

ЭСТОНСКАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

А. РУУБЕЛЬ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ
КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ТАРТУ 1961

ARH



XII

-2865

ЭСТОНСКАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

А. РУУБЕЛЬ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ
КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ТАРТУ 1961

Эстонская сельскохозяйственная академия

г. Тарту, пл. Ленина 1.

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
154873

ARHIIVKOGU

Toimetaja: J. Gabovits

EPA Rotaprint 1961. a. Trükipoognaid 0,5.

Tiraaž 150 eks. MB 08083. Tellimise nr. 87.

Hind 2 kop.

Г. Рассматриваемые виды проектирования

Пусть фиксирована в пространстве некоторая система координат x_1, x_2, x_3 . Останавливаемся в этой статье на случаях, когда поверхность

$$x_1 = d, \text{ где } d = \text{const} \quad /1/$$

является плоской, и примем ее за плоскость проекции. Пусть данная в пространстве точка $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ проектируется в точку $P^1(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ при помощи проектирующей

$$x_i = x_i^0 + a_i t, \quad i = 1, 2, 3. \quad /2/$$

Здесь a_i постоянны для данного проектирования, причем $a_1 \neq 0$, x_i текущие координаты, а t текущий параметр.

В случаях Декартовой (x, y, z) , цилиндрической (r, φ, z) и сферической (ρ, φ, θ) систем координат и при всевозможных распределениях этих координат между величинами x_1, x_2, x_3 , мы получим проектирующие, данные в таблице I /стр. 8 /. В таблице включены и те случаи, когда $x_1 = d$ не является плоскостью.

Координаты точки P^1 удовлетворяют уравнениям /1/ и /2/, что дает нам следующие соотношения между координатами точек P^0 и P^1 :

$$x_1^1 = d, \quad x_2^1 = x_2^0 + \frac{a_2}{a_1}(d - x_1^0), \quad x_3^1 = x_3^0 + \frac{a_3}{a_1}(d - x_1^0). \quad /3/$$

Рассматривая координатные линии поверхностей $x_1 = c$ и $x_2 = c$, где $c = \text{const}$, мы можем по соотношениям /3/ легко доказать следующие теоремы:

Теорема 1. Фигура, лежащая в плоскости $x_1 = c$, где $c = \text{const}$ проектируется на плоскость $x_1 = d$ в натуральную величину и форму при проектированиях типа A_3 /см. табл. I/, при проектированиях типа A_2 , если x_3 не является углом, и при проектировании типа A_1 , если ни одна из величин x_2 и x_3 не является углом.

Теорема 2. Цилиндрические винтовые линии типа $(A_2 B_8)$ проектируют цилиндрическую поверхность вращения $r = c$ на плоскость $\varphi = 0$ в ее развертку, если только $|\frac{a_2}{a_1}| = c$.

Теорема 3. Сферические винтовые линии типа $(A_2 B_{15})$ проектируют коническую поверхность вращения $\theta = c$ на плоскость $\varphi = 0$ в ее развертку, если только $|\frac{a_2}{a_1}| = |\sin c|$.

2. О комплексных чертежах

Если две проекции P^1 и P^2 данной точки P^0 на некоторую плоскость проекции Π принять за данные и если они определяют проектируемую точку P , однозначно /или с достаточной для нас точностью/, то пара точек P^1 и P^2 дает такой комплексный чертеж точки, который мы здесь рассмотрим.

Пусть при двух проектированиях точки $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \equiv P^0(X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ на плоскость $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ мы получим проекции $P^1(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ и $P^2(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, а проектирующие пусть даны системами уравнений $x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$, где $i = 1, 2, 3$ и $X_i = \psi_i(X_1^0, X_2^0, X_3^0, u)$, где $i = 1, 2, 3$.

Выпишем соотношения между координатами точек P^1 и P^2 , а также соотношения между координатами различных систем одной и той же точки, тогда мы получим следующую систему равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^1 = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \\ X_i^2 = \psi_i(X_1^0, X_2^0, X_3^0, u) \\ X_i^2 = g_i(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \\ X_i^0 = g_i(x_1^2, x_2^2, x_3^2) \\ f(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = 0 \\ f(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0 \end{array} \right. \quad i = 1, 2, 3 \quad /4/$$

Исследуем совместимость этой системы.

По системе /4/ мы можем судить, при каких условиях взятые на плоскости комплексного чертежа точки P^1 и P^2 определяют точку P^0 и с какой точностью они это делают.

