et sõlmi $x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh$ sisaldaval lõigul $[a, b]$ on funktsioonil $f(x)$ $(k+1)$ -järku pidev tuletis, saame valemitest (16) ja (11)

$$(17) \quad f_1^{k+1} = f^{(k+1)}(\xi) h^{k+1},$$

kus $a < \xi < b$.

Sellest järeldub, et

$$|f_1^{k+1}| \leq M_{k+1} |h|^{k+1},$$

kus

$$M_{k+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k+1)}(x)|.$$

Vaatleme funktsiooni tabelit, mis on antud m kümnendkohaga. Kui

$$M_{k+1} |h|^{k+1} < 10^{-m},$$

siis ka

$$|f_1^{k+1}| < 10^{-m}.$$

Viimasest järeldub, et kõik $(k+1)$ -järku diferentsid peavad olema absoluutväärtuselt väiksemad viimase koha ühikust. Praktikas aga seda tavaliselt ei juhtu, vaid nende absoluutväärtused hakkavad isegi suurenema kõrgemate järkude puhul.

Näide 10. Koostada e^x diferentskeem sammuga 0,05 lüdigal $[1,50; 2,00]$, kui funktsiooni väärtused on antud täpsusega $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Vastav diferentskeem kuni seitsmenda järguni on toodud tabelis 13. Selgituseks märgime, et diferentsid esitatakse tavaliselt kümnendmurru viimase koha ühikutes.

T a b e l 13.

x_1	e^{x_1}	f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	f_1^6	f_1^7
1,50	4,4817							
1,55	4,7115	2298	117					
1,60	4,9530	2415	125	8				
1,65	5,2070	2540	129	4	-4	9		
1,70	5,4739	2669	138	9	5	-9	-18	35
1,75	5,7546	2807	143	5	-4	8	17	-31
1,80	6,0496	2950	152	9	4	-6	-14	23
1,85	6,3598	3102	159	7	-2	3	9	-12
1,90	6,6859	3261	167	8	1	0	-3	
1,95	7,0287	3428	176	9	1			
2,00	7,3891	3604						

Antud näite puhul iga $k = 0, 1, 2, \dots$ korral $M_{k+1} = e^{2,00} < 7,4$, $h = 0,05$ ja $m = 4$. Võttes $k = 3$, saame

$$|f_1^4| \leq M_4 |h|^4 < 7,4 \cdot 0,05^4 < 10^{-4},$$

s.t. neljandat järku diferentsid peaksid olema absoluutväärtuselt väiksemad kui 1 viimase koha ühik. Näeme aga, et nad seda pole. Põhjus seisab selles, et algandmete ümardamise vead kanduvad edasi diferentsidele, kusjuures vead võivad kasvada geomeetrilises progressioonis diferentsi järgu suurenemisel.

Oletame, et üheski algandmes absoluutne viga ei ületa poolt viimase koha ühikut. Lahutamisel võivad absoluutsed vead liituda. Seega esimest järku diferentsis ei ületa viga üht viimase koha ühikut, teist järku diferentsis kahte, kolmandat järku diferentsis nelja ja $(k + 1)$ -järku diferentsis $- 2^k$ viimase koha ühikut. On selge, et pole tarvis enam arvestada neid diferentse, kus diferentsi viga ületab tema väärtuse (viimase koha ühikutes).

Tavaliselt arvestatakse interpeleerimisel ainult neid diferentse, kus

$$|f_1^k| > 2^{k-1},$$

ja diferentsid alates järgust $k + 1$ jäetakse arvestamata, kui

$$|f_1^{k+1}| < 2^k.$$

Seejuures k -järku diferentsid loetakse praktiliselt võrdsseteks, aga kõik kõrgemat järku diferentsid - nullideks.

M ä r k u s : Valemist (17) järeldub, et k -järku polünoomi k -järku diferentsid on kõik võrdsed ning diferentsid alates $(n + 1)$ -järgust - nullid.

Tabelis 13 arvestame diferentse kuni kolmanda järguni (incl.), kuid alates neljandast järgust loeme nad nullideks. Praktiliselt võrdseteks loeme aga kolmandat järku diferentsid.

Nagu näha, kehtib diferentsiskeemis küllaltki range seaduspärasus. Seda seaduspärasust võivad rikkuda ainult kolm asjaolu:

a) funktsioon $f(x)$ omab iseäraseid punkte vaadeldaval lõigul,

b) algandmete tabelis on juhuslik viga või

c) arvutusviga diferentside arvutamisel.

Kahel viimasel juhul levib viga ϵ -skeemi kohaselt.

2. Newtoni I ja II interpolatsioonivalem. Teisendame eelmises paragrahvis saadud Newtoni interpolatsioonivalemit (8), kui sõlmed on antud konstantse tabelisammuga h .

Vaatleme esmalt juhtu, kui sõlmedeks võtta punktid järjestusega $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$. Kasutades seost (16), saame

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) \frac{f_{0,5}^1}{h} + (x - x_0)(x - x_0 - h) \frac{f_1^2}{2!h^2} + \\ & + (x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h) \frac{f_{1,5}^3}{3!h^3} + \dots + \\ & + (x - x_0)(x - x_0 - h) \dots [x - x_0 - (n - 1)h] \frac{f_{n/2}^n}{n!h^n} + R_n(x). \end{aligned}$$

Tuues sisse uue muutuja

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

saame viimasest

$$f(x_0 + th) = f_0 + t f_{0,5}^1 + \frac{t(t-1)}{2} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{1,5}^3 + \dots + \frac{t(t-1) \dots [t - (n-1)]}{n!} f_{n/2}^n + R_n(x_0 + th).$$

(18)

Valemit (18) nimetatakse Newtoni I interpolatsioonivalemiks. Kasutades binoomkordajate tähistust

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1) \dots [t - (k-1)]}{k!},$$

võib Newtoni I interpolatsioonipolünoomile anda kuju

$$P(x_0 + th) = f_0 + \binom{t}{1} f_{0,5}^1 + \binom{t}{2} f_1^2 + \binom{t}{3} f_{1,5}^3 + \dots + \binom{t}{n} f_{n/2}^n.$$

Eeldades, et eksisteerib funktsiooni $f(x)$ $(n+1)$ -järku pidev tuletis sõlmi $x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) sisaldaval lõigul $[a, b]$, saame jääkliikmeks

$$R_n(x_0 + th) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n),$$

kus $a < \xi < b$ (veenduda jääkliikme avaldises!).

Tavaliselt määratakse vea ülemmäär lõigul $[a, b]$. Sagedeli on aga raskusi $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ määramisega

ning seetõttu on sobivam järgmine ligikaudne veahinnang.

Eeldades, et $(n+1)$ -järku diferentsid on peaaegu võrdsed, võime valemi (17) põhjal kirjutada

$$h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{f_{n+1}^{n+1}}{2}.$$

Seega

$$R_n(x_0 + th) \approx \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n+1)!} \frac{f_{n+1}^{n+1}}{2}$$

ehk sõnastatult:

Viga on ligikaudu võrdne esimese ärajäetud liikmega interpolatsioonivalemist.

Tuletame veel teise Newtoni interpolatsioonivalemi, kui interpolatsioonisõlmedeks võtta punktid järjestusega $x_0, x_0-h, x_0-2h, \dots, x_0-nh$ (edaspidi tähistame $x-h = x_{-1}$).

Valemist (8) võib kirjutada

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_0-h) + (x-x_0)(x-x_0+h) \cdot \\ &\cdot f(x_0, x_0-h, x_0-2h) + \dots + (x-x_0)(x-x_0+h) \dots \cdot \\ &\cdot [x - x_0 + (n-1)h] f(x_0, x_0-h, \dots, x_0-nh) + R_n(x). \end{aligned}$$

Diferentsjagatiste sümmeetrilisuse tõttu saab valemi

(16) abil

$$f(x_0, x_0-h, \dots, x_0-kh) = \frac{f_{-k/2}^k}{k!h^k}.$$

Kasutades saadud seost ja tuues sisse uue muutuja

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

saame Newtoni II interpolatsioonivalemi

$$\begin{aligned} f(x_0+th) &= f_0 + tf_{-0,5}^1 + \frac{t(t+1)}{2} f_{-1}^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3} f_{-1,5}^3 + \\ (19) \quad &+ \dots + \frac{t(t+1) \dots [t + (n-1)]}{n!} f_{-n/2}^n + R_n(x_0 + th). \end{aligned}$$

Polünoomi võib kirjutada ka binoomkordajatega

$$\begin{aligned} P_n(x_0 + th) &= f_0 + \binom{t}{1} f_{-0,5}^1 + \binom{t+1}{2} f_{-1}^2 + \binom{t+2}{3} f_{-1,5}^3 + \\ &+ \dots + \binom{t+n-1}{n} f_{-n/2}^n. \end{aligned}$$

Beldades, et funktsioonil $f(x)$ on sõlmi $x_0 - ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) sisaldaval lõigul $[a, b]$ $(n + 1)$ -järku pidev tuletis, saame Newtoni II interpolatsioonivalemi jääkliikmeks

$$R_n(x_0 + th) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1)\dots(t+n),$$

kus $a < \xi < b$. Asendades $h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \approx f^{(n+1)} \frac{h^{n+1}}{2}$, näeme, et ka selle valemi korral on viga ligikaudu võrdne esimese ärajäetud liikmega interpolatsioonivalemist.

Võrreldes Newtoni interpolatsioonipolünoome märkame, et I polünoomi korral võetakse interpolatsioonisõlmedeks $x_0, x_1, \dots, x_n$ ja diferentsiskeemis kasutatakse diferentse diagonaalselt alla, II polünoomi korral aga sõlmi $x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0$ ja diferentse diagonaalselt üles (vt. tabel 14).

Näide 11. Antud on alljärgnev $\sin x$ tabel. Lei-
da $\sin 0,22$ ja $\sin 0,47$. Hinnata saadud tulemuste täpsust.

x	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\sin x$	0,19867	0,24740	0,29552	0,34290	0,38942	0,43497	0,47943

Diferentsskeem on koostatud tabelis 15. Näeme, et neljandat järku diferentseid pole enam usaldusväärsed, sest seal võib olla ümardamise viga kuni $2^3 = 8$ viimase koha ühikut. Seega on kolmandat järku diferentseid praktiliselt võrdsed.

T a b e l 14.

x_1	f_1	f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	...
...	...	...				
x_{-4}	f_{-4}		...			
		$f_{-3,5}^1$		...		
x_{-3}	f_{-3}		f_{-3}^2		...	
		$f_{-2,5}^1$		$f_{-2,5}^3$		
x_{-2}	f_{-2}		f_{-2}^2		$\underline{f_{-2}^4}$	$\rightarrow N_{II}$
		$f_{-1,5}^1$		$\underline{f_{-1,5}^3}$		
x_{-1}	f_{-1}		$\underline{f_{-1}^2}$		f_{-1}^4	
		$\underline{f_{-0,5}^1}$		$f_{-0,5}^3$		
x_0	$\cancel{f_0}$		f_0^2		f_0^4	
		$\underline{f_{0,5}^1}$		$f_{0,5}^3$		
x_1	f_1		$\underline{f_1^2}$		f_1^4	
		$f_{1,5}^1$		$\underline{f_{1,5}^3}$		
x_2	f_2		f_2^2		$\underline{f_2^4}$	
		$f_{2,5}^1$		$f_{2,5}^3$		
x_3	f_3		f_3^2		...	$\rightarrow N_I$
		$f_{3,5}^1$		...		
x_4	f_4		...			
		...				
...	...					

T a b e l 15.

x_i	f_i	f_i^1	f_i^2	f_i^3	f_i^4
0,20	0,19867	4873			
0,25	0,24740	4812	-61		
0,30	0,29552	4738	-74	-13	1
0,35	0,34290	4652	-86	-12	1
0,40	0,38942	4555	-97	-11	-1
0,45	0,43497	4446	-109	-12	
0,50	0,47943				

Lelame sin 0,22. Valides $x_0 = 0,20$, lähendame antud funktsiooni Newtoni I interpolatsioonipolünoomiga.

Et

$$t = \frac{0,22 - 0,20}{0,05} = 0,4 ,$$

siis interpolatsioonipolünoomiks on (valemist (18)):

$$P_3(0,22) = f_0 + 0,4f_{0,5}^1 - 0,12f_1^2 + 0,064f_{1,5}^3 .$$

Asendades tabelist 15 diferentsid, saame:

$$f_0 = 0,19867$$

$$0,4f_{0,5}^1 = 1949.2$$

$$-0,12f_1^2 = 7.3$$

$$0,064f_{1,5}^3 = .8$$

$$P_3(0,22) = 0,21823 .$$

(Vahearvutustes on säilitatud üks lisakoht, mis lõppvastuses ümardatakse).

Hindame tulemuse täpsust. Esimeseks polünoomit ära-
jätatud liikmeks on

$$\frac{1}{4!} t(t-1)(t-2)(t-3)f_2^4.$$

Kuna antud juhul f_2^4 ei ole enam usaldusväärne, siis arves-
tame ka algandmete ümardamisel tekkinud viga. Antud juhul
ei saa f_2^4 ületada viimase koha ühikutes $1 + 8$. Niisiis
võtamegi $f_2^4 = 9 \cdot 10^{-5}$ ja arvutame ligikaudse vea

$$|R_3(0,22)| \approx \left| \frac{0,4 \cdot (-0,6) \cdot (-1,6) \cdot (-2,6)}{4!} \cdot 9 \cdot 10^{-5} \right| < 0,38 \cdot 10^{-5}.$$

Näeme, et viga ei ületa üht viienda koha ühikut ja see-
ga loeme, et

$$\sin 0,22 = 0,21823.$$

Et antud funktsiooni korral on lihtne leida tuletisi,
siis hindame vea suurust ka valemi

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{(n+1)!} |t(t-1)\dots(t-n)|$$

järgi.

Antud korral $n = 3$, $f^{IV}(x) = \sin x$ ja

$$M_4 = \max_{0,2 \leq x \leq 0,35} |\sin x| < 0,35.$$

(Polünoomis kasutasime diferentse ainult lõigust $[0,20;$
 $0,35]$).

Veaks saame

$$|R_3(0,22)| < \frac{0,35 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}}{4!} |0,4 \cdot (-0,6) \cdot (-1,6) \cdot (-2,6)| < 0,91 \cdot 10^{-7}.$$

Siit selgub, et antud interpolatsioonipolünoom võimal-
dab interpoleerimist veaga mitte üle ühe viimase koha ühiku

seitsmekohaliste funktsiooni väärtuste korral. Et funktsiooni väärtused on antud ainult viie numbrikohaga, siis me ei saa väita, et antud interpolaatsiooni täpsus on $1 \cdot 10^{-7}$, vaid kõige paremal juhul ainult $0,5 \cdot 10^{-5}$.

Selline erinevus kahe veahinnangu vahel on loomulik, eest üks lähtub viiekohaliste tabelite kasutamisest, teine aga polünoomi täpsuse võimalikkusest.

Leiame nüüd $\sin 0,47$. Kui valida $x_0 = 0,50$, siis

$$t = \frac{0,47 - 0,50}{0,05} = -0,6$$

ja valemist (19) saame polünoomiks

$$P_3(0,47) = f_0 - 0,6f_{-0,5}^1 - 0,12f_{-1}^2 - 0,056f_{-1,5}^3.$$

Asendame diferentsid:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0,47943 \\ -0,6f_{-0,5}^1 &= -2667.6 \\ -0,12f_{-1}^2 &= 13.1 \\ -0,056f_{-1,5}^3 &= .7 \end{aligned}$$

$$P_3(0,47) = 0,45289.$$

Arvutame veel interpolaatsiooni ligikaudse vea

$$|R_3(0,47)| \approx \left| \frac{-0,6 \cdot 0,4 \cdot 1,4 \cdot 2,4}{4!} \cdot (-9) \cdot 10^{-5} \right| < 0,31 \cdot 10^{-5}.$$

Seega

$$\sin 0,47 = 0,45289.$$

3. Gaussi interpolaatsioonivalemid. Fraseri diagramm.

Võttes interpolaatsioonisõlmedeks $2n + 1$ punkti järjestu-

sega $x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + nh, x_0 - nh$, saame Newtoni interpolatsioonivalemile (8) anda kuju

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) = & f_0 + tf_{0,5}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_0^2 + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} f_{0,5}^3 + \\ (20) \quad & + \frac{t(t^2-1^2)(t-2)}{4!} f_0^4 + \dots + \frac{t(t^2-1^2) \dots [t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_{0,5}^{2n-1} + \\ & + \frac{t(t^2-1^2) \dots [t^2-(n-1)^2] (t-n)}{(2n)!} f_0^{2n} + R_{2n}(x_0 + th) \end{aligned}$$

(veenduda!), kus $t = \frac{x - x_0}{h}$ ja

$$R_{2n}(x_0 + th) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1^2) \dots (t^2-n^2)$$

(eeldades, et vaadeldaval lõigul eksisteerib $f(x)$ $(2n+1)$ -järku pidev tuletis). Saadud valemit (20) nimetatakse Gaussi I interpolatsioonivalemiks.

Muutes interpolatsioonisõlmede järjekorda $x_0, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 - nh, x_0 + nh$, saame interpolatsioonivalemist

(8) Gaussi II interpolatsioonivalemi

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) = & f_0 + tf_{-0,5}^1 + \frac{t(t+1)}{2!} f_0^1 + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} f_{-0,5}^3 + \\ (21) \quad & + \frac{t(t^2-1^2)(t+2)}{4!} f_0^4 + \dots + \frac{t(t^2-1^2) \dots [t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_{-0,5}^{2n-1} + \\ & + \frac{t(t^2-1^2) \dots [t^2-(n-1)^2] (t+n)}{(2n)!} f_0^{2n} + R_{2n}(x_0 + th) \end{aligned}$$

(veenduda!), kus $t = \frac{x - x_0}{h}$ ja

$$R_{2n}(x_0 + th) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1^2) \dots (t^2-n^2)$$

(eeldades sama).

Kui kasutada Gaussi interpolatsioonivalemi konstrueerimiseks $2n$ sõlme (s.t. viimast sõlme ei kasutata), siis jääb ära ka polünoomi viimane liige ja jääkliige avaldub esimesel juhul kujul

$$R_{2n-1}(x_0 + th) = \frac{h^{2n} f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} t(t^2-1^2) \dots [t^2-(n-1)^2] (t-n)$$

ja teisel juhul kujul

$$R_{2n-1}(x_0 + th) = \frac{h^{2n} f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} t(t^2-1^2) \dots [t^2-(n-1)^2] (t+n).$$

Seose (17) põhjal $f_i^k \approx h^k f^{(k)}(\xi)$ ($i=0,5$; 0 või $-0,5$) on Gaussi interpolatsioonipolünoomide viga ligikaudu võrdne esimese ärajäetud liikmega interpolatsioonivalemist.

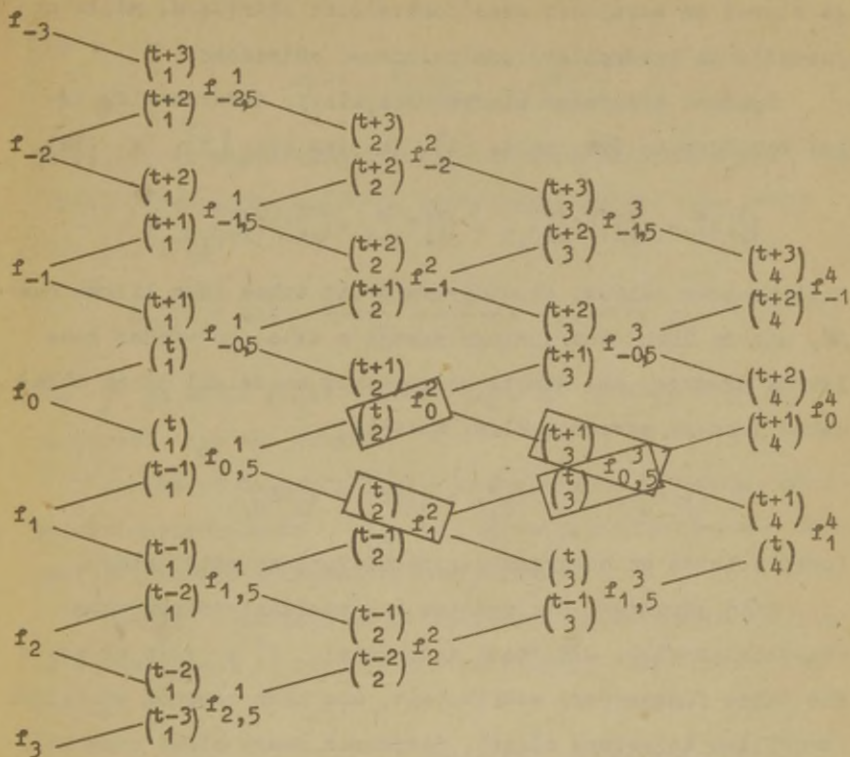
Et Gaussi interpolatsioonivalemid leiavad vähe praktilist kasutamist, siis me neil pikemalt ei peatu. Küll aga kasutame neid edaspidi teiste valemite tuletamisel.

Eespool tuletasime mitmeid interpolatsioonipolünoomide erikujusid. Kõik nad esitavad üht ja sama polünoomi samade sõlmede erineva järjestuse korral. Vaatleme nüüd moodust, mis võimaldab väga lihtsalt tuletada neid erikujusid. Selleks koostame nn. Fraseri diagrammi (järgmisel leheküljel).

Fraseri diagrammist võime välja kirjutada interpolatsioonipolünoome, kui liikuda mööda mingit kald- või murdjoont. Näiteks Newtoni I interpolatsioonipolünoomi saame, kui võtame liikmete summa piki kaldjoont alla alates funktsiooni väärtusest f_0 ja lõpetades diferentsil $f_{n/2}^n$:

$$f_0 + \binom{t}{1} f_{0,5}^1 + \binom{t}{2} f_1^2 + \binom{t}{3} f_{1,5}^3 + \dots$$

Fraseri diagramm:



Gaussi II interpolatsioonipolünoomi saame aga juhul, kui liigume funktsiooni väärtusest f_0 kuni diferentsini f_n^{2n} mööda siksakjoont üles-alla jne:

$$f_0 + \binom{t}{1} f_{-0,5}^1 + \binom{t+1}{2} f_0^2 + \binom{t+1}{3} f_{-0,5}^3 + \binom{t+2}{4} f_0^4 + \dots$$

Lihtne on määrata Fraseri diagrammist ka sõlmed, milledele interpolatsioonipolünoom on ehitatud. Oletame, et mingi interpolatsioonipolünoom lõpeb diferentsiga f_1^n . Kujutama nüüd diagrammil võrdhaarset kolmnurka, mille tipp asub dife-

rentsil f_1^n ja alus funktsiooni väärtustel. Selle kolmnurga alusel on parajasti need funktsiooni väärtused, mille argumendid on interpolatsioonipolünoomi sõlmedeks.

Fraseri diagrammi binoomkordajate ja diferentside vahel kehtib seos (vt. näit. [1], lk. 143 või [5], lk. 138)

$$\binom{1}{k} f_1^k + \binom{1+1}{k+1} f_{1+0,5}^{k+1} = \binom{1}{k} f_{1+1}^k + \binom{1}{k+1} f_{1+0,5}^{k+1}.$$

Viimane seos näitab, et diagrammis mis tahes kahe liikme summa, mis on ühendatud joonega paremale alla, on võrdne kahe liikme summaga, mis asetsevad vahetult nende all ja on ühendatud joonega paremale üles. Näiteks:

$$\binom{t}{2} f_0^2 + \binom{t+1}{3} f_{0,5}^3 = \binom{t}{2} f_1^2 + \binom{t}{3} f_{0,5}^3$$

(need liikmed on diagrammis ristkülikutesse paigutatud).

Siit järeldub, et n -astme interpolatsioonipolünoomi väljakirjutamist, mis lõpeb diferentsil f_1^n , võib alustada mis tahes funktsiooni väärtustest, mis asub eespool vaadeldud võrdkülgse kolmnurga alusel. Seejuures saame alati sama polünoomi, kuid erineva kujuga.

4. Stirlingi ja Besseli interpolatsioonivalemid. Vaatleme veel kahte interpolatsioonivalemit. Leides Gaussi interpolatsioonivalemite (20) ja (21) poolsumma, saame Stirlingi interpolatsioonivalemi

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) = & f_0 + t f_0^1 + \frac{t^2}{2!} f_0^2 + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} f_0^3 + \frac{t^2(t^2-1^2)}{4!} f_0^4 + \\ (22) \quad & + \dots + \frac{t(t^2-1^2) \dots [t^2 - (n-1)^2]}{(2n-1)!} f_0^{2n-1} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{t^2(t^2-1^2) \dots [t^2 - (n-1)^2]}{(2n)!} f_0^{2n} + R_{2n}(x_0 + th),$$

kus

$$f_0^{2k-1} = \frac{1}{2}(f_{-0,5}^{2k-1} + f_{0,5}^{2k-1}).$$

Beldades, et vaadeldaval lõigul eksisteerib funktsiooni $f(x)$ $(2n+1)$ -järku pidev tuletis, saame jääkliikmeks (vt. näit. [1], lk. 139)

$$R_{2n}(x_0 + th) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1^2) \dots (t^2-n^2),$$

kus ξ on mingi punkt sõlmede $x_0 + ih$ ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$) ja punkti $x_0 + th$ vahel.

Kui kasutada seost (17), näeme, et ka Stirlingi interpolatsioonipolünoomi viga on ligikaudu võrdne esimese ärajäetud liikmega interpolatsioonivalemist.

Besseli interpolatsioonipolünoomi tuletamiseks kirjutame välja Gaussi II interpolatsioonivalemi (21) sõlme x_1 korral

$$\begin{aligned} P_{2n}(x_1 + t'h) &= f_1 + t'f_{0,5}^1 + \frac{t'(t'+1)}{2!} f_1^2 + \frac{t'(t'^2-1^2)}{3!} f_{0,5}^3 + \\ &+ \frac{t'(t'^2-1^2)(t'+2)}{4!} f_1^4 + \dots + \frac{t'(t'^2-1^2) \dots [t'^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_{0,5}^{2n-1} + \\ &+ \frac{t'(t'^2-1^2) \dots [t'^2-(n-1)^2]}{(2n)!} (t'+n) f_1^{2n} + \dots, \end{aligned}$$

kus

$$t' = \frac{x - x_1}{h}.$$

On kerge näha, et t ja t' vahel kehtib seos

$$t' = t - 1.$$

Asendades t' endise muutujaga t ning leides saadud valemi ja Gaussi I interpolatsioonivalemi (20) poolsumma, saame Besseli interpolatsioonivalemi

$$(23) \quad \begin{aligned} f(x_0 + th) = & f_0 + t f_{0,5}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_{0,5}^2 + \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{3!} f_{0,5}^3 + \\ & + \frac{t(t^2-1^2)(t-2)}{4!} f_{0,5}^4 + \dots + \\ & + \frac{t(t^2-1^2) \dots [t^2 - (n-1)^2] (t-n)}{(2n)!} f_{0,5}^{2n} + \\ & + \frac{t(t^2-1^2) \dots [t^2 - (n-1)^2] (t-n)(t-1/2)}{(2n+1)!} f_{0,5}^{2n+1} + R_{2n+1}(x_0 + th), \end{aligned}$$

kus

$$f_{0,5}^{2k} = \frac{1}{2}(f_0^{2k} + f_1^{2k})$$

ja

$$R_{2n+1}(x_0 + th) = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} t(t^2-1^2) \dots (t^2-n^2) [t - (n+1)].$$

Punkt ξ asub sõlmede $x_0 + ih$ ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$) ja $x_0 + th$ vahel.

Ligikaudse veahinnanguna võime kasutada esimest ärajäetud liiget interpolatsioonivalemist.

Stirlingi ja Besseli interpolatsioonipolünoomid võime välja kirjutada ka Fraseri diagrammist, kui liikuda seal mööda rombiga diagonaali ja võtta diagonaali kohal ja all olevate liikmete poolsummad.

Diferentsskeemis kasutatakse nende polünoomide korral

T a b e l 16 .

x_i	f_i	f_i^1	f_i^2	f_i^3	f_i^4	
x_{-3}	f_{-3}					
x_{-2}	f_{-2}	$f_{-2,5}^1$	f_{-2}^2			
x_{-1}	f_{-1}	$f_{-1,5}^1$	f_{-1}^2	$f_{-1,5}^3$	f_{-1}^4	
x_0	f_0	$\frac{1}{2} \begin{cases} f_{-0,5}^1 \\ f_{0,5}^1 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \begin{cases} f_0^2 \\ f_1^2 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \begin{cases} f_{-0,5}^3 \\ f_{0,5}^3 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \begin{cases} f_0^4 \\ f_1^4 \end{cases}$	S
x_1	f_1	$f_{1,5}^1$	f_1^2	$f_{1,5}^3$	f_1^4	B
x_2	f_2	$f_{2,5}^1$	f_2^2			
x_3	f_3					

diferentse horisontaalses suunas (vt. tabel 16).

Gaussi, Stirlingi ja Besseli interpolatsioonipolünoome nimetatakse ka tsentraalsete diferentsidega interpolatsioonipolünoomideks.

Lõpuks juhime tähelepanu veel sellele, et paarituastmelise Stirlingi ja paarisastmelise Besseli interpolatsioonipolünoomi korral ei ole täidetud kõik interpolatsioonitingimused. Nimelt jäävad need rahuldamata äärmistes sõlmedes. (veenduda!) Seega paarituastmeline Stirlingi või paarisastmeline Besseli interpolatsioonipolünoom ei ole interpolatsioonipolünoomid tavalises mõttes, vaid kahe erineva inter-

polatsioonipolünoomi aritmeetiline keskmine. See aga ei takista nende kasutamist. Järgmises punktis näeme, et mainitud interpolatsioonipolünoomid annavad isegi paremaid tulemusi kui tavaline sama astme interpolatsioonipolünoom. Nende jääkliikmed saame leida ainult ligilähedaselt (vt. näit. [1], lk. 139 - 141).

N ä i d e 12. Leida $\sin 0,34$ ja $\sin 0,38$, kui $\sin x$ tabel on toodud eelmises näites.

Leiame $\sin 0,34$ Stirlingi interpolatsioonipolünoomi abil, kasutades seal koostatud diferentsiskeemi (tabel 15).

Valime $x_0 = 0,35$; siis $t = \frac{0,34 - 0,35}{0,05} = -0,2$.

Valemist (22) saame:

$$P_3(0,34) = f_0 - 0,2f_0^1 + 0,02f_0^2 + 0,032f_0^3.$$

Asendame diferentsid.

$$\begin{array}{rcl} f_0 & = & 0,34390 \\ -0,2f_0^1 & = & -0,9390 \\ 0,02f_0^2 & = & 1,7 \\ 0,032f_0^3 & = & 0,4 \\ \hline P_3(0,34) & = & 0,33349 \end{array}$$

$$\text{Kuna } |R_3(0,34)| \approx \left| \frac{t^2(t^2-1)}{4!} f_0^4 \right| < 0,5 \cdot 10^{-5}, \text{ siis}$$

$$\sin 0,34 = 0,33349.$$

Arvutame nüüd $\sin 0,38$ kasutades Besseli interpolatsioonipolünoomi. Valime jällegi $x_0 = 0,35$, siis $t = \frac{0,38 - 0,35}{0,05} = 0,6$ ja valemist (23) saame:

$$P_3(0,38) = f_0 + 0,6f_{0,5}^1 - 0,12f_{0,5}^2 - 0,004f_{0,5}^3 .$$

Arvutame $P_3(0,38)$:

$$\begin{array}{rcl} f_0 & = & 0,34290 \\ 0,6f_{0,5}^1 & = & 2791.2 \\ -0,12f_{0,5}^2 & = & 11.0 \\ -0,004f_{0,5}^3 & = & .0 \end{array}$$

$$P_3(0,38) = 0,37092.$$

$$\text{Et } |R_3(0,38)| \approx \left| \frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} f_{0,5}^4 \right| < 0,5 \cdot 10^{-5} , \quad \text{siis}$$

$$\sin 0,38 = 0,37092.$$

5. Interpolatsioonivalemite kasutamisest. Analüüsime käesolevas punktis küsimust, missugust interpolatsioonipolünoomi kasutada antud funktsiooni ulatusliku tabeli korral ja kui palju liikmeid võtta interpolatsioonivalemis, et saada nõutud täpsust.

Tuletame siinjuures veel meelde, et kõik interpolatsioonipolünoomid annavad sama tulemuse ainult ühtede ja samade sõlmede korral. Alati on soovitatav algsõlm x_0 valida võimalikult x lähedale, s.t. $|t| < 1$. Kuna konstantse tabelisammu korral erinevad polünoomid kasutavad algsõlme x_0 suhtes erinevaid naabersõlmi, siis kõik sõlmed ei ühti ja nii võime saada erinevaid vastuseid. Milline polünoom lähendab antud korral paremini, selgub nende jääkliikmete uurimisel.

