

Raamatukogu
179050



Ebene

analytische Geometrie

mit zahlreichen Übungsaufgaben,

für

höhere Lehranstalten

bearbeitet von

Dr. Carl Nechel.

~~~~~  
Dritte Auflage.  
~~~~~



Reval, 1879.

Verlag von Franz Kluge.

Est. A

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

18388

Lehrbücher desselben Verfassers:

- Compendium der Planimetrie nach Legendre. 3te Aufl. Reval F. Kluge 1873
Compendium der Stereometrie nach Legendre. 3te Aufl. Reval F. Kluge 1877.
Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst zahlreichen Übungsaufgaben aus der Geometrie, Geodäsie, Physik und Astronomie, für den Schulgebrauch und Selbstunterricht. Leipzig, Fr. Volkmar. 1861.
Auflösungen der Aufgaben in dem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie. Vierte Auflage. 1866.
Leitfaden zum Unterricht in der ebenen Trigonometrie für den Gebrauch in Schulen. 2te Aufl. F. Kluge 1879.
Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie mit zahlreichen Anwendungen auf reine und praktische Geometrie, mathematische Geographie, Geodäsie und Astronomie. Zum Gebrauche in den obersten Klassen der Gymnasien und der höheren Realschulen, sowie zum Selbstunterrichte bearbeitet. 2te Aufl. Reval. F. Kluge. 1879.
Stereometrische Aufgaben (1200 Nummern) nebst ihren Auflösungen für den Gebrauch in höheren Lehranstalten. 2 Hefte. F. Kluge. Reval. 1866.
Lehrbuch der Arithmetik, nach wissenschaftlichen Grundätzen für den Schulgebrauch und Selbstunterricht bearbeitet. Riga. Häcker. 1870.
Arithmetische Aufgaben für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten. Reval. F. Kluge. 1871.
Auflösungen der arithmetischen Aufgaben.
Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für Gymnasien und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht. F. Kluge. Reval 1869.
Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra für den Gebrauch in Gymnasien und Realschulen. Reval. 1873.
Auflösungen der Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Reval. F. Kluge. 1874
Leitfaden für den Unterricht in der Buchstabenrechnung und Algebra im Anschluß an die Sammlung alg. Aufgaben. F. Kluge. 1874.
Die Lehrbücher der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie sind auch in russischen Uebersetzungen von W. Schichow erschienen. Riga. Schnadenburg. 1870.



Vorwort.

Die vorliegende Schrift, welche die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene enthält, ist bestimmt, als Leitfaden für den ersten Unterricht dieses Lehrfaches in den oberen Klassen höherer Lehranstalten zu dienen. Eine stete Rücksicht auf diesen Zweck hat die Betrachtungen mit Ausschluß alles dessen, was billiger Weise dem akademischen Vortrage anheimfällt, auf das Nothwendigste und Wichtigste in dem großen Gebiete der analytischen Geometrie beschränkt, und das Streben des Verfassers hervorgerufen, Uebersichtlichkeit des wissenschaftlich behandelten Gegenstandes mit der möglichsten Einfachheit und Evidenz der Darstellung und mit einer für den praktischen Gebrauch bequemen äußern Einrichtung des Leitfadens zu vereinigen. Den einzelnen Abschnitten sind zahlreiche Beispiele und Aufgaben angefügt, welche die Anwendbarkeit der allgemeinen Gesetze nachweisen und zu deren Einübung und Befestigung im Gedächtnisse dienen sollen, zugleich aber dem Lehrer ein ausreichendes Material für einen etwa beabsichtigten umfassenderen Unterricht darbieten werden. Die meisten dieser Aufgaben sind so angelegt, daß zu ihrer Lösung eine bloß mechanische Substitution in die allgemeinen Formeln keineswegs ausreicht, sondern eine vollständige, selbstbewußte Auffassung des theoretischen Theils nothwendig wird, so daß ihr richtiges durch den

Schüler gefundenes Resultat zugleich einen Beweis für dessen geistiges Eindringen in die vorhergehenden analytischen Entwicklungen abgeben dürfte. Gegen den bei der Beurtheilung dieser Schrift vielleicht laut werdenden Wunsch nach einer Darstellung des Gegenstandes, welche von einem höhern Gesichtspunkte ausgehend unter Anderem die Eigenschaften aller Kegelschnitte durch die Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Variabeln ableitet, sei bemerkt, daß überall die eigentliche Aufgabe der Schule, nämlich die bloße Einführung des Anfängers in die höhere Geometrie, zum Maßstabe in der Auswahl und Behandlung des Stoffes gedient hat. Daß die Darstellung in dieser Beziehung das Richtige getroffen hat, geht sowol aus den vielfachen günstigen Beurtheilungen des Lehrbuches, wie aus seinem allgemeinen Gebrauche in den inländischen Gymnasien und aus der Verbreitung, welche dasselbe ebenso wie einige der übrigen Lehrbücher des Verfassers auch in Deutschland, Oesterreich und zum Theil durch Uebersetzungen in Rußland und Frankreich gefunden hat, zur Genüge hervor. In der vorliegenden dritten Auflage sind daher größere Aenderungen nicht vorgenommen worden; die Verbesserungen beziehen sich blos auf eine sorgfältige Revision des Textes, auf einige Vereinfachungen, durch welche in manchen Entwicklungen größere Kürze und Evidenz herbeigeführt wurden, und auf einen sorgfältigeren Druck in angemessener äußern Ausstattung.

Dorpat im Januar 1880.

Inhalt.



