Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Mattias Siilbek

Artini kleepimise analoog muutkondade puhul

Matemaatika õppekava

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Ülo Reimaa

Tartu 2025

ARTINI KLEEPIMISE ANALOOG MUUTKONDADE PUHUL

Bakalaureusetöö

Mattias Siilbek

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös defineeritakse ja uuritakse topoloogiliste ruumide Artini kleepimist. Konstrueeritakse ja uuritakse Artini kleepimise analoogi topoloogiliste n-muutkondade puhul. Tuuakse välja Artini kleepimise konstruktsiooni kasutamise näited ning tingimused, millal on atlastega varustatud ruumide M ja N kokkukleebitud ruum n-muutkond.

CERCS teaduseriala: P150 Geomeetria, algebraline topoloogia.

Märksõnad: Artini kleepimine, topoloogilised ruumid, topoloogilised muutkonnad.

ARTIN GLUING ANALOGUE FOR MANIFOLDS

Bachelor's thesis

Mattias Siilbek

Abstract

In this Bachelor's thesis we define and subsequently examine the Artin gluing of topological spaces. We construct and describe an analogue of the Artin gluing construction for topological n-manifolds. We bring examples of the usage of Artin gluing, and bring sufficient conditions for when the gluing of two spaces M and N equipped with atlases $\mathcal{A}_M$ and $\mathcal{A}_N$ is itself a topological n-manifold.

CERCS research specialisation: P150 Geometry, algebraic topology.

Key Words: Artin gluing, topological spaces, topological manifolds.

Sisukord

Sissejuhatus

Üks tähtis idee topoloogia ja kategooriateooria valdades on mõistmine, kuidas mõni matemaatiline objekt jaotub lokaalseteks tükkideks, ning vastupidi, kuidas luua mingi globaalne struktuur ainult lokaalsest informatsioonist lähtudes. Topoloogias on tuntud mitu konstruktsiooni, mille abil võib "kleepida" mitut antud topoloogilist ruumi uueks ruumiks. Üheks selliseks konstruktsiooniks on *Artini kleepimine*, mis on käesoleva bakalaureusetöö uurimisobjektiks. Konstruktsioon on nimetatud algebraisti Michael Artini järgi, kes algselt uuris selle abil toposte ehk teatud kategooriate kleepimist.

Bakalaureusetöö eesmärk on uurida, kuidas käitub Artini kleepimise konstruktsioon topoloogiliste muutkondade kontekstis. Uuritakse, kas ja kuidas annab atlastega varustatud ruume niimoodi kokku kleepida. Selle tegemiseks esmalt defineeritakse Artini kleepimise konstruktsioon topoloogiliste ruumide puhul ning töötatakse välja sellega seotud teooria. Töö jaotub kolmeks peatükiks.

Esimeses peatükis antakse töös kasutatud mõistete definitsioonid topoloogia ja muutkondade vallas. Lugejalt on eeldatud ainult alusteadmisi hulgateoorias ja reaalmuutuja funktsioonide teoorias, ehkki tulevad ka kasuks eelnevad teadmised topoloogia ja funktsionaalanalüüsi valdades.

Teises peatükis defineeritakse kahe topoloogilise ruumi X ja Y Artini kleepimine. Selleks uuritakse esmalt, kuidas taastada mõne ülemruumi $Z = X \cup Y$ topoloogia, kui on ette antud ainult lahtise hulga X ja kinnise täiendhulga Y alamruumi topoloogiad. Seejärel esitatakse konstruktsioon kahe suvalise lõikumatu ruumi X ja Y vahel ning kleepimisest tuuakse motiveerivaid näiteid. Peatükis tõestatakse töö eesmärgiks kasulikud laused, sealhulgas esitatakse kahe pideva kujutuse kleepimise konstruktsioon, mis aitab muutkondade kontekstile üle minnes kleepida kahte lokaalset kaarti φ ja ψ. Peatükk on suuresti referatiivne.

Kolmandas peatükis uuritakse, kuidas käitub Artini kleepimine kahe atlasega varustatud ruumi M ja N vahel. Sarnaselt eelmisele peatükile vaadatakse esmalt olukorda, kui on ette antud mõni ülemmuutkond $L = M \cup N$, ning siis minnakse üle olukorrale, kui on antud kaks suvalist sama mõõtmelist muutkonda M ja N. Peatüki pearõhk on atlaste kui struktuuride kokku kleepimisel. Peatükk on olemuselt suuresti uurimuslik, sest varasemat kirjandust muutkondade Artini kleepimisest ei ole autor leidnud.

1 Põhimõisted

Järgnevalt anname töös kasutatud mõistete definitsioonid, mis on enamjaolt mugandatud teosest (Lee, 2012) ning globaalanalüüsi loengukonspektist (Abramov, 2012). Lugejalt on ainult eeldatud põhiteadmisi hulgateoorias.

1.1 Topoloogiliste ruumidega seotud mõisted

Definitsioon 1.1. Olgu X hulk. *Topoloogiaks* hulgal X nimetatakse sellist alamhulkade kogumit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, mille elemente nimetatakse *lahtisteks hulkadeks*, kui kehtivad järgmised omadused:

i) X ja $\varnothing$ on lahtised hulgad;

ii) lõpliku või lõpmatu arvu lahtiste hulkade ühend on lahtine hulk;

iii) lõpliku arvu lahtiste hulkade ühisosa on lahtine hulk.

Seejuures paari $(X, \mathcal{T})$ nimetatakse *topoloogiliseks ruumiks*. Kui hulga X topoloogia on kontekstist selge, siis kasutatakse ka topoloogilise ruumi terminit lihtsalt hulga X puhul. Hulka $S \subseteq X$ nimetatakse *kinniseks*, kui $X \setminus S$ on lahtine.

Näide 1.1. Olgu antud hulk X. Siis *diskreetne topoloogia* hulgal X on selline topoloogia, mille puhul nimetatakse iga X-i alamhulk lahtiseks, st $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(X)$.

Näide 1.2. *Meetriliseks ruumiks* nimetatakse hulka M koos kaugusfunktsiooniga $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y, z \in M$ puhul rahuldab järgmiseid tingimusi:

i) $\varrho(x, y) \geq 0$ (positiivsus), kus võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui $x = y$;

ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (sümmeetrilisus);

iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ (kolmnurga võrratus).

Lisaks defineerime iga reaalarvu $r > 0$ ja $x \in M$ puhul hulga $B_r(x)$ ehk *lahtise kera raadiusega r punktis x* järgnevalt:

$$B_r(x) := \{y \in M : \varrho(x, y) < r\}.$$

Siis meetrilise ruumi M topoloogia defineerime kui topoloogia, mille puhul alamhulka $S \subseteq M$ nimetatakse lahtiseks parajasti siis, kui iga punkti $x \in S$ puhul leidub selline $r > 0$, mille puhul $B_r(x) \subseteq S$.

Näide 1.3. Olgu antud täisarv $n \geq 1$. Tähistame hulga $\mathbb{R}^n$ elemendid ehk punktid n-mõõtmelises ruumis kui $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$. Siis *n-mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks* nimetatakse meetrilise ruumi erijuhtu, kus kaugusfunktsioon $\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on ruumil $\mathbb{R}^n$ defineeritud *eukleidiline kaugus*:

$$\varrho\left((x^1, \cdots, x^n), (y^1, \cdots, y^n)\right) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2}.$$

Definitsioon 1.2. Olgu $(X, \mathcal{T})$ topoloogiline ruum. Punkti $p \in X$ *ümbruseks* ruumis X nimetatakse sellist lahtist hulka $U \in \mathcal{T}$, mis sisaldab punkti p, ehk $p \in U$.

Definitsioon 1.3. Olgu X topoloogiline ruum. Siis kogumit $\mathcal{B}$ lahtistest hulkadest nimetatakse X topoloogia *baasiks*, kui iga ruumi X lahtine alamhulk on mingi $\mathcal{B}$ elementide ühend.

Näide 1.4. Meetrilise ruumi M topoloogiat võime kirjeldada kui topoloogiat hulgal M, mille baasiks on võetud lahtised kerad $B_r(x)$, kus $r > 0$, $x \in M$.

Märkus 1.1. Tihti kui on vaja tõestada, et mingi kogum $\mathcal{B}$ moodustab ruumi $(X, \mathcal{T})$ baasi, on lihtsam näidata, et igas lahtises hulgas $U \in \mathcal{T}$ iga punkti $p \in U$ puhul leidub selline punkti p ümbrus W nii, et $W \subseteq U$.

Definitsioon 1.4. Olgu $(X, \mathcal{T})$ topoloogiline ruum. Mingi ruumi X alamhulga $S \subseteq X$ *sisemuseks* $\operatorname{int}_X(S)$ nimetatakse suurimat lahtist hulka ruumis X, mis sisaldub hulgas S.

Lause 1.1. *Olgu* $(X, \mathcal{T})$ *topoloogiline ruum. Siis sisemuse võtmise operaator* $\mathrm{int}_X : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{T}_X$ *säilitab lõplikke ühisosi, st*

$$\forall A, B \subseteq X : \mathrm{int}_X(A \cap B) = \mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{int}_X(B).$$

Tõestus. Olgu antud $A, B \subseteq X$. Näitame mõlemat pidi sisalduvust.

