TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Georg Simmul

Nambu teooria laienemine superruumile

Matemaatika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: prof. Viktor Abramov

Tartu 2021

Nambu teooria laienemine superruumile

Lühikokkuvõte:

Magistritöö toob võimaliku Nambu teooria üldistuse superruumile $\mathbb{R}^{3|2}$, koos üldistuse aluseks olevate struktuuride, Hamiltoni ja Nambu mehaanika ning superruumi, kirjeldusega. Üldistuse aluseks on bereziniaan, mis on determinandi üldistus supergeomeetrias. Teemad nagu Nambu mehaanika ja supergeomeetria on seletatud lahti piisava selgusega, et ka valdkonnaga mitte tuttav lugeja saaks materjaliga tutvuda.

Võtmesõnad:

Hamiltoni võrrandid, vektorväljad, Nambu mehaanika, Liouville'i teoreem, Lie algebrad, Poissoni sulg, supergeomeetria, superruum, bereziniaan.

CERCS: P150 Geomeetria, algebraline. topoloogia

Extension of Nambu's Theory To Superspace

Abstract:

This master's thesis presents a possible generalization of Nambu's theory to a superspace $\mathbb{R}^{3|2}$. In addition to that there is a description of the underlying structures like Hamilton and Nambu mechanics as well as superspace. The basis for this generalization is a berezinian, a generalized determinant in supergeometry. Subjects like Nambu mechanics and supergeometry are sufficiently explained, so that a reader who is not familiar with this subject could also understand this material.

Keywords:

Hamiltonian equations, Nambu mechanics, vector fields, Liouville's theorem, Lie algebras, Poisson bracket, supergeometry, superspace, berezinian.

CERCS: P150 Geometry, algebraic topology.

Sisukord

0.1 Sissejuhatus

1973. aastal andis Jaapani matemaatik Yoichiro Nambu üldistuse tol ajal pea saja aasta vanusele Hamiltoni mehaanikale [1]. Kui 1833. aastal ilmavalgust näinud Hamiltoni mehaanika on antud paarismõõtmelisel ruumil - faasiruumil $\mathbb{R}^{2n}$ - siis Nambu üldistas selle teooria suvalisele ruumile $\mathbb{R}^n$. Üldistuse aluseks oli jakobiaan, mille kaudu defineeriti ruumil $\mathbb{R}^n$ vektorväli. Erinevalt Hamiltoni mehaanikast, kus on alati antud üks hamiltoniaan, kasutab Nambu mehaanika hamiltoniaanide komplekti. Täpsemalt, ruumil $\mathbb{R}^n$ peab olema antud $n-1$ hamiltoniaani. Hamiltoni mehaanika kasulikkus füüsikas oli 1973. aastaks hästi teada. Antud teooria pakub ju lahenduse tervele reale mehaanikast tuntud probleemidele ning on pannud aluse uutele füüsika valdkondadele nagu statistiline mehaanika ja kvantteooria. Kuigi Nambu mehaanika ei saanud kohe sama edu osaliseks, on ta praeguseks saanud füüsikute poolt laialt kasutatavaks tööriistaks. Mainides Hamiltoni mehaanikat, ei saa mainimata jätta Liouville'i teoreemi - üht Hamiltoni mehaanika fundamentaalsematest tulemustest. Saab näidata, et Liouville'i teoreem üldistub loomulikult Nambu mehaanikale, millele ka Nambu ise oma algses artiklis osutas. Lisaks sellele tõusevad Nambu mehaanikast samuti esile nii mõnedki mehaanikast tuntud tulemused. Nambu mehaanikas tekkiv vektorväli tekitab analoogiliselt Hamiltoni juhuga loomulikul viisil Poissoni sulu. Kuid erinevalt Hamiltoni mehaanikast on Nambu-Poissoni sulg n-aarne. Sellega üldistuvad ka Poissoni sulule seatud tingimused - eelkõige Jacobi samasus, mis n-aarse sulu korral asendub Filippovi samasusega. Selle üldistuse, n-aarse Lie algebra, tõi sõltumatult Nambust aastal 1985 Vene matemaatik Valeri Terent'evich Filippov [2]. Nambu mehaanikast annab põhjaliku ülevaate oma 2008. aastal ilmunud raamatus Armeenia päritolu matemaatik Leon Armenovich Takhtajan [3].

Supergeomeetria on matemaatika seisukohalt huvitav mõiste, sest leidis esiti kasutust teoreetilise füüsika töödes ning alles hiljem, kui nähti tema seost matemaatikas juba tuntud $\mathbb{Z}_2$-gradueeritud algebraga, sai ta populaarseks kaasaegse geomeetria valdkonnaks. Selles ligi sada aastat vanas teoorias vaadatakse lisaks harilikele kommuteeruvatele koordinaatidele ka antikommuteeruvaid, milleks on Grassmanni algebra moodustajad, nii nimetatud paarituid koordinaate. Selline lähenemine võimaldab ühendada näiteks bosonväljad (kommuteeruvad) ja fermionväljad (antikommuteeruvad) üheks superväljaks. Suur osa supergeomeetrias kasutusel olevatest mõistetest on antud Vene matemaatiku Felix Alexandrovich Berezini poolt [4].

Magistritöö eesmärgiks on näidata, artikli [5] eeskujul, kuidas saab laiendada Nambu 1973. aastal ilmunud teooria superruumile. Antud artikli idee on laiendada Nambu lähenemist asendades jakobiaan bereziniaaniga. Näeme, et antud lähenemisel üldistub superruumile ka Liouville'i teoreem. Seejuures toome ära sinna juurde käiva matemaatilise tausta. Lisaks on püstitatud eesmärk kirjeldada ka artiklis [5] vaadeldatavast juhust üldisemat, kus Grassmanni algebra on asendatud suvalise kommutatiivse superalgebraga.

Käesolev töö on jagatud viieks peatükiks. Esimene ja kolmas peatükk pakuvad vajalikku mõistelist alust ülejäänud kolmele peatükile, mis moodustavad magistritöö selgroo. Magistritöö põhiosa on klassikalise Hamiltoni mehaanika kirjeldus koos Liouville'i teoreemi tõestusega teises peatükis, Nambu üldistus ning tema poolt tekitatud üldistatud Poissoni sulg neljandas peatükis ning Nambu mehaanika üldistamine superruumile viiendas peatükis.

Esimene peatükk on referatiivne ning põhineb raamatul [6]. Tööd alustame vektorväljade defineerimisega. Vaatame vektorvälja esitust reeperväljas, konkreetsemalt vaatame suunatuletise abil defineeritud reepervälja $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Defineerime siledad vektorväljad ning näitame, kuidas samastub sile vektorväli teisendusega siledatel funktsioonidel. Esimese peatüki teises paragrahvis uurime vektorvälja integraaljoone mõistet ning defineerime vektorvälja voo, mis kirjeldab, kuidas ruum vektorvälja mõjul muutub. Vektorvälja voog on tähtsal kohal Liouville'i teoreemi ning selle rakenduste mõistmisel.

Teises peatüki alguses sõnastamegi Liouville'i teoreemi üldisel juhul, mis võimaldab seda hiljem Hamiltoni mehaanikalt edasi üldistada. Teoreemi tõestus põhineb raamatul [7]. Teises paragrahvis vaatame Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorvälja ning esimeses paragrahvis tõestatud teoreemi abil näitame, et Liouville'i teoreem kehtib - see tähendab Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorväli säilitab ruumala.

Kolmas peatükk on samuti referatiivne ning põhineb raamatutel [7] ja [8], kuid tasub mainida, et kõigi lemmade ning teoreemi tõestused on ise tehtud. Alustame Lie algebra defineerimisega. Seejärel näitame, kuidas Poissoni sulg tekitab vektorväljade vektorruumil Lie algebra. Kolmanda peatüki kolmandas paragrahvis defineerime Poissoni sulu faasiruumil ning näitame, kuidas see on kooskõlas varem vaadatud Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorväljaga. Peatüki lõpus näitame, et kahe sileda funktsiooni Poissoni sulu poolt tekitatud vektorväli on võrdne nende funktsioonide endi poolt tekitatud vektorväljade Lie suluga.

Neljandas peatükis toome sisse Nambu mehaanika mõiste. Peatükk põhineb Nambu originaalsel artiklil [1]. Alustuseks defineerime Nambu võrrandid. Seejärel näitame, kuidas tekitavad Nambu võrrandid analoogiliselt Hamiltoni juhuga vektorvälja. Nambu vektorvälja kaudu defineerime omakorda ternaarse Poissoni sulu. Neljanda peatüki kolmandas paragrahvis näitame, et ruumis $\mathbb{R}^3$ on Nambu vektorvälja voog määratud tema hamiltoniaanide tasemepindade lõikejoonega ning et üldistatud Poissoni sulg rahuldab kõiki ootuspäraseid omadusi. See tähendab lineaarsust, kaldsümmeetrilisust, Leibnizi reeglit ning üldistatud Jacobi samasust, milleks on Filippovi samasus. Viimase lemma tõestus põhineb enda arvutustel. Paragrahv lõppeb järeldusega, et ternaarne sulg tekitab siledate funktsioonide vektorruumil Lie sulgude pere. Neljanda peatüki neljandas paragrahvis saab näidatud, et ka Nambu vektorvälja voog säilitab ruumala ehk Liouville'i teoreemi üldistus kehtib ning peatüki lõpetuseks toome ära ühe füüsikalise rakenduse, mis pärineb Nambu enda artiklist.

Käesoleva magistritöö viimase peatüki esimeses paragrahvis defineerime supergeomeetria põhilised struktuurid. Põhilised mõisted ning tulemused toodud vaid ülevaatlikult ning üldiselt ilma tõestusteta. Siin vaatame mõisteid nagu superalgebra, Grassmanni algebra, parempoolne tuletis, maatriksite superalgebra, bereziniaan ning superruum. Neist viimast, superruumi, uurime põhjalikumalt. Veendume kahe lemma abil, et Grassmanni algebra moodustajatest $\theta, \bar{\theta}$ sõltuvate siledate funktsioonide ruum on kommutatiivne superalgebra. Lemmade tõestused põhinevad enda arvutustel. Nambu mehaanika ning superruumi toome kokku üheks teooriaks viienda peatüki kolmandas paragrahvis. Siin toodud idee põhineb artiklil [5]. Defineerime Nambu võrrandid superruumil. Selleks kasutame determinandi üldistust superruumile - bereziniaani. Saadud võrrandite abil defineerime ka Nambu vektorvälja superruumil ning toome ära Liouville'i teoreemi üldistuse superruumile. Kasutades analoogiat Hamiltoni ning Nambu mehaanikaga defineerime ka superruumil vektorvälja kaudu Poissoni sulu. Toome ära arvutusvalemi Poissoni sulu leidmiseks. Arvutusmahu suuruse tõttu ei tõesta küll vahetult, et Poissoni sulg superruumil rahuldab kõiki ootuspäraseid tingimusi, kuid pakume kokkuvõtliku põhjenduse, kasutades saadud arvutusvalemit, miks see peab kehtima. Töö lõpetuseks pakun üldistuse artiklis [5] vaadeldavale Poissoni sulule, kus Grassmanni algebra on asendatud suvalise kommutatiivse superalgebraga. Osatuletiste üldistuseks fikseerime kolm paarisderivatsiooni ning kaks paaritut derivatsiooni. Üldistatud Poissoni sulu jaoks toome ka arvutusvalemi, mis põhineb oma arvutustel.

Peatükk 1

Vektorväljad

Hamiltoni mehaanika uurimiseks annab suurepärased tööriistad vektorväljade teooria. Seepärast toome ka siin töös alustuseks ära mõned tähtsamad mõisted, mis edaspidi võimaldavad loomulikul viisil väljendada Hamiltoni, aga ka Nambu mehaanika struktuure. Vektorväljade osa põhineb raamatul [6].

1.1 Vektorvälja kirjeldus

Vaatame ruumi $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk ja $p \in U$ mingi punkt selles hulgas.