Funktsiooni $f(x)$ lähendamisel n -astme polünoomiga

tekkiv viga on võrdne või ligilähedaselt võrdne avaldisega

$$h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_{n+1}(t)}{(n+1)!} .$$

Siin $h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$ sõltub ainult tabelisammust h ja antud funktsioonist $f(x)$. Tema kordaja $\omega_{n+1}(t)$ omab aga eri kuju erinevate polünoomide korral. Andes muutujale t väärtusi ja arvutades $\frac{\omega_{n+1}(t)}{(n+1)!}$ mitmesuguste n väärtuste korral ([1], lk-d 124, 137, 140 ja 142) selgub, et tsentraalsete diferentsidega polünoomidel on eelised ühepoolsete (Newtoni) polünoomide ees.

Stirlingi polünoomil on aga eelis teiste ees, kui t on lähedane nullile ja esimene ärajäetud liige on paarisjärguline. Praktikas on sobiv kasutada teda siis, kui

$$|t| \leq 1/4 .$$

Besseli polünoom on kasulik juhul, kui t on lähedane poolele ja esimene ärajäetud liige on paaritujärguline. Praktikas:

$$1/4 \leq t \leq 3/4 .$$

Ulatusliku tabeli korral valime sõlmed nii, et nad asetseksid võimalikult x lähedal ja on võimalik kasutada tsentraalsete diferentsidega polünoome. Tabeli alguses ja lõpus tuleb aga kasutada Newtoni valemeid.

Vaatleme nüüd, kui kõrge astmega tuleb interpoleerida, et saada vajalikku täpsust. Seejuures tahame nõutud täpsust saavutada võimalikult madala astme polünoomi abil.

Olgu antud tabelis sammuga h funktsiooni $f(x)$ väärtused m kümnendkohaga, s.t. täpsusega $0,5 \cdot 10^{-m}$. On ilmne, et interpoleerimisel ei saa nõuda suuremat täpsust kui on antud tabeli täpsus. Küll aga võib ülesannet formuleerida vastupidiselt. Näiteks viiekohaliste tabelite korral nõuda neljakohalist täpsust, mitte kunagi aga üle viie koha.

Interpoleerides funktsiooni $f(x)$ n -astme polünoomiga $P_n(x)$ on interpoleerimise viga $R_n(x)$. Kui kehtib võrratus

$$|R_n(x)| \leq r \cdot 10^{-m}$$

(kus r on nõutava vea ülemmäär tabeli viimase koha ühikutest), siis öeldakse, et antud funktsiooni tabeli korral lõigul $[a, b]$ on küllaldane n -astmega interpoleerimine. Suurim täpsus, mis antud tabeli korral interpoleerimisel võib saavutada, on $1/2$ viimase koha ühikut ($r = 1/2$).

Kuidas aga määrata kõige väiksem n ? Tema määramiseks kasutame järgmist moodust. Valime $p + 1$ sõlme ja koostame diferentsiskeemi. Seal loeme praktiliselt võrdseteks k -järku diferentsid ($k < p$). Diferentsid alates järgust $k + 1$ on absoluutväärtuselt väiksemad kui 10^{-m} (vt. punkt 1) ja nendest tulenevad liikmed valitud täpsuse piires mõju ei avalda. Seega pole mõtet arvestada diferentse alates järgust $k + 1$ kuni järguni p . Võttes nüüd $n = k$, saamegi vastava astme polünoomi, millega teostada interpoleerimist. Kokkuvõetult:

Kui interpolatsioonipolünoomi aste võtta võrdne praktiliselt võrdsete diferentside järguga, siis interpoleerimise

viga on alati väiksem tabeli täpsusest ($0,5 \cdot 10^{-m}$). Kui aga interpoleerimise aste on väiksem praktiliselt võrdselt diferentside järgust, siis interpolatsiooni ligikaudse vea võib määrata esimese ärajäetud liikme abil.

Analüüsimise põhjalikumalt, millal on küllaldane kasutada lineaarset või ruutinterpolatsiooni.

Lineaarse interpolatsiooni korral toimub funktsiooni $f(x)$ lähendamine lõigul $[x_0, x_1]$ sirgega

$$P_1(x) = f_0 + t f_{0,5}^1,$$

kusjuures jääkliikmeks on

$$R_1(x) = \frac{h^2 f''(\xi)}{2} t(t-1)$$

($x_0 < \xi < x_1$).

Kuna $\max_{0 \leq t \leq 1} |t(t-1)| = \frac{1}{4}$, siis

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Kui

$$(24) \quad \frac{M_2 h^2}{8} < r \cdot 10^{-m},$$

siis on küllaldane kasutada lõigul $[x_0, x_1]$ lineaarset interpolatsiooni. Seose (17) abil võime tingimusele (24) anda kuju

$$|f_1^2| < 8r \cdot 10^{-m},$$

s.t. lineaarse interpolatsiooni viga ei ületa r viimase koha ühikut, kui teist järku diferents on väiksem $8r$ viimase koha ühikust. (Täpsuse $0,5 \cdot 10^{-m}$ korral $|f_1^2| < 4$).

Viimast reeglit kasutatakse sageli ka kujul:

Lineaarse interpolatsiooni viga ei ületa r viimase koha ühikut, kui esimest järku naaber diferentside erinevus ei ületa $8r$ viimase koha ühikut.

Võrratust (24) võib kasutada ka tabelisammu määramiseks nii, et lineaarse interpolatsiooni viga ei ületaks suurust $r \cdot 10^{-m}$

$$h \leq \sqrt{\frac{8r \cdot 10^{-m}}{M_2}}.$$

Lineaarse interpolatsiooni teostamiseks võib soovitada järgmist arvutusskeemi:

$$\begin{array}{ccc} x_0 & f_{0,5}^1 & f_0 \\ x - x_0 & t & tf_{0,5}^1 \end{array}$$

$$P_1(x) = f_0 + tf_{0,5}^1.$$

N ä i d e 13. Vaatleme diferentsiskeemi, mis on toodud tabelis 17.

T a b e l 17 .

x_1	$f_1 = \frac{1}{x_1}$	f_1^1	f_1^2
2,00	0,5000		
2,05	0,4878	-122	.6
2,10	0,4762	-116	5
2,15	0,4651	-111	5
2,20	0,4545	-106	5
2,25	0,4444	-101	

Siin on praktiliselt võrdsed teist järku diferentsid. Täpsuse $0,5 \cdot 10^{-4}$ saavutamiseks tuleb kasutada ruutinterpolatsiooni. Kui aga piirduda täpsusega $1 \cdot 10^{-4}$, siis võib kasutada lineaarset interpolatsiooni, sest on täidetud tingimus $|f_1^2| < 8$.

Leiame nüüd lineaarse interpolateerimise teel 1:2,12. Lõiguks $[x_0, x_1]$ tuleb valida lõik $[2,10; 2,15]$. Kasutades eespool toodud arvutusskeemi saame:

$$\begin{array}{rcccl}
 & & & & -111 \\
 & 2,10 & & 0,4762 & \\
 & 2 & 0,4 & - & 44.4 \\
 \hline
 & P_1(2,12) & = & 0,4718. &
 \end{array}$$

Kontrollimisel selgub, et $1:2,12 = 0,4717$. Seega viga ei ületa tõepoolest $1 \cdot 10^{-4}$.

Ruutinterpolatsiooni korral me asendame vaadeldaval lõigul funktsiooni $f(x)$ ruutpolünoomiga $P_2(x)$.

Newtoni I polünoomi korral on jääkliikmeks

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3 h^3}{6} |t(t-1)(t-2)|, \quad (x_0 \leq x \leq x_2).$$

Kuna $\max_{0 \leq t \leq 2} |t(t-1)(t-2)| = \frac{2\sqrt{3}}{9} < \frac{2}{3}$, siis

$$|R_2(x)| < \frac{M_3 h^3}{15}.$$

Sama tulemuse saame ka Newtoni II ja Stirlingi polünoomi korral (ise veenduda!).

Siit näeme, et on piisav kasutada Newtoni või Stirlingi

gi ruutinterpolatsiooni, kui

$$\frac{M_3 h^3}{15} < r \cdot 10^{-m}$$

ehk seose (17) põhjal

$$|f_1^3| < 15r \cdot 10^{-m}.$$

Sõnastatult:

Newtoni ja Stirlingi ruutinterpolatsiooni viga ei ületa r viimase koha ühikut, kui kolmandat järku diferents on väiksem $15r$ viimase koha ühikust.

Besseli ruutinterpolatsiooni korral lõigul $[x_0, x_1]$ saame

$$|f_1^3| < 124r \cdot 10^{-m}$$

(ise tuletada!), s.t. Besseli ruutinterpolatsiooni viga ei ületa r viimase koha ühikut, kui kolmandat järku diferents on väiksem $124r$ viimase koha ühikust. Seega Besseli ruutinterpolatsioon on tunduvalt täpsem teistest ruutinterpolatsioonidest.

Analüüsime saadud tulemuste seisukohalt näites 11 ja 12 teostatud interpolatsiooni. Kuna kolmandat järku diferentsid on suuremad kui $\frac{1}{2} \cdot 15$, siis Newtoni ja Stirlingi valemit kasutamise korral ei piisa ruutinterpolatsioonist täpsuse $0,5 \cdot 10^{-5}$ saavutamiseks. Piisab aga küll täpsuse $1 \cdot 10^{-5}$ puhul. Arvutustest näemegi, et kolmandat järku diferentsiga liige on väiksem kui $1 \cdot 10^{-5}$.

Besseli valemi korral aga oleks piisanud ruutinterpolatsioonist, sest $|f_1^3| < 62$. Arvutades kolmandat järku

diferentsiga liikme, näeme, et esimene nullist erinev number on seitsmendas kohas peale koma ja see enam meie täpsusele mõju ei avalda.

§ 4. PÖÖRDINTERPOLATSIOON.

1. Pöördinterpolatsiooni ülesanne. Senini vaatlesime peamiselt probleemi, kuidas leida funktsiooni $f(x)$ väärtus tabelis mitteantud kohal x . Sageli esineb aga ka vastupidine ülesanne: on antud funktsiooni $f(x)$ väärtus, leida vastav argumendi väärtus x . Ka selle, nn. pöördinterpolatsiooni ülesande lahendamiseks saab kasutada eespool tuletatud interpolatsioonivalemeid. Selleks on kaks võimalust.

Kui funktsioon $y = f(x)$ on vaadeldavas piirkonnas monotoonne, siis eksisteerib tema pöördfunktsioon $x = g(y)$. Pöördfunktsiooni tabeli saame, kui vahetame funktsiooni $y = f(x)$ tabelis argumendi ja funktsiooni osad. Pöördinterpolatsiooni ülesannet võime nüüd vaadelda kui pöördfunktsiooni tavalist interpolatsiooniülesannet. Kuna pöördfunktsiooni tabel on üldiselt muutuva tabelisammuga, siis me ei saa mainitud meetodika korral kasutada konstantse sammuga tabelite jaoks tuletatud lihtsamaid interpolatsioonivalemeid. Kuid võime edukalt kasutada Lagrange'i ja üldist Newtoni interpolatsioonivalemit, samuti ka Aitkini interpolatsiooniskeemi.

Kui meil on olemas funktsiooni $y = f(x)$ konstantse sammuga tabel, siis pöördinterpolatsiooni teostamiseks kasutatakse enamasti teist teed: funktsioon $f(x)$ lähendatakse mingi interpolatsioonipolünoomiga $P_n(x)$ ning meid huvitav

argumendi väärtus x leitakse kui võrrandi $P_n(x) = y$ lahend. Võrrandi lahendamiseks kasutatakse iteratsioonimeetodit, mis küllalt tiheda tabeli korral koondub tavaliselt üsna kiiresti. Seda moodust tuleb kasutada ka siis, kui funktsioon pole vaadeldaval lõigul monotoonne.

Olgu antud konstantse sammuga tabel. Pöördinterpolatsiooni teostamiseks vaatleme võrrandi lahendamist lähemalt Stirlingi interpolatsioonipolünoomi puhul (analoogiline ka teiste polünoomide puhul):

$$f(x) = f_0 + t f_0^1 + \frac{t^2 t(t^2-1)}{2 \cdot 6} f_0^3 + \dots$$

Tarvis on leida x , kui on teada, et $f(x) = y$. Esimalt leiame vastava t . Selleks avaldame saadud võrrandist esimest järku diferentsi ees oleva t

$$(25) \quad t = \frac{y - f_0}{f_0^1} - \frac{t^2}{2} \frac{f_0^2}{f_0^1} - \frac{t(t^2-1)}{6} \frac{f_0^3}{f_0^1} - \dots$$

Alglähendiks võtame võrrandi (25) parema poole esimese liikme

$$t_0 = \frac{y - f_0}{f_0^1}.$$

Pannes selle võrrandi (25) paremasse poolde, saame uue lähendi t_1 :

$$t_1 = \frac{y - f_0}{f_0^1} - \frac{t_0^2}{2} \frac{f_0^2}{f_0^1} - \frac{t_0(t_0^2 - 1)}{6} \frac{f_0^3}{f_0^1} - \dots$$

Samal viisil leiame lähendist t_1 uue lähendi t_2 jne. Enamikul juhtudel saadud lähendite jada koondub kiiresti ja piirväärtusena saame võrrandi täpse lahendi. Praktiliselt

lõpetame lähendite leidmise siis, kui eelmisest lähendist lähtudes saame uue lähendi, mis ühtib eelmisega nõutava täpsuse piirides.

Otsitava x väärtuse saame seosest

$$x = x_0 + th.$$

On ilmne, et vastuse viga sõltub interpoleerimisveast ja võrrandi lahendamise veast. Muidugi ei saa nõuda vastuselt suuremat täpsust kui seda võimaldab interpolatsioonipolünoom ja tabeli täpsus. Kui oletada, et interpoleerimisviga ei ületa tabeli viga, siis võime võrrandi lahendis t õigeks lugeda ainult niipalju kümnendkohti, kui seda võimaldab iteratsiooni eeskirja esimeses liikmes usaldatavate kümnendkohtade arv.

M ä r k u s : Analoogiliselt võib teostada ka pöördinterpolatsiooni üldise Newtoni interpolatsioonipolünoomi korral, millest saame

$$x = x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f(x_0, x_1)} - (x - x_0)(x - x_1) \frac{f(x_0, x_1, x_2)}{f(x_0, x_1)} - \dots$$

N ä i d e 14. Kasutades näites 11 toodud $\sin x$ tabelit, leida $\arcsin 0,29$.

Selle ülesande korral on kõige sobivam kasutada Stirlingi interpolatsioonipolünoomi, sest valides $x_0 = 0,30$, peaks t väärtus olema lähemal nullile kui poolele. Et $y = 0,29$, siis valemist (25) saame

$$t = \frac{0,29 - 0,29552}{0,04775} + \frac{0,00074}{2 \cdot 0,04775} t^2 + \frac{0,000125}{6 \cdot 0,04775} t(t^2 - 1) + \dots$$

ehk

$$t = -0,1156 + 0,0077t^2 + 0,0004t(t^2 - 1) + \dots$$

(esimeses liikmes on usaldatavaid kümnendkohti 3).

Ilmselt siin kolmas liige ei mõjуста oluliselt täpsust ja lõplikult saame

$$t = -0,1156 + 0,0077t^2.$$

Alglähendiks on

$$t_0 = -0,1156.$$

Leiame uue lähendi

$$t_1 = -0,1156 + 0,0077 t_0^2 = -0,1156 + 0,0001 = -0,1155.$$

Et usaldatavaid kümnendkohti oli ainult 3, siis kaks järjestikust lähendit ühtivad täpsusega 10^{-3} . Seega võrrandi lahendiks loeme

$$t = -0,116.$$

Leiame x:

$$x = 0,30 + 0,05 t = 0,2942.$$

2. Võrrandite ligikaudne lahendamine. Pöördinterpolatsioon leiab laialdast kasutamist ka võrrandite ligikaudsel lahendamisel. Lineaarne pöördinterpolatsioon kahe erineva sõlme kasutamisega on tuntud võrrandite ligikaudse lahendamise teoorias kõõlude meetodi (regula falsi) nime all ning ühe kahekordse sõlme korral - Newtoni meetodi nime all (vt. [7], lk. 73). Viimati nimetatud raamatus on antud ka pöördinterpolatsiooni kasutamise võtte võrrandite lahendamiseks (lk. 82 - 84) ning toodud näide transtsendentse võrrandi kohta (lk. 84 - 85).

Toome veel näite, kuidas leida algebralise võrrandi lahendeid kasutades pöördinterpolatsiooni.

N ä i d e 15. Leida võrrandi $x^3 - 3x + 1 = 0$ juur, mis asetseb vahemikus $(0;1)$.

Koostame diferentsiskeemi sammuga $0,1$, kusjuures polünoomi väärtuste arvutamiseks võime kasutada asjaolu, et kolmanda astme polünoomi kolmandat järku diferentsid on võrdsed. Seetõttu arvutame polünoomi väärtused ainult 4 punktis $(0; 0,1; 0,2; 0,3)$ ja koostame vastava diferentsiskeemi (tabel 18). Võttes nüüd kõik kolmandat järku diferentsid võrdseteks, arvutame teist järku diferentsid, edasi esimest järku ja lõpuks funktsiooni enda väärtused (funktsiooni väärtused on täpsed).

T a b e l 18.

x_i	f_i	f_i^1	f_i^2	f_i^3
0,0	1,000	-299		
0,1	0,701	-293	6	6
0,2	0,408	-281	12	6
0,3	0,127	-263	18	6
0,4	-0,136	-239	24	6
0,5	-0,375	-209	30	6
0,6	-0,584	-173	36	6
0,7	-0,757	-131	42	6
0,8	-0,888	- 83	48	6
0,9	-0,971	- 29	54	
1,0	-1,000			

Funktsioon muudab märki vahemikus $(0,3; 0,4)$. Seega tema nullkoht asetseb seal, oletuste kohaselt vahemiku keskel. Võttes $x_0 = 0,3$ peaks t olema lähedane poolele ning seetõttu on sobiv antud polünoom välja kirjutada Besseli interpolatsioonipolünoomina:

$$0 = 0,127 - 0,263t + 0,0105t(t - 1) + 0,001t(t - 1)(t - \frac{1}{2}) .$$

Siit

$$t = \frac{0,127}{0,263} + \frac{0,0105}{0,263} t(t - 1) + \frac{0,001}{0,263} t(t - 1)(t - \frac{1}{2})$$

ehk

$$t = 0,482\ 889\ 73 + 0,039\ 923\ 95t(t - 1) + 0,003\ 802\ 28t(t - 1)(t - 0,5) .$$

Sümbolites:

$$t = a + bt(t - 1) + ct(t - 1)(t - 0,5) .$$

Kordajates a, b ja c võib võtta kui tahes palju kümnendkohti, sest diferentsid on täpsed. Mainime, et saadud võrrand on samaväärne lähtevõrrandiga.

Alglähendiks on

$$t_0 = 0,482\ 889\ 73 .$$

Arvutame t_1 :

$$\begin{aligned} a &= 0,482\ 889\ 73 \\ bt_0(t_0 - 1) &= -0,009\ 969\ 30 \\ ct(t - 1)(t - 0,5) &= 0,000\ 016\ 25 \\ \hline t_1 &= 0,472\ 936\ 68 . \end{aligned}$$

Edasi leiame uue lähendi t_2 :

$$a = 0,482\ 889\ 73$$

$$bt_1(t_1 - 1) = -0,009\ 951\ 75$$

$$ct_1(t_1 - 1)(t_1 - 0,5) = 0,000\ 025\ 65$$

$$t_2 = 0,472\ 963\ 63 .$$

Järgmiseks lähendiks t_3 saame:

$$a = 0,482\ 889\ 73$$

$$bt_2(t_2 - 1) = -0,009\ 951\ 80$$

$$ct_2(t_2 - 1)(t_2 - 0,5) = 0,000\ 025\ 62$$

$$t_3 = 0,472\ 963\ 55 .$$

Arvutame veel ühe lähendi t_4 :

$$a = 0,482\ 889\ 73$$

$$bt_3(t_3 - 1) = -0,009\ 951\ 80$$

$$ct_3(t_3 - 1)(t_3 - 0,5) = 0,000\ 025\ 62$$

$$t_4 = 0,472\ 963\ 55 .$$

Kaks viimast lähendit ühtivad. Seega

$$t = 0,472\ 963\ 6$$

ja

$$x = 0,347\ 296\ 36 .$$

Koondumine toimus kiiresti: kolme lähendiga saavutati täpsus 10^{-8} .

§ 5. MITMEMUUTUJA FUNKTSIOONIDE

INTERPOLEERIMINE.

1. Üldküsimus. Mitmemuutuja funktsioonide interpoleerimine on tunduvalt keerulisem kui ühemuutuja funktsioonide interpoleerimine. Siin kohtame tervet rida uusi raskusi.

Piirdume lühiduse mõttes ainult kahemuutuja funktsioonide vaatlemisega. Olgu antud $n + 1$ punkti - nn. interpolatsioonisõlmed

$$(x_0, y_0); (x_1, y_1); \dots; (x_n, y_n)$$

ja funktsiooni $z = f(x, y)$ väärtused neis sõlmedes. Otsime x ja y suhtes madalaima astmega hulkliiget $P_m(x, y)$, mis antud $n + 1$ sõlmes saaks võrdseks etteantud funktsiooni väärtustega $f(x_1, y_1)$, s.t.

$$P_m(x_1, y_1) = f(x_1, y_1) \quad (i = 0, 1, \dots, n) .$$

Otsitava polünoomi võime kirjutada kujul:

$$P_m(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ + \dots + a_{m0}x^m + a_{m-1,1}x^{m-1}y + \dots + a_{0m}y^m .$$

Pannes siia antud sõlmede koordinaadid ja võrdsustades parema poole vastava funktsiooni väärtusega $f(x_1, y_1)$, saame $n + 1$ lineaarset võrrandit $1 + 2 + 3 \dots + (m + 1) = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$ tundmatute a_{ij} suhtes. Järelikult, kui lähendpolünoomi $P_m(x, y)$ kohta ei ole mingit täiendavat tingimust, siis tuleb võtta

$$n + 1 = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2) .$$

See aga tähendab, et me ei saa enam ülesannet lahendada suvalise interpolatsioonisõlmede arvu korral.

Näiteks, et lähendada antud funktsiooni lineaarse polünoomiga on tarvis 3 punkti, ruutpolünoomiga - 6 punkti, kuuppolünoomiga - 10 punkti jne.

Kui aga vaadelda saadud lineaarse võrrandisüsteemi kordajate determinante

$$\begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\
 (3 \text{ punkti} - \\
 \text{lineaarne lä-} \\
 \text{hendus})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0 y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 \end{vmatrix} \\
 (6 \text{ punkti} - \text{ruutlähendus})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \text{jne.,} \\
 \\
 \end{array}$$

siis selgub, et lineaarsele lähendusele vastav determinant saab nulliks, kui kõik kolm punkti asetsevad ühel ja samal sirgel (anal. geomeetria kursus). Edasi, ruutlähendi determinant saab aga nulliks, kui kõik 6 punkti asetsevad ühel ja samal teist järku joonel, kuuplähendil - kõik 10 punkti ühel ja samal kolmandat järku kõveral jne.

Näeme, et interpolatsiooni ei saa teostada ka suvalise punktide asetuse korral. Kui eespool toodud tingimused on täidetud, võib konstrueerida interpolatsioonipolünoomi, kuid nad on küllaltki kogukad (vt. näiteks [1], lk. 181).

2. Teine lähenemisviis. Vaatleme hoopis uut lähenemist

kahemuutuja funktsioonide interpoleerimisprobleemile, mis põhineb ühemuutuja interpolatsioonipolünoomide kasutamisel kahemuutuja funktsioonide lähenemiseks. Seejuures me loobume nõudest, et interpolatsioonipolünoom oleks madalaimaastmeline.

Olgu meil antud järgmine interpolatsioonisõlmede süsteem

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$$y_j = y_0 + jg \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

koos funktsiooni $z = f(x, y)$ väärtustega neis sõlmedes (tabel 19).

T a b e l 19.

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	z_{00}	z_{10}	z_{20}	$\dots$	z_{n0}
y_1	z_{01}	z_{11}	z_{21}	$\dots$	z_{n1}
y_2	z_{02}	z_{12}	z_{22}	$\dots$	z_{n2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	z_{0m}	z_{1m}	z_{2m}	$\dots$	z_{nm}

Funktsiooni $f(x, y)$ ligikaudse väärtuse mingis punktis (x, y) , mis ei lange kokku interpolatsioonisõlmedega, võib leida järgmiselt: algul interpoleerime antud funktsiooni kui ühemuutuja funktsiooni, näiteks x suhtes fikseeritud y_j ($j = 0, 1, \dots, m$) väärtuse korral. Seega tuleb

teostada x suhtes $m + 1$ interpolatsioon, kusjuures iga kord kasutame ainult üht rida eespool toodud sõlmede süsteemist. Nii me saame leida $f(x, y_j)$ ($j = 0, 1, \dots, m$) ligikaudsed väärtused. Nüüd aga teostame leitud $f(x, y_j)$ ligikaudsete väärtuste kaudu interpolatsiooni y suhtes. Siin on tarvis teha ainult üks interpolatsioon, mille tulemusena saamegi $f(x, y)$ ligikaudse väärtuse.

M ä r k u s : Interpoleerimist oleks võinud teostada ka teises järjekorras; enne $n + 1$ interpolatsiooni y suhtes ja hiljem üks interpolatsioon x suhtes.

Allpool selgitame ülal toodut näitega kahemuutuja funktsiooni korral.

N ä i d e 16. Leida teist liiki elliptilise integraali $E(\alpha, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi} d\psi$ väärtus punktis $(35^\circ; 36^\circ)$, kui $E(\alpha, \varphi)$ on antud järgmise tabeliga:

$\varphi \backslash \alpha$	20°	40°	60°
30°	0,5209	0,5141	0,5061
35°	0,6067	0,5960	0,5833
40°	0,6921	0,6763	0,6575

Teostame esmalt interpolatsiooni muutuja α suhtes. Fikseerides $\varphi = 30^\circ$ saame diferentskeemi, mis on toodud tabelis 20.

T a b e l 20.

$$\varphi = 30^\circ$$

α	E	E^1	E^2
20°	0,5209		
40°	0,5141	-68	-12
60°	0,5061	-80	

Valides $x_0 = 40^\circ$ saame Stirlingi polünoomist

$$E(35^\circ, \varphi_1) = E_0 - \frac{1}{4} E_0^1 + \frac{1}{32} E_0^2,$$

sest

$$t = \frac{35^\circ - 40^\circ}{20^\circ} = -\frac{1}{4}.$$

Arvutame $E(35^\circ, 30^\circ)$:

$$E_0 = 0,5141$$

$$- \frac{1}{4} E_0^1 = 18.5$$

$$\frac{1}{32} E_0^2 = - .4$$

$$E(35^\circ, 30^\circ) = 0,5159.1$$

Analoogiliselt teeme fikseerides $\varphi = 35^\circ$ (tabel 21).

T a b e l 21.

$$\varphi = 35^\circ$$

α	E	E^1	E^2
20°	0,6067		
40°	0,5960	-107	-20
60°	0,5833	-127	

$$E_0 = 0,5960$$

$$-\frac{1}{4} E_0^1 = 29.2$$

$$\frac{1}{32} E_0^1 = - .6$$

$$E(35^\circ, 35^\circ) = 0,5988.6 .$$

Ning $\varphi = 40^\circ$ korral saame (tabel 22):

T a b e l 22.

$$\varphi = 40^\circ$$

α	E	E^1	E^2
20°	0,6921	-158 -188	-30
40°	0,6763		
60°	0,6575		

$$E_0 = 0,6763$$

$$-\frac{1}{4} E_0^1 = 43.2$$

$$\frac{1}{32} E_0^2 = - .9$$

$$E(35^\circ, 40^\circ) = 0,6805.3 .$$

Nüüd teostame veel interpolatsiooni φ suhtes (tabel 23).

T a b e l 23.

φ	E	E^1	E^2
30°	0,51591	8295 8167	-128
35°	0,59886		
40°	0,68053		

Valime $x_0 = 35^\circ$,

siis

$$t = \frac{36^\circ - 35^\circ}{5^\circ} = \frac{1}{5}$$

ning Stirlingi polünoomist saame

$$E(35^\circ, 36^\circ) = E_0 + \frac{1}{5}E_0^1 + \frac{1}{50}E_0^2.$$

Arvutame ta välja:

$$E_0 = 0,5988.6$$

$$\frac{1}{5}E_0^1 = 164.6$$

$$\frac{1}{50}E_0^2 = - .3$$

$$E(35^\circ, 36^\circ) = 0,6153..$$

Lõpuks peatume veel kahemuutuja funktsioonide lineaarsel interpolatsioonil. Nimelt on siin sobiv kasutada arvutusskeemi, mis on antud tabelis 24.

T a b e l 24.

$y \backslash x$	x_0	x	x_1	
y_0	$f(x_0, y_0)$	$f(x, y_0)$	$f(x_1, y_0)$	f_1^1
y		$f(x, y)$		
y_1	$f(x_0, y_1)$	$f(x, y_1)$	$f(x_1, y_1)$	f_2^1
		f_3^1		

Seda arvutusskeemi tuleb mõista järgmiselt: antud on funktsiooni $z = f(x, y)$ 4 väärtust $f(x_0, y_0)$; $f(x_1, y_0)$;

$f(x_0, y_1)$ ja $f(x_1, y_1)$. Leida $f(x, y)$. Selleks interpoleerime esmalt horisontaalses suunas. Leiame $f_1^1 =$

$= f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)$ ja lineaarse interpoleerimise teel

$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + t f_1^1$. Samuti leiame $f_2^1 = f(x_1, y_1) -$

$- f(x_0, y_1)$ ja $f(x, y_1) = f(x_0, y_1) + t f_2^1$. ($t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$).

Nüüd interpoleerime vertikaalsuunas. Leiame

$f_3^1 = f(x, y_1) - f(x, y_0)$ ja lõpuks $f(x, y) = f(x, y_0) + t' f_3^1$.

$$(t' = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}).$$

Toome näite selle arvutusskeemi rakendamiseks.

N ä i d e 17. Leida esimest liiki elliptilise inte-

graali $F(\alpha, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}$ väärtus punktis

$F(15^\circ, 24^\circ)$ järgmise tabeli abil:

$\varphi \backslash \alpha$	10°	20°
20°	0,3493	0,3499
25°	0,4367	0,4379

Koostame skeemi (tabel 25) eespool kirjeldatu järgi.

T a b e l 25.

	10°	15°	20°	
20°	0,3493	0,3496	0,3499	6
24°		0,4198	0,4378	12
25°	0,4367	0,4373	0,4379	12
		877		

Seega, $F(15^\circ, 24^\circ) = 0,4198$.

II. NUMBRILINE DIFERENTSEERIMINE.

Numbrilise diferentseerimise all mõeldakse tabelina esitatud funktsiooni tuletise väärtuse arvutamist. Tihti kasutatakse numbrilist diferentseerimist ka siis, kui funktsiooni analüütiline avaldis on küll antud, kuid tema tuletise väärtuse arvutamine nõuab palju arvutamist. Neil juhtudel asendatakse antud funktsioon $f(x)$ mingi tema lähendfunktsiooniga $\phi(x)$ ja leitakse lähendfunktsiooni tuletis.

Olgu

$$f(x) = \phi(x) + R(x),$$

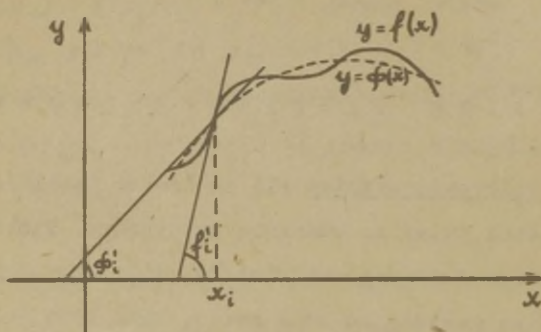
kus $R(x)$ on lähendfunktsiooni jääkliige, siis pärast k -kordset diferentseerimist (muidugi eeldades, et $f(x)$ ja $\phi(x)$ k -järku tuletised eksisteerivad) saame

$$f^{(k)}(x) = \phi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Antud funktsiooni $f(x)$ k -järku tuletise $f^{(k)}(x)$ väärtuseks võtame $\phi^{(k)}(x)$ väärtuse, kusjuures tema viga iseloomustaks diferentseerimisvalemi jääkliige $R^{(k)}(x)$.

Siinjuures peab mainima, et numbriline diferentseerimine viib sageli küllaltki suurtele vigadele, eriti kõrgemat järku tuletise korral. Tõepoolest, kahe funktsiooni väärtuste lähedus lõigul $[a, b]$ ei garanteeri veel nende tuletiste

väärtuste lähedust. Näiteks esimest järku tuletised - puutujate tõusud - võivad erineda funktsiooni väärtuste ühtimisel (joon. 2).



Joon. 2.

Käesolevas peatükis vaatleme ainult neid numbrilise diferentseerimise valemid, mis saadakse interpolatsioonivalemitest diferentseerimise teel.

§ 1. NUMBRILINE DIFERENTSEERIMINE MUUTUVA

TABELISAMMU KORRAL.

