ges, einander gleich sind, folglich $cos\frac{\pi}{r} = cos\frac{(2r-1)\pi}{r}, cos\frac{3\pi}{r} = cos\frac{(2r-3)\pi}{r}$, etc., so ist der erste Factor des Productes $=(a^r + b^r)^2$ dem letzten, der 2te dem 2ten vom letzten, etc. gleich, und wenn die Zahl dieser Factoren $= r$ eine gerade Zahl $= n$, so ist die erste Hälfte derselben mit der letztern völlig identisch, und man hat

$$a^n + b^n = (a^2 - 2ab\ cos\frac{\pi}{n} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{3\pi}{n} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{5\pi}{r} + b^2)$$
$$\times (a^2 - 2ab\ cos\frac{7\pi}{n} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{9\pi}{n} + b^2) \ldots (a^2 - 2ab\ cos\frac{(n-1)\pi}{n} + b^2).$$

Ist r eine ungerade Zahl $= m$, so hat das Product einen mitlern Factor $a^2 - 2ab\ cos\frac{m\pi}{m} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, und es ist

$$a^m + b^m = (a^2 - 2ab\ cos\frac{\pi}{m} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{3}{m} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{5\pi}{m} + b^2)$$
$$\times (a^2 - 2ab\ cos\frac{7\pi}{m} + b^2) \ldots\ldots (a^2 - 2ab\ cos\frac{(m-2)\pi}{m} + b^2)(a+b).$$

Eben so erhält man aus der zweiten Gleichung für ein gerades $r = n$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^2 - 2ab\ cos\frac{2\pi}{n} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{4\pi}{n} + b^2)$$
$$\times (a^2 - 2ab\ cos\frac{6\pi}{n} + b^2) \ldots\ldots (a^2 - 2ab\ cos\frac{(n-2)\pi}{n} + b^2)(a+b)$$

und wenn r eine ungerade Zahl $= m$

$$a^m - b^m = (a-b)(a^2 - 2ab\ cos\frac{2\pi}{m} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{4\pi}{m} + b^2)$$
$$\times (a^2 - 2ab\ cos\frac{6\pi}{m} + b^2) \ldots\ldots (a^2 - 2ab\ cos\frac{(m-1)\pi}{m} + b^2).$$

Zur Erläuterung mögen hier einige Beispiele folgen:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2$$
$$a^4 + b^4 = (a^2 - 2ab\ cos\frac{\pi}{4} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{3\pi}{4} + b^2)$$
$$a^6 + b^6 = (a^2 - 2ab\ cos\frac{\pi}{6} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{3\pi}{6} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{5\pi}{6} + b^2)$$

$$a + b = a + b$$
$$a^3 + b^3 = (a^2 - 2ab\ cos\frac{\pi}{3} + b^2)(a+b)$$
$$a^5 + b^5 = (a^2 - 2ab\ cos\frac{\pi}{5} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{3\pi}{5} + b^2)(a+b)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^2 - 2ab\ cos\frac{2\pi}{4} + b^2)(a+b)$$
$$a^6 - b^6 = (a-b)(a^2 - 2ab\ cos\frac{2\pi}{6} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{4\pi}{6} + b^2)(a+b)$$

$$a - b = a - b$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - 2ab\ cos\frac{2\pi}{3} + b^2)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^2 - 2ab\ cos\frac{2\pi}{5} + b^2)(a^2 - 2ab\ cos\frac{4\pi}{5} + b^2).$$

Der so eben bewiesene Lehrsatz wird von seinem Erfinder Cotes der Cotesische Lehrsatz genannt. Der allgemeinere Satz wurde später von Moivre mitgetheilt.

§. 85. Die logarithmischen oder hyperbolischen Functionen $\frac{e^s + e^{-s}}{2}, \frac{e^s - e^{-s}}{2}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, haben, wie wir bereits mehrere Male zu bemerken Gelegenheit gehabt, mit den Kreisfunctionen $cos\,s$, $sin\,s$, sowohl in Absicht ihrer analytischen Form als auch in geometrischer Hinsicht so grofse Ähnlichkeit, dafs es wohl nicht unzweckmäfsig sein wird, diese hier etwas genauer zu betrachten. So wie nämlich (§. 35.) $cos\,s$ die Abscisse, und $sin\,s$ die Ordinate des Endpuncts P, eines Kreisbogens AP $= s$, dessen Radius $= 1$, so ist (§. 23.) $\frac{e^s + e^{-s}}{2}$ die Abscisse und $\frac{e^s - e^{-s}}{2}$ die Ordinate des Endpunctes P des Bogens AP der gleichseitigen Hyperbel, deren Axe $= 1$, wo s der doppelte Flächeninhalt eines von der Axe OA, dem Radiusvector OP, und dem Bogen AP begrenzten Sec-

tors ist. Wir wollen daher mit Lambert $\frac{e^s + e^{-s}}{2}$ den hyperbolischen Cosinus und $\frac{e^s + e^{-s}}{2}$ den hyperbolischen Sinus des Doppelsectors s nennen, und diese beiden Functionen durch $Cosh\, s$, $Sinh\, s$, bezeichnen.

Diesemnach erhält man zufolge (§. 25, 26, 27.) folgende Gleichungen für die hyperbolischen Sinusse und Cosinusse.

$$Cosh(s+t) = Cosh\, s\ Cosh\, t + Sinh\, s\ Sinh\, t \qquad Cosh(s+t) + Cosh(s-t) = 2\, Cosh\, s\ Cosh\, t$$
$$Cosh(s-t) = Cosh\, s\ Cosh\, t - Sinh\, s\ Sinh\, t \qquad Cosh(s+t) - Cosh(s-t) = 2\, Sinh\, s\ Sinh\, t$$
$$Sinh(s+t) = Sinh\, s\ Cosh\, t + Cosh\, s\ Sinh\, t \qquad Sinh(s+t) + Sinh(s-t) = 2\, Sinh\, s\ Cosh\, t$$
$$Sinh(s-t) = Sinh\, s\ Cosh\, t - Cosh\, s\ Sinh\, t \qquad Sinh(s+t) - Sinh(s-t) = 2\, Cosh\, s\ Sinh\, t$$
$$Cosh\ 2s = Cosh^2 s + Sinh^2 s \qquad Cosh\,\alpha + Cosh\,\beta = 2\, Cosh\frac{\alpha+\beta}{2} Cosh\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$1 = Cosh^2 s - Sinh^2 s \qquad Cosh\,\alpha - Cosh\,\beta = 2\, Sinh\frac{\alpha+\beta}{2} Sinh\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$Cosh\ 2s + 1 = 2\, Cosh^2 s \qquad Sinh\,\alpha + Sinh\,\beta = 2\, Sinh\frac{\alpha+\beta}{2} Cosh\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$Cosh\ 2s - 1 = 2\, Cinh^2 s \qquad Sinh\,\alpha - Sinh\,\beta = 2\, Ccsh\frac{\alpha+\beta}{2} Sinh\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich, wenn man $\frac{Sinh\, s}{Cosh\, s}$ durch $Tanh\, s$ und $\frac{Cosh\, s}{Sinh\, s}$ durch $Coth\, s$ bezeichnet mehrere andere, den für die Kreisfunctionen gefundenen Formeln, ähnliche Gleichungen herleiten. So ist z. B., wie man sich leicht überzeugt,

$$Tanh(s+t) = \frac{Tanh\, s + Tanh\, t}{1 + Tanh\, s\ Tanh\, t},\quad Tanh(s-t) = \frac{Tanh\, s - Tanh\, t}{1 - Tanh\, s\ Tanh\, t}.$$

Es ist hier noch zu bemerken, dafs, wegen $Cosh^2 s - Sinh^2 s = 1$, $Cosh\, s$ alle möglichen Werthe zwischen $+\infty$ und $-\infty$, mit Ausschlufs der Werthe zwischen $+1$ und -1 haben kann. Hingegen kann $Sinh\, s$ alle möglichen Werthe ohne Ausnahme zwischen $+\infty$ und $-\infty$ haben. Die hyperbolische Tangente aber mufs, weil, wegen der Gleichung $Cosh^2 s - Sinh^2 . s = 1$, $Cosh\, s > Sinh\, s$, immer kleiner als 1, und zwischen den Grenzen $+1$ und $-$ enthalten sein.

§. 86. Weil $Cosh\, s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$, $Sinh\, s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$ so erhält man zufolge (§. 5.)

$$Cosh\, s = 1 + s_c^2 + s_c^4 + s_c^6 + s_c^8 + s_c^{10} + \text{etc.}$$
$$Sinh\, s = s + s_c^3 + s_c^5 + s_c^7 + s_c^9 + s_c^{11} + \text{etc.}$$

§. 87. Setzt man $Cosh\, s = \xi$, $Sinh\, s = \eta$, $\frac{\eta}{\xi} = \theta$, so ist

$$\theta = \frac{sinh\, s}{cosh\, s} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1} \text{ und folglich } e^{2s}\theta + \theta = e^{2s} - 1, \text{ also } e^{2s} = \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

Daraus erhält man, wenn man s oder den Flächeninhalt des hyperbolischen Doppelsectors, dessen Cosinus $= \xi$, dessen Sinus $= \eta$, und dessen Tangente $= \theta$, das Argument des Cosinus ξ, des Sinus η oder der Tangente θ nennt, und dasselbe durch $Arg.\, Cosh.\, \xi$, $Arg.\, Sinh.\, \eta$, $Arg.\, Tanh.\, \theta$ bezeichnet,

$$Arg.\ Tanh.\, \theta = \tfrac{1}{2}\, log\, nat \frac{1+\theta}{1-\theta} = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^7}{7} + \frac{\theta^9}{9} + \text{etc.}$$

§. 88. Eben so ergiebt sich, weil $Sinh\, s$ oder $\eta = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$, und folglich $e^{2s} - 2\eta e^s - 1 = 0$, $e^s = \eta + \sqrt{1+\eta^2}$, und $s = log\, nat\, (\eta + \sqrt{1+\eta^2})$. Demnach wegen (§. 17.)

$$Arg.\ Sinh.\, \eta = \eta - \tfrac{1}{2}\frac{\eta^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\eta^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\eta^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\eta^9}{9} - \text{etc.}$$

§. 89. Weil $Cosh\, s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$, $Sinh\, s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$, so hat man

$$Cosh\, s + Sinh\, s = e^s \quad \text{und} \quad Cosh\, s - Sinh\, s = e^{-s}$$

und eben so

$$Cosh\, xs + Sinh\, xs = e^{xs} \quad \text{und} \quad Cosh\, xs - Sinh\, xs = e^{-xs}$$

Daraus ergiebt sich, wenn man, wie oben $cosh\, s = \xi$, $sinh\, s = \eta$, $\frac{\eta}{\xi} = \theta$ setzt, wie (§. 29.)

$$Cosh\, xs = \xi^x + x_c^{:2}\,\xi^{x-2}\,\eta^2 + x_c^{:4}\,\xi^{x-4}\,\eta^4 + x_c^{:6}\,\xi^{x-6}\,\eta^6 + \text{etc.}$$

$$Sinh\, xs = x\xi^{x-1}\eta + x_c^{:3}\,\xi^{x-3}\,\eta^3 + x_c^{:5}\,\xi^{x-5}\,\eta^5 + x_c^{:7}\,\xi^{x-7}\,\eta^7 + \text{etc.}$$

$$\text{oder } Cosh.\, xs = \xi^x\,(1 + x_c^{:2}\,\theta^2 + x_c^{:4}\,\theta^4 + x_c^{:6}\,\theta^6 + \text{etc.})$$

$$Sinh.\, xs = \xi^x\,(x\theta + x_c^{:3}\,\theta^3 + x_c^{:5}\,\theta^5 + x_c^{:7}\,\theta^7 + \text{etc.})$$

§. 90. Eben so erhält man aus (§. 31.)

$$Cosh\, xs = 1 + \frac{x}{2}x\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3,2}\,\eta^4 + \frac{x}{6}(x+4)_c^{5,2}\,\eta^6 + \text{etc.}$$

$$Sinh\, xs = x\eta + \frac{x}{3}(x+1)_c^{2,2}\,\eta^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4,2}\,\eta^5 + \frac{x}{7}(x+5)_c^{6,2}\,\eta^7 + \text{etc.}$$

oder auch

$$Cosh\, xs = \xi(1 + (x+1)_c^{2,2}\,\eta^2 + (x+3)_c^{4,2}\,\eta^4 + (x+5)_c^{6,2}\,\eta^6 + \text{etc.})$$

$$Sinh\, xs = \xi(xs + (x+2)_c^{3,2}\,\eta^3 + (x+4)_c^{5,3}\,\eta^2 + (x+6)_c^{7,2}\,\eta^7 + \text{etc.})$$

§. 91. Aus (§. 73, 76.) ergiebt sich noch, wenn r irgend eine positive ganze, n eine positive gerade und m eine positive ungerade Zahl bedeutet, dafs

$$\frac{Cosh\, rs}{\xi^r} = \left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\pi}{2r}}\right)\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{3\pi}{2r}}\right)\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{5\pi}{2r}}\right)\cdots\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}}\right)$$

$$\frac{Sinh\, rs}{\xi^r} = r\theta\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\pi}{r}}\right)\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{2\pi}{r}}\right)\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{3\pi}{r}}\right)\cdots\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\mu\pi}{r}}\right)$$

wo $2\lambda = r$ oder $r-1$, $\mu = \lambda - 1$, oder $= \lambda$, je nachdem r gerade oder ungerade,

$$Cosh\, ns = \left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{5\pi}{2n}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)$$

$$Sinh\, ms = m\eta\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi}{m}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right)$$

$$\frac{Cosh\, ms}{\Gamma(1+\eta^2)} = \left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3}{2m}\pi}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{5}{2m}\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right)$$

$$\frac{Sinh\, ns}{\Gamma(1+\eta^2)} = n\eta\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{2}{n}\pi}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3}{n}\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(n-2)\pi}{2n}}\right)$$

§. 92. Wenn die Wurzeln einer Gleichung vom $r$ten Grade

$$x^r - A_1 x^{r-1} + A_2 x^{r-2} - A_3 x^{r-3} + \ldots \pm A_r = o$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ sind, so ist bekanntlich $A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_r$. Vermittelst dieses Satzes lassen sich mit Hülfe der für $tan\, rs$, $cos\, rs$, $sin\, rs$ gefundenen endlichen Ausdrücke, die Summen mehrerer interessanten Reihen herleiten, von denen wir einige, die in der Folge von Nutzen sein werden, betrachten wollen.

§. 93. Aus (§. 54.) ergiebt sich, dafs für jeden beliebigen Bogen s, auch wenn x eine ganze Zahl $= r$,

$$cot\, rs = \frac{1 - r_c^{:2}\,tan^2 s + r_c^{:4}\,tan^4 s - r_c^{:6}\,tan^6 s + \text{etc.}}{r\,tan\, s - r_c^{:3}\,tan^3 s + r_c^{:5}\,tan^5 s - r_c^{:7}\,tan^7 s + \text{etc.}}$$

$$\text{oder auch} = \frac{cot^r s - r_c^{:2}\,cot^{r-2} s + r_c^{:4}\,cot^{r-4} s - r_c^{:6}\,cot^{r-6} s + \text{etc.}}{r\,cot^{r-1} s - r_c^{:3}\,cot^{r-3} s + r_c^{:5}\,cot^{r-5} s - r_c^{:7}\,cot^{r-7} s + \text{etc.}}$$

Weil nun, für jede beliebige ganze Zahl λ, $cot\, rs = cot\,(\lambda\pi + rs)$, so gelten die obigen beiden Gleichungen auch noch dann, wenn man $tan\,(\frac{\lambda\pi}{r} + s)$ oder $cot(\frac{\lambda\pi}{r} + s)$ resp. für $tan\, s$ und $cot\, s$ setzt. Daraus folgt nun, dafs die r Wurzeln der Gleichung

(A) $x^r - r\,cot\, rs\; x^{r-1} - r_c^{:2}\,x^{r-2} + r_c^{:3}\,cot\, rs\; x^{r-3} + r_c^{:4}\,x^{r-4} - \text{etc.} = o$

$cot\, s$, $cot\,(\frac{\pi}{r}+s)$, $cot\,(\frac{2\pi}{r}+s)$, $cot\,(\frac{3\pi}{r}+s)\ldots cot\,(\frac{(r-1)\pi}{r}+s)$ sind.

Demnach hat man

(B) $r\,cot\, rs = cot\, s + cot\,(\frac{\pi}{r}+s) + cos\,(\frac{2\pi}{r}+s) + cot\,(\frac{3\pi}{r}+s)\ldots + cot(\frac{(r-1)\pi}{r}+s)$

oder auch, weil $cot\, v = -cot\,(\pi - v)$, also $cot\,(\frac{(r-1)\pi}{r}+s) = -cot\,(\frac{\pi}{r}-s)$, etc.

(C) $r\,cot\, rs = cot\, s - cot\,(\frac{\pi}{r}-s) + cot\,(\frac{\pi}{r}+s) - cot\,(\frac{2\pi}{r}-s) + cot\,(\frac{2\pi}{r}+s) - \text{etc.}$

§. 94. Dividirt man die Gleichung (A) durch x^r, setzt alsdann t für $\frac{1}{x}$, verwandelt die Zeichen des ersten Theils der Gleichung, wenn das letzte Glied desselben das Vorzeichen — hat; multiplicirt, wenn das letzte Glied den Factor $\cot rs$ enthält, die Gleichung durch $\tan rs$, und schreibt endlich die Glieder des ersten Theils der Gleichung in umgekehrter Ordnung, so verwandelt sich die Gleichung (A), weil $r_c^{:r} = 1$ $r_c^{:r-1} = r$, $r_c^{:r-2} = r_c^{:2}$ etc., und $\frac{1}{\cot rs} = \tan rs$ in folgende:

(D) $t^r + r\cot rs \cdot t^{r-1} - r_c^{:2} t^{r-2} - r_c^{:3} \cot rs \cdot t^{r-3} \ldots\ldots\ldots \pm 1 = o$

oder in

$$t^r - r\tan rs \cdot t^{r-1} - r_c^{:2} t^{r-2} + r_c^{:3} \tan rs \cdot t^{r-3} \ldots\ldots \pm \tan rs = o,$$

je nachdem r eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Weil nun $\cot rs = \cot(\lambda\pi + rs)$, $\tan rs = \tan(\lambda\pi + rs)$, so ist der allgemeine Ausdruck der r Wurzeln dieser beiden Gleichungen $\tan(\frac{\lambda\pi}{r} + s)$, und demnach

$$\tan s + \tan(\tfrac{\pi}{r} + s) + \tan(\tfrac{2\pi}{r} + s) + \tan(\tfrac{3\pi}{r} + s) \ldots + \tan(\tfrac{(r-1)\pi}{r} + s)$$

oder $\tan s - \tan(\frac{\pi}{r} - s) + \tan(\frac{\pi}{r} + s) - \tan(\frac{2\pi}{r} - s) + \tan(\frac{2\pi}{r} + s) - \tan(\frac{3\pi}{r} - s) +$ etc. $= -r\cot rs$ oder $= r\tan rs$, je nachdem r eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

§. 95. Setzt man in der ersten Gleichung (I. §. 70.) $2\lambda\pi + rs$ statt rs, so wird $\xi = \cos(\frac{2\lambda\pi}{r} + s)$, und man erhält

$$2\cos(2\lambda\pi + rs) = (2\cos(\tfrac{2\lambda\pi}{r} + s))^r - r(2\cos(\tfrac{2\lambda\pi}{r} + s))^{r-2} + \tfrac{r}{2}(r-2)(2\cos(\tfrac{2\lambda\pi}{r} + s))^{r-4} - \text{etc.}$$

Weil nun für jede ganze Zahl λ, $\cos(2\lambda\pi + rs) = \cos rs$, so ergiebt sich daraus, dafs die r Wurzeln der Gleichung

$$x^r - r x^{r-2} + \tfrac{r}{2}(r-2) x^{r-4} - \tfrac{r}{3}(r-3)_c^{:2} x^{r-6} + \text{etc.} - 2\cos rs = o$$

alle unter der Form $2\cos(\frac{2\lambda\pi}{r} + s)$ begriffen sind. Da das 2te Glied der obigen Gleichung, welches x^{r-1} enthält, fehlt, oder $= o \cdot x^{r-1}$ ist, so folgt daraus, dafs die Summe der r Wurzeln der Gleichung $= o$ und folglich

(E) $\cos s + \cos(\frac{2\pi}{r} + s) + \cos(\frac{4\pi}{r} + s) + \cos(\frac{6\pi}{r} + s) \ldots + \cos(\frac{(2r-2)\pi}{r} + s) = o.$

§. 96. Auf ähnliche Weise ergiebt sich aus der ersten Gleichung (II. §. 70.) dafs die n Wurzeln der Gleichung

$$x^n - n x^{n-2} + \tfrac{n}{2}(n-3) x^{n-4} - \tfrac{n}{3}(n-4)_c^{:2} x^{n-6} + \tfrac{n}{4}(n-5)_c^{:3} x^{n-8} \ldots\ldots \pm 2\cos ns = o$$

wo n eine gerade Zahl ist, unter der allgemeinen Form $2\sin(\frac{2\lambda\pi}{n} + s)$ enthalten sind, und ebenfalls

(F) $\sin s + \sin(\frac{2\pi}{n} + s) + \sin(\frac{4\pi}{n} + s) + \sin(\frac{6\pi}{n} + s) \ldots + \sin(\frac{2n-2}{n}\pi + s) = o$

ist, was auch unmittelbar aus (E), und zwar für jede ganze Zahl r folgen würde, indem man überall $s - \frac{1}{2}\pi$ statt s setzt.

§. 97. Es läfst sich übrigens die Summe der Cosinusse und Sinusse von Bogen, die irgend eine arithmetische Reihe bilden, auf eine einfachere Weise herleiten, womit wir uns jetzt beschäftigen wollen. Es sei nämlich

$$S = k\cos a + k_1\cos a_1 + k_2\cos a_2 + k_3\cos a_3 \ldots\ldots\ldots + k_r\cos a_r,$$

wo sowohl die Coefficienten k, k_1, k_2, etc., als auch die Bogen a, a_1, a_2, a_3, etc. arithmetische Reihen bilden, so findet man die Summe S folgendermafsen:

Nimmt man an, dafs $a_1 = a + b$, also $a_2 = a + 2b$, $a_3 = a + 3b$, etc., so erhält man, weil $2\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$,

$$2\cos b \cdot S = k\cos(a-b) + k_1\cos a$$
$$+ k_2\cos a_1 + k_3\cos a_2 + k_4\cos a_3 \ldots\ldots + k_r\cos_{r-1}$$
$$+ k\cos a_1 + k_1\cos a_2 + k_2\cos a_3 \ldots\ldots + k_{r-2}\cos a_{r-2} + k_{r-1}\cos a_r + k_r\cos a_{r+1}.$$

Weil nun $k_2 + k = 2k_1$, $k_3 + k_1 = 2k_2$, $k_4 + k_2 = 2k_3$, etc.

so übersieht man leicht, dafs

$$2\cos b \,.\, S = k\cos(a-b) - (2k-k_1)\cos a + 2S - k_{r+1}\cos a_r + k_r\cos a_{r+1}$$

und folglich, weil $1-\cos b = 2\sin^2\frac{1}{2}b$,

$$(G)\quad S = \frac{k_{r+1}\cos a_r - k_r\cos a_{r+1} - k\cos(a-b) + (2k-k_1)\cos a}{4\sin^2\frac{1}{2}b}.$$

§. 98. Substituirt man in dem so eben gefundenen Ausdrucke für S überall $a-\frac{1}{2}\pi$ für a, und bezeichnet alsdann S durch S', so erhält man, weil $\cos(x-\frac{1}{2}\pi) = \sin x$,

$$S' = k\sin a + k_1\sin a_1 + k_2\sin a_2 + k_3\sin a_3 \ldots + k_r\sin a_r$$
$$= \frac{k_{r+1}\sin a_r - k_r\sin a_{r+1} - k\sin(a-b) + (2k-k_1)\sin a}{4\sin^2\frac{1}{2}b}.$$

Exempel I. Es sei $a = o$, $a_1 = \frac{4\pi}{2r+1}$, $k = o$, $k_1 = 1$, also

$$S' = \sin\frac{4\pi}{2r+1} + 2\sin\frac{8\pi}{2r+1} + 3\sin\frac{12\pi}{2r+1} + 4\sin\frac{16\pi}{2r+1} \ldots\ldots + r\sin\frac{4r\pi}{2r+1}$$
$$= \frac{(r+1)\sin\frac{4r\pi}{2r+1} - r\sin\frac{(4r+4)\pi}{2r+1}}{4\sin^2\frac{2\pi}{2r+1}} = \frac{(r+1)\sin(2\pi - \frac{2\pi}{2r+1}) - r\,.\sin(2\pi + \frac{2\pi}{2r+1})}{4\sin^2\frac{2\pi}{2r+1}}$$
$$= \frac{-(r+1)\sin\frac{2\pi}{2r+1} - r\sin\frac{2\pi}{2r+1}}{4\sin^2\frac{2\pi}{2r+1}} = -\frac{2r+1}{4\sin\frac{2\pi}{2r+1}} = -\frac{2r+1}{4}\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{2r+1}.$$

Exempel II. Es sei $a = \frac{2\pi}{2r+1}$, $b = \frac{4\pi}{2r+1}$, $k = 1$, $k_1 = 3$, etc.,

so erhält man, wenn man überdiefs $r-1$ für r setzt,

$$S' = \sin\frac{2\pi}{2r+1} + 3\sin\frac{6\pi}{2r+1} + 5\sin\frac{10\pi}{2r+1} + 7\sin\frac{14\pi}{2r+1} \ldots (2r-1)\sin\frac{(4r-2)\pi}{2r+1}$$
$$= \frac{(2r+1)\sin\frac{(4r-2)\pi}{2r+1} - (2r-1)\sin\frac{(4r+2)\pi}{2r+1} + \sin\frac{2\pi}{2r+1} - \sin\frac{2\pi}{2r+1}}{4\sin^2\frac{2\pi}{2r+1}}$$
$$= \frac{(2r+1)\sin(2\pi - \frac{4\pi}{2r+1})}{4\sin^2\frac{2\pi}{2r+1}} = -\frac{(2r+1)\sin\frac{4\pi}{2r+1}}{4\sin^2\frac{2\pi}{2r+1}} = -\frac{2r+1}{2}\cot\frac{2\pi}{2r+1}.$$

§. 99. Setzt man in dem Ausdrucke für S (§. 97.) überall $b+\pi$ für b, so verwandelt sich derselbe, weil alsdann $\cos a_\lambda$ oder $\cos(a+\lambda b)$ in $\cos(a+\lambda b+\lambda\pi) = +\cos(a+\lambda b)$ oder $-\cos(a+\lambda b)$ übergeht, je nachdem λ gerade oder ungerade ist, in folgenden:

$$(H)\quad S_1 = k\cos a - k_1\cos a_1 + k_2\cos a_2 - k_3\cos a_3 \ldots \pm k_r\cos a_r$$
$$= \frac{\pm(k_{r+1}\cos a + k_r\cos a_{r+1}) + k\cos(a-b) + (2k-k_1)\cos a}{4\cos^2\frac{1}{2}b}.$$

§. 100. Auf ähnliche Weise verwandelt sich, indem man $b+\pi$ für b setzt, der Ausdruck S' (§. 98) in

$$S_1 = k\sin a - k_1\sin a_1 + k_2\sin a_2 - k_3\sin a_3 \ldots \pm k_r\sin a_r$$
$$= \frac{\pm(k_{r+1}\sin a_r + k_r\sin a_{r+1}) + k\sin(a-b) + (2k-k_1)\sin a}{4\cos^2\frac{1}{2}b}.$$

Diese Formel erhält man auch, wenn man in S_1 des nächstvorhergehenden §. $a-\frac{1}{2}\pi$ für a substituirt.

§. 101. Nimmt man die Coefficienten der Reihe S (§. 97.) alle einander gleich, und zwar $= 1$ an, so erhält man,

$$(I)\quad \cos a + \cos(a+b) \ldots\ldots + \cos(a+rb) = \frac{\cos(a+rb) - \cos(a+(r+1)b - \cos(a-b) + \cos a}{4\sin^2\frac{b}{2}}$$
$$= \frac{\sin(a+\frac{2r+1}{2}b) - \sin(a-\frac{b}{2})}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\cos(a+\frac{rb}{2})\sin\frac{r+1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

Exempel I. Es sei $a = s$, $b = \frac{2\pi}{r}$, und es werde $r-1$ statt r gesetzt, so ist

$$\cos s + \cos(\frac{2\pi}{r} + s) + \cos(\frac{4\pi}{r} + s) + \cos(\frac{6\pi}{r} + s) \ldots\ldots + \cos(\frac{2r-2}{r}\pi + s)$$
$$= \frac{\cos(\frac{(r-1)}{r}\pi + s)\sin\frac{r}{r}\pi}{\sin\frac{\pi}{r}} = o, \text{ wie oben (§. 96.)}$$

Exempel II. Es sei $a = o$, $b = \frac{2\pi}{2r+1}$, so hat man

$$1 + \cos\frac{2\pi}{2r+1} + \cos\frac{4\pi}{2r+1} + \cos\frac{6\pi}{2r+1} + \cos\frac{8\pi}{2r+1} \ldots\ldots + \cos\frac{2r\pi}{2r+1}$$

$$= \frac{\cos\frac{r\pi}{2r+1} \cdot \sin\frac{r+1}{2r+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{2r+1}} = \frac{\cos\frac{r\pi}{2r+1} \cdot \sin\frac{r\pi}{2r+1}}{\sin\frac{\pi}{2r+1}} = \frac{\sin\frac{2r\pi}{2r+1}}{2\sin\frac{\pi}{2r+1}} = \tfrac{1}{2}.$$

§. 102. Substituirt man in der Gleichung (Í) $a - \frac{1}{2}\pi$ für a, so hat man

(Ḱ) $$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) \ldots + \sin(a+rb) = \frac{\sin(a+\frac{rb}{2})\sin\frac{(r+1)b}{2}}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

§. 103. Setzt man in der Gleichung (Í) $b + \pi$ für b, so ergiebt sich

(Ĺ) $$\cos a - \cos(a+b) + \cos(a+2b) - \cos(a+3b) \ldots\ldots\ldots \pm \cos(a+rb)$$

$$= \frac{\cos(a+\frac{r}{2}b)\cos\frac{r+1}{2}b}{\cos\frac{b}{2}} \quad \text{oder} \quad = \frac{\sin(a+\frac{r}{2}b)\sin\frac{r+1}{2}b}{\cos\frac{b}{2}}$$

je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Exempel. Es sei $a = o$, $b = \frac{4\pi}{2r+1}$, so ist, wenn r gerade,

$$1 - \cos\frac{4\pi}{2r+1} + \cos\frac{8\pi}{2r+1} - \cos\frac{12\pi}{2r+1} + \cos\frac{16\pi}{2r+1} \ldots\ldots \pm \cos\frac{4r\pi}{2r+1}$$

$$= \frac{\cos\frac{2r\pi}{2r+1} \cdot \cos\frac{(2r+2)\pi}{2r+1}}{\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = \frac{\cos(\pi - \frac{\pi}{2r+1}) \cdot \cos(\pi + \frac{\pi}{2r+1})}{\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{2r+1}}{\cos\frac{2\pi}{2r+1}}$$

$$= \frac{1 + \cos\frac{2\pi}{2r+1}}{2\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sec\frac{2\pi}{2r+1}.$$

Ist hingegen r ungerade, so ist die obige Summe

$$= \frac{\sin\frac{2r\pi}{2r+1} \cdot \sin\frac{2r+2}{2r+1}\pi}{\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = -\frac{\sin^2\frac{\pi}{2r+1}}{\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = -\frac{1 - \cos\frac{2\pi}{2r+1}}{2\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sec\frac{2\pi}{2r+1}.$$

Es ist demnach, je nachdem r gerade oder ungerade,

$$\pm\sec\frac{2\pi}{2r+1} = 1 - 2\cos\frac{4\pi}{2r+1} + 2\cos\frac{8\pi}{2r+1} - 2\cos\frac{12\pi}{2r+1} \ldots \pm 2\cos\frac{4r\pi}{2r+1}.$$

§. 104. Die Gleichung (Ĺ) verwandelt sich, wenn man $a - \frac{1}{2}\pi$ für a substituirt, in

(Ḿ) $$\sin a - \sin(a+b) + \sin(a+2b) - \sin(a+3b) \ldots\ldots\ldots \pm \sin(a+rb)$$

$$\frac{\sin(a+\frac{r}{2}b)\cos\frac{r+1}{2}b}{\cos\frac{b}{2}} \quad \text{oder} \quad = \frac{\cos(a+\frac{r}{2}b)\sin\frac{r+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}$$

je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Exempel. Es sei $a = o$, $b = \frac{4\pi}{2r+1}$, so erhält man

$$\sin\frac{4\pi}{2r+1} - \sin\frac{8\pi}{2r+1} + \sin\frac{12\pi}{2r+1} - \sin\frac{16\pi}{2r+1} \ldots\ldots\ldots \pm \sin\frac{4r\pi}{2r+1}$$

$$= -\frac{\sin\frac{2r\pi}{2r+1} \cdot \cos\frac{(r+1)2\pi}{2r+1}}{\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2r+1}\cos\frac{\pi}{2r+1}}{\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{2r+1}}{2\cos\frac{2\pi}{2r+1}} = \tfrac{1}{2}\tan\frac{2\pi}{2r+1}.$$

§. 105. Bemerkenswerth sind hier noch die Formeln, vermittelst deren sich die Potenzen der Cosinusse und Sinusse durch Reihen, welche die einfachen Cosinusse oder Sinusse der vielfachen Bogen enthalten, darstellen lassen.

Mit Hülfe des Satzes $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ findet man leicht

$$\begin{aligned}
\cos\omega &= \cos\omega \\
2\cos^2\omega &= \cos 2\omega + 1 \\
2^2\cos^3\omega &= \cos 3\omega + 3\cos\omega \\
2^3\cos^4\omega &= \cos 4\omega + 4\cos 2\omega + 3 \\
2^4\cos^5\omega &= \cos 5\omega + 5\cos 3\omega + 10\cos\omega \\
2^5\cos^6\omega &= \cos 6\omega + 6\cos 4\omega + 15\cos 2\omega + 10 \\
2^6\cos^7\omega &= \cos 7\omega + 7\cos 5\omega + 21\cos 3\omega + 35\cos\omega \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

und allgemein

(N) $2^{r-1}\ cos^{r}\omega = cos\, r\omega + r\ cos(r-2)\omega + r_c^{:2}\ cos(r-4)\omega + r_c^{:3} cos(r-6)\omega + \text{etc.}$

Das letzte Glied ist entweder $\frac{1}{2} r_c^{:\frac{r}{2}}$ oder $r_c^{:\frac{r-1}{2}}\ cos\,\omega$, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Um die Allgemeinheit dieses Satzes zu beweisen, darf man nur zeigen, dafs, wenn derselbe für irgend eine ganze Zahl r wahr ist, er auch für $r+1$ wahr sein müsse. Ist aber der obige Ausdruck für $2^{r-1}\ cos^{r}\omega$ richtig, so hat man auch, weil $cos(-x) = cos\, x$,

$$2^{r}\ cos^{r}\omega = cos\, r\omega + r\ cos(r-2) + r_c^{:2} cos(r-4)\omega \ldots + r_c^{:r-1} cos(2-r)\omega + cos(-r\omega).$$

Daraus ergiebt sich, weil $2\ cos\, x\ cos\, y = cos(x+y) + cos(x-y)$,

$$2^{r+1}\ cos^{r+1}\omega = cos(r+1)\omega + r\, cos(r-1)\omega + r_c^{:2} cos(r-3)\omega \ldots + r_c^{:r-1} cos(3-r)\omega + cos(1-r)\omega$$
$$+ cos(r-1)\omega + r\, cos(r-3)\omega + r_c^{:2} cos(r-5)\omega \ldots + r_c^{:r-1} cos(1-r)\omega + cos(-1-r)\omega$$

Da nun, wie man leicht übersieht $r+1 = r+1$, $r_c^{:2} + r = (r+1)_c^{:2}$, $r_c^{:3} + r_c^{:2} = (r+1)_c^{:3}$ und allgemein $r_c^{:n} + r_c^{:n-1} = (r+1)_c^{:n}$, so erhält man:

$$2^{r+1}\ cos^{r+1}\omega = cos(r+1)\omega + (r+1)\ cos(r-1)\omega + (r+1)_c^{:2}\ cos(r-3)\omega \ldots\ldots$$
$$\ldots + (r+1)_c^{:r-1}\ cos(3-r)\omega + (r+1)_c^{:r}\ cos(1-r) + (r+1)_c^{:r+1}\ cos(-1-r)\omega,$$

und folglich, weil $cos(-x) = cos\, x$, und $(r+1)_c^{:n} = (r+1)_c^{:r+1-n}$

$$2^{r}\ cos^{r+1}\omega = cos(r+1)\omega + (r+1)\ cos(r-1)\omega + (r+1)_c^{:2}\ cos(r-3)\omega + \text{etc.},$$

wo das letzte Glied entweder $(r+1)_c^{:\frac{r}{2}} cos\,\omega$ oder $\frac{1}{2}(r+1)_c^{:\frac{r+1}{2}}$, je nachdem r eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Es ist demnach die Form (N) allgemein bewiesen.

§. 106. Schreibt man die Reihe für $2^{r-1}\ cos^{r}\omega$ in umgekehrter Ordnung, so erhält man $2^{r-1}\ cos^{r}\omega$

$$= \tfrac{1}{2} r_c^{:\frac{r}{2}} + r_c^{:\frac{r}{2}-1}\ cos\,2\omega + r_c^{:\frac{r}{2}-2}\ cos\,4\omega \ldots + r_c^{:2} cos(r-4)\omega + r\, cos(r-2)\omega + cos\, r\omega$$

oder

$$= r_c^{:\frac{r-1}{2}} cos\,\omega + r_c^{:\frac{r-3}{2}} cos\,3\omega + r_c^{:\frac{r-5}{2}} cos\,5\omega \ldots + r_c^{:2} cos(r-4)\omega + r\, cos(r-2)\omega + cos\, r\omega$$

je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Setzt man nun $\frac{1}{2}\pi - \omega$ für ω, so geht $cos\,\omega$ in $sin\,\omega$, $cos\,2\omega$ in $-cos\,2\omega$, $cos\,3\omega$ in $-sin\,3\omega$, $cos\,4\omega$ in $cos\,4\omega$ etc. über, und man erhält:

$$2^{r-1}\ sin^{r}\omega = \tfrac{1}{2} r_c^{:\frac{r}{2}} - r_c^{:\frac{r}{2}-1}\ cos\,2\omega + r_c^{:\frac{r}{2}-2}\ cos\,4\omega \ldots\ldots \pm cos\, r\omega$$

$$\text{oder} = r_c^{:\frac{r-1}{2}}\ sin\,\omega - r_c^{:\frac{r-3}{2}}\ sin\,3\omega + r_c^{:\frac{r-4}{2}}\ sin\,5\omega \ldots\ldots \pm sin\, r\omega,$$

je nachdem r gerade oder ungerade ist. Es ist demnach:

$$2\ sin^2\omega = 1 - cos\,2\omega$$
$$4\ sin^3\omega = 3\ sin\,\omega - sin\,3\omega$$
$$8\ sin^4\omega = 3 - 4\ cos\,2\omega + cos\,4\omega$$
$$16\ sin^5\omega = 10\ sin\,\omega - 5\ sin\,3\omega + sin\,5\omega$$
$$32\ sin^6\omega = 10 - 15\ cos\,2\omega + 6\ cos\,4\omega - cos\,6\omega$$
$$64\ sin^7\omega = 35\ sin\,\omega - 21\ sin\,3\omega + 7\ sin\,5\omega - sin\,7\omega$$
$$128\ sin^8\omega = 35 - 56\ cos\,2\omega + 28\ cos\,4\omega - 8\ cos\,6\omega + cos\,8\omega$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Man vergleiche das hier Vorgetragene mit (§. 33, 34.)

Gebrauch der unmöglichen Gröfsen zur Entwickelung der trigonometrischen Functionen.

§. 107. Unter den Hülfsmitteln, deren sich die neuere Mathematik bedient, Wahrheiten zu entdecken, und dieselben auf eine fürs Gedächtnifs bequeme Art an bereits bekannte anzuknüpfen, nehmen die sogenannten imaginären, eingebildeten oder

unmöglichen Gröfsen ein vorzüglichen Rang ein. Eine unmögliche Gröfse wird nämlich jeder analytische Ausdruck genannt, der in sich einen Widerspruch enthält, und für welchen sich keine reelle Gröfse als Werth angeben läfst. So sind z. B. *Arc. cos.x*, *Arc. sin.x*, $\sqrt{1-x^2}$, wenn $x > 1$, unmögliche Gröfsen.

Man begreift jedoch unter dem Namen unmöglicher Gröfse hier nur solche, welche sich auf die allgemeine Form $a + b\sqrt{-1}$ zurückführen lassen, wo a und b irgend reelle positive oder negative Zahlen bedeuten. Sie zeigen sich zuerst bei der Auflösung der quadratischen Gleichungen. Es ist nämlich, wenn $x^2 - 2px + q = o$, $x = p \pm \sqrt{p^2-q}$, und es sind die beiden Wurzeln der Gleichung beide reell oder imaginär für ein positives q, je nachdem $q <$ oder $> p^2$ ist. Im letztern Falle wird $x = a \pm b\sqrt{-1}$, wo $a = p$, $b = \sqrt{q-p^2}$. Oft scheint der Werth eines analytischen Ausdrucks eine unmögliche Gröfse zu sein, und hat dennoch einen reellen Werth. So könnte man z. B. den Ausdruck der Wurzel der kubischen Gleichung $x^3 - px - p = o$, oder

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{p^3}{27}}}$$

für den Fall, wenn p eine positive Gröfse und $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4}q^2$ für eine unmögliche Gröfse halten, welcher aber, wie wir weiter unten sehen werden, $= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{1}{3} Arc.\ \cos . \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$ drei verschiedene mögliche Werthe hat. Übrigens kann ein Satz, dessen Beweis nur mit Hülfe der unmöglichen Gröfsen geführt wird, wohl nie als streng mathematisch bewiesen angesehen werden, weshalb wir auch bis jetzt den Gebrauch derselben vermieden haben. Da sich jedoch der angehende Mathematiker mit diesem Hülfsmittel bekannt machen mufs, so wollen wir an mehreren der bereits vorgetragenen Sätzen der Kreisfunctionen und an einigen andern Beispielen die Nützlichkeit der Lehre von den imaginären Gröfsen zu zeigen suchen.

§. 108. Der wichtigste Satz dieser Theorie, der gewissermafsen den Fundamentalsatz derselben ausmacht, ist der von dem englischeu Mathematiker Moivre zuerst vorgetragene Satz, dafs für jede beliebige positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl x, $(\cos s \pm \sin s \cdot \sqrt{-1})^x = \cos xs \pm \sin xs \cdot \sqrt{-1}$.

Beweis. Es ist, wie man leicht übersieht, weil $(\sqrt{-1})^2 = -1$

$$(\cos xs \pm \sin xs\sqrt{-1})(\cos ys \pm \sin ys\sqrt{-1})$$
$$= \cos xs \cdot \cos ys - \sin xs \cdot \sin ys \pm (\sin xs \cos ys + \cos xs \cdot \sin ys)\sqrt{-1}$$
$$= \cos(x+y)s \pm \sin(x+y)s \cdot \sqrt{-1}.$$

Setzt man nun $\cos xs \pm \sin xs\sqrt{-1} = \varphi x$, so wird $\cos ys \pm \sin ys\sqrt{-1} = \varphi y$, $\cos(x+y)s \pm \sin(x+y)s \cdot \sqrt{-1} = \varphi(x+y)$, $\cos s \pm \sin s\sqrt{-1} = \varphi 1$, und die Function φx ist von einer solchen Beschaffenheit, dafs $\varphi x . \varphi y = \varphi(x+y)$; und, wenn man, was (§. 4.) für reelle Werthe von φx, φy, etc. erwiesen ist, auch auf die imaginären Gröfsen ausdehnt, $\varphi x = (\varphi 1)^x$. Folglich

$$\cos xs \pm \sin xs\sqrt{-1} = (\cos s \pm \sin s \cdot \sqrt{-1})^x$$

§. 109. Bezeichnet man der Kürze halber mit *Gaufs* den Ausdruck $+\sqrt{-1}$ durch i, so dafs $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ etc., so erhält man (§. 5.), wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet:

$$e^{si} = 1 + si + s_c^2 i^2 + s_c^3 i^3 + s_c^4 i^4 + \text{etc.} = \psi s + i\varphi s$$
$$e^{-si} = 1 + si + s_c^2 i^2 + s_c^3 i^3 + s_c^4 i^4 + \text{etc.} = \psi s - i\varphi s$$
$$\text{wo } \psi s = 1 - s_c^2 + s_c^4 - s_c^6 + \text{etc.}, \quad \varphi s = s - s_c^3 + s_c^5 - \text{etc.}$$

Daraus ergiebt sich $1 = \psi s^2 + \varphi s^2$, dafs also weder ψs noch φs gröfser als ± 1 sein, und man folglich $\psi s = \cos\omega$ setzen kann, woraus $\varphi s = \sin\omega$ folgt.

Es ist daher zufolge des Moivreschen Lehrsatzes

$$\cos x\omega + i \sin x\omega = (\cos\omega + i \sin\omega)^x = e^{xsi} = \psi.xs + i\,\varphi.xs$$
$$\cos x\omega - i \sin x\omega = (\cos\omega - i \sin\omega)^x = e^{-xsi} = \psi.xs - i\,\varphi.xs.$$

Demnach $\cos.x\omega = \psi.xs$ und $\sin x\omega = \varphi.xs$.

Dividirt man aber die letzte Gleichung

$$\sin x\omega = xs - x^3 s_c^3 + x^5 s_c^5 - x^7 s_c^7 + \text{etc.}$$

durch $x\omega$ und setzt darauf $x = o$, so erhält man (§. 53.) $1 = \frac{s}{\omega}$, so dafs $\omega = s$ und folglich $\psi s = \cos s$ und $\varphi s = \sin s$ wie oben.

§. 110. Setzt man, Kürze halber, $\cos s = \xi$, $\sin s = \eta$, so ist zufolge des Moivreschen und des binomischen Lehrsatzes:

$$\cos xs + i \sin xs = (\xi + i\eta)^x = \xi^x + x\xi^{x-1}\eta i + x_c^{:2}\xi^{x-2}\eta^2 i^2 + x_c^{:3}\xi^{x-3}\eta^3 i^3 + \text{etc.}$$

$$\cos xs - i \sin xs = (\xi - i\eta)^x = \xi^x - x\xi^{x-1}\eta i + x_c^{:2}\xi^{x-2}\eta^2 i^2 - x_c^{:3}\xi^{x-3}\eta^3 i^3 + \text{etc.}$$

Daraus ergiebt sich

$$\cos xs = \xi^x + x_c^{:2}\xi^{x-2}\eta^2 i^2 + x_c^{:4}\xi^{x-4}\eta^4 i^4 + x_c^{:6}\xi^{x-6}\eta^6 i^6 + \text{etc.}$$

$$\sin xs = x\xi^{x-1} + x_c^{:3}\xi^{x-3}\eta^2 i^2 + x_c^{:5}\xi^{x-5}\eta^5 i^5 + x_c^{:7}\xi^{x-7}\eta^7 i^7 + \text{etc.}$$

oder weil $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, $i^6 = -1$, etc.

$$\cos xs = \xi^x - x_c^{:2}\xi^{x-2}\eta^2 + x_c^{:4}\xi^{x-4}\eta^4 - x_c^{:6}\xi^{x-6}\eta^6 + \text{etc.}$$

$$\sin xs = \xi^{x-1} - x_c^{:3}\xi^{x-3}\eta^3 + x_c^{:5}\xi^{x-5}\eta^5 - x_c^{:7}\xi^{x-7}\eta^7 + \text{etc.}$$

und wenn man $\frac{\eta}{\xi} = \theta$ setzt

$$\cos xs = \xi^x(1 - x_c^{:2}\theta^4 + x_c^{:4}\theta^4 - \text{etc.}),\quad \sin xs = \xi^x(x\theta - x_c^{:3}\theta^3 + x_c^{:5}\theta^5 - \text{etc.})$$

wie oben (§. 53.) Beide Formeln gelten nur für s innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{4}$.

§. 111. Setzt man $\sqrt{1-\eta^2}$ für ξ, so erhält man

$$\cos xs = \tfrac{1}{2}\left\{(\sqrt{1-\eta^2}+i\eta)^x + (\sqrt{1-\eta^2}-i\eta)^x\right\},\quad \sin xs = \frac{1}{2i}\left\{(\sqrt{1-\eta^2}+i\eta)^x - (\sqrt{1-\eta^2}-i\eta)^x\right\}.$$

Nun ist aber (§. 15, 16.)

$$(\sqrt{1+\omega^2}+\omega)^x = 1 + x\omega + \frac{x}{2}x\omega^2 + \frac{x}{3}(x+2)_c^{2/2}\omega^3 + \frac{x}{4}(x+3)_c^{3/2}\omega^4 + \text{etc.}$$

oder auch $= \sqrt{1+\omega^2}\cdot(1 + x\omega + (x+1)_c^{2/2}\omega^2 + (x+2)_c^{3/2}\omega^3 + \text{etc.})$,

wo der Kürze wegen durch $z_c^{n/2}$ die Gröfse $\frac{z(z-2)(z-4)\ldots(z-2n+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ n}$ bezeichnet wird. Substituirt man $i\eta$ für ω, so erhält man:

$$(\sqrt{1-\eta^2}+i\eta)^x = 1 + x\eta i + \frac{x}{2}\eta^2 i^2 + x(x+1)_c^{2/2}\eta^3 i^3 + \text{etc.}$$

$$= \sqrt{1-\eta^2}\cdot(1 + x\eta i + (x+1)_c^{2/2}\eta^2 i^2 + (x+2)_c^{3/2}\eta^3 i^3 + (x+3)_c^{4/2}\eta^4 i^4 + \text{etc.}$$

Eben so ergiebt sich, — $i\eta$ für ω gesetzt,

$$(\sqrt{1-\eta^2}-i\eta)^x = 1 - x\eta i + \frac{x}{2}x\eta^2 i^2 - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\eta^3 i^3 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\eta^4 i^4 + \text{etc.}$$

$$= \sqrt{1-\eta^2}\cdot(1 - x\eta i + (x+1)_c^{2/2}\eta^2 i^2 - (x+2)_c^{3/2}\eta^3 i^3 + (x+3)_c^{4/2}\eta^4 i^4 + \text{etc.}$$

Diesemnach bekömmt man, weil $\eta = \sin s$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.

$$\cos xs = 1 - \frac{x}{2}x\cdot\sin^2 s + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\sin^4 s - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\sin^6 s + \text{etc.}$$

$$\sin xs = x\sin s - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\sin^3 s + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\sin^5 s - \frac{x}{7}(x+s)_c^{6/2}\sin^7 s + \text{etc.}$$

oder auch

$$\cos xs = \cos s\cdot(1 - (x+1)_c^{2/2}\sin^2 s + (x+3)_c^{4/2}\sin^4 s - (x+5)_c^{6/2}\sin^6 s + \text{etc.}$$

$$\sin xs = \cos s.(x\sin s - (x+2)_c^{3/2}\sin^3 s + (x+4)_c^{5/2}\sin^5 s - (x+6)_c^{7/2}\sin^7 s + \text{etc.}$$

§. 112. Ein strenger Beweis der zweiten Reihe für $(\sqrt{1+\omega^2}+\omega)^x$, der mir, als ich (§. 16.) den Beweis für die erste Reihe niederschrieb, fehlte, wird hoffentlich auch noch hier nicht unwillkommen sein.

Weil

$$(\sqrt{1+\omega^2}+\omega)^x = 1 + x\omega + \frac{x}{2}\cdot x\omega^2 + \frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\omega^3 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\omega^4 + \text{etc.}$$

so ist

$$(\sqrt{1+\omega^2}+\omega)^{x-1} = 1 + (x-1)\omega + \frac{x-1}{2}(x-1)\omega^2 + \frac{x-1}{3}x_c^{2/2}\omega^3 + \frac{x-1}{4}(x+1)_c^{3/2}\omega^4 + \text{etc.}$$

Setzt man nun

$$(\sqrt{1+\omega^2}+\omega)^x = \sqrt{1+\omega^2}\cdot(1 + f'x\cdot\omega + f''x\cdot\omega^2 + f'''x\cdot\omega^3 + \text{etc.}),$$

dafs also

$$(\sqrt{1+\omega^2}+\omega)^{x-1} = \sqrt{1+\omega^2}\cdot(1 + f'(x-1).\omega + f''(x-1)\cdot\omega^2 + f'''(x-1)\cdot\omega^3 + \text{etc.}),$$

so erhält man, weil

$$(\gamma\overline{1+\omega^2}+\omega)^x = \gamma(1+\omega^2).(\gamma\overline{1+\omega^2}+\omega)^{x-1} + \omega(\gamma\overline{1+\omega^2}+\omega)^{x-1},$$

$$\gamma(1+\omega^2).(1+f'x.\omega+f''x.\omega^2+\text{etc.}) = \gamma(1+\omega^2).(1+(x-1)\omega+\frac{x-1}{2}(x-1)\omega^2+\text{etc.})$$
$$+\gamma(1+\omega^2).(\omega+f'(x-1).\omega^2+f''(x-1).\omega^3+\text{etc.})$$

Diese Gleichung mit $\gamma\overline{1+\omega^2}$ dividirt, giebt:

$$1+f'x.\omega+f''x.\omega^2+\text{etc.} = 1+x-1\left|\omega+\frac{x-1}{2}(x-1)\right|\omega^2+\frac{x-1}{3}x_c^{2,2}\left|\omega^3+\text{etc.}\right.$$
$$+1\left|+f'(x-1)\right|+f''(x-1)$$

Daraus erhält man

$$f'x = x$$

$$f''x = f'(x-1)+\frac{x-1}{2}(x-1) = x-1+\frac{x-1}{2}(x-1) = (x+1)_c^{2/2}$$

$$f'''x = f''(x-1)+\frac{x-1}{3}.x_c^{2/2} = x_c^{2/2}+\frac{x-1}{3}.x_c^{2/2} = (x+2)_c^{3/2}$$

$$f^{IV}x = f'''(x-1)+\frac{x-1}{4}(x+1)_c^{3/2} = (x+1)_c^{3/2}+\frac{x-1}{4}(x+1)_c^{3/2} = (x+3)_c^{4/2}$$

etc. etc. etc. etc.

§. 113. Da der oben (§. 53.) gegebene Beweis des Satzes

$$(\gamma(1+\omega^2)+\omega)^x = 1+x\omega+\frac{x}{2}x\omega^2+\frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\omega^3+\frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\omega^4+\text{etc.}$$

etwas verwickelt scheinen dürfte, so will ich hier einen andern leichtern aber nicht weniger strengen Beweis, der sich natürlicher darzubieten scheint, mittheilen.

Zufolge des binomischen Lehrsatzes ist

$$(\gamma\overline{1+\omega^2}+\omega)^x = (1+\omega^2)^{\frac{x}{2}}+x(1+\omega^2)^{\frac{x-1}{2}}\omega+x_c^{:2}(1+\omega^2)^{\frac{x-2}{2}}\omega^2+x_c^{:3}(1+\omega^2)^{\frac{x-3}{2}}\omega^3+\text{etc.}$$

Entwickelt man die einzelnen Glieder dieser Reihe, so erhält man

$$(\gamma\overline{1+\omega^2}+\omega)^x = 1+X_1\omega+X_2\omega^2+X_3\omega^3+X_4\omega^4+\text{etc.}$$

Nun übersieht man aber leicht, wenn r irgend eine positive ganze Zahl ist, dafs alsdann:

$$X_{2r} = \left(\frac{x}{2}\right)_c^{:r}+x_c^{:2}\left(\frac{x-2}{2}\right)_c^{:r-1}+x_c^{:4}\left(\frac{x-4}{2}\right)_c^{:r-2}+x_c^{:6}\left(\frac{x-6}{2}\right)_c^{:r-3}\cdots+x_c^{:2r}$$
$$= \frac{x^{r/2}}{(2r-1)^{r/2}}\left\{\left(\frac{2r-1}{2}\right)_c^{:r}+\left(\frac{2r-1}{2}\right)_c^{:r-1}\frac{x-1}{2}+\left(\frac{2r-1}{2}\right)_c^{:r-2}\left(\frac{x-1}{2}\right)_c^{:2}\cdots+\left(\frac{x-1}{2}\right)_c^{:r}\right\}$$
$$= (\text{§. 2.})\ \frac{x^{r/2}}{(2r-1)^{r/2}}\left(\frac{x+2r-2}{2}\right)_c^{:r} = \frac{x}{2r}(x+2r-2)_c^{2r-1/2},$$

und eben so

$$X_{2r+1} = x\left(\frac{x-1}{2}\right)_c^{:r}+x_c^{:3}\left(\frac{x-3}{2}\right)_c^{:r-1}+x_c^{:5}\left(\frac{x-5}{2}\right)_c^{:r-2}+x_c^{:7}\left(\frac{x-7}{2}\right)_c^{:r-3}\cdots+x_c^{:2r+1}$$
$$= x\frac{(x-1)^{r/2}}{(2r+1)^{r/2}}\left\{\left(\frac{2r+1}{2}\right)_c^{:r}+\left(\frac{2r+1}{2}\right)_c^{:r-1}\frac{x-2}{2}+\left(\frac{2r+1}{2}\right)_c^{:r-2}\left(\frac{x-2}{2}\right)_c^{:2}\cdots+\left(\frac{x-2}{2}\right)_c^{:r}\right\}$$
$$= x\frac{(x-1)^{r/2}}{(2r+1)^{r/2}}\left(\frac{x+2r-1}{2}\right)_c^{:r} = \frac{x}{2r+1}(x+2r-1)_c^{2r/2}.$$

§. 114. Der von Moivre erweiterte Cotesische Lehrsatz von der Zerlegung des Ausdrucks $a^{2r} \pm 2a^r b^r \cos\varphi + b^{2r}$ in trinomische Factoren von der Form $a^2-2ab\cos\frac{\lambda\pi+\varphi}{r}+b^2$, wo λ, je nachdem das Zeichen + oder − gilt, jede positive gerade oder ungerade Zahl von o an bis $2r-1$ bedeutet, ist oben (§. 83.) mit aller Strenge ohne Hülfe der unmöglichen Gröfsen hergeleitet worden. Der Beweis ist jedoch etwas verwickelt. Mit Hülfe des Moivreschen Lehrsatzes, dafs $(\cos\omega+i\sin\omega)^k = \cos k\omega+i\sin k\omega$, wo $i=+\gamma-1$, läfst sich derselbe auf eine äufserst einfache Weise darthun.

Es sei $x^{2r}-2x^r\cos\varphi+1=o$, so ist $x^r=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$; oder auch, weil für jede positive ganze Zahl λ, $\cos\varphi=\cos(2\lambda\pi+\varphi)$, $\sin\varphi=\sin(2\lambda\pi+\varphi)$, $x^r=\cos(2\lambda\pi+\varphi)\pm i\sin(2\lambda\pi+\varphi)$, folglich $x=\cos\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}\pm i\sin\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}$.

Setzt man nach und nach $\lambda=o, 1, 2, 3$, etc., so sind die ersten r Werthe von x alle verschieden. Die darauf folgenden, von $\lambda=r$ an, kehren in derselben Ordnung wieder zurück. Es hat demnach die Gleichung $x^{2r}-2x^r\cos\varphi+1=o$, $2r$ ver-

schiedene unmögliche Werthe, welche alle unter der Form $cos\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}\pm i\,sin\frac{2\lambda\pi+\varphi}{2}$. Die beiden in dieser Form für ein gegebenes λ enthaltenen Wurzeln, sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x\,cos\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}.+1 = o.$$

Da nun diese beiden Wurzeln zugleich zwei Wurzeln der Gleichung $x^{2r} - 2x^r.css\varphi+1=o$, sind, so folgt daraus, dafs der Ausdruck $x^{2r}-2x^r cos\varphi+1$ durch $x^r - 2x\,cos\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}+1$ ohne Rest theilbar sein mufs.

Dividirt man nämlich irgend eine algebraische rationale ganze Function X, deren Werth, $x=a\pm b\sqrt{-1}$ gesetzt, $=o$ wird, durch die Gröfse $x^2-2ax+a^2+b^2$, welche ebenfalls, für $x=a\pm b\sqrt{-1}$, $=o$ wird, so wird sich X als ein Product $X_1(x^2-2ax+b^2+a^2)$ darstellen lassen, wo X_1 eine algebraische rationale ganze um 2 Grad niedrigere Function als X bedeutet. Wäre dieſs nicht der Fall, so müfste $X=X_1(x^2-2ax+a^2+b^2)+\alpha x+\beta$ sein. Da nun sowohl X als auch $x^2-2ax+a^2+b^2$, für $x=a\pm b\sqrt{-1}$, $=o$ wird, so mufs auch $\alpha x+b$ in diesem Falle oder $\alpha(a+b\sqrt{-1})+\beta=o$ und $\alpha(a-b\sqrt{-1})+\beta=o$ sein. Diese beiden Gleichungen von einander subtrahirt und zu einander addirt, erhält man $2\alpha\beta\sqrt{-1}=o$ und $2(a\alpha+\beta)=o$, woraus sowohl α als $\beta=o$ folgt.

Es ist demnach $x^{2r}-2x^r\,cos\varphi+1=(x^2-2x\,cos\frac{\varphi}{r}+1)$

$$\times(x^2-2x\,cos\frac{2\pi+\varphi}{r}+1)(x^2-2x\,cos\frac{4\pi+\varphi}{r}+1)\ldots(x^2-2x\,cos\frac{2(r-1)\pi+\varphi)}{r}.$$

Und wenn man $\pi-\varphi$ für φ substituirt,

$$(x^{2r}+2x^r\,cos\varphi+1)=(x^2-2x\,cos\frac{\pi-\varphi}{r}+1)(x^2-2x\,cos\frac{3\pi-\varphi}{r}+1)$$

$$\times(x^2-2x\,cos\frac{5\pi-\varphi}{r}+1)(x^2-2x\,cos\frac{7\pi-\varphi}{r}+1)\ldots(x^2-2x\,cos\frac{(2r-1)\pi-\varphi}{r}+1).$$

Substituirt man in diesen beiden Gleichungen $\frac{a}{b}$ für x, und multiplicirt alsdann durch b^{2r}, so erhält man die beiden Gleichungen (§. 83.)

Lagrange giebt in seinen *Leçons sur le Calcul des fonctions*, 8. Paris 1806, p. 144 einen sehr eleganten Beweis, welcher dem Scheine nach ohne Hülfe der unmöglichen Gröfsen auf folgende Weise geführt wird.

Weil $cos(r+1)\omega - 2\,cos\omega.cos(r\omega)+cos(r-1)\omega=o$, und zugleich

$$x^{r+1}+\frac{1}{x^{r+1}}-(x+\frac{1}{x})(x^r+\frac{1}{x^r})+x^{r-1}+\frac{1}{x^{r-1}}=o$$

so erhält man, wenn man $2\,cos\omega=x+\frac{1}{x}$ setzt, zugleich $2\,cos\,r\omega=x^r+\frac{1}{x^r}$.

Es finden demnach die beiden Gleichungen

$$x^2-2x\,cos\omega+1=o,\ x^{2r}-2x^r\,cos\,r\omega+1=o$$

zu gleicher Zeit statt, und müssen folglich eine gemeinschaftliche Wurzel haben.

Es sei nun α die gemeinschaftliche Wurzel dieser beiden Gleichungen. Weil sie dieselben bleiben, wenn man $\frac{1}{x}$ für x setzt, so folgt daraus, dafs $\frac{1}{\alpha}$ ebenfalls die gemeinschaftliche Wurzel dieser Gleichungen ist. Es kann aber die Gleichung $x^2-2x\,cos\omega+1=o$, weil sie vom zweiten Grade ist, nur zwei Wurzeln haben; diese müssen also α und $\frac{1}{\alpha}$ sein; woraus denn folgt, dafs $x^2-2x\,cos\omega+1$ ein Divisor des Ausdrucks $x^{2r}-2x^r\,cos\omega+1$, oder weil, wenn $r\omega=2\lambda\pi+\varphi$, $\omega=\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}$, und $cos\,r\omega=cos\varphi$, dafs $x^{2r}-2x\,cos\varphi+1$ den allgemeinen Ausdruck $x^2-2x\,cos\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}+1$ als Factor enthalten mufs, wie oben.