Definitsioon 1.1.1. *Vektorväljaks* lahtisel hulgal $U \subset \mathbb{R}^n$ nimetatakse kujutust $X : p \mapsto X_p$, mis seab igale punktile $p \in U$ vastavusse üheselt määratud vektori $X_p \in \mathbb{R}^n$. Vektorit X_p nimetame ruumi $\mathbb{R}^n$ *puutujavektoriks* punktis p.

Olgu X suvaline vektorväli ning $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{D}(U)$ vektorväljad, mis seavad igale punktile $p \in U$ vastavusse kanoonilise reeperi $\{(E_1)_p, \ldots, (E_n)_p\}$. See tähendab, et $\langle (E_i)_p, (E_j)_p \rangle = \delta_{ij}$. Kogumit $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ nimetatakse *reeperväljaks*. Seega saame vektorvälja X esitada kujul

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i. \tag{1.1}$$

kus $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ on sellised funktsioonid, et igas punktis kehtib

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)(E_i)_p.$$

Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ruumi $\mathbb{R}^n$ ortonormeeritud baas. Vaatame erijuhtu, kui vektorväli E_i on konstantne punkti p suhtes ning määratud valemiga $(E_i)_p = e_i$. Siis on võimalik suunatuletise mõiste abil näidata [6], et vektorvälja E_i saab samastada osatuletisega. See tähendab

$$E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Seega saame valemi (1.1) kirjutada kujul

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.2}$$

Järgnevas kasutame reepervälja $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$.

Kui funktsioonid f_i on siledad ehk lõpmata diferentseeruvad, siis öeldakse, et vektorväli X on *sile*. Edasipidi vaatame ainult siledaid vektorvälju. Kõigi siledate vektorväljade hulka tähistame $\mathcal{D}(U)$. Hulk $\mathcal{D}(U)$ on vektorruum [6].

Olgu X vektorväli ja $g : U \to \mathbb{R}$ sile funktsioon. Defineerime funktsiooni $Xg : U \to \mathbb{R}$ järgnevalt:

$$Xg = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial g}{\partial x_i}. \tag{1.3}$$

Kuna funktsioonid g ja f_i on kõik siledad, siis ka Xg on sile funktsioon. Järelikult võime vektorvälja X vaadata teisendusena $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, kus $C^\infty(U)$ tähistab siledate funktsioonide, määrmaispiirkonnaga U, algebrat. Seetõttu kasutame edaspidi funktsiooni (1.3) jaoks tähistust $X(g)$.

1.2 Integraaljoon

Definitsioon 1.2.1. Olgu $X \in \mathcal{D}(U)$. Vektorvälja X *integraaljooneks* nimetatakse parameetrilist joont $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : (a, b) \to U$, kus $(a, b) \subset \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)},$$

kus $\alpha'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ on parameetrilise joone kiirusvektor punktis $\alpha(t)$.

Tekib küsimus, kas suvalise vektorvälja $X \in \mathcal{D}(U)$ korral sobiv parameetriline joon α leidub ning kui jah, siis kas see on ainus. Tuleb välja, et vastus mõlemale küsimusele on jah. Veendume selles. Olgu siis antud suvaline vektorväli $X \in \mathcal{D}(U)$ ja fikseeritud $t \in (a, b)$. Kasutades valemit (1.2), saame kirjutada

$$X(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)}. \tag{1.4}$$

Kiirusvektori $\alpha'(t)$ saame kirjutada välja punktis $\alpha(t)$ antud reeperi baasivektorite kaudu, saades

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)}.$$

Kirjutades võrrandi (1.4) välja koordinaatfunktsioonide kaudu, saame tingimuse $X(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ kirjutada ümber võrrandite süsteemina

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Seega taandub vektorvälja X integraaljoone leidmise ülesanne diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1.5) lahendamisele. Diferentsiaalvõrrandite teooriast teame, et selline võrrandite süsteem on lahenduv, kusjuures üheselt lahenduv, kui on fikseeritud algtingimus $\alpha(0) = p$. Täpsemalt, iga $p \in U$ korral leidub parajasti üks vektorvälja X integraaljoon

$\alpha_p(t) : (a_p, b_p) \to U$, mille korral $\alpha_p(0) = p$, kus alaindeksiga p tähistame sõltuvust algtingimusest. Defineerime kujutuse $F(t, x) = \alpha_x(t) : U \times (a_x, b_x) \to U$, mis on sile, kui vektorväli X on sile.

Definitsioon 1.2.2. Kujutust $F(t, x)$ nimetatakse vektorvälja X *vooks*.

Kujutuse $F(t, x)$ definitsioonist on selge, et $F(0, x) = x$. Vektorvälja voogu võib mõista nii, et see annab liikumise hulgas U, kus ajahetkeks t liigub punkt x punkti $F(t, x)$. Seega integraaljoon annab punkti liikumise trajektoori, kusjuures punkti liikumise kiirus ajahetkel t on määratud vektorvälja abil, vektorina $X_{F(t,x)}$.

Paneme tähele, et funktsiooni võib vaadata fikseerides ühe kahest parameetrist. Fikseeritud $t = t_0$ korral kirjeldab $F(t_0, x)$ hulga U teisendust. Fikseeritud $x = x_0$ korral kirjeldab $F(t, x_0)$ punkti x liikumist hulgas U vektorvälja mõju all.

Peatükk 2

Hamiltoni võrrandid ja Liouville'i teoreem

Hamiltoni võrrandid on matemaatikas ja klassikalises mehaanikas hästi tuntud. Antud konstruktsioonil põhineb ka Nambu mehaanika, mida vaatame neljandas peatükis. Liouville'i teoreem on Hamiltoni mehaanika üks tähtsamaid tulemusi ning selle üldistumine Nambu mehaanikale ning ka superruumile annab põhjust nende üldistustega tegeleda. Järgnev peatükk põhineb raamatutel [7] ja [9].

2.1 Liouville'i teoreem

Toome siin ära ühe võmaliku Liouville'i teoreemi tõestuse üldisemal juhul, mis võimaldab meil hiljem lihtsalt veenduda selle kehtimises Hamiltoni mehaanikas, aga ka üldisemalt ruumis $\mathbb{R}^n$.

Teoreem 2.1.1. *Kui vektorvälja divergents on null, siis tema voog säilitab hulga ruumala. See tähendab, kui* $\mathrm{div}(X) = 0$ *ja* $D \subset \mathbb{R}^n$*, siis* D *ruumala on suvalise* t *korral võrdne hulga* $F(t, D)$ *ruumalaga.*

Tõestus. Tähistame hulga D ruumala $\mathrm{v}(D)$ ja $F(t,D) := D_t$. Siis tehes muutuja vahetuse $\mathbf{y} = F(t,\mathbf{x})$, saame

$$\mathrm{v}(D_t) = \underset{D_t}{\int \dots \int} d\mathbf{y} = \underset{D}{\int \dots \int} \det\Big(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\Big)\, d\mathbf{x}. \tag{2.1}$$

Kasutades Taylori rida, saame avaldada funktsiooni $F(t,\mathbf{x})$ kujul

$$\begin{aligned} F(t,\mathbf{x}) &= F(t,\mathbf{x})|_{t=0} + \frac{dF}{dt}\Big|_{t=0} \cdot t + O(t^2) \\ &= \mathbf{x} + X(\mathbf{x})t + O(t^2). \end{aligned}$$

Kasutades seda avaldises (2.1), saame, et

$$\begin{aligned} \mathrm{v}(D_t) &= \underset{D}{\int \dots \int} \det(E + \frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}} t + O(t^2))\, d\mathbf{x} \\ &= \underset{D}{\int \dots \int} 1 + t\mathrm{Tr}\Big(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}}\Big) + O(t^2)\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{v}(D_t)}{dt}\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Big(\underset{D}{\int \dots \int} 1 + t\mathrm{Tr}\Big(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}}\Big) + O(t^2)\, d\mathbf{x}\Big)\Big|_{t=0} \\ &= \underset{D}{\int \dots \int} \mathrm{Tr}\Big(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}}\Big)\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Viimane on null siis, kui $\mathrm{Tr}\Big(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}}\Big) = \mathrm{div}(X) = 0$ ehk vektorvälja divergents on null. $\square$

2.2 Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorväli

Vaatame ruumi $\mathbb{R}^{2n}$, koordinaatidega $(q_1(t),\dots,q_n(t),p_1(t),\dots,p_n(t)) = (\mathbf{q},\mathbf{p})$. Kui $\mathbf{p}$ vastab punkti positsioonile ja $\mathbf{q}$ punkti momendile, nimetame ruumi $\mathbb{R}^{2n}$ *faasiruumiks*. Olgu faasiruumil antud funktsioon $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$, mis rahuldab võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} &= -\mathbf{p}', \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} &= \mathbf{q}'. \end{aligned}$$

Funktsiooni H nimetame *hamiltoniaaniks*. Näeme, et Hamiltoni võrrandid tekitavad loomulikul viisil vektorvälja, kui igale punktile $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ seame vastavusse vektori $(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}})$. Tõesti, Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorvälja X_H saab siis reepervälja kaudu välja kirjutada kujul

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \tag{2.2}$$

Veendume, et Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorvälja divergents on null. See kehtib, sest

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X_H) &= \operatorname{Tr}\Big(\frac{\partial X_H}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{q})}\Big) \\
&= -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} - \ldots - \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_n} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} + \ldots + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorväli säilitab ruumala ehk Liouville'i teoreem kehtib.

Peatükk 3

Lie algebrad

Järgnev peatükk põhineb raamatutel [7] ja [8] ja tegeleb põhiliselt Lie algebra aluseks oleva teooriaga. Tegemist on hästi uuritud kaasaegse matemaatika valdkonnaga, mis koos eelmise peatükiga võimaldab edasi liikuda Hamiltoni võrrandite üldistusteni. Mõisted nagu Poissoni sulg võimaldavad meil hiljem veenduda ka vaadatavate üldistuste sisukuses.

3.1 Lie algebrad

Definitsioon 3.1.1. *Lie algebraks* nimetatakse vektorruumi L koos temal antud operatsiooniga $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$, mis rahuldab tingimusi:

- $[A + \lambda B, C] = [A, C] + \lambda[B, C]$ (bilineaarne);
- $[A, B] = -[B, A]$ (kaldsümmeetriline);
- $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ (Jacobi samasus).

Antud operaatorit nimetame *kommutaatoriks* või *Lie suluks*.

Näide 3.1.1. Tähistagu $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ maatriksite $X \in M_n(\mathbb{C})$ hulka, mis rahuldavad tingimust $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Siis $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ koos operatsiooniga $[X, Y] = XY - YX$ on Lie algebra [10].

3.2 Poissoni sulg vektorväljadel

Definitsioon 3.2.1. Vektorväljade *Poissoni suluks* nimetame kujutust $[\cdot, \cdot] : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, mis on antud valemiga

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Siin mõistame kompositsiooni $\circ$ all vektorväljade kui kujutuste $X, Y : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, kompositsiooni (1.3).

Kirjutame alustuseks Poissoni sulu välja reepervälja $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ kaudu. Olgu X, Y vektorväljad. Teame, et leiduvad sellised siledad funktsioonid f_i, g_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, et

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$Y = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Seega saame leida

$$X \circ Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Kuna teine liidetav leidub ka $Y \circ X$ lahtikirjutuses ja funktsioonide korrutamine on kommutatiivne, saame kokkuvõttes

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{3.1}$$

Viimane valem näitab ka seda, et $[X, Y]$ on tõesti vektorväli, nagu definitsioonis öeldud on, kusjuures tema koordinaatfunktsioonid on $\left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)\Big|_{j=1}^n$.