Einführung	§ 1 bis § 18
Analytische Auflösung geometrischer Aufgaben	§ 19 „ § 28
Vonder Methode der Coordinaten	§ 29 „ § 34
Die Gleichung der geraden Linie	§ 35 „ § 52
Die Gleichung der Kreislinie	§ 53 „ § 65
Die Parabel	§ 66 „ § 81
Die Ellipse	§ 82 „ § 99
Die Hyperbel	§ 100 „ § 121
Emerkungen über die Linien der zweiten Ordnung	§ 122 „ § 127
Aufgaben	§ 128

Einleitung.

§ 1. Die analytische Geometrie besteht in der Anwendung der Algebra auf geometrische Aufgaben, indem sie diese mittels arithmetischer Operationen auflösen lehrt.

Da nämlich alle Raumgrößen, wenn man sie durch ein gleichartiges, als Einheit gewähltes Maß gemessen denkt, sich als Zahlengrößen darstellen, so können alle arithmetischen Operationen auf gleiche Weise an Linien, Flächen und Körpern, wie an Zahlengrößen ausgeführt werden.

Der Gang, den man bei der Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Probleme befolgt, ist im Allgemeinen nachstehender. Man stellt zuvörderst die in einer Aufgabe gegebenen geometrischen Größen durch die Beziehung auf eine gleichartige Einheit arithmetisch dar, und benennt sie durch ihre Zahlenwerthe selbst, so daß man also z. B. unter der Linie a diejenige versteht, welche erscheint, wenn die Längeneinheit a Mal genommen wird. Die als bekannt vorausgesetzten Größen bezeichnet man gewöhnlich durch die Buchstaben $a, b, c \dots$, die gesuchten dagegen meistens durch x, y, z , wobei die Maßeinheit, obgleich sie an sich eine willkürliche ist, doch für alle Größen einer und derselben Betrachtung unverändert bleiben muß, weil andernfalls die erhaltenen Zahlenwerthe als ungleichartig sich mit einander nicht vergleichen ließen. — Man denkt sich nun die Aufgabe in einer entsprechenden Figur gelöst, und sucht mit Hilfe allgemeiner geometrischer Wahrheiten aus ihren Bedingungen eine oder mehre Gleichungen zwischen den bekannten und unbekanntem Größen abzuleiten, d. h. die gegebenen Bedingungen selbst in einer Gleichung auszusprechen, was man die Uebertragung der geometrischen Aufgabe in die algebraische Zeichensprache zu nennen pflegt. Die erhaltene Gleichung löst man algebraisch auf, wodurch die gesuchte Größe aus den gegebenen Größen bestimmt wird, und natürlich ebenfalls als eine, auf die Maßeinheit der letztern sich beziehende, Zahl zu betrachten ist. Endlich führt man das auf dem Wege der Rechnung gefundene Resultat wieder in das Gebiet der Geometrie dadurch zurück, daß man mit den gegebenen Linien Constructionen vornimmt, welche den durch die algebraischen Zeichen angedeuteten Operationen vollkommen entsprechen, indem dasselbe Verhältniß, welches unter den gegebenen geometrischen Größen besteht, nothwendig auch unter den sie repräsentirenden Zahlen stattfindet. Jede aus der schließlichen Construction hervorgegangene geometrische Größe muß, wenn sie durch das zu Grunde gelegte Maß gemessen wird, die nämliche Zahl erzeugen, welche vorher die arithmetische Lösung gegeben hat.

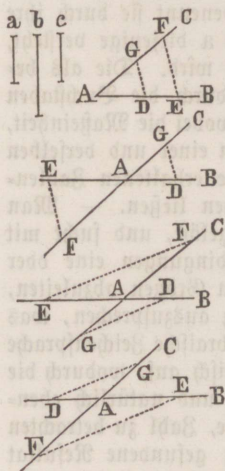
Für das Bilden und Ansetzen der Gleichungen lassen sich keine allgemeinen Regeln geben, da dieses mehr Sache der Uebung und der Urtheilskraft ist, und oft viel Scharfsinn erfordert, während die geometrische Construction der erhaltenen algebraischen Formeln vorzüglich sich durch Unterricht erklären läßt.

Wir wollen sogleich zeigen, wie die Formeln, auf welche die algebraische Rechnung meistens führt, konstruirt werden können.

§ 2. Um $x = a + b$ zu konstruiren, also eine gerade Linie zu beschreiben, deren Zahlenwerth der Summe der Zahlenwerthe a und b zweier gegebenen Linien gleich sei, braucht man nur diese letzteren geradlinig an einander zu setzen, so ist die erhaltene ganze Linie die gesuchte.

§ 3. Soll $x = a - b$, also die Differenz zweier gegebenen Geraden a und b konstruirt werden, so trage man (wie die erste Figur § 4 zeigt) auf einer beliebigen Geraden AB , von einem bestimmten Anfangspunkte A ausgehend, die Linie $AE = a$, und von E aus rückwärts die Linie $ED = b$ ab. Ist nun $a > b$, so ist die positive Linie AD die verlangte Linie x . Wäre aber $a = b$, so stiele D in A , und x würde nur durch einen Punkt dargestellt werden. Ist endlich $a < b$, so wird (wie die vierte Figur zeigt) der Endpunkt D der Linie b über die Linie a hinausreichen, und die Linie AD , welche auf der entgegengesetzten Seite des Ausgangspunktes A liegt und daher negativ ist, die gesuchte Linie x darstellen.

§ 4. Um $x = \frac{ab}{c}$ zu konstruiren, trage man (Fig. 1) auf dem



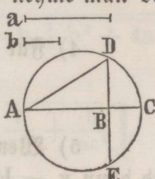
einen Schenkel eines beliebigen Winkels BAC die Linien $AD = c$, und $AE = b$ ab, auf dem andern Schenkel die Linie $AG = a$, ziehe DG , und zu dieser Linie aus E eine Parallele EF , so ist AF als vierte Proportionale zu c , a , b die gesuchte Gerade; denn aus $AD : AG = AE : AF$ oder $c : a = b : AF$ folgt, daß $AF = \frac{ab}{c} = x$ ist.