§. 115. Wenn a, b irgend zwei beliebige positive oder negative Zahlen bedeuten, so kann man $a=\varrho\,cos\varphi$, $b=\varrho\,sin\varphi$ setzen, so dafs ϱ eine positive Zahl $=\sqrt{a^2+b^2}$, und φ einen Kreisbogen innerhalb der Grenzen $+\pi$, $-\pi$ bedeutet, dessen Cosinus $=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und dessen Sinus $=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Weil nun (§. 39.) alle Kreisbogen, die um ein Vielfaches von 2π verschieden, und folglich unter sich congruent

sind, denselben Cosinus und Sinus haben, so ist auch $\frac{a}{\varrho} = cos(2\lambda\pi+\varphi)$, $\frac{b}{\varrho} = sin(2\lambda\pi+\varphi)$, wo für λ jede positive oder negative ganze Zahl auch o gesetzt werden kann. Diesemnach ist der allgemeine Ausdruck für jede unmögliche Gröfse

(A) $\quad a + b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2+b^2} \,.\, (cos\,(2\lambda\pi+\varphi) + \sqrt{-1}\,.\,sin\,(2\lambda\pi+\varphi))$.

Ist $b = o$, so wird $\varrho = \pm a$, $cos\,\varphi = \pm 1$, $sin\,\varphi = o$, also $\varphi = o$ oder π, je nachdem a positiv oder negativ ist. Folglich $a = \pm a\,.\,(cos\,\lambda\pi + \sqrt{-1}\,.\,sin\,\lambda\pi)$, wo λ irgend eine positive gerade oder ungerade Zahl sein kann, je nachdem a eine positive oder negative Zahl ist. Daraus erhält man $1 = cos\,2\lambda\pi + \sqrt{-1}\,.\,sin\,2\lambda\pi$ und $-1 = cos\,(2\lambda+1)\pi + \sqrt{-1}\,.\,sin\,(2\lambda+1)\pi$. Für λ kann in beiden Gleichungen jede beliebige ganze Zahl auch o genommen werden.

Wird $a = o$ angenommen, so ist $\varrho = \pm b$, $cos\,\varphi = o$, $sin\,\varphi = \frac{b}{\varrho} = \pm 1$, also $\varphi = +\frac{1}{2}\pi$ oder $= -\frac{1}{2}\pi$, je nachdem b positiv oder negativ ist. Daher $b\sqrt{-1} = \pm b\,.\,(cos\,(4\lambda \pm 1)\frac{\pi}{2} + i\,sin\,(4\lambda\pm 1)\frac{\pi}{2})$, und folglich $+\sqrt{-1} = cos\,(4\lambda+1)\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,.\,sin\,(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}$; $-\sqrt{-1} = cos\,(4\lambda-1)\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,.\,sin\,(4\lambda-1)\frac{\pi}{2}$.

§. 116. Mit Hülfe des Moivreschen Lehrsatzes ergiebt sich aus der Gleichung (A)

(B) $\quad (a + b\sqrt{-1})^x = \sqrt{a^2+b^2}^x \,.\, (cos\,x\,(2\lambda\pi+\varphi) + \sqrt{-1}\,.\,sin\,x\,(2\lambda\pi+\varphi))$.

Wenn x eine positive oder negative ganze Zahl ist, so übersieht man leicht, dafs das Glied rechter Hand dieser Gleichung nur einen Werth hat. Ist aber x eine gebrochene Zahl $= \frac{n}{r}$, deren Zähler und Nenner unter sich Primzahlen sind, so ist, wie man sich leicht überzeugen kann, die Menge aller in dem allgemeinen Ausdrucke enthaltenen unter sich geometrisch verschiedenen oder solcher Bogen, von denen keiner mit dem andern congruent ist, dem Nenner r des Bruches $\frac{n}{r}$ gleich. Daraus folgt zugleich, weil man eine irrationale Zahl, als einen Bruch betrachten kann,

dessen Nenner r unendlich ist, dafs die Menge der Werthe von $(a+b\sqrt{-1})^x$, wenn x irrational ist, unendlich sein mufs.

§. 117. Bezeichnet man mit Cauchy den Inbegriff aller Werthe von a^x, $(b\sqrt{-1})^x$ $(+1)^x$, $(-1)^x$, $(+\sqrt{-1})^x$, $(-\sqrt{-1})^x$, etc. durch $((a))^x$, $((b\sqrt{-1}))^x$, $((1))^x$, etc. und setzt $\sqrt{-1} = i$, so erhält man auf gleiche Weise

$((a))^x = a^x\,(cos\,x\,2\lambda\pi + i\,sin\,x\,2\lambda\pi)$ oder $= (-a)^x(cos\,x(2\lambda+1)\pi + i\,sin\,x(2\lambda+1)\pi)$ je nachdem a positiv oder negativ ist.

Eben so

$((b\sqrt{-1}))^x = b^x(cos\,x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2} + i\,sin\,x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2})$ oder $= (-b)^x(cos\,x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2} + i\,sin\,x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2})$

je nachdem b positiv oder negativ ist.

Auf gleiche Weise ergiebt sich auch

$((1))^x = cos\,x\,.\,2\lambda\pi + i\,sin\,x\,.\,2\lambda\pi$; $((-1))^x = cos\,x(2\lambda+1)\pi + i\,sin\,x(2\lambda\pi+1)\pi$

$(\sqrt{-1})^x = cos\,x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2} + i\,sin\,x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}$; $(-\sqrt{-1})^x = cos\,x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2} + i\,sin\,x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2}$.

Woraus zugleich folgt, dafs

$((a))^x = a^x\,((1))^x$ oder $= (-a)^x((-1))^x$ und $((b\sqrt{-1}))^x = b^x.((\sqrt{-1}))^x$ oder $= (-b)^x.((-\sqrt{-1}))^x$

je nachdem resp. a, b positiv oder negativ sind.

Es ist auch, wenn $\frac{b}{a}$ innerhalb der Grenzen $+1$, -1 und $(1+\frac{ib}{a})^x = L + Mi$, $((a+b\sqrt{-1}))^x = (\pm a)^x\,(L+M\sqrt{-1})\,((\pm 1))^x$, je nachdem a positiv oder negativ. Desgleichen, wenn $\frac{a}{b}$ innerhalb der Grenzen $+1$, -1 und $(1-\frac{ia}{b})^x = L - Mi$, $(a+b\sqrt{-1})^x = (\pm b)^x\,(L-M\sqrt{-1})\,((\pm i))^x$, je nachdem b positiv oder negativ.

§. 119. Weil (§. 109.) $cos\,s + \sqrt{-1}\,.\,sin\,s = e^{s\sqrt{-1}}$, und folglich $l(cos\,s + \sqrt{-1}\,.\,sin\,s) = s\sqrt{-1}$, so erhält man zufolge (§. 115.)

I. $l((a+b\sqrt{-1})) = \frac{1}{2}l(a^2+b^2) + (2\lambda\pi+\varphi)\sqrt{-1}$,

wo φ innerhalb der Grenzen $+\pi$, $-\pi$ und $= Arc.\ cos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = Arc.\ sin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

II. $l((a)) = la + 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ oder $= l(-a) + (2\lambda+1)\sqrt{-1}$

je nachdem a positiv oder negativ ist, und λ jede positive oder negative Zahl auch o sein kann. Für $\lambda = o$ wird, wenn a positiv ist, $l((a)) = la$. Es hat daher eine positive Zahl nur einen reellen aber unendlich viele unmögliche Werthe.

III. $l((b\sqrt{-1})) = lb + (4\lambda+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ oder $l((-b)) + (4\lambda-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$

je nachdem b positiv oder negativ ist.

Aus der letzten Gleichung III. folgt auch $l((\sqrt{-1})) = (4\lambda+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$. Daher $\sqrt{-1}.l\sqrt{-1} = -\frac{\pi}{2}$ und daraus die merkwürdige Formel $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

§. 120. Um jetzt einige Anwendungen von dem so eben Vorgetragenen zu machen, wollen wir zunächst die Wurzel der allgemeinen Gleichung (A)

$$x^r - rbx^{r-2} + \frac{r}{2}(r-3)b^2x^{r-4} - \frac{r}{2}(r-4)^{:2}_{c}b^3x^{r-6} + \text{etc.} = a$$

betrachten, diese ist $= u+v$, wo u, v aus den beiden Gleichungen $u^r + v^r = a$ und $uv = b$ bestimmt werden müssen, so dafs, weil $u^r v^r = b^r$, u^r, v^r, die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 - az + b^r = o$ sind. Man hat also

$$x = u + v = \sqrt[r]{\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^r}} + \sqrt[r]{\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^r}}.$$

Dafs übrigens $u+v$ die Wurzel der Gleichung K ist erhellt folgendermafsen: Weil, wie man leicht übersieht, wenn $u+v = x$ und $uv = b$,

$$u^{r+1} + v^{r+1} - x(u^r + v^r) + b(u^{r-1} + v^{r-1}) = o$$

so erhält man, wenn man nach und nach $r = 1, 2, 3,$ etc setzt,

$$\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= x^2 - 2b\\
u^3 + v^3 &= x^3 - 3bx\\
u^4 + v^4 &= x^4 - 4bx^2 + 2b^2\\
u^5 + v^5 &= x^5 - 5bx^3 + 5b^2x\\
u^6 + v^6 &= x^6 - 6bx^4 + 9b^2x^2 - 2b^3\\
u^7 + v^7 &= x^7 - 7bx^5 + 14b^2x^3 - 7b^3x
\end{aligned}$$

und allgemein

$$u^r + v^r = x^r - rbx^{r-2} + \frac{r}{2}(r-3)b^2x^{r-4} - \frac{r}{3}(r-4)^{:2}_{c}b^3x^{r-6} + \text{etc.}$$

Der Beweis von der Allgemeinheit dieses Satzes kann nach der Art, wie (§. 28.) gezeigt worden, geführt werden.

Ist b^r negativ oder, im Fall es positiv ist, $< \frac{1}{4}a^2$, so ist (§. 117.)

$$((u)) = ((\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^r})^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{(\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^r})}\,(cos\,\frac{2\lambda\pi}{r} + i\ sin\,\frac{2\lambda\pi}{r})$$

$$((v)) = ((\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^r})^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{(\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^r})}\,(cos\,\frac{2\mu\pi}{r} + i\ cos\,\frac{2\mu\pi}{r})$$

wo λ, μ alle Zahlen 0, 1, 2, $r-1$ bedeuten. Da nun $((u)).((v)) = b$ so ergiebt sich daraus, dafs

$(cos\,\frac{2\lambda\pi}{r} + i\ sin\,\frac{2\lambda\pi}{r})(cos\,\frac{2\mu\pi}{r} + i\ sin\,\frac{2\mu\pi}{r})$ also auch $cos\,\frac{2(\lambda+\mu)\pi}{r} + i\ sin\,\frac{2(\lambda+\mu)\pi}{r} = 1$

sein mufs. Dies geschieht aber, wenn $\frac{2(\lambda+\mu)\pi}{r} = o$, und folglich $\mu = -\lambda$ ist. Diesemnach erhält man alle r Wurzeln der Gleichung (A), wenn man in dem Ausdrucke

$(\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^r})^{\frac{1}{r}}\,(cos\,\frac{2\lambda\pi}{r} + i\ sin\,\frac{2\lambda\pi}{r}) + (\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^r})^{\frac{1}{r}}\,(cos\,\frac{2\lambda\pi}{r} - i\ sin\,\frac{2\lambda\pi}{r})$

nach und nach $\lambda = o,\ 1,\ 2,\ \ldots\ r-1$ setzt. Von diesen r Wurzeln ist, wie man leicht übersieht, für ein ungerades r nur eine reell, wenn $\lambda = o$. Hingegen sind für ein gerades r zwei Wurzeln reell, eine für $\lambda = o$, und die andere für $\lambda = \frac{r}{2}$.

Wenn b^r positiv und $> \frac{1}{4}a^2$, so ist (§. 116.)

$$((u)) = ((\tfrac{1}{2}a + i\sqrt{b^r - \tfrac{1}{4}a^2}))^{\frac{1}{r}} = b^{\frac{1}{2}}.(cos\,\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r} + i\,sin\,\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r})$$

$$((\varphi)) = ((\tfrac{1}{2}a - i\sqrt{b^r - \tfrac{1}{4}a^2}))^{\frac{1}{r}} = b^{\frac{1}{2}}.(cos\,\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r} - i\,sin\,\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}).$$

Folglich $((u)) + ((\varphi)) = 2\,b^{\frac{1}{2}}.cos\,\frac{2\lambda\pi+\varphi}{r}$. Es sind daher die r Wurzeln der Gleichung (A) alle reell und unter der allgemeinen Formel $2b^{\frac{1}{2}}.sin\,\frac{2\lambda+\varphi}{r}$ begriffen, wo λ alle Zahlen 0, 1, 2, ... $r-1$ und φ einen Bogen bedeutet, dessen Cosinus $= \frac{a}{2\,b^r}$ und dessen Sinus $= \frac{\sqrt{(b^r - \frac{1}{4}a^2)}}{b^r}$.

§. 121. Da sich jede kubische Gleichung, wie man leicht übersieht, immer auf die Formel $x^3 - 3bx - a = o$ zurückführen läfst, so hat dieselbe, wenn entweder b negativ, oder, wenn b positiv und $< \sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2}$, eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Diese sind, wenn man Kürze halber $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^3} = A$, $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^3} = B$ setzt

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},\quad \sqrt[3]{A}.(cos\,120^0 + i\,sin\,120^0) + \sqrt[3]{B}.(cos\,120^0 - i\,sin\,120^0),$$

$$\sqrt[3]{A}.(cos\,240^0 + i\,sin\,240^0) + \sqrt[3]{B}.(cos\,240^0 - i\,sin\,240^0).$$

Ist aber b positiv und $b^3 > \frac{a^2}{4}$, so sind alle drei Wurzeln reell, nämlich folgende:

$2\sqrt{b}.cos\,\frac{\varphi}{3}$, $2\sqrt{b}.cos\,(60^0 + \frac{\varphi}{3})$, $2\sqrt{b}\,cos\,(120^0 + \frac{\varphi}{3})$, wo $\varphi = Arc.\,cos\,\frac{a}{2\,b^3}$.

§. 122. Wir haben oben (§. 110.) gesehen, dafs $cos\,xs + i\,sin\,xs = \xi^x\,(P_0 + i\,P_1)$ wo $P_0 = 1 - x_c^{:2}\theta^2 + x_c^{:4}\theta^4 - \text{etc.}$, $P_1 = x\theta - x_c^{:3}\theta^3 + x_c^{:5}\theta^5 + \text{etc.}$ $\xi = cos\,s$, $\eta = sin\,s$, $\theta = \frac{\eta}{\xi} = tan\,s$ ist; x irgend eine beliebige rationale oder irrationale Zahl, und s einen Kreisbogen innerhalb der Grenzen $+\frac{1}{4}\pi$ und $-\frac{1}{4}\pi$ bedeutet, so dafs ξ positiv und $\theta^2 < 1$. Ist x eine ganze Zahl, so hat jedes der beiden Glieder der Gleichung

$$cos\,xs + i\,sin\,xs = \xi^x\,(P_0 + i\,P_1)$$

für ein gegebenes ξ und θ nur einen Werth. Ist aber $x = \frac{n}{r}$ ein irreductibler Bruch, so haben die beiden Glieder, weil $s = Arc.\,tan.\theta$ und $= Arc.\,cos.\xi$, r verschiedene Werthe, deren Zahl unendlich wird, wenn x eine irrationale Zahl ist. Es ist nämlich (§. 117.)

$$((\xi + i\eta))^x = (\pm\xi)^x\,(1 + i\theta)^x\,((\pm 1))^x = (\pm\xi)^x\,(P_0 + iP_1)\,((\pm 1))^x$$

$$= (\pm\xi)^x\,(cos\,x\lambda\pi + i\,sin\,x\lambda\pi)\,(P_0 + iP_1) = cos\,x\,(\lambda\pi + s) + i\,sin\,x\,(\lambda\pi + s).$$

Daraus erhält man

$$(\pm\xi)^x\,(cos\,x\lambda\pi - i\,sin\,x\lambda\pi)\,(P_0 - iP_1) = cos\,x\,(\lambda\pi + s) - i\,sin\,x\,(\lambda\pi + s).$$

Aus diesen beiden Gleichungen aber ergiebt sich

$$(C)\qquad cos\,x\,(\lambda\pi + s) = (\pm\xi)^x.(cos\,x\lambda\pi\,.\,P_0 - sin\,x\lambda\pi\,P_1)$$

$$sin\,x\,(\lambda\pi + s) = (\pm\xi)^x.(sin\,x\lambda\pi\,.\,P_0 + cos\,x\lambda\pi\,P_1)$$

wo $P_0 = 1 - x_c^{:2}\,tan^2(\lambda\pi + s) + x_c^{:4}\,tan^4(\lambda\pi + s) - x_c^{:6}\,tan^6(\lambda\pi + s) - \text{etc.}$

$P_1 = x\,tan\,(\lambda\pi + s) - x_c^{:3}\,tan^3(\lambda\pi + s) + x_c^{:5}\,tan^5(\lambda\pi + s) + x_c^{:7}\,tan^7(\lambda\pi + s) - \text{etc.}$

Die beiden Gleichungen (C) gelten also allgemein für alle unter der Form $\lambda\pi + s$ enthaltenen Bogen, wo s zwischen $+\pi$, $-\pi$, $tan\,s$ zwischen $+1$, -1 liegt, und λ eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet, je nachdem ξ positiv oder negativ ist.

§. 123. Liegt der Werth von s zwischen $+\pi$ und $-\pi$, θ aber aufserhalb der Grenzen $+1$ und -1, so sind die Ausdrücke P_0, P_1 divergirende Reihen und haben keinen reellen Werth. Nun ist aber auch, wenn $\frac{\xi}{\eta} = \theta'$ und innerhalb $+1$ und -1 liegt,

$$(\xi + i\eta)^x = (i\eta)^x.(1 - i\theta')^x = (i\eta)^x\,(P_0' - iP_1'),\ \text{wo}$$

$$P_0' = 1 - x_c^{:2}\theta'^2 + x_c^{:4}\theta'^4 - \text{etc.},\ P_1' = x\theta' - x_c^{:3}\theta'^3 + x_c^{:5}\theta'^5 - \text{etc.}$$

Daraus ergiebt sich (§. 117.)

$$((\xi + i\eta))^x = ((i\eta))^x.(P_0' - iP_1') = (\pm\eta)^x\,(P_0' - iP_1')\,((\pm i))^x$$

$$= (\pm\eta)^x\,(cos\,x(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2} + i\,sin\,x(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2})\,(P_0' - iP_1') = cos\,x(\lambda\pi + s) + i\,sin\,x(\lambda\pi + s).$$

Eben so erhält man

$$((\xi - i\eta))^x = ((-i\eta))^x\ (1 + i\theta)^x = (\pm\eta)^x\ (P_0' + iP_1')\ ((\mp i))$$

$$= (\pm\eta)^x (cos\, x(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2} - i\, sin\, x(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2})\ (P_0' + iP_1') = cos\, x(\lambda\pi + s) - i\, sin\, x(\lambda\pi + s).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun

(D)
$$cos\, x\,(\lambda\pi + s) = (\pm\eta)^x (cos\, x\,(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2} \cdot P_0' + sin\, x\,(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2} \cdot P_1')$$
$$sin\, x\,(\lambda\pi + s) = (\pm\eta)^x (sin\, x\,(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2} \cdot P_0' - cos\, x\,(2\lambda \pm 1)\tfrac{\pi}{2} \cdot P_1')$$

wo λ gerade oder ungerade ist, und das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem η positiv oder negativ ist.

Die Gleichungen (D) sowohl als (C) sind bereits (§. 57, 58.) ohne Hülfe der unmöglichen Gröfsen bewiesen worden.

§. 124. Die in (§. 111.) gefundene Gleichung

$$cos\, xs + i\, sin\, xs = (\Upsilon\overline{1-\eta^2} + i\eta)^x = Q_0 + iQ_1$$

wo $Q_0 = 1 - \frac{x}{2}\, x\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\eta^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\eta^6 + \frac{x}{8}(x+6)_c^{7/2}\eta^8 + \text{etc.}$

$$Q_1 = x\eta - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2,2}\eta^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\eta^5 - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\eta^7 - \frac{x}{9}(x+7)_c^{8/2}\eta^9 + \text{etc.}$$

gilt nur für Bogen $s < \frac{1}{2}\pi$, wie man sich durch die (§. 62.) gemachte Bemerkung überzeugen kann. Es läfst sich dieselbe aber auch allgemeiner machen, so dafs sie für alle Werthe von s, deren Sinus $= \eta$, gilt.

Es ist nämlich, weil für irgend einen Werth von η die Radical-Gröfse $\Upsilon(1-\eta^2)$ positiv oder negativ ist, je nachdem $cos\, s$ positiv oder negativ ist,

$$((\Upsilon 1 - \eta^2 + i\eta))^x = ((\pm 1))^x\ (\Upsilon(1-\eta^2) \pm i\eta)^x = (cos\, x\lambda\pi + i\, sin\, x\lambda\pi)\,(Q_0 \pm iQ_1).$$

Demnach

$$cos\, x\,(\lambda\pi + s) + i\, sin\, x\,(\lambda\pi + s) = (cos\, x\lambda\pi + i\, sin\, x\lambda\pi)\ (Q_0 \pm iQ_1)$$
$$cos\, x\,(\lambda\pi + s) - i\, sin\, x\,(\lambda\pi + s) = (cos\, x\lambda\pi - i\, sin\, x\lambda\pi)\ (Q_0 \mp iQ_1).$$

Daraus erhält man:

$$cos\, x\,(\lambda\pi + s) = cos\, x\lambda\pi \cdot Q_0 \mp sin\, x\lambda\pi \cdot Q_1$$
$$sin\, x\,(\lambda\pi + s) = sin\, x\lambda\pi \cdot Q_0 \pm cos\, x\lambda\pi \cdot Q_1$$

wo s zwischen $+\pi$ und $-\pi$ liegt, und λ gerade oder ungerade ist, und das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem $\Upsilon(1-\eta^2)$ positiv oder negativ ist.

§. 125. Zufolge des Moivreschen Theorems ist, wenn $\xi = cos\, s$ also $\Upsilon(1-\xi^2) = sin\, s$,

$$cos\, xs + i\, sin\, xs = (\xi + i\Upsilon\overline{1-\xi^2})^x = (i)^x \cdot (\Upsilon\overline{1-\xi^2} - i\xi)^x = (i)^x\ (S^0 - iS_1)$$

wo $S_0 = 1 - \frac{x}{2}\, x \cdot \xi^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\xi^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\xi^6 + \frac{x}{8}(x+6)_c^{7/2}\xi^8 + \text{etc.}$

$$S_1 = x\xi - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\xi^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\xi^5 - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\xi^7 + \frac{x}{9}(x+7)_c^{8/2}\xi^9 + \text{etc.}$$

Nun ist aber der Inbegriff aller Werthe von $cos\, xs \pm i\, sin\, xs$, oder

$$((cos\, xs \pm i\, sin\, xs)) = cos\, x\,(2\lambda\pi + s) \pm i\, sin\, x\,(2\lambda\pi + s),$$

wo λ jede beliebige ganze Zahl bedeutet.

Eben so hat man (§. 117.) $((\xi + i\Upsilon(1-\xi^2))^x$

$$= ((i))^x \cdot (S^0 - iS_1) = (cos\, x\,(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2} + i\, sin\, x\,(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2})\,(S_0 - iS_1).$$

Demnach

$$cos\, x\,(2\lambda\pi + s) + i\, sin\, x\,(2\lambda\pi + s) = (cos\, x\,(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2} + i\, sin\, x(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2})\,(S_0 - iS_1)$$

und $-i$ für i gesetzt,

$$cos\, x\,(2\lambda\pi + s) - i\, sin\, x\,(2\lambda\pi + s) = cos\, x\,(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2} - i\, sin\, x(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2})\,(S_0 + iS_1).$$

Daraus ergiebt sich

(E)
$$Cos\, x\,(2\lambda\pi + s) = cos\, x\,(4\lambda\pi+1)\tfrac{\pi}{2} \cdot S_0 + sin\, x\,(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2} \cdot S_1$$
$$Sin\, x\,(2\lambda\pi + s) = sin\, x\,(4\lambda\pi+1)\tfrac{\pi}{2} \cdot S_0 - cos\, x\,(4\lambda+1)\tfrac{\pi}{2} \cdot S_1$$

wo $S_0 = 1 - \frac{x}{2}\, x \cdot cos^2(2\lambda\pi + s) + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2} cos^4(2\lambda\pi+s) - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2} cos(2\lambda\pi+s) + \text{etc.}$

$$S_1 = x\, cos\,(2\lambda\pi+s) - x_c^{:3}\ cos^3(2\lambda\pi+s) + x_c^{:4}\ cos^5(2\lambda\pi+s) - \text{etc.}$$

und s einen Bogen innerhalb der Grenzen $+\pi$, $-\pi$ bedeutet.

§. 126. Die (§. 105.) durch Induction gefundene Reihe für die Potenzen der Cosinusse läfst sich mit Hülfe der imaginären Gröfsen bequemer auf folgende Weise finden:

Weil (§. 109.) $2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$, oder wenn $e^{i\varphi} = x$, $e^{-i\varphi} = x^{-1}$, so ist

$$(2\cos\varphi)^r = (x+\tfrac{1}{x})^r = x^r + rx^{r-2} + r_c^{:2}\, x^{r-4} \ldots + r_c^{:r-2}\, x^{4-r} + r_c^{:r-1}\, x^{2-r} + x^{-r}$$

oder auch $= x^{-r} + r\,x^{2-r} + r_c^{:2}\, x^{4-r} \ldots\ldots r_c^{:r-2}\, x^{r-4} + r_c^{:r-2}\, x^{r-2} + x^r$

Daraus ergiebt sich, weil $x^r + x^{-r} = 2\cos r\varphi$, $x^{r-2} + x^{2-r} = 2\cos(r-2)\varphi$, etc.

$$(2\cos\varphi)^r = \cos r\varphi + r\cos(r-2)\varphi + r_c^{:2}\cos(r-4)\varphi + r_c^{:3}\cos(r-6)\varphi + \text{etc.}$$

Man könnte vermuthen, dafs diese Gleichung allgemein für jeden beliebigen Exponenten gelten müfste. Diefs ist jedoch nicht der Fall, wie man sich leicht überzeugt, wenn man $r = \frac{1}{3}$, und $\omega = \pi$ setzt. Alsdann ist nämlich

$$(2\cos\omega)^{\frac{1}{3}} = (2\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}$$

und das andere Glied der Gleichung wird

$$\cos\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{1}{3}\pi - 2\pi) + (\tfrac{1}{2})_c^{:2}\cos(\tfrac{1}{3}\pi - 4\pi) + \text{etc.}$$

$$= \cos\tfrac{1}{3}\pi.(1 + \tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{3})_c^{:2} + (\tfrac{1}{3})_c^{:3} + \text{etc.}) = \tfrac{1}{2}(1+1)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}.$$

§. 127. Wenn der Ausdruck für die Summe einer unendlichen Reihe

$$k + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + k_4 x^4 + \text{etc} = fx$$

von der Beschaffenheit ist, dafs $\varrho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ für x substituirt, fx sich in $L + M\sqrt{-1}$ verwandelt, so erhält man, wie sich leicht übersehen läfst,

$$k + k_1\varrho\cos\varphi + k_2\varrho^2\cos 2\varphi + k_3\varrho^3\cos 3\varphi + k_4\varrho^4\cos 4\varphi + \text{etc.} = L$$
$$k + k_1\varrho\sin\varphi + k_2\varrho^2\sin 2\varphi + k_3\varrho^3\sin 3\varphi + k_4\varrho^4\sin 4\varphi + \text{etc.} = M.$$

§. 128. Exempel I. Es seien die Coefficienten k, k_1, k_2, etc. alle $= 1$, so ist

$$fx = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-\varrho\cos\varphi - \sqrt{-1}.\varrho\sin\varphi} = \frac{1-\varrho\cos\varphi + \sqrt{-1}.\varrho\sin\varphi}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}.$$

Demnach

$$L = \frac{1-\varrho\cos\varphi}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2},\quad M = \frac{\varrho\sin\varphi}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}$$

und folglich

$$1 + \varrho\cos\varphi + \varrho^2\cos 2\varphi + \varrho^3\cos 3\varphi + \varrho^4\cos 4\varphi + \text{etc.} = \frac{1-\varrho\cos\varphi}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}$$

(F)

$$\varrho\sin\varphi + \varrho^2\sin 2\varphi + \varrho^3\sin 3\varphi + \varrho^4\sin 4\varphi + \text{etc.} = \frac{\varrho\sin\varphi}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}.$$

§. 129. Exempel II. Es sei $k = o$, $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = \frac{1}{3}$ etc., so ist (§. 7.)

$$fx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.} = -\,log\,nat\,(1-x).$$

Es ist aber $1 - x = 1 - \varrho\cos\varphi - i\varrho\sin\varphi$

$$= (\S.\,115.)\ (1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}\,(\cos Arc.\,tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi} - i\,\sin Arc.\,tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi})$$

$$= (1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}.e^{-i\,Arc.\,tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}},\ \text{und folglich}$$

$$-\,l(1-x) = -\,\tfrac{1}{2}\,l(1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2) + i\,Arc.\,tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}$$

Daraus ergiebt sich

$$L = -\,\tfrac{1}{2}\,l(1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2),\quad M = Arc.\,tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}$$

und folglich

$$\varrho\cos\varphi + \frac{\varrho^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{\varrho^3}{3}\cos 3\varphi + \frac{\varrho^4}{4}\cos 4\varphi + \text{etc.} = -\,\tfrac{1}{2}\,l(1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2)$$

(G)

$$\varrho\sin\varphi + \frac{\varrho^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{\varrho^3}{3}\sin 3\varphi + \frac{\varrho^4}{4}\sin 4\varphi + \text{etc.} = Arc.\,tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}.$$

Weil

$$\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi} = \frac{2\varrho\cos\frac{1}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi + \sin^2\frac{1}{2}\varphi - \varrho(\cos^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi)} = \frac{2\varrho\cos\frac{1}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi}{(1-\varrho)\cos^2\frac{1}{2}\varphi + (1+\varrho)\sin^2\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{2\varrho\,tan\frac{1}{2}\varphi}{1-\varrho+(1+\varrho)\,tan^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{(1+\varrho)\,tan\frac{1}{2}\varphi - (1-\varrho)\,tan\frac{1}{2}\varphi}{1-\varrho+(1+\varrho)\,tan^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,tan\frac{1}{2}\varphi - tan\frac{1}{2}\varphi}{1 + \frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,tan^2\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{tan\,\omega - tan\frac{1}{2}\varphi}{1 + tan\,\omega\,tan\frac{1}{2}\varphi} = tan(\omega - \tfrac{1}{2}\varphi),\ \text{wo}\ \omega = Arc.\,tan.\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,tan\,\varphi,$$

so ist $Arc.\,tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi} = \omega - \frac{1}{2}\varphi = Arc.\,tan.\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,tan\,\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\varphi.$

Diesemnach verwandelt sich die zweite der Gleichung in

(H) $\frac{1}{2}\varphi + \varrho \sin\varphi + \frac{\varrho^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{\varrho^3}{3}\sin 3\varphi + \text{etc.} = Arc.\ tan.\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\tan\frac{1}{2}\varphi$

§. 130. Exempel III. Aus der Gleichung (§. 5.)

$$fx = 1 + x + x_c^2 + x_c^3 + x_c^4 + x_c^5 + \text{etc.} = e^x$$

ergiebt sich, wenn man $x = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt, $fx = e^{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

$$= e^{\varrho\cos\varphi}.e^{i\varrho\sin\varphi} = e^{\varrho\cos\varphi}.(\cos(\varrho\sin\varphi) + i\sin(\varrho\sin\varphi))$$

Daher $L = e^{\varrho\cos\varphi}.\cos(\varrho\sin\varphi)$, $M = e^{\varrho\cos\varphi}.\sin(\varrho\sin\varphi)$,

und folglich

$$1 + \varrho\cos\varphi + \varrho_c^2\cos 2\varphi + \varrho_c^3\cos 3\varphi + \text{etc.} = e^{\varrho\cos\varphi}\cos(\varrho\sin\varphi)$$

(I)

$$\varrho\sin\varphi + \varrho_c^2\sin 2\varphi + \varrho_c^3\cos 3\varphi + \varrho_c^4\cos 4\varphi + \text{etc.} = e^{\varrho\cos\varphi}\sin(\varrho\sin\varphi)$$

§. 131. Exempel IV. Es sei $fx = 1 + \mu x + \mu_c^{:2}x_c^2 + \mu_c^{:3}x^3 + \text{etc.} = (1+x)^\mu$

so wird, $x = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt, $fx = (1 + \varrho\cos\varphi + i\varrho\sin\varphi)^\mu$

$$= (1 + 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}.(\cos Arc.\ tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi} + i\sin Arc.\ tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi})^\mu$$

$$= (1 + 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}\left\{\cos(\mu\, Arc.\ tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}) + i\sin(\mu\, Arc.\ tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi})\right\}.$$

Daher

$$L = (1 + 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}.\cos(\mu\ Arc.\ tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi})$$

$$M = (1 + 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}.\sin(\mu\ Arc.\ tan.\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi})$$

und folglich

$$1 + \mu\varrho\cos\varphi + \mu_c^{:2}\varrho^2\cos 2\varphi + \mu_c^{:3}\varrho^3\cos 3\varphi + \mu_c^{:4}\varrho^4\cos 4\varphi + \text{etc.} = L$$

(K)

$$\mu\varrho\sin\varphi + \mu_c^{:2}\varrho^2\cos 2\varphi + \mu_c^{:3}\varrho^3\cos 3\varphi + \mu_c^{:4}\varrho^4\cos 4\varphi + \text{etc.} = M$$

§. 132. Der Moivresche Satz ist auch von besondern Nutzen beim Beweise des Lehrsatzes, dafs für jede algebraische rationale ganze Function

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} \ldots + A_n = \varphi x$$

ein unter der Form $a + b\sqrt{-1}$ enthaltener Werth gefunden werden kann, der für x substituirt, $\varphi x = o$ macht. Der hier folgende Beweis stimmt im Wesentlichen mit dem von Cauchy in seinem *Cours d'Analyse* P. 1, p. 331 gegebenen überein.

§. 133. Substituirt man in der durch φx bezeichneten Reihe $x + \xi$ für x, und setzt

$$n x^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + (n-2)A_2 x^{n-3} + (n-3)A_3 x^{n-4} \ldots + A_{n-1} = \varphi' x$$

$$n_c^{:2} x^{n-2} + (n-1)_c^{:2} A_1 x^{n-3} + (n-2)_c^{:2} A_2 x^{n-4} \ldots\ldots\ldots + A_{n-2} = \varphi'' x$$

$$n_c^{:3} x^{n-3} + (n-1)_c^{:3} A_1 x^{n-4} + (n-2)_c^{:3} A_3 x^{n-5} \ldots\ldots\ldots + A_{n-3} = \varphi''' x$$

etc. etc. etc.

so erhält man: $\varphi(x+\xi) = \varphi x + \varphi' x.\xi + \varphi'' x.\xi^2 + \varphi''' x\xi^3 \ldots. + \xi^n$.

Daraus ergiebt sich

$$\varphi(a + b\sqrt{-1}) = \varphi a + ib\varphi' a + i^2 b^2 \varphi'' a + i^3 b^3 \varphi''' a + i^4 b^4 \varphi^{IV} a \ldots\ldots + i^n b^n$$

$$= \varphi a - b^2\varphi'' a + b^4\varphi^{IV} a - \text{etc.} + \sqrt{-1}.(b\varphi' a - b^3\varphi''' a + b^5\varphi^{V} a - \text{etc.})$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck Kürze halber durch $L + M\sqrt{-1}$, so wird, wie leicht zu übersehen $\varphi(a - b\sqrt{-1}) = L - M\sqrt{-1}$. Ist nun $\varphi(a + b\sqrt{-1})$ oder $L + M\sqrt{-1} = o$, so mufs auch $(L + M\sqrt{-1})(L - M\sqrt{-1})$, oder $L^2 + M^2 = o$ sein, und umgekehrt, wenn $L^2 + M^2 = o$, so mufs sowohl L als M, und folglich $L + M\sqrt{-1}$, und $L - M\sqrt{-1} = o$ sein.

§. 134. Substituirt man, in $\varphi(x+\xi)$, $a + b\sqrt{-1}$ für x und $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ für ξ, so erhält man, wenn man die Werthe von φx, $\varphi' x$, $\varphi'' x$, etc., $a + b\sqrt{-1}$ für x gesetzt, respective durch $L + M\sqrt{-1}$, $L_1 + M_1\sqrt{-1}$, $L_2 + M_2\sqrt{-1}$, etc. bezeichnet, und diese Ausdrücke nach (§. 115.) in $R(\cos t + i\sin t)$, $R_1(\cos t_1 + i\sin t_1)$, $R(\cos t_2 + i\sin t_2)$, etc., und eben so $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ in $\varrho(\cos\omega + i\sin\omega)$ verwandelt

$\varphi(a + \alpha + (b+\beta)\sqrt{-1}) = R(\cos t + i\sin t) + R_1\varrho(\cos t_1 + i\sin t_1)(\cos\omega + i\sin\omega)$

$+ R_2\varrho^2.(\cos t_2 + i\sin t_2)(\cos 2\omega + i\sin 2\omega) + R_3\varrho^3(\cos t_3 + i\sin t_3)(\cos 3\omega + i\sin 3\omega) + \text{etc.}$

$= R\cos t + R_1\varrho\cos(t_1 + \omega) + R_2\varrho^2\cos(t_2 + 2\omega) \ldots\ldots + R_n\varrho^n\cos(t_n + \omega)$

$+ i(R\sin t + R_1\varrho\sin(t_1 + \omega) + R_2\varrho^2\cos(t_2 + 2\omega) \ldots\ldots + R_n\varrho^n\cos(t_n + \omega))$.

So wie sich $\varphi(a+b\sqrt{-1})$ auf die Formel $L+M\sqrt{-1}$, und diese wieder auf $R(\cos t+i\sin t)$ zurückführen läfst, so kann man auch $\varphi(a+\alpha+(b+\beta)\sqrt{-1})$ durch $L'+M'\sqrt{-1}$, und diesen Ausdruck wieder durch $R'(\cos t'+i\sin t')$ darstellen. Setzt man nun

$$R_1\cos(t_1+\omega)+R_2\varrho\cos(t_2+2\omega)+R_3\varrho^2\cos(t_3+3\omega)\ldots+R_n\varrho^{n-1}\cos(t_n+n\omega)=U$$
$$R_1\sin(t_1+\omega)+R_2\varrho\sin(t_2+2\omega)+R_3\varrho^2\sin(t_3+3\omega)\ldots+R_n\varrho^{n-1}\sin(t_n+n\omega)=V$$

so erhält man: $R'\cos t'=R\cos t+\varrho U$; $R'\sin t'=R\sin t+\varrho V$,

und daraus $R'^2=R^2+2R\varrho(U\cos t+V\sin t)+\varrho^2(U^2+V^2)$.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs ϱ und ω immer so bestimmt werden können, dafs, wenn R nicht $=o$, der Unterschied R'^2-R^2 negativ werden mufs.

Setzt man nämlich $t_1-t=\theta_1$, $t_2-t=\theta_2$, $t_3-t=\theta_3$, etc., so wird, wie man sich leicht überzeugt,

$$U\cos t+V\sin t=R_1\cos(\theta_1+\omega)+R_2\varrho\cos(\theta_2+2\omega)\ldots+R_n\varrho^{n-1}\cos(\theta_n+n\omega)$$

Betrachtet man die Glieder dieser Reihe absolute, so übersieht man leicht, dafs ϱ so klein angenommen werden kann, dafs jedes Glied derselben gröfser wird als die Summe aller folgenden Glieder. Ist daher R_1 nicht $=o$, und wird ω so angenommen, dafs $\cos(\theta_1+\omega)$ negativ ist, so wird $U\cos t+V\sin t$ einen negativen Werth haben. Diefs wird noch der Fall sein, wenn $R_1=o$, aber nicht $R_2=o$, oder wenn $R_1=o$, $R_2=o$, aber nicht $R_3=o$, weil $R_n=1$. Da nun aber auch ϱ so klein angenommen werden kann, dafs $\varrho^2(U^2+V^2)<2R\varrho(U\cos t+V\sin t)$, so folgt daraus, dafs überhaupt für jeden Werth R, aufser, wenn $R=o$, ϱ und ω und folglich auch α, β so bestimmt werden können, dafs der Unterschied R'^2-R^2 negativ oder $R^2>R'^2$ werden mufs. Gäbe es nun keinen Werth $a+b\sqrt{-1}$, der für x substituirt $\varphi x=o$ oder $L+M\sqrt{-1}$, und folglich auch L^2+M^2 oder $R^2=o$ machte, so müfste es unter allen möglichen Werthen von R^2 einen kleinsten geben, der nicht $=o$ wäre, was aber, wie wir oben gesehen, nicht möglich ist.

Dritte Vorlesung.

Über ebene und sphärische Trigonometrie.

§. 1. Die Trigonometrie ist diejenige Wissenschaft, welche aus drei zur Bestimmung eines Dreiecks nöthigen Theilen, die übrigen durch Rechnung finden lehrt. Unter den drei Theilen eines ebenen Dreiecks, welche dasselbe bestimmen, mufs wenigstens eine Seite vorkommen, weil durch drei Winkel allein nur die Form eines Dreiecks, aber nicht seine Dimension gegeben ist. Zur Bestimmung eines sphärischen Dreiecks hingegen, welches auf einer Kugel durch die drei Bogen gröfster Kreise gebildet wird, sind von den drei vorkommenden Winkeln und Seiten jede beliebige drei Theile hinlänglich.

§. 2. Um die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln der Dreiecke auf eine einfache Art darzustellen, bedient man sich der sogenannten trigonometrischen Gröfsen, Sinus, Cosinus, Tangente etc. deren Eigenschaften bereits in der 2ten Vorlesung nebst den vorzüglichsten Formeln umständlich abgehandelt worden sind, weshalb wir unsere Lesern das über diesen Gegenstand dort (§. 35 ... 50.) Vorgetragene hier einzuschalten ersuchen müssen. Man kann zu den oben gegebenen Formeln noch folgende beide hinzufügen, die in mehreren Fällen von Nutzen sein können.

$$\text{(K)}\quad \begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2}x &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos \tfrac{1}{2}x &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}. \end{aligned}$$

Von der Richtigkeit derselben überzeugt man sich leicht, indem man die beiden Ausdrücken für $\sin \frac{1}{2}x$, $\cos \frac{1}{2}x$ zum Quadrat erhebt.

Es ist nämlich

$$\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}\right\}^2 = \tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin^2 x)} = \frac{1 \mp \cos x}{2} = \sin^2 \tfrac{1}{2}x$$

oder $\cos^2 \frac{1}{2}x$, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt.

§. 3. Mit Hülfe der Formeln (p. 123 etc.) lassen sich nun leicht die Sinusse und Cosinusse aller Vielfachen des Bogens von 3° bis 90° bestimmen.

Es ist nämlich für den Halbmesser $= 1$, *Chorde* $60^\circ = 1$, also $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Daraus: $\cos 30^\circ$ oder $\sin 60^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Weil $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ und $\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1$, so erhält man $\cos 45^\circ$ oder $\sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

§. 4. Aufser diesen so eben gefundenen Sinussen läfst sich auch noch ein bequemer Ausdruck für $\sin 18^\circ$ finden.

Es sei nämlich der Mittelpunct eines regelmäfsigen Zehnecks C, eine der Seiten AB, so ist der Winkel $ACB = 36^\circ$, folglich $CAB = CBA = 72^\circ$. Halbirt man nun den Winkel CAB durch AD, so wird CAD ein gleichschenklichtes Dreieck, also $AD = DC$ und Winkel $ADC = 108^\circ$, also $ADB = 72^\circ = ABD$ sein. Es ist demnach das Dreieck ADB dem Dreiecke ACB ähnlich, und folglich $\overline{CA} : \overline{AB} = \overline{AD} : \overline{BD}$. Ist nun $CA = 1$, und bezeichnet man AB durch $2x$, so ist $x = \sin 18^\circ$, und man hat, $1 : 2x = 2x : (1 - 2x)$. Daraus $4x^2 + 2x - 1 = 0$, und folglich $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Da nun $\sin 18^\circ$ positiv ist, so erhält man $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Daraus ergiebt sich $\cos 18^\circ$ oder $\sin 72^\circ = \sqrt{(1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16})} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$.

Zugleich ergiebt sich auch $\sin 54^\circ$ oder $\cos 36^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ$

$= \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ und daraus wieder $\sin 36^\circ = \sqrt{(1 - \cos^2 36^\circ)}$

$= \sqrt{(1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16})} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$.

§. 5. Vermittelst der Formeln (K) findet man ferner:

$$\left.\begin{matrix}\mathit{Sin}\ 15^\circ \\ \mathit{Sin}\ 75^\circ\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 30^\circ)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin 30^\circ)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathit{Sin}\ 9^\circ \\ \mathit{Sin}\ 81^\circ\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 18^\circ)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin 18^\circ)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathit{Sin}\ 27^\circ \\ \mathit{Sin}\ 63^\circ\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 54^\circ)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin 54^\circ)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

Die obigen Werthe lassen sich noch vereinfachen, weil

$$\sqrt{(3+\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und } \sqrt{(3-\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Zugleich ist zu bemerken, dafs $1 + 4\sin^2 18^\circ = 1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{4} = 4\sin^2 36^\circ$ weil aber $2 \sin 18^\circ$ die Seite eines Zehnecks, $2 \sin 36^\circ$ die Seite eines Fünfecks, den Radius $= 1$ angenommen, so ergiebt sich daraus der Lehrsatz. Die Summe des Quadrats des Halbmessers und des Quadrats der Seite des Zehnecks, ist gleich dem Quadrate der Seite des Fünfecks.

§. 6. Weil $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, so ist (L)

$$\sin(30^\circ \pm x) = \tfrac{1}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x;\quad \cos(30^\circ \pm x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \mp \tfrac{1}{2}\sin x.$$

Mit Hülfe dieser beiden Formeln und der Ausdrücke für $\sin 9^\circ$, $\cos 9^\circ$ etc. erhält man:

$$\left.\begin{matrix}\sin 39^\circ \\ \sin 21^\circ\end{matrix}\right\} = \sin(30^\circ \pm 9^\circ) = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1 \mp \sqrt{3}}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\left.\begin{matrix}\sin 51^\circ \\ \sin 69^\circ\end{matrix}\right\} = \cos(30^\circ \pm 9^\circ) = \frac{\sqrt{3} \mp 1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{3} \pm 1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\left.\begin{matrix} sin\ 48^\circ \\ sin\ 12^\circ \end{matrix}\right\} = sin(30^\circ \pm 18^\circ) = \tfrac{1}{8}\sqrt{}(10 + 2\sqrt{}5) \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{}(15 - \sqrt{}3)$$

$$\left.\begin{matrix} sin\ 42^\circ \\ sin\ 78^\circ \end{matrix}\right\} = cos(30^\circ \pm 18^\circ) = \tfrac{1}{8}\sqrt{}(30 + 6\sqrt{}5) \mp \tfrac{1}{8}(\sqrt{}5 - 1)$$

$$\left.\begin{matrix} sin\ 57^\circ \\ sin\ 3^\circ \end{matrix}\right\} = sin(30^\circ \pm 27^\circ) = \frac{1 \pm \sqrt{}3}{8}\sqrt{}(5 + \sqrt{}5) + \frac{1 \mp \sqrt{}3}{8}\sqrt{}(3 - \sqrt{}5)$$

$$\left.\begin{matrix} sin\ 33^\circ \\ sin\ 87^\circ \end{matrix}\right\} = cos(30^\circ \pm 27^\circ) = \frac{\sqrt{}3 \mp 1}{8}\sqrt{}(5 + \sqrt{}5) + \frac{\sqrt{}3 \pm 1}{8}\sqrt{}(3 - \sqrt{}5)$$

$$\left.\begin{matrix} sin\ 66^\circ \\ sin\ 6^\circ \end{matrix}\right\} = sin(36^\circ \pm 30^\circ) = \tfrac{1}{8}\sqrt{}(30 - 6\sqrt{}5) \pm \tfrac{1}{8}(\sqrt{}5 + 1)$$

$$\left.\begin{matrix} sin\ 84^\circ \\ sin\ 24^\circ \end{matrix}\right\} = sin(54^\circ \pm 30^\circ) = \tfrac{1}{8}(\sqrt{}15 + \sqrt{}3) \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{}(10 - 2\sqrt{}5).$$

§. 7. Diese Ausdrücke können, wenn sie nicht zu verwickelt sind, zur Berechnung der Fundamentalwerthe der Sinusse und Cosinusse dienen, zu deren wirklicher Berechnung die (p. 129.) mitgetheilten Reihen (A)

$$cos\, x\,(\tfrac{\pi}{2}) = 1 - x^2(\tfrac{\pi}{2})^2_c + x^4(\tfrac{\pi}{2})^4_c - x^6(\tfrac{\pi}{2})^6_c + x^8(\tfrac{\pi}{2})^8_c - \text{etc.}$$

$$sin\, x = x\,\tfrac{\pi}{2} - x^3(\tfrac{\pi}{2})^3_c + x^5(\tfrac{\pi}{2})^5_c - x^7(\tfrac{\pi}{2})^7_c + x^9(\tfrac{\pi}{2})^9_c - \text{etc.}$$

am bequemsten sind, wo π die Länge des Kreisumfanges, dessen Halbmesser $= 1$ ist, bedeutet, und $(\tfrac{\pi}{2})^n_c = \frac{1}{1.2.3....n} \cdot (\tfrac{\pi}{2})^n_c$ ist.

§. 8. Um aber von diesen Formeln Gebrauch zu machen, mufs man die Zahl π vorher mit hinlänglicher Genauigkeit berechnet haben. Folgende Elementar-Methode verdient wegen ihrer Eleganz und Einfachheit bemerkt zu werden.

Es seien p, q die respectiven Halbmesser des innern und äufsern Kreises irgend einer beliebigen regelmäfsigen Figur. Man suche zwischen p, q das arithmetische Mittel $p_1 = \frac{p+q}{2}$, und zwischen p_1, q das geometrische Mittel $q' = \sqrt{}p'q$. Ferner

$p_2 = \frac{p_1+q_1}{2}$, $q_2 = \sqrt{}p_2 q_1$; $p_3 = \frac{p_2+q_2}{2}$, $q_3 = \sqrt{}p_3 q_2$, etc. Setzt man nun die Berechnung der Glieder der beiden Reihen p, p_1, p_2, p_3, etc. q, q_1, q_2, q_3, etc. bis zu den beiden Gliedern p_n, q_n fort, so wird, wenn P den Umfang der gegebenen regelmäfsigen Figur bedeutet π zwischen den beiden Grenzen $\frac{P}{2p_n}$ und $\frac{P}{2q_n}$ liegen, so dafs $\frac{P}{2p_n} > \pi > \frac{P}{2q_n}$ sein wird, und man, weil der Unterschied dieser beiden Grenzen kleiner werden kann als jede gegebene Gröfse, die Zahl π auf diesen Wege so genau als man will, finden kann.

Es seien die Glieder p, q die resp. Halbmesser des innern und äufsern Kreises eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= k$, so ist, wie man leicht übersieht,

$p = \frac{k}{2\sqrt{}3}$, $q = \frac{k}{\sqrt{}3}$, $P = 3k$, und, wenn $k = 2\sqrt{}3$, $\frac{1}{2}P = 3\sqrt{}3$.

Man erhält also:

p	= 1,00000 000	q	= 2,00000 000	p_7	= 1,65394 978	q_7	= 1,65400 514
p_1	= 1,50000 000	q_1	= 1,73205 081	p_8	= 1,65397 746	q_8	= 1,65399 130
p_2	= 1,61602 540	q_2	= 1,67303 261	p_9	= 1,65398 438	q_9	= 1,65398 784
p_3	= 1,64452 900	q_3	= 1,65871 958	p_{10}	= 1,65398 611	q_{10}	= 1,65398 697
p_4	= 1,65162 429	q_4	= 1,65516 814	p_{11}	= 1,65398 654	q_{11}	= 1,65398 676
p_5	= 1,65339 621	q_5	= 1,65428 194	p_{12}	= 1,65398 665	q_{12}	= 1,65398 670
p_6	= 1,65383 907	q_6	= 1,65403 049	p_{13}	= 1,65398 668	q_{13}	= 1,65398 669

Daraus ergiebt sich nun, weil $3\sqrt{}3 = 5{,}19615242$, näherungsweise

$$\pi = \frac{5{,}19615242}{1{,}65398668} = 3{,}14159265.$$

Beweis. Es sei C der Mittelpunct und AB die Seite eines regulären Vielecks, dessen resp. Halbmesser des innern und äufsern Kreises p, q, so ist das Perpendikel CD von C auf AB gefällt $= p$, $CA = q$. Beschreibt man nun mit CA einen Kreis um das Vieleck, verlängert das Perpendikel CD von C nach D bis zum Puncte E in der Peripherie, zieht die Linien AE, BE und halbirt jene in F, diese in G, so wird,

wie man leicht übersieht $FG = \frac{1}{2} AB$, die Seite eines regulären Vielecks sein, dessen Umfang dem Umfange des ersten Polygons gleich ist und doppelt so viel Seiten hat. Bezeichnet man nun den Mittelpunct der Linie FG durch H und das Perpendikel CH durch p_1, CF durch q_1, so werden p_1, q_1 die resp. Radien des innern und äufsern Kreises des zweiten Vielecks sein. Es ist aber $CH = CD + DH = CE - HE$, also, weil $DH = HE$, $2CH = CD + CE$, folglich $p' = \frac{p+q}{2}$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CFH, CFE aber ist $CF : CH = CE : CF$ oder $q_1 : p_1 = q : q_1$ also $q_1 = \sqrt{p_1 q}$. Auf eine ähnliche Weise findet man, wenn p_2, p_3, p_4, etc. q_2, q_3, q_4, etc. die resp. Halbmesser der innern und äufsern Kreise der folgenden Vielecke bedeuten, die alle denselben Umfang haben, und deren Seitenzahl für jedes folgende Vieleck doppelt so grofs als für das nächstvorhergehende, dafs $p_2 = \frac{p_1 + q_1}{2}$, $q_2 = \sqrt{p_2 q_1}$ etc.

Weil nun p_n, q_n die resp. Radien des innern und äufsern Kreises des $(n+1)$ten Vielecks sind, und sich der Umfang jedes Kreises zu seinem Halbmesser wie 2π zu 1 verhält, so ist die Peripherie des innern Kreises des $(n+1)$ten Vielecks $= 2\pi p_n$, und des äufsern Kreises $= 2\pi q_n$. Bezeichnet man also den gemeinschaftlichen Umfang aller Vielecke durch P, so ist offenbar $2\pi p_n < P$ und $2\pi q_n > P$ und folglich $\pi > \frac{P}{2p_n}$ und $< \frac{P}{2q_n}$. Der Unterschied dieser beiden Gröfsen aber ist um so kleiner je gröfser n ist, und kann kleiner werden als jede gegebene Gröfse, so dafs man auf diesem Wege π so genau als man will, finden kann.

§. 8. So einfach die so eben erklärte Methode die Verhältnifszahl π zu finden auch ist, so sind doch die bereits mitgetheilten Formeln zur Entwickelung des Bogens durch seine Sinus oder seine Tangente ungleich bequemer. Man kann nämlich zur Berechnung des Bogens aus dem Sinus folgende Reihe anwenden.

$$Arc.\ sin.\eta = \eta + \tfrac{1}{2}\frac{\eta^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\eta^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\eta^7}{7} + \text{etc.}$$

Weil nun $Arc.\ sin.\frac{1}{2} = Arc.\ 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, so erhält man, wenn man

$\pi = A + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{5}A_2 + \frac{1}{7}A_3 + \frac{1}{9}A_4 + \frac{1}{11}A_5 +$ etc. setzt, weil alsdann $A = 3$, $A_1 = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}A$, $A_2 = \frac{1}{4}.\frac{3}{4}A_1$, $= \frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})A_1$, $A_3 = \frac{1}{4}.\frac{5}{6}A_2 = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{6})A_2$, $A_4 = \frac{1}{4}.\frac{7}{8}A_3 = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{8})A_3$, etc., die Zahlen A, A_1, A_2, A_3, etc., und daraus $\frac{1}{3}A_1$, $\frac{1}{5}A_2$, $\frac{1}{7}A_3$, etc.

§. 9. Setzt man in der (p. 134.) gefundenen Gleichung (F)

$$Arc.\ tan.\theta = \theta - \tfrac{1}{3}\theta^3 + \tfrac{1}{5}\theta^5 - \tfrac{1}{7}\theta^7 + \text{etc.}$$

$\theta = 1$, so ist $Arc.\ tan.\theta = Arc.\ 45^\circ = \frac{1}{4}\pi$, und man erhält die bekannte Leibnitzische Reihe

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \text{etc.}$$

Obwohl diese Reihe convergirt und einen reellen Werth hat, so ist sie doch zur wirklichen Berechnung der Zahl π unbrauchbar, weil man, um $\frac{1}{4}\pi$ bis auf die siebente Ziffer genau zu haben, beinahe 5 Millionen Glieder berechnen müfste. Übrigens übersieht man gleich, dafs sich vermittelst der Reihe $Arc.\ tan.\theta$, die Gröfse jedes Kreisbogens, dessen Tangente θ ein sehr kleiner Bruch ist, leicht berechnen läfst.

Da aber, um die Peripherie zu finden, das Verhältnifs eines solchen Bogens bekannt sein mufs, so mufs eine solche Tangente θ zu diesem Zwecke ausgewählt werden. Der berühmte englische Rechner Sharp wählte dazu $tan\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Diesen Werth in dem Ausdrucke $Arc.\ tan\ \theta$ für θ substituirt, erhält man

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7.3^3\sqrt{3}}$$

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \text{etc.}\right)$$

Vermittelst dieser Reihe hat Sharp die Zahl π bis auf die 72ste Decimalstelle berechnet. Die Rechnung selbst findet sich in Sherwins *Mathematical Tables*, London 1726. Ich will hier nur den Werth von $\sqrt{12}$ mitheilen. Dieser ist: 3,46410 16151 37754 58705 48926 83011 74473 38856 10507 62076 12561 11613 95890 38660 34.

§. 10. Man kann auch die Ausziehung der Quadratwurzel vermeiden, weil man

den Bogen $\frac{1}{4}\pi$ so in zwei Bogen zerlegen kann, dafs ihre resp. Tangenten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind. Ist nämlich $\frac{1}{2} = tan\, x$, $\frac{1}{3} = tan\, y$, so ist,

$$tan\,(x+y) = \frac{tan\,x + tan\,y}{1 - tan\,x\,tan\,y} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1.$$

Daraus folgt, dafs $x + y = Arc.\ tan\ 1 = \frac{1}{4}\pi$. Man hat demnach

$$\pi = 4.\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2} - \frac{1}{3.\,2^3} + \frac{1}{5.\,2^5} - \frac{1}{7.\,2^7} + \frac{1}{9.\,2^9} - \text{etc.}\\ &\frac{1}{3} - \frac{1}{3.\,3^3} + \frac{1}{5.\,3^5} - \frac{1}{7.\,3^7} + \frac{1}{9.\,3^9} - \text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

§. 11. Statt der eben gefundenen beiden Reihen lassen sich noch zwei andere finden, deren Glieder ungleich schneller abnehmen. Es sei nämlich $tan\,\omega = \frac{1}{5}$, so ist $tan\,2\omega = \frac{2\,tan\,\omega}{1 - tan^2\,\omega} = \frac{5}{12}$. Daraus findet man $tan\,4\omega = \frac{2\,tan\,2\omega}{1-tan^2\,2\omega} = \frac{\frac{10}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2} = \frac{120}{119}$.

Es ist ferner $tan\,(4\omega - \frac{1}{4}\pi) = \frac{tan\,4\omega - tan\,\frac{1}{4}\pi}{1 + tan\,4\omega\,.\,tan\,\frac{1}{4}\pi} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$.

Man hat also $4\omega - \frac{1}{4}\pi = Arc.\ tan.\frac{1}{239}$ oder $4\,Arc.\ tan.\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\pi = Arc.\ tan.\frac{1}{239}$, woraus endlich $\pi = 16\ Arc.\ tan.\frac{1}{5} - 4\ Arc.\ tan.\frac{1}{239} =$

$$= 16\,(\frac{2}{10} - \frac{1}{3}\frac{2^3}{10^3} + \frac{1}{5}\frac{2^5}{10^5} - \frac{1}{7}\frac{2^7}{10^7} + \frac{1}{9}\frac{2^9}{10^9} + \text{etc.})$$

$$- 4\,(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{239^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{239^7} + \frac{1}{9}\frac{1}{239^9} - \text{etc.})$$

Man kann den ersten Theil von π in zwei andere noch convergentere Reihen verwandeln. Setzt man nämlich $tan\,\varphi = \frac{1}{10}$, $tan\,\omega = \frac{1}{5}$, so ist $tan\,2\varphi = \frac{2\,tan\,\varphi}{1-tan\,\varphi^2} = \frac{20}{99}$, und $tan\,(2\varphi - \omega) = \frac{tan\,2\varphi - tan\,\omega}{1 + tan\,2\varphi\,tan\,\omega} = \frac{\frac{20}{99}-\frac{1}{5}}{1+\frac{20}{495}} = \frac{1}{515}$.

Es ist also $2\ Arc.\ tan\ \frac{1}{10} - Arc.\ tan\ \frac{1}{5} = Arc.\ tan\ \frac{1}{515}$ oder $Arc.\ tan\ \frac{1}{5} = 2\ Arc.\ tan\ \frac{1}{10} - Arc.\ tan\ \frac{1}{515}$. Demnach

$$\pi = 32\,(\frac{1}{10} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10^9} - \text{etc.})$$

$$- 16\,(\frac{1}{515} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{515^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{515^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{515^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{515^9} - \text{etc.})$$

$$- 4\,(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{239^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{239^9} - \text{etc.})$$

Klügel (Mathem. Wörterb. 1 Thl. p. 666) sagt, dafs ihm die letzte Formel vom Herrn Buzengeiger mitgetheilt worden sei. Man findet die Zahl π bis auf 140 Decimalen genau in Vegas grofsen Log. Tafeln berechnet. Sie ist folgende

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230
78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32(8)23 06647 09384 46095
50582 26136.

Die 113te Decimale 8 ist von Vega, statt der Ziffer 7, die nicht richtig ist, gesetzt worden.