Olgu antud funktsiooni $f(x)$ väärtused sõlmedes x_i ($i = 0, 1, \dots, n$). Et leida $f(x)$ tuletiste väärtust mingis punktis x , asendame ta Newtoni interpolatsioonivalemiga

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)f''(x_0, x_1, x_2) + \dots + \\ & + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f^{(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n) + R_n(x) \end{aligned}$$

ning diferentseerime

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= f(x_0, x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0, x_1, x_2) + \\
 &+ (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \\
 (1) \quad &+ (\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \\
 &+ \dots + (\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-2} + \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}) \cdot \\
 &\cdot f(x_0, x_1, \dots, x_n) + R'_n(x),
 \end{aligned}$$

kus

$$\alpha_i = x - x_i.$$

Valemi (1) parem pool ilma viimase liikmeta võimaldabki meil leida $f'(x)$ ligikaudse väärtuse.

Vajalik arv kordi uuesti diferentseerides saame järkjärgult valemid kõrgemat järku tuletiste ligikaudseks arvutamiseks; näiteks $f''(x)$ jaoks

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 2[f(x_0, x_1, x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \\
 &+ (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots + \\
 (2) \quad &+ (\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \dots + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}) \cdot \\
 &\cdot f(x_0, x_1, \dots, x_n)] + R''_n(x).
 \end{aligned}$$

Üldiselt k -järku ($k < n$) tuletis

$$\begin{aligned}
 f^{(k)}(x) &= k! [f(x_0, x_1, \dots, x_k) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k) \cdot \\
 &\cdot f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \dots + \alpha_k\alpha_{k+1})f(x_0, x_1, \dots, x_{k+2}) + \\
 &+ \dots + (\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1-k} + \dots + \alpha_k\alpha_{k+1} \dots \alpha_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n)] + \\
 &+ R_n^{(k)}(x).
 \end{aligned}$$

Juhul, kui $k = n$, saame eelmise peatüki teises paragrahvis saadud seose tuletise ja diferentsjagatise vahel

$$f^{(n)}(x) = n!f(x_0, x_1, \dots, x_n) + R_n^{(n)}(x) .$$

Vaatame nüüd, kuidas arvutada jääkliikmeid. Eelnevast on teada, et

$$R_n(x) = f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) \omega_{n+1}(x) ,$$

kus x ja $x_1 \in [a, b]$.

Seda seost diferentseerides saame

$$R_n'(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) \omega_{n+1}'(x) + f'(x, x_0, \dots, x_n) \omega_{n+1}(x) .$$

Et

$$f'(x, x_0, \dots, x_n) = f(x, x, x_0, \dots, x_n)$$

(vt. näit. [1], lk. 220), siis

$$R_n'(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) \omega_{n+1}'(x) + f(x, x, x_0, \dots, x_n) \omega_{n+1}(x) .$$

Eeldades, et lõigul $[a, b]$ eksisteerib funktsiooni $f(x)$ $(n+2)$ -järku pidev tuletis, saame

$$(3) \quad R_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \omega_{n+1}'(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!} \omega_{n+1}(x) ,$$

kus ξ_1 ja ξ_2 on mingid punktid lõigul $[a, b]$.

Analoogiliselt võib tuletada numbrilise diferentseerimise valemite jääkliikmed kõrgemat järku tuletiste korral (vt. näit. [1], lk. 221-223); näiteks

$$(4) \quad R_n''(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \omega_{n+1}''(x) + 2 \frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!} \omega_{n+1}'(x) + 2 \frac{f^{(n+3)}(\xi_3)}{(n+3)!} \omega_{n+1}(x) .$$

Üldkuul

$$R_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!} \frac{f^{(n+1+i)}(\xi_i)}{(n+1+i)!} \omega_{n+1}^{(k-i)}(x) ,$$

kue kõik $f_1 \in [a, b]$.

M ä r k u s : Interpolatsioonisõlmedes langeb viimane liige jääkliikmete avaldistes välja, sest $\omega_{n+1}(x_j) = 0$.

N ä i d e 18. Leida $\sin x$ esimene ja teine tuletis kohal $x = 0,1$ ning hinnata tulemuste täpsust, kui $\sin x$ on esitatud tabelina:

x	sin x
0,00	0,00000
0,10	0,09983
0,19	0,18886
0,27	0,26673
0,34	0,33349
0,40	0,38942
0,45	0,43497
0,50	0,47943

Kuna antud funktsiooni tabel on sama, mis näites 8 toodud funktsiooni tabel, siis kasutame ära seal arvutatud diferentsjagatiste skeemi (tabel 9).

Arvutame esimese tuletise. Valemist (1) saame:

$$P_3'(0,1) = f(x_0, x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0, x_1, x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) .$$

$$\text{Et } \alpha_0 = 0,1 , \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{ja} \quad \alpha_2 = -0,09 ,$$

siis

$$P_3'(0,1) = f(x_0, x_1) + 0,1f(x_0, x_1, x_2) - 0,009f(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

ehk

$$f(x_0, x_1) = 0,9983$$

$$0,1f(x_0, x_1, x_2) = -0,0048$$

$$-0,009f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,0015.3$$

$$P_3^*(0,1) = 0,9950 .$$

Hinnates diferentseerimise viga valemiga (3), saame

$$\begin{aligned} |R_3(0,1)| &\leq \frac{M}{4!} |\omega_4^*(0,1)| < \frac{0,27}{24} |(0,1-0)(0,1-0,19)(0,1-0,27)| = \\ &= \frac{0,27 \cdot 0,00153}{24} < 0,2 \cdot 10^{-4} . \end{aligned}$$

Tegelik viga on aga suurem, mis on tingitud diferentsjagatiste ebatäpsusest. Kuna esimest järku diferentsjagatistes (valemi esimeses liikmes) on usaldatavaid kümnendkohti neli, siis saame vastuse õigeks lugeda ainult nelja kümnendkohaga, s.o. täpsusega $1 \cdot 10^{-4}$.

Siinjuures tuleb mainida, et tihedama sammuga tabeli korral on tüvikohtade kadu diferentsjagatistes veelgi suurem, sest toimub funktsiooni lähedaste väärtuste lahutamine. Täpsuse tõstmiseks jäetakse sel juhul osa funktsiooni väärtusi tabelist välja.

Vaatame nüüd teise tuletise arvutamist. Valemist (2) saame arvestades α_0 , α_1 ja α_2 väärtusi

$$P_3^*(0,1) = 2[f(x_0, x_1, x_2) + 0,01f(x_0, x_1, x_2, x_3)]$$

ehk

$$f(x_0, x_1, x_2) = -0,048$$

$$0,01f(x_0, x_1, x_2, x_3) = -0,001.7$$

$$\frac{1}{2}P_3^*(0,1) = -0,049.7 .$$

Siit

$$P_3^*(0,1) = -0,099 .$$

Valemi (4) abil saame hinnata tulemust

$$\begin{aligned} |R_3^*(0,1)| &< \frac{M_4}{4!} |\omega_4^*(0,1)| + 2 \frac{M_5}{5!} |\omega_5^*(0,1)| < \\ &< \frac{0,27}{24} \cdot 2 \cdot |(0,1-0)(0,1-0,19)+(0,1-0)(0,1-0,27) + \\ &+ (0,1-0,19)(0,1-0,27)| + 2 \cdot \frac{1}{120} \cdot 0,00153 = \\ &= \frac{0,27 \cdot 0,0107}{12} + \frac{0,00153}{60} < 0,00029 + 0,00003 < \\ &< 0,3 \cdot 10^{-3} . \end{aligned}$$

Ka siin on tegelik viga suurem, sest teist järku diferentsjagatistes on kümnendkohti ainult kolm. Seega võib viga olla leegi $1 \cdot 10^{-3}$.

Selline erinevus teoreetilise ja praktilise vea vahel on loomulik, seet üks lähtub lähenduspolünoomi täpsusest, teine aga tabelis antud funktsiooni väärtuste täpsusest.

Lihtne on näha, et ka numbrilise diferentseerimise valemite korral võib kasutada vea peaosu määramiseks valemi esimest ärajäetud liiget. Kui aga funktsiooni lähendamise aste on küllaldane (s.t. polünoomi aste on võrdne praktiliselt võrdsete diferentsjagatiste järguga), siis õigete kümnendkohtade arvu tuletise väärtuses määrab numbrilise diferentseerimisvalemi esimene liige.

Lõpuks toome veel võrdluseks nende tuletiste väärtused nelja õige kümnendkohaga

$$\sin^* 0,1 = 0,9950$$

$$\sin^* 0,1 = -0,0998 .$$

§ 2. NUMBRILINE DIFERENTSEERIMINE KONSTANTSE

TABELISAMMU KORRAL.

1. Diferentsidega valemid. Et saada numbrilise diferentseerimise valemeid konstantse tabelisammu korral, asendame $f(x)$ vastava interpolatsioonivalemiga ja diferentseerime teda (võib lähtuda ka eelmises paragrahvis saadud tulemustest, minnes üle diferentsidele ja muutujale t). Järgnevas tuletame valemid esimest ja teist järku tuletiste arvutamiseks. Nende jähkliikmed avalduvad valemitega (3) ja (4). Kõrgemat järku tuletiste arvutamiseks tuleks veel edasi diferentseerida.

Newtoni I interpolatsioonivalemist

$$f(x) = f(x_0 + th) = f_0 + tf_{0,5}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{1,5}^3 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} f_2^4 + \dots$$

saame

$$f'(x) = \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} (f_{0,5}^1 + \frac{2t-1}{2} f_1^2 + \frac{3t^2-6t+2}{6} f_{1,5}^3 + \\ + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12} f_2^4 + \dots)$$

ehk

$$hf'(x) = f_{0,5}^1 + \frac{2t-1}{2} f_1^2 + \frac{3t^2-6t+2}{6} f_{1,5}^3 + \\ (5) \quad + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12} f_2^4 + \dots$$

ning

$$h^2 f''(x) = f_1^2 + (t-1) f_{1,5}^3 + \frac{6t^2-18t+11}{12} f_2^4 + \dots$$

Märgime, et tuletiste arvutamiseks on sobiv x_0 valida x konkreetse väärtuse lähedusest nagu oli interpolatsioonivalemis.

probleemi korral. Kui on aga tarvis leida tuletise väärtust mingis sõlmes, siis valime selle sõlme algsõlmeks x_0 ja seetõttu valemid (5) lihtsustuvad, sest $t = 0$:

$$(6) \quad hf'(x_0) = f_{0,5}^1 - \frac{1}{2}f_1^2 + \frac{1}{3}f_{1,5}^3 - \frac{1}{4}f_2^4 + \dots,$$

$$h^2f''(x_0) = f_1^2 - f_{1,5}^3 + \frac{11}{12}f_2^4 - \dots$$

Newtoni II interpolatsioonivalemit

$$f(x) = f_0 + tf_{0,5}^1 + \frac{t(t+1)}{2!}f_{-1}^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}f_{-1,5}^3 + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}f_{-2}^4 + \dots$$

saame

$$(7) \quad hf'(x) = f_{-0,5}^1 + \frac{2t+1}{2}f_{-1}^2 + \frac{3t^2+6t+2}{6}f_{-1,5}^3 + \\ + \frac{2t^3+9t^2+11t+3}{12}f_{-2}^4 + \dots;$$

$$h^2f''(x) = f_{-1}^2 + (t+1)f_{-1,5}^3 + \frac{6t^2+18t+11}{12}f_{-2}^4 + \dots$$

ning sõlmes $x = x_0$

$$hf'(x_0) = f_{-0,5}^1 + \frac{1}{2}f_{-1}^2 + \frac{1}{3}f_{-1,5}^3 + \frac{1}{4}f_{-2}^4 + \dots;$$

(8)

$$h^2f''(x_0) = f_{-1}^2 + f_{-1,5}^3 + \frac{11}{12}f_{-2}^4 + \dots$$

Kasutades Stirlingi interpolatsioonivalemit

$$f(x) = f_0 + tf_0^1 + \frac{t^2}{2!}f_0^2 + \frac{t(t^2-1)}{3!}f_0^3 + \frac{t^2(t^2-1)}{4!}f_0^4 + \dots$$

saame

$$hf'(x) = f_0^1 + tf_0^2 + \frac{3t^2 - 1}{6} f_0^3 + \frac{t(2t^2 - 1)}{12} f_0^4 \dots ;$$

(9)

$$h^2 f''(x) = f_0^2 + tf_0^3 + \frac{6t^2 - 1}{12} f_0^4 + \dots$$

ning sõlmes $x = x_0$

$$hf'(x_0) = f_0^1 - \frac{1}{6} f_0^3 + \frac{1}{30} f_0^5 - \dots ;$$

$$(10) \quad h^2 f''(x_0) = f_0^2 - \frac{1}{12} f_0^4 + \dots$$

Toome ka numbrilise diferentseerimise valemid, mis saadakse kasutades Besseli interpolatsioonivalemit

$$f(x) = f_0 + tf_{0,5}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_{0,5}^2 + \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{3!} f_{0,5}^3 + \\ + \frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} f_{0,5}^4 + \dots ;$$

$$hf'(x) = f_{0,5}^1 + \frac{2t-1}{2} f_{0,5}^2 + \frac{6t^2-6t+1}{12} f_{0,5}^3 + \\ (11) \quad + \frac{2t^3-3t^2-t+1}{12} f_{0,5}^4 + \dots ;$$

$$h^2 f''(x) = f_{0,5}^2 + \frac{2t-1}{2} f_{0,5}^3 + \frac{6t^2-6t-1}{12} f_{0,5}^4 + \dots$$

Kui võtta eespool toodud valemitest ainult esimene liige, siis saame eelmises peatükis leitud ligikaudse seose tuletise ja diferentsi vahel

$$h^k f^{(k)}(x) \approx f_1^k.$$

N ä i d e 19. Antud on järgmine funktsiooni väärtuste tabel:

x	e^x
0,1	1,10517
0,2	1,22140
0,3	1,34986
0,4	1,49182
0,5	1,64872
0,6	1,82212
0,7	2,01375
0,8	2,22554

Leiada $f'(0,44)$, $f''(0,44)$ ja $f'(0,6)$.

T a b e l 26.

x_1	f_1	f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4
0,1	1,10517				
0,2	1,22140	11623	1223		
0,3	1,34986	12846	1350	127	17
0,4	1,49182	14196	1494	144	12
0,5	1,64872	15690	1650	156	17
0,6	1,82212	17340	1823	173	20
0,7	2,01375	19163	2016	193	
0,8	2,22554	21179			

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

Tuletiste arvutamiseks kohal $x = 0,44$ valime $x_0 = 0,4$.

Siis ka $t = 0,4$ ning sobivamad arvutamiseks on Besseli interpolatsioonivalemist saadud diferentseerimisvalemid (11).

Asendades t väärtuse saame

$$0,1f'(0,44) = f_{0,5}^1 - 0,1f_{0,5}^2 - \frac{0,11}{3} f_{0,5}^3 + \frac{0,062}{3} f_{0,5}^4$$

ja

$$0,01f''(0,44) = f_{0,5}^2 - 0,1f_{0,5}^3 - \frac{0,61}{3} f_{0,5}^4$$

Asendame diferentsid (toodud tabelis 26):

$f_{0,5}^1 = 0,15690$	$f_{0,5}^2 = 0,01572$
$-0,1f_{0,5}^2 = -157.2$	$-0,1 f_{0,5}^3 = -15.6$
$-\frac{0,11}{3}f_{0,5}^3 = -5.7$	$-\frac{0,61}{3} f_{0,5}^4 = -2.9$
$\frac{0,062}{3}f_{0,5}^4 = 0.3$	
	$-0,01 f''(0,44) = 0,01553$

$$0,1 f'(0,44) = 0,15527$$

Seega

$$f'(0,44) = 1,5527$$

ja

$$f''(0,44) = 1,553.$$

(Õigete tüvikohtade arvu määramine esimese liikme abil).

M ä r k u s : Kui mõne tabeli korral esimeses liikmes on vähe tüvikohti, s.t. tabel on küllaltki tihe, siis võib tabelisammu suurendada funktsiooni väärtuste väljajätmise teel.

Tulemuste täpsust võib hinnata valemitega (3) ja (4). Siinjuures aga kasutame järgmist arutelu: on teada, et valemi järgmine liige on eelmisest väiksem. Seega esimene tule-
tis peab olema õige 5 tüvikohaga, teise tuletise neljas tü-
vikoht võib aga olla ka kahtlane.

Et $f'(x) = f''(x) = e^x$, siis võime võrrelda saadud tu-
lemusi ka otseselt. Tabelist saame, et $e^{0,44} = 1,55271$.

Arvutame nüüd tuletise sõlmes $x = 0,6$.

Stirlingi valemist (10) saame:

$$\begin{aligned} f_0^1 &= 0,18251.5 \\ -\frac{1}{6} f_0^3 &= -30.5 \end{aligned}$$

$$0,1 f'(0,6) = 0,18221$$

ja seega

$$f'(0,6) = 1,8221.$$

Kuna tsentraalsed interpolatsioonivalemid (Stirling, Bessel) omasid eeliseid ühepoolsete interpolatsioonivalemite (Newton I ja II) ees, siis on ka numbriliseks diferentseerimiseks soovitav kasutada valemeid (9), (10) ja (11).

2. Diferentseerimine sõlmedes. Tuletise arvutamiseks konstantse tabelisammu korral sõlmes x_1 on sobiv numbrilise diferentseerimise valemid anda funktsiooni väärtuste kaudu. Seejuures kaob vajadus vastava diferentskeemi koostamiseks.

Valemite tuletamisel võib lähtuda ükskõik millisest interpolatsioonivalemist, kusjuures saame sama tulemuse. Näiteks tuletame numbrilise diferentseerimise valemid esimese tuletise arvutamiseks 3 sõlme korral (s.o. lähendamise aste $n = 2$) kasutades Newtoni I interpolatsioonivalemit:

$$f(x) = f_0 + t f_{0,5}^1 + \frac{t(t-1)}{2} f_1^2 + R_2(x).$$

Diferentseerime viimast:

$$f'(x) = \frac{1}{h} (f_{0,5}^1 + \frac{2t-1}{2} f_1^2) + R_2'(x).$$

Silt saame, arvestades, et sõlmes x_0 on $t = 0$, sõlmes x_1 on $t = 1$ ja sõlmes x_2 on $t = 2$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(f_{0,5}^1 - \frac{1}{2} f_1^2) + R_2^1(x_0) ,$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}(f_{0,5}^1 + \frac{1}{2} f_1^2) + R_2^1(x_1) ,$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}(f_{0,5}^1 + \frac{3}{2} f_1^2) + R^1(x_2) .$$

Et selmise peatüki seose (15) põhjal

$$f_{0,5}^1 = f_1 - f_0 \quad \text{ja} \quad f_1^2 = f_2 - 2f_1 + f_0 ,$$

siis

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + R_2^1(x_0) ,$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2) + R_2^1(x_1) ,$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2) + R_2^1(x_2) .$$

Arvutame jääkliikmed. Et $\omega_3(x_1) = 0$, saame valemist (3):

$$\begin{aligned} R_2^1(x_1) &= \frac{f'''(\xi_1)}{6} \omega_3^1(x_1) = \frac{f'''(\xi_1)}{6} \frac{d}{dx} [h^3 t(t-1)(t-2)]_{t=1} = \\ &= \frac{h^3 f'''(\xi_1)}{6} \frac{1}{h} [3t^2 - 6t + 2]_{t=1} . \end{aligned}$$

Silt

$$R_2^1(x_0) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0) ,$$

$$R_2^1(x_1) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi_1) ,$$

$$R_2^1(x_2) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2) ,$$

kus ξ_0, ξ_1 ja ξ_2 on mingid punktid vahemikus (x_0, x_2) .

Kui tähistada $f'(x_1) = f_1'$, saame lõpuks

$$f'_0 = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0),$$

$$(12) f'_1 = \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1),$$

$$f'_2 = \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2).$$

Analoogiliselt võib tuletada valemid ka teistsuguse sõlmede arvu korral (samuti kõrgemat järku tuletiste arvutamiseks).

Veenduda, et lähtudes mingist teisest interpolatsioonivalemist, näiteks Stirlingi valemist, jõuame samade valemiteni!

Alljärgnevalt toome ilma tõestuseta veel mõningad numbrilise diferentseerimise valemid sõlmedes.

Esimest järku tuletise arvutamiseks

2 sõlme ($n = 1$):

$$f'_0 = \frac{1}{h}(-f_0 + f_1) - \frac{h}{2} f''(\xi);$$

$$f'_1 = \frac{1}{h}(-f_0 + f_1) + \frac{h}{2} f''(\xi);$$

3 sõlme ($n = 2$):

$$f'_0 = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi);$$

$$f'_1 = \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi);$$

$$f'_2 = \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2) - \frac{h^2}{3} f'''(\xi);$$

4 sõlme ($n = 3$):

$$f'_0 = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi);$$

$$f'_1 = \frac{1}{6h}(-2f_0 - 3f_1 + 6f_2 - f_3) + \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi);$$

$$f_2' = \frac{1}{6h} (f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi);$$

$$f_3' = \frac{1}{6h} (-2f_0 - 9f_1 - 18f_2 + 11f_3) + \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi);$$

5 sölme ($n = 4$):

$$f_0' = \frac{1}{12h} (-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4) + \frac{h^4}{5} f^V(\xi);$$

$$f_1' = \frac{1}{12h} (-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4) - \frac{h^4}{20} f^V(\xi);$$

$$f_2' = \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) + \frac{h^4}{30} f^V(\xi);$$

$$f_3' = \frac{1}{12h} (-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4) - \frac{h^4}{20} f^V(\xi);$$

$$f_4' = \frac{1}{12h} (3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4) + \frac{h^4}{5} f^V(\xi);$$

6 sölme ($n = 5$):

$$f_0' = \frac{1}{60h} (-137f_0 + 300f_1 - 300f_2 + 200f_3 - 75f_4 + 12f_5) - \frac{h^5}{6} f^{VI}(\xi);$$

$$f_1' = \frac{1}{60h} (-12f_0 - 65f_1 + 120f_2 - 60f_3 + 20f_4 - 3f_5) + \frac{h^5}{30} f^{VI}(\xi);$$

$$f_2' = \frac{1}{60h} (3f_0 - 30f_1 - 20f_2 + 60f_3 - 15f_4 + 2f_5) - \frac{h^5}{60} f^{VI}(\xi);$$

$$f_3' = \frac{1}{60h} (-2f_0 + 15f_1 - 60f_2 + 20f_3 + 30f_4 - 3f_5) + \frac{h^5}{60} f^{VI}(\xi);$$

$$f_4' = \frac{1}{60h} (3f_0 - 20f_1 + 60f_2 - 120f_3 + 65f_4 + 12f_5) - \frac{h^5}{30} f^{VI}(\xi);$$

$$f_5' = \frac{1}{60h} (-12f_0 + 75f_1 - 200f_2 + 300f_3 - 300f_4 + 137f_5) + \frac{h^5}{6} f^{VI}(\xi);$$

7 sölme ($n = 6$):

$$f_0' = \frac{1}{60h} (147f_0 + 360f_1 - 450f_2 + 400f_3 - 225f_4 + 72f_5 - 10f_6) + \frac{h^6}{7} f^{VII}(\xi);$$

$$f_1' = \frac{1}{60h} (-10f_0 - 77f_1 + 150f_2 - 100f_3 + 50f_4 - 15f_5 - 2f_6) - \frac{h^6}{42} f^{VII}(\xi);$$

$$\begin{aligned}
f_2^I &= \frac{1}{60h} (2f_0 - 24f_1 - 35f_2 + 80f_3 - 30f_4 + 8f_5 - f_6) + \frac{h^6}{105} f^{VII}(\xi); \\
f_3^I &= \frac{1}{60h} (-f_0 + 9f_1 - 45f_2 + 45f_4 - 9f_5 + f_6) - \frac{h^6}{140} f^{VII}(\xi); \\
f_4^I &= \frac{1}{60h} (f_0 - 8f_1 + 30f_2 - 80f_3 + 35f_4 + 24f_5 - 2f_6) + \frac{h^6}{105} f^{VII}(\xi); \\
f_5^I &= \frac{1}{60h} (-2f_0 + 15f_1 - 50f_2 + 100f_3 - 150f_4 + 77f_5 + 10f_6) - \frac{h^6}{242} f^{VII}(\xi); \\
f_6^I &= \frac{1}{60h} (10f_0 - 72f_1 + 225f_2 - 400f_3 + 450f_4 - 360f_5 + 147f_6) + \frac{h^6}{7} f^{VII}(\xi).
\end{aligned}$$

Teist järku tuletise arvutamiseks

3 sõlme ($n = 2$):

$$\begin{aligned}
f_0'' &= \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) - hf'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{IV}(\xi_2); \\
f_1'' &= \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi); \\
f_2'' &= \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) + hf'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{IV}(\xi_2);
\end{aligned}$$

4 sõlme ($n = 3$):

$$\begin{aligned}
f_0'' &= \frac{1}{h^2} (2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3) + \frac{11}{12} h^2 f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^3}{10} f^V(\xi_2); \\
f_1'' &= \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + 6f_2) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi_1) + \frac{h^3}{30} f^V(\xi_2); \\
f_2'' &= \frac{1}{h^2} (6f_1 - 2f_2 + f_3) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} f^V(\xi_2); \\
f_3'' &= \frac{1}{h^2} (-f_0 + 4f_1 - 5f_2 + 2f_3) + \frac{11}{12} h^2 f^{IV}(\xi_1) + \frac{h^3}{10} f^V(\xi_2);
\end{aligned}$$

5 sõlme ($n = 4$):

$$\begin{aligned}
f_0'' &= \frac{1}{12h^2} (35f_0 - 104f_1 + 114f_2 - 56f_3 + 11f_4) - \frac{5}{6} h^3 f^V(\xi_1) + \frac{h^4}{15} f^{VI}(\xi_2); \\
f_1'' &= \frac{1}{12h^2} (11f_0 - 20f_1 + 6f_2 + 4f_3 - f_4) + \frac{h^3}{12} f^V(\xi_1) - \frac{h^4}{60} f^{VI}(\xi_2); \\
f_2'' &= \frac{1}{12h^2} (-f_0 + 16f_1 - 30f_2 + 16f_3 - f_4) + \frac{h^3}{90} f^V(\xi_1) + \frac{h^4}{90} f^{VI}(\xi_2);
\end{aligned}$$

$$f_3'' = \frac{1}{12h^2}(-f_0 + 4f_1 + 6f_2 - 20f_3 + 11f_4) - \frac{h^3}{12}f^V(\xi_1) - \frac{h^4}{60}f^{VI}(\xi_2);$$

$$f_4'' = \frac{1}{12h^2}(11f_0 - 56f_1 + 114f_2 - 104f_3 + 35f_4) + \frac{5h^3}{6}f^V(\xi_1) + \frac{h^4}{15}f^{VI}(\xi_2);$$

7 sölme ($n = 6$):

$$f_0'' = \frac{1}{180h^2}(812f_0 - 3132f_1 + 5265f_2 - 5080f_3 + 2970f_4 - 972f_5 + 137f_6) - \frac{7h^5}{10}f^{VII}(\xi_1) + \frac{h^6}{28}f^{VIII}(\xi_2);$$

$$f_1'' = \frac{1}{180h^2}(137f_0 - 147f_1 - 255f_2 + 470f_3 - 285f_4 + 93f_5 - 13f_6) + \frac{11h^5}{180}f^{VII}(\xi_1) - \frac{h^6}{168}f^{VIII}(\xi_2);$$

$$f_2'' = \frac{1}{180h^2}(-13f_0 + 228f_1 - 420f_2 + 200f_3 + 15f_4 - 12f_5 + 2f_6) - \frac{h^5}{90}f^{VII}(\xi_1) + \frac{h^6}{420}f^{VIII}(\xi_2);$$

$$f_3'' = \frac{1}{180h^2}(2f_0 - 27f_1 + 270f_2 - 490f_3 + 270f_4 - 27f_5 + 2f_6) - \frac{h^6}{560}f^{VIII}(\xi);$$

$$f_4'' = \frac{1}{180h^2}(2f_0 - 12f_1 + 15f_2 + 200f_3 - 420f_4 + 228f_5 - 13f_6) + \frac{h^5}{90}f^{VII}(\xi_1) + \frac{h^6}{420}f^{VIII}(\xi_2);$$

$$f_5'' = \frac{1}{180h^2}(-13f_0 + 93f_1 - 285f_2 + 470f_3 - 255f_4 - 147f_5 + 137f_6) - \frac{11h^5}{180}f^{VII}(\xi_1) - \frac{h^6}{168}f^{VIII}(\xi_2);$$

$$f_6'' = \frac{1}{180h^2}(137f_0 - 972f_1 + 2970f_2 - 5080f_3 + 5265f_4 - 3132f_5 + 812f_6) + \frac{7h^5}{10}f^{VII}(\xi_1) + \frac{h^6}{28}f^{VIII}(\xi_2).$$

Vaadeldes väljakirjutatud valemeid märkame, et jääkliikme kordajad on väiksemad lõigu keskesmates sölmedes. Seega

suurima täpsuse annavad keskmised valemid. Eriti sobiv on kasutada paarituarvuliste sõlmede korral keskmist valemit, eest tal on kesksõlme suhtes ka funktsiooni kordajate absoluutväärtused võrdsed. Tihti nimetatakse neid tsentraalse- teks diferentseerimise valemiteks ning võetakse keskmine sõlm algsõlmeks x_0 . Valemite võib siis kirjutada järgmiselt (näiteks 5 sõlme korral):

$$f'_0 = \frac{1}{12h} [8(f_1 - f_{-1}) - (f_2 - f_{-2})] + \frac{h^4}{30} f^{IV}(\xi);$$

$$f''_0 = \frac{1}{12h^2} [-30f_0 + 16(f_1 + f_{-1}) - (f_2 + f_{-2})] + \frac{h^4}{90} f^{VI}(\xi).$$

Kui praktikas on mõnikord tarvis numbrilise diferentseerimise valemiteid ka kõrgemat järku tuletiste arvutamiseks, siis võib kasutada õpikut [14], kus nad on toodud kuni kuenda järguni ja kuni 9 sõlmeni.

N ä i d e 20. Arvutada näites 19 esitatud funktsiooni väärtuste tabeli abil $f'(0,2)$, $f'(0,5)$ ja $f''(0,5)$.

Et sõlme 0,2 korral ei ole võimalik kasutada tsentraalset valemit, siis valime eespool toodud valemitest niisugase, millel on üks sõlm vasakul ja ülejäänud paremal, näiteks viiesõlmeline valem

$$f'_1 \approx \frac{1}{12h} (-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4).$$

Asendame funktsiooni väärtused:

$$\begin{array}{rcl} -3f_0 & = & -3,31551 \\ -10f_1 & = & -12,21400 \\ 18f_2 & = & 24,29748 \\ -6f_3 & = & -8,95092 \\ f_4 & = & 1,64872 \\ \hline 1,2f'(0,2) & = & 1,46577. \end{array}$$

Siit

$$f'(0,2) = 1,46577:1,2 = 1,22146$$

(tulemuse täpsust saab võrrelda tabelist).

Tuletiste arvutamiseks sõlmes 0,5 kasutame tsentraalseid valemeid. Esimese tuletise arvutamiseks:

$$f'_0 \approx \frac{1}{12h} [8(f_1 - f_{-1}) - (f_2 - f_{-2})] .$$

Asendame funktsiooni väärtused:

$f_1 = 1,82212$	$f_2 = 2,01375$
$-f_{-1} = -1,49182$	$-f_{-2} = -1,34986$
0,33030	0,66389 ,

$$f'(0,5) = \frac{1}{1,2} (8 \cdot 0,33030 - 0,66389) = 1,97851:1,2 = 1,64876 .$$

Teise tuletise arvutamiseks kasutame valemit

$$f''_0 \approx \frac{1}{12h^2} [-30f_0 + 16(f_1 + f_{-1}) - (f_2 + f_{-2})] .$$

Asendame funktsiooni väärtused:

$-30f_0 = -49,46160$
$16(f_1 + f_{-1}) = 53,02304$
$-(f_2 + f_{-2}) = -3,36361$
0,19783 .

Seega

$$f''(0,5) = 0,19783:0,12 = 1,6486 .$$

Hinnates viga eespool toodud valemitega, saame veamääraks sama suurusjärgu, mida näeme otsesel võrdlemisel.

Tuletame siinjuures veel meelde, et numbriline diferent-

seerimine viib märgatavalt suurematele vigadele kui interpolatsioon. Eriti siis, kui tabel on üsna tihe või kui on tarvis leida kõrgemat järku tuletisi.

III. N U M B R I L I N E I N T E G R E E R I M I N E .

Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$ ja on teada tema algfunktsioon $F(x)$, mille korral $F'(x) = f(x)$, siis määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ arvutamiseks saab kasutada Newtoni-Leibnizi valemit

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Alati aga ei ole võimalik algfunktsiooni $F(x)$ leida elementaarfunktsioonina ning seetõttu on raske või isegi võimatu integraali väärtust nimetatud valemiga arvutada. Ka kaotab mõtte Newtoni-Leibnizi valemi rakendamine juhul, kui integraalialuse funktsioon $f(x)$ on esitatud tabelina. Nii-sugustel juhtudel pöörduetakse ligikaudsete integreerimisvõtete juurde.