Wäre ein Factor b negativ, so trage man (Fig. 2) c und a wie vorhin auf, dagegen b jetzt nicht auf die positive Richtung des Schenkels AB , sondern auf seine Verlängerung rückwärts, so daß also $AE = -b$ ist, und ziehe zu DG aus E die Parallele EF , so ist die gesuchte Linie AF wegen ihrer Lage auf der negativen Richtung des Schenkels AC negativ. Da $\triangle ADG \sim \triangle AEF$, so ist $c : a = -b : AF$, folglich $AF = -\frac{ab}{c} = x$. Wenn ferner beide Facto-

ren a und b negativ sind, und sie daher (Fig. 3) auf die rückwärts verlängerten Schenkel des $\sphericalangle BAC$ aufgetragen werden, während $AD = c$ eine positive Lage hat, so findet man für x die positive Gerade AF . Sind endlich a und b positiv, aber c negativ, so erhält man, wie die vierte Figur zeigt, wieder eine negative Linie AF für x .

Man sieht, wie sich hier durch die Construction die arithmetische Regel von den Vorzeichen eines Products und eines Quotienten bestätigt.

§ 5. Der Ausdruck $x = \frac{a^2}{b}$ ist nur ein besonderer Fall der vorhergehenden Aufgabe, indem man hier ebenfalls die vierte Proportionale zu b, a, a zu suchen hat. Wenn $b > a$ ist, so kann man auch (Fig. § 6) über $AC = b$ einen Halbkreis beschreiben, und nachdem man $AD = a$ als Sehne eingetragen hat, aus D die Linie $DB \perp AC$ ziehen; alsdann ist $AC : AD = AD : AB$ oder $b : a = a : AB$, also $AB = \frac{a^2}{b} = x$.

§ 6. In dem Ausdruck $x = \sqrt{ab}$ bezeichnet x die mittlere Proportionale zwischen a und b . Auf einer unbestimmten Geraden nehme man daher $BA = a$, $BC = b$, und beschreibe um AC einen Kreis,  so ist die durch B auf AC gezogene Senkrechte BD gleich x , weil aus $a : BD = BD : b$ folgt $BD = \sqrt{ab} = x$. Die Linie BE ist dagegen, wegen ihrer entgegengesetzten Lage nach unten, gleich $-\sqrt{ab}$, indem hier $a : -BE = -BE : b$, woraus sich ergibt $(-BE)^2 = ab$, also $-BE = \sqrt{ab}$, oder $BE = -\sqrt{ab}$.

Es läßt sich übrigens $x = \sqrt{ab}$ auch so construiren, daß man von der größern Linie a , welche jetzt, um dieselbe Figur beizubehalten, durch AC vorgestellt sei, ein Stück $AB = b$ abschneidet, und in dem Halbkreise über AC aus B die $BD \perp AC$, und außerdem die Verbindungslinie AD zieht, wo alsdann $a : AD = AD : b$, folglich $AD = \sqrt{ab} = x$ sein wird.

§ 7. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ stellt die Hypotenuse eines rechth. Dreiecks vor, dessen Katheten a und b sind. Wenn man daher die Geraden a und b unter einem rechten Winkel an einander setzt, so ist die ihre Endpunkte verbindende Linie die gesuchte.

§ 8. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ stellt die eine Kathete eines rechth. Dreiecks dar, in welchem a die Hypotenuse, und b die andere Kathete ist. Man zeichne daher (Fig. § 6) einen rechten Winkel ABD , mache den einen Schenkel $AB = b$, und durchschneide aus A mit dem Radius $AD = a$ den andern Schenkel in D , so ist $BD = \sqrt{a^2 - b^2} = x$. Man kann auch über a einen Halbkreis beschreiben, und von dem einen Endpunkte seines Durchmessers die Linie b als Sehne eintragen, so wäre die andere Sehne zwischen dem Endpunkte der erstern und dem andern Endpunkte des Durchmessers gleich x , weil der Winkel zwischen beiden Sehnen ein rechter ist. Endlich läßt sich auch, da $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$ ist, die mittlere Proportionale zwischen den beiden Linien $a + b$ und $a - b$ construiren (§ 6).

§ 9. Viele Formeln lassen verschiedene Constructionen zu, wie wir schon im Vorhergehenden gesehen haben; das einfachste und eleganteste Verfahren zu ergreifen, setzt aber eine gewisse Geschicklichkeit voraus. Für die nachfolgenden Ausdrücke soll der geeignetste Weg kurz angedeutet werden.

1) Für $x = \frac{2abcd}{3efg}$ setze man $x = \frac{2ab}{3e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$, construire erst $\frac{2ab}{3e} = m$, dann $\frac{mc}{f} = n$, endlich $x = \frac{nd}{g}$.

2) Für $x = \frac{abc}{de + fg - hk}$ setze man $x = \frac{abc}{d \left(e + \frac{fg}{d} - \frac{hk}{d} \right)}$, construire $\frac{fg}{d} = m$, $\frac{hk}{d} = n$, $e + m - n = p$, endlich $x = \frac{abc}{dp}$.

3) Für $x = \frac{abcd}{efg + hkp}$ setze man $x = \frac{abcd}{ef \left(g + \frac{hkp}{ef} \right)}$

4) Für $x = a \sqrt{\frac{b}{c}}$ setze man $x = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c} \right) b}$.