Hulga $A \cap B$ sisemuse definitsiooni järgi on sisemus $\mathrm{int}_X(A \cap B)$ hulga $A \cap B$ alamhulk, tähendab $\mathrm{int}_X(A \cap B) \subseteq A \cap B \subseteq A$. Samuti on definitsiooni kohaselt hulk $\mathrm{int}_X(A \cap B)$ ruumis X lahtine. Järelikult on $\mathrm{int}_X(A \cap B)$ mingi lahtine hulk, mis sisaldub hulgas A. Hulk $\mathrm{int}_X(A)$ on aga suurim hulgas A sisalduv lahtine hulk, seega $\mathrm{int}_X(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}_X(A)$. Analoogselt saame $\mathrm{int}_X(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}_X(B)$. Kokkuvõttes $\mathrm{int}_X(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{int}_X(B)$.

Teisalt, $\mathrm{int}_X(A)$ ning $\mathrm{int}_X(B)$ on ruumis X lahtised, järelikult on lahtine ka nende ühisosa $\mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{int}_X(B)$. Samuti $\mathrm{int}_X(A) \subseteq A$ ning $\mathrm{int}_X(B) \subseteq B$. Sarnaselt eelnevaga saame $\mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq A \cap B$, ehk $\mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{int}_X(B)$ on mingi lahtine hulk, mis sisaldub hulgas $A \cap B$. $\mathrm{int}_X(A \cap B)$ on suurim selline hulk, millest tulenevalt $\mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_X(A \cap B)$. ■

Definitsioon 1.5. Olgu $(X, \mathcal{T})$ topoloogiline ruum. Hulgal $S \subseteq X$ defineeritakse *alamruumi topoloogia* nii, et hulka $U \subseteq S$ loetakse lahtiseks parajasti siis, kui leidub mingi lahtine hulk $V \subseteq X$ nii, et $U = V \cap S$. Seejuures hulka S koos alamruumi topoloogiaga nimetatakse *alamruumiks* hulgas X.

Definitsioon 1.6. Topoloogilise ruumi X alamhulkade peret $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ (kus $\mathcal{I}$ on indekseeriv hulk) nimetatakse ruumi X *katteks*, kui kehtib $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = X$ ning *lahtiseks katteks*, kui iga $i \in \mathcal{I}$ puhul on U_i ruumis X lahtine.

Definitsioon 1.7. Topoloogilist ruumi $(X, \mathcal{T})$ nimetatakse *kompaktseks*, kui selle iga lahtise katte $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ puhul leidub lõplik kate $\{U_j\}_{j \in \mathcal{J}}$. Eelnevas $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ on indekseerivad hulgad ning hulk $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ on lõpliku arvu elementidega. Ruumi X alamhulka $S \subseteq X$ nimetatakse kompaktseks, kui sellel defineeritud alamruum on kompaktne.

Definitsioon 1.8. Kujutust $F : X \to Y$ kahe topoloogilise ruumi vahel nimetatakse *pidevaks*, kui iga lahtise hulga $U \subseteq Y$ puhul on U originaal $F^{-1}(U)$ ruumis X lahtine.

Definitsioon 1.9. Kujutust $F : X \to Y$ nimetatakse *lahtiseks*, kui iga lahtise hulga $U \subseteq X$ puhul on kujutis $F(U)$ ruumis Y lahtine.

Definitsioon 1.10. Olgu kujutus $F : X \to Y$ bijektsioon kahe topoloogilise ruumi vahel. Siis kujutust F nimetatakse *homöomorfismiks*, kui see on pidev ning ka pideva pöördkujutusega $F^{-1} : Y \to X$.

Märkus 1.2. Samaväärselt eelneva definitsiooniga on bijektsioon $F : X \to Y$ homöomorfism parajasti siis, kui F on nii pidev kui ka lahtine kujutus.

Definitsioon 1.11. *Hausdorffi ruum* on selline topoloogiline ruum $(X, \mathcal{T})$, mille iga kahe erineva punkti $p, q \in X$ puhul eksisteerivad ühisosata lahtised hulgad $U, V \subseteq X$ nii, et $p \in U$ ja $q \in V$.

1.2 Muutkonna mõiste

Definitsioon 1.12. Topoloogiline ruum M on *n-mõõtmeline topoloogiline muutkond* või ka *topoloogiline n-muutkond*, kui:

i) M on Hausdorffi ruum;

ii) ruumis M leidub loenduv baas (st baasis on loenduv arv elemente);

iii) M on lokaalselt eukleidiline ruum, ehk iga punkti $p \in M$ puhul leidub:

   a) lahtine hulk $U \subseteq M$, mis sisaldab punkti p;
   b) lahtine hulk $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$;
   c) homöomorfism $\varphi : U \to \hat{U}$.

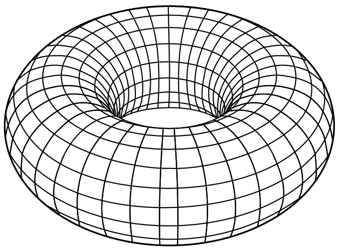
Kolmandas tingimuses vaatame hulki U ja $\hat{U}$ vastavalt ruumi M ja ruumi $\mathbb{R}^n$ alamruumi topoloogiatega. Tingimusest tulenevat paari (U, φ) nimetatakse muutkonna M *lokaalseks kaardiks* või ka *lokaalseks koordinaadisüsteemiks*.

Näide 1.5. Kahemõõtmelises eukleidilises ruumis on ringjoon S^1 defineeritud kui

$$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

mis on 1-mõõtmeline topoloogiline muutkond, sest iga punkti $x \in S^1$ ümbrus on homöomorfne arvtelje $\mathbb{R}$ alamhulgaga. Pikemaks tõestuseks võib lugeja tutvuda allikaga (Segal, 2016).

Näide 1.6. Tuntud näide 2-mõõtmelisest topoloogilisest muutkonnast on sõõrikukujuline pind nimetusega *toor* ning tähistusega T^2 (vt joonis 1).



Joonis 1: Toor. (Wikimedia Commons, 2007)

Definitsioon 1.13. Olgu M topoloogiline muutkond. Siis *atlas* muutkonnal M on lokaalsete kaartide pere $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$, seejuures nende kaartide määramispiirkonnad moodustavad M lahtise katte, st

$$M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i.$$

Järgnevaks definitsiooniks tähistame n-mõõtmelise kinnise poolruumi $\mathbb{H}^n$ ning selle raja $\partial\mathbb{H}^n$, st

$$\mathbb{H}^n := \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\partial\mathbb{H}^n := \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}.$$

Definitsioon 1.14. Topoloogilist ruumi M nimetatakse *n-muutkonnaks rajaga*, kui M on Hausdorffi ruum loenduva baasiga, ning iga punkti $p \in M$ puhul kehtib täpselt üks järgmistest tingimustest:

i) leidub lahtine hulk $U \subseteq M$, mille puhul $p \in U$, ning leidub homöomorfism $\varphi : U \to \hat{U}$ nii, et $\hat{U}$ on ruumi $\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$ lahtine alamhulk;

ii) leidub lahtine hulk $U \subseteq M$, mille puhul $p \in U$, ning leidub homöomorfism $\varphi : U \to \hat{U}$, kus $\hat{U}$ on ruumi $\mathbb{H}^n$ lahtine alamhulk ja $\varphi(p) \in \hat{U} \cap \partial\mathbb{H}^n$.

2 Artini kleepimine topoloogiate kontekstis

Käesolevas peatükis defineerime Artini kleepimise (*Artin gluing*) topoloogiliste ruumide vahel. Alampeatüki 2.1 kirjutamiseks on adapteeritud allika (nLab authors, 2012) tulemused topoloogiliste ruumide kohta ning alampeatükkides 2.2, 2.3 on toodud mõned tulemused artiklist (Souza, 2023). Artiklis sõnastati tulemused, kasutades kinniste hulkade kogumeid, seega peatükis on tõlgitud need tulemused otseselt topoloogiate konteksti.

Olgu meil antud kaks topoloogilist ruumi $(X, \mathcal{T}_X)$ ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Võime küsida, kuidas „kokku kleepida" ruumidest X ja Y uue topoloogilise ruumi $(Z, \mathcal{T}_Z)$. Sel juhul $Z := X \sqcup Y$, kuid kuidas karakteriseerida topoloogiat $\mathcal{T}_Z$?

Märkus 2.1. Tähistusega $X \sqcup Y$ mõtleme, et me võtame hulkade X ja Y *lõikumatu ühendi*. Teisisõnu eeldame, et X ja Y on omavahel lõikumatud ning siis leiame $X \sqcup Y = X \cup Y$. Kui X ja Y ei ole juba lõikumatud hulgad, võime nende asemel vaadata hulki $X^* := X \times \{0\}$ ning $Y^* := Y \times \{1\}$. Mõistagi on nendel hulkadel defineeritud topoloogilised ruumid homöomorfsed vastavalt ruumidega X ja Y. Tehnilise lihtsuse mõttes eeldame järgnevalt, et uurime omavahel lõikumatuid hulki X ja Y, aga kasutame tähistust $X \sqcup Y$, et rõhutada, et nii tehes ei kitsenda me üldisust.