Laialdast kasutamist on leidnud numbriline integreerimine, mille all mõeldakse määratud integraali ligikaudse väärtuse arvutamist integraalialuse funktsiooni või selle

teatud teguri väärtuste järgi. Näiteks ühekordse integraali korral kasutatakse sageli valemit:

$$(1) \quad \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) .$$

Valemit (1) nimetatakse ka kvadratuurvalemiks, tema parameetreid c_i aga kvadratuurvalemi kordajateks ja x_i - kvadratuurvalemi sõlmedeks ehk abstsissideks. Tavaliselt valitakse kvadratuurvalemi sõlmed lõigul $[a, b]$ ja nad numeeritakse kasvavas järjekorras, s.t.

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n .$$

Valemis (1) on esitatud integraalialune funktsioon kahe funktsiooni $p(x)$ ja $f(x)$ korrutisena, milledest esimest nimetatakse kaalufunktsiooniks. Sellise esituse eesmärgiks on sobivate kvadratuurvalemite saamine ka juhul, kui integraalialune funktsioon või tema tuletised on lõigul $[a, b]$ tõkestamata või katkevad. Nimelt kvadratuurvalemite saamisel lähendatakse funktsioon $f(x)$ polünoomidega, mis on hästi teostatav ainult juhul, kui funktsioon on pidev ja teatud arv kordi pidevalt diferentseeruv.

Kaalufunktsioon $p(x)$ valitakse vastavalt integreeritava funktsiooni iseärasustele. Igale kaalufunktsioonile vastab teatud kvadratuurvalemite klass. Järgnevas nõuame kaalufunktsioonilt, et

- 1) ta on lõigul $[a, b]$ mittenegatiivne, s.t. $p(x) \geq 0$,
- 2) eksisteerivad integraalid

$$\int_a^b p(x)x^i dx \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \text{ ja}$$

3) integraal kaalufunktsioonist lõigul $[a, b]$ on positiivne, s.t. $\int_a^b p(x)dx > 0$.

Eriti levinud on kaalufunktsioonidena $p(x) = 1$, $p(x) = (b-x)^\alpha \cdot (x-a)^\beta$ ($\alpha > -1, \beta > -1$), $p(x) = e^{-x^2}$ ja $p(x) = x^\alpha \cdot e^{-x}$ ($\alpha > -1$).

Integreerimislõik $[a, b]$ võib olla ka lõpmatu. Nii kasutataksegi kaalufunktsioone e^{-x^2} ja $x^\alpha e^{-x}$ vastavalt integreerimispiirkondade $(-\infty, +\infty)$ ja $[0, +\infty)$ korral.

Valemi (1) vasaku ja parema poole erinevust

$$R(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

nimetatakse kvadratuurvalemi jääkliikmeks. Analoogilised valemid võib konstrueerida ka kordsete integraalide arvutamiseks. Käesolevas kursuses me neil üksikasjaliselt ei peatu. Viimases paragrahvis vaatleme ainult kvadratuurvalemite rakendamist kahekordsete integraalide arvutamiseks.

§ 1. INTERPOLATSIOONITÜÜPI KVADRATUURVALEMID.

1. Kvadratuurvalemite konstrueerimine. Tihti kasutatakse kvadratuurvalemite saamiseks funktsiooni lähendamist interpolatsiooni polünoomidega. Niimoodi saadud kvadratuurvalemid annavad küllaltki hea täpsuse ja on ka käsitluselt lihtsad. Vaatleme üldjuhul nende valemite konstrueerimist.

Valime integreerimislõigul $[a, b]$ n sõlme: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Olgu teada neis sõlmedes ka $f(x)$ väärtused. Funktsiooni $f(x)$ asendame interpolatsioonivalemi abil

$$f(x) = P(x) + R(x),$$

kus

$$P(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) ,$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

ja $R(x)$ —interpolatsioonivalemi jääkliige.

Seega saame

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)P(x)dx + \int_a^b p(x)R(x)dx .$$

Kui interpolatsioonipolünoom $P(x)$ küllalt täpselt lähendab funktsiooni $f(x)$, siis jääkliikme $R(x)$ väärtused on väikesed ja me võime võrdusest viimase liikme ära jätta, s.t.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \int_a^b p(x)P(x)dx .$$

Arvutame parempoolse integraali:

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)P(x)dx &= \int_a^b p(x) \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b p(x)L_i(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) , \end{aligned}$$

kus

$$(2) \quad c_i = \int_a^b p(x)L_i(x)dx .$$

Et $L_i(x)$ on polünoom, siis kaalufunktsiooni $p(x)$ kohta püstitatud eeldused kindlustavad integraalide $\int_a^b p(x)L_i(x)dx$ eksisteerimise.

Numbrilise integreerimise valemit

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) ,$$

mille kordajad c_1 arvutatakse valemiga (2), nimetatakse interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemiks.

Nagu näeme, on interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemi sõlmede valik vaba lõigul $[a, b]$, mida võib ära kasutada ühe või teise eesmärgi saavutamiseks. Tema kordajad aga tähtsavad tingimust

$$(3) \quad \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i ,$$

s.t. kvadratuurvalemi kordajate summa on võrdne integraaliga kaalufunktsioonist. (Saame nõudest, et valem (1) oleks täpne $f(x) \equiv 1$ korral).

Vaatame, millal on interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem täpne.

T e o r e e m : Selleks, et valem (1) oleks interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem, on tarvilik ja piisav, et ta oleks täpne mis tahes ülimalt $(n-1)$ -astme polünoomi $f(x)$ korral.

T a r v i l i k k u s : Olgu valem (1) interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem. Kui $f(x)$ on ülimalt $(n-1)$ -astme polünoom, siis võrdusest $f(x) = P(x) + R(x)$ järel-
dub, et $R(x) \equiv 0$. Seega ka $\int_a^b p(x)R(x)dx = 0$ ja valem (1) on täpne.

P i i s a v u s : Olgu valem (1) täpne, kui $f(x)$ on mis tahes ülimalt $(n-1)$ -astme polünoom. Siis peab ta olema täpne ka polünoomi

$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)},$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

korral. Pannes $L_k(x)$ valemisse (1) saame:

$$\int_a^b p(x)L_k(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i L_k(x_i) = c_k,$$

s.t. valem (1) on interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem.

Sellega on ka teoreem tõestatud.

Edaspidi räägime, et kvadratuurvalem (1) on m -astme täpsusega, kui ta annab täpse tulemuse suvalise m -astme polünoomi korral, kuid ei anna täpset tulemust $(m+1)$ -astme polünoomi korral. Tõestatud teoreemist järeldub, et interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid on n valitud sõlme korral vähemalt $(n-1)$ -astme täpsusega.

2. Kvadratuurvalemi jääkliige. Käesolevas punktis vaatleme kvadratuurvalemi (1) jääkliiget

$$R(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

Seldame, et funktsioon $f(x)$ on lõigul $[a, b]$ $m+1$ korda pidevalt diferentseeruv ja kvadratuurvalem (1) on täpne suvalise m -astme polünoomi $P_m(x)$ korral. Lähendades funktsiooni $f(x)$ polünoomiga $P_m(x)$ saame

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x).$$

Kui kirjutada lähendpolünoom $P_m(x)$ Taylori rea kujul kohal a , siis

$$R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t) dt$$

$(R_m(x))$ on Tayleri valemi jääkliikme integraalne kuju).

Defineerides funktsiooni $K_m(x-t)$ järgmiselt

$$K_m(x-t) = \begin{cases} (x-t)^m, & \text{kui } a \leq t \leq x \\ 0, & \text{kui } t > x, \end{cases}$$

võime jääkliikme kirjutada kujul

$$R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(x-t) f^{(m+1)}(t) dt.$$

Asume kvadratuurvalemi jääkliikme teisendamisele. Kuna

$f(x) = P_m(x) + R_m(x)$, siis

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = \\ &= \int_a^b p(x) P_m(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i P_m(x_i) + \\ &+ \int_a^b p(x) R_m(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i R_m(x_i) = \\ &= \int_a^b p(x) R_m(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i R_m(x_i), \end{aligned}$$

sest kvadratuurvalem oli eelduse põhjal täpne iga m -astme polünoomi korral.

Edasi saame

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b p(x) R_m(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i R_m(x_i) = \\ &= \frac{1}{m!} \int_a^b p(x) \int_a^b K_m(x-t) f^{(m+1)}(t) dt dx - \\ &- \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b K_m(x_i-t) f^{(m+1)}(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m!} \left[\int_a^b f^{(m+1)}(t) \int_a^b p(x) K_m(x-t) dx dt - \right. \\ \left. - \int_a^b f^{(m+1)}(t) \sum_{i=1}^n c_i K_m(x_i-t) dt \right].$$

Integraal

$$\int_a^b p(x) K_m(x-t) dx = \int_t^b p(x) (x-t)^m dx$$

on konkreetse kaalufunktsiooni $p(x)$ korral arvutatav. See-
ga jääkliige on

$$R(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) \left[\int_t^b p(x) (x-t)^m dx - \sum_{i=1}^n c_i K_m(x_i-t) \right] dt.$$

Tähistades

$$(4) \quad F_m(t) = \int_t^b p(x) (x-t)^m dx - \sum_{i=1}^n c_i K_m(x_i-t),$$

saame

$$R(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) F_m(t) dt.$$

Jääkliikme arvutamine saadud valemist on üsna tülikas ning integreerimine on teostatav ainult mõningatel erijuhtudel. Pealegi tuleb iga erineva funktsiooni $f(x)$ korral uuesti integreerida. Et vabaneda sellest, uurime funktsioone

$$F_k(t) = \int_t^b p(x) (x-t)^k dx - \sum_{i=1}^n c_i K_k(x_i-t)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Selgub, et need funktsioonid on lõigul $[a, x_1]$ mittene-
gatiivsed, kui k on paaritu, ja mittepositiivsed, kui k

on paarisarv. Tõestame selle omaduse.

Et $a \leq t \leq x_1$, siis

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \int_t^b p(x)(x-t)^k dx - \sum_{i=1}^n c_i K_k(x_i - t) = \\ &= \int_t^b p(x)(x-t)^k dx - \sum_{i=1}^n c_i (x_i - t)^k = \\ &= \int_t^b p(x)(x-t)^k dx - \int_a^b p(x)(x-t)^k dx = \\ &= - \int_a^t p(x)(x-t)^k dx, \end{aligned}$$

sest $k \leq m$.

Saadud tulemuse märgi määramiseks kasutame üldistatud keskväertusteoreemi (veenduda, et teoreemi eeldused on täidetud!). Kuna antud juhul $(x-t)^k \geq 0$ (säilitab märki integreerimislõigul), siis

$$\begin{aligned} F_k(t) &= - \int_a^t p(x)(x-t)^k dx = -p(\xi) \int_a^t (x-t)^k dx = \\ &= -p(\xi) \frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \Big|_{x=a}^{x=t} = \frac{1}{k+1} p(\xi)(a-t)^{k+1} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} p(\xi)(t-a)^{k+1}, \end{aligned}$$

kus $a \leq \xi \leq x_1$.

Siit selgub, et $F_k(t)$ märgi määrab $(-1)^{k+1}$, sest $p(\xi)(t-a)^{k+1} \geq 0$. Seega eespool püstitatud väide on tõestatud.

Edasi uurides näeme, et saadud tulemust võib üldistada kogu integreerimisloigule $[a, b]$.

Arvutades $P_k'(t)$, saame

$$\begin{aligned} P_k'(t) &= -k \int_t^b p(x)(x-t)^{k-1} dx + k \sum_{i=1}^n c_i K_{k-1}(x_i - t) = \\ &= -k \left[\int_t^b p(x)(x-t)^{k-1} dx - \sum_{i=1}^n c_i K_{k-1}(x_i - t) \right] = \\ &= -k P_{k-1}(t) \quad (k=1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Kasutades saadud tulemust koos valemitega (4) ja (3) ning kaalufunktsiooni eeldusi, arvutame $P_1'(t)$:

$$\begin{aligned} P_1'(t) &= -P_0(t) = - \int_t^b p(x) dx + \sum_{i=1}^n c_i = \\ &= - \int_t^b p(x) dx + \int_a^b p(x) dx = \int_a^t p(x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

kui $t \geq a$ (s.t. $P_1(t)$ on mittekahanev).

Elnevalt saime, et $P_1(t) \geq 0$, kui $a \leq t \leq x_1$. Seega $P_1(t) \geq 0$ kogu loigul $[a, b]$. Edasi: $P_2'(t) = -2P_1(t) \leq 0$, kui $t \geq a$ ($P_2(t)$ – mittekasvav). Kuna $P_2(t) \leq 0$, kui $a \leq t \leq x_1$, siis järeldub, et $P_2(t) \leq 0$ kogu loigul $[a, b]$. Sama mõttekäiku jätkates jõuame tulemuseni, et $P_m(t)$ on loigul $[a, b]$ mittenegatiivne, kui m on paaritu, ja mittepositiivne, kui m on paarisarv.

Siit on selge, et $F_m(t)$ säilitab märki integreerimisloigul $[a, b]$ ning üldistatud keskvaartusteoreemi põhjal saame kvadratuurvalemi jääkliikmeks

$$(5) \quad R(f) = \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{m!} \int_a^b F_m(t) dt ,$$

kus $a \leq \eta \leq b$.

Valemis (5) on integreerimine konkreetse kaalufunktsiooni korral küll teostatav ja ta ei sõltu funktsioonist $f(x)$, kuid ei saa anda η täpset asukohta. Täpse vääramine aga polegi nii oluline. Tähtis on määrata ainult suurusjärg, mida viga ei ületa.

Märkides

$$M_{m+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(m+1)}(x)|$$

ja

$$(6) \quad a_n = \frac{1}{n!} \int_a^b F_m(t) dt ,$$

saame valemist (5)

$$(7) \quad |R(f)| \leq |a_n| \cdot M_{m+1} .$$

Valemit (7) võime kasutada väärtuse ülemmäära leidmiseks. Kordaja a_n ei sõltu funktsioonist $f(x)$ ja teda võib konkreetse kvadratuurvalemi korral alati arvutada. (Edaspidi anname vastavate valemite korral ka nende jääkliikmete kordajad a_n).

Saadud kvadratuurvalemi jääkliige (5) sobib kõigi edaspidi vaadeldavate interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemite korral, sest me ei teinud valemite kohta ühtki kitsendust. Isegi täpsuse astme m jätsime lahtiseks.

§ 2. NEWTONI-COTESI KVADRATUURVALEMID.

1. Valemite tuletamine. Vaatleme interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemeid, kui sõlmed $x_1, x_2, \dots, x_n$ valida lõigul $[a, b]$ võrdsete vahemike tagant, s.o. $x_{i+1} - x_i = h$ (h - nn. tabelisamm). Seejuures eeldame, et lõik $[a, b]$ on lõplik ja kaalufunktsioon $p(x) \equiv 1$.

Vaatleme kahte võimalikku sõlmede valikut:

- 1) x_1 ja x_n ühtivad integreerimisrajadega,
- 2) x_1 ja x_n asetsevad integreerimisrajadest kaugusel h .

Esimesel juhul on integreerimisrajad kvadratuurvalemi sõlmedeks ja h leidmiseks tuleb integreerimisvahemik jagada $n - 1$ võrdseks osaks, s.t.

$$h = \frac{b - a}{n - 1}.$$

Sõlmed valime järgmiselt:

$$x_1 = a, \quad x_2 = x_1 + h, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

Teisel juhul ei ole integreerimisrajad kvadratuurvalemi sõlmedeks ning h leidmiseks jagame integreerimisvahemiku $n + 1$ võrdseks osaks:

$$h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Sõlmedeks valime:

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = x_1 + h, \quad \dots, \quad x_n = b - h.$$

Kvadratuurvalemeid, mille äärmised sõlmed ühtivad integreerimisrajadega, nimetatakse kinnisteks kvadratuurvalemiteks. Neid aga, mille äärmised sõlmed ei asetse integreeri-

misraja del, nimetatakse lahtisteks kvadratuurvalemiteks.

Seega esimest tüüpi kvadratuurvalemid on kinnised, teised aga lahtised.

Nüüd võime asuda kvadratuurvalemi kordajate arvutamisele valemiga (2), kuna sõlmede asetus on kindlaks määratud. Kahjuks aga tuleb need erinevate rajade korral eraldi arvutada. Sellest vabanemiseks vahetame muutujat

$x = x_0 + th$, kus $x_0 = x_1 - h$. Siis integreerimispiirkond on:

esimesel juhul $[1, n]$ ja

teisel juhul $[0, n + 1]$.

Et järgnevas tõestuses mitte korrata, võtame integreerimislõiguks $[1 - k, n + k]$, kus $k = 0$ vastab esimesele (kinnisele) juhule ja $k = 1$ - teisele (lahtisele) juhule.

Valemist (2) saame

$$c_1 = \int_a^b L_1(x) dx = h \int_{1-k}^{n+k} L_1(x_0 + th) dt,$$

kus

$$h = \frac{b - a}{n - 1 + 2k}$$

ja

$$L_1(x_0 + th) = \frac{(t-1)(t-2) \dots [t-(i-1)][t-(i+1)] \dots (t-n)}{(i-1)(i-2) \dots 1 \cdot (-1) \dots (i-n)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(i-1)!(n-1)!} (t-1)(t-2) \dots (t-i+1)(t-i-1) \dots (t-n)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Tähistades

$$(8) \quad A_1 = \frac{1}{n-1+2k} \int_{1-k}^{n+k} L_1(x_0 + th) dt,$$

on

$$c_1 = (b-a)A_1$$

ja kvadratuurvalemist (1) saame

$$(9) \quad \int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) .$$

Valemit (9) nimetatakse Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemiks. Tema kordajad A_1 arvutatakse valemiga (8). Nad ei sõltu funktsioonist $f(x)$ ega integreerimisrajadest.

Kerge on näha, et

$$\sum_{i=1}^n A_i = 1 \quad (\text{veenduda selles!})$$

ja

$$A_{n+1-i} = A_i ,$$

s.t. Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemi kordajate summa on üks ja lõigu keskpunkti suhtes sümmeetriliselt asetsevates sõlmedes on kordajad võrdsed. Viimase tõestamiseks vahetame valemis (8) muutujat $x = b + 1 - y$. (Läbi teha!)

Valides valemi tüübi ja konkreetse sõlmede arvu n võime leida kordajad A_1 . Näitena arvutame nad lahtise valemitüübi jaoks, kui $n = 3$. Siis

$$L_1(x_0+th) = \frac{1}{2}(t-2)(t-3) = \frac{1}{2}(t^2-5t+6);$$

$$L_2(x_0+th) = -(t-1)(t-3) = -(t^2-4t+3);$$

$$L_3(x_0+th) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2) = \frac{1}{2}(t^2-3t+2)$$

ja Newtoni-Cotesi valemi kordajateks saame

$$A_1 = \frac{1}{8} \int_0^4 (t^2-5t+6)dt = \frac{2}{3};$$

$$A_2 = -\frac{1}{4} \int_0^4 (t^2-4t+3)dt = -\frac{1}{3};$$

$$A_3 = \frac{1}{8} \int_0^4 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{2}{3}.$$

Tabelites 27 ja 28 toome Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemi (9) kordajad A_i n väärtuste puhul 2 kuni 9. Et nad on harilikud murrud, siis kirjutame ühise nimetaja tabeli viimasesse veergu, lugejad aga vastava indeksi 1 veergu. Kasutades kordajate omadust $A_i = A_{n+1-i}$ anname nad ainult esimese poole jaoks.

Kinnist tüüpi valemid ($k = 0$).

T a b e l 27.

n \ i	1	2	3	4	5	Nimetaja
2	1					2
3	1	4				6
4	1	3				8
5	7	32	12			90
6	19	75	50			288
7	41	216	27	272		840
8	751	3577	1323	2989		17280
9	989	5888	-928	10496	-4540	28350

Lahtist tüüpi valemid ($k = 1$).

T a b e l 28.

n \ i	1	2	3	4	5	Nimetaja
2	1					2
3	2	-1				3
4	11	1				24
5	11	-14	26			20
6	611	-453	562			1440
7	460	-954	2196	-2459		945
8	1787	-2803	4967	-1711		4480
9	4045	-11690	33340	-55070	67822	9072

Enne kui asuda Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemi jääkliikme kordajate leidmisele, tuleb kindlaks teha valemi täpsusaste. Kuna valem (9) on interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem, siis eelmises paragrahvis tõestatud teoreemi kohaselt ei saa ta täpsusaste olla väiksem kui $n - 1$.

Tõestame, et paaritu sõlmede arvu n korral on kvadratuurvalem (9) täpne ka n -astme polünoomi korral.

Vaatleme erijuhtu, kui integreerimislõiguks on $[-1, 1]$. Kvadratuurvalemist (9) saame:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx 2 \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) .$$

Valem on täpne, kui $f(t)$ on suvaline ülimalt $(n-1)$ -astme polünoom $P_{n-1}(t)$. Teistel juhtudel viga

$$R(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt - 2 \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) .$$

$$\text{Olgu } f(t) = P_n(t) = P_{n-1}(t) + b_n t^n$$

(b_n - suvaline konstant). Teisendame jääkliiget $R(f)$:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_{-1}^1 P_n(t) dt - 2 \sum_{i=1}^n A_i P_n(t_i) = \\ &= b_n \int_{-1}^1 t^n dt - 2 b_n \sum_{i=1}^n A_i t_i^n = \\ &= b_n \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} - 2 \sum_{i=1}^n A_i t_i^n \right] . \end{aligned}$$

Esimene liige on null, kui n on paaritu arv. Vaatame teist liiget. Et Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemi sõlmed aset-

sevad sümmeetriliselt integreerimislõigu keskpunkti suhtes, siis antud juhul asetsevad nad sümmeetriliselt 0-punkti suhtes. Seega 0-punktist võrdsel kaugusel olévad sõlmed erinevad ainult märgi poolest. Kui n on paaritu, siis ka t_1^n väärtused erinevad ainult märgi poolest. Nende kordajad on aga võrdsed. Siit järeldub, et $\sum_{i=1}^n A_i t_i^n = 0$ ja samuti $R(f) = 0$.

Et lihtsa muutuja vahetusega

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

võib teisendada integreerimislõigu $[a, b]$ lõiguks $[-1, 1]$, siis väide on õige ka üldjuhul.

Siit on ilmne, et paaritu sõlmede arvu n korral on Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemi (9) täpsusaste n , aga sõlmede paaris arvu n korral $-n-1$. See tähendab,

kui $n = 2$, siis valem (9) on täpne suvalise lineaarse polünoomi korral;

kui $n = 3, 4$, siis suvalise kuuppolünoomi korral;

kui $n = 4, 5$, siis suvalise viienda astme polünoomi korral jne.

Teinud kindlaks Newtoni-Cotesi valemi täpsusastme, võime arvutada tema jääkliikme valemiga (5). Näitena arvutame jääkliikme lahtise valemitüübi jaoks, kui $n = 3$. Valem on täpne ülimalt 3. astme polünoomi korral ($m = 3$).

Jääkliikme kordaja a_3 leiame valemist (6)

$$a_3 = \frac{1}{3!} \int_a^b F_3(t) dt,$$

kus $F_3(t)$ on antud valemiga (4):

$$F_3(t) = \int_t^b (x-t)^3 dx - \sum_{i=1}^3 c_i K_3(x_i-t) =$$

$$= \frac{(b-t)^4}{4} - (b-a) \sum_{i=1}^3 A_i K_3(x_i-t) .$$

Arvutame $\sum_{i=1}^3 A_i K_3(x_i-t) .$

Et

$$A_1 = \frac{2}{3} , \quad A_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad A_3 = \frac{2}{3} ,$$

siis

$$\sum_{i=1}^3 A_i K_3(x_i-t) = \frac{2}{3}(x_1-t)^3 - \frac{1}{3}(x_2-t)^3 + \frac{2}{3}(x_3-t)^3, \quad \text{kui } a \leq t \leq x_1;$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i K_3(x_i-t) = -\frac{1}{3}(x_2-t)^3 + \frac{2}{3}(x_3-t)^3, \quad \text{kui } x_1 \leq t \leq x_2 ;$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i K_3(x_i-t) = \frac{2}{3}(x_3-t)^3, \quad \text{kui } x_2 \leq t \leq x_3 \quad \text{ja}$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i K_3(x_i-t) = 0, \quad \text{kui } x_3 \leq t \leq b .$$

Arvestades $\sum_{i=1}^3 A_i K_3(x_i-t)$ avaldisi saame

$$\int_a^b F_3(t) dt = \int_a^{x_1} \left\{ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{3} [2(x_1-t)^3 - (x_2-t)^3 + 2(x_3-t)^3] \right\} dt +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{3} [-(x_2-t)^3 + 2(x_3-t)^3] \right\} dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_2}^{x_3} \left[\frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{3} \cdot 2(x_3-t)^3 \right] dt + \int_{x_3}^b \frac{(b-t)^4}{4} dt = \\
& = \int_a^b \frac{(b-t)^4}{4} dt - \frac{b-a}{3} \left[2 \int_a^{x_1} (x_1-t)^3 dt - \int_a^{x_2} (x_2-t)^3 dt + \right. \\
& \left. + 2 \int_a^{x_3} (x_3-t)^3 dt \right] = \frac{(b-a)^5}{20} - \frac{b-a}{3} \left[\frac{1}{2}(x_1-a)^4 - \frac{1}{4}(x_2-a)^4 + \frac{1}{2}(x_3-a)^4 \right] = \\
& = \frac{(4h)^5}{20} - \frac{4h}{3} \left[\frac{1}{2}h^4 - \frac{1}{4}(2h)^4 + \frac{1}{2}(3h)^4 \right] = \\
& = \frac{256}{5} h^5 - \frac{4 \cdot 37}{3} h^5 = \frac{28}{15} h^5,
\end{aligned}$$

kus $h = \frac{b-a}{4}$.

Arvutades a_3 saame:

$$a_3 = \frac{14}{45} h^5$$

ning seega jääkliige on

$$R(f) = \frac{14}{15} h^5 f^{IV}(\eta),$$

kus $a \leq \eta \leq b$.

Tabelis 29 on toodud Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemi jääkliikmed n väärtuste puhul 2 kuni 9.

Näiliselt paistab, et kinnise valemi jääkliikmete kordajad on väiksemad. Tegelikult see ei pruugi nii olla, sest h on erinev. Näiteks $n = 2$ korral on kinnise valemi jääkliikme kordajaks $-\frac{(b-a)^3}{12}$, aga lahtise puhul $\frac{(b-a)^3}{36}$.

Toome näite Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemite rakendamisest.

N ä i d e 21. Arvutada integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ väärtus Newtoni-

Cotesi kinnise ja lahtise valemiga, kui $n = 5$ ning leida nende vead.

T a b e l 29.

n	a_n		$f^{(m+1)}(\eta)$
	Kinnine valem ($k = 0$)	Lahtine valem ($k = 1$)	
2	$-\frac{1}{12} h^3$	$-\frac{3}{4} h^3$	$f''(\eta)$
3	$-\frac{1}{90} h^5$	$\frac{14}{45} h^5$	$f^{(4)}(\eta)$
4	$-\frac{3}{80} h^5$	$\frac{95}{144} h^5$	$f^{(4)}(\eta)$
5	$-\frac{8}{945} h^7$	$\frac{41}{140} h^7$	$f^{(6)}(\eta)$
6	$-\frac{275}{12096} h^7$	$\frac{5257}{8640} h^7$	$f^{(6)}(\eta)$
7	$-\frac{9}{1400} h^9$	$\frac{3956}{14175} h^9$	$f^{(8)}(\eta)$
8	$-\frac{8183}{518400} h^9$	$\frac{25713}{44800} h^9$	$f^{(8)}(\eta)$
9	$-\frac{2368}{467775} h^{11}$	$\frac{80335}{299376} h^{11}$	$f^{(10)}(\eta)$

Arvutame esmalt kinnise valemiga. Sel korral saame

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \sum_{i=1}^5 \frac{A_i}{1+x_i} = \frac{1}{90} \sum_{i=1}^5 \frac{90A_i}{1+x_i}$$

(90 - kordajate ühine nimetaja), $h = \frac{1}{4}$. Arvutusteks kasutame tabelit 30. Seal on tähistatud

$$\sum = \sum_{i=1}^5 \frac{90A_i}{1+x_i}.$$

T a b e l 30 .

1	x_1	$1 + x_1$	$90A_1$	$\frac{90A_1}{1 + x_1}$
1	0	1	7	7,00000
2	1/4	5/4	32	25,60000
3	1/2	3/2	12	8,00000
4	3/4	7/4	32	18,28571
5	1	2	7	3,50000

$$\Sigma = 62,38571$$

Seega

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{\Sigma}{90} = 62,38571:90 = 0,69317 .$$

Valemi viga on

$$R(f) = -\frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(\eta) \quad (0 \leq \eta \leq 1) .$$

Et $f^{(6)}(\eta)$ täpset väärtust pole võimalik arvutada, siis leiame $f^{(6)}(x)$ maksimaalse väärtuse lõigul $[0,1]$.

Tähistades

$$M_6 = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(6)}(x)| ,$$

saame

$$|R(f)| \leq \frac{8}{945} h^7 M_6 .$$

Et $f(x) = \frac{1}{1+x}$, siis $f^{(6)}(x) = \frac{6!}{(1+x)^7}$ ja $M_6 = 6!$.

Seega

$$|R(f)| \leq \frac{8 \cdot 6!}{945 \cdot 4^7} = \frac{1}{2688} < 0,00038 .$$

Arvestades viimast, pole mingit mõtet lõppvastuses säi-

litada viiendat kümnendkohta. Järelikult

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,6932$$

veaga mitte üle 4 viimase koha ühiku.

Leiame nüüd sama integraali väärtuse lahtise valemiga.

Siis

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \sum_{i=1}^5 \frac{A_i}{1+x_i} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^5 \frac{20A_i}{1+x_i}$$

ja $h = 1/6$.

Koostame tabeli 31.

T a b e l 31 .

1	x_1	$1 + x_1$	$20A_1$	$\frac{20A_1}{1+x_1}$
1	1/6	7/6	11	9,42857
2	1/3	4/3	-14	-10,50000
3	1/2	3/2	26	17,33333
4	2/3	5/3	-14	- 8,40000
5	5/6	11/6	11	6,00000

$$\Sigma = 13,86190$$

Seega

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{\Sigma}{20} = 13,86190:20 = 0,69310 .$$

Hindame viga

$$|R(f)| \leq \frac{41}{140} h^7 M_6 = \frac{41.61}{140.6^7} = \frac{41}{54432} < 0,00076.$$

Ka siin pole mõtet säilitada viiendat kümnendkohta ja vastu-

seks saame

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,6931$$

vea ülemmääraga $\pm 0,0008$.

2. Runge meetod vea ligikaudseks hindamiseks. Kvadratuurvalemi jääkliikme abil vea otsene hindamine on mõningatel juhtudel päris raske ülesanne. Eriti siis, kui $f^{(m+1)}(x)$ kuju pole lihtne. Kuigi meil õnnestub leida tema maksimaalne väärtus, ei saa me väita, et saadud viga on arvutuste tegelik viga (leidsime ju vea ülemmäära). Tegelik viga võib olla tunduvalt väiksem. Seda kinnitab ka näites 21 saadud tulemuste võrdlemine integraali täpse väärtusega $\ln 2 = 0,69315$.

Praktikas on leidnud laialdast kasutamist vea ligikaudse hindamise meetod, mis on antud saksa matemaatiku C.Runge poolt.

Valime integraali arvutamiseks mingi n sõlmega kvadratuurvalemi. Kui tähistada tabelisamm H , integraali täpne väärtus I , kvadratuurvalemiga saadud integraali väärtus I_H ja jääkliige R_H , siis

$$I = I_H + R_H.$$

Kvadratuurvalemi jääkliiget võime aga kirjutada kujul

$$R_H = aM^k,$$

kus a on mingi konstant, k - fikseeritud arv ja M - funktsiooni $f(x)$ $(k-1)$ -järku tuletise väärtus integreerimisloigu mingis punktis.

Vähendame tabelisammu kaks korda (uus tabelisamm $h = \frac{1}{2} H$) ja arvutame selle integraali väärtuse sama kvadratuurvalemiga. Seejuures tuleb meil valemil rakendada kaks korda, s.t. integreerimislõik jagada kaheks võrdses osaks ja integreerida kummalgi poollõigul eraldi. Liites osaintegraalid saame integraali väärtuseks I_h . Tähistades vea R_h , võime kirjutada

$$I = I_h + R_h,$$

kus

$$R_h = aM_1 h^k + aM_2 h^k.$$

Kui funktsiooni $f(x)$ $(k-1)$ -järku tuletis vaadeldaval lõigul palju ei muutu, siis $M \approx M_1 \approx M_2$ ja

$$R_h \approx 2aMh^k = \frac{aMh^k}{2^{k-1}}.$$

Võrdsustades I väärtused

$$I_H + aMh^k \approx I_h + \frac{aMh^k}{2^{k-1}}$$

saame

(10)

$$R_H \approx \frac{2^{k-1}(I_h - I_H)}{2^{k-1} - 1}.$$

Runge veahinnangu eeliseks on see, et ei ole vaja leida funktsiooni tuletise väärtust ja seetõttu on ta eriti sobiv kasutamiseks elektronarvutitel. Saadud veahinnangu abil on võimalik arvutuste täpsust tõsta liites integraali ligikaudsele väärtusele tema vea.