5) Wenn $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$ ist, so construire man erst $\sqrt{bc} = m$, und dann $x = \sqrt{a^2 \pm m^2}$.

6) Für $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ hat man erst $a^2 + b^2 = m^2$, und alsdann $x = \sqrt{m^2 + c^2}$ zu finden.

7) Wenn $x = \frac{a}{b} \sqrt{cd + e^2 - f^2 + g^2}$, so hat man nach einander $\sqrt{cd} = m$, $e^2 - f^2 = n^2$, $n^2 + g^2 = p^2$, $\sqrt{m^2 + p^2} = q$, und endlich $x = \frac{aq}{a}$ zu finden.

8) Für $x = \frac{\sqrt{a^3 - b^2c + 2b^3}}{2a - b}$ setze man $x = \frac{\sqrt{b^2 \left(\frac{a^3}{b^2} - c + 2b \right)}}{2a - b}$

9) Für $x = \sqrt{a^2 + bc - \frac{def}{g}}$ setze man $x = \sqrt{a^2 + \frac{abc}{a} - \frac{adef}{ag}}$
 $= \sqrt{a \left(a + \frac{bc}{a} - \frac{def}{ag} \right)}$.

10) Für $x = ab \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a}{bc^2}}$ setze man $x = \sqrt{a^2 + \frac{a^3 b}{c^2}} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a \sqrt{ab}}{c} \right)^2}$ oder $\sqrt{a \left(a + \frac{a^2 b}{c^2} \right)}$.

§ 10. Zur weitem Uebung mögen folgende Beispiele dienen:

1) $x = (a + b + \frac{2}{3}f) - \frac{1}{3}(c + d)$. 2) $x = \frac{3}{4}(a + \frac{2}{9}b - \frac{4}{5}c)$.

3) $x = \frac{0,5a^2b}{2c^2} - \frac{1}{2}(a+b)$. 4) $x = \frac{3a^3}{0,75b^2} + b - 2m$. 5) $x = \frac{a^3 b^2 c}{\frac{2}{3}m^2 n^2 p}$.

$$6) x = \frac{ab}{2c \pm m}, \quad 7) x = \frac{abc + de^2 - g^3}{mn}, \quad 8) x = \frac{abc^2 - a^2 b^2}{abc + c^3}.$$

$$9) x = \frac{a^2 - b^2}{c} - \sqrt[5]{3} (a - 0,9b), \quad 10) x = \frac{3a^3 + a^2 b - bc}{a^2 - 2ab + b^2}.$$

$$11) x = \sqrt{ab - cd} - \sqrt{mn}, \quad 12) x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2}.$$

$$13) x = \sqrt{ab - 3cd + ag - 2mn}, \quad 14) x = a + \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - c^2}.$$

$$15) x = a\sqrt{1/2}, \quad 16) x = a(\sqrt{2} \pm 1), \quad 17) x = \sqrt{a^2 + 2bc} \pm \sqrt{a^2 - 2bc}.$$

$$18) x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{bm}{n}, \quad 19) x = \sqrt{a^2 + b^2 + b} \sqrt{b^2 + 4a^2}.$$

$$20) x = \sqrt{\frac{a^2 b - c^2 d}{a + d}}, \quad 21) x = ab \left[\frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{b}{ac^2}} \right].$$

§ 11. Bei allen bisherigen Constructionen wurde das Maß, durch welches die Linien gemessen, die Zahlen $a, b, c \dots$ gaben, unberücksichtigt gelassen, wovon der Grund in den folgenden Paragraphen erklärt werden soll.

Ein algebraischer Ausdruck heißt homogen von der 1, 2, 3... ten Ordnung, wenn die Multiplication eines jeden seiner Buchstaben durch irgend eine Zahl n gleichbedeutend ist mit der Multiplication des ganzen Ausdrucks entsprechend durch die 1, 2, 3... te Potenz von n .

Die Ausdrücke $a + 2b$ und $\frac{a^2 + bc}{a - b}$ sind homogen von der ersten Ordnung, weil $an + 2bn = (a + 2b)n$, und $\frac{a^2 n^2 + bcn}{an - bn} = \frac{a^2 + bc}{a - b} \cdot n$ ist. Homogen von der zweiten Ordnung ist $\frac{a^3 - ab^2}{3c}$, indem $\frac{a^3 n^3 - ab^2 n^2}{3cn} = \frac{a^3 - ab^2}{3c} \cdot n^2$ ist.

Ein homogener Ausdruck der ersten Ordnung, z. B. $a - 3b + c$ giebt sich als solcher dadurch zu erkennen, daß jedes seiner Glieder aus einem Buchstaben besteht, oder wenn er ein Bruch ist, wie $\frac{ab}{c}$ oder $\frac{abc + 2c^3 - a^2 b}{3ab - c^2}$, daß die Anzahl der Factoren in jedem Gliede des Zählers um eins größer ist, als in jedem Gliede des Nenners, wobei die etwa vorkommenden besondern Zahlen unberücksichtigt bleiben, oder endlich, wenn er unter dem Zeichen der Quadratwurzel steht, wie z. B. $\sqrt{\frac{ab^2 - c^3}{2a + b}}$, daß in jedem Gliede des Zählers zwei Factoren mehr als in jedem Gliede des Nenners vorkommen.