§. 12. Substituirt man in den beiden Reihen (§. 7.) für $sin\frac{x\pi}{2}$, $cos\frac{x\pi}{2}$ die Zahlwerthe von $(\frac{\pi}{2})^2_c = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2$, $(\frac{\pi}{2})^3_c = \frac{1}{1.\,2.\,3}(\frac{\pi}{2})^3$, $(\frac{\pi}{2})^4_c = \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4}(\frac{\pi}{2})^4$, etc., so erhält man die von Euler in seiner *Introd. in analysin inf.* §. 134 zur Berechnung der Sinusse und Cosinusse mitgetheilten Reihen

$sin\frac{x\pi}{2} = 1$		$cos\frac{x\pi}{2} = 1$	
+ 1,57079 63267 94896 61923 13216 916	x	+ 1,00000 00000 00000 00000 00000 000	
− 0,64596 40975 06246 25365 57565 636	x^3	− 1,23370 05501 36169 82735 43113 745	x^2
+ 0,07969 26262 46167 04512 05055 488	x^5	+ 0,25366 95079 01048 01363 65633 659	x^4
− 0,00468 17541 35518 68810 06854 632	x^7	− 0,02086 34807 63352 96087 30516 364	x^6
+ 0,00016 04411 84787 35982 18726 605	x^9	+ 0,00091 92602 74839 42658 02417 158	x^8
− 0,00000 35988 43235 21208 53404 580	x^{11}	− 0,00002 52020 42573 06060 54810 526	x^{10}
+ 0,00000 00569 21729 21967 92681 171	x^{13}	+ 0,00000 04710 87477 88181 71503 665	x^{12}
− 0,00000 00006 68803 51098 11467 224	x^{15}	− 0,00000 00063 86603 08379 18522 408	x^{14}
+ 0,00000 00000 06066 93573 11061 950	x^{17}	+ 0,00000 00000 65659 63114 97947 230	x^{16}
− 0,00000 00000 00043 77065 46731 370	x^{19}	− 0,00000 00000 00529 44002 00734 620	x^{18}
+ 0,00000 00000 00000 25714 22892 856	x^{21}	+ 0,00000 00000 00003 43773 91790 981	x^{20}
− 0,00000 00000 00000 00125 38995 403	x^{23}	− 0,00000 00000 00000 01835 99165 212	x^{22}
+ 0,00000 00000 00000 00000 51564 550	x^{25}	+ 0,00000 00000 00000 00008 20675 327	x^{24}
− 0,00000 00000 00000 00000 00181 239	x^{27}	− 0,00000 00000 00000 00000 03115 285	x^{26}
+ 0,00000 00000 00000 00000 00000 549	x^{29}	+ 0,00000 00000 00000 00000 00010 165	x^{28}
− 0,00000 00000 00000 00000 00000 000	x^{31}	− 0,00000 00000 00000 00000 00000 026	x^{30}

Weil, zufolge der Formeln (C) p. 124,

$$sin\,(30^\circ + y) + sin\,(30^\circ - y) = 2\ sin\ 30^\circ . cos\,y = cos\,y$$

$$cos\,(30^\circ + y) - cos\,(30^\circ - y) = -2\ sin\ 30^\circ . sin\,y = -sin\,y,$$

folglich $sin\,(30^\circ + y) = cos\,y - sin\,(30^\circ - y)$ und $cos\,(30^\circ + y) = cos\,(30^\circ - y) - sin\,y$, so hat man nur nöthig, um die Sinusse und Cosinusse aller Bogen $< 90^\circ$ zu erhalten, vermittelst der so eben gegebenen Reihen die Sinusse und Cosinusse aller Bogen bis zu 30° zu berechnen; in welchem Falle diese Reihen, weil $x < \frac{\pi}{3}$, immer sehr convergent sind. Sind diese einmal berechnet, so lassen sich die übrigen Sinusse und Cosinusse bis 45° durch eine einfache Subtraction zweier schon bekannten bestimmen. Die Cosinusse und Sinusse von Bogen $< 45^\circ$ geben, wie man leicht übersieht, resp. die Sinusse und Cosinusse der Bogen $> 45^\circ$ und $< 90^\circ$.

§. 13. Aus den beiden Formeln (A) (p. 129.)

$$sin\,s = s - s_c^2 + s_c^5 - s_c^7 + \text{etc.}; \quad cos\,s = 1 - s_c^2 + s_c^4 - s_c^6 + \text{etc.}$$

lassen sich, weil $\frac{sin\,s}{cos} = tan\,s$ und $\frac{cos\,s}{sin\,s} = cot\,s$, $tan\,s$ und $cot\,s$ unmittelbar durch Division herleiten. Diese Division wird aber ungemein durch die Methode der unbestimmten Coefficienten erleichtert. Es sei nämlich

$$tan\,s = \mathfrak{A}_1 s + \mathfrak{A}_2 s_c^3 + \mathfrak{A}_3 s_c^5 + \mathfrak{A}_4 s_c^7 + \mathfrak{A}_5 s_c^9 + \text{etc.},$$

so erhält man, weil $cos\,s = 1 - s_c^2 + s_c^4 + s_c^6 + \text{etc.}$,

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} tan\,s\,.\,cos\,s = \mathfrak{A}_1 s + \mathfrak{A}_2 & s_c^3 + \mathfrak{A}_3 & s_c^5 + \mathfrak{A}_4 & s_c^7 + \mathfrak{A}_5 & s_c^9 + \text{etc.} \\ \quad - 3_c^{:2}\mathfrak{A}_1 & \quad - 5_c^{:2}\mathfrak{A}_2 & \quad - 7_c^{:2}\mathfrak{A}_3 & \quad + 9_c^{:2}\mathfrak{A}_4 & \\ & \quad + 5_c^{:4}\mathfrak{A}_1 & \quad + 7_c^{:4}\mathfrak{A}_2 & \quad + 9_c^{:4}\mathfrak{A}_3 & \\ & & \quad - 7_c^{:6}\mathfrak{A}_1 & \quad - 9_c^{:6}\mathfrak{A}_2 & \\ & & & \quad + 9_c^{:8}\mathfrak{A}_1 & \end{array}$$

Weil nun $tan\,s\,.\,cos\,s = sin\,s = s - s_c^3 + s_c^5 - s_c^7 + \text{etc.}$,
so ergeben sich, indem man die Coefficienten dieser beiden Reihen einander gleich setzt, zur Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, etc. folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_1 = 1$$

$$\mathfrak{A}_2 = 3\ \mathfrak{A}_1 - 1 = 2$$

$$\mathfrak{A}_3 = 5_c^{:2}\mathfrak{A}_2 - 5_c^{:4}\mathfrak{A}_1 + 1 = 16 = 2^4$$

$$\mathfrak{A}_4 = 7_c^{:2}\mathfrak{A}_3 - 7_c^{:4}\mathfrak{A}_2 + 7_c^{:6}\mathfrak{A}_1 - 1 = 272 = 2^4.17$$

$$\mathfrak{A}_5 = 9_c^{:2}\mathfrak{A}_4 - 9_c^{:4}\mathfrak{A}_3 + 9_c^{:6}\mathfrak{A}_2 - 9_c^{:8}\mathfrak{A}_1 + 1 = 7936 = 2^8.31.$$

Auf die Weise erhält man durch fortgesetzte Rechnung noch

$$\mathfrak{A}_6 = 2^9 . 691; \quad \mathfrak{A}_7 = 2^{12} . 127 . 43; \quad \mathfrak{A}_8 = 2^{11} . 3617 . 257$$

$$\mathfrak{A}_9 = 2^{16} . 73 . 43867; \quad \mathfrak{A}_{10} = 2^{17} . 31 . 41 . 174611; \quad \mathfrak{A}_{11} = 2^{20} . 89 . 683 . 77683.$$

§. 14. Die Cotangente s läfst sich auf ähnliche Weise herleiten, indem man

$$cot\,s = \frac{1}{s} - \mathfrak{C}_1 s - \mathfrak{C}_2 s_c^3 - \mathfrak{C}_3 s_c^5 - \mathfrak{C}_4 s_c^7 + \text{etc.}$$

setzt, und alsdann die Coefficienten von $cot\,s\,.\,sin\,s$ mit denen von $cos\,s$ vergleicht. Indefs lassen sich die bereits berechneten Coefficienten für $tan\,s$ benutzen, um daraus unmittelbar auf eine äufserst bequeme Weise die von $cot\,s$ zu bestimmen. Weil nämlich $cot\,s - tan\,s = \frac{cos\,s}{sin\,s} - \frac{sin\,s}{cos\,s} = \frac{cos^2 s - sin^2 s}{cos\,s\ sin\,s} = \frac{2\ cos\,2s}{sin\,2s} = 2\ cot\,2s$,
so ist $cot\,s - 2\ cot\,2s = tan\,s$. Wenn nun

$$cot\,s = \frac{1}{s} - \mathfrak{C}_1 s - \mathfrak{C}_2 s^3 - \mathfrak{C}_3 s^5 - \mathfrak{C}_4 s^7 - \text{etc.}$$

so ist $2\ cot\,2s = 2.\frac{1}{2s} - 2^2\mathfrak{C}_1 s - 2^4\mathfrak{C}_2 s^3 - 2^6\mathfrak{C}_3 s^5 - 2^8\mathfrak{C}_4 s^7 - \text{etc.}$

folglich $tan\,s = (2^2-1)\mathfrak{C}_1 s + (2^4-1)\mathfrak{C}_2 s^3 + (2^6-1)\mathfrak{C}_3 s^5 + (2^8-1)\mathfrak{C}_4 s^7 + \text{etc.}$

Vergleicht man diesen Ausdruck für $tan\,s$ mit $\mathfrak{A}_1 s + \mathfrak{A}_2 s_c^3 + \mathfrak{A}_3 s_c^5 + \text{etc.}$, so erhält man:

$\mathfrak{C}_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$; $\mathfrak{C}_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{2^4-1} = \frac{2}{3.5}$; $\mathfrak{C}_3 = \frac{16}{2^6-1} = \frac{16}{7.9}$; $\mathfrak{C}_4 = \frac{2^4.17}{2^8-1} = \frac{16}{15}$;

$\mathfrak{C}_5 = \frac{2^8.31}{2^{10}-1} = \frac{2^8}{33}$; $\mathfrak{C}_6 = \frac{2^9.691}{2^{12}-1} = \frac{2^9.691}{63.65}$; $\mathfrak{C}_7 = \frac{2^{12}.127.43}{2^{14}-1} = \frac{2^{12}.127.43}{127.129} = \frac{2^{12}}{3}$, etc.

§. 15. Substituirt man nun $\frac{x\pi}{2}$ für s, so ist

$$tan\,\frac{x\pi}{2} = \frac{\pi}{2}x + \mathfrak{A}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^3 x^3 + \mathfrak{A}_3\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^5 x^5 + \mathfrak{A}_4\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^7 x^7 + \text{etc.}$$

$$cot\,\frac{x\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x} - \mathfrak{C}_1\left(\frac{\pi}{2}\right)x^1 - \mathfrak{C}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^3 x^3 - \mathfrak{C}_3\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^5 x^5 - \text{etc.};$$ und

setzt man statt $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_5$, etc. $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_5$, etc., und $\frac{2}{\pi}$, $\frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^2$ etc. die numerischen Werthe, so findet man

$tan\,\frac{x\pi}{2}$	$cot\,\frac{x\pi}{2}$
$= 1{,}57079\ 63267\ 9\ x$	$= 0{,}63661\ 97723\ 6\ \frac{1}{x}$
$+ 1{,}29192\ 81950\ 1\ x^3$	$- 0.52359\ 87756\ 0\ x$
$+ 1{,}27508\ 20199\ 4\ x^5$	$- 0{,}08612\ 85463\ 3\ x^3$
$+ 1{,}27343\ 71248\ 0\ x^7$	$- 0{,}02023\ 93971\ 4\ x^5$
$+ 1{,}27326\ 12424\ 7\ x^9$	$- 0{,}00499\ 38710\ 8\ x^7$
$+ 1{,}27324\ 19458\ 7\ x^{11}$	$- 0{,}00124\ 46346\ 5\ x^9$
etc.	$- 0{,}00031\ 09259\ 9\ x^{11}$
	etc.

Diese beiden Reihen sind unter der obigen Form zur wirklichen numerischen Berechnung der Tangente und Cotangente von $\frac{x\pi}{2}$ nicht sehr brauchbar, weil die Zahlencoefficienten sehr langsam convergiren. Betrachtet man jedoch diese Coefficienten mit einiger Aufmerksamkeit, so bemerkt man zunächst, weil $0{,}63661\ 97723\ 6 = \frac{2}{\pi}$, also $1{,}27323\ 95447\ 35 = \frac{4}{\pi}$, dafs die Zahlencoefficienten von $tan\,\frac{x\pi}{2}$ sich der Zahl $\frac{4}{\pi}$ immer mehr und mehr nähern. Zugleich ergiebt sich aber auch, weil allgemein

$\mathfrak{C}_n = \frac{\mathfrak{A}_n}{2^{2n}-1}$ oder $\mathfrak{C}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^{2n-1} = \frac{\mathfrak{A}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^{2n-1}}{2^{2n}-1}$, dafs die Zahlencoefficienten von $cot\,\frac{x\pi}{2}$ sich, je gröfser n wird, immer mehr und mehr den Gliedern einer abnehmenden geometrischen Progression $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4^2}\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4^3}\frac{1}{\pi} + \text{etc.}$ nähern. Man kann daher die beiden Formeln (§. 15.) zum bequemen Gebrauche für die numerische Berechnung auf folgende Weise verändern:

$$tan\,\frac{x\pi}{2} = 1{,}27323\ 95944\ 735\,\frac{x}{1-x}$$
$$+ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right)x + \left(\mathfrak{A}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^3 - \frac{4}{\pi}\right)x^3 + \left(\mathfrak{A}_3\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^5 - \frac{4}{\pi}\right)x^5 + \left(\mathfrak{A}_4\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^7 - \frac{4}{\pi}\right)x^7 + \text{etc.}$$

$$cot\,\frac{x\pi}{2} = 0{,}63661\ 97723\ 675.\frac{1}{x} - 0{,}31830\ 98986\ 1837.\frac{x}{1-\frac{x^2}{4}}$$
$$- \left(\mathfrak{C}_1\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\right)x - \left(\mathfrak{C}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^3 - \frac{1}{4\pi}\right)x^3 - \left(\mathfrak{C}_3\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^5 - \frac{1}{4^2\pi}\right)x^5 - \left(\mathfrak{C}_4\left(\frac{\pi}{2}\right)_c^7 - \frac{1}{4^3\pi}\right)x^7 - \text{etc.}$$

Daraus erhält man nun:

$tan\,\frac{x\pi}{2} = 1{,}27323\ 95447\ 352\,\frac{x}{1-x^2}$	$cot\,\frac{x\pi}{2} = 0{,}63661\ 97723\ 6758\ \frac{1}{x}$
$+ 0{,}29755\ 67820\ 597\ x$	$- 0{,}31830\ 98861\ 838\,\frac{x}{1-\frac{1}{4}x^2}$
$+ 0{,}01868\ 86502\ 773\ x^3$	$- 0{,}20528\ 88894\ 145\ x$
$+ 0{,}00184\ 24752\ 034\ x^5$	$- 0{,}00655\ 10747\ 882\ x^3$
$+ 0{,}00019\ 75800\ 714\ x^7$	$- 0{,}00034\ 50292\ 554\ x^5$
$+ 0{,}00002\ 16977\ 245\ x^9$	$- 0{,}00002\ 02791\ 060\ x^7$
$+ 0{,}00000\ 24011\ 370\ x^{11}$	$- 0{,}00000\ 12366\ 527\ x^9$
$+ 0{,}00000\ 02664\ 132\ x^{13}$	$- 0{,}00000\ 00764\ 959\ x^{11}$
$+ 0{,}00000\ 00295\ 864\ x^{15}$	$- 0{,}00000\ 00047\ 597\ x^{13}$
$+ 0{,}00000\ 00032\ 867\ x^{17}$	$- 0{,}00000\ 00002\ 969\ x^{15}$
$+ 0{,}00000\ 00003\ 651\ x^{19}$	$- 0{,}00000\ 00000\ 185\ x^{17}$
$+ 0{,}00000\ 00000\ 405\ x^{21}$	$- 0{,}00000\ 00000\ 011\ x^{19}$

Um sich von der Richtigkeit der Zahlencoefficienten dieser beiden Reihen zu überzeugen, setze man $x = \frac{1}{2}$, so wird $\frac{x}{1-x^2} = \frac{2}{3}$, $\frac{x}{1-\frac{1}{4}x^2} = \frac{8}{15}$ und

$tan\frac{\pi}{4}$ =	0,84882 63631 568	$cot\frac{\pi}{4}$ =	1,27323 95447 352
	0,14877 83910 298		0,16976 52726 314
	0,00223 60812 847		0,10264 44447 072
	0,00005 75773 501		0,00081 88843 485
	0,00000 15435 943		0,00001 07821 642
	0,00000 00423 784		0,00000 01584 305
	0,00000 00011 714		0,00000 00024 153
	0,00000 00000 325		0,00000 00000 374
	0,00000 00000 009		0,00000 00000 004
	0,99999 99999 999		0,27323 95447 349
			1,00000 00000 003

§. 16. So wie man zufolge (§. 12.) aus den Sinussen und Cosinussen der Winkel $< 30^\circ$ die Sinusse und Cosinusse aller übrigen gröfsern Winkeln durch blofse Addition und Subtraction finden kann, so giebt es für die Tangenten und Cotangenten ein ähnliches Hülfsmittel. Weil nämlich (p. 125, §. 48.) $cot\ 2x = \frac{cot\ x - tan\ x}{2}$, so erhält man, $30^\circ - x$ für x substituirt, $cot\ (60^\circ - 2x) = \frac{cot\ (30^\circ - x) - tan\ (30^\circ - x)}{2}$ und, weil $cot\ (60^\circ - 2x) = tan\ (30^\circ + 2x)$, $tan\ (30^\circ + 2x) = \frac{1}{2}\ cot\ (30^\circ - x) - \frac{1}{2}\ tan\ (30^\circ - x)$. Die Secanten und Cosecanten lassen sich aus den Tangenten und Cotangenten durch blofse Subtraction finden. Es ist nämlich

$$cosec\ x + cot\ x = \frac{1}{sin\ x} + \frac{cos\ x}{sin\ x} = \frac{1 + cos\ x}{sin\ x} \text{ (p. 125, §. 49.)} = cot\ \tfrac{1}{2}x,$$

also $cosec\ x = cot\ \frac{1}{2}x - cot\ x$, und daher $sec\ x = cot\ (45^\circ - \frac{1}{2}x) - tan\ x$.

§. 17. Nachdem wir gezeigt haben, wie man aus einem gegebenen Winkel den Sinus, Cosinus, die Tangente und die Cotangente desselben berechnet, bleibt uns

noch übrig den Logarithmen des Sinus und Cosinus jedes Winkels durch Reihen darzustellen, mit deren Hülfe man die Berechnung desselben auf eine bequeme Art anstellen kann. Wir wollen zuförderst die Reihe für *log nat cos x* entwickeln.

Weil (p. 50.) (B) $-\ log\ (1-\omega) = \omega + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^4}{4} +$ etc.

und $cos\ x = 1 - x_c^2 + x_c^4 - x_c^6 + x_c^8 -$ etc., so übersieht man leicht, dafs sich $-\ log\ nat\ cos\ x$ durch eine Reihe von der Form

$$\mathfrak{E}_1\ x_c^2 + \mathfrak{E}_2\ x_c^4 + \mathfrak{E}_3\ x_c^6 + \mathfrak{E}_4\ x_c^8 + \mathfrak{E}_5\ x_c^{10} + \text{etc.}$$

darstellen läfst. Es kommt also nur darauf an, die Coefficienten $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, etc. zu bestimmen.

Weil nun zufolge der obigen Voraussetzung

$$-\ l\ cos\ (x+\xi) = \mathfrak{E}_1 (x+\xi)_c^2 + \mathfrak{E}_2 (x+\xi)_c^4 + \mathfrak{E}_3 (x+\xi)_c^6 + \mathfrak{E}_4 (x+\xi)_c^8 + \text{etc.}$$

und $-\ (l\ cos\ (x+\xi) - l\ cos\ x) = -\ l\ \frac{cos\ (x+\xi)}{cos\ x} = -\ l\ \frac{cos\ x - (cos\ x - cos(x+\xi))}{cos\ x}$

$$= -\ l \frac{cos\ x - 2\ sin\ (x+\frac{\xi}{2})\ sin\ \frac{\xi}{2}}{cos\ x} = -\ l\ (1 - \frac{sin\ (x+\frac{\xi}{2})}{cos\ x} \cdot Ch\ \xi),$$ so erhält man:

$$\frac{sin\ (x+\frac{\xi}{2})}{cos\ x}\ Ch\ \xi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{sin\ (x+\frac{\xi}{2})}{cos\ x}\ Ch\ \xi\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{sin\ (x+\frac{\xi}{2})}{cos\ x}\ Ch\ \xi\right)^3 + \text{etc.}$$

$$= \mathfrak{E}_1((x+\xi)_c^2 - x_c^2) + \mathfrak{E}_2((x+\xi)_c^4 - x_c^4) + \mathfrak{E}_3((x+\xi)_c^6 - x_c^6) + \mathfrak{E}_4((x+\xi)_c^8 - x_c^8) + \text{etc.}$$

Dividirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung durch ξ und setzt darauf $\xi = o$, so ergiebt sich, weil alsdann

$$\frac{sin\ (x+\frac{\xi}{2})}{cos\ x} \cdot \frac{Ch\ \xi}{\xi} = tan\ x,\ \frac{(x+\xi)_c^2 - x_c^2}{\xi} = x,\ \frac{(x+\xi)_c^4 - x_c^4}{\xi} = x_c^3,$$ und allgemein

$$\frac{(x+\xi)_c^n - x_c^n}{\xi} = x_c^{n-1} + \tfrac{1}{2}\ x_c^{n-2}\ \xi + \tfrac{1}{3} x_c^{n-3} \xi_c^2 \ldots + \frac{1}{n} \cdot \xi_c^{n-1} = x_c^n,$$

$$tan\ x = \mathfrak{E}_1\ x + \mathfrak{E}_2\ x_c^3 + \mathfrak{E}_3\ x_c^5 + \mathfrak{E}_4\ x_c^7 + \mathfrak{E}_5\ x_c^9 + \text{etc.}$$

Weil aber (§. 13.) $tan\, x = \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x_c^3 + \mathfrak{A}_3 x_c^5 + \mathfrak{A}_4 x_c^7 +$ etc.
so ergiebt sich $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{E}_3 = \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{E}_4 = \mathfrak{A}_4$, etc.

Folglich — $log\ nat\ cos\, x = \mathfrak{A}_1 x_c^2 + \mathfrak{A}_2 x_c^4 + \mathfrak{A}_3 x_c^6 + \mathfrak{A}_4 x_c^8 +$ etc.

§. 18. Aus der so eben gefundenen Reihe für $l\ cos\, x$ läfst sich nun leicht die Reihe für $l\ sin\, x$ herleiten. Es ist nämlich $sin\, 2x = 2\ cos\, x\ sin\, x$, und folglich

$l\ sin\, 2x = l2 + l\ cos\, x + l\ sin\, x$, oder $l\ sin\, 2x - l\ sin\, x = l2 + l\ cos\, x$.

Weil nun $sin\, x = x - x_c^3 + x_c^5 - x_c^7 + x_c^9 +$ etc.

$= x(1 - \frac{1}{3} x_c^2 + \frac{1}{5} x_c^4 - \frac{1}{7} x_c^6 + \frac{1}{9} x_c^8 -$ etc.), so mufs $l\ sin\, x$ unter der Form

$l\, x - \mathfrak{F}_1 x_c^2 - \mathfrak{F}_2 x_c^4 - \mathfrak{F}_3 x_c^6 - \mathfrak{F}_4 x_c^8 -$ etc. dargestellt werden können. Daraus folgt

$l\ sin\, 2x - l\ sin\, x = l2 - (2^2-1)\, \mathfrak{F}_1 x_c^2 - (2^4-1)\, \mathfrak{F}_2 x_c^4 - (2^6-1)\, \mathfrak{F}_3 x_c^6 +$ etc.

Auch ist $l2 + l\ cos\, x = l2 - \mathfrak{A}_1 x_c^2 - \mathfrak{A}_2 x_c^4 - \mathfrak{A}_3 x_c^6 - \mathfrak{A}_4 x_c^8 -$ etc.,

und diese beiden Reihen einander gleich gesetzt, erhält man:

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{(2^2-1)},\ \mathfrak{F}_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{(2^4-1)},\ \mathfrak{F}_3 = \frac{\mathfrak{A}_3}{(2^6-1)},\ \mathfrak{F}_4 = \frac{\mathfrak{A}_4}{(2^8-1)},\ \text{etc.}$$

Es ist demnach

$$log\ nat\ sin\, x = l\, x - \frac{\mathfrak{A}_1}{(2^2-1)} x_c^2 - \frac{\mathfrak{A}_2}{(2^4-1)} x_c^4 - \frac{\mathfrak{A}_3}{(2^6-1)} x_c^6 - \frac{\mathfrak{A}_4}{(2^8-1)} x_c^8 + \text{etc.}$$

§. 19. Substituirt man in den beiden für $l\ cos\, x$, $l\ sin\, x$ gefundenen Reihen $\frac{x\pi}{2}$ für x, so werden dieselben:

$$l\ cos\, \frac{x\pi}{2} = -\mathfrak{A}_1 x^2 (\tfrac{\pi}{2})_c^2 - \mathfrak{A}_2 x^4 (\tfrac{\pi}{2})_c^4 - \mathfrak{A}_3 x^6 (\tfrac{\pi}{2})_c^6 - \mathfrak{A}_4 x^8 (\tfrac{\pi}{2})_c^8 - \mathfrak{A}_5 x^{10} (\tfrac{\pi}{2})_c^{10} - \text{etc.}$$

$$l\ sin\, \frac{x\pi}{2} = l\frac{x\pi}{2} - \frac{\mathfrak{A}_1}{(2^2-1)} x^2 (\tfrac{\pi}{2})_c^2 - \frac{\mathfrak{A}_2}{(2^4-1)} x^4 (\tfrac{\pi}{2})_c^4 - \frac{\mathfrak{A}_3}{(2^6-1)} x^6 (\tfrac{\pi}{2})_c^6 - \frac{\mathfrak{A}_4}{(2^8-1)} x^8 (\tfrac{\pi}{2})_c^8 - \text{etc.}$$

Diese beiden Reihen lassen sich aber, weil

$$l(1-x^2) = -x^2 - \tfrac{1}{2} x^4 - \tfrac{1}{3} x^6 - \tfrac{1}{4} x^8 - \tfrac{1}{5} x^{10} - \text{etc.}$$

$$l(1 - \tfrac{x^2}{2^2}) = -\frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{2^4} - \tfrac{1}{3}\frac{x^6}{2^6} - \tfrac{1}{4}\frac{x^8}{2^8} - \tfrac{1}{5}\frac{x^{10}}{2^{10}} - \text{etc.}$$

zur bequemen numerischen Berechnung auf folgende Weise darstellen:

$$l\ cos\, \frac{x\pi}{2} = l(1-x^2) - (\mathfrak{A}_1 (\tfrac{\pi}{2})_c^2 - 1) x^2 - (\mathfrak{A}_1 (\tfrac{\pi}{2})_c^4 - \tfrac{1}{2}) x^4 - (\mathfrak{A}_2 (\tfrac{\pi}{2})_c^6 - \tfrac{1}{3}) x^6 - \text{etc.}$$

$$l\ sin\, \frac{x\pi}{2} = l\, x + l\frac{\pi}{2} + l(1 - \frac{x^2}{2^2}) - \Big(\frac{\mathfrak{A}_1}{(2^2-1)} (\tfrac{\pi}{2})_c^2 - \tfrac{1}{4}\Big) x^2 - \Big(\frac{\mathfrak{A}_2}{(2^4-1)} (\tfrac{\pi}{2})_c^4 - \frac{1}{2.4^2}\Big) x^4 - \text{etc.}$$

Daraus ergiebt sich nun, wenn man die numerischen Werthe der Coefficienten wirklich berechnet, indem man für $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, etc. die (§. 13.) gefundenen Zahlwerthe substituirt:

$log\ nat\ cos\, \frac{x\pi}{2} = l(1+x) + l(1-x)$	$log\ nat\ sin\, \frac{x\pi}{2} = l\, x + l(2+x) + l(2-x)$
— 0,23370 05501 36169 82735 x^2	— 0,93471 16558 30435 75410
— 0,00733 90158 02096 02727 x^4	— 0,16123 35167 12056 60911 x^2
— 0,00048 23588 80314 04063 x^6	— 0,00257 26010 53473 06848 x^4
— 0,00003 87947 56324 02982 x^8	— 0,00009 03284 47835 67260 x^6
— 0,00000 34082 72608 96510 x^{10}	— 0,00000 39817 93162 05501 x^8
— 0,00000 03143 08097 18659 x^{12}	— 0,00000 01942 52954 65196 x^{10}
— 0,00000 00298 91502 74450 x^{14}	— 0,00000 00100 13287 48812 x^{12}
— 0,00000 00029 04644 67239 x^{16}	— 0,00000 00005 34041 35618 x^{14}
— 0,00000 00002 86826 39518 x^{18}	— 0,00000 00000 29148 59658 x^{16}
— 0,00000 00000 28680 76974 x^{20}	— 0,00000 00000 01617 97979 x^{18}
— 0,00000 00000 02896 97956 x^{22}	— 0,00000 00000 00090 97690 x^{20}
— 0,00000 00000 00295 06024 x^{24}	— 0,00000 00000 00005 16827 x^{22}
— 0,00000 00000 00030 26249 x^{26}	— 0,00000 00000 00000 29607 x^{24}
— 0,00000 00000 00003 12232 x^{28}	— 0,00000 00000 00000 01708 x^{26}
— 0,00000 00000 00000 32379 x^{30}	— 0,00000 00000 00000 00099 x^{28}
— 0,00000 00000 00000 03373 x^{32}	— 0,00000 00000 00000 00005 x^{30}
— 0,00000 00000 00000 00352 x^{34}	
— 0,00000 00000 00000 00037 x^{36}	
— 0,00000 00000 00000 00004 x^{38}	

§. 20. Um aus den natürlichen Logarithmen der Cosinusse und Sinusse die gemeinen briggischen zu erhalten, mufs man dieselben, wie (p. 49.) gezeigt worden, durch den Modulus $M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289$ multipliciren, und weil die Logarithmen der Sinusse und Cosinusse in den Tafeln um sie positiv zu machen um 10 zu grofs angenommen sind, noch 10 dazu addiren.

Diesemnach erhält man:

$log\,brigg\,cos\frac{x\,\pi}{2} = log(1-x)+log(1+x)$	$log\,brigg\,sin\frac{x\,\pi}{2} = log\,x+log(2-x)+log(2+x)$
$+\ 10{,}00000\ 00000\ 00000$	$+\ 9{,}59405\ 98857\ 02190$
$-\ 0{,}10149\ 48593\ 41892\ x^2$	$-\ 0{,}07002\ 28266\ 05901\ x^2$
$-\ 0{,}00318\ 72940\ 65451\ x^4$	$-\ 0{,}00111\ 72664\ 41661\ x^4$
$-\ 0{,}00020\ 94858\ 00017\ x^6$	$-\ 0{,}00003\ 92291\ 46453\ x^6$
$-\ 0{,}00001\ 68483\ 48597\ x^8$	$-\ 0{,}00000\ 17292\ 70798\ x^8$
$-\ 0{,}00000\ 14801\ 93986\ x^{10}$	$-\ 0{,}00000\ 00843\ 62986\ x^{10}$
$-\ 0{,}00000\ 01365\ 02272\ x^{12}$	$-\ 0{,}00000\ 00043\ 48715\ x^{12}$
$-\ 0{,}00000\ 00129\ 81715\ x^{14}$	$-\ 0{,}00000\ 00002\ 31931\ x^{14}$
$-\ 0{,}00000\ 00012\ 61471\ x^{16}$	$-\ 0{,}00000\ 00000\ 12659\ x^{16}$
$-\ 0{,}00000\ 00001\ 24567\ x^{18}$	$-\ 0{,}00000\ 00000\ 00702\ x^{18}$
$-\ 0{,}00000\ 00000\ 12456\ x^{20}$	$-\ 0{,}00000\ 00000\ 00039\ x^{20}$
$-\ 0{,}00000\ 00000\ 01258\ x^{22}$	
$-\ 0{,}00000\ 00000\ 00128\ x^{24}$	
$-\ 0{,}00000\ 00000\ 00013\ x^{26}$	

§. 21. Um von den in den vorigen §. §. mitgetheilten Reihen für die Berechnung der Sinusse, Cosinusse, Tangenten etc. und ihrer Logarithmen Gebrauch zu machen, ist noch einiges zu bemerken. In den Ausdrücken $sin\frac{x\,\pi}{2}$, $cos\frac{x\,\pi}{2}$, etc. bedeutet x die Verhältnifszahl des Bogens zum Quadranten oder des Winkels zum rechten Winkel. Man bestimmt die Gröfse eines Bogens oder Winkels durch Grade, Minuten, Secunden, Tertien, etc. Nach der alten und gewöhnlichen Eintheilung des

Kreises, deren wir uns auch hier noch bedienen, ist ein Grad der 60ste Theil eines rechten Winkels, die Minute der 60ste Theil eines Grades, die Secunde der 60ste Theil einer Minute, etc. Die Grade, Minuten, Secunden etc. werden respective durch die Zeichen °, ′, ″, etc. angedeutet. So bedeutet z. B. der Ausdruck $19^\circ\ 11'\ 13''$ einen Bogen oder Winkel von 19 Graden 11 Minuten 13 Secunden. Einen solchen Bogen verwandelt man, den Quadranten zur Einheit genommen, folgendermafsen in einen Decimalbruch: Es ist $19^\circ\ 11'\ 13'' = 19^\circ\ 11{,}2166 = 19{,}186944 = 0{,}21319827\ldots$ Diese Zahl ist die respective Verhältnifszahl des Winkels oder Bogens von $19^\circ\ 11\ 13$ zum rechten Winkel oder Quadranten.

Weil nach der neuern Decimaleintheilung der vierte Theil des Kreisumfangs, in 100 Grade, der Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden, etc. getheilt wird, so übersieht man leicht, dafs $19^\circ\ 11'\ 13''$ nach der ältern Eintheilung, oder 0,21318827 des Quadranten $= 21^\circ\ 31'\ 88''\ 37'''$ neuerer Eintheilung sind. Das eben angeführte Beispiel wird hinlänglich sein zu zeigen, wie man einen Bogen nach der alten Eintheilung ausgedrückt, nach der Decimaleintheilung darstellen mufs.

Umgekehrt läfst sich der Ausdruck eines Bogens nach der Decimaleintheilung in den ältern gewöhnlichen verwandeln. Ist nämlich der Bogen $21^\circ\ 31'\ 88''\ 28'''$ nach der Decimaleintheilung geschrieben, so ergiebt sich unmittelbar, dafs derselbe 0,21318827 des Kreisquadranten $= 0{,}21318827 \times 90$ Grade $= 19{,}1869443 = 19^\circ + 0{,}1869443 \times 60$ Min.

$= 19^\circ\ 11{,}216658 = 19^\circ\ 11' + 0{,}216658 \times 60$ Secunden $= 19^\circ\ 11'\ 12{,}999$.

§. 22. Aus den (p. 117.) gegebenen Definitionen der trigonometrischen Gröfsen ergeben sich unmittelbar folgende zur Berechnung des rechtw. Dreiecks nützliche Sätze.

I. Die Cathete eines rechtwinklichten Dreiecks im Verhältnisse zur Hypotenuse, ist gleich dem Sinus des der Cathete gegenüberstehenden oder dem Cosinus des anliegenden spitzen Winkels.

II. Die Cathete eines rechtwinklichten Dreiecks im Verhältnisse

zur andern Cathete ist die Tangente des der erstern Cathete gegenüberliegenden oder die Cotangente des ihr anliegenden Winkels.

III. Die Hypotenuse im Verhältnisse zu einer Cathete ist die Secante des an der Cathete anliegenden oder die Cosecante des entgegengesetzten Winkels.

Daraus ergeben sich wieder folgende beiden Sätze:

IV. Die Cathete eines rechtwinklichten Dreiecks ist gleich der Hypotenuse desselben multiplicirt mit dem Sinus des gegenüberstehenden oder mit dem Cosinus des anliegenden Winkels, oder auch gleich der andern Cathete multiplicirt mit der Tangente des der ersten gegenüberliegenden oder mit der Cotangente des der ersten anliegenden Winkels.

V. Die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreiecks ist gleich der einen Cathete multiplicirt mit der Secante des anliegenden oder mit der Cosecante des gegenüberstehenden Winkels.

Diesemnach ist, wenn man die Hypotenuse des in C rechtwinklichten Dreiecks ABC durch c, die Cathete BC durch a und AC durch b bezeichnet

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ \tan A = \frac{a}{b},\ \cot A = \frac{b}{a},\ \sec A = \frac{c}{b},\ \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}.$$

Daher auch: $a = c \sin A = c \cos B = b \tan A = b \cot B$;

$b = c \sin B = c \cos A = a \tan B = a \cot A$; $c = b \sec A = a \operatorname{cosec} A$.

Trigonometrische zur Auflösung der ebenen Dreiecke nützliche Formeln.

§. 23. Lehrsatz. Wenn r den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises bedeutet, und die Seiten BC, CA, AB respective durch a, b, c bezeichnet werden, so ist $a = 2r \sin A$, $b = 2r \sin B$, $c = 2r \sin C$.

Beweis. Es sei O der Mittelpunct des um ABC beschriebenen Kreises, so ist, wie man leicht übersieht, Winkel $BOC = 2A$, $COA = 2B$, $AOB = 2C$. Fällt man nun von O auf die Seiten BC, CA, AB die respectiven senkrechten Linien OD, OE, OF, so werden durch dieselben sowohl die Winkel BOC, COA, AOB, als auch die correspondirenden Seiten des Dreiecks a, b, c halbirt, und es ist

(§. 22.) $\frac{1}{2}a = r \sin A$, $\frac{1}{2}b = r \sin B$, $\frac{1}{2}c = r \sin C$,

und folglich $a = 2r \sin A$, $b = 2r \sin B$, $c = 2r \sin C$.

Aus diesem Satze folgt zugleich, dafs die Seiten jedes gegebenen Dreiecks den Sinussen der gegenüberliegenen Seiten proportional sind.

§. 24. Lehrsatz. Wenn ϱ den Halbmesser des in dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises bedeutet, und die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c, und ihre Summe durch s bezeichnet werden, so ist

$$\tan \tfrac{1}{2}A = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s - a},\ \tan \tfrac{1}{2}B = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s - b},\ \tan \tfrac{1}{2}C = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s - c}.$$

Beweis. Bezeichnet man den Mittelpunct des in dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises durch O, und die resp. Berührungspuncte desselben mit den Seiten BC, CA, AB des Dreiecks durch D, E, F, so werden, wie man leicht übersieht, die Winkel A, B, C durch die Linien OA, OB, OC halbirt, und es wird $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{BF} = \overline{BD}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$. Bezeichnen wir nun $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$ respective durch x, y, z, so ist $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$, also $x + y + z = \frac{a + b + c}{2} = \frac{1}{2}s$, und folglich $x = \frac{1}{2}s - a$, $y = \frac{1}{2}s - b$, $z = \frac{1}{2}s - c$. Es ist aber das Dreieck OAE, ein in E rechtwinklichtes Dreieck und der Winkel OAE die Hälfte des Winkels CAB oder $= \frac{1}{2}A$, demnach $\frac{OE}{AE} = \tan \frac{1}{2}A$ oder $\frac{\varrho}{\frac{1}{2}s - a} = \tan \frac{1}{2}A$. Eben so erhält man

$\frac{\varrho}{\frac{1}{2}s - b} = \tan \frac{1}{2}B$, $\frac{\varrho}{\frac{1}{2}s - c} = \tan \frac{1}{2}C$, oder auch $\frac{\frac{1}{2}s - a}{\varrho} = \cot \frac{1}{2}A$,

$\frac{\frac{1}{2}s - b}{\varrho} = \cot \frac{1}{2}B$, $\frac{\frac{1}{2}s - c}{\varrho} = \cot \frac{1}{2}C$.

§. 25. Weil $cot \frac{1}{2}C = tan \frac{1}{2}(A+B) =$ (p. 124.) (D) $\frac{cot \frac{1}{2}A + cot \frac{1}{2}B}{cot \frac{1}{2}A\, cot \frac{1}{2}B - 1}$, so erhält man $cot \frac{1}{2}A + cot \frac{1}{2}B + cot \frac{1}{2}C = cot \frac{1}{2}A \,.\, cot \frac{1}{2}B \,.\, cot \frac{1}{2}C$. Nun ist aber zufolge des vorigen §. $cot \frac{1}{2}A + cot \frac{1}{2}B + cot \frac{1}{2}C = \frac{\frac{1}{2}s}{\varrho}$ und $cot \frac{1}{2}A\, cot \frac{1}{2}B \times cot \frac{1}{2}C = \frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\varrho^3}$. Diese beiden Ausdrücke einander gleich gesetzt, alsdann die Gleichung mit ϱ^3 multiplicirt, und dann mit $\frac{1}{2}s$ dividirt, ergiebt sich

$$\varrho^2 = \frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s} \quad \text{oder} \quad \varrho = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s}}.$$

§. 26. Durch die Linien OA, OB, OC wird das Dreieck ABC in drei Dreiecke getheilt, welche dieselbe Höhe $= \varrho$ haben und deren drei Grundlinien a, b, c sind. Daraus ergiebt sich, dafs der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC = \frac{1}{2}\varrho\, a + \frac{1}{2}\varrho\, b + \frac{1}{2}\varrho\, c = \frac{1}{2}s \,.\, \varrho$

$$= \tfrac{1}{2}s \,.\, \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}s \,.\, (\tfrac{1}{2}s-a)(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-c)};$$

ein schon im 15ten Jahrhundert bekannter geometrischer und zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks sehr brauchbarer Satz.

§. 27. Weil die Höhe AD des Dreiecks ABC, wenn BC zur Basis genommen wird, die gemeinschaftliche Cathete der beiden rechtwinklichten Dreiecke ABD, ACD, so ist dieselbe (§. 22.) sowohl $AB \,.\, sin\, B$ als auch $AC \,.\, sin\, C$ oder $= c\, sin\, B = b\, sin\, C$. Bezeichnet man also den Flächeninhalt des Dreiecks durch S, so hat man $S = \frac{1}{2}ac\, sin\, B = \frac{1}{2}ab\, sin\, C$. Auf gleiche Weise würde man auch $S = \frac{1}{2}bc\, sin\, A$ gefunden haben.

Daraus ergiebt sich zugleich $sin\, A = \frac{2S}{bc}$, $sin\, B = \frac{2S}{ca}$, $sin\, C = \frac{2S}{ab}$,

wo $S = \sqrt{\frac{1}{2}s \,.\, (\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}$.

§. 28. Zugleich erhält man auch, weil $a = 2r\, sin\, A$, $b = 2r\, sin\, B$, $c = 2r\, sin\, C$, wo r den Halbmesser des um ABC umschriebenen Kreises bedeutet, $r = \frac{abc}{4S}$.

Eben so ergiebt sich der Radius des eingeschriebenen Kreises

$$\varrho = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s}} = \frac{S}{\frac{1}{2}s}.$$

Daher $r\varrho = \frac{abc}{2s}$ oder $2s\, r\varrho = abc$, und $\frac{\varrho}{r} = \frac{4S^2}{\frac{1}{2}s.abc} = \frac{4(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{abc}$

§. 29. Aus $sin\, A = \frac{2S}{bc}$ folgt (p. 125. §. 47.) $cos \frac{1}{2}A\, sin \frac{1}{2}A = \frac{S}{bc}$, und weil $tan \frac{1}{2}A = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s-a} = \frac{S}{\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s-a)}$, so erhält man: $cos \frac{1}{2}A\, sin \frac{1}{2}A \,.\, tan \frac{1}{2}A = sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{S^2}{\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s-a)bc} = \frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}$ also $sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}}$

Eben so $cos \frac{1}{2}A \,.\, sin \frac{1}{2}A \,.\, cot \frac{1}{2}A = \frac{S}{bc} \,.\, \frac{\frac{1}{2}s-a}{\varrho} = \frac{\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s-a)}{bc}$. Daher $cos \frac{1}{2}A\, sin \frac{1}{2}A \,.\, cot \frac{1}{2}A = cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s-a)}{bc}$ und $cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s-a)}{bc}}$.

§. 30. Aus der gegenseitigen Verbindung der Gleichungen

$$cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\tfrac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-a)}{bc}} \qquad sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\tfrac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}}$$

$$cos \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-b)}{ca}} \qquad sin \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{(\frac{1}{2}s-c)(\frac{1}{2}s-a)}{ca}}$$

$$cos \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\tfrac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-c)}{ab}} \qquad sin \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\tfrac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{ab}}$$

ergeben sich mehrere brauchbare Formeln. So erhält man:

$$cos \tfrac{1}{2}A \,.\, cos \tfrac{1}{2}B = \tfrac{\frac{1}{2}s}{c} \sqrt{\tfrac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{ab}} = \tfrac{\frac{1}{2}s}{c} \,.\, sin \tfrac{1}{2}C$$

$$sin \tfrac{1}{2}A \,.\, sin \tfrac{1}{2}B = \tfrac{\frac{1}{2}s-c}{c} \sqrt{\tfrac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{ab}} = \tfrac{\frac{1}{2}s-c}{c} \,.\, sin \tfrac{1}{2}C$$

$$cos \tfrac{1}{2}A \,.\, sin \tfrac{1}{2}B = \tfrac{\frac{1}{2}s-a}{c} \sqrt{\tfrac{\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s-c)}{ab}} = \tfrac{\frac{1}{2}s-a}{c} \,.\, cos \tfrac{1}{2}C$$

$$sin \tfrac{1}{2}A \,.\, cos \tfrac{1}{2}B = \tfrac{\frac{1}{2}s-b}{c} \sqrt{\tfrac{\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s-c)}{ab}} = \tfrac{\frac{1}{2}s-b}{c} \,.\, cos \tfrac{1}{2}C.$$

Daraus

$$cos \tfrac{1}{2}A \,.\, cos \tfrac{1}{2}B - sin \tfrac{1}{2}A \,.\, sin \tfrac{1}{2}B = cos \tfrac{1}{2}(A+B) = sin \tfrac{1}{2}C$$

$$cos \tfrac{1}{2}A \,.\, cos \tfrac{1}{2}B + sin \tfrac{1}{2}A \,.\, sin \tfrac{1}{2}B = cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{c}\, sin \tfrac{1}{2}C$$

$$sin \tfrac{1}{2}A \,.\, cos \tfrac{1}{2}B + sin \tfrac{1}{2}A \,.\, sin \tfrac{1}{2}B = sin \tfrac{1}{2}(A+B) = cos \tfrac{1}{2}C$$

$$sin \tfrac{1}{2}A \,.\, cos \tfrac{1}{2}B - cos \tfrac{1}{2}A \,.\, sin \tfrac{1}{2}B = sin \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{c}\, cos \tfrac{1}{2}C.$$

Die erste und dritte dieser 4 Gleichungen enthalten nichts Neues. Die zweite und vierte aber können mit Nutzen zur Auflösung ebener Dreiecke gebraucht werden.

§. 31. Aus den beiden Gleichungen $\cos\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{c}\sin\frac{1}{2}C$, $\sin\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{c}\cos\frac{1}{2}C$, erhält man durch Division $\cot\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}C$, oder auch $\tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$, und weil $\cot\frac{1}{2}C = \tan\frac{1}{2}(A+B)$, so bekömmt man den bekannten Satz $\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}$, oder die Tangente der halben Summe zweier Winkel eines ebenen Dreiecks verhält sich zur Tangente des halben Unterschiedes derselben, wie die Summe der gegenüberliegenden Seiten zu ihren Unterschiede.

Aus der Gleichung $\cot\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}C$ folgt auch, weil

$\frac{1}{2}(A-B) + B + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(A+B+C) = 90^\circ$, $\tan(B+\frac{1}{2}C) = \frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}C$.

§. 32. Vermittelst der Formeln (§. 30.) hat man auch

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s)^3\cdot(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{a^2b^2c^2}} = \tfrac{1}{2}s\,\frac{S}{abc} = \frac{\frac{1}{2}s}{4r}.$$

Zugleich ist aber auch (p. 124. §. 44.) und weil $\cos\frac{1}{2}C = \sin\frac{1}{2}(A+B)$,

$$4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = 2[\cos\tfrac{1}{2}(A-B) + \cos\tfrac{1}{2}(A+B)]\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(A+B) + 2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Demnach $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{\frac{1}{2}s}{r}$, was auch unmittelbar aus (§. 22.) folgt, weil $a = 2r\sin A$, $b = 2r\sin B$, $c = 2r\sin C$ also $s = 2r(\sin A + \sin B + \sin C)$.

§. 33. Aus den Formeln (§. 30.) ergiebt sich auch

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{abc} = \frac{S^2}{\frac{1}{2}s\,.\,abc} = \frac{\varrho}{4r}.$$

Es ist aber (p. 124. §. 44.) $2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B = \cos\frac{1}{2}(A-B) - \cos\frac{1}{2}(A+B)$, folglich $4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C = 2\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B) - 2\sin^2 C =$
$\cos A + \cos B + \cos C - 1$.

Nun übersieht man aber leicht, dafs, wenn O der Mittelpunct des um das Dreieck ABC umschriebenen Kreises, dessen Halbmesser $= r$, die von O auf die Seiten BC, CA, AB gezogenen Perpendikel OD, OE, OF respective den Gröfsen $r\cos A$, $r\cos B$, $r\cos C$ gleich sein müssen. Weil also

$4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C = \frac{\varrho}{r} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$, so erhält man

$\varrho + r = r\cos A + r\cos B + r\cos C$. Oder in jedem ebenen Dreiecke ist die Summe der drei aus dem Mittelpuncte des umschriebenen Kreises auf die Seiten des Dreiecks gezogenen senkrechten Linien gleich der Summe der beiden Halbmesser des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises.

§. 34. Aus $\tan\frac{1}{2}A = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s-a}$, $\tan\frac{1}{2}B = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s-b}$, $\tan\frac{1}{2}C = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s-c}$,

hat man $\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C = \frac{\varrho^3}{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)} = \frac{\varrho^3}{\frac{1}{2}s\,.\,\varrho^2} = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s} = \frac{S}{\frac{1}{2}s\,.\,\frac{1}{2}s}$.

Demnach $S = (\frac{1}{2}s)^2\,.\,\tan\frac{1}{2}A\,.\tan\frac{1}{2}B\,.\tan\frac{1}{2}C$.

§. 35. Eben so erhält man $\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C = \frac{\varrho^2}{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)} = \frac{\frac{1}{2}s-a}{\frac{1}{2}s}$

oder auch, weil

$\tan\frac{1}{2}B = \cot\frac{1}{2}(A+C)$, $\tan\frac{1}{2}C = \cot\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{\frac{1}{2}s-a}{\frac{1}{2}s} = \frac{\tan\frac{1}{2}B}{\tan\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}C}{\tan\frac{1}{2}(A+C)}$.

§. 36. Weil, wenn A, B, C die Winkel eines ebenen Dreiecks bedeuten, $\sin A = \sin(B+C)$, so hat man $\sin A = \sin B\,.\cos C + \sin C\,.\cos B$. Diese Gleichung mit dem Durchmesser $2r$ des umschriebenen Kreises multiplicirt, weil $a = 2r\sin A$, $b = 2r\sin B$, $c = 2r\sin C$, ergiebt sich $a = b\cos C + c\cos B$. Eben so erhält man $b = c\cos A + a\cos C$, $c = a\cos B + b\cos A$. Es ist also jede Seite eines ebenen Dreiecks gleich der Summe der beiden andern Seiten, jede multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit jener macht.

§. 37. Multiplicirt man die drei so eben gefundenen Gleichungen resp. mit a, b, c,

so erhält man $a^2 = ab\cos C + ac\cos B$; daraus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = bc\cos A + ba\cos C$; $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = ca\cos B + cb\cos A$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Es ist also das Quadrat jeder Seite eines ebenen Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Rechtecke aus denselben multiplicirt mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke.

§. 38. Aus den beiden Catheten a, b, die Hypotenuse c und die beiden spitzen Winkeln A, B zu finden.

Es ist $\tan A = \frac{a}{b}$, $B = 90^\circ - A$ oder auch $\tan B = \frac{b}{a}$. Ist der Winkel A bekannt, so findet man daraus die Hypotenuse $c = a\,\mathrm{cosec}\,A = \frac{a}{\sin A}$. Man kann aber auch die Hypotenuse unmittelbar durch die Gleichung $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ finden, allein dieser Ausdruck, weil er sich nicht in Factoren zerlegen läfst, ist zur Berechnung mit Logarithmen nicht bequem.

§. 39. Aus der Hypotenuse c und der einen Cathete a, die andere Cathete b und die Winkel A, B zu finden.

Weil $b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$, so erhält man $\log b = \frac{1}{2}\log(c+a) + \frac{1}{2}\log(c-a)$.

Die beiden Winkel A, B ergeben sich durch die Formeln $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$. Differirt $\frac{a}{c}$ sehr wenig von der Einheit, so bediene man sich, weil $\frac{1-\cos B}{2} = \sin^2\frac{1}{2}B$, $\frac{1-\cos B}{1+\cos B} = \tan^2\frac{1}{2}B$, der Formeln $\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{c-a}{2c}}$, $\tan\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$.

§. 40. Aus der einen Cathete a und einem der beiden Winkel A, B, die andere Cathete und die Hypotenuse c zu berechnen.

Ist der eine von beiden Winkeln A, B gegeben, so ist auch der andere bekannt. Man hat also $b = a\tan B$ oder $b = a\cot A$. Die Hypotenuse aber wird gefunden durch die Formel $c = a.\mathrm{cosec}\,A = \frac{a}{\sin A}$ oder auch $c = a.\sec B = \frac{a}{\cos B}$.

§. 41. Die Hypotenuse c und einer der beiden Winkel A, B sind gegeben; man soll eine der Catheten bestimmen.

Die Auflösung dieser Aufgaben ist in den Formeln $a = c\sin A = c\cos B$, $b = c\sin B = c\cos A$ enthalten.

Auflösung der ebenen Dreiecke im Allgemeinen.

§. 42. Aus den drei Seiten a, b, c eines schiefwinklichten Dreiecks einen Winkel A, B, C zu finden.

I. Aus (§. 37.) ergiebt sich:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

II. $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}}$, $\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-c)(\frac{1}{2}s-a)}{ca}}$, $\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{ab}}$

III. $\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-a)}{bc}}$, $\cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-b)}{bc}}$, $\cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-c)}{ab}}$

IV. $\tan\frac{1}{2}A = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s-a}$, $\tan\frac{1}{2}B = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s-b}$, $\tan\frac{1}{2}C = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}s-c}$, wo ϱ der Halbmesser des in dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises $= \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s}}$

V. $\sin A = \frac{2S}{bc}$, $\sin B = \frac{2S}{ca}$, $\sin C = \frac{2S}{ab}$, wo S der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC = \sqrt{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}$ ist.

§. 43. Aus zwei Seiten a, b und einem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel A, die beiden andern Winkel B, C, und die dritte Seite c zu finden.

Vermittelst der Proportion $a : b = \sin A : \sin B$ findet man zunächst den Winkel B, dessen Sinus $= \frac{b \sin A}{a}$. Dieser Sinus kann sowohl einem spitzen Winkel B als einem stumpfen B', dem Supplemente von B, angehören. Doch kann diese Zweideutigkeit nur dann statt finden, wenn A ein spitzer Winkel, und $b > a$ ist. Ist A ein stumpfer Winkel, so kann B nur einen Werth haben; was auch der Fall ist, wenn A ein spitzer Winkel aber $b < a$ ist.

Hat man den Winkel B gefunden, so ist auch C bekannt, und man erhält die Seite $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$. Man könnte dieselbe auch unmittelbar vermittelst der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ herleiten. Betrachtet man sie nämlich als die Wurzel der quadratischen Gleichung $c^2 - 2b \cos A . c + b^2 - a^2 = o$, so erhält man $c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cos^2 A - b^2 + a^2} = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$. Allein dieser Werth läfst sich nur, durch Logarithmen, vermittelst eines Hülfswinkels B oder B' berechnen, dafs also diese Auflösung in der bereits gegebenen enthalten ist.

§. 44. Aus zwei Seiten eines Dreiecks a, b, und dem eingeschlossenen Winkel B, die beiden andern Winkel und die dritte Seite zu finden.

Vermittelst der Formel (§. 31.) findet man $\tan \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} B$. Wir nehmen hier $a > b$, und folglich $A > B$ an. Man hat demnach, weil $\frac{1}{2} B$ und also auch $\frac{1}{2}(A + B)$ gegeben ist, die halbe Summe und den halben Unterschied der beiden Winkel A, B, und daraus die Winkel selbst.

Sind die Winkel A, B bekannt, so erhält man $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ oder $= \frac{b \sin C}{\sin B}$.

Es läfst sich übrigens die Seite c aus a, b, und C auch unmittelbar, vermittelst der beiden Formeln (§. 31.) $\tan (B + \frac{1}{2} C) = \frac{a + b}{a - b} \tan \frac{1}{2} C$, $c = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2} C}{\sin (B + \frac{1}{2} C)}$

sehr bequem herleiten. Der Ausdruck für c ergiebt sich nämlich aus der Gleichung (§. 30.) $\cos \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a + b}{c} . \sin \frac{1}{2} C$, weil $\frac{1}{2}(A - B) + B + \frac{1}{2} C = \frac{1}{2}(A + B + C) = 90^\circ$ und folglich $\cos \frac{1}{2}(A - B) = \sin (B + \frac{1}{2} C)$.

Setzt man $\frac{b}{a} = \tan \varphi$, so ist $\tan \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} C = \frac{1 - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi} \cot \frac{1}{2} C$ $= \frac{\tan 45^\circ - \tan \varphi}{1 + \tan 45^\circ \tan \varphi} \cot \frac{1}{2} C = \tan (45^\circ - \varphi) . \cot \frac{1}{2} C$. Diese Formel kann mit Nutzen gebraucht werden, wenn statt der Seiten a, b die Logarithmen derselben gegeben sind.

§. 45. Aus einer Seite a und zwei Winkeln, die beiden andern Seiten b, c zu finden.

Wenn zwei Winkel eines Dreiecks gegeben sind, so ist auch der dritte bekannt. Man hat demnach $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Beispiele zur Berechnung ebener Dreiecke.

§. 46. Exempel I. Für eine gegebene Höhe, von welcher man den Horizont des Meeres übersehen kann, den Depressionswinkel zu finden, den die Gesichtslinie nach einem Puncte des Horizonts mit dem wahren Horizonte macht.

Die Erde wird hier als eine Kugel betrachtet. Es sei der Halbmesser derselben $= r$, die Höhe über der Meeresfläche $= h$. Da die drei Puncte der Mittelpunct der Erde A, das Auge des Beobachters B, der beobachtete Punct des Horizonts C, ein rechtwinklichtes Dreieck bilden, und der gesuchte Depressionswinkel, den die Gesichtslinie BC mit dem wahren Horizonte oder einer auf der Verticallinie BA senkrechten Linie macht, das Complement von CBA also dem Winkel BCA gleich ist, so hat man nur die Aufgabe aufzulösen: Aus der Hypotenuse $AB = r + h$ eines recht-

winklichten Dreiecks und der einen Cathete $AC = r$ den anliegenden Winkel CAB zu finden. Nun ist (§. 22.) $cos\, A = \frac{b}{c} = \frac{r}{r+h}$. Da aber h im Verhältnisse zu r immer sehr klein ist, also $cos\, A$ sehr wenig von 1 abweicht, so ist die obige Formel zur Berechnung nicht brauchbar. Es ist aber $1 - cos\, A = 2\, sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{h}{r+h}$ also $sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{h}{2(r+h)}}$; eben so $\frac{1 - cos\, A}{1 + cos\, A} = tan^2 \frac{1}{2} A = \frac{h}{2r+h}$ und $tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{h}{2r+h}}$. Beide Formeln können mit Nutzen gebraucht werden. Es sei $h = 20$ Mètres. Weil der Erdquadrant = 10000000 Mètres, so ist $r = \frac{20000000}{\pi} = 6366198$.

Also $tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{20}{12732416}}$.

Nun ist	$l\ 20$ =	1,3010300
	$l\ 12732416$ =	7,1049108
	Rest	14,1961192 — 20
	halbirt	7,0980596 = $log\ tan$ 4′ 18″, 5 also A = 8′, 37″.

Substituirt man in der Formel $Arc.\ tan. \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} -$ etc., $\sqrt{\frac{h}{2r+h}}$ für θ, und vernachlässigt wegen der Kleinheit alle höhern Potenzen von θ als die dritte, so ist

$$Arc. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\tfrac{h}{2r+h}} (1 - \tfrac{1}{3} \tfrac{h}{2r+h}) = \sqrt{h} . \sqrt{\tfrac{1}{2r}} . (1 + \tfrac{h}{2r})^{-\frac{1}{2}} (1 - \tfrac{1}{3} \tfrac{h}{2r+h}),$$

und man erhält, wenn $Arc. \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \frac{x\pi}{2}$, $x = \sqrt{h} . \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{40000000}} . (1 - \frac{1}{6} \frac{\pi}{40000000} h)$ $= \frac{\sqrt{h}}{10000} . \sqrt{\frac{40}{\pi}} (1 - \frac{5\pi h}{6 . 40000000})$. Daraus folgt: $log . x = \frac{1}{2} log\ h + 0{,}5524550 - 4 + log (1 - 0{,}0000000654498\ h)$.

Es ist aber $log\ vulg. (1 - \omega) = - M (\omega + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} +$ etc.), und wenn man nur die erste Potenz von ω beibehält, $log\ vulg. (1 - \omega) = - M \omega = - 0{,}43429\ \omega$. Demnach $log\ x = \frac{1}{2} log\ h + 0{,}5524550 - 4 - 0{,}00000002840\ h$. Es sei wie vorhin $h = 20$

Mètres, so erhält man $log\ x = 0{,}2029694 - 3$, also $x = 0{,}001595767 = 15′\ 95″\ 76‴, 7$ nach der Decimaleintheilung, die, nach (§. 21.) in die gewöhnliche verwandelt, 8′ 37″ 17‴ ausmacht.

Aus $x = 0{,}001595767$ ergiebt sich 15957,67 für den dem Winkel CAB zugehörigen Bogen eines gröfsten Kreises der Erde.

Die Linie AB selbst $= \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{(2r+h)h}$ findet man 15957,7, wie sich voraussetzen liefs, ohne merklichen Unterschied von dem dazu gehörigen Bogen.

§. 47. Exempel II. Es sei AC eine Entfernung von 79,60 Fufs, BC eine andere Entfernung von 843,06 Fufs, und der Winkel $ACB = 143° 36′$; man soll daraus die Entfernung BC bestimmen.

Die Aufflösung dieser Aufgabe ist in den beiden Formeln (§. 31, 45.) enthalten.

a = 843,06	$log\,(a+b)$ = 2,9650417		$l\,(a+b)$ = 2,9650417
b = 79,60	$log\ comp.\,(a-b)$ = 7,1172137		$l\ sin \frac{1}{2} C$ = 9,9777108
C = 143° 36′	$l\ tan \frac{1}{2} C$ = 10,4830903	$comp.\ l\ sin\,(B + \frac{1}{2} C)$ =	0,0155048
$a + b$ = 922,66	$l\ tan\,(B + \frac{1}{2} C)$ = 10,5653457		2,9582573
$a - b$ = 763 46		= log 908,36	
$\frac{1}{2} C$ = 71° 48′			

§. 48. Exempel III. Um auf einer Ebne die gegenseitige Entfernung zweier unzugänglichen Gegenstände A, B zu erhalten, messe man eine Grundlinie CD, und die beiden anliegenden Winkel ACD, ADC; eben so die beiden Winkel BCD, BDC. Nun bestimme man aus den erstern beiden Winkeln und der Grundlinie CD die Entfernung AC; aus den letztern beiden und aus AC die Entfernung BC, so läfst sich aus AC, BC, und dem Winkel $ACB = ACD - BCD$, die gesuchte Linie AB berechnen.