Lemma 3.2.1. *Vektorväljade vektorruum koos Possoni suluga on Lie algebra*

Tõestus. Selle näitamiseks peame kontrollima kolme tingimust. Olgu X, Y, Z vektorväljad ja f_i, g_i, h_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, vastavalt nende koordinaatfunktsioonid reeperväljas. Olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Näitame bilineaarsuse kehtivust. Kuna $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on vektorruum, siis

$$
\begin{aligned}
[X + \lambda Y, Z] &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left((f_i + \lambda g_i) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} - h_i \frac{\partial (f_i + \lambda g_i)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(f_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \lambda g_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} - h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \lambda h_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(f_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} - h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(g_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} - h_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= [X, Z] + \lambda [Y, Z].
\end{aligned}
$$

Kaldsümmeetrilisust saab näidata vahetult

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X = -(Y \circ X - X \circ Y) = -[Y, X].$$

Jacobi samasuse näitamiseks arvutame kõigepealt esimese liidetava

$$
\begin{aligned}
[[X, Y], Z] &= [X \circ Y - Y \circ X, Z] \\
&= (X \circ Y - Y \circ X) \circ Z - Z \circ (X \circ Y - Y \circ X) \\
&= X \circ Y \circ Z - Y \circ X \circ Z - Z \circ X \circ Y + Z \circ Y \circ X.
\end{aligned}
$$

Kuna $Z \circ X \circ Y$ ja $Z \circ Y \circ X$ ning $X \circ Y \circ Z$ ja $Y \circ X \circ Z$ leiduvad vastavalt $[[Y, Z], X]$ ja $[[Z, X], Y]$ väljakirjutistes vastasmärgiga, taanduvad nad välja ning saame Jacobi samasuse $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$. Oleme näidanud, et lemma väide kehtib. $\square$

Seega on Poissoni sulu näol tegemist Lie suluga vektorväljade vektorruumis. Edaspidi nimetame Poissoni sulgu vekorväljadel *Lie suluks*.

3.3 Poissoni sulg faasiruumil

Olgu $\mathbb{R}^{2n}$ faasiruum, hamiltoniaan $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, ning $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ mingi teine funktsioon.

Definitsioon 3.3.1. Funktsioonide H ja F *Poissoni suluks* nimetame funktsiooni, mis on antud valemiga

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}.$$

Lemma 3.3.1. *Kehtib*

$$\{H, F\} = X_H(F),$$

kus X_H on Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorväli (2.2).

Tõestus. Tuletame meelde, et hamiltoniaani H ehk temale vastavate Hamiltoni võrrandite poolt tekitatud vektorvälja kuju reepeväljas on

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}.$$

Funktsiooni $X_H(F)$ defineerisime (1.3) järgnevalt:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial F}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial F}{\partial q_i}, \tag{3.2}$$

kus f_i, g_i on vektorvälja X_H koordinaatfunktsioonid $-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Asendades need valemisse (3.2), näeme, et võrdus $\{H, F\} = X_H(F)$ tõesti kehtib. □

Lemma 3.3.2. *Poissoni sulg rahuldab Leibnizi reeglit.*

Tõestus. Olgu $F, G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ antud funktsioonid. Siis

$$\begin{aligned}
\{H, FG\} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial (FG)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial (FG)}{\partial \mathbf{p}} \\
&= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \Big(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} G + F \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \Big) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \Big(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} G + F \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \Big) \\
&= \Big(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \Big) G + \Big(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \Big) F \\
&= \{H, F\} G + F \{H, G\}.
\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et Leibnizi reegel kehtib. □

Tõestusest on selge, et Leibnizi reeglit saab kasutada ka esimese muutuja suhtes. Analoogiliselt lemma 3.2.1 tõestusele on lihtne veenduda, et ka funktsioonide Poissoni sulg on bilineaarne, kaldsümmeetriline ning rahuldab Jacobi samasust. Olgu nüüd $G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ mingi teine hamiltoniaan ja talle vastav vektorväli X_G.

Teoreem 3.3.1. *Poissoni sulu $\{H, G\}$ tekitatud vektorväli on võrdne vektorväljade X_H ja X_G Lie suluga $[X_H, X_G]$.*

Tõestus. Teame, et $\{H, G\}$ on mingi sile funktsioon määramispiirkonnaga $\mathbb{R}^{2n}$. Järelikult võime vaadata tema tekitatud vektorvälja $X_{\{H,G\}}$. Seega peame näitama, et

$$X_{\{H,G\}} = [X_H, X_G].$$

Asendades lemmas 3.3.1 $H = \{H, G\}$, saame, et suvalise funktsiooni $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\{\{H, G\}, F\} = X_{\{H,G\}}(F). \tag{3.3}$$

Kirjutame lahti võrduse parema poole. Saame

$$\begin{aligned}
\{\{H, G\}, F\} &= \left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}, F\right\} \\
&= \left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}, F\right\} - \left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}, F\right\} \\
&= \left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, F\right\}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\left\{\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}, F\right\} - \\
&\qquad - \left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, F\right\}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\left\{\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}, F\right\}
\end{aligned}$$

Arvutame viimase valemi liikmed eraldi välja. Saame

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, F\right\}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}\\
\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\left\{\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}, F\right\} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}^2}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)\\
\left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, F\right\}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}^2}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}\\
\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\left\{\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}, F\right\} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}^2}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)
\end{aligned}$$

ehk koondades liikmed $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}$ ja $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}$ järgi, saame

$$\begin{aligned}
\{\{H,G\},F\} = &\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}+\\
&+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}^2}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}.
\end{aligned}$$

Nüüd, kasutades võrduseid (1.3) ja (3.3) saame öelda, et vektorväli $X_{\{H,G\}}$ esitub reeperväljas $\{\frac{\partial}{\partial p_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial p_n},\ldots,\frac{\partial}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial q_n}\}$ kujul

$$\begin{aligned}
X_{\{H,G\}} = &\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}^2}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}+\\
&+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}^2}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}^2}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}.
\end{aligned}$$

Lie sulule $[X_H, X_G]$ vastava vektorvälja leiame samuti reeperväljas $\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\}$. Kehtib

$$\begin{aligned}
X_H &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}};\\
X_G &= \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
X_H \circ X_G = &\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{q}}\\
&- \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}.
\end{aligned}$$

Leides analoogiliselt ka $X_G \circ X_H$ ning taandades ühised liikmed ära, saame, et

$$\begin{aligned} X_H \circ X_G - X_G \circ X_H = &\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{p}^2} - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \\ &+ \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}^2} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}^2} - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Pidades silmas, et siledate funktsioonide korrutamine on kommutatiivne ja osatuletiste järjekord ei ole oluline, on definitsiooni (3.2.1) järgi näha, et tõesti

$$X_{\{H,G\}} = X_H \circ X_G - X_G \circ X_H = [X_H, X_G].$$

$\square$

Peatükk 4

Nambu mehaanika

Siiani oleme vaadanud Hamiltoni võrrandeid, mis põhinevad hamiltoniaanil - funktsioonil määramispiirkonnaga $\mathbb{R}^{2n}$. Oleme ka näidanud, et hamiltoniaan tekitab loomulikul viisil vektorvälja ruumis $\mathbb{R}^{2n}$. Siin on üheks kitsenduseks asjaolu, et tegeleme paarismõõtmeliste ruumidega. Kuid kas oleks võimalik leida mingi hamiltoniaani, Hamiltoni võrrandite ning neile vastava vektorvälja analoog, mida saab kasutada suvalise, muuhulgas paaritumõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^n$ korral? Ühe sellise üldistuse pakkus 1973. aastal välja Jaapani matemaatik Yoichiro Nambu artiklis [1]. Antud peatükis võtame kokku artiklis toodud üldistuse ning anname uue vektorväljadest lähtuva käsitluse.

4.1 Nambu võrrandid

Vaatame lihtsuse mõttes ruumi $\mathbb{R}^3$. On selge, et siin klassikalist hamiltoni mehaanikat rakendada ei saa. Olgu ruumil $\mathbb{R}^3$ antud kaks siledat funktsiooni $H(x, y, z)$ ja $G(x, y, z)$. Nambu käsitluses on paar H, G klassikalise hamiltoniaani analoog. Üldisemas käsitluses, ruumis $\mathbb{R}^n$, koosneb hamiltoniaani analoog $n-1$ siledast funktsioonist.

Definitsioon 4.1.1. Antud funktsioonide H ja G korral nimetame *Nambu võrranditeks* võrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{dt} = \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|,$$
$$\frac{dy}{dt} = \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|,$$
$$\frac{dz}{dt} = \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|,$$

kus

$$\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ja võrduste paremal poolel seisavad antud maatriksite determinandid.

4.2 Nambu vektorväli

Paneme tähele, et Nambu võrrandid seavad igal punktile $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vastavusse puutujavektori

$$\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|, \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|, \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\Big).$$

Seega võime funktsioonide paari H, G abil moodustada vektorvälja $X_{(H,G)}$ järgmiselt

$$X_{(H,G)} = \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\frac{\partial}{\partial x} + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\frac{\partial}{\partial y} + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.1}$$

Definitsioon 4.2.1. Antud funktsioonide H ja G korral nimetame vektorvälja (4.1) *Nambu vektorväljaks*.

4.3 Üldistatud Poissoni sulg

Oleme varem näidanud, et vektorvälja võib vaadata ka teisendusena ruumis $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. See tähendab, et suvalisele siledale funktsioonile $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seab Nambu vektorväli $X_{(H,G)}$ vastavusse sileda funktsiooni

$$X_{(H,G)}(F) = \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\frac{\partial F}{\partial x} + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\frac{\partial F}{\partial y} + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\frac{\partial F}{\partial z}.$$

On lihtne veenduda, et

$$X_{(H,G)}(F) = \left|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,z)}\right|. \tag{4.2}$$

Tõesti,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,z)}\right| &= \begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \\ G_x & G_y & G_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\
&= H_xG_yF_z + H_yG_zF_x + H_zG_xF_y - H_zG_yF_x - H_yG_xF_z - H_xG_zF_y \\
&= (H_yG_z - H_zG_y)F_x + (H_zG_x - H_xG_z)F_y + (H_xG_y - H_yG_x)F_z \\
&= \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\right|F_x + \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\right|F_y + \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\right|F_z.
\end{aligned}$$

Definitsioon 4.3.1. Funktsioonide H, G ja F *üldistatud Poissoni suluks* nimetame funktsiooni, mis on antud valemiga

$$\{H,G,F\} = \left|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,z)}\right| \tag{4.3}$$

4.3.1 Nambu vektorvälja voog

Olgu parameetriline joon $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, Nambu vektorvälja $X_{(H,G)}$ integraaljoon. See tähendab, et kehtivad tingimused (1.5)

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\right|, \\
\frac{dy}{dt} &= \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\right|, \\
\frac{dz}{dt} &= \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\right|.
\end{aligned}$$

Näitame, et integraaljoon $\alpha(t)$ asub funktsiooni $H(x,y,z)$ tasemepinnal. Tasemepinnaks nimetatakse võrduse $H(x,y,z) = c \in \mathbb{R}$ lahendite hulka. Saab näidata, et tasemepind on pind [11]. Ahendades funktsiooni H joonele $\alpha(t)$, tähistame $H|_{\alpha(t)}$, saame

$$
\begin{aligned}
\frac{dH|_{\alpha(t)}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}\left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\right| + \frac{\partial H}{\partial y}\left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\right| + \frac{\partial H}{\partial z}\left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\right| \\
&= \{H,G,H\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

See tähendab, et suvalise t korral on $H|_{\alpha(t)}$ konstantne. Kuna t on suvaline, siis olemegi saanud, et integraaljoon $\alpha(t)$ asub tervenisti funktsiooni $H(x,y,z)$ tasemepinnal. Analoogiliselt võib näidata, et integraaljoon $\alpha(t)$ asub funktsiooni $G(x,y,z)$ tasemepinnal. Seega kattub $\alpha(t)$ funktsioonide $H(x,y,z)$ ja $G(x,y,z)$ tasemepindade poolt määratud lõikejoone mingi osaga. Sellega oleme näidanud, et Nambu vektorvälja voog $F(t,x)$ on määratud funktsioonide $H(x,y,z)$ ja $G(x,y,z)$ tasemepindade lõikejoontega.