Triviaalne lahendus on võtta ruumide X ja Y kleepimiseks oleks võtta nende kokorrutis (*coproduct*), st mingi hulk $U \subseteq X \sqcup Y$ loetakse lahtiseks parajasti siis, kui $U \cap X$ on lahtine ruumis X ning $U \cap Y$ on lahtine ruumis Y. Artini kleepimine annab aga teise – seejuures üldisema – võimaluse topoloogiate kleepimiseks.

Enne Artini kleepimise defineerimist uurime, milline oleks soovitav topoloogia struktuur hulgal $Z = X \cup Y$.

2.1 Ruumi $Z = X \cup Y$ struktuur

Olgu meil antud topoloogiline ruum $(Z, \mathcal{T}_Z)$, uurime Z alamruume X ja $Y = Z \setminus X$ (antud vastavate alamruumide topoloogiatega), seejuures eeldame, et X on ruumis Z

lahtine hulk. Soovime teada, millised hulkade paarid $(W, W') \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ moodustavad kokku kleepides ka lahtise hulga ruumis Z, ehk millal kehtib $W \cup W' \in \mathcal{T}_Z$.

Lause 2.1. *Mingi hulk S on topoloogilises ruumis Z lahtine parajasti siis, kui $S \subseteq \operatorname{int}_Z(S)$.*

Tõestus. Alamhulga S sisemus on suurim lahtine hulk ruumis Z, mis sisaldub hulgas S. Kui S on lahtine ruumis Z, siis on selleks hulgaks S ise, ehk $\operatorname{int}_Z(S) = S$. Hulga S sisemus on aga defineeritud kui mingi hulga S alamhulk, tähendab võrdusega samaväärne tingimus on $S \subseteq \operatorname{int}_Z(S)$. ■

Antud juhul soovime siis leida sellised paarid $(W, W') \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ nii, et $W \cup W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$. Selles aitab meid järgmine lause.

Lause 2.2. *Olgu antud topoloogiline ruum Z ning alamruumid X ja $Y = Z \setminus X$ nii, et X on ruumis Z lahtine. Siis hulkade $W \in \mathcal{T}_X, W' \in \mathcal{T}_Y$ puhul kehtib sisalduvus $W \cup W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$ parajasti siis, kui $W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$.*

Tõestus. Tarvilikkus: Olgu $W \cup W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$. Siis ka $W' \subseteq W \cup W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$.

Piisavus: Olgu $W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$. Peame meeles, et ruumil X on alamruumi topoloogia, st leidub mingi $V \in \mathcal{T}_Z$ nii, et $W = X \cap V$. Kuid et eelduse järgi on X lahtine ruumis Z, siis on ka W kui lahtise hulkade ühisosa lahtine ruumis Z. Seega $W = \operatorname{int}_Z(W) \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$, järelikult ka $W \cup W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W')$. ■

Lause 2.3. *Sisalduvus $W' \subseteq int_Z(W \cup W')$ kehtib parajasti siis, kui kehtib sisalduvus $W' \subseteq int_Z(W \cup Y)$*

Tõestus. Tarvilikkus: Ilmne, sest $W' \subseteq Y$.

Piisavus: Olgu $W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup Y)$, siis samaväärselt $W' = W' \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y)$. Et Y on ruumi Z alamruum, siis leidub $V \in \mathcal{T}_Z : W' = Y \cap V$. Nüüd

$$\begin{aligned} W' \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W') &\iff \\ W' \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup W') &\iff \\ (Y \cap V) \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup (Y \cap V)) &\iff \\ Y \cap V \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \subseteq \operatorname{int}_Z((W \cup Y) \cap (W \cup V)) & \end{aligned}$$

Kusjuures et sisemuse võtmise operaator säilitab lõplikke ühisosi (vt lause 1.1) siis

$$\begin{aligned} Y \cap V \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \subseteq \operatorname{int}_Z((W \cup Y) \cap (W \cup V)) &\iff \\ Y \cap V \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \cap \operatorname{int}_Z(W \cup V) & \end{aligned}$$

Näeme, et $Y \cap V \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \subseteq \operatorname{int}_Z(W \cup Y)$ ning $Y \cap V \cap \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \subseteq V \subseteq W \cup V = \operatorname{int}_Z(W \cup V)$, seega sisalduvus kehtib ning väide on tõestatud. ■

Kokkuvõttes saame, et kokku kleepida sobib paarid $(W, W') \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ lahtiseks hulgaks $W \cup W' \in \mathcal{T}_Z$ parajasti siis, kui $W' \subseteq f(W)$, kus funktsioon f on defineeritud kui

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}_X &\to \mathcal{T}_Y, \\ W &\mapsto \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \cap Y. \end{aligned}$$

Näeme muuhulgas, et lahtised hulgad U ruumis X genereerivad lahtised hulgad $U \cup \varnothing \in \mathcal{T}_Z$ ning lahtised hulgad V ruumis Y genereerivad lahtised hulgad $X \cup V \in \mathcal{T}_Z$.

Kasutame eelnevat motivatsiooniks, kui defineerime kahe suvalise ruumi X ja Y kokkukleepimise konstruktsiooni.

2.2 Ruumide X ja Y Artini kleepimine

Definitsioon 2.1. Olgu meil antud lõikumatud topoloogilised ruumid $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ ning funktsioon $f : \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_Y$, kusjuures eeldame, et järgmised tingimused on rahuldatud:

i) f säilitab tervet ruumi, st $f(X) = Y$;

ii) f säilitab lõplikke ühisosi, st $\forall A, B \in \mathcal{T}_X : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Siis defineerime topoloogilise ruumi hulgal $X \sqcup Y$ nii, et loeme hulga $U \subseteq X \sqcup Y$ lahtiseks parajasti siis, kui kehtib:

L1) $U \cap X \in \mathcal{T}_X$;

L2) $U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$;

L3) $U \cap Y \subseteq f(U \cap X)$.

Niimoodi defineeritud ruumi nimetame ruumide X, Y *Artini kleepimiseks*, ning saadud ruumi võime tähistada $X +_f Y$ või kui konkreetne funktsioon f pole oluline, siis $X \mathbin{+\!\!\!\mid} Y$. Kui tahame rääkida vaid ruumi $X \mathbin{+\!\!\!\mid} Y$ topoloogiast, siis tähistame seda $\mathcal{T}_{X \mathbin{+\!\!\!\mid} Y}$.

Lause 2.4. *Eelnevalt defineeritud hulk $\mathcal{T}_{X \mathbin{+\!\!\!\mid} Y}$ on tõepoolest topoloogia hulgal $X \sqcup Y$.*

Tõestus. Kontrollime topoloogia aksioome (definitsioon 1.1).

Terve hulk on lahtine (Näitame, et hulk $X \sqcup Y$ rahuldab tingimusi L1, L2, L3):

i) $(X \sqcup Y) \cap X = X \in \mathcal{T}_X$;

ii) $(X \sqcup Y) \cap Y = Y \in \mathcal{T}_Y$;

iii) $f((X \sqcup Y) \cap X) = f(X) = Y \supseteq Y = (X \sqcup Y) \cap Y$.

Seega $X \sqcup Y \in \mathcal{T}_{X \mathbin{+\!\!\!\mid} Y}$.

Tühi hulk on lahtine:

i) $\varnothing \cap X = \varnothing \in \mathcal{T}_X$;

ii) $\varnothing \cap Y = \varnothing \in \mathcal{T}_Y$;

iii) $\varnothing \cap Y = \varnothing \subseteq f(\varnothing \cap X)$.

Seega $\varnothing \in \mathcal{T}_{X+\!\!\!+Y}$.

Kinnine lõplike ühisosade võtmise suhtes: Olgu $A, B \in \mathcal{T}_{X+\!\!\!+Y}$. Siis

i) $A \cap B \cap X = (A \cap X) \cap (B \cap X) \in \mathcal{T}_X$, sest nii $(A \cap X) \in \mathcal{T}_X$ kui ka $(B \cap X) \in \mathcal{T}_X$;

ii) $A \cap B \cap Y = (A \cap Y) \cap (B \cap Y) \in \mathcal{T}_Y$;

iii) $f(A \cap B \cap X) = f((A \cap X) \cap (B \cap X)) = f(A \cap X) \cap f(B \cap X) \supseteq (A \cap Y) \cap (B \cap Y) = A \cap B \cap Y$;

Seega ka $A \cap B \in \mathcal{T}_{X+\!\!\!+Y}$.