On selge, et tihedama tabelisammuga arvutatud integraali väärtus I_h on täpsem. Veahinnangu tema kohta saame vale-

mist (10), kui arvestada, et $R_H \approx 2^{k-1} R_h$. Seega

$$(11) \quad R_h \approx \frac{I_h - I_H}{2^{k-1} - 1}.$$

Kui liita I_h väärtusele tema veahinnang R_h , siis parandame integraali täpsust veel umbes ühe tüvikoha võrra.

Runge meetodit vea hindamiseks ja integraali väärtuse parandamiseks vaatleme järgmises näites.

N ä i d e 22. Leida Runge meetodi abil näites 21 arvutatud integraali viga (kinnise valemi jaoks) ja parandada viimase abil integraali täpsust.

Varem leidsime, et

$$I_H = \frac{1}{90} \sum_{i=1}^5 \frac{90A_i}{1+x_i} = \frac{\Sigma}{90} \quad (H = \frac{1}{4}).$$

Arvutame I_h . Antud juhul $h = \frac{1}{8}$ ja

$$I_h = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Et

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x} = \frac{0,5-0}{90} \sum_{i=1}^5 \frac{90_1}{1+x_i} = \frac{\Sigma_1}{180}$$

ja

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1-0,5}{90} \sum_{i=1}^5 \frac{90A_i}{1+x_i} = \frac{\Sigma_2}{180},$$

siis

$$I_h = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{180}.$$

Arvutused on tabelis 32.

T a b e l 32.

x_1	$1 + x_1$	$90A_1$	$\frac{90A_1}{1+x_1}$	$90A_1$	$\frac{90A_1}{1+x_1}$
0	1	7	7,0000000	7	7,0000000
1/8	9/8	32	28,4444444		
1/4	5/4	12	9,6000000	32	25,6000000
3/8	11/8	32	23,2727273		
1/2	3/2	7	4,6666667	12	8,0000000
5/8	13/8	32	19,6923077		
3/4	7/4	12	6,8571429	32	18,2857143
7/8	15/8	32	17,0666667		
1	2	7	3,5000000	7	3,5000000

$$\Sigma_1 = 72,9838384$$

$$\Sigma = 62,3857143$$

$$\Sigma_2 = 51,7827840$$

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = 124,7666224$$

M ä r k u s : Summa Σ_1 saamiseks liidame viis esimest arvu ja Σ_2 saamiseks viis viimast arvu.

Kasutades tabeli tulemusi, saame

$$I_h = 124,766\ 622\ 4 : 180 = 0,693\ 147\ 9$$

ja

$$I_H = 62,385\ 714\ 3 : 90 = 0,693\ 174\ 6 .$$

Viimase vea võime arvutada valemi (10) järgi. Jäakliikme avaldisest saame, et antud juhul $k = 7$. Seega

$$R_H \approx \frac{64(0,693\ 147\ 9 - 0,693\ 174\ 6)}{63} =$$

$$= - \frac{64 \cdot 0,000\ 026\ 7}{63} = -0,000\ 027\ 1.$$

Saadud tulemusest näeme, et eelmises näites arvutatud integraali viga on umbes 0,00003, aga mitte 0,00038.

Integraali parandatud väärtus on

$$I_H + R_H = 0,693\,174\,6 - 0,000\,027\,1 = 0,693\,147\,5.$$

Võrreldes täpse tulemusega $\ln 2 = 0,693\,147\,2$ on integraali arvutamise viga ainult $3 \cdot 10^{-7}$.

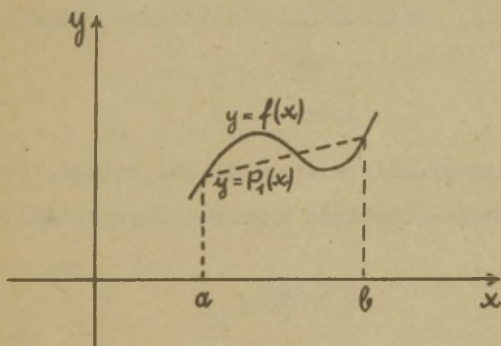
3. Trapets-, Simpsoni ja 3/8-valem. Vaatleme Newtoni-Cotesi kinniseid kvadratuurvalemeid, kui $n = 2, 3$ ja 4 .

Esimesel juhul, s.t. $n=2$ korral kvadratuurvalem omandab kuju

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

ja teda nimetatakse trapetsvalemiks.

Valemi nimi on seotud tema geomeetrilise tõlgendusega. Kuna funktsioon $f(x)$ lähendatakse $n=2$ korral lineaarse polünoomiga (sirgega), siis $f(x)$ poolt lõigul $[a, b]$ kujundatud pindala asendatakse trapetsi pindalaga (joon. 3).



Joon. 3.

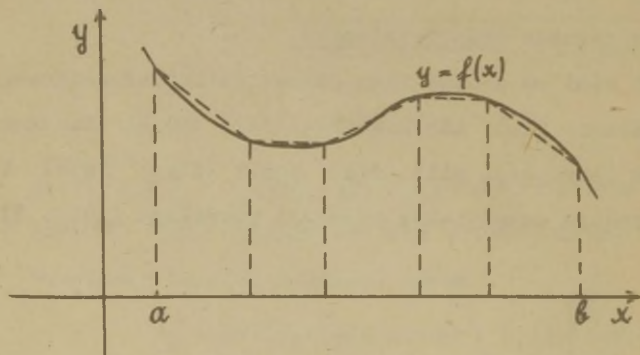
Trapetsvalemi jääkliige on

$$R(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta),$$

kus $a < \eta < b$ ja $h = b-a$.

Kui funktsiooni $f(x)$ ei saa hästi lähendada lõigul $[a, b]$ sirgega, siis trapetsvalemi viga $R(f)$ on küllaltki suur. Vea vähendamiseks jagame kogu integreerimisloigu $[a, b]$ osalõikudeks ja rakendame igale osalõigule eraldi trapetsvalem.

Geomeetriliselt see tähendab, et kõverat $y = f(x)$ lähendatakse teatava murdjoonega (joon. 4).



Joon. 4.

Vaatleme integraali arvutamist, kui valida võrdsed osalõigud. Olgu nende osalõikude arv m . Siis osalõigu pikkus on

$$h = \frac{b-a}{m}.$$

Märgime osalõikude otspunktid $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m = b$ ja funktsiooni $f(x)$ väärtused vastavalt $f_0, f_1, f_2, \dots, f_m$.

Summeerides osaintegraalid

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_{i-1} + f_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

saame

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{m-1} + f_m).$$

Viimast valemit nimetatakse Üldistatud trapetsvalemiks.

Arvutamiseks on sobiv anda talle kujm:

$$(12) \quad \int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{m-1} + \frac{1}{2} f_m \right).$$

Üldistatud trapetsvalemi jääkliikme saame, kui liidame osaintegraalide jääkliikmed, s.o.

$$R(f) = -\frac{h^3}{12} [f''(\eta_1) + f''(\eta_2) + \dots + f''(\eta_m)],$$

kus $x_{i-1} \leq \eta_i \leq x_i$. Kui $f''(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$, siis

$$f''(\eta_1) + f''(\eta_2) + \dots + f''(\eta_m) = mf''(\eta) \quad (a \leq \eta \leq b)$$

ning üldistatud trapetsvalemi jääkliige

$$R(f) = -\frac{mh^3}{12} f''(\eta),$$

kus $a \leq \eta \leq b$ ja $h = \frac{b-a}{m}$.

Vea hindamiseks võime kasutada ka Runge meetodit. Valides $H = 2h$ (võimalik ainult paarisarvulise m korral), saame valemist (11)

$$R_h \approx \frac{I_h - I_H}{3}.$$

N ä i d e 23. Kasutades trapetsvalemit leida integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ligikaudne väärtus ja tema tõenäoline viga, kui

$m = 10$.

Integraali ligikaudse väärtuse arvutame valemi (12) abil ja tema tõenäolise vea Runge meetodi järgi. Arvutused on tabelis 33 sammuga $h = \frac{1-0}{10} = 0,1$.

T a b e l 33.

x_1	$1 + x_1$	$f_i = \frac{1}{1+x_1}$		
0	1	1,00000	0,50000	0,50000
0,1	1,1	0,90909	0,90909	
0,2	1,2	0,83333	0,83333	0,83333
0,3	1,3	0,76923	0,76923	
0,4	1,4	0,71429	0,71429	0,71429
0,5	1,5	0,66667	0,66667	
0,6	1,6	0,62500	0,62500	0,62500
0,7	1,7	0,58824	0,58824	
0,8	1,8	0,55556	0,55556	0,55556
0,9	1,9	0,52632	0,52632	
1	2	0,50000	0,25000	0,25000

$$\Sigma_h = 6,93773 \quad \Sigma_H = 3,47818$$

Leiame, et integraali ligikaudseks väärtuseks on

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx h \Sigma_h = 0,1 \cdot 6,93773 = 0,69377.$$

Tõenäolise vea leidmiseks tuleb arvutada veel integraali väärtus sammuga $H = 2h = 0,2$.

$$I_H = H \Sigma_H = 0,2 \cdot 3,47818 = 0,69564.$$

Seega

$$R_h \approx \frac{0,69377 - 0,69564}{3} = - \frac{0,00187}{3} = - 0,00062$$

ja integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ligikaudne väärtus on 0,6938 ja tõenäoline viga -0,0007. Integraali ligikaudse väärtuse parandamiseks liidame talle tõenäolise vea:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,69377 - 0,00062 = 0,69315.$$

Teiseks vaatleme Newtoni-Cotesi kinnist kvadratuurvalemit, kui sõlmede arv $n = 3$. Ta omandab kuju

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

ja teda nimetatakse Simpsoni valemiks.

Jääkliige on

$$R(f) = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\eta),$$

kus $a \leq \eta \leq b$ ja $h = \frac{b-a}{2}$.

Simpsoni valem on täpne kõigi ülimalt kolmanda astme polünoomide korral. Kui aga funktsioon $f(x)$ ei ole kogu lõigul $[a, b]$ hästi lähendatav kuuppolünoomiga, siis võib tekkida küllaltki suur viga integraali arvutamisel. Suurema täpsuse saamiseks jagatakse lõik $[a, b]$ osalõikudeks ja rakendatakse igale osalõigule eraldi Simpsoni valemit.

Vaatleme juhtu, kus toimub võrdseteks osalõikudeks jagamine. Olgu nende osalõikude arv m . Simpsoni valemi rakendamiseks tuleb iga osalõik jagada veel kaheks, sest on tarvis arvutada funktsiooni $f(x)$ väärtused ka osalõigu keskpunktis. Seega tabelisamm

$$h = \frac{b-a}{2m}.$$

Märgime $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ..., $x_{2m} = b$ ja vastavad funktsiooni $f(x)$ väärtused $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{2m}$. Kuna iga osalõigu pikkus on $2h$, siis esimesse osalõiku kuuluvad punktid x_0, x_1 ja x_2 , teise aga x_2, x_3, x_4 jne.

Lüütes osaintegraalid

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \frac{2h}{6} (f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i})$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

saame

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{2m-1} + f_{2m}).$$

Seda valemit nimetatakse üldistatud Simpsoni valemiks.

Talle võib anda ka kuju:

$$(13) \int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{3} \left(\frac{1}{2} f_0 + 2f_1 + f_2 + 2f_3 + f_4 + \dots + 2f_{2m-1} + \frac{1}{2} f_{2m} \right)$$

(esimene ja viimane kordaja on $\frac{1}{2}$, keskel on aga vaheldumisi 2, 1, 2, 1, 2 jne. lõppedes kordajaga 2). Viimane on sobivam rakendamiseks seetõttu, et kordajana esineb 1.

Üldistatud Simpsoni valemi jääkliige on

$$R(f) = -\frac{mh^5}{90} f^{IV}(\eta),$$

kus $a \leq \eta \leq b$ ja $h = \frac{b-a}{2m}$.

Kasutades vea hindamiseks Runge meetodit, saame valemist

$$(11) R_h \approx \frac{I_h - I_H}{15},$$

kus $H = 2h$ (võimalik ainult paarisarvulise m korral).

N ä i d e 24. Leida integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ligikaudne väärtus Simpsoni valemi abil, kui $m = 3$.

Kasutame valemit (13). Punktisiooni väärtused on arvutatud tabelis 34 samuga $h = \frac{1-0}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$.

T a b e l 34.

x_1	$1+x_1$	$f_1 = \frac{1}{1+x_1}$	Kordajad c_1	$c_1 f_1$
0	1	1	1/2	0,50000
1/6	7/6	6/7	2	1,71429
1/3	4/3	3/4	1	0,75000
1/2	3/2	2/3	2	1,33333
2/3	5/3	3/5	1	0,60000
5/6	11/6	6/11	2	1,09091
1	2	1/2	1/2	0,25000

$$\Sigma = 6,23853$$

Integraali väärtuseks saame

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{2h}{3} \Sigma = \frac{2 \cdot 6,23853}{6,3} = 0,69317.$$

Veahinnangut me ei teosta, sest siin ei ole midagi uut.

Vaatleme veel nn. $\frac{3}{8}$ -valemit, milleks on Newtoni-Cotesi kinnine kvadratuurvalem, kui $n = 4$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right].$$

Selle valemi jääkliige

$$R(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{IV}(\eta),$$

kus $a < \eta < b$ ja $h = \frac{b-a}{3}$.

Et $\frac{3}{8}$ -valem täpsus on küllaltki väike (täpne ülimalt kuuppolünoomi kerral), siis suurema täpsuse saamiseks jagatakse kogu integreerimislohk $[a, b]$ osalõikudeks. Olgu need

osalõigud kõik võrdsed ja nende arv m . Tabelisammu h määramiseks tuleb arvestada, et valemi rakendamiseks tuleb iga osalõik jagada veel kolmeks võrdseks osaks. Seega

$$h = \frac{b-a}{3m}$$

ja osalõigu pikkuseks on $3h$.

Kui märkida $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ..., $x_{3m} = b$, siis esimesse osalõiku kuuluvad sõlmed x_0 , x_1 , x_2 ja x_3 , teise aga - x_3 , x_4 , x_5 , x_6 jne. Vaetavad funktsiooni väärtused märgime $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{3m}$.

Leides osaintegraalid

$$\int_{x_{3i-3}}^{x_{3i}} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_{3i-3} + 3f_{3i-2} + 3f_{3i-1} + f_{3i})$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

ja summeerides need saame

$$(14) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \dots + 3f_{3m-1} + f_{3m})$$

(esimene ja viimane kordaja -1, keskel - 3,3,2,3,2 jne., lõppedes kordajatega 2,3,3).

Valemit (14) nimetatakse üldistatud $\frac{3}{8}$ -valemiks. Tema jääkliige

$$R(f) = -\frac{3mh^5}{80} f^{IV}(\eta),$$

kus $a \leq \eta \leq b$ ja $h = \frac{b-a}{3m}$.

Hinnates viga Runge meetodiga, saame

$$R_h \approx \frac{I_h - I_H}{15},$$

kus $H = 2h$ (m on paarisarv).

Vaatleme veel üht veshinnangut, mida saab rakendada nii Simpsoni kui ka $\frac{3}{8}$ -valemi jaoks, kui sõlmade arv on $6k+1$ ($k=1,2,3,\dots$). Selleks tuleb leida integraali ligikaudne väärtus mõlemate valemitega. Märgime selle Simpsoni valemi korral - I_s ja $\frac{3}{8}$ -valemi korral - I_k . Integraali täpset väärtust I võib väljendada Simpsoni valemi korral

$$I = I_s - \frac{m_s h^5}{90} f^{IV}(\eta_1) \text{ ja}$$

$\frac{3}{8}$ -valemi korral

$$I = I_k - \frac{3m_k h^5}{80} f^{IV}(\eta_2)$$

(m_s ja m_k - osalõikude arv).

Elimineerides I saame

$$I_s - \frac{m_s h^5}{90} f^{IV}(\eta_1) = I_k - \frac{3m_k h^5}{80} f^{IV}(\eta_2)$$

ehk

$$I_s - I_k = \frac{m_s h^5}{90} f^{IV}(\eta_1) - \frac{3m_k h^5}{80} f^{IV}(\eta_2).$$

Beldame, et $f^{IV}(x)$ lõigul $[a,b]$ oluliselt ei muutu.

Siis

$$f^{IV}(\eta_1) \approx f^{IV}(\eta_2) \approx f^{IV}(\eta).$$

Et h on mõlemate valemite jaoks võrdne ja $m_s:m_k = 3:2$, siis elimineerides m_k saame

$$I_s - I_k \approx - \frac{m_s h^5}{72} f^{IV}(\eta) = \frac{5}{4} \left[- \frac{m_s h^5}{90} f^{IV}(\eta) \right].$$

Simpsoni valemi viga R_s avaldub siit järgmiselt:

$$(15) \quad R_s \approx 0,8(I_s - I_k) .$$

Analoogilise veahinnangu saame ka $\frac{3}{8}$ -valemi kohta. Et

$$m_s = \frac{3}{2} m_k, \text{ siie}$$

$$I_s - I_k \approx -\frac{m_k h^5}{48} r^{IV}(\eta) = \frac{5}{9} \left[-\frac{3m_k h^5}{80} r^{IV}(\eta) \right]$$

ja

$$R_k \approx 1,8(I_s - I_k) .$$

Nende veahinnangute abil võime ka integraali väärtust parandada, liites ligikaudsele väärtusele tema vea.

Toome näite selle veahinnangu kasutamise kohta.

N ä i d e 25. Leida näites 24 arvutatud integraali väärtuse viga kasutades $\frac{3}{8}$ -valemit.

Et näites 24 on sõlmede arv 7, siis on meil võimalik selle integraali väärtus arvutada samade sõlmede abil ka $\frac{3}{8}$ -valemiga (osalõikude arv 2). Kasutades tabelis 34 saadud funktsiooni väärtusi, koostame tabeli 35.

T a b e l 35.

x_1	f_1	Kordajad c_1	$c_1 f_1$
0	1	1	1,00000
1/6	6/7	3	2,57143
1/3	3/4	3	2,25000
1/2	2/3	2	1,33333
2/3	3/5	3	1,80000
5/6	6/11	3	1,63636
1	1/2	1	0,50000

$$\Sigma = 11,09112$$

Silt saame

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{2.11,09112}{6.8} = 0,69320 .$$

Rehmises näites arvutatud tulemuse vea leiame hinnangu

(15) järgi

$$R_n \approx 0,8(0,69317 - 0,69320) = - 0,00002 .$$

Integraali parandatud väärtuseks on

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,69317 - 0,00002 = 0,69315 .$$

§ 3. TŠEBŐŠEVI KVADRATUURVALEMID.

1. Üldjuht. P.L. Tšebőšev vaatles kvadratuurvalemi konstrueerimist, mille kõik kordajad on võrdsed, s.t.

$$(16) \quad \int_a^b p(x)f(x)dx \approx K \sum_{i=1}^n f(x_i) .$$

Valemis on parameetreid $n + 1$ (n abstsissi ja ühine kordaja K) ning seega võib loota, et konstrueeritav kvadratuurvalem on täpne suvalise n -astme polünoomi korral. Abstsissid (sõlmed) x_1 ja kordaja K leiamegi viimasest nõudest.

Olgu

$$P_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

suvaline n -astme polünoom (b_1 - suvalised konstandid). Nõude kohaselt peab valem (16) olema täpne, kui $f(x) = P_n(x)$.

Seega

$$b_0 \int_a^b p(x) dx + b_1 \int_a^b p(x)x dx + b_2 \int_a^b p(x)x^2 dx + \dots +$$

$$+ b_n \int_a^b p(x)x^n dx = K \left[b_0 n + b_1 (x_1^+ + x_2^+ + \dots + x_n^+) + \right.$$

$$+ b_2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots + b_n (x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) \left. \right]$$

Kõrdajate b, suvalisusest järeldub, et

$$\int_a^b p(x)dx = Kn$$

$$\int_a^b p(x) dx = K(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\int_a^b p(x)x^2 dx = K(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

• • • • •

$$\int_a^b p(x)x^n dx = K(x_2^n + x_2^n + \dots + x_n^n) \cdot$$

Viimase süsteemi vasakud pooled on konkreetse kaalu-
funktsiooni $p(x)$ korral arvutatavad. Beimesest võrrandist
saame määrata ühise kordaja K :

$$(17) \quad K = \frac{1}{n} \int_a^b p(x) dx .$$

Tähistaden

$$(18) \quad s_1 = \frac{1}{K} \int_a^b p(x) x^1 dx,$$

võime ülejäänud võrrandid kirjutada kujul:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s_1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = s_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = s_n .$$

Saime n võrrandist koosneva mittelineaarse võrrandisüsteemi nn. Tšebšëvi absteiisside x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) leidmiseks. Selle võrrandisüsteemi lahendamiseks konstrueerime n -astme polünoomi

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) ,$$

mille lahendid on kvadratuurvalemi (16) sõlmed.

Teiselt poolt, arendades $\omega_n(x)$ x astmete järgi, saame

$$\omega_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n .$$

Kordajad a_1 on leitavad lahendite astmesummade s_1 kaudu.

Selleks arvutame $\omega'_n(x)$ lähtudes kummastki $\omega_n(x)$ kujust:

$$\omega'_n(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-1}$$

ning

$$\omega'_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_n(x)}{x-x_i} .$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n(x)}{x-x_1} &= x^{n-1} + (a_1+x_1)x^{n-2} + (a_2+a_1x_1+x_1^2)x^{n-3} + \dots + \\ &+ (a_{n-1}+a_{n-2}x_1+\dots+a_1x_1^{n-2}+x_1^{n-1}) , \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned}\omega'_n(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\omega_n(x)}{x-x_i} = nx^{n-1} + (na_1 + s_1)x^{n-2} + \\ &+ (na_2 + a_1s_1 + s_2)x^{n-3} + \dots + (na_{n-1} + a_{n-2}s_1 + \dots + \\ &+ a_1s_{n-2} + s_{n-1}) \cdot\end{aligned}$$

Võrreldes ühesuguste x astmete kordajaid $\omega'_n(x)$ avaldistes, saame

$$(n-1)a_1 = na_1 + s_1$$

$$(n-2)a_2 = na_2 + a_1s_1 + s_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n-1} = na_{n-1} + a_{n-2}s_1 + \dots + a_1s_{n-2} + s_{n-1} \cdot$$

Siit võime samm-sammult leida kordajad $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Kordaja a_n leidmiseks vaatleme summat $\sum_{i=1}^n \omega_n(x_i)$:

$$\sum_{i=1}^n \omega_n(x_i) = \sum_{i=1}^n (x_i^n + a_1x_i^{n+1} + \dots + a_{n-1}x_i + a_n) =$$

$$= s_n + a_1s_{n-1} + \dots + a_{n-1}s_1 + na_n \cdot$$

Kuid $\sum_{i=1}^n \omega_n(x_i) = 0$, sest $\omega_n(x_i) = 0$ iga i väärtuse

($i=1, 2, \dots, n$) korral. Seega

$$s_n + a_1s_{n-1} + \dots + a_{n-1}s_1 + na_n = 0 \cdot$$

Võttes tulemused kokku, saame algebrast tuntud Newtoni valemid

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & s_1 + a_1 = 0 \\
 & s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\
 & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & s_n + a_1 s_{n-1} + \dots + a_{n-1} s_1 + na_n = 0.
 \end{aligned}$$

Leides siit järk-järgult kordajad $a_1, a_2, \dots, a_n$, oleme leidnud polünoomi $\omega_n(x)$, mille juured on kvadratuurvalemi (16) sõlmed. Astmesummad s_i arvutame valemi (18) abil.

2. Konstantse kaaluga Tšebšševi kvadratuurvalem. Eelmises punktis tuletatud meetodil võime leida kordaja K ja abstsissid x_i ükskõik millise kaalu ja integreerimisloigu korral. Käesolevas punktis vaatleme juhtu, kui integreerimisloik on $[-1, 1]$ ja kaalufunktsioon on konstantne sellel loigul, s.t. $p(x) \equiv 1$.

Kordaja K arvutame valemist (17)

$$K = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{n}.$$

Seega kvadratuurvalem (16) omandab kuju

$$(20) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

mida nimetatakse lihtsalt Tšebšševi kvadratuurvalemiks.

Viimase kvadratuurvalemi abstsisside x_i leidmiseks arvutame valemi (18) abil astmesummad:

$$s_i = \frac{n}{2} \int_{-1}^1 x^i dx = \begin{cases} 0, & \text{kui } i \text{ on paaritu} \\ \frac{n}{i+1}, & \text{kui } i \text{ on paaris} \end{cases}$$

ja süsteemist (19) kordajad a_1 .

$$a_1 = 0$$

$$\frac{n}{3} + 2a_2 = 0$$

$$\frac{n}{3}a_1 + 3a_3 = 0$$

$$\frac{n}{5} + \frac{n}{3}a_2 + 4a_4 = 0$$

$$\frac{n}{5}a_1 + \frac{n}{3}a_3 + 5a_5 = 0$$

$$\frac{n}{7} + \frac{n}{5}a_2 + \frac{n}{3}a_4 + 6a_6 = 0$$

jne.

Näeme, et kõik paaritu arvuliste indeksitega kordajad võrduvad nulliga ja paarisarvuliste indeksitega kordajad avalduvad kujul:

$$a_2 = -\frac{n}{6}$$

$$a_4 = \frac{n}{4}(\frac{n}{18} - \frac{1}{5})$$

(21)

$$a_6 = -\frac{n}{6}(\frac{n^2}{216} - \frac{n}{20} + \frac{1}{7})$$

$$a_8 = \frac{n}{72}(\frac{n^3}{432} - \frac{n^2}{20} + \frac{263}{700}n - 1)$$

jne.

Seega polünoom

$$\omega_n(x) = x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \dots$$

sisaldab ainult x paaris- või paarituastmelisi liikmeid (sõltuvalt sõlmede arvust n). Niisuguse polünoomi nullkohad aga asetsevad sümmeetriliselt punkti $x = 0$ suhtes.

Näitena vaatleme abstsisside leidmist, kui $n = 3$. Kordaja

$$a_2 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

ja polünoom

$$\omega_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x.$$

Tema juured on

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 0 \quad \text{ja} \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Säärasel viisil võime leida kvadratuurvalemi sõlmed kõigi n väärtuste puhul. Osutub, et $n = 8$ ja $n > 10$ korral on Täebõševi kvadratuurvalemil (20) kompleksed sõlmed (vt. näit. [3], lk. 197-198), mis teeb nende kasutamise tülikaks. Meie vaatleme edaspidi ainult reaalsete sõlmedega kvadratuurvelemeid.

Täebõševi kvadratuurvalemil (20) jääkliikme võime arvutada valemist (5). Selleks on vaja kindlaks teha valemil (20) täpsusaste. Teame, et see ei saa olla väiksem kui n .

Näitame, et paarisarvulise n korral on valem (20) täpne ka $(n+1)$ -astme polünoomi korral. Selleks peab $R(f)$ olema null.

Olgu

$$f(x) = P_{n+1}(x) = P_n(x) + b_{n+1}x^{n+1}$$

(b_{n+1} - suvaline konstant).

Siis

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_{-1}^1 f(x)dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \\ &= b_{n+1} \left(\int_{-1}^1 x^{n+1} dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} \right) = \\ &= b_{n+1} \left[\frac{1 - (-1)^{n+2}}{n+2} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Kui n on paarisarv, siis $1 - (-1)^{n+2} = 0$ ja samuti $\sum_{i=1}^n x_1^{n+1} = 0$, sest sõlmed x_1 asetsevad sümmeetriliselt nullpunkti suhtes. Seega $R(f) = 0$.

Siit on ilmne, et paaritu sõlmede arvu n korral on Täebõševi kvadratuurvalemi (20) täpsusaste n , aga paaris sõlmede arvu n korral — $n + 1$. Ehk teisiti:

kui $n = 1$, siis valem (20) on täpne suvalise lineaarse polünoomi korral;

kui $n = 2, 3$, siis valem (20) on täpne suvalise kuup-polünoomi korral;

kui $n = 4, 5$, siis valem (20) on täpne suvalise viienda astme polünoomi korral jne.

Jääkliikme võime arvutada siinjuures samuti nagu Newtoni-Cotesi valemite korral. Seetõttu sellel üksikasjaliselt ei peatuta.

Tabelis 36 toome Täebõševi kvadratuurvalemi (20) abstsissid x_1 , polünoomi $\omega_n(x)$ ja jääkliikme $R(f)$ n väärtuste 1-7 ja 9 puhul.

T a b e l 36 .

n	x_1	$\omega_n(x)$	$R(f)$
1	$x_1 = 0$	x	$\frac{1}{3}f''(\eta)$
2	$-x_1 = 0,577350269 = x_2$	$x^2 - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{135}f^{(4)}(\eta)$
3	$-x_1 = 0,707106781 = x_3$ $x_2 = 0$	$x^3 - \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{360}f^{(4)}(\eta)$

n	x_i	$\omega_n(x)$	$R(f)$
4	$-x_1=0,794654472=x_4$ $-x_2=0,187592474=x_3$	$x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45}$	$\frac{2}{42525}f^{(6)}(\eta)$
5	$-x_1=0,832497487=x_5$ $-x_2=0,374541410=x_4$ $x_3 = 0$	$x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x$	$\frac{13}{544320}f^{(6)}(\eta)$
6	$-x_1=0,866246818=x_6$ $-x_2=0,422518654=x_5$ $-x_3=0,266635402=x_4$	$x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105}$	$\frac{1}{3969000}f^{(8)}(\eta)$
7	$-x_1=0,883861701=x_7$ $-x_2=0,529656775=x_6$ $-x_3=0,323911810=x_5$ $x_4 = 0$	$x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{6480}x$	$\frac{281}{1959552000}f^{(8)}(\eta)$
9	$-x_1=0,911589308=x_9$ $-x_2=0,601018655=x_8$ $-x_3=0,528761783=x_7$ $-x_4=0,167906148=x_6$ $x_5=0$	$x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53}{22400}x$	$\frac{74747}{11200 \cdot 9 \cdot 111}f^{(10)}(\eta)$

Kui on tarvis leida integraali lõigul $[a, b]$, siis vahetame muutujat

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}.$$

Viimane teisendab lõigu $[a, b]$ lõiguks $[-1, 1]$. Et

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) dx ,$$

siis Tšebšševi kvadratuurvalem (20) omandab kuju

$$(22) \quad \int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2}\right) ,$$

kus x_i on samad abstsissid, mis valemis (20).

M ä r k u s . Tšebšševi kvadratuurvalemil $n = 1$ korral nimetatakse ka riskülikvalemiks keskmise funktsiooni väärtuse kaudu.

N ä i d e 26 . Leida integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ väärtus Tšebšševi valemi järgi, kui $n = 4$.

Et integreerimisvahemik on $(0;1)$, siis arvutame integraali väärtuse valemi (22) järgi. Antud juhul

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f\left[\frac{1}{2}(x_i + 1)\right] .$$

Funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+x}$ väärtused on arvutatud tabelis 37.

Sealt saame

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{\sum}{4} = 0,69313 .$$

T a b e l 37 .

1	x_i	$x_i + 1$	$\frac{1}{2}(x_i + 1)$	$1 + \frac{1}{2}(x_i + 1)$	$f\left[\frac{1}{2}(x_i + 1)\right]$
1	-0,79465	0,20535	0,10267	1,10267	0,90689
2	-0,18759	0,81241	0,40620	1,40620	0,71114
3	0,18759	1,18759	0,59380	1,59380	0,62743
4	0,79465	1,79465	0,89733	1,89733	0,52706

$$\sum = 2,77252$$

§ 4. GAUSSI TÜÜPI KVADRATUURVALEMID.

1. Üldteoreemid. Eespool tuletasime kvadratuurvalemid andes ette sõlmede asetuse või nõudes kõigi kordajate võrdust. Esimesel juhul oli tarvis määrata n parameetrit (kordajad) ja teisel juhul $n + 1$ parameetrit (abstsissid ja ühine kordaja). Seejuures kvadratuurvalemite täpsusaste ei olnud väiksem kui määratavate parameetrite arv minus üks.

Mitte seades kitsendusi nii kordajate kui ka sõlmede asetuse kohta, võime määratavate parameetrite arvu suurendada kuni $2n$. (n kordajat ja n sõlme). Võib loota, et siis ka kvadratuurvalemi täpsusaste ei ole väiksem kui $2n-1$. Niisuguse kvadratuurvalemi konstrueerimist lõigul $[a, b]$ konstantse kaalu korral vaatleski C.F. Gauss. Hiljem üldistati saadud tulemused ka lõpmatute rajade ja teiste kaalufunktsioonide jaoks.

Vaatleme lähemalt nn. Gaussi tüüpi kvadratuurvalemeid.

