



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

KÕRGEMA MATEMAATIKA ÜLESANDED

TARTU 1979

XII
NA-1076

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Matemaatika õpetamise metoodika
kateeder

KÕRGEMA MATEMAATIKA
ÜLESANDED

TARTU 1979

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 17. märtsil 1979

Koostanud E. Mitt, O. Prints,
A. Raudsepp

E e s s õ n a

Käesolev ülesannete kogu on koostatud bioloogia-geograafiatsaduskonna ja ajalooeaduskonna psühholoogia eriala üliõpilastele kõrgema matemaatika praktikumides kasutamiseks. Et nimetatud erialadel on kõrgema matemaatika programmid üsna erinevad, pole kõik ülesanded mõeldudki iga eriala üliõpilastele lahendamiseks.

Ülesannete kogu ilmus esmakordselt 1972.a., kaheosalisena. Käesolevas trükis on tehtud mitmeid muudatusi nii sisulises kui vormilises osas. Ülesandeid on 21 teema kohta, seejuures iga teema osas kahes variandis. Kummagi variandi ülesanded on nummerdatud omaette, kusjuures variandi number seab iga ülesande numbrilise ees.

On lisatud ka ülesannete vastused.

Koostajad

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
N

1. Hulgateooria põhimõisted

1.1. Esitada hulk elementide loetelu kaudu:

- a) $\{x \mid 7x^2 - 8x = 0\}$;
 b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge y - x = 1\}$;
 c) $\{(x, y) \mid x + y = m \wedge x - y = n\}$;
 d) $\{x \mid \frac{19x}{x+1} + \frac{11x}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}\}$.

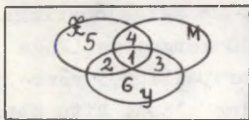
1.2. Leida hulk $A = \{\{1; 2\}; \{\{3\}; 1\}$ kõik osahulgad.

1.3. Esitada näide hulkadest A, B, C, D ja E, mis rahuldavad samaaegselt järgmisi seoseid: $A \subset B$, $B \in C$, $C \subset D$, $D \subset E$.

1.4. Kas eksisteerivad hulgad A, B ja C, mis samaaegselt rahuldavad kõiki järgmisi tingimusi:

- a) $A \cap B \neq \emptyset$, b) $A \cap C = \emptyset$, c) $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

1.5. Venni diagrammil on kujutatud korrapärase hulknurkade hulk X, nelinurkade hulk Y ja võrdkülgsete kolmnurkade



hulk M. Diagrammi piirkonnad on tähistatud numbritega. Millised piirkonnad ei sisalda ühtegi elementi?

1.6. Leida

- a) $\emptyset \setminus A$,
 b) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$,
 c) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$
 d) $\{\emptyset; \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$,
 e) $\{\emptyset; \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$,
 f) $\{\emptyset; \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$.

1.7. Tõestada, et

- a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
 b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
 c) $A \dot{-} (A \cap B) = A \setminus B$,
 d) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$,
 e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
 f) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap \overline{B}$.

1.8. Saja üliõpilase kohta teostatud sotsioloogilise uurimuse tulemustest on üks osa esitatud järgmises tabelis.

	Ilus ja tark	Mitteilus ja tark	Ilus ja mittetark	Mitteilus ja mittetark
Blond	6	9	10	20
Brünett	7	11	15	9
Punapea	2	3	8	0

Tähistame hulki järgmiselt: B - blondid, T - brünetid, P - punapead, I - ilusad, R - mittetargad. Mitu üliõpilast kuulub igasse järgmisse hulka:

- a) $B \cap I \cap R$, c) $P \cap \bar{R}$, e) $\overline{B \cup T}$,
 b) T, d) $(T \cup P) \cap (I \cup \bar{R})$, f) $P \cap \bar{I} \cap R$?

- 1.9. Ankeedi andmete põhjal õpib ühe kursuse üliõpilastest 36 inglise, 23 prantsuse, 15 saksa, 6 inglise ja prantsuse, 11 inglise ja saksa, 4 prantsuse ja saksa ning 1 kõiki kolme keelt. Leida üliõpilaste arv kursusel, eeldusel, et igaüks õpib vähemalt ühte nimetatud keeltest.
- 1.10. Sajast üliõpilasest tegelevad 28 kergejõustikuga, 42 võrkpalliga, 30 korvpalliga, 10 kergejõustikuga ja võrkpalliga, 8 kergejõustiku ja korvpalliga, 5 võrk- ja korvpalliga, 3 kõigi nimetatud kolme alaga. Mitu üliõpilast
- a) tegeleb ainult ühe spordialaga,
 b) ei tegele ühegi spordialaga?
- 1.11. Sajast üliõpilasest õpib ainult saksa keelt 18, saksa keelt ja mitte inglise keelt 23, saksa ja prantsuse keelt 8, saksa keelt 26, prantsuse keelt 48, prantsuse ja inglise keelt 8, ei õpi ühtki nimetatud keelt 24 üliõpilast.

Mitu üliõpilast õpib

- a) inglise keelt,
 b) saksa ja inglise keelt, kuid mitte prantsuse keelt,
 c) prantsuse ja inglise keelt, kuid mitte saksa keelt?

2.1. Esitada hulk elementide loetelu kaudu:

a) $\{x \mid 2 + 3x - 2x^2 = 0\}$;

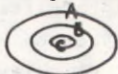
b) $\{(x, y) \mid x^2 = y + 26 \wedge 2x = y + 2\}$;

c) $\{(x, y) \mid 3x + 4y = 11 \wedge 5x + 6y = 17\}$;

d) $\left\{x \mid \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x(1 - x)} = \frac{x - 2}{x(x + 1)}\right\}$.

2.2. Leida hulga $A = \{\emptyset; \{1\}; 2\}$ kõik osahulgad.

2.3. Milliseid hulki võivad kujutada hulga $A = \{a \mid a : 18 \wedge a \in \mathbb{N}\}$ osahulgad B ja C?



2.4. Millised järgmistest otsustustest kehtivad mis tahes hulkade A, B ja C korral:

a) kui $A \in B$ ja $B \in C$, siis $A \in C$;

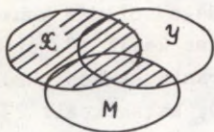
b) kui $A \subset B$ ja $B \in C$, siis $A \in C$;

c) kui $A \cap B \subset \bar{C}$ ja $A \cup C \subset B$, siis $A \cap C = \emptyset$;

d) kui $A \neq B$ ja $B \neq C$, siis $A \neq C$;

e) kui $A \subset \overline{B \cup C}$ ja $B \subset \overline{A \cup C}$, siis $B = \emptyset$?

2.5. Milline antud hukadest vastab joonisel viirutatud osale:



a) $(X \cap Y) \cup M$,

b) $X \cup (Y \cap M)$,

c) $X \cap (Y \cup M)$,

d) $(X \cap Y) \cap M$,

e) $(X \cup Y) \cap M$?

2.6. Hulkade A ja B kohta on teada, et

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};$$

$$A \cap B = \{4, 6, 9\};$$

$$A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\};$$

$$B \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Leida hulgad A ja B.

2.7. Tõestada, et

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

c) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$;

d) $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cap B$.

e) $\overline{A \setminus (B \cup C)} = (A \setminus B) \setminus C$;

f) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 2.8. Kujutada Venni diagrammi abil hulknurkade, trapetsite, rööpkülükute, ristkülükute ja ruutude hulgad.
- 2.9. Kursusel on 100 üliõpilast. Nendest õpib 28 inglise, 30 saksa, 42 prantsuse, 8 inglise ja saksa, 10 inglise ja prantsuse, 5 saksa ja prantsuse ning 3 saksa, inglise ja prantsuse keelt. Mitu üliõpilast
- ei õpi ühtki nimetatud keelt,
 - õpib ainult prantsuse keelt,
 - õpib ainult inglise keelt,
 - õpib ainult saksa keelt?
- 2.10. Küsitlusel selgus, et sajast õpilasest loeb ajakirja "Tehnika ja Tootmine" 50, ajakirja "Horisont" 40, ajakirja "Eesti Loodus" 25, ajakirja "Tehnika ja Tootmine" ning "Horisont" 15, ajakirja "Tehnika ja Tootmine" ning "Eesti Loodus" 10, ajakirja "Horisont" ja "Eesti Loodus" 5 ning kõiki kolme ajakirja 2 õpilast. Mitu õpilast
- loeb ainult ühte ajakirja,
 - ei loe ühtegi nimetatud ajakirjast?
- 2.11. Inspekteerimisaruandes oli saja õpilase kohta märgitud, et neist õpib saksa ja inglise keelt 10, prantsuse ja inglise keelt 8, saksa ja prantsuse keelt 20, kõiki kolme keelt 5, inglise keelt 30, saksa keelt 23, prantsuse keelt 50. Selle aruande esitanud inspektor sai noomituse. Miks?

2. Determinandid ja matriksid

1.12. Arvutada determinant:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

$$b) \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} b-a & -2 & a+b \\ a & 0 & -b \\ a & 1 & -b \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} & \sin \alpha & 1 \\ 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sin \beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.13. Lahendada võrrand:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.14. Arvutada determinant:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

1.15. On antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leida a) $A \cdot B$, b) $B \cdot A$, c) $b \cdot A$, kui $b = -3$,
d) $3 \cdot A - B$.

1.16. On antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leida a) $3A + B$, b) $A \cdot B$, c) $B \cdot A$, d) $2 \cdot A$.

1.17. Leida maatriksite korrutis:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d) (5 \ 1 \ 0 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

1.18. Leida maatriksi astak:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & -4 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.19. Leida transponeeritud maatriks:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1.20. Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.21. Lahendada võrrandisüsteem:

- a)
$$\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ 4x + 5y = 26, \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = -15, \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 8 = 0 \\ x + 2y + z - 3 = 0 \\ 5x + y - z - 5 = 0, \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

1.22. Lahendada võrrandisüsteem:

- a)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 4y + z = 13 \\ 3x + 3y + 2z = 10, \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 3x - 7y + 4z + 7u = 20 \\ x + 3y - 2z - 5u = -6 \\ 2x + 5y - 6z - 6u = -7, \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 0 \\ 4x + 11y + 5z = 0 \\ 4x + 6y + 2z = 0, \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 2x + y - z + 3v = 0 \\ x + 2z + v = 0 \\ y + z + v = 0. \end{cases}$$

1.23. Missuguste a väärtuste korral on võrrandisüsteemil ka mittetriviaalseid lahendeid:

$$\begin{cases} ax + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + ay = 0? \end{cases}$$

2.12. Arvutada determinant:

- a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$
- b)
$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix},$$
- c)
$$\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix},$$
- d)
$$\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.13. Lahendada võrrand:

- a)
$$\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2},$$
- c)
$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$b) \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

2.14. Arvutada determinant:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 8 & -20 & 24 & 8 \\ -3 & 7 & -6 & 4 \\ 5 & -9 & 12 & 7 \\ 4 & -6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

2.15. On antud matriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leida: a) $A - 3B$, b) $A \cdot B$, c) $B \cdot A$, d) $-5A$.

2.16. On antud matriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leida: a) $A + 2B$, b) $A \cdot B$, c) $a \cdot A$, kui $a = -2$,
d) $B \cdot A$.

2.17. Leida matriksite korrutis:

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2$$

2.18. Leida maatriksi astak:

$$a) \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} f) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.19. Leida transponeeritud maatriksid:

$$a) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad d) (5 \ 1 \ 0 \ -3).$$

2.20. Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.21. Lahendada võrrandisüsteem:

$$a) \begin{cases} 4x + y - 1 = 0 \\ x + 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 8y + 34 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2z = -4 \\ 4y + z = 11, \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = -15, \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2. \end{cases}$$

2.22. Lahendada võrrandisüsteem:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \\ x - 2y + z = 4, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 5y + z = 0, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + z + 2u - v = 4 \\ y + z + u + v = 3 \\ x - 2y - z + u - 3v = 0 \\ 2x + y + 3z + 2u - v = 5, \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 3y - 26z + 22v = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19v = 0 \\ x + 2y + 4z - 3v = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4v = 0. \end{cases}$$

2.23. Missuguste a väärtuste korral on süsteemil ka mittetriaalseid lahendeid:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ ax - 14y + 15z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0? \end{cases}$$

3. Vektorid

1.24. Avaldada rööpküliku ABCD küljed \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} ja \overrightarrow{DA} diagonaalide $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ kaudu.

1.25. On antud vektorid: $\overrightarrow{AB}(2; 3; -1)$, $\overrightarrow{AC}(5; -2; 3)$, $\overrightarrow{AD}(-1; 3; -5)$, $\overrightarrow{AB}(-3; -4; -2)$, $\overrightarrow{AP}(0; 2; -3)$, $\overrightarrow{AG}(-4; 0; 2)$ ja

$\overrightarrow{AH}(3; -2; 0)$.

Leida punktide B, C, D, E, F, G ja H koordinaadid, kui $A(2; -5; 3)$.

- 1.26. Esitada vektorid $\vec{a}(3; 4; 5)$, $\vec{b}(-2; -4; -3)$ ja $\vec{c}(6; 15; -3)$ ristuvate ühikvektorite kaudu.
- 1.27. Leida vektorite $3\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $\frac{1}{3}\vec{c}$ koordinaadid, kui $\vec{a}(3; 4; 5)$, $\vec{b}(-2; -4; -3)$ ja $\vec{c}(6; 15; -3)$.
- 1.28. On antud vektorid $\vec{a}(1; 0; -3)$ ja $\vec{b}(0; -3; 2)$. Arvutades:
a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$,
b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$,
c) $(\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot (4\vec{a} - \vec{b})$.
- 1.29. Arvutada $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kui $a = 4$, $b = 12$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 10$.
- 1.30. Leida nurk vektorite $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vahel.
- 1.31. Missugused antud vektorite paaridest on risti, mis-sugused kollineaarsed:
a) $(2; -7; 3)$, $(5; 2; 1)$;
b) $(4; 16; -12)$, $(-6; -24; 18)$;
c) $(2; 1; -8)$, $(7; 2; 2)$;
d) $(5; -3; 2)$; $(1; 3; 4)$?
- 1.32. Leida vektorite $\vec{a}(3; -1; 2)$ ja $\vec{b}(-1; 2; 1)$ vektorkor-rutis.
- 1.33. On antud vektorid $\vec{a}(1; -3; 2)$ ja $\vec{b}(3; 1; -2)$. Leida
a) $(3\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{b}$,
b) \vec{a} ja \vec{b} vahelise nurga siinus.
- 1.34. Arvutada kolmnurga ABC pindala, kui $A(-2; 3; 1)$, $B(3; -1; 1)$ ja $C(2; 3; 4)$.
- 1.35. Leida $|\vec{a} \times \vec{b}|$, kui $a = 3$, $b = 4$, $\widehat{ab} = 30^\circ$.
- 1.36. Arvutada $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$, kui $\vec{a}(1; -3; 2)$, $\vec{b}(0; 1; -1)$ ja $\vec{c}(1; 0; -1)$.

- 1.37. Näidata, et vektorid $\vec{a}(0; 1; 4)$, $\vec{b}(2; 1; -1)$ ja $\vec{c}(4; 3; 2)$ on komplanaarsed.
- 1.38. Kas punktid $A(1; 0; 1)$, $B(4; 4; 6)$, $C(2; 2; 3)$ ja $D(10; 14; 17)$ asuvad ühel tasandil?
- 1.39. Arvutada püramiidi ABCD ruumala, kui $A(2; -1; 3)$, $B(1; 3; 4)$, $C(5; 4; 5)$ ja $D(-1; 1; 2)$.
- * * *
- 2.24. Korrapärase kuusnurgas ABCDEF on $\vec{AB} = \vec{a}$ ja $\vec{AF} = \vec{b}$. Avaldada \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{AE} ja \vec{BC} vektorite \vec{a} ja \vec{b} kaudu.
- 2.25. On antud püramiidi tipud $A(-2; 3; 1)$, $B(1; 5; 2)$, $C(3; -3; -1)$, $D(-4; -1; 2)$. Leida vektorite \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{BA} , \vec{BC} , \vec{BD} , \vec{CA} , \vec{CB} , \vec{CD} , \vec{DA} , \vec{DB} ja \vec{DC} koordinaadid.
- 2.26. Ristkülikus OACB on $\vec{OA} = 3\vec{i}$ ja $\vec{OB} = 4\vec{j}$. Avaldada \vec{OA} , \vec{AC} , \vec{CB} , \vec{BO} , \vec{OC} ja \vec{BA} vektorite \vec{i} ja \vec{j} kaudu.
- 2.27. Leida vektorite $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = 3\vec{p}$ ja $\vec{d} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ koordinaadid, kui $\vec{p}(2; -1; 5)$ ja $\vec{q}(-4; 0; 1)$.
- 2.28. On antud vektorid $\vec{p}(-2; 1; 2)$ ja $\vec{q}(3; -2; 6)$. Arvutada:
- $\vec{p} \cdot \vec{q}$,
 - $(\vec{p} + \vec{q}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$,
 - $(\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (2\vec{q} - 5\vec{p})$.
- 2.29. Arvutada $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kui $a = 2$, $b = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$.
- 2.30. Kolmnurga tipud on $A(2; 0; 4)$, $B(2; -1; -3)$ ja $C(2; -4; 1)$. Leida sisenurk tipu A juures.
- 2.31. Missugused antud vektorite paaridest on risti, missugused kollineaarsed
- $(2; 6; -3)$, $(-2; 2; 1)$.
 - $(-2; 4; 1)$, $(1; 2; -\frac{1}{2})$;
 - $(3; 2; 1)$, $(2; -3; 0)$;
 - $(6; 24; -18)$, $(-4; -16; 12)$?

- 2.32. On antud vektorid $\vec{a}(2; -3; 1)$ ja $\vec{b}(5; 1; -2)$. Leida $\vec{a} \times \vec{b}$.
- 2.33. On antud vektorid $\vec{a}(2; -3; 1)$ ja $\vec{b}(5; 1; -2)$. Leida
 a) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 5\vec{b})$,
 b) \vec{a} ja \vec{b} vahelise nurga siinus.
- 2.34. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ ja $C(4; 5; -2)$.
- 2.35. Leida $\vec{a} \times \vec{b}$, kui $|\vec{a}| = 7$; $|\vec{b}| = 5$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = -21$.
- 2.36. Arvutada $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$, kui $\vec{a}(3; -4; 7)$, $\vec{b}(1; 2; 5)$ ja $\vec{c}(1; -4; 5)$.
- 2.37. Näidata, et vektorid $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ja $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ on komplanarsed.
- 2.38. Näidata, et punktid $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ ja $D(5; 0; -6)$ asuvad ühel tasandil.
- 2.39. Arvutada püramiidi ABCD ruumala, kui $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ ja $D(2; 3; 8)$.

4. Sirge ja tasand,

- 1.40. Missugused sirged on risti, missugused paralleelsed:
 a) $x - 2y + 1 = 0$, $4x - 8y + 4 = 0$;
 b) $3x + 7y - 2 = 0$, $3x - 7y + 1 = 0$;
 c) $2x + 4y - 1 = 0$, $2x - y = 0$?
- 1.41. Missuguse a väärtuse korral on sirged $x - 4ay + 1 = 0$ ja $3x - 6y - 5 = 0$ a) paralleelsed, b) risti?
- 1.42. Leida sirgete $y = 3x + 2$ ja $x = 3y - 2$ lõikepunkti kaugus koordinaatide alguspunktist.
- 1.43. Koostada võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(-4; -3)$ ja on paralleelne sirgega $y - 4 = 2(x + 3)$.

- 1.44. Koostada võrrand sirgele, mis läbib punkti $P(1; -2)$ ja on risti sirgega $y = -3x + 4$.
- 1.45. Koostada võrrand sirgele, mis läbib punkti $(2; -3)$ ning on paralleelne punkte $(1; 2)$ ja $(-1; -5)$ läbiva sirgega.
- 1.46. Koostada kolmnurga ABC mediaanide võrrandid, kui $A(5; -2)$, $B(-4; -3)$ ja $C(-1; 2)$.
- 1.47. Kas sirgete võrrandid
 a) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$,
 b) $y + 3 = 0$
 on normaalkujulised?
- 1.48. Teisendada võrrandid
 a) $3x - y - \sqrt{10} = 0$,
 b) $3x + 4y + 15 = 0$
 normaalkujule.
- 1.49. Leida punkti $P(1; -4)$ kaugus sirgest $3x + 4y + 8 = 0$.
- 1.50. Leida punkti $A(5; -3)$ kaugus sirgest, mille telglõigud on 4 ja 6.
- 1.51. Leida sirgete $12x - 5y - 26 = 0$ ja $12x - 5y + 13 = 0$ vaheline kaugus.
- 1.52. Leida sirgel $2x - 3y - 5 = 0$ punktid, mille kaugus sirgetest $x + 2y = 11$ on $\sqrt{5}$.
- 1.53. Koostada sirgete $x - 3y + 5 = 0$ ja $3x - y - 2 = 0$ vaheliste nurkade nurgapoolitajate võrrandid.
- 1.54. Rööpküliku $ABCD$ kolm tippu on $A(-3; 3)$, $B(0; 1)$ ja $C(3; 3)$. Leida tipp D .
- 1.55. Kolmnurga kaks külge asuvad sirgetel $3x - y - 3 = 0$ ja $6x - y - 3 = 0$ ning üks mediaan sirgel $3x - 2y + 3 = 0$. Koostada võrrand sirgele, millel asub kolmas külg.
- 1.56. Ruudu vastastipud on $A(-2; 3)$ ja $C(0; -1)$. Koostada

võrrandid sirgetele, millel asuvad ruudu küljed ja diagonaalid.

- 1.57. Kolmnurga üks külg asub sirgel $5x + 4y - 17 = 0$ ning kaks kõrgust sirgetel $4x + y - 18 = 0$ ja $2x - y + 1 = 0$. Leida antud külje vastastipp.
- 1.58. Kolmnurga ABC tipud on $A(1; 4)$, $B(5; -2)$ ja $C(-2; -4)$. Leida kolmnurga külgede keskpunktid, mediaanide lõikepunkt, kolmnurga pindala ja võrrandid sirgetele, millel asuvad mediaanid ja küljed.
- 1.59. Skitseerida tasand:
- $3x + 4y + 2z - 8 = 0$,
 - $2x - 3y + 1 = 0$,
 - $x - 3y + 2z = 0$,
 - $z - 3 = 0$.
- 1.60. Kas tasandid $2x - 4y + 6z + 1 = 0$ ja $3x - 6y + 9z - 2 = 0$ on paralleelsed või risti?
- 1.61. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkte $A(1; -1; 2)$, $B(2; 1; 2)$ ja $C(1; 1; 4)$.
- 1.62. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkte $(5; -2; 3)$ ja on paralleelne tasandiga $2x + 3y - z = 0$.
- 1.63. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkte $P(-1; -2; 0)$ ja $Q(1; 1; 2)$ ning on risti tasandiga $x + 2y + 2z - 5 = 0$.
- 1.64. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkti $A(-1; -1; 2)$ ja on risti tasandiga $x - 2y + z - 4 = 0$ ning $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
- 1.65. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkti $(3; -5; 2)$, on risti tasandiga $x + 2y - z + 2 = 0$ ja paralleelne vektoriga $(2; -3; 1)$.
- 1.66. Koostada võrrand tasandile, mis läbib x -telge ja on risti tasandiga $2x - y + 5z - 3 = 0$.

- 1.67. Koostada võrrand tasandile, mis on paralleelne xz -tasandiga ja läbib punkti $A(2; -5; 3)$.
- 1.68. Määrata sirgete $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-2}$ ja $\frac{x+1}{-6} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{4}$ vastastikune asend.
- 1.69. Leida sirgete $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z-1}{3}$ ja $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}$ vahelise nurga siinus.
- 1.70. Määrata sirge ja tasandi vastastikune asend, kui nende võrrandid on $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ ja $-4x + 5z + 3 = 0$.
- 1.71. Leida nurk sirge $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ ja tasandi $x + 2y - 4z + 1 = 0$ vahel.
- 1.72. Koostada võrrandid punkti $A(-3; 1; 0)$ läbivale sirgele, mis on paralleelne vektoriga $\vec{m}(7; -2; 3)$.
- 1.73. Koostada võrrandid punkti $A(1; -2; 4)$ läbivale ning tasandiga $3x - 7y - 5z - 1 = 0$ ristuvale sirgele.
- 1.74. Koostada sirge $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ kanoonilised võrrandid.
- 1.75. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkti $A(-1; 3; 2)$ ja sirget $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$.
- 1.76. Koostada võrrand tasandile, mis läbib sirget $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ ja on risti tasandiga $2x + 3y - z = 4$.
- 1.77. Koostada võrrand tasandile, mis läbib sirgeid $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ ja $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.
- 1.78. Leida sirge $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ ja tasandi $x + 2y + 3z - 29 = 0$ lõikepunkti koordinaadid.
- 1.79. Koostada punktist $A(1; 2; 3)$ tasandile $4x - 5y - 8z + 21 = 0$ tõmmatud ristsirge võrrandid.

- 1.80. Leida punkti $(1; 0; -5)$ ristprojektsioon tasandil $x - 2y + 3z = 0$.
- 1.81. Leida punkti $(2; -5; 6)$ läbiv sirge, mis on paralleelne tasandite $x - 2y + z - 5 = 0$ ja $x + y - z = 0$ lõikesirgega.
- 1.82. Leida sirgele $x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{-3}$ punktist $(1; 0; -1)$ tõmmatud ristsirge võrrandid.
- 1.83. Leida punktiga $A(5; -4; 7)$ sümmeetriline punkt sirge $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 5}{6} = \frac{z - 8}{5}$ suhtes.
- 1.84. Koostada võrrand sirgele, mis läbib punkti $(-1; 0; 4)$, on paralleelne tasandiga $3x - 4y + z - 10 = 0$ ja lõikab sirget $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{2}$.
- 1.85. Leida tasandil $5x - 3y + 2z - 5 = 0$ sirge, mis lõikab sirget $x = \frac{y - 1}{2} = z$ ja on paralleelne tasandiga $3x - y + 2z - 4 = 0$.
- 1.86. Teisendada tasandi võrrand normaalkujule:
- $2x + y - 2z - 9 = 0$,
 - $-3x + 4y + 25 = 0$,
 - $6x - 6y + 7z - 125 = 0$,
 - $y - 2 = 0$.
- 1.87. Leida punkti kaugus tasandist:
- $A(-1; 1; 0)$, $2x + 7y + 3z + 1 = 0$;
 - $B(1; 0; -1)$, $x + 5y + 12z - 1 = 0$;
 - $O(0; 0; 0)$, $2y - 3z = 0$.
- 1.88. Leida tasanditevaheline kaugus:
- $x - 2y - 2z - 12 = 0$; b) $2x - y + 2z + 9 = 0$,
 $x - 2y - 2z - 6 = 0$; $4x - 2y + 4z - 21 = 0$.
- 1.89. Leida y -teljel punkt, mis asub tasandist $x + 2y - 2z - 2 = 0$ kaugusel 4.
- 1.90. Leida punkti $P(-1; 1; -2)$ kaugus tasandist, mis läbib

punkte $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$ ja $M_3(4; -5; -2)$.

- 1.91. Leida koordinaatide alguspunkti kaugus tasandist, mis läbib punkti $A(3; -5; 2)$, on risti tasandiga $x + 2y - z - 4 = 0$ ja paralleelne vektoriga $(2; -3; 1)$.

* * *

- 2.40. Missugused sirged on risti, missugused paralleelsed:

a) $y = 2x + 3$, $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$;
b) $3x - y - 1 = 0$, $\frac{1}{3}x - y - 2 = 0$;
c) $2x - y + 5 = 0$, $4x - 2y + 3 = 0$?

- 2.41. Missuguse k väärtuse korral on sirged $2x + 3y - 5 = 0$ ja $6x - 7y + 1 = 0$ a) paralleelsed, b) risti?

- 2.42. Leida sirgete $6x + 12y - 21 = 0$ ja $4x + 8y - 14 = 0$ lõikepunkti kaugus koordinaatide alguspunktist.

- 2.43. Koostada võrrand sirgele, mis läbib joonte $x - y - 3 = 0$, $2x + 3y - 11 = 0$ lõikepunkti ja on paralleelne sirgega $5x - 4y - 17 = 0$.

- 2.44. Koostada võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(-1; 2)$ ja on risti sirgega $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

- 2.45. Koostada võrrand lõigu AB keskristsirgele, kui $A(4; -3)$ ja $B(0; -5)$.

- 2.46. Koostada kolmnurga mediaanide võrrandid, kui kolmnurga tipud on $A(2; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(0; 3)$.

- 2.47. Kas sirgete võrrandid

a) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 3 = 0$,

b) $-x - 1 = 0$

on normaalkujulised?

- 2.48. Teisendada võrrandid

a) $12x - 5y + 26 = 0$,

b) $2x + 2\sqrt{3}y - 7 = 0$

normaalkujule.

- 2.49. Leida punkti $P(-2; 3)$ kaugus sirgest $y = \frac{35}{12}x - \frac{5}{12}$.
- 2.50. Leida punkti $(1; 4)$ kaugus sirgest, mis läbib punkte $(3; 1)$ ja $(4; -3)$.
- 2.51. Leida sirgete $y = \frac{3}{4}x - 8$ ja $y = \frac{3}{4}x + 2$ vaheline kaugus.
- 2.52. Koostada võrrand sirgele, mis on paralleelne sirgega $3x - 4y - 10 = 0$ ja asub sellest 3 ühiku kaugusel.
- 2.53. Koostada sirgete $x + 8y - 26 = 0$ ja $4x + 7y + 29 = 0$ vaheliste nurkade nurgapoolitajate võrrandid.
- 2.54. Rombi diagonaalid pikkusega 8 ja 6 asuvad koordinaattelgedel. Koostada võrrandid sirgetele, millel asuvad rombi küljed.
- 2.55. Kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt on $M(0; 3)$, üks tipp $A(3; -4)$ ja selle tipu lähiskülje AB keskpunkt $K(-1; 1)$. Leida tipud B ja C.
- 2.56. Arvutada ristküliku pindala, kui ristküliku üks tipp on $(1; -2)$ ning kaks külge asuvad sirgetel $3x + 2y + 7 = 0$ ja $2x - 3y + 5 = 0$.
- 2.57. Nurga üks haar asub sirgel $3x + 4y - 1 = 0$ ning nurgapoolitaja sirgel $14x - 8y - 3 = 0$. Koostada võrrand sirgele, millel asub nurga teine haar.
- 2.58. Kolmnurga ABC tipud on $A(4; 6)$, $B(-4; 2)$ ja $C(0; 3)$. Leida kolmnurga pindala, külgede pikkused ja võrrandid sirgetele, millel asuvad küljed ja kõrgused.
- 2.59. Skitseerida tasand:
- $x - 2y + 2z - 8 = 0$,
 - $3x + 5z + 2 = 0$,
 - $x - y - z = 0$,
 - $y - 2 = 0$.
- 2.60. Kas tasandid $x - 3y + 2z = 0$ ja $x - 3y + 2z + 17 = 0$ on paralleelsed või risti?

- 2.61. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkte $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; 1)$ ja $C(3; 2; 1)$.
- 2.62. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkti $(2; 2; -2)$ ja on paralleelne tasandiga $x - 2y - 3z = 0$.
- 2.63. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkte $(8; -3; 1)$ ja $(4; 7; 2)$ ning on risti tasandiga $3x + 5y - 7z - 21 = 0$.
- 2.64. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkti $A(2; -1; 1)$ ja on risti tasanditega $3x + 2y - z + 4 = 0$ ja $x + y + z - 3 = 0$.
- 2.65. Koostada võrrand tasandile, mis läbib punkti $(3; -5; 2)$, on risti tasandiga $x + 2y - z + 2 = 0$ ja paralleelne vektoriga $(2; 3; -1)$.
- 2.66. Koostada võrrand tasandile, mis on paralleelne x -teljega ja läbib punkte $M_1(0; 1; 3)$ ja $M_2(2; 4; 5)$.
- 2.67. Koostada võrrand tasandile, mis läbib z -telge ja punkti $M_1(2; -4; 3)$.
- 2.68. Määrata sirgete $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$, $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{-4}$ vastastikune asend.
- 2.69. Leida sirgete $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ ja $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$ vaheline nurk.
- 2.70. Määrata sirge ja tasandi vastastikune asend, kui nende võrrandid on $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$ ja $-3x - 4y - z + 1 = 0$.
- 2.71. Leida nurk sirge $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ ja tasandi $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ vahel.
- 2.72. Koostada võrrand sirgele, mis on paralleelne sirgega $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{3}$ ja läbib punkti $A(0; 1; -1)$.
- 2.73. Koostada võrrandid punkti $A(3; 9; -1)$ läbivale sirgele, mis on risti vektoritega $\vec{c}(2; 3; 1)$ ja $\vec{b}(0; 7; -2)$.