4.3.2 Üldistatud Poissoni sulu omadusi

Kasutades võrdust (4.2) oleme juba näidanud, et üldistatud Poissoni sulu jaoks kehtib lemmaga 3.3.1 samaväärne tulemus

$$\{H,G,F\} = X_{(H,G)}(F).$$

Näitame veel, et üldistatud Poissoni sulg säilitab teisedki Poissoni sulu tähtsamad omadused. Siin tuleb märkida, et kuna Jacobi samasus on defineeritud kahekohalise sulu jaoks, kuid üldistatud Poissoni sulg on ternaarne (või üldisemalt n-aarne), tuleb siin ka Jacobi samasust üldistada. Seda üldistust nimetatakse Filippovi samasuseks, mis ütleb, et n-aarne sulg rahuldab tingimust

$$
\begin{aligned}
&\{H_1,\ldots,H_{n-1},\{F_1,\ldots,F_n\}\} = \{\{H_1,\ldots,H_{n-1},F_1\},F_2,F_3\ldots,F_n\}+ \\
&\{F_1,\{H_1,\ldots,H_{n-1},F_2\},F_3,\ldots,F_n\} + \ldots + \{F_1,\ldots,F_{n-1},\{H_1,\ldots,H_{n-1},F_n\}\}.
\end{aligned}
$$

Paneme tähele, et kui $n = 2$, siis taandub Filippovi samasus kujule

$$\{H_1, \{F_1, F_2\}\} = \{\{H_1, F_1\}, F_2\} + \{F_1, \{H_1, F_2\}\}.$$

Kaldsümmeetriat ning lineaarsust kasutades saab näidata, et viimane on samaväärne Jacobi samasusega.

Lemma 4.3.1. *Üldistatud Poissoni sulg*

1. *on lineaarne kõikide argumentide suhtes;*
2. *on kaldsümmeetriline;*
3. *rahuldab Filippovi samasust;*
4. *rahuldab Leibnizi reeglit.*

Tõestus. Olgu H, G, F, K siledad funktioonid ruumil $\mathbb{R}^3$ ja $a \in \mathbb{R}$ mingi arv.

1. Näitame, et üldistatud Poissoni sulg on lineaarne viimase argumendi suhtes. Kasutades eespool olevaid tulemusi, saame, et

$$\begin{aligned}
&\{H, G, aF + K\} = X_{(H,G)}(aF + K) = \\
&= \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\right| \frac{\partial(aF+K)}{\partial x} + \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\right| \frac{\partial(aF+K)}{\partial y} + \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\right| \frac{\partial(aF+K)}{\partial z} = \\
&\qquad = aX_{(H,G)}(F) + X_{(H,G)}(K) = a\{H, G, F\} + \{H, G, K\}.
\end{aligned}$$

   Sümmeetria järgi on selge, et üldistatud Poissoni sulg on lineaarne ka teiste argumentide järgi.

2. Kuna maatriksi kahe rea vahetamisel muudab determinant märki ja

$$\{H, G, F\} = \begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \\ G_x & G_y & G_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

   on selge, et üldistatud Poissoni sulg on kaldsümmeetriline.

3. Näitamaks, et ternaarne üldistatud Poissoni sulg rahuldab Filippovi samasust, on vaja veenduda, et kehtib

$$\begin{aligned}\{H,G,\{F_1,F_2,F_3\}\} &= \{\{H,G,F_1\},F_2,F_3\} + \{F_1,\{H,G,F_2\},F_3\} + \{F_1,F_2,\{H,G,F_3\}\}\\ &= \{F_2,F_3,\{H,G,F_1\}\} - \{F_1,F_3,\{H,G,F_2\}\} + \{F_1,F_2,\{H,G,F_3\}\}.\end{aligned}$$

Arvutame võrduse paremal pool olevad liikmed. Kehtib

$$\begin{aligned}\{F_2,F_3,\{H,G,F_1\}\} &= X_{(F_2,F_3)}\left(\left|\frac{\partial(H,G,F_1)}{\partial(x,y,z)}\right|\right)\\ &= X_{(F_2,F_3)}(H_xG_y(F_1)_z + H_yG_z(F_1)_x + H_zG_x(F_1)_y\\ &\qquad - H_zG_y(F_1)_x - H_yG_x(F_1)_z - H_xG_z(F_1)_y)\end{aligned}$$

Leiame viimase vektorvälja argumendiks oleva avaldise osatuletise x järgi. Kehtib

$$\begin{aligned}&\big(H_xG_y(F_1)_z + H_yG_z(F_1)_x + H_zG_x(F_1)_y - H_zG_y(F_1)_x - H_yG_x(F_1)_z - H_xG_z(F_1)_y\big)_x\\ &\quad= \big(H_xG_y(F_1)_z\big)_x + \big(H_yG_z(F_1)_x\big)_x + \big(H_zG_x(F_1)_y\big)_x\\ &\qquad - \big(H_zG_y(F_1)_x\big)_x - \big(H_yG_x(F_1)_z\big)_x - \big(H_xG_z(F_1)_y\big)_x\\ &\quad= H_{xx}G_y(F_1)_z + H_xG_{yx}(F_1)_z + H_xG_y(F_1)_{zx}\\ &\qquad + H_{yx}G_z(F_1)_x + H_yG_{zx}(F_1)_x + H_yG_z(F_1)_{xx}\\ &\qquad + H_{zx}G_x(F_1)_y + H_zG_{xx}(F_1)_y + H_zG_x(F_1)_{yx}\\ &\qquad - H_{zx}G_y(F_1)_x - H_zG_{yx}(F_1)_x - H_zG_y(F_1)_{xx}\\ &\qquad - H_{yx}G_x(F_1)_z - H_yG_{xx}(F_1)_z - H_yG_x(F_1)_{zx}\\ &\qquad - H_{xx}G_z(F_1)_y - H_xG_{zx}(F_1)_y - H_xG_z(F_1)_{yx}.\end{aligned}$$

Analoogiliselt saab leida Nambu vektorvälja $X_{(F_2,F_3)}$ argumendi osatuletised ka muutujate y ja z järgi. Neid on vaja, et kirjutada välja sulg $\{F_2,F_3,\{H,G,F_1\}\}$, kus muutujate x,y,z permutatsioone arvestades korrutame leitud argumendi osatuletised läbi funktsioonide F_2 ja F_3 vastavate osatuletistega. Kokkuvõttes saame, et

$$
\begin{aligned}
\{F_2, F_3, \{H, G, F_1\}\} = {} & (F_2)_x(F_3)_y\big(H_{xz}G_y(F_1)_z + H_xG_{yz}(F_1)_z + H_xG_y(F_1)_{zz} \\
& + H_{yz}G_z(F_1)_x + H_yG_{zz}(F_1)_x + H_yG_z(F_1)_{xz} + H_{zz}G_x(F_1)_y + H_zG_{xz}(F_1)_y \\
& + H_zG_x(F_1)_{yz} - H_{zz}G_y(F_1)_x - H_zG_{yz}(F_1)_x - H_zG_y(F_1)_{xz} - H_{yz}G_x(F_1)_z \\
& - H_yG_{xz}(F_1)_z - H_yG_x(F_1)_{zz} - H_{xz}G_z(F_1)_y - H_xG_{zz}(F_1)_y - H_xG_z(F_1)_{yz}\big) \\
& + (F_2)_y(F_3)_z\big(H_{xx}G_y(F_1)_z + H_xG_{yx}(F_1)_z + H_xG_y(F_1)_{zx} \\
& + H_{yx}G_z(F_1)_x + H_yG_{zx}(F_1)_x + H_yG_z(F_1)_{xx} + H_{zx}G_x(F_1)_y + H_zG_{xx}(F_1)_y \\
& + H_zG_x(F_1)_{yx} - H_{zx}G_y(F_1)_x - H_zG_{yx}(F_1)_x - H_zG_y(F_1)_{xx} - H_{yx}G_x(F_1)_z \\
& - H_yG_{xx}(F_1)_z - H_yG_x(F_1)_{zx} - H_{xx}G_z(F_1)_y - H_xG_{zx}(F_1)_y - H_xG_z(F_1)_{yx}\big) \\
& + (F_2)_z(F_3)_x\big(H_{xy}G_y(F_1)_z + H_xG_{yy}(F_1)_z + H_xG_y(F_1)_{zy} \\
& + H_{yy}G_z(F_1)_x + H_yG_{zy}(F_1)_x + H_yG_z(F_1)_{xy} + H_{zy}G_x(F_1)_y + H_zG_{xy}(F_1)_y \\
& + H_zG_x(F_1)_{yy} - H_{zy}G_y(F_1)_x - H_zG_{yy}(F_1)_x - H_zG_y(F_1)_{xy} - H_{yy}G_x(F_1)_z \\
& - H_yG_{xy}(F_1)_z - H_yG_x(F_1)_{zy} - H_{xy}G_z(F_1)_y - H_xG_{zy}(F_1)_y - H_xG_z(F_1)_{yy}\big) \\
& - (F_2)_z(F_3)_y\big(H_{xx}G_y(F_1)_z + H_xG_{yx}(F_1)_z + H_xG_y(F_1)_{zx} \\
& + H_{yx}G_z(F_1)_x + H_yG_{zx}(F_1)_x + H_yG_z(F_1)_{xx} + H_{zx}G_x(F_1)_y + H_zG_{xx}(F_1)_y \\
& + H_zG_x(F_1)_{yx} - H_{zx}G_y(F_1)_x - H_zG_{yx}(F_1)_x - H_zG_y(F_1)_{xx} - H_{yx}G_x(F_1)_z \\
& - H_yG_{xx}(F_1)_z - H_yG_x(F_1)_{zx} - H_{xx}G_z(F_1)_y - H_xG_{zx}(F_1)_y - H_xG_z(F_1)_{yx}\big) \\
& - (F_2)_y(F_3)_x\big(H_{xz}G_y(F_1)_z + H_xG_{yz}(F_1)_z + H_xG_y(F_1)_{zz} \\
& + H_{yz}G_z(F_1)_x + H_yG_{zz}(F_1)_x + H_yG_z(F_1)_{xz} + H_{zz}G_x(F_1)_y + H_zG_{xz}(F_1)_y \\
& + H_zG_x(F_1)_{yz} - H_{zz}G_y(F_1)_x - H_zG_{yz}(F_1)_x - H_zG_y(F_1)_{xz} - H_{yz}G_x(F_1)_z \\
& - H_yG_{xz}(F_1)_z - H_yG_x(F_1)_{zz} - H_{xz}G_z(F_1)_y - H_xG_{zz}(F_1)_y - H_xG_z(F_1)_{yz}\big) \\
& - (F_2)_x(F_3)_z\big(H_{xy}G_y(F_1)_z + H_xG_{yy}(F_1)_z + H_xG_y(F_1)_{zy} \\
& + H_{yy}G_z(F_1)_x + H_yG_{zy}(F_1)_x + H_yG_z(F_1)_{xy} + H_{zy}G_x(F_1)_y + H_zG_{xy}(F_1)_y \\
& + H_zG_x(F_1)_{yy} - H_{zy}G_y(F_1)_x - H_zG_{yy}(F_1)_x - H_zG_y(F_1)_{xy} - H_{yy}G_x(F_1)_z \\
& - H_yG_{xy}(F_1)_z - H_yG_x(F_1)_{zy} - H_{xy}G_z(F_1)_y - H_xG_{zy}(F_1)_y - H_xG_z(F_1)_{yy}\big).
\end{aligned}
$$

Siit on sümmeetria kaudu lihtne välja kirjutada ka $\{H, G, \{F_1, F_2, F_3\}\}$, $\{F_1, F_3, \{H, G, F_2\}\}$ ja $\{F_1, F_2, \{H, G, F_3\}\}$. Paneme tähele, et funktsioonidest, mis asuvad välimises sulus, ei võeta kuskil kahe muutuja järgi osatuletist. Seega $\{F_2, F_3, \{H, G, F_1\}\}$ väljakirjutuses ei saa liidetavad, kus esineb F_1 kahekordne osatuletis esineda vastandmärgiga $\{F_1, F_3, \{H, G, F_2\}\}$ või $\{F_1, F_2, \{H, G, F_3\}\}$ väljakirjutises. Küll aga, tuleb välja, et kõik ülejäänud liidetavad taanduvad avaldises

$$\{F_2, F_3, \{H, G, F_1\}\} - \{F_1, F_3, \{H, G, F_2\}\} + \{F_1, F_2, \{H, G, F_3\}\}$$

välja. Alles jäävad vaid need liidetavad, kus alati leidub F_1, F_2 või F_3 kahekordne osatuletis. Nende kõigi summa, õigete märkidega, on võrdne suluga $\{H, G, \{F_1, F_2, F_3\}\}$. Seega üldistatud Poissoni sulg rahuldab Filippovi samasust.