§ 12. Wenn sich die Einheit ändert, durch welche die Linien gemessen, die Zahlen $a, b, c \dots$ geben, so muß offenbar auch der Zahlenwerth dieser Linien ein anderer werden, so daß für ein n Mal kleineres oder größeres Maß im umgekehrten Verhältnisse die Zahlenwerthe n Mal größer oder kleiner werden. Gibt z. B. eine Linie, auf das Maß 1 bezogen, den Zahlenwerth a , so würde dieselbe Linie, auf das Maß $\frac{1}{n}$ bezogen, den Zahlenwerth an haben, oder allgemein: ein n Mal kleineres oder größeres Maß würde den Zahlenwerth a einer Linie entsprechend in an oder $\frac{a}{n}$ verwandeln, und umgekehrt stellt an , auf das Maß $\frac{1}{n}$ bezogen, dieselbe Linie vor, als a ans das Maß 1 bezogen.

Beziehen wir also sämtliche, in einem homogenen Ausdruck, z. B. $\frac{ab}{a+b}$ vorkommenden Zahlenwerthe auf ein n Mal kleineres Maß, so erhalten wir $\frac{anbn}{an+bn} = \frac{ab}{a+b} \cdot n$, so daß mithin der Werth des ganzen Ausdrucks n Mal größer wird. Weil sich aber der Zahlenwerth $\frac{ab}{a+b} \cdot n$ jetzt auf ein n Mal kleineres Maß bezieht, so stellt er dieselbe Linie vor, wie die Zahl $\frac{ab}{a+b}$ auf das ursprüngliche Maß 1 bezogen. Hieraus geht nun hervor, daß bei homogenen Ausdrücken der ersten Ordnung die Aenderung des Maßes keine Aenderung der durch sie vorgestellten Linien herbeiführt, und daher das Maß bei ihrer Construction als gleichgiltig unberücksichtigt bleiben kann.

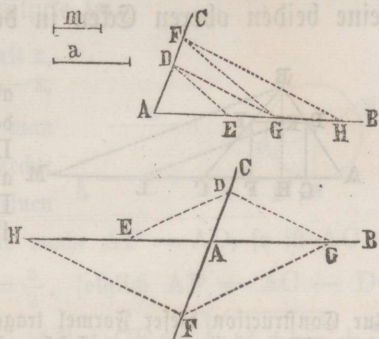
Ähnliche Bemerkungen lassen sich für die homogenen Ausdrücke der zweiten und dritten Ordnung in Bezug auf das Flächen- und Körpermaß machen.

§ 13. Ein nicht homogener Ausdruck, z. B. $\frac{a+b^2c}{c}$ giebt für ein n Mal kleineres Maß $\frac{an+b^2n^2cn}{cn} = \frac{a+b^2cn^2}{cn} \cdot n$, also nicht einen n Mal größern Zahlenwerth, was doch erforderlich wäre, wenn das neue Resultat, auf ein n Mal kleineres Maß bezogen, dieselbe Linie darstellen sollte, welche man erhält, wenn das Maß unverändert geblieben wäre, und daher muß bei der Construction eines jeden nicht homogenen Ausdrucks das Maß immer berücksichtigt werden. In einem solchen Falle kann man die Maßeinheit, etwa mit m bezeichnend, so oft als Factor zu den Gliedern z. B. des obigen Ausdrucks hinzusetzen, daß dieser die Form $\frac{am^2 + b^2c}{cm}$ eines homogenen Ausdrucks erhält, was in seinem Werthe nichts ändert, da $m = 1 = m^2$, und überhaupt jede Potenz von 1 gleich 1 ist, und alsdann kann man den Ausdruck in der Weise eines homogenen construiren.

§ 14. Um $x = ab$ zu construiren, sei außer a und b die Maßeinheit $m = 1$ gegeben, und wird nun $x = \frac{ab}{m}$ gesetzt, so braucht man nur zu m , a , b die vierte Proportionale zu suchen (§ 4).

§ 15. Statt $x = \frac{a}{b}$ setze man $x = \frac{am}{b}$ und suche zu b , a , m die vierte Proportionale.

§ 16. Um $x = a^2$, oder $x = a^3$ zu construiren, trage man (Fig. 1) auf dem einen Schenkel des Winkels A die Linie $AE = a$, und auf dem andern Schenkel die Linie $AD = m = 1$, sowie $AF = a$, ziehe DE und aus F die Parallele FG , so ist $AD:AE = AF:AG$, oder $1:a = a:AG$, also $AG = a^2$. Zieht man ferner DG , und aus F die $FH \parallel DG$, so ist $AD:AG = AF:AH$, also $AH = a^3$.



Auf diese Weise kann man jede ganze Potenz construiren, und auch geometrisch zeigen, daß von einer negativen Basis, z. B. $-a$, eine gerade Potenz positiv, eine ungerade dagegen negativ ist. Trägt man nämlich (Fig. 2) erst $AD = m = 1$ ab, dann auf die rückwärts verlängerten Schenkel die Linien $AE = a$ und $AF = a$, zieht ED und aus F die $FG \parallel ED$, so ist $\triangle ADE \sim \triangle AFG$, also $AD:AE = AF:AG$, oder $1:-a = -a:AG$, folglich $AG = (-a)^2 = a^2$. Wenn man ferner DG zieht, und aus F die $FH \parallel DG$, so ist $\triangle ADG \sim \triangle AFH$, also $AD:AG = AF:AH$, oder $1:a^2 = -a:AH$, und daher $AH = -a^3$.

§ 17. Statt $x = \sqrt{a}$ setze man $x = \sqrt{am}$, wo $m = 1$ ist, und construire die mittlere Proportionale zwischen a und m . Eine wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt auf die Construction der 4, 8, 16... ten Wurzel. Dagegen lassen sich solche Wurzelgrößen, deren Wurzelexponent keine Potenz von 2 ist, z. B. die 3, 5, 6, 7... te Wurzel, nicht geometrisch darstellen.