- 2.74. Koostada võrrandid sirgele, mis läbib punkti $(-4; 3; 0)$ ja on paralleelne sirgega $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$
- 2.75. Koostada võrrand tasandile, mis läbib sirget $x - 2 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 1}{3}$ ja punkti $N(3; 4; 0)$.
- 2.76. Koostada võrrand tasandile, mis läbib sirget $2x = -y = 3z$ ja on risti tasandiga $x - 3z = 0$.
- 2.77. Koostada võrrand tasandile, mis läbib sirgeid $x - 1 = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 2}{3}$ ja $x = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 2}{3}$.
- 2.78. Leida sirge $\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{2}$ ja tasandi $2x + 3y + 3z - 8 = 0$ lõikepunkti koordinaadid.
- 2.79. Koostada punktist $A(1; 2; 3)$ tasandile $3x + 11y = 0$ tõmmatud ristsirge võrrandid.
- 2.80. Leida punktiga $(5; -3; 7)$ sümmeetriline punkt tasandi $2x + 3y + 5z + 2 = 0$ suhtes.
- 2.81. Leida tasandite $3x - 7y + 5z + 17 = 0$ ja $x + 8y - 11z - 2 = 0$ lõikesirget ning punkti $(-1; 3; 2)$ läbiv tasand.
- 2.82. Leida punkti $(-5; 1; 0)$ läbiva ja sirgega $x - 1 = \frac{y + 9}{2} = -z - 12$ ristuva sirge võrrandid.
- 2.83. Leida punktiga $A(-5; 1; 0)$ sümmeetriline punkt sirge $x - 1 = \frac{y + 9}{2} = -z - 12$ suhtes.
- 2.84. Koostada võrrandid sirgele, mis läbib punkti $A(-5; 3; -4)$, lõikab sirget $\frac{x + 1}{3} = \frac{1 - y}{5} = \frac{z - 2}{2}$ ja on paralleelne tasandiga $7x + 8y - 2z = 0$.
- 2.85. Leida xz -tasandil sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja on risti sirgega $\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z - 5}{-1}$.
- 2.86. "eisendada tasandi võrrand normaalkujule:
a) $3x - 4y + 5z = 0$,

- b) $z - 2y + 2z + 7 = 0$,
 c) $6x + 6y - 7z - 15 = 0$,
 d) $x + y - 1 = 0$.

2.87. Leida punkti kaugus tasandist:

- a) $A(0; 1; -1)$, $x - 7y + 5z - 3 = 0$;
 b) $B(2; -1; 3)$, $3x - 6y + 2z - 8 = 0$;
 c) $C(1; -3; 2)$, $6x + 4y + 3z = 0$.

2.88. Leida tasanditevaheline kaugus:

- a) $2x - y - 2z + 1 = 0$,
 $2x - y - 2z - 8 = 0$;
 b) $x + 2y + 2z = 0$,
 $3x + 6y + 6z - 12 = 0$.

2.89. Leida z -teljel punkt, mis asub tasandist $3x - 2y + 6z - 9 = 0$ ja punktist $P(1; -2; 0)$ võrdsel kaugusel.

2.90. Leida punkti $A(1; 2; -2)$ kaugus tasandist, mis läbib sirgeid $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ ja $\frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z}{2}$.

2.91. Leida punkti $P(1; -2; 0)$ kaugus tasandist, mis läbib sirget $x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ ja punkti $P(3; 4; 0)$.

5. Teist järku jooned ja pinnad

1.92. Koostada võrrand ringjoonele, mis läbib punkte $A(-1; 3)$; $B(0; 2)$ ja $C(1; -1)$.

1.93. Leida ringjoone keskpunkt ja raadius, kui ringjoone võrrand on

- a) $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$,
 b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

1.94. Leida ringjoonele $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ läbi punkti $A(-2; 1)$ tõmmatud puutujate võrrandid.

1.95. Leida võrrand ringjoonele, mille keskpunktiks on $(4; 7)$ ja puutujaks $3x - 4y + 1 = 0$.

- 1.96. Koostada kanooniline võrrand ellipsile, mille fookuste vaheline kaugus on 6 ja väiksema pooltelje pikkus 2.
- 1.97. Koostada võrrand ellipsile, mille fookused asuvad y -teljel sümmeetriliselt koordinaatide alguspunkti suhtes ning ellipsi lühem pooltelg on 6 ja ekstsentrilisus $\frac{1}{3}$.
- 1.98. Leida ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ telgede pikkused ja fookuste koordinaadid.
- 1.99. Leida ellipsi $9x^2 + y^2 = 36$ pooltelgede pikkused, fookuste koordinaadid ja ekstsentrilisus.
- 1.100. Koostada kanooniline võrrand ellipsile, mille fookustevaheline kaugus on 12 ja ekstsentrilisus $\frac{3}{5}$.
- 1.101. Arvutada ellipsi ekstsentrilisus, kui ellipsi pikem telg paistab lühema telje otspunktist 120° -se nurga all.
- 1.102. Leida ellipsil $9x^2 + 25y^2 = 225$ punkt, mille kaugus ühest fookusest on 4 korda suurem kui teisest.
- 1.103. Mitu puutujat saab tõmmata ellipsile $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ läbi punkti $(1; 1)$?
- 1.104. Koostada kanooniline võrrand hüperboolile, mille reaalne pooltelg on 5 ja imaginaarne pooltelg 3. Leida hüperbooli asümptoodid.
- 1.105. Koostada kanooniline võrrand hüperboolile, mille reaaltelg on 6 ja ekstsentrilisus $\frac{2}{3}$.
- 1.106. Leida võrrand hüperboolile, mille fookusteks on $F_1(-10; 0)$ ja $F_2(10; 0)$ ning mis läbib punkti $M(12; 3\sqrt{5})$.
- 1.107. Koostada võrrand hüperboolile, mis läbib ellipsi $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ fookusi ja mille fookusteks on ellipsi pikema telje otspunktid.
- 1.108. Koostada võrrand paraboolile, mille sümmeetriateljeks on x -telg, haripunktiks koordinaatide alguspunkt ja fookus on haripunktist 4 ühiku kaugusel.
- 1.109. Leida parabooli $x^2 + 20y = 0$ fookus ja juhtjoon.
- 1.110. Koostada võrrand paraboolile, mille haripunktiks on koordinaatide alguspunkt, teljeks x -telg ja juhtjooneks $6x + 7 = 0$.

- 1.111. Missuguse ℓ väärtuse korral on sirge $y = 4x + \ell$ parabooli $y = 4x^2$ puutujaks?
- 1.112. Koostada võrrand parabooli $y^2 = 10x$ puutujatele, mis läbivad parabooli ja sirge $y = 4x - 5$ lõikepunkti.
- 1.113. Koostada võrrand sfäärile, mille diameetri otspunktid on $(3; 7; 2)$ ja $(-5; 3; -4)$.
- 1.114. Leida sfääri keskpunkt ja raadius, kui sfääri võrrand on
- a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 11 = 0$,
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.
- 1.115. Leida võrrand sfäärile, mille keskpunkt asub y -teljel ja mis puudutab sirget $\frac{x+10}{5} = y+1 = \frac{6-z}{2}$ punktis $(-5; 0; 4)$.
- 1.116. Leida võrrand sfäärile, mis läbib punkte $(4; -1; 4)$, $(-2; -1; 16)$, $(7; 11; 7)$ ja $(-5; 2; 4)$.
- 1.117. Leida ringjoone
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 94 = 0 \\ x - 2y + 2z - 17 = 0 \end{cases}$$
- keskpunkt ja raadius.
- 1.118. Koostada kanoonilised võrrandid sfääri $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$ diameetrile, mis on risti tasandiga $5x - y + 2z - 17 = 0$.
- 1.119. Leida punkti $A(1; -1; 3)$ vähim kaugus sfäärist $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z - 3 = 0$.
- 1.120. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6z + 15 = 0$ puutujatasand, mis on risti sirgega $2x = y = -z$.
- 1.121. Koostada võrrand sfäärile, mis läbib punkti $A(2; -1; 1)$ ja ringjoont
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0 \\ 5x + 2y - z - 3 = 0. \end{cases}$$
- 1.122. Kas tasand $z = 3$ lõikab, puudutab või asub väljaspool sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$?
- * * *
- 2.92. Koostada võrrand ringjoonele, kui tema ühe diameetri otspunktid on $A(1; 8)$ ja $B(-5; 2)$.

- 2.93. Leida ringjoone keskpunkt ja raadius, kui ringjoone võrrand on
- $x^2 + y^2 + 4y = 0$,
 - $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.
- 2.94. Leida läbi punkti $(-7; 1)$ ringjoonele $x^2 + y^2 = 5$ tõmmatud puutujate võrrandid.
- 2.95. Leida ringjoone $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ puutujad, mis on paralleelsed sirgega $3x - 4y = 0$.
- 2.96. Koostada võrrand ellipsile, mille fookustevaheline kaugus on 8 ja suurema telje pikkus 10.
- 2.97. Koostada võrrand ellipsile, mille fookused asuvad y -teljel sümmeetriliselt koordinaatide alguspunkti suhtes ja nii ellipsi pooltelgede summa kui ka fookustevaheline kaugus on 8.
- 2.98. Leida ellipsi $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ pooltelgede pikkused ja fookuste koordinaadid.
- 2.99. Leida ellipsi $x^2 + 4y^2 = 16$ telgede pikkused, fookuste koordinaadid ja ekstsentrilisus.
- 2.100. Koostada kanooniline võrrand ellipsile, mille pikem telg on 16 ja ekstsentrilisus $\frac{1}{2}$.
- 2.101. Leida võrrand ellipsile, mille fookusteks on punktid $F_1(-3; 0)$ ja $F_2(3; 0)$ ning ellipsi iga punkti kauguste summa fookustest 12.
- 2.102. Kui kaugel asub ellipsi $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ ühest fookusest punkt, mille kaugus teisest fookusest on 1,5?
- 2.103. Mitu puutujat saab tõmmata ellipsile $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ läbi punkti $(3; 1)$?
- 2.104. Koostada kanooniline võrrand hüperboolile, mille reaaltelje pikkus on 8 ja fookustevaheline kaugus 10. Leida hüperbooli asümptoodid.
- 2.105. Koostada kanooniline võrrand hüperboolile, mille imaginaarne pooltelg on 7 ja ekstsentrilisus $\frac{4}{3}$.
- 2.106. Leida kanooniline võrrand hüperboolile, mis läbib punkte $(2\sqrt{7}; -3)$ ja $(-7; -6\sqrt{2})$.
- 2.107. Koostada võrrand hüperboolile, millel on ellipsiga $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ ühised fookused ja hüperbooli ekstsentrilisus on 1,25.

- 2.108. Koostada võrrand paraboolile, mille haripunktiks on koordinaatide alguspunkt, teljeks x-telg ja fookuse kaugus juhtjoonest 7.
- 2.109. Leia parabooli $y = x^2$ fookus ja juhtjoon.
- 2.110. Leida parabooli $x^2 + 18y = 0$ punkti N kaugus parabooli fookusest, kui punkti N abstsiss on 6.
- 2.111. Arvutada parabooli $y^2 = 24x$ punkti M kaugus fookusest, kui punkti M abstsiss on 3.
- 2.112. Koostada võrrand joonele, mille kõik punktid asuvad võrdsel kaugusel punktist $F(0; 2)$ ja sirgest $y = -4$.
- 2.113. Koostada võrrand sfäärile, mille diameetri otspunktid on $(-7; 2; 3)$ ja $(5; -8; 7)$.
- 2.114. Leida sfääri keskpunkt ja raadius, kui sfääri võrrand on:
- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$
- b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 24y + 2z + 11 = 0$.
- 2.115. Leida võrrand sfäärile, mis läbib punkte $(-2; 7; 1)$ ja $(6; 1; -9)$ ning mille keskpunkt asub sirgel $\frac{x-1}{2} = -y + 4 = \frac{z}{3}$.
- 2.116. Leida võrrand sfäärile, mis läbib punkte $(1; -8; 3)$, $(0; -5; -5)$ ja $(4; -4; -2)$ ning mille keskpunkt asub tasandil $x - y + 2z - 2 = 0$.
- 2.117. Leida ringjoone
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 11 = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$
- keskpunkt ja raadius.
- 2.118. Koostada võrrand sfäärile, mis puudutab paralleelseid tasandeid $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ ja $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, kusjuures puutepunkt ühega neist on $M(5; -1; -1)$.
- 2.119. Leida punkti $A(9; -4; -3)$ vähim kaugus sfäärist $x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 16y - 24z + 241 = 0$.
- 2.120. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 6z - 5 = 0$ puutuatasand sfääri ja z-telje lõikepunktis.
- 2.121. Koostada võrrand sfäärile, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja ringjoont

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0. \end{cases}$$

2.122. Kas tasand $x = 5$ lõikab, puudutab või asub väljaspool sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$?

6. Funktsioon. Funktsiooni määramispiirkond

Ül. 1.123 - 1.126 leia järgmiste funktsioonide määramispiirkond.

1.123. a) $y = \sqrt{4 - x^2}$,

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$,

c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$,

d) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}$.

1.124. a) $f(x) = \frac{x - 7}{x(x^2 - 4)}$,

b) $y = \frac{\sqrt{x - 4}}{3 - x}$,

c) $g(x) = \sqrt{\frac{4 - x}{x + 2}} - \sqrt{x^2 - 4x}$.

1.125. a) $y = \log(x^2 + 3)$,

b) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x - 2}} - \log(2x - 3)$,

c) $f(x) = \frac{x}{\log(x - 3)} + \sqrt{7 - x}$,

d) $f(x) = \log_4(x^2 + 2x - 15)$.

1.126. a) $y = -\sqrt{2 \sin x}$,

b) $f(z) = \frac{1}{2 \sin^2 z - i}$,

c) $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$.

1.127. Konstrueerida järgmiste funktsioonide graafikud:

$$a) y = 1 - 2^x;$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kui } x < 0 \\ 0, & \text{kui } x = 0 \\ x, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{-4}{x}, & \text{kui } x < 0 \\ -x^2, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ülejäädud } x \text{ väärtustel}; \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{kui } x < -2 \\ 1, & \text{kui } -2 \leq x < 0 \\ 2^x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$$

$$f) y = |x^2 + x - 2|.$$

1.128. On antud funktsioonid $f(x) = x^3 - x$ ja $\varphi(x) = \sin 2x$. Leida $f[\varphi(\frac{\pi}{12})]$.

1.129. On antud funktsioonid $u = 1 + \sqrt{v}$, $v = z^2 + z$, $z = y - 2$ ja $y = \sin x$. Avaldada z , v ja u muutuja x funktsioonina.

* * *

Ül. 2.123 - 2.126 leida funktsiooni määramispiirkond.

2.123. a) $y = \frac{x-1}{x+2}$,

b) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$,

c) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 7}$,

d) $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{6-x}$.

2.124. a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$,

b) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$,

c) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

2.125. a) $y = \log(\sqrt{x+5} - 1)$,

b) $g = \frac{1}{1 - \log z}$,

c) $y = 2^{-\log(x-3)}$,

d) $f(x) = -\frac{3}{\log_3(x-2)}$.

2.126. a) $y = \frac{\sqrt{3x}}{1 + \sqrt{x^2 - 4}}$,

b) $y = \sqrt{1 - \sin x}$,

c) $y = \frac{|x|}{x - |x|}$.

2.127. Konstrueerida järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ 1 + \sqrt{3}x, & x > 0; \end{cases}$

b) $y = |x^2 - 1| - 1$,

c) $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{kui } x \leq 2 \\ -1, & \text{kui } 2 < x \leq 4 \\ -x + 3, & \text{kui } x > 4; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } -\pi \leq x < \pi \\ 0, & \text{ülejäanud } x \text{ väärtustel,} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{kui } x \leq 1 \\ \log_2 x, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$

f) $y = |x| - x$.

2.128. On antud funktsioonid $y = \sqrt{z+1}$ ja $z = \tan^2 x$. Avaldada y muutuja x funktsioonina.

2.129. On antud funktsioonid $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{x+1}$ ja $x = a^t$. Avaldada y muutuja t funktsioonina.

7. Funktsiooni piirväärtus

1.130. a) $\lim_{k \rightarrow -2} \log(2 + 2k + k^2 - k^3)$,

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 7x + 12} ,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 2x - 24} ,$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} .$$

$$1.131. a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} ,$$

$$b) \lim_{z \rightarrow -3} \frac{\sqrt{z + 3}}{\sqrt{1 - z} - 2} ,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x + 1}}{\sqrt{2 + x + x}} ,$$

$$d) \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\sqrt{k} - 1}{k^2 - \sqrt{k}} .$$

$$1.132. a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3} ,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1} ,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{x + 6} ,$$

$$d) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2y^4 - y + 3}{y^3 - 8y + 5} .$$

$$1.133. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 6}{x^3 - 2x} ,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (6^{1-x} + 5^{1-x}) ,$$

$$c) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} .$$

$$1.134. a) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^{2x} ,$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}.$$

$$1.135. a) \lim_{n \rightarrow \infty} n [\ln(n+3) - \ln n],$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^x,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x}.$$

$$1.136. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x},$$

$$b) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin 4k}{\sin 2k},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$1.137. a) \lim_{k \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin k}{\cos k},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin x}{x^2 - \sqrt{2}},$$

$$c) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - \sin t}{\sin^3 t}.$$

* * *

$$2.130. a) \lim_{t \rightarrow -6} [t \sqrt{t^2 - 20} - \log(-t + \sqrt{t^2 - 20})],$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} (x^5 - 5^{x+1} + 3),$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x^2 + 4x^4}{3x^2 + x^4 + x^6},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$$

$$2.131. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1+x} - (2x+1)},$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}),$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - \sqrt{a^3} x}{\sqrt{ax} - a},$$

$$\text{ d) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x).$$

$$2.132. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x},$$

$$\text{ b) } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2 - 2m + 3}{m^3 + 7m - 1},$$

$$\text{ c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\text{ d) } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + \sqrt{t+2}}{2t^2 - \sqrt{3t+5}}.$$

$$2.133. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x - 2}{3 + 7^{x+1}},$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 1}}{x + 3},$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 4}}{x}.$$

$$2.134. \text{ a) } \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{4}{t})^t,$$

$$\text{ b) } \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{t})^t,$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x+2})^{3x},$$

$$\text{ d) } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{5n})^n.$$

$$2.135. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}},$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{-2x-1}{2x+1})^{2x},$$

$$\text{ c) } \lim_{n \rightarrow \infty} n [\ln n - \ln(n+2)].$$

2.136. a) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin 3a}{a}$,
 b) $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\tan v}{v}$,
 c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.

2.137. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$,
 b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}$,
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 4 \cos 4x}{2x^2 \cos 2x}$.

8. Funktsiooni tuletis, diferentsiaal

Ül. 1.138 - 1.149 leida funktsiooni tuletised.

1.138. a) $y = (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2$,
 b) $u = \sqrt[5]{5v - v^5}$,
 c) $y = \sqrt{a^3 + a} - 1$,
 d) $y = x^4 (3x + 2)^3$,
 e) $y = \sqrt{x} (x^3 - \sqrt{x} + 1)$.

1.139. a) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}}$,
 b) $u = \frac{2t}{t + 3}$,
 c) $v = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$,
 d) $y = \frac{x^3}{(x - 5)^4}$,
 e) $v = \sqrt{\frac{5x + 3}{x - 2}}$.

- 1.140. a) $y = \sin 6v$,
 b) $y = \sin^4 3x$,
 c) $y = 6 \cos \frac{x}{3}$,
 d) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$,
 e) $y = 3 \sin (3x + 5)$.

- 1.141. a) $y = \frac{\tan x}{x}$,
 b) $s = a \cos^2 \frac{t}{a}$,
 c) $y = \cot \sqrt{x}$,
 d) $g = 2x - \tan^2 x$.

- 1.142. a) $y = x \sin (2x - 1)$,
 b) $y = \frac{\sin z}{z} + \frac{z}{\sin z}$,
 c) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$,
 d) $y = \sin \frac{x}{2} \cdot \sin 3x$.

- 1.143. a) $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$,
 b) $p(x) = x \sin x + \cos x$,
 c) $y = \cos^2 x - 2 \ln \cos x$.

- 1.144. a) $y = \frac{1}{\ln x}$,
 b) $y = \ln (x^2 + 2x)$,
 c) $y = \ln (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$,
 d) $v = \frac{3 \ln x}{1 - 2 \ln x}$.

- 1.145. a) $y = e^{-x^2}$,
 b) $y = e^{\sqrt{x}}$,
 c) $y = xe^x$,
 d) $y = \frac{x}{e^x}$,

$$e) p = x^2 \ln x .$$

$$1.146. a) y = 3^{\sin x} ,$$

$$b) z = \frac{1}{3^t} ,$$

$$c) y = t \cdot 10^{\sqrt{t}} ,$$

$$d) u = v^2 + 3^v ,$$

$$e) y = \frac{x^3 + 2^x}{e^x} .$$

$$1.147. a) y = \frac{\cos x}{e^x} ,$$

$$b) y = \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} ,$$

$$c) y = e^{\sqrt{x}} \cdot (1 - e^{\sqrt{x}}) ,$$

$$d) g = \frac{e^z}{\sin z} ,$$

$$e) y = 3 \sqrt{x} e^{-x} .$$

$$1.148. a) y = z \sqrt{1 - z^2} + \arcsin z ,$$

$$b) y = \arccos x^2 ,$$

$$c) y = \arctan \sqrt{x} ,$$

$$d) y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} .$$

$$1.149. a) y = \frac{\arccos x}{x} ,$$

$$b) y = x - \arctan x ,$$

$$c) y = \arctan \frac{z}{a} ,$$

$$d) y = \arctan \sqrt{1 - 4x} ,$$

$$e) y = \frac{1}{1 + x^2} - \arctan x .$$

Ül. 1.150. - 1.153. leida funktsiooni tuletis argu-
mendi antud väärtuste korral.

1.150. a) $y = (10 + 3x + x^2)(3 - x)$, $x = 0$;

b) $y = \sqrt[3]{\frac{3x-1}{x+7}}$, $x = 0$;

c) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}$, $x = 4$.

1.151. a) $s = \frac{\sqrt{2t-1}}{t}$, $t = 1$;

b) $y = \frac{(1+x^4)^{10}}{x^3}$, $x = 1$;

c) $u = \frac{1+v}{\sqrt{1-v}}$, $v = 0$.

1.152. a) $y = \cos \frac{x}{a} + \cos \frac{a}{x}$, $x = a$;

b) $y = 3 \cos^2 x - \cos^3 x$, $x = \frac{\pi}{4}$;

c) $y = \ln \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$;

d) $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$;

e) $r = \frac{1 + \cos t}{\sin t}$, $t = \frac{\pi}{2}$.

1.153. a) $f = (\arcsin s)^2$, $s = 0$;

b) $v = \arcsin \frac{2}{u}$, $u = 3$;

c) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$, $x = -3$.

1.154. Leida funksiiooni teist järku tuletis:

a) $y = \sin^2 x$,

b) $y = \tan x$,

c) $y = \sqrt{1+x^2}$,

d) $y = e^{-x^2}$,

e) $y = \arcsin \frac{x}{2}$,

f) $y = x \ln x$.

1.155. Leida funktsiooni n -järku tuletis:

a) $y = a^x$,

b) $y = x^n$,

c) $y = \sin v$.

Ül. 1.156, 1.157 leida funktsiooni diferentsiaal.

1.156. a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$,

b) $y = \sqrt{1 + x^2}$,

c) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$,

d) $y = 6^{3x^2} - 1$.

1.157. a) $y = 2x - \sin 2x$,

b) $y = \cos(a - bx)$,

c) $y = \ln \cos x$.

Ül. 1.158, 1.159 arvutada diferentsiaali abil täpsusega 0,01.

1.158. a) $2,93^4$,

b) $4,98^3$,

c) $\sqrt{3603}$,

d) $\sqrt[4]{17}$.

1.159. a) $\cot 31^\circ$,

b) $\cot 46^\circ$,

c) $\ln 1,05$,

d) $\arctan 0,98$.

1.160. Kera diameetri mõõtmisel on saadud tulemus 8,63 ($\pm 0,02$). Kui täpselt saab arvutada selle kera ruumala?

1.161. Kuubi serva pikkus on 5 ($\pm 0,01$) meetrit. Arvutada kuubi ruumala absoluutne ja relatiivne viga.

Ü1. 2.138 - 2.149 leida funktsiooni tuletis.

2.138. a) $s = \sqrt[3]{r\sqrt{r}}$,

b) $y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x^3)^4}$,

c) $g = (2x + 3x^2)^{\frac{3}{4}}$,

d) $s = t(t^2 - 4)$,

e) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$.

2.139. a) $y = \frac{1}{(1 - m^2)^5}$,

b) $y = \frac{\sqrt{4x + 1}}{x^2}$,

c) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$,

d) $y = \left(\frac{p + 1}{p - 1}\right)^2$.

2.140. a) $y = \cos(a - bx)$,

b) $y = 3 \sin\sqrt{x}$,

c) $y = 7 \cos^2 z$,

d) $y = 3 \sin^2 z - \sin^3 z$,

e) $y = 1 + \sin^2 5x$.

2.141. a) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$,

b) $y = \frac{1}{4} \tan^4 x$,

c) $y = \tan \frac{x + 1}{2}$,

d) $s = \sin \sqrt{1 - t^2}$.

2.142. a) $y = x^2 \sin x$,

b) $y = \frac{1}{\sin^2 x} + \tan^2 x$,

c) $y = \frac{\tan x}{1 + \cos x}$,

d) $y = \cos 2x \cdot \ln x$.

$$2.143. a) y = \cot x + \tan^2 x ,$$

$$b) y = \sqrt{\cos 2x} ,$$

$$c) y = \frac{x}{1 - \cos x} .$$

$$2.144. a) y = \ln^2 x ,$$

$$b) v = \sqrt{\ln x} ,$$

$$c) h = \frac{1 + \ln x}{x} ,$$

$$d) y = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} .$$

$$2.145. a) y = e^{-x} ,$$

$$b) y = e^{\sqrt{x+1}} ,$$

$$c) y = e^x \cos x ,$$

$$d) y = \frac{e^x}{x - 3} ,$$

$$e) z = x(1 - \ln x) .$$

$$2.146. a) y = \sin 2^x ,$$

$$b) y = a^{3x+5} ,$$

$$c) y = x \cdot 10^x ,$$

$$d) f(x) = x^2 \cdot 2^x ,$$

$$e) y = 2^x + 2^{3x} ,$$

$$f) g = \frac{y}{4^y} .$$

$$2.147. a) y = \frac{1 + e^v}{1 - e^v} ,$$

$$b) y = \frac{e^x}{1 + x^2} ,$$

$$c) y = a^{x^2} - e^{-x^2} ,$$

$$d) y = x^2 e^x ,$$

$$e) y = e^{-x^2} \ln x .$$

$$2.148. a) y = \arccos(1 - 2x) ,$$

$$b) y = \arcsin \sqrt{x},$$

$$c) y = \arccos (1 - x^2),$$

$$d) y = x \arcsin x^3.$$

$$2.149. a) y = \sqrt{x} \arctan x,$$

$$b) y = \arctan \sqrt{6x - 1},$$

$$c) y = \operatorname{arccot} \frac{1}{x},$$

$$d) y = \arctan \frac{2x}{1 - x^2},$$

$$e) y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x.$$

Ül. 2.150 - 2.153 leida funktsiooni tuletis argumendi antud väärtuste korral.

$$2.150. a) y = x^3 \sqrt{1 - x^2}, \quad x = 0;$$

$$b) y(a) = \sqrt{\frac{s+1}{s-1}}, \quad s = 2;$$

$$c) y = \frac{(5 - 3z)^4}{z^5}, \quad z = \frac{1}{3}.$$

$$2.151. a) y = \frac{\sqrt{5 - u^2}}{5 + u}, \quad u = -2;$$

$$b) y = \frac{x^8}{8(1 - x^2)^4}, \quad x = 0;$$

$$c) f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^5}, \quad t = \frac{1}{a}.$$

$$2.152. a) z = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}, \quad x = \sqrt{1};$$

$$b) y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x, \quad x = \frac{\sqrt{1}}{4};$$

$$c) y = \ln \sin x, \quad x = \frac{\sqrt{1}}{4};$$

$$d) y = a \cos \frac{x}{3}, \quad x = 3\sqrt{1};$$

$$e) s = \frac{\sin t}{1 + \cos t}, \quad t = \frac{\sqrt{1}}{2}.$$

$$2.153. a) y = \arcsin \frac{x}{a}, \quad x = \frac{a}{2};$$

$$b) t = \frac{\arcsin r}{\sqrt{1 - r^2}}, \quad r = 0;$$

c) $t = s \log s$, $s = 1$.

2.154. Leida funktsiooni teist järku tuletis:

a) $y = \cos^2 x$,

b) $y = \cot x$,

c) $y = \frac{1}{x^2}$,

d) $y = a^x$,

e) $y = \arctan 4x$,

f) $s = -\frac{t}{\ln t}$.

2.155. Leida funktsiooni n-järku tuletis:

a) $y = e^{\frac{x}{a}}$,

b) $s = \sqrt{t}$,

c) $f(x) = x \ln x$.

Ül. 2.156, 2.157 leida funktsiooni diferentsiaal.

2.156. a) $y = \sqrt{1 - 2x^2}$,

b) $y = e^{-4z}$,

c) $y = \log(x - 3)$.

2.157. a) $y = \sqrt{\tan z}$,

b) $y = \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$,

c) $y = \tan x - x^5$,

d) $y = \ln \sin x$.

Ül. 2.158, 2.159 arvutada diferentsiaali abil täpsusega 0,01.

2.158. a) $10,02^4$,

b) $3,03^5$,

c) $\sqrt{124}$,

d) $\sqrt[3]{7,99}$.

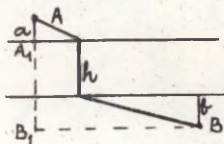
- 2.159. a) $\sin 29^\circ$,
 b) $\tan 44^\circ$,
 c) $\ln 0,97$,
 d) $\ln (e + 0,1)$.
- 2.160. Leida 250 m pikkuse arvutuslükati täpsus, arvestades lugemi maksimaalseks absoluutseks veaks 0,1 mm.
- 2.161. Pendli võnkeperiood $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$, kus ℓ on pendli pikkus, g - raskuskiirendus. Milline on võnkeperioodi T relatiivne viga, kui $\pi = 3,14(\pm 0,05)$, $\ell = 1(\pm 0,01)$ m, $g = 9,8(\pm 0,02)$ m/s² ?

9. Tuletise rakendus

- 1.162. Leida funktsiooni ekstreemumid.
- a) $y = -x^2 - x + 6$,
 b) $y = x^3 + 6x^2 - 9x$,
 c) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$,
 d) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.
- 1.163. Arvutada piirväärtus, kasutades L'Hospitali reeglit.
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$,
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}$,
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$,
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$,
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2}$,
 f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^n - 1}$.
- 1.164. Koostada puutujate ja normaalide võrrandid kõverale $y^2 = 4 - x$ tema lõikepunktides y -teljega.

- 1.165. Koostada võrrand kõvera $y = x^2 - 2x + 2$ puutujale, mis on risti sirgega $x + 2y - 2 = 0$.
- 1.166. Millises parabooli $y = x^2 + 4x$ punktis on selle puutuja paralleelne x -teljega?
- 1.167. Koostada võrrandid hüperbooli $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ puutujatele, mis läbivad punkti (2; 1).
- 1.168. Milliste argumendi x väärtuste korral funktsiooni $f(x) = x^3 - 5x^2 - 9x$ graafiku puutuja moodustab x -teljega nurga 135° ?
- 1.169. Millise nurga all kõver $y = \ln x$ lõikab x -telge?
- 1.170. Millise nurga all kõverad $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ lõikuvad?
- 1.171. Leida joonte käänupunktid ja kumerus- ning nõgususpiirkonnad:
- a) $y = \frac{x^3}{6} - x^2$,
- b) $y = e^{-x^2}$,
- c) $y = (x + 2)^6 + 2x + 2$.
- 1.172. Leida joonte asümptoodid:
- a) $y = \frac{1}{x-1}$,
- b) $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$,
- c) $y^3 = 6x^2 + x^3$.
- 1.173. Uurida funktsiooni ning skitseerida graafik:
- a) $y = x^2 + 2x - 3$,
- b) $g = \frac{2z - 4}{z^2}$,
- c) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4$,
- d) $y = x - \ln(x + 1)$,
- e) $v = -\frac{4t}{t^2 + 1}$.

- 1.174. Keha liigub sirgjooneliselt seaduse $s = t^3 - 6t^2 - 4t - 8$ järgi. Leida keha liikumise kiirus 5. sekundi lõpul. Teepikkus s on väljendatud meetrites.
- 1.175. Jaotada arv 6 kaheks liidetavaks nii, et nende ruutude summa oleks minimaalne.
- 1.176. Milliste mõõtmetega ristkülikul on suurim pindala, kui ristküliku ümbermõõt on 50 cm?
- 1.177. Kolmnurka, mille alus on a ja kõrgus h , on ehitatud ristkülik. Millised peavad olema ristküliku mõõtmed, et selle pindala oleks maksimaalne?
- 1.178. Millised peavad olema silindrikujulise liitri (kaanega) mõõtmed, et materjali kulu oleks minimaalne?
- 1.179. On tarvis valmistada koonusekujuline lehter, mille moodustaja pikkus on 20 m. Milline peab olema lehtri kõrgus, et ruumala oleks suurim?
- 1.180. Kerasse raadiusega R on kujutatud silinder. Milline peab olema silindri kõrgus, et silindri ruumala oleks suurim?
- 1.181. Kulutused auriku küttele on võrdelised auriku kiiruse kuubiga. On teada, et kiiruse korral $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ kulub kütust 30 rubla eest tunnis. Ülejäänud kulutused, mis ei sõltu kiirusest, moodustavad 480 rubla tunnis. Millise kiiruse korral kulutused 1 km pikkusel teel on vähimad? Milline on sellisel juhul 1 tunni maksumus?
- 1.182. Akna alumine osa on ristkülik, mida ülalt täiendab poolring. Akna ümbermõõt on a . Millised peavad olema akna mõõtmed, et ta laseks läbi kõige enam valgust?
- 1.183.



Leida jõe kaldal koht, kuhu tuleks ehitada sild, et tee pikkus punktide A ja B vahel oleks vähim (vt. joon.).