4. Arvutame

$$\begin{aligned}
&\{H, G, FK\} = X_{(H,G)}(FK) = \\
&\quad = \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\right| \frac{\partial(FK)}{\partial x} + \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\right| \frac{\partial(FK)}{\partial y} + \left|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\right| \frac{\partial(FK)}{\partial z} = \\
&\qquad = F X_{(H,G)}(K) + X_{(H,G)}(F) K = F\{H, G, K\} + \{H, G, F\}K.
\end{aligned}$$

Seega üldistatud Poissoni sulg rahuldab Leibnizi reeglit.

□

Fikseerime sileda funktsiooni F.

Järeldus 4.3.1. *Bilineaarvorm $\{\cdot,\cdot\}_F : C^\infty(\mathbb{R}^3) \times C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$, mis on defineeritud valemiga*

$$\{H, G\}_F = \{H, G, F\}, \tag{4.4}$$

on siledate funktsioonide vektorruumi $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ Lie sulg.

Tuletame meelde, et Lie sulg peab rahuldama kolme tingimust - bilineaarsus, kaldsümmeetrilisus ning rahuldama Jacobi samasust. Esimesed kaks järelduvad vahetult üldistatud Poissoni sulu vastavatest omadustest. Bilineaarvorm (4.4) rahuldab ka Jacobi samasust. Suvaliste funktsioonide $H, G, K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ korral on Jacobi samasus

$$\begin{aligned}
\{H, \{G, K\}_F\}_F = \{\{H, G\}_F, K\}_F + \{G, \{H, K\}_F\}_F \Leftrightarrow \\
\{H, \{G, K, F\}, F\} = \{\{H, G, F\}, K, F\} + \{G, \{H, K, F\}, F\} \Leftrightarrow \\
0 = \{K, F, \{H, G, F\}\} - \{G, F, \{H, K, F\}\} + \{H, F, \{G, K, F\}\}.
\end{aligned}$$

Kasutades Filippovi samasust saame, et

$$\begin{aligned}
\{K, F, \{H, G, F\}\} &= \{G, F, \{K, F, H\}\} - \{H, F, \{K, F, G\}\} + \{H, G, \{K, F, F\}\} \\
&= \{G, F, \{K, F, H\}\} - \{H, F, \{K, F, G\}\}
\end{aligned}$$

ehk tõesti

$$\begin{aligned}
&\{K, F, \{H, G, F\}\} - \{G, F, \{H, K, F\}\} + \{H, F, \{G, K, F\}\} = \\
&= \{G, F, \{K, F, H\}\} - \{H, F, \{K, F, G\}\} - \{G, F, \{H, K, F\}\} + \{H, F, \{G, K, F\}\} = \\
&= \{G, F, \{H, K, F\}\} - \{H, F, \{G, K, F\}\} - \{G, F, \{H, K, F\}\} + \{H, F, \{G, K, F\}\} = 0.
\end{aligned}$$

4.4 Liouville'i teoreem

Hamiltoni mehaanika üks tähtsamaid tulemusi on Liouville'i teoreem. Näitame, et see jääb kehtima ka Nambu mehaanika korral. Kasutades teoreemi 2.1.1, piisab Liouville'i teoreemi tõestamiseks näidata, et Nambu vektorvälja divergents on null. Olgu H ja G siledad funktsioonid ruumil $\mathbb{R}^3$. Nende poolt tekitatud Nambu vektorväli esitub kujul

$$X_{(H,G)} = \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\frac{\partial}{\partial x} + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\frac{\partial}{\partial y} + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\frac{\partial}{\partial z}.$$

Leiame vektorvälja $X_{(H,G)}$ divergentsi. Kehtib

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X_{(H,G)}) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(H_y G_z - H_z G_y\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(H_z G_x - H_x G_z\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(H_x G_y - H_y G_x\Big) \\
&= H_{yx}G_z + H_y G_{zx} - H_{zx}G_y - H_z G_{yx} + H_{zy}G_x + H_z G_{xy} \\
&\qquad - H_{xy}G_z - H_x G_{zy} + H_{xz}G_y + H_x G_{yz} - H_{yz}G_x - H_y G_{xz} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Seega Nambu vektorväli säilitab ruumala.

4.5 Füüsikaline rakendus

Nagu teada, on üks Hamiltoni mehaanika tähtsaid omadusi tema rakendatavus füüsikas. Seega oleks siin asjakohane tuua näide ka Nambu mehaanika võimalikust füüsikalisest rakendusest. Näide põhineb Nambu artiklil [1]. Olgu $(x, y, z) = \overrightarrow{L} = \overrightarrow{L}(t)$ impulsimoment ja I_1, I_2, I_3 inertsiteljed. Funktsioonideks $H(x, y, z)$ ja $G(x, y, z)$ valime vastavalt süsteemi kineetilise energia ja impulsimomendi ruudu, see tähendab

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{I_1} + \frac{y^2}{I_2} + \frac{z^2}{I_3}\Big); \\
G &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned}$$

Tähistame nurkkiiruse $\overrightarrow{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Siis kehtib valem $(x, y, z) = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$. Leiame Nambu võrrandid. Kehtib

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big| = \frac{zy}{I_2} - \frac{yz}{I_3}; \\
\frac{dy}{dt} &= \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big| = \frac{xz}{I_3} - \frac{zx}{I_1}; \\
\frac{dz}{dt} &= \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big| = \frac{yx}{I_1} - \frac{xy}{I_2}.
\end{aligned}$$

Kasutades valemit $(x, y, z) = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$, saame Nambu valemid kirjutada ümber kujul

$$\frac{dx}{dt} = I_3\omega_3\omega_2 - I_2\omega_2\omega_3 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3;$$
$$\frac{dy}{dt} = I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_3\omega_1 = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1;$$
$$\frac{dz}{dt} = I_2\omega_2\omega_1 - I_1\omega_1\omega_2 = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2;$$

mis ongi Euleri jäiga keha pöörde võrrandid.

Peatükk 5

Nambu mehaanika supergeomeetrias

Selle peatüki esimene pool keskendub peamiselt supergeomeetria ning selle põhimõistete tutvustamisele. See võimaldab meil peatüki teises pooles võtta juba vaadatud Nambu mehaanika ning tuua see üle superruumile $\mathbb{R}^{3|2}$. Kuna determinandi üldistus - bereziniaan - on supergeomeetrias juba olemas, on üldistamine võrdlemisi loomulik. Samuti saame veenduda, et üldistusel jäävad alles tähtsamad omadused, mida seni vaadanud oleme.

5.1 Supergeomeetria

Toome siin ära mõned supergeomeetria mõisted, mida edaspidises kasutama hakkame. Materjal põhineb raamatutel [3], [4], [12], [13] ja [14].

5.1.1 Põhimõisted

Definitsioon 5.1.1. Vektorruumi A nimetatakse *superVektorruumiks*, kui on antud tema lahutus otsesummaks

$$A = A_0 \oplus A_1,$$

kus A_0 ja A_1 on mingid ruumi A alamruumid. Alamruumi A_0 elemente nimetame *paariselementideks* ja alamruumi A_1 elemente *paarituteks elementideks*. Vektorit $a \in A$

nimetame *homogeenseks*, kui $a \in A_0$ või $a \in A_1$.

Olgu supervektorruumi A homogeensetel elementidel defineeritud kujutus

$$| \cdot | : V_0 \cup V_1 \to \mathbb{Z}_2, \quad |a| = \begin{cases} 0, & \text{kui } a \text{ on paaris;} \\ 1, & \text{kui } a \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

Definitsioon 5.1.2. Supervektorruumi A nimetatakse *superalgebraks*, kui supervektorruumil on antud assotsiatiivne ühikuga algebraline tehe $\circ$, mis rahuldab tingimust

$$|a \circ b| = |a| + |b| \pmod 2, \tag{5.1}$$

kus a ja b on superalgebra A homogeensed elemendid. Superalgebrat nimetatakse *kommutatiivseks*, kui tema homogeensed elemendid rahuldavad ka tingimust

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba. \tag{5.2}$$

5.1.2 Grassmanni algebra

Definitsioon 5.1.3. *Grassmanni algebra*, tähistame $\mathcal{G}^n$, on assotsiatiivne ühikuga algebra üle korpuse $\mathbb{K}$, mille moodustajate süsteemi $\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}, n \in \mathbb{N}$, elemendid rahuldavad tingimust

$$\theta^i \theta^j = -\theta^j \theta^i, i, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.3}$$

Paneme tähele, et võttes moodustajate süsteemi $\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$ elementide kõiksugused kombinatsioonid, on pikim nullist erinev korrutis pikkusega n. Tõesti, korrutises $\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_n} \theta^{i_{n+1}}$ peab vähemalt üks indeksitest $i \in \{1, \ldots, n\}$ esinema kaks korda ning seosest (5.3) saame, et $\theta^i \theta^i = -\theta^i \theta^i$ ehk $(\theta^i)^2 = 0$ iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Teiseks paneme tähele, et korrutised $\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}$ ja $\theta^{\sigma(i_1)} \ldots \theta^{\sigma(i_k)}$, kus σ on mingi hulga $\{i_1, \ldots, i_k\}$ permutatsioon, on lineaarselt sõltuvad. Tõesti, seosest (5.3) saame, et nad erinevad vaid märgi poolest. Kokkuvõttes sobib Grassmanni algebra $\mathcal{G}^n$ vektorruumi baasiks võtta hulk

$$\{\mathbb{1}, \theta^1, \ldots, \theta^n, \theta^1\theta^2, \ldots, \theta^i\theta^j, \ldots, \theta^{n-1}\theta^n, \ldots, \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}, \ldots, \theta^1 \ldots \theta^n\},$$

kus $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, $k < n$ ja $\mathbb{1}$ on Grassmanni algebra ühikelement. Grassmanni algebra $\mathcal{G}^n$ elemente tähistame

$$f(\theta) := f(\theta^1, \ldots, \theta^n) = \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{N}} f_{\mathcal{I}} \theta^{\mathcal{I}} = f_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{n} f_i \theta^i + \sum_{\substack{1 \leq i < n, \\ i < j \leq n}} f_{ij} \theta^i \theta^j + \ldots + f_{1\ldots n} \theta^1 \ldots \theta^n, \tag{5.4}$$

kus $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$ tähistab hulga $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ alamhulkasid ja $f_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}$.

Lemma 5.1.1. *Grassmanni algebra koos lahutusega*

$$\mathcal{G}_0^n = \{f \in \mathcal{G}^n : f(\theta) = \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \mathcal{N}, \\ |\mathcal{I}| = 2k}} f_{\mathcal{I}} \theta^{\mathcal{I}},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

$$\mathcal{G}_1^n = \{f \in \mathcal{G}^n : f(\theta) = \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \mathcal{N}, \\ |\mathcal{I}| = 2k+1}} f_{\mathcal{I}} \theta^{\mathcal{I}},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

on kommutatiivne superalgebra.

Definitsioon 5.1.4. *(Parempoolseks) tuletiseks Grassmanni algebral moodustaja θ^j järgi* nimetame teisendust $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}^n$, mis on määratud valemiga

$$(f(\theta)) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} = \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{N}} f_{\mathcal{I}} ((\theta^{\mathcal{I}}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j}),$$

kus

$$(\theta^i) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} = \delta^i_j, \qquad (\mathbb{1}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} = 0$$

ja

$$(\theta^{i_1} \theta^{i_2} \ldots \theta^{i_k}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} = \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_{k-1}} (\theta^{i_k}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} - \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_{k-2}} (\theta^{i_{k-1}}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} \theta^{i_k} + \ldots$$
$$+ (-1)^{k-1} (\theta^{i_1}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^j} \theta^{i_2} \ldots \theta^{i_k}.$$

Märgime ära, et Grassmanni algebral saab defineerida ka *vasakpoolse tuletise*, kusjuures iga homogeense elemendi $f(\theta) \in \mathcal{G}^n$ korral

$$f(\theta) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^i} = -(-1)^{|f(\theta)|} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta^i} f(\theta).$$

Rõhutame siin, et parempoolse tuletise argumendi kirjutame operaatorist vasakule poole.