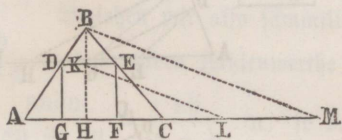
§ 18. Nachstehende Ausdrücke versuche man durch geeignete Einführung der Maßeinheit homogen von der ersten Ordnung zu machen.

$$1) \frac{a^3 b + c^2 d}{e^2 g - gp} \quad 2) \frac{2a^3 + b^2 - c^3}{2a^3 - b + c^2} \quad 3) \frac{2a^2}{3b^2} \quad 4) \frac{a}{2 + \sqrt{3}}$$

$$5) \frac{abc + a^2 b^2}{abc - c^2} \quad 6) \sqrt{a + \frac{bc}{c}} \quad 7) \sqrt{\frac{a^2}{c} + \frac{ae}{cb} - \frac{b^3 c^2}{e}}$$

Analytische Auflösung geometrischer Aufgaben.

§ 19. In ein Dreieck ABC , von welchem die Basis $AC = a$, und die Höhe $BH = b$ gegeben sind, ein Quadrat einzuschreiben, welches mit einer Seite auf der Basis des Dreiecks ruht, während seine beiden oberen Ecken in den Seiten des Dreiecks liegen.

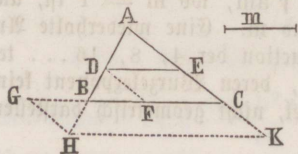


Wir betrachten die Aufgabe als gelöst, also das Quadrat DF eingeschrieben, und suchen dann zwischen den Linien a und b , und der Seite DE des Quadrats eine Beziehung auf, die sich algebraisch ausdrücken läßt. — Die gesuchte Linie DE oder KH sei gleich x . Da nun $DE \parallel AC$, so ist $AC:DE = BH:BK$, oder $a:x = b:b-x$,

$$\text{folglich } bx = ab - ax, \text{ also } x = \frac{ab}{a+b}.$$

Zur Construction dieser Formel trage man auf die Verlängerung von AC die Linie $HL = AC = a$, und $LM = BH = b$, ziehe MB und aus L die Linie $LK \parallel MB$, wodurch man auf BH den Punkt K erhält, durch welchen die, das Quadrat bestimmende, Linie parallel mit AC gezogen werden muß; denn es ist $HM:HL = BH:KH$, oder $a+b:a = b:KH$, folglich $KH = \frac{ab}{a+b} = x$.

§ 20. In der Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt von solcher Lage zu finden, daß die durch ihn zur Seite BC parallel gezogene Linie DE einer gegebenen Geraden m gleich sei.



Sieht man die Aufgabe als gelöst, und D als den gefundenen Punkt an, setzt man ferner $AB = a$, $BC = b$, und nimmt $BD = x$ für die unbekanntene Entfernung des Punktes D von B , so ist $AB:BC = AD:DE$, oder $a:b = (a-x):m$,

folglich $x = \frac{a(b-m)}{b}$. Um nun diesen Ausdruck zu construiren, mache man $CF = m$, und ziehe aus F die $FD \parallel CA$, so erhält man den gefundenen Punkt D ; denn es ist alsdann $BC:AB = BF:BD$, oder $b:a = (b-m):BD$, also $BD = \frac{a(b-m)}{b} = x$.

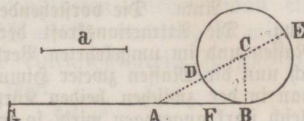
Wenn $m < b$, so ist $\frac{a(b-m)}{b}$ positiv, und D liegt zwischen A und B .

Für $m = b$ ist $\frac{a(b-m)}{b} = 0$, d. h. D fällt in B , und BC selbst leistet der Gleichung Genüge. Wenn endlich $m > b$, so ist $x = -\frac{a(b-m)}{b} = \frac{a(m-b)}{b}$, und

D liegt nicht mehr von B gegen A hin, sondern in der entgegengesetzten Richtung. Verlängert man daher AB, AC und CB, macht $CG = m$, zieht $GH \parallel AC$, so ist jetzt H der gesuchte Punkt, und die zu BC parallele Linie $HK = m$. Denn es ist $BC:AB = BG:BH$, oder $b:a = m - b: BH$, also $BH = \frac{a(m-b)}{b} = x$.

§ 21. Eine gegebene gerade Linie a so in zwei Theile zu theilen, daß das größere Stück die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Stücke sei.

Bezeichnet man das größere Stück mit x, also das kleinere mit $a - x$, so ist $a: x = x: a - x$, also $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Nun nehme man eine Linie $AB = a$, errichte in B die Senkrechte $BC = \frac{a}{2}$, beschreibe aus B mit CB einen



Kreis, ziehe aus A durch C die AE, und mache $AF = AD$, so ist $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, und $DC = \frac{a}{2}$, folglich $AF = AC - DC$

$= -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Ferner ist $AE = AC + CE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$,

$$\text{also } -AE = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

der andere Werth von x, welcher aber, weil er negativ ist, hier, wo von einer Theilung die Rede ist, keine Bedeutung hat, und nur dann gelten kann, wenn die Aufgabe allgemeiner so aufgefaßt wird: Auf der Geraden $AB = a$ einen Punkt zu finden, dessen Abstand von dem einen Endpunkte A die mittlere Proportionale ist zwischen der ganzen Linie AB und seinem Abstände von dem andern Endpunkte B. — Daß der Punkte F der so verallgemeinerten Aufgabe genügt, erhellet aus dem Vorhergehenden, und trägt man die Linie AE, weil sie negativ ist, von A aus auf die Verlängerung von AB nach links, so daß $AG = AE$ ist, so genügt auch der Punkt G der Aufgabe. Denn aus der Proportion $AE:AB = AB:AD$ folgt $AE + AB:AE = AB + AD:AB$, d. h. $BG:AG = AE$ oder $AG:AB$.