Es sei CD = 152 Mètres. Nun ist $AC = \frac{CD . sin\, ADC}{sin\, CAD}$, $CB = \frac{CD . sin\, BDC}{sin\, CBD}$

Es sei ACD	$= 108° 34'$			
BCD	$= 46° 23$	$l\ 152 = 2{,}1818436$	$l\ 152 = 2{,}1818436$	
CDA	$= 56° 31'$	$l\ sin\ 56° 31 = 9{,}9211902$	$l\ sin\ 99° 38' = 9{,}9938324$	
CDB	$= 99° 38$	$comp.\ l\ sin\ 14° 55' = 0{,}5893680$	$comp.\ l\ sin\ 33° 59' = 0{,}2526257$	
so ist ACB	$= 62° 11'$	$l.\ \overline{AC} = 2{,}6924018$	$l.\ \overline{BC} = 2{,}4283017$	
CAD	$= 14° 55'$	$\overline{AC} = 492{,}495$	$\overline{BC} = 268{,}103$	
CBD	$= 33° 59'$			
$\overline{AC} + \overline{BC}$	$= 760{,}598$	$l\ 760{,}598 = 2{,}8811552$	$l\ 760{,}598 = 2{,}8811552$	
$\overline{AC} - \overline{BC}$	$= 224{,}392$	$comp.\ l\ 224{,}392 = 7{,}6489926$	$l\ sin\ 31° 5' 30'' = 9{,}7129939$	
Winkel ACB	$= 62° 11'$	$l\ tan\ 31° 5' 30'' = 9{,}7803463$	$comp.\ l\ sin(B + \frac{1}{2}C) = 0{,}0465950$	
		$l\ tan(B + \frac{1}{2}C) = 10{,}3104941$	$l\ AB = 2{,}6407439$	
			Also $AB = 437{,}264$	

§. 49. Exempel IV. Aus den drei Seiten eines Dreiecks a, b, c die Winkel zu finden. Es sei

a	$= 268{,}103$	$compl.\ l\ \frac{1}{2}s$	$= 7{,}2226232$		
b	$= 492{,}495$	$l(\frac{1}{2}s - a)$	$= 2{,}5196024$		
c	$= 437{,}264$	$l(\frac{1}{2}s - b)$	$= 2{,}0270886$		
s	$= 1197{,}862$	$l(\frac{1}{2}s - c)$	$= 2{,}2086214$		
$\frac{1}{2}s$	$= 598{,}931$		$3{,}9779356$		
$\frac{1}{2}s - a$	$= 330{,}828$	$l\ \varrho$	$= 1{,}9889678$		
$\frac{1}{2}s - b$	$= 106{,}436$	$l\ \varrho - l(\frac{1}{2}s - a)$	$= 9{,}4693654$	$= l\ tan\ 16° 25' 11''$	
$\frac{1}{2}s - c$	$= 161{,}667$	$l\ \varrho - l(\frac{1}{2}s - b)$	$= 9{,}9618792$	$= l\ tan\ 42° 29' 19''$	
		$l\ \varrho - l(\frac{1}{2}s - c)$	$= 9{,}7803464$	$= l\ tan\ 31° 5' 30''$	

Folglich $\frac{1}{2}A = 16° 25' 11''$, $\frac{1}{2}B = 42° 29' 19''$, $\frac{1}{2}C = 31° 5' 30''$.

Die Summe dieser Winkel ist $= 90°$, wodurch die Richtigkeit der Rechnung bestätigt wird.

§. 50. Exempel V. Aus der gegebenen Lage dreier Puncte A, B, C, die Lage eines vierten Punctes D zu bestimmen, der mit den erstern in derselben Ebene liegt und von welchem aus man die Winkel $ADB = \beta$, $ADC = \gamma$ gemessen hat.

Man beschreibe über AB ein Segment $ADEB$, das den Winkel $ADB = \beta$ in sich fafst. Diefs geschieht, indem man über AB ein in B rechtwinklichtes Dreieck ABE beschreibt, so dafs der Winkel $E = \beta$ oder $= 180° - \beta$, und die beiden Puncte E, D auf einer oder verschiedenen Seiten von AB liegen, je nachdem β ein spitzer oder stumpfer Winkel ist. Die Hypotenuse AE wird alsdann der Durchmesser des zu dem Segmente $ADEB$ gehörigen Kreises sein. Eben so beschreibe man über AC ein Segment, das den Winkel $ADC = \gamma$ in sich fafst. Die beiden Bogen werden einander in A und D schneiden, und der Punct D wird der verlangte Punct sein. Die Puncte des Bogens $ADEB$ nämlich sind die einzigen, von welchen aus AB unter dem Winkel β gesehen wird, und eben so die Puncte des Bogens ADC die einzigen, von wo aus man AC unter dem Winkel γ sehen kann. Der Durchschnittspunct D also ist der einzige Punct, von wo aus man zugleich AB und AC unter den Winkeln β, γ sehen kann. Es kömmt jetzt darauf an, die Lage des Punctes D nach der obigen Construction trigonometrisch zu berechnen.

§. 51. Es seien $a = 9000$ Fufs, $b = 7000$ Fufs, $c = 2500$ Fufs, $ADB = 27° 43' 12''$, $ADC = 109° 15' 36''$. Daraus findet man $A = 137° 22' 1''$, 2. Der Durchmesser AE aber ist $= \frac{BA}{sin\ BEA} = \frac{2500}{sin\ 27° 43' 12''} = 5374{,}6$ Fufs. Eben so erhält man den Durchmesser $AF = \frac{CA}{sin CBA} = \frac{7000}{sin\ 70° 44' 24''} = 7415$ Fufs.

Nun übersieht man aber leicht, dafs die Winkel ADE, ADF rechte Winkel sein müssen, und die Linie EDF eine gerade Linie ist. Es bleibt also noch das Dreieck EAF aufzulösen, in welchem $AE = 5374{,}6$, $AF = 7415$, und der eingeschlossene Winkel $EAF = BAC + CAF - EAB = 94° 21' 49''$. Daraus erhält man den Winkel $AED = 51° 13' 13''$, und endlich $AD = 4180{,}33$. Durch diese Entfernung und den Winkel $BAD = BAE + EAD = 101° 25' 48''$ ist die Lage des Punctes D völlig bestimmt.

Das obige Exempel ist aus *Legendres Geometrie* p. 375 entlehnt.

Grundformeln zur Auflösung sphärischer Dreiecke.

§. 52. Ein, von drei Bogen gröfsester Kreise, begrenzter Theil der Kugeloberfläche wird ein sphärisches Dreieck genannt. Die drei Bogen oder Seiten des Dreiecks werden immer kleiner als der halbe Kreisumfang angenommen. Die Winkel, welche die Ebnen dieser Bogen mit einander bilden, heifsen die Winkel des Dreiecks.

§. 53. Weil in einem sphärischen Dreiecke nur sechs Elemente, drei Seiten und drei Winkel, vorkommen, von denen irgend drei zur Bestimmung des Dreiecks hinlänglich sind, so übersieht man leicht, dafs die einfachsten Formeln wenigstens vier Elemente enthalten müssen. Die Zahl dieser Formeln, die man als die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie betrachten kann, läfst sich auf vier Gleichungen zurückführen: Nämlich 1) zwischen drei Seiten und einem Winkel; 2) zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, die den beiden Seiten gegenüberliegen; 3) zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, von denen einer der einen Seite entgegengesetzt ist, und der andere ihr anliegt, und 4) zwischen drei Winkeln und einer Seite.

§. 54. Um diese vier Grundformeln herzuleiten, betrachte man das sphärische Dreieck ABC auf der Kugelfläche, deren Halbmesser $= 1$, und deren Mittelpunct O. Man lasse von C auf die Ebne AOB das Perpendikel CD fallen. Vom Fufse desselben D ziehe man auf den Halbmesser OA die senkrechte Linie DE, und auf OB die senkrechte DF. Bezeichnet man nun die Seiten des Dreiecks BC, CA, AB resp. durch a, b, c, die Projection OD des Halbmessers OA in der Ebene AOB durch ϱ, und den Winkel AOD durch x, so ist

$$CE = \sin b, \quad CF = \sin a, \quad CD = \sin b \sin A = \sin a \sin B;$$
$$DE = \sin b \cos A = \varrho \sin x; \; EO = \cos b = \varrho \cos x;$$
$$DF = \sin a \cos B = \varrho \sin(c - x); \; FO = \cos a = \varrho \cos(c - x).$$

Es ist also $\cos a = \varrho \cos(c - x) = \cos c \,.\, \varrho \cos x + \sin c \,.\, \varrho \sin x$, und weil $\varrho \cos x = \cos b$, $\varrho \sin x = \sin b \cos A$, so erhält man die erste Grundformel zwischen drei Seiten und einen Winkel:

$$\text{(A)} \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Die beiden verschiedenen Ausdrücke für CD führen auf die zweite Grundformel zwischen zwei Seiten und den beiden gegenüberstehenden Winkeln:

$$\text{(B)} \quad \sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

Weil $\sin a \cos B = \varrho \sin(c - x) = \sin c \,.\, \varrho \cos x - \cos c \,.\, \varrho \sin x$, $\varrho \cos x = \cos b$, und $\varrho \sin x = \sin b \cos A$, so erhält man $\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A$.

Diese Gleichung, $\sin a = \frac{\sin b \sin A}{\sin B}$ gesetzt, mit $\sin b$ dividirt, ergiebt sich die dritte Fundamental-Gleichung zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, von denen der eine der einen Seite entgegengesetzt ist und der andere ihr anliegt:

$$\text{(C)} \quad \sin A \cot B = \sin c \cot b - \cos c \cos A.$$

§. 55. Die oben gefundene Gleichung $\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A$ giebt, wenn b mit c und B mit C vertauscht wird, $\sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A$. Substituirt man nun den Werth von $\sin c \cos b$ aus der erstern Gleichung in der letztern, so erhält man $\sin a \cos C = \sin b \cos c - \sin a \cos A \cos B - \cos c \sin b \cos^2 A$ $= \sin b \cos c \sin^2 A - \sin a \cos A \cos B$ oder $\frac{\sin b \sin^2 A \cos c}{\sin a} = \cos C + \cos A \cos B$.

Nun ist aber zufolge (B) $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ also $\frac{\sin b \sin^2 A}{\sin a} = \sin A \sin B$. Man erhält demnach die vierte Fundamental-Gleichung zwischen drei Winkeln und einer Seite:

$$\text{(D)} \quad \sin A \sin B \cos c = \cos C + \cos A \cos B.$$

§. 56. Mit Hülfe des analytischen Ausdrucks des Perpendikels $CD = \sin b \sin A = \sin a \sin B$ findet man unmittelbar das Volumen der dreiseitigen Pyramide, deren Spitze im Mittelpuncte der Kugel liegt, und deren Grundfläche das aus den Sehnen der Bogen a, b, c gebildete Dreieck ist. Betrachtet man nämlich die Seitenfläche AOB dieser Pyramide, deren Flächeninhalt $= \frac{1}{2} \sin c$, weil $AO = BO = 1$, als die Basis derselben, so ist CD die Höhe derselben, und folglich $\frac{1}{3} CD \,.\, \frac{1}{2} \sin c$ $= \frac{1}{6} \sin b \sin c \sin A$ oder $= \frac{1}{6} \sin c \sin a \sin B$ ihr körperlicher Inhalt.

§. 57. Wenn es ein Vortheil der Analysis ist aus der möglichst geringen Anzahl von Grundformeln, alle übrigen darin enthaltenen Wahrheiten herzuleiten, so möchte es vorzuziehen sein, wie Lagrange zuerst gelehrt hat, aus der ersten als einzigen Grundformel der sphärischen Trigonometrie alle übrigen abzuleiten. Diese Gleichung aber wird sehr leicht folgendermafsen bewiesen. Man lege durch den Punct A des sphärischen Dreiecks ABC, die beiden Berührungslinien der Bogen AB, AC, welche resp. mit den verlängerten Halbmessern OB, OC in D und E zusammentreffen, so ist $AD = \tan c$, $DO = \sec c$, $AE = \tan b$, $EO = \sec b$, DAE der Winkel A des sphärischen Dreiecks ABC und $DOE = a$. Man erhält also (§. 37.)

$$\overline{DE}^2 = \tan^2 b + \tan^2 c - 2 \tan b \tan c \cos A$$
$$\text{und auch} = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a.$$

Subtrahirt man nun den ersten Ausdruck für $\overline{DE}^2$ von dem letztern, und dividirt den Rest durch 2, so ergiebt sich, weil $\sec^2 b - \tan^2 b = 1$; $\sec^2 c - \tan^2 c = 1$,

$$1 + \tan b \tan c \cos A - \sec b \sec c \cos a = o.$$

Diese Gleichung durch $\cos b \cos c$ multiplicirt, verwandelt sich dieselbe, weil $\tan b \cos b = \sin b$, $\sec b \cos b = 1$, etc. in die bereits (§. 55.) gefundene

$$\text{(A)} \quad \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A - \cos a = o.$$

Da zufolge der Voraussetzung zwischen den vier Gröfsen a, b, c A keine andere Bedingung statt findet, als dafs a, b, c die drei Seiten des Dreiecks, und A ein der einen dieser Seiten gegenüberliegender Winkel ist, so ergeben sich aus der Formel (A) folgende beide:

$$\cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B - \cos b = o$$
$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C - \cos c = o.$$

§. 58. Aus der Formel (A) erhält man unmittelbar $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

und daraus $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \dfrac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Folglich $\sin A = \dfrac{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos c \cos c)}}{\sin b \sin c}$.

Bezeichnet man den Zähler dieses Bruchs durch k, so hat man $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{k}{\sin a \sin b \sin c}$. Nun ist aber $\dfrac{k}{\sin a \sin b \sin c}$ eine solche Function von a, b, c, deren Werth unveränderlich bleibt, wie auch die Gröfsen a, b, c mit einander verwechselt werden. Man erhält also, wenn man a in b und A in B oder a in c und A in C und umgekehrt verwandelt:

$$\text{(B)} \quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{k}{\sin a \sin b \sin c}.$$

§. 59. Aus den beiden Gleichungen (A)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

erhält man, wenn man in der ersten den Werth von $\cos b$ der zweiten substituirt:

$$\cos a = \cos^2 c \cos a + \cos c \sin c \sin a \cos B + \sin b \sin c \cos A,$$

oder $\cos a \sin^2 c = \cos c \sin c \sin a \cos B + \sin b \sin c \cos A$.

Diese Gleichung durch $\sin a \sin c$ dividirt, und alsdann $\dfrac{\sin b}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$, $\dfrac{\cos a}{\sin a} = \cot a$, $\dfrac{\cos A}{\sin A} = \cot A$ gesetzt, ergiebt sich die dritte Grundformel

$$\text{(C)} \quad \sin c \cot a = \cos c \cos B + \sin B \cot A.$$

Die Ableitung der vierten Grundformel (D) ist bereits (§. 55.) gezeigt worden.

§. 60. Substituirt man in den beiden Fundamental-Gleichungen (A), (D) für die Winkel A, B, C ihre Supplemente, indem man dieselben durch A', B', C' bezeichnet, so verwandeln sich dieselben in:

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A'$$
$$\cos A' = \cos B' \cos C' - \sin A' \sin C \cos a.$$

Diese beiden Formeln haben eine auffallende Ähnlichkeit, und es verwandelt sich die eine in die andere, indem man resp. a, b, c mit A', B', C' verwechselt. Es wer-

den daher alle Formeln, die aus der Formel (A) hergeleitet werden, auch wahr sein, indem man die obigen Veränderungen macht.

Es ergiebt sich daraus, dafs jedes sphärische Dreieck in ein anderes verwandelt werden kann, dessen Seiten und Winkeln resp. die Supplemente der Winkel und der Seiten des erstern sind. Dieses Dreieck ist das sogenannte Supplementar- oder Polar-Dreieck, und wird auf der Kugelfläche durch die drei Pole der Bogen des gegebenen Dreiecks gebildet.

§. 61. Den Ausdruck für das Volumen der dreiseitigen Pyramide, deren Spitze in O und deren Basis das, von den Sehnen der Seiten des sphärischen Dreiecks ABC, eingeschlossene ebene Dreieck ist, findet man ohne Hülfe irgend einer andern als der eben gebrauchten Figur auf folgende Weise.

Das Volumen der dreiseitigen Pyramide, deren Spitze O und deren Basis das Dreieck DAE, ist offenbar $\frac{1}{6} \tan b \tan c \sin A$. Betrachtet man aber das Dreieck DOE als die Grundfläche derselben, und bezeichnet deren Höhe durch h, so ist ihr Volumen $= \frac{1}{6} \sec b \sec c \sin a . h$. Daraus $h = \frac{\sin b \sin c \sin A}{\sin a}$. Es ist aber auch h die Höhe der Pyramide $ABCO$, wenn BCO zur Basis genommen wird; weil nun der Flächeninhalt von $BCO = \frac{1}{2} \sin a$, so ist $\frac{1}{6} \sin a . h$ das gesuchte Volumen der Pyramide $OABC$ oder, wie wir bereits gefunden haben, $= \frac{1}{6} \sin b \sin c \sin A$ oder auch $= \frac{1}{6} \sin c \sin a \sin B = \frac{1}{6} \sin a \sin b \sin C$.

§. 62. Zufolge (§. 58.) ist $\sin b \sin c \sin A = k = \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)}$. Folglich k das sechsfache Volumen der dreiseitigen Pyramide, welche durch die drei nach den Winkeln A, B, C des sphärischen Dreiecks gezogenen Halbmesser der Kugel gebildet wird.

§. 63. Aus den vier allgemeinen Grundformeln (§. 54, 55.) lassen sich unmittelbar die zur Auflösung des rechtwinklichten Dreiecks nöthigen Formeln ableiten. Es kann aber nur sechs solcher Gleichungen geben; diese enthalten, wenn wir die dem rechten Winkel C gegenüberliegende Seite c die Hypotenuse, die beiden andern a, b die

Catheten nennen: 1) die drei Seiten a, b, c; 2) die beiden Catheten a, b, und einen der beiden Winkel A oder B; 3) die Hypotenuse c, eine Cathete a und der gegenüberstehende Winkel A; 4) die Hypotenuse c, eine Cathete a und der anliegende Winkel B; 5) die Hypotenuse c und die beiden Winkel A, B, und endlich 6) eine Cathete a und die beiden Winkel A, B. Man erhält diese sechs Formeln folgendermafsen:

1)	a, b, c, C	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$	$\cos c = \cos a \cos b$
2)	$a, b, A\ C$	$\sin b \cot a = \sin C \cot A + \cos b \cos C$	$\sin b \cot a = \cot A$
3)	$a, c, A\ C$	$\sin a \sin C = \sin c \sin A$	$\sin a = \sin c \sin A$
4)	$a, c, B\ C$	$\sin a \cot c = \sin B \cot C + \cos a \cos B$	$\cot c = \cot a \cos B$
5)	$c\ A\ B\ C$	$\sin A \sin B \cos c = \cos C + \cos A \cos B$	$\cos c = \cot A \cot B$
6)	$a\ A\ B\ C$	$\sin B \sin C \cos a = \cos A + \cos B \cos C$	$\sin B \cos a = \cos A$

Mit Hülfe dieser sechs Gleichungen lassen sich alle Fälle des sphärischen rechtwinklichten Dreiecks auflösen, und weil sie sich unter einer zur logarithmischen Berechnung sehr bequemen Form darbieten, so bediente man sich derselben gewöhnlich in der Trigonometrie zur Auflösung jedes sphärischen Dreiecks im allgemeinen, indem man dasselbe durch einen senkrechten Bogen in zwei rechtwinklichten Dreiecke zerlegte. Man kann aber auch dazu die vier Fundamental-Formeln gebrauchen, indem man dieselben durch zweckmäfsige Veränderungen zum Gebrauch der Logarithmen einzurichten sucht.

§. 64. Aus der Formel (A) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ ergiebt sich $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$. Daraus erhält man, wenn $a + b + c = s$,

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} s . \sin(\frac{1}{2} s - a)}{\sin b \sin c}$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin(\frac{1}{2} s - c) \sin(\frac{1}{2} s - b)}{\sin b \sin c}.$$

Folglich $\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ oder $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} s . \sin(\frac{1}{2} s - a)}{\sin b \sin c}}$

$\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$ oder $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2} s - b) \sin(\frac{1}{2} s - c)}{\sin b \sin c}}$.

Verwechselt man a mit b, A mit B, und umgekehrt, so erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-b)}{\sin c\,\sin a}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-c)\,\sin(\tfrac{1}{2}s-a)}{\sin c\,\sin a}}.$$

Eben so erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}{\sin a\,\sin b}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\,\sin(\tfrac{1}{2}s-b)}{\sin a\,\sin c}}.$$

§. 65. Weil $2\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}A = \sin A$, so hat man:

$$\sin A = 2\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}{\sin b\,\sin c}}.$$

Es ist aber (§. 63.)

$$\sin A = \frac{k}{\sin b\,\sin c} = \sqrt{\frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}{\sin b\,\sin c}}.$$

Folglich $2\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-c)} = k.$

§. 66. Weil $\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A} = \tan\tfrac{1}{2}A$, so hat man

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\,\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-a)}} = \frac{1}{\sin(\tfrac{1}{2}s-a)}\sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}{\sin\tfrac{1}{2}s}}.$$

Denkt man sich in dem sphärischen Dreiecke ABC einen kleinen Kreis beschrieben, der die Seiten des Dreiecks BC, CA, AB resp. in D, E, F berührt, und bezeichnet den Pol dieses kleinen Kreises durch O, so werden die drei Bogen gröfsester Kreise OD, OE, OF unter sich gleich sein, und mit den Seiten des Dreiecks ABC rechte Winkel bilden. Zugleich läfst sich auf ähnliche Weise, wie (§. 24.) zeigen, dafs $AF = AE = \tfrac{1}{2}s - a$, $BD = BF = \tfrac{1}{2}s - b$, $CE = CD = \tfrac{1}{2}s - c$, und dafs die Bogen gröfsester Kreise OA, OB, OC resp. die Winkel A, B, C halbiren. Bezeichnen wir nun den Abstand des Pols O von den drei Seiten des Dreiecks durch ϱ, so ist OAF ein in F rechtwinklichtes Dreieck, $OF = \varrho$, der Winkel $OAF = \tfrac{1}{2}A$, $AF = \tfrac{1}{2}s - a$. Zufolge der 2ten Formel (§. 63.) für die rechtwinklichten Dreiecke ist also $\cot\tfrac{1}{2}A = \cot\varrho\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-a)$ oder $\tan\tfrac{1}{2}A = \frac{\tan\varrho}{\sin(\frac{1}{2}s-a)}$. Vergleicht man diesen Ausdruck mit den oben gefundenen, so ergiebt sich

$$\tan\varrho = \sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\,\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\,\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}{\sin\tfrac{1}{2}s}}.$$ Ein Ausdruck, der mit dem für den

Radius des in ein ebenes Dreieck eingeschriebenen Kreises (§. 28.) eine auffallende Ähnlichkeit hat. Diesemnach ist

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \frac{\tan\varrho}{\sin(\frac{1}{2}s-a)}, \quad \tan\tfrac{1}{2}B = \frac{\tan\varrho}{\sin(\frac{1}{2}s-b)}, \quad \tan\tfrac{1}{2}C = \frac{\tan\varrho}{\sin(\frac{1}{2}s-c)}.$$

§. 67. Aus der Verbindung der so eben gefundenen Ausdrücke für die Sinusse und Cosinusse der halben Winkel lassen sich mehrere interessante Formeln herleiten. Da nämlich:

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-a)}{\sin b\,.\,\sin c}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}{\sin b\,.\,\sin c}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-b)}{\sin c\,.\,\sin a}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-c)\sin(\tfrac{1}{2}s-a)}{\sin c\,.\,\sin a}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}{\sin a\,.\,\sin b}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\sin(\tfrac{1}{2}s-b)}{\sin a\,.\,\sin b}}.$$

so erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\,.\,\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin\frac{1}{2}s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s-a)\,\sin(\frac{1}{2}s-b)}{\sin a\,\sin b}} = \frac{\sin\frac{1}{2}s}{\sin c}\,\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\,.\,\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s-a)\,\sin(\frac{1}{2}s-b)}{\sin a\,\sin b}} = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin c}\,\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\,.\,\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s\,.\,\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin a\,\sin b}} = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-a)}{\sin c}\,\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\,.\,\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s\,.\,\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin a\,\sin b}} = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)}{\sin c}\,\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin\frac{1}{2}s-\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin c}\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos(\frac{1}{2}a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}s+\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin c}\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin(\frac{1}{2}a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)+\sin(\frac{1}{2}s-a)}{\sin c}\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{2\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\cos\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)-\sin(\frac{1}{2}s-a)}{\sin c}\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{2\cos\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}(a-b)}{2\cos\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

Oder I. $\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$, II. $\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}$

III. $\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$, IV. $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$.

Diese vier interessante Formeln sind ungefähr zu gleicher Zeit von Gaufs, Mollweide und Legendre gefunden worden. Ich lernte sie zuerst aus Gaufs *Theoria Motus corporum coelestium* etc. Hamburg 1809, wo sie ohne Beweis mitgetheilt werden, und fand auch gleich den obigen Beweis, der sich am natürlichsten darzubieten scheint und sich dem Gedächtnisse leicht einprägt.

§. 68. Indem man die 3te der obigen Gleichungen durch die 1ste, die 4te durch die 2te, die 2te durch die 1ste, die 4te durch die 3te dividirt, erhält man folgende vier Gleichungen:

I. $\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$, II. $\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$

III. $\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c}$, IV. $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c}$.

Diese vier Gleichungen werden die Nepperschen Formeln genannt. Die ersten beiden können dazu dienen, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreiecks, die beiden andern Winkel; die letztern beiden, aus zwei Winkel und der dazwischenliegenden Seite, die beiden andern Seiten zu finden.

§. 69. Aus den beiden Gleichungen

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C,\quad \sin(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

erhält man $\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C = \cos\frac{1}{2}(A+B+C)$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b) - \cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C = -\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\sin C$$

Es ist aber (§. 65.)

$$\sin C = \frac{k}{\sin a\sin b},\quad \text{wo } \tfrac{1}{2}k = \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\sin\tfrac{1}{2}s-c)}.$$

Folglich, wenn $A+B+C=S$

$$\cos\tfrac{1}{2}S = -\frac{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,k}{\sin a\,.\,\sin b\,.\,\cos\frac{1}{2}c} = -\frac{k}{4\cos\frac{1}{2}a\,.\,\cos\frac{1}{2}b\,.\,\cos\frac{1}{2}c}.$$

Eben so erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}S = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b(\cos^2\frac{1}{2}C + \sin^2\frac{1}{2}C) + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(\cos^2\frac{1}{2}C - \sin^2\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin a\sin b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(\cos c - \cos a\cos b)}{\cos\frac{1}{2}c\,\sin a\,\sin b}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c\,\sin a\,\sin b}\cdot(2\cos^2\tfrac{1}{2}a\,.\,2\cos^2\tfrac{1}{2}b + \cos c - \cos a\cos b)$$

$$= \frac{(1+\cos a)(1+\cos b) + \cos c - \cos a\cos b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

§. 70. Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$\cos(\tfrac{1}{2}S-C) = \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{(\cos\frac{1}{2}(a+b) + \cos(\frac{1}{2}a-b))\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}c}\frac{\cos\frac{1}{2}b\,.\,k}{\sin a\sin b} = \frac{k}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Eben so ist $\sin(\frac{1}{2}S-C) = \sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C - \cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C - \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\,.\,\cos C + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b(\cos c - \cos a\cos b) + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin a\sin b}{\cos\frac{1}{2}c\,.\,\sin a\sin b}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c\sin a\sin b}(\cos c - \cos a\cos b + 4\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b)$$

$$= \frac{\cos c - \cos a\cos b + (1-\cos a)(1-\cos b)}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{1-\cos a-\cos b+\cos c}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

§. 71. Man hat also, wenn, wie vorhin,

$$S = A+B+C,\quad k = 2\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}s\sin(\tfrac{1}{2}s-a)\sin(\tfrac{1}{2}s-b)\sin(\tfrac{1}{2}s-c)}:$$

$$\cos\tfrac{1}{2}S = -\frac{k}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}; \qquad \sin\tfrac{1}{2}S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\cos(\tfrac{1}{2}S-A) = \frac{k}{4\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}; \quad \sin(\tfrac{1}{2}S-A) = \frac{1+\cos a-\cos b-\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$

$$\cos(\tfrac{1}{2}S-B) = \frac{k}{4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}; \quad \sin(\tfrac{1}{2}S-B) = \frac{1-\cos a+\cos b-\cos c}{4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$

$$\cos(\tfrac{1}{2}S-C) = \frac{k}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}; \quad \sin(\tfrac{1}{2}S-C) = \frac{1-\cos a-\cos b+\cos c}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus diesen Formeln lassen sich mehrere sehr interessante Sätze herleiten, von denen wir hier einige betrachten wollen.

§. 72. Aufgabe. Aus den gegebenen Seiten eines sphärischen Dreiecks den Flächeninhalt desselben zu finden.

Es sei das gegebene Dreieck ABC. Man verlängere die beiden Bogen AC, BC über C hinaus bis zum Zusammentreffen mit dem gröfsesten Kreise des Bogens AB in D und E, so hat man vier Dreiecke CBD, CEA, DCE und das gegebene ABC. Bezeichnet man diese vier Dreiecke resp. durch x, y, z, Δ, und die Oberfläche der Kugel durch K, so übersieht man leicht, wenn A, B, C die Winkel des Dreiecks in Graden ausgedrückt anzeigen, dafs $\Delta+x=\frac{A}{360}.K$, $\Delta+y=\frac{B}{360}.K$, $\Delta+z=\frac{C}{360}K$, folglich $x+y+z+3\Delta=\frac{A+B+C}{360°}.K$. Nun ist aber $x+y+z+\Delta=\frac{1}{2}K=\frac{180°}{360°}K$ und daraus $\Delta=\frac{A+B+C-180°}{360°}.\frac{K}{2}$; oder der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur halben Kugelfläche, wie der Uberschufs der Summe der Winkel über 180° zu 360°.

Weil $K=4\pi$, wenn der Halbmesser der Kugel $=1$, so ist auch $\Delta=\frac{A+B+C-180°}{360°}.2\pi$. Dieser Ausdruck wird, wenn A, B, C die zu den Winkeln des sphärischen Dreiecks gehörigen Bogen bedeuten $=A+B+C-\pi$.

Daraus ergiebt sich also $\cos\frac{1}{2}\Delta=\sin\frac{1}{2}S$, $\sin\frac{1}{2}\Delta=-\cos\frac{1}{2}S$; daher

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}s\,\sin(\frac{1}{2}s-a)\,\sin(\frac{1}{2}s-b)\,\sin(\frac{1}{2}s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

eine zur logarithmischen Berechnung sehr bequeme Formel, die sich jedoch auf folgende Art noch sehr vereinfachen läfst:

Es ist $\frac{1-\cos\frac{1}{2}\Delta}{\sin\frac{1}{2}\Delta}=\frac{2\sin^2\frac{1}{4}\Delta}{2\cos\frac{1}{4}\Delta\sin\frac{1}{4}\Delta}=\tan\frac{1}{4}\Delta$, aber auch

$$\frac{1-\cos\frac{1}{2}\Delta}{\sin\frac{1}{2}\Delta} = \frac{1-\sin\frac{1}{2}S}{-\cos\frac{1}{2}S} = \frac{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-1-\cos a-\cos b-\cos c}{k}$$

$$= \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}k}.$$

So wie nun aber (§. 65.)

$1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c=4\sin\frac{1}{2}s.\sin(\frac{1}{2}s-a)\sin(\frac{1}{2}s-b)\sin(\frac{1}{2}s-c)$

so ist auch, wenn man $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}s$ resp. durch α, β, γ, σ bezeichnet

$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha.\cos\beta\cos\gamma=4\sin\frac{1}{2}\sigma.\sin(\frac{1}{2}\sigma-\alpha)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\beta)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\gamma)$.

Daraus ergiebt sich

$$\tan\tfrac{1}{4}\Delta = \frac{4\sin\frac{1}{2}\sigma.\sin(\frac{1}{2}\sigma-\alpha)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\beta)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\gamma)}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}s.\sin(\frac{1}{2}s-a)\sin(\frac{1}{2}s-b)\sin(\frac{1}{2}s-c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\sigma\sin\frac{1}{2}\sigma\sin(\frac{1}{2}\sigma-\alpha)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\alpha)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\beta)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\beta)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\gamma)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\sigma\sin\frac{1}{2}\sigma\cos(\frac{1}{2}\sigma-\alpha)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\alpha)\cos(\frac{1}{2}\sigma-\beta)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\beta)\cos(\frac{1}{2}\sigma-\gamma)\sin(\frac{1}{2}\sigma-\gamma)}}$$

$$= \sqrt{\tan\tfrac{1}{2}\sigma.\tan(\tfrac{1}{2}\sigma-\alpha)\tan(\tfrac{1}{2}\sigma-\beta)\tan(\tfrac{1}{2}\sigma-\gamma)}.$$

Diese äufserst elegante Formel ist von Simon Lhuillier gefunden worden.

§. 73. Aufgabe. Aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks den auf der Kugelfläche gemessenen Abstand r des Pols der um dasselbe beschriebenen Kreislinie von irgend einem Puncte derselben zu finden.

Es sei O der Pol des um ABC beschriebenen Kreises, so ist jeder der Bogen gröfster Kreise OA, OB, $OC=r$. Aufserdem ist Winkel $OBC=OCB$, $OCA=OAC$ $OAB=OBA$. Bezeichnen wir diese Winkel resp. durch x, y, z, so ist $y+z=A$, $z+x=B$, $x+y=C$. Daraus ergiebt sich, wenn $A+B+C=S$, $x=\frac{1}{2}S-A$;

$y = \frac{1}{2}S - B$, $z = \frac{1}{2}S - C$. Betrachten wir das Dreieck OBC, so ist $OB = OC = r$, $BC = a$, $OBC = \frac{1}{2}S - A$. Man hat also zufolge der ersten Grundformel (A) (§. 54.)

$\cos r = \cos a \cos r + \sin a \sin r \cos(\frac{1}{2}S - A)$. Daraus $\cot r \cdot \frac{1 - \cos a}{\sin a}$ oder $\cot r \cdot \tan \frac{1}{2} a = \cos(\frac{1}{2}S - A)$, folglich

$$\tan r = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\cos(\frac{1}{2}S - A)} = \text{(§. 70.)} \frac{2 \tan \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\frac{1}{2} k}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{(\sin \frac{1}{2} s . \sin(\frac{1}{2} s - a) \sin(\frac{1}{2} s - b) \sin(\frac{1}{2} s - c))}}.$$

Sowohl aus diesen Ausdruck für $\tan r$ als aus dem (§. 66.) für $\tan \varrho$ gefundenen lassen sich die beiden Ausdrücke der Halbmesser r, ϱ des äufsern und innern Kreises des ebenen Dreiecks herleiten, indem man statt der Sinusse und Tangenten der Bogen, die Bogen selbst setzt.

§. 74. Lehrsatz. Bezeichnet man durch r', ϱ' dieselben Gröfsen in Bezug auf das Supplementar-Dreieck eines gegebenen sphärischen Dreiecks, was r, ϱ für das Grund-Dreieck bedeuten, so sind r', ϱ' die resp. Complemente von ϱ, r.

Es ist nämlich, wie wir so eben gesehen haben $\tan r = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\cos(\frac{1}{2}S - A)}$ und aus (§. 66.) folgt, dafs $\tan \varrho = \frac{\sin(\frac{1}{2} s - a)}{\cot \frac{1}{2} A}$. Bezeichnet man nun durch A', B', C' die resp. Supplemente der Winkel A, B, C des Grund-Dreiecks, und $A' + B' + C'$ durch S', so ist $\cos(\frac{1}{2}S - A) = \sin(\frac{1}{2}S' - A')$, $\cot \frac{1}{2} A = \tan \frac{1}{2} A'$. Es ist also:

$$\tan r = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\sin(\frac{1}{2}S' - A')}; \qquad \tan \varrho = \frac{\sin(\frac{1}{2} s - a)}{\tan \frac{1}{2} A'}.$$

Wendet man nun diese beiden Formeln auf das Supplementar-Dreieck an, so ergiebt sich:

$$\tan r' = \frac{\tan \frac{1}{2} A'}{\sin(\frac{1}{2} s - a)} = \frac{\cot \frac{1}{2} A}{\sin(\frac{1}{2} s - a)}; \quad \tan \varrho' = \frac{\sin(\frac{1}{2}S' - A')}{\tan \frac{1}{2} a} = \frac{\cos(\frac{1}{2}S - A)}{\tan \frac{1}{2} a}.$$

Es ist aber (§. 66.) $\tan \frac{1}{2} A = \frac{\tan \varrho}{\sin(\frac{1}{2} s - a)}$ oder $\cot \frac{1}{2} A = \sin(\frac{1}{2} s - a) \cot \varrho$.

Es ist ferner (§. 72.) wenn O der Pol des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, jeder der beiden Winkel des gleichschenklichten Dreiecks OBC an der Grundlinie $BC = \frac{1}{2}S - A$; jede der beiden Seiten OB, $OC = r$ und $BC = a$, und deshalb zufolge der ersten Grundformel (A) (§. 54.)

$$\cos(\tfrac{1}{2}S - A) = \frac{\cos r - \cos r \cos a}{\sin r \sin a} = \cot r \cdot \frac{1 - \cos a}{\sin a} = \cot r \tan \tfrac{1}{2} a.$$

Diesemnach wird $\tan r' = \cot \varrho$, $\tan \varrho' = \cot r$.

Dieser interessante Lehrsatz läfst sich übrigens sehr leicht auf synthetische Art beweisen, indem sich zugleich ergiebt, dafs der umschriebene Kreis des Grunddreiecks und der eingeschriebene Kreis des Polardreiecks Parallelkreise sind. (Schulz Sphärik. 1ster Th. Leipzig 1828 §. 46.)

Auflösung des in C rechtwinklichten sphärischen Dreiecks ABC.

§. 75. I. Aus den beiden gegebenen Seiten a, b findet man (§. 63.) 1) die Hypotenuse c; 2) einen der Winkel A, B vermittelst der Formeln:

1) $\cos c = \cos a \cos b$; 2) $\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$, 3) $\tan B = \frac{\tan b}{\sin a}$.

§. 76. II. Aus der Hypotenuse c und einer Seite a findet man 1) die andere Seite b; 2) den Gegenwinkel A; 3) den anliegenden Winkel B; vermittelst der Gleichungen:

1) $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$; 2) $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$; 3) $\cos B = \tan a \cot c$.

§. 77. III. Aus der gegebenen Seite a und dem Gegenwinkel A erhält man 1) die andere Seite b; 2) die Hypotenuse c; 3) den Winkel B durch die Formeln:

1) $\sin b = \tan a \cot A$; 2) $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$; 3) $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$.

§. 78. IV. Aus der Seite a und dem anliegenden Winkel B findet

man 1) die andere Seite b; 2) die Hypotenuse c; 3) den Gegenwinkel A; vermittelst der Gleichung:

1) $\tan b = \sin a \tan B$; 2) $\cot c = \cot a \cos B$; 3) $\cos A = \cos a \sin B$.

§. 79. V. Aus der Hypotenuse c und einem der Winkel A findet man 1) die Gegenseite a des gegebenen Winkels A; 2) die anliegende Seite b; 3) den Winkel B durch die Gleichungen:

1) $\sin a = \sin c \sin A$; 2) $\tan b = \tan c \cos A$; 3) $\cot B = \cos c \tan A$.

§. 80. VI. Aus den beiden schiefen Winkeln A, B bestimmt man 1) eine der Seiten a, b; 2) die Hypotenuse c:

1) $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$, $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$; 2) $\cos c = \cot A \cot B$.

§. 81. Weil die Aufgaben I, 1; IV, 3; V, 1 respective vermittelst der Formeln $\cos c = \cos a \cos b$; $\cos A = \sin B \cos a$; $\sin b = \sin c \sin B$ berechnet werden können, so lassen sie sich, wie man leicht übersieht, auch mit Hülfe der Tafeln der natürlichen Sinusse und Cosinusse durch Addition und Subtraction, wie folgt, auflösen: $2\cos c = \cos(a+b) + \cos(a-b)$; $2\cos A = \sin(a+B) - \sin(a-B)$; $2\sin b = b = \cos(c-B) - \cos(c+B)$.

§. 82. Wenn der in der Auflösung des rechtwinklichten Dreiecks vorkommende gesuchte Sinus oder Cosinus wenig von der Einheit verschieden ist, so mufs man dieselbe in eine andere zu verwandeln suchen, welche die Tangente des gesuchten Elements giebt. So erhält man z. B. aus der Gleichung $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$,

$\frac{1-\cos b}{1+\cos b} = \frac{\cos a - \cos c}{\cos a + \cos c}$. Es ist aber $\frac{1-\cos b}{1+\cos b} = \tan^2 \frac{1}{2} b$; eben so

$$\frac{\cos a - \cos c}{\cos a + \cos c} = \frac{2\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2}}{2\cos\frac{c+a}{2}\cos\frac{c-a}{2}} = \tan\frac{c+a}{2}\tan\frac{c-a}{2}, \text{ und folglich}$$

$$\tan\tfrac{1}{2} b = \sqrt{\tan\frac{c+a}{2}\tan\frac{c-a}{2}}.$$

§. 82. Eben so kann man die Formel $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$, wenn A nahe an 90°, folgendermafsen verwandeln: Es ist $\frac{1-\sin A}{1+\sin A} = \frac{\sin c - \sin a}{\sin c + \sin a}$; aber $\frac{1-\sin A}{1+\sin A}$

$= \frac{1-\cos(90°-A)}{1+\cos(90°+A)} = \tan^2(45° - \frac{1}{2}A) = \cot^2(45° + \frac{1}{2}A)$ und $\frac{\sin c - \sin a}{\sin c + \sin a}$

$$= \frac{2\cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2}}{2\sin\frac{c+a}{2}\cos\frac{c-a}{2}} = \cot\frac{c+a}{2}.\tan\frac{c-a}{2} = \frac{\cot\frac{c+a}{2}}{\cot\frac{c-a}{2}} = \frac{\tan\frac{c-a}{2}}{\tan\frac{c+a}{2}}.$$

Folglich $\tan(45° - \frac{1}{2}A) = \sqrt{\cot\frac{c+a}{2}.\tan\frac{c-a}{2}} = \sqrt{\frac{\tan\frac{c-a}{2}}{\tan\frac{c+a}{2}}}$

und $\tan(45° + \frac{1}{2}A) = \sqrt{\frac{\tan\frac{c+a}{2}}{\tan\frac{c-a}{2}}} = \sqrt{\tan\frac{c+a}{2}.\cot\frac{c-a}{2}}$.

§. 83. Eben so läfst sich die Formel $\cos B = \tan a \cot c$, wenn $\cos B$ wenig von 1 verschieden ist, folgendermafsen verwandeln:

$$\frac{1-\cos B}{1+\cos B} = \frac{\tan c - \tan a}{\tan c + \tan a} \text{ oder } \frac{2\sin^2\frac{1}{2}B}{2\cos^2\frac{1}{2}B} = \frac{\sin(c-a)}{\sin(c+a)}.$$

Also $\tan\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(c-a)}{\sin(c+a)}}$.

§. 84. Auf ähnliche Weise würde man statt der Formeln (§. 77.) folgende erhalten haben: $\tan(45° + \frac{1}{2}b) = \pm\sqrt{\frac{\sin(A+a)}{\sin(A-a)}}$, $\tan(45° + \frac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\frac{\tan\frac{1}{2}(A+a)}{\tan\frac{1}{2}(A-a)}}$;

$\tan(45° + \frac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{\cot\frac{1}{2}(A+a)}{\tan\frac{1}{2}(A-a)}}$.

§. 85. Aus der Gleichung (VI, 3) $\cos c = \cot A \cot B$ ergiebt sich

$\frac{1-\cos c}{1+\cos c} = \frac{\tan B - \cot A}{\tan B + \cot A}$ oder $\tan^2\frac{1}{2}c = \frac{\sin B \sin A - \cos A \cos B}{\sin B \sin A + \cos A \cos B}$

$= -\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$; folglich $\tan\frac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}}$.

Weil nun die Gröfse $= -\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$ immer positiv, $\cos(A+B)$ aber, weil $A+B$ immer $> 90°$, negativ ist, so folgt daraus, dafs $\cos(A-B)$ eine positive Gröfse sein mufs. Es mufs demnach der Unterschied der beiden schiefen Winkel eines rechtwinklichten sphärischen Dreiecks immer kleiner als 90° sein.

Auflösung der sphärischen Dreiecke im Allgemeinen.

§. 86. Aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks einen der drei Winkel zu finden.

Es sei der gesuchte Winkel A, so hat man, wenn $a+b+c = s$, zur Bestimmung desselben (§. 54 (A), 64, 65, 66.) folgende Gleichungen:

1) $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$; 2) $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin b \sin c}}$;

3) $\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s.\sin(\frac{1}{2}s-a)}{\sin b \sin c}}$; 4) $\sin A = \frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}s.\sin(\frac{1}{2}s-a)\sin(\frac{1}{2}s-b)\sin(\frac{1}{2}s-c)}}{\sin b \sin c}$;

5) $\tan\frac{1}{2}A = \frac{\tan\varrho}{\sin(\frac{1}{2}s-a)} = \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}s-a)}\sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s-a)\sin(\frac{1}{2}s-b)\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin\frac{1}{2}s}}$.

Die letzte dieser Formeln ist zur Berechnung am vortheilhaftesten, besonders wenn man alle drei Winkel verlangt, weil um die Logarithmen von $\tan\frac{1}{2}A$, $\tan\frac{1}{2}B$, $\tan\frac{1}{2}C$ zu finden, nur vier Logarithmen nöthig sind, wo hingegen bei der Anwendung der übrigen Formeln sieben Logarithmen erforderlich sind.

§. 87. Bedeuten A', B', C' die resp. Supplemente von A, B, C, und substituirt man in den obigen Formeln für die Winkel A, B, C resp. $180°-A'$, $180°-B'$, $180°-C'$, vertauscht alsdann die Seiten a, b, c des Dreiecks mit den correspondirenden Gröfsen A', B', C' und umgekehrt, und substituirt endlich wieder $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$ resp. für A', B', C', so erhält man, wenn $A+B+C = S$ gesetzt wird, wegen (§. 60.), folgende Gleichungen:

1) $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$; 2) $\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\sin B \sin C}}$

3) $\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}S.\cos(\frac{1}{2}S-A)}{\sin B \sin C}}$; 4) $\sin a = 2\sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-A)\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\sin B \sin C}}$

4) $\cot\frac{1}{2}a = \frac{1}{\cos(\frac{1}{2}S-A)}\sqrt{-\frac{\cos(\frac{1}{2}S-A)\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\cos\frac{1}{2}S}}$.

Diese Formeln können dazu dienen aus drei gegebenen Winkeln eines Dreiecks eine der Seiten zu finden.

§. 88. Aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel C 1) die beiden andern Winkel A, B und 2) die dritte Seite c zu berechnen.

1) Die beiden Winkel A, B erhält man vermittelst der beiden Nepperschen Formeln (I, II, §. 68.)

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C;\ \tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

2) Nachdem man entweder $\tan\frac{1}{2}(A+B)$ oder $\tan\frac{1}{2}(A-B)$ gefunden, erhält man die Seite c mit Hülfe der Gaufsischen Formeln (§. 67.)

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\cos\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}C.\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\cos\frac{1}{2}C.\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}.$$

§. 89. Verwandelt man diese Formeln nach der Vorschrift (§. 87.) so erhält man:

1) $\tan\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c$; $\tan\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c$

2)
$$\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man aus zwei Winkel A, B und der zwischenliegenden Seite 1) die beiden andern Seiten und 2) den dritten Winkel finden.

§. 90. Aus zwei Seiten a, b und einem der einen Seite a gegenüberliegenden Winkel A 1) den andern Gegenwinkel B, 2) den eingeschlossenen Winkel C, und 3) die dritte Seite c zu finden.

1) Den Gegenwinkel B erhält man nach (§. 58.) durch die Formel $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$.

2) Um den eingeschlossenen Winkel C zu finden bediene man sich der dritten Fundamentalformel (C) (§. 54.), indem man b, c, A, B resp. in a, b, C, A verwandelt, so erhält man:

$$\sin b \cot a = \sin C \cot A + \cos b \cos C.$$

Diese wird, mit $\tan A$ multiplicirt und alsdann $\cos b \tan A = \tan X$ gesetzt,

$$\sin C + \tan X . \cos C = \sin b \cot a \tan A = \tan b \cot a \tan X.$$

Multiplicirt man diese mit $\cos X$, so ergiebt sich:

$$\sin (C + X) = \frac{\tan b}{\tan a} \sin X.$$

Vermittelst dieser Formel erhält man, nachdem man X durch $\tan X = \cos b \tan A$ bestimmt hat, den gesuchten Winkel C.

3) Hat man einmal den Winkel C gefunden, so ergiebt sich daraus die Seite c vermittelst der Gleichung $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$.

Es läfst sich aber auch c unmittelbar durch die Auflösung der ersten Grundformel (A) $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a$ berechnen. Dividirt man nämlich diese Gleichung durch $\cos b$ und setzt alsdann $\tan b \cos A = \cot x$, so erhält man: $\cos c + \sin c \cot x = \frac{\cos a}{\cos b}$, und diese mit $\sin x$ multiplicirt, ergiebt sich: $\sin (x + c) = \frac{\cos a}{\cos b} \sin x$, woraus sich nachdem man x durch $\tan b \cos A = \cot x$ gefunden hat, c berechnen läfst.

§. 91. Verwandelt man die so eben gefundenen Formeln nach (§. 87.), so erhält man:

1) $\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$,

2) $\sin (c - x) = \frac{\tan B \sin x}{\tan A}$, wo $\tan x = \cos B \tan a$

3) $\sin (C - X) = \frac{\cos A}{\cos B} \sin X$, wo $\cot X = \tan B \cos a$.

Vermittelst dieser Formeln lassen sich aus zwei Winkeln A, B und einer Gegenseite a 1) die andere Gegenseite b, 2) die zwischen den Winkeln A, B liegende Seite c und 3) der Winkel C berechnen.

§. 92. Es ist hier noch zu bemerken, dafs in den beiden Ausdrücken für $\sin B$, $\sin b$ (§. 90, 91.), die Winkelgröfsen B, b zwar zweideutig sind; diese Zweideutigkeit jedoch in den meisten Fällen verschwindet. Aus der Nepperschen Formel (I, §. 68.) $\tan \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \frac{1}{2} C$ ergiebt sich nämlich, weil die Werthe von $\cos \frac{1}{2}(a - b)$ und $\cot \frac{1}{2} C$ immer positiv sind, dafs $\tan \frac{1}{2}(A + B)$ und $\cos \frac{1}{2}(a + b)$ gleichartig sein müssen, und folglich in jedem sphärischen Dreiecke die halbe Summe ihrer Gegenwinkel zugleich > oder zugleich < 90° sein mufs.

Beispiele zur Berechnung sphärischer Dreiecke.

§. 93. Exempel I. Die geographische Breite zweier Örter auf der Erdkugel und ihre gegenseitige kürzeste Entfernung sind gegeben, man soll den Längenunterschied derselben finden.

Wenn die geographische Breite eines Orts bekannt ist, so ist auch seine Entfernung vom Pole, das Complement der Breite gegeben. Bezeichnet man also die beiden Örter durch A, B, den Pol durch C, so bilden diese ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten a, b, c gegeben sind und in welchem der Winkel C, der den Längenunterschied der Örter A, B derselben ausdrückt, gesucht wird.

Es sei die Breite von $A = 58° 37' 17''$, von $B = 59° 56' 31''$, die kürzeste Entfernung von A bis $B = 241578$ Mètres $= 2° 24' 56'', 8$ *) so erhalten wir, wenn wir uns der Formel (5) (§. 86.) bedienen.

$a = 30° 3' 29''$	$\frac{1}{2}s = 32° 2' 51'', 5$	$log\ compl.\ sin\frac{1}{2}s = 0{,}2752129$
$b = 31° 37' 17''$	$\frac{1}{2}s - a = 1° 59' 22'', 5$	$log\ sin(\frac{1}{2}s - a) = 8{,}5405522$
$c = 2° 24' 57''$	$\frac{1}{2}s - b = 0° 25' 34'', 5$	$log\ sin(\frac{1}{2}s - b) = 7{,}8715355$
also $s = 64° 5' 43''$	$\frac{1}{2}s - c = 29° 37' 54'', 5$	$log\ sin(\frac{1}{2}s - c) = 9{,}6941000$
		$\overline{6{,}3814006}$
		$log\ tang\ \varrho = \overline{8{,}1907003}$

und $log\ tang\frac{1}{2}C = log\ \frac{tang\ \varrho}{sin(\frac{1}{2}s - c)} = 8{,}4966003$

Eolglich $\frac{1}{2}C = 1° 47' 49'', 6$ und $C = 3° 35' 59''$.

§. 94. Exempel II. Aus der geographischen Länge und Breite zweier Örter ihre kürzeste Entfernung zu berechnen.

Bezeichnet man, wie oben die beiden Örter durch A, B, den Pol durch P, so sind in dem Dreiecke ABP die beiden Seiten AP, BP, und der eingeschlossene Winkel APB gegeben, woraus sich nach (§. 88.) die dritte Seite AB finden läfst.

So ist z. B., wenn man die resp. Abstände dreier Örter Dorpat, St. Petersburg, Moskwa vom Nordpole durch β', β'', β'''; ihre Länge durch λ', λ'', λ''' bezeichnet:

$\beta' = 90° - 58° 22' 43'' = 31° 37' 17''$; $\lambda' = 44° 23' 51''$

$\beta'' = 90° - 59° 56' 31'' = 30° 3' 29''$; $\lambda'' = 47° 59' 30''$

$\beta''' = 90° - 55° 45' 13'' = 34° 14' 47''$; $\lambda''' = 55° 17' 11''$.

Bezeichnet man nun die obigen drei Städte resp. durch A, B, C, so erhält man $\frac{1}{2}(PBC - PCB) = k'$ gesetzt,

$$tang\ k' = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta''' - \beta'')}{sin\frac{1}{2}(\beta''' + \beta'')}\ cot\frac{1}{2}(\lambda''' - \lambda'');\quad sin\frac{1}{2}a = \frac{sin\frac{1}{2}(\lambda''' - \lambda'')\ sin\frac{1}{2}(\beta''' + \beta'')}{cos\ k'}.$$

$l.sin\ 2° 5' 39'' = 8{,}5627919$	$l.sin\ 3° 38' 50'', 5 = 3{,}8035628$
$l.compl.\ sin\ 32° 9' 8'' = 0{,}2739492$	$l.sin\ 32° 9' 8'' = 9{,}7260508$
$l.cot\ 3° 38' 50'', 5 = 1{,}1955567$	$l.compl.\ cos\ k' = 0{,}1672637$
$log\ tang\ k' = \overline{10{,}0322978}$	$l.sin\frac{1}{2}a = 8{,}6968773$

*) Der Bogen eines gröfsten Kreises der Erdkugel von 90° hält 10000000 Mètres. Es sind also 241578 Mètres $= 2° 41' 57'', 8$ Decimaleinth. (§. 21.) $= 2° 24' 56'', 8$ gewöhnl. Einth.

Folglich $\frac{1}{2}a = 2° 51' 7', 9$ und $a = 5° 42' 15'', 8$.

Eben so ist, wenn $\frac{1}{2}(PAC - PCA) = k''$,

$$tang\ k'' = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta' - \beta''')}{sin\frac{1}{2}(\beta' + \beta''')}\ cot\frac{1}{2}(\lambda''' - \lambda');\quad sin\frac{1}{2}b = \frac{sin\frac{1}{2}(\lambda''' - \lambda')\ sin\frac{1}{2}(\beta''' + \beta')}{cos\ k''}$$

$l.sin\ 1° 18' 45'' = 8{,}3599385$	$l.sin\ 5° 26' 40'' = 8{,}9771772$
$l.compl.\ sin\ 32° 56' 2'' = 0{,}2646639$	$l.sin\ 32° 56' 2'' = 9{,}7353361$
$l.cot\ 5° 26' 40'' = 1{,}0208592$	$l.compl.\ cos\ k'' = 0{,}0387566$
$l.tang\ k'' = 9{,}6454616$	$l.sin\frac{1}{2}b = 8{,}7512699$

Also $\frac{1}{2}b = 3° 15' 59'', 3$ und $b = 6° 27' 58'', 6$.

Endlich erhält man auch, wenn $\frac{1}{2}(PBA - PAB) = k'''$,

$$tang\ k''' = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta' - \beta''')}{sin\frac{1}{2}(\beta' + \beta''')}\ cot\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda');\quad sin\frac{1}{2}c = \frac{sin\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')\ sin\frac{1}{2}(\beta'' + \beta')}{cos\ k''}$$

$l.sin\ 0° 46' 54'' = 8{,}1348848$	$l.sin\ 1° 47' 49'', 5 = 8{,}4963743$
$l.compl.\ sin\ 30° 50' 23'' = 0{,}2901890$	$l.sin\ 30° 60' 23'' = 9{,}7098110$
$l.cot\ 1° 47' 49'', 5 = 1{,}5034120$	$l.compl.\ cos\ k''' = 0{,}1176882$
$l.tang\ k''' = 9{,}9284858$	$l.sin\frac{1}{2}c = 9{,}3238735$

Demnach $\frac{1}{2}c = 1° 12' 28'', 4$ und $c = 2° 24' 56'', 8$.

§. 95. Exempel III. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks findet man den Abstand des Pols des um dasselbe beschriebenen Kreises von dem Umfange desselben vermittelst der Formel (§. 73.) $tang\ r = \frac{2\ sin\frac{1}{2}a\ .\ sin\frac{1}{2}b\ .\ sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{sin\frac{1}{2}s.sin(\frac{1}{2}s-a)\ sin(\frac{1}{2}s-b)\ sin(\frac{1}{2}s-c)}}$.

Nehmen wir die so eben bestimmten Seiten des Dreiecks ABC, so ist

$a = 5° 42' 15'', 8$	$\frac{1}{2}s = 7° 17' 35'', 6$	$l.sin\frac{1}{2}a = 8{,}6968773$	$l.sin\frac{1}{2}s = 8{,}4429000$
$b = 6° 27' 58'', 6$	$\frac{1}{2}s - a = 1° 35' 19'', 8$	$l.sin\frac{1}{2}b = 8{,}7512699$	$l.sin(\frac{1}{2}s - a) = 9{,}1036232$
$c = 2° 24' 56'', 8$	$\frac{1}{2}s - b = 0° 49' 37'', 0$	$l.sin\frac{1}{2}c = 8{,}3238735$	$l.sin(\frac{1}{2}s - b) = 8{,}9295450$
$s = 14° 35' 11'', 2$	$\frac{1}{2}s - c = 4° 52' 38'', 8$	$l\,2 = 0{,}3010300$	$l.sin(\frac{1}{2}s - c) = 8{,}1593381$
		$26{,}0730507$	$34{,}6354063$
		$17{,}3177031$	2) $17{,}3177031$
		$log\ tang\ r = 8{,}7553476$	$r = 3° 15' 30'', 1.$

§. 96. Zum Schlusse wollen wir noch die Auflösung einer interessanten Aufgabe beifügen, die dazu dienen mag, mehrere der vorgetragenen Formeln in Anwendung zu bringen.

Es seien für drei Örter A, B, C auf der Oberfläche der Erdkugel die resp. geographischen Längen λ, λ', λ'', und ihre Abstände β, β', β'' vom Nordpole P gegeben; man soll die Länge x des Pols O des um das sphärische Dreieck ABC beschriebenen Kreises, seinen Abstand y vom Pole P, und die kürzeste Entfernung r von den drei Puncten A, B, C berechnen.

Zur Bestimmung der drei unbekannten Gröfsen x, y, r ergeben sich aus der Betrachtung der Dreiecke OPA, OPB, OPC, weil die gleichnamigen Winkel resp. $x-\lambda$, $x-\lambda'$, $x-\lambda''$ sind, unmittelbar folgende drei Gleichungen:

I. $\cos r = \cos\beta\ \cos y + \sin\beta\ \sin y \,.\, \cos(x-\lambda)$

II. $\cos r = \cos\beta'\ \cos y + \sin\beta'\ \sin y \,.\, \cos(x-\lambda')$

III. $\cos r = \cos\beta''\cos y + \sin\beta''\sin y \,.\, \cos(x-\lambda'')$.

Zieht man I von II ab, und dividirt den Rest durch $\sin y$, so erhält man:

$$\cot y\,(\cos\beta - \cos\beta') = \sin\beta'\ \cos(x-\lambda') - \sin\beta\,(\cos(x-\lambda)$$

oder, weil $a\alpha - b\beta = \frac{a+b}{2}(\alpha-\beta) + \frac{a-b}{2}(\alpha+\beta)$, $\cot y(\cos\beta - \cos\beta')$

$$= \frac{\sin\beta'+\sin\beta}{2}(\cos(x-\lambda')-\cos(x-\lambda)) + \frac{\sin\beta'-\sin\beta}{2}\,(\cos(x-\lambda') + \cos(x-\lambda)).$$

Deshalb $\cot y = \frac{\sin\beta'+\sin\beta}{\cos\beta-\cos\beta'}\cdot\frac{\cos(x-\lambda')-\cos(x-\lambda)}{2} + \frac{\sin\beta'-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\beta'}\cdot\frac{\cos(x-\lambda')+\cos(x-\lambda)}{2}$

$= \cot\frac{1}{2}(\beta'-\beta)\ \sin\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)\ \sin(x-\frac{\lambda+\lambda'}{2}) + \cot\frac{1}{2}(\beta'+\beta)\ \cos\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)\ \cos(x-\frac{\lambda+\lambda'}{2})$

oder, wenn man

$\cot\frac{1}{2}(\beta'-\beta)\ \sin\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = A'\ \sin B'$, $\cot\frac{1}{2}(\beta'+\beta)\ \cos\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = A'\ \cos B'$ setzt.

IV. $\cot y = A'\sin B'\ \sin(x-\frac{\lambda+\lambda'}{2}) + A'\cos B'\cos(x-\frac{\lambda+\lambda'}{2}) = A'\cos(x-\frac{\lambda+\lambda'}{2}-B')$.

Auf gleiche Weise erhält man aus den Gleichungen I, III, wenn man

$\cot\frac{1}{2}(\beta''-\beta)\ \sin\frac{1}{2}(\lambda''-\lambda) = A''\ \sin B''$, $\cot\frac{1}{2}(\beta''+\beta)\ \cos\frac{1}{2}(\lambda''-\lambda) = A''\ \cos B''$ setzt.

V. $\cot y = A''\cos(x-\frac{\lambda+\lambda''}{2}-B'')$. Demnach ist

$A''\cos(x-C'') - A'\cos(x-C') = o$, wo $\frac{\lambda+\lambda'}{2}+B'=C'$, $\frac{\lambda+\lambda''}{2}+B''=C''$.

Diese Gleichung kann aber, weil $a\alpha - b\beta = \frac{a+b}{2}(\alpha-\beta) + \frac{a-b}{2}(\alpha+\beta)$, in

$$\frac{A''+A'}{2}\cdot(\cos(x-C'') - \cos(x-C') + \frac{A''-A'}{2}\,(\cos(x-C'') + \cos(x-C')) = o,$$

verwandelt werden. Daraus ergiebt sich

$$\frac{A''-A'}{A''+A'} = \frac{\cos(x-C') - \cos(x-C'')}{\cos(x-C') + \cos(x-C'')} = \tan(x-\frac{C'+C''}{2})\ \tan\tfrac{1}{2}(C'-C').$$

Weil aber, wenn $\frac{A'}{A''} = \tan\varphi$,

$$\frac{A''-A'}{A''+A'} = \frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi} = \frac{\tan 45^\circ - \tan\varphi}{1+\tan 45^\circ\,.\,\tan\varphi} = \tan(45^\circ-\varphi),$$

so erhält man $\tan(x-\frac{C'+C''}{2}) = \tan(45^\circ-\varphi)\ \cot\frac{1}{2}(C'-C'')$, und alsdann y durch eine der beiden Gleichungen IV, V. Aus diesen beiden Werthen findet man endlich die Gröfse r durch die Formeln I, II, III, oder nach (§. 88.)