Kinnine mistahes ühendite võtmise suhtes: Olgu $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ pere lahtistest hulkadest ruumis $\mathcal{T}_{X+\!\!\!+Y}$. Siis

i) distributiivsuse põhjal $\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \cap X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A_i \cap X) \in \mathcal{T}_X$, sest iga $i \in \mathcal{I}$ puhul $(A_i \cap X) \in \mathcal{T}_X$;

ii) $\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \cap Y = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A_i \cap Y) \in \mathcal{T}_Y$;

iii) $\forall i \in \mathcal{I} : A_i \cap Y \subseteq f(A_i \cap X)$. Sellest tulenevalt

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A_i \cap Y) \subseteq f\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A_i \cap X)\right) \iff \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \cap Y \subseteq f\left(\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \cap X\right).$$

Seega ka $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{T}_{X+\!\!\!+Y}$. ∎

Näide 2.1. Paneme tähele, et kui eelnevas võtta kleepimisfunktsiooniks konstantne funktsioon f^Y, mis on defineeritud kui

$$\begin{aligned} f^Y : \mathcal{T}_X &\to \mathcal{T}_Y, \\ U &\mapsto Y, \end{aligned}$$

siis kokkukleebitud ruum $X +_{f^Y} Y$ on täpselt eelnevalt mainitud ruumide X ja Y kokorrutis. Tõepoolest, definitsioonis kleepimistingimus $U \cap Y \subseteq f^Y(U \cap X) = Y$

kehtib alati. Seega ainsad tingimused hulga U lahtisuseks kokkukleebitud ruumis on $U \cap X \in \mathcal{T}_X, U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Pole ka raske näha, et funktsioon f^Y säilitab tervet ruumi ning lõplikke ühisosi, seega on tegemist kleepimiseks sobiliku kujutusega.

Näide 2.2. (Richard Pinch, 2018) Üks topoloogias tuntud konstruktsioon on topoloogilise ruumi *Aleksandrovi laiend*. Idee seisneb selles, et ruumile X lisatakse üks punkt, tavaliselt tähistatud ∞, ning millest võib vastavalt mõelda kui „punktist lõpmatuses". Siis hulgal $X^* = X \cup \{\infty\}$ defineeritakse topoloogia nii, et lahtisteks hulkadeks nimetatakse kõik lahtised hulgad ruumis X ning lisaks kõik ruumi X *kinniste ja kompaktsete* (vt definitsioonid 1.1, 1.7) alamruumide C puhul hulgad $(X \setminus C) \cup \{\infty\}$. Konstruktsioon on kasulik muuhulgas selle tõttu, et konstrueeritud ruum X^* on kompaktne, kui originaalne ruum X ei pruugi olla.

Tähistame enda eesmärkideks topoloogilise ruumi $\mathbf{1} = \{\infty\}$. On selge, et ainus sobiv topoloogia sellel hulgal on diskreetne topoloogia $\mathcal{T}_\mathbf{1} = \{\varnothing, \infty\}$. Me saame defineerida Aleksandrovi laiendi läbi Artini kleepimise, valides kleepimisfunktsiooniks f_α järgmise:

$$\begin{aligned} f_\alpha &: \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_\mathbf{1} \\ U &\mapsto \begin{cases} \infty, & \text{kui } X \setminus U \text{ on kompaktne;} \\ \varnothing, & \text{muidu.} \end{cases} \end{aligned}$$

Kontrollime, et nii defineeritud kujutus on ka kleepimiseks sobilik, ehk see säilitab tervet ruumi ning lõplikke ühisosi:

i) $f_\alpha(X) = \{\infty\}$, sest $X \setminus X = \varnothing$ on alati kompaktne (lõplik kate ongi $\varnothing$);

ii) Olgu $A \cap B \in \mathcal{T}_X$. Siis de Morgani seaduse järgi $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Kompaktsuse üks omadusi on, et kahe kinnise hulga ühend on kompaktne siis ja ainult siis, kui mõlemad hulgad on ise kompaktsed. Antud juhul on siis $(X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ kompaktne siis ja ainult siis, kui nii $X \setminus A$ kui ka $X \setminus B$ on kompaktsed hulgad. Nii et tõepoolest $f_\alpha(A \cap B) = f_\alpha(A) \cap f_\alpha(B)$.

Vaatame ka ühte konkreetset Aleksandrovi laiendi näidet. Olgu antud arvtelg ehk eukleidiline ruum $\mathbb{R}$ ning uurime ruumi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sellise ruumi topoloogia mõistmiseks võime kasutada *Heine-Boreli teoreemi*, mis väidab, et kompaktsed hulgad eukleidilises ruumis on täpselt kinnised ja tõkestatud hulgad, ehk lõigud $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$. Siis Aleksandrovi laiendi konstruktsioonist tulenevalt näevad punkti ∞ ümbrused välja nagu hulgad $\{\infty\} \cup (\mathbb{R} \setminus [a, b])$.

Annab näidata, et Aleksandrovi laiend $\mathbb{R}^*$ on homöomorfne ühikringiga S^1. Tõepoolest, homöomorfismiks võime võtta stereograafilise projektsiooni laiendi:

$$\begin{aligned} &\varphi : S^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ &(x, y) \mapsto \begin{cases} \{\infty\}, & \text{kui } (x, y) = (0, 1); \\ \frac{x}{1-y}, & \text{muidu.} \end{cases} \end{aligned}$$

Lause 2.5. *Olgu ruumis $X \dotplus Y$ antud hulgad $W \in \mathcal{T}_X$ ja $W' \in \mathcal{T}_Y$. Siis hulga $W \cup W'$ sisemus $\operatorname{int}_{X \dotplus Y}(W \cup W')$ avaldub kujul*

$$\operatorname{int}_{X \dotplus Y}(W \cup W') = W \cup (f(W) \cap W').$$

Tõestus. Peame näitama, et $W \cup (f(W) \cap W')$ on suurim lahtine hulk, mis sisaldub hulgas $W \cup W'$. Veendume, et $W \cup (f(W) \cap W') \in \mathcal{T}_{X \dotplus Y}$:

i) $(W \cup (f(W) \cap W')) \cap X = W \in \mathcal{T}_X$;

ii) $(W \cup (f(W) \cap W')) \cap Y = f(W) \cap W' \in \mathcal{T}_Y$, sest nii $f(W) \in \mathcal{T}_Y$ kui ka $W' \in \mathcal{T}_Y$;

iii) $(W \cup (f(W) \cap W')) \cap Y = f(W) \cap W' \subseteq f(W)$.

Nüüd valime suvalise hulga $D \subseteq X \sqcup Y$ nii, et $D \in \mathcal{T}_{X \dotplus Y}$ ning $D \subseteq W \cup W'$. Näitame, et siis kehtib $D \subseteq W \cup (f(W) \cap W')$. Et $D \subseteq W \cup W'$, siis $D \cap X \subseteq (W \cup W') \cap X = W$. Samamoodi $D \cap Y \subseteq W'$. Teisalt et D on lahtine ruumis $X \dotplus Y$, siis

$$D \cap Y \subseteq f(D \cap X) = f((D \cap X) \cap W) = f(D \cap X) \cap f(W),$$

millest tulenevalt ka $D \cap Y \subseteq f(W)$. Kokkuvõttes

$$D = (D \cap X) \cup (D \cap Y) \subseteq W \cup \big(W' \cap f(W)\big)$$

nagu soovitud. ■

Teoreem 2.1. *Olgu antud topoloogiline ruum $(Z, \mathcal{T}_Z)$ nii, et $Z = X \cup Y$ ning X on ruumis Z lahtine ning funktsioon f_Z, mis on defineeritud kui*

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_Y, \\ &W \mapsto \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \cap Y. \end{aligned}$$

Siis $X +_{f_Z} Y = Z$, st nende ruumide alushulgad ning topoloogiad ühtivad.

Tõestus. Ruumide alushulkade kattumine järeldub otse ruumi $X +_{f_Z} Y$ definitsioonist. Ruumis $X +_{f_Z} Y$ on hulk U lahtine parajasti siis, kui:

i) $U \cap X \in \mathcal{T}_X$;

ii) $U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$;

iii) $U \cap Y \subseteq f_Z(U \cap X)$.

Paneme tähele, et need on täpselt alampeatükis 2.1 kirjeldatud tingimused hulga U lahtisuseks ruumis Z. Jääb näidata, et funktsioon f_Z on sobilik funktsioon kleepimiseks, st see säilitab tervet ruumi ning lõplikke ühisosi:

$$\begin{aligned} f_Z(X) &= \operatorname{int}_Z(X \cup Y) \cap Y = \operatorname{int}_Z(Z) \cap Y = Z \cap Y = Y; \\ f_Z(A \cap B) &= \operatorname{int}_Z\left((A \cap B) \cup Y\right) \cap Y \\ &= \operatorname{int}_Z\left((A \cup Y) \cap (B \cup Y)\right) \cap Y && \text{(distributiivsus)} \\ &= \operatorname{int}_Z(A \cup Y) \cap Y \cap \operatorname{int}_Z(B \cup Y) \cap Y && \text{(idempotentsus, lause 1.1)} \\ &= f_Z(A) \cap f_Z(B). \end{aligned}$$

■

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "F"'] & X \mathbin{\mid\!\!+} Y \arrow[d, dashed, "{[F,G]}"] & Y \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "G"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

Joonis 2: Kujutuste F ja G kleepimine $[F, G]$

Teisisõnu ütleb lause, et kui lisaks ruumidele X ja Y on antud mingi ülemruum Z nii, et $Z = X \cup Y$ ning X on lahtine hulk ruumis Z, siis võime leida ruumile Z vastava n-ö kanoonilise kleepimisfunktsiooni f_Z, st $\mathcal{T}_{X+_{f_Z}Y} = \mathcal{T}_Z$.