- 2.162. Leida funktsiooni ekstreemumid:

a) $y = 4x - x^2$,

$$b) y = x^2 + 4x + 5,$$

$$c) y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x,$$

$$d) y = \frac{x^2}{x-2}.$$

2.163. Arvutada piirväärtus, rakendades L'Hospitali reeglit:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{\ln x} \right),$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x)x.$$

2.164. Koostada puutuja ja normaali võrrand kõverale $y = 9 - x^2$ kohal $x = -3$.

2.165. Millises kõvera $y = x^2 - 2x + 5$ punktis on tema puutuja paralleelne I veerandi nurgapoolitajaga?

2.166. Koostada võrrandid hüperbooli $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ puutujatele, mis on risti sirgega $x + 2y - 3 = 0$.

2.167. Koostada võrrandid hüperbooli $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ puutujatele, mis läbivad selle hüperbooli ja sirge $3x - 5y = 0$ lõikepunkte.

2.168. Milliste argumentide x väärtuste korral funktsiooni $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x + 8$ graafiku puutuja moodustab x -teljega nurga 45° ?

2.169. Millise nurga all kõverad $2y = x^2$ ja $2y = 8 - x^2$ lõikuvad?

2.170. Millise nurga all sirge $y = 0,5$ lõikab kõverat $y = -\cos x$?

2.171. Leida joonte käänupunktid ja kumerus- ning nõgususpiirkonnad:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$,

b) $y = xe^{-x}$,

c) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

2.172. Leida joonte asümptoodid:

a) $y = \frac{1}{(x + 2)^3}$,

b) $y = \ln x$,

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2.173. Uurida järgmisi funktsioone ning skitseerida graafikud:

a) $y = x^2 - 2x - 3$,

b) $y = \frac{x^3}{3} - 1$,

c) $y = x^2 - \frac{x^4}{2}$,

d) $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$,

e) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

2.174. Leida keha liikumise kiirendus ajamomendil $t = \frac{\pi}{4}$, kui ta liigub seaduse $s = 0,5 \sin 2t$ järgi.

2.175. Kahe arvu vahe on a . Missugused peavad olema need arvud, et nende korrutis oleks vähim?

2.176. Ristkülikukujulise akna pindala on $3m^2$. Missugused peaksid olema akna mõõtmed, et tema ümbermõõt oleks võimalikult väike?

- 2.177. Kolmnurga alus on 16 ja kõrgus 10 cm. Millised peavad olema sellesse kolmnurka kujundatud ristküliku mõõtmed, et ristküliku pindala oleks maksimaalne?
- 2.178. Silindri ruumala on V. Millised peavad olema selle silindri mõõtmed, et täispindala oleks vähim?
- 2.179. Kerasse raadiusega R on kujutatud koonus. Milline peab olema koonuse kõrgus, et koonuse ruumala oleks suurim?
- 2.180. Millised on kera ümber kujundatud minimaalse ruumalaga koonuse mõõtmed, kui kera raadius on 10 cm?
- 2.181. Silindrikujulist keha täiendab ülalt poolkera. Millised peavad olema selle keha mõõtmed, et tema täispindala oleks vähim?
- 2.182. Keha on visatud vertikaalselt üles algkiirusega $300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Liikumise võrrand on $s = v_0 t - 4,9 t^2$. Kas momendil t keha tõuseb või langeb, kui
- $t = 20\text{s}$,
 - $t = 30\text{s}$,
 - $t = 32\text{s}$?
- 2.183. Millised peaksid olema kolmliikme $x^2 + px + q$ kordajad p ja q, et kolmliikmel kohal $x = 2$ oleks miinimum, mis võrdub 1-ga?

10. Integraal

Ül. 1.184 - 1.194 leida integraal.

1.184. a) $\int \frac{3\sqrt{x^2} - 4\sqrt{x}}{x} dx,$

b) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx,$

c) $\int \frac{dx}{(2x - 3)^5},$

$$d) \int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx,$$

$$e) \int 2x\sqrt{x^2+1} dx.$$

$$1.185. a) \int \frac{dx}{2x+5},$$

$$b) \int \frac{x dx}{3-5x^2},$$

$$c) \int \frac{4z^2 dz}{8z^3+19},$$

$$d) \int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx.$$

$$1.186. a) \int e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

$$b) \int e^{4x} dx,$$

$$c) \int (e^t + e^{-t})^2 dt,$$

$$d) \int a^{2x-1} dx.$$

$$1.187. a) \int e^{x^3+x^2-x+1} (3x^2+2x-1) dx,$$

$$b) \int \frac{e^{2x} dx}{1-3e^{2x}},$$

$$c) \int 5^{\sin x} \cos x dx,$$

$$d) \int \sin(2x-3) dx.$$

$$1.188. a) \int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)},$$

$$b) \int \frac{dx}{\cos^2(3x+5)},$$

$$c) \int \sin(2v-1) dv,$$

$$d) \int \cot x dx,$$

$$e) \int \frac{\sin 2x dx}{3+2 \cos 2x}.$$

1.189. a) $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$,

b) $\int \cos^4 x dx$,

c) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$,

d) $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x} dx$.

1.190. a) $\int xe^{-x} dx$,

b) $\int xe^{2x} dx$,

c) $\int x \sin 2x dx$,

d) $\int x^2 \cos x dx$.

1.191. a) $\int v \cos 2v dv$,

b) $\int x^2 \sin x dx$,

c) $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$,

d) $\int \arctan x dx$.

1.192. a) $\int x \ln(x - 1) dx$,

b) $\int x \ln x dx$,

c) $\int e^x (\sin e^x) dx$,

d) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

1.193. a) $\int \frac{x^3}{x-2} dx$,

b) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$,

c) $\int \frac{x+2}{(x^2-1)(x+1)^2} dx$,

$$d) \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx .$$

$$1.194. a) \int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx ,$$

$$b) \int \frac{dx}{2x^2-2x+3} ,$$

$$c) \int \frac{dx}{x^2-6x+18} .$$

Ül. 1.195 - 1.197 leida määratud integraal.

$$1.195. a) \int_1^4 \sqrt{x} dx ,$$

$$b) \int_0^4 \sin 4t dt ,$$

$$c) \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos^2 2t} ,$$

$$d) \int_0^4 (1 + e^{\frac{x}{4}}) dx ,$$

$$e) \int_{-1}^1 (2x-3)^3 dx .$$

$$1.196. a) \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{z^2+1}} ,$$

$$b) \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{2+3z}} ,$$

$$c) \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} ,$$

$$d) \int_{-1}^0 u^2 \sqrt{4-u^3} du ,$$

$$e) \int_{-2}^1 \frac{e^{4x} dx}{e^{4x} + 1}$$

$$1.197. a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx ,$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx .$$

1.198. Leida joontega $y = x^2 + 4x$ ja $y = x + 4$ piiratud kujundi pindala.

1.199. Leida joontega $y^2 = 4x$ ja $x^2 = 4y$ piiratud kujundi pindala.

1.200. Leida joontega $y = x^2$ ja $y = 2 - x^2$ piiratud kujundi pindala.

1.201. Leida joontega $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$ piiratud kujundi pindala.

1.202. Leida joontega $y = -x$, $y = x^2 - 6x + 10$, $x = 1$ ja $x = 5$ piiratud kujundi pindala.

1.203. Leida joontega $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ ja $y = 0$ piiratud kujundi pindala.

1.204. Leida kõvera $y^2 = (x-1)^3$ pöörlemisel ümber x -telje kuni $x = 2$ tekkiva pöördkeha ruumala.

1.205. Arvutada ligikaudselt trapetsvalemi ja Simpsoni valemi abil:

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, jaotades integreerimisvahemiku kümneks osavahemikuks ($n = 10$),

b) $\int_1^3 \sqrt{x^3 - 1} dx$, $n = 6$,

c) $\int_1^{10} \log_{10} x dx$, $n = 10$.

1.206. Leida hüpotüsükloidi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pikkus.

1.207. Leida joone $y = \ln x$ kaare pikkus vahemikus $x = \sqrt{3}$ kuni $x = \sqrt{8}$.

1.208. Leida logaritmilise spiraali $\rho = e^{-\varphi}$ kaare pikkus punktist $\varphi = 1$, $\varphi = 0$ pooluseni.

1.209. Leida joone $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ pikkus.

1.210. Leida parabooli $y = x^2$ selle kaare pikkus, mis asetseb ringis $x^2 + y^2 = 6$.

1.211. Sirgjoone $y = 2x$ punktide $x = 0$ ja $x = 2$ vaheline lõik pöörleb ümber y -telje. Leida moodustuva koonuse pindala.

1.212. Leida ringjoone $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ pöörlemisel ümber x -telje tekkiva rõnga pindala.

Ül. 1.213, 1.214 leida päratu integraal.

1.213. a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$,

b) $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ ($a > 0$),

$$c) \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

$$1.214. a) \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx,$$

$$b) \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx,$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Ü1. 2.184 - 2.194 leida integraal.

$$2.184. a) \int \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx,$$

$$b) \int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx,$$

$$c) \int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx,$$

$$d) \int \frac{(1 + \sqrt{s})^3}{2\sqrt{s}} ds,$$

$$e) \int \frac{ds}{(3s + 2)^3}.$$

$$2.185. a) \int \sqrt[3]{5 - 6x} dx,$$

$$b) \int x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx,$$

$$c) \int \frac{dt}{1 - 10t^2},$$

$$d) \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1},$$

$$e) \int \frac{2x dx}{x^2 + 1}.$$

$$f) \int 7y \sqrt[3]{y} dy.$$

$$2.186. a) \int e^{-t} dt ,$$

$$b) \int e^{-3x} dx ,$$

$$c) \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx .$$

$$2.187. a) \int 2^{3r} dr ,$$

$$b) \int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{x} \right) dx ,$$

$$c) \int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) dx .$$

$$2.188. a) \int \sin 2v dv ,$$

$$b) \int \sin(ax + b) dx ,$$

$$c) \int \frac{du}{\cos^2 5u} ,$$

$$d) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{2x}{5}} ,$$

$$e) \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} .$$

$$2.189. a) \int \tan x dx ,$$

$$b) \int \sin^3 z \cos z dz ,$$

$$c) \int \frac{\sin m dm}{1 + 3 \cos m} ,$$

$$d) \int \frac{3 - 2 \sin^2 x}{\sin^2 x} dx ,$$

$$e) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} .$$

- 2.190. a) $\int x e^x dx$,
 b) $\int x e^{-3x} dx$,
 c) $\int x \cos x dx$,
 d) $\int x \cos^2 x dx$.
- 2.191. a) $\int (x + \sin x) \cos x dx$,
 b) $\int t \arctan t dt$,
 c) $\int (x^2 + 1)e^x dx$,
 d) $\int \ln s ds$.
- 2.192. a) $\int \arcsin x dx$,
 b) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$,
 c) $\int \sqrt{x} \ln x dx$.
- 2.193. a) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$,
 b) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$,
 c) $\int \frac{x^2 + 8}{(x^2 - 1)(x+2)} dx$,
 d) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$.
- 2.194. a) $\int \frac{x^5}{x^3 - a^3} dx$,
 b) $\int \frac{x-2}{x^2 - 4x + 7} dx$,
 c) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$.

Ü1. 2.195 - 2.197 leida määratud integraal.

2.195. a) $\int_1^2 x^3 dx,$

b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x dx,$

c) $\int_0^3 \sin 3x dx,$

d) $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx,$

e) $\int_0^1 e^{-5x} dx.$

2.196. a) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2},$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{dz}{(11+5z)^3},$

c) $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}},$

d) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{\sqrt{4-t^2}},$

e) $\int_{-2}^2 \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 1}.$

2.197. a) $\int_0^1 x e^{-x} dx,$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$

2.198. Leida joontega $y = x^2 - 2$ ja $y = x - 4$ piiratud kujundi pindala.

2.199. Leida joontega $y = x^2 + 2$ ja $x + y = 4$ piiratud kujundi pindala.

2.200. Leida joontega $y = x^2$ ja $y = \frac{x^3}{3}$ piiratud kujundi pindala.

2.201. Leida joontega $y^2 = 9x$ ja $x^2 = 9y$ piiratud kujundi pindala.

2.202. Leida joontega $y = x^2 - 4x$ ja $y = -x + 4$ piiratud kujundi pindala.

2.203. Leida joontega $xy = 6$ ja $x + y - 7 = 0$ piiratud kujundi pindala.

2.204. Leida kõvera $y = \sqrt{x^3}$ pöörlemisel ümber x-telje vahemikus 1-st 4-ni tekkiva pöördkeha ruumala.

2.205. Arvutada ligikaudselt trapetsvalemi ja Simpsoni valemi abil:

a) $\int_0^1 \frac{4 dx}{1 + x^2},$ jaotades integreerimisvahemiku neljaks vahemikuks ($n = 4$),

b) $\int_1^{11} x^3 dx,$ ($n = 10$),

c) $\int_1^3 \frac{dx}{2x - 1},$ ($n = 4$).

- 2.206. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ pikkus.
- 2.207. Leida joone $y = 1 - \ln \cos x$ kaare pikkus vahemikus $x = 0$ kuni $x = \frac{\pi}{4}$.
- 2.208. Leida kardioidi $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ pikkus.
- 2.209. Leida joone $\rho = 2r \sin \varphi$ pikkus.
- 2.210. Arvutada joone $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$ selle kaare pikkus, mis asetseb paraboolis $y^2 = \frac{x}{3}$.
- 2.211. Leida sinusoidi $y = \sin x$ punktide $x = 0$ ja $x = 2$ vahelise kaare pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördekeha pindala.
- 2.212. Leida koordinaatide alguspunkti ja punkti $x = 3a$ vahelise parabooli $y^2 = 4ax$ kaare pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördpinna pindala.

Ül. 2.213, 2.214 leida päratu integraal.

- 2.213. a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$,
- b) $\int_0^{\infty} \cos x \, dx$,
- c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.
- 2.214. a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} \, dx$,
- b) $\int_0^{\infty} x \sin x \, dx$,
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx$.

11. Kahemuuttuja funktioon, määramispiirkond,
piirväärtus

Ül. 1.215, 1.216 leida funktiooni määramispiirkond.

1.215. a) $z = \sqrt{xy}$,

b) $u = \sqrt{2x^2 + 2y^2 - 32}$,

c) $z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$

d) $u = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

1.216. a) $v = \ln u + \sqrt{v}$,

b) $u = \ln(s^2 + t^2)$,

c) $z = y + \arcsin(x + 2)$,

d) $z = \arcsin(3 - x^2 - y^2)$.

1.217. Leida funktiooni

$$f(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

väärtus kohal $x = 5$, $y = 3$.

1.218. Leida funktiooni

$$f(m, n) = \frac{m}{\sqrt{m+1}} - mn$$

väärtus, kui $m = 2,5$ ja $n = 1,5$.

1.219. Leida funktiooni

$$z = e^{\sin(x+y)}$$

väärtus, kui $x = y = \frac{\pi}{2}$.

1.220. Leida funktiooni

$$v = s^{t^2-1} + t^{s^2-1}$$

väärtus, kui $s = 2$ ja $t = 1$.

1.221. Kirjutada funktsiooni nivoojoonte võrrand, joonestada nivoojooni ja määrata, missuguseid väärtusi võib omandada antud funktsioon.

a) $z = 4 - x^2 - y^2$,

b) $z^3 + xz^2 + y = 0$.

1.222. Leida piirväärtus:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -2}} (x^2 - y^2)$,

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+1}{y-1}$,

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \sqrt{x-y}$,

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2}$.

Ül. 2.215, 2.216 leida funktsiooni määramispiirkond.

2.215. a) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$,

b) $z = x^2 + y^2 - 4$,

c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$,

d) $s = \frac{10}{\sqrt{3v^2 + 3t^2 - 27}}$.

2.216. a) $p = \ln qr$,

b) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$,

c) $f(x, y) = x - \arcsin y$,

d) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$.

2.217. Leida funktsiooni

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{x - y}$$

väärtus kohal $x = 3, y = 1$.

2.218. Leida funktsiooni

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

väärtus kohal $x = -3, y = 4$.

2.219. Leida funktsiooni

$$s = \sqrt[3]{uv} - \frac{1}{2} v^{u-1}$$

väärtus, kui $u = 4$ ja $v = 2$.

2.220. Leida funktsiooni

$$z = \left[\frac{\arctan(x + y)}{\arctan(x - y)} \right]^2$$

väärtus, kui $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ja $y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

2.221. Kirjutada funktsiooni nivoojoonte võrrand, joonestada nivoojooni ja määrata, missuguseid väärtusi võib omandada antud funktsioon:

a) $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$,

b) $z^2 - 2x^2 - 3y^2 = 0$.

2.222. Leida piirväärtus:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} (x^2 + y^2)$,

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$,

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 7}} \log(x + y)$,

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}$.

12. Osatuletised ja täisdiferentsiaal

Ül. 1.223, 1.224 leida funktsiooni osatuletised.

1.223. a) $z = \frac{x}{y}$,

b) $u = x^2 + 3xy + 4y^2$,

c) $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$,

d) $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$,

e) $z = 5 - \frac{x}{y}$.

1.224. a) $z = \ln(x + \ln y)$,

b) $z = \arctan \frac{u}{v}$,

c) $z = \log_x y$,

d) $z = \sin xy - \cos \frac{x}{y}$,

e) $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

1.225. Leida funktsiooni $z = x^2 + y^2$ osatuletised punktis $(-2; 0,5)$.

1.226. Leida funktsiooni

$$z = x \cdot \arctan(y + 1)$$

osatuletised punktis $(-2; 0)$.

1.227. Näidata, et funktsioon

$$z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$$

rahuldab võrrandit

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

1.228. Näidata, et funktsioon

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

rahuldab võrrandit

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

- 1.229. Leida y' , kui y on antud võrrandiga $xy - \ln y = a$.
- 1.230. Leida y' , kui y on antud võrrandiga $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.
- 1.231. Leida $\frac{dy}{dx}$ kohal $x = 6$ ja $y = 2$, kui y on antud võrrandiga $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$.
- 1.232. Leida kõverale

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$
 puutuja punktis $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.
- 1.233. Leida punktid, milleles kõvera

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$$
 puutuja on paralleelne y -teljega.
- 1.234. Leida y' ja y'' , kui

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$$
.
- 1.235. Leida funktsiooni täisdiferentsiaal:
 a) $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$,
 b) $z = \frac{x+y}{x-y}$,
 c) $z = \arcsin xy$,
 d) $z = \ln \tan \frac{x}{y}$.
- 1.236. Leida funktsiooni $z = e^{xy}$ täisdiferentsiaali väärtus punktis $(1; 1)$, kui $\Delta x = 0,15$ ja $\Delta y = 0,1$.
- 1.237. Leida funktsiooni

$$z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$$
 täisdiferentsiaali väärtus punktis $(3; 4)$, kui $\Delta x = 0,1$ ja $\Delta y = 0,2$.
- 1.238. Leida Δu ja du punktis $(2; 1)$, kui $u = x^3y^2$ ja $\Delta x = -0,1$ ning $\Delta y = -0,1$.
- 1.239. Leida Δz ja dz punktis $(5; 3)$, kui $z = \arcsin \frac{y}{x}$ ja $\Delta x = -0,5$ ning $\Delta y = 0,3$.
- 1.240. Arvutada

$$1,02^3,05$$
 ligikaudne väärtus.
- 1.241. Arvutada $0,96^2$ $1,02^3$ ligikaudne väärtus.
- 1.242. Täisnurkse kolmnurga kaatetid moodeti täpsusega $0,1$ cm ning saadi $7,5$ ja 18 cm. Arvutada hüpotenuusi pikkus ja selle absoluutne viga.

1.243. Silindri raadius $R = 2$ dm ja kõrgus $H = 10$ dm. Pärast pikemaajalist seismist silinder deformeerus ja tema raadius oli 2,05 ja kõrgus 9,8 dm. Leida ruumala V muutumise ligikaudne väärtus ($\Delta V \approx dV$).

1.244. Näidata, et

$$\left(x \frac{\partial s}{\partial x} + t \frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = -\frac{2s}{9},$$

$$\text{kui } s = \sqrt[3]{ax + bt}.$$

1.245. Näidata, et

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\text{kui } z = e^{\frac{x}{y}}$$

1.246. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0,$$

$$\text{kui } u = \arctan(2x - t).$$

1.247. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2},$$

$$\text{kui } s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right).$$

1.248. Näidata, et

$$2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0,$$

$$\text{kui } z = 2 \cos^2\left(x - \frac{t}{2}\right).$$

1.249. Leida pinna $z = x^2 + 2y^2$ puutujatasandi võrrand punktis (1; 1; 3).

1.250. Leida pinna

$$z = 2x^2 + y^2$$

puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis (1; 1; 3).

1.251. Leida pinna

$$z = x^4 + 2x^2y - xy + x$$

puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis (1; 0; 2).

- 1.252. Määrata nurgad, mis moodustuvad koordinaattelgedes ja pinna $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$ punktist $(0; 2; 2)$ tõmmatud normaali vahel.
- 1.253. Leida punkt, kus funktsiooni $u = xyz$ gradient on $(-6; -3; 2)$.
- 1.254. Leida funktsioonide $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $z = \sqrt{2xy}$ gradiendid ja määrata punktid, kus need gradiendid on paralleelsed.
- 1.255. Leida funktsiooni $z = \arctan \frac{y}{x} - \frac{4y}{x}$ tuletis punktis $(1; \sqrt{3})$ suunas, mis viib sealt punkti $(2; 3\sqrt{3})$.
- 1.256. Leida funktsiooni $z = y^3 - 2x^2y^2 - x^2y$ tuletis punktis $(-2; 1)$ vektori $(1; 2)$ suunas.
- 1.257. Arvutada funktsiooni $u = xyz$ tuletis punktis $(-2; 1; 3)$ vektori $4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$ suunas.
- 1.258. Leida funktsiooni ekstreemumid:
- $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$,
 - $z = 4x^2 - xy + 9y^2 + x - y$,
 - $z = (x^2 + y^2)^2 + (x - y)^2 + 1$,
 - $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
- 1.259. Leida funktsiooni $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ suurim ja vähim väärtus ristkülikus, mille tipud on $A(1; -3)$, $B(1; 2)$, $C(4; 2)$ ja $D(4; -3)$.
- 1.260. Leida funktsiooni $z = x^2y(4 - x - y)$ suurim väärtus kolmnurgas, mis on piiratud sirgetega $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.
- 1.261. Uurida funktsiooni $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ekstreemumite suhtes, kui $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$.
- 1.262. Uurida funktsiooni $z = a \cos^2 x + b \cos^2 y$ ekstreemumite suhtes, kui $y - x = \frac{\pi}{4}$.

- 1.263. Jaotada positiivne arv a kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks suurim.
- 1.264. Leida risttahukakujulise basseini mõõtmed nii, et tema pindade katmiseks kuluks vähim hulk materjali, kui basseini ruumala on V .
- 1.265. Leida pöördsilindrikujulise, pealt lahtise nõu mõõtmed nii, et konstantse ruumala V puhul nõu pindala oleks minimaalne.
- 1.266. Leida tasandil $x + y - 2z = 0$ punkt, mille kauguste ruutude summa tasanditeni $x + 3z = 6$ ja $y + 3z = 2$ oleks vähim.

Ül. 2.233., 2.224 leida funktsiooni osatuletised.

- 2.223. a) $z = x^3y - y^3x$,
 b) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$,
 c) $u = \sin(3x^2 + 5y - 4xy)$,
 d) $z = \ln(x^2 + y^2)$,
 e) $z = \frac{xy}{x+y} \ln(x+y)$.

- 2.224. a) $u = e^{\sqrt{y}}$,
 b) $z = x^y$,
 c) $z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
 d) $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$,
 e) $z = 2^{\sin xy} xy$.

- 2.225. Leida funktsiooni
 $z = x^2 + xy + y^2$
 osatuletised punktis (1; 2).

- 2.226. Leida funktsiooni
 $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$
 osatuletised punktis (3; 3).

2.227. Näidata, et funktsioon

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

rahuldab võrrandit $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

2.228. Näidata, et funktsioon

$$z = \arctan \frac{y}{x}$$

rahuldab võrrandit $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2.229. Leida y' , kui funktsioon on antud võrrandiga

$$x^3 y - y^3 x = a^4.$$

2.230. Leida y' , kui y on antud võrrandiga $yx^2 = e^y$.

2.231. Leida $\frac{dy}{dx}$ kohal $x = 6$, $y = 8$, kui y on antud võrrandiga $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$.

2.232. Leida kõvera

$$x^2 + y^2 = 10y$$

puutuja tõus selle kõvera löikepunktis sirgega $x = 3$.

2.233. Leida punktid, milledes kõvera $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$ puutuja on paralleelne x -teljega.

2.234. Leida y' ja y'' kohal $x = 2$ ja $y = 0$, kui $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$.

2.235. Leida funktsiooni täisdiferentsiaal

a) $z = \sin xy$,

b) $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$,

c) $z = \arctan \frac{x}{y}$,

d) $u = x \cdot 2^y$.

2.236. Leida funktsiooni

$$z = x^3 + y^4$$

täisdiferentsiaali väärtus, kui $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0,03$ ja $dy = -0,01$.

2.237. Leida funktsiooni

$$z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

täisdiferentsiaali väärtus punktis (2; 1), kui $\Delta x = 0,01$
ja $\Delta y = 0,03$.

2.238. Leida Δu ja du punktis (2; 1), kui

$$u = 3x^2 + xy - y^2 + 1$$

ja $\Delta x = 1$ ning $\Delta y = 2$.

2.239. Leida Δz ja dz punktis (2; 1), kui

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

ja $\Delta x = 0,1$ ning $\Delta y = -0,1$.

2.240. Arvutada $1,04^{2,02}$ ligikaudne väärtus.

2.241. Arvutada $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$ ligikaudne väärtus.

2.242. Keha kaal õhus on $4,1 \pm 0,1$ G ja vees $1,8 \pm 0,2$ G. Lei-
da keha tihedus ja arvutada selle viga.

2.243. Koonuse põhja raadius on $10,2 \pm 0,1$ cm ja moodustaja
 $44,6 \pm 0,1$ cm. Leida koonuse ruumala ja arvutada sel-
le viga.

2.244. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\text{kui } z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5.$$

2.245. Näidata, et

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 z = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2,$$

$$\text{kui } z = \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

2.246. Näidata, et

$$\left(x \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 s = 2,$$

$$\text{kui } s = \ln(ax - bt).$$

2.247. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y}$$

$$\text{kui } z = \frac{xy}{x - y}.$$

2.248. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\text{kui } z = x^y.$$

- 2.249. Leida koonuse $x^2 + y^2 = z^2$ normaali võrrandid punktis (3; 4; 5). Millises koonuse punktis normaal pole määratud?
- 2.250. Leida pinna $z = x^2 + 2y^2$ puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis, kus $x = y = 1$.
- 2.251. Leida pinna $z = xy$ (hüperboolne paraboloid) puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis (1; 2; 2).
- 2.252. Leida võrrand tasandile, mis puudutab pinda $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ ja on paralleelne tasandiga $x + y - z = 0$.
- 2.253. Leida funktsiooni $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ gradient punktis (1; 1; 2).
- 2.254. Avaldada funktsioonide $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ gradiendid ja leida punktid, kus gradiendid on risti.
- 2.255. Leida funktsiooni $z = \arctan \frac{y}{x}$ tuletis punktis (1; 1) suunas, mis viib sealt punkti (5; -2).
- 2.256. Leida funktsiooni $z = x^2 + y^2$ tuletis punktis (1; 1) suunas, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurgaga 30° .
- 2.257. Arvutada funktsiooni $u = x^2 y^2 z^2$ tuletis punktis (1; -1; 3) suunas, mis viib sealt punkti (0; 1; 1).
- 2.258. Leida funktsiooni ekstreemumkohad:
 a) $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$,
 b) $z = \frac{x}{2} + 2xy + \frac{y}{2} - 4x - 5y$,
 c) $z = e^x (x^2 + y^2)$,
 d) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
- 2.259. Leida funktsiooni $z = xy(x + y + 1)$ suurim ja vähim väärtus kinnises piirkonnas, mis on piiratud joontega $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$ ja $y = -\frac{3}{2}$.
- 2.260. Leida funktsiooni $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ suurim ja vähim väärtus kinnises kolmnurgas, mis on piiratud koordinaattelgedega ja sirgedega $x + y + 5 = 0$.
- 2.261. Uurida funktsiooni $z = xy$ ekstreemumite suhtes, kui $x^2 + y^2 = 2a^2$.

- 2.262. Urida funktsiooni $z = x^m + y^m$ ($m > 1$) ekstreemumite suhtes, kui $x + y = 2$ ($x > 0, y > 0$).
- 2.263. Leida suurima ruumalaga risttahukas, mille pindala on S.
- 2.264. Poolkerasse raadiusega R kujutada suurima ruumalaga risttahukas.
- 2.265. Läbi punkti $(a; b; c)$ on kujutatud tasand nii, et koordinaattasanditega ja selle tasandiga määratud tetraeedri ruumala on vähim. Leida kujutatud tasandi võrrand.
- 2.266. Leida tasandil $3x - 2z = 0$ punkt, mille kauguste ruutude summa punktideni $A(1; 1; 1)$ ja $B(2; 3; 4)$ oleks vähim.