Система /4/ состоит из 14 уравнений с 17 неизвестными. Исключим 11 неизвестных так, что получим систему, содержащую координаты точек P^1 и P^2 в одной и той же системе координат. Получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0 \\ f(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = 0 \\ f(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0 \end{array} \right. \quad /5/$$

Точки P^1 и P^2 , координаты которых удовлетворяют уравнениям /5/, могут образовать комплексный чертеж.

При пользовании комплексным чертежом большое значение имеют т.н. связывающие. Мы рассмотрим здесь двойного рода связывающие.

Направленной или односторонней связывающей $P'P''$

комплексного чертежа мы называем такую линию, лежащую в плоскости комплексного чертежа, которая проходит через точку P' , выбранную за первую проекцию некоторой точки, и любую точку которой, или известной дуги которой, можно принять за вторую проекцию P'' той же точки.

Подобным же образом определяется направленная связывающая $P''P'$.

Если обе односторонние связывающие, соединяющие две точки P' и P'' на данном комплексном чертеже, лежат на одной и той же линии, то эту линию мы называем ненаправленной или двухсторонней связывающей комплексного чертежа.

Ненаправленной связывающей является таким образом линия, лежащая в плоскости комплексного чертежа, любые две точки которой, или известных дуг которой, можно принять за соответствующие этому комплексному чертежу проекции некоторой точки пространства. Эти дуги мы называем дугами проекций.

Исходя из определений связывающих легко доказываются следующие теоремы:

Теорема 4. Если проектирования (L_1) и (L_2) точки P дадут проекции P' и P'' , образующие комплексный чертеж, то проекция типа (L_2) проектирующей типа (L_1) , проходящей через точку P' , является односторонней связывающей $P'P''$ этого комплексного чертежа и вместе с тем дугой проекции P'' .

Теорема 5. Если проектирующие обоих типов всех точек обеих проектирующих данной точки лежат в одной поверхности, то линия пересечения этой поверхности с плоскостью проекции является ненаправленной связывающей данного комплексного чертежа. При этом проекции одной проектирующей дадут одну проекцию точки и соответствующую ей дугу второй проекции.

Связывающие данного комплексного чертежа можно найти на основании этих и некоторых других теорем или же аналитически.

Если в системе /5/ рассматривать x_1', x_2', x_3' как постоянные, а x_1'', x_2'', x_3'' как текущие координаты, то система /5/ дает нам направленную связывающую $P'P''$, если же при-

нять x_1'', x_2'', x_3'' за постоянные, а x_1', x_2', x_3' за текущие координаты, то получим связывающую $\overrightarrow{P''P'}$.

Пример 1. Комплексный чертеж, состоящий из проекций типов $(A_2 B_6)$ и $(A_3 B_8)$.

Система /5/ обращается в этом случае в систему

$$\begin{cases} y'^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 (z' - z'')^2 = y''^2 \\ x' = 0 \\ x'' = 0 \end{cases} \quad /5a/$$

Следовательно, связывающие $\overrightarrow{P'P''}$ являются гиперболами, связывающие $\overrightarrow{P''P'}$ эллипсами /черт. I, стр. 7 /.

То же самое можно сказать на основании теоремы 4. На чертеже I даны проектирующие точки P^o в виде прямой P^oP' и окружности P^oP'' . Прямолинейные проектирующие $(A_2 B_6)$ проектируют окружность P^oP'' в эллипс $P'kP''$. Окружностной проекцией прямой P^oP' , косо скрешивающейся относительно оси центров Oz , является ветвь гиперболы $P'mP''$.

Пример на применение.

На чертеже 2 /стр. 7 / найдены точки P и Q линии пересечения цилиндрической поверхности α , заданной направляющей q и образующей s , с поверхностью вращения β , имеющей ось i и образующую m . Они заданы на эюре Монжа, где плоскость проекции Π_1 проходит через ось i и параллельна обоим перпендикулярам прямых i и s .

При помощи проектирования $(A_2 B_6$ на $\Pi_1)$ мы проектируем всю поверхность цилиндра α в ее направляющую q , а при помощи проектирования $(A_3 B_8$ на $\Pi_1)$ - всю поверхность β в линию m_1 . Дуги линий q и m_1 дают нам таким образом новый комплексный чертеж искомой линии пересечения. Связывающими $\overrightarrow{P''P'}$ этого комплексного чертежа являются эллипсы, известные нам из предыдущего.