2.3 Pidevate kujutuste kleepimine

Edaspidiseks on kasulik uurida, kuidas käib topoloogilistel ruumidel X ja Y antud pidevate kujutuste kleepimine kujutuseks, mis toimib ruumil $X \mathbin{\mid\!\!+} Y$.

Definitsioon 2.2. Olgu antud kokkukleebitud ruum $X \mathbin{\mid\!\!+} Y$ ning pidevad kujutused $F : X \to R$ ja $G : Y \to R$ (siis R on mingi ühine ruum, kus kujutised asetsevad). Defineerime kujutuste F, G *kleepimise* $[F, G] : X \mathbin{\mid\!\!+} Y \to R$ punktiviisi järgnevalt (vt joonis 2):

$$[F, G](a) = \begin{cases} F(a), & \text{kui } a \in X \\ G(a), & \text{kui } a \in Y. \end{cases}$$

Teoreem 2.2. *Olgu antud kokkukleebitud ruum $X +_f Y$ ning pidevad kujutused $F : X \to R$ ja $G : Y \to R$. Siis kleebitud kujutuse $[F, G] : X \mathbin{\mid\!\!+} Y \to R$ puhul:*

i) *$[F, G]$ on pidev parajasti siis, kui iga lahtise $U \subseteq R$ puhul kehtib sisalduvus $G^{-1}(U) \subseteq f\left(F^{-1}(U)\right)$;*

ii) *Kui F ja G on lahtised kujutused, siis ka $[F, G]$ on lahtine.*

Tõestus. Tõestame teoreemi osades.

Tõestame esmalt punkti (i), ehk et sisalduvuse tingimus $G^{-1}(U) \subseteq f\left(F^{-1}(U)\right)$ on samaväärne $[F, G]$ pidevusega.

Tarvilikkus: Olgu $[F, G]$ pidev. Siis mingi lahtise $U \subseteq R$ puhul originaal $[F, G]^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{X+_f Y}$. Seega

$$
\begin{gathered}
[F, G]^{-1}(U) \cap Y \subseteq f\left([F, G]^{-1}(U) \cap X\right) \iff \\
\left(F^{-1}(U) \cup G^{-1}(U)\right) \cap Y \subseteq f\left(\left(F^{-1}(U) \cup G^{-1}(U)\right) \cap X\right) \iff \\
G^{-1}(U) \subseteq f\left(F^{-1}(U)\right),
\end{gathered}
$$

nagu soovitud.

Piisavus: Olgu $G^{-1}(U) \subseteq f\left(F^{-1}(U)\right)$. Peame näitama, et siis $[F, G]^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{X+_f Y}$, teisisõnu et ruumis $X +_f Y$ on $[F, G]^{-1}(U)$ võrdne enda sisemusega.

$$
\operatorname{int}_{X+_f Y}[F, G]^{-1}(U) = \operatorname{int}_{X+_f Y}\left(F^{-1}(U) \cup G^{-1}(U)\right)
$$

Paneme tähele, et $F^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ ning $G^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, seega võime kasutada lauset 2.5 ning saame

$$
\begin{aligned}
\operatorname{int}_{X+_f Y}\left(F^{-1}(U) \cup G^{-1}(U)\right) &= \\
F^{-1}(U) \cup \left(G^{-1}(U) \cap f\left(F^{-1}(U)\right)\right) &= \\
F^{-1}(U) \cup G^{-1}(U) &= ([F, G])^{-1}(U),
\end{aligned}
$$

nagu soovitud.

Nüüd tõestame punkti (ii). Olgu F ja G lahtised kujutused. Siis iga $U \in \mathcal{T}_{X+_f Y}$ puhul $[F, G](U) = F(U \cap X) \cup G(U \cap Y)$. Et $U \cap X$ on lahtine ruumis X, $U \cap Y$ lahtine ruumis Y ning vastavad kujutused on lahtised, siis on ka kujutiste ühend lahtine ruumis R. ■

3 Muutkondade kleepimine

Kui topoloogiliste ruumide X ja Y kokkukleepimisel on keeruline just ruumide topoloogilise struktuuri ühendamine, siis kahe n-muutkonna M ja N kokkukleepimisel peab arvestama veel lisa struktuuriga, nimelt alamhulkadel antud lokaalsete kaartidega. Nagu eelnevalt, uurime mingi ülemmuutkonna $L = M \cup N$ struktuuri, ning proovime konstrueerida Artini kleepimise analoogi kahe muutkonna puhul.

3.1 Muutkonna $L = M \cup N$ struktuur

Lause 3.1. *Olgu antud kokkukleebitud ruum $M \mathbin{\mid\!\!+} N$ kleepimisfunktsiooniga $f : \mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_N$ ning hulgad $U \in \mathcal{T}_M$, $V \in \mathcal{T}_N$ nii, et $V \subseteq f(U)$. Siis ruum $U \mathbin{\mid\!\!+} V$ on ruumi $M \mathbin{\mid\!\!+} N$ alamruum vastava alamruumi topoloogiaga, kus kleepimisfunktsioon $f' : \mathcal{T}_U \to \mathcal{T}_V$ on defineeritud kui*

$$\begin{aligned} f' := f\big|_U^V : \mathcal{T}_U &\to \mathcal{T}_V, \\ W &\mapsto f(W) \cap V. \end{aligned}$$

Tõestus. Kontrollime esmalt, et $f' = f\big|_U^V$ on sobilik funktsioon kleepimiseks, st säilitab tervet ruumi ning lõplikke ühisosi:

$$\begin{aligned} f\big|_U^V(U) &= f(U) \cap V \\ &= V; && (V \subseteq f(U)) \\ f\big|_U^V(A \cap B) &= f(A \cap B) \cap V \\ &= f(A) \cap V \cap f(B) \cap V && \text{(idempotentsus)} \\ &= f\big|_U^V(A) \cap f\big|_U^V(B). \end{aligned}$$

Nüüd näitame, et ruumil $U \mathbin{\mid\!\!+} V$ on alamruumi topoloogia. Olgu meil antud ruumis $U \mathbin{\mid\!\!+} V$ lahtine hulk W. Peame näitama, et siis leidub mingi $S \in \mathcal{T}_{M \mathbin{\mid\!\!+} N}$ nii, et $S \cap (U \cup$

$V) = W$.

Et $W \in \mathcal{T}_{U \dotplus V}$, siis $W \cap U \in \mathcal{T}_U$, $W \cap V \in \mathcal{T}_V$ (tingimused L1, L2). Tähistame vastavalt $A := W \cap U$ ning $B := W \cap V$. Leiame nendel hulkadel vastavad alamruumi topoloogiad. Siis leidub selline $S_A \in \mathcal{T}_M$ nii, et $S_A \cap U = A$ ning analoogiliselt leidub selline $S_B \in \mathcal{T}_N$, et $S_B \cap V = B$. Nüüd võttes $S := S_A \cup S_B$ saame

$$\begin{aligned} W &= (W \cap U) \cup (W \cap V) \\ &= A \cup B \\ &= (S_A \cap U) \cup (S_B \cap V) \\ &= (S_A \cup S_B) \cap (U \cup V) && (S_A, S_B \text{ ja } U, V \text{ omavahel lõikumatud}) \\ &= S \cap (U \cup V). \end{aligned}$$

Jääb näidata, et nii defineeritud S on lahtine ruumis $M \dotplus N$. Kontrollime lahtisuse tingimusi L1, L2, L3:

i) $S \cap M = (S_A \cup S_B) \cap M = S_A \in \mathcal{T}_M$

ii) $S \cap N = (S_A \cup S_B) \cap N = S_B \in \mathcal{T}_N$

iii) Eeldusest, et W on ruumis $U \dotplus V$ lahtine, saame tingimusest L3

$$\begin{aligned} & W \cap V \subseteq f\big|_U^V (W \cap U) \\ \iff & B \subseteq f(A) \cap V \\ \iff & S_B \cap V \subseteq f(S_A \cap U) \cap V \\ \iff & S \cap N \cap V \subseteq f(S \cap M \cap U) \cap V && (S_B = S \cap N,\ S_A = S \cap M) \\ \iff & S \cap N \subseteq f(S \cap M) \cap V && (V \subseteq N,\ U \subseteq M) \\ \implies & S \cap N \subseteq f(S \cap M). \end{aligned}$$

Näitame nüüd teistpidi, et iga alamruumi topoloogias lahtine hulk on ka lahtine ruumis $U \dotplus V$. Alamruumi $U \cup V$ topoloogias on lahtised hulgad täpselt $S \cap (U \cup V)$, kus