13. Diferentsiaalvõrrandid

- 1.267. $y' - 2x = 0$.
- 1.268. $yy' - x = 0$.
- 1.269. $y' + 2x = 5$.
- 1.270. $yy' + x = 0$.
- 1.271. $xy' + y = 0$
- 1.272. $x(yy' - x + 1) = -1$.
- 1.273. $(x + 1)dy + (2 - y)dx = 0$.
- 1.274. $y'x^3 = 2y$.
- 1.275. $(x - y)y' dx = x^2 dy$.
- 1.276. $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$.
- 1.277. $xyy' = x^2 + y^2$.
- 1.278. $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$.
- 1.279. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2}}{x} - \frac{y}{x} + 1$.
- 1.280. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
- 1.281. $y' - \frac{3y}{x} = x$.
- 1.282. $x^2 y' = y^2 + xy$.
- 1.283. $\frac{dy}{dx} - y = x^2$.
- 1.284. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$.

$$1.285. y' - y \cos x = x^2 e^{\sin x}.$$

$$1.286. x e^{x y'} + y e^x = 1.$$

$$1.287. y' = \frac{y+1}{x}.$$

$$1.288. y' x + y = -x y^2.$$

$$1.289. y' = \frac{x^2 + x y + y^2}{x^2}.$$

$$1.290. y' + 2y = 4x.$$

$$1.291. y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

$$1.292. y' + y = x.$$

Ül. 1.293 - 1.298 leida erilahend.

$$1.293. y y' + x = 0, y(2) = 4.$$

$$1.294. \frac{dy}{dx} = e^{x+y}, y(0) = 0.$$

$$1.295. x y' + y - e^x = 0, y(a) = b.$$

$$1.296. x^2 y' + y^2 = 0, y(-1) = 1.$$

$$1.297. x y' - \frac{y}{x+1} = x, y(0) = 1.$$

$$1.298. x y \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(1) = \sqrt{2}.$$

$$1.299. \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \cos^2 x = 1.$$

$$1.300. x y'' = 1 + x^2.$$

$$1.301. y'' (x-1) = y'.$$

$$1.302. y'' x \ln x = y'.$$

$$1.303. x y'' = y'.$$

$$1.304. y'' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$1.305. x^2 y'' + x y' = 1.$$

$$1.306. y y'' + y'^2 = y'.$$

$$1.307. x y'' = 1.$$

$$1.308. 2y'' + 3y' = 2y.$$

$$1.309. y'' - 7y' = 0.$$

$$1.310. y'' + \frac{1}{2} y' + \frac{1}{16} y = 0.$$

$$1.311. y'' + 9y = 0.$$

$$1.312. y'' + 7y' + 17y = 0.$$

Ül. 1.313 - 1.315 leida erilahend.

$$1.313. 3y'' = 5y', y(0) = 2, y'(0) = \frac{5}{3}.$$

$$1.314. y'' = 5y - 4y', y(-1) = 0, y'(-1) = 1.$$

$$1.315. y'' = 2(3y' - 5y), y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

$$1.316. y'' - y = 5x + 2.$$

$$1.317. y'' - 3y' + 2y = x^2.$$

$$1.318. y'' - 2y' - 3y = e^{-x}.$$

$$1.319. y'' + 3y' + 2y = 2 + e^x.$$

$$1.320. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}.$$

Ül. 1.321 - 1.322 leida erilahend.

$$1.321. y'' - 2y' + y = \frac{e^{-x}}{2}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$1.322. y'' + y = 4x \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

* * *

$$2.267. \frac{dy}{dx} = 1.$$

$$2.268. ydy + xdx = 0.$$

$$2.269. y' + 2x = 0.$$

$$2.270. xy' - y = 0.$$

$$2.271. ydx + xdy = 0.$$

$$2.272. y(x-1)y' - \frac{1}{y+1} = 0.$$

$$2.273. (1+y)dx + (x-1)dy = 0.$$

$$2.274. yy' = \frac{1-2x}{y}.$$

$$2.275. (x+y)dx + xdy = 0.$$

$$2.276. xy^2dy = (x^3 + y^3)dx.$$

$$2.277. (x^2 - y^2) dy = xydx$$

$$2.278. y' - \frac{y}{x} = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$2.279. xdy - ydx = ydy.$$

$$2.280. y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

$$2.281. y' + \frac{y}{x} = x.$$

$$2.282. x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$

$$2.283. y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

$$2.284. y^2 + x^2y' = xyy'.$$

$$2.285. -\frac{dy}{dx} - y \cot x = 2x \sin x.$$

$$2.286. \frac{dy}{dx} + 3x^2 y = e^{-x^3}.$$

$$2.287. y' - \frac{2y}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

$$2.288. (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

$$2.289. y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$2.290. y' + y \frac{1 - 2x}{x^2} = 1.$$

$$2.291. (y^2 - 3x^2)dy + xydx = 0.$$

$$2.292. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \cos x = 0.$$

Ül. 2.293 - 2.298 leida erilahend.

$$2.293. xy' - y = 0, x = -2, y = 4.$$

$$2.294. y^2 \frac{dy}{dx} + 2x = 1, y(2) = -1.$$

$$2.295. 2y' \sqrt{x} = y, y|_{x=4} = 0.$$

$$2.296. x^2 \frac{dy}{dx} + (1 - 2x)y - x^2 = 0, y(-1) = 1.$$

$$2.297. y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0.$$

$$2.298. y' - xy = -e^{-x^2} y^3, y(0) = 1.$$

$$2.299. y'' = 4 \cos 2x.$$

$$2.300. y'' = x^2 + \ln x.$$

$$2.301. y'' = y' + 1.$$

$$2.302. y'' \tan x = y' + 1.$$

$$2.303. (1 + x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$2.304. x \frac{d^2 y}{dx^2} = 1.$$

$$2.305. xy'' + y' - 4x = 0.$$

$$2.306. x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

$$2.307. y'' \cos^2 x = 1.$$

$$2.308. y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$2.309. 3y'' - 4y' = 0.$$

$$2.310. 9y'' - 6y' + y = 0.$$

$$2.311. 2y'' + 5y = 0.$$

$$2.312. 2y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Ü1. 2.313. - 2.315 leida erilahend.

$$2.313. 3y'' - y' = 0, y(3) = 1, y'(3) = \frac{1}{3}.$$

$$2.314. y'' - 6y' + 9y = 0, y(1) = 0, y'(1) = e^3.$$

$$2.315. y'' = 8y' - 25y, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

$$2.316. y'' + 4y' + 3y = x.$$

$$2.317. y'' + 4y = 2x + 3.$$

$$2.318. y'' - 6y' + 13y = e^{-2x}.$$

$$2.319. y'' - 2y' + 4y = 2xe^{3x}.$$

$$2.310. y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Ü1. 2.321 - 2.322 leida erilahend.

$$2.321. y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$2.322. y'' + y' = \cos x + e^x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

14. Kahekordsed integraalid

$$1.323. \int_{-2}^3 dx \int_2^5 dy.$$

$$1.324. \int_{-2}^5 dx \int_0^{x^2} dy.$$

$$1.325. \int_1^4 dy \int_{-2}^{y+3} dx.$$

$$1.326. \int_0^a dx \int_0^x dy.$$

$$1.327. \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx.$$

Ü1. 1.328 - 1.330 leida integraali rajad, kui on antud integreerimispiirkonda määravad jooned oma võrranditega.

$$1.328. x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0.$$

$$1.329. y = x, y = 2x, x + y = 6.$$

$$1.330. y^2 - x^2 = 1, x^2 + y^2 = 9.$$

Ül. 1.331 - 1.332 määrata integraali rajad, kui on antud integreerimispiirkonda määravad võrratused.

$$1.331. x^2 + y^2 < 1, x - y < 1, x \geq 0.$$

$$1.332. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$$

Ül. 1.333 - 1.336 leida kahekordse integraali abil kujundi pindala, kui on antud seda kujundit piiravate joonte võrrandid.

$$1.333. y = x^2, 4y = x^2, y = 4.$$

$$1.334. y = x^2, y = x + 2.$$

$$1.335. xy = 1, xy = 8, y^2 = x, y^2 = 8x.$$

$$1.336. y = \sin x, y = \cos x, x = 0.$$

Ül. 1.337 - 1.338 skitseerida kujund, mille pindala on antud kahekordse integraaliga, ja leida integreerimise teel selle kujundi pindala. Muuta integreerimisjärjekorda ja leida veel kord sama kujundi pindala. Võrrelda tulemusi.

$$1.337. \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 dy.$$

$$1.338. \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy.$$

Ül. 1.339 - 1.342 arvutada kahekordse integraali väärtus, kui integreerimispiirkonnaks on võrratusega määratud ristkülik.

$$1.339. \iint_{(D)} xy \, dx \, dy, \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

$$1.340 \iint_{(D)} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, \quad D: 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$1.341. \iint_{(D)} \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \quad D: 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$1.342. \iint_{(D)} x^2 y e^{xy} dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Ül. 1.343 - 1.344 minna üle polaarkoordinaatidele ja seejärel arvutada kahekordse integraali väärtus.

$$1.343. \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$$

$$1.344. \iint_{(D)} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy, \quad D \text{ on ringi } x^2+y^2=R^2 \text{ sisepiirkond.}$$

Ül. 1.345 - 1.349 arvutada antud pindadega piiratud keha ruumala.

$$1.345. z = x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$1.346. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$1.347. z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = 1, \quad y = 2x, \quad y = 6 - x.$$

$$1.348. z = \frac{y^2}{2}, \quad 2x + 3y - 12 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$1.349. 2y^2 = x, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad z = 0.$$

* * *

$$2.323. \int_0^{10} dx \int_{-3}^{-1} dy.$$

$$2.324. \int_1^3 dx \int_0^{2-x} dy.$$

$$2.325 \int_{-3}^1 dy \int_y^{2y+1} dx.$$

$$2.236. \int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy.$$

$$2.327. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{\sqrt{y}}{x} dy.$$

Ül. 2.328 - 2.330 leida integraali rajad, kui on antud integreerimispiirkonda määravad jooned oma võrranditega.

$$2.328. y = x, y = x + 3, y = -2x + 1, y = -2x + 5.$$

$$2.329. x = 0, y = 0, x + y = 2.$$

$$2.330. y = x^2 \text{ ja } y = \sqrt{x}.$$

Ül. 2.331 - 2.332 määrata integraali rajad, kui on antud integreerimispiirkonda määravad võrratused.

$$2.331. (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4.$$

$$2.332. y - 2x \leq 0, 2y - x \geq 0, xy \leq 2.$$

Ül. 2.333 - 2.336 leida kahekordse integraali abil kujundi pindala, kui on antud seda kujundit piiravate joonte võrrandid.

$$2.333. y = \ln x, x - y = 1, y = -1.$$

$$2.334. y^2 = 4 + x, x + 3y = 0.$$

$$2.335. y = x^2, 4y = x^2, x = \pm 2.$$

$$2.336. xy = 4, x = y, x = 4.$$

Ül. 2.337 - 2.338 skitseerida kujund, mille pindala on antud kahekordse integraaliga, ja leida integreerimise teel selle kujundi pindala. Muuta integreerimisjärjekorda ja leida veel kord sama kujundi pindala. Võrrelda tulemusi.

$$2.337. \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy.$$

$$2.338. \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx.$$

Ül. 2.339 - 2.342 arvutada kahekordse integraali väärtus, kui integreerimispiirkonnaks on võrratustega määratud ristkülik.

$$2.339. \iint_{(D)} e^{x+y} dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$2.340. \iint_{(D)} \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}, \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$2.341. \iint_{(D)} x \sin(x+y) dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$2.342. \iint_{(D)} x^2 y \cos(xy^2) dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Ül. 2.343 - 2.344 minna üle polaarkoordinaatidele ja seejärel arvutada kahekordse integraali väärtus.

$$2.343. \iint_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$2.344. \iint_{(D)} \arctan \frac{y}{x} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \leq x\sqrt{3}.$$

Ül. 2.345 - 2.349 arvutada antud pindadega piiratud keha ruumala.

$$2.345. z = x + y + a, \quad y^2 = ax, \quad x = a, \quad z = 0, \quad y = 0 \quad (y > 0).$$

$$2.346. x + y + z = 6, \quad 3x + y = 6, \quad 3x + 2y = 12, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$2.347. z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$2.348. x + z = 6, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0.$$

$$2.349. z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

15. Kolmekordsed integraalid

$$1.350. \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz.$$

$$1.351. \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x + y + z) dz.$$

Ül. 1.352 - 1.353 arvutada antud pindadega piiratud keha ruumala.

$$1.352. z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2.$$

$$1.353. z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x^2, y = x.$$

Ül. 1.354 - 1.355 lahendamisel kasutada üleminekut kas silindrilistele või sfäärilistele koordinaatidele.

$$1.354. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$$

$$1.355. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz.$$

* * *

$$2.350. \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz dz.$$

$$2.351. \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^3 z dz.$$

Ül. 2.352 - 2.353 arvutada antud pindadega piiratud keha ruumala.

$$2.352. z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1.$$

2.353. $z = \ln(x + 2)$, $z = \ln(6 - x)$, $x = 0$, $x + y = 2$,
 $x - y = 2$.

Ül. 2.354 - 2.355 lahendamisel kasutada üleminekut kas sfäärilistele või silindrilistele koordinaatidele.

$$2.354. \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz.$$

$$2.355. \iiint_{(\Omega)} (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

$\Omega : z \geq 0, r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$

16. Joonintegraalid

1.356. $\int_{(L)} \frac{ds}{x - y}$, kus L on punktide A(0; -2) ja B(4; 0)

vaheline lõik sirgel $y = \frac{1}{2}x - 2$.

1.357. $\int_{(L)} xy ds$, kus L on sirgete $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$,
 $y = 2$ poolt moodustatud ristküliku rajajoon.

1.358. $\int_{(C)} (x^2 + y^2) ds$, kus C on ringjoon $x = a \cos t$,
 $y = a \sin t$.

1.359. $\int_{(C)} \sqrt{2y} ds$, kus C on tsükloidi $x = a(t - \sin t)$,
 $y = a(1 - \cos t)$ esimene kaar.

1.360. $\int_{(L)} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, kus L on krüvijoone $x = a \cos t$,
 $y = a \sin t$, $z = bt$ ja $0 \leq t \leq 2\pi$.

1.361. Leida tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$,
 kus $0 \leq t \leq 2\pi$, kaare raskuskese.

1.362. Leida esimeses veerandis asuva ellipsi kaare mass, kui
 ellipsi võrrand on: $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ ja massi
 lineaarne tihedus $\mu = y$.

- 1.363. $\int_L 2xy \, dx - x^2 \, dy$, kus L on punkti $O(0;0)$ punktiga $A(2;1)$ ühendav sirglõik.
- 1.364. $\int_L x \, dy$, kus L on koordinaattelgedega ja sirgega $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ määratud kolmnurga kontuur positiivses suunas.
- 1.365. $\int_L (x^2 - y^2) \, dx$, kus L on parabooli $y = x^2$ kaar punktist $(0;0)$ kuni punktini $(2;4)$.
- 1.366. $\int_L (x^2 + y^2) \, dy$, kus L on sirgete $x = 1$, $y = 1$, $x = 3$, $y = 5$ poolt moodustatud ristküliku kontuur positiivses suunas.
- 1.367. $\int_L 2xy \, dx - x^2 \, dy$, kus L on murdjoon, mille esimene lõik ühendab punkte $O(0;0)$ ja $B(2;0)$ ja teine lõik punkte $B(2;0)$ ja $A(2;1)$.
- 1.368. $\int_L y \, dx - x \, dy$, kus L on ellips $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ positiivses suunas.
- 1.369. $\int_C x \, dx + y \, dy + (x + y - 1) \, dz$, kus C on sirglõik $A(1;1;1)$ punktini $B(2;3;4)$.
- 1.370. Arvutada töö, mille teeb jõud $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$, viies punkti massiga m punktist $O(0; 0)$ punkti $A(1;1)$
- a) neid ühendavat sirget mööda;
 b) mööda punkte $O(0;0)$, $B(1;0)$ ja $A(1;1)$ ühendavat murdjoont.
- Ül. 1.371 - 1.372 lahendada Green'i valemi abil.
- 1.371. $\oint_L (1 - x^2) y \, dx + x(1 + y^2) \, dy$, kus L on ringjoon $x^2 + y^2 = R^2$.

- 1.372. $\oint_{(L)} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, kus L on ringjoon
 $x^2 + y^2 = ax$.
- 2.356. $\int_{(L)} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, kus L on punkte $O(0;0)$ ja $A(1;2)$
 ühendav sirglõik.
- 2.357. $\int_{(C)} (x + y) ds$, kus C on punktidega $O(0;0)$, $A(1;0)$ ja
 $B(0;1)$ määratud kolmnurga rajajoon.
- 2.358. $\int_{(L)} (x^2 + y^2) ds$, kus L on kõver $x = a(\cos t + t \sin t)$,
 $y = a(\sin t - t \cos t)$ ja $0 \leq t \leq 2\sqrt{1}$.
- 2.359. $\int_{(L)} y^2 ds$, kus L on tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y =$
 $a(1 - \cos t)$ esimene kaar.
- 2.360. $\int_{(C)} \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$, kus C on kruvijoone $x = a \cos t$, $y =$
 $a \sin t$, $z = at$ ja $0 \leq t \leq 2\sqrt{1}$.
- 2.361. Leida raskuskese homogeense kõvera kaarele $x = e^t \cos t$,
 $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, kui $-\infty \leq t \leq 0$.
- 2.362. Leida kõvera $y = \ln x$ kaare mass, kui kaare otspunktide
 abstsissid on $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{8}$ ning joone tihedus on igas
 punktis võrdne tema abstsissi ruuduga.
- 2.363. $\int_{(L)} 2xy dx - x^2 dy$, kus L on punkti $O(0;0)$ punktiga
 $A(2;1)$ ühendav parabooli $y = \frac{x^2}{4}$ kaar.
- 2.364. $\int_{(C)} xdy$, kus C on sirge $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ lõik, alates tema
 lõikepunktist x-teljega kuni lõikepunktini y-teljega.
- 2.365. $\int_{(C)} y dx$, kus C on sirgete $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 4$
 poolt moodustatud ristküliku kontuur positiivses suu-
 nas.

- 2.366. $\int y dx + x dy$, kus L on veerand ringjoonest $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, kui $t_1 = 0$ ja $t_2 = \frac{\pi}{2}$.
- 2.367. $\int \cos y dx - \sin x dy$, kus C on punkti $A(2; -2)$ punktiga $B(-2; 2)$ ühendav sirglõik.
- 2.368. $\int \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$, kus L on ringjoon $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ positiivses suunas.
- 2.369. $\int yz dx + z\sqrt{R^2 - y^2} dy + xy dz$, kus L on krüvijoone $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ kaar punktist, kus kõver lõikab tasandit $z = 0$, punktini, kus kõver lõikab tasandit $z = a$.
- 2.370. Arvutada töö, mille teeb jõud $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$, viies punkti massiga m punktist $O(0; 0)$ punkti $A(1; 1)$
 a) parabooli $y = x^2$ kaart mööda;
 b) mööda punkte $O(0; 0)$, $C(0; 1)$ ja $A(1; 1)$ ühendavat murdjoont.
- 2.371. $\oint 2(x^2 + y^2) dx + (x + y^2) dy$, kus L on punktidega $A(1; 1)$, $B(2; 2)$ ja $C(1; 3)$ määratud kolmnurga kontuur.
- 2.372. $\oint (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, kus C on ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

17. Read

Ü1. 1.373 - 1.377 esitada rea 4 esimest liiget.

$$1.373. a_n = \frac{1}{n+1}.$$

$$1.374. a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$1.375. a_n = \frac{n^2}{2n+1}.$$

$$1.376. a_n = \frac{n}{(n+1)!}.$$

$$1.377. a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

Ü1. 1.378 - 1.379 arvutada summa väärtus.

$$1.378. \sum_{n=1}^5 n.$$

$$1.379. \sum_{n=0}^3 (n+2)!$$

Ü1. 1.380 - 1.382 leida geomeetrilise rea summa.

$$1.380. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$1.381. 3 + (3-1) + \left(-\frac{4}{3} - 2\right) + \dots$$

$$1.382. 5 + \frac{2 \cdot 5 - 1}{2} + \dots$$

Ü1. 1.383 - 1.385 uurida rea koonduvust kas koonduvuse tarviliku tingimuse või võrdlustunnuse abil.

$$1.383. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$1.384. \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$$

$$1.385. \frac{3}{2} + \frac{5}{7} + \frac{7}{12} + \dots + \frac{2n+1}{5n-3} + \dots$$

Ü1. 1.386 - 1.390 uurida rea koonduvust d'Alembert'i koonduvustunnuse abil.

$$1.386. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

$$1.387. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}.$$

$$1.388. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}.$$

$$1.389. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots$$

$$1.390. \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$$

Ül. 1.391 - 1.393 uurida rea koonduvust Cauchy' tunnuse abil.

$$1.391. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

$$1.392. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}.$$

$$1.393. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Ül. 1.394 - 1.395 leida rea summa, lahutades enne üldliikme osamurdudeks.

$$1.394. a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$1.395. a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Ül. 1.396 - 1.397 selgitada, kas rida a) koondub absoluutselt; b) koondub, aga mitte absoluutselt; c) hajub.

$$1.396. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}.$$

$$1.397. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}.$$

Ül. 1.398 - 1.400 leida rea koonduvuse piirkond.

$$1.398. 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

$$1.399. x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$1.400. \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} + \dots + \sin \frac{x}{2^n} + \dots$$

* * *

Ü1. 2.373 - 2.377 esitada rea 4 esimest liiget.

$$2.373. a_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$2.374. a_n = \frac{n}{n+1}.$$

$$2.375. a_n = \frac{3n}{2-n^2}.$$

$$2.376. a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}.$$

$$2.377. a_n = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)^n}.$$

Ü1. 2.378 - 2.379 arvutada summa väärtus.

$$2.378. \sum_{n=2}^5 (n-1)^2.$$

$$2.379. \sum_{n=-1}^3 \frac{n+1}{n+2}.$$

Ü1. 2.380 - 2.382 teisendada antud perioodiline kümnendmurd harilikuks murruks.

$$2.380. 0,(85).$$

$$2.381. 0,4(3).$$

$$2.382. 0,1\bar{3}(5).$$

Ü1. 2.383 - 2.385 uurida rea koonduvust kas koonduvuse tarviliku tingimuse või võrdlustunnuse abil.

$$2.383. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1+n^3}.$$

$$2.384. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$2.385. \sum_{n=1}^{\infty} (n - n - 1).$$

Ü1. 2.386 - 2.390 uurida rea koonduvust d'Alembert'i koonduvustunnuse abil.

$$2.386. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$2.387. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} .$$

$$2.388. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} .$$

$$2.389. \frac{1 \cdot 2}{7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{7^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7^3} + \dots .$$

$$2.390. 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots .$$

Ül. 2.391 - 2.393 uurida rea koonduvust Cauchy'tunnuse abil.

$$2.391. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

$$2.392. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3 + n^2} .$$

$$2.393. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} .$$

Ül. 2.394 - 2.395 leida rea summa, lahutades enne üldliikme osamurdudeks.

$$2.394. a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} .$$

$$2.395. a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} .$$

Ül. 2.396 - 2.397 selgitada, kas rida a) koondub absoluutselt; b) koondub, aga mitte absoluutselt; c) hajub.

$$2.396. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3} .$$

$$2.397. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} .$$

Ül. 2.398 - 2.400 leida rea koonduvuspiirkond.

$$2.398. x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots .$$

$$2.399. \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \dots + \frac{1}{1+x^n} + \dots .$$

$$2.400. \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots .$$

18. Tõenäosuse mõiste. Sündmuste summa ja korrutise

tõenäosus

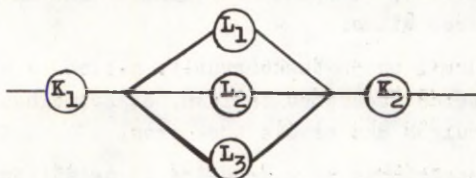
- 1.401. Sündmuseks A on kuue silma esiletulek täringu esimesel viskel, sündmuseks B kuue silma esiletulek täringu teisel viskel. Mis on nende sündmuste korrutiseks, summaks?
- 1.402. Tõnu, kelle käes olid piletid, lubas oodata Antsu ja Märti kino juures 5 minutit enne seansi algust. Leida sündmuste A ja M summa ning korrutis, kui sündmuseks A on Antsu tulek ja sündmuseks M Märdi tulek kokkulepitud ajal.
- 1.403. Tuhandest vastsündinust olid 517 poisid. Leida tüdrukute sünnisagedus.
- 1.404. Tehases toodeti päeva jooksul 5000 detaili, nendest 32 osutusid mittestandardseiks. Kui suur on standardsete toodete esinemissagedus selle päeva toodangus?
- 1.405. Korvis on kaht sorti õunu - sügisjoonikud ja kuldrenetid, kokku 60 õuna. Õuna juhuslikul võtmisel on kuldreneti saamise tõenäosus $\frac{1}{3}$. Kui palju on korvis sügisjoonikuid? Leida tõenäosus sügisjooniku saamiseks.
- 1.406. Leida tõenäosus selleks, et kahe täringu korraga viskamisel saadud silmade summa on suurem kui 10.
- 1.407. Urnis on 3 valget, 2 musta ja 5 punast kera. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud kera on
- a) punane,
 - b) mitte must.
- 1.408. Kastis on 10 punast, 5 sinist ja 15 valget kuuli. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud kuul on
- a) värviline,
 - b) sinine,
 - c) mitte punane,
 - d) punane või sinine.

- 1.409. Visatakse korraga kahte täringut. Kui suur on tõenäosus selleks, et saadakse
- kas 3, 7 või 12 silma;
 - silmade arv, mis on väiksem kui 5;
 - kas 10, 11 või 12 silma?
- 1.410. Müüdi 1000 loteriipiletit, millest ühele langeb võit 500 rbl., kümnele ä 100 rbl., viiekümnele ä 20 rbl. ja sajale ä 5 rbl. Leida tõenäosus selleks, et ühe pileti ostnud kodanik
- võidab,
 - võidab mitte vähem kui 20 rbl.
- 1.411. Leida tõenäosus selleks, et tähti T,O,R,P,S juhuslikult ritta ladudes saadakse sõna S P O R T.
- 1.412. Leida tõenäosus selleks, et tähti L,T,U,U juhuslikult ritta seades saadakse sõna T U U L.
- 1.413. Urnist, milles on 5 valget ja 4 musta kuuli, võetakse juhuslikult üks kuul, pannakse see tagasi ja võetakse veel üks kuul. Kui suur on tõenäosus selleks, et mõlemad kuulid on mustad? Leida kahe musta kuuli saamise tõenäosus juhul, kui kuuli tagasi ei asetata.
- 1.414. Täringut visatakse kaks korda. Leida tõenäosus selleks, et esimesel viskel saadi kuus silma ja teisel neli.
- 1.415. Kui suur on tõenäosus selleks, et juhuslikult kirjutatud murd, mille lugejaks ja nimetajaks on kahekohalised täisarvud, taandub kahega?
- 1.416. Kahel laskuril on märklaua tabamise tõenäosused vastavalt 0,7 ja 0,8. Kui suur on tõenäosus selleks, et nad mõlemad tabavad esimese lasuga?
- 1.417. Urnis on 3 valget ja 7 musta kuuli. Leida tõenäosus selleks, et järjest valikuta võetud 2 kuuli on mõlemad valged.
- 1.418. Esimeses korvis on 4 valget ja 2 musta palli, teises

- 3 valget ja 5 musta palli. Kummastki korvist võetakse juhuslikult 1 pall. Leida tõenäosus selleks, et
- mõlemad pallid on valged,
 - mõlemad pallid on mustad,
 - üks pall on valge, teine must.
- 1.419. Igale 30-st ühesugusest žetoonist kirjutatakse üks kahekohalistest arvudest 11-st kuni 40-ni. Žetoonid segatakse ja võetakse juhuslikult 1 žetoon. Leida tõenäosus selleks, et sellel žetoonil on arv, mille teguriks on kas 2 või 3.
- 1.420. Münti visatakse järjest 2 korda. Kui suur on tõenäosus selleks, et vapp tuleb esile kas esimesel või teisel viskel?
- 1.421. Nähtuse esiletuleku tõenäosus iga katse korral on 0,4. Kui suur on tõenäosus selleks, et nelja katse korral tuleb nähtus esile vähemalt üks kord?
- 1.422. Märgi tabamise tõenäosus ühe lasu korral on 0,2. Mitu korda tuleb tulistada, et tõenäosus tabamiseks vähemalt ühel korral oleks mitte väiksem kui 0,6?
- 1.423. Kaks üliõpilast lahendavad eraldi sama ülesannet. Kui suur on tõenäosus selleks, et ülesanne nende poolt lahendatakse, kui esimene neist lahendab ülesande tõenäosusega 0,8 ja teine tõenäosusega 0,7?
- 1.424. Ühes kastis on 6 musta ja 12 valget, teises 5 musta ja 15 valget kuuli. Mõlemast kastist võetakse üks kuuli. Leida tõenäosus selleks, et neist vähemalt üks on valge.
- 1.425. Merehädas oleva laeva meeskonnale heidetakse kahelt lennukilt langevarju abil varustust. Tõenäosused selleks, et varustus langeb laevale, on vastavalt 0,8 ja 0,7. Kui suur on tõenäosus selleks, et vähemalt ühelt lennukilt heidetud varustus langeb laevale?
- 1.426. Teate ühest punktist teise toimetamiseks saadeti teineteisest sõltumatult teele 2 käskjalga. Esimese käsk-

jala sihtpunkti jõudmise tõenäosus on 0,9, teisel 0,8. Leida tõenäosus selleks, et teade jõuab päralt.

- 1.427. Üks lennuk, mis teeb põllul umbrohutõrjet, suudab umbrohu hävitada tõenäosusega 0,7, teine lennuk tõenäosusega 0,8. Kui suur on umbrohu hävitamise tõenäosus, kui põllul teevad umbrohutõrjet mõlemad lennukid?
- 1.428. Kolm lampi on lülitatud järjestikku. Pinge tõstmisel on pirnide läbipõlemise tõenäosused 0,3; 0,2 ja 0,2. Leida tõenäosus selleks, et pärast pingetõstmist jäävad kõik lambid põlema.
- 1.429. Vooluring koosneb kolmest järjestikusest elemendist, millede katkestuse tekkimise tõenäosused on 0,1; 0,2 ja 0,3. Leida tõenäosus selleks, et vooluringis ei teki katkestust.
- 1.430. Mootorratturite võidusõidurajal on teesosal AB 12 takistust, kusjuures tõenäosus sõidu katkestamiseks iga tõkke juures on 0,1. Tõenäosus selleks, et mootorrattur läbib järgmise teesosa BC, on 0,7. Kui suur on tõenäosus selleks, et mootorrattur ei peatu kogu raja AC ulatuses ühtki korda?
- 1.431. Vooluahel on moodustatud järgneva skeemi kohaselt



Aja T jooksul on elementide K_1 , K_2 , L_1 , L_2 ja L_3 riknemise tõenäosused vastavalt 0,1; 0,2; 0,4; 0,7 ja 0,5. Leida voolu katkemise tõenäosus aja T vältel.

- 1.432. Urnist, milles on 5 valget ja 7 musta kera, võetakse järjestikku 3 kera. Leida tõenäosus selleks, et kolmandana võetud kera on valge.
- 1.433. Leida tõenäosus selleks, et neljakohalises arvus ei

ole korduvaid numbreid.

- 1.434. Telefoninumber koosneb viiest numbrist. Leida tõe-
nos selleks, et
- a) kõik numbrid on erinevad,
 - b) kõik numbrid on paaritud.
- 1.435. On antud 5 pulka, millede pikkused on 1, 3, 5, 7 ja 9
ühikut. Leida tõe-
nos selleks, et nende hulgast ju-
huslikult võetud kolmest pulgast saab moodustada kolm-
nurga.
- 1.436. Kastis on 3 läbipõlenud ja 7 korras elektrikipni. Võe-
takse huupi järjest 3 pirni ning neid tagasi ei aseta-
ta. Leidke tõe-
nos selleks, et
- a) võetakse vähemalt 1 korras pirn,
 - b) kõik 3 pirni on korras, kui esimene võetud pirni-
dest on korras.
- 1.437. Arvud 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 ja 13 kirjutatakse ühekau-
pa kaheksale ühesugusele kaardile. Võetakse huupi 2
kaarti. Leida tõe-
nos selleks, et saadud kaartidel
olevad arvud on ühisteguriga.
- 1.438. Dominokomplektist võetakse juhuslikult 5 kivi. Leida
tõe-
nos selleks, et nende seas leidub vähemalt ühel
kivipoolel kuus silma.
- 1.439. Laboratooriumis on 36 taskuarvutit, millest 4 ei ole
töökorras. Leida tõe-
nos selleks, et kolme huupi võe-
tud arvuti hulgast üks ei ole töökorras.
- 1.440. Instituudi õpperühmas on 2 mees- ja 18 naisüliõpilast.
Nimekirja järgi kutsutakse nendest 6 esimest dekaani
juurde. Leida tõe-
nos selleks, et kutsutute hulgast
on 5 naisüliõpilast.
- 1.441. Koosolekust võtab osa 20 meest ja 5 haist, kes valivad
endi hulgast kolmeliikmelise delegatsiooni. Leida tõe-
nos selleks, et delegatsiooni kuulub 2 naist ja 1
mees.

- 1.442. Kaubasaadetises on 4 kõrgema ja 6 esimese sordi toodet. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgast huupi võetud viie toote hulgas on 2 kõrgema sordi toodet.
- 1.443. Instituudi õpperühmas on 8 mees- ja 12 naisüliõpilast, neist 6 kutsutakse juhusliku valiku abil eksamiruumi. Leida tõenäosus selleks, et sisenejate hulgas on 4 naisüliõpilast.
- 1.444. Kastist, milles on 10 valget ja 30 musta kuuli, võetakse huupi 5 kuuli. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgas on 3 musta.
- 1.445. Kaardipakis on 36 kaarti. Nende hulgast võetakse huupi kaks kaarti. Leida tõenäosus selleks, et saadud kaardid on
- mõlemad poti mastist,
 - samast mastist,
 - sama tugevusega,
 - 7 ja äss.
- 1.446. Kaardipakist, milles on 52 kaarti, võetakse juhuslikult 3 kaarti. Leida tõenäosus selleks, et saadud kaartide hulgas on
- poti äss,
 - 1 kuningas ja 1 äss,
 - ainult 1 äss,
 - kõik erinevatest mastidest,
 - igast mastist üks,
 - punaseid ja musti kaarte.
- 1.447. 17 üliõpilast suunatakse praktikale. Neile on eraldatud Kohtla-Järvel 6, Kiviõlis 7 ja Kundas 4 kohta. Leida tõenäosus selleks, et kolm ühes toas elavat üliõpilast saavad praktikale samasse linna, kui praktikakohtade valik toimub juhuslikult.
- 1.448. Pimedal pööningul kuivab 2 paari halle, 6 paari musti ja 4 paari kirjused sokke. Mitu sokki tuleb võtta, et nende seas oleks vähemalt 1 paar musti sokke? Arvutada tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud 2 sokki

- a) on musta värvi,
- b) on sama värvi,
- c) ei ole sama värvi.

- 1.449. Urnis on 4 kera arvudega 1, 2, 3 ja 123. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et sellel keral on number k ($k = 1, 2, 3$). Kas sündmused A_1, A_2, A_3 on sõltumatud?
- 1.450. Urnis on 5 kera vastavalt arvudega 1, 2, 3, 12 ja 123. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et võetud keral on number k ($k = 1, 2, 3$). Kas sündmused A_1, A_2, A_3 on sõltuvad?
- 1.451. Kas sellest, et sündmus A sõltub sündmusest B , järeldub ka sündmuse B sõltuvus sündmusest A ?

* * *

- 2.401. Lauamängu võib alustada, kui täringu viskamisel saadakse üks silm (sündmus A) või kuus silma (sündmus B). Mis on nende sündmuste summaks ja korrutiseks?
- 2.402. Sündmuseks A on märklaua tabamine esimese lasuga, sündmuseks B märklaua tabamine teise lasuga ja sündmuseks C märklaua tabamine kolmanda lasuga. Mis on nende sündmuste korrutiseks ja summaks?
- 2.403. Esimese nelja tuhande naturaalarvu hulgas on 551 algarvu. Leida algarvude esinemise sagedus.
- 2.404. XVIII sajandil elanud Prantsuse looduseuuriija Buffon viskas münti 4040 korda. Vapp tuli esile 2048 korda. Leida kirja esiletuleku sagedus.
- 2.405. Kotikeses on 3 kahekümnekopikalist ja 7 kolmekopikalist. Sellest kotikesest võetakse juhuslikult üks raha ning seejärel veel teine. Esimene osutus kahekümnekopikaliseks. Kui suur on tõenäosus selleks, et ka teine raha on kahekümnekopikaline?
- 2.406. Kuup, mille kõik tahud on värvitud, saeti tuhandeks väikeseks kuubikeseks. Leida tõenäosus selleks, et

nende hulgast juhuslikult võetud kuubikesel

- a) on 2 värvitud tahku,
- b) on 3 värvitud tahku,
- c) pole ühtki värvitud tahku,
- d) pole ühtki värvimata tahku.

2.407. Müüdi 10000 loteriipiletit. Võitude hulgas on 10 sajaurublalist, 100 kümnerublalist ja 1000 esemelist võitu. Kui suur on võitmise tõenäosus? Kui suur on mittevõitmise tõenäosus?

2.408. Karbis on 6 punast, 4 valget ja 5 sinist palli. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud pall on

- a) punane,
- b) valge,
- c) sinine,
- d) mitte punane,
- e) punane või valge.

2.409. Visatakse korraga kahte täringut. Kui suur on tõenäosus, et saadakse silmade arv, mis on

- a) jaguv 3-ga,
- b) jaguv kas 3 või 4-ga,
- c) suurem kui 8 ja väiksem kui 12.