5.1.3 Maatriksite superalgebra

Olgu A superalgebra ja $k, l \in \mathbb{N}$. Olgu maatriks $M \in \mathrm{Mat}_{k+l}(A)$ antud blokkmaatriksi kujul

$$M = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

kus maatriksid $\mathcal{M}_{11}$ ja $\mathcal{M}_{22}$, mõõtmetega $k \times k$ ja $l \times l$, koosnevad superalgebra A paaris elementidest ning $\mathcal{M}_{12}$ ja $\mathcal{M}_{21}$, mõõtmetega $k \times l$ ja $l \times k$, koosnevad superalgebra A paaritutest elementidest. Maatriksite hulka, mis on antud kujul (5.5) tähistame $\mathrm{Mat}_{k,l}(A)$.

Lemma 5.1.2. *Hulk* $\mathrm{Mat}_{k,l}(A)$ *koos lahutusega*

$$\big[\mathrm{Mat}_{k,l}(A)\big]_0 = \{M \in \mathrm{Mat}_{k,l}(A) : \mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} = 0\},$$

$$\big[\mathrm{Mat}_{k,l}(A)\big]_1 = \{M \in \mathrm{Mat}_{k,l}(A) : \mathcal{M}_{11} = \mathcal{M}_{22} = 0\}$$

moodustab superalgebra.

Hulga $\mathrm{Mat}_{k,l}(A)$ elemente nimetame *supermaatriksiteks*.

Definitsioon 5.1.5. Supermaatriksi $M \in \mathrm{Mat}_{k,l}(A)$, mille alammaatriks $\mathcal{M}_{22}$ on regulaarne, *bereziniaan* (ka *superdeterminant*), tähistame $\mathrm{Ber}(M)$, on

$$\mathrm{Ber}(M) = \det(\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{22}^{-1}\mathcal{M}_{21})\det(\mathcal{M}_{22})^{-1}.$$

5.2 Superruumi mõiste

Vaatame siin ja edaspidi ruumi $\mathbb{R}^3$ ja kahemõõtmelist Grassmanni algebrat $\mathcal{G}^2$. Tähistame Grassmanni algebra moodustajad θ, $\bar{\theta}$. Vaatleme funktsiooni, mille määramispiirkond on $\mathbb{R}^3$ ning väärtused on Grassmanni algebra $\mathcal{G}^2$ elemendid. Tähistame seda funktsiooni $f(x, y, z, \theta, \bar{\theta})$. Siis Grassmanni algebra struktuurist on selge, et

$$f(x, y, z, \theta, \bar{\theta}) = f_0(x, y, z) + f_1(x, y, z)\theta + f_2(x, y, z)\bar{\theta} + f_{12}(x, y, z)\theta\bar{\theta}. \tag{5.6}$$

Definitsioon 5.2.1. Funktsiooni $f(x,y,z,\theta,\bar{\theta})$ nimetatakse *siledaks*, kui avaldises (5.6) on funktsioonid f_0, f_1, f_2 ja f_{12} siledad.

Kõigi siledate funktsioonide $f(x,y,z,\theta,\bar{\theta})$ hulka tähistame $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$. Edaspidi vaatamegi ainult siledaid funktsioone.

Lemma 5.2.1. *Kõigi siledate funktsioonide hulk $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ on assotsiatiivne ühikuga algebra.*

Tõestus. Funktsioonide $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ korrutiseks, tähistame fg, nimetame funktsiooni, mis seab punktile $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vastavusse Grassmanni algebra elemendi

$$\begin{aligned} f(x,y,z,\theta,\bar{\theta})g(x,y,z,\theta,\bar{\theta}) &= (f_0 + f_1\theta + f_2\bar{\theta} + f_{12}\theta\bar{\theta})(g_0 + g_1\theta + g_2\bar{\theta} + g_{12}\theta\bar{\theta}) \\ &= f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)\theta + (f_0g_2 + f_2g_0)\bar{\theta} \\ &\quad + (f_0g_{12} + f_1g_2 - f_2g_1 + f_{12}g_0)\theta\bar{\theta} \quad (5.7) \end{aligned}$$

Näitame, et defineeritud tehe rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)h &= \alpha(fh) + \beta(gh); \\ f(\beta g + \gamma h) &= \beta(fg) + \gamma(fh), \end{aligned}$$

kus $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ ja $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Arvutame

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)h &= (\alpha f_0 + \beta g_0)h_0 + \big((\alpha f_0 + \beta g_0)h_1 + (\alpha f_1 + \beta g_1)h_0\big)\theta \\ &\quad + \big((\alpha f_0 + \beta g_0)h_2 + (\alpha f_2 + \beta g_2)h_0\big)\bar{\theta} \\ &\quad + \big((\alpha f_0 + \beta g_0)h_{12} + (\alpha f_1 + \beta g_1)h_2 \\ &\quad - (\alpha f_2 + \beta g_2)h_1 + (\alpha f_{12} + \beta g_{12})h_0\big)\theta\bar{\theta} \\ &= \alpha\big(f_0h_0 + (f_0h_1 + f_1h_0)\theta + (f_0h_2 + f_2h_0)\bar{\theta} \\ &\quad + (f_0h_{12} + f_1h_2 - f_2h_1 + f_{12}h_0)\theta\bar{\theta}\big) \\ &\quad + \beta\big(g_0h_0 + (g_0h_1 + g_1h_0)\theta + (g_0h_2 + g_2h_0)\bar{\theta} \\ &\quad + (g_0h_{12} + g_1h_2 - g_2h_1 + g_{12}h_0)\theta\bar{\theta}\big) \\ &= \alpha(fh) + \beta(gh). \end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata ka teistpidi distributiivsuse kehtivust. Näitame nüüd, et korrutamine on assotsiatiivne, see tähendab

$$f(gh) = (fg)h, \tag{5.8}$$

kus $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$. Leiame võrduse vasaku poole. Tähistame

$\xi_0 := g_0h_0,\ \xi_1 := g_0h_1 + g_1h_0,\ \xi_2 := g_0h_2 + g_2h_0,\ \xi_{12} := g_0h_{12} + g_1h_2 - g_2h_1 + g_{12}h_0,$

siis

$$\begin{aligned} f(gh) &= (f_0 + f_1\theta + f_2\bar{\theta} + f_{12}\theta\bar{\theta})(\xi_0 + \xi_1\theta + \xi_2\bar{\theta} + \xi_{12}\theta\bar{\theta}) \\ &= f_0\xi_0 + (f_0\xi_1 + f_1\xi_0)\theta + (f_0\xi_2 + f_2\xi_0)\bar{\theta} \\ &\qquad + (f_0\xi_{12} + f_1\xi_2 - f_2\xi_1 + f_{12}\xi_0)\theta\bar{\theta}. \end{aligned}$$

Leiame ka võrduse (5.8) parema poole. Tähistame

$\rho_0 := f_0g_0,\ \rho_1 := f_0g_1 + f_1g_0,\ \rho_2 := f_0g_2 + f_2g_0,\ \rho_{12} := f_0g_{12} + f_1g_2 - f_2g_1 + f_{12}g_0,$

siis

$$\begin{aligned} (fg)h &= (\rho_0 + \rho_1\theta + \rho_2\bar{\theta} + \rho_{12}\theta\bar{\theta})(h_0 + h_1\theta + h_2\bar{\theta} + h_{12}\theta\bar{\theta}) \\ &= \rho_0h_0 + (\rho_0h_1 + \rho_1h_0)\theta + (\rho_0h_2 + \rho_2h_0)\bar{\theta} \\ &\qquad + (\rho_0h_{12} + \rho_1h_2 - \rho_2h_1 + \rho_{12}h_0)\theta\bar{\theta}. \end{aligned}$$

Sellega jääb tingimuse (5.8) näitamiseks veel veenduda, et

$$\begin{aligned} f_0\xi_0 &= \rho_0h_0, \\ f_0\xi_1 + f_1\xi_0 &= \rho_0h_1 + \rho_1h_0, \\ f_0\xi_2 + f_2\xi_0 &= \rho_0h_2 + \rho_2h_0, \\ f_0\xi_{12} + f_1\xi_2 - f_2\xi_1 + f_{12}\xi_0 &= \rho_0h_{12} + \rho_1h_2 - \rho_2h_1 + \rho_{12}h_0. \end{aligned}$$

Need aga kehtivad, sest reaalväärtustega funktsioonide korrutamine on assotsiatiivne

$$
\begin{aligned}
f_0g_0h_0 &= f_0g_0h_0,\\
f_0g_0h_1 + f_0g_1h_0 + f_1g_0h_0 &= f_0g_0h_1 + f_0g_1h_0 + f_1g_0h_0,\\
f_0g_0h_2 + f_0g_2h_0 + f_2g_0h_0 &= f_0g_0h_2 + f_0g_2h_0 + f_2g_0h_0
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
&f_0g_0h_{12} + f_0g_1h_2 - f_0g_2h_1 + f_0g_{12}h_0 + f_1g_0h_2 + f_1g_2h_0 - f_2g_0h_1 - f_2g_1h_0 + f_{12}g_0h_0 =\\
&= f_0g_0h_{12} + f_0g_1h_2 + f_1g_0h_2 - f_0g_2h_1 - f_2g_0h_1 + f_0g_{12}h_0 + f_1g_2h_0 - f_2g_1h_0 + f_{12}g_0h_0.
\end{aligned}
$$

Seega jääb veel üle näidata, et algebral $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ on ühikelement. Valemist (5.7) on lihtne näha, et algebra $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ ühikelemendiks on funktsioon, mille väärtus igas ruumi $\mathbb{R}^3$ punktis on Grassmanni algebra ühikelement $\mathbb{1}$. $\square$

Anname algebra $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ supervektorruumi struktuuri järgmiselt

$$
\begin{aligned}
\left[C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)\right]_0 &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2) : \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\, f(x,y,z,\theta,\bar\theta) \in \mathcal{G}^2_0\};\\
\left[C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)\right]_1 &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2) : \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\, f(x,y,z,\theta,\bar\theta) \in \mathcal{G}^2_1\}.
\end{aligned}
$$

On lihtne veenduda, et algebra $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ paariselemendid avalduvad kujul

$$f = f_0 + f_{12}\theta\bar\theta$$

ning paaritud elemendid avalduvad kujul

$$g = g_1\theta + g_2\bar\theta.$$

Siit on näha, et tõesti

$$C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2) = \left[C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)\right]_0 \oplus \left[C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)\right]_1.$$

Nüüd, kui supervektorruumi struktuur on defineeritud, tähistame homogeense funktsiooni paarsust $|f|$.