Seame ülesandeks konstrueerida kvadratuurvalem (1)

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

mille abstsissid $x_1, x_2, \dots, x_n$ ja kordajad $c_1, c_2, \dots, c_n$ valime nii, et valem (1) oleks täpne kõigi ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoomide korral. Abstsisside leidmiseks konstrueerime n -astme polünoomi $\omega_n(x)$, mille juurteks on otsitavad abstsissid.

T e o r e e m 1. Selleks, et valem (1) oleks täp-

ne kõigi ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoomide korral, on tarvilik ja piisav, et ta oleks interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem ja polünoom

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

oleks kaalufunktsiooni $p(x)$ korral ortogonaalne lõigul $[a, b]$ kõigi ülimalt $(n-1)$ -astme polünoomidega $Q(x)$.

Polünoome $\omega_n(x)$ ja $Q(x)$ nimetatakse ortogonaalseteks lõigul $[a, b]$ kaalufunktsiooni $p(x)$ korral, kui

$$(23) \quad \int_a^b p(x) \omega_n(x) Q(x) dx = 0$$

(vt. näit. [3], lk. 21). Allpool jätame sõnastuses ära "kaalufunktsiooni $p(x)$ korral".

T a r v i l i k k u s . Olgu valem (1) täpne kõigi ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoomide korral. Seega on ta täpne ka $(n-1)$ -astme polünoomide korral ning esimese paragrahvi esimeses punktis tõestatud teoreemi kohaselt on valem (1) interpolatsioonitüüpi.

Et $Q(x)$ on suvaline ülimalt $(n-1)$ -astme polünoom, siis korrutis-polünoomi $f(x) = \omega_n(x)Q(x)$ aste ei ületa $2n-1$. Eelduse kohaselt on valem (1) täpne polünoomi $f(x)$ jaoks ning seega

$$\int_a^b p(x) \omega_n(x) Q(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \omega_n(x_i) Q(x_i) = 0,$$

sest $\omega_n(x_i) = 0$. Siit järeldub, et polünoomid $\omega_n(x)$ ja $Q(x)$ on ortogonaalsed lõigul $[a, b]$.

P i i s a v u s . Olgu valem (1) interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem ja $\omega_n(x)$ ortogonaalne lõigul $[a, b]$

kõigi ülimalt $(n-1)$ -astme polünoomidega $Q(x)$. Tõestame, et siis valem (1) on täpne suvalise ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoomi $f(x)$ korral.

Jagades polünoomi $f(x)$ polünoomiga $\omega_n(x)$, saame

$$f(x) = \omega_n(x)Q(x) + r(x),$$

kus $Q(x)$ ja $r(x)$ aste on väiksem kui n . Järelikult

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\omega_n(x)Q(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx.$$

Parema poole esimene integraal on null ortogonaalsuse tõttu. Seega

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)r(x)dx.$$

Kuid

$$\int_a^b p(x)r(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i r(x_i),$$

sest $r(x)$ on ülimalt $(n-1)$ -astme polünoom ja valem (1) interpolatsioonitüüpi.

Et

$$f(x_i) = \omega_n(x_i)Q(x_i) + r(x_i) = r(x_i),$$

siis

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

See aga tähendab, et valem (1) on täpne, m.o.t.t.

Tõestatud teoreemist järeldub, et Gaussi tüüpi kvadratuurvalemi konstrueerimise küsimus taandub kaaluga $p(x)$ ortogonaalse polünoomi $\omega_n(x)$ konstrueerimisele. Ortogo-

naalseid polünoome kaalufunktsioonide $p(x) = 1$ ja $p(x) = \frac{1}{1-x^2}$ korral lõigul $[-1, 1]$ vaadeldakse "Arvutusmeetodite" III osa [6] esimese peatüki viienda paragrahvi teises ja kolmandas punktis.

T e o r e e m 2 . Kui n -astme polünoom $\omega_n(x)$ on ortogonaalne lõigul $[a, b]$ kõigi ülimalt $(n-1)$ -astme polünoomidega, siis tema juured on reaalsed, erinevad ja asuvad lõigul $[a, b]$.

T ö e s t u s . Vaatleme lõigul $[a, b]$ ainult polünoomi $\omega_n(x)$ neid juuri, mis omavad paarituarvulise kordsuse. Olgu nende juurte arv m ($m \leq n$) ja tähistame nad $x_1, x_2, \dots, x_m$. Kui näitame, et $m = n$, siis oleme tõestanud nende erinevuse ja samuti ka reaalsuse.

Vastupidiselt väitele oletame, et $m < n$. Moodustame m -astme polünoomi $g_m(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_m)$, mille juured on ühekordsed ja langevad kokku $\omega_n(x)$ paari-
tukordsete juurtega. Edasi moodustame polünoomi $\omega_n(x)g_m(x)$. Ta saab omada lõigul $[a, b]$ ainult paariskordseid juuri. Järelikult säilitab ta vaadeldaval lõigul märki ja et $p(x)$ oli mittenegatiivne, siis

$$\int_a^b p(x) \omega_n(x) g_m(x) dx \neq 0.$$

Eelduse kohaselt aga $\omega_n(x)$ on ortogonaalne kõigi polünoomidega, mille aste on väiksem kui n , s. t.

$$\int_a^b p(x) \omega_n(x) g_m(x) dx = 0.$$

Tekkis vastuolu, mis on tingitud oletusest, et $m < n$.
Seega saab olla ainult $m = n$.

Tõestatud teoreemist järeldub, et Gaussi tüüpi kvadratuurvalemi abstsissid on reaalsed, erinevad ja asuvad lõigul $[a, b]$. Seega on ilmne ka Gaussi tüüpi kvadratuurvalemi (1) konstrueerimise võimalus, lahtiseks jääb aga küsimus, kas ta on üheselt määratud antud n korral. Selleks näitame, et n -astme polünoom $\omega_n(x)$ on üheselt määratud. Tõepoolest, kui neid polünoome oleks kaks: $\omega_n(x)$ ja $\omega_n^*(x)$, siis nende vahe

$$Q(x) = \omega_n(x) - \omega_n^*(x)$$

($\omega_n(x)$ ja $\omega_n^*(x)$ x^n astme kordajad 1) on ülimalt $(n-1)$ -astme polünoom ja valem (23) tõttu

$$\int_a^b p(x) [\omega_n(x) - \omega_n^*(x)] Q(x) dx = \int_a^b p(x) Q^2(x) dx = 0.$$

See saab aga võimalik olla ainult siis, kui

$$Q(x) = \omega_n(x) - \omega_n^*(x) \equiv 0.$$

Enne kui asuda Gaussi tüüpi kvadratuurvalemite konstrueerimisele konkreetse kaalu korral tõestame veel mõningad tulemused.

T e o r e e m 3 . Mis tahes x_1 ja c_1 valiku korral ei saa kvadratuurvalem (1) olla täpne kõigi $2n$ -astme polünoomide korral.

T õ e s t u s . Valime näiteks $f(x) = \omega_n^2(x)$, mis on $2n$ -astme polünoom. Kaalufunktsiooni kohta toodud eelduste tõttu

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\omega_n^2(x)dx > 0 .$$

Kuid

$$\sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i \omega_n^2(x_i) = 0 ,$$

sest $\omega_n(x_1) = 0$. Siit on selge, et kvadratuurvalem (1) ei saa olla täpne.

T e o r e e m 4 . Kui kvadratuurvalem (1) on täpne kõigi võimalike $(2n-2)$ -astme polünoomide korral, siis tema kordajad c_i on positiivsed.

T ö e s t u s . Valime $f(x) = \left[\frac{\omega_n(x)}{x-x_1} \right]^2$. Ta on

$(2n-2)$ -astme polünoom ja seetõttu on valem (1) täpne. Kuid

$$f(x_k) = \begin{cases} 0 & , \text{ kui } k \neq 1 , \\ [\omega'_n(x_1)]^2 & , \text{ kui } k = 1 \end{cases}$$

ja valemist (1) saame

$$\int_a^b p(x) \left[\frac{\omega_n(x)}{x-x_1} \right]^2 dx = c_1 [\omega'_n(x_1)]^2 .$$

Siit

$$(24) \quad c_1 = \int_a^b p(x) \left[\frac{\omega_n(x)}{(x-x_1)\omega'_n(x_1)} \right]^2 dx > 0 .$$

T e o r e e m 5 . Kui funktsioon $f(x)$ on $2n$ korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a,b]$, siis suurima täpsusega kvadratuurvalem (1) jääkliige avaldub kujul

$$(25) \quad R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \omega_n^2(x) dx ,$$

kus $\eta \in [a, b]$ ja $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

T ö e s t u s . Konstrueerime kordsete sõlmedega Newtoni interpolatsioonipolünoomi, mis täidab tingimusi

$$P(x_1) = f(x_1) \text{ ja } P'(x_1) = f'(x_1), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vastav interpolatsioonivalem avaldub kujul (vt. I pt., § 2, punkt 3)

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \omega_n^2(x),$$

kus $P(x)$ on ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoom ja ξ asetseb sõlmede x_1 ja punkti x vahel. Kui lugeda, et $x \in [a, b]$, siis ka $\xi \in [a, b]$.

Kasutades saadud interpolatsioonivalemit võime kirjutada

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)P(x)dx + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x)f^{(2n)}(\xi)\omega_n^2(x)dx.$$

Seejuuress eeldame, et võrduse vasakpoolne integraal eksisteerib. Et polünoomi $P(x)$ aste ei ületa $2n - 1$, siis

$$\int_a^b p(x)P(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

Seega

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x)f^{(2n)}(\xi)\omega_n^2(x)dx$$

ehk siit

$$R(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x)f^{(2n)}(\xi)\omega_n^2(x)dx.$$

Et lõigul $[a, b]$ $p(x)\omega_n^2(x) \geq 0$, siis üldistatud keskväär-

tusteoreemi põhjal

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \omega_n^2(x) dx ,$$

kus $\eta \in [a, b]$. Seega ongi teoreem tõestatud.

T e o r e e m 6. Kui lõik $[a, b]$ on lõplik ja funktsioon $f(x)$ on pidev sellel lõigul, siis Gaussi tüüpi kvadratuurvalemi summa koondub integraaliks $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = \int_a^b p(x) f(x) dx .$$

T õ e s t u s . Valime suvalise arvu $\varepsilon > 0$. Eelduse kohaselt on lõik $[a, b]$ lõplik ja $f(x)$ sellel pidev. Weierstrassi teoreemi põhjal võime leida polünoomi $P(x)$ nii, et

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon \quad \text{iga } x \in [a, b] \text{ korral} .$$

Tuleb näidata, et $R(f) \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = \\ &= \int_a^b p(x) [f(x) - P(x)] dx + \int_a^b p(x) P(x) dx - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n c_i P(x_i) + \sum_{i=1}^n c_i [P(x_i) - f(x_i)] . \end{aligned}$$

Vaatleme parempoolset avaldist. Kui tähistada polünoomi $P(x)$ aste m ja $2n - 1 \geq m$, siis

$$\int_a^b p(x) P(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i P(x_i) = 0 .$$

Teiste avaldiste jaoks võime anda hinnangu

$$\left| \int_a^b p(x) [f(x) - P(x)] dx \right| \leq \varepsilon \int_a^b p(x) dx$$

ja

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i [P(x_i) - f(x_i)] \right| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i = \varepsilon \int_a^b p(x) dx .$$

Seega $2n - 1 \geq m$ korral

$$|R(f)| \leq 2\varepsilon \int_a^b p(x) dx .$$

Siit on ilmne, et $R(x) \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$.

Tõestatud teoreemist järeldub ainult Gaussi tüüpi kvadratuurvalemite koonduvus, kui rajad on lõplikud. Üldist kvadratuurvalemite koonduvust võib vaadata vastavatest õpikute, näiteks [3], lk. 261.

2. Gaussi kvadratuurvalem. Gaussi tüüpi kvadratuurvalem (1), mille kaalufunktsioon mingil lõplikul lõigul $[a, b]$ on konstantne, nimetatakse lihtsalt Gaussi kvadratuurvalemiks. Et saada lihtsamat kuju abstsisside ja kordajate avaldistele, vaatleme valemi konstrueerimist lõigul $[-1, 1]$. Võttes kaalufunktsiooniks $p(x) \equiv 1$, võime Gaussi kvadratuurvalemi kirjutada kujul:

$$(26) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) .$$

Gaussi kvadratuurvalemi abstsissid ehk lühidalt Gaussi abstsissid leiame kui $\omega_n(x)$ juured. Seejuures peab $\omega_n(x)$ kaalu $p(x) = 1$ korral olema ortogonaalne kõigi ülimalt $(n-1)$ -astme polünoomidega lõigul $[-1, 1]$. Säärase ortogonaalse süsteemi moodustavad aga Legendre'i polünoomid

(vt. [6], I ptk., § 5, p. 2)

$$(27) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Tõsi küll, Legendre'i polünoomide x^n kordaja ei ole 1, kuid see ei takista nende kasutamist. Lihtne on näha, et see kordaja on $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ (veenduda!). Võttes

$$\omega_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x),$$

on selge, et $\omega_n(x)$ ja Legendre'i polünoomi $P_n(x)$ juured on samad. Teoreemi 2 põhjal on need juured kõik reaalsed, erinevad ja asetsevad lõigul $[-1, 1]$.

Valemist (27) näeme, et Legendre'i polünoomid sisaldavad ainult kas x paaris- või paarituarvulisi astmeid: x^n, x^{n-2}, x^{n-4} jne. Niisuguse polünoomi juured aga asetsevad sümmeetriliselt lõigu keskpunkti suhtes.

Seega Gaussi abstsissid on Legendre'i polünoomi (27) juured ja nad asuvad lõigul $[-1, 1]$ sümmeetriliselt punkti $x = 0$ suhtes.

Gaussi kvadratuurvalemi (26) kordajad võime leida valemiga (2), teostades intergreerimise lõigul $[-1, 1]$. Antud juhul on neid aga lihtsam arvutada valemist (24). Et

$$\left[\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_1)} \right]^2 = \left[\frac{P_n(x)}{P_n'(x_1)} \right]^2,$$

siis

$$c_1 = \frac{1}{[P_n'(x_1)]^2} \int_{-1}^1 \frac{P_n^2(x)}{(x-x_1)^2} dx.$$

Integreerime ositi, võttes

$$u = P_n^2(x) \quad \text{ja} \quad dv = \frac{dx}{(x-x_1)^2};$$

saame

$$du = 2P_n(x)P_n'(x) \quad \text{ja} \quad v = -\frac{1}{(x-x_1)}$$

ning

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^2(x)}{(x-x_1)^2} dx = -\frac{P_n^2(x)}{x-x_1} \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x-x_1} P_n'(x) dx.$$

Saadud parempoolse integraali arvutamiseks integreerime uuesti ositi:

$$u = \frac{P_n(x)}{x-x_1}, \quad dv = P_n'(x) dx;$$

$$du = u' dx, \quad v = P_n(x).$$

Järelikult

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x-x_1} P_n'(x) dx = \frac{P_n^2(x)}{x-x_1} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n(x) u' dx.$$

Et $u = \frac{P_n(x)}{x-x_1}$ on $(n-1)$ -astme polünoom, siis u' on

$(n-2)$ -astme polünoom ning ortogonaalsuse tõttu viimane integraal on null. Seega

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^2(x)}{(x-x_1)^2} dx = -\frac{P_n^2(x)}{x-x_1} \Big|_{-1}^1 + 2 \frac{P_n^2(x)}{x-x_1} \Big|_{-1}^1 = \frac{P_n^2(x)}{x-x_1} \Big|_{-1}^1.$$

Kasutades Legendre'i polünoomide omadust $P_n(1) = 1$ ja $P_n(-1) = (-1)^n$, saame

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^2(x)}{(x-x_1)^2} dx = \frac{2}{1-x_1^2} \quad \text{ja}$$

$$(28) \quad c_1 = \frac{2}{(1-x_1^2) [P_n'(x_1)]^2}.$$

Gaussi kordajate arvutamine valemi (28) abil on üsna lihtne (pole vaja integreerida). Märgime, et siit selgub ka nullpunkti suhtes sümmeetriliste abstsissidega Gaussi kordajate võrdsus ja kõigi kordajate positiivsus.

Gaussi kvadratuurvalemi jääkliikme võime arvutada valemist (25). Eeldades, et $f(x)$ on $2n$ korda pidevalt diferentseeruv, saame

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \omega_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \frac{2^{2n}(n!)^4}{[(2n)!]^2} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx.$$

Et

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

(vt. [6], I pt., §5, p. 2), siis

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2} f^{(2n)}(\eta) \quad (-1 \leq \eta \leq 1).$$

Konkreetsete n väärtuste korral võime jääkliikme tuuletada ka valemist (5).

Tabelis 38 on toodud Gaussi kvadratuurvalemi (26) abstsissid x_1 , kordajad c_1 ja jääkliige $R(f)$ n väärtuste puhul 1 - 8. Kui arvutustes on vaja kasutada Gaussi valemit suuremate n väärtuste korral või võtta abstsissides ja kordajates rohkem kümnendkohti, siis võib soovitada raamatut [3]. Lehekülgedel 103-106 on toodud need kuni $n = 16$ (incl.) 15 kümnendkohaga.

M ä r k u s : Gaussi kvadratuurvalem (26) ja Täeböševi kvadratuurvalem (20) ühtivad, kui $n = 1$ või 2 . Gaussi kvadratuurvalemist (26) nimetatakse $n = 1$ korral ka ristkülikvalemiks keskmise funktsiooni väärtuse järgi.

T a b e l 38.

n	x_1	c_1	$R(f)$
1	$x_1 = 0$	$c_1 = 2$	$\frac{1}{3}f''(\eta)$
2	$-x_1=0,577350269=x_2$	$c_1=1=c_2$	$\frac{1}{135}f^{(4)}(\eta)$
3	$-x_1=0,774596669=x_3$ $x_2 = 0$	$c_1 = \frac{5}{9} = c_3$ $c_2 = \frac{8}{9}$	$\frac{f^{(6)}(\eta)}{15750}$
4	$-x_1=0,861136312=x_4$ $-x_2=0,339981044=x_3$	$c_1 = 0,347854845=c_4$ $c_2 = 0,652145155=c_3$	$\frac{f^{(8)}(\eta)}{3472875}$
5	$-x_1=0,906179856=x_5$ $-x_2=0,538469310=x_4$ $x_3 = 0$	$c_2=0,236926885=c_5$ $c_2=0,478628670=c_4$ $c_3=0,568888889=\frac{128}{225}$	$\frac{f^{(10)}(\eta)}{1237732650}$
6	$-x_1=0,932469514=x_6$ $-x_2=0,661209386=x_5$ $-x_3=0,238619186=x_4$	$c_1=0,171324492=c_6$ $c_2=0,360761573=c_5$ $c_3=0,467913935=c_4$	$\frac{f^{(12)}(\eta)}{1950.693}$
7	$-x_1=0,949107912=x_7$ $-x_2=0,741531186=x_6$ $-x_3=0,405845151=x_5$ $x_4 = 0$	$c_1=0,129484956=c_7$ $c_2=0,279705391=c_6$ $c_3=0,381830051=c_5$ $c_4=0,417959184=\frac{512}{1225}$	$\frac{f^{(14)}(\eta)}{20.105^2.1287}$
8	$-x_1=0,960289856=x_8$ $-x_2=0,796666477=x_7$ $-x_3=0,525532410=x_6$ $-x_4=0,183434642=x_5$	$c_1=0,101228536=c_8$ $c_2=0,222381034=c_7$ $c_3=0,313706646=c_6$ $c_4=0,362683783=c_5$	$\frac{f^{(16)}(\eta)}{153.105^2.2145}$

Integraali arvutamiseks lõigul $[a, b]$ vahetame muutujat

$$t = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2},$$

mis teisendab integraali lõigule $[-1, 1]$. Et

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2}\right) dx,$$

siis Gaussi kvadratuurvalem (26) omandab kuju

$$(29) \quad \int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2}\right).$$

Abstsissid x_i on samad mis valemis (26). Nad on toodud tabelis 38.

Valemi (29) jääkliikme saame valemi (26) jääkliikmest, kui korrutame viimast suurusga $\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}$ (veenduda!) ja punkt η võtta lõigult $[a, b]$. Näitena kirjutame valemi (29) jääkliikme, kui $n = 2$

$$R(f) = \frac{1}{135} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta) \quad (a \leq \eta \leq b).$$

Vaatleme nüüd Gaussi kvadratuurvalemi rakendamist.

N ä i d e 27. Leida integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ väärtus Gaussi valemi abil, kui $n = 4$.

Antud juhul integreerimisvahemik on $(0; 1)$ ning seetõttu kasutame valemit (29)

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 c_i f\left[\frac{1}{2}(x_i + 1)\right].$$

Vastavad arvutused on toodud tabelis 39. Kasutades seal saadud tulemusi näeme, et

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{\Sigma}{2} = 0,693147.$$

T a b e l 39 .

1	x_1	$\frac{1}{2}(x_1+1)$	$1+\frac{1}{2}(x_1+1)$	$f[\frac{1}{2}(x_1+1)]$	c_1	$c_1 f[\frac{1}{2}(x_1+1)]$
1	-0,861136	0,069432	1,069432	0,935076	0,347855	0,325271
2	-0,339981	0,330009	1,330009	0,751875	0,652145	0,490332
3	0,339981	0,669991	1,669991	0,598806	0,652145	0,390508
4	0,861136	0,930568	1,930568	0,517982	0,347855	0,180183

$$\Sigma = 1,386294$$

3. Mehleri kvadratuurvalem. Vaatleme Gaussi tüüpi kvadratuurvalemit (1) lõigul $[-1,1]$, kui kaalufunktsiooniks on

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Viimase saame erijuhuna kaalufunktsioonist $p(x) =$

$= (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$, kui valida $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ja rajadeks $a = -1$, $b = 1$.

Kaalu $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ korral lõigul $[-1,1]$ on ortogonaalsed

Tšebšševi polünoomid (vt. [6], I ptk., § 5, p. 3)

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Tema juured

$$(30) \quad x_1 = -\cos \frac{2i-1}{2n} \pi \quad (i=1,2,\dots,n)$$

on aga vaadeldava kvadratuurvalemi abtsissideks x_1 . Tabelis 40 on antud nad n väärtuste korral 1-6.

Selle kvadratuurvalemi kordajad c_1 võime arvutada valemist (2), mis antud juhul omab kuju

$$c_1 = \frac{1}{T_n(x_1)} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_1)}.$$

T a b e l 40.

n	x_1
1	$x_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$
2	$-x_1 = \cos \frac{\pi}{4} = 0,707\ 106\ 781 = x_2$
3	$-x_1 = \cos \frac{\pi}{6} = 0,866\ 025\ 404 = x_3$ $x_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$
4	$-x_1 = \cos \frac{\pi}{8} = 0,923\ 879\ 533 = x_4$ $-x_2 = \cos \frac{3}{8}\pi = 0,382\ 683\ 432 = x_3$
5	$-x_1 = \cos \frac{\pi}{10} = 0,951\ 056\ 516 = x_5$ $-x_2 = \cos \frac{3}{10}\pi = 0,587\ 785\ 252 = x_4$ $x_3 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$
6	$-x_1 = \cos \frac{\pi}{12} = 0,965\ 925\ 826 = x_6$ $-x_2 = \cos \frac{\pi}{4} = 0,707\ 106\ 781 = x_5$ $-x_3 = \cos \frac{5}{12}\pi = 0,258\ 819\ 045 = x_4$

Teostades integreerimise (vt. näit. [1], lk. 264-266
või [4], lk. 197-198) saame

$$c_1 = \frac{\pi}{n}.$$

Nagu näeme, on kordajad kõik võrdsed.

Seega võime Gaussi tüüpi kvadratuurvalemile (1) anda
kuju

$$(31) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

mille abstsissid on määratud valemiga (30). Valem (31) nimetatakse Mehleri (tihti ka Hermite'i) kvadratuurvalemiks. Ta on täpne, kui $f(x)$ on ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoom.

Mainime, et sama tulemuse saame, kui konstrueerime Tšebšeevi kvadratuurvalemi kaaluga $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ lõigul $[-1, 1]$.

Mehleri kvadratuurvalemi (31) jääkliikme võime tuletada valemist (25), kui eeldada $f(x)$ $2n$ -järku tuletise pidevust. Asendades

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

saame

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{\omega_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)! 2^{n-2}} \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Et

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

(vt. [6], I ptk., §5, p. 3), siis

$$R(f) = \frac{\pi}{(2n)! 2^{n-1}} f^{(2n)}(\eta) \quad (-1 \leq \eta \leq 1).$$

N ä i d e 28. Leida integraali $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

väärtus Mehleri valemiga, kui $n = 4$.

Valemist (31) saame, et

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^4 e^{x_i},$$

kus

$$x_1 = -\cos \frac{2i-1}{8}\pi.$$

Tabelis 41 on toodud vastavad arvutused. Sealt saame, et

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{4} \sum = 3,977463.$$

Hinnates viga jääkliikme abil näeme, et

$$|R(f)| \leq \frac{\pi e}{8127} < 0,00002.$$

Kui aga võrrelda tulemust 7-kohalise täpse vastusega, siis saadud tulemus ühtib.

T a b e l 41.

1	x_1		e^{x_1}
1	$-\cos \frac{1}{8}\pi$	-0,923 880	0,396 976
2	$-\cos \frac{3}{8}\pi$	-0,382 683	0,682 029
3	$-\cos \frac{5}{8}\pi$	0,382 683	1,466 213
4	$-\cos \frac{7}{8}\pi$	0,923 880	2,519 045

$$\sum = 5,064 263$$

4. Kvadratuurvalemid kaaluga e^{-x^2} ja e^{-x} . Gaussi tüüpi kvadratuurvalemi (1) võib konstrueerida ka lõpmatute radade jaoks. Seejuures on enam levinenud kaalufunktsioonidena e^{-x^2} ja $x^s e^{-x}$ ($s > -1$). Esimene neist rahuldab kaalufunktsioonide kohta toodud tingimusi kogu reaalteljel $(-\infty, +\infty)$, teine aga poolteljel $[0, \infty)$. Vaatleme nende kvadratuurvalemite konstrueerimist lähemalt.

Kogu reaalteljel $(-\infty, +\infty)$ kaalufunktsiooni

$$p(x) = e^{-x^2}$$

korral moodustavad ortogonaalsete polünoomide süsteemi

Tšebšëvi-Hermite'i polünoomid (vt. näit. [1], lk. 421 - 422 või [3], lk. 35-36)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

Tema juured on aga kvadratuurvalemi

$$(32) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

abstsissideks. Kordajate c_i arvutamiseks saame

$$c_i = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2}.$$

Kvadratuurvalem (32) on täpne, kui $f(x)$ on ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoom. Viimane nähtub ka jääkliikme avaldisest

$$R(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\eta).$$

Tabelis 42 on toodud kvadratuurvalemi (32) abstsissid ja kordajad n väärtuste korral 1-6. Raamatus [4], lk. 201 on toodud nad kuni $n=8$ (incl.) 10 tüvikohaga, aga raamatus [3], lk. 126-127 kuni $n=5$ 12 tüvikohaga ja $n=6, 7, \dots, 10$ korral 9 tüvikohaga.

N ä i d e 29. Leida integraali $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos t dt$ väärtus, kui $n=5$.

Et teisendada integraal kaalule e^{-x^2} , vahetame muutujat $t = \sqrt{2}x$.

T a b e l 42 .

n	x_1	c_1
1	$x_1 = 0$	$c_1 = 1,772453851$
2	$-x_1 = 0,707106781 = x_2$	$c_1 = 0,886226925 = c_2$
3	$-x_1 = 1,224744871 = x_3$ $x_2 = 0$	$c_1 = 0,295408975 = c_3$ $c_2 = 1,181635901$
4	$-x_1 = 1,650680124 = x_4$ $-x_2 = 0,524647623 = x_3$	$c_1 = 0,0813128354 = c_4$ $c_2 = 0,804914090 = c_3$
5	$-x_1 = 2,020182870 = x_5$ $-x_2 = 0,958572465 = x_4$ $x_3 = 0$	$c_1 = 0,0199532421 = c_5$ $c_2 = 0,393619323 = c_4$ $c_3 = 0,945308720$
6	$-x_1 = 2,350604974 = x_6$ $-x_2 = 1,335849074 = x_5$ $-x_3 = 0,436077412 = x_4$	$c_1 = 0,00453000991 = c_6$ $c_2 = 0,157067320 = c_5$ $c_3 = 0,724629595 = c_4$

Seega

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos t dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos \sqrt{2}x dx \approx$$

$$\approx \sqrt{2} \sum_{i=1}^n c_i \cos \sqrt{2}x_i .$$

Arvutuste tulemused on toodud tabelis 43. Saame

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos t dt \approx \sqrt{2} \sum = 1,52041 .$$

Hinnates tulemust jääkliikme kaudu

$$|R(f)| \leq \sqrt{2} \frac{51\sqrt{\pi}}{2^{5101}} (\sqrt{2})^{10} = \frac{51\sqrt{2\pi}}{101} < 0,000083$$

näeme, et viga ei saa ületada 9 viimase koha ühikut.

Integraali täpne väärtus on

$$\sqrt{\frac{2\pi}{e}} = 1,52035.$$

Seega integraali väärtuse tõeline viga on ainult 6 viimase koha ühikut.

T a b e l 43 .

1	x_1	$\sqrt{2}x_1$	$\cos\sqrt{2}x_1$	c_1	$c_1 \cos \sqrt{2}x_1$
1	-2,02018	-2,85697	-0,95977	0,019953	-0,01915
2	-0,95857	-1,35563	0,21351	0,393619	0,08404
3	0	0	1	0,945309	0,94531
4	0,95857	1,35563	0,21351	0,393619	0,08404
5	2,02018	2,85697	-0,95977	0,019953	-0,01915
Σ					1,07509

Poolteljel $[0, +\infty)$ kaalufunktsiooni

$$p(x) = x^s e^{-x} \quad (s > -1)$$

korral on ortogonaalsed Tšebšševi-Laguerre'i polünoomid (vt. näit. [1], lk. 419-420 või [3], lk. 36-37)

$$L_n^{(s)}(x) = (-1)^n x^{-s} e^x \frac{d^n (x^{s+n} e^{-x})}{dx^n}.$$

Numbrilisel integreerimisel on eriline tähtsus erijuhtumil $s = 0$. Siis on kaalufunktsiooniks

$$p(x) = e^{-x}$$

ja kvadratuurvalemi võib kirjutada kujul

$$(33) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) .$$

Tema abstsissideks on Tšebšševi-Laguerre'i polünoomi $L_n^{(0)}(x)$ juured. Kordajad saame arvutada valemist

$$c_i = \frac{(n!)^2}{x_i [L_n^{(0)'}(x_i)]^2} .$$

Valemi (33) jääkliige

$$R(f) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta) \quad (\eta \geq 0) .$$

Tabelis 44 on toodud kvadratuurvalemi (33) abstsissid ja kordajad n väärtuste puhul 1 - 6. Sulgudesse on seal märgitud nullide arv peale koma, näiteks $n=3$ korral $c_3 = 0,(1)103\ 892\ 565 = 0,010\ 389\ 256\ 5$. Raamatus [3], lk. 128-131 on nad toodud kuni $n = 15$ (incl.) kaheteistkümneme tüvikohaga.

T a b e l 44 .

n	x_i	c_i
1	$x_1 = 1$	$c_1 = 1$
2	$x_1 = 0,585\ 786\ 438$ $x_2 = 3,414\ 213\ 562$	$c_1 = 0,853\ 553\ 391$ $c_2 = 0,146\ 446\ 609$
3	$x_1 = 0,415\ 774\ 557$ $x_2 = 2,294\ 280\ 360$ $x_3 = 6,289\ 945\ 083$	$c_1 = 0,711\ 093\ 010$ $c_2 = 0,278\ 517\ 734$ $c_3 = 0,(1)103\ 892\ 565$
4	$x_1 = 0,322\ 547\ 690$ $x_2 = 1,745\ 761\ 101$ $x_3 = 4,536\ 620\ 297$ $x_4 = 9,395\ 070\ 912$	$c_1 = 0,603\ 154\ 104$ $c_2 = 0,357\ 418\ 692$ $c_3 = 0,(1)388\ 879\ 085$ $c_4 = 0,(3)539\ 294\ 706$

n	x_i	c_i
5	$x_1 = 0,263\ 560\ 320$	$c_1 = 0,521\ 755\ 611$
	$x_2 = 1,413\ 403\ 059$	$c_2 = 0,398\ 666\ 811$
	$x_3 = 3,596\ 425\ 771$	$c_3 = 0,(1)759\ 424\ 497$
	$x_4 = 7,085\ 810\ 006$	$c_4 = 0,(2)361\ 175\ 868$
	$x_5 = 12,640\ 800\ 844$	$c_5 = 0,(4)233\ 699\ 724$
6	$x_1 = 0,222\ 846\ 604$	$c_1 = 0,458\ 964\ 674$
	$x_2 = 1,188\ 932\ 102$	$c_2 = 0,417\ 000\ 831$
	$x_3 = 2,992\ 736\ 326$	$c_3 = 0,113\ 373\ 382$
	$x_4 = 5,775\ 143\ 569$	$c_4 = 0,(1)103\ 991\ 975$
	$x_5 = 9,837\ 467\ 418$	$c_5 = 0,(3)261\ 017\ 203$
	$x_6 = 15,982\ 873\ 981$	$c_6 = 0,(6)898\ 547\ 906$

Näide 30. Leida integraali $\int_0^{\infty} e^{-2t} \cos t dt$ väärtus, kui $n = 4$.