2.410. Täring on valmistatud nii, et iga tahu esiletulek on võrdeline temal oleva silmade arvuga (näiteks 6 silma tuleb esile kolm korda sagedamini kui 2 silma). Kui suur on tõenäosus selleks, et ühel viskel saadakse paarisarv silmi?

2.411. Leida tõenäosus selleks, et tähti K, L, E, E juhuslikult ritta ladudes saadakse sõna L E E K.

2.412. Leida tõenäosus selleks, et tähti E, E, E, P, R, T juhuslikult ritta ladudes saame sõna P E E T E R.

2.413. Detailid pakitakse sajakaupa kastidesse. Kastitais detaile tunnistatakse praagiks, kui sealt juhuslikult võetud viiest detailist kas või üks osutub praagiks. Kui suur on tõenäosus selleks, et kast, milles on 5 %

- kõlbmatuid detaile, tunnistatakse praagiks?
- 2.414. Leida tõenäosus selleks, et antud kaubasaadetisest juhuslikult võetud toode osutub esimesse sorti kuuluvaks, kui on teada, et 4 % saadetisest on praak ja 75 % mittepraagilisest toodangust kuulub esimesse sorti.
- 2.415. Töökojas töötavad teineteisest sõltumatult 2 mootorit. Tõenäosus selleks, et tunni aja jooksul ei esine riket, on ühel mootoril 0,9, teisel - 0,85. Leida tõenäosus selleks, et mõlemad mootorid töötavad tunni aja jooksul häireteta.
- 2.416. Tõenäosus selleks, et tehase tootmisruumes tuleb nädala jooksul asendada üks elektripirn uuega, on 0,8, valmiskauba laoruumis aga 0,2. Kui suur on tõenäosus selleks, et nädala jooksul tuleb mõlemas ruumis üks elektripirn uuega asendada?
- 2.417. Detaili valmistamise tehnoloogias on 3 operatsiooni, kus praagi tekkimise tõenäosused on vastavalt 0,01, 0,02 ja 0,03. Võimalus praakdetaili saamiseks ühe operatsiooni puhul ei sõltu praagi esinemisest teistel operatsioonidel. Leida standardse toote saamise tõenäosus.
- 2.418. Täringut visatakse 2 korda. Leida tõenäosus selleks, et esimesel viskel saadakse 4, 5 või 6 silma ja teisel viskel 1, 2, 3 või 4 silma.
- 2.419. Visatakse kahte täringut. Leida tõenäosus selleks, et ühel neist tuleb 5 silma.
- 2.420. Raha viskamisel tuli 3 korda järjest vapp. Kui suur on tõenäosus selleks, et ka neljandal viskel tuleb vapp?
- 2.421. Raadiosignaali vastuvõtmise tõenäosus on 0,8. Leida tõenäosus selleks, et neli korda korratud signaal võetakse vähemalt üks kord vastu.
- 2.422. Märklaua tabamise tõenäosus on 0,6. Mitu korda tuleb tulistada, et tõenäosusega 0,99 on märklaua vähemalt üks kord tabatud?

- 2.423. Raha visatakse järjest 2 korda. Kui suur on tõenäosus selleks, et vapp tuleb esile kas esimesel või teisel või mõlemal viskel?
- 2.424. Kui suur on tõenäosus selleks, et kaardipakist (36 kaarti) huupi tõmmatud kaart on kas poti mastist või pilt (soldat, emand, kuningas)?
- 2.425. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud kahekohaline arv osutub jaguvaks kas 2, 5 või 10-ga.
- 2.426. Üliõpilasel on vaja sooritada eksam inglise keelest ja ajalooost. Inglise keele eksami sooritamise tõenäosus on tal 0,4, vähemalt ühe eksami sooritamise tõenäosus 0,6 ja mõlema eksami sooritamise tõenäosus 0,1. Kui suure tõenäosusega sooritab üliõpilane ajalooeksami?
- 2.427. Märki tabamise tõenäosus kolme lasu puhul on vastavalt 0,4, 0,5 ja 0,7. Leida tõenäosus selleks, et märki tabab
- a) üks laskudest,
 - b) vähemalt üks laskudest.
- 2.428. Detail valmistatakse nelja operatsiooniga. Praagi esinemise tõenäosused üksikutel operatsioonidel on vastavalt 0,02, 0,01, 0,02 ja 0,03. Leida standardse detaili esinemise tõenäosus eeldusel, et praaktoote saamine ühel operatsioonil ei sõltu teisest operatsioonist.
- 2.429. Krossirajal tuli mootorratturil läbida teelõik AB 10 takistusega, milledest igaühe juures oli võistluse katkestamise tõenäosus 0,1, ülejäänud teelõigu BC läbimise tõenäosus oli 0,7. Leida tõenäosus selleks, et mootorrattur läbis kogu võistlustarssi AC.
- 2.430. Abonent on unustanud telefoninumbris viimase numbriga ja valib selle juhuslikult. Leida tõenäosus selleks, et tal ei tule helistada mitte rohkem kui kolme kohta. Leida sama tõenäosus juhul, kui abonendile mee-

nub, et unustatud number on paaritu.

- 2.431. Tööpäeva lõpul peab autobaasi saabuma 3 sõiduauto, 7 furgonauto ja 10 tsisternauto. Autode tagasi-
jõudmise järjekord on juhuslik. Arvutada töönaosus selleks, et kolmandana saabunud auto on sõiduauto.
- 2.432. Kastis on 10 kahekümnekopikalist, 5 viieteistkümnekopikalist ja 2 kümnekopikalist raha. Juhuslikult võetakse sealt 6 münti. Kui suur on töönaosus selleks, et saadud rahasumma ei ületa 1 rubla?
- 2.433. Kümme inimest, nende hulgas üks abielupaar, istub pingil. Leida töönaosus selleks, et abikaasad istuvad kõrvuti, kui pingile istuti juhuslikus järjekorras.
- 2.434. n-liikmeline seltskond istub laua ümber, neist 2 on meile tuttavad. Kui suur on töönaosus selleks, et meie tuttavad istuvad kõrvuti, kui kohad laua ümber valiti juhuslikult?
- 2.435. Korbist, milles on 8 punast, 3 valget ja 9 sinist kuuli, võetakse juhuslikult 3 kuuli. Leida töönaosus selleks, et
- a) kõik võetud kuulid on punased,
 - b) kõik võetud kuulid on valged,
 - c) 2 võetud kuulidest on punased ja 1 valge,
 - d) vähemalt 1 võetud kuulidest on valge,
 - e) kuulid võeti järjekorras: punane, valge, sinine.
- 2.436. Urnist, milles on 4 valget, 5 musta ja 3 punast kuuli, võeti huupi 6 kuuli. Kui suur on töönaosus selleks, et võetuks osutuvad 2 valget, 3 musta ja 1 punane kuul?
- 2.437. Peenral kasvab 40 valgeõielist ja 90 roosaõielist astritaimet. Kui suur on töönaosus selleks, et juhuslikult võetud
- a) kolm taimet on roosaõielised,
 - b) kahest taimest üks on roosaõieline ja teine val-

geõieline,

- b) viiest taimest 2 on valgeõielised ja 3 roosaõielised.

- 2.438. Kastis on kolm paari musti ja 2 paari valgeid ühesuguseid kindaid. Leida tõenäosus selleks, et kaks huupi võetud kinnast moodustavad paari.
- 2.439. Kursusel on 30 noormeest ja 5 neidu. Eksamiruumi kutsutakse neist juhusliku valiku järgi 5 üliõpilast. Leida tõenäosus selleks, et kutsutute hulgas on üks neiu.
- 2.440. Instituudi õpperühmas on 11 mees- ja 8 naisüliõpilast. Eksamiruumi kutsutakse neist juhusliku valiku järgi 5. Leida tõenäosus selleks, et kutsutute hulgas on 2 naisüliõpilast.
- 2.441. Viieliikmelisse uurimiserühma kandideeris 7 meest ja 3 naist. Kui suur on tõenäosus selleks, et uurimiserühma võeti vähemalt üks naine, kui on teada, et komplekteerimine toimus loosimise teel?
- 2.442. Seltskond, milles on 5 meest ja 10 naist, jaotatakse juhuslikult viieks kolmeliikmeliseks rühmaks. Leida tõenäosus selleks, et igas rühmas on 1 mees.
- 2.443. Instituudi õpperühmas on 14 mees- ja 8 naisüliõpilast. Neist kutsutakse eksamiruumi juhusliku valiku järgi 5. Leida tõenäosus selleks, et sisenejate hulgas on vähemalt 1 naisüliõpilane.
- 2.444. 36 matkaja hulgas on 4 naist. Toiduvalmistajateks määrati huupi 3 inimest. Kui suur on tõenäosus selleks, et neist vähemalt 1 on naine?
- 2.445. Kaardipakist, milles on 52 kaarti, võetakse huupi 6 kaarti. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgas on
- poti äss,
 - iga masti esindajaid,
 - vähemalt 1 äss,
 - ainult 1 äss.

- 2.446. Kaardipakist, milles on 52 kaarti, võetakse huupi 5 kaarti. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgas on
- 4 ässa,
 - 4 ässa ja 1 kuningas,
 - 3 kümnet ja 2 soldatit,
 - 9, 10, soldat, emand ja kuningas,
 - 3 kaarti ühest mastist ja 2 mingist teisest mastist,
 - vähemalt 1 äss.
- 2.447. Asutuse töötajatele eraldati puhkekodudesse L, P ja V vastavalt 5, 4 ja 3 tuusikut. Leida tõenäosus selleks, et tuusikusaajad A ja B sõidavad samasse puhkekodusse, kui on teada, et tuusikud jaotati tuusikusaajate vahel juhuslikult.
- 2.448. Praktikakohti oli üliõpilastele Tartus 20, Pärnus 5 ja Tallinnas 10. Leida tõenäosus selleks, et kolm üliõpilast A, K ja L satuvad praktikale samasse linna.
- 2.449. Urnis on 7 kera vastavalt arvudega 3, 5, 7, 35, 37, 57 ja 357. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et võetud keral on number k ($k = 3, 5, 7$). Kas sündmused A_3, A_5, A_7 on sõltuvad?
- 2.450. Urnis on 8 kera vastavalt arvudega 1, 2, 3, 12, 13, 20, 30 ja 123. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et saadud keral on number k ($k = 1, 2, 3$). Kas sündmused A_1, A_2, A_3 on sõltumatud?
- 2.451. Urnis on v valget ja m musta kuuli. Sündmuseks A on musta kuuli saamine esimesel võtmisel, sündmuseks B valge kuuli saamine teisel võtmisel (esimest tagasi ei pandud). Kas sündmused A ja B on sõltuvad või sõltumatud?

19. Täistõenäosuse valem. Bayesi valem

- 1.452. Tõenäosused selleks, et kahel tööpingil valmistatud detailid osutuvad mittekvaliteetseteks, on vastavalt 0,2 ja 0,3. Esimese pingi töökiirus on 2 korda suurem kui teisel. Kui suur on tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud detail on kvaliteetne?
- 1.453. Urnist, milles on 10 musta ja 5 valget kuuli, võetakse pimesi kuule ühekaupa. Kui suur on tõenäosus selleks, et teine võetud kuulidest on valge?
- 1.454. Ühes turismigrupis on 3 võõrkeele valdajat ja 2 mittevaldajat. Teises turismigrupis on neid vastavalt 4 ja 4. Esimesest grupist saadeti valikuta teise üks turist. Leida tõenäosus selleks, et nüüd teisest turismigrupist huupi valitud turist on võõrkeele valdaja.
- 1.455. Esimeses kastis on 5 standardset ja 2 defektiga detaili, teises 4 standardset ja 4 defektiga detaili. Esimesest kastist pannakse üks juhuslikult võetud detail teise kasti. Leida tõenäosus selleks, et seejärel teisest kastist huupi võetud detail on standardne.
- 1.456. Lattu saabusid õmblustooted, millest 20 % on valmistatud vabrikus K, 30 % vabrikus L ja 50 % vabrikus M. Tõenäosused, et vabrikutes valmistatud esemed kuuluvad esimesse sorti, on vastavalt 0,75, 0,9 ja 0,8. Leida tõenäosus selleks, et huupi võetud ese on esimesest sordist.
- 1.457. Kauplusesse saabusid tooted, millest 25 % oli valmistatud vabrikus nr. 1, 35 % vabrikus nr. 2 ja 40 % vabrikus nr. 3. Nendes vabrikutes valmistatud tooted kuulusid esimesse sorti vastavalt tõenäosustega 0,75, 0,9 ja 0,8. Leida tõenäosus selleks, et kauplusest huupi valitud toode kuulub esimesse sorti.
- 1.458. Kaks üliõpilast läksid eksamile. Üks oli 50-st kordamisküsimusest ära õppinud 45, teine 40. Nad kumbki võt-

sid pileti, kus oli 3 küsimust. Kui suur oli töönaosus selleks, et esimesena vastama kutsutud üliõpilane oskas vastata kõigile pileti küsimustele?

- 1.459. Kastis on 6 tehases nr. 1 ja 9 tehases nr. 2 valmistatud detaili. Monteeriija võtab kastist huupi 3 detaili. Leida töönaosus selleks, et teisena võetud detail on valmistatud tehases nr. 2.
- 1.460. Esimeses kastis on 2 rõngastatud ja 5 rõngastamata lindu, teises 12 rõngastatud ja 3 rõngastamata lindu. Juhuslikult võetud lind osutus rõngastatuks. Leida töönaosus selleks, et lind võeti esimesest kastist.
- 1.461. Metsas eksinu jõudis lagendikule, kust väljus 5 teed. On teada, et metsast väljapääsemise töönaosus ühe tunni jooksul on erinevatel teedel vastavalt 0,6; 0,3; 0,2; 0,1 ja 0,1. Leida töönaosus selleks, et eksinuvälis esimese tee, kui teame, et ta väljus metsast ühe tunni jooksul.
- 1.462. Lattu saabunud detailidest on valmistatud esimeses vabrikus 20 %, teises 46 % ja kolmandas 34 %. On teada, et esimese vabriku toodangus leidub mittestandardseid detaile 3 %, teises 2 % ja kolmandas 1 %. Leida töönaosus selleks, et juhuslikult võetud mittestandardne detail on valmistatud esimeses vabrikus.
- 1.463. Esimeses urnis on 5 valget ja 3 musta, teises 10 musta ning kolmandas 6 musta ja 1 valge pall. Juhuslikult võeti üks urnidest ja sellest valikuta 1 pall. Pall osutus valgeks. Leida töönaosus selleks, et pall võeti
- a) esimesest urnist,
 - b) teisest urnist,
 - c) kolmandast urnist.
- 1.464. Kaks jahimeest tulistavad korruga hunti. On teada, et esimesel jahimehel on tabamise töönaosus 0,2, teisel 0,6. Esimese lasuga üks küttidest tabas. Leida töönaosus selleks, et esimene kütt laskis mööda.

- 1.465. Esimeses kastis on 8 kvaliteetset ja 2 defektiga, teises 9 kvaliteetset ja 1 defektiga ning kolmandas 10 kvaliteetset detaili. Ühest kastist võeti huupi 3 detaili. Leida töenäosus selleks, et detailid võeti teisest kastist, kui nendest 2 olid kvaliteetsed.
- * * *
- 2.452. Metallist valatakse kangidesse esimeses tsehhis 70 % ja teises 30 %, kusjuures esimese tsehhi toodangus on praaki 10 %, teise toodangus 20 %. Leida töenäosus selleks, et juhuslikult võetud kang on defektideta.
- 2.453. Ühes kastis on 3 standardset ja 2 defektiga detaili, teises 4 standardset ja 4 defektiga detaili. Esimesest kastist on üks juhuslikult võetud detail pandud teise kasti. Kui suure töenäosusega osutub nüüd teisest kastist huupi võetud detail standardseks?
- 2.454. Kahel tööpingil toodetakse ühesuguseid detaile, kusjuures esimesel pingil on praagi protsent 6 ja teisel 2. Esimese pingi võimsus on kaks korda suurem kui teisel. Toodetud detailid pannakse kokku. Leida töenäosus selleks, et nende seast juhuslikult võetud detail ei ole praak.
- 2.455. Ühes kastis on 3 valget ja 3 musta, teises 4 valget ja 8 musta, kolmandas 7 valget ja 5 musta kuuli. Võetakse juhuslikult üks kast ja sellest huupi üks kuul. Kui suur on töenäosus selleks, et see kuul on valge?
- 2.456. Elektripirne valmistab 3 tehast. Esimene neist toodab üldisest elektripirnide tarvidusest 45 %, teine 40 % ja kolmas 15 %. Standardseid pirne on tehaste toodangutes vastavalt 70 %, 80 % ja 81 %. Kauplustesse saabub pirne müügiks kõigist kolmest tehasest. Leida töenäosus selleks, et kauplusest ostetud pirn on standardne.
- 2.457. Viiest urnist kahes on kummaski 2 valget ja 1 must kuul, ühes 10 musta kuuli ning ülejäänud kahes kummas-

- ki 1 must ja 3 valget kuuli. Võetakse juhuslikult 1 urn ja sellest huupi üks kuul. Kui suur on tõenäosus selleks, et võetud kuul on valge?
- 2.458. Esimeses urnis on 2 valget ja 3 musta, teises 2 valget ja 2 musta ning kolmandas 3 valget ja 1 must kera. Üks esimesest urnist juhuslikult võetud kera asetati teise, seejärel teisest urnist üks kolmandasse ja lõpuks kolmandast üks kera esimesse urni. Kui suur on tõenäosus selleks, et kerade koosseis jäi kõigis urnides endiseks?
- 2.459. Kaks spordiseltsi A ja B on kumbki esindatud kolme võistkonnaga (mehed, naised ja noored). A meeskond võidab 80 %-lise, A naiskond 40 %-lise ning A noorte-võistkond 40 %-lise tõenäosusega. Kumma spordiseltsi võit on tõenäolisem (võitjaks loetakse see, kes saavutab vähemalt 2 võitu 3-st)?
- 2.460. Rühmas on 25 üliõpilast. Nende teadmiste jooksvaks kontrollimiseks kutsutakse vastama juhuslikult valitud 3 üliõpilast. Leida tõenäosus selleks, et need said summaarseks hindeks 12 punkti, kui rühmas oli 5 väga hea õppeedukusega üliõpilast, kes alati vastavad viiele punktile, 10 hea õppeedukusega üliõpilast, kes saavad võrdse tõenäosusega hindeks 4 või 5 punkti, ja 10 rahuldavate teadmistega üliõpilast, kes saavad võrdse tõenäosusega hindeks 2, 3 või 4 punkti.
- 2.461. Kastis on 3 detaili. Nende hulgast juhuslikult võetud detail osutus korrasolevaks ja pandi kasti tagasi. Leida tõenäosus selleks, et seejärel huupi võetud detail on samuti defektideta.
- 2.462. On teada, et 5 % meestest ja 0,25 % naistest on värvipimedad. Arstlikul kontrollil osutus isik värvipimedaks. Kui suur on tõenäosus, et patsient oli mees, eeldusel, et
- a) mehi ja naisi on ühepalju,
- b) ta õpib ülikoolis, kus naisüliõpilasi on 66,7 %?

- 2.463. Võistlustest võttis osa 18 laskurit; neist 5 tabas märki tõenäosusega 0,8, 7 tõenäosusega 0,7, 4 tõenäosusega 0,6 ja 2 tõenäosusega 0,5. Juhuslikult valitud laskur tulistas, kuid ei tabanud. Leida tõenäosus tema kuulumiseks igasse nimetatud rühma.
- 2.464. Sideliini kaudu antakse edasi kodeeritud tekstid tähtede A, B ja C abil. Erinevate tähtede edasiandmise tõenäosused on vastavalt 0,5; 0,3 ja 0,2. Moonutuste tõenäosused tähtede üleandmisel on vastavalt 0,01, 0,03 ja 0,02. On teada, et kahest tähest koosnev signaal võeti vastu moonutamata kujul. Leida tõenäosus selleks, et see signaal on AB.
- 2.465. Kastis on neli detaili. Neist kontrolliti üht ja pandi tagasi. Leida tõenäosus selleks, et teisel korral võetud detail on defektita, kui esimene detail on korras.

20. Binomiaalne jaotusseadus

- 1.466. Seemnete idanevusprotsent on 90. Leida tõenäosus selleks, et seitsmest külvatud seemnest viis tärkab.
- 1.467. Tõenäosus loteriil võitmiseks on 0,25. Leida tõenäosus selleks, et kaheksast ostetud piletist võidab kuus.
- 1.468. Tõenäosus autobussi õigeaegseks lõpp-peatusesse saabumiseks on 0,85. Leida tõenäosus selleks, et seitsmest liinile väljunud autobussist viis jõuab lõpp-peatusesse õigeaegselt.
- 1.469. Telestudios on 5 kaamerat. Tõenäosus selleks, et kaamera on vaadeldaval hetkel sisse lülitatud, on 0,6. Kui tõenäone on, et antud hetkel ei ole sisse lülitatud rohkem kui kolm kaamerat?
- 1.470. Laskur tabab märklauda 10-sse tõenäosusega 0,7 ja 9-sse tõenäosusega 0,3. Kui suur on tõenäosus sel-

leks, et laskuri 3 lasu kogusumma ei ole väiksem kui 29?

- 1.471. Töökojas on 12 mootorit. Kehtestatud töörežiimi kohaselt peab antud momendil iga mootor töötama häireteta töönaosusega 0,8. Leida töönaosus selleks, et antud momendil töötavad häireteta mitte vähem kui 10 mootorit.
- 1.472. Münti visati 4 korda. Koostada jaotusrida diskreetsele juhuslikule suurusele X , mille võimalikuks väärtuseks on vapi esiletulekute arvud.
- 1.473. Tulistatakse 4 korda. Märgi tabamine ja mittetabamine on võrdvõimalikud. Leida töönaosus selleks, et tabamiste arv on suurem mittetabamiste arvust.
- 1.474. Kauplusesse toodud tolmuimeja korrasoleku töönaosus on 0,96. Leida töönaosus selleks, et viiest kaupluses olevast tolmuimejast on korras neli. Arvutada töönaosuseim korrasolevate tolmuimejate arv.
- 1.475. Leida töönaosuseim sademeteta päevade arv septembrikuu esimeses dekaadis, kui mitmeaastaste vaatluste põhjal esineb septembris sademeid keskmiselt 11 päeval.
- 1.476. Töönaosus selleks, et kaugushüppaja hüpet arvestatakse, on 0,6. Leida töönaosuseim arvestatavate hüpete arv 15 hüppe korral.
- 1.477. Mitu korda on vaja visata täringut, et töönaosuseim kahe silma esiletulekute arv oleks 32?

* * *

- 2.466. Laenutuspunktist laenutatud pokaalide tervena tagasitoomise töönaosus on 0,6. Leida töönaosus selleks, et kolmest laenutatud pokaalist kaks tuuakse tagasi tervetena.
- 2.467. Telefoninumbri õigesti valimise töönaosus on 0,95. Leida töönaosus selleks, et seitsmest väljakutsest 6 on õiged.

- 2.468. Ajalehtede õigeaegselt sidejaoskonda saabumise tõenäosus on 0,85. Leida tõenäosus selleks, et viiest sidejaoskonnast vähemalt 4 saavad ajalehed õigeaegselt.
- 2.469. Tõenäosus sündmuse esiletulekuks vähemalt üks kord nelja sõltumatu katse korral on 0,59. Kui suur on selle sündmuse esiletuleku tõenäosus iga katse korral.
- 2.470. Kaks korvpallurit viskavad kumbki korvile 3 korda. Korvi tabamise tõenäosus iga viske korral on neil vastavalt 0,6 ja 0,7. Kui suur on tõenäosus selleks, et korvpallurid saavad võrdse arvu tabamusi?
- 2.471. Korvi tabamise tõenäosus üksikviskel on 0,6. Korvpallur sooritab 6 sõltumatut viset. Leida tõenäosus selleks, et ta tabas vähemalt kahel korral.
- 2.472. Vaatluse all on 4 raadiot, milledest igaühe korrasoleku tõenäosus garantiitähataja jooksul on 0,8. Koostada jaotusrida diskreetsele juhuslikule suurusele X , mille võimalikeks väärtusteks on garantiitähataja jooksul korrasolevate raadiote arv.
- 2.473. Kauplusekülastaja teeb ostu tõenäosusega 0,65. Leida tõenäosus selleks, et kuuest külastajast neli teevad ostu. Kui suur on tõenäoseim ostjate arv 6 külastaja korral?
- 2.474. Märgi tabamise tõenäosus on 0,25. Tulistati 21 lasku. Leida tõenäoseim tabamuste arv.
- 2.475. Mitu sõltumatut katset tuleb teha, et tõenäoseim nähtuse esiletuleku arv oleks 51, kui selle nähtuse esiletuleku tõenäosus igal katsel on 0,64.
- 2.476. Kauplusesse toodi 56 kasti õunu. Tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud kastis on kõik õunad standardsed, on 0,9. Leida tõenäoseim standardsete õuntega kastide arv.
- 2.477. Leida tõenäoseim negatiivsete ja positiivsete mõõtmisvigade arv nelja mõõtmise korral, kui igal mõõtmisel on positiivse vea esiletuleku tõenäosus $\frac{2}{3}$ ja negatiivse vea esiletuleku tõenäosus $\frac{1}{3}$.

21. Keskmise tendentsi mõõdud. Hajuvusmõõdud

- 1.478. Leida arvude 2, 4 ja 8 aritmeetiline, geomeetriline, harmooniline ja ruutkeskmine.
- 1.479. Näidata, et kahe erineva positiivse arvu ruutkeskmine on suurem nende arvude aritmeetilisest keskmisest.
- 1.480. Leida arvude 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14 aritmeetiline keskmine, kasutades oletatava keskmise meetodit.
- 1.481. 17 päeva jooksul kontrolliti kahe teaduskonna üliõpilaste osavõttu loengutest. Puudujate arvud on toodud tabelis.

Teadusk. A	5	9	21	9	6	9	11	21	9	5	5	19
Teadusk. B	12	15	12	12	13	15	12	12	15	12	12	13
	9	6	11	9	5							
	12	15	13	15	15							

Leida puudujate arvu aritmeetiline keskmine mõlema teaduskonna kohta, samuti mediaan ja mood.

- 1.482. 80 üliõpilaskandidaati said matemaatika sisseastumiseksamitel kirjaliku töö eest punkte järgmiselt:

77	85	75	76	63	72	82	75	84	68
74	53	76	62	78	88	81	73	67	73
75	71	65	76	85	78	73	88	79	61
71	83	79	60	95	75	57	73	80	66
60	68	74	69	77	94	87	75	65	96
72	63	78	95	62	74	97	67	62	79
75	85	59	71	93	60	75	82	78	65
93	76	88	82	90	68	61	89	78	86

Leida andmete ulatus. Esitada sagedusjaotus, protentsagedus, kuhjatud sagedus. Joonestada sagedus-

hulknurk ja histogramm.

Leida keskväärtus, mediaan ja mood.

1.483. On antud ühe käitise 250 töölise vanuste sagedusjaotus.

Vanus aastates	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30
Tööliste arv	6	12	20	25	30	32	35
	30-32	32-34	34-36	36-38			
	28	20	18	14			

Leida töötajate vanuse keskväärtus, mood ja mediaan. Joonestada sagedushulknurk ja histogramm.

1.484. Tekstiilivabrikus toodeti kolme sorti kangaid:

Sort	Pikkus meetrites	Meetri hind rublades
I	3882	5,04
II	1073	4,67
III	214	4,05

Leida toodangu ühe meetri hinna aritmeetiline keskmine (kaalutud keskmisena).

1.485. 5 tööliset vajavad ühe detaili valmistamiseks aega vastavalt 0,2, 0,3, 0,3, 0,5 ja 0,5 tundi. Leida keskmine aeg, mis kulub ühel töölisel ühe detaili valmistamiseks.

1.486. Leida arvude 5, 18, 10, 15, 3, 7, 6, 12 keskmine hälve ja standardhälve.

1.487. Järgnevas tabelis on esitatud spordikoolis õppivate poiste raskuse sagedusjaotus:

Raskus (kg)	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
Sagedus	5	18	42	27	8

Leida standardhälve oletatava keskmise meetodit kasutades, kvartiilne hälve ja variatsioonikordaja.

1.488. 123 töelist valmistasid ühesuguseid detaile. Nende poolt ühes kuus valmistatud detailide hulka iseloomustab järgnev sagedusjaotus.

Detailide arv	261-270	271-280	281-290	291-300	301-310
Tööliste arv	9	18	55	27	14

Leida detailide arvu keskväärtus, standardhälve ja variatsioonikordaja.

* * *

2.478. Leida arvude 2, 4, 8, 16, 32 aritmeetiline, geomeetiline, harmooniline ja ruutkeskmine.

2.479. Näidata, et kahe erineva positiivse arvu geomeetiline keskmine on suurem nende arvude harmoonilisest keskmisest.

2.480. Leida arvude 96, 81, 87, 70, 93, 77 aritmeetiline keskmine, kasutades oletatava keskmise meetodit.

2.481. Kahes üliõpilasarühmas tehti matemaatika kontrolltöö. Tööd hinnati punktidega. Tulemused on esitatud tabelis.

I rühm	36	41	39	50	42	31	39	41	45	33	49	39	40	36	39
II rühm	89	87	85	95	93	91	97	99	88	90	83	86	98	82	

Leida mõlemas rühmas kontrolltöö tulemuste aritmeetiline keskmine, kasutades oletatava keskmise meetodit. Leida ka mediaan.

2.482. Kahes männiistandikus mõõdeti valikuliselt 10 aastat tagasi istutatud mändide kõrgust sentimeetrites ja saadi järgmised tulemused:

1)	145	168	150	156	145	128	135	125
	146	142	147	135	153	140	154	152
	161	142	138	176	163	119	148	165
	135	126	158	140	147	136	144	144
	173	146	138	164	150	132	157	149

2)	151	161	153	172	162	179	188	179	183	184
	156	158	187	156	172	162	193	173	173	180
	173	148	168	187	181	172	165	169	167	164
	181	147	178	176	142	170	158	171	177	171
	175	197	185	166	176	145	166	191	174	178

Leida statistiliste andmete ulatus, esitada sagedusjaotused, protsentsagedused, kuhjatud sagedused. Joonestada sageduspolügoon, histogramm ja ogiiv 1. variandi jaoks. Leida ogiivilt protsentpunktid P_{25} , P_{50} , P_{75} . Mitmenda protsendi punktiks on arvud 160, 150, 140?

2.483. Järgnevas tabelis on esitatud linnas N ühe aasta jooksul infarkti haigestunute arvu sagedusjaotus vanuse järgi:

Vanus	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64	65-67	68-70	71-73
Haigestunute arv	1	2	3	5	4	10	9	9
	74-76	77-79						
	4	3						

Leida haigestunute vanuse keskväärtus, mediaan ja mood. Joonestada sagedushulknurk ja histogramm.

2.484. Kolhoosi piimatoodangu realiseerimist iseloomustab järgnev tabel:

Rasvasisaldus	1 l hind rublades	Kogus liitrites	Sissetulek rublades
madalam	0.30	1000	300
keskmine	0.35	2000	700
kõrgem	0.40	2000	800

Leida ühe liitri piima keskmine müügihind kaalutud keskmisena ja harmoonilise keskmisena.

2.485. Jälgiti 18 töölise tööd. Ühe detaili valmistamiseks kulunud ajad on toodud tabelis.

1 detaili valmistamiseks kulunud aeg tändides	0,2	0,3	0,5	1
Tööliste arv	1	6	9	2

Leida keskmine aeg, mis kulub ühel töölisel ühe detaili valmistamiseks.

2.486. Leida arvude 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 keskmine hälve ja standardhälve.

2.487. Järgnevates tabelites on esitatud esmakursuslaste kõrgushüppe tulemused sagedusjaotustena eraldi noormeeste ja neidude kohta.

Noormehed

Kõrgus (m)	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55	1.60
Sagedus	2	2	4	1	8	2	1
	1.65	1.70					
	1	1					

Neiud

Kõrgus (m)	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
Sagedus	1	2	2	3	5	5	4
	1.20	1.25	1.30				
	3	2	1				

Arvutada standardhälbed ja kvartiilsed hälbed. Võrrelda noormeeste ja neidude tulemuste varieeruvust variatsioonikordaja abil.

2.488. 10-aastaste tütarlaste pikkuse ja raskuse mõõtmise tulemused on antud sagedusjaotustena

Pikkus (cm)	110- -115	115- -120	120- -125	125- -130	130- -135	135- -140	140- -145	145- -150
Tütarl. arv.	1	5	9	18	11	6	3	2

Raskus (kg)	17- -19	19- -21	21- -23	23- -25	25- -27	27- -29	29- -31	31- -33	33- -35
Tütarl. arv	1	5	10	12	9	7	5	4	2

Võrrelda 10-aastaste tütarlaste pikkuse ja raskuse varieeruvust variatsioonikordajate abil.