§. 97. Es seien die drei Orter A, B, C auf der Erdoberfläche die Städte Moskwa, St. Petersburg, Dorpat, so ist

$\lambda = 55^\circ\,17'\,11''$	$\beta = 34^\circ\,14'\,47''$	$\frac{1}{2}(\lambda-\lambda') = 3^\circ\,38'\,50'',5$	$\frac{1}{2}(\lambda-\lambda'') = 5^\circ\,26'\,40''$
$\lambda' = 47^\circ\,59'\,30''$	$\beta' = 30^\circ\ 3'\,29''$	$\frac{1}{2}(\lambda+\lambda') = 51^\circ\,38'\,20'',5$	$\frac{1}{2}(\lambda+\lambda'') = 49^\circ\,50'\,31''$
$\lambda'' = 44^\circ\,23'\,51''$	$\beta'' = 31^\circ\,37'\,17''$	$\frac{1}{2}(\beta-\beta') = 2^\circ\ 5'\,39''$	$\frac{1}{2}(\beta-\beta'') = 1^\circ\,18'\,45''$
		$\frac{1}{2}(\beta+\beta') = 32^\circ\ 9'\ 8''$	$\frac{1}{2}(\beta+\beta'') = 32^\circ\,56'\ 2''$

$\log\sin\frac{1}{2}(\lambda-\lambda') = 8{,}8035627$	$\log\sin\frac{1}{2}(\lambda-\lambda'') = 8{,}9771771$	$B' = 47^\circ\,36'\,58''$
$\log\cos\frac{1}{2}(\lambda-\lambda') = 9{,}9991194$	$\log\cos\frac{1}{2}(\lambda-\lambda'') = 9{,}9980363$	$C' = \frac{1}{2}(\lambda+\lambda') + B' = 99^\circ\,15'\,18'',5$
$\log\cot\frac{1}{2}(\beta-\beta') = 1{,}4369180$	$\log\cot\frac{1}{2}(\beta-\beta'') = 1{,}6399476$	$B'' = 69^\circ\,38'\,24'',2$
$\log\cot\frac{1}{2}(\beta+\beta') = 0{,}2016466$	$\log\cot\frac{1}{2}(\beta+\beta'') = 0{,}1885803$	$C'' = \frac{1}{2}(\lambda+\lambda'') + B'' = 119^\circ\,28'\,55'',2$

$log.A\ sin B' = 0{,}2404807$ $log.A''\ sin B'' = 0{,}6171247$ $\left|\ \frac{1}{2}(C''-C') = 10°\,6'\,48'',4\right.$

$log.A\ cos B' = 0{,}2007660$ $log.A''\ cos B'' = 0{,}1866166$ $\left|\ \frac{1}{2}(C''+C') = 109°\,22'\,7''\right.$

$log\ tan\ B' = 0{,}0397147$ $log\ tan\ B'' = 0{,}3305081$ $\left|\ log\ tan\ \varphi = l\frac{A'}{A''} = 9{,}7269039\right.$

$log\ cos\ B' = 9{,}8287209$ $log\ cos\ B'' = 9{,}5414754$ $\left|\ \varphi = 28°\,4'\,2'',3\right.$

$log\ A' = 0{,}3720451$ $log\ A'' = 0{,}6451412$ $\left|\right.$

$log\ tan(45° - \varphi) = 9{,}4835112$ $\quad x - C'' = 69°\,44'\,54''$

$log\ cot\frac{1}{2}(C-C'') = \underline{0{,}7486801\ n}$ $\quad log\ cos(x-C'') = 9{,}5392573$

$log\ tan(x - \frac{C+C''}{2}) = 0{,}2321913\ n$ $\quad log.A''\ cos(x-C'') = 0{,}1843985$

$x - \frac{C+C''}{2} = -59°\,38'\,6'' = log.cot y.$ Also $y = 33°\,11'\,10''$

$x = 49°\,44'\,1''.$

Es ist also die geographische Länge des Pols des um ABC beschriebenen Kreises $49°\,44'\,1''$, sein Abstand vom Nordpole $= 33°\,11'\,10''$. Vermittelst dieser beiden Gröfsen und der gegebenen Länge und Breite eines der Örter A, B, C findet man nun nach (§. 88.) die Entfernung des Punctes O von A, B, C, oder $r = 3°\,15'\,30''$.

Die obige Methode aus den Gleichungen I, II, III die unbekannten Gröfsen x, y, r zu finden, ist von Hrn. Hofr. Gaufs in der monatl. Corresp. zur Beförd. der Erd- und Himmelskunde Oct. 1808, p. 282 bei einer andern Gelegenheit gelehrt worden.

§. 98. Von der so eben behandelten Aufgabe findet man auch eine Auflösung in Cagnolis Trigonometrie am Ende des Werkes, die wir wegen ihrer Eleganz hier noch mittheilen wollen.

Wenn wir die Bedeutung der (§. 97.) eingeführten Zeichen beibehalten und überdiefs die Winkel PAO, PBO, PCO durch ξ, η, ζ bezeichnen, indem wir dieselben als positiv oder negativ betrachten, je nachdem die Puncte A, B, C auf der östlichen oder westlichen Seite von PO liegen, so hat man zur Bestimmung derselben folgende drei Gleichungen:

$$tan\frac{1}{2}(\eta+\zeta) = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta'-\beta'')\ cot\frac{1}{2}(\lambda''-\lambda')}{sin\frac{1}{2}(\beta'+\beta'')}$$

$$(1)\quad tan\frac{1}{2}(\zeta+\xi) = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta''-\beta)\ cot\frac{1}{2}(\lambda-\lambda'')}{sin\frac{1}{2}(\beta''+\beta)}$$

$$tan\frac{1}{2}(\xi+\eta) = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta-\beta')\ cot\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)}{sin\frac{1}{2}(\beta+\beta')}.$$

Es ist aber, wie man leicht übersieht, zufolge (§. 58.),

$$(2)\quad \frac{Sin\,\gamma}{Sin\,r} = \frac{sin\,\xi}{sin(\lambda-x)} = \frac{sin\,\eta}{sin(\lambda'-x)} = \frac{sin\,\zeta}{sin(\lambda''-x)}.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$tan(\tfrac{1}{2}(\lambda'+\lambda'')-x) = \frac{tan\frac{1}{2}(\eta+\zeta)}{tan\frac{1}{2}(\eta-\zeta)}\cdot tan\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda'')$$

$$(3)\quad tan(\tfrac{1}{2}(\lambda''+\lambda)-x) = \frac{tan\frac{1}{2}(\zeta+\xi)}{tan\frac{1}{2}(\zeta-\xi)}\cdot tan\tfrac{1}{2}(\lambda''-\lambda)$$

$$tan(\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')-x) = \frac{tan\frac{1}{2}(\xi+\eta)}{tan\frac{1}{2}(\xi-\eta)}\cdot tan\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda')$$

von denen jede dazu dient, die Länge x des Pols O zu finden.

Endlich erhält man auch aus den Gleichungen (2), die folgenden:

$$tan\tfrac{1}{2}(\gamma+r) = \frac{cos\frac{1}{2}(\lambda-x-\xi)}{cos\frac{1}{2}(\lambda-x+\xi)}\ tan\tfrac{1}{2}\beta = \frac{cos\frac{1}{2}(\lambda'-x-\eta)}{cos\frac{1}{2}(\lambda'-x+\eta)}\ tan\tfrac{1}{2}\beta' = \frac{cos\frac{1}{2}(\lambda''-x-\zeta)}{cos\frac{1}{2}(\lambda''-x+\zeta)}\ tan\tfrac{1}{2}\beta''$$

$$(4)\quad tan\tfrac{1}{2}(\gamma-r) = \frac{sin\frac{1}{2}(\lambda-x-\xi)}{sin\frac{1}{2}(\lambda-x+\xi)}\ tan\tfrac{1}{2}\beta = \frac{sin\frac{1}{2}(\lambda'-x-\eta)}{sin\frac{1}{2}(\lambda'-x+\eta)}\ tan\tfrac{1}{2}\beta' = \frac{sin\frac{1}{2}(\lambda''-x-\zeta)}{sin\frac{1}{2}(\lambda''-x+\zeta)}\ tan\tfrac{1}{2}\beta''$$

zur Bestimmung der Gröfsen y, r.

Um die Formeln (1) zu beweisen ist es genug an einer derselben die Richtigkeit zu zeigen. Wir wollen die erste dazu nehmen. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, entweder liegen die Puncte B, C auf einer und derselben Seite von PO oder auf verschiedenen. Im ersten Falle sei Winkel $OPB < OPC$, so ist, 1) wenn $PB > PC$, $PBO + PCO = (OBC - PBC) + (PCB - OCB)$; und weil $OB = OC$, also $OBC = OCB$, $PBO + PCO = PCB - PBC$.

Ist aber $PB < PC$, so hat man, wenn man $360° - PBO$ durch $P\overline{B}O$ bezeichnet, $PBO + PCO = 360° - P\overline{B}O + PCO = 360° - (PBC + OBC) + (PCB + BCO)$

$= 360° + PCB - PBC$. Liegen die beiden Puncte B, C auf verschiedene Seiten von PO, so ist $PCO - PBO = (PCB \pm OCB) - (PBC \pm BCO) = PCB - PBC$. Da nun $\pm PBO$, $\pm PCO$ durch η, ζ bezeichnet werden, je nachdem B, C auf der westlichen oder östlichen Seite von PO liegen, so ist $\eta + \zeta = PBC - PCB$ oder $= 360° + PCB - PBC$, also allgemein $tan\frac{1}{2}(\eta+\zeta) = tan\frac{1}{2}(PBC - PCB)$. Es ist aber zufolge der Nepperschen Formel (§. 68, II.) $tan\frac{1}{2}(PCB - PBC) = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta' - \beta'')}{sin\frac{1}{2}(\beta' + \beta'')} cot\frac{1}{2} PBC$.

Folglich $tan\frac{1}{2}(\eta+\zeta) = \frac{sin\frac{1}{2}(\beta' - \beta'')}{sin\frac{1}{2}(\beta' + \beta'')} cot\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')$.

Die drei Gleichungen (2) ergeben sich aus den drei Dreiecken PAO, PBO, PCO zufolge (§. 90.) Weil die Winkel ξ, η, ζ positiv oder negativ sind, je nachdem resp. die Puncte A, B, C östlich oder westlich von PO liegen, so sind die Ausdrücke $\frac{Sin\,\xi}{sin(\lambda - x)}$, $\frac{Sin\,\eta}{sin(\lambda' - x)}$, $\frac{Sin\,\zeta}{sin(\lambda'' - x)}$ alle drei positiv, was auch der Fall sein mufs, wenn y und r positiv sein sollen.

Weil $\frac{sin\,\eta}{sin(\lambda' - x)} = \frac{sin\,\zeta}{sin(\lambda'' - x)}$, so ist auch $\frac{sin\,\eta + sin\,\zeta}{sin\,\eta - sin\,\zeta} = \frac{sin(\lambda' - x) + sin(\lambda'' - x)}{sin(\lambda' - x) - sin(\lambda'' - x)}$

demnach $\frac{2\,sin\frac{1}{2}(\eta+\zeta)\,cos\frac{1}{2}(\eta-\zeta)}{2\,cos\frac{1}{2}(\eta+\zeta)\,sin\frac{1}{2}(\eta-\zeta)} = \frac{2\,sin(\frac{\lambda'+\lambda''}{2} - x)\,cos\frac{\lambda'-\lambda''}{2}}{2\,cos(\frac{\lambda'+\lambda''}{2} - x)\,sin\frac{\lambda'-\lambda''}{2}}$,

und folglich $\frac{tan\frac{1}{2}(\eta+\zeta)}{tan\frac{1}{2}(\eta-\zeta)} = \frac{tan(x - (\frac{1}{2}(\lambda''+\lambda')}{tan\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')}$, woraus sich die erste der drei Gleichungen (3) ergiebt. Die beiden andern werden ganz auf dieselbe Weise gefunden.

Betrachten wir jetzt das Dreieck POA, so sind in demselben die beiden Winkel $PAO = \xi$, $OPA = \lambda - x$ und die dazwischenliegende Seite $PA = \beta$ gegeben, und es lassen sich daraus mit Hülfe der Neppersehen Formel III, IV. (§. 68.) die beiden Seiten $PO = y$ und $OA = r$ finden, so dafs

$tan\frac{1}{2}(y+r) = \frac{cos\frac{1}{2}(\lambda - x - \xi)}{cos\frac{1}{2}(\lambda - x + \xi)} tan\frac{1}{2}\beta$, $tan\frac{1}{2}(y-r) = \frac{sin\frac{1}{2}(\lambda - x - \xi)}{sin\frac{1}{2}(\lambda - x + \xi)} tan\frac{1}{2}\beta$.

Auf ähnliche Weise erhält man vermittelst der Dreiecke POB, POC, die beiden andern Formeln von (4).

§. 99. Nehmen wir jetzt das bereits nach der Gaufsischen Methode (§. 91.) berechneten Exempel vor, wobei wir *log comp.* durch l' bezeichnen wollen.

$\lambda = 55°17'11''$	$\beta = 34°14'47''$	$\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda'') = 1°47'49'',5$	$\frac{1}{2}(\beta'' - \beta') = 0°46'54''$	$\frac{1}{2}(\beta'' + \beta') = 30°50'23''$
$\lambda' = 47°59'30''$	$\beta' = 30°\ 3'29''$	$\frac{1}{2}(\lambda - \lambda'') = 5°26'40''$	$\frac{1}{2}(\beta - \beta'') = 1°18'45''$	$\frac{1}{2}(\beta + \beta'') = 32°56'\ 2''$
$\lambda'' = 44°23'51''$	$\beta'' = 31°37'17''$	$\frac{1}{2}(\lambda - \lambda') = 3°38'50'',5$	$\frac{1}{2}(\beta - \beta') = 2°\ 5'39''$	$\frac{1}{2}(\beta' + \beta) = 32°\ 9'\ 8''$

$l.sin$	$0°46'54''$	$= 8{,}1348848$	$l.sin$	$1°18'45''$	$= 8{,}3599385$	$l.sin$	$2°\ 5'39''$	$= 8.5627919\ n$
$l'.sin$	$30°50'23''$	$= 0{,}2901890$	$l'.sin$	$32°56'\ 2''$	$= 0{,}2646639$	$l'.sin$	$32°\ 9'\ 8''$	$= 0{,}2739492$
$l.cot$	$1°47'49'',5$	$= 1{,}5034120\ n$	$l.cot$	$5°26'40''$	$= 1{,}0208592$	$l.cot$	$3°38'50'',5$	$= 1{,}1955567\ n$
$l.tan\frac{1}{2}(\eta+\zeta)$		$= 9{,}9284858\ n$	$l.tan\frac{1}{2}(\zeta+\xi)$		$= 9{,}6454616$	$l.tan\frac{1}{2}(\xi+\eta)$		$= 0{,}0322978$

	$\frac{1}{2}(\eta+\zeta) =$	$-40°18'13'',5$	$\frac{1}{2}(\zeta+\xi) =$	$23°50'50''$	$\frac{1}{2}(\xi+\eta) =$	$47°\ 7'42'',5$
daraus	$\frac{1}{2}(\eta-\zeta) =$	$23°16'52'',5$	$\frac{1}{2}(\zeta-\xi) =$	$-87°25'56''$	$\frac{1}{2}(\xi-\eta) =$	$64°\ 9'\ 3'',5$
und	$\eta =$	$-17°\ 1'21''$	$\zeta =$	$-63°35'\ 6''$	$\xi =$	$111°16'46''$

$l\,tan\frac{1}{2}(\eta+\zeta)$	$= 9{,}9284858\ n$	$l\,tan\frac{1}{2}(\zeta+\xi)$	$= 9{,}6454616$	$l\,tan\frac{1}{2}(\xi+\eta)$	$= 0{,}0322978$
$l\,cot\frac{1}{2}(\eta-\zeta)$	$= 0{,}3662457$	$l\,cot\frac{1}{2}(\zeta-\xi)$	$= 8{,}6516257\ n$	$l\,cot\frac{1}{2}(\xi-\eta)$	$= 9{,}6852713$
$l\,tan\frac{1}{2}(\lambda''-\lambda')$	$= 8{,}4965880\ n$	$l\,tan\frac{1}{2}(\lambda-\lambda'')$	$= 8{,}9791403$	$l\,tan\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)$	$= 8{,}8044433\ n$
$l\,tan(x - \frac{1}{2}(\lambda''+\lambda'))$	$= 8{,}7913195$	$l\,tan(x - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda''))$	$= 7{,}2762276\ n$	$l\,t.(x - \frac{1}{2}(\lambda'+\lambda))$	$= 8{,}5220124\ n$
$x - \frac{1}{2}(\lambda''+\lambda')$	$= 3°32'20'',8$	$x - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda'')$	$= -0°\ 6'30''$	$x - \frac{1}{2}(\lambda'+\lambda)$	$= -1°54'19''$.

Jede dieser drei Rechnungen giebt für x dasselbe Resultat, nämlich $49°44'1''$.

Aus den gefundenen Werthen von ξ, η, ζ ergeben sich die Winkel A, B, C der resp. Dreiecke PAO, PBO, PCO, indem man für A, B, C die absoluten Werthe von ξ, η, ζ selbst oder ihre Supplemente nehmen mufs. Aus der gegenseitigen Lage der Puncte A, B, C, P, auf dem Erdglobus überzeugt man sich leicht, dafs $A = 68\,43'14''$, $B = 162°58'39''$, $C = 116°24'54''$. Zugleich erhält man die resp. Winkel OPA, OPB, OPC der gleichnamigen Dreiecke, indem man für dieselben

die absoluten Werthe von $x-\lambda$, $x-\lambda'$, $x-\lambda''$ setzt. Diese sind $5°\,33'\,9'',5$; $1°\,44'\,31'',3$; $5°\,20'\,10''$. Da überdiefs auch die resp. Seiten $PA=\beta$, $PB=\beta'$, $PC=\beta''$ gegeben sind, so findet man vermittelst jedes der obigen drei Dreiecke $OP=y$, $OA=OB=OC=r$. So findet man (§. 89.) durch die Auflösung des Dreiecks POA, y und r durch folgende Rechnung:

$l\cos\ 31°\,35'\,2''$	$= 9{,}9303755$	$l\sin\ 31°\,35'\,2''$	$= 9{,}7191210$
$l\,\text{comp.}\cos\ 37°\,8'\,11'',7$	$= 0{,}0984335$	$l\,\text{comp.}\sin\ 37°\,8'\,11'',7$	$= 0{,}2191666$
$l\tan\ 17°\,7'\,23'',5$	$= 9{,}4886683$	$l\tan\ 17°\,7'\,23'',5$	$= 9{,}4886683$
$l\tan\frac{1}{2}(y+r)$	$= 9{,}5174773$	$l\tan\frac{1}{2}(y-r)$	$= 9{,}4269559$
$\frac{1}{2}(y+r)$	$= 18°\,13'\,19'',9$	$\frac{1}{2}(y-r)$	$= 14°\,57'\,49'',9$
folglich y	$= 33°\,11'\,9'',8$	r	$= 3°\,15''\,30''$.

Für das Dreieck PBO ist die Rechnung:

$l\cos\ 80°\,37'\,4''$	$= 9{,}2122399$	$l\sin\ 80°\,37'\,4''$	$= 9{,}9941511$
$l\,\text{comp.}\cos\ 82°\,21'\,35''$	$= 0{,}8763023$	$l\,\text{comp.}\sin\ 82°\,21'\,35''$	$= 0{,}0038728$
$l\tan\ 15°\,1'\,44'',5$	$= 9{,}4289317$	$l\tan\ 15°\,1'\,44'',5$	$= 9{,}4289317$
$l\tan(y+r)$	$= 9{,}5174739$	$l\tan(y-r)$	$= 9{,}4269556$

Und für PCO:

$l\cos\ 55°\,32'\,22''$	$= 9{,}7526931$	$l\sin\ 55°\,32'\,22''$	$= 9{,}9161988$
$l\,\text{comp.}\cos\ 60°\,52'\,32''$	$= 0{,}3127308$	$l\,\text{comp.}\sin\ 60°\,42'\,32''$	$= 0{,}0587051$
$l\tan\ 15°\,48'\,38'',5$	$= 9{,}4520520$	$l\tan\ 15°\,48'\,38'',5$	$= 9{,}4520520$
$l\tan(y+r)$	$= 9{,}5174759$	$l\tan(y-r)$	$= 9{,}4269559$

Die Exempel von (§. 93.) sind von einen meiner Zuhörer Hrn. Nerling berechnet worden.

Vierte Vorlesung.

Über analytische allgemeine Elementargeometrie.

§. 1. Die Entfernungen eines Punctes von drei senkrecht aufeinanderstehenden Ebnen werden die rechtwinklichten Coordinaten desselben genannt. Man bezeichnet dieselben gewöhnlich durch die Buchstaben x, y, z. Die drei senkrecht aufeinanderstehenden Durchschnittslinien der drei Ebnen heifsen die Axen der Coordinaten. Um sie von einander zu unterscheiden, nennt man sie die Axen der x, y, z nach den Coordinaten mit denen sie parallel sind, und die drei Ebnen nennt man nach den in ihr liegenden Axen die Ebene yz, zx, xy. Durch jede dieser Ebnen wird die ihr coordinirte Axe in zwei Theile getheilt, wovon der eine als positiv, der andere als negativ zu betrachten ist. Der den drei Ebnen und Axen gemeinschaftliche Durchschnittspunct, den wir mit O bezeichnen wollen, heifst der Mittelpunct des Axensystems oder der Anfangspunct der Coordinaten.

§. 2. Läfst man von einem Puncte P auf die drei Axen der x, y, z die resp. Perpendikel PQ, PQ', PQ'' fallen, so sind, wie man leicht übersieht, die Theile OQ, OQ', OQ'' der drei Axen, welche man die Projectionen des Radiusvectors PO in den resp. Axen nennt, den Coordinaten x, y, z des Punctes P gleich und gleichartig.

§. 3. Legt man durch die drei Puncte Q, Q', Q'' Ebenen resp. parallel mit den Ebenen yz, zx, xy, so überzeugt man sich leicht, dafs diese drei Ebenen den Punct P zum gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben müssen; woraus also folgt, dafs die Lage eines Punctes in Bezug auf ein gegebenes Axensystem durch seine drei rechtwinklichten Coordinaten x, y, z völlig bestimmt ist.

§. 4. Die Lage eines Punctes P in Bezug auf ein gegebenes Axensystem ist auch bestimmt, wenn der Radiusvector $PO = r$, der Neigungswinkel $= \beta$ des Radiusvectors mit einer der drei Ebnen, z. B. mit der Ebne xy, und der Winkel λ, den die Projection des Radiusvectors in der Ebne mit der positiven Seite einer der Axen in derselben z. B. x macht, gegeben sind. Man nennt diese drei Gröfsen r, β, λ die Polarcoordinaten des Punctes. Dafs durch diese die Lage des Punctes P völlig bestimmt wird, davon überzeugt man sich folgendermafsen.

Man lasse von P auf die Ebne xy des Perpendikel PQ fallen, so ist QO die Projection des Radiusvectors PO; von Q ziehe man auf die Axe der x das Perpendikel QR, und auf die Axe der y das Perpendikel QS, so ist offenbar $OR = x$, $OS = y$, $PQ = z$, Winkel $ROQ = \lambda$, $SOQ = 90° - \lambda$, $POQ = \beta$. Nun ist $OQ = PO \cdot \cos\beta = r\cos\beta$. Demnach

$$x = OR = OQ\cos\lambda = r\cos\beta\cos\lambda$$
$$y = OS = OQ\sin\lambda = r\cos\beta\sin\lambda$$
$$z = PQ = r\sin\beta.$$

Dafs der Winkel β positiv oder negativ genommen werden mufs, je nachdem sich P auf der positiven oder negativen Seite der Ebne xy befindet, und dafs β innerhalb der Grenzen $+ 90°$ und $- 90°$ liegt, bedarf wohl kaum einer Erinnerung. Zu bemerken ist noch, dafs der Winkel λ so bestimmt werden mufs, dafs er, wenn die Projection des Radiusvectors mit dem positiven Theile der Axe der y zusammenfällt, positiv und $= 90°$ ist. Auf diese Weise sind also die rechtwinklichten Coordinaten x, y, z durch die Polarcoordinaten r, λ, β gegeben, wodurch die Lage des Punctes P völlig bestimmt ist.

§. 5. Aus den drei Gleichungen $x = r\cos\beta\cos\lambda$, $y = r\cos\beta\sin\lambda$, $z = r\sin\beta$ ergiebt sich $x^2 + y^2 = r^2\cos\beta^2(\cos^2\lambda + \sin^2\lambda) = r^2\cos^2\beta$, und folglich $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

§. 6. Wenn die Coordinaten x, y, z eines Punctes P in Bezug auf ein gegebenes Axensystem bestimmt sind, so findet man daraus, wie man sich leicht überzeugt, wenn x', y', z', die Coordinaten desselben Punctes in Bezug auf ein anderes mit dem ersten paralleles Ayensystem bedeuten, dessen Mittelpunct O' durch die Coordinaten a, b, c gegeben ist, $x' = x - a$, $y' = y - b$, $z' = z - c$. Bezeichnet man nun den Radiusvector PO' durch r', so ist

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Diese Gleichung enthält zugleich die Auflösung der Aufgabe: Aus den Coordinaten a, b, c; x, y, z zweier Puncte O', P die gegenseitige Entfernung derselben zu bestimmen.

§. 7. Um die Richtung einer geraden Linie zu bezeichnen, bedient man sich sehr oft der Cosinusse der Winkel, den sie mit drei, den Axen der Coordinaten, parallen Linien macht. Die Anwendung dieser Gröfsen für die Rechnung giebt derselben eine Eleganz, die man selten auf einem anderen Wege erhalten würde. Da diese Gröfsen in der höhern Geometrie und allen Zweigen der Mathematik, wobei dieselbe zum Grunde liegt, von eben so häufigen Gebrauche sind, als die rechtwinklichten Coordinaten, so wird es nützlich sein, dieselben durch einen eigenen Namen und eigene Zeichen auszudrücken. Wir wollen daher die Cosinusse der Winkel, den eine Linie (L) mit Linien, die den Axen der drei rechtwinklichten Coordinaten x, y, z parallel sind, die Determinanten der Linie (L) nennen, und diese Determinanten resp. mit den Buchstaben ξ, η, ζ bezeichnen.

Man übersieht leicht, dafs diese Determinanten wirklich nichts weiter sind als die Coordinaten irgend eines Punctes P, der geraden Linie (L) in Bezug auf ein dem Grundsysteme paralleleles Axensystem, dessen Mittelpunct O' ein anderer Punct der Linie (L) ist, und um die Entfernung $= 1$ vom ersten Puncte absteht.

Für einen Punct P_1 derselben graden Linie PO', der auf der entgegengesetzten

Seite ebenfalls um 1 von O' entfernt sind, werden die Coordinaten von derselben Gröfse als die des Punctes P sein und sich nur durch das Zeichen + oder — unterscheiden, so dafs, wenn ξ, η, ζ die Determinanten der Linie $O'P$ sind, die Determinanten von $O'P_1$, $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ sein müssen.

Es bedarf wohl keiner Erinnerung, dafs Parallellinien dieselben Determinanten haben, und dafs die Determinanten einer Linie dieselben bleiben, wie auch das Axensystem in Absicht seines Orts verändert werden mag, vorausgesetzt, dafs die correspondirenden Axen unter sich parallel bleiben.

§. 8. Weil die Richtung einer Ebne durch die Richtung irgend einer auf ihr senkrechten Linie bestimmt ist, so wollen wir die Determinanten einer solchen senkrechten Linie die Determinanten der Ebene nennen.

Zuweilen ist es auch nöthig, die Determinanten derselben Ebene durch das Zeichen + und — zu unterscheiden, je nachdem man die eine oder die andere Seite der Ebene als positiv betrachtet.

§. 9. Vorläufig wollen wir einige analytische Formeln und Sätze mittheilen, die uns in dieser Geometrie von besondern Nutzen sein werden.

Es sei
$$y'z''-z'y''=X,\quad z'x''-x'z''=Y,\quad x'y''-y'x''=Z$$
$$y''z-z''y=X',\quad z''x-x''z=Y',\quad x''y-y''x=Z'$$
$$yz'-zy'=X'',\quad zx'-xz'=Y'',\quad xy'-yx'=Z''$$

ferner

$$xX+yY+zZ=P^{0,0},\quad x'X+y'Y+z'Z=P^{1,0},\quad x''Y+y''Y+z''Z=P^{2,0}$$
$$xX'+yY'+zZ'=P^{0,1},\quad x'X'+y'Y'+z'Z'=P^{1,1},\quad x''X'+y''Y'+z''Z'=P^{2,1}$$
$$xX''+yY''+zZ''=P^{0,2},\quad x'X''+y'Y''+z'Z''=P^{1,2},\quad x''X''+y''Y''+z''Z''=P^{2,2}$$

und

$$xX+x'X'+x''X''=Q^{0,0},\quad yX+y'X'+y''X''=Q^{1,0},\quad zX+z'X'+z''X''=Q^{2,0}$$
$$xY+x'Y'+x''Y''=Q^{0,1},\quad yY+y'Y'+y''Y''=Q^{1,1},\quad zY+z'Y'+z''Y''=Q^{2,1}$$
$$xZ+x'Z'+x''Z''=Q^{0,2},\quad yZ+y'Z'+y''Z''=Q^{1,2},\quad zZ+z'Z'+z''Z''=Q^{2,2}$$

so überzeugt man sich leicht durch wirkliche Entwickelung der durch P, Q bezeichneten Gröfsen, dafs jeder der Ausdrücke $P^{0,0}$, $P^{1,1}$, $P^{2,2}$ und $Q^{0,0}$, $Q^{1,1}$, $Q^{2,2}$, deren beide Anzeiger gleich sind, sich auf die Formel

$$xy'z''+x'y''z+x''yz'-zy'x''-z'y''x-z''yx'=K$$

zurückführen läfst; hingegen alle übrigen Gröfsen P, Q, deren Anzeiger verschieden sind, $=o$ sein werden.

Die obigen Formeln lassen sich wegen ihrer symmetrischen und cyklischen Anordnung sehr leicht dem Gedächtnisse einprägen. So folgen z. B. in $Y'=z''x-x''z$ die Buchstaben Y', z'', x, und auch ihre Anzeiger 1, 2, 0 in cyklischer Ordnung auf einander, und der zweite Theil $-x''z$ von Y' entsteht aus dem ersten $z''x$ durch Versetzung von z, x oder ihrer Anzeiger 2, 0. Durch die Doppelanzeiger von P, Q werden resp. die in ihren corresp. Formeln vorkommenden Anzeiger oder Buchstaben angedeutet, so ist z. B. $P^{1,2}=x'X''+y'Y''+z'Z''$, $Q^{1,2}=yZ+y'Z'+y''Z''$. Wir werden die Bedeutung der Zeichen X, Y, Z; X', Y', etc. K in der Folge beibehalten, und die auf gleiche Weise durch ξ, η, ζ; ξ', η', ζ', etc. gebildeten Gröfsen mit den deutschen Buchstaben $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, etc. $\mathfrak{K}$ bezeichnen, so dafs

$$\eta'\zeta''-\zeta\eta''=\mathfrak{X},\quad \zeta\xi''-\xi'\zeta''=\mathfrak{Y},\quad \xi'\eta''-\eta'\xi''=\mathfrak{Z},\ \text{etc.}$$

§. 10. Lehrsatz. Aus den beiden Gleichungen

$$\alpha'x+\beta'y+\gamma'z=o,\quad \alpha''x+\beta''y+\gamma''z=o$$

ergiebt sich $\quad x:y:z=(\beta'\gamma''-\gamma'\beta''):(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''):(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')$

Subtrahirt man nämlich von der ersten Gleichung durch γ'' multiplicirt, die zweite durch γ' multiplicirt, so erhält man

$$(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')x+(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')y \text{ oder } (\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')x-(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')y=o.$$

Folglich $\quad x:y=(\beta'\gamma''-\beta''\gamma'):(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')$.

Eben so ergiebt sich, wenn man von der ersten durch α'' multiplicirt, die zweite durch α' multiplicirt, abzieht

$$(\alpha''\beta'-\beta''\alpha')y+(\alpha''\gamma'-\gamma''\alpha')z \text{ oder } (\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')y-(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')z=o.$$

Also $\quad y:z=(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''):(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')$.

Demnach $\quad x:y:z=(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'):(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''):(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')$.

§. 11. Die (§. 9.) vorgetragenen Sätze lassen sich auch mit Vortheil zur Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit drei unbekannten Gröfsen anwenden.

Es sei nämlich
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = b$$
$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = c$$

so erhält man, wenn man die obigen Gleichungen respective durch $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = \mathfrak{A}$, $\beta''\gamma - \gamma''\beta = \mathfrak{A}'$, $\beta\gamma' - \gamma\beta' = \mathfrak{A}''$ multiplicirt, und dann addirt, weil

$$\beta\mathfrak{A} + \beta'\mathfrak{A}' + \beta''\mathfrak{A}'' = o, \quad \gamma\mathfrak{A} + \gamma'\mathfrak{A}' + \gamma''\mathfrak{A}'' = o,$$
$$(\alpha\mathfrak{A} + \alpha'\mathfrak{A}' + \alpha''\mathfrak{A}'')x = a\mathfrak{A} + b\mathfrak{A}' + c\mathfrak{A}''.$$

Eben so ergiebt sich durch die Summation der obigen drei Gleichungen resp. durch $\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' = \mathfrak{B}$, $\gamma''\alpha - \alpha''\gamma = \mathfrak{B}'$, $\alpha\beta' - \beta\alpha' = \mathfrak{B}''$ multiplicirt, weil

$$\gamma\mathfrak{B} + \gamma'\mathfrak{B}' + \gamma''\mathfrak{B}'' = o, \quad \alpha\mathfrak{B} + \alpha'\mathfrak{B}' + \alpha''\mathfrak{B}'' = o,$$
$$(\beta\mathfrak{B} + \beta'\mathfrak{B}' + \beta''\mathfrak{B}'')y = a\mathfrak{B} + b\mathfrak{B}' + c\mathfrak{B}''.$$

Endlich erhält man, wenn man die drei Gleichungen, nachdem man sie resp. mit $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \mathfrak{C}$, $\alpha''\beta - \beta''\alpha = \mathfrak{C}'$, $\alpha\beta' - \beta\alpha' = \mathfrak{C}''$ multiplicirt hat, addirt, weil

$$\alpha\mathfrak{C} + \alpha'\mathfrak{C}' + \alpha''\mathfrak{C}'' = o, \quad \beta\mathfrak{C} + \beta'\mathfrak{C}' + \beta''\mathfrak{C}'' = o,$$
$$(\gamma\mathfrak{C} + \gamma'\mathfrak{C}' + \gamma''\mathfrak{C}'')z = a\mathfrak{C} + b\mathfrak{C}' + c\mathfrak{C}''.$$

§. 12. Kombinirt man die Gröfen X, Y, Z, X', etc. auf eine ähnliche Weise, wie man die Gröfsen x, y, z, x', etc. combinirt hat, um die Ausdrücke X, Y, Z, etc. zu erzeugen, so erhält man folgende sehr interessante und brauchbare Gleichungen:

$$Y'Z'' - Z'Y'' = Kx, \quad Y''Z - Z''Y = Kx', \quad YZ' - ZY' = Kx'',$$
$$ZX'' - X'Z'' = Ky, \quad Z''X - X''Z = Ky', \quad ZX' - XZ' = Ky'',$$
$$X'Y'' - Y'X'' = Kz, \quad X''Y - Y''X = Kz', \quad XY' - YX' = Kz'',$$

von deren Wahrheit man sich leicht überzeugt, indem man eine derselben z. B. die erste wirklich entwickelt und zeigt, dafs

$$Y'Z'' - Z'Y'' \text{ oder } (z''x - x''z)(xy' - yx') - (x''y - y''x)(zx' - xz')$$
$$= x(xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx') = xK.$$

Die übrigen lassen sich leicht aus dieser durch cykliche Veränderung der Buchstaben herleiten.

§. 13. Von besondern Nutzen ist noch folgende Gleichung:

$(y''z - z''y)(yz' - zy') + (z''x - x''z)(zx' - xz') + (x''y - y''x)(xy' - yx')$
$= (xx' + yy' + zz')(xx'' + yy'' + zz'') - (x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')$

von deren Richtigkeit man sich durch die Entwickelung beider Glieder überzeugen kann. Setzen wir nun Kürze halber $x'x'' + y'y'' + z'z'' = V^{1,2}$, $x''x + y''y + z''z = V^{2,0}$, $xx' + yy' + zz' = V^{0,1}$, $x^2 + y^2 + z^2 = V^{0,0}$, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = V^{1,1}$, $x''^2 + y''^2 + z''^2 = V^{2,2}$, so hat man folgende drei Gleichungen:

$$X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = V^{0,1}.V^{0,2} - V^{0,0}.V^{1,2}$$
$$X''X + Y''Y + Z''Z = V^{1,0}.V^{1,2} - V^{1,1}.V^{2,0}$$
$$XX' + YY' + ZZ' = V^{2,0}.V^{2,1} - V^{2,2}.V^{0,1}.$$

§. 14. Substituirt man in der Gleichung $X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = V^{0,1}.V^{0,2} - V^{0,0}.V^{1,2}$, x', y', z' resp. für x'', y'', z'', so verwandelt sich X', Y', Z' resp. in $-X''$, $-Y''$, $-Z''$, $V^{0,2}$ in $V^{0,1}$, $V^{1,2}$ in $V^{1,1}$, und die obige Gleichung wird

$$X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = V^{0,0}.V^{1,1} - V^{0,1}.V^{0,1}, \text{ oder}$$

$(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2$

wovon man sich jedoch durch wirkliche Entwickelung noch leichter überzeugen kann.

§. 15. Vertauscht man in der ersten Gleichung (§. 13.) die Buchstaben x, y, z mit X, Y, Z, so verwandelt sich $X'X'' + Y'Y'' + Z'Z''$ in

$(Y''Z - Z''Z)(YZ' - ZY') + (Z''X - X''Z)(ZX' - XZ') + (X''Y - Y''X)(XY' - YX')$
$= (\S.\ 12.)\ K^2(x'x'' + y'y'' + z'z'')$. Eben so verwandelt sich durch dieselbe Operation der Ausdruck $V^{0,1}.V^{0,2} - V^{0,0}.V^{1,2}$ in

$(XX' + YY' + ZZ')(XX'' + YY'' + ZZ'') - (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'')$.

Man hat also die Gleichung: $K^2(x'x'' + y'y'' + z'z'') =$

$(XX' + YY' + ZZ')(XX'' + YY'' + ZZ'') - (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'')$.

§. 16. Aufgabe. Es seien die Coordinaten der Puncte O' und P gegeben; man soll die Determinanten der geraden Linie $O'P$ finden.

Man lege durch den Punct O', dessen Coordinaten a, b, c sein mögen, drei mit den Hauptaxen parallele gerade Linien, so werden, wenn x, y, z die Coordinaten des Punctes P in Bezug auf das Hauptaxensystem sind, nach (§. 6.) die Coordinaten x', y', z' von P in Bezug auf das neue Axensystem, dessen Mittelpunct O' ist, $x-a$, $y-b$, $z-c$, und der Radiusvector $r' = O'P = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ sein. Nun seien die Projectionen des Radiusvectors auf die Axen der x', y', z' resp. $O'Q_I$, $O'Q'_I$, OQ''_I, so wird $\frac{O'Q_I}{O'P} = cos\, Q_I O'P$, $\frac{O'Q'_I}{O'P} = cos\, Q'_I O'P$, $\frac{O'Q''_I}{O'P} = cos\, Q''_I O'P$ sein. Bezeichnet man nun die Determinanten der Linie $O'P$ durch ξ, η, ζ, so erhält man, weil (§. 6.) $O'Q_I = x' = x-a$, $O'Q'_I = y = y-a$, $O'Q''_I = z' = z-a$,

$$\xi = \frac{x-a}{\varrho}, \quad \eta = \frac{y-b}{\varrho}, \quad \zeta = \frac{z-c}{\varrho}$$

wo $$\varrho = \sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}.$$

Daraus ergiebt sich zugleich, dafs $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ oder dafs die Summe der Quadrate der Determinanten jeder geraden Linie gleich der Einheit ist.

§. 17. Fällt der Punct O' mit dem Mittelpuncte des ersten Axensystems zusammen, so dafs PO der Radiusvector von P, und die Coordinaten a, b, c Null werden, so sind $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die resp. Determinanten des Radiusvectors $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

§. 18. Ist der Neigungswinkel β des Radiusvectors r gegen die Ebne xy, und der Winkel λ, den die Projection des Radiusvectors mit der Axe der x macht, gegeben, so erhält man daraus nach (§. 4.) die Determinanten des Radiusvectors $\xi = cos\,\beta\, cos\,\lambda$, $\eta = cos\,\beta\, sin\,\lambda$, $\zeta = sin\,\beta$.

§. 19. Aus den drei Ausdrücken für die Determinanten (§. 16.) ergeben sich die Gleichungen für die gerade Linie O_1P

$$x = \xi\varrho + a, \quad y = \eta\varrho + b, \quad z = \zeta\varrho + c,$$

welche man durch die Elimination der als veränderlich betrachteten Gröfse ϱ auf zwei zurückführen kann.

§. 20. Aufgabe. Die Determinanten zweier geraden Linien sind gegeben, man soll die Verschiedenheit der Richtung derselben oder den Winkel bestimmen, den die eine mit der andern selbst oder mit einer ihr parallelen Linie bildet.

Es seien die beiden Linien L, L' ihre resp. Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'. Man lege durch den Anfangspunct O der Coordinaten die beiden Linien OA, OB parallel den Linien L, L', so wird die Verschiedenheit der Richtung derselben der Winkel AOB sein. Nimmt man nun $OA = OB = 1$, so werden (§. 7.) ξ, η, ζ die Coordinaten von A und ξ', η' ζ' die Coordinaten von B sein. Es ist alsdann (§. 6.)

$$\overline{AB}^2 = (\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2 + (\zeta'-\zeta)^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - 2(\xi'\xi + \eta\eta' + \zeta\zeta')$$
$$+ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2 - 2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta').$$

Nun ist aber $\overline{AB}^2 = 4\, sin^2 \frac{1}{2}\, AOB = 2 - 2\, cos\, AOB$.

Folglich $cos\, AOB = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$.

Daraus ergiebt sich, weil $sin^2\, AOB = 1 - cos^2\, AOB$

$$= (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2$$
$$= \text{(§. 14.)}\ (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi'\eta - \eta\xi')^2,$$
$$sin\, AOB = \sqrt{[(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2]}.$$

§. 21. Aus dem so eben gefundenen Ausdrucke für $cos\, AOB$ lassen sich mehrere interessante Folgerungen ziehen.

1) Wenn die Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' zweier Ebnen gegeben sind, so findet man daraus den Winkel ω ihrer gegenseitigen Neigung durch

$$cos\,\omega = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'.$$

2) Aus den Determinanten ξ, η, ζ einer geraden Linie, und den Determinanten ξ', η', ζ' einer Ebne findet man die Neigung θ der Linie gegen die Ebne durch

$$sin\,\theta = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'.$$

3) Zwischen den Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' zweier senkrecht aufeinander-

stehenden geraden Linien oder Ebenen, oder einer Ebene und einer mit ihr parallelen geraden Linien findet immer folgende Bedingungsgleichung statt:

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = o.$$

§. 22. Wenn die Determinanten einer geraden Linie oder einer Ebene dreien gegebenen Gröfsen A, B, C resp. proportional sind, so folgt daraus, dafs $\xi = \frac{A}{D}$ gesetzt, $\eta = \frac{B}{D}$, und $\zeta = \frac{C}{D}$, und folglich, wegen (§. 16.) $\frac{A^2}{D^2} + \frac{B^2}{D^2} + \frac{C^2}{D^2} = 1$, also $D = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$ sein mufs. Es sind daher die drei Determinanten

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

§. 23. Aufgabe. Die Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' zweier geraden Linien L, L' sind gegeben, man soll die Determinanten der mit den beiden Linien parallelen Ebenen finden.

Es seien die Determinanten der parallelen Ebnen ξ'', η'', ζ'', so hat man (§. 21.)

$$\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = o$$
$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = o.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich (§. 10.)

$$\xi'' : \eta'' : \zeta'' = (\eta\zeta' - \zeta\eta') : (\zeta\xi' - \xi\zeta') : (\xi\eta' - \eta\xi'),$$

und weil, wenn man die Verschiedenheit der Richtungen der beiden Linien durch den Winkel γ ausdrückt, (§. 20.)

$$\sin\gamma = \sqrt{[(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2]}$$

so erhält man

$$\xi'' = \frac{\eta\zeta' - \zeta\eta'}{\sin\gamma}, \quad \eta'' = \frac{\eta\xi' - \xi\zeta'}{\sin\gamma}, \quad \zeta'' = \frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{\sin\gamma}.$$

Weil die Projection dieser beiden Geraden in der paralleleu Ebene, wenn sie nicht unter sich parallel sind, einander schneiden müssen, so wird offenbar ein durch diesen Durchschnittspunct auf die Ebne erriehtetes Perpendikel die beiden Linien L, L' unter rechten Winkel schneiden. Es werden also auch die so eben gefunde-

nen Werthe von ξ'', η'', ζ' die Determinanten dieses gemeinschaftlichen Perpendikels sein.

§. 24. Aufgabe. Die Determinanten ξ, η, ζ einer durch den, vermittelst der Coordinaten a, b, c bestimmten Punct A, gelegten Linie AB sind gegeben; man soll die Entfernung des durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punctes P von derselben bestimmen.

Ein Perpendikel PQ von P auf die Linie AB gezogen, ist die gesuchte Entfernung und $= AP.\sin QAP$. Da nun (§. 16.) die Determinanten von AP, wenn man AP durch r bezeichnet, $\frac{x-a}{r}$, $\frac{y-b}{r}$, $\frac{z-c}{r}$, und ξ, η, ζ die Determinanten von AQ sind, so ist (§. 20.)

$$\sin QAP = \sqrt{\left(\frac{\eta(z-c) - \zeta(y-b)}{r}\right)^2 + \left(\frac{\zeta(x-a) - \xi(z-c)}{r}\right)^2 + \left(\frac{\xi(y-b) - \eta(x-a)}{r}\right)^2}.$$

Folglich $r\sin QAP$ oder

$$PQ = \sqrt{(\eta(z-c) - \zeta(y-b))^2 + (\zeta(x-a) - \xi(z-c))^2 + (\xi(y-b) - \eta(x-a))^2}.$$

§. 25. Aufgabe. Es seien ξ, η, ζ die Determinanten einer Linie, die durch den Punct A geht, dessen Coordinaten a, b, c; eben so seien ξ', η', ζ' die Determinanten einer andern Linie durch den Punct B, dessen Coordinaten a', b', c'. Man soll die gegenseitige Entfernung der Durchschnittspuncte dieser beiden Linien mit ihrem gemeinschaftlichen Perpendikel bestimmen.

Bezeichnen wir die Durchschnittspuncte der beiden gegebenen Linien mit ihrem gemeinschaftlichen Perpendikel durch P, Q, und die resp. Coordinaten dieser beiden Puncte durch x, y, z; x', y', z', so erhalten wir, wenn wir $AP = r$, $QB = r'$, $PQ = r''$ setzen, und die Determinanten des gemeinschaftlichen Perpendikels durch ξ'', η'', ζ'' bezeichnen, (§. 16.) folgende neun Gleichungen:

$$a - x = r\xi, \quad x' - a' = r'\xi', \quad x - x' = r''\xi''$$
$$b - y = r\eta, \quad y' - b' = r'\eta', \quad y - y' = r''\eta''$$
$$c - z = r\zeta, \quad z' - c' = r'\zeta', \quad z - z' = r''\zeta''$$

und daraus

$$r\xi + r'\xi' + r''\xi'' = a - a'$$
$$r\eta + r'\eta' + r''\eta'' = b - b'$$
$$r\zeta + r'\zeta' + r''\zeta'' = c - c'$$

Weil zufolge (§. 23.) die Determinanten ξ'', η'', ζ'' durch die Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' gegeben sind, so lassen sich, die dort eingeführte Bedeutung des Winkels γ hier beibehalten, aus den obigen drei Gleichungen die Gröfsen r, r', r'' folgendermafsen sehr leicht herleiten.

Summirt man die obigen drei Gleichungen, nachdem man sie zuvor resp. durch $\xi - \xi' \cos\gamma$, $\eta - \eta' \cos\gamma$, $\zeta - \zeta' \cos\gamma$; darauf durch $\xi' - \xi \cos\gamma$, $\eta' - \eta \cos\gamma$, $\zeta' - \zeta \cos\gamma$ und endlich durch ξ'', η'', ζ'' multiplicirt hat, so erhält man, weil $\cos\gamma = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$,

$$r \sin^2\gamma = (a-a')(\xi - \xi'\cos\gamma) + (b-b')(\eta - \eta'\cos\gamma) + (c-c')(\zeta - \zeta'\cos\gamma)$$
$$r' \sin^2\gamma = (a-a')(\xi' - \xi\cos\gamma) + (b-b')(\eta' - \eta\cos\gamma) + (c-c')(\zeta' - \zeta\cos\gamma)$$
$$r'' \quad = (a-a')\xi'' \quad + (b-b')\eta'' \quad + (c-c')\zeta''.$$

Vermittelst der beiden ersten dieser drei Gleichungen erhält man r und r' in gegebenen Gröfsen, so dafs die Coordinaten der beiden Puncte P, Q durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$x = a - r\xi, \quad y = b - r\eta, \quad z = c - r\zeta$$
$$x' = a' + r'\xi', \quad y = b' + r'\eta', \quad z' = c' + r'\zeta$$

Die letzte der obigen drei Gleichungen giebt die Entfernung der beiden Linien

$$r'' = \frac{1}{\sin\gamma}\,[(a-a')(\eta\zeta' - \zeta\eta') + (b-b')(\zeta\xi' - \xi\zeta') + (c-c')(\xi\eta' - \eta\xi')],$$

und zugleich die Bedingungsgleichung, welche statt finden mufs, wenn die beiden gegebenen Linien einander schneiden, nämlich:

$$(a-a')(\eta\zeta' - \zeta\eta') + (b-b')(\zeta\xi' - \xi\zeta') + (c-c')(\xi\eta' - \eta\xi') = o.$$

§. 26. Lehrsatz. Wenn ξ, η, ζ die Determinanten einer Ebene, und das aus dem Mittelpuncte O des Axensystems auf diese Ebene gefällte Perpendikel $OQ = p$, so findet zwischen den Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punctes in der Ebene folgende Gleichung statt:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p. \qquad (A)$$

Es sei P irgend ein Punct in der Ebene, dessen Coordinaten x, y, z, und dessen Entfernung von $O = r$, so sind $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die Determinanten der Linie OP. Da nun ξ, η, ζ die Determinanten von p oder OQ sind, so hat man nach (§. 20.)

$\cos QOP = \xi\frac{x}{r} + \eta\frac{y}{r} + \zeta\frac{z}{r}$; daraus folgt, weil $p = r\cos QOP$, $p = \xi x + \eta y + \zeta z$.

§. 27. Wenn die Ebene durch den Mittelpunct O der Coordinaten gelegt ist, so ist $p = o$, und man hat die Gleichung $\xi x + \eta y + \zeta z = o$; und umgekehrt folgt aus dieser Gleichung, dafs der Punct O in der Ebene selbst liegt.

Ist die Ebene mit einer der Axen parallel, z. B. mit der Axe der x, so mufs das Perpendikel p in der Ebene yz liegen, und folglich mit der Axe der x einen rechten Winkel machen, also $\xi = o$ sein. Die Gleichung der Ebene ist alsdann:

$$\eta y + \zeta z = p$$

und umgekehrt folgt aus dieser Gleichung dafs $\xi = o$, und folglich die Ebene mit der Axe der x parallel ist.

Ist die Ebene mit einer der Hauptebenen parallel, z. B. mit der Ebene yz, also auch mit den beiden Hauptaxen der y und der z, so fällt das Perpendikel p mit der Axe x zusammen, so dafs $\xi = o$, $\eta = o$, $\zeta = 1$, und die Gleichung der Ebene ist $x = p$.

§. 28. Weil die Coordinaten y, z, für jeden Punct der Axe der x, $= o$ sind, so erhält man vermittelst der Gleichung $\xi x + \eta y + \zeta z = p$, für den Abstand des Durchschnittspunctes der Axe der x mit der Ebene, $x = \frac{p}{\xi}$. Eben so ergiebt sich für den Durchschnittspunct der Axe der y mit der Ebene, $x = o$, $z = o$ und $y = \frac{p}{\eta}$, und für den Durchschnittspunct der Axe der z mit der Ebene, $x = o$, $y = o$, $z = \frac{p}{\zeta}$. Bezeichnet man nun die resp. Werthe der Segmente der drei Hauptaxen zwischen dem Anfangspuncte O der Coordinaten und der Ebene durch a, b, c, so verwandelt sich die Gleichung (A) der Ebene, wenn man sie mit p dividirt und alsdann $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ resp. für $\frac{\xi}{p}$, $\frac{\eta}{p}$, $\frac{\zeta}{p}$ substituirt, in folgende $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. (B)

§. 29. **Lehrsatz.** Wenn die Durchschnittslinien von drei Ebenen, deren resp. Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ''; unter sich parallel sind, oder in eine Linie zusammenfallen, so müssen folgende drei Bedingungsgleichungen statt finden:

$$\text{(C)} \quad \begin{aligned} \xi \sin\alpha + \xi' \sin\beta + \xi'' \sin\gamma &= o \\ \eta \sin\alpha + \eta' \sin\beta + \eta'' \sin\gamma &= o \\ \zeta \sin\alpha + \zeta' \sin\beta + \zeta'' \sin\gamma &= o \end{aligned}$$

wo α, β, γ die resp. Winkel bedeuten, welche die 2te Ebene mit der 3ten, die 3te mit der 1sten, die 1ste mit der 2ten macht.

Man denke sich durch den Anfangspunct O der Coordinaten eine Ebene gelegt, auf welcher die drei Durchschnittslinien senkrecht stehen, so werden, wie man leicht übersieht, die drei resp. Perpendikel OA, OB, OC auf die drei Ebenen in dieser Ebene liegen müssen. Nun sind aber zufolge (§. 23.) die Determinanten der Durchschnittslinien

der 2ten und 3ten Ebene: $\frac{\eta'\zeta'' - \zeta'\eta''}{\sin\alpha}$, $\frac{\zeta'\xi'' - \xi'\zeta''}{\sin\alpha}$, $\frac{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}{\sin\alpha}$,

der 3ten und 1sten Ebene: $\frac{\eta''\zeta - \zeta''\eta}{\sin\beta}$, $\frac{\zeta''\xi - \xi''\zeta}{\sin\beta}$, $\frac{\xi''\eta - \eta''\xi}{\sin\beta}$,

der 1sten und 2ten Ebene: $\frac{\eta\zeta' - \zeta\eta'}{\sin\gamma}$, $\frac{\zeta\xi' - \xi\zeta'}{\sin\gamma}$, $\frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{\sin\gamma}$.

Diese Determinanten sind aber resp. unter einander und zugleich den Determinanten der Ebene gleich, worin die drei Perpendikel OA, OB, OC liegen, woraus sich, wenn man von den (§. 9.) eingeführten Zeichen Gebrauch macht, ergiebt, dafs

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \mathfrak{X} : \mathfrak{X}' : \mathfrak{X}'' = \mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z}'',$$

und zugleich

$$\xi\mathfrak{X} + \eta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Z} = \xi'\mathfrak{X}' + \eta'\mathfrak{Y}' + \zeta'\mathfrak{Z}' = \xi''\mathfrak{X}'' + \eta''\mathfrak{Y}'' + \zeta''\mathfrak{Z}'' = \mathfrak{K} = o.$$

Weil aber auch (§. 9.)

$$\mathfrak{K} = \xi\mathfrak{X} + \xi'\mathfrak{X}' + \xi''\mathfrak{X}'' = \eta\mathfrak{Y} + \eta'\mathfrak{Y}' + \eta''\mathfrak{Y}'' = \zeta\mathfrak{Z} + \zeta'\mathfrak{Z}' + \zeta''\mathfrak{Z}''.$$

so ergeben sich daraus die drei zu erweisenden Gleichungen (C).

§. 30. Umgekehrt folgt aus den drei Gleichungen

$$\text{(D)} \quad \lambda\xi + \lambda'\xi' + \lambda''\xi'' = o, \quad \lambda\eta + \lambda'\eta' + \lambda''\eta'' = o, \quad \lambda\zeta + \lambda'\zeta' + \lambda''\zeta'' = o,$$

dafs die Durchschnittslinien der drei Ebenen, deren resp. Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' sind, unter sich parallel sein müssen.

Die Determinanten dieser drei Durchschnittslinien sind nämlich nach dem Vorhergehenden resp. proportional den Gröfsen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$; $\mathfrak{X}'', \mathfrak{Y}'', \mathfrak{Z}''$. Aus den Gleichungen (D) ergiebt sich aber, wenn man dieselben summirt, nachdem man sie zuvor mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; oder mit $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$; oder mit $\mathfrak{X}'', \mathfrak{Y}'', \mathfrak{Z}''$ multiplicirt hat, $\mathfrak{K} = o$.

Es ist also $\xi\mathfrak{X} + \eta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Z} = o$, weil aber auch $\xi'\mathfrak{X} + \eta'\mathfrak{Y} + \zeta'\mathfrak{Z} = o$, $\xi''\mathfrak{X} + \eta''\mathfrak{Y} + \zeta''\mathfrak{Z} = o$, und folglich eine Ebene, auf welcher die Durchschnittslinie der 2ten und 3ten Ebene senkrecht steht, parallel mit den drei Perpendikeln OA, OB, OC ist, so müssen diese drei Perpendikel, weil sie den Punct O gemeinschaftlich haben, in einer und derselben Ebene liegen.

Eben so folgt aus $\mathfrak{K} = \xi'\mathfrak{X}' + \eta'\mathfrak{Y}' + \zeta'\mathfrak{Z}' = o$, und

$$\xi\mathfrak{X}' + \eta\mathfrak{Y}' + \zeta\mathfrak{Z}' = o, \quad \xi''\mathfrak{X}' + \eta''\mathfrak{Y}' + \zeta''\mathfrak{Z}' = o,$$

dafs die Durchschnittslinie der 3ten und 1sten Ebene auf der Ebene der drei Perpendikel senkrecht stehen mufs; diefs folgt auch für die dritte Durchschnittslinie aus den Gleichungen

$$\xi''\mathfrak{X}'' + \eta''\mathfrak{Y}'' + \zeta'\mathfrak{Z}'' = o, \quad \xi\mathfrak{X}'' + \eta\mathfrak{Y}'' + \zeta\mathfrak{Z}'' = o, \quad \xi'\mathfrak{X}'' + \eta'\mathfrak{Y}'' + \zeta'\mathfrak{Z}'' = o.$$

Es stehen also alle drei Durchschnittslinien auf der Ebene der Perpendikel senkrecht, und sind folglich unter einander parallel.

§. 31. Haben die drei Ebenen nur eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, so müssen nicht nur die drei Bedingungsgleichungen (C) (§. 29.) statt finden, sondern es mufs auch, wenn die auf diese drei Ebenen aus O gezogenen Perpendikel OA, OB, OC resp. durch p, p', p'' bezeichnet werden,

$$p \sin\alpha + p' \sin\beta + p'' \sin\gamma = o \text{ sein.}$$

Bedeuten nämlich x, y, z die Coordinaten eines Punctes der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie, so erhält man, wenn man die drei Gleichungen (C) resp. durch x, y, z multiplicirt, und dann addirt:

$$(\xi x + \eta y + \zeta z)\sin\alpha + (\xi' x + \eta' y + \zeta' z)\sin\beta + (\xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z)\sin\gamma = o,$$

oder wegen der Gleichung (A) (§. 26.)

$$p\sin\alpha + p'\sin\beta + p''\sin\gamma = o.$$

§. 32. Auf gleiche Weise erhält man aus den drei Gleichungen (D):

$$\lambda(\xi x + \eta y + \zeta z) + \lambda'(\xi' x + \eta' y + \zeta' z) + \lambda''(\xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z) = o.$$

Sind nun x, y, z die Coordinaten eines Punctes der Durchschnittslinie der 2ten und 3ten Ebene, so hat man

$$\text{(E)} \qquad \lambda(\xi x + \eta y + \zeta z) + \lambda' p' + \lambda'' p'' = o.$$

Ist also aufser den drei Gleichungen:

$$\text{(F)} \qquad \lambda\xi + \lambda'\xi' + \lambda''\xi'' = o, \quad \lambda\eta + \lambda'\eta' + \lambda''\eta'' = o, \quad \lambda\zeta + \lambda'\zeta' + \lambda''\zeta'' = o$$

noch die vierte (G) $\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'' = o$ gegeben, so folgt aus (E) und (G)

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p,$$

oder: dafs jeder Punct der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der 2ten und 3ten Ebene, zugleich ein Punct der ersten Ebene sein, und folglich diese Durchschnittslinie zugleich in allen drei Ebenen liegen mufs.

§. 33. Aufgabe. Aus den gegebenen Coordinaten dreier Puncte A, B, C den Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu bestimmen.

Es seien die gegebenen Coordinaten von A, B, C resp. x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; so erhält man, wenn man die Determinanten von $AB = c$ durch ξ', η', ζ', und von $AC = b$ durch ξ'', η'', ζ'' bezeichnet, nach (§. 16.)

$$\xi' = \frac{x'-x}{c},\ \eta' = \frac{y'-y}{c},\ \zeta' = \frac{z'-z}{c};\ \xi'' = \frac{x''-x}{b},\ \eta'' = \frac{y''-y}{b},\ \zeta'' = \frac{z''-z}{b}.$$

Weil nun (§. 20.) $\sin A = \sqrt{[(\eta'\zeta' - \zeta'\eta'')^2 + (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2]}$, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC = \frac{1}{2}bc\sin A$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{[(c\eta'.b\zeta'' - c\zeta'.b\eta'')^2 + (c\zeta'.b\xi'' - c\xi'.b\zeta'')^2 + (c\xi'.b\eta'' - c\eta'.b\xi'')^2]}.$$

Es ist aber $c\eta'.b\zeta'' - c\zeta'.b\eta'' = (y'-y)(z''-z) - (z'-z)(y''-y)$

$$= y'z'' - z'y'' + y''z - z''y + yz' - zy' = (\text{§. 9.})\ X + X' + X''$$

Eben so erhält man:

$$c\zeta'.b\xi'' - c\xi'.b\zeta'' = (z'-z)(x''-x) - (x'-x)(z''-z) = Y' + Y + Y''$$

und $$c\xi'.b\eta'' - c\eta'.b\xi'' = (x'-x)(y''-y) - (y'-y)(x''-x) = Z' + Z + Z''.$$

Demnach ist, wenn S den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks bedeutet:

$$S = \sqrt{[(X + X' + X'')^2 + (Y + Y' + Y'')^2 + (Z + Z' + Z'')^2]}.$$

§. 34. Wenn man von den drei Scheitelpuncten des Dreiecks ABC auf eine der Hauptebenen z. B. auf die Ebene yz Perpendikel fällt, so bilden die drei Durchschnittspuncte A', B', C' derselben mit der Ebene yz ein Dreieck, das man die Projection des Dreiecks in der Ebene yz nennt. Die resp. Coordinaten dieser drei Puncte A', B', C' sind offenbar o, y, z; o, y', z'; o, y'', z''. Eben so sind x, o, z; x', o, z'; x'', o, z'' die resp. Ordinaten der Scheitelpuncte A', B'', C'' der Projection in der Ebene zx, und x, y, o; x', y', o; x'', y'', o die resp. Ordinaten der Scheitelpuncte A'', B''', C''' der Projection des Dreiecks ABC in der Ebene xy. Bezeichnet man nun den doppelten Flächeninhalt dieser drei Projectionen resp. durch $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, so ergiebt sich aus dem für S gefundenen Ausdrucke, wie man leicht übersieht:

$$\overline{X} = X + X' + X'',\ \ \overline{Y} = Y + Y' + Y'',\ \ \overline{Z} = Z + Z' + Z''.$$

Zugleich folgt daraus, dafs $S^2 = \overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2$, oder dafs das Quadrat des Flächeninhalts eines Dreiecks gleich ist der Summe der Quadrate seiner Projectionen in den drei Hauptebenen jedes Axensystems.

§. 35. Betrachtet man das Dreieck ABC als die Basis einer dreiseitigen Pyramide, deren Spitze im Mittelpuncte O der Coordinaten liegt, und bezeichnet den doppelten Flächeninhalt der Seitenflächen derselben OBC, OCA, OAB respective durch F, F', F'', so ist:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\ \ F' = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2},\ \ F'' = \sqrt{X''^2 + Y''^2 + Z''^2}.$$

Man erhält nämlich F, indem man in dem Ausdrucke für S statt der Coordinaten x, y, z von A, die Coordinaten von o, o, o von O substituirt, wodurch die Gröfsen X', Y', Z'; X'', Y'', X'' verschwinden, und S in $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ übergeht. Auf ähnliche Weise erhält man F', F''.

Zugleich übersieht man leicht, dafs der doppelte Flächeninhalt der resp. Projectionen der drei Dreiecke OBC, OCA, OAB in den drei Hauptebenen X, Y, Z: X' Y', Z'; X'', Y'', Z'' sein mufs.