Vahetame muutujat $t = \frac{1}{2}x$, siis

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \frac{1}{2}x dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 c_i \cos \frac{1}{2}x_i.$$

Arvutused on toodud tabelis 45. Seega

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} \cos t dt \approx \frac{1}{2} \sum = 0,40001.$$

Hindame tulemust jääkliikme abil

$$|R(r)| \leq \frac{1}{2} \frac{(4!)^2}{8!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{(4!)^2}{2^9 \cdot 8!} < 0,00028,$$

s.t. viga ei ületa 3 viimase koha ühikut.

Integraali täpne väärtus on 0,4. Seega tõeline viga ei ületa 1 viimase koha ühikut.

T a b e l 45 .

1	x_1	$\frac{1}{2}x_1$	$\cos\frac{1}{2}x_1$	c_1	$c_1\cos\frac{1}{2}x_1$
1	0,32255	0,16127	0,98703	0,603154	0,59533
2	1,74576	0,87288	0,64262	0,357418	0,22968
3	4,53662	2,26831	-0,64232	0,038888	-0,02498
4	9,39507	4,69754	-0,01485	0,000539	-0,00001
Σ					0,80002

§ 5. TEISI KVADRATUURVALEMEID.

1. Markovi kvadratuurvalemid. Eespool toodud konstantse kaaluga kvadratuurvalemite on täpseim Gaussi valem. Tema abil saame täpse tulemuse kõigi ülimalt $(2n-1)$ -astme polünoomide korral. Selline täpsus saavutati seetõttu, et ei tehtud kitsendusi kordajate suuruse ega abstsisside asetuse kohta integreerimislõigul. Paneme tähele, et Gaussi valemi abstsisside hulgas ei ole integreerimislõigu otspunkte.

A.A. Markov seadis ülesandeks konstrueerida kvadratuurvalemi, mis säilitaks võimalikult suurema täpsusastme, kuid tema abstsisside seas oleks ka integreerimislõigu otspunkte. Seejuures võib esineda 3 erijuhtu:

- abstsissiks fikseeritakse integraali alumine raja,
- abstsissiks fikseeritakse integraali ülemine raja,
- abstsissiks fikseeritakse integraali mõlemad rajad.

Ülejäänud abstsissid ja kõik kordajad leitakse. Et Markovi valemite tuletamine on üsna analoogiline Gaussi valemi-

te tuletamisega, siis üksikasjaliselt me sel ei peatu. Osutub, et kahel esimesel erijuhul saab nõuda täpsust ülimalt $(2n-2)$ -astme polünoomide korral, viimasel juhul aga $-(2n-3)$ -astme polünoomi korral (vt. näit. [4], lk. 205).

Võttes integreerimiselõiguks $[-1, 1]$, võib Markovi kvadratuurvalemit kirjutada üldkujul

$$(34) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

kus abstsissid x_1 ja x_n võivad olla fikseeritud, s.t. omada väärtusi vastavalt -1 ja 1 . Vaatleme iga erijuhetu eraldi.

a) Fikseerime valemi (34) üheks abstsissiks $x_1 = -1$. Oeutub, et sel erijuhul kvadratuurvalemi (34) kõik abstsissid (ka $x_1 = -1$) võib leida kui polünoomi

$$\begin{vmatrix} P_n(x) & P_n(-1) \\ P_{n-1}(x) & P_{n-1}(-1) \end{vmatrix} = P_n(x) + P_{n-1}(x)$$

juured ($P_k(x)$ - Legendre'i polünoom). Tabelis 46 on toodud need juured n väärtuste puhul 1-5. Samas on ka kvadratuurvalemi kordajad. Kuni $n = 7$ (incl.) on nad antud raamatutes [3], lk. 171 ja [4], lk. 211-212 seitsme tüvikohaga.

Valemi jääkliikmeks on

$$R(f) = \frac{2^{2n-1} n [(n-1)!]^4}{[(2n-1)!]^3} f^{(2n-1)}(\eta), \quad (-1 \leq \eta \leq 1).$$

T a b e l' 46 .

n	x_1	c_1
1	$x_1 = -1$	$c_1 = 2$
2	$x_1 = -1$ $x_2 = 0,33333333$	$c_1 = 0,5$ $c_2 = 1,5$
3	$x_1 = -1$ $x_2 = -0,28989794$ $x_3 = 0,68989794$	$c_1 = 0,22222222 = \frac{2}{9}$ $c_2 = 1,02497166$ $c_3 = 0,75280612$
4	$x_1 = -1$ $x_2 = -0,5753189$ $x_3 = 0,1810663$ $x_4 = 0,8228241$	$c_1 = 0,125 = \frac{1}{8}$ $c_2 = 0,6576886$ $c_3 = 0,7763870$ $c_4 = 0,4409244$
5	$x_1 = -1$ $x_2 = -0,7204803$ $x_3 = -0,1671809$ $x_4 = 0,4463140$ $x_5 = 0,8857916$	$c_1 = 0,08 = \frac{2}{25}$ $c_2 = 0,4462078$ $c_3 = 0,6236530$ $c_4 = 0,5627120$ $c_5 = 0,2874271$

b) Teist erijuhtu me eraldi vaatlema ei hakka, sest lihtsa muutuja vahetuse $x = -t$ abil võime taandada ta esimesele erijuhule. Mainime, et muutujat ei ole vaja vahetada, kui muuta tabelis 46 indeksite järjekord ja abstsisside märgid vastupidiseks.

c) Olgu fikseeritud abstsissidena $x_1 = -1$ ja $x_n = 1$. Siis kvadratuurvalemi (34) abstsissid saadakse kui polünoomi

$$\begin{vmatrix} P_n(x) & P_n(-1) & P_n(1) \\ P_{n-1}(x) & P_{n-1}(-1) & P_{n-1}(1) \\ P_{n-2}(x) & P_{n-2}(-1) & P_{n-2}(1) \end{vmatrix} = P_n(x) - P_{n-2}(x)$$

juured (ka -1 ja 1 on nende hulgas). Tabelis 47 on toodud nad koos kordajatega n väärtuste korral $2 - 8$. Kuni $n = 17$ (incl.) võib saada neid raamatust [3], lk. 173-176 kaheksa tüvikohaga.

Antud erijuhul on kvadratuurvalemi jääkliikmeks

$$R(f) = \frac{2^{2n-4} n [(n-2)!]^4}{(2n-1) [(2n-3)!]^3} f^{(2n-2)}(\eta) \quad (-1 \leq \eta \leq 1).$$

Markovi kvadratuurvalemite kaks esimest erijuhtu annavad lõigu keskpunkti suhtes ebasümmeetrilised valemid, viimane aga sümmeetrilise valemi.

T a b e l 47 .

n	x_1	c_1
2	$-x_1 = 1 = x_2$	$c_1 = 1 = c_2$
3	$-x_1 = 1 = x_3$ $x_2 = 0$	$c_1 = \frac{1}{3} = c_3$ $c_2 = \frac{4}{3}$
4	$-x_1 = 1 = x_4$ $-x_2 = 0,44721360 = x_3$	$c_1 = \frac{1}{6} = c_4$ $c_2 = \frac{5}{6} = c_3$
5	$-x_1 = 1 = x_5$ $-x_2 = 0,65465367 = x_4$ $x_3 = 0$	$c_1 = \frac{1}{10} = c_5$ $c_2 = \frac{49}{90} = c_4$ $c_3 = \frac{64}{90}$

n	x_1	c_1
6	$-x_1 = 1 = x_6$ $-x_2 = 0,76505532 = x_5$ $-x_3 = 0,28523152 = x_4$	$c_1 = \frac{1}{15} = c_6$ $c_2 = 0,37847496 = c_5$ $c_3 = 0,55485837 = c_4$
7	$-x_1 = 1 = x_7$ $-x_2 = 0,83022390 = x_6$ $-x_3 = 0,46884879 = x_5$ $x_4 = 0$	$c_1 = \frac{1}{24} = c_7$ $c_2 = 0,27682605 = c_6$ $c_3 = 0,43174538 = c_5$ $c_4 = 0,48761905$
8	$-x_1 = 1 = x_8$ $-x_2 = 0,87174015 = x_7$ $-x_3 = 0,59170018 = x_6$ $-x_4 = 0,20929922 = x_5$	$c_1 = \frac{1}{28} = c_8$ $c_2 = 0,21070423 = c_7$ $c_3 = 0,34112268 = c_6$ $c_4 = 0,41245881 = c_5$

M ä r k u s : Sümmeetriline Markovi valem ühtib $n = 2$ korral trapetsvalemiga ja $n = 3$ korral Simpsoni valemiga. Ebasümmeetrilisi Markovi valemuid $n = 1$ korral nimetatakse ka ristkülikvalemiks: esimesel erijuhul - vasakpoolne ristkülikvalem, teisel erijuhul - parempoolne ristkülikvalem.

Integraali $\int_a^b f(t)dt$ arvutamiseks Markovi valemi abil tuleb vahetada muutujat

$$t = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2},$$

mis teisendab integraali lõigule $[-1,1]$.

N ä i d e 31. Leida integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ligikaudne väärtus Markovi valemiga (erijuhul b) ja c)) võttes $n=4$.

Et teisendada integraal lõigule $[-1, 1]$, tuleb teosta-
da muutuja vahetus

$$x = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}.$$

Seega

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t} = \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{3+t_i}$$

Erijuhule b) vastavad arvutused on toodud tabelis 48.

Seega

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,693143.$$

Võrreldes täpse tulemusega $\ln 2$, on viga $4 \cdot 10^{-6}$.

T a b e l 48 .

1	t_i	$3 + t_i$	c_i	$\frac{c_i}{3 + t_i}$
1	-0,822824	2,177176	0,440924	0,202521
2	-0,181066	2,818934	0,776387	0,275419
3	0,575319	3,575319	0,657689	0,183953
4	1	4	$\frac{1}{8}$	0,031250
Σ				0,693143

Erijuhule c) vastavad arvutused on antud tabelis 49.

Saame

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,69318.$$

Võrreldes täpse tulemusega on viga $3 \cdot 10^{-5}$.

Tabel 49.

1	t_1	$3 + t_1$	c_1	$\frac{c_1}{3 + t_1}$
1	-1	2	$\frac{1}{6}$	0,083333
2	-0,447214	2,552786	$\frac{5}{6}$	0,326441
3	0,447214	3,447214	$\frac{5}{6}$	0,241741
4	1	4	$\frac{1}{6}$	0,041667
Σ				0,693182

2. Euleri-Maclaurini valem. Vaatleme integraali

$$\int_a^{a+h} f(x) dx$$

leidmist, kui $f(x)$ on küllaldane arv kordi diferentseeruv funktsioon. Vahetades muutujat

$$x = a + ht,$$

saame

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = h \int_0^1 f(a + ht) dt = h \int_0^1 F(t) dt.$$

Peale ositi integreerimist ja mõningaid teisendusi saame viimasest:

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(t) dt &= tF(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 tF'(t) dt = \\ &= F(1) - \int_0^1 tF'(t) dt = F(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 F'(t) dt - \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) F'(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} F(1) - \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) F'(t) dt. \end{aligned}$$

Kaks esimest liiget saadud tulemuses annavad trapets-
valemi, viimane liige aga tema paranduse. Integreerime pa-
randusliiget ositi ja teisendame teda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) F'(t) dt &= \frac{1}{2} (t^2 - t) F'(t) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - t) F''(t) dt = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - t) F''(t) dt = - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6}) F''(t) dt - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} \int_0^1 F''(t) dt \right] = - \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6}) F''(t) dt + \frac{1}{12} [F'(1) - F'(0)]. \end{aligned}$$

Teisenduse eesmärgiks on saada integraali alla sulgu-
desse nn. Bernoulli polünoom (vt. näit. [4], lk. 222).

Jätkates ositi integreerimist ja teisendamist võime in-
tegraali märgi alt välja tuua järjest uusi liikmeid. Kokku-
võttes saame

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(t) dt &= \frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} F(1) - \frac{1}{12} [F'(1) - F'(0)] + \\ &+ \frac{1}{720} [F'''(1) - F'''(0)] - \frac{1}{30240} [F^{(V)}(1) - F^{(V)}(0)] + \dots \end{aligned}$$

Minnes tagasi eelmisele muutujale võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] - \frac{h^2}{12} [f'(a+h) - f'(a)] + \\ &+ \frac{h^4}{720} [f'''(a+h) - f'''(a)] - \frac{h^6}{30240} [f^{(V)}(a+h) - f^{(V)}(a)] + \dots \end{aligned}$$

või

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] -$$

$$- \sum_{i=1}^r \frac{B_{2i} h^{2i}}{(2i)!} \left[f^{(2i-1)}(a+h) - f^{(2i-1)}(a) \right] + R_{2r},$$

kus B_k on Bernoulli arvud (vt. näit. [4], lk. 220) ja R_{2r} - jääkliige.

Alljärgnevalt toome Bernoulli arvud kuni $k = 12$:

$$B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42};$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}; \quad B_{10} = \frac{5}{66}; \quad B_{12} = -\frac{691}{2730};$$

$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = 0.$$

Kui jagada lõik $[a, b]$ n osalõiguks $[a, a+h]$, $[a+h, a+2h]$, ..., $[a+(n-1)h, a+nh]$, kus $h = \frac{b-a}{n}$ ja rakendada saadud valemit igale osalõigule eraldi ning lõpuks tulemused summeerida, siis saame

$$(35) \quad \int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) - \sum_{i=1}^r \frac{B_{2i} h^{2i}}{(2i)!} \left[f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a) \right] + R_{2r},$$

kus $f_i = f(x_i) = f(a + ih)$. Kui lõigul $[a, b]$ eksisteerib funktsiooni $f(x)$ $(2r+2)$ -järku pidev tuletis, siis võib jääkliikmele anda kuju (vt. näit. [3], lk. 216)

$$R_{2r} = -nh^{2r+3} \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!} f^{(2r+2)}(\eta),$$

kus $a \leq \eta \leq b$.

Valemit (35) nimetatakse Euleri-Maclaurini valemiks. Ta kujutab endast üldistatud trapetsvalemi üldistust. Liik-

med $\frac{B_{2r} h^{2r}}{(2r)!} \left[f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a) \right]$ on viimase parandusliikmed.

Peab aga mainima, et Euleri-Maclaurini valem iga funktsiooni $f(x)$ ja sammu h korral ei koonu, sest suuremate indeksitega Bernoulli arvud kasvavad kiiresti. Vaatamata sellele puudusele kasutatakse teda arvutustes üsna tihti, eriti siis, kui esimesed parandusliikmed kiiresti vähenevad.

Euleri-Maclaurini valemit kasutatakse ka summeerimisel. Selleks anname valemile (35) kuju:

$$(36) \quad \sum_{k=0}^n f(x_k) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx + \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + \sum_{i=1}^r \frac{B_{2i} h^{2i-1}}{(2i)!} \left[f^{(2i-1)}(x_n) - f^{(2i-1)}(x_0) \right] - R_{2r},$$

kus $h = x_{k+1} - x_k$.

Euleri-Maclaurini valemist järeldub, et perioodiliste funktsioonide integreerimiseks perioodiga $b - a$ on trapetsvalem kõige sobivam. Tõepoolest, sest siis $f^{(2n-1)}(b) = f^{(2n-1)}(a)$ ja trapetsvalemi parandusliikmed on nullid.

Peale selle $f_0 = f_n$ ning seetõttu võime kirjutada trapetsvalemi kujul:

$$(37) \quad \int_a^b f(x) dx = h(f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + R_0,$$

kus

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{ja} \quad R_0 = -\frac{nh^3}{12} f''(\eta).$$

N ä i d e 32 . Leida integraali $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x dx}{2+\sin x}$ väärtus trapetsvalemi abil võttes $h = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Valemi (37) põhjal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x dx}{2+\sin x} \approx \frac{\pi}{6} \sum_{i=0}^{11} \frac{\sin x_i}{2+\sin x_i} = -0,972013 .$$

Vastavad arvutused on toodud tabelis 50. Integraali täpne väärtus on

$$\frac{2\pi}{3} (3 - 2\sqrt{3}) = -0,972012 .$$

T a b e l 50 .

1	x_1	$\sin x_1$	$2 + \sin x_1$	$\frac{\sin x_1}{2 + \sin x_1}$
0	-180°	0	2,000 000	0
1	-150°	-0,500 000	1,500 000	-0,333 333
2	-120°	-0,866 025	1,133 975	-0,763 707
3	-90°	-1,000 000	1,000 000	-1,000 000
4	-60°	-0,866 025	1,133 975	-0,763 707
5	-30°	-0,500 000	1,500 000	-0,333 333
6	0	0	2,000 000	0
7	30°	0,500 000	2,500 000	0,200 000
8	60°	0,866 025	2,866 025	0,302 169
9	90°	1,000 000	3,000 000	0,333 333
10	120°	0,866 025	2,866 025	0,302 169
11	150°	0,500 000	2,500 000	0,200 000
$\sum$				-1,856 409

N ä i d e 33 . Leida integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ väärtus täpsusega $0,5 \cdot 10^{-5}$.

Valime $n = 4$. Siis tabelisamm $h = \frac{1}{4}$ ja valemist (35) saame

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] -$$

$$- \frac{B_2}{4^2 \cdot 2!} [f'(1) - f'(0)] - \frac{B_4}{4^4 \cdot 4!} [f'''(1) - f'''(0)] - \dots,$$

kus $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Arvutame parandusliikmed.

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'(1) = -\frac{1}{4}, \quad f'(0) = -1 \quad \text{ja}$$

$$\frac{B_2}{4^2 \cdot 2!} [f'(1) - f'(0)] = \frac{-\frac{1}{4} + 1}{6 \cdot 32} = 2^{-8} = 0,003 \ 906;$$

$$f'''(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \quad f'''(1) = -\frac{3!}{16}, \quad f'''(0) = -3!$$

$$\text{ja } \frac{B_4}{4^4 \cdot 4!} [f'''(1) - f'''(0)] = -\frac{3!(-\frac{1}{16} + 1)}{30 \cdot 4^4 \cdot 4!} = -2^{-15} =$$

$$= -0,000 \ 031 \quad \text{ning } f^V(x) = -\frac{5!}{(1+x)^6}, \quad f^V(1) = -\frac{5!}{64},$$

$$f^V(0) = -5! \quad \text{ja } \frac{B_6}{4^6 \cdot 6!} [f^V(1) - f^V(0)] = \frac{5!(-\frac{1}{64} + 1)}{42 \cdot 4^6 \cdot 6!} =$$

$$= 2^{-20} = 0,000 \ 001.$$

Ilmselt kolmas parandusliige meie täpsusele enam mõju ei avalda. Funktsiooni väärtused on arvutatud tabelis 51.

Seega

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{4} \sum = 0,003 \ 906 + 0,000 \ 031 = 0,693 \ 15.$$

Tabel 51.

1	x_1	$1 + x_1$	$f(x_1) = \frac{1}{1 + x_1}$	
0	0	1	1,000 000	0,500 000
1	1/4	5/4	0,800 000	0,800 000
2	1/2	3/2	0,666 667	0,666 667
3	3/4	7/4	0,571 429	0,571 429
4	1	2	0,500 000	0,250 000
Σ				2,788 096

Näide 34. Leida summa $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ täpsusega $0,5 \cdot 10^{-6}$.

Antud juhul $x_0 = 10$, $x_n = \infty$, $h = 1$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ja valemi (36) põhjal

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{10^2} + \frac{B_2}{2!} \frac{2!}{10^3} + \frac{B_4}{4!} \frac{4!}{10^5} + \dots$$

Antud täpsusele parandusliige $\frac{B_6}{6!} \cdot \frac{6!}{10^7}$ ilmselt enam mõju ei avalda.

Arvutades saame:

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{10}^{\infty} = 0,1$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{10^2} = 0,005$$

$$\frac{B_2}{2!} \frac{2!}{10^3} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} = 0,000 166 7$$

$$\frac{B_4}{4!} \frac{4!}{10^5} = -\frac{1}{30 \cdot 10^5} = -0,000 000 3$$

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0,105 166$$

3. Diferentsidega kvadratuurvalem. Kui integraali-
alune funktsioon $f(x)$ asendada mingi konstantse tabelisam-
muga interpolatsioonipolünoomiga, siis integreerides saame
kvadratuurvalemi, mis sisaldab funktsiooni $f(x)$ diferent-
se. Näiteks asendades Newtoni I interpolatsioonipolünoomi-
ga

$$f(x) = T(a + th) \approx f_0 + tf_{0,5}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \dots +$$

$$+ \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} f_{n/2}^n$$

ja integreerides lõigul $[a, a+h]$ saame

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = h(f_0 + \sum_{k=1}^n L_k f_{k/2}^k),$$

kus

$$(38) \quad L_k = \int_0^1 \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{k!} dt.$$

Võttes $L_0 = 1$ võib kirjutada:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^n L_k f_{k/2}^k.$$

Kordajad L_k võib arvutada valemist (38)

$$L_0 = 1, L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = -\frac{1}{12}, L_3 = \frac{1}{24}, L_4 = -\frac{19}{720}, L_5 = \frac{3}{160},$$

$$L_6 = -\frac{863}{60480}, L_7 = \frac{275}{24192}, L_8 = -\frac{33953}{3628800}, L_9 = \frac{57281}{7257600}.$$

Kirjutades Newtoni I interpolatsioonivalemi välja sõl-
me $x_1 = a + h$ suhtes ja integreerides lõigul $[a + h, a + 2h]$
saame

$$\int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^n L_k f_{1+k/2}^k.$$

Analeogiliselt edasi teimides jõuame lõpuks

$$\int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^n L_k f_{n-1+k/2}^k.$$

Summeerides tulemused ja kasutades diferentside omadust

$$\sum_{i=1}^n f_i^k = f_{n+0,5}^{k-1} - f_{0,5}^{k-1}, \text{ saame}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+nh} f(x)dx &\approx h \left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n + \right. \\ &\left. + L_2(f_{n+0,5}^1 - f_{0,5}^1) + L_3(f_{n+1}^2 - f_1^2) + L_4(f_{n+1,5}^3 - f_{1,5}^3) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Viimast valemit nimetatakse Laplace'i kvadratuurvalemiks.

Teda on võimalik kasutada ainult siis, kui on teada funktsiooni väärtusi ka väljaspool lõiku $[a, a+nh]$ (vajalikud diferentside $f_{n+k/2}^k$ arvutamiseks). Alati seda võimalust ei ole. Teime siis järgmiselt. Interpolatsioonipolünoomide väljakirjutamisel liigume esmalt diagonaalselt alla kuni äärmise diferentsini, seejärel diagonaalselt üles (vt. Fraseri skeem, I ptk., § 3, p. 3). Kuu sõlme korral on liikumine toodud tabelis 52.

Integreerides neid interpolatsioonipolünoome vastavatel osalõikudel ja summeerides tulemused, jõuame Gregory kvadratuurvalemini (vt. näit. [1], lk. 297)

$$\begin{aligned} \int_a^{a+nh} f(x)dx &\approx h \left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n + \right. \\ &+ L_2(f_{n+0,5}^1 - f_{0,5}^1) - L_3(f_{n+1}^2 + f_1^2) + L_4(f_{n+1,5}^3 - f_{1,5}^3) - \\ &\left. - L_5(f_{n+2}^4 + f_2^4) + \dots \right]. \end{aligned}$$

T a b e l 52 .

x_1	f_1	f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5
x_0	f_0	$f_{0,5}^1$				
$x_0 + h$	f_1	$f_{1,5}^1$	f_1^2	$f_{1,5}^3$		
$x_0 + 2h$	f_2	$f_{2,5}^1$	f_2^2	$f_{2,5}^3$	f_2^4	
$x_0 + 3h$	f_3	$f_{3,5}^1$	f_3^2	$f_{3,5}^3$	f_3^4	$f_{2,5}^5$
$x_0 + 4h$	f_4	$f_{4,5}^1$	f_4^2	$f_{3,5}^3$		
$x_0 + 5h$	f_5					

Kui Gregory kvadratuurvalemis arvestada liikmeid kuni n -järku (incl.) diferentsini, siis langeb ta ühte $n+1$ sõlmega kinnist tüüpi Newtoni-Cotesi kvadratuurvalemiga. Tõepoolest, toimub ja kogu aeg ühe ja sama interpolatsioonipölvnoomi (ehitatud sõlmedele $a, a+h, \dots, a+nh$) integreerimine.

Gregory valemi oleksime võinud tuletada ka Euleri-Maclaurini valemist, kui viimases tuletised asendada numbrilise diferentseerimise valemitega (vt. näit. [3], lk. 226-227).

Lähendades funktsiooni $f(x)$ Newtoni II interpolatsioonipölvnoomiga, saame nn. Adamsi ekstrapolatsioonivalemi. Osa-õigul $[a-h, a]$:

$$\int_{a-h}^a f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^n A_k f_{-k/2}^{k-1/2},$$

kus

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{5}{12}, \quad A_3 = \frac{3}{8}, \quad A_4 = \frac{251}{720}, \quad A_5 = \frac{95}{288},$$

$$A_6 = \frac{19087}{60480}, \quad A_7 = \frac{5257}{17280}, \quad A_8 = \frac{1070017}{3628800}, \quad A_9 = \frac{2082753}{7257600}$$

ja kogu lõigul $[a - nh, a]$:

$$\int_{a-nh}^a f(x) dx \approx h \left[\frac{1}{2} f_{-n} + f_{-n+1} + \dots + f_{-1} + \frac{1}{2} f_0 + A_2 (f_{-0,5}^1 - f_{-n-0,5}^1) + A_3 (f_{-1}^2 - f_{-n-1}^2) + A_4 (f_{-1,5}^3 - f_{-n-1,5}^3) + \dots \right].$$

Analoogilised valemid võib tuletada ka Stirlingi ja Besseli interpolatsioonipolünoomide integreerimisel. Kõigi nende valemite (excl. Gregory valem) puuduseks on asjaolu, et nad nõuavad funktsiooni väärtusi väljastpoolt vaadeldavat lõiku.

Besseli interpolatsioonipolünoomi integreerimisel saame

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^n B_k f_{1/2}^{2k}$$

ja

$$\int_a^{a+nh} f(x) dx \approx h \left[\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n + B_1 (f_n^1 - f_0^1) + B_2 (f_n^3 - f_0^3) + \dots \right],$$

kus

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{12}, \quad B_2 = \frac{11}{720}, \quad B_3 = -\frac{191}{60480}, \quad B_4 = \frac{2497}{3628800}.$$

Stirlingi interpolatsioonipolünoomist saame

$$\int_{a-h/2}^{a+h/2} f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^n S_k f_0^{2k}$$

ja

$$\int_{a-h/2}^{a+(n-1/2)h} f(x) dx \approx h \left[f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \right. \\ \left. + S_1(f_{n-0,5}^1 - f_{-0,5}^1) + S_2(f_{n-0,5}^3 - f_{-0,5}^3) + \dots \right],$$

kus

$$S_0 = 1, S_1 = \frac{1}{24}, S_2 = -\frac{17}{5760}, S_3 = \frac{367}{967680}, S_4 = -\frac{27859}{464486400}.$$

Kõiki eespool toodud kvadratuurvalemeid võib kasutada nii numbriliseks integreerimiseks kui ka summeerimiseks. Eriti laia kasutuspiinda on diferentsidega kvadratuurvalemid (diferentsvalemid) leidnud aga diferentsiaalvõrrandite numbrilisel integreerimisel.

N ä i d e 35 . Leida integraali $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ligikaudne väärtus kasutades Gregory valemit tabelisammuga 0,1.

Teostame arvutused 6 kümnendkohaga. Funktsiooni väärtused ja diferentsskeem on toodud tabelis 53. Arvestades diferentsskeemi omadusi võime õigeteks lugeda diferentse kuni kuuenda järguni. Seega

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,1 \left[\sum + L_2(f_{9,5}^1 - f_{0,5}^1) - L_3(f_9^2 + f_1^2) + \right. \\ \left. + L_4(f_{8,5}^3 - f_{1,5}^3) - L_5(f_8^4 + f_2^4) + L_6(f_{7,5}^5 - f_{2,5}^5) - L_7(f_6^6 + f_3^6) \right],$$

kus

$$\sum = \frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_9 + \frac{1}{2}f_{10}.$$

Arvutades saame:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= 6,937\ 715 \\
 L_2(f_{9,5}^1 - f_{0,5}^1) &= -\ 5\ 383 \\
 L_3(f_9^2 + f_1^2) &= -\ 753 \\
 L_4(f_{8,5}^3 - f_{1,5}^3) &= -\ 79 \\
 L_5(f_8^4 + f_2^4) &= -\ 21 \\
 L_6(f_{7,5}^5 - f_{2,5}^5) &= -\ 4 \\
 L_7(f_6^6 + f_3^6) &= -\ 2 \\
 \hline
 &6,931\ 473
 \end{aligned}$$

ja

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,693\ 147 .$$

T a b e l 53 .

1	x_1	$1+x_1$	$f_1 = \frac{1}{1+x_1}$	f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	f_1^6
0	0	1	1,000000	-90909					
1	0,1	1,1	0,909091	-75758	15151	-3495			
2	0,2	1,2	0,833333	-64102	11656	-2399	996		
3	0,3	1,3	0,769231	-54945	9157	-1831	668	-328	117
4	0,4	1,4	0,714286	-47619	7326	-1374	457	-211	78
5	0,5	1,5	0,666667	-41667	5952	-1050	324	-133	43
6	0,6	1,6	0,625000	-41667	4902	-1050	234	-90	25
7	0,7	1,7	0,588235	-36765	4086	-816	169	-65	28
8	0,8	1,8	0,555556	-32679	3439	-647	132	-37	
9	0,9	1,9	0,526316	-29240	2924	-515			
10	1	2	0,500000	-26316					
Σ			6,937715						

§ 6. KVADRATUURVALEMITE RAKENDUSI.

1. Päratute integraalide arvutamine. Väga tihti võib arvutuspraktikas kohata ülesandeid, kus tuleb leida päratute integraalide väärtusi. Seejuures võivad nad olla kas lõpmatute rajadega või lõplike rajadega, kuid iseärase punktidega integreerimispiirkonnas.

Vaatleme esmalt lõpmatute rajadega päratuid integraale. Nende arvutamist kaalufunktsioonide e^{-x^2} ja e^{-x} abil vaatlesime juba Gaussi tüüpi valemite juures. Toome veel mõningad erivõtted, mille abil võib arvutada päratute integraalide ligikaudseid väärtusi.

Beldame, et vaadeldav integraal koondub ja üks rajadest on lõplik. Kui viimane nõue ei ole täidetud, siis võime seda saavutada kaheks integraaliks lahutamise teel, näit.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx .$$

Ühe lõpliku rajaga päratut integraali on aga alati võimalik teisendada sobiva muutuja vahetuse abil kas lõplike rajadega päratuks integraaliks või isegi harilikuks integraaliks, näit.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = - \int_{-1}^0 \frac{t^2 dt}{t^2} = \int_0^1 dt , \quad (x = \frac{1}{t}) .$$

Lõpmatute rajadega päratu integraali võib ka lahutada kaheks integraaliks

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

nii, et teine integraal on tunduvalt väiksem arvutatava inte-

graali nõutavast täpsusest. Siis loetakse teatud täpsuse pii-
rides

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx .$$

Viimase järgi arvutamisel toimitakse tavaliselt järgmi-
selt. Valitakse ette samm h ja arvutatakse osaintegraalide

$$\int_a^{a+h} f(x) dx , \quad \int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx , \quad \int_{a+2h}^{a+3h} f(x) dx \quad \text{jne.}$$

väärtused mingi kvadratuurvalemiga. Kui integraal $\int_a^{\infty} f(x) dx$
koondub, siis alates teatud osaintegraalist kõigi järgmiste
osaintegraalide väärtused on väiksemad etteantud arvust ε .

Neid me aga enam ei arvesta. Integraali $\int_a^{\infty} f(x) dx$ väärtuse
saame osaintegraalide liitmise teel. Peab aga mainima, et
niimoodi arvutatud integraali väärtuse headus sõltub arvutaja
poolt valitud suurustest h ja ε .

Mõnikord on võimalik lõpmatute rajadega päratu inte-
graal $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ka kaheks või enamaks v ä r d -
s e k s integraaliks. Vaatleme seda järgmises näites.

N ä i d e 36 . Arvutada integraal $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

Lahutame ta kaheks integraaliks järgmiselt:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} .$$

Esimene integraal on lõplike rajadega päratu integraal. Tei-
ses aga vahetame muutujat

$$x = \frac{1}{t} .$$

Saame

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{(1+\frac{1}{t})\frac{1}{\sqrt{t}}} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} .$$

Seega on esimene ja teine integraal võrdsed ning

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Viimase integraali arvutamist vaatleme järgmises näites.