22. Punkthinnangud. Vahemikhinnangud

- 1.489. Leida tõenäosusega 0,95 normaaljaotusele alluva tunnuse keskväärtuse usalduspiirid, kui on teada, et väärtus piiri vahel suurusena 25 saadi $\bar{x} = 14$ ja $\sigma = 5$.
- 1.490. Ühe linna koolide kümnedate klasside õpilaste hulga valiti juhuslikult 225 noormeest ja neile korraldati test selgitamiseks nende geograafiaalaseid teadmisi. Tulemuste põhjal leiti, et $\bar{x} = 27,26$ ja $\sigma = 11,20$. Leida selle linna kõigi kümnedate klasside noormeeste vastava testi keskmise hinde usalduspiirid, tõenäosusega 0,95.
- 1.491. Ühes metsas valiti juhuslikult 12 kümneaastast puud ja mõõdeti nende diameeter maast 1 m kõrgusel. Tulemused: 25, 21, 22, 26, 28, 23, 20, 24, 26, 22, 25, 26. Leida 95 % tõenäosusega missugustesse piiridesse jääb kogu selle metsa 10-aastaste puude vastavate diameetrite keskväärtus.
- 1.492. Leida ülesandes 1.491. toodud andmete põhjal puude vastavate diameetrite hajuvuse (standardhälbe) usalduspiirid tõenäosusega 0,95.
- 1.493. Toote keskmine kaal valimis, millesse kuulus 100 eset, oli 10 kg, standardhälbega 0,6 kg. Missugustesse piiridesse jääb nende toodete keskmine kaal kogutoodangus tõenäosusega 95,4 %.
- 1.494. Ühe linna kooliõpilastest valiti juhuslikult välja 348 tütarlast ja 265 poissi. Osutus, et neist olid esimesel

õppeveerandil puudunud koolist 144 tütarlast ja 133 poissi. Leida puudujate protsendi usalduspiirid tütarlastele ja poistele tõenäosusega 0,99.

- 1.495. Kahele üliõpilasarühmale suurustega vastavalt 40 ja 50 üliõpilast õpetas üks ja sama professor ühe ja sama programmi järgi tõenäosusteooria kursust. Kirjalik eksamitöö, mis mõlemale rühmale oli ühesugune, andis esimeses rühmas tulemuseks $\bar{x} = 74$, $\sigma = 8$ ja teises rühmas $\bar{x} = 78$, $\sigma = 7$. Kas teise rühma tulemus on oluliselt parem?
- 1.496. Viidi läbi katsed kahte sorti teravilja saagikuse kohta. Tulemused on toodud tabelis.

Maatüki nr.	Saak ts/ha	
	I sort	II sort
1	12,0	10,5
2	13,5	13,0
3	10,0	10,5
4	15,0	12,0
5	14,5	11,5

Hinnata keskmiste saakide erinevust.

- 1.497. Kahe partii võllidest tehti valik, mille tulemused on toodud tabelis.

Võllide diameeter (mm)	
I partii	II partii
18,48	18,49
18,42	18,48
18,46	18,46
18,47	18,46
18,45	18,47
18,44	18,47
	18,45
	18,48

Hinnata võllide diameetrite erinevust.

- 1.498. Ühes koolis on 500 õpilast. Neist 52,3 % on tüdrukud. Teises koolis on 300 õpilast. Neist 47,7 % on tüdrukud. Kas tüdrukute osakaalu erinevust nendes koolides saab lugeda oluliseks?
- 1.499. 1000 naisüliõpilase pikkuse ja raskuse vaheline korrelatsioon on 0,75 ja 800 meesüliõpilase juures 0,80. Kas need korrelatsioonikordajad erinevad oluliselt?

* * *

- 2.489. Leida tõenäosusega 0,99 normaaljaotusele alluva tunnuse keskvärtuse usalduspiirid, kui on teada, et vahlimi puhul suurusega 16 saadi $\bar{x} = 10,2$ ja $\sigma = 4$.
- 2.490. 500 juhuslikult valitud keskkooli abiturienti vastasid bioloogiaalastele küsimustele. Tulemuste põhjal leiti, et $\bar{x} = 95$ ja $\sigma = 25$. Leida kõigi abiturientide bioloogiaalaseid teadmisi iseloomustava keskmise usalduspiirid tõenäosusega 0,99.
- 2.491. Ühesuguseid detaile valmistavate tööliste hulgast valiti juhuslikult 9 töölist. Nende keskmine toodang vahetuses oli 20 detaili, standardhälbe 0,9 detaili. Leida kõigi samades tingimustes töötavate tööliste keskmine toodang vahetuses tõenäosusega 0,95.
- 2.492. Leida ülesandes 2.491. toodud andmete põhjal tööliste toodangu hajuvuse (standardhälbe) usalduspiirid tõenäosusega 0,95.
- 2.493. Ühe kauguse mõõtmisel 4 korda saadi keskmiseks kauguseks 2250 m ja standardveaks 40 m. Leida täpne kaugus tõenäosusega 95 %.
- 2.494. 18000 haige hulgast olid 72 diabeetikud. Määrake diabeetikute protsent üldkogumist ja tema standardviga. Leidke selle protsendi usalduspiirid tõenäosusega 0,95.
- 2.495. Vabariiklikust keemiaolümpiaadist võttis osa 32 noormeest, kes said keskmiseks punktide arvuks 72, standardhälbe 8 ning 36 tütarlast keskmise hindeg 75

punkti, standardhõlbega 6. Kas tütarlaste tulemus on oluliselt parem noormeeste omast?

- 2.496. Kahe partii niidirullide kvaliteedi võrdlemiseks tehti niidi tugevuse katse. Mõlemast partiist võeti 5 niidirulli. Tulemused on tabelis.

Katse nr.	Vastupidavus tõmbele (g)	
	I partii	II partii
1	2900	2700
2	3000	2400
3	3100	2500
4	2500	3100
5	3000	2000

Kas võib lugeda, et mõlema partii niidirullid tugevuse poolest kuuluvad ühte sorti?

- 2.497. Võrreldi viljasaake sõltuvalt koristamise ajast. Ühelt põllult koristati õigeaegselt, teiselt - tunduva hilinemisega. Tulemused on järgmised:

Maatüki nr.	Saak ts/ha kohta	
	Õigeaegselt	Hilinemisega
1	16,5	10,7
2	16,2	9,0
3	18,9	13,9
4	20,1	9,4
5	19,3	11,9
6	10,1	11,3
7	12,8	10,5
8	15,0	9,9
9	-	7,4

Hinnata keskmiste saakide erinevust.

- 2.498. Üliõpilaste matemaatikaalaste teadmiste kontrollimiseks korraldati test. Kas noormeeste ja neidude tulemused erinevad märkimisväärselt, kui 40-st poisist täitsid arvestusliku normi 23 ja 50-st tütarlastest 22?
- 2.449. Ühe ettevõtte 20 meestõelise kategooria ja staaži vaheline korrelatsioon oli 0,85 ja 30 meestõelisel 0,70. Kas korrelatsioonikordajad erinevad oluliselt?

23. Hüpoteeside uurimine

- 1.500. 36 tõeliselt küsiti nende arvamust uuele tootmisrežiimi ülemineku kohta. Et uue režiimi eeliseid tutvustatud ei olnud, siis arvati, et vastused kolmele valikvastusele jaotuvad ühtlaselt. Küsitlus andis järgmised tulemused:

Valikvastused	Nõus	Ükskõik	Vastu
Sagedus	15	10	11

Kas hüpotees vastuste ühtlase jaotuse kohta leidis kinnitust?

- 1.501. Kullaosakeste arvu jaotust lahuses vaadeldi iga 2 sekundi järel ja koostati tabel (empiirilised ja teoreetilised - arvutatud Poissoni seaduse abil - andmed).

Kullaosakeste arv	Vaatluste arv	
	empiiriline	teoreetiline
0	112	110
1	168	171
2	130	132
3	69	68
4	32	26
5	5	8
6	1	2
7	1	1

χ^2 -testi abil selgitada, kas eksisteerib erinevus empiiriliste ja teoreetiliste tulemuste vahel.

- 1.502. Kasutades Pearsoni kriteeriumi 0,05 normi puhul, teha kindlaks, kas eksisteerib hüpotees populatsiooni normaaljaotuse kohta, kui $n = 200$ puhul on jaotus järgmine:

x_1	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_1	15	26	25	30	26	21	24	20	13

- 1.503. On antud tšõlliste toodangu plaani täitmise jaotus.

Plaani-täitmise %	kuni 80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140- ja kõrgem
Tšõlliste arv	2	9	10	25	28	15	8	4

Oletades, et jaotus on normaalne, arvutada teoreetilised sagedused ja kontrollida, kas oletus kehtib.

- 1.504. 320 viielapselises perekonnas jagunesid lapsed sooliselt järgmiselt:

Poiste ja tüdrukute arv	5 poissi	4p.	3p.	2p.	1p.	0p.
	0 tüdruk.	1t.	2t.	3t.	4t.	5t.
Perekondade arv	18	56	110	28	40	8

Kas see jaotus kinnitab hüpoteesi, et poisi ja tüdruku sünd on võrdtõenäolised?

- 1.505. 100 nooresõdurit tulistasid märki, igaks 10 lasku. Tabamuste arvu näitab järgmine tabel:

Tabamuste arv	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sagedus	0	2	4	10	22	26	18	12	4	2	0

Kasutades χ^2 -testi, kontrollida hüpoteesi, et tabamuste sagedus jaotub binomiaalselt, s.t. et tabamise tõenäosus oli kõigi laskude korral üks ja seesama.

- 1.506. Võrdsete ajavahemikkude järel registreeriti 517 korda mikroskoobi vaatevälja langevate kullaosakeste arv. Tulemused on esitatud tabelis.

Osakeste arv	0	1	2	3	4	5	6	7
Sagedus	112	168	170	68	32	5	1	1

Kasutades χ^2 -testi kontrollida hüpoteesi, et osakeste arvu sagedus jaotub Poissoni jaotusseaduse järgi.

* * *

- 2.500 Ühe teenindusettevõtte töölised klassifitseeriti spetsialistide komisjoni poolt viide kategooriasse. Esialgsete tähelepanekute põhjal arvati, et jaotus kategooriatesse tuleb ühtlane.

Komisjoni töö kokkuvõtte oli järgmine:

Kategooria	I	II	III	IV	V
Tööliste arv	12	22	13	28	25

Kas ühtlase jaotuse hüpotees kehtib?

- 2.501. Tehti 2500 vaatlust niidi katkemise kohta kudumismasinas teatud ajavahemiku jooksul. Tabelis on esitatud andmed vaatlustulemuste kohta ning vastavad arvud, mis on saadud Poissoni jaotusseaduse järgi.

Katkemiste arv	Sagedused	
	Katselised	Poissoni seaduse põhjal
0	1404	1412
1	870	807
2	140	230
3	68	44
4	16	6
5	2	1

Kasutades χ^2 -testi selgitada, kas kehtib hüpotees, et niidi katkemiste arv allub Poissoni jaotusseadusele.

- 2.502. Kasutades Pearsoni kriteeriumi 0,05 normi puhul teha kindlaks, kas eksisteerib hüpotees populatsiooni normaaljaotuse kohta, kui $n = 200$ puhul on jaotus järgmine:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

- 2.503. On antud meeste jalatsite müümise arv kaupluses tööpäeva jooksul.

Jalatsi number	37	38	39	40	41	42	43	44
Müüdud paaride arv	2	6	12	35	32	21	12	5

Oletades, et jaotus on normaalne, leida teoreetilised sagedused ja rakendades Kolmogorovi kriteeriumi, kontrollida oletuse kehtivust.

- 2.504. Seitset münti visati ühekorraga 1536 korda ja iga kord loeti ära esiletulnud vappide arv. Tulemused on toodud järgmises tabelis:

Vappide arv	0	1	2	3	4	5	6	7
Sagedus	12	78	270	456	386	252	69	13

Kasutades χ^2 -testi kontrollida hüpoteesi, et vappide arvu sagedus jaotub binomiaalselt, arvestades, et nii vapi kui kirja tõenäosus on iga münti juures 0,5.

- 2.505. Raamatukogust laenutatud keskmine raamatute arv üksikute nädalapäevade kohta on toodud järgmises tabelis:

Nädalapäevad	Esmasp.	Teisip.	Kolmap.	Neljap.	Reede
Laenutatud raamatute arv	135	108	120	114	146

Kontrollida χ^2 -testi abil hüpoteesi, et laenutatavate raamatute arv ei sõltu nädalapäevast.

- 2.506. Radioskitiivset ainet jälgiti 2608 korda võrdsete aja-

vahemikkude järel (iga 7,5 sek. pärast). Iga ajavahe-
miku kohta registreeriti loendajale langenud osakeste
arv. Tulemused on fikseeritud järgmises tabelis:

Osakeste arv	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sagedus	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

Kasutades χ^2 -testi kontrollida hüpoteesi, et loenda-
jale langenud osakeste arv jaotub Poissoni jaotussea-
duse kohaselt.

24. Vähimruutude meetod

- 1.507. Leida parameetrid a ja b funktsioonile $y = ax + b$ vä-
himruutude meetodil, lähtudes järgmistest x ja y vää-
rustest:

x	y
-2	-0,4
-1	0,2
0	1
1	1,7
2	2
3	2,7

- 1.508. Leida parameetrid a , b , c funktsioonile $y = ax^2 +$
 $+ bx + c$ vähimruutude meetodil, lähtudes järgmistest
 x ja y väärtustest:

x	y
-2	-0,1
-1	-2,1
1	-2,0
3	2,8
4	4,4

- 1.509. On antud punktid $A(3; 2)$, $B(5; 3)$, $C(6; 4)$, $D(8; 6)$,
 $E(9; 8)$, $F(11; 8)$.

- 1) Kanda need punktid koordinaatteljestikku ja joonestada silma järgi neid paremini lähendav sirge.
- 2) Leida neid punkte paremini lähendavate sirgete võrrandid, võttes sõltumatuks muutujaks kord X -i ja teine kord Y -i. Leida nende sirgete lõikepunkt.
- 3) Ennustada Y -i väärtus, kui $X = 12$ ja X -i väärtus, kui $Y = 7$.

* * *

2.507. Leida parameetrid a ja b funktsioonile $y = ax + b$ vähimruutude meetodil, lähtudes järgmistest muutujate x ja y väärtustest:

x	y
1	2,5
3	3,1
5	3,4
8	3,9
9	4,1

2.508. On antud muutujate x ja y väärtused:

x	-1	0	0,5	1,5	2,5	3
y	-0,2	2,8	3,7	3,9	1,7	0,1

Oletades, et muutujate x ja y vahel kehtib järgmine seos $y = ax^2 + bx + c$, määrata parameetrid a , b , c vähimruutude meetodi abil.

2.509. On antud punktid $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(4; 4)$, $D(6; 4)$, $E(8; 5)$, $F(9; 7)$, $G(11; 8)$, $H(14; 9)$.

- 1) Kanda need punktid koordinaatteljestikku ja joonestada silma järgi neid paremini lähendav sirge.
- 2) Leida neid punkte paremini lähendavate sirgete võrrandid, võttes sõltumatuks muutujaks kord X -i ja teine kord Y -i. Leida nende sirgete lõikepunkt.

- 3) Ennustada Y-i väärtus, kui $X = 12$, ja X-i väärtus, kui $Y = 3$.

25. Korrelatsioon. Regressioon

- 1.510. Arvutada korrelatsioonikordaja oletatava keskmise meetodil

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

- 1.511. Leida: 1) lineaarse korrelatsiooni kordaja oletatava keskmise meetodil, 2) astakkorrelatsiooni kordaja.

	I test	II test
1	185	110
2	203	98
3	188	118
4	195	104
5	176	112
6	174	124
7	158	119
8	197	95
9	176	94
10	138	97
11	126	110
12	160	94
13	151	126
14	185	120
15	185	118

- 1.512. Järgnevas tabelis on esitatud isade ja nende vanima poja pikkused

Isa pikkus	165	160	170	163	173	157	178	168
Poja pikkus	173	178	173	165	175	178	173	165
	173	170	175	180				
	160	170	173	178				

Leida: 1) lineaarse korrelatsiooni kordaja, b) astakkorrelatsiooni kordaja.

1.513. 100 tehase toodangu (x) miljonites rublades ja ööpäevane toodang (y) tonnides on toodud tabelis. Koostada regressioonisirgete võrrandid ja leida korrelatsiooni kordaja.

$x \backslash y$	10	15	20	25	30	35	Kokku
50	2	2					4
60	2	4	5	6	4		21
70		2	7	12	10	4	35
80				10	10	6	26
90				8		6	14
Kokku	4	8	12	36	24	16	100

1.514. Määrata korrelatsiooni kordaja ja koostada regressiooni võrrandid tabelis antud andmete järgi:

$x \backslash y$	24	25	26	27	28	29	30
125	1						
126	1	2					
127		2	4	1			
128		1	3	5	1		
129			2	4	5	1	
130				2	5	2	
131					1	3	1
132						1	
133							1

1.515. Koostada regressiooni sirgete võrrandid ja leida korrelatsiooni kordaja antud andmete järgi.

x \ y	7,1	7,3	7,5	7,7	7,9	Kokku
2,3	5	4				9
2,6		12	8	1		21
2,9			5	5		10
3,2			4	7		11
3,5				12	1	13
3,8					1	1
Kokku	5	16	17	25	2	65

1.516. Tunnuseid X ja Y mõõdeti 26 indiviidi juures. Tulemused on toodud tabelis.

X	23,0	24,0	24,5	24,5	25,0	25,5	26,0	26,0
Y	0,48	0,50	0,49	0,50	0,51	0,52	0,49	0,51
Sagedus	2	4	3	2	1	1	2	1
	26,0	26,5	26,5	27,0	27,0	28,0		
	0,53	0,50	0,52	0,54	0,52	0,53		
	2	1	1	2	1	3		

Leida korrelatsioonikordaja, selle usalduspiirid tõenäosusega 0,99 ja regressioonvõrrandid. Ennustada X-i väärtus, kui Y = 0,505 ja Y-i väärtus, kui X = 25,2.

* * *

2.510. Arvutada korrelatsioonikordaja otsitava keskmise meetodil.

X	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
Y	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6

2.511. Leida: 1) lineaarse korrelatsiooni kordaja oletatava keskmise meetodil, 2) astakorrelatsiooni kordaja.

X	150	126	135	176	138	142	151	163	137	178
Y	60	40	45	50	56	43	57	38	41	55
	139	155	147	162	156	146	133	168	153	150
	41	43	37	58	48	39	31	46	52	57

2.512. Tabelis on esitatud andmed 12 naise vanuse ja vererõhu kohta:

Vanus	56	42	72	36	63	47	55	49
Vere-rõhk	147	125	160	118	149	128	150	145
	38	42	68	60				
	115	140	152	155				

Leida: 1) lineaarse korrelatsiooni kordaja,
 2) astakorrelatsiooni kordaja,
 3) regressioonivõrrand Y-i ennustamiseks,
 4) ennustada, kui kõrge on 45-aastase naise vererõhk.

2.513. 200 malmitüki jaotus pikkuse(x) järgi sentimeetrites ja raskuse (y) järgi kilogrammides on kokku võetud tabelisse. Leida korrelatsioonikordaja ja koostada regressioonisirgete võrrandid.

x \ y	12	18	24	30	36	42	48	54	Kokku
20	4	6							10
30		10	8	4	1				23
40		2	13	7	2				24
50			1	9	3	1			14
60			1	3	12	3			19
70				4	4	18			26
80				2	8	24	7		41
90						1	12	9	22
100							3	18	21
Kokku	4	18	23	29	30	47	22	27	200

- 2.514. 100 erineva sordi taimede jaotus üldise taime kaalu (x) ja tema seemne kaalu (y) järgi on antud tabelis. Koostada regressioonisirgete võrrandid ja leida korrelatsioonikordaja.

x \ y	20	25	30	35	40	45	50	Kokku
40	1	7	3	1				12
50		2	4	6	1			13
60			8	12	1			21
70				7	3	1	1	12
80					2	12	1	15
90						10	9	19
100						1	7	8
Kokku	1	9	15	26	7	24	18	100

- 2.515. Leida korrelatsioonikordaja ja koostada regressioonisirgete võrrandid.

	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69
130-139				1		1		1
120-129			1		1	2	1	
110-119	1	2	5	6	11	6	3	2
100-109	3	7	9	7	13	5	1	1
90- 99	4	10	16	12	5	1		
80- 89	4	9	8	2	2			

- 2.516. Tunnuseid X ja Y mõõdeti 80 indiviidi juures. Tulemused on toodud tabelis.

Y \ X	29-31	32-34	35-37	38-40	41-43
130-139				2	4
140-149			3	4	6
150-159		1	8	3	2
160-169		2	9	6	
170-179	3	5	7	2	
180-189	8	4	1		

Leida korrelatsioonikordaja, selle usalduspiirid tõenäosusega 0,99 ja regressioonvõrrandid. Ennustada X-i väärtus, kui $Y = 152$ ja Y-i väärtus, kui $X = 39$.

1. Hulgateooria põhimõisted

- 1.1. a) $\{0; \frac{8}{7}\}$; b) $\{(0, 1); (-1; 0)\}$; c) $\{(\frac{m+n}{2}; \frac{m-n}{2})\}$
 d) $\{-\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\}$.
- 1.2. $\{\{1; 2\}\}$, $\{\{3\}\}$, $\{1\}$, $\{\{1; 2\}; \{3\}\}$, $\{\{3; 1\}\}$, $\{1; 2; 1\}$,
 $\{\{1; 2\}; \{3; 1\}\}$, \emptyset . 1.4. Ei. 1.5. 1; 3; 7. 1.6. a) \emptyset ;
 b) \emptyset ; c) $\{\emptyset\}$; d) $\{\emptyset; \{\emptyset\}\}$; e) $\{\{\emptyset\}\}$; f) $\{\emptyset\}$. 1.8. a) 10;
 b) 42; c) 5; d) 46; e) 13; f) 0. 1.9. 54. 1.10. a) 63;
 b) 20. 1.11. a) 18; b) 28; c) 50.
- 2.1. a) $\{-\frac{1}{2}; 2\}$; b) $\{(-4; -10); (6; 10)\}$; c) $\{(1; 2)\}$;
 d) $\{3\}$.
- 2.2. $\{\emptyset\}$, $\{\{1\}\}$, $\{2\}$, $\{\emptyset; \{1\}\}$, $\{\emptyset; 2\}$, $\{\{1\}; 2\}$, $\{\emptyset; \{1\}; 2\}$,
 \emptyset . 2.4. a) ei; b) ei; c) jaa, d) ei; e) ei. 2.5. b.
- 2.6. $A = \{1; 3; 4; 6; 8; 9\}$, $B = \{2; 4; 5; 6; 7; 9\}$. 2.9. a)
 20; b) 30; c) 13; d) 20. 2.10. a) 61; b) 13. 2.11. And-
 med on vastuolulised.

2. Determinandid ja maatriksid

- 1.12. a) -12; b) $2a^3$; c) $a^2 + b^2$; d) $\sin(\beta - \alpha)$. 1.13. a) $x_1 =$
 $= -1$, $x_2 = -4$; b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = -10$, $x_2 = 2$.
- 1.14. a) -20; b) -12; c) -392; d) 521; e) 0. 1.15. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;
 b) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -6 & -6 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.
- 1.16. a) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 7 & -19 & 4 \\ 4 & 11 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 6 & -13 & 3 \\ 6 & -13 & 3 \\ 6 & -13 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -14 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.
- 1.17. a) $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -35 \end{pmatrix}$;
 d) $(11 \ -1)$; e) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 10 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

1.18. a) 3; b) 3; c) 3; d) 2; e) 2; f) 3.

1.19. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

d) (1 3 -5 8).

1.20. a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$; b) pöördmaatriksit ei eksisteeri;

c) $\begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \\ -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$.

1.21. a) $x = 4, y = 2$;

b) $x = 8, y = 19, z = -3$;

c) $x = 2\frac{1}{3}, y = 2, z = -1\frac{1}{3}$;

d) $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -1,$
 $x_4 = 1.$

1.22. a) mittelarahenduv; b) $x = 1 + C, y = 2C - 3, z = C - 1,$
 $u = C$; c) $x = \frac{2}{5}C, y = -\frac{3C}{5}, z = C$; d) $x = y = z = v = C.$ 1.23. a) 3; -2.

2.12. a) -10; b) 4a; c) sum; d) 1. 2.13. a) $x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{3}{2}$;
b) $x_1 = 2, x_2 = -\frac{11}{7}$; c) $x_1 = -6, x_2 = -4.$

2.14. a) -72; b) -18; c) -216; d) 125; e) 0.

2.15. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ -20 & -5 & -10 \\ -15 & -20 & -5 \end{pmatrix}$.

2.16. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.17. a) $\begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

2.18. a) 3; b) 2; c) 3; d) 4; e) 3; f) 3.

2.19. a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.20. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \frac{16}{52} & \frac{6}{52} & \frac{14}{52} \\ \frac{6}{52} & \frac{12}{52} & \frac{2}{52} \\ \frac{14}{52} & \frac{2}{52} & \frac{-4}{52} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{5}{40} & \frac{19}{40} \\ \frac{5}{40} & \frac{-5}{40} & \frac{5}{40} \\ \frac{13}{40} & \frac{-5}{40} & \frac{-3}{40} \end{pmatrix}$.

2.21. a) $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$; b) $x = 2$, $y = -5$; c) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; d) $x = 8$, $y = 19$, $z = -3$.

2.22. a) $\frac{18-C}{7}$, $y = \frac{3C-5}{7}$, $z = C$; b) $x = C_2 - C_1$, $y = 1 - C_1 - C_2$, $z = C$, $u = 2$, $v = C_2$; d) $x = 8C_1 - 7C_2$, $y = -6C_1 + 5C_2$, $z = C_1$, $v = C_2$. 2.23. 5.

3. Vektorid

1.24. $\vec{AB} = \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b})$; $\vec{BC} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$; $\vec{CD} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a})$;
 $\vec{DA} = -\frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$.

1.25. B(4; -2; 2); C(7; -7; 6); D(1; -2; -2); E(-1; -9; 1);
F(2; -3; 0); G(-2; -5; 5); H(5; -7; 3).

1.26. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = 6\vec{i} + 15\vec{j} - 3\vec{k}$.

1.27. (9; 12; 15), (8; 16; 12); (2; 5; -1).

1.28. a) 6; b) -3; c) -129.

1.29. 30.

1.30. 135° .

1.31. b) kollineaarsed; c) risti.

1.32. (-5; -5; 5).

1.33. a) (-4; -8; -10); b) $\sqrt[3]{5}$.

1.34. 12,5

1.36. 6.

1.38. Jaa.

1.39. 3.

2.24. $\vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{AD} = 2(\vec{a} + \vec{b})$; $\vec{AE} = \vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{EC} = \vec{a} - \vec{b}$.

2.25. $\vec{AB} = (3; 2; 1)$; $\vec{AC} = (5; -6; -2)$; $\vec{AD} = (-2; -4; 0)$;
 $\vec{BA} = (-3; -2; -1)$; $\vec{BC} = (2; -8; -3)$; $\vec{BD} = (-5; -6; 0)$;
 $\vec{CA} = (-5; 6; 2)$; $\vec{CB} = (-2; 8; 3)$; $\vec{CD} = (-7; 2; 3)$; $\vec{DA} =$
 $= (2; 4; -1)$; $\vec{DB} = (5; 6; 0)$; $\vec{DC} = (7; -2; -3)$.

2.26. $\vec{OA} = 3\vec{i}$; $\vec{AC} = 4\vec{j}$; $\vec{CB} = -3\vec{i}$; $\vec{BO} = -4\vec{j}$; $\vec{OC} = 4\vec{j} + 3\vec{i}$;
 $\vec{BA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

2.27. (-2; -1; 6), (6; -1; 4), (6; -3; 15); (16; -2; 7).

2.28. a) 4; b) -40; c) -271.

2.29. $-\frac{3}{2}$.

2.30. 45° .

2.31. c) risti; d) paralleelsed.

2.32. (6; -9; 17).

2.33. a) (-4; -8; -10); b) $\sqrt[3]{5}$.

2.34. 24,5.

2.35. 28.

2.36. 48.

2.39. 14.

4. Sirge ja tasand

1.40. a) paralleelsed; c) risti.

1.41. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{8}$.

1.42. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

1.43. $2x - y + 5 = 0$.

1.44. $x - 3y - 7 = 0$.

1.45. $7x - 2y - 20 = 0.$

1.46. $x - 2y - 2 = 0, x + 5y + 5 = 0, 3x + y + 1 = 0.$

1.47. a) jaa, b) ei.

1.48. a) $\frac{3x}{\sqrt{10}} - \frac{y}{\sqrt{10}} - 1 = 0;$ b) $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0.$

1.49. 1.

1.50. $\frac{3\sqrt{13}}{13}.$

1.51. 3.

1.52. $(4; 1); (8\frac{2}{7}; 3\frac{6}{7}).$

1.53. $2x + 2y - 7 = 0; 4x - 4y + 3 = 0.$

1.54. $(0; 5), (-6; 1), (6; 1).$

1.55. $3x + y - 15 = 0; 12x - 5y + 3 = 0.$

1.56. $3x - y - 1 = 0, 3x - y + 9 = 0, x + 3y + 3 = 0, x + 3y - 7 = 0, 2x + y + 1 = 0, x - 2y + 3 = 0.$

1.57. $(-3; 2).$

1.58. Külgede keskpunktid: $(3; 1); (1\frac{1}{2}; -3); (-\frac{1}{2}; 0);$ mediaanide lõikepunkt: $(1\frac{1}{4}; \frac{5}{8});$ külgede võrrandid: $3x + 2y - 11 = 0; 2x - 7y - 24 = 0; 8x - 3y + 4 = 0;$ mediaanide võrrandid: $14x + y - 18 = 0; x - y - 2 = 0; 4x + 11y + 12 = 0.$

1.60. Paralleelsed.

1.61. $2x - y + z - 5 = 0.$

1.62. $2x + 3y - z - 1 = 0.$

1.63. $2x - 2y + z - 2 = 0.$

1.64. $2x + 3y + 4z - 3 = 0.$

1.65. $x + 3y + 7z - 2 = 0.$

1.66. $5y + z = 0.$

1.67. $y + 5 = 0.$

1.68. Paralleelsed.

1.69. $\frac{14}{117}.$

1.70. Sirge on paralleelne tasandiga.

1.71. 0.

1.72. $\frac{x+3}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}.$

1.73. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-4}{-5}.$

1.74. $x = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = -z.$

1.75. $2x - y + 4z - 3 = 0.$

1.76. $8x - 5y + z - 11 = 0.$

1.77. $x + 2y - 2z - 1 = 0.$

1.78. $(6; 4; 5).$

1.79. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{-8}.$

1.80. $(2; -2; -2).$

1.81. $x - 2 = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{3}.$

1.82. $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{-1}.$

1.83. $(3; 2; -1).$

1.84. $\frac{x+1}{48} = \frac{y}{37} = \frac{z-4}{4}.$

1.85. $x - 8 = y - 17 = z - 8.$

1.86. a) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 3 = 0$; b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5 = 0$;

c) $\frac{6}{11}x - \frac{6}{11}y + \frac{7}{11}z - 11\frac{4}{11} = 0$; d) $y - 2 = 0.$

1.87. a) $\frac{3\sqrt{62}}{31}$; b) $\frac{6\sqrt{170}}{85}$; c) 0.

1.88. a) 2; b) 6,5.

1.89. $(0; 7; 0)$; $(0; -5; 0).$

1.90. 4.

1.91. $\frac{2\sqrt{59}}{59}.$

2.40. a) risti; c) paraleleesed.

2.41. a) $-\frac{7}{9}$; b) $\frac{4}{7}.$

2.42. Sirged ühtivad.

2.43. $5x - 4y - 16 = 0.$

2.44. $2x - 3y + 8 = 0.$

2.45. $y = -2x.$

2.46. $x = 0$; $2x + 3y - 7 = 0$; $x + 3y - 7 = 0.$

2.47. a) ei; b) jaa.

2.48. a) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2 = 0$; b) $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{7}{4} = 0.$

2.49. 3.

2.50. $\frac{5\sqrt{17}}{17}.$

2.51. 8.

2.52. $3x - 4y - 25 = 0$; $3x - 4y + 5 = 0.$

2.53. $3x - y + 55 = 0$ ja $5x + 15y + 3 = 0.$

2.54. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$; $-\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = -1$; $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$ või

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1; -\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1; \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -1; \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1.$$

2.55. B(-5; 6), C(2; 7).

2.56. 6.

2.57. $5x + 12y - 2 = 0$.

2.58. S = 4; AC = 5, BC = $\sqrt{17}$, BA = $4\sqrt{5}$; $x - 4y + 12 = 0$,
 $x - 2y + 8 = 0$, $3x + 4y + 12 = 0$, $4x + y - 22 = 0$,
 $4x - 3y + 22 = 0$, $2x - y + 3 = 0$.

2.60. Parallelsed.

2.61. $y + 3z - 5 = 0$.

2.62. $x - 2y - 3z - 4 = 0$.

2.63. $3x + y + 2z - 23 = 0$.

2.64. $3x - 4y + z - 11 = 0$.

2.65. $x - y - z - 6 = 0$.

2.66. $2y - 3z + 7 = 0$.

2.67. $2x + y = 0$.

2.68. Risti.

2.69. $22^\circ 11'$.

2.70. Risti. 2.71. 0° .

2.72. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{3}$.

2.73. $\frac{x-3}{-13} = \frac{y-9}{4} = \frac{z+1}{14}$.

2.74. $x + 4 = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$.

2.75. $x - 2y + z + 5 = 0$.

2.76. $18x + 11y + 6z = 0$.

2.77. $2x + y - 1 = 0$.

2.78. (1; 1; 1).

2.79. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-3}{0}$.

2.80. (1; -9; -3).

2.81. $6x + 17y - 28z + 11 = 0$.

2.82. $\frac{x+5}{19} = \frac{1-y}{28} = -\frac{z}{37}$.

2.83. (7; -17; 24).

2.84. $\frac{x+5}{2} = 3 - y = \frac{z+4}{3}$.

2.85. $x = \frac{y}{0} = \frac{z}{2}$.