$S \in \mathcal{T}_{M+\!\!\!+N}$. Kontrollime lahtisuse tingimusi ruumis $U +\!\!\!+ V$:

i) $(S \cap (U \cup V)) \cap U = S \cap U = (S \cap M) \cap U \in \mathcal{T}_U$, sest kleepimistingimuse L1 järgi $S \cap M \in \mathcal{T}_M$ ning ruumil U on ruumi M alamruumi topoloogia;

ii) analoogselt $(S \cap (U \cup V)) \cap V = S \cap V = (S \cap N) \cap V \in \mathcal{T}_V$;

iii) kleepimistingimuse L3 järgi:

$$\begin{aligned}(S \cap (U \cup V)) \cap V &= (S \cap N) \cap V \\ &\subseteq f(S \cap M) \cap V \\ &= f(S \cap M) \cap f(U) \\ &= f((S \cap M) \cap U) \\ &= f((S \cap (U \cup V)) \cap V).\end{aligned}$$

Väide on tõestatud. ■

Teoreem 3.1. *Olgu antud kaks homöomorfismi $\varphi : U \to \hat{U}$ ning $\psi : V \to \hat{V}$, kus $\hat{U}, \hat{V} \subseteq R$ nii, et φ on ruumis R lahtine kujutus, st $\varphi : U \to R$ on lahtine. Siis kleebitud kujutus $[\varphi, \psi] : U +\!\!\!+ V \to \hat{U} \cup \hat{V} \subseteq R$ on homöomorfism parajasti siis, kui*

i) $[\varphi, \psi]$ on injektiivne, ehk kujutuste φ, ψ muutumispiirkonnad on lõikumatud;

ii) iga lahtise $W \subseteq R$ puhul kehtib $\psi^{-1}(W) \subseteq f\left(\varphi^{-1}(W)\right)$;

iii) iga lahtise $W \in \mathcal{T}_{U+\!\!\!+V}$ puhul $\psi(W \cap V) \subseteq \operatorname{int}_R(\varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V))$,

kusjuures tingimus (i) on samaväärne kujutuse $[\varphi, \psi]$ bijektiivsusega, tingimus (ii) samaväärne $[\varphi, \psi]$ pidevusega ning tingimus (iii) samaväärne $[\varphi, \psi]$ lahtisusega ruumis R.

Tõestus. Tõestame teoreemi osades.

Tõestame esmalt punkti (i), ehk et kujutuse $[\varphi, \psi]$ injektiivsus on samaväärne selle kujutuse bijektiivsusega. Tõepoolest, kui eeldame, et kujutuste φ, ψ muutumispiirkonnad on lõikumatud, siis saame defineerida pöördkujutuse $[\varphi,\psi]^{-1} : \hat{U} \cup \hat{V} \to U + V$ järgnevalt:

$$[\varphi,\psi]^{-1}(a) = \begin{cases} \varphi^{-1}(a), & \text{kui } a \in \hat{U} \\ \psi^{-1}(a), & \text{kui } a \in \hat{V}, \end{cases}$$

kus φ^{-1} ja ψ^{-1} on vastavate homöomorfismide pöördkujutused. Samasust $([\varphi,\psi]^{-1} \circ [\varphi,\psi])(a) = ([\varphi,\psi] \circ [\varphi,\psi]^{-1})(a) = a$ on lihtne kontrollida.

Tingimuse (ii) samaväärsus kujutuse $[\varphi,\psi]$ pidevusega tuleb otse teoreemist 2.2.

Viimaks näitame, et tingimus (iii) ehk sisalduvus

$$\psi(W \cap V) \subseteq \mathrm{int}_R\left(\varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V)\right)$$

on samaväärne kujutuse $[\varphi,\psi]$ lahtisusega ruumis $\hat{U} \cup \hat{V}$, kus viimane on ruumi R alamruum. Sellega samaväärselt peame näitama, et

$$[\varphi,\psi](W) = \varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V)$$

on ruumis R võrdne oma sisemusega. Eelduse kohaselt on kujutus $\varphi : U \to R$ lahtine. Seega et $W \cap U$ on lahtine ruumis U kleepimistingimuse L1 järgi, siis $\varphi(W \cap U)$ on ruumis R lahtine hulk. Nüüd võime kasutada lauseid 2.1 ja 2.2, mille kohaselt

$$\begin{aligned} \varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V) = \mathrm{int}_R\left(\varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V)\right) &\iff \\ \varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V) \subseteq \mathrm{int}_R\left(\varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V)\right) &\iff \\ \psi(W \cap V) \subseteq \mathrm{int}_R\left(\varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V)\right), & \end{aligned}$$

nagu soovitud. ■

Rakendame nüüd teoreemi olukorrale, kui meil on antud topoloogiline n-muutkond $(L, \mathcal{T}_L)$ koos atlasega $\mathcal{A}_L = \{(S_i, \gamma_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$. Uurime topoloogilise ruumi L alamruume M ja $N = L \setminus M$, kusjuures eeldame, et M on ruumis L lahtine. Siis M on muutkond antud L

alamruumitopoloogiaga ning N on ruumi L kinnine atlasega varustatud alamruum, mis iseenesest ei pruugi olla muutkond.

Tähistame vastavad atlased:

$$\mathcal{A}_M = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\mathcal{I}} = \{(S\cap M, \gamma|_{S\cap M}) : (S,\gamma) \in \mathcal{A}_L\} \text{ ning}$$
$$\mathcal{A}_N = \{(V_j, \psi_j)\}_{j\in\mathcal{J}} = \{(S\cap N, \gamma|_{S\cap N}) : (S,\gamma) \in \mathcal{A}_L\}.$$

Et N on ruumi L kinnine alamruum, tähendab antud juhul, et iga kaardi $(V,\psi) \in \mathcal{A}_N$ kodomeen $\hat{V}$ on mingi ruumi $\mathbb{R}^n$ mitte tingimata lahtine alamruum. Erijuhul võib N olla näiteks muutkond rajaga (vt definitsioon 1.14).

Märkus 3.1. Selguse mõttes tasub siinkohal defineerida, mida mõtleme „atlasega varustatud alamruumi“ all (eelnevalt oleme defineerinud atlase vaid muutkondade puhul). Olgu N mingi topoloogiline ruum ja $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ pere sellistest paaridest (U,φ), kus U on lahtine hulk ruumis N ja φ homöomorfism hulga U ja mingi fikseeritud ruumi R alamruumi vahel, ehk $\varphi : U \to \hat{U}$, kus $\hat{U} \subseteq R$. Kui $R = \mathbb{R}^n$ mingi täisarvu $n \geq 0$ puhul, siis kutsume edaspidi vastavat atlast *n-atlaseks*.

Definitsioon 3.1. Olgu L, M ja N eelnevas arutluses antud ruumid vastavalt atlastega $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_M$ ning $\mathcal{A}_N$. Siis võttes kleepimisfunktsiooniks

$$f_L : \mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_N, \quad f_L(A) = \mathrm{int}_L(A\cup N)\cap N,$$

leiame atlase ruumil $M +_{f_L} N$ järgnevalt: ütleme, et kaart $(U \dotplus V, [\varphi,\psi])$ on atlases $\mathcal{A}_{M+_{f_L}N}$ parajasti siis, kui

1. $(U,\varphi) \in \mathcal{A}_M$;
2. $(V,\psi) \in \mathcal{A}_N$ või $V = \varnothing$;
3. $V \subseteq f_L(U)$;
4. $[\varphi,\psi]$ on injektiivne;

5. iga lahtise $W \subseteq \mathbb{R}^n$ puhul $\psi^{-1}(W) \subseteq f_L\left(\varphi^{-1}(W)\right)$;

6. iga lahtise $W \in \mathcal{T}_{U+V}$ puhul $\psi(W \cap V) \subseteq \operatorname{int}_R\left(\varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V)\right)$.

Märgime, et juhul $V = \varnothing$ võime võtta homöomorfismiks $\psi : \varnothing \to \varnothing$ ning kõik ülejäänud tingimused kehtivad. See tähendab, et $\mathcal{A}_M \subseteq \mathcal{A}_{M+_{f_L}N}$.

Definitsiooniga 3.1 oleme kirjeldanud atlast, mille lokaalsete kaartide määramispiirkonnad on teoreemi 2.1 kohaselt lahtised ruumis L (tingimus 3). Samuti teoreemi 3.1 kohaselt, et atlase kaardid on homöomorfsed ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtise alamruumiga (tingimused 4-6). Kokkuvõttes saame, et atlas $\mathcal{A}_{M+_{f_L}N} \supseteq \mathcal{A}_L$ ning vastava atlasega ruum $M +_{f_L} N$ on tõepoolest n-muutkond.

Nii leitud muutkonna $M +_{f_L} N$ Hausdorffi tingimus kui ka loenduva baasi olemasolu tulenevad otse ruumi L vastavatest omadustest. Samuti sisalduvusest $\mathcal{A}_{M+_{f_L}N} \supseteq \mathcal{A}_L$ saamegi, et atlas tõepoolest katab topoloogilist ruumi $M +_{f_L} N$. Viimased tingimused aga ei tarvitse olla tõesed suvalise kleepimisfunktsiooni f puhul. Seda peame järgnevalt meeles.