Lõplike rajadega päratu integraali arvutamisel annab soovitud tulemusi sageli ositi integreerimine.

Näide 37. Arvutada eelmises näites saadud integraal.

Saadud integraal on lõplike rajadega päratu integraal, sest iseäraseks punktiks lõigul $[0;1]$ on punkt $x = 0$. Integreerime ositi, valides

$$u = \frac{1}{1+x} \quad \text{ja} \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Saame

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \left. \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \\ &= 1 + 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx. \end{aligned}$$

Viimases integraalis lõigul $[0,1]$ iseärast punkti enam ei ole ja teda võib arvutada mis tahes kvadratuurvalemiaga.

Iseärase punktidega päratute integraalide arvutamiseks kasutatakse väga tihti iseärasuste väljaeraldamise meetodit. Selleks on olemas kaks võtet: multiplikatiivne ja aditiivne võtte.

M u l t i p l i k a t i i v n e v ö t e . Kirjutame integreeritava funktsiooni $F(x)$ kahe funktsiooni $p(x)$ ja $f(x)$ korrutisena

$$F(x) = p(x)f(x) ,$$

kus $p(x)$ omab kõik $F(x)$ iseärasused ja täidab kaalufunktsiooni nõudeid ning $f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$. Siis

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx$$

ning kasutades kvadratuurvalemit kaaluga $p(x)$ saame arvutada integraali (näit. Mehleri, kaaluga e^{-x^2} või e^{-x} jt. kvadratuurvalemite abil).

N ä i d e 38 . Arvutada integraal $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Funktsioonil $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ on iseäraseks punktiks lõigul $[-1, 1]$ punkt $x = 1$. Esitame integraalialuse funktsiooni kujul

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ja vaatleme funktsiooni $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, kui kaalufunktsiooni. Funktsioon $\sqrt{1+x}$ on pidev lõigul $[-1, 1]$ ja Mehleri kvadratuurvalemi (31) põhjal saame

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1+x_i} ,$$

kus $x_i = -\cos \frac{2i-1}{2n} \pi$. Valides n saame teostada arvutused.

A d i t i i v n e v ö t e . Kirjutame integraali-
aluse funktsiooni $f(x)$ kahe funktsiooni summana

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

nii, et funktsioonil $f(x)$ ei ole iseäraseid punkte lõigul
 $[a, b]$ ja ta on pidev, kuid $g(x)$ omab kõik iseärasused ja
 on täpselt integreeritav. Seega

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx ,$$

kus esimese integraali arvutame mingi kvadratuurvalemi abil,
 teise aga integreerime täpselt integraalarvutuste meetodite-
 ga.

N ä i d e 39. Arvutada integraal $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$.

Funktsioonil $\ln \sin x$ on iseäraseks punktiks lõigul
 $[0, \frac{\pi}{2}]$ punkt $x = 0$. Lahutades integraalialuse funktsiooni
 kaheks

$$\ln \sin x = \ln \frac{\sin x}{x} + \ln x$$

ei ole esimesel neist $-\ln \frac{\sin x}{x}$ - iseärasusi lõigul $[0, \frac{\pi}{2}]$ ja
 ta on pidev, kuid teisel neist $-\ln x$ - on iseäraseks punk-
 tiks $x = 0$ ja integraal temast on täpselt arvutatav:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}(\ln \frac{\pi}{2} - 1) .$$

Integraali

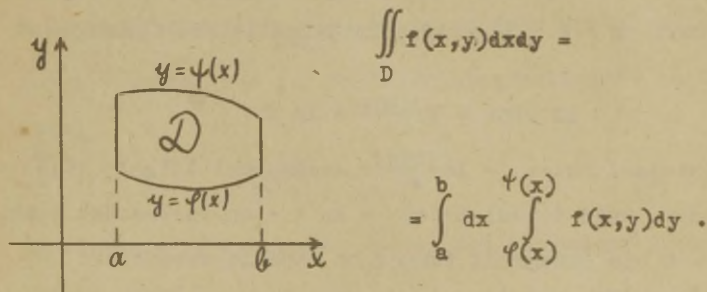
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{x} \, dx$$

arvutame mis tahes kvadratuurvalemi abil (näit. Gaussi vale-

mi järgi). Seega ongi päratu integraali arvutamine taandatud hariliku integraali arvutamisele.

2. Kordsete integraalide arvutamine. Matemaatilise analüüsi kursusest on teada, et kordsete integraalide arvutamise võib läbi viia ühekordsete integraalide järkjärgulise arvutamise teel. Seega üheks lihtsamaks viisiks kordsete integraalide numbrilise arvutamise valemite saamiseks on kvadratuurvalemite korduv rakendamine. Vaatleme seda lähemalt kahekordsete integraalide korral. Kahekordsete integraalide numbrilise arvutamise valemite nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Olgu funktsioon $f(x, y)$ pidev piirkonnas D , mida piiravad kõverad $y = \varphi(x)$ ja $y = \psi(x)$ ning sirged $x = a$ ja $x = b$ (vt. joon. 5). Matemaatilise analüüsi kursusest on teada, et



Joon. 5.

Kui tähistada

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy ,$$

siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx .$$

Kasutades mis tahes kvadratuurvalemit võib kirjutada

$$\iint_D f(x,y) dx dy \cong \sum_{i=1}^n A_i F(x_i),$$

kus x_i on selle kvadratuurvalemi sõlmed ja A_i - kordajad.

Omakorda

$$F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y) dy$$

võib arvutada mingi kvadratuurvalemi abil

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_j^{(i)} f(x_i, y_j^{(i)}).$$

Kokkuvõttes

$$(39) \quad \iint_D f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_j^{(i)} f(x_i, y_j^{(i)}),$$

kus A_i ja $B_j^{(i)}$ on vastavate kvadratuurvalemite kordajad ning x_i ja $y_j^{(i)}$ - sõlmed.

Kvadratuurvalemeid (39) võib saada väga mitmesuguseid sõltuvalt kasutatavatest kvadratuurvalemitest. Nende puuduseks on see, et parema täpsuse saamiseks tuleb funktsiooni väärtusi arvutada küllaltki paljudes punktides (ristkülikulise piirkonna korral mm punktis).

On olemas ka spetsiaalseid kvadratuurvalemeid (vt. näit. [10] või [14]), kuid neil me lähemalt ei peatu.

Ülaltoodud arutelu võib üldistada n-kordsete integraalide arvutamiseks. Muidugi siis punktide arv kasvab tunduvalt, mis võib viia arvutustöö mahu väga suureks.

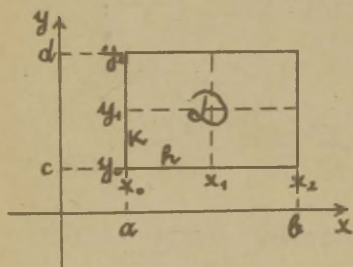
Väikese punktide arvu korral aga kannatab täpsus. See-
tõttu on viimasel ajal n -kordsete integraalide arvutamisel
laialdast kasutamist leidnud töönaosusteooria ideedel põhii-
nev Monte-Carlo meetod.

3. Simpsoni kubatuurvalem. Vaatleme lähemalt kubatuur-
valemi saamist Simpsoni kvadratuurvalemist.

Olgu esmalt antud integreerimispiirkond D ristküliku-
na, mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedega (vt.

joon. 6):

$$D \{ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \}.$$



Joon. 6.

Jagame küljed kaheks
võrdseks osaks ja tähistame

$$\begin{aligned} x_0 &= a & y_0 &= c \\ x_1 &= a + h & y_1 &= c + k \\ x_2 &= a + 2h = b & y_2 &= c + 2k = d, \end{aligned}$$

$$\text{kus } h = \frac{b-a}{2} \text{ ja } k = \frac{d-c}{2}.$$

Kokku saame 9 punkti (x_i, y_j) , $i = 0, 1, 2$; $j = 0, 1, 2$.

Arvutame integraali

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Tähistades

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

saame Simpsoni valemist

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx \approx \frac{h}{3} [F(x_0) + 4F(x_1) + F(x_2)]$$

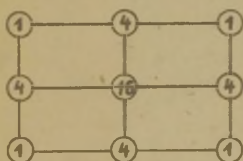
ja

$$P(x_1) = \int_c^d f(x_1, y) dy \approx \frac{h}{3} [f(x_1, y_0) + 4f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2)] .$$

Kokkuvõttes saame

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \frac{hk}{9} [f(x_0, y_0) + 4f(x_0, y_1) + f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_0) + 16f(x_1, y_1) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_0) + 4f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)] ,$$

mida nimetatakse Simpsoni kubatuurvalemeiks. Funktsiooni väärtuste kordajad selles valemis on antud geomeetrilise pildina joonisel 7 .

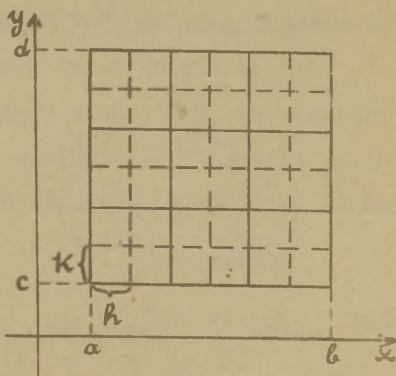


Joon. 7.

Iga osapiirkond tuleb aga jagada veel neljaks võrdseks osaks eespool saadud tulemuste rakendamiseks (joon. 8). Funktsiooni $f(x, y)$ väärtusi tuleb arvutada kõige peenema jaotuse sõlmpunktides.

Valides muutuja x suunas osajaotusi n ja muutuja y suunas m , on

Kui ristküliku D mõõtmed on küllalt suured, siis suurema täpsuse saamiseks jagame piirkonna D osapiirkondadeks ja rakendame Simpsoni kubatuurvalemit igale osapiirkonnale eraldi.



Joon. 8.

$$h = \frac{b-a}{2n} \quad \text{ja} \quad k = \frac{d-c}{2m}.$$

Sõlmpunktideks on järgmine punktide süsteem

$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2n)$$

$$y_j = b + jk \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2m)$$

Summeerides osapiirkondadele rakendatud Simpsoni kuba-
tuurvalemeid, saame

$$(40) \quad \iint_D f(x,y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} c_{ij} f(x_i, y_j),$$

kus c_{ij} on matriksi C vastavad elemendid

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & \dots & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \dots & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & \dots & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \dots & 8 & 16 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 8 & 4 & 8 & \dots & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \dots & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & \dots & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

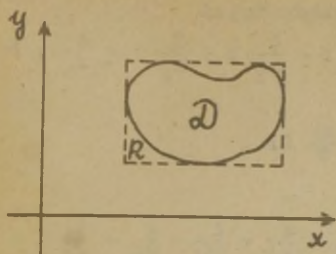
Analoogiliselt võib konstrueerida kubatuurvalemi mis ta-
hes kvadratuurvalemile või nende kombinatsioonidele.

Kui piirkond D ei ole ristkülik, siis täiendame ta
ristkülikuks või jagame ristkülikukujulisteks osapiirkonda-
deks. Esimesel juhul võtame vaatluse alla abifunktsiooni,
mille defineerime järgmiselt:

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{kui punkt } (x,y) \in D \\ 0, & \text{kui punkt } (x,y) \in (R-D) \end{cases}$$

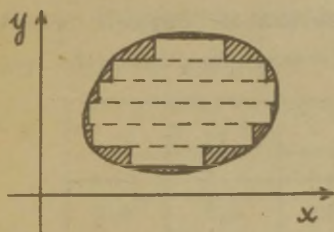
(vt. joon. 9). Seejuures

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R f^*(x,y) dx dy.$$



Joon. 9.

vast piirkonnast ära "visata", mis suurendab ka integraali viga (vt. joon. 10).



Joon. 10.

Joonistame piirkonna D ja kanname sinna sõlmede võrgu (joon. 11). Arvutuste lihtsustamiseks kasutame asjaolu, et ühel ja samal horisontaaljoonel on võrdsed kõik y väärtused - y_j ehk vertikaaljoonel on võrdsed x väärtused - x_i .

Tähistades

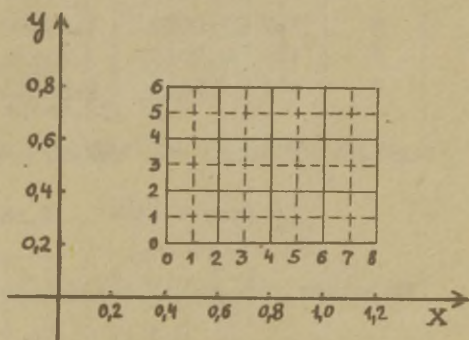
$$Y = y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6$$

Peab aga märkima, et selline täiendamine võib viga küllaltki suurte vigadeni, sest $f''(x,y)$ ei ole üldiselt pidev (või pidevalt diferentseeruv).

Joonistades piirkonda D ristkülikukujulised osapiirkonnad, tuleb meil osa vaadelda-

N ä i d e 40. Leida

$\iint_D \frac{y}{x} dx dy$, kus piirkond D on ristkülik külgedega $x = 0,4$, $x = 1,2$, $y = 0,2$, $y = 0,8$. Arvutamisel valida kummaski suunas samm $0,1$.



Joon. 11.

saame Simpsoni valemi (40) kirjutada kujul

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy = \frac{hk}{9} \left(\frac{1}{x_0} Y + \frac{4}{x_1} Y + \frac{2}{x_2} Y + \frac{4}{x_3} Y + \frac{2}{x_4} Y + \frac{4}{x_5} Y + \frac{2}{x_6} Y + \frac{4}{x_7} Y + \frac{1}{x_8} Y \right) = \frac{hk}{9} XY,$$

kus

$$X = \frac{1}{x_0} + \frac{4}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{4}{x_3} + \frac{2}{x_4} + \frac{4}{x_5} + \frac{2}{x_6} + \frac{4}{x_7} + \frac{1}{x_8}.$$

Sama tulemuse oleksime saanud kirjutades kahekordse integreaali kujul

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy = \int_a^b \frac{dx}{x} \int_c^d y dy$$

ja rakendades kummalegi integraalile eraldi Simpsoni valemit.

T a b e l 54 .

i, j	x_1	$\frac{1}{x_1}$		y_j	
0	0,4	2,50000	2,50000	0,2	0,2
1	0,5	2,00000	8,00000	0,3	1,2
2	0,6	1,66667	3,33333	0,4	0,8
3	0,7	1,42857	5,71428	0,5	2,0
4	0,8	1,25000	2,50000	0,6	1,2
5	0,9	1,11111	4,44444	0,7	2,8
6	1,0	1,00000	2,00000	0,8	0,8
7	1,1	0,90909	3,63636	Y	9,0
8	1,2	0,83333	0,83333		
		X	32,96174		

Kasutades tabelis 54 toodud arvutusi, saame

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy \approx \frac{0,01}{9} \cdot 32,96174 \cdot 9 = 0,32962.$$

Võrreldes integraali täpse väärtusega

$$0,3 \ln 3 = 0,32958,$$

on tulemuse viga $4 \cdot 10^{-5}$.

HARJUTUSÜLESANDEID.

Interpolatsioonimeetod.

1. Korrastada argumendi astmete järgi järgmiste tabelitega määratud interpolatsioonipolünoomid:

a)

x	0	2	5
y	2	12	147

b)

x	-1	1	2	3
y	-7	-3	5	25

c)

x	0	-1	0,5	3
y	3,75	-11,48	1,33	26,76

2. Leida Aitkeni interpolatsiooniprotsessi abil

a) $f(1)$, kui

x	-2	-1	0	2	3
f(x)	-10	0	2	6	20

b) $f(5)$, kui

x	0	2	3	6	7	9
$f(x)$	658503	704969	729000	804357	830584	884736

c) $\Gamma(1,16)$, kui

x	1,00	1,10	1,25	1,35	1,40	1,50
$\Gamma(x)$	1,0000	0,9513	0,9064	0,8912	0,8873	0,8862

d) $\text{sh } 0,7$, kui

x	0,50	0,58	0,65	0,75	0,84	0,93	1,00
$\text{sh } x$	0,52110	0,61307	0,69675	0,82232	0,94233	1,06998	1,17520

3. On antud funktsiooni $\sin x$ tabel tabelisammuga 1° . Milline on maksimaalne viga, kui $\sin x$ väärtuste leidmisel kasutame lineaarset, ruut- ja kuupinterpolatsiooni?

4. On kasutada kuuekohaline koosinusfunktsiooni tabel tabelisammuga 0,001. Milline on lineaarse interpolatsiooni abil leitud koosinuse väärtuste vea ülemmäär?

5. Tabelis on esitatud ruutjuured arvudest 10,0; 10,1; ... ; 99,9; 100,0. Mitmekohalise (maks.) tabeli korral lineaarse interpolatsiooni kasutamisel tekkinud viga ei ületa üht viimase koha ühikut?

6. Tabelis on esitatud loomuliku logaritmi väärtused 18igul $[1;10]$ tabelisammuga 0,01. Mitmekohalise (maks.) tabeli korral ruutinterpolatsiooni kasutamisel tekkinud viga ei ületa poolt viimase koha ühikut?

7. On tarvis koostada viiekohaline kuupjuurte väärtuste tabel lõigul $[100; 200]$. Valida suurim tabelisama, mille korral oleks küllaldane lineaarse interpolatsiooni kasutamine.

8. Kui täpselt saab arvutada interpolatsioonipolünoomi abil $\sqrt{105}$, kui on teada $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$ ja $\sqrt{144}$.

9. Nõutakse eksponentfunktsiooni e^x lähendamist polünoomiga lõigul $[0;1]$ nii, et maksimaalne viga ei ületaks poolt neljanda kümnendkoha ühikut. Mitmenda astme polünoom tuleb valida, kui kasutame

- a) Taylori polünoomi punktis $x = 0,5$;
- b) Maclaurini polünoomi;
- c) interpolatsioonipolünoomi, kusjuures sõlmedeks on Tšebõševi polünoomi nullkohad.

10. Kirjutada välja kõik võimalikud 3. astme muutuva tabelisammuga Newtoni interpolatsioonipolünoomi erikujud nelja sõlme korral (8 erikuju).

11. Leida Newtoni interpolatsioonivalemi abil ülesandes 1 antud tabelitega määratud interpolatsioonipolünoomid.

12. Leida üldistatud interpolatsioonipolünoom järgmiste andmete alusel:

a)

x	0	1	2
y	0	1	4
y'	0	3	
y''	-2		

b)

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2
y'		y'_1	

c)

x	0	1
$f(x)$	-1	-4
$f'(x)$	-4	-1
$f''(x)$		6

d)

x	-1	0	1
$f(x)$	1	3	5
$f'(x)$	0	2	4
$f''(x)$			18

13. On antud tabel

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$\sin x$	0,5211	0,6367	0,7586	0,8881	1,0265	1,1752	1,3356	1,5095

Kasutades interpolatsioonivalemeid arvutada $\sin 0,53$;
 $\sin 0,95$; $\sin 0,79$; $\sin 1,15$; $\sin 0,623$ ja $\sin 0,862$.

Hinnata tulemuste täpsust.

14. Antud on funktsiooni väärtuste tabel

x	$f(x)$
0,36	0,93590
0,44	0,90475
0,52	0,86782
0,60	0,82534
0,68	0,77757
0,76	0,72484
0,84	0,66746
0,92	0,60582
1,00	0,54030

Leida $f(0,4)$, $f(0,588)$,
 $f(0,648)$, $f(0,675)$, $f(0,75)$ ja
 $f(0,9)$. Millise täpsusega saab
leida funktsiooni väärtusi antud
tabeli korral kasutades lineaarset
interpolatsiooni?

15. Antud on e^x väärtuste tabel

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
e^x	1,105171	1,221403	1,349859	1,491825	1,648721

Arvutada $e^{0,29}$, $e^{0,305}$ ja $e^{0,32}$. Kui täpselt on võimalik neid arvutada antud tabeli korral?

16. Olgu antud funktsiooni $y = f(x)$ tabel tabelisammuga h ning vaadeldavas piirkonnas hinnangud

$$\max |r_1^2| \leq \mu_2 \quad \text{ja} \quad \max |r_1^3| \leq \mu_3.$$

Millise täpsuse annab siis lineaarne ja ruutinterpolatsioon?

17. On antud Besseli funktsiooni $J_0(x)$ tabel

x	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$J_0(x)$	1,00000	0,99938	0,99750	0,99438	0,99002	0,98444

Millise täpsuse saavutame lineaarse ja ruutinterpolatsiooni kasutamisel? Arvutada $J_0(0,04)$, $J_0(0,12)$, $J_0(0,125)$ ja $J_0(0,19)$. Leida x , kui $J_0(x) = 0,99640$, $J_0(x) = 0,99600$ ja $J_0(x) = 0,99511$.

18. Kasutades ülesandes 13 toodud tabelit leida x , kui $\operatorname{sh} x = 0,5290$, $\operatorname{sh} x = 0,8223$, $\operatorname{sh} x = 0,8814$, $\operatorname{sh} x = 1,0000$ ja $\operatorname{sh} x = 1,4052$.

19. Kasutades pöördinterpolatsiooni leida võrrandi $x^3 - 4x - 1 = 0$ lahend, mis asub vahemikus $(-1,0)$, täpsusega 10^{-5} .

20. Kasutades pöördinterpolatsiooni leida võrrandi $3x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 3x + 2 = 0$ kõik lahendid täpsusega $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$.

21. On antud 1. liikli elliptilise integraali

$$F(\alpha, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (k = \sin \alpha)$$

tabel:

$\varphi \backslash \alpha$	10°	20°
20°	0,3493	0,3499
25°	0,4367	0,4379

- Leida $F(\alpha, \varphi)$, kui a) $\alpha = 20^\circ$, $\varphi = 22^\circ$;
 b) $\alpha = 15^\circ$, $\varphi = 24^\circ$;
 c) $\alpha = 12^\circ$, $\varphi = 22^\circ 30'$.

22. On antud 2. liiki elliptilise integraali

$$E(\alpha, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi \quad (k = \sin \alpha)$$

tabel:

$\varphi \backslash \alpha$	30°	40°	50°
45°	0,7672	0,7549	0,7414
50°	0,8483	0,8317	0,8134
55°	0,9284	0,9068	0,8827

- Leida $E(\alpha, \varphi)$, kui a) $\alpha = 40^\circ$, $\varphi = 49^\circ$;
 b) $\alpha = 35^\circ$, $\varphi = 51^\circ$;
 c) $\alpha = 39^\circ$, $\varphi = 52^\circ$.

N u m b r i l i n e d i f e r e n t -
 s e e r i m i n e .

23. Kasutades ülesandes 14 toodud funktsiooni tabelit, arvutada $f'(0,4)$; $f'(0,6)$; $f'(0,9)$; $f'(0,64)$; $f'(0,67)$; $f''(0,6)$; $f''(0,64)$ ja $f''(0,67)$.

24. Kasutades ülesandes 2 (c) toodud sh x tabelit, arvutada $\text{sh}'0,65$, $\text{sh}'0,66$, $\text{sh}'0,70$, $\text{sh}''0,66$ ja $\text{sh}''0,70$.

Hinnata tulemusi.

25. Lisaks ülesandes 15 toodud e^x tabelile on antud veel:

x	0,6	0,7	0,8
e^x	1,822119	2,013753	2,225541

Arvutada $(e^x)'$ ja $(e^x)''$, kui a) $x = 0,18$; b) $x = 0,32$; c) $x = 0,36$; d) $x = 0,40$; e) $x = 0,73$ ja hinnata saadud tulemuste täpsust.

26. Tuletada valem $f'(x_1)$ arvutamiseks, kui on antud $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ ning $h_1 = x_1 - x_0$, $h_2 = x_2 - x_1$. Leida selle valemi jääkliige.

27. Arvutada $f'(0)$, $f'(1)$ ja $f'(5)$, kui on antud $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ ning $f(5) = 2$.

28. On kasutada ulatuslik viiekohaline $\sin x$ väärtuste tabel (Сегал, Семёндяев, Пятизначные матем. таблицы). Valida minimaalne tabelisamm, mille korral saab arvutada nelja õige kohaga $\sin x$ esimese tuletise väärtused.

N u m b r i l i n e i n t e g r e e r i m i n e .

29. Leida kvadratuurvalemi

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(a) + A_2 f(c) + A_3 f(b) \quad (a < c < b)$$

kordajad.

30. Leida kvadratuurvalemi

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

kerdajad, kui $x_1 = (1 - \frac{1}{2})h$, $h = \frac{b-a}{3}$.

31. Leida kaaluga $\frac{1}{\sqrt{x}}$ kvadratuurvalemi

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx Af(0) + Bf(\frac{1}{2}) + Cf(1)$$

kordajad A, B ja C. Kirjutada see valem välja integraali

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x-a}} dx$$

arvutamiseks.

32. Leida kaaluga $\sqrt{x}$ trapetsvalemi

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = Af(0) + Bf(1) + R$$

kordajad A ja B ning jääkliige R. Kirjutada see valem

välja integraali $\int_a^b \sqrt{x-a} f(x) dx$ arvutamiseks.

33. Leida Tšebõševi kvadratuurvalemi

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = A[f(x_1) + f(x_2)]$$

kordaja A ja abstsissid x_1, x_2 . Millise kuju omandab see

valem integraali $\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x-a}} dx$ arvutamiseks.

34. Tõestada, et iga pideva funktsiooni korral Simpsoni valemiga antud summa läheneb määratud integraalile, kui

$n \rightarrow \infty$.

35. Arvutada integraal $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ trapets-, Simpsoni ja $\frac{3}{8}$ -

valemi abil valides $h = \frac{1}{6}$. Hinnata tulemuste täpsust jääkliikmete abil ning võrrelda hinnanguid tegeliku täpsusega.

36. Arvutada $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ Tšebõševi ja Gaussi valemiga $n=3$

korral. Hinnata tulemuste täpsust jääkliikmete abil ning võr-

relda hinnanguid tegeliku täpsusega.

37. Leida kvadratuurvalemite abil integraali $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ väärtus veaga mitte üle 0,0005.

38. Leida integraali $\int_0^2 \frac{x dx}{1+x^2}$ ligikaudne väärtus Newtoni-Cotesi valemi järgi (nii kinnise kui ka lahtise) $n=4$ korral ja tema tõenäoline viga (Runge meetodiga).

39. Arvutada trapetsvalemi abil integraali $\int_{0,36}^{1,00} f(x) dx$ ligikaudne väärtus ja selle tõenäoline viga, kui funktsioon $f(x)$ on sama, mis on antud ülesandes 14.

40. Arvutada Simpsoni valemi järgi integraalide $\int_0^{0,8} f(x) dx$ ja $\int_{0,1}^{0,7} f(x) dx$ ligikaudsed väärtused ja nende tõenäolised vead, kui funktsioon $f(x)$ on sama, mis on antud ülesannetes 15 ja 25.

41. Kasutades kvadratuurvalemeid, arvutada integraalid:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$, c) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$,

d) $\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$, e) $\int_1^2 \frac{x dx}{(1+2x)^2}$.

42. Kasutades Gaussi tüüpi kvadratuurvalemeid arvutada päratud integraalid:

a) $\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$, c) $\int_{1/3}^{\infty} \frac{\sqrt{3x-1}}{x^2} dx$,

d) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{1+x} dx$, e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} \cos 2x dx$.

43. Arvutada Euleri-Maclaurini valemi abil integraal

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \quad \text{täpsusega } 10^{-4}.$$

44. Leida Euleri-Maclaurini valemi abil summad:

a) $\sum_{k=1}^n k^3$, b) $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k^3}$, c) $\sum_{k=1}^n (k^2 + 2x - 1)$.

45. Kasutades Euleri-Maclaurini valemit, arvutada täpsusega $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$:

a) $\ln 3$;

b) $\frac{51}{25} + \frac{52}{25,5} + \frac{53}{26} + \frac{54}{26,5} + \dots + \frac{100}{49,5} + \frac{101}{50}$.

46. Kasutades kvadratuurvalemeid, arvutada integraalid järgmistest perioodilistest funktsioonidest:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x) dx$, b) $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$.

47. Taandada päratu integraali $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$ arvutamise tavalise integraali arvutamisele.

48. Arvutada järgmised päratud integraalid:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$,

c) $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x}}$, d) $\int_0^{\pi/4} \ln \tan x dx$.

49. Arvutada kahekordne integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos xy \, dx \, dy,$$

kasutades kummaski suunas Simpsoni valemit 5 punktiga.

50. Arvutada kahekordne integraal $\iint_{(D)} \frac{x}{y^2} dx \, dy$, kus

D on ristkülik $\begin{cases} 1 \leq x \leq 1,8 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$, kasutades Simpsoni valemit
 $n = 4$, $m = 5$ korral.

KIRJANDUS.

Põhiline kirjandus.

1. Березин, И.С. и Жидков, Н.П., Методы вычислений 1, 1959.
2. Демидович, Б.П. и Марон, И.А., Основы вычислительной математики, 1960.
3. Крылов, В.И., Приближенные вычисления интегралов, 1959.
4. Мысовских, И.П., Лекции по методам вычислений, 1962.
5. Положий, Г.Н. и др., Математический практикум, 1960.

Täiendav kirjandus.

6. Тамме, Е., Arvutusmeetodid III, TRÜ rotaprint, 1963.
7. Võhandu, L., Arvutusmeetodid I, TRÜ rotaprint, 1961.
8. Бут, Э.Д., Численные методы, 1959.
9. Гончаров, В.Л., Теория интерполирования и приближения функций, 1954.
10. Гутер, Р.С. и Овчинский, Б.В., Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, 1962.
11. Крылов, А.Н., Лекции о приближенных вычислениях, 1950.

12. Лапцощ, К., Практические методы прикладного анализа, 1961.
13. Мелентьев, П.В., Приближенные вычисления, 1962.
14. Микеладзе, Ш.Е., Численные методы математического анализа, 1953.
15. Милн, В.Э., Численный анализ , 1951.
16. Никольский, С.М., Квадратурные формулы, 1958.

S i s u k o r d .

I. I N T E R P O L A T S I O O N I M E E T O D	3
§ 1. LAGRANGE'i I N T E R P O L A T S I O O N I V A L E M	5
1. Lagrange'i interpolatsioonipolünoom.	5
2. Aitkeni interpolatsiooniskeem	12
3. Interpolatsioonivalemi jääkliige	17
§ 2. N E W T O N I I N T E R P O L A T S I O O N I V A L E M I D	21
1. Diferentsjagatised	21
2. Newtoni interpolatsioonivalem	22
3. Interpoleerimine kordsete sõlmedega	31
§ 3. K O N S T A N T S E S A M M U G A T A B E L I D	39
1. Diferentsakeem	39
2. Newtoni I ja II interpolatsioonivalem.	45
3. Gaussi interpolatsioonivalemid, Fraseri diagramm	52
4. Stirlingi ja Besseli interpolatsioonivalemid	56
5. Interpolatsioonivalemite kasutamisest.	61
§ 4. P Ö Ö R D I N T E R P O L A T S I O O N	68
1. Pöördinterpolatsiooni ülesanne	68
2. Võrrandite ligikaudne lahendamine	71
§ 5. M I T M E M U U T U J A F U N K T S I O O N I D E I N T E R P O L E E R I M I N E	75
1. Üldküsimusi	75
2. Teine lähenemiskiis	76
II. N U M B R I L I N E D I F E R E N T S E E R I - M I N E	83
§ 1. N U M B R I L I N E D I F E R E N T S E E R I M I N E M U U T U V A T A B E L I S A M M U K O R R A L	84

§ 2. NUMBRILINE DIFERENTSEERIMINE KONSTANTSE TABELISAMMU KORRAL	90
1. Diferentsidega valemid.	90
2. Diferentseerimine sõlmedes.	95
III. N U M B R I L I N E I N T E G R E E R I M I N E.	103
§ 1. INTERPOLATSIOONITÜÜPI KVADRATUURVALEMID. . .	105
1. Kvadratuurvalemite konstrueerimine. . . .	105
2. Kvadratuurvalemide jääkliige	108
§ 2. NEWTONI-COTESI KVADRATUURVALEMID	114
1. Valemite tuletamine	114
2. Runge meetod vea ligikaudseks hindamiseks.	125
3. Trapets-, Simpsoni ja $3/8$ -valem	129
§ 3. TŠEBŐŠEVI KVADRATUURVALEMID	139
1. Üldjuht	139
2. Konstantse kaaluga Tšebőševi kvadratuur- valem	143
§ 4. GAUSSI TÜÜPI KVADRATUURVALEMID	149
1. Üldteoreemid	149
2. Gaussi kvadratuurvalem	157
3. Mehleri kvadratuurvalem	163
4. Kvadratuurvalemid kaaluga e^{-x^2} ja e^{-x} .	166
§ 5. TEISI KVADRATUURVALEMEID	172
1. Markovi kvadratuurvalemid	172
2. Euleri-Maclaurini valem	178
3. Diferentsidega kvadratuurvalemide	185
§ 6. KVADRATUURVALEMITE RAKENDUSI.	191
1. Päratute integraalide arvutamine.	191
2. Kordsete integraalide arvutamine.	196
3. Simpsoni kubatuurvalem.	198
HARJUTUSÜLESANDEID	203
KIRJANDUS	213

Hind 38 kop.