2.86. a) $\frac{3}{5\sqrt{2}}x - \frac{4}{5\sqrt{2}}y + \frac{z}{\sqrt{2}} = 0$, b) $-\frac{x}{3} + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{7}{3} = 0$, c) $\frac{6}{11}x + \frac{6}{11}y - \frac{7}{11}z - \frac{15}{11} = 0$,

$$d) \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

$$2.87. \quad a) \sqrt{3}, \quad b) 1\frac{3}{7}, \quad c) 0.$$

$$2.88. \quad a) 3, \quad b) 1\frac{1}{3}.$$

$$2.89. \quad (0; 0; -2), \quad (0; 0; -6\frac{4}{3}).$$

$$2.90. \quad 2\frac{2}{3}.$$

$$2.91. \quad \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

5. Teist järku jooned ja pinnad

$$1.92. \quad (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

$$1.93. \quad a) (-4; 0), 5; \quad b) (2; -3), 4.$$

$$1.94. \quad 4x - 3y + 11 = 0; \quad 4x + 3y + 5 = 0.$$

$$1.95. \quad (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 9.$$

$$1.96. \quad \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$1.97. \quad \frac{x^2}{36} + \frac{2y^2}{75} = 1.$$

$$1.98. \quad 5; 4; (-3; 0); (3; 0).$$

$$1.99. \quad 2; 6; (0; 4\sqrt{2}); (0, -4\sqrt{2}); \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$1.100. \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

$$1.101. \quad \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$1.102. \quad \left(-\frac{15}{4}; \pm \frac{\sqrt{63}}{4}\right).$$

$$1.103. \quad \text{Mitte ühtegi.}$$

$$1.104. \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad y = \pm \frac{3}{5}x.$$

$$1.105. \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$1.106. \quad \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

$$1.107. \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

$$1.108. \quad y^2 = 16x.$$

$$1.109. \quad (0; -5); \quad y = 5.$$

$$1.110. \quad y^2 = \frac{14}{3}x.$$

$$1.111. \quad -1.$$

$$1.112. \quad 2x - 2y + 5 = 0; \quad 8x - 4y - 15 = 0.$$

- 1.113. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 2z - 2 = 0.$
- 1.114. a) $(-2; 3; -1); 5;$ b) võrrand esitab punkti $(1; -3; 0).$
- 1.115. $x^2 + (y + 33)^2 + z^2 = 1130.$
- 1.116. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 20z + 45 = 0.$
- 1.117. $(3; -5; 2), 8.$
- 1.118. $\frac{x+1}{5} = 3 - y = \frac{2+0,5}{2}.$
- 1.119. 7.
- 1.120. $x + 2y - 2z - 5 = 0$ ja $x + 2y - 2z + 5 = 0.$
- 1.121. $x^2 + y^2 + z^2 + 13x - 9y + 9z - 14 = 0.$
- 1.122. Lõikab.
- 2.92. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 18.$
- 2.93. a) $(0; -2); r = 2;$ b) $(2; -1); r = 0.$
- 2.94. $2x - 11y + 25 = 0, x + 2y + 5 = 0.$
- 2.95. $3x - 4y - 14 = 0; 3x - 4y + 36 = 0.$
- 2.96. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$
- 2.97. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$
- 2.98. $13; 5; (-12; 0); (12; 0).$
- 2.99. $8; 4; (0; 2\sqrt{3}); (0; -2\sqrt{3}); \sqrt{\frac{3}{2}}.$
- 2.100. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$
- 2.101. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$
- 2.102. 2,5.
- 2.103. Kaks.
- 2.104. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, y = \pm \frac{3}{4}x.$
- 2.105. $\frac{x^2}{63} - \frac{y^2}{49} = 1.$
- 2.106. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1.$
- 2.107. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$
- 2.108. $y^2 = 14x.$

- 2.109. $(0; \frac{1}{4}); 4y + 1 = 0.$
2.110. 6,5.
2.111. 9.
2.112. $x^2 = -8y.$
2.113. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 10z - 30 = 0.$
2.114. a) $(0; 0; 0), 2;$ b) $(1; -4; -\frac{1}{3}); 3\frac{2}{3}.$
2.115. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 12 = 0.$
2.116. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 2z - 40 = 0.$
2.117. $(1; 0; 2), 4.$
2.118. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 49.$
2.119. 21.
2.120. $5x - 2y - \sqrt{14}z - 14 + 3\sqrt{14} = 0.$
2.121. $x^2 + y^2 - 10x + 15y - 25z = 0.$
1.122. Asub väljaspool.

6. Funktsioon. Funktsiooni määramispiirkond

- 1.123. a) $[-2; 2];$ b) $]-\infty; 1[;$ c) $2[;]2; \infty[;$ d) $]-\infty; 1[;$
1.124. a) $]-\infty; -2[;$ b) $]-2; 0[;$ c) $0[;]0; 2[;$ d) $2[;]2; \infty[;$
1.125. a) $]-\infty; \infty[;$ b) $]1,5; 2[;$ c) $]2; \infty[;$ d) $]3; 7[;$
1.126. a) $[2k\pi; (2k + 1)\pi[;$ b) $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{4};$ c) $]-\infty; 0[.$
1.128. $-\frac{3}{8}.$
1.129. $z = \sin x - 2; v = \sin^2 x - 3 \sin x + 2; u = 1 + \sqrt{\sin^2 x - 3 \sin x + 2}.$
2.123. a) $]-\infty; -2[;$ b) $]-2; \infty[;$ c) $1[;]1; 2[;$ d) $]2; \infty[;$
2.124. a) $]-\infty; 0[;$ b) $]4; \infty[;$ c) $]1; 2[;$ d) $]2; \infty[;$
2.125. a) $]-4; \infty[;$ b) $]0; 10[;$ c) $]3; \infty[;$ d) $]2; 3[;$

2.126. a) $[0; 2[;]2; \infty[;$ b) $]-\infty; \infty[;$ c) $]-\infty; 0[.$

2.128. $y = \frac{1}{\cos x}.$

2.129. $y = \sqrt[3]{(a^x + 1)^2}.$

7. Funktsiooni piirväärtus

1.130. a) 1; b) 48; c) $\frac{2}{5};$ d) $\frac{9}{16}.$

1.131. a) $-\frac{3}{2};$ b) $\infty;$ c) $\frac{4}{9};$ d) $\frac{1}{3}.$

1.132. a) 2; b) 3; c) $\infty;$ d) $\infty.$

1.133. a) 0; b) 0; c) 1.

1.134. a) $e^6;$ b) $e^4;$ c) $e^{-4};$ d) $\frac{1}{e^2}.$

1.135. a) 3; b) $\frac{1}{4};$ c) $e^{-2}.$

1.136. a) 2; b) 2; c) $\frac{1}{2}.$ 1.137. a) 0; b) $-\frac{1}{2\pi};$ c) $\frac{1}{2}.$

2.130. a) -25; b) 1; c) $\frac{2}{3};$ d) $-\frac{1}{56}.$

2.131. a) $-\frac{4}{3};$ b) 0. c) 3a; d) 0.

2.132. a) $\frac{3}{5};$ b) 0; c) -1; d) 2.

2.133. a) $\frac{1}{7};$ b) $\sqrt[3]{2};$ c) 1.

2.134. a) $e^4;$ b) $\frac{1}{e^2};$ c) $\frac{1}{e^6};$ d) $e^{-\frac{1}{3}}.$

2.135. a) $e^2;$ b) $e^{-2};$ c) -2.

2.136. a) 3; b) 1; c) $\cos \alpha.$

2.137. a) $\frac{3}{4};$ b) $\frac{2}{3};$ c) 4.

8. Funktsiooni tuletis, diferentsiaal

1.138. a) $1 - \frac{\sqrt{ax}}{x};$ b) $\frac{1 - v^4}{2\sqrt{(5v - v^5)^4}};$ c) $\frac{3a^2 + 1}{2\sqrt{a^3 + a} - 1};$
d) $x^3(3x + 2)^2 (21x + 8);$ e) $3,5x^2 \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

1.139. a) $\frac{1}{\sqrt{(a^2 - t^2)^3}};$ b) $\frac{6}{(t + 3)^2};$ c) $\frac{12x}{(x + 3)^2};$
d) $-\frac{x^2(x + 15)}{(x - 5)^5};$ e) $\frac{13}{2(x - 2)\sqrt{(5x + 3)(x - 2)}}.$

1.140. a) $6 \cos 6x;$ b) $12 \sin^3 3x \cos 3x;$ c) $-2 \sin^{\frac{x}{3}};$

d) $\frac{3}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin(x - \frac{\pi}{4})$; e) $9 \cos(3x + 5)$.

1.141.

a) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x}$; b) $-\sin \frac{2t}{a}$;

c) $-\frac{1}{2\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}$; d) $\frac{2(\cos^2 x - \tan x)}{\cos^2 x}$.

1.142.

a) $\sin(2x - 1) + 2x \cos(2x - 1)$;

b) $\frac{(z \cos z - \sin z)(\sin^2 z - z^2)}{z^2 \sin^2 z}$;

c) $\frac{\cos x \sin x (\cos x + \sin x) - x(\cos^3 x - \sin^3 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$;

d) $\frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} \cdot \sin 3x + 3 \sin \frac{x}{3} \cos 3x$.

1.143.

a) $\frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}$; b) $x \cos x$; c) $2 \tan x \sin^2 x$.

1.144.

a) $-\frac{1}{x \ln^2 x}$; b) $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$; c) $-\frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}}$;

d) $\frac{3}{x(1 - 2 \ln x)^2}$.

1.145.

a) $-2xe^{-x^2}$; b) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; c) $e^x(1+x)$; d) $\frac{1-x}{e^x}$;

e) $x(2 \ln x + 1)$.

1.146.

$3^{\sin x} (\ln 3) \cos x$; b) $-\frac{\ln 3}{3^t}$;

c) $10^{\sqrt{t}} (1 + \ln 10 \cdot \frac{\sqrt{t}}{2})$; d) $2^v + 3^v \cdot \ln 3$;

e) $\frac{3x^2 + 2^x \ln 2 - x^3 - 2^x}{e^x}$;

1.147.

a) $-\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$; b) $\frac{2e^x}{(e^{-x} - 1)^2}$; c) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$;

d) $e^z \frac{\sin z - \cos z}{\sin^2 z}$; e) $\frac{3e^{-x}}{2\sqrt{x}}(1 - 2x)$.

1.148.

a) $1 + \sqrt{1 - z^2}$; b) $-\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$;

d) $\arcsin x$.

1.149. a) $-\frac{x + \sqrt{1-x^2} \arccos x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$; b) $\frac{x^2}{1+x^2}$;
 c) $\frac{a}{a^2+z^2}$; d) $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$; e) $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

1.150. a) -1; b) $\frac{22}{147} \sqrt[3]{49}$; c) $\frac{1-13\sqrt{2}}{196}$.

1.151. a) 0; b) 17408; c) 1,5.

1.152. a) $\frac{\sin 1}{ax^2} (a-x^2)$; b) 0; c) 2; d) $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; e) -1.

1.153. a) 0; b) $-\frac{2}{3\sqrt{5}}$; c) $-\frac{4}{27}$.

1.154. a) $2 \cos 2x$; b) $2 \tan x \sec^2 x$; c) $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$;
 d) $2e^{-x^2} (2x^2 - 1)$; e) $\frac{x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$; f) $\frac{1}{x}$.

1.155. a) $a^x (\ln a)^n$; b) $n!$; c) $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

1.156. a) $3(x^2 - 2x + 1) dx$; b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$; c) $\frac{2-x}{x^3} dx$;

d) $63x^2 \ln 6x dx$.

1.157. a) $(x - 2 \cos 2x) dx$; b) $b \sin(a - bx) dx$;
 c) $-\tan x dx$.

1.158. a) 73,44; b) 123,50; c) 60,03; d) 2,13.

1.159. a) 0,87; b) 0,96; c) 0,05; d) 0,78.

1.160. $337(\pm 2)$.

1.161. $\Delta V = \pm 0,75$; $\frac{\Delta V}{V} = 0,6\%$.

2.138. a) $\frac{1}{2\sqrt{r}}$; b) $\frac{16x(1-3x)}{5\sqrt{2x^2-4x^3}}$; c) $\frac{3(1+3x)}{2(2x+3x^2)\sqrt[4]{(2x+3x^2)^3}}$;

d) $3t^2 - 4$; e) $2x(2x^2 - 5)$.

2.139. a) $\frac{10m}{(1-m^2)^6}$; b) $-\frac{2(3x+1)}{x^3\sqrt{4x+1}}$; c) $\frac{1+2x-x^2}{(x^2+1)^2}$;

d) $-4 \frac{p+1}{(p-1)^3}$.

2.140. a) $b \sin(a - bx)$; b) $\frac{3 \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; c) $-7 \sin 2z$;

d) $3 \sin 2z (1 - 0,5 \sin z)$; e) $5 \sin 10 x$.

2.141. a) $\frac{\sin x (1 + x) + \cos x (1 - x)}{1 + \sin 2x}$; b) $\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}$;

c) $\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + 1}$; d) $-\frac{t \cos \sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$.

2.142. a) $x(2 \sin x + a \cos x)$; b) $-\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x}$;

c) $\frac{1 + \cos x + \sin^2 x \cos x}{\cos^2 x (1 + \cos x)^2}$; d) $2 \sin 2x \cdot \ln x + \frac{\cos 2x}{x}$.

2.143. a) $\frac{2 \sin x - \cos x}{\cos^3 x}$; b) $-\tan 2z \sqrt{\cos 2z}$;

c) $\frac{4 \sin \frac{r}{2} - r \cos \frac{r}{2}}{8 \sin^3 \frac{r}{2}}$.

2.144. a) $\frac{2 \ln x}{x}$; b) $\frac{1}{2x \sqrt{\ln x}}$; c) $-\frac{\ln x}{x^2}$; d) $-\frac{1}{x \sqrt{1+x^2}}$.

2.145. a) $-e^{-x}$; b) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$; c) $e^x (\cos x + \sin x)$;

d) $\frac{e^x(x-4)}{x-3}$; e) $-\ln x$.

2.146. a) $2^x (\ln 2) \cos 2^x$; b) $3 a^{3x+5} \ln a$;

c) $10^x (1 + x \ln 10)$; d) $x 2^x (2 + x \ln 2)$;

e) $2^x \ln 2 (1 + 3 \cdot 2^{2x})$; f) $\frac{1 - y \ln 4}{4^y}$.

2.147. a) $\frac{2e^v}{(1 - e^v)^2}$; b) $e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2$; c) $2x(a^{x^2} \ln a + e^{-x^2})$; d) $x e^x (2 + x)$; e) $\frac{e^{-x^2}}{x} (1 - 2x^2 \ln x)$.

2.148. a) $\sqrt{\frac{2}{x - 2x^2}}$; b) $\frac{1}{2\sqrt{v - v^2}}$; c) $\frac{2}{\sqrt{2 - x^2}}$;

d) $\arcsin x^3 + \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^6}}$.

2.149. a) $\frac{\arctan x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$; b) $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$;

c) $\frac{1}{1+x^2}$; d) $2\frac{1-x^2}{1+x^2}$; e) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

2.150. a) 0; b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $-4^4 \cdot 6^2$.

2.151. a) $\frac{5}{9}$; b) 0; c) $a^2(1+a^2)$.

2.152. a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; c) 1; d) 0; e) 1.

2.153. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3a}$; b) 1; c) $\frac{1}{\ln 10}$.

2.154. a) $-2 \cos 2x$; b) $\frac{2 \cot x}{\sin^2 x}$; c) $\frac{6}{x^4}$; d) $a^x \ln^2 a$;

e) $-\frac{128x}{(1+16x^2)^2}$; f) $\frac{2 - \ln t}{t \ln^3 t}$.

2.155. a) $(-\frac{1}{a})^n e^{-\frac{x}{a}}$; b) $\frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \sqrt{t^{2n-1}}}$;

c) $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$; ($n \geq 2$).

2.156. a) $-\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}} dx$; b) $-4e^{-4z} dz$; c) $\frac{0,4343 dx}{x-3}$.

2.157. a) $\frac{1}{2\sqrt{\tan x \cos^2 x}} dx$; b) $\frac{1}{2}(1 + \sin \frac{x}{2}) dx$;

c) $(\frac{1}{\cos^2 x} - 5x^4) dx$; d) $\cot x dx$.

2.158. a) 10080; b) 2296,35; c) 11,20; d) 1,998.

2.159. a) 0,48; b) 0,97; c) -0,03; d) 1,004.

2.160. 0,1 %.

2.161. 0,76 %.

8. Tuletise rakendusid

1.162. a) $\max(-\frac{1}{2}; \frac{6}{4})$; b) $\min(-2 + \sqrt{7}; -14\sqrt{7} + 34)$;
 $\max(-2 - \sqrt{7}; 32 + 14\sqrt{7})$; c) $\max(2; \frac{1}{3})$;

- $\min(-2; -5\frac{1}{3}); d) \max(2; 2); \min(-2; -2).$
1.163. a) 2; b) 1; c) ∞ ; d) 0; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{n}$.
1.164. Puutujate võrrandid: a) $x + 4y - 8 = 0$; b) $x + 4y + 8 = 0$. Normaalse võrrandid: a) $4x - y + 2 = 0$; b) $4x - y - 2 = 0$.
1.165. $2x - y - 2 = 0$.
1.166. $A(-2; -4)$.
1.167. $x - y - 1 = 0$; $9x + 5y - 23 = 0$.
1.168. $x = -\frac{2}{3}$; $x = 4$.
1.169. $\frac{\pi}{4}$.
1.170. $\approx 70^\circ 30'$.
1.171. a) Kohal $x = 2$ on joonel käänupunkt; b) kohal $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ on joonel käänupunkt; c) kõikjal nõgus.
1.172. a) $x = 1$; $y = 0$; b) $x = 0$; $y = 0$; c) $y = x + 2$.
1.174. $11 \frac{m}{s}$.
1.175. 3; 3.
1.176. 12,5; 12,5.
1.177. $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{h}{2}$.
1.178. $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$; $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.
1.179. $20 \sqrt[3]{\frac{3}{3}}$.
1.180. $\frac{2R \sqrt[3]{3}}{3}$.
1.181. $20 \frac{km}{h}$; 720 rbl.
1.182. Kõrgus = poolringi raadiusega.
1.183. $A_1 C = \frac{ac}{a+b}$.
2.162. a) $\min(2; 4)$; b) $\min(-2; 1)$; c) $\min(3; -9)$; $\max(4; 1\frac{2}{3})$; d) $\max(0; 0)$; $\min(4; 8)$.
2.163. a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) 0. e) ei eksisteeri; f) 2.
2.164. Puutuja võrrand: $y = 6x + 18$; normaali võrrand: $y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$.
2.165. (1,5; 4,25).

- 2.166. $2x - y + 1 = 0$; $2x - y - 1 = 0$.
2.167. $x - y + 2 = 0$; $x - y - 2 = 0$.
2.168. $x = -2$; $x = 5$.
2.169. $\arctan \frac{4}{3}$.
2.170. $40^\circ 54'$ või $139^\circ 6'$.
2.171. a) Kohal $x = 1$ on joonel käänupunkt; b) kohal $x = 2$ on joonel käänupunkt; c) kumer: $-1 < x < 1$; nõgus: $x < -1$ ja $x > 1$; käänupunkte ei ole.
2.172. a) $x = -2$; $y = 0$; b) $x = 0$; c) $y = \pm \frac{b}{a} x$.
2.174. $a = -2$ või $a(\frac{\pi}{4}) = -2$.
2.175. $-\frac{a}{2}$; $+\frac{a}{2}$.
2.176. $a = \sqrt{3}$; $b = -\sqrt{3}$.
2.177. 5; 8.
2.178. $h = 2r$.
2.179. $h = \frac{4}{3} R$.
2.180. $h = 40$; $R = 10\sqrt{2}$.
2.181. $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$.
2.182. a) Tõuseb; b) tõuseb; c) langeb.
2.183. $p = -4$; $q = 5$.

10. Integraal

- 1.184. a) $\frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$; b) $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \frac{1}{7} \ln|x| + C$; c) $C - \frac{1}{8(2x-3)^4}$; d) $C - \frac{5}{33} (8-3x)^{\frac{11}{5}}$; e) $\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$;
1.185. a) $\frac{\ln|2x+5|}{2} + C$; b) $-\frac{1}{10} \ln|3-\frac{5x^2}{2}| + C$; c) $\frac{1}{6} \ln|8z^3+19| + C$; d) $\frac{3x}{5} \sqrt[3]{x^2} + C$.
1.186. a) $-2e^{-\frac{x}{2}} + C$; b) $\frac{1}{4} e^{4x} + C$; c) $\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{1}{2e^{2t}} + C$; d) $\frac{a^{2x-1}}{2 \ln a} + C$.
1.187. a) $e^{x^3+x^2+x-1} + C$; b) $-\frac{1}{6} \ln|1-3e^{2x}| + C$;

- $c) \frac{5^{\sin x}}{\ln 5} + C$; $d) C - \frac{1}{2} \cos(2x + 3)$.
- 1.188. $a) -\frac{1}{3} \cot(3x + 2) + C$; $b) \frac{1}{3} \tan(3x + 5) + C$;
 $c) -\frac{\cos(2v - 1)}{2} + C$; $d) \ln|\sin x| + C$;
 $e) -\frac{1}{4} \ln|3 + 2 \cos 2x| + C$.
- 1.189. $a) \cos x - \cot x + C$; $b) \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$;
 $c) \ln|\sin 2x| + C$; $d) 2 \ln|\sin x| - \cot x + C$.
- 1.190. $a) -e^{-x}(x + 1) + C$; $b) \frac{e^{2x}}{2}(x - \frac{1}{2}) + C$;
 $c) \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + C$; $d) x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.
- 1.191. $a) \frac{1}{2}(v \sin 2v + \frac{\cos 2v}{2}) + C$; $b) -x^2 \cos x + 2(\sin x \cos x) + C$; $c) -\frac{1}{2}(\frac{x}{\sin^2 x} + \cot x) + C$;
 $d) x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.
- 1.192. $a) \frac{(x^2 - 1)}{2} \ln|x - 1| - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C$;
 $b) \frac{2}{3} \sqrt{x^3} (\ln|x| - \frac{2}{3}) + C$; $c) C - \cos e^x$;
 $d) -\frac{1}{3^{2x^2}} (\ln|x| + \frac{1}{2}) + C$.
- 1.193. $a) \frac{x}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln|x - 2| + C$; $b) \ln|\frac{x - 3}{x - 2}| + C$;
 $c) \frac{3}{8} \ln|\frac{x - 1}{x + 1}| + \frac{3x + 4}{4(x + 1)^2} + C$; $d) \ln|\frac{(x - 1)^3}{x + 2}| + C$.
- 1.194. $a) \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{(x - 1)^8}{|x|} + C$; $b) \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + C$;
 $c) \frac{1}{3} \arctan \frac{x - 3}{3} + C$.
- 1.195. $a) 4\frac{2}{3}$; $b) \frac{1}{2}$; $c) \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$; $d) 4e$; $e) -78$.
- 1.196. $a) \frac{1}{2} \ln 2$; $b) \frac{10\sqrt{2} - 7\sqrt{5}}{27}$; $c) 5(1 - \sqrt{6})$;
 $d) -\frac{16}{9} + \frac{10\sqrt{5}}{9}$; $e) 1 + \frac{1}{4} \ln \frac{e^4 + 1}{e^8 + 1}$.
- 1.197. $a) -2$; $b) \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} + 1)$.
- 1.198. $20\frac{5}{6}$.

- 1.199. $5\frac{1}{3}$.
1.200. $2\frac{2}{3}$.
1.201. $\ln 2$.
1.202. $21\frac{1}{3}$.
1.203. $4 \ln 4$.
1.204. $\frac{1}{4}\pi$.
1.205. a) 0,69377, 0,69315; b) 18,(2); 18,0; c) 6,0656, 6,0896.
1.206. 6a.
1.207. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.
1.208. $\sqrt{2}$.
1.209. $\frac{3}{2}\pi a$.
1.210. $3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln (3 + 2\sqrt{2})$.
1.211. $4\pi\sqrt{5}$.
1.212. $4\pi^2 ab$.
1.213. a) hajub; b) $\frac{1}{a}$; c) -1.
1.214. a) hajub; b) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$; c) π .
2.184. a) $3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; b) $2x^5 - \frac{1}{3} + C$; c) $\frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| - \frac{1}{2x^2} + C$; d) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{s^2} + \frac{18}{7}s\sqrt{s} + \frac{9}{5}6\sqrt[3]{s^2} + \frac{16}{3}s^2\sqrt[4]{s} + C$; e) $-\frac{1}{6(3s+2)} + C$.
2.185. a) $-\frac{1}{8}(5-6x)^{\frac{4}{3}} + C$; b) $\frac{15}{8}\sqrt[5]{(x^3+2)^6} + C$; c) $-\frac{1}{10} \ln |1-10t| + C$; d) $\frac{1}{3} \ln |x^3+1| + C$; e) $\ln(x^2+1) + C$; f) $3y^2\sqrt[3]{y} + C$.
2.186. a) $-e^{-t} + C$; b) $-\frac{1}{3}e^{-3x} + C$; c) $e^x + \tan x + \frac{x}{2} + C$.
2.187. a) $\frac{2^{3r}}{3 \ln 2} + C$; b) $\frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{4x^4} + C$; c) $2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + C$.
2.188. a) $-\frac{1}{2} \cos 2v + C$; b) $-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$; c) $\frac{1}{5} \tan 5u + C$; d) $-\frac{5}{3} \cot \frac{3x}{5} + C$; e) $\frac{2}{\pi} \tan \frac{\sqrt{x}}{2} + C$.

- 2.189. a) $-\ln |\cos x| + C$; b) $\frac{1}{4} \sin^4 z + C$; c) $-\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos m| + C$; d) $-3 \cot x + 2 \cos x + C$;
 e) $\sqrt[3]{\sin x} + C$.
- 2.190. a) $e^x (x - 1) + C$; b) $-\frac{e^{-3x}}{9} (1 + 3x) + C$;
 c) $x \sin x + \cos x + C$; d) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$.
- 2.191. a) $x \sin x + \cos x + \frac{\sin^2 x}{2} + C$; b) $\frac{t^2 + 1}{2} \arctan t - \frac{t}{2} + C$; c) $e^x (x^2 - 2x + 3) + C$; d) $e \ln |s| - s + C$.
- 2.192. a) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$; b) $-2e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 4x + 8) + C$;
 c) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} (\ln |x| - \frac{2}{3}) + C$.
- 2.193. a) $\frac{1}{2} \ln |1 - \frac{2}{x}| + C$; b) $\frac{1}{4} \ln |\frac{x-3}{x+1}| + C$; c) $\frac{3}{2} \ln |x - 1| - \frac{9}{2} \ln |x + 1| + 4 \ln |x + 2| + C$; d) $\ln \frac{6(x-2)^2}{x-3}$.
- 2.194. a) $\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \ln |x^3 - a^3| + C$; b) $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 7| + C$;
 c) $\frac{1}{4} \arctan \frac{x+3}{4} + C$.
- 2.195. a) $3\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; e) $-\frac{1}{5}(e^{-5} - 1)$.
- 2.196. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{7}{12}$; c) $3\frac{7}{12}$; d) 1; e) 2.
- 2.197. $-\frac{2}{e} + 1$; b) 1.
- 2.198. $4\frac{1}{7}$.
- 2.199. $4\frac{1}{2}$.
- 2.200. $2\frac{1}{4}$.
- 2.201. 27.
- 2.202. $20\frac{5}{6}$.
- 2.203. $17\frac{1}{2} - 6 \ln 6$.
- 2.204. $63\frac{3}{4}$.
- 2.205. a) 3,131; 3,142; b) 3690, 3660; c) 0,841(6); 0,8(1).
- 2.206. $2\pi r$.
- 2.207. $\ln \tan \frac{3\pi}{8}$.
- 2.208. 8a.
- 2.209. $2\pi r$ (ringjoon keskpunktiga $(r; \frac{\pi}{2})$ ja raadiusega r).
- 2.210. $\frac{8}{9} (\frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} - 1)$.

2.211. $4\sqrt[4]{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}$.

2.212. $\frac{56}{3}\sqrt[3]{a^2}$.

2.213. $\frac{1}{3}$; b) hajub; c) $1 - \ln 2$.

2.214. a) $\frac{1}{3}$; b) hajub; c) 0 .

11. Kahemuutuja funktsioon, määramispiirkond, piirväärtus

1.215.

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ või $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$; b) $x^2 + y^2 \geq 16$; c) $R^2 - x^2 - y^2 \neq 0$;

d) $x^2 + y^2 < 9$.

1.216. a) $(u > 0) \wedge (v \geq 0)$; b) $(s \neq 0) \wedge (t \neq 0)$; c) $y =]-\infty, +\infty[$;
 $x = [-3; -1]$; d) $4 \leq x^2 + y^2 < 2$.

1.217. 2,5 .

1.218. -2,5 .

1.219. 1 .

1.220. 2 .

1.221. a) Ringjooned $x^2 + y^2 = c^2$, $-\infty < z < +\infty$; b) sirged
 $y = -C^2x - C^3$, $-\infty < z < +\infty$.

1.222. a) -3; b) -1; c) 1; d) 1 .

2.215. a) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$; b) kogu xy-tasand; c) $x^2 + y^2 \leq 4$;
d) $v^2 + t^2 > 9$.

2.216. a) $(q > 0) \wedge (r > 0) \vee (q < 0) \vee (r < 0)$; b) $x < \frac{\sqrt{2}}{4} + 2$;
c) $x =]-\infty, +\infty[$, $y = [-1; 1]$; d) $-x + 1 \leq y \leq x + 1$.

2.217. 2,5 .

2.218. 5 .

2.219. -2 .

2.220. $\frac{9}{16}$.

2.221. a) $x^2 + y^2 = c^2$, $z \neq 0$, $0 < z < +\infty$; b) ellipsoid
 $2x^2 + 3y^2 = c^2$, $-\infty < z < +\infty$.

2.222. a) 5; b) 0; c) 1; d) 0 .

12. Osatuletised ja täisdiferentsiaal

1.223. a) $z'_x = \frac{1}{y}$; $z'_y = -\frac{x}{y^2}$; b) $u'_x = 2x + 3y$; $u'_y = 3x + 8y$; c) $z'_x = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$, $z'_y = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)$; d) $z'_v = -\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u}$,
 $z'_u = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}$; e) $z'_x = \frac{\ln 5}{y} 5^{-\frac{x}{y}}$, $z'_y = \frac{x}{y^2} 5^{-\frac{x}{y}} \ln 5$.

1.224. a) $z'_x = \frac{1}{x + \ln y}$, $z'_y = \frac{1}{y(x + \ln y)}$; $s'_u = \frac{v}{v^2 + u^2}$; $s'_v = -\frac{u}{v^2 + u^2}$; c) $z'_x = -\frac{\ln y}{x \ln x}$; $z'_y = \frac{1}{y \ln x}$; d) $z'_x = y \cos xy + \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}$, $z'_y = x \cos xy - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y}$; e) $z'_x = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$.

1.225. $z'_x(-2; 0,5) = -4$, $z'_y(-2; 0,5) = 1$.

1.226. $z'_x(-2; 0) = \frac{\pi}{4}$, $z'_y(-2; 0) = -1$.

1.229. $-\frac{y^2}{xy - 1}$.

1.230. $\frac{ye^{xy} - e^y - ye^x}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$.

1.231. $\frac{1}{3}$.

1.232. $2y + 1 = 0$.

1.233. $(1; 1), (-3; 1)$.

1.234. $y' = \frac{2 - x - y}{x + y + 1}$, $y'' = -\frac{x^2 + y^2 + 9}{(x + y + 1)^3}$.

1.235. a) $dz = xy^2(2y^2 - 3xy + 4x^2) dx + x^2y(4y^2 - 3xy + 2x^2) dy$; b) $dz = \frac{2}{(x - y)^2} (xdy - ydx)$;

c) $dz = \frac{y dx + x dy}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}$; d) $dz = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}} (dx - \frac{x}{y} dy)$.