Lemma 5.2.2. *Algebra $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ on kommutatiivne superalgebra.*

Tõestus. Näitamaks, et $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ on ka superalgebra, on vastavalt superalgebra definitsioonile vaja näidata, et suvalised homogeensed elemendid f ja g rahuldavad seost (5.1)

$$|fg| = |f| + |g| \text{ (mod 2)}.$$

Vaatame nelja võimalikku juhtu

1. Olgu f ja g paaris. Siis

$$|(f_0+f_{12}\theta\bar{\theta})(g_0+g_{12}\theta\bar{\theta})| = |f_0g_0+(f_0g_{12}+f_{12}g_0)\theta\bar{\theta}| = |f_0+f_{12}\theta\bar{\theta}|+|g_0+g_{12}\theta\bar{\theta}| \text{ (mod 2)}.$$

2. Olgu f paaris ja g paaritu. Siis

$$|f_0g_1\theta + f_0g_2\bar{\theta}| = |f_0 + f_{12}\theta\bar{\theta}| + |g_1\theta + g_2\bar{\theta}| \text{ (mod 2)}.$$

3. Olgu f paaritu ja g paaris. Siis

$$|f_1g_0\theta + f_2g_0\bar{\theta}| = |f_1\theta + f_2\bar{\theta}| + |g_0 + g_{12}\theta\bar{\theta}| \text{ (mod 2)}.$$

4. Olgu f ja g paaritud. Siis

$$|(f_1g_2 - f_2g_1)\theta\bar{\theta}| = |f_1\theta + f_2\bar{\theta}| + |g_1\theta + g_2\bar{\theta}| \text{ (mod 2)}.$$

Sellega oleme näidanud, et $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ on superalgebra. Näitamaks, et tegemist on kommutatiivse superalgebraga, on vaja veel näidata, et suvaliste homogeensete elementide f ja g korral kehtib seos (5.2)

$$fg = (-1)^{|f||g|}gf.$$

Kasutades üleval vaadatud nelja varianti, on lihtne veenduda, et antud seos kehtib, kuna ainuke juht, kus $fg \neq gf$ on see, kui f ja g on mõlemad paaritud. Sellisel juhul aga

$$fg = (f_1g_2 - f_2g_1)\theta\bar{\theta} = -(g_1f_2 - g_2f_1)\theta\bar{\theta} = (-1)^{|f||g|}gf.$$

Sellega on lemma tõestatud.

$\square$

Algebrat $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}^2)$ interpreteerime *superruumi* $\mathbb{R}^{3|2}$ funktsioonide algebrana. See tähendab - superruum määratakse tema funktsioonide algebra kaudu. See on mittekommutatiivse geomeetria lähenemine, kus ruum ei ole punktide hulk, vaid ta määratakse tema funktsioonide algebra kaudu [15], [16]. Geomeetrilisi objekte, mis tavaliselt defineeritakse ruumil vaadatakse siin funktsioonide algebra kaudu. Superruumi $\mathbb{R}^{3|2}$ funktsioonide algebrat tähistame edaspidi $C^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$.

5.3 Nambu vektorväli superruumil

Järgnev konstruktsioon põhineb artiklil [5]. Kolmemõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^3$ Nambu vektorvälja konstrueerimiseks vaatasime funktsioonide paari (H, G). Superruumi $\mathbb{R}^{3|2}$ korral ei ole meil enam tegemist reaalarvuliste funktsioonidega. Siiski, reaalarvuliste funktsioonide algebra on alamalgebra hulgas $C^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$. Seepärast fikseerime kaks paarisfunktsiooni $H, G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$. Olgu antud ka kaks paaritut funktsiooni $\varphi, \psi \in C_1^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$ nii, et

$$\Delta := \Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\theta,\bar\theta)}\Big| = \begin{vmatrix} \varphi_\theta & \varphi_{\bar\theta} \\ \psi_\theta & \psi_{\bar\theta} \end{vmatrix} = \varphi_\theta\, \psi_{\bar\theta} - \varphi_{\bar\theta}\, \psi_\theta$$

oleks nullist erinev, see tähendab, et maatriks

$$\begin{pmatrix} \varphi_\theta & \varphi_{\bar\theta} \\ \psi_\theta & \psi_{\bar\theta} \end{pmatrix}$$

on regulaarne. Alaindeksiga θ (või $\bar\theta$) tähistame siin ja edaspidi funktsiooni parempoolset tuletist. See tähendab, et $\varphi_\theta = \varphi \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i}$

Definitsioon 5.3.1. Antud funktsioonide H, G, φ, ψ korral nimetame *üldistatud Nambu* *võrranditeks superruumil* $\mathbb{R}^{3|2}$ võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \operatorname{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(y,z,\theta,\bar\theta)}\Big),\\
\frac{dy}{dt} &= \operatorname{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(z,x,\theta,\bar\theta)}\Big),\\
\frac{dz}{dt} &= \operatorname{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(x,y,\theta,\bar\theta)}\Big),\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{\Delta^2}\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar\theta)}\Big|\Big),\\
\frac{d\bar\theta}{dt} &= \frac{1}{\Delta^2}\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\theta)}\Big|\Big),
\end{aligned}$$

kus

$$x(t) = x_0(t) + x_{12}(t)\theta\bar\theta, \qquad y(t) = y_0(t) + y_{12}(t)\theta\bar\theta, \qquad y(t) = y_0(t) + y_{12}(t)\theta\bar\theta$$

ning

$$\theta(t) = f_{11}(t)\theta + f_{12}(t)\bar\theta, \qquad \bar\theta(t) = f_{21}(t)\theta + f_{22}(t)\bar\theta.$$

Tuletame meelde, et bereziniaan on defineeritud blokkmaatriksitel kujul (5.5), mille alammaatriks $\mathcal{M}_{22}$ on regulaarne (definitsioon 5.1.5). Kontrollime, et maatriksi $\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(y,z,\theta,\bar\theta)}$ puhul on need nõuded täidetud. Väljakirjutatuna avadub antud maatriks blokkmaatriksina

$$\left(\begin{array}{cc|cc}
H_y & H_z & H_\theta & H_{\bar\theta}\\
G_y & G_z & G_\theta & G_{\bar\theta}\\
\hline
\varphi_y & \varphi_z & \varphi_\theta & \varphi_{\bar\theta}\\
\psi_y & \psi_z & \psi_\theta & \psi_{\bar\theta}
\end{array}\right).$$

Kuna

$$\begin{pmatrix} H_y & H_z\\ G_y & G_z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_\theta & \varphi_{\bar\theta}\\ \psi_\theta & \psi_{\bar\theta}\end{pmatrix}$$

on moodustatud superalgebra $C^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$ paariselementidest ja

$$\begin{pmatrix} H_\theta & H_{\bar\theta}\\ G_\theta & G_{\bar\theta}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}$$

paaritutest elementidest, siis $\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(y,z,\theta,\bar{\theta})}$ on tõesti sobival kujul. Vastavalt funktsioonide φ ja ψ valikule on $\Delta \neq 0$ ehk bereziniaani leidmiseks vajalikud tingimused on rahuldatud. Analoogiliselt saab kontrollida, et ka maatriksite $\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(z,x,\theta,\bar{\theta})}$ ja $\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(x,y,\theta,\bar{\theta})}$ bereziniaanid on määratud. Seega, vastavalt bereziniaani definitsioonile

$$\mathrm{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(y,z,\theta,\bar{\theta})}\Big) = \Delta^{-1}\det\Big(\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)} - \frac{\partial(H,G)}{\partial(\theta,\bar{\theta})}\Big(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\theta,\bar{\theta})}\Big)^{-1}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}\Big).$$

Paneme tähele, et siin harilik determinant alati leidub, sest maatriksid

$$\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial(H,G)}{\partial(\theta,\bar{\theta})}\Big(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\theta,\bar{\theta})}\Big)^{-1}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}$$

on moodustatud paariselementidest, mis on omavahel kommutatiivsed. Tähistame üldistaud Nambu võrrandite paremal poolel olevad funktsioonid parema loetavuse huvides järgmiselt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K} &= \mathrm{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(y,z,\theta,\bar{\theta})}\Big),\\
\mathfrak{L} &= \mathrm{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(z,x,\theta,\bar{\theta})}\Big),\\
\mathfrak{M} &= \mathrm{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,\varphi,\psi)}{\partial(x,y,\theta,\bar{\theta})}\Big),\\
\mathfrak{N} &= \frac{1}{\Delta^2}\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\bar{\theta})}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\bar{\theta})}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar{\theta})}\Big|\Big),\\
\mathfrak{O} &= \frac{1}{\Delta^2}\Big(\Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\theta)}\Big|\Big).
\end{aligned}$$

Siis saame panna kirja funktsioonide H, G, φ ja ψ poolt tekitatud vektorvälja superruumil $\mathbb{R}^{3|2}$. Vaatame funktsioonide algebra $C^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$ derivatsioone ning intrepeteerime neid superruumi $\mathbb{R}^{3|2}$ vektorväljadena. Selles avaldub mittekommutatiivse geomeetria lähenemine, kus geomeetrilisi objekte ei vaadata ruumil kui punktide hulgal, vaid ruumi funktsioonide algebra kaudu. Moodustame superruumi $\mathbb{R}^{3|2}$ vektorvälja järgmiselt

$$X^{(\varphi,\psi)}_{(H,G)} = \mathfrak{K}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{L}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\mathfrak{N} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar{\theta}}\mathfrak{O}. \tag{5.9}$$

Definitsioon 5.3.2. Vektorvälja kujul (5.9) nimetame *Nambu vektorväljaks superruumis* $\mathbb{R}^{3|2}$.

Rõhutame siin veel kord, et parempoolse tuletise, moodustajate θ ja $\bar{\theta}$ järgi, argument kirjutatakse operaatorist vasakule poole ehk praegusel juhul ei rakendu parempoolne tuletis mitte funktsioonidele $\mathfrak{N}$ ja $\mathfrak{O}$ vaid Nambu vektorvälja (5.9) argumendile. See tähendab, et suvalise $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$ korral

$$X^{(\varphi,\psi)}_{(H,G)}(F) = \mathfrak{K}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathfrak{L}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathfrak{M}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{F\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\mathfrak{N} + \frac{F\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar{\theta}}\mathfrak{O}.$$

5.3.1 Liouville'i teoreem

Tuletame meelde, et klassikalisel juhul taandub Liouville'i teoreemi tõestus sellele, et näidata, et vastava vektorvälja divergents on null. Saab vahetult näidata, et ka Nambu vektorvälja (5.9) divergents on null [5].

5.4 Poissoni sulg superruumil

Analoogiliselt Nambu mehaanikale indutseerib defineeritud Nambu vektorväli superruumil loomulikul viisil Poissoni sulu. Olgu H, G, F superalgebra $C^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$ paarisfunktsioonid ning φ, ψ paaritud funktsioonid.

Definitsioon 5.4.1. Funktsioonide H, G ja F *Poissoni suluks* parameetrite φ ja ψ järgi nimetame funktsiooni, mis on antud valemiga

$$\{H, G, F\}_{(\varphi,\psi)} = X^{(\varphi,\psi)}_{(H,G)}(F).$$

Kuna funktsioonid φ ja ψ on üheselt määratud regulaarse maatriksiga

$$\begin{pmatrix} \varphi_\theta & \varphi_{\bar{\theta}} \\ \psi_\theta & \psi_{\bar{\theta}} \end{pmatrix},$$

siis saame igale regulaarsele maatriksile $\Xi \in \mathrm{Mat}_0(C_1^\infty(\mathbb{R}^{3|2}))$ vastavusse seada Poissoni sulu $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{(\varphi,\psi)}$, kus

$$\Xi = \begin{pmatrix} \varphi_\theta & \varphi_{\bar\theta} \\ \psi_\theta & \psi_{\bar\theta} \end{pmatrix}.$$

Vahetu kontroll näitab, et kehtib võrdus

$$\{H,G,F\}_{(\varphi,\psi)} = \mathrm{Ber}\Big(\frac{\partial(H,G,F,\varphi,\psi)}{\partial(x,y,z,\theta,\bar\theta)}\Big),$$

mille erijuhuks on varem defineeritud üldistatud Poissoni sulg (4.3) ruumil $\mathbb{R}^3$, kus superruumi juhul on harilik determinant asendatud bereziniaani ehk superdeterminandiga. Üldistatud Poissoni sulu (4.3) saame, kui Ξ on ühikmaatriks. Defineeritud Poissoni sulul on kõik ootuspärased omadused. See tähendab, ta on lineaarne oma argumentide suhtes, on kaldümmeetriline ning rahuldab Filippovi samasust ja Leibnizi reeglit. Saab näidata, et Poissoni sulu arvutamiseks kehtib valem [5]

$$\{H,G,F\}_{(\varphi,\psi)} = \frac{1}{\Delta}\{H,G,F\} - \frac{1}{\Delta^2}\{H,G,F\}_{(\varphi,\psi)}, \tag{5.10}$$

kus $\{H,G,F\}$ on defineeritud nagu üldistatud Poissoni sulg ruumil $\mathbb{R}^3$, see tähendab

$$\{H,G,F\} = \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,z)}\Big|, \tag{5.11}$$

ning

$$\begin{aligned}\{H,G,F\}_{(\varphi,\psi)} = \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\bar\theta)}\Big| \\ - \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\bar\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\bar\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\bar\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\theta)}\Big|.\end{aligned}$$

Tähistust $\{H,G,F\}_{(\varphi,\psi)}$ põhjendab järgmine lemma.