§. 36. Aufgabe. Aus den gegebenen Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' dreier Puncte in einer Ebene die Determinanten derselben $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$, und das aus dem Mittelpuncte O des Axensystems auf die gegebene Ebene gefällte Perpendikel zu bestimmen.

Zufolge (§. 26.) hat man zur Bestimmung der Gröfsen ξ, η, ζ, p, aufser der Bedingungsgleichung (§. 16.) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot\xi x + \dot\eta y + \dot\zeta z &= p \\ \dot\xi x' + \dot\eta y' + \dot\zeta z' &= p \qquad \text{(H)} \\ \dot\xi x'' + \dot\eta y'' + \dot\zeta z'' &= p. \end{aligned}$$

Summirt man diese drei Gleichungen, nachdem man sie resp. mit X, X', X''; mit Y, Y', Y''; und mit Z, Z', Z'' multiplicirt hat, mit Berücksichtigung der (§. 9.) vorgetragenen Lehrsätze, so ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$\dot\xi K = p(X + X' + X''); \quad \dot\eta K = p(Y + Y' + Y''); \quad \dot\zeta K = p(Z + Z' + Z'')$$

oder

$$\dot\xi K = p\overline{X}, \quad \dot\eta K = p\overline{Y}, \quad \dot\zeta K = p\overline{Z}. \qquad \text{(I)}$$

Daraus, wegen der Bedingungsgleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$,

$$p = \frac{K}{\sqrt{\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2}} = (\S\ 34.)\ \frac{K}{S}.$$

Substituirt man diesen Werth von p in (D), so hat man:

$$\dot\xi = \frac{\overline{X}}{S}, \quad \dot\eta = \frac{\overline{Y}}{S}, \quad \dot\zeta = \frac{\overline{Z}}{S}$$

woraus zugleich der bereits bewiesene Satz $S^2 = \overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2$ folgt.

Aus der Gleichung $p = \frac{K}{S}$ oder $K = pS$ geht hervor, weil S der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ABC, und p ein Perpendikel auf die Ebene desselben oder die Höhe einer Pyramide, deren Basis das Dreieck ABC, und deren Spitze der Anfangspunct O der Coordinaten ist, dafs

$$K = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy'z'' - x'y''z - x''yz'$$

das sechsfache Volumen der Pyramide $OABC$ ist.

Bezeichnen wir die Seiten OA, OB, OC der Pyramide durch r, r', r'', und ihre respectiven Determinanten durch ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ''; so ist wegen (§. 16.) $x = r\xi$, $y = r\eta$, $z = r\zeta$, $x' = r'\xi'$, $y' = r'\eta'$, $z' = r'\zeta'$ etc., und es wird

$$\text{(F)} \quad K = rr'r''(\xi\eta'\zeta' + \xi'\eta''\zeta + \xi''\eta\zeta' - \zeta\eta'\xi'' - \xi'\eta''\xi - \xi''\eta\zeta) = rr'r''\,\mathfrak{K}.$$

Sind die Seiten der Pyramide OA, OB, OC alle $= 1$, so wird $K = \mathfrak{K}$, woraus sich ergiebt, dafs $\mathfrak{K}$ das sechsfache Volumen einer dreiseitigen Pyramide, welche den Mittelpunct O einer Kugel, deren Radius $= 1$, zur Spitze hat, und deren Basis das aus den Sehnen der Bogen des sphärischen Dreiecks ABC gebildete Dreieck ist.

Wir haben bereits (p. 230, §. 62; p. 232, §. 65.) für das sechsfache Volumen der Pyramide $OABC$ zwei Ausdrücke, die wir dort mit k bezeichnet, gefunden, so dafs

$$\mathfrak{K} = \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c)}$$

$$\text{und} \quad = 2\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}s \cdot \sin(\tfrac{1}{2}s - a)\sin(\tfrac{1}{2}s - b)\sin(\tfrac{1}{2}s - c)},$$

wo $a + b + c = s$, und a, b, c die Bogen BC, CA, AB des sphärischen Dreiecks bedeuten.

§. 37. Substituirt man in dem Ausdrucke $\mathfrak{K}$ für die Determinanten der Radien OA, OB, OC die Winkel β, β', β'', welche dieselben mit der Ebene xy machen, und die Winkel λ, λ', λ'', die ihre Projectionen in der Ebene xy mit der Axe der x bilden, so ist (§. 18.)

$$\begin{aligned} \xi &= \cos\beta\cos\lambda & \xi' &= \cos\beta'\cos\lambda' & \xi'' &= \cos\beta''\cos\lambda'' \\ \eta &= \cos\beta\sin\lambda & \eta' &= \cos\beta'\sin\lambda' & \eta'' &= \cos\beta''\sin\lambda'' \\ \zeta &= \sin\beta & \zeta' &= \sin\beta' & \zeta'' &= \sin\beta''. \end{aligned}$$

Man erhält also, weil (§. 9.) $\mathfrak{K} = \zeta\mathfrak{Z} + \zeta\mathfrak{Z}' + \zeta''\mathfrak{Z}''$, aber

$$\mathfrak{Z} = \xi\eta'' - \eta'\xi'' = \cos\beta'\cos\beta''(\cos\lambda'\sin\lambda'' - \sin\lambda'\cos\lambda'') = \cos\beta'\cos\beta''\sin(\lambda''-\lambda');$$

$$\text{eben so} \quad \mathfrak{Z}' = \xi''\eta - \eta''\zeta = \cos\beta''\cos\beta\sin(\lambda-\lambda'')$$

$$\text{und} \quad \mathfrak{Z}'' = \xi\eta' - \eta\zeta' = \cos\beta\cos\beta'\sin(\lambda'-\lambda),$$

$$\mathfrak{K} = \sin\beta\cos\beta'\cos\beta''\sin(\lambda''-\lambda') + \sin\beta'\cos\beta''\cos\beta\sin(\lambda-\lambda') + \sin\beta''\cos\beta\cos\beta'\sin(\lambda'-\lambda)$$

$$= \cos\beta\cos\beta'\cos\beta''(\tan\beta\sin(\lambda''-\lambda') + \tan\beta'\sin(\lambda-\lambda'') + \tan\beta''\sin(\lambda'-\lambda))$$

§. 38. Es ist so eben (§. 36.) gezeigt worden, dafs die Determinanten der Ebene eines Dreiecks resp. durch die Exponenten der Verhältnisse der Projectionen des Dreiecks in den drei Hauptebenen yz, zx, xy zu dem Dreiecke bestimmt werden, und dafs das Quadrat des Dreiecks der Summe der Quadrate seiner Projectionen in den drei Hauptebenen gleich ist. Dieser Satz gilt aber nicht nur von einem ebenen Dreiecke, sondern von jeder ebenen gradlinigen Figur. Theilt man nämlich dieselbe in lauter Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc., deren resp. Projectionen in den drei Hauptebenen wir durch X, X_1, X_2, etc.; Y, Y_1, Y_2, etc.; Z, Z_1, Z_2, etc. bezeichnen wollen, so hat man, wenn die Determinanten der Ebene der Figur $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$; nach (§. 36.)

$$\dot\xi = \frac{X}{\Delta} = \frac{X_1}{\Delta_1} = \frac{X_2}{\Delta_2} \text{ etc.}; \quad \dot\eta = \frac{Y}{\Delta} = \frac{Y_1}{\Delta_1} = \frac{Y_2}{\Delta_2} \text{ etc.}; \quad \dot\zeta = \frac{Z}{\Delta} = \frac{Z_1}{\Delta_1} = \frac{Z_2}{\Delta_2} \text{ etc.}$$

Daher auch

$$\dot\xi = \frac{X + X_1 + X_2 + \text{etc.}}{\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \text{etc.}}, \quad \dot\eta = \frac{Y + Y_1 + Y_2 + \text{etc.}}{\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \text{etc.}}, \quad \dot\zeta = \frac{Z + Z_1 + Z_2 + \text{etc.}}{\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \text{etc.}}$$

und folglich auch

$$(\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \text{etc.})^2 = (X + X_1 + X_2 + \text{etc.})^2 + (Y + Y_1 + Y_2 + \text{etc.})^2 + (Z + Z_1 + Z_2 + \text{etc.})^2$$

Diese beiden Sätze gelten, wie grofs auch die Zahl der Seiten des Vielecks sein mag, und auch, wie sich vermittelst der Exhaustionsmethode zeigen läfst, für jede ebene krummlinige Figur.

§. 39. Aufgabe. Es seien A, B, C drei Puncte auf der um den Mittelpunct O der Axen beschriebenen Oberfläche der Kugel, und ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' die resp. Determinanten der drei Radien OA, OB, $OC = 1$. Man soll daraus 1) die Seiten des sphärischen Dreiecks ABC; 2) die Winkel desselben, und 3) die Neigungswinkel jedes der drei Radien gegen die Ebene der beiden andern Radien bestimmen.

I. Wenn die Seiten BC, CA, AB des sphärischen Dreiecks resp. durch a, b, c bezeichnet werden, so ergiebt sich unmittelbar aus (§. 20.), indem man von den (§. 9 etc.) eingeführten Zeichen Gebrauch macht:

$$\cos a = \xi\xi' + \eta'\eta'' + \zeta\zeta'' = \mathfrak{V}^{1,2}$$
$$\cos b = \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = \mathfrak{V}^{2,0} \qquad \text{(A)}$$
$$\cos c = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \mathfrak{V}^{0,1}.$$

Eben so erhält man:

$$\sin a = \mathfrak{r}[\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2]$$
$$\sin b = \mathfrak{r}[\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 + \mathfrak{z}'^2] \qquad \text{(B)}$$
$$\sin c = \mathfrak{r}[\mathfrak{x}''^2 + \mathfrak{y}''^2 + \mathfrak{z}''^2].$$

II. Aus (§. 29.) ergiebt sich, dafs die resp. Determinanten der Ebenen a, b, c folgende sind:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\sin a}, \quad \frac{\mathfrak{y}}{\sin a}, \quad \frac{\mathfrak{z}}{\sin a}$$
$$\frac{\mathfrak{x}'}{\sin b}, \quad \frac{\mathfrak{y}'}{\sin b}, \quad \frac{\mathfrak{z}'}{\sin b} \qquad \text{(C)}$$
$$\frac{\mathfrak{x}''}{\sin c}, \quad \frac{\mathfrak{y}''}{\sin c}, \quad \frac{\mathfrak{z}''}{\sin c}.$$

Bezeichnet man nun im allgemeinen die gegenseitigen Neigungswinkel der Ebenen der Bogen b, c; c, a; a, b durch A', B', C', so hat man nach (§. 20.)

$$\cos A' = \frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' + \mathfrak{y}'\mathfrak{y}'' + \mathfrak{z}'\mathfrak{z}''}{\sin b \sin c}$$
$$\cos B' = \frac{\mathfrak{x}''\mathfrak{x} + \mathfrak{y}''\mathfrak{y} + \mathfrak{z}''\mathfrak{z}}{\sin c \sin a} \qquad \text{(D)}$$
$$\cos C' = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{\sin a \sin b}.$$

Die Winkel A', B', C' sind nun entweder die Winkel des sphärischen Dreiecks oder ihre Supplemente. Um diese Zweideutigkeit verschwinden zu machen, wollen wir

annehmen, dafs der Punct B mit dem Puncte C zusammenfalle. Man hat alsdann $\xi' = \xi''$, $\eta' = \eta''$, $\zeta' = \zeta''$, woraus sich $\mathfrak{X}'' = -\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'' = -\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'' = -\mathfrak{Z}'$, und $\sin b = \sin c$ ergiebt, so dafs

$$\cos A' = -\frac{\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2}{\sin^2 b} = -\left[\left(\frac{\mathfrak{X}'}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Y}'}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}'}{\sin b}\right)^2\right] = -1,$$

und folglich $A' = 180°$. Es wird aber in diesem Falle der Winkel des sphärischen Dreiecks $A = o$, so dafs A' das Supplement desselben ist. Woraus also hervorgeht, dafs A', B', C' die Supplemente der Winkel des sphärischen Dreiecks sind.

Aus den obigen Ausdrücken für $\cos A'$, $\cos B'$, $\cos C'$ folgt:

$$\sin^2 A' = 1 - \cos^2 A' = 1 - \left(\frac{\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}''}{\sin b \sin c}\right)^2$$

$$= \frac{(\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2)(\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2) - (\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'')^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= (\text{§. 15.}) \frac{(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' - \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'')^2 + (\mathfrak{Z}'\mathfrak{X}'' - \mathfrak{X}'\mathfrak{Z}'')^2 + (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'' - \mathfrak{Y}'\mathfrak{X}'')^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

Es ist aber (§. 12.) $\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' - \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'' = \xi\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Z}'\mathfrak{X}'' - \mathfrak{X}'\mathfrak{Z}'' = \eta\mathfrak{K}$, $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'' - \mathfrak{Y}'\mathfrak{X}'' = \zeta\mathfrak{K}$.

Demnach $Sin A = \sqrt{\frac{(\mathfrak{K}^2\xi^2 + \mathfrak{K}^2\eta^2 + \mathfrak{K}^2\zeta^2)}{\sin b \sin c}} = \frac{\mathfrak{K}}{\sin b \sin c}$.

Eben so erhält man $Sin B' = \frac{\mathfrak{K}}{\sin c \sin a}$, $Sin C' = \frac{\mathfrak{K}}{\sin a \sin b}$. (E)

III. Bezeichnet man die Neigungswinkel der Radien OA, OB, OC gegen die Ebenen der gegenüberliegenden Seiten a, b, c durch α, β, γ, so erhält man nach (§. 21.) aus den Ausdrücken (C) für die Determinanten dieser Ebenen:

$$Sin\,\alpha = \frac{\xi\mathfrak{X} + \eta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Z}}{\sin a} = \frac{\mathfrak{K}}{\sin a}$$

$$Sin\,\beta = \frac{\xi'\mathfrak{X}' + \eta'\mathfrak{Y}' + \zeta'\mathfrak{Z}'}{\sin b} = \frac{\mathfrak{K}}{\sin b} \quad \text{(F)}$$

$$Sin\,\gamma = \frac{\xi''\mathfrak{X}'' + \eta''\mathfrak{Y}'' + \zeta''\mathfrak{Z}''}{\sin c} = \frac{\mathfrak{K}}{\sin c}.$$

§. 40. Aus den so eben gefundenen Ausdrücken für die Cosinusse und Sinusse der Seiten und Supplemente der Winkel eines sphärischen Dreiecks lassen sich

auch die (p. 266 etc.) bewiesenen vier Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie herleiten.

1. Aus den Formeln (E) ergiebt sich unmittelbar:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A' : \sin B' : \sin C'. \quad \text{(G)}$$

2. Weil, wegen (A), $\cos b \cos c - \cos a = \mathfrak{V}^{2,0}.\mathfrak{V}^{0,1} - \mathfrak{V}^{0,0}.\mathfrak{V}^{0,2}$

$= (\xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta)(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta''$

und wegen (D)

$$\sin b \sin c \cos A' = \mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'',$$

zufolge (§. 13.) aber

$$\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'' = \mathfrak{V}^{2,0}.\mathfrak{V}^{0,1} - \mathfrak{V}^{0,0}.\mathfrak{V}^{1,2},$$

so hat man:

$$\cos b \cos c - \cos a = \sin b \sin c \cos A'$$

Eben so $\quad \cos c \cos a - \cos b = \sin c \sin a \cos B' \quad \text{(H)}$

$$\cos a \cos b - \cos c = \sin a \sin b \cos C.$$

3. Aus den Formeln (D) und (B) hat man $\cos B' \cos C' - \cos A'$

$$= \frac{(\mathfrak{X}''\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}''\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}''\mathfrak{Z})(\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}') - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'')}{\sin^2 a \sin b \sin c}$$

$$= (\text{§. 13.}) \frac{(\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}') + (\mathfrak{Z}''\mathfrak{X} - \mathfrak{X}''\mathfrak{Z})(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}\mathfrak{Z}') + (\mathfrak{X}''\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}''\mathfrak{X})(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}')}{\sin^2 a \sin b}$$

$$= \frac{\mathfrak{K}\xi' . \mathfrak{K}\xi'' + \mathfrak{K}\eta' . \mathfrak{K}\eta'' + \mathfrak{K}\zeta' . \mathfrak{K}\zeta''}{\sin^2 a \sin b \sin c} = \frac{\mathfrak{K}^2(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')}{\sin^2 a \sin b \sin c}$$

$$= \frac{\mathfrak{K}}{\sin c \sin a} \cdot \frac{\mathfrak{K}}{\sin a \sin b} \cdot (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') = \text{(E)} \ \sin B' \sin C' \cos a$$

Es ist also $\quad \cos B' \cos C' - \cos A' = \sin B' \sin C' \cos a$

eben so $\quad \cos C' \cos A' - \cos B' = \sin C' \sin A' \cos b \quad \text{(I)}$

und $\quad \cos A' \cos B' - \cos C' = \sin A' \sin B' \cos c.$

4. Eliminirt man, aus den beiden letzten Gleichungen (I), $\cos C'$, und substituirt $\frac{\sin c \sin A'}{\sin a}$ für $\sin C'$, so erhält man nach den nöthigen Reductionen:

$$\sin A' \cot B' + \cot b \sin c + \cos A' \cos c = o.$$

Durch die Elimination des Winkels B' würde man

$$\sin A' \cot C' + \cot c \sin b + \cos A' \cos b = o$$

erhalten haben. Diese beiden Gleichungen geben, wenn nach und nach a, b, c in b, c, a; in c, a, b, und ebenso A', B', C' in B', C', A'; in C', A', B' verwandelt, noch vier analytisch verschiedene Gleichungen:

$$\sin B' \cot C' + \cot c \sin a + \cos B' \cos a = o$$
$$\sin B' \cot A' + \cot a \sin c + \cos B' \cos c = o$$
$$\sin C' \cot A' + \cot a \sin b + \cos C' \cos b = o$$
$$\sin C' \cot B' + \cot b \sin a + \cos C' \cos a = o.$$

§. 41. Aufgabe. Aus den gegebenen Örtern dreier Puncte A, B, C auf einer Kugelfläche und den gegenseitigen Verhältnissen der Cosinusse ihrer Winkelentfernungen von einem vierten Puncte H, die Lage dieses Punctes zu bestimmen.

Es sei O der Mittelpunct der Kugel und zugleich des Axensystems; es seien ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' die resp. Determinanten der Radien OA, OB, $OC = 1$, und $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ die Determinanten des Halbmessers OH; setzen wir überdiefs $\widehat{BC} = a$, $\widehat{CA} = b$, $\widehat{AB} = c$; $\widehat{HA} = \alpha$, $\widehat{HB} = \beta$, $\widehat{HC} = \gamma$, und nehmen an, dafs

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = f, g, h,$$

so dafs, wenn $f = \lambda \cos\alpha$, $g = \lambda \cos\beta$, und $h = \lambda \cos\gamma$ sein mufs; so wird zufolge (§. 20.) sein:

$$\dot\xi\xi + \dot\eta\eta + \dot\zeta\zeta = \cos\alpha$$
$$\dot\xi\xi' + \dot\eta\eta' + \dot\zeta\zeta' = \cos\beta \qquad \text{(K)}$$
$$\dot\xi\xi'' + \dot\eta\eta'' + \dot\zeta\zeta'' = \cos\gamma.$$

Durch die Summation dieser drei Gleichungen, nachdem man sie respective, mit Berücksichtigung der (§. 9.) eingeführten Zeichen und dort bewiesenen Lehrsätze, durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$; alsdann durch $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Y}''$; und endlich durch $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ multiplicirt hat, erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\dot\xi\,\mathfrak{K} = \mathfrak{X}\cos\alpha + \mathfrak{X}'\cos\beta + \mathfrak{X}''\cos\gamma$$
$$\dot\eta\,\mathfrak{K} = \mathfrak{Y}\cos\alpha + \mathfrak{Y}'\cos\beta + \mathfrak{Y}''\cos\gamma \qquad \text{(L)}$$
$$\dot\zeta\,\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}\cos\alpha + \mathfrak{Z}'\cos\beta + \mathfrak{Z}''\cos\gamma.$$

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen zusammen, so ergiebt sich zufolge (§. 39.), wenn man die Summe durch λ^2 multiplicirt, folgende Gleichung:

$$\lambda^2\mathfrak{K}^2 = f^2\sin^2 a + g^2\sin^2 b + h^2\sin^2 c + 2gh(\cos b\cos c - \cos a)$$
$$+ 2hf(\cos c\cos a - \cos b) + 2fg(\cos a\cos b - \cos c),$$

wodurch die Gröfse λ bestimmt ist. Man hat also auch $\cos\alpha = \frac{f}{\lambda}$, $\cos\beta = \frac{g}{\lambda}$, $\cos\gamma = \frac{h}{\lambda}$, und auf die Weise ist die Lage des Punctes H gegeben.

Die Auflösung der obigen Aufgabe kann mit Nutzen in der Lehre von den Parallaxen gebraucht werden. Hier mag sie zunächst zur Auflösung der bekannten geometrischen Aufgabe: um eine gegebene dreiseitige Pyramide eine Kugelfläche zu beschreiben, benutzt werden.

Nehmen wir in dieser Absicht an, dafs der Scheitelpunct O der dreiseitigen Pyramide, deren Basis das gradlinigte Dreieck $A'B'C'$ sein mag, der Anfangspunct der Coordinaten sei, und nennen wir den Mittelpunct der gesuchten Kugel E, indem wir $OA' = f$, $OB' = g$, $OC' = h$, $B'OC' = a$, $C'OA' = b$, $A'OB' = c$, $EOA' = \alpha$, $EOB' = \beta$, $EOC' = \gamma$ setzen, so erhalten wir, indem wir den Durchmesser der gesuchten Kugel durch D bezeichnen:

$$f = D\cos\alpha, \quad g = D\cos\beta, \quad h = D\cos\gamma.$$

Indem wir nun O als den Mittelpunct einer Kugel betrachten, deren Halbmesser $= 1$, und deren Oberfläche die Geraden OA', OB', OC', OE in den Puncten A, B, C, H schneidet, so wird $\widehat{BC} = a$, $\widehat{CA} = b$, $\widehat{AB} = c$ sein, so dafs der Ausdruck von D oder des Durchmessers der gesuchten Kugel gänzlich derselbe ist, wie der im vorigen §. gefundene Ausdruck für λ, nämlich:

$$D = \frac{\left\{\begin{array}{l} f^2\sin^2 a + g^2\sin^2 b + h^2\sin^2 c + 2gh(\cos b\cos c - \cos a) \\ \quad + 2hf(\cos c\cos a - \cos b) + 2fg(\cos a\cos b - \cos c)\end{array}\right\}}{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c)}}.$$

Von der Verwandlung der Coordinaten und Determinanten.

§. 42. Es seien in der (§. 39.) zum Grunde gelegten Figur die Bogen gröfsester Kreise $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ jeder $= 90°$, so können die Halbmesser OA, OB, OC als die rechtwinklichten Axen eines neuen Coordinaten-Systems betrachtet werden, so dafs die Determinanten des Halbmessers OH, welche in Bezug auf das Grundsystem $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$, waren, in Bezug auf das neue System $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ werden. Bezeichnen wir diese Determinanten resp. durch $\ddot\xi$, $\ddot\eta$, $\ddot\zeta$, so werden die Gleichungen (K) (§. 41.)

$$\begin{aligned}\ddot\xi &= \xi\dot\xi + \eta\dot\eta + \zeta\dot\zeta\\ \ddot\eta &= \xi'\dot\xi + \eta'\dot\eta + \zeta'\dot\zeta\\ \ddot\zeta &= \xi''\dot\xi + \eta''\dot\eta + \zeta''\dot\zeta\end{aligned}$$

und die Gleichungen (L)

$$\begin{aligned}\dot\xi\,\mathfrak{K} &= \mathfrak{x}\ddot\xi + \mathfrak{x}'\ddot\eta + \mathfrak{x}''\ddot\zeta\\ \dot\eta\,\mathfrak{K} &= \mathfrak{y}\ddot\xi + \mathfrak{y}'\ddot\eta + \mathfrak{y}''\ddot\zeta\\ \dot\zeta\,\mathfrak{K} &= \mathfrak{z}\ddot\xi + \mathfrak{z}'\ddot\eta + \mathfrak{z}''\ddot\zeta.\end{aligned}$$

Weil $\mathfrak{K}$ auch nach (§. 36.) durch $\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c)}$ ausgedrückt werden kann, und die Bogen a, b, c hier alle $= 90°$ sind, so wird $\mathfrak{K} = 1$. Es scheint hier noch wegen des Vorzeichens von $\mathfrak{K}$ eine Zweideutigkeit statt zu finden, die aber durch die Betrachtung eines besondern Falles völlig verschwindet. Läfst man nämlich das neue System mit dem Grundsysteme zusammenfallen, so wird $\xi = 1$, $\eta' = 1$, $\zeta'' = 1$, und alle übrigen Determinanten werden Null sein, so dafs

$\mathfrak{K} = \xi\eta'\zeta'' + \xi''\eta\zeta' + \xi'\eta''\zeta - \zeta'\eta''\xi - \zeta''\eta'\xi - \zeta\eta\xi = \xi\eta'\zeta'' = +1$ wird.

Man übersieht leicht, dafs, wenn A_1, B_1, C_1 die Durchschnittspuncte der positiven Seiten der Axen des Grundsystems mit der Kugelfläche sind, die Determinanten der Axen OA_1, OB_1, OC_1 in Bezug auf das neue Axensystem respective

$$\begin{aligned}\cos\widehat{A_1A} &= \xi, \quad \cos\widehat{A_1B} = \xi', \quad \cos\widehat{A_1C} = \xi''\\ \cos\widehat{B_1A} &= \eta, \quad \cos\widehat{B_1B} = \eta', \quad \cos\widehat{B_1C} = \eta''\\ \cos\widehat{C_1A} &= \zeta, \quad \cos\widehat{B_1B} = \zeta', \quad \cos\widehat{C_1C} = \zeta''\end{aligned}$$

sein müssen,

dafs folglich

$$\begin{aligned}\dot\xi &= \xi\ddot\xi + \xi''\ddot\eta + \xi''\ddot\zeta\\ \dot\eta &= \eta\ddot\xi + \eta'\ddot\eta + \eta''\ddot\zeta\\ \dot\zeta &= \zeta\ddot\xi + \zeta'\ddot\eta + \zeta'\ddot\zeta.\end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke für $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ mit den so eben gefundenen, so ergeben sich, weil $\mathfrak{K} = +1$, folgende sehr nützliche Gleichungen:

$$\begin{aligned}&\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = \xi, \quad \eta''\zeta - \zeta''\eta = \xi', \quad \eta\zeta' - \zeta\eta' = \xi''\\ &\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = \eta, \quad \zeta''\xi - \xi''\zeta = \eta', \quad \zeta\xi' - \xi\zeta' = \eta''\\ &\xi'\eta'' - \eta'\xi'' = \zeta, \quad \xi''\eta - \eta''\xi = \zeta', \quad \xi\eta' - \eta\xi' = \zeta'.\end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

§. 43. Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten eines Punctes P in Bezug auf das Grundaxensystem durch x, y, z; und in Bezug auf ein neues System, dessen Mittelpunct O' durch die Coordinaten a, b, c, und dessen Axen durch die resp. Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η' ζ'; ξ'', η'', ζ'' gegeben sind, durch x', y', z', so wird man (§. 16.) für die Determinanten der Geraden $O'P = r$ in Bezug auf das Grundaxensystem folgende Ausdrücke haben:

$$\frac{x-a}{r}, \quad \frac{y-b}{r}, \quad \frac{z-c}{r} \qquad \text{(d)}$$

und die Determinanten derselben Linie $O'P$ in Bezug auf das neue Axensystem werden sein:

$$\frac{x'}{r}, \quad \frac{y'}{r}, \quad \frac{z'}{r}. \qquad \text{(e)}$$

Substituirt man nun in den Gleichungen (a) (b) (§. 42.) die Ausdrücke (e) für $\ddot\xi$, $\ddot\eta$, $\ddot\zeta$, und die Ausdrücke (d) für $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$, und multiplicirt alsdann die Gleichungen durch r, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= \xi(x-a) + \eta(y-b) + \zeta(z-c) \\ y' &= \xi'(x-a) + \eta'(y-b) + \zeta'(z-c) \\ z' &= \xi''(x-a) + \eta''(y-b) + \zeta''(z-c). \end{aligned} \qquad \text{(f)}$$

und

$$\begin{aligned} x-a &= \xi x' + \xi' y' + \xi'' z' \\ y-b &= \eta x' + \eta' y' + \eta'' z' \\ z-c &= \zeta x' + \zeta' y' + \zeta'' z'. \end{aligned} \qquad \text{(g)}$$

Man kann die drei Gleichungen (f) auch folgendermafsen ausdrücken:

$$\begin{aligned} x' &= \xi x + \eta y + \zeta z + a' \\ y' &= \xi' x + \eta' y + \zeta' z + b' \\ z' &= \xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z + c', \end{aligned} \qquad \text{(h)}$$

wo a', b', c' die Coordinaten des Mittelpuncts der Axen des Grundsystems in Bezug auf das neue System bedeuten.

§. 44. Weil die Axen $O'A$, $O'B$, $O'C$ des neuen, wie die des Grundsystems senkrecht auf einander stehen, so hat man wegen (§. 21, 3.) für die Determinanten derselben folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = o, \quad \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = o, \quad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = o. \qquad \text{(i)}$$

Durch diese lassen sich mit Zuziehung der der drei Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1, \quad \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1$$

die neun Determinanten auf drei zurückführen.

Statt der obigen sechs Bedingungsgleichungen hat man auch, weil ξ, ξ', ξ''; η, η', η''; ζ, ζ', ζ'' die resp. Determinanten der Axen des Grundsystems in Bezug auf das neue System sind, folgende sechs Bedingungsgleichungen:

$$\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 = 1, \quad \eta^2 + \eta'^2 + \eta''^2 = 1, \quad \zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2 = 1$$

$$\eta\zeta + \eta'\zeta' + \eta''\zeta'' = o, \quad \zeta\xi + \zeta'\xi' + \zeta''\xi'' = o, \quad \xi\eta + \xi'\eta' + \xi''\eta'' = o,$$

welche mit den erstern sechs Gleichungen identisch sind.

§. 45. Dafs die Richtung des neuen Axensystems durch drei Gröfsen völlig bestimmt werden kann, ergiebt sich auf folgende Weise. Man lege durch den Mittelpunct O der Axen x, y, z drei andere senkrecht aufeinanderstehende Axen, die

mit den Axen des neuen Systems einerlei Richtung haben, und die wir die Axen der x', y', z' nennen wollen. Bezeichnen wir nun den Neigungswinkel der Ebene $x'y'$ gegen die Ebene xy oder den Winkel, den die positiven Theile der Axen der z', und der z mit einander bilden durch ω; durch ψ den Winkel, den die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden Ebenen $x'y'$, xy mit der Axe der x, und durch φ den Winkel, den sie mit der Axe der x' bildet, so ist die Richtung des neuen Axensystems durch die drei Gröfsen ω, ψ, φ völlig bestimmt. Um jedoch alle Zweideutigkeit zu vermeiden, mufs man die beiden auf verschiedenen Seiten des Punctes O liegenden Theile der Durchschnittslinie der beiden Ebenen $x'y'$, xy von einander unterscheiden. Man bewege in dieser Absicht eine aus O gezogene Linie in der Ebene $x'y'$, und zwar so, dafs sie um aus dem positiven Theile der Axe der x' in den positiven Theil der Axe der y' zu kommen, einen Winkel von 90° beschreibt. Diese Linie geht, indem sie den ganzen Kreisumfang um O beschreibt, zweimal durch die Ebene xy, wo sie mit der Durchschnittslinie der beiden Ebenen xy, $x'y'$ zusammenfällt. Wir wollen nun diejenige Seite dieser Durchschnittslinie als positiv betrachten, die zum Übergange der beweglichen Linie, aus der negativen Seite der Ebene xy in die positive, dient, dafs also der durch ψ bezeichnete Winkel von der Axe der x und diesem positiven Theile OQ der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie gebildet wird, und zwar so, dafs derselbe $= 90°$ wird, wenn OQ mit dem positiven Theile der Axe der y zusammenfällt. Der Winkel φ hingegen ist derjenige Winkel, den OQ mit der Axe der x' macht und so bestimmt wird, dafs $\varphi = 270°$ oder $-90°$ wird, wenn OQ mit der Axe der y' zusammenfällt.

Die Determinanten ξ, η, ζ, ξ' etc. müssen demnach Functionen der drei Winkelgröfsen ω, ψ, φ sein, die wir jetzt bestimmen wollen. Man beschreibe um den Mittelpunct O der Coordinaten die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$, und bezeichne die Durchschnittspuncte der Kugelfläche mit den positiven Theilen der Axen des Grundsystems respective durch A_1, B_1, C_1, und des neuen Axensystems durch A, B, C, so ist

$$\xi = \cos \widehat{AA_1}, \quad \xi' = \cos \widehat{BA_1}, \quad \xi'' = \cos \widehat{CA_1}$$
$$\eta = \cos \widehat{AB_1}, \quad \eta' = \cos \widehat{BB_1}, \quad \eta'' = \cos \widehat{CB_1}$$
$$\zeta = \cos \widehat{AC_1}, \quad \zeta' = \cos \widehat{CB_1}, \quad \zeta'' = \cos \widehat{CC_1}.$$

Nennt man ferner Q den Durchschnittspunct des positiven Theils der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der beiden Ebenen xy, $x'y'$ mit der Kugelfläche, so sind die Bogen AA_1, AB_1, AC_1 etc. die Seiten der neun sphärischen Dreiecke AQA_1, AQB_1, AQC_1; BQA_1, BQB_1, BQC_1; CQA_1, CQB_1, CQC_1 und man hat (§. 40.)

$$\cos AA_1 = \cos A_1Q \cos AQ + \sin A_1Q \sin AQ \cos A_1QA$$
$$\cos AB_1 = \cos B_1Q \cos AQ + \sin B_1Q \sin AQ \cos B_1QA$$
$$\cos AC_1 = \cos C_1Q \cos AQ + \sin C_1Q \sin AQ \cos C_1QA$$

$$\cos BA_1 = \cos A_1Q \cos BQ + \sin A_1Q \sin BQ \cos A_1QB$$
$$\cos BB_1 = \cos B_1Q \cos BQ + \sin B_1Q \sin BQ \cos B_1QB$$
$$\cos BC_1 = \cos C_1Q \cos BQ + \sin C_1Q \sin BQ \cos C_1QB$$

$$\cos CA_1 = \cos A_1Q \cos CQ + \sin A_1Q \sin CQ \cos A_1QC$$
$$\cos CB_1 = \cos B_1Q \cos CQ + \sin B_1Q \sin CQ \cos B_1QC$$
$$\cos CC_1 = \cos C_1Q \cos CQ + \sin C_1Q \sin CQ \cos C_1QC.$$

Weil nun $A_1Q = \psi$, $B_1Q = 90° - \psi$, $C_1Q = 90°$, $AQ = \varphi$, $BQ = \varphi + 90°$, $CQ = 90°$, $A_1QA = A_1QB = 180° - \omega$, $B_1QA = B_1QB = \omega$, $C_1QA = C_1QB = 90° - \omega$, $A_1QC = 90° - \omega$, $B_1QC = 90° + \omega$, $CQC_1 = AQB_1 = \omega$, so erhält man:

$\xi = \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\omega$ $\xi' = -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\omega$ $\xi'' = \sin\psi \sin\omega$
$\eta = \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\omega$ $\eta' = -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \cos\omega$ $\eta'' = -\cos\psi \sin\omega$
$\zeta = \sin\varphi \sin\omega$ $\zeta' = \cos\varphi \sin\omega$ $\zeta'' = \cos\omega.$

§. 46. Wir haben oben (§. 26.) gesehen, dafs alle Puncte, deren Coordinaten x, y, z in einer durch die Gleichung $\xi x + \eta y + \zeta z = p$ gegebenen Beziehung zu einander stehen, in einer Ebene liegen müssen, die durch die Determinanten ξ, η, ζ

und den Abstand p des Anfangspunctes O von dieser Ebene bestimmt wird. Eben so ergiebt sich (§. 16.) aus der Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \varrho^2,$$

dafs jeder Punct P, dessen Coordinaten x, y, z, auf einer Kugelfläche liegen mufs, deren Mittelpunct durch die Coordinaten a, b, c bestimmt ist, und deren Halbmesser $= \varrho$ ist. Auf ähnliche Weise mufs sich überhaupt jede Fläche, wenn sie ein Gegenstand analytischer Untersuchung werden soll, durch eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten eines beliebigen Punctes auf derselben darstellen lassen.

§. 47. Wenn die Coordinaten eines Punctes den Gleichungen zweier Flächen entsprechen, so mufs derselbe zugleich in beiden Flächen, und folglich in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie derselben liegen. Zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Punctes bestimmen daher eine Curve; vorausgesetzt, dafs die, den beiden gegebenen Gleichungen entsprechenden Flächen einander schneiden. Umgekehrt sind zur Bestimmung einer Curve im Raume im allgemeinen immer wenigstens zwei Gleichungen erforderlich. Lassen sich diese beiden Gleichungen auf zwei andere zurückführen, von denen die eine von der Form $Ax + By + Cz = D$ ist, so liegen alle Puncte der Curve in einer Ebene, und diese Curve wird eine **ebene Curve** genannt. Im entgegengesetzten Falle heifst sie **eine Linie mit doppelter Krümmung**. So sind z. B. die beiden Gleichungen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2; \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varrho^2,$$

die Gleichungen zweier Kugelflächen, deren gemeinschaftliche Durchschnittslinie, wenn es deren giebt, bekanntlich ein Kreis, also eine ebene Curve ist, was sich auch daraus ergiebt, indem man die eine dieser Gleichungen von der andern z. B. die 1ste von der 2ten abzieht. Man erhält alsdann:

$$2(a-\alpha)x + 2(b-\beta)y + 2(c-\gamma)z + \alpha^2 - a^2 + \beta^2 - b^2 + \gamma^2 - c^2 = \varrho^2 - r^2,$$

eine Gleichung von der Form $Ax + By + Cz = D$.

§. 48. Die beiden Gleichungen einer ebenen Curve, welche allgemein durch $\varphi(x, y, z) = o$, und $\xi''x + \eta''y + \zeta''z = p$ dargestellt werden können, lassen sich durch

Verwandlung der Coordinaten, indem man die Ebene, deren Gleichung $\xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z = p$ ist, zu einer der drei Hauptebenen eines neuen Axensystems z. B. der Ebene $x_1\, y_1$ macht, auf die zwei Gleichungen $\psi(x_1, y_1) = o$, $z_1 = o$ zurückführen.

Da die Gränzen dieser Vorlesung zu beengt sind, um die Lehre von den krummen Linien und Flächen mit einiger Umständlichkeit abzuhandeln, so wollen wir uns hier nur darauf beschränken, die wesentlichsten und nothwendigsten Elementarsätze der Theorie der ebenen Curven und Flächen vom zweiten Grade vorzutragen.

Von den ebenen Curven des zweiten Grades.

§. 49. Jede ebene krumme Linie vom zweiten Grade ist unter der allgemeinen Formel:

$$(a) \qquad Ax^2 + By + 2Cxy + 2Ex + 2Fy + G = o$$

begriffen, wo die Coefficienten A, B, C, E, F, G beliebige constante Gröfsen, und x, y die rechtwinklichten Coordinaten eines beliebigen Punctes der Curve bedeuten.

Verwandelt man die Coordinaten dieser Curve, indem man in der Ebene derselben ein anderes Axensystem der x', y' annimmt, dessen Axen durch die respectiven Determinanten ξ, η; ξ', η', und dessen Mittelpunct durch die Coordinaten a, b bestimmt sind, so erhält man (§. 43.)

$$(b) \qquad x = \xi x' + \xi' y' + a; \quad y = \eta x' + \eta' y' + b.$$

Die Determinanten ξ'', η'' sind hier nämlich, weil die Axe der z ungeändert bleibt $= o$. Eben so ist $\zeta = o$, $\zeta' = o$, und $\zeta'' = 1$.

Substituirt man nun die Werthe von x, y (b) in der Gleichung (a), so verwandelt sich dieselbe, wie man leicht übersieht, in folgende:

$$(c) \qquad \mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{C}x'y' + 2\mathfrak{E}x' + 2\mathfrak{F}y' + \mathfrak{G} = o,$$

so dafs
$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta \\
\mathfrak{B} &= A\xi'^2 + B\eta'^2 + 2C\xi'\eta' \\
\mathfrak{C} &= A\xi\xi' + B\eta\eta' + C(\xi\eta' + \eta\xi') \\
(d) \quad \mathfrak{E} &= A\xi a + B\eta b + C(\xi b + \eta a) + E\xi + F\eta \\
\mathfrak{F} &= A\xi' a + B\eta' b + C(\xi' b + \eta' a) + E\xi' + F\eta' \\
\mathfrak{G} &= Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Ea + 2Fb + G.
\end{aligned}$$

§. 50. Aus den obigen sechs Gleichungen lassen sich nun mit Zuziehung der drei Bedingungsgleichungen (§. 44.)

$$(e) \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \xi'^2 + \eta'^2 = 1, \quad \xi\xi' + \eta\eta' = o$$

oder
$$(f) \qquad \xi^2 + \xi'^2 = 1, \quad \eta'^2 + \eta'^2 = 1, \quad \xi\eta + \xi'\eta' = o$$

sechs Gröfsen $\xi, \eta, \xi', \eta', a, b$ eliminiren, so dafs dieselben auf folgende drei Gleichungen zurückgeführt werden

$$1) \ \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = A + B; \quad 2) \ \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = AB - C^2$$

$$3) \ \mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{F}^2 + 2\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F} - (\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2)\mathfrak{G} = BE^2 + AF^2 + 2CEF - (AB - C^2)G;$$

was wir jetzt beweisen wollen.

I. Die erste dieser Gleichnng $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = A + B$ ergiebt sich unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen $\xi^2 + \xi'^2 = 1$, $\eta^2 + \eta'^2 = 1$, $\xi\eta + \xi'\eta' = o$.

II. Die zweite erhält man folgendermafsen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}\mathfrak{B} = {} & A^2\xi^2\xi'^2 + B^2\eta^2\eta'^2 + 4C^2\xi\eta\xi'\eta' + AB(\xi^2\eta'^2 + \eta^2\xi'^2) + 2AC\,\xi\xi'(\xi\eta' + \eta\xi') \\
& + 2BC\,\eta\eta'(\xi\eta' + \eta\xi')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^2 = {} & A^2\xi^2\xi'^2 + B^2\eta^2\eta'^2 + C^2(\xi^2\eta'^2 + 2\xi\xi'\eta\eta' + \xi'^2\eta^2) + 2AB\,\xi\xi'\eta\eta' \\
& + 2AC\,\xi\xi'(\xi\eta' + \eta\xi') + 2BC\,\eta\eta'(\xi\eta' + \xi'\eta).
\end{aligned}$$

Folglich $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = (AB - C^2)(\xi^2\eta'^2 - 2\xi\xi'\eta\eta' + \xi'^2\eta^2) = (AB - C^2)(\xi\eta' - \eta\xi')^2$.

Es ist aber (§. 42.) $\xi\eta' - \eta\xi' = \zeta'' = 1$, also 2) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = AB - C^2$.

III. Aus den beiden Ausdrücken (d) für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ ergiebt sich mit Berücksichtigung der drei Bedingungsgleichungen (f)

$$\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi' = Aa + Cb + E; \quad \mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta' = Ca + Bb + F$$

Daraus
$$\begin{aligned}
(\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi')B - (\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta')C &= (AB - C^2)a + EB - FC \\
(\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta')A - (\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi')C &= (AB - C^2)b + FA - EC.
\end{aligned}$$

Es ist aber $\mathfrak{G} - G = Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Ea + 2Fb$

$= (Aa + Cb + 2E)a + (Bb + Ca + 2F)b = (\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi' + E)a + (\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta' + F)b$

Demnach wird, wenn wir $AB - C^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2$ durch D bezeichnen,

$$D(\mathfrak{G} - G) = (\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi' + E)Da + (\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta' + F)Db$$

$$= (\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi' + E)\,[(\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi')B - (\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta')C + FC - EB]$$

$$+ (\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta' + F)\,[(\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta')A - (\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi')C + EC - FA]$$

$$= ((\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi')^2 - E^2)B + ((\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta')^2 - F^2)A - 2((\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}\xi')(\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F}\eta') - EF)C$$

$$= \mathfrak{E}^2(B\xi^2 + A\eta^2 - 2C\xi\eta) + \mathfrak{F}^2(B\xi'^2 + A\eta'^2 - 2C\xi'\eta') + 2\mathfrak{E}\mathfrak{F}(B\xi\xi' + A\eta\eta' - C(\xi\eta' + \eta\xi'))$$

$$- (BE^2 + AF^2 - 2CEF).$$

Es ist aber

$B\xi^2 + A\eta^2 - 2C\xi\eta = A + B - (A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta) = A + B - \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$

eben so

$B\xi'^2 + A\eta'^2 - 2C\xi'\eta' = A + B - (A\xi'^2 + B\eta'^2 + 2C\xi'\eta') = A + B - \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$

und $B\xi\xi' + A\eta\eta' - C(\xi\eta' + \eta\xi') = -(B\eta\eta' + A\xi\xi' + C(\xi\eta' + \eta\xi')) = -\mathfrak{C}$

Folglich $D(\mathfrak{G} - G) = \mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{F}^2 - 2\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F} - (BE^2 + AF^2 - 2CEF)$

oder $\mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{F}^2 - 2\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F} - (\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2)\mathfrak{G} = BE^2 + AF^2 - 2CEF - (AB - C^2)G.$

§. 51. Aus den so ebenen gefundenen drei Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der Grundformel (a) und der durch Verwandlung der Coordinaten hergeleiteten (c) geht hervor, dafs im allgemeinen die Formel (a) sich auf die Formel (c) zurückführen läfst, wenn auch drei von den sechs Gröfsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ bestimmt sind. Wir wollen daher jetzt folgende Aufgabe auflösen.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ex + 2Fy + G = o,$$

in die einfachere $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ zu verwandeln.

Weil die drei Gröfsen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} = o$, so sind die drei Bedingungsgleichungen

1) $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = A + B$, 2) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB - C^2$, 3) $\mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 = AF^2 + BE^2 - CEF - (AB - C^2)G$.

Aus den beiden ersten Gleichungen ersieht man, dafs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$t^2 - (A + B)t + (AB - C^2) = o,$$

also $\frac{1}{2}(A + B) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}$ sein müssen.

Es sind also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ immer mögliche Gröfsen.

Der Coefficient $\mathfrak{E}$ wird immer reell sein, wenn $AB - C^2 = D$ eine negative Gröfse ist, weil alsdann wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB - C^2$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ungleichartig sein müssen, und folglich die Gröfse $\mathfrak{B}$ so angenommen werden kann, dafs sie mit $AF^2 + BE^2 - 2CEF - (AB - C^2)G = K$ gleichartig, also $\mathfrak{E}^2$ positiv und $\mathfrak{E}$ reell ist. Wenn aber $AB - C^2$ und folglich auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ positiv ist, so werden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beide zugleich positiv oder negativ sein. Ist demnach $K = AF^2 + BE^2 - 2CEF - (AB - C^2)G$ nicht mit $\mathfrak{B}$ und folglich auch nicht mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ oder mit $A + B$ gleichartig, so kann $\mathfrak{E}$ keine reelle Gröfse sein.

§. 52. Bezeichnen wir den Winkel, den die Axe der x' mit der Axe der x macht, durch α, so ist der Winkel, den sie mit der Axe der y bildet, $= 90° - \alpha$. Es sei ferner der Winkel, den die Axe der y' mit der Axe der x macht $= \alpha + 90°$, so ist der Winkel, den sie mit der Axe der y bildet $= \alpha$. Es ist also $\xi = \cos\alpha$, $\eta = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\xi' = \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$, $\eta' = \cos\alpha$. Substituirt man diese Werthe von ξ, η, ξ', η' in der Gleichung:

$$\mathfrak{C} = A\xi\xi' + B\eta\eta' + C(\xi\eta' + \eta\xi')$$

so wird dieselbe, weil $\mathfrak{C} = o$,

$$o = -A\cos\alpha\sin\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Folglich $\frac{1}{2}(A - B)\sin 2\alpha = C\cos 2\alpha$ oder $\tan 2\alpha = \frac{2C}{A - B}$,

wodurch also die Richtung des neuen Axensystems bedingt wird, um die allgemeine Form (a) der Gleichung des zweiten Grades auf die einfachere

(g) $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ zurückzuführen.

Es sind also noch die Coordinaten a, b des Mittelpunctes des neuen Axensystems zu bestimmen, wozu die beiden Gleichungen (III. §. 50.) gebraucht werden können. Diese sind nämlich, $\mathfrak{F} = o$ gesetzt,

$$(AB - C^2)a = (B\xi - C\eta)\mathfrak{E} + FC - EB$$
$$(AB - C^2)b = (A\eta - C\xi)\mathfrak{E} + EC - FA.$$

§. 53. Es läfst sich demnach die allgemeine Gleichung

(a) $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ex + 2Fy + G = o$

immer auf die einfachere Form $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ zurückführen, den Fall ausgenommen, wenn $AB - C^2$ positiv oder $= o$, und zugleich $AF^2 + BE^2 - 2CEF - (AB - C^2)G$ oder K mit $A + B$ ungleichartig ist. In diesem Falle wird für jeden reellen positiven oder negativen Werth von x, y der, vermittelst der Gleichung (a), bestimmte resp. Werth von y, x imaginär sein. Dieſs läfst sich unmittelbar durch die Verwandlung der Gleichung (a) auf folgende Weise darthun: Es ist nämlich, wenn $AB - C^2 = D$ und $AF^2 + BE^2 - 2CEF - DG = K$ gesetzt wird,

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ex + 2Fy + G = Ax^2 + 2(Cy + E)x + By^2 + 2Fy + G$$
$$= \frac{1}{A}\left\{(Ax + Cy + E)^2 + A(By^2 + 2Fy + G) - (Cy + E)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{A}\left\{(Ax + Cy + E)^2 + (AB - C^2)y^2 + 2(AF - CE)y + AG - E^2\right\}$$
$$= \frac{1}{A}\left\{(Ax + Cy + E)^2 + \frac{1}{D}((Dy + AF - CE)^2 + D(AG - E^2) - (AF - CE)^2\right\}$$

Es ist aber $D(AG - E^2) - (AF - CE)^2 = A(DG - AF^2 - BE^2 + 2CEF) = -AK$.

Man erhält also statt der Gleichung (a) folgende:

$$\frac{1}{A}\left\{(Ax + Cy + E)^2 + \frac{1}{D}((Dy + AF - CE)^2 - AK)\right\} = o \quad \text{(b)}$$

Auf ähnliche Weise verwandelt sich auch (a) in:

$$\frac{1}{B}\left\{(By + Cx + F)^2 + \frac{1}{D}((Dx + BE - CF)^2 - BK)\right\} = o. \quad \text{(c)}$$

Ist demnach D positiv also A und B unter sich, und folglich auch mit $A + B$ gleichartig, so wird, wenn zugleich $A + B$ mit K ungleichartig ist, sowohl $-AK$ als auch $-BK$ positiv, und daher die Gleichung (b) sowohl als (c), also auch (a) für alle reelle Werthe von x, y unmöglich sein.

Ist D positiv und $K = o$, so mufs zugleich

$$Ax + Cy + E = o, \quad Dy + AF - CE = o$$

oder $$By + Cx + F = o, \quad Dx + BE - CF = o \text{ sein.}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen sowohl als aus den beiden letzten folgt:

$$x = \frac{CF - BE}{D}, \quad y = \frac{CE - AF}{D}.$$

Es giebt also nur einen einzigen Punct in der Ebene xy, deren Coordinaten der Gleichung (a) entsprechen.

Wenn D negativ und $K = o$, so erhält man wegen (b)

$$Ax + Cy + E = \frac{Dy + AF - CE}{\pm\sqrt{(C^2 - AB)}}$$

oder $$Ax + (C \pm \sqrt{C^2 - AB})y + E \mp \frac{AF - CE}{\sqrt{C^2 - AB}} = o \quad \text{(d)}$$

und aus der Gleichung (c)

$$By + Cx + F = \frac{Dx + BE - CF}{\pm\sqrt{(C^2 - AB)}}$$

oder $$By + (C \pm \sqrt{C^2 - AB})x + F \pm \frac{BF - CF}{\sqrt{(C^2 - AB)}} = o. \quad \text{(e)}$$

Die beiden Gleichungen (d) sind mit den beiden Gleichungen (e) identisch, wie man sich leicht überzeugt, weil

$$A : (C \pm \sqrt{C^2 - AB}) = (C \mp \sqrt{C^2 - AB}) : B$$

und $$A : (E \mp \frac{AF - CE}{\sqrt{(C^2 - AB)}}) = (C \mp \sqrt{C^2 - AB}) : (F \pm \frac{BE - CF}{\sqrt{(C^2 - AB)}}).$$

Die Gleichung (a) ist demnach, wenn D negativ und $K = o$ ist, die Gleichung zweier geraden Linien.

Ist sowohl D als $K = o$, so ist sowohl $AF - CE$ als auch $BE - CF = o$, und man erhält die beiden identischen Gleichungen:

$$Ax + Cy + E = o, \quad By + Cx + F = o.$$

Es ist also in diesem Falle (a) die Gleichung einer geraden Linie.

§. 54. Aus den vorigen §§. ergiebt sich demnach, dafs die Gleichung einer krum-

men Linie vom zweiten Grade sich allgemein auf die Form $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ zurückführen läfst. Weil man aber die drei beständigen Gröfsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$ auf zwei reduciren kann, so läfst sich diese Gleichung auch unter folgende Form

$$y^2 = p\left(2x \mp \frac{x^2}{a}\right) \qquad \text{(f)}$$

bringen, wo p, a zwei gerade Linien bedeuten, und das Zeichen — oder + gilt oder $a = \infty$ ist, je nachdem in der allgemeinen Formel (a), $BC - C^2$ oder D positiv, negativ oder $= o$ ist. Von diesem Umstande hängt auch die Natur der Curve vom zweiten Grade ab, und erhält deshalb verschiedene Namen. Sie wird nämlich Ellipse, Hyperbel oder Parabel genannt, je nachdem D positiv, negativ oder $= o$ ist. Aus der Gleichung (f), unter der Form $y^2 = \frac{px}{a}(2a \mp x)$ dargestellt, ergiebt sich, dafs $y = o$ wird, wenn $x = o$ oder $= \pm 2a$. In diesen beiden Puncten wird die Axe der x oder die Abscissenlinie von der Curve geschnitten, und der dazwischenliegende Theil $\pm 2a$ wird die Hauptaxe der Ellipse oder der Hyperbel, und die Puncte selbst werden ihre Scheitelpuncte genannt. Die gerade Linie p nennt man den halben Parameter der Curve.

Weil für die Parabel in der Gleichung (f) a unendlich ist, also $\frac{x^2}{a}$ verschwindet, so ist derselbe

$$y^2 = 2px.$$

In dieser giebt es nur einen Werth von x, nämlich o, für welchen $y = o$ wird. Die Parabel hat also nur einen Scheitelpunct.

§. 55. Aus der Betrachtung der Gleichung $y^2 = \frac{px}{a}(2a \pm x)$ übersieht man sogleich, dafs in der Ellipse für alle positive Werthe von x, zwischen o und $2a$, y^2 positiv ist, und folglich y zwei reelle gleiche und entgegengesetzte Werthe hat. Für alle übrigen aufserhalb der Grenzen o, $2a$ liegenden Werthe von x wird y^2 negativ, also y imaginär sein; woraus sich ergiebt, dafs die Ellipse eine in sich zurückkehrende Curve ist, die einen endlichen Raum einschliefst.

Für die Hyperpel wird für alle Werthe von x zwischen $x = o$ und $x = -2a$,

weil für dieselben der eine Factor $\frac{px}{a}$ negativ, der andere $2a + x$ aber positiv, y^2 negativ, also y imaginär. Für alle übrigen negativen Werthe von x hingegen ist $2a + x$ negativ, also y^2 positiv. Dieſs ist auch der Fall für alle positiven Werthe von x.

Für die Parabel der Gleichung $y^2 = 2px$ hat y für alle positive Werthe von x zwei gleiche aber entgegengesetzte reelle Werthe. Für alle übrigen negativen Werthe von x ist y imaginär.

Weil ebene Figuren, die sich durch nichts als ihre Dimensionen unterscheiden, einander ähnlich sind, so müssen Ellipsen und Hyperbeln, deren resp. Parameter und Hauptaxen proportional sind, Parabeln aber alle einander ähnlich sein.

§. 56. Aufser den Scheitelpuncten in den Curven des zweiten Grades sind besonders noch diejenigen Puncte in der Hauptaxe merkwürdig, deren Abscissen der Ordinate $y = p$ zugehören. Man erhält diese Abscissen, indem man in der Gleichung $y^2 = p\left(2x \mp \frac{x^2}{a}\right)$, p für y substituirt. Es ist alsdann für die Ellipse

$$x^2 - 2ax + ap = o,$$

und daraus $x = a \pm \sqrt{a^2 - ap}$.

Es giebt also für die Ellipse zwei solcher Puncte in der Abscissenlinie, vorausgesetzt, dafs $p < a$. Man nennt diese beiden Puncte die Brennpuncte der Elipse, eine Benennung, die davon herrührt, weil eine Fläche, welche durch die Umdrehung um die Axe, worin diese beiden Puncte liegen, entsteht, die Eigenschaft hat, dafs die von einem dieser beiden Puncte ausgehenden Lichtstrahlen von dieser Fläche so zurückgeworfen werden, dafs sie nach den Gesetzen der Katoptrik sich in dem andern Brennpuncte vereinigen.

Aus der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = p\left(2x + \frac{x^2}{a}\right)$ folgt ebenso, p für y substituirt,

$$x^2 + 2ax - ap = o,$$

und daraus $x = -a \pm \sqrt{a^2 + ap}$.

Es hat also die Hyperbel ebenfalls zwei Brennpuncte, welche, wie man aus dem Ausdrucke für x sieht, nicht wie für die Ellipse in der Hauptaxe zwischen den beiden

Scheitelpuncten, sondern aufserhalb derselben auf beiden Seiten in der Verlängerung der Hauptaxe liegen.

Für die Parabel erhält man aus der Gleichung:

$$y^2 = 2px, \quad p^2 = 2px, \quad \text{also } x = \tfrac{1}{2}p.$$

Die Brennpuncte der Hyperbel haben die Eigenschaft, dafs Lichtstrahlen von einem derselben auf die Fläche des durch Umdrehung entstandenen Hyperboloids geworfen, so zerstreut werden, dafs sie rückwärts verlängert, sich in dem andern Brennpuncte vereinigen.

Die aus dem Brennpuncte der Parabel auf die Fläche des durch Umdrehung um die Axe der Hauptaxe hervorgebrachten Paraboloids fallenden und darauf zurückgeworfenen Strahlen sind unter sich parallel.

§. 57. Eine gerade Linie $FP = r$ aus dem Brennpuncte F zu irgend einem Puncte P der Ellipse gezogen, dessen Coordinaten x, y, wenn man $\sqrt{a^2 - ap}$ durch m bezeichnet, ist (§. 16.)

$$= \sqrt{((x - a + m)^2 + y^2)} = \sqrt{((x - a + m)^2 + 2px - \tfrac{p}{a}x^2)}$$

$$= \sqrt{((1 - \tfrac{p}{a})x^2 - 2(a - m - p)x + (a - m)^2)}$$

Weil nun, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$(a - m - p)^2 = (1 - \tfrac{p}{a})(a - m)^2,$$

so erhält man $\overline{FP}^2$ oder

$$r^2 = \frac{[(1 - \frac{p}{a})x - (a - m - p)]^2}{1 - \frac{p}{a}}, \text{ also}$$

$$r = \frac{(1 - \frac{p}{a})x - (a - m - p)}{\sqrt{(1 - \frac{p}{a})}} = x\sqrt{(1 - \tfrac{p}{a})} + a(1 - \sqrt{(1 - \tfrac{p}{a})}) = \frac{m}{a}x + a - m.$$

Setzt man in dieser Gleichung, weil, wenn die Abscisse des einen Brennpunctes $F = a - \sqrt{a^2 - ap} = a - m$ ist, die Abscisse des andern Brennpunctes $F' = a + m$ sein mufs, $-m$ für m, so erhält man für den aus den Brennpuncte F' noch P gezogenen Radiusvector $F'P$

$$r' = -x\frac{m}{a} + a + m.$$

Daraus folgt, dafs $r + r' = 2a$ oder: Die Ellipse ist eine ebene Curve, in welcher die Summe der Entfernungen jedes beliebigen Punctes von zwei festen Puncten in derselben Ebene einer gegebenen geraden Linie gleich ist.

§. 58. Auf ähnliche Weise erhält man für die Hyperbel, weil die Abscisse ihres einen Brennpunctes $= -a + \sqrt{a^2 + ap}$, wenn man ebenfalls wieder Kürze halber, $\sqrt{a^2 + ap} = m$ setzt,

$$\overline{FP}^2 \text{ oder } r^2 = (x + a - m)^2 + y^2 = (x + a - m)^2 + 2px + \frac{px^2}{a}$$

$$= (1 + \tfrac{p}{a})x^2 + 2(a - m + p)x + (a - m)^2.$$

Da nun, wie man leicht übersieht,

$$(a - m + p)^2 = (1 + \tfrac{p}{a})(a - m)^2 \text{ ist,}$$

so ergiebt sich

$$r^2 = \frac{[(1 + \frac{p}{a})x + (a - m + p)]^2}{1 + \frac{p}{a}}, \text{ folglich}$$

$$r = x\sqrt{(1 + \tfrac{p}{a})} + a\sqrt{(1 + \tfrac{p}{a})} - a = \frac{m}{a}x + m - a.$$

Für den andern Brennpunct, dessen Abscisse $= -a - \sqrt{a^2 + ap} = -a - m$ hat man

$$r'^2 = (x + a + m)^2 + y^2 = (1 + \tfrac{p}{a})x^2 + 2(a + m + p)x + (a + m)^2$$

$$= \frac{[(1 + \frac{p}{a})x + (a + m + p)]^2}{1 + \frac{p}{a}}, \text{ also } r' = x\sqrt{(1 + \tfrac{p}{a})} + a\sqrt{(1 + \tfrac{p}{a})} + a.$$

Es ist demnach $r' - r = 2a$ oder die Hyperbel ist eine ebene Curve, in welcher der Unterschied der Entfernungen jedes beliebigen Punctes von zwei gegebenen Puncten eine constante Gröfse ist.

§. 59. Die Abscisse des Brennpunctes F der Parabel, wenn ihre Gleichung $y^2 = 2px$, ist (§. 56.) $= \frac{1}{2}p$. Es ist daher der aus dem Puncte F nach irgend einem Puncte der Parabel, dessen Coordinaten x, y, gezogene Radiusvector $\overline{FP} = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}$ $= \sqrt{(x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + 2px)} = x + \frac{1}{2}p$. Legt man demnach durch einen Punct der Abscissenlinie oder der Axe der x, dessen Abscisse $= -\frac{1}{2}p$ eine senkrechte gerade Linie, so ist die Entfernung jedes Punctes der Parabel von ihrem Brennpuncte der Entfernung desselben von diesem Perpendikel gleich. Die Parabel ist demnach eine ebene Curve, in welcher jeder Punct von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Puncte in derselben Ebene gleich weit entfernt ist.

§. 60. Bezeichnen wir den Winkel, den der Radiusvector $FP = r$ einer Curve vom zweiten Grade mit der Abscissenlinie vom Brennpuncte gegen den Scheitel zu, dessen Abscisse $= o$, macht, durch φ, so ist, wenn x, y die Coordinaten des Punctes P sind

für die Ellipse $x - a + \sqrt{a^2 - ap} = -r\cos\varphi$

für die Hyperbel $x + a - \sqrt{a^2 + ap} = -r\cos\varphi$

und für die Parabel $x - \frac{1}{2}p = -r\cos\varphi$.

Es ist aber auch, wie wir gegeben haben, wenn für die Ellipse $\sqrt{a^2 - ap}$, und für die Hyperbel $\sqrt{a^2 + ap}$ durch m bezeichnet wird:

für die Ellipse $r = \frac{m}{a}x + a - m$

für die Hyperbel $r = \frac{m}{a}x + m - a$

und für die Parabel $r = x + \frac{1}{2}p$.