- 1.236. 0,25 e.
1.237. 0,08.
1.238. $du = -2,8, \Delta u = -2,44$.
1.239. $dz = 0,15; \Delta z = \arcsin \frac{11}{15} - \arcsin \frac{3}{5}$.
1.240. 1,06.
1.241. 0,98.
1.242. $19,5 \pm 0,13$.
1.243. $1,2\pi \text{ dm}^3$.
1.249. $2x + 4y - z - 3 = 0$.
1.250. $4x + 2y - z - 3 = 0; \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = 3-z$.
1.251. $5x + y - z - 3 = 0, \frac{x-1}{5} = y = 2-z$.
1.252. $\cos \alpha = -\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
1.253. $(1; 2; -3), (-1; -2; 3)$.
1.254. $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})(\sqrt{\frac{y}{2x}}; \sqrt{\frac{x}{2y}}); y = x$ punktides.
1.255. $-\frac{15}{4}\sqrt{\frac{3}{13}}$.
1.256. $-\frac{22}{\sqrt{5}}$.
1.257. $-\frac{30}{13}$.
1.258. a) $\min(1; 1; -82) \max(-1; -1; 82);$
 b) $\min(-\frac{17}{143}; \frac{7}{143}; -\frac{12}{143});$ c) $\min(0; 0; 1),$ d) $\min(0; 0; -8)$.
1.259. Vähiim $(3; -2; -11);$ suurim $(1; 2; 9)$.
1.260. Vähiim $(4; 2; -64);$ suurim $(2; 1; 4)$.
1.261. $\max(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{a}); \min(-a\sqrt{2}; -a\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{a})$.
1.262. $x = -\frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{b}{a}, y = -\frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{a}{b}$.
1.263. Kõik liidetavad on $\frac{a}{3}$.
1.264. $x = y = \sqrt[3]{2V}; z = 0,5 \sqrt[3]{2V}$.
1.265. $r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.
1.266. $(3; -1; 1)$.
2.223. a) $z'_x = 3x^2y - y^3; z'_y = x^3 - 3y^2x;$ b) $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}};$
 $z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}};$

$$c) u'_x = (6x - 4y) \cos(3x^2 + 5y - 4xy),$$

$$u'_y = (5 - 4x) \cos(3x^2 + 5y - 4xy); d) z'_x =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2}, z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}; e) z'_x = y \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}, z'_y = x \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}.$$

$$2.224. a) u'_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, u'_y = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}; b) z'_x = y x^{y-1},$$

$$z'_y = x^y \ln x; c) z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}; z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$d) z'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}(y + \sqrt{x^3 + y^3})}, z'_y =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3 + y^3} + 3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}(y + \sqrt{x^3 + y^3})}; e) z'_x = 2^{\sin xy}.$$

$$\cdot y(xy \ln 2 \cos xy + 1), z'_y = x 2^{\sin xy} (xy \ln 2 \cos xy + 1).$$

$$2.225. z'_x(1; 2) = 4,$$

$$z'_y(1; 2) = 5.$$

$$2.226. z'_x(3; 3) = z'_y(3; 3) = -\frac{1}{54}.$$

$$2.229. \frac{3x^2y - y^3}{3y^2x - x^3}.$$

$$2.230. \frac{2xy}{e^y - x^2}.$$

$$2.231. -1\frac{1}{3}.$$

$$2.232. \pm \frac{3}{4}.$$

$$2.233. (-1; -1); (-1; 3).$$

$$2.234. y' = \frac{2x - 3y - 2}{3x - 8y - 3}; y'(2; 0) = \frac{2}{3}, y''(2; 0) = \frac{14}{27}.$$

$$2.235. a) (y dx + x dy) \cos xy, b) \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2};$$

$$c) \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}; d) 2^y (dx + x \ln 2 dy).$$

- 2.236. $-0,23$.
2.237. $\frac{1}{36} \cdot 2.238$. $du = 13$, $\Delta u = 14$.
2.239. $dz = 0,04$, $\Delta z = 0,0431$.
2.240. $1,08$.
2.241. $0,005$.
2.242. $1,8 \pm 0,2$.
2.243. $(4700 \pm 100) \text{ cm}^3$.
2.249. $\frac{x-3}{3} = \frac{x-4}{4} = \frac{5-z}{5}$; normaal pole määratud punktis $(0; 0; 0)$.
2.250. $2x + 6y - z - 4 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = 4 - z$.
2.251. $2x + y - z - 2 = 0$, $\frac{x-1}{2} = y - 2 = 2 - z$.
2.252. $x + y - z \pm 9 = 0$.
2.253. $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.
2.254. $(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}); (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$.
 Ei ole risti.
2.255. $-\frac{1}{2}$.
2.256. $\sqrt{3} + 1$.
2.257. -22 .
2.258. a) min $(6; 6; -2)$; b) puudub ekstreemum;
 c) min $(0; 0; 0)$; d) max $(4; 4; 12)$.
2.259. min $(2; -\frac{3}{2}; -4\frac{1}{2})$; max $(2; \frac{1}{2}; 3\frac{1}{2})$.
2.260. max $(0, -5; 41)$; min $(-2; -1; -3)$.
2.261. max $(-a; -a; a^2)$; max $(a; a; a^2)$; min $(-a; a; -a^2)$;
 min $(a; -a; -a^2)$.
2.262. min $(1; 1; 2)$.
2.263. $x = y = h$ (kuup).
2.264. $x = y = \frac{2R}{\sqrt{3}}$; $z = \frac{R}{\sqrt{3}}$ (kõrgus).
2.265. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$.
2.266. $(\frac{21}{13}; 2; \frac{63}{26})$.

13. Diferentsiaalvõrrandid

- 1.267. $y = x^2 + C$.
1.268. $x^2 - y^2 = C$.

- 1.269. $y = -x^2 + 5x + C.$
1.270. $x^2 + y^2 = C.$
1.271. $y = \frac{C}{x}.$
1.272. $y^2 = x^2 - 2x - 2 \ln |x| + C.$ $-\frac{1}{2}$
1.273. $y = C(x+1) + 2.$ 1.274. $y = Ce^{x^2}.$ 1.275. $e^{\frac{x}{y}} = Cx.$
1.276. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = C.$
1.277. $y^2 = 2x^2 (\ln |x| + C).$
1.278. $y = Ce^{\frac{y}{x}}.$
1.279. $y = x - \frac{x}{\ln C |x|}.$
1.280. $x^2 + y^2 = Cy.$
1.281. $y = Cx^3 - x^2.$
1.282. $y = \frac{x}{C - \ln x}.$
1.283. $y = Ce^x - 2 - 2x - x^2.$
1.284. $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2.$
1.285. $y = e^{\sin x} \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right).$
1.286. $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{xe^x}.$
1.287. $y = Cx - 1.$
1.288. $y = \frac{1}{x \ln |Cx|}.$
1.289. $x = Ce^{\arctan \frac{y}{x}}.$
1.290. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1.$
1.291. $y = \frac{1}{2} (x+1)^4 + C(x+1)^2.$
1.292. $y = x - 1 + Ce^{-x}.$
1.293. $x^2 + y^2 = 20.$
1.294. $e^x + e^{-y} = 2.$
1.295. $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}.$
1.296. $y = -x.$
1.297. $y = \frac{x^2 + x \ln |x| - x}{x+1}.$
1.298. $y^2 = 2x^2(1 + \ln |x|).$
1.299. $y = -\ln |\cos x| + C_1 x + C_2.$

- 1.300. $y = x \ln |x| + \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2 - x$.
1.301. $y = C_1 \frac{x^2}{2} - C_1 x + C_2$.
1.302. $y = C_1 x \ln |x| - C_1 x + C_2$.
1.303. $y = C_1 x^2 + C_2$.
1.304. $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C_1 x + C_2$.
1.305. $y = \frac{1}{2} \ln^2 |x| + C_1 \ln |x| + C_2$.
1.306. $y = x - C_1 \ln |y - C_1| + C_2$.
1.307. $y = x \ln |x| - x + C_1 x + C_2$.
1.308. $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-2x}$.
1.309. $y = C_1 - \frac{x}{4} C_2 e^{7x}$.
1.310. $y = C_1 e^{-\frac{x}{4}} + C_2 x e^{-\frac{x}{4}}$.
1.311. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.
1.312. $y = e^{-\frac{7}{2} x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x)$.
1.313. $y = 1 + e^{\frac{5}{3} x}$.
1.314. $y = \frac{1}{6} (e^{x+1} - e^{-5(x+1)})$.
1.315. $y = e^{3x} (\cos x + \sin x)$.
1.316. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 5x - 2$.
1.317. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$.
1.318. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{4} e^{-x}$.
1.319. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1 + \frac{1}{6} e^x$.
1.320. $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x - \frac{3}{2} x)$.
1.321. $y = \frac{1}{8} (e^{-x} - e^x + 10x e^x)$.
1.322. $y = \frac{16}{9} \sin 2x - \frac{4}{3} x \cos 2x + \cos x - \frac{2}{9} \sin x$.
2.267. $y = x + C$.
2.268. $y^2 + x^2 = C$.
2.269. $y = -x^2 + C$.
2.270. $y = Cx$.
2.271. $y = \frac{C}{x}$.

$$\underline{2.272.} \quad \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \ln |x - 1| + C.$$

$$\underline{2.273.} \quad (1 + y)(x - 1) = C.$$

$$\underline{2.274.} \quad y^3 = 3x - 3x^2 + C.$$

$$\underline{2.275.} \quad y = \frac{Cx^2 - x}{2x}.$$

$$\underline{2.276.} \quad y^3 = 3x^3 \ln C |x|.$$

$$\underline{2.277.} \quad \ln C |y| = -\frac{x^2}{2y^2}.$$

$$\underline{2.278.} \quad y^2 = 2x^2 \ln \frac{Cx^2}{|y|}.$$

$$\underline{2.279.} \quad \ln |y| + \frac{x}{y} = C.$$

$$\underline{2.280.} \quad y^2 = x^2 \ln Cx^2$$

$$\underline{2.281.} \quad y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}.$$

$$\underline{2.282.} \quad x^2 - y^2 = Cx.$$

$$\underline{2.283.} \quad y = e^{-x} \left(C + \frac{x}{2} \right).$$

$$\underline{2.284.} \quad e^x = Cy.$$

$$\underline{2.285.} \quad y = (x^2 + C_1) \sin x.$$

$$\underline{2.286.} \quad y = e^{-x^3} (x + C).$$

$$\underline{2.287.} \quad y = Cx^2 - x - \frac{1}{2}.$$

$$\underline{2.288.} \quad y = (x + C) \cdot (1 + x^2).$$

$$\underline{2.289.} \quad y = \frac{1}{x} (C - \cos x).$$

$$\underline{2.290.} \quad y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2.$$

$$\underline{2.291.} \quad Cx^3 e^{\frac{y}{2x^2}}.$$

$$\underline{2.292.} \quad y = \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x}.$$

$$\underline{2.293.} \quad y = -2x.$$

$$\underline{2.294.} \quad y = \sqrt[3]{5 + 3x} (1 - x).$$

$$\underline{2.295.} \quad y = e^{\sqrt{x-2}}.$$

$$\underline{2.296.} \quad y = x^2.$$

$$\underline{2.297.} \quad y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$\underline{2.298.} \quad y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + 1}.$$

- 2.299. $y = -\cos 2x + C_1 x + C_2$.
2.300. $y = \frac{x^2}{2} \ln |x| + \frac{x^4}{12} - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2$.
2.301. $y = C_1 e^x - x + C_2$.
2.302. $y = -C_1 \cos x - x + C_2$.
1.303. $y = C_1 \ln |x + 1| + C_2$.
2.304. $y = x \ln |x| - x + C_1 x + C_2$.
2.305. $y = x^2 + C_1 \ln |x| + C_2$.
2.306. $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln |x| + C_2$.
2.307. $y = -\ln |\cos x| + C_1 x + C_2$.
2.308. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
2.309. $y = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{3}}$.
2.310. $y = e^{C_1 + C_2 x}$.
2.311. $y = C_1 \cos \sqrt{\frac{5}{2}} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{5}{2}} x$.
2.312. $y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{\frac{6}{2}} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{6}{2}} x)$.
2.313. $y = e^{\frac{x-3}{3}}$.
2.314. $y = e^{3x}(x - 1)$.
2.315. $y = e^{4x} (\frac{4}{3} \cos 3x + \sin 3x)$.
2.316. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$.
2.317. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$.
2.318. $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{29} e^{-2x}$.
2.319. $y = e^x (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x) + (\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}) e^{3x}$.
2.320. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x|$.
2.321. $y = \frac{3}{2} e^x - \frac{e^{2x}}{2} (\sin x + \cos x)$.
2.322. $y = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x + e^x) + e^{-x}$.

14. Kahekordsed integraalid

1.323. 15.

1.324. $\frac{133}{3}$.

1.325. $\frac{15}{2}$.

1.326. $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$.

1.327. 0,5.

1.328.
$$\int_3^5 dx \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y) dy.$$

1.329.
$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x,y) dy.$$

1.330.
$$\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y) dy +$$

$$+ \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y) dy.$$

1.331.
$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x,y) dy.$$

1.322.
$$\int_{-2}^2 dx \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy.$$

1.333. $10\frac{2}{3}$.

1.334. $4\frac{1}{2}$.

1.335. $7 \ln 2$.

1.336. $\sqrt{2} - 1$.

1.337. $\frac{16}{3}2$.

1.338. $\frac{7a}{4}$.

$$\underline{1.339.} \quad 1.$$

$$\underline{1.340.} \quad \frac{1}{12}.$$

$$\underline{1.341.} \quad \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}.$$

$$\underline{1.342.} \quad 2.$$

$$\underline{1.343.} \quad \frac{\sqrt{r}}{4} [(1 + R^2) \ln(1 + R^2) - R^2].$$

$$\underline{1.344.} \quad \frac{R^3}{3} \left(\sqrt{r} - \frac{4}{3} \right).$$

$$\underline{1.345.} \quad 42\frac{2}{3}.$$

$$\underline{1.346.} \quad \frac{abc}{6}.$$

$$\underline{1.347.} \quad 78\frac{15}{32}.$$

$$\underline{1.348.} \quad 16.$$

$$\underline{1.349.} \quad 16\frac{1}{5}.$$

$$\underline{2.323.} \quad 20.$$

$$\underline{2.324.} \quad 0.$$

$$\underline{2.325.} \quad 0.$$

$$\underline{2.326.} \quad \frac{40}{3}.$$

$$\underline{2.327.} \quad 9.$$

$$\underline{2.328.} \quad \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx \int_{1-2x}^{x+3} f(x, y) dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy +$$

$$+ \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int_x^{5-2x} f(x, y) dy.$$

$$\underline{2.329.} \quad \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{3}{2}} dx \int_{2-x}^{0} f(x, y) dy.$$

$$\underline{2.330.} \quad \int_0^1 dx \int_{\frac{0}{\sqrt{x}}}^{\frac{0}{x^2}} f(x, y) dy.$$

$$\underline{2.331.} \quad \int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$2.332. \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y) dy.$$

$$2.333. \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

$$2.334. 20\frac{5}{6}.$$

$$2.335. 4.$$

$$2.336. 6 - 4 \ln 2.$$

$$2.337. \frac{7}{6}.$$

$$2.338. \frac{a^2}{4} (\pi - 2).$$

$$2.339. (e - 1)^2.$$

$$2.340. \ln \frac{4}{3}.$$

$$2.341. \pi - 2.$$

$$2.342. -\frac{\pi}{16}.$$

$$2.343. \frac{\pi}{8} (\pi - 2).$$

$$2.344. 6^{-1} \pi^2$$

$$2.345. \frac{79}{60} a^3.$$

$$2.346. 12.$$

$$2.347. \frac{1}{6}.$$

$$2.348. \frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

$$2.349. \frac{88}{105}.$$

15. Kolmekordsed integraalid

$$1.350. 6.$$

$$1.351. 18.$$

$$1.352. 8.$$

$$1.353. \frac{3}{35}.$$

$$1.354. \frac{\pi a}{2}.$$

$$1.355. \frac{\pi}{8}.$$

$$2.350. \frac{1}{48}.$$

$$2.351. \frac{1}{110}.$$

$$2.352. \frac{7}{12}.$$

$$2.353. 4(4 - 3 \ln 3).$$

$$\underline{2.354.} \quad \frac{4}{15} \sqrt[5]{R^5}.$$

$$\underline{2.355.} \quad \frac{4}{15} \sqrt[5]{(R^5 - r^5)}.$$

16. Joonintegraalid

$$\underline{1.356.} \quad \sqrt{5} \ln 2.$$

$$\underline{1.357.} \quad 24.$$

$$\underline{1.358.} \quad 2\pi a^3.$$

$$\underline{1.359.} \quad 4\sqrt[4]{a} \sqrt{a}.$$

$$\underline{1.360.} \quad \frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\underline{1.361.} \quad x_0 = \sqrt{1}; y_0 = \frac{4}{3} a.$$

$$\underline{1.362.} \quad 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(\sqrt{3} + 2).$$

$$\underline{1.363.} \quad \frac{4}{3}.$$

$$\underline{1.364.} \quad 3.$$

$$\underline{1.365.} \quad -\frac{56}{15}.$$

$$\underline{1.366.} \quad 32.$$

$$\underline{1.367.} \quad -4.$$

$$\underline{1.368.} \quad -2\pi ab.$$

$$\underline{1.369.} \quad 13.$$

$$\underline{1.370.} \quad \frac{4}{3}; \frac{3}{2}.$$

$$\underline{1.371.} \quad \frac{R^4}{2} \pi.$$

$$\underline{1.372.} \quad -\frac{\pi a^3}{8}.$$

$$\underline{2.356.} \quad \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$

$$\underline{2.357.} \quad 1 + \sqrt{2}.$$

$$\underline{2.358.} \quad 2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2).$$

$$\underline{2.359.} \quad \frac{64}{3} a^3.$$

$$\underline{2.360.} \quad \frac{8a\pi^3 \sqrt{2}}{3}.$$

$$\underline{2.361.} \quad x_0 = \frac{2}{5}; y_0 = -\frac{1}{5}; z_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{2.362.} \quad \frac{19}{3}.$$

$$\underline{2.363.} \quad 0.$$

$$\underline{2.364.} \quad 4.$$

$$\underline{2.365.} \quad -8.$$

$$\underline{2.366.} \quad 0.$$

2.367. $-2 \sin 2.$

2.368. $-2\sqrt{1}.$

2.369. $0.$

2.370. $\frac{17}{2}; 1.$

2.371. $-\frac{4}{3}.$

2.372. $0.$

17. Read

1.373. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

1.374. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$

1.375. $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{9}{7} + \frac{16}{9} + \dots$

1.376. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{30} + \dots$

1.377. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \dots$

1.378. $15.$

1.379. $152.$

1.380. $2.$

1.381. $3.$

1.382. $10.$

1.383. Hajub ($\sqrt[n]{n} \geq \frac{1}{n}$).

1.384. Hajub ($a_n \rightarrow 0$).

1.385. Hajub ($a_n \rightarrow 0$).

1.386. Koondub.

1.387. Koondub.

1.388. Hajub.

1.389. Koondub.

1.390. Koondub.

1.391. Koondub.

1.392. Koondub.

1.393. Hajub.

1.394. $1.$

1.395. $\frac{1}{3}.$

1.396. Koondub, aga mitte absoluutselt.

1.397. Hajub.

- 1.398. $-1 < x < 1.$
1.399. $-1 \leq x < 1.$
1.400. $-\infty < x < \infty.$
2.373. $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$
2.374. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$
2.375. $3 - 3 - \frac{9}{7} - \frac{6}{7} - \dots$
2.376. $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \dots$
2.377. $\frac{1}{2} - \frac{2}{9} + \frac{3}{32} - \frac{24}{625} + \dots$
2.378. $\frac{30}{163}$
2.379. $\frac{163}{60}$
2.380. $\frac{85}{99}$
2.381. $\frac{39}{90} = \frac{13}{30}$
2.382. $\frac{122}{900} = \frac{61}{450}$
2.383. Koondub.
2.384. Hajub.
2.385. Hajub.
2.386. Koondub.
2.387. Koondub.
2.388. Hajub.
2.389. Hajub.
2.390. Jääb lahtiseks.
2.391. Hajub.
2.392. Koondub,
2.393. Koondub.
2.394. $\frac{1}{2}$
2.395. $\frac{23}{90}$
2.396. Koondub absoluutselt.
2.397. Koondub, aga mitte absoluutselt.
2.398. $-1 \leq x \leq 1.$
2.399. $x < -1 \vee x > 1.$
2.400. $-\infty < x < \infty.$

18. Tõenäosuse mõiste. Sündmuste summa ja
korrutise tõenäosus

- 1.401. $A \cap B$, 6 silma nii esimesel kui ka teisel viskel;
 $A \cup B$, 6 silma kas esimesel või teisel viskel.
- 1.402. $A \cup B$, õigeks ajaks tuleb kas Ants või Märt; $A \cap B$,
õigeks ajaks tulevad nii Ants kui ka Märt.
- 1.403. 0,483.
- 1.404. 0,994.
- 1.405. 40; $\frac{2}{3}$.
- 1.406. 0,08.
- 1.407. 0,5; 0,8.
- 1.408. a) 0,5; b) 0,17; c) 0,67; d) 0,5.
- 1.409. a) 0,25; b) 0,17; c) 0,17.
- 1.410. a) 0,16; b) 0,06.
- 1.411. 0,008.
- 1.412. 0,083.
- 1.413. a) $\frac{16}{81}$; b) $\frac{1}{6}$.
- 1.414. $\frac{1}{36}$.
- 1.415. $\frac{1}{4}$.
- 1.416. 0,56.
- 1.417. 0,07.
- 1.418. a) 0,25; b) 0,21; c) 0,54.
- 1.419. $\frac{2}{3}$.
- 1.420. 0,75.
- 1.421. 0,87.
- 1.422. 4.
- 1.423. 0,94.
- 1.424. 0,92.
- 1.425. 0,94.
- 1.426. 0,98.
- 1.427. 0,94.
- 1.428. 0,448.
- 1.429. 0,504.

- 1.430. 0,197.
1.431. 0,38.
1.432. 0,417.
1.433. 0,504.
1.434. a) 0,3024; b) 0,035.
1.435. 0,3.
1.436. a) 0,99; b) 0,42.
1.437. $\frac{5}{14}$.
1.438. 0,79.
1.439. 0,28.
1.440. 0,442.
1.441. 0,087.
1.442. $\frac{10}{21}$.
1.443. 0,36.
1.444. 0,28.
1.445. a) 0,057; b) 0,23; c) 0,086; d) 0,025.
1.446. a) 0,058; b) 0,032; c) 0,204; d) 0,40; e) 0,77.
1.447. 0,087.
1.448. a) 0,24; b) 0,36; c) 0,64.
1.449. Ei.
1.350. Jaa.
1.351. Jaa.
2.401. $A \cup B$, kas 1 või 6 silma; $A \cap B$, nii 1 kui ka 6 silma (võimatu).
2.402. $A \cap B \cap C$ - tabatakse nii esimese, teise kui ka kolmanda lasuga; $A \cup B \cup C$ - tabatakse kas esimese, teise või kolmanda lasuga.
2.403. 0,14.
2.404. 0,49.
2.405. $\frac{2}{9}$.
2.406. a) 0,096; b) 0,008; c) 0,512; d) 0.
2.407. 0,11; 0,89.
2.408. a) 0,4; b) 0,27; c) 0,33; d) 0,6; e) 0,67.
2.409. a) 0,33; b) 0,56; c) 0,19.
2.410. 0,57.
2.411. 0,08.
2.412. 0,08.

- 2.413. 0,23.
2.414. 0,72.
2.415. 0,765.
2.416. 0,16.
2.417. 0,94.
2.418. 0,33.
2.419. $\frac{5}{18}$.
2.420. 0,5.
2.421. 0,998.
2.422. 5.
2.423. 0,75.
2.424. 0,5.
2.425. 0,6.
2.426. 0,3.
2.427. a) 0,36; b) 0,91.
2.428. 0,92.
2.429. 0,244.
2.430. 0,3; 0,6.
2.431. 0,122.
2.432. 0,486.
2.433. 0,2.
2.434. $\frac{2}{n-1}$.
2.435. a) 0,05; b) 0,0009; c) 0,07; d) 0,4; e) 0,03.
2.436. $\frac{15}{77}$.
2.437. a) 0,33; b) 0,21; c) 0,03.
2.438. 0,47.
2.439. 0,42.
2.440. 0,397.
2.441. 0,92.
2.442. 0,08.
2.443. 0,696.
2.444. 0,305.
2.445. a) 0,12; b) 0,43; c) 0,40; d) 0,34.
2.446. a) 0,00002; b) 0,000002; c) 0,00001; d) 0,0004;
e) 0,94; f) 0,32.
2.447. 0,29.

- 2.448. 0,194.
2.449. Jaa.
2.450. Ei.
2.451. Sõltuvad.

19. Täistõenäosuse valem. Bayesi valem

- 1.452. 0,77.
1.453. 0,33.
1.454. 0,51.
1.455. 0,52.
1.456. 0,82.
1.457. 0,82.
1.458. 0,614.
1.459. 0,6.
1.460. 0,263.
1.461. 0,46.
1.462. 0,32.
1.463. a) 0,814; b) 0; c) 0,186.
1.464. $\frac{6}{7}$.
1.465. 0,17.
2.452. 0,87.
2.453. 0,51.
2.454. 0,95.
2.455. 0,47.
2.456. 0,76.
2.457. 0,57.
2.458. 0,34.
2.459. Spordiseltsil A (0,544).
2.460. 0,215.
2.461. $\frac{7}{9}$.
2.462. a) 0,95; b) 0,91.
2.463. 0,175; 0,37; 0,28; 0,175.
2.464. 0,24.
2.465. 0,6.

20. Binomiaalne jaotusseadus

- 1.466. 0,124.
1.467. 0,0038.
1.468. 0,21.
1.469. 0,663.
1.470. 0,784.
1.471. 0,558.
1.472. 0,375.
1.473. $\frac{5}{16}$.
1.474. 5.
1.475. 6.
1.476. 9.
1.477. 191; 192; ... ; 197.
2.466. 0,432.
2.467. 0,26.
2.468. 0,835.
2.469. 0,12.
2.470. 0,321.
2.471. 0,82.

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

- 2.473. 0,33; 5.
2.474. 5.
2.475. 79; 80.
2.476. 51.
2.477. 3; 1; 0,395.

21. Keskmise tendentsi mõõdud. Hajuvusmõõdud

- 1.478. 4,67; 8; 3,43; 5,29.
1.480. 9,375.
1.481. A: 9,94; 9,9; B: 13,24; 13; 12.
1.482. $n = 44$; $\bar{x} = 75,37$; $Me = 75,45$; $Mo = 75,48$.
1.483. 28,08; 28,6; 27,8.
1.484. 4,92 rbl.

- 1.485. 0,32 (harmooniline keskmine).
1.486. $|x| = 4,25$; $\sigma = 4,91$.
1.487. $\sigma = 2,92$; $Q = 1,99$; $V = 4,33 \%$.
1.488. $\bar{x} = 286,7$; $\sigma = 10,44$; $V = 3,64 \%$.
2.478. 12,4; 8; 5,16; 16,52.
2.480. 84.
2.481. I - 40; 39; II - 90,2; 89,5.
2.482. 1) $u = 57$; $P_{25} = 136$; $P_{50} = 145$; $P_{75} = 153$; $160 = P_{85}$;
 $150 = P_{67}$; $140 = P_{37}$; $\bar{x} = 147$; $Me = 146,4$; $Mc = 145,2$.
2) $u = 55$; $P_{25} = 162,62$; $P_{50} = 172,00$; $P_{75} = 179,19$;
 $160 = P_{52}$; $150 = P_{2,1}$; $140 = P_{0,05}$; $\bar{x} = 170,80$; $Me =$
 $= 172,00$; $Mo = 174,40$.
2.483. $\bar{x} = 66,9$; $Me = 67,5$; $Me = 68,7$.
2.484. 0,36 rbl.
2.485. 0,4 (harmooniline keskmine).
2.486. $|x| = 3,375$; $\sigma = 4,3$.
2.487. $\sigma_1 = 10,2$; $\sigma_2 = 11,5$; $Q_1 = 0,064$; $Q_2 = 0,078$; $V_1 =$
 $= 0,07$; $V_2 = 0,11$.
2.488. 5,8 % < 15,1 %.

22. Punkthinnangud. Vahemikhinnangud

- 1.489. $11,94 < \bar{x}_{pop} < 16,06$.
1.490. $25,79 < \bar{x}_{pop} < 28,73$.
1.491. $22,47 < \bar{x}_{pop} < 25,53$.
1.492. $1,33 < \sigma_{pop} < 3,49$.
1.493. $9,88 \leq \bar{x}_{pop} \leq 10,12$.
1.494. $[34,7; 48,1]$; $[42,3; 58,1]$.
1.495. $KS = 2,49$. Oluline 0,05 niivool, kuid mitte 0,01 niivool.
1.496. Erinevus pole oluline. $KS = 1,47$.
1.497. Erinevus ei ole oluline. $KS = 1,7$.
1.498. Ei ole. $KS = 1,26$.
1.499. $Jaa.KS = 2,71$.

- 2.489. $7,25 < \bar{x}_{\text{pop}} < 13,15.$
2.490. $92,11 < \bar{x}_{\text{pop}} < 97,89.$
2.491. $19,31 < \bar{x}_{\text{pop}} < 20,69.$
2.492. $0,41 < \delta_{\text{pop}} < 1,39.$
2.493. $2193,1 < \bar{x}_{\text{pop}} < 2306,9.$
2.494. Diabeetikuid on 0,4 %, $\delta_{\%} = 0,047$; 95-lised usalduspiirid: $0,308 \% < \%_{\text{diab.}} < 0,492 \%.$
2.495. Ei. KS = $\sqrt{3}.$
2.496. Erinevus pole oluline. KS = 1,72.
2.497. Erinevus pole oluline. KS = 4,85.
2.498. Ei erine. KS = 1,27.
2.499. Ei erine. KS = 1,26.

23. Hüpoteeside uurimine

- 1.500. Jaa. $\chi^2 = 1,16.$
1.501. Erinevus pole märkimisväärne. $\chi^2 = 3,14.$
1.502. Ei ekeisteerl. $\chi^2 = 27.$
1.503. Ei kehti. $\chi^2 = 12,4.$
1.504. $\chi^2 = 12$; $0,02 < P < 0,05$; hüpoteesi ei saa lugeda kehtivaks.
1.505. $\chi^2 = 3,156$; erinevus binomiaaljaotusest on märkimisväärne; hüpotees ei kehti.
1.506. $\chi^2 = 7,953$; erinevus ei ole märkimisväärne; hüpotees kehtib.
2.500. Ei. $\chi^2 = 10,3.$
2.501. Erinevus on märkimisväärne. $\chi^2 = 70,9.$
2.502. Eksisteerib. $\chi^2 = 7,71.$
2.503. Kehtib normi 0,05 puhul, ei kehti normi 0,01 puhul. $\chi^2 = 15,7.$
2.504. $\chi^2 = 10,32$; erinevus pole märkimisväärne; hüpotees kehtib.
2.505. Hüpotees kehtib.
2.506. $\chi^2 = 13,05$; erinevus Poissoni jaotusega ei ole märkimisväärne.

24. Vähimruutude meetod

1.507. $a \approx 0,617$; $b \approx 0,892$.

1.508. $a \approx 0,44$; $b \approx 0,019$; $c \approx -2,147$.

1.509. 2) $Y = -\frac{1}{3} + \frac{5}{7}X$; $X = 1 + \frac{2}{7}Y$; (7; $\frac{14}{3}$). 3) 8,24; 10.

2.507. $a \approx 0,1897$; $b \approx 2,4132$.

2.508. $a \approx -0,99$; $b \approx 2,05$; $c \approx 2,8$.

2.509. 2) $Y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}X$; $X = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}Y$; (7; 5). 3) 8,2; 4,0.

25. Korrelatsioon. Regressioon

1.510. 0,98.

1.511. a) $r = -0,10$; b) $\rho \approx r \approx -0,17$.

1.512. 0,7027; 0,7465.

1.513. $\bar{y}_x = 0,3115x - 13,04$; $\bar{x}_y = 0,8017y + 51,81$; $r = 0,523$.

1.514. $r = 0,87$; $\bar{y}_x = 0,76x + 70,7$; $\bar{x}_y = 0,3y + 151,86$.

1.515. $\bar{y}_x = 0,467x - 1,308$; $\bar{x}_y = 1,49y - 10,13$; $r = 0,823$.

1.516. $r = 0,793$; $\bar{Y} = 0,00978X + 0,259$; $\bar{X} = 63,84Y - 6,91$; 25,31; 0,505.

2.510. 0,55.

2.511. $r = 0,406$; $\rho = 0,409$.

2.512. 1) 0,8961; 2) 0,9318; 3) $Y = 80,78 + 1,138X$; 4) 132.

2.513. $\bar{y}_x = 0,4721x - 6,44$; $\bar{x}_y = 1,9423y + 3,897$; $r = 0,9172$.

2.514. $\bar{y}_x = 0,4036x + 10,75$; $\bar{x}_y = 2,042y + 9,523$; $r = 0,9078$.

2.515. $r = 0,52$; $\bar{Y}_x = 0,73X + 68,39$; $\bar{X}_y = 0,37Y + 8,16$.

2.516. $r = -0,773$; $-0,41 < r_{\text{pop}} < -0,925$; $\bar{Y} = -3,2X + 278,6$; $\bar{X} = -0,19Y + 66,56$; 37,68; 153,8.

S i s u k o r d

Eessõna	Ülesanded	Vastused
1. Hulgateooria põhimõisted	3	131
2. Determinandid ja maatriksid	6	131
3. Vektorid	12	133
4. Sirge ja tasand	15	134
5. Teist järku jooned ja pinnad	24	138
6. Funktsioon. Funktsiooni määramis- piirkond	29	140
7. Funktsiooni piirväärtus	31	141
8. Funktsiooni tuletis, diferentsiaal	35	141
9. Tuletise rakendusi	44	145
10. Integraal	49	147
11. Kahemuutuja funktsioon, määramispiir- kond, piirväärtus	61	151
12. Osatuletised ja täisdiferentsiaal	64	152
13. Diferentsiaalvõrrandid	72	155
14. Kahekordsed integraalid	76	160
15. Kolmekordsed integraalid	81	162
16. Joonintegraalid	82	163
17. Read	86	164
18. Tõenäosuse mõiste. Sündmuste summa ja korrutise tõenäosus	90	166
19. Täistõenäosuse valem. Bayesi valem	103	169
20. Binomiaalne jaotusseadus	107	170
21. Keskmise tendentsi mõõdud. Hajuvus- mõõdud	110	170
22. Punkthinnangud. Vahemikhinnangud	115	171
23. Hüpoteeside uurimine	119	172
24. Vähimruutude meetod	123	173
25. Korrelatsioon. Regressioon	125	173

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ. Составители Эви М и т т,
Олаф П р и н и т с, Айта Р а у д с е п л. На эстон-
ском языке. Тартуский государственный университет. ЭССР,
г. Тарту, ул. Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja J. Reimand. Paljundamisele antud 08.
05.1972. Kirjutuspaber 30x42 1/4. Trükipoognaid 11,0.
Tingtrükipoognaid 10,23. Arvestuspooznaid 9,15. Trükiarv
1500. TRÜ trükikoda, ENSV, Tartu, Palsoni t. 14. Tell.
nr. 772. Hind 30 kop.