3.2 Muutkondade M ja N kleepimine

Enne kahe suvalise n-muutkonna M ja N kleepimist peame veenduma, millal täpselt on muutkonna tingimused (definitsioon 1.12) täidetud. Täpsemalt, millal on kahe Hausdorffi ruumi kleepimine ise Hausdorffi ruum, ning millal leidub kahe loenduva baasiga ruumi kleepimisel samuti loenduv baas.

Lause 3.2. *Olgu topoloogilised ruumid M ja N lõikumatud Hausdorffi ruumid. Siis ruum $M +_f N$ on Hausdorffi ruum parajasti siis, kui iga $a, b \in M \sqcup N$ puhul leiduvad lahtised $U, V \subseteq M$ nii, et $U \cap V = \varnothing$ ja $a \in U \cup f(U), b \in V \cup f(V)$.*

Tõestus. Tarvilikkus: Olgu $M +_f N$ Hausdorffi ruum. Siis iga $a, b \in M \sqcup N$ puhul leiduvad ühisosata lahtised hulgad $A, B \in \mathcal{T}_{M+_f N}$ nii, et $a \in A, b \in B$. Kleepimistingimuse L3 kohaselt saame

$$a \in A = (A \cap M) \cup (A \cap N) \subseteq (A \cap M) \cup f(A \cap M) \text{ ning}$$
$$b \in B = (B \cap M) \cup (B \cap N) \subseteq (B \cap M) \cup f(B \cap M),$$

seega et $A \cap M, B \cap M \in \mathcal{T}_{M+_f N}$, siis sobilikud ühisosata hulgad ongi $U := A \cap M$ ja $V := B \cap M$.

Piisavus: Olgu kahe punkti $a, b \in M \sqcup N$ puhul antud lahtised ühisosata $U, V \subseteq M$ nii, et $a \in U \cup f(U), b \in V \cup f(V)$. On kolm võimalikku juhtu:

Kui $a, b \in M$, siis järelikult $a \in U$ ja $b \in V$. Need hulgad on lahtised ruumis M, seega need on ka lahtised ruumis $M +_f N$.

Kui $a, b \in N$, siis järelikult $a \in f(U)$ ning $b \in f(V)$. Et N on Hausdorffi ruum, leiduvad mingid $U', V' \in \mathcal{T}_N$, $U' \cap V' = \varnothing$, mis sisaldavad vastavalt punkte a ja b. Nüüd saame $a \in U \cup (U' \cap f(U))$ ning $b \in V \cup (V' \cap f(V))$. Need hulgad on lõikumatud, ning on lihtne kontrollida, et need on ka ruumis $M +_f N$ lahtised.

Kui $a \in M$ ja $b \in N$, siis järelikult $a \in U$ ning $b \in f(V)$. Et ruumid M, N on lõikumatud, siis on lõikumatud ka nende alamhulgad U ning $f(V)$. Kokkuvõttes $a \in U$ ja $b \in V \cup f(V)$, mis on omavahel lõikumatud hulgad. Jälle näitab vahetu kontroll, et need hulgad on ka ruumis $M +_f N$ lahtised. ∎

Lause 3.3. *Olgu topoloogilistel ruumidel M ja N (vähemalt üks) loenduv baas. Siis ruumil $M \mathbin{+\!\!\!|} N$ leidub loenduv baas siis, kui leiduvad sellised loenduvad baasid $\mathcal{B}_M = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ ja $\mathcal{B}_N = \{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ vastavalt ruumides M ja N nii, et iga lahtise $W \in \mathcal{T}_{M \mathbin{+\!\!\!|} N}$ ja iga indeksi $j \in \mathbb{N}$ puhul leidub selline indeks $i \in \mathbb{N}$ nii, et $V_j \subseteq f(U_i)$ ja $U_i \subseteq W \cap M$.*

Tõestus. Olgu ruumi M loenduv baas $\mathcal{B}_M = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ ja ruumi N loenduv baas $\mathcal{B}_N = \{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ sellised, et iga lahtise $W \in \mathcal{T}_{M \mathbin{+\!\!\!|} N}$ ja iga indeksi $j \in \mathbb{N}$ puhul leidub selline indeks $i \in \mathbb{N}$ nii, et $V_j \subseteq f(U_i)$ ja $U_i \subseteq W \cap M$. Tähistame nüüd pere

$$B := \{U_i \cup V_j : V_j \subseteq f(U_i)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$$

ning näitame, et kogum $\mathcal{B}_{M \mathbin{+\mkern-10mu|} N} := B \cup \mathcal{B}_M$ on ruumi $M \mathbin{+\mkern-10mu|} N$ loenduv baas.

Hulga B konstruktsiooni järgi $|B| \leq |\mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_N|$, kus viimane on eelduse järgi loenduv hulk, seega ka B on loenduv hulk ning samuti on loenduv ühend $B \cup \mathcal{B}_M$ kahest loenduvast hulgast.

Näitame, et $B \cup \mathcal{B}_M$ moodustab ruumi $M \mathbin{+\mkern-10mu|} N$ baasi. Selleks peame näitama, et iga lahtise $S \in \mathcal{T}_{M \mathbin{+\mkern-10mu|} N}$ korral leidub igal punktil $x \in S$ lahtine ümbrus $W \in B \cup \mathcal{B}_M$ nii, et $x \in W \subseteq S$. On kaks võimalikku juhtu:

Kui $x \in S \cap M$, siis kasutades kleepimistingimust L1 saame $S \cap M \in \mathcal{T}_M$. Et pere $\mathcal{B}_M$ on ruumi M baas, siis tähendab, et leidub selline ruumis M lahtine $U_i \in \mathcal{B}_M$, mille puhul $x \in W \subseteq S \cap M$. Et aga ruum M on ruumi $M \mathbin{+\mkern-10mu|} N$ lahtine alamruum, siis nii leitud U_i on ka ruumis $M \mathbin{+\mkern-10mu|} N$ lahtine, ning selgelt kehtib $x \in U_i \subseteq S \cap M \subseteq S$, $U_i \in B \cup \mathcal{B}_M$.

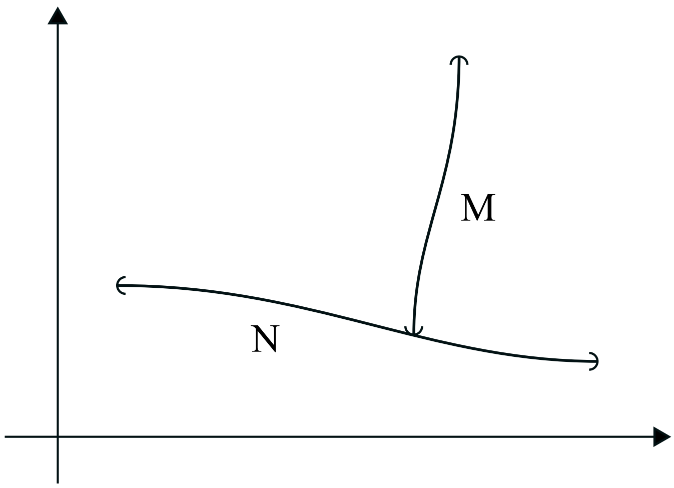
Kui $x \in S \cap N$, siis kasutades kleepimistingimust L2 saame $S \cap N \in \mathcal{T}_N$. Jälle leiame sellise ruumis N lahtise $V_j \in \mathcal{B}_N$, mille puhul $x \in V_j \subseteq S \cap N$. Nüüd eelduse kohaselt leidub selline $U_i \in \mathcal{B}_M$ nii, et $U_i \subseteq S \cap M$ ning $V_j \subseteq f(U_i)$, järelikult $x \in U_i \cup V_j \subseteq (S \cap M) \cup (S \cap N) = S$ ning $U_i \cup V_j \in B \subseteq B \cup \mathcal{B}_M$, nagu soovitud. ■

Järeldus 3.1. *Olgu M topoloogiline n-muutkond koos atlasega $\mathcal{A}_M$ ning N on n-atlasega $\mathcal{A}_N$ varustatud topoloogiline ruum (vt märkus 3.1). Konstrueerime kokkukleebitud ruumil $M +_f N$ atlase $\mathcal{A}_{M+_fN}$ vastavalt definitsioonile 3.1. Paar $(M +_f N, \mathcal{A}_{M+_fN})$ on n-muutkond siis, kui*

i) iga $a, b \in M \sqcup N$ puhul leiduvad lahtised $U, V \subseteq M$ nii, et $U \cap V = \varnothing$ ja $a \in U \cup f(U)$, $b \in V \cup f(V)$;

ii) ruumides M ja N leiduvad sellised loenduvad baasid $\mathcal{B}_M = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ ja $\mathcal{B}_N = \{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ nii, et iga lahtise $W \in \mathcal{T}_{M \mathbin{+\mkern-10mu|} N}$ ja iga indeksi $j \in \mathbb{N}$ puhul leidub selline indeks $i \in \mathbb{N}$ nii, et $V_j \subseteq f(U_i)$ ja $U_i \subseteq W \cap M$

iii) atlase $\mathcal{A}_{M+_fN}$ kaartide määramispiirkonnad moodustavad ruumi $M +_f N$ lahtise katte.