Da nun für die Ellipse $\frac{m}{a}x = m - \frac{m^2}{a} - r\frac{m}{a}\cos\varphi$

für die Hyperbel $\frac{m}{a}x = \frac{m^2}{a} - m - r\frac{m}{a}\cos\varphi$

und für die Parabel $x = \frac{1}{2}p - r\cos\varphi$,

so ergiebt sich, weil für die Ellipse $a - \frac{m^2}{a} = p$, und für die Hyperbel $\frac{m^2}{a} - a = p$,

für beide Curven

$$r\left(1 + \frac{m}{a}\cos\varphi\right) = p \quad \text{oder} \quad r = \frac{p}{1 + \frac{m}{a}\cos\varphi}.$$

Für die Parabel erhält man $r + r\cos\varphi = p$ oder $r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$. Man übersieht leicht, dafs $m = \sqrt{a^2 - ap}$ für die Ellipse, und $m = \sqrt{a^2 + ap}$ für die Hyperbel, die Entfernung des Brennpunctes von dem Mittelpuncte der Hauptaxe dieser beiden Curven ist. Der Exponent des Verhältnisses dieses Abstandes zur halben Hauptaxe wird die Excentricität der Curve genannt, und gewöhnlich durch e bezeichnet. Diese Excentricität $e = \frac{m}{a}$ ist für die Ellipse $= \sqrt{(1 - \frac{p}{a})}$, für die Hyperpel $= \sqrt{(1 + \frac{p}{a})}$ und für die Parabel, wenn man dieselbe als eine Ellipse oder eine Hyperbel mit einer unendlich grofsen Hauptaxe betrachtet, $= 1$. Es ist demnach

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad \text{(g)}$$

die allgemeine Gleichung für alle Kegelschnitte, und zwar für die Ellipse, wenn $e < 1$, für die Hyperbel, wenn $e > 1$, und für die Parabel, wenn $e = 1$. Für den Kreis wird $e = o$, und für die gleichseitige Hyperbel $e = 2$.

§. 61. Wir haben oben (§. 54.) gesehen, dafs die Gleichung $y^2 = p(2x \mp \frac{x^2}{a})$ oder die mit ihr identische $\frac{x^2}{a} \pm \frac{y^2}{p} \mp 2x = o$ die Gleichung der Ellipse, Hyperbel oder der Parabel ist, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt oder a auch unendlich ist. Man kann diese Gleichung auch auf folgende Art darstellen:

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{ap} = 1.$$

Diese verwandelt sich, wenn man $x \mp a = x'$ und respective für die Ellipse $a^2 - ap = m^2$, und für die Hyperbel $a^2 + ap = m^2$ setzt, in folgende:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - m^2} = 1. \qquad \text{(h)}$$

Diese Gleichung gilt sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel, für jene näm-

lich ist $m < a$ und für diese $> a$. Sie ist aus der Gleichung (f) hervorgegangen, indem man den Anfangspunct der Coordinaten aus dem Scheitelpuncte in den Mittelpunct der Curve verlegte. Man hätte dieselbe auch unmittelbar, wie die Gleichung (f) (§. 54.), aus der allgemeinen (a) herleiten können.

Setzt man in dieser Gleichung $x = o$, so erhält man $y = \pm \sqrt{a^2 - m^2}$. Dieser Werth von y ist nur für die Ellipse, wenn $m < a$, möglich. Man nennt denselben die halbe kleine Axe oder auch die halbe Nebenaxe. Für die Hyperbel ist dieses y unmöglich, weil $m > a$, und für diese wird $\sqrt{m^2 - a^2}$ die Nebenaxe genannt.

Bezeichnet man die Nebenaxe sowohl der Ellipse als der Hyperbel durch b, so ist für jene $a^2 - m^2$, und für diese $m^2 - a^2$ oder $b^2 = ap$, also $p = \frac{b^2}{a}$, woraus der Satz hervorgeht, dafs der halbe Parameter die dritte Proportionallinie der halben grofsen und der halben Nebenaxe ist.

§. 62. Legt man durch den Mittelpunct der Hyperbel, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, zwei Gerade, welche die Axe der x auf beiden Seiten derselben unter dem Winkel α schneiden, so dafs $tang\,\alpha = \frac{b}{a}$, so werden dieselben nach entgegengesetzter Richtung vom Mittelpuncte aus ins Unendliche verlängert, die beiden von einander abgesonderten Zweige der Hyperbel so einschliefsen, dafs sie verlängert, sich denselben immer mehr und mehr nähern, und ihnen so nahe kommen können, dafs ihr Abstand kleiner als jede gegebene Entfernung wird.

Es ist nämlich, wenn man die zur Abscisse x gehörige Ordinate eines Punctes der beiden geraden Linien durch y' bezeichnet, $\frac{y'}{x} = \pm tang\,\alpha = \pm \frac{b}{a}$, oder $y' = \pm \frac{xb}{a}$. Aus der Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ aber folgt, dafs $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Demnach ist $y' - y = \pm \frac{bx}{a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right)$. Es ist aber

$$1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{\left(1 - \sqrt{(1 - \frac{a^2}{x^2})}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{\frac{a^2}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$$

also $y' - y = \pm \frac{ab}{x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$. Der Unterschied $y' - y$ nimmt daher ab, wenn x wächst, und kann kleiner werden, als jede gegebene Gröfse. Dieser Beziehung wegen zur Hyperbel werden die beiden obigen geraden Linien die Asymptoten der Hyperbel genannt.

§. 63. Macht man die beiden Asymptoten zu Axen schiefwinklichter Coordinaten, so dafs die resp. Entfernungen irgend eines Punctes P der Hyperbel von der einen Asymptote in der Richtung der andern Asymptote durch x', y' bezeichnet werden, so erhält man für die Hyperbel die äufserst elegante Gleichung:

$$4x'y' = m^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(i)}$$

wo m die Entfernung des Brennpunctes vom Mittelpuncte bedeutet.

Es sei nämlich O der Mittelpunct der Hauptaxe, P ein Punct der Hyperbel, PQ ein Perpendikel auf die Hauptaxe, und PR eine Linie auf eine der Asymptoten, die man zur Axe der schiefwinklichten Coordinaten x' bestimmt, parallel mit der andern Asymptote, so ist $OQ = x$, $PQ = y$, $OR = x'$, $PR = y'$, und man übersieht leicht, wenn der Winkel $ROQ = \alpha$, dafs $x = x'\,cos\,\alpha + y'\,cos\,\alpha$, $y = x'\,sin\,\alpha - y'\,sin\,\alpha$. Substituirt man nun diese Werthe von x, y in der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, so verwandelt sich dieselbe in

$$x'^2\left(\frac{cos^2\alpha}{a^2} - \frac{sin^2\alpha}{b^2}\right) + y'^2\left(\frac{cos^2\alpha}{a^2} - \frac{sin^2\alpha}{b^2}\right) + 2x'y'\left(\frac{cos^2\alpha}{a^2} + \frac{sin^2\alpha}{b^2}\right) = 1.$$

Es ist aber (§. 62.) $tang\,\alpha = \frac{b}{a}$. Daher $\frac{cos^2\alpha}{a^2} - \frac{sin^2\alpha}{b^2} = o$, $\frac{cos^2\alpha}{a^2} + \frac{sin^2\alpha}{b^2} = \frac{2}{a^2 + b^2}$, und die obige Gleichung wird $\frac{4x'y'}{a^2 + b^2} = 1$ oder $4x'y' = a^2 + b^2 = m^2$.

§. 64. Wir haben oben (§. 51, 52.) gesehen, dafs man den Anfangspunct der recht-

winklichten Coordinaten und die Richtung der Axen so bestimmen kann, dafs die allgemeine Gleichung (a) $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ex + 2Fy + G = o$ des Kegelschnitts sich auf die einfachere Form (f) $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ zurückführen läfst. Wird jedoch der Mittelpunct oder die Richtung des rechtwinklichten Axensystems verändert, so verändert sich auch die Form der Gleichung (f). Man kann indefs, jeden beliebigen Punct der Curve des zweiten Grades zum Mittelpuncte eines schiefwinklichten Axensystems angenommen, die Richtung der Axen so bestimmen, dafs die Gleichung zwischen den schiefwinklichten Coordinaten der Curve dieselbe einfache Form $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ beibehält; was wir jetzt zeigen wollen.

Es seien g, h die rechtwinklichten Coordinaten des Anfangspunctes des schiefwinklichten Coordinatensystems der x', y'; α der Winkel, den die Axe der x' mit der Axe der x des rechtwinklichten Systems, und ω der Winkel, den die Axe der y' mit der Axe der x' macht, und zwar so, dafs der Winkel, den sie mit der Axe der x bildet, $\alpha + \omega$ ist, so übersieht man leicht, dafs

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos(\alpha+\omega) + g, \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin(\alpha+\omega) + h.$$

Substituirt man nun diese beiden Werthe von x, y in der Gleichung $Ax^2 + By^2 + 2Ex = o$, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{C}x'y' + 2\mathfrak{E}x' + 2\mathfrak{F}y' + \mathfrak{G} = o,$$

wo

$\mathfrak{A} = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$ $\quad$ $\mathfrak{E} = (Ag+E)\cos\alpha + Bh\sin\alpha$

$\mathfrak{B} = A\cos^2(\alpha+\omega) + B\sin^2(\alpha+\omega)$ $\quad$ $\mathfrak{F} = (Ag+E)\cos(\alpha+\omega) + Bh\sin(\alpha+\omega)$

$\mathfrak{C} = A\cos\alpha\cos(\alpha+\omega) + B\sin\alpha\sin(\alpha+\omega)$ $\quad$ $\mathfrak{G} = Ag^2 + Bh^2 + 2Egh.$

Soll also $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} = o$ werden, so mufs wegen der letzten Gleichung der Anfangspunct der schiefwinklichten Ordinaten in der Curve selbst liegen.

Aus der Gleichung $\mathfrak{F} = o$ folgt: $\tan(\alpha+\omega) = -\frac{Ag+E}{Bh}$, und wegen $\mathfrak{C} = o$, hat man $\tan\alpha = -\frac{A}{B\tan(\alpha+\omega)} = \frac{Ah}{Ag+E}$.

Daraus ergiebt sich, weil $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$, $\cos^2(\alpha+\omega) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\omega)}$,

$$\cos^2\alpha = \frac{(Ag+E)^2}{(Ag+E)^2 + A^2h^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{A^2h^2}{(Ag+E)^2 + A^2h^2}$$

$$\cos^2(\alpha+\omega) = \frac{B^2h^2}{(Ag+E)^2 + B^2h^2}, \quad \sin^2(\alpha+\omega) = \frac{(Ag+E)^2}{(Ag+E)^2 + B^2h^2}.$$

Demnach

$$\mathfrak{A} = \frac{A^2.(Ag^2 + Bh^2 + 2Eg + \frac{E^2}{A})}{(Ag+E)^2 + A^2h^2} = \frac{AE^2}{(Ag+E)^2 + A^2h^2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{AB(Ag^2 + Bh^2 + 2Eg + \frac{E^2}{A})}{(Ag+E)^2 + B^2h^2} = \frac{BE^2}{(Ag+E)^2 + B^2h^2}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{(Ag+E)^2 + BAh^2}{\sqrt{((Ag+E)^2 + A^2h^2)}} = \frac{E^2}{\sqrt{(AG+E)^2 + A^2h^2}}.$$

Es läfst sich demnach jede Curve des zweiten Grades auf unzählig viele Arten durch eine Gleichung zwischen schiefwinklichten Coordinaten von der Form $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ darstellen, wenn nur der Mittelpunct des Axensystems in der Curve angenommen wird.

§. 65. Da wegen der Gleichung $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$, für zwei Werthe von x', $y' = o$ wird, nämlich für $x' = o$, und $x' = -\frac{2\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}$, so ersieht man daraus, dafs die Axe der x' die Curve des zweiten Grades in zweien Puncten schneidet. Die Abscisse x' des zwischen diesen beiden Puncten in der Mitte liegenden Punctes M ist also $= -\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}$. Substituirt man nun diese Abscisse x' und die dazu gehörige Ordinate $y' = o$ in den beiden Gleichungen:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos(\alpha+\omega) + g, \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin(\alpha+\omega) + h,$$

so erhält man für den Punct M die rechtwinklichten Coordinaten:

$$x = -\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}\cos\alpha + g, \quad y = -\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha + h.$$

Es ist aber $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = \frac{\sqrt{((Ag+E)^2 + A^2h^2)}}{A}$, also $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}\cos\alpha = \frac{Ag+E}{A}$ und $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha = h$, folglich $x = -\frac{Ag+E}{A} + g = -\frac{E}{A}$, $y = h - h = o$.

Daraus geht hervor, dafs sich die Axen der x' für alle beliebigen schiefwinklichten Axensysteme, vermittelst welcher sich die allgemeine Gleichung der Curven des zweiten Grades auf die Formel $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ zurückführen läfst, in einem gemeinschaftlichen Puncte M schneiden, der die Hauptaxe der rechtwinklichten Coordinaten halbirt, und zugleich der Mittelpunct aller schiefwinklichten Axen oder Durchmesser ist.

Weil die Axe der schiefwinklichten Ordinaten y' die Axe der x unter dem Winkel $\alpha + \omega$ schneidet, so ist, wenn man die Entfernung des Durchschnittspunctes dieser beiden Axen vom Scheitelpuncte durch $\dot{x}$ bezeichnet,

$$tan(\alpha + \omega) = \frac{h}{\dot{x} + g} \text{ (§. 64.)} = -\frac{Ag + E}{Bh}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\dot{x} = -\frac{Ag^2 + Bh^2 + Eg}{Ag + E} = \frac{Eg}{Ag + E};$$

oder wenn man die Gleichung (f) (§. 54.) durch $\pm\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{p} - 2x = o$ darstellt, so dafs $A = \pm\frac{1}{a}$, $B = \frac{1}{p}$, $E = -1$, so erhält man $\dot{x} = \frac{\pm ag}{\pm a - g}$.

Auf diese Weise läfst sich für jeden Punct der Curve des zweiten Grades, den man zum Anfangspuncte eines schiefwinklichten Coordinatensystems annimmt, die Lage der Axen x', y' so bestimmen, dafs die Gleichung der Curve die Form $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x' = o$ behält.

§. 66. Da aufser dem Puncte P der Curve, den man zum Anfangspuncte der schiefwinklichten Coordinaten annimmt, und für welchen $x' = o$ ist, alle übrigen Puncte, weil für dieselben x' positiv ist, auf einer und derselben Seite der Axe der y' liegen, so mufs diese Axe eine Tangente der Curve für den Punct P sein.

Um demnach durch jeden Punct P einer Curve des zweiten Grades eine Tangente zu legen, ziehe man von demselben zum Mittelpuncte C der Curve eine gerade Linie, ferner vom Puncte P das Perpendikel PQ auf die Hauptaxe, und bestimme in

der über den Scheitel A, dessen Abscisse $= o$, hinaus verlängerten Axe der x einen Punct N so, dafs $CQ : CA = QA : AN$, so wird NP die verlangte Tangente sein.

Ist die Curve eine Parabel, so hat man, weil a unendlich, $\dot{x} = \frac{g}{1 \mp \frac{g}{a}} = g$. Es wird also $NA = AQ$ sein.

§. 67. Zieht man durch den Punct P der Curve ein Perpendikel auf die Tangente NP, und bezeichnet den Durchschnittspunct desselben mit der Hauptaxe durch L, so wird die Linie PL die Normale, LQ die Subnormale genannt. Eben so nennt man PN die Tangente, und NQ die Subtangente des Punctes P. Man übersieht leicht, dafs für einen Punct, dessen rechtwinklichte Coordinaten x, y, weil wegen der Gleichung $\pm\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{p} - 2x = o$, $A = \pm\frac{1}{a}$, $B = \frac{1}{p}$, $E = -1$, sein wird:

$$\text{Subtangente} = y\,cot(\alpha + \omega) = -\frac{By^2}{Ax + E} = \frac{ay^2}{p(a \mp x)}$$

$$\text{Subnormale} = y\,tan(\alpha + \omega) = -\frac{Ax + E}{B} = \frac{p(a \mp x)}{a}$$

$$\text{Tangente} = \frac{y}{sin(\alpha + \omega)} = y\frac{\sqrt{((Ax+E)^2 + B^2y^2)}}{Ax + E} = y\frac{\sqrt{(p^2(a \mp x)^2 + a^2y^2)}}{p(a \mp x)}$$

$$\text{Normale} = \frac{y}{cos(\alpha + \omega)} = \frac{\sqrt{((Ax+E)^2 + B^2y^2)}}{B} = \frac{\sqrt{(p^2(a \mp x)^2 + a^2y^2)}}{a}$$

Das obere Zeichen in diesen Ausdrücken gilt für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Für die Parabel wird, weil $a = \infty$, $\frac{x}{a} = o$, so dafs für diese Curve

$$\text{Subt.} = \frac{y^2}{p} = 2x, \quad \text{Subn.} = p, \quad \text{Tang.} = y\sqrt{(1 + \frac{2x}{p})}, \quad \text{Norm.} = p\sqrt{(1 + \frac{2x}{p})}.$$

Statt p kann man auch für die Ellipse $\frac{a^2 - m^2}{a}$ und für die Hyperbel $\frac{m^2 - a^2}{a}$ setzen.

§. 68. Weil die Subnormale der Ellipse oder $QL = \frac{a^2 - m^2}{a^2}(a - x)$, und, wenn wie vorhin der Scheitel der Ellipse durch A bezeichnet wird,

$$AQ = x, \text{ so ist } AL = \frac{a^2 - m^2}{a^2}(a - x) + x = \frac{(a^2 - m^2)a + m^2x}{a^2}.$$

Werden nun die beiden Brennpuncte der Ellipse durch F, F' angedeutet, so erhält man, weil $AF = a - m$, $AF' = a + m$,

$$FL = \frac{(a^2 - m^2)a + xm^2}{a^2} - (a - m) = \frac{m}{a} \cdot (\frac{m}{a} x + a - m)$$

$$LF' = a + m - \frac{(a^2 - m^2)a + xm^2}{a^2} = \frac{m}{a} \cdot (-\frac{m}{a} x + a + m)$$

Es ist aber (§. 60.), $PF = r = \frac{m}{a} x + a - m$, $PF' = r' = -\frac{m}{a} x + a + m$. Folglich $FL : F'L = PF : PF'$, woraus sich ergiebt, dafs $\sin FPL = \sin LPF'$, und weil L zwischen F und F' fällt, dafs der Winkel FPL dem Winkel LPF' gleich ist.

Für die Hyperbel ist die Subnormale $QL = \frac{m^2 - a^2}{a^2}(a + x)$, und

$$AL = \frac{m^2 - a^2}{a^2}(a + x) + x = \frac{(m^2 - a^2)a + m^2 x}{a^2}.$$

Daraus, weil $AF = m - a$, und $AF' = -m - a$

$$FL = \frac{(m^2 - a^2)a + m^2 x}{a^2} - m + a = \frac{m}{a} \cdot (\frac{m}{a} x - a + m)$$

$$F'L = \frac{(m^2 - a^2)a + m^2 x}{a^2} + m + a = \frac{m}{a} \cdot (\frac{m}{a} x + a + m).$$

Daher ist, weil (§. 60.), $PF = \frac{m}{a} x - a + m$, $PF' = \frac{m}{a} x + a - m$ wie für die Ellipse $FL : F'L = PF : PF'$, und folglich $\sin FPL = \sin LPF'$.

In der Hyperbel liegt aber der Punct L nicht zwischen F und F', woraus sich ergiebt, dafs die Summe der beiden Winkel $FPL + F'PL = 180°$, und dafs folglich die Tangente der Hyperbel PN den Winkel $F'PF$ halbirt.

Für die Parabel ist die Subnormale $QL = p$, $AF = \frac{1}{2}p$, also $FQ = x - \frac{1}{2}p$, $FL = x + \frac{1}{2}p$. Es ist aber auch $FP = x + \frac{1}{2}p$, also Winkel $FPL =$ W. FLP. Legt man nun durch den Punct P eine Gerade PS parallel mit der Axe der x, so dafs W. $FLP =$ W. LPS, so ist $FPL = LPS$.

Man kann sich der eben vorgetragenen Sätze bedienen, um für jeden Punct einer Curve des zweiten Grades eine Tangente zu ziehen.

69. Wir haben oben (§. 49, 50.) die drei Bedingungsgleichungen gefunden, welche zwischen den Coefficienten der Gleichung (a), und der aus ihr durch Veränderung des Axensystems hervorgegangenen Gleichung (c) statt finden müssen. Es wurden dort beide Axensysteme als rechtwinklicht vorausgesetzt. Nehmen wir jetzt an, dafs das Coordinatensystem der x', y' ein schiefwinklichtes sei, und dafs, wie (§. 64.) $\xi = \cos\alpha$, $\eta = \sin\alpha$, $\xi' = \cos(\alpha + \omega)$, $\eta' = \sin(\alpha + \omega)$, so werden wir für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ dieselben Ausdrücke (d) wie dort finden. Aus diesen sechs Gleichungen lassen sich nun die in ξ, η; ξ, η enthaltene Winkel α und die Gröfsen a, b eliminiren, so dafs dieselben, wie dort auf drei Bedingungsgleichungen zurückgeführt werden können.

Aus den ersten drei Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta$$
$$\mathfrak{B} = A\xi'^2 + B\eta'^2 + 2C\xi'\eta'$$
$$\mathfrak{C} = A\xi\xi' + B\eta\eta' + C(\xi\eta' + \xi'\eta)$$

erhält man nämlich unmittelbar:

$$\mathfrak{A}\eta'^2 + \mathfrak{B}\eta^2 - 2\mathfrak{C}\eta\eta' = A(\xi\eta' - \eta\xi')^2 = A\sin^2\omega$$
$$\mathfrak{A}\xi'^2 + \mathfrak{B}\xi^2 - 2\mathfrak{C}\xi\xi' = B(\xi\eta' - \eta\xi')^2 = B\sin^2\omega$$

und folglich 1) $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}\cos\omega = (A + B)\sin^2\omega$.

2) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = (AB - C^2)(\xi\eta' - \eta\xi')^2 = (AB - C^2)\sin^2\omega$.

Aus den beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{E} = A\xi a + B\eta b + C(\xi b + \eta a) + E\xi + F\eta$$
$$\mathfrak{F} = A\xi' a + B\eta' b + C(\xi' b + \eta' a) + E\xi' + F\eta'$$

erhält man:

$$\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta = (Aa + Cb + E)(\xi\eta' - \eta\xi') = (Aa + Cb + E)\sin\omega$$
$$-\mathfrak{E}\xi' + \mathfrak{F}\xi = (Ca + Bb + F)(\xi\eta' - \eta\xi') = (Ca + Bb + F)\sin\omega$$

und daraus, wenn $AB - C^2 = D$,

$$(\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta)B + (\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi)C = (Da + EB - FC)\sin\omega$$
$$-(\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi)A - (\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta)C = (Db + FA - EC)\sin\omega$$

Aus der letzten Gleichung $\mathfrak{G} = Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Ea + 2Fb + G$ folgt aber $\mathfrak{G} - G = (Aa + Cb + 2E)a + (Ca + Bb + 2F)b$, und daraus, weil $\mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2 = (AB - C^2)\sin^2\omega = D\sin^2\omega$, erhält man $(\mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2)\mathfrak{G}$

$$-(AB - C^2)G\sin^2\omega = (Aa + Cb + 2E)\sin\omega . Da . \sin\omega + (Ca + Bb + 2F)\sin\omega . Db\sin\omega$$
$$= (\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta + E\sin\omega) . Da\sin\omega - (\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi - F\sin\omega)\,Db\sin\omega$$
$$= (\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta + E\sin\omega)((\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta - E\sin\omega)B + (\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi + F\sin\omega)C)$$
$$+ (\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi - F\sin\omega)((\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi + F\sin\omega)A + (\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta - E\sin\omega)C)$$
$$= (\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta)^2 B + (\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi)^2 A + 2(\mathfrak{E}\eta' - \mathfrak{F}\eta)(\mathfrak{E}\xi' - \mathfrak{F}\xi)C$$
$$- (BE^2 + AF^2 - 2CEF)\sin^2\omega = \mathfrak{E}^2(A\xi'^2 + B\eta'^2 + 2C\xi'\eta')$$
$$+ \mathfrak{F}^2(A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta) + 2\mathfrak{E}\mathfrak{F}(A\xi\xi' + B\eta\eta' + C(\xi\eta' + \eta\xi)$$
$$- (BE^2 + AF^2 - 2CEF)\sin^2\omega$$
$$= \mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{F}^2 - 2\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F} - (BE^2 + AF^2 - 2CEF)\sin^2\omega.$$

Demnach ist die dritte Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 - 2\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F} - (\mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2)\mathfrak{G} = (AF^2 + BC^2 - 2CEF - (AB - C^2)G)\sin^2\omega.$$

Es müssen also, wenn $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + 2\mathfrak{E}x'y' + 2\mathfrak{E}x' + 2\mathfrak{F}y' + \mathfrak{G} = o$ jede durch eine beliebige Verwandlung der Coordinaten aus einer und derselben Gleichung hervorgegangenen Gleichung vorstellt, die Werthe der drei Gröfsen:

1) $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}\cos\omega}{\sin^2\omega}$, 2) $\frac{\mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2}{\sin^2\omega}$, 3) $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 - 2\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F} - (\mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2)\mathfrak{G}}{\sin^2\omega}$

unveränderlich sein.

Wir haben oben (§. 61.) gesehen, dafs die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten der Ellipse und Hyperbel auf die allgemeine Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - m^2} = 1$ (h) gebracht werden kann, wo für die Ellipse $m^2 < a^2$, und für die Hyperbel $m^2 > a^2$. Die Linie a wird die Hauptaxe und $\sqrt{a^2 - m^2} = b$ für die Ellipse und $\sqrt{m^2 - a^2} = b$ für die Hyperbel, die Nebenaxe genannt. In jener für $m = o$, in dieser für $m^2 = 2a^2$, wird

die Nebenaxe der Hauptaxe gleich. Alsdann ist die Ellipse ein Kreis und die Hyperbel eine gleichseitige Hyperbel; im erstern Falle ist die Excentricität $e = o$, im letztern $= 2$, wie bereits oben (§. 60.) bemerkt worden.

Verwandelt man die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ durch Veränderung der Coordinaten in $\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2} \pm \frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2} = 1$, so mufs wegen der ersten beiden Bedingungsgleichungen sein:

$\frac{\frac{1}{\mathfrak{a}^2} \pm \frac{1}{\mathfrak{b}^2}}{\sin^2\omega} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$ und $\frac{1}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\sin\omega^2} = \frac{1}{a^2b^2}$. Die dritte ist mit der zweiten identisch. Aus den obigen beiden Gleichungen ergeben sich:

$$\mathfrak{a}^2 \pm \mathfrak{b}^2 = a^2 \pm b^2, \quad \mathfrak{ab}\sin\omega = ab.$$

Daraus folgt, 1) dafs für die Ellipse die Summe und für die Hyperbel der Unterschied der beiden conjungirten Axen, und 2) dafs der Flächeninhalt des Parallelograms aus diesen beiden Axen für jedes beliebige Axensystem unveränderliche Gröfsen seien.

§. 70. Die Curven des zweiten Grades werden gewöhnlich Kegelschnitte genannt, weil sie durch den Schnitt einer Ebene mit einer Kegelfläche entstehen; was wir jetzt zeigen wollen.

Unter Kegelfläche versteht man im allgemeinen jede Fläche, welche entsteht, indem sich eine gerade Linie so bewegt, dafs sie immer durch einen festen Punct O geht. Wird diese Bewegung noch dadurch bedingt, dafs die bewegliche Linie mit einer durch O gezogenen festen Linie einen constanten Winkel macht, so wird die Kegelfläche eine gerade Kegelfläche genannt. Nehmen wir O zum Anfangspuncte der rechtwinklichten Coordinaten, die feste Linie zur Axe der z, und bezeichnen den unveränderlichen Winkel, den die erzeugende Gerade mit der Axe der z macht durch α, so übersieht man leicht, dafs zwischen den Coordinaten jedes Punctes dieser Kegelfläche die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2\tan^2\alpha = o$ statt finden mufs. Nun sei die Gleichung der Ebene, welche die Kegelfläche schneidet $\xi''x + \eta''y + \zeta''z = p$. Wir

wollen jetzt zeigen, dafs die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden Flächen, deren Gleichungen

$$\text{(i)}\quad \xi''x + \eta''y + \zeta''z = p, \qquad \text{(k)}\quad x^2 + y^2 - z^2\tan^2\alpha = o$$

eine Linie des zweiten Grades ist, und zwar eine Ellipse, Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem der Neigungswinkel der Axe der z gegen die schneidende Ebene gröfser, gleich oder kleiner als α ist.

Es seien $\xi, \eta, \zeta;\ \xi', \eta', \zeta';\ \xi'', \eta'', \zeta''$ die Determinanten eines neuen rechtwinklichten Coordinatensystems, dessen Anfangspunct durch die Coordinaten g, h, k bestimmt wird, so verwandeln sich die beiden Gleichungen (i), (k), wenn man nach (§. 43.) in denselben die Werthe von

$$\begin{aligned} x &= \xi x' + \xi' y' + \xi'' z' + g \\ y &= \eta x' + \eta' y' + \eta'' z' + h \\ z &= \zeta x' + \zeta' y' + \zeta'' z' + k \end{aligned}$$

substituirt, in (l) $z' + g\xi'' + h\eta'' + k\zeta'' = p$,

(m) $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + \mathfrak{C}z'^2 + 2\mathfrak{E}y'z' + 2\mathfrak{F}z'x' + 2\mathfrak{G}x'y' + 2\mathfrak{L}x' + 2\mathfrak{M}y' + 2\mathfrak{N}z' + \Omega = o$,

wo

(n)
$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2\tan^2\alpha = 1 - \zeta^2(1 + \tan^2\alpha) \\
\mathfrak{B} &= \xi'^2 + \eta'^2 - \zeta'^2\tan^2\alpha = 1 - \zeta'^2(1 + \tan^2\alpha) \\
\mathfrak{C} &= \xi''^2 + \eta''^2 - \zeta''\tan^2\alpha = 1 - \zeta''^2(1 + \tan^2\alpha) \\
\mathfrak{E} &= \xi'\xi'' + \eta'\eta'' - \zeta'\zeta''\tan^2\alpha = -\zeta'\zeta''(1 + \tan^2\alpha) \\
\mathfrak{F} &= \xi''\xi + \eta''\eta - \zeta''\zeta\tan^2\alpha = -\zeta''\zeta(1 + \tan^2\alpha) \\
\mathfrak{G} &= \xi\xi' + \eta\eta' - \zeta\zeta'\tan^2\alpha = -\zeta\zeta'(1 + \tan^2\alpha)
\end{aligned}$$

$\mathfrak{L} = g\xi + h\eta - k\zeta\tan^2\alpha$, $\mathfrak{M} = g\xi' + h\eta' - k\zeta'\tan^2\alpha$, $\mathfrak{N} = g\xi'' + h\eta'' - k\zeta''\tan^2\alpha$ und $\Omega = g^2 + h^2 - k^2\tan^2\alpha$.

Nimmt man nun den Anfangspunct der Coordinaten in der Durchschnittslinie selbst an, so müssen die Coordinaten desselben g, h, k den beiden Gleichungen (i) (k) entsprechen, oder es mufs

$$\xi''g + \eta''h + \zeta''k = p \text{ und } g^2 + h^2 - k^2\tan^2\alpha = o \text{ sein.}$$

Daraus ergiebt sich $z' = o$, $\Omega = o$. Diese Werthe und die Werthe (n) von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. in (m) substituirt, erhält man:

$$\begin{aligned}\text{(o)}\quad &(1 - \xi^2(1 + \tan^2\alpha))x'^2 + (1 - \zeta'^2(1 + \tan^2\alpha))y'^2 - 2\xi\zeta'(1 + \tan^2\alpha)x'y' \\ &+ 2(g\xi + h\eta - k\zeta\tan^2\alpha)x' + 2(g\xi' + h\eta' - k\zeta'\tan^2\alpha)y' = o.\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen die Gleichung einer krummen Linie vom zweiten Grade, und zwar (§. 54.) einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem

$$\begin{aligned}&(1 - \xi^2(1 + \tan^2\alpha))\,(1 - \zeta'^2(1 + \tan^2\alpha)) - \xi^2\zeta'^2(1 + \tan^2\alpha)^2 \\ &= 1 - (\xi^2 + \zeta'^2)(1 + \tan^2\alpha) = 1 - (1 - \zeta''^2)(1 + \tan^2\alpha)\end{aligned}$$

positiv, negativ oder $= o$ ist. Weil aber ζ'' der Cosinus des Winkels ist, den die Axe der z mit der Axe der z' macht, also $\sqrt{(1 - \zeta''^2)}$ der Cosinus des Neigungswinkels der Axe der z gegen die Ebene $x'y'$, so wird, wenn man diesen Winkel durch ω bezeichnet, der obige Ausdruck $= 1 - \frac{\cos^2\omega}{\cos^2\alpha}$ also positiv, negativ oder $= o$, je nachdem $\omega >$ oder $<$ oder $= \alpha$ ist, wie bewiesen werden sollte.

§. 71. Bestimmt man die Lage der Axen der x', y' so, dafs die erstere die Axe der z schneidet, und die letztere mit der Ebene xy parallel ist, so mufs $g\eta - h\xi = o$, und $\zeta' = o$ sein. Weil aber $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = o$, so mufs auch, wenn $\zeta' = o$, $\xi\xi' + \eta\eta' = o$, und $\eta : \xi = -\xi' : \eta'$, also wegen $g\eta - h\xi = o$ auch $g\xi' + h\eta' = o$ sein. Die Gleichung (o) wird alsdann:

$$\text{(p)}\quad (1 - \zeta^2(1 + \tan^2\alpha))x'^2 + y'^2 + 2(g\xi + h\eta - k\zeta\tan^2\alpha)x = o.$$

Bezeichnen wir nun den Winkel, den die Axe der z' mit der Axe der z macht durch ω, und die Entfernung $O'O$ des Anfangspunctes O' der Coordinaten x', y', z' vom Anfangspuncte O der Coordinaten x, y, z durch q, so ist $\zeta = \cos\omega$, und weil die Axe der x' den Schenkel des Kegels unter einem Winkel $\alpha + \omega$ schneidet, und die Puncte O, O' beide in diesem Schenkel liegen, $g\xi + h\eta + k\zeta = q\cos(\alpha + \omega)$. Es ist demnach:

$$1 - \zeta^2(1 + \tan^2\alpha) = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\omega}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin(\omega + \alpha)\,\sin(\omega - \alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1}{q}(g\xi + h\eta - k\zeta.\tan^2\alpha) = (\cos(\alpha + \omega) - \frac{k}{q}.\cos\omega(1 + \tan^2\alpha)) = \cos(\alpha + \omega) - \frac{\cos\omega}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos(\alpha + \omega)\cos\alpha - \cos\omega}{\cos\alpha} = -\frac{\sin(\alpha + \omega)\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha.\sin(\alpha + \omega).$$

Die Gleichung (p) wird demnach, wenn man sie durch $q \tan\alpha \sin(\alpha+\omega)$ dividirt:

(q) $$\frac{2\sin(\omega-\alpha)}{q\sin 2\alpha}x'^2 + \frac{y'^2}{q\sin(\alpha+\omega)\tan\alpha} - 2x' = o.$$

Betrachtet man diese als identisch mit der Gleichung (§. 54, f.) $\pm\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{p} - 2x = o$, so ergiebt sich daraus die halbe grofse Axe $a = \frac{q\sin 2\alpha}{2\sin(\omega-\alpha)}$ und der halbe Parameter $p = q\sin(\alpha+\omega)\tan\alpha$. Der Ausdruck für a ist positiv, negativ oder $= \infty$, und folglich die Curve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem $\omega >$ oder $<$ oder $= \alpha$ ist, wie bereits bewiesen worden.

Ist $\omega = 90°$, so ist $a = \frac{q\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} = q\sin\alpha$, $p = q\cos\alpha.\tan\alpha = q\sin\alpha$, also $a = p$ oder die Curve ist, wie ohne dieſs bekannt ist, ein Kreis, wenn die Ebene die Axe des Kegels unter einem rechten Winkel schneidet.

Für die gleichseitige Hyperbel muſs wegen der Gleichung (p) $\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\omega}{\cos^2\alpha} = -1$, also $\cos^2\omega = 2\cos^2\alpha$ sein. Weil aber für alle Winkel $\alpha < 45°$, $2\cos^2\alpha > 1$, so kann aus keinem geraden Kegel, dessen Schenkel mit der Axe Winkel $< 45°$ machen, eine gleichseitige Hyperbel geschnitten werden.

Von der Quadratur der Kegelschnitte.

§. 72. Wenn man über der groſsen Axe einer Ellipse, die zur Abscissenlinie genommen wird, einen Kreis beschreibt, so werden die Ordinaten der zu einer und derselben Abscisse gehörigen Puncte P', P des Kreises und der Ellipse sich zu einander verhalten, wie die halbe groſse Axe a zur halben kleinen Axe b, und man überzeugt sich leicht mit Hülfe der Exhausionsmethode, daſs der zwischen dem Bogen AP', vom Scheitel A bis zum Puncte P', der Ordinate $P'Q$, und der Abscisse AP enthaltene Kreisausschnitt $AP'Q$ zum elliptischen Ausschnitt APQ sich ebenfalls wie $a : b$ verhalten muſs.

Dasselbe gilt auch, wenn $AP'Q$ der Ausschnitt einer gleichseitigen Hyperbel, deren halbe Axe $= a$, und APQ der Ausschnitt einer Hyperbel ist, deren halbe Hauptaxe $= a$, und deren halbe Nebenaxe $= b$.

Bezeichnet man den Mittelpunct der Ellipse sowohl als der Hyperbel durch C, so ist

der Kreisausschnitt $AP'Q$ = Kreissector ACP' — Dreieck $P'QC$

und wenn $CQ = x$, $P'Q = y'$, $PQ = y$,

$$\text{Kreisausschnitt } APQ = \frac{a^2}{2}\,Arc.\,sin\frac{y'}{a} - \frac{xy'}{2}$$

Folglich, weil $AP'Q : APQ = y' : y = a : b$, so hat man:

$$\text{ellipt. Ausschnitt } APQ = \frac{ab}{2}\,Arc.\,sin\frac{y}{b} - \frac{xy}{2} \qquad \text{(a)}$$

Daraus ergiebt sich, wenn F der Brennpunct der Ellipse,

$$\text{Sect. } APF = APQ + \text{Dreieck } PFQ = \frac{ab}{2}\,Arc.\,sin\frac{y}{b} - \frac{xy}{2} + \frac{(x-ae)y}{2}$$

$$= \frac{ab}{2}\left(Arc.\,sin\frac{y}{b} - \frac{ey}{b}\right). \qquad \text{(b)}$$

§. 73. Auf gleiche Weise erhält man, wenn $AP'Q$ den zwischen den Bogen AP', des Theils AQ der Abscisse und der Ordinate $P'Q$ enthaltenen Ausschnitt der gleichseitigen Hyperbel bedeutet, wenn man sich der (p. 160.) erklärten Ausdrücke bedient,

$$AP'Q = \text{Dreieck } P'QC - \text{hyperb. Sect. } ACP'$$

$$= \text{(p. 161, §. 87.)}\ \frac{xy'}{2} - \frac{a^2}{2}\,Arg.\,sinh\frac{y'}{a}. \qquad \text{(c)}$$

Folglich der Ausschnitt der ungleichseitigen Hyperbel

$$APQ = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\,Arg.\,sinh\frac{y}{b}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\text{Sect. } AFP = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\,Arg.\,sinh\frac{y}{b} + \text{Dreieck } PFQ$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\,Arg.\,sinh\frac{y}{b} + \frac{y(ae-x)}{2} = \frac{ab}{2}\left(\frac{ey}{b} - Arg.\,sinh\frac{y}{b}\right)$$

$$= \text{(p. 161, §. 88.)}\ \frac{ab}{2}\left(\frac{ey}{b} - log\ nat\ \frac{y+\sqrt{b^2+y^2}}{b}\right). \qquad \text{(d)}$$

Entwickelt man nach (p. 198, §. 8.) den Ausdruck (b), so erhält man:

$$\text{Sect. } APF = \frac{ab}{2}\left\{(1-e)\frac{\gamma}{b} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{\gamma^3}{b^3} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\frac{\gamma^5}{b^5} + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\gamma^7}{b^7} + \text{etc.}\right\}$$

$$= \frac{a(1-e)}{2}\gamma + \frac{1}{2p}\left(\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\gamma^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\frac{\gamma^5}{b^2} + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\gamma^7}{b^4} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{p}{2(1+e)}\gamma + \frac{1}{2p}\left(\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\gamma^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\frac{\gamma^5}{b^2} + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\gamma^7}{b^4} + \text{etc.}\right).$$

Nimmt man nun a unendlich an, so wird, weil $\frac{b^2}{a} = p$, wenn p endlich, auch b unendlich, und weil $a(1-e^2) = p$, also $1-e^2 = o$, $e = 1$ sein. Man erhält auf die Weise den parabolischen

$$\text{Sector } APF = \frac{p}{2}\gamma + \frac{\gamma^3}{12.p} = \frac{p\gamma}{2} + \frac{x\gamma}{6p}.$$

§. 74. Setzt man in (b) $Arc.\ sin\frac{\gamma}{b} = E$, so wird der zu diesem Bogen gehörige Winkel die excentrische Anomalie des Punctes P genannt, so wie man den Winkel v, den der Radiusvector FP des Punctes P mit dem Radiusvector des Scheitels A bildet, die wahre Anomalie nennt. Aufserdem nennt man auch den Winkel eines Kreissectors, dessen Halbmesser $= \sqrt{ab}$, und der dem Flächeninhalte nach, dem elliptischen Sector AFP gleich ist, die mittlere Anomalie, so dafs, wenn man den dazu gehörigen Kreisbogen, dessen Halbmesser $= 1$, durch M bezeichnet,

$$\text{Sect. } AFP = \frac{ab\,M}{2} \text{ und, } M = E - e\,sin\,E \text{ ist.}$$

§. 75. Zwischen der wahren und excentrischen Anomalie und dem Radiusvector giebt es mehrere bemerkenswerthe Beziehungen, von denen wir hier die wichtigsten mittheilen wollen.

Aus der Gleichung (1) $r = \frac{p}{1+e\,cos\,v}$ folgt $r + er\,cos\,v = p$, und weil $r\,cos\,v = x - ae$, so ist

$$(2)\quad r = p - e(x - ae) = a\left(1 - \frac{ex}{a}\right) = a(1 - e\,cos\,E).$$

Aus (1) und (2) folgt $\frac{1-e^2}{1+e\,cos\,v} = 1 - e\,cos\,E$, also

$$(3)\quad cos\,E = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1-e^2}{1+e\,cos\,v}\right) = \frac{e+cos\,v}{1+e\,cos\,v}$$

$$(4)\quad 1 - cos\,E = \frac{(1-cos\,v)}{1+e\,cos\,v}(1-e),\quad 1 + cos\,E = \frac{1+cos\,v}{1+e\,cos\,v}(1+e)$$

Daher

$$(5)\quad sin\tfrac{1}{2}E = sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-e}{1+e\,cos\,v}} = sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{r(1-e)}{p}} = sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a(1+e)}}$$

$$(6)\quad cos\tfrac{1}{2}E = cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{1+e}{1+e\,cos\,v}} = cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{r(1+e)}{p}} = cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a(1-e)}}$$

$$(7)\quad tan\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.tan\tfrac{1}{2}v \text{ und } tan\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.tan\tfrac{1}{2}E.$$

Setzt man $e = sin\,\varepsilon$, so erhält man:

$$(8)\quad tan\tfrac{1}{2}E = tan\tfrac{1}{2}v.tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varepsilon);\quad tan\tfrac{1}{2}v = tan\tfrac{1}{2}E.tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

oder $tan\tfrac{1}{2}E = \frac{1 - tan\frac{1}{2}\varepsilon}{1 + tan\frac{1}{2}\varepsilon}.tan\tfrac{1}{2}v;\quad tan\tfrac{1}{2}v = \frac{1 + tan\frac{1}{2}\varepsilon}{1 - tan\frac{1}{2}\varepsilon}.tan\tfrac{1}{2}E$

$$(9)\quad sin\,E = \frac{r\,sin\,v}{b} = \frac{r\,sin\,v}{a\,cos\,\varepsilon}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (H) (p. 190.) erhält man, wenn $tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \theta$,

$$(10)\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}v &= \tfrac{1}{2}E + \theta.sin\,E + \tfrac{1}{2}\theta^2.sin\,2E + \tfrac{1}{3}\theta^3.sin\,3E + \text{etc.} \\ \tfrac{1}{2}E &= \tfrac{1}{2}v - \theta.sin\,v + \tfrac{1}{2}\theta^2.sin\,2v - \tfrac{1}{3}\theta^3.sin\,3v + \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 76. Substituirt man, in dem für den parabolischen Sector AFP (§. 73.) gefundenen Ausdrucke $\frac{py}{4} + \frac{y^3}{12p}$, $r\,sin\,v$ für y, so ergiebt sich, weil für die

$$\text{Parabel } r\,sin\,v = \frac{p\,sin\,v}{1+cos\,v} = p\,tan\tfrac{1}{2}v$$

$$\text{parabolischer Sect. } AFP = \frac{p^2}{4}(tan\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}tan^3\tfrac{1}{2}v).$$

§. 77. Für die Hyperbel erhält man ähnliche Beziehungen zwischen der wahren Anomalie v und der Gröfse E, womit wir $Arg.\ sinh.\frac{\gamma}{b}$ bezeichnet haben. Zunächst ist $\frac{\gamma}{b} = sinh\,E$; daraus folgt, weil $cosh^2E = 1 + sinh^2E = 1 + \frac{\gamma^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$, $\frac{x}{a} = cosh\,E$.

Aus der Gleichung (1) $r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}$ folgt $r + er\cos\nu = p$, und, weil für die Hyperbel, die Abscissen x vom Mittelpuncte C an genommen, $r\cos\nu = ae - x$,

(2) $r = p - ae^2 + ex = a(e^2 - 1) - ae^2 + ex = a(e\cosh E - 1)$.

Aus (1) und (2) folgt $\frac{e^2-1}{1+e\cos\nu} = e\cosh E - 1$, also

(3) $\cosh E = \frac{e+\cos\nu}{1+e\cos\nu}$

(4) $\cosh E - 1 = (e-1)\frac{1-\cos\nu}{1+e\cos\nu}$; $\cosh E + 1 = (e+1)\frac{1+\cos\nu}{1+e\cos\nu}$.

Daraus

(5) $\sinh\frac{1}{2}E = \sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{e-1}{1+e\cos\nu}} = \sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{r(e-1)}{p}} = \sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{r}{a(e+1)}}$

(6) $\cosh\frac{1}{2}E = \cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{e+1}{1+e\cos\nu}} = \cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{r(e+1)}{p}} = \cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{r}{a(e-1)}}$

(7) $\tanh\frac{1}{2}E = \tan\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$ oder $\tan\frac{1}{2}\nu = \tanh\frac{1}{2}E\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$

(8) $\sinh E = \frac{r\sin\nu}{b} = \frac{r\sin\nu}{a\sqrt{(e^2-1)}}$.

§. 78. Weil für die Ellipse $\tan\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{1}{2}\nu$, und $\sin E = 2\cos\frac{1}{2}E\sin\frac{1}{2}E$ $= 2\cos^2 E.\tan\frac{1}{2}E = \frac{2\tan\frac{1}{2}E}{1+\tan^2\frac{1}{2}E}$, so erhält man, wenn man $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \lambda$, $\tan\frac{1}{2}\nu = t$ setzt,

ellipt. Sect. $AFP = \frac{ab}{2}(E - e\sin E) = ab(Arc.\ tan.\lambda t - \frac{e\lambda t}{1+\lambda^2 t^2})$

(p. 134, F.) $= ab\left\{(1-e)\lambda t + (e-\frac{1}{3})\lambda^3 t^3 + (\frac{1}{5}-e)\lambda^5 t^5 + (e-\frac{1}{7})\lambda^7 t^7 + \text{etc.}\right\}$

$= ab\lambda^3\left\{\frac{1-e}{\lambda^2}t + (e-\frac{1}{3})t^3 + (\frac{1}{5}-e)\lambda^2 t^5 + (e-\frac{1}{7})\lambda^4 t^7 + \text{etc.}\right\}$

oder, weil $ab\lambda^3 = a\sqrt{1-e^2}.\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}^3 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e)^3} = \frac{p^2}{(1+e)^3}$ und $\frac{1-e}{\lambda^2} = 1+e$,

$AFP = \frac{p^2}{(1+e)^3}\left[(1+e)t + (e-\frac{1}{3})t^3 + (\frac{1}{5}-e)\lambda^2 t^5 + (e-\frac{1}{7})\lambda^4 t^7 + \text{etc.}\right]$

Eben so erhält man für die Hyperbel, weil $\tanh\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{1}{2}\nu$, und $\sinh E = 2\cosh\frac{1}{2}E.\sinh\frac{1}{2}E = 2\cosh^2\frac{1}{2}E.\tanh\frac{1}{2}E = \frac{2\tanh\frac{1}{2}E}{1-\tanh^2\frac{1}{2}E}$, wenn $\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = \lambda$ und $\tan\frac{1}{2}\nu = t$,

hyp. Sect. $AFP = \frac{ab}{2}(e\sinh E - E) = ab(\frac{e\lambda t}{1-\lambda^2 t^2} - \frac{1}{2}log\,nat\,\frac{1+\lambda t}{1-\lambda t})$

$= \frac{p^2}{(e+1)^3}\left[(e+1)t + (e-\frac{1}{3})t^3 + (e-\frac{1}{5})\lambda^2 t^5 + (e-\frac{1}{7})\lambda^4 t^7 + \text{etc.}\right]$

Aus beiden Ausdrücken, sowohl für den elliptischen als für den hyperbolischen Sector ergiebt sich, wenn man $e = 1$ setzt,

parabolischer Sector $AFP = \frac{p^2}{4}(t + \frac{1}{3}t^3) = \frac{p^2}{4}(\tan\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{3}\tan^3\frac{1}{2}\nu)$,

wie bereits oben (§. 76.) gefunden worden.

§. 79. Bemerkenswerth sind noch die sehr eleganten Formeln, mit deren Hülfe man den Flächeninhalt eines, zwischen den Radiisvectoribus r, r' zweier beliebigen Puncte P, P' eines Kegelschnitts, und dem Bogen PP', enthaltenen Sectors aus den Gröfsen $r + r' + \varrho$, und $r + r' - \varrho$ findet.

Es seien die resp. Coordinaten der Puncte P, P' eines Kegelschnitts x, y; x', y', die wahren Anomalien ν, ν'; die excentrischen E, E', so ist für die Ellipse:

$\varrho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 =$ (§. 75, 2.) $a^2(\cos E' - \cos E)^2 + b^2(\sin E' - \sin E)^2$

$= 4a^2\sin^2\frac{E'-E}{2}(\sin^2\frac{E'+E}{2} + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\frac{E'+E}{2}) = 4a^2\sin^2\frac{E'-E}{2}(1 - e^2\cos^2\frac{E+E}{2})$

und, wenn man $e\cos\frac{E'+E}{2} = \cos G$ setzt, $\varrho = 2a\sin\frac{E'-E}{2}\sin G$.

Zufolge (§. 75, 1.) ist aber $r + r' = 2a(1 - \frac{e(\cos E' + \cos E)}{2})$

$= 2a(1 - e\cos\frac{E'+E}{2}\cos\frac{E'-E}{2}) = 2a(1 - \cos\frac{E'-E}{2}\cos G)$.

Daraus folgt also

$r + r' + \varrho = 2a(1 - \cos\frac{E'-E}{2}\cos G + \sin\frac{E'-E}{2}\sin G) = 2a(1 - \cos(G + \frac{E'-E}{2}))$

$r + r' - \varrho = 2a(1 - \cos\frac{E'-E}{2}\cos G - \sin\frac{E'-E}{2}\sin G) = 2a(1 - \cos(G - \frac{E'-E}{2}))$

Demnach ist:

$$G + \frac{E'-E}{2} = Arc.\ cos.(1 - \frac{r+r'+\varrho}{2a}) = 2\ Arc.\ sin.\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}}$$

$$G - \frac{E'-E}{2} = Arc.\ cos.(1 - \frac{r+r'-\varrho}{2a}) = 2\ Arc.\ sin.\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}.$$

Nun ist aber Sect. $PFP' =$ Sect. $APF -$ Sect. APF, folglich, wenn A den Scheitel der Ellipse bezeichnet,

$$\text{Sect. } PFP' = \frac{ab}{2}(E' - E - e(\sin E' - \sin E) = \frac{ab}{2}(E' - E - 2e\cos\frac{E'+E}{2}\sin\frac{E'-E}{2})$$

$$= \frac{ab}{2}(E' - E - 2\cos G \sin\frac{E'-E}{2}) = \frac{ab}{2}(E' - E - \sin(G + \frac{E'-E}{2}) + \sin(G - \frac{E'-E}{2}))$$

$$= \frac{ab}{2}\Big\{2\ Arc.\ \sin\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}} - 2\ Arc.\ \sin\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}$$

$$- \sin 2\ Arc.\ \sin\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}} + \sin 2\ Arc.\ \sin\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}\Big\}.$$

Wegen der in diesem Ausdrucke vorkommenden Bogen ist zu bemerken, dafs $Arc.\ cos.(1 - \frac{r+r'+\varrho}{2a}) = G + \frac{E'-E}{2}$, wenn $E' > E$, immer positiv genommen werden mufs; hingegen ist $Arc.\ cos.(1 - \frac{r+r'-\varrho}{2a}) = \pm(G - \frac{E'-E}{2})$ entweder positiv oder negativ, je nachdem $\nu' - \nu >$ oder $< 180°$ ist. Das erstere ist von selbst klar. Vom letztern überzeugt man sich folgendermafsen. Zufolge (§. 76, 6.) ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}\nu\sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}E\sqrt{a(1-e)}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\nu'\sqrt{r'} = \cos\tfrac{1}{2}E'\sqrt{a(1-e)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\nu\sqrt{r} = \sin\tfrac{1}{2}E\sqrt{a(1+e)}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\nu'\sqrt{r'} = \sin\tfrac{1}{2}E'\sqrt{a(1+e)}.$$

Daraus erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\nu'-\nu)\sqrt{rr'} = a\Big\{(1-e)\cos\tfrac{1}{2}E'\cos\tfrac{1}{2}E + (1+e)\sin\tfrac{1}{2}E'\sin\tfrac{1}{2}E\Big\}$$

$$= a(\cos\frac{E'-E}{2} - e\cos\frac{E'+E}{2}) = 2a\sin\tfrac{1}{2}(G + \frac{E'-E}{2})\sin\tfrac{1}{2}(G - \frac{E'-E}{2}).$$

Weil nun $\sin\frac{1}{2}(G + \frac{E'-E}{2})$ immer positiv ist, so mufs $\sin\frac{1}{2}(G - \frac{E'-E}{2})$ mit

$\cos\frac{1}{2}(\nu'-\nu)$ gleichartig sein. Es ist aber $\cos\frac{1}{2}(\nu'-\nu)$ positiv oder negativ, je nachdem $\nu'-\nu <$ oder $> 180°$ ist. Es mufs also $\sin\pm\frac{1}{2}(G - \frac{E'-E}{2})$, folglich $\pm(G - \frac{E'-E}{2})$ positiv oder negativ sein, je nachdem $\nu'-\nu$ positiv oder negativ ist, was zu beweisen war.

§. 80. Ganz auf ähnliche Weise findet man für den hyperbolischen Sector PFP':

$\varrho = 4a\ \sinh G.\sinh\frac{E'-E}{2}$, wenn $e\cosh\frac{E'-E}{2} = \cosh G$ gesetzt wird.

Eben so erhält man wegen (§. 77, 2.)

$$r + r' = a(e\cosh E' + e\cosh E - 2) = 2a(\cosh G.\cosh\frac{E'-E}{2} - 1).$$

Demnach:

$$r+r'+\varrho = 2a(\cosh G.\cosh\frac{E'-E}{2} + \sinh G.\sinh\frac{E'-E}{2} - 1) = 2a(\cosh(G + \frac{E'-E}{2}) - 1)$$

$$r+r'-\varrho = 2a(\cosh G.\cosh\frac{E'-E}{2} - \sinh G.\sinh\frac{E'-E}{2} - 1) = 2a(\cosh(G - \frac{E'-E}{2}) - 1)$$

Also:

$$G + \frac{E'-E}{2} = Arg.\ cosh.(1 + \frac{r+r'+\varrho}{2a}) = 2\ Arg.\ sinh.\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}}$$

$$G - \frac{E'-E}{2} = Arg.\ cosh.(1 + \frac{r+r'-\varrho}{2a}) = 2\ Arg.\ sinh.\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}.$$

Nun ist aber der hyperbolische Sector $PFP' = \frac{ab}{2}(e\sinh E' - e\sinh E - E' + E)$

$$= \frac{ab}{2}(2e\cosh\frac{E'+E}{2}\sinh\frac{E'-E}{2} - (E'-E)) = \frac{ab}{2}(2\cosh G.\sinh\frac{E'-E}{2} - E' + E)$$

$$= \frac{ab}{2}\Big\{\sinh(G + \frac{E'-E}{2}) - \sinh(G - \frac{E'-E}{2}) - E' + E\Big\}$$

$$= \frac{ab}{2}\Big\{\sin 2\ Arg.\ sinh.\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}} - \sin 2\ Arg.\ sinh.\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}$$

$$- 2\ Arg.\ sinh.\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}} + 2\ Arg.\ sinh.\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}\Big\}$$

$$= \text{(p. 161, §. 88.) } ab\Big\{\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}}.\Gamma(1 + \frac{r+r'+\varrho}{4a}) - \sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}.\Gamma(1 + \frac{r+r'-\varrho}{4a})$$

$$- \log nat(\Gamma(1 + \frac{r+r'+\varrho}{4a}) + \Gamma\frac{r+r'+\varrho}{4a}) + \log\ nat(\Gamma(1 + \frac{r+r'-\varrho}{4a}) + \Gamma\frac{r+r'-\varrho}{4a})\Big\}$$

§. 81. Zufolge (p. 139, §. 64.) ist $Arc.\,sin.s = s + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}s^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}s^7 + \text{etc.}$

auch ist $\frac{1}{2}\,sin\,2\,Arc.\,sin.s = s\sqrt{1-s^2} = s - \frac{1}{2}s^3 - \frac{1.1}{2.4}s^5 - \frac{1.1.3}{2.4.6}s^7 - \text{etc.}$

folglich $Arc.\,sin.s - \frac{1}{2}\,sin\,2\,Arc.\,sin.s = 2\,(\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}s^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}s^7 + \text{etc.})$

$$= \frac{2}{3}s^3\,(1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}s^4 + \frac{3}{9}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}s^6 + \text{etc.})$$

Bezeichnet man nun den Werth der Reihe $1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}s^4 + \frac{3}{9}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}s^6 + \text{etc.}$, $\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4a}}$, $\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4a}}$ für s substituirt, resp. durch T, U, so dafs

$$T = 1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\frac{r+r'+\varrho}{4a} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}(\frac{r+r'+\varrho}{4a})^2 + \frac{3}{9}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{r+r'+\varrho}{4a})^3 + \text{etc.}$$

$$U = 1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\frac{r+r'-\varrho}{4a} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}(\frac{r+r'+\varrho}{4a})^2 + \frac{3}{9}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{r+r'-\varrho}{4a})^3 + \text{etc.}$$

so erhält man:

$$\text{Sect. ellipt. } PFP' = ab\cdot\tfrac{2}{3}\Big[(\frac{r+r'+\varrho}{4a})^{\frac{3}{2}}\,T \pm (\frac{r+r'-\varrho}{4a})^{\frac{3}{2}}\,U\Big],$$

und, weil $\frac{b}{\sqrt{a}} = \sqrt{p}$,

$$\text{Sect. ellipt. } PFP' = \frac{\sqrt{p}}{12}\Big[(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}}\,T \pm (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}}\,U\Big].$$

§. 82. Für die Hyperbel ergiebt sich, weil

$$\tfrac{1}{2}\,sinh\,2\,Arg.\,sinh.s = s\sqrt{1+s^2} = s + \frac{1}{2}s^3 - \frac{1.1}{2.4}s^5 + \frac{1.1.3}{2.4.6}s^7 - \text{etc.}$$

$$Arg.\,sin.s = s - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}s^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}s^5 - \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}s^7 + \text{etc.}$$

also $\frac{1}{2}\,sinh\,2\,Arg.\,sinh.s - Arg.\,sinh.s = 2\,(\frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}s^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}s^7 - \text{etc.})$, wenn

$$T' = 1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\frac{r+r'+\varrho}{4a} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}(\frac{r+r'+\varrho}{4a})^2 - \frac{3}{9}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{r+r'+\varrho}{4a})^3$$

$$U' = 1 - \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}\frac{r+r'+\varrho}{4a} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}(\frac{r+r'+\varrho}{4a})^2 - \frac{3}{9}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{r+r'-\varrho}{4a})^3,$$

$$\text{Sect. } PFP' = \frac{\sqrt{p}}{12}\Big[(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}}\,T' \pm (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}}\,U'\Big].$$

§. 83. Wird die Parabel als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet, deren Hauptaxe unendlich grofs ist, so erhält man, weil alsdann T, U sowohl als auch T', U' der Einheit gleich sind:

$$\text{Sect. parab. } PFP' = \frac{\sqrt{p}}{12}\Big[(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} \pm (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}}\Big].$$

Es läfst sich jedoch dieser Ausdruck auch unmittelbar auf folgende Weise herleiten.

Weil für die Parabel Sect. PFP' = Sect. AFP' — Sect. AFP = (§. 76.)

$\frac{p^2}{4}(tan\frac{1}{2}\nu' + \frac{1}{3}tan^3\frac{1}{2}\nu' - tan\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{3}tan^3\frac{1}{2}\nu)$, so hat man, wenn $tan\frac{1}{2}\nu = t$, $tan\frac{1}{2}\nu' = t'$ gesetzt wird:

$$\text{Sect. } PFP' = \frac{p^2}{12}(3(t'-t) + t'^3 - t^3) = \frac{p^2}{12}(t'-t)\,(3 + t'^2 + t't + t^2)$$

$$= \frac{p^2}{12}(1 + t'^2 + 1 + t^2 + 1 + t't)\,\sqrt{(1 + t'^2 + 1 + t^2 - 2(1 + tt'))}.$$

Nun ist aber $r = \frac{p}{1+cos\,\nu} = \frac{p}{2\,cos^2\frac{1}{2}\nu} = \frac{p}{2}(1 + t^2)$, also $cos\frac{1}{2}\nu = \sqrt{\frac{p}{2r}}$ und $1 + t^2 = \frac{2r}{p}$; eben so $cos\frac{1}{2}\nu' = \sqrt{\frac{p}{2r'}}$ und $1 + t'^2 = \frac{2r'}{p}$.

Daher $1 + tt' = \frac{cos\frac{1}{2}(\nu'-\nu)}{cos\frac{1}{2}\nu'\,cos\frac{1}{2}\nu} = \frac{2}{p}\sqrt{rr'}\cdot cos\frac{1}{2}(\nu'-\nu)$, und folglich:

$$\text{Sect. } PFP' = \frac{\sqrt{2p}}{6}(r + r' + \sqrt{rr'}\,cos\tfrac{1}{2}(\nu'-\nu))\cdot\sqrt{(r + r' - 2\sqrt{rr'}\,cos\tfrac{1}{2}(\nu'-\nu))}.$$

Es ist aber, wenn man $\frac{r+r'+\varrho}{2} = \frac{1}{2}s$, $\frac{r+r'-\varrho}{2} = \frac{1}{2}s - \varrho$ setzt, weil (p. 215, §. 29.)