§ 22. Eine gegebene gerade Linie a in zwei Theile zu theilen, deren Quadrate sich verhalten wie m : n.

Es sei der eine Theil x, so ist der andere $a - x$, und weil $\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{m}{n}$, so ist $x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$. Wenn wir nun, um einen homogenen Ausdruck zur Construction zu haben, erst die mittlere Proportionale p zwischen m und n bestimmen, so ist $p^2 = mn$, also auch $p^2 m = m^2 n$, oder $\frac{m}{n} = \frac{m^2}{p^2}$, folglich $\frac{x}{a-x} = \frac{m}{p}$, und daher $x = \frac{am}{p + m}$, was sich leicht construiren läßt.

Dem Sinne der Aufgabe gemäß liegt der gesuchte Punkt zwischen den Endpunkten der Geraden a . Stellt man aber die Aufgabe allgemeiner: Auf einer Geraden a einen Punkt so zu bestimmen, daß die Quadrate seiner Entfernungen von den beiden Endpunkten der Geraden a sich verhalten wie $m:n$, so kann der gesuchte Punkt auch auf der Verlängerung der Geraden liegen, und bezeichnet man die kleinere Entfernung mit x , also die größere mit $a + x$, so ist $\frac{x^2}{(a+x)^2} = \frac{m}{n}$, und daher durch die nämliche Vereinfachung wie vorhin $x = \frac{am}{p-m}$.

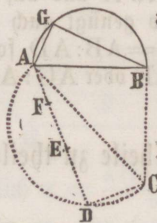
Ann. Die vorstehende Aufgabe findet in der Naturlehre eine wichtige Anwendung. Die Attractionskraft der Himmelskörper wirkt im geraden Verhältnisse ihrer Massen und im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate ihrer Entfernungen. Verhalten sich nun die Massen zweier Himmelskörper, deren Entfernung e ist, wie $m:1$, und sucht man in der zwischen beiden Körpern gezogenen Linie den Punkt, welcher von beiden gleich stark angezogen wird, so würde man, falls k und k' die Größe ihrer Attractionskraft, x und $e-x$ die Entfernungen des fraglichen Punktes von den Körpern bezeichnen, haben

$$k:k' = \frac{m}{x^2} : \frac{1}{(e-x)^2} \text{ und weil } k = k' \text{ sein soll,}$$

$$\frac{m}{x^2} = \frac{1}{(e-x)^2} \text{ oder } \frac{x^2}{(e-x)^2} = m, \text{ also } x = \frac{e\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}}.$$

Nimmt man an, daß die Masse der Erde 81 Mal größer ist als die des Mondes, so ist $x = 0,9e$, d. h. in der zwischen Erde und Mond gezogenen Linie beherrscht die Schwerkraft der Erde 9 Zehntel derselben, und die Schwerkraft des Mondes ein Zehntel.

§ 23. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, von welchem die Hypotenuse $= a$, und die Summe der beiden Katheten $= b$ gegeben sind.



Bezeichnen wir die eine Kathete mit x , so ist die andere $b-x$, also $x^2 + (b-x)^2 = a^2$, und daher $x = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{2a^2 - b^2})$. Nun nehme man eine Linie $AB = a$, und errichte in B die Senkrechte $BC = a$, so ist $AC = \sqrt{2a^2}$. Alsdann beschreibe man über AC einen Halbkreis und lege $AD = b$ als Sehne hinein, so ist $CD = \sqrt{2a^2 - b^2}$. Nimmt man endlich $DE = CD$, so ist $AE = b - \sqrt{2a^2 - b^2}$, also $\frac{1}{2} AE$ oder $AF = \frac{1}{2}(b - \sqrt{2a^2 - b^2})$ der eine Werth für x , und daher $DF = b - \frac{1}{2}(b - \sqrt{2a^2 - b^2}) = \frac{1}{2}(b + \sqrt{2a^2 - b^2})$ der andere Werth für x . Beschreibt man daher über AB einen Halbkreis, trägt $AG = AF$ als Sehne hinein, und zieht BG , so ist ABG das verlangte Dreieck.

Wenn $2a^2 = b^2$, also $\sqrt{2a^2 - b^2} = 0$ wäre, so ist $x = \frac{b}{2}$, so daß also ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, und wäre $2a^2 < b^2$, so ist die Aufgabe unmöglich.

§ 24. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 \pm ax = \pm b^2$ zu construiren, welche die allgemeinste Form der unreinen quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten darstellt.

Die vier verschiedenen in die allgemeine Formel zusammengefaßten Gleichungen geben die Auflösungen:

$$1) x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} \quad 2) x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

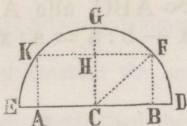
$$3) x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} \quad 4) x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

1) Um den ersten Ausdruck für x zu construiren, nehme man eine Gerade $AB = a$, errichte in B die Senkrechte $BF = b$, verbinde F mit der Mitte C von AB , und beschreibe aus C mit CF einen Halbkreis, so sind BD und $-BE$ die beiden Werthe von x . Denn, weil

$$BC = \frac{a}{2}, \quad CD = CE = CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2},$$

$$\text{so ist } BD = CD - CB = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

$$-BE = -(CB + CE) = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$



2) Die beiden Wurzeln in der zweiten Auflösung unterscheiden sich von denen der ersten nur durch die umgekehrten Vorzeichen; also ist jetzt

$$BE = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}, \quad \text{dagegen } -BD = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