Joonis 3: Kahe 1-muutkonna M, N kleepimise näide.

Eelnev järeldus võtab kokku laused 3.2 ja 3.3 ning alampeatüki 3.1 tulemused. Tõepoolest, üldjuhul tekib $\mathcal{A}_{M+_fN}$ konstrueerimisel ainult n-ö pseudoatlas, mis ei kata täielikult ruumi $M +_f N$. Täpsemalt tekib probleem kinnise alamruumi N katmisega, sest $\mathcal{A}_M \subseteq \mathcal{A}_{M+_fN}$, aga sama ei kehti üldjuhul atlase $\mathcal{A}_N$ puhul. Käesoleva töö autor ei leidnud ruumi $M +_f N$ katmiseks sobivat samaväärsustingimust.

Näide 3.1. Selguse mõttes vaatame näidet, mille puhul me teame, et kleebitud ruum ei saa olla muutkond, ning siis kontrollime järelduse 3.1 tingimusi. Olgu eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^2$ antud kaks lahtist joont (lahtise joone all mõtleme mingi pideva ja lahtise injektsiooni $f : (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ kujutist), ehk kaks 1-mõõtmelist muutkonda M ja N, mis on lõikumatud, aga puutuvad punktis $p \in N$ (vt joonis 3). Formaalselt on siis punkt p selline, mille puhul iga lahtise kera $B_r(p) \subset \mathbb{R}^2$ (vt näide 1.2) korral $B_r(p) \cap M \neq \varnothing$ ning $B_r(p) \cap N \neq \varnothing$. Samuti eeldame, et muutkondadel M ja N on ette antud atlased $\mathcal{A}_M$ ja $\mathcal{A}_N$.

Ruumis $Z = M \cup N$ konstrueerime topoloogia nii, et nimetame lahtiseks iga alamhulga W, mille puhul leidub ruumis $\mathbb{R}^2$ lahtine hulk S nii, et $W = S \cap Z$. Teisisõnu on tegemist ruumi $\mathbb{R}^2$ alamruumi topoloogiaga hulgal $M \cup N$. Ilmselt ei ole nii konstrueeritud ruum Z muutkond, sest punkti p ümbruses ei ole ruum homöomorfne eukleidilise ruumiga. Pole raske veenduda, et hulk M on ruumis Z lahtine. Nüüd nagu peatükis 2, leiame ruumile

Z võrdse topoloogilise ruumi $M +_{f_Z} N$, kus

$$f_Z : \mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_N, \quad f_Z(W) = \mathrm{int}_Z(W \cup N) \cap N.$$

Nüüd näitame, et ruum $M +_{f_Z} N$ ei täida järelduse 3.1 tingimust (ii), ehk vastavalt definitsioonile 3.1 konstrueeritud atlas $\mathcal{A}_{M+_{f_Z}N}$ ei kata täielikult ruumi $M +_{f_Z} N$. Täpsemalt tekib probleem selles, et mitte ühegi punkti p ümbruse $W \in \mathcal{T}_{M+_{f_Z}N}$ puhul ei leidu sobivat homöomorfismi $[\varphi, \psi]$, seega atlas ei kata punkti p.

Tõepoolest, olgu antud lokaalsed kaardid $\varphi : U \to \hat{U} \subseteq \mathbb{R}$ ning $\psi : V \to \hat{V} \subseteq \mathbb{R}$ vastavalt atlastes $\mathcal{A}_M$ ja $\mathcal{A}_N$ nii, et $p \in U \cup V$, järelikult $p \in V$. Seejuures et M ja N on muutkonnad, siis kaartide sihthulgad $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ on ruumis $\mathbb{R}$ lahtised. Konstrueerime kleebitud kujutuse $[\varphi, \psi] : U \mathbin{+\!\!\!\!\!\!\;\vdash} V \to \mathbb{R}$. Eeldame, et kujutuste φ ja ψ muutumispiirkonnad on lõikumatud (vastasel juhul ei oleks $[\varphi, \psi]$ nagunii atlases $\mathcal{A}_{M+_{f_Z}N}$). Siis teame, et $\hat{V}$ on ruumis $\mathbb{R}$ lahtine, aga kleebitud kujutuse originaal $[\varphi, \psi]^{-1}(\hat{V}) = \psi^{-1}(\hat{V}) = V$ ei ole kleebitud ruumis lahtine. Tõepoolest, $p \in V \subseteq N$, aga vastavalt ruumi $Z = M +_{f_Z} N$ ning punkti p definitsioonile ei leidu ühtegi lahtist hulka $W \in \mathcal{T}_{M+_{f_Z}N}$ nii, et $p \in W$ ja $W \cap M = \varnothing$. Järelikult ei ole kujutus $[\varphi, \psi]$ pidev ega homöomorfism.

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuriti Artini kleepimist ja selle analoogi topoloogiliste n-muutkondade puhul. Defineeriti Artini kleepimise konstruktsioon kahe topoloogilise ruumi X ja Y vahel, mille abil luua uus ruum $X \dotplus Y$. Seejärel toodi näiteid Artini kleepimise kasutusest, sealhulgas ruumide X ja Y kokorrutise leidmine ja topoloogilise ruumi Aleksandrovi laiendi leidmine. Samuti toodi välja, et kui lahutada mõni topoloogiline ruum Z lahtiseks ruumiks X ja kinniseks täiendiks $Y = Z \setminus X$ koos vastavate alamruumi topoloogiatega, siis võib taastada ruumi Z topoloogia, kasutades Artini kleepimise konstruktsioonis kleepimisfunktsiooni

$$\begin{aligned} f_Z : \mathcal{T}_X &\to \mathcal{T}_Y, \\ W &\mapsto \operatorname{int}_Z(W \cup Y) \cap Y. \end{aligned}$$

Töös esitati moodus, kuidas liita kahel ruumil M ja N antud kujutused $\varphi : M \to R$ ja $\psi : N \to R$ ühtseks kujutuseks $[\varphi, \psi] : M \dotplus N \to R$, ning uuriti, millal on see kujutus homöomorfism. Toodi esile üks töö põhiteoreeme:

Teoreem 3.1. *Olgu antud kaks homöomorfismi $\varphi : U \to \hat{U}$ ning $\psi : V \to \hat{V}$, kus $\hat{U}, \hat{V} \subseteq R$ nii, et φ on ruumis R lahtine kujutus, st $\varphi : U \to R$ on lahtine. Siis kleebitud kujutus $[\varphi, \psi] : U \dotplus V \to \hat{U} \cup \hat{V} \subseteq R$ on homöomorfism parajasti siis, kui*

i) $[\varphi, \psi]$ on injektiivne, ehk kujutuste φ, ψ muutumispiirkonnad on lõikumatud;

ii) iga lahtise $W \subseteq R$ puhul kehtib $\psi^{-1}(W) \subseteq f\left(\varphi^{-1}(W)\right)$;

iii) iga lahtise $W \in \mathcal{T}_{U \dotplus V}$ puhul $\psi(W \cap V) \subseteq \operatorname{int}_R(\varphi(W \cap U) \cup \psi(W \cap V))$,

kusjuures tingimus (i) on samaväärne kujutuse $[\varphi, \psi]$ bijektiivsusega, tingimus (ii) samaväärne $[\varphi, \psi]$ pidevusega ning tingimus (iii) samaväärne $[\varphi, \psi]$ lahtisusega ruumis R.

Lõpuks loodi selle teoreemi abil loodi kogum lokaalseid kaarte kleebitud ruumil $M \dotplus N$, ehk n-ö pseudoatlas $\mathcal{A}_{M \dotplus N}$.

Kasutatud allikad (BIBLaTeXiga)

Abramov, Viktor (2012). *Globaalanalüüs*. Tartu Ülikooli kursuse loengukonspekt. URL: https://kodu.ut.ee/~abramov/teaching/GlobalAnalysis/Lecture%20materials/konspekt_globaalan.pdf (vaadatud 29.05.2025).

Lee, John M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. väljaanne. New York: Springer New York.

nLab authors (2012). *Artin gluing*. Revision 32. URL: https://ncatlab.org/nlab/show/Artin+gluing (vaadatud 29.05.2025).

Richard Pinch (2018). *Aleksandrov compactification*. URL: https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Aleksandrov_compactification (vaadatud 29.05.2025).

Segal, Ed (2016). *Manifolds*. Imperial College London kursuse loengukonspekt. URL: https://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucaheps/notes/Manifolds%202016.pdf (vaadatud 29.05.2025).

Souza, Lucas H. R. de (2023). "Glueing spaces without identifying points". *Topology and its Applications* 338. URL: https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108671.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Mattias Siilbek,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Artini kleepimise analoog muutkondade puhul“, mille juhendaja on Ülo Reimaa, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Mattias Siilbek
29.05.2025