$cos\frac{1}{2}(\nu'-\nu) = \frac{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-\varrho)}{\sqrt{rr'}}$,

$$\text{Sect. } PFP' = \frac{\sqrt{2p}}{6}(\tfrac{1}{2}s + (\tfrac{1}{2}s-\varrho) + \sqrt{\tfrac{1}{2}s\cdot(\tfrac{1}{2}s-\varrho)})\cdot\sqrt{(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}(s-\varrho) - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}s}\cdot\sqrt{(\tfrac{1}{2}s-\varrho)})}$$

$$= \frac{\sqrt{2p}}{6}(\tfrac{1}{2}s + (\tfrac{1}{2}s-\varrho) + \sqrt{\tfrac{1}{2}s\cdot(\tfrac{1}{2}s-\varrho)})\cdot(\sqrt{\tfrac{1}{2}s} - \sqrt{(\tfrac{1}{2}s-\varrho)})$$

$$= \frac{\sqrt{2p}}{6}(\sqrt{\tfrac{1}{2}s}^3 - \sqrt{\tfrac{1}{2}s-\varrho}^3) = \frac{p}{12}\Big\{(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} - (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}}\Big\} \text{ wie vorhin.}$$

Man findet diesen Gegenstand mit gröfster Vollständigkeit abgehandelt in der *Theoria motus corporum oelest. auct.* Gaufs 1809.

Einiges über die Flächen des zweiten Grades.

§. 84. Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x, y, z einer jeden Fläche des zweiten Grades ist unter der allgemeinen Form

(1) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Fzx + 2Gxy + 2Lx + 2My + 2Nz + Q = o$

begriffen, und läfst sich durch die Veränderung des Coordinatensystems, wenn ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' die respectiven Determinanten der neuen Axen der x', y', z' und die Coordinaten ihres Anfangspunctes g, h, k sind, weil alsdann (§. 43, g.)

$$(2)\quad \begin{aligned} x &= \xi x' + \xi' y' + \xi'' z' + g \\ y &= \eta x' + \eta' y' + \eta'' z' + h \\ z &= \zeta x' + \zeta' y' + \zeta'' z' + k \end{aligned}$$

in eine ähnliche

(3) $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + \mathfrak{C}z'^2 + 2\mathfrak{E}y'z' + 2\mathfrak{F}z'x' + 2\mathfrak{G}x'y' + 2\mathfrak{L}x' + 2\mathfrak{M}y' + 2\mathfrak{N}z' + \mathfrak{Q} = o,$

verwandeln. Man findet dieselbe, indem man die Werthe von x, y, z in der Gleichung (1) substituirt, so dafs die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. auf folgende Art bestimmt werden:

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2E\eta\zeta + 2F\zeta\xi + 2G\xi\eta \\ \mathfrak{B} = A\xi'^2 + B\eta'^2 + C\zeta'^2 + 2E\eta'\zeta' + 2F\zeta'\xi' + 2G\xi'\eta' \\ \mathfrak{C} = A\xi''^2 + B\eta''^2 + C\zeta''^2 + 2E\eta''\zeta'' + 2F\zeta''\xi'' + 2G\xi''\eta'' \\ \mathfrak{E} = A\xi'\xi'' + B\eta'\eta'' + C\zeta'\zeta'' + E(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') + F(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') + G(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') \\ \mathfrak{F} = A\xi''\xi + B\eta''\eta + C\zeta''\zeta + E(\eta''\zeta + \zeta''\eta) + F(\zeta''\xi + \xi''\zeta) + G(\xi''\eta + \eta''\xi) \\ \mathfrak{G} = A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta' + E(\eta\zeta' + \zeta\eta') + F(\zeta\xi' + \xi\zeta') + G(\xi\eta' + \eta\xi') \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = (Ag + Gh + Fk + L)\xi + (Gg + Bh + Ek + M)\eta + (Fg + Eh + Ck + N)\zeta \\ \mathfrak{M} = (Ag + Gh + Fk + L)\xi' + (Gg + Bh + Ek + M)\eta' + (Fg + Eh + Ck + N)\zeta' \\ \mathfrak{N} = (Ag + Gh + Fk + L)\xi'' + (Gg + Bh + Ek + M)\eta'' + (Fg + Eh + Ck + N)\zeta'' \end{cases}$$

(6) $\mathfrak{Q} = Ag^2 + Bh^2 + Ck^2 + 2Ehk + 2Fkg + 2Ggh + 2Lg + 2Mh + 2Nk + G.$

§. 85. Die Gleichungen (2) sind oben (§. 43.) unter der Voraussetzung bewiesen, dafs das neue Axensystem der x', y', z', wie das Grundaxensystem rechtwinklicht ist; sie gelten aber auch für jedes schiefwinklichte Axensystem von x', y', z'. Um sich davon zu überzeugen, ziehe man von dem Mittelpuncte O des Grundaxensystems zu dem Mittelpuncte O' des neuen Axensystems die Grade OO' von O' in der Richtung

der Axe der x' bis R die Gerade $O'R = x'$, von R in der Richtung der Axe der y' bis Q die Gerade $RQ = y'$, und von Q bis zum Puncte P in der Richtung der Axe der z' die Gerade $QP = z'$, so ist der Punct P mit dem Puncte O durch die gebrochene Linie $OO'RQP$ verbunden. Nun übersieht man aber leicht, dafs die rechtwinklichten Coordinaten des Punctes P in Bezug auf's Grundaxensystem respective die Summe der Projectionen der Theile der gebrochenen Linie $OO'RQP$ in den drei Hauptaxen der x, y, z sein müssen, woraus also die Richtigkeit der Gleichungen (2) auch für ein schiefwinklichtes Axensystem x', y', z' folgt.

§. 86. Aus den Gleichungen (4) erhält man, wenn man Kürze halber,

$BC - E^2 = A'$, $CA - F^2 = B'$, $AB - G^2 = C'$, $FG - AE = E'$, $GE - BF = F'$, $EF - CG = G'$

und

$\mathfrak{BC} - \mathfrak{E}^2 = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{CA} - \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{AB} - \mathfrak{G}^2 = \mathfrak{C}'$, $\mathfrak{FG} - \mathfrak{AE} = \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{GE} - \mathfrak{BF} = \mathfrak{F}'$, $\mathfrak{EF} - \mathfrak{CG} = \mathfrak{G}'$

setzt, und sich der (§. 9.) eingeführten Zeichen $\mathfrak{X} = \eta'\zeta'' - \zeta'\eta''$, $\mathfrak{Y} = \zeta'\xi'' - \xi'\zeta''$, $\mathfrak{Z} = \xi'\eta'' - \eta'\xi''$, $\mathfrak{X}' = \eta''\zeta - \zeta\eta''$, $\mathfrak{Y}' = \zeta''\xi - \xi''\zeta$, $\mathfrak{Z}' = \xi''\eta - \eta''\xi$, $\mathfrak{X}'' = \eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\mathfrak{Y}'' = \zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\mathfrak{Z}'' = \xi\eta' - \eta\xi'$, bedient, folgende Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{aligned} \mathfrak{A}' &= A'\mathfrak{X}^2 + B'\mathfrak{Y}^2 + C'\mathfrak{Z}^2 + 2E'\mathfrak{YZ} + 2F'\mathfrak{ZX} + 2G'\mathfrak{XY} \\ \mathfrak{B}' &= A'\mathfrak{X}'^2 + B'\mathfrak{Y}'^2 + C'\mathfrak{Z}'^2 + 2E'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}' + 2F'\mathfrak{Z}'\mathfrak{X}' + 2G'\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}' \\ \mathfrak{C}' &= A'\mathfrak{X}''^2 + B'\mathfrak{X}''^2 + C'\mathfrak{Z}''^2 + 2E'\mathfrak{X}''\mathfrak{Z}'' + 2F'\mathfrak{Z}''\mathfrak{X}'' + 2G'\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}'' \\ \mathfrak{E}' &= A'\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + B'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + C'\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'' + E'(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'') + F'(\mathfrak{Z}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Z}'') + G'(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{X}'') \\ \mathfrak{F}' &= A'\mathfrak{X}''\mathfrak{X} + B'\mathfrak{Y}''\mathfrak{Y} + C'\mathfrak{Z}''\mathfrak{Z} + E'(\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y}) + F'(\mathfrak{Z}''\mathfrak{X} + \mathfrak{X}''\mathfrak{Z}) + G'(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}''\mathfrak{X}) \\ \mathfrak{G}' &= A'\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + B'\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + C'\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}' + E'(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}') + F'(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}' + \mathfrak{X}\mathfrak{Z}') + G'(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{X}'). \end{aligned}$$

§. 87. Aus den Gleichungen (4) erhält man auch mit Berücksichtigung der (§. 9.) eingeführten Bezeichnung:

$$(8)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{A}\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{X}''^2 + 2\mathfrak{E}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + 2\mathfrak{F}\mathfrak{X}''\mathfrak{X} + 2\mathfrak{G}\mathfrak{X}\mathfrak{X}' = A\mathfrak{K}^2 \\ &\mathfrak{A}\mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{Y}''^2 + 2\mathfrak{E}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + 2\mathfrak{F}\mathfrak{Y}''\mathfrak{Y} + 2\mathfrak{G}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' = B\mathfrak{K}^2 \\ &\mathfrak{A}\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{Z}'^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{Z}''^2 + 2\mathfrak{E}\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'' + 2\mathfrak{F}\mathfrak{Z}''\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{G}\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}' = C\mathfrak{K}^2 \\ &\mathfrak{A}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}' + \mathfrak{C}\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z}'' + \mathfrak{E}(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'') + \mathfrak{F}(\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}') = E\mathfrak{K}^2 \\ &\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Z}'\mathfrak{X}' + \mathfrak{C}\mathfrak{Z}''\mathfrak{X}'' + \mathfrak{E}(\mathfrak{Z}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Z}'') + \mathfrak{F}(\mathfrak{Z}''\mathfrak{X} + \mathfrak{X}''\mathfrak{Z}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}' + \mathfrak{X}\mathfrak{Z}') = F\mathfrak{K}^2 \\ &\mathfrak{A}\mathfrak{X}\mathfrak{Y} + \mathfrak{B}\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}' + \mathfrak{C}\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{E}(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{X}''\mathfrak{Y}') + \mathfrak{F}(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y} + \mathfrak{X}''\mathfrak{Y}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}') = G\mathfrak{K}^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Axen der y', z'; der z', x'; und der x', y' mit einander machen resp. durch α, β, γ, so erhält man durch die Addition der ersten drei der obigen Gleichungen nach (§. 39, B, §. 40, 2.)

I. $\mathfrak{A}\sin^2\alpha + \mathfrak{B}\sin^2\beta + \mathfrak{C}\sin^2\gamma + 2\mathfrak{E}(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + 2\mathfrak{F}(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta) + 2\mathfrak{G}(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) = (A + B + C)\mathfrak{K}^2.$

§. 88. Auf ähnliche Weise ergeben sich aus (8) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}'\xi^2 + \mathfrak{B}'\xi'^2 + \mathfrak{C}'\xi''^2 + 2\mathfrak{E}'\xi'\xi'' + 2\mathfrak{F}'\xi''\xi + 2\mathfrak{G}'\xi\xi' = A'\mathfrak{K}^2\\
&\mathfrak{A}'\eta^2 + \mathfrak{B}'\eta'^2 + \mathfrak{C}'\eta''^2 + 2\mathfrak{E}'\eta'\eta'' + 2\mathfrak{F}'\eta''\eta + 2\mathfrak{G}'\eta\eta' = B'\mathfrak{K}^2\\
&\mathfrak{A}'\zeta^2 + \mathfrak{B}'\zeta'^2 + \mathfrak{C}'\zeta''^2 + 2\mathfrak{E}'\zeta'\zeta'' + 2\mathfrak{F}'\zeta''\zeta + 2\mathfrak{G}'\zeta\zeta' = C'\mathfrak{K}^2\\
(9)\quad &\mathfrak{A}'\eta\zeta + \mathfrak{B}'\eta'\zeta' + \mathfrak{C}'\eta''\zeta'' + \mathfrak{E}'(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') + \mathfrak{F}'(\eta''\zeta + \zeta''\eta) + \mathfrak{G}'(\eta\zeta' + \zeta\eta') = E'\mathfrak{K}^2\\
&\mathfrak{A}'\zeta\xi + \mathfrak{B}'\zeta'\xi' + \mathfrak{C}'\zeta''\xi'' + \mathfrak{E}'(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') + \mathfrak{F}'(\zeta''\xi + \xi''\zeta) + \mathfrak{G}'(\zeta\xi' + \xi\zeta') = F'\mathfrak{K}^2\\
&\mathfrak{A}'\xi\eta + \mathfrak{B}'\xi'\eta' + \mathfrak{C}'\xi''\eta'' + \mathfrak{E}'(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') + \mathfrak{F}'(\xi''\eta + \eta''\xi) + \mathfrak{G}'(\xi\eta' + \eta\xi') = G'\mathfrak{K}^2.
\end{aligned}$$

Aus den ersten drei Gleichungen ergiebt sich unmittelbar durch die Addition die Gleichung:

II. $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' + 2\mathfrak{E}'\cos\alpha + 2\mathfrak{F}'\cos\beta + 2\mathfrak{G}'\cos\gamma = (A' + B' + C')\mathfrak{K}^2.$

89. Durch die Summation der sechs Gleichungen (7), nachdem man sie zuvor resp. mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $2\mathfrak{E}$, $2\mathfrak{F}$, $2\mathfrak{G}$ multiplicirt hat, erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (4)

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}'\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'\mathfrak{B} + \mathfrak{C}'\mathfrak{C} + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{F} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{G}\\
&= \mathfrak{K}^2(A'A + B'B + C'C + 2E'E + 2F'F + 2G'G).
\end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
&AA' + GG' + FF' = A(BC - E^2) + G(EF - CG) + F(GE - BF)\\
&= ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck, Kürze halber, durch D, und eben so $\mathfrak{ABC} + 2\mathfrak{EFG} - \mathfrak{AE}^2 - \mathfrak{BF}^2 - \mathfrak{CG}^2$ durch $\mathfrak{D}$, so hat man:

$$\begin{aligned}
&AA' + GG' + FF' = BB' + EE' + GG' = CC' + FF' + EE' = D\\
&\mathfrak{AA}' + \mathfrak{GG}' + \mathfrak{FF}' = \mathfrak{BB}' + \mathfrak{EE}' + \mathfrak{GG}' = \mathfrak{CC}' + \mathfrak{FF}' + \mathfrak{EE}' = \mathfrak{D}
\end{aligned}$$

und es ist $3\mathfrak{D} = 3D\mathfrak{K}^2$, und folglich $\mathfrak{D} = D\mathfrak{K}^2$ oder

III. $\mathfrak{ABC} + 2\mathfrak{EFG} - \mathfrak{AE}^2 - \mathfrak{BF}^2 - \mathfrak{CG}^2 = (ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2)\mathfrak{K}^2.$

§. 90. Setzt man $Ag + Gh + Fk + E = \mathfrak{L}'$, $Gg + Bh + Ek + M = \mathfrak{M}'$, $Fg + Eh + Ck + N = \mathfrak{N}'$, so werden die drei Gleichungen (5)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \mathfrak{L}'\xi + \mathfrak{M}'\eta + \mathfrak{N}'\zeta, \quad \text{also} \quad \mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{X}' + \mathfrak{N}\mathfrak{X}'' = \mathfrak{L}'\mathfrak{K}\\
\mathfrak{M} &= \mathfrak{L}\xi' + \mathfrak{M}'\eta' + \mathfrak{N}'\zeta', \qquad \mathfrak{L}\mathfrak{Y} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{N}\mathfrak{Y}'' = \mathfrak{M}'\mathfrak{K}\\
\mathfrak{N} &= \mathfrak{L}'\xi'' + \mathfrak{M}'\eta'' + \mathfrak{N}'\zeta'', \qquad \mathfrak{L}\mathfrak{Z} + \mathfrak{M}\mathfrak{Z}' + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}'' = \mathfrak{N}'\mathfrak{K}.
\end{aligned}$$

Aus den drei Gleichungen (5) $Ag + Gh + Fk = \mathfrak{L}' - L$, $Gg + Bh + Ek = \mathfrak{M}' - M$, $Fg + Eh + Ck = \mathfrak{N}' - N$ aber erhält man:

$$\begin{aligned}
Dg &= A'(\mathfrak{L}' - L) + G'(\mathfrak{M}' - M) + F'(\mathfrak{N}' - N)\\
Dh &= G'(\mathfrak{L}' - L) + B'(\mathfrak{M}' - M) + E'(\mathfrak{N}' - N)\\
Dk &= F'(\mathfrak{L}' - L) + E'(\mathfrak{M}' - M) + C'(\mathfrak{N}' - N).
\end{aligned}$$

Nun ergiebt sich aus der Gleichung (6)

$$\Omega - Q = (\mathfrak{L}' + L)g + (\mathfrak{M}' + M)h + (\mathfrak{N}' + N)k$$

also $D(\Omega - Q) = (\mathfrak{L}' + L)Dg + (\mathfrak{M}' + M)Dh + (\mathfrak{N}' + N)Dk.$

In dieser Gleichung die obigen Werthe von Dg, Dh, Dk substituirt, verwandelt sich dieselbe in:

$$\begin{aligned}
D(\Omega - Q) &= A'\mathfrak{L}'^2 + B'\mathfrak{M}'^2 + C'\mathfrak{N}'^2 + 2E'\mathfrak{M}'\mathfrak{N}' + 2F'\mathfrak{N}'\mathfrak{L}' + 2G'\mathfrak{L}'\mathfrak{M}'\\
&\quad - (AL^2 + BM^2 + CN^2 + 2EMN + 2FNL + 2GLM).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man die Werthe von $\mathfrak{L}'\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}'\mathfrak{K}$, $\mathfrak{N}'\mathfrak{K}$, substituirt, wegen der Gleichung (7), und weil $DQ = \frac{1}{\mathfrak{K}^2}.\mathfrak{D}\Omega$ in folgende:

IV. $\mathfrak{A}'\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{B}'\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{C}'\mathfrak{N}^2 + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{M}\mathfrak{N} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{N}\mathfrak{L} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{L}\mathfrak{M} - \mathfrak{D}\Omega$
$= \mathfrak{K}^2(AL^2 + BM^2 + CN^2 + 2EMN + 2FNL + 2GLM - DQ).$

§. 91. Die vier Bedingungsgleichungen I, II, III, IV, welche zwischen den Coefficienten der Gleichungen (1), (3) statt finden müssen, können als das Resultat der Elimination der neun Determinanten ξ, η, ζ, etc. des neuen Axensystems und der Coordinaten g, h, k des Anfangspunctes desselben aus den zehn Gleichungen (4), (5), (6) mit Zuziehung der sechs Gleichungen $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$, $\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1$, $\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \cos\alpha$, $\xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = \cos\beta$, $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \cos\gamma$ angesehen werden.

Ist das neue Axensystem rechtwinklicht, so werden, weil alsdann die Cosinusse von α, β, $\gamma = o$, die Sinusse $= 1$, und $\mathfrak{K} = 1$ die vier Bedingungsgleichungen:

I. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A + B + C$, II. $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' = A' + B' + C$,

III. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G} - \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{G}^2 = ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2$

IV. $\mathfrak{A}'\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{B}'\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{C}'\mathfrak{N}^2 + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{M}\mathfrak{N} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{N}\mathfrak{L} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{L}\mathfrak{M} - \mathfrak{D}\mathfrak{Q}$
$= AL^2 + BM^2 + CN^2 + 2E'MN + 2F'NL + 2G'LM - DQ.$

§. 92. Aufgabe. Die allgemeine Gleichung (1) zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Fzx + 2Gxy + 2Lx + 2My + 2Nz + Q = o$ in die einfachere (10) $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + \mathfrak{C}z + 2\mathfrak{L}x' = o$, wo x', y', z' ebenfalls rechtwinklichte Coordinaten bedeuten, zu verwandeln.

I. Setzt man in den so eben gefundenen vier Bedingungsgleichungen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q} = o$, so erhält man zur Bestimmung der vier Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ folgende vier Gleichungen:

1) $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A + B + C$; 2) $\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} = A' + B' + C'$

3) $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2$

4) $\mathfrak{B}\mathfrak{C}.\mathfrak{L}^2 = AL^2 + BM^2 + CN^2 + 2E'MN + 2F'NL + 2G'LM - DQ.$

Aus den ersten drei Gleichungen ergiebt sich, dafs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

(11) $t^3 - (A + B + C)t^2 + (A' + B' + C')t - (ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2) = o$

sind, von denen wenigstens eine reell sein mufs. Es sei die reelle Wurzel $\mathfrak{A}$, so erhält man, wenn man die Gleichung (11) durch $t - \mathfrak{A}$ dividirt, die Gleichung (12) $t^2 - 2mt + n = o$, deren Coefficienten $2m = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $n = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ reelle Gröfsen sein müssen. Die Gleichung (11) läfst sich auch auf folgende Weise darstellen:

(13) $(t - A)(t - B)(t - C) - E^2(t - A) - F^2(t - B) - G^2(t - C) - 2EFG = o.$

Daher $t - A = \frac{F^2(t-B) + G^2(t-C) + 2EFG}{(t-B)(t-C) - E^2}$, folglich auch

$$\mathfrak{B} - A = \frac{F^2(\mathfrak{B}-B) + G^2(\mathfrak{B}-C) + 2EFG}{(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) - E^2}; \quad \mathfrak{C} - A = \frac{F^2(\mathfrak{C}-B) + G^2(\mathfrak{C}-C) + 2EFG}{(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) - E^2}.$$

Subtrahirt man nun die letzte dieser Gleichungen von der ersten, dividirt den Rest durch $\mathfrak{C} - \mathfrak{B}$, und setzt $m^2 - n = \lambda$, so dafs $\mathfrak{B} = m + \sqrt{\lambda}$, $\mathfrak{C} = m - \sqrt{\lambda}$, so ergiebt sich:

$$-1 = \frac{F^2(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{C}-B) + G^2(\mathfrak{B}-C)(\mathfrak{C}-C) + 2EFG(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-B-C) + E^2(F^2+G^2)}{[\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) - E^2][(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) - E^2]}$$

$$= \frac{(F\mathfrak{B}+F')(F\mathfrak{C}+F') + (G\mathfrak{B}+G')(G\mathfrak{C}+G')}{[\mathfrak{B}^2 - (B+C)\mathfrak{B} + A'][\mathfrak{C}^2 - (B+C)\mathfrak{C} + A']} = \frac{(F'+mF)^2 + (G'+mG)^2 - \lambda(F^2+G^2)}{[(m^2+\lambda - m(B+C) + A']^2 - [2m - (B+C)]^2\lambda}.$$

Der Werth dieses Quotienten wird positiv, wenn λ oder $m^2 - n$ negativ ist; er ist aber $= -1$, es mufs daher λ oder $m^2 - n$ positiv sein. Daraus folgt also, dafs die beiden Wurzeln $m \pm \sqrt{m^2 - n}$ der Gleichung $t^2 - 2mt + n = o$, und folglich alle drei Wurzeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der cubischen Gleichung (11) reell sein müssen.

II. Sind nun die drei Wurzeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nicht alle zugleich positiv oder negativ, so läfst sich die Wurzel $\mathfrak{A}$ immer so auswählen, dafs $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und folglich auch $\mathfrak{B}\mathfrak{C}.\mathfrak{L}^2$ nach Gefallen positiv oder negativ, und folglich $\mathfrak{L}$ möglich ist. Im entgegengesetzten Falle aber mufs $\mathfrak{B}\mathfrak{C}.\mathfrak{L}^2$ immer positiv sein. Es sind aber die drei Wurzeln der Gleichung $t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = o$ (11) alle drei positiv, wenn die drei Gröfsen α, β, γ positiv sind; hingegen negativ, wenn α negativ, β positiv, γ negativ ist. Es mufs demnach, wenn die allgemeine Gleichung (1) auf die einfachere Form (3) gebracht werden soll, wenn alle drei Gröfsen α, β, γ positiv sind oder α und γ negativ, und β positiv ist, die Gröfse $\delta = \mathfrak{B}\mathfrak{C}.\mathfrak{C}^2$ positiv sein.

III. Aus den sechs Gleichungen (§. 84, 4.) ergeben sich, wie man leicht übersieht, folgende neun Gleichungen:

$\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{G}\mathfrak{X}' + \mathfrak{F}\mathfrak{X}'' = (A\xi + G\eta + F\zeta)\mathfrak{K}$; $\mathfrak{B}\mathfrak{X}' + \mathfrak{E}\mathfrak{X}'' + \mathfrak{G}\mathfrak{X} = (A\xi' + G\eta' + F\zeta')\mathfrak{K}$

$\mathfrak{A}\mathfrak{Y} + \mathfrak{G}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{F}\mathfrak{Y}'' = (G\xi + B\eta + E\zeta)\mathfrak{K}$; $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{E}\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{G}\mathfrak{Y} = (G\xi' + B\eta' + E\zeta')\mathfrak{K}$

$\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{G}\mathfrak{Z}' + \mathfrak{F}\mathfrak{Z}'' = (F\xi + E\eta + C\zeta)\mathfrak{K}$; $\mathfrak{B}\mathfrak{Z}' + \mathfrak{E}\mathfrak{Z}'' + \mathfrak{G}\mathfrak{Z} = (F\xi' + E\eta' + C\zeta')\mathfrak{K}$

$\mathfrak{C}\mathfrak{X}'' + \mathfrak{F}\mathfrak{X} + \mathfrak{E}\mathfrak{X}' = (A\xi'' + G\eta'' + F\zeta'')\mathfrak{K}$

$\mathfrak{E}\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{F}\mathfrak{Y} + \mathfrak{E}\mathfrak{Y}' = (G\xi'' + B\eta'' + E\zeta'')\mathfrak{K}$

$\mathfrak{C}\mathfrak{Z}'' + \mathfrak{F}\mathfrak{Z} + \mathfrak{E}\mathfrak{Z}' = (F\xi'' + E\eta'' + C\zeta'')\mathfrak{K}$.

Diese neun Gleichungen verwandeln sich, wenn $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} = o$ sind, und das Axensystem der x', y', z' rechtwinklicht ist, weil alsdann $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, etc. resp. den Gröfsen ξ, η, ζ; ξ', η', ζ', etc. gleich sind, und $\mathfrak{K} = 1$, in folgende:

$(A-\mathfrak{A})\xi+G\eta+F\zeta=o,\quad (A-\mathfrak{B})\xi'+G\eta'+F\zeta'=o,\quad (A-\mathfrak{C})''+G\eta''+E\zeta''=o$
$G\xi+(B-\mathfrak{A})\eta+E\zeta=o,\quad G\xi'+(B-\mathfrak{B})\eta'+E\zeta'=o,\quad G\xi''+(B-\mathfrak{C})\eta''+E\zeta'=o$
$F\xi+E\eta+(C-\mathfrak{A})\zeta=o,\quad F\xi'+E\eta'+(C-\mathfrak{B})\zeta'=o,\quad F\xi''+E\eta''+(C-\mathfrak{C})\zeta'=o.$

Aus den ersten drei Gleichungen ergeben sich zufolge (§. 10.) folgende Proportionen:

$$\xi:\eta:\zeta=[(B-\mathfrak{A})(C-\mathfrak{A})-E^2]:[EF-G(C-\mathfrak{A})]:[GE-F(B-\mathfrak{A})]$$
$$=[EF-G(C-\mathfrak{A})]:[(C-\mathfrak{A})(A-\mathfrak{A}-F^2]:[FG-E(A-\mathfrak{A})]$$
$$=[GE-F(B-\mathfrak{A})]:]FG-E(A-\mathfrak{A})]:[(A-\mathfrak{A})(B-\mathfrak{A})-G^2].$$

Daraus erhält man:

$$\xi^2:\eta^2:\zeta^2=[(B-\mathfrak{A})(C-\mathfrak{A})-E^2]:[(C-\mathfrak{A})(A-\mathfrak{A})-F^2]:[(A-\mathfrak{A})(B-\mathfrak{A})-G^2].$$

Es ist aber $(B-\mathfrak{A})(C-\mathfrak{A})-E^2+(C-\mathfrak{A})(A-\mathfrak{A})-F^2+(A-\mathfrak{A})(B-\mathfrak{A})-G^2$

$$=A+B'+C-2\mathfrak{A}(A+B+C)+3\mathfrak{A}^2$$
$$=\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\mathfrak{C}\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})+3\mathfrak{A}^2=\mathfrak{B}\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}^2=(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}).$$

Demnach:

$$\xi=\Upsilon\frac{(B-\mathfrak{A})(C-\mathfrak{A})-E^2}{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})},\quad \eta=\Upsilon\frac{(C-\mathfrak{A})(A-\mathfrak{A})-F^2}{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})},\quad \zeta=\Upsilon\frac{A-\mathfrak{A})(B-\mathfrak{A})-G^2}{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich aus den folgenden drei Gleichungen:

$$\xi'=\Upsilon\frac{B-\mathfrak{B})(C-\mathfrak{B})-E^2}{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})},\quad \eta'=\Upsilon\frac{(C-\mathfrak{B})(A-\mathfrak{B})-F^2}{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})},\quad \zeta'=\Upsilon\frac{(A-\mathfrak{B})(B-\mathfrak{B})-G^2}{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})}$$

und aus den letztern:

$$\xi''=\Upsilon\frac{(B-\mathfrak{C})(C-\mathfrak{C})-E^2}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})},\quad \eta''=\Upsilon\frac{(C-\mathfrak{C})(A-\mathfrak{C})-F^2}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})},\quad \zeta''=\Upsilon\frac{(A-\mathfrak{C})(B-\mathfrak{C})-G^2}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})}.$$

Auf die Weise sind die resp. Determinanten des neuen Axensystems bestimmt, welche offenbar reell sein müssen, weil die Verhältnisse $\xi:\eta:\zeta$; $\xi':\eta':\zeta'$; $\xi'':\eta'':\zeta''$ reell sind.

Sind von den drei Gröfsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zwei oder alle drei einander gleich, z. B. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, so werden die Nenner der Brüche unter dem Wurzelzeichen, die den Determinanten ξ, η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' entsprechen, gleich Null; es werden aber auch die Zähler, weil sie, wie man leicht übersieht, alle gleichartig sein müssen, und ihre Summe $=o$ ist, ebenfalls $=o$ sein müssen, und folglich die Determinanten unbe-

stimmte Werthe haben, was bei Flächen der Fall ist, die durch Umdrehung um die Axe der x' entstehen.

93. Es sind jetzt noch die Coordinaten g, h, k des Anfangspunctes des neuen Axensystems zu bestimmen; dazu sind die Gleichungen (5), (6) zu gebrauchen. Multiplicirt man die drei ersten resp. mit ξ, ξ', ξ''; alsdann durch η, η', η''; und endlich durch ζ, ζ', ζ'', so erhält man, wenn das neue Axensystem rechtwinklicht, wegen der Bedingungsgleichung (§. 44.), und weil $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}=o$:

$$\begin{aligned} Ag+Gh+Fk+L&=\xi\mathfrak{L}\\ (14)\qquad Gg+Bh+Ek+M&=\eta\mathfrak{L}\\ Fg+Eh+Ck+N&=\zeta\mathfrak{L},\end{aligned}$$

und weil wegen $\Omega=o$, die Gleichung (6) sich unter der Form:

$(Ag+Gh+Fk+2L)g+(Gg+Bh+Ek+2M)h+Fg+Eh+Ck+2N+Q=o$

darstellen läfst, so wird dieselbe:

$$(\xi\mathfrak{L}+L)g+(\eta\mathfrak{L}+M)h+(\zeta\mathfrak{L}+N)k+Q=o.$$

Drei dieser Gleichungen sind hinlänglich, die Coordinaten g, h, k zu bestimmen. Nimmt man dazu die drei ersten, so ergiebt sich, wenn man $ABC+2EFG-AE^2-BF^2-CG^2=D$ setzt:

$$\begin{aligned} Dg&=(\xi\mathfrak{L}-L)A'+(\eta\mathfrak{L}-M)G'+(\zeta\mathfrak{L}-N)F'\\ Dh&=(\xi\mathfrak{L}-L)G'+(\eta\mathfrak{L}-M)B'+(\zeta\mathfrak{L}-N)E'\\ Dk&=(\xi\mathfrak{L}-L)F'+(\eta\mathfrak{L}-M)G'+(\zeta\mathfrak{L}-N)C'.\end{aligned}$$

Ist $D=o$, so mufs man dieselben, weil alsdann die Werthe von g, h, k unbestimmt bleiben, mit Hülfe der vierten Gleichung und zweien der erstern drei bestimmen.

§. 94. Ist D nicht $=o$, so läfst sich die allgemeine Gleichung (1) auch auf die Form (15) $\mathfrak{A}x'^2+\mathfrak{B}'y^2+\mathfrak{C}z'^2+\Omega=o$ bringen. In diesem Falle werden für die Gröfsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ξ, η, ζ, etc. dieselben Werthe, wie vorher gefunden werden. Die Coordinaten aber ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (14), indem man $\mathfrak{L}=o$ setzt. Man hat nämlich:

$-Dg = A'L + G'M + F'N$; $-Dh = G'L + B'M + E'N$; $-Dk = F'L + E'M + C'N$

und aus der Bedingungsgleichung IV. (§. 91.) ergiebt sich, weil $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} = o$

$$-D.\mathfrak{Q} = A'L^2 + B'M^2 + C'N^2 + 2E'MN + 2F'NL + 2G'LM - DQ.$$

§. 95. Die Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Q = o$ (14) für rechtwinklichte Coordinaten wird durch Veränderung des Axensystems mit Beibehaltaltung seines Anfangspunctes, indem man $x = \xi x' + \xi' y + \xi'' z$; $y = \eta x' + \eta' y' + \eta' z$; $z = \zeta x' + \zeta' y' + \zeta'' z'$ setzt, in $\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + \mathfrak{C}z'^2 + 2\mathfrak{E}y'z' + 2\mathfrak{F}z'x' + 2\mathfrak{G}x'y' + \mathfrak{Q} = o$ verwandelt, wo

$$\mathfrak{A} = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 \qquad \mathfrak{E} = A\xi'\xi'' + B\eta'\eta'' + C\zeta'\zeta''$$
$$\mathfrak{B} = A\xi'^2 + B\eta'^2 + C\zeta'^2 \qquad \mathfrak{F} = A\xi''\xi + B\eta''\eta + C\zeta''\zeta$$
$$\mathfrak{C} = A\xi''^2 + B\eta''^2 + C\zeta''^2 \qquad \mathfrak{G} = A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta'.$$

Setzt man nun $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} = o$, so erhält man aus der 2ten und 3ten, der 3ten und 1sten, der 1sten und 2ten der drei letztern obigen Gleichungen respective:

$A\xi : B\eta : C\zeta = \mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \mathfrak{Z}$; $A\xi' : B\eta' : C\zeta' = \mathfrak{X}' : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Z}'$; $A\xi'' : B\eta'' : C\zeta'' = \mathfrak{X}'' : \mathfrak{Y}'' : \mathfrak{Z}''$.

Sind also die Determinanten ξ, η, ζ der neuen Axe der x gegeben, so ist auch, weil nach (§. 39, C.) $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ den Determinanten der Ebene der $y'z'$ proportional sind, die Lage dieser Ebene bestimmt. Nimmt man in derselben eine der Axen y', z', z. B. die der y' nach Belieben an, doch so dafs ihre Determinanten ξ', η', ζ' der Gleichung $\mathfrak{G} = o$ entsprechen, so sind auch die Gröfsen $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Z}''$ bestimmt, woraus sich die Determinanten ξ'', η'', ζ'' der Axe der z' herleiten lassen.

§. 96. Die Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Q = o$ läfst sich, wenn A, B, C positive Gröfsen und Q negativ ist, unter der Form:

$$(15)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

darstellen, und ist die Gleichung für die Oberfläche eines Ellipsoids. Die Gröfsen a, b, c werden im allgemeinen die conjugirten Axen des Ellipsoids, und wenn x, y, z rechtwinklichte Coordinaten sind, die Hauptaxen genannt. Im vorigen §. haben wir nun gesehen, dafs die Gleichung (14) für rechtwinklichte Coordinaten x, y, z sich immer in eine ähnliche für schiefwinklichte Coordinaten x', y', z'

$$(16)\quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

verwandeln, wo eine der drei conjungirten Axen in Absicht der Richtigkeit nach Belieben angenommen werden kann. Zufolge der drei ersten (§. 91.) gefundenen Bedingungsgleichungen erhält man:

$$1)\quad \frac{\sin^2\alpha}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{K}^2} + \frac{\sin^2\beta}{\mathfrak{b}^2\mathfrak{K}^2} + \frac{\sin^2\gamma}{\mathfrak{c}^2\mathfrak{K}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$2)\quad \frac{1}{\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2\mathfrak{K}^2} + \frac{1}{\mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2\mathfrak{K}^2} + \frac{1}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{K}^2} = \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}$$

$$3)\quad \frac{1}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2\mathfrak{K}^2} = \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

Daraus ergiebt sich unmittelbar: $\mathfrak{abc}\mathfrak{K} = abc$; $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = a^2 + b^2 + c^2$;

$$(\mathfrak{bc}\sin\alpha)^2 + (\mathfrak{ca}\sin\beta)^2 + (\mathfrak{ab}\sin\gamma)^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

Es ist aber, wie man leicht aus (F. §. 36.) ersieht, $\mathfrak{abc}\mathfrak{K}$ das Volumen eines Parallelepipedi, dessen Seiten die drei conjungirten Axen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Dieses Volumen ist also für jede beliebige drei conjungirte Axen eine constante Gröfse, eben so auch die Summe der Quadrate der Seiten dieses Parallelepipedi, und die Summe der Quadrate seiner Seitenflächen.

§. 97. Denkt man sich einen festen Körper als aus unendlich vielen materiellen Puncten bestehend, deren gegenseitige Lage unveränderlich ist, und bezeichnet man die Massen dieser Puncte durch m_1, m_2, m_3, $\ldots m_n$; ihre respectiven rechtw. Coordinaten durch x_1, x_2, x_3, etc., y_1, y_2, y_3, etc., z_1, z_2, z_3, etc., und die Summen Σx^2m, Σy^2m, Σz^2m, Σyzm, Σzxm, Σxym resp. durch A, B, C, E, F, G, so werden sich diese Gröfsen offenbar verändern, wenn die Puncte m_1, m_2, m_3, etc. auf ein anderes rechtw. Coordinatensystem bezogen werden. Bezeichnen wir nun die Coordinaten in Bezug auf ein neues System, das mit dem Grundsysteme denselben Anfangspunct hat, resp. durch x'_1, x'_2, x'_3, etc., y'_1, y'_2, y'_3, etc., z'_1, z'_2, z'_3, etc., und die Gröfsen $\Sigma x'^2m$, $\Sigma y'^2m$, $\Sigma z'^2m$, $\Sigma y'z'm$, $\Sigma z'x'm$, $\Sigma x'y'm$ durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, so wird, wenn ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' die respectiven Determinanten der Axen der x', y', z' sind, nach (§. 43. h.),

$$x'_\lambda = \xi x_\lambda + \eta y_\lambda + \zeta z_\lambda$$
$$y'_\lambda = \xi' x_\lambda + \eta' y_\lambda + \zeta' z_\lambda$$
$$z'_\lambda = \xi'' x_\lambda + \eta'' y_\lambda + \zeta'' z_\lambda \text{ sein,}$$

wo λ alle Zahlen von 1 bis n bedeutet.

Substituirt man diese Werthe von x'_λ, y'_λ, z'_λ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, so erhält man, wie man leicht übersieht, die oben (§. 84, 4.) gefundenen Gleichungen, woraus sich ebenfalls die (§. 91.) aufgeführten Bedingungsgleichungen I, II, III ergeben. Es läfst sich jedoch in dem gegenwärtigen Falle von den obigen drei Gleichungen ein unmittelbarer Beweis geben, womit wir uns jetzt beschäftigen wollen.

§. 98. Bezeichnet man den Radiusvector oder den Abstand des Punctes m_λ vom Anfangspuncte O der Coordinaten im allgemeinen durch r_λ, so ist $r_\lambda^2 = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2$, und folglich $A + B + C = \Sigma x^2 m + \Sigma y^2 m + \Sigma z^2 m = \Sigma r^2 m$. Demnach ist die Gröfse $A+B+C$ die Summe der Massen aller materiellen Puncte m_1, m_2, m_3, etc. jede mit dem Quadrate ihrer Entfernung vom Mittelpuncte O multiplicirt, also durchaus von der Lage des Coordinatensystems unabhängig.

§. 99. Setzen wir nach der (§. 9.) eingeführten Bezeichnungsart

$$y_\lambda z_\mu - z_\lambda y_\mu = X_{\lambda,\mu},\quad z_\lambda x_\mu - x_\lambda z_\mu = Y_{\lambda,\mu},\quad x_\lambda y_\mu - y_\lambda x_\mu = Z_{\lambda,\mu},$$

wo λ, μ alle aus den Zahlen 1, 2, 3 ... n, je zwei und zwei, und zwar so genommenen Zahlen bedeuten, dafs $\lambda < \mu$, so ergiebt sich:

$$A' = BC - E^2 = \Sigma y^2 m . \Sigma z^2 m - (\Sigma yzm)^2 = \Sigma X^2_{\lambda,\mu} m_\lambda m_\mu$$
$$B' = CA - F^2 = \Sigma z^2 m . \Sigma x^2 m - (\Sigma zxm)^2 = \Sigma Y^2_{\lambda,\mu} m_\lambda m_\mu$$
$$C' = AB - G^2 = \Sigma x^2 m . \Sigma y^2 m - (\Sigma xym)^2 = \Sigma Z^2_{\lambda,\mu} m_\lambda m_\mu$$
$$E' = FG - AE = \Sigma zxm . \Sigma xym - \Sigma x^2 m . \Sigma yzm = \Sigma Y_{\lambda,\mu} Z_{\lambda,\mu} m_\lambda m_\mu$$
$$F' = GB - BF = \Sigma xym . \Sigma yzm - \Sigma y^2 m . \Sigma zxm = \Sigma Z_{\lambda,\mu} X_{\lambda,\mu} m_\lambda m_\mu$$
$$G' = EF - CG = \Sigma yzm . \Sigma zxm - \Sigma z^2 m . \Sigma xym = \Sigma X_{\lambda,\mu} Y_{\lambda,\mu} m_\lambda m_\mu.$$

Aus den ersten drei Gleichungen ergiebt sich unmittelbar:

$$A' + B' + C' = \Sigma\left(X^2_{\lambda,\mu} + Y^2_{\lambda,\mu} + Z^2_{\lambda,\mu}\right) m_\lambda m_\mu.$$

Es ist aber zufolge (§. 34.) $\gamma\left(X^2_{\lambda,\mu} + Y^2_{\lambda,\mu} + Z^2_{\lambda,\mu}\right)$ der doppelte Flächeninhalt eines Dreiecks $Om_\lambda m_\mu$. Demnach ist die Gröfse $A'+B'+C'$ die Summe aller möglichen Producte aus den Massen je zweier der n materiellen Puncte, jedes mit dem Quadrate des doppelten Flächeninhalts multiplicirt, dessen Spitze der Anfangspunct O der Coordinaten ist, und dessen Basis durch die zwei Puncte m_λ, m_μ bestimmt wird.

§. 100. Substituirt man in dem Ausdrucke $A'A + B'B + C'C + 2E'E + 2F'F + 2G'G = 3D$, die durch A, B, C, E, F, G (§. 97.) bezeichneten und für A', B', C' etc. so eben gefundenen Werthe, so erhält man $3D =$

$$\Sigma\left(X^2_{\lambda,\mu}x^2_\nu + Y^2_{\lambda,\mu}y^2_\nu + Z^2_{\lambda,\mu}z^2_\nu + 2Y_{\lambda,\mu}Z_{\lambda,\mu}y_\nu z_\nu + 2Z_{\lambda,\mu}X_{\lambda,\mu}z_\nu x_\nu + 2X_{\lambda,\mu}Y_{\lambda,\mu}x_\nu y_\nu\right) m_\lambda m_\mu m_\nu$$
$$= \Sigma\left(X_{\lambda,\mu}x_\nu + Y_{\lambda,\mu}y_\nu + Z_{\lambda,\mu}z_\nu\right)^2 m_\lambda m_\mu m_\nu,$$

wobei zu bemerken ist, dafs man für λ, μ, ν alle Zahlen von 1 bis n nehmen mufs, doch so, dafs $\lambda < \mu$. Nimmt man noch überdiefs an, dafs auch $\mu < \nu$, so erhält man:

$$D = \Sigma\left(X_{\lambda,\mu}x_\nu + Y_{\lambda,\mu}y_\nu + Z_{\lambda,\mu}z_\nu\right) m_\lambda m_\mu m_\nu.$$

Es ist demnach die Gröfse D, zufolge (§. 9, 36.), gleich der Summe aller Producte der Massen von je drei und drei der materiellen Puncte, jedes dieser Producte $m_\lambda m_\mu m_\nu$ multiplicirt mit dem Quadrate des sechsfachen Volumens der Pyramide, deren Spitze der Mittelpunct O des Axensystems ist, und deren Basis durch die drei Puncte m_λ, m_μ, m_ν bestimmt wird.

§. 101. Aus den bewiesenen Eigenschaften der drei Gröfsen $A + B + C$, $A' + B' + C'$, $ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2$ ergiebt sich zugleich, dafs die Coefficienten der Gleichung (§. 92. (11)).

$$t^3 - (A + B + C)t^2 + (A' + B' + C')t - (ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2) = 0$$

abwechselnd positiv und negativ sind, und dafs die drei Wurzeln derselben nicht nur reelle Gröfsen sind, wie dort bewiesen worden, sondern zugleich positiv sein müssen, wodurch denn mit aller Strenge der von Euler entdeckte Satz bewiesen ist, dafs jeder beliebige Punct eines festen Körpers zum Anfangspuncte eines rechtwinklichten Coordinatensystems angenommen werden kann, dessen Lage so bestimmt ist, dafs

$$\Sigma y'z'm = o, \quad \Sigma z'x'm = o, \quad \Sigma x'y'm = o.$$

Diese drei rechtwinklichten Axen werden die Hauptaxen genannt, und wenn der Mittelpunct derselben überdiefs noch so bestimmt ist, dafs $\Sigma xm = o$, $\Sigma ym = o$, $\Sigma zm = o$, so heifsen sie die natürlichen Rotationsaxen. Der Mittelpunt O dieses Axensystems wird alsdann der Schwerpunct des festen Körpers genannt. Dieser Punct hat die Eigenschaft, dafs irgend eine beliebige Ebene durch denselben gelegt, die Summe der Massen aller materiellen Puncte, jede mit der Entfernung von dieser Ebene multiplicirt $= o$ sein mufs.

§. 102. Es giebt für jedes feste System materieller Puncte oder für jeden festen Körper einen solchen Punct, und zwar nur einen. Es seien nämlich die Coordinaten dieses Punctes a, b, c die Determinanten der durch denselben gelegten Ebnen $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$, so ist die Entfernung p eines Punctes, dessen Coordinaten x, y, z von dieser Ebene (§. 26.) $= \dot\xi(x-a) + \dot\eta(y-b) + \dot\zeta(z-c)$.

Folglich $\Sigma pm = \dot\xi\Sigma(x-a)m + \dot\eta\Sigma(y-b)m + \dot\zeta\Sigma(z-c)m$.

Da nun für alle möglichen Werthe von $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$, $\Sigma pm = o$ sein mufs, so mufs auch $\Sigma(x-a)m = o$, $\Sigma(y-b)m = o$, $\Sigma(z-c)m = o$, also $\Sigma xm = a\Sigma m$, $\Sigma ym = b\Sigma m$, $\Sigma zm = c\Sigma m$ oder $a = \frac{\Sigma xm}{\Sigma m}$, $b = \frac{\Sigma ym}{\Sigma m}$, $c = \frac{\Sigma zm}{\Sigma m}$ sein. Es hat also jede der Coordinaten a, b, c einen reellen Werth.

§. 103. Durch Herrn Prof. Jacobi im Crellschen Journale für Mathem. B. 2 p. 188 auf drei interessante in *Nov. Comment. tom. XX. Acad. petrop. ao* 1775. p. 189—270 enthaltene Abhandlungen von Euler und Lexell aufmerksam gemacht,

benutze ich den noch übrigen Raum dieses Bogens um das Wesentliche derselben hier, mit Hülfe der in dieser Vorlesung behandelten Sätze, vorzutragen.

§. 104. Aufgabe. Es seien ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' die resp. Determinanten eines Axensystems der rechtwinklichten Coordinaten x', y', z' gegeben, das mit dem rechtwinklichten Grundaxensysteme der x, y, z denselben Anfangspunct O hat; man soll die Determinanten $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ einer Geraden PO durch P finden, die eine solche Lage hat, dafs ein rechtwinklichtes Axensystem durch Drehung um dieselbe aus der Lage des Grundaxensystems in die des neuen Axensystems gebracht werden kann.

Weil die Determinanten der Rotationsaxe PO in Bezug auf das Grundaxensystem mit denen in Bezug auf das neue Axensystem dieselben sein müssen, so hat man zufolge (§. 42.) folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot\xi &= \xi\dot\xi + \eta\dot\eta + \zeta\dot\zeta \quad \text{oder} \quad (\xi-1)\dot\xi + \eta\dot\eta + \zeta\dot\zeta = o\\
\dot\eta &= \xi'\dot\xi + \eta'\dot\eta + \zeta'\dot\zeta \qquad\qquad \xi'\dot\xi + (\eta'-1)\dot\eta + \zeta'\dot\zeta = o\\
\dot\zeta &= \xi''\dot\xi + \eta''\dot\eta + \zeta''\dot\zeta \qquad\qquad \xi''\dot\xi + \eta''\dot\eta + (\zeta''-1)\dot\zeta = o.
\end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich vermittelst zweier dieser Gleichungen, z. B. der beiden letztern:

$$\dot\xi : \dot\eta : \dot\zeta = [(\eta'-1)(\zeta''-1) - \eta''\zeta'] : [\zeta'\xi'' - \xi'(\zeta''-1)] : [\xi'\eta'' - \xi''(\eta'-1)],$$

woraus man (§. 22.) die Determinanten $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ selbst erhält.

Substituirt man nun in der ersten Gleichung:

$$\lambda((\eta'-1)(\zeta''-1) - \eta''\zeta'), \quad \lambda(\zeta'\xi'' - \xi'(\zeta''-1)), \quad \lambda(\xi'\eta'' - \xi''(\eta'-1))$$

resp. für $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$, und dividirt alsdann durch λ, so erhält man die Bedingungsgleichung:

(a) $(\xi-1)(\eta'-1)(\zeta''-1) - \eta''\zeta'(\xi-1) - \zeta\xi''(\eta'-1) - \xi'\eta(\zeta''-1) + \eta\zeta'\xi'' + \zeta\xi'\eta'' = o$

welche zwischen den Gröfen ξ, η, ζ, ξ', etc. statt finden mufs, damit die gegebene Aufgabe möglich sei.

§. 105. Bezeichnet man die Winkel, welche die drei Axen der Coordinaten x', y', z' mit der Ebene xy machen, resp. durch β, β', β'', und die Winkel, die ihre Projectionen in der Ebene xy mit der Axe der x bilden, durch λ, λ', λ'', so hat man nach (§. 4.)

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{lll} \xi = cos\beta\ cos\lambda & \xi' = cos\beta'\ cos\lambda' & \xi'' = cos\beta''\ cos\lambda'' \\ \eta = cos\beta\ sin\lambda & \eta' = cos\beta'\ sin\lambda' & \eta'' = cos\beta''\ sin\lambda'' \\ \zeta = sin\beta & \zeta' = sin\beta' & \eta'' = sin\beta''; \end{array}$$

woraus wegen der Bedingungsgleichungen:

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = o,\quad \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = o,\quad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = o$$

folgende drei Gleichungen hervorgehen:

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{l} cos\beta'\ cos\beta''\ cos(\lambda'' - \lambda') + sin\beta'\ sin\beta'' = o \\ cos\beta''\ cos\beta\ cos(\lambda - \lambda'') + sin\beta''\ sin\beta = o \\ cos\beta\ cos\beta'\ cos(\lambda' - \lambda) + sin\beta\ sin\beta' = o \end{array}$$

oder $tan\beta'\ tan\beta'' = -cos(\lambda''-\lambda')$, $tan\beta''\ tan\beta = -cos(\lambda-\lambda'')$, $tan\beta\ tan\beta' = -cos(\lambda'-\lambda)$.

Daraus $tan^2\beta\ tan^2\beta'\ tan^2\beta'' = -cos(\lambda''-\lambda')\ cos(\lambda-\lambda'')\ cos(\lambda'-\lambda)$, und folglich

$$tan^2\beta = -\frac{cos(\lambda-\lambda'')\,cos(\lambda'-\lambda)}{cos(\lambda''-\lambda')},\quad tan^2\beta = -\frac{cos(\lambda'-\lambda)\,cos(\lambda''-\lambda')}{cos(\lambda-\lambda'')},\quad tan^2\beta'' = -\frac{cos(\lambda''-\lambda')\,cos(\lambda-\lambda')}{cos(\lambda'-\lambda)}.$$

§. 106. Zufolge (§. 42, c.) hat man:

$$\xi''\eta' - \eta'\xi'' = \zeta,\quad \xi''\eta - \eta''\xi = \zeta',\quad \xi\eta' - \eta\xi' = \zeta''.$$

Folglich

$$\text{(d)}\quad \begin{array}{l} sin\beta = cos\beta'\ cos\beta'\ sin(\lambda''-\lambda') \\ sin\beta' = cos\beta''\ cos\beta\ sin(\lambda-\lambda'') \\ sin\beta'' = cos\beta\ cos\beta'\ sin(\lambda'-\lambda). \end{array}$$

Aus je zweien dieser drei Gleichungen mit Zuziehung der drei Gleichungen (c) ergiebt sich:

$$\text{(e)}\quad \begin{array}{l} tan\beta'\ tan\beta'' = cos^2\beta\ sin(\lambda-\lambda'')\ sin(\lambda'-\lambda) = -cos(\lambda''-\lambda') \\ tan\beta''\ tan\beta = cos^2\beta'\ sin(\lambda'-\lambda)\ sin(\lambda''-\lambda') = -cos(\lambda-\lambda'') \\ tan\beta\ tan\beta' = cos^2\beta''\ sin(\lambda''-\lambda')\ sin(\lambda-\lambda'') = -cos(\lambda'-\lambda). \end{array}$$

Daraus:

$$cos^2\beta = -\frac{cos(\lambda''-\lambda')}{sin(\lambda-\lambda'')\,sin(\lambda'-\lambda)},\quad cos^2\beta' = -\frac{cos(\lambda-\lambda'')}{sin(\lambda'-\lambda)\,sin(\lambda''-\lambda')},\quad cos^2\beta'' = -\frac{cos(\lambda'-\lambda)}{sin(\lambda''-\lambda')\,sin(\lambda-\lambda'')}$$

und, weil $tan\beta\ cos\beta = sin\beta$, $tan\beta'\ cos\beta' = sin\beta'$, $tan\beta''\ cos\beta'' = sin\beta''$,

$sin^2\beta = cot(\lambda-\lambda'')\,cot(\lambda'-\lambda)$, $sin^2\beta' = cot(\lambda'-\lambda)\,cot(\lambda''-\lambda')$, $sin^2\beta'' = cot(\lambda''-\lambda')\,cot(\lambda-\lambda'')$.

Wegen der Bedingungsgleichung (§. 44.) $\zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2 = 1$ hat man auch:

$$\text{(f)}\quad cot(\lambda-\lambda'')\,cot(\lambda'-\lambda) + cot(\lambda'-\lambda)\,cot(\lambda''-\lambda') + cot(\lambda''-\lambda')\,cot(\lambda-\lambda'') = 1,$$

woraus man vermuthen könnte, dafs die drei Gröfsen λ, λ', λ'' von einander abhängig seien, so dafs, wenn zwei derselben gegeben sind, die dritte ebenfalls bestimmt ist. Bei näherer Untersuchung findet man jedoch, dafs diese Gleichung eine sogenannte identische Gleichung ist, d. h., dafs dieselbe für alle beliebige Werthe von λ, λ', λ'' statt finden mufs. Man kann nämlich die obige Gleichung unter der Form:

$$\left\{cot(\lambda-\lambda'') + cot(\lambda''-\lambda')\right\}.\left\{cot(\lambda'-\lambda) + \frac{cot(\lambda''-\lambda')\,cot(\lambda-\lambda'')-1}{cot(\lambda-\lambda'') + cot(\lambda''-\lambda')}\right\} = o$$

darstellen. Es ist aber (p. 124, D.) der zweite Factor des Productes linker Hand:

$$cot(\lambda'-\lambda) + cot((\lambda''-\lambda') + \lambda - \lambda'') = cot(\lambda'-\lambda) + cot(\lambda-\lambda')$$

für alle beliebige Werthe von λ, λ', λ'', $= o$. Es lassen sich demnach die neun Determinanten des neuen Axensystems auf die drei Gröfsen λ, λ', λ'' zurückführen, so wie wir bereits dieselben (§. 45.) durch die Gröfsen ω, ψ, φ bestimmt haben.

§. 107. Das von (§. 104.) an Vorgetragene macht im Wesentlichen bis auf die Verschiedenheit der Bezeichnung den Inhalt der erwähnten ersten Abhandlung von Euler aus. Aber, sagt dieser grofse Mathematiker am Ende derselben, obgleich wir diese Werthe in der Gleichung (a) substituiren, so sieht man doch auf keine Weise, wie sich die einzelnen Theile derselbən aufheben. Deshalb wird es nöthig sein, auf die Gleichung (f) und darauf Rücksicht zu nehmen, dafs $(\lambda''-\lambda')+(\lambda-\lambda'')+(\lambda'-\lambda)=o$, und schliefst mit den Worten: *At vero nemo facile stupendum hunc laborem in se suscipere volet; quamobrem egregia ista proprietas omnium corporum rigidorum multo magis ardua est censenda et Geometris pulcherrimam occasionem praebere potest, vires suas in ista proprietate penitus enucleanda exercendi.*

Lexell gab in einer darauf folgenden Abhandlung zwei Beweise dieses Satzes, die mit den nöthigen Vorbereitungen über drei Bogen einnehmen.

§. 108. Für jemanden der mit dem Inhalte von (§. 42.) bekannt ist, hat dieser Beweis nicht die mindeste Schwierigkeit. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \text{(g)}\quad & (\xi-1)(\eta'-1)(\zeta''-1) - \eta''\zeta'(\xi-1) - \zeta\xi''(\eta'-1) - \xi'\eta(\zeta''-1) + \eta\zeta'\xi'' + \zeta\xi'\eta'' \\ &= \xi\eta'\zeta'' + \xi'\eta''\zeta + \xi''\eta\zeta' - \zeta\eta'\xi'' - \zeta'\eta''\xi - \zeta''\eta\xi' - (\eta'\zeta'' - \eta''\zeta') - (\zeta''\xi - \xi''\zeta) - (\xi\eta' - \eta\xi') + \xi + \eta' + \zeta'' - 1 \\ &= \mathfrak{K} - \xi - \eta' - \zeta'' + \xi + \eta' + \zeta'' - 1 = o. \end{aligned}$$

§. 109. Aufgabe. Es seien die Winkel, welche die durch die Rotationsaxe und die Axen der x, y, z bestimmten Ebenen resp. mit den durch die Rotationsaxe

und den Axen der x', y', z' bestimmten Ebnen machen, und die unter sich gleich sein müssen, $= \varphi$. Man soll aus diesem Winkel und den Determinanten $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ der Rotationsaxe die Determinanten des rechtwinklichten Axensystems der x', y', z' herleiten.

Auflösung. Denkt man sich um den Anfangspunct O der Coordinaten eine Kugel mit dem Radius $= 1$ beschrieben, und bezeichnet die respectiven Pole der Ebenen yz, zx, xy durch A, B, C; der Ebenen $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ durch A', B', C', und den Pol der Rotationsaxe durch P, so ergiebt sich aus dem sphärischen Dreiecke PAA' (p. 227, A.) $\sin AP . \sin A'P . \cos APA' = \cos AA' - \cos AP . \cos A'P$. Es ist aber $APA' = \varphi$,

$$\cos AA' = \xi, \quad \cos AP = \cos A'P = \dot{\xi}, \quad \text{also} \quad (1 - \dot{\xi}^2) \cos\varphi = \xi - \dot{\xi}^2.$$

Eben so erhält man aus den beiden Dreiecken PBB', PCC' die Gleichungen

$$(1 - \dot{\eta}^2) \cos\varphi = \eta' - \dot{\eta}^2, \quad (1 - \dot{\zeta}^2) \cos\varphi = \zeta'' - \dot{\zeta}^2.$$

Folglich $\xi = \dot{\xi}^2 + \cos\varphi(1 - \dot{\xi}^2)$, $\eta' = \dot{\eta}^2 + \cos\varphi(1 - \dot{\eta}^2)$, $\zeta'' = \dot{\zeta}^2 + \cos\varphi(1 - \dot{\zeta}^2)$, und $1 - \xi = (1 - \cos\varphi)(1 - \dot{\xi}^2)$, $1 - \eta' = (1 - \cos\varphi)(1 - \dot{\eta}^2)$, $1 - \zeta'' = (1 - \cos\varphi)(1 - \dot{\zeta}^2)$.

Daraus

$$\begin{aligned} \dot{\eta}\eta + \dot{\zeta}\zeta &= \dot{\xi}(1 - \xi) = \dot{\xi}(1 - \cos\varphi)(1 - \dot{\xi}^2) \\ \text{(h)} \quad \dot{\zeta}\zeta' + \dot{\xi}\xi' &= \dot{\eta}(1 - \eta') = \dot{\eta}(1 - \cos\varphi)(1 - \dot{\eta}^2) \\ \dot{\xi}\xi'' + \dot{\eta}\eta'' &= \dot{\zeta}(1 - \zeta'') = \dot{\zeta}(1 - \cos\varphi)(1 - \dot{\zeta}^2). \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die zu den drei sphärischen Dreiecke PAA', PBB', PCC' gehörigen pyramidalischen Gröfsen nach (§. 36, F.) resp. durch $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, so ergiebt sich wegen der resp. Determinanten der Radien OP, OA, OA'; OP, OB, OB'; OP, OC, OC'

$$\mathfrak{K} = \dot{\zeta}\eta - \dot{\eta}\zeta, \quad \mathfrak{K}' = \dot{\xi}\zeta' - \dot{\zeta}\xi', \quad \mathfrak{K}'' = \dot{\eta}\xi'' - \dot{\xi}\eta''.$$

Es ist aber (§. 39, E.) $\mathfrak{K} = (1 - \dot{\xi}^2) \sin\varphi$, $\mathfrak{K}' = (1 - \dot{\eta}^2) \sin\varphi$, $\mathfrak{K}'' = (1 - \dot{\zeta}^2) \sin\varphi$, also

$$\dot{\zeta}\eta - \dot{\eta}\zeta = \sin\varphi(1 - \dot{\xi}^2), \quad \dot{\xi}\zeta' - \dot{\zeta}\xi' = \sin\varphi(1 - \dot{\eta}^2), \quad \dot{\eta}\xi'' - \dot{\xi}\eta'' = \sin\varphi(1 - \dot{\zeta}^2).$$

Vermittelst dieser und der drei Gleichungen (h) findet man nun noch die übrigen sechs Determinanten η, ζ; ζ', ξ'; ξ'', ζ'', so dafs:

$$\begin{aligned} \xi &= \dot{\xi}^2 + (1 - \dot{\xi}^2)\cos\varphi & \xi' &= \eta\dot{\xi}(1 - \cos\varphi) - \zeta\sin\varphi & \xi'' &= \zeta\dot{\xi}(1 - \cos\varphi) + \dot{\eta}\sin\varphi \\ \eta &= \dot{\xi}\dot{\eta}(1 - \cos\varphi) + \dot{\zeta}\sin\varphi & \eta' &= \dot{\eta}^2 + (1 - \dot{\eta}^2)\cos\varphi & \eta'' &= \zeta\dot{\eta}(1 - \cos\varphi) - \xi\sin\varphi \\ \zeta &= \dot{\xi}\dot{\zeta}(1 - \cos\varphi) - \dot{\eta}\sin\varphi & \zeta' &= \dot{\eta}\dot{\zeta}(1 - \cos\varphi) + \dot{\xi}\sin\varphi & \zeta'' &= \dot{\zeta}^2 + (1 - \dot{\zeta}^2)\cos\varphi. \end{aligned}$$

ENSV Teaduste Akadeemia
Tartu Astronoomia Observatoorium
No