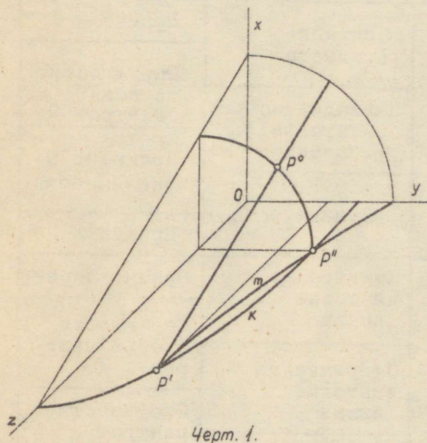
Проведем равномерное сжатие пространства в направлении i относительно произвольно взятой плоскости $\gamma \perp i$ так, чтобы связывающие эллипсы преобразовались в окружности. Тогда прямая s преобразуется в (s) , направляющая q в (q) и взятая произвольно на m_1 точка P'' в точку (P'') . При помощи

связывающей окружности найдем теперь вторую проекцию P' точки линии пересечения, а потом уже горизонтальную и фронтальную проекций этой точки P^o .

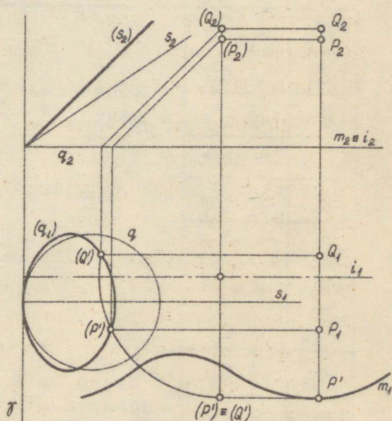
Пример 2. Комплексные чертежи любых пар проекций одной и той же системы координат по таблице I имеют по /5/ ненаправленные связывающие с уравнением

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = k, \quad k = const,$$

где a_i и b_i при $i = 1, 2, 3$ коэффициенты уравнений проектирующих.



Черт. 1.



Черт. 2.

Kõverkiireliste projektsioonide kompleksjooniseid

A. Ruubel

Kokkuvõte

Uuritakse kõverkiireliste projektsioonide kompleksjooniseid üldjuhul ja erijuhtudel, kus punkti $P^o(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ projekteeerija on antud kujul (2) Cartesiuse, silindrilises või sfäärilises koordinaadistikus. Defineeritakse kahte liiki sidejooned ja antakse nende võrrandid (5).

Таблица I. Проектирующие.

Обозначение типа	A_1	A_2	A_3	
Признаки	$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$	$a_1 \neq 0, a_2 = 0, a_3 = 0$	$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$	
$x_1 x_2 x_3$	проектирующие			
B_1	Параллельные прямые общего положения	Параллельные прямые $\parallel \pi_1$	Прямые $\parallel O_x$	
B_2			Параллельные прямые $\parallel \pi_3$	Прямые $\parallel O_y$
B_3				Параллельные прямые $\parallel \pi_2$
B_4		Прямые $\parallel O_x$		
B_5		Прямые $\times O_z$		
B_6		Прямые $\parallel O_x$		
B_7	Конические винтовые линии	Спирали Архимеда	Прямые $\times O_z$	
B_8			Цилиндрические винтовые линии	Окружности с осью центров Oz
B_9		Прямые $\parallel Oz$		Прямые $\parallel Oz$
B_{10}				Прямые $\times Oz$
B_{11}		Конические винтовые линии		
B_{12}			Сферические винтовые линии	Окружности с осью центров Oz
B_{13}	Спирали Архимеда	Окружности с центром O ; $\text{rad. } \theta = \frac{\pi}{2}$		
B_{14}		Прямые через O		
B_{15}	Винтовая линия на поверхности вращения архимедовой спирали	Спирали Архимеда	Прямые через O	
B_{16}			Спирали Архимеда	Прямые через O
B_{17}		Спирали Архимеда		Прямые через O
B_{18}			Спирали Архимеда	Прямые через O

Zweibildersysteme krummliniger Projektionen

A. Ruibel

Zusammenfassung.

Es werden zuerst im allgemeinen und dann für die Sonderfälle der Projizierenden (2) in Gartesischen, zylindrischen und sphärischen Koordinatensystemen Zweibildersysteme krummliniger Projektionen untersucht und zur Lösung einer Durchdringungsaufgabe verwendet. Es werden dazu zweiartige Verbindungslinien definiert und die Gleichungen (5) dieser gefunden.

Цена 2 коп.



TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00547028 3