Lemma 5.4.1. *Antud paaritute funktsioonide φ, ψ, kus $\Delta \neq 0$, korral rahuldab ternaarne tehe*

$$\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{(\varphi,\psi)} : C_0^\infty(\mathbb{R}^{3|2}) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^{3|2}) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^{3|2}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$$

järgmisi omadusi:

1. *lineaarsus kõikide argumentide suhtes;*

2. *kaldsümmeetrilisus;*

3. *Filippovi samasust;*

4. *Leibnizi reeglit.*

Tõestus. Olgu $H, G, F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$. Tõestus põhineb maatriksite

$$\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\theta)}, \frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\theta,z)}, \frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\theta,y,z)}, \frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\bar{\theta})}, \frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\bar{\theta},z)}, \frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\bar{\theta},y,z)} \tag{5.12}$$

determinantide vastavatel omadustel. Paneme tähele, et maatriksitel (5.12) on paaritud elemendid vaid ühes veerus. Kuna paaritud elemendid kommuteeruvad paariselementidega ja paariselemendid kommuteeruvad oma vahel, siis käituvad maatriksite (5.12) determinandid nagu harilikud determinandid. Seega taandub maatriksite (5.12) puhul antud omaduste näitamine lemma 4.3.1 tõestusele. Seda teades on lihtne veenduda, et antud omadused on ka sulul $\{H, G, F\}_{(\varphi,\psi)}$. Näitame siin Leibnizi reegli kehtivus. Ülejäänud omadused saab näidata analoogiliselt. Olgu ka K mingi paarisfunktsioon superruumil.

Kehtib

$$
\begin{aligned}
\{H,G,FK\}_{(\varphi,\psi)} &= \Big|\frac{\partial(H,G,FK)}{\partial(x,y,\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,FK)}{\partial(x,\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar\theta)}\Big| \\
&\quad + \Big|\frac{\partial(H,G,FK)}{\partial(\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\bar\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,FK)}{\partial(x,y,\bar\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big| \\
&\quad - \Big|\frac{\partial(H,G,FK)}{\partial(x,\bar\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,FK)}{\partial(\bar\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\theta)}\Big| \\
&= \left(F\Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,y,\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\theta)}\Big|K\right)\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\bar\theta)}\Big| \\
&\quad + \left(F\Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,\theta,z)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\theta,z)}\Big|K\right)\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar\theta)}\Big| \\
&\quad + \left(F\Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(\theta,y,z)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\theta,y,z)}\Big|K\right)\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\bar\theta)}\Big| \\
&\quad - \left(F\Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,y,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\bar\theta)}\Big|K\right)\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big| \\
&\quad - \left(F\Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,\bar\theta,z)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\bar\theta,z)}\Big|K\right)\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\theta)}\Big| \\
&\quad - \left(F\Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(\bar\theta,y,z)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\bar\theta,y,z)}\Big|K\right)\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\theta)}\Big| \\
&= F\left(\Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,y,\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar\theta)}\Big|\right. \\
&\quad + \Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\bar\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,y,\bar\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big| \\
&\quad \left.- \Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(x,\bar\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,K)}{\partial(\bar\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\theta)}\Big|\right) \\
&\quad + \left(\Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\bar\theta)}\Big| + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar\theta)}\Big|\right. \\
&\quad + \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\bar\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,y,\bar\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big| \\
&\quad \left.- \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\bar\theta,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\theta)}\Big| - \Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(\bar\theta,y,z)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,\theta)}\Big|\right)K \\
&= F\{H,G,K\}_{(\varphi,\psi)} + \{H,G,F\}_{(\varphi,\psi)}K
\end{aligned}
$$

□

Kuna funktsioonid H, G, F on paarisfunktsioonid ehk nende osatuletised x, y, z järgi kommuteeruvad, saab lemma 4.3.1 tõestust kasutades anda sulu (5.11) jaoks lemmaga 5.4.1 analoogilise tulemuse. Need kaks tulemust kokku võttes on lihtne näha, et kehtib varem toodud väide

Teoreem 5.4.1. *Poissoni sulg* $\{H, G, F\}_{(\varphi,\psi)}$

1. *on lineaarne kõikide argumentide suhtes;*
2. *on kaldsümmeetriline;*
3. *rahuldab Filippovi samasust;*
4. *rahuldab Leibnizi reeglit.*

5.5 Poissoni sulg superalgebral

Vaatame veel teatud üldisemat juhtu. Olgu $A = A_0 \oplus A_1$ mingi kommutatiivne superalgebra. Tähistame ruumi A lineaarteisenduste hulga $\mathrm{End}(A)$. On lihtne veenduda lineaarteisenduste hulk lahutusega

$$\mathrm{End}(A)_0 = \{L \in \mathrm{End}(A) |\, L : V_0 \mapsto V_0 \text{ ja } L : V_1 \mapsto V_1\},$$

$$\mathrm{End}(A)_1 = \{L \in \mathrm{End}(A) |\, L : V_0 \mapsto V_1 \text{ ja } L : V_1 \mapsto V_0\}$$

on superalgebra. Olgu $D_1, D_2, D_3 \in \mathrm{End}(A)_0$ ja $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{End}(A)_1$ mingid derivatsioonid, see tähendab, nad rahuldavad gradueeritud Leibnizi reeglit

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{|a||D|} aD(b).$$

Tähistame superalgebra A paariselemente u_1, u_2, u_3 ning paarituid elemente ξ_1, ξ_2. Defineerime analoogiliselt eelmisele peatükile sulu

$$\{u_1, u_2, u_3\}_{(\xi_1,\xi_2)} = \mathrm{Ber}\Big(\frac{(u_1, u_2, u_3, \xi_1, \xi_2)}{(D_1, D_2, D_3, \delta_1, \delta_2)}\Big).$$

Siin peame tähistuse $\frac{(u_1,u_2,u_3,\xi_1,\xi_2)}{(D_1,D_2,D_3,\delta_1,\delta_2)}$ all silmas supermaatriksit

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} D_1(u_1) & D_2(u_1) & D_3(u_1) & \delta_1(u_1) & \delta_2(u_1) \\ D_1(u_2) & D_2(u_2) & D_3(u_2) & \delta_1(u_2) & \delta_2(u_2) \\ D_1(u_3) & D_2(u_3) & D_3(u_3) & \delta_1(u_3) & \delta_2(u_3) \\ \hline D_1(\xi_1) & D_2(\xi_1) & D_3(\xi_1) & \delta_1(\xi_1) & \delta_2(\xi_1) \\ D_1(\xi_2) & D_2(\xi_2) & D_3(\xi_2) & \delta_1(\xi_2) & \delta_2(\xi_2) \end{array}\right).$$

Kehtib valem

$$\{u_1,u_2,u_3\}_{(\xi_1,\xi_2)} = \frac{1}{\Delta}\{u_1,u_2,u_3\} - \frac{1}{\Delta^2}\{u_1,u_2,u_3\}_{(\xi_1,\xi_2)} - \frac{1}{\Delta^3}\{u_1,u_2,u_3\}^*_{(\xi_1,\xi_2)}, \tag{5.13}$$

kus $\Delta = \delta_1(\xi_1)\delta_2(\xi_2) - \delta_2(\xi_1)\delta_1(\xi_2)$, sulud $\{u_1,u_2,u_3\}$ ja $\{u_1,u_2,u_3\}_{(\xi_1,\xi_2)}$ on defineeritud analoogiliselt võrrandis (5.10) olevatega ning

$$\begin{aligned}\{u_1,u_2,u_3\}^*_{(\xi_1,\xi_2)} &= \Big|\frac{(u_1,u_2,u_3)}{(D_1,\delta_1,\delta_2)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_2,\delta_2)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_3,\delta_1)}\Big| \\ &+ \Big|\frac{(u_1,u_2,u_3)}{(\delta_1,D_2,\delta_2)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_1,\delta_2)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_3,\delta_1)}\Big| + \Big|\frac{(u_1,u_2,u_3)}{(\delta_1,\delta_2,D_3)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_1,\delta_2)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_2,\delta_1)}\Big| \\ &- \Big|\frac{(u_1,u_2,u_3)}{(D_1,\delta_2,\delta_1)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_2,\delta_1)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_3,\delta_2)}\Big| - \Big|\frac{(u_1,u_2,u_3)}{(\delta_2,D_2,\delta_1)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_1,\delta_1)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_3,\delta_2)}\Big| \\ &- \Big|\frac{(u_1,u_2,u_3)}{(\delta_2,\delta_1,D_3)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_1,\delta_1)}\Big|\Big|\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(D_2,\delta_2)}\Big|. \end{aligned} \tag{5.14}$$

On lihtne näha, et võttes $A = C^\infty(\mathbb{R}^{3|2})$ ning derivatsioonid

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad D_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \delta_1 = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}, \qquad \delta_2 = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar\theta}$$

taandub valem (5.13) kujule (5.10). Tõesti, kuna determinantide korrutises

$$\Big|\frac{\partial(H,G,F)}{\partial(x,\theta,\bar\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,\bar\theta)}\Big|\Big|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,\theta)}\Big|$$

on igas liidetavas kahe paarisfunktsiooni paaritu derivatsiooni, vastavalt θ ja $\bar\theta$ järgi, ning mingi paaritu elemendi, mis on samuti θ ja $\bar\theta$ lineaarkombinatsioon, korrutis ning Grassmanni algebras on moodustajate ruut null, on valemis (5.14) kõik liidetavad nullid.

Kokkuvõte

Töös on toodud Nambu teooria üldistus superruumile $\mathbb{R}^{3|2}$ ning defineeritud Poissoni sulg superruumil saadud Nambu superruumi vektorvälja kaudu. Antud on ka võimalik Poissoni sulu, millel on kolm argumenti ja kaks parameetrit, üldistus suvalisele kommutatiivsele superalgebrale. Edasine töö võiks sisaldada üldistamist Poissoni sulg ning valem (5.13) üldisele superalgebrale, kus Poissoni sulul on n argumenti ning m parameetrit. Samuti oleks tarvis edasises töös kontrollida Poissoni sulu tingimuste kehtimist antud valemi liikmetel.

Kirjandus

[1] Yoichiro Nambu. Generalized hamiltonian dynamics. *Physical Review D*, 7(8):2405–2412, apr 1973.

[2] Filippov Valerii Terent'evich. n-lie algebras. *Siberian Mathematics Journal*, 11 1985.

[3] Leon A. Takhtadzhian. *Quantum mechanics for mathematicians*. American Mathematical Society, 2008.

[4] Felix A. Berezin. *Introduction to superanalysis*. D. Reidel Publishing Company, 1987.

[5] Viktor Abramov. Generalization of nambu-hamilton equation and extension of nambu-poisson bracket to superspace. *Universe*, 09 2018.

[6] William Munger Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, first edition, 1975.

[7] Vladimir Igorevich Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, second edition, 1989.

[8] Frank Wilson Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, first edition, 1971.

[9] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, second edition, 2003.

[10] Brian Carlyle Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Springer-Verlag, second edition, 2003.

[11] John A. Thorpe. *Elementary topics in differential geometry*. Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1979.

[12] Viktor Abramov and Piret Kuusk. *Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas*. Tartu Ülikooli Kirjastus, 1994.

[13] Bryce DeWitt. *Supermanifolds*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.

[14] A. Rogers. *Supermanifolds: theory and applications*. World Scientific Publishing Company, 2007.

[15] Connes Alain. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.

[16] José Gracia-Bondía, Joseph Várilly, and Héctor Figueroa. Elements of noncommutative geometry. *The Mathematical Gazette*, 85, 2001.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Georg Simmul,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Nambu teooria laienemine superruumile“, mille juhendaja on Viktor Abramov, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Georg Simmul

25.05.2021