3) Um für die Construction der dritten Auflösung dieselbe Figur zu benutzen, sei jetzt $ED = a$. Beschreibt man nun aus der Mitte C der ED über ED einen Halbkreis, schneidet von dem auf ED senkrechten Radius CG ein Stück $CH = b$ ab, zieht aus H die $FK \parallel DE$, und aus den Durchschnittspunkten F und K die Senkrechten FB und KA auf DE , so sind $-BD$ und $-BE$ die beiden Werthe von x . Denn, weil

$$CD = CF = CE = \frac{a}{2}, \quad CB = \sqrt{CF^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}, \quad \text{so ist}$$

$$-BD = -(CD - CB) = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2},$$

$$-BE = -(CE + CB) = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

4) In der vierten Auflösung gelten wieder dieselben Wurzeln, wie in der dritten, aber mit umgekehrten Vorzeichen; daher ist jetzt

$$BE = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}, \quad \text{dagegen } BD = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

Die Construction der Wurzeln in den beiden ersten Fällen ist immer möglich, weil $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ nie imaginär werden kann. Dagegen läßt sich die Construction in den beiden letztern Fällen nur dann bewerkstelligen, wenn $\frac{a}{2} > b$ ist.

Für $\frac{a}{2} < b$ ist die Wurzelgröße imaginär, und FK wird den Kreis weder schneiden noch berühren. Für $\frac{a}{2} = b$, ist die Wurzelgröße $= 0$, daher in 3) $x = -\frac{a}{2}$ und in 4) $x = \frac{a}{2}$. Wenn also $CH = CG$, so ist FK eine Tangente im Punkte G, und beide Durchschnittspunkte F und K fallen in G zusammen, so daß $BD = BE = CD = \frac{a}{2}$ wird.

§ 25. Von einem Halbkreise ist der Durchmesser $AB = a$ gegeben, und durch B ist auf AB eine Senkrechte errichtet; man soll in derselben einen Punkt C von solcher Lage finden, daß, wenn man AC zieht, das außerhalb des Halbkreises liegende Stück CD eine gegebene Größe b hat.

Denkt man sich den Punkt C gefunden, und zieht BD, so ist $\triangle ABD \sim \triangle ABC$, also $AD : AB = AB : AC$, oder, wenn AC mit x bezeichnet wird, $x - b : a = a : x$, folglich $x^2 - bx = a^2$, und daher

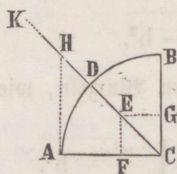
$$x = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$$

Wenn man nun auf der Senkrechten BC ein Stück $BE = \frac{1}{2}b$ nimmt, und AE zieht, so ist $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$, und verlängert man AE, bis $EF = BE = \frac{1}{2}b$ wird, so ist

$$AF = \frac{1}{2}b + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} = x.$$

Beschreibt man daher aus A mit AF einen Kreis, welcher die Senkrechte in C schneidet, so ist $AC = x$, und folglich C der gesuchte Punkt. — Da $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} > \frac{1}{2}b$, so ist der andere Werth $\frac{1}{2}b - \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$ negativ, und kann deshalb hier, bei der Bestimmung der absoluten Größe der Linie CD, keine Bedeutung haben.

§ 26. In einem Kreisquadranten ACB, dessen Radius = a gegeben ist, einen Kreis zu beschreiben, welcher die beiden Radien und den Bogen des Quadranten berührt.



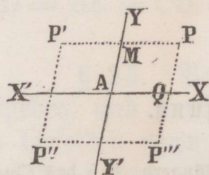
Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muß offenbar auf der Halbierungslinie CD des \sphericalangle ACB liegen. Es sei nun E der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, ferner $EF \perp AC$ und $EG \perp CB$, so ist $DE = EF = EG = FC = CG$, und wenn $DE = x$ gesetzt wird, $CE = a - x$. Weil aber $CE^2 = EF^2 + FC^2 = 2 \cdot EF^2$, oder $(a - x)^2 = 2x^2$, so ist $x^2 + 2ax = a^2$, folglich $x = -a \pm \sqrt{2a^2}$. — Man errichte jetzt aus A auf AC die Senkrechte AH, welche die verlängerte CD in H schneidet, so ist offenbar $AC = AH = a$, und $CH = \sqrt{AC^2 + AH^2} = \sqrt{2a^2}$. Da nun $DH = CH - CD = \sqrt{2a^2} - a$ ist, so braucht man bloß $DE = DH$ zu nehmen, um den Punkt E zu erhalten. — Schneidet man ferner auf der Verlängerung von CH ein Stück

$DK = CH + CD$ ab (wobei wir uns den Punkt K weiter fortgerückt denken, als die Figur zeigt), so ist DK als negativ zu betrachten, indem der positive Werth von x , nämlich DE , von D aus rechts, dagegen DK in entgegengesetzter Richtung abgetragen worden; folglich ist $DK = -(V2a^2 + a) = -a - V2a^2$ der andere Werth von x , und K der Mittelpunkt eines Kreises, welcher mit DK beschrieben, ebenfalls die beiden Radien und den Bogen des Quadranten, letztern aber außerhalb berührt.

§ 27. Aufgaben zur eigenen Auflösung.

- 1) Eine gegebene Gerade um ein solches Stück zu verlängern, daß das Quadrat über demselben gleich sei dem Rechteck aus der gegebenen Linie und der verlängerten ganzen Linie.
- 2) Eine gegebene gerade Linie a so in zwei Theile zu theilen, daß das Rechteck aus beiden Theilen einem gegebenen Rechteck bc gleich sei.
- 3) Ein Rechteck zu construiren, wenn die Differenz a seiner beiden zusammenstoßenden Seiten, sowie sein Flächeninhalt b^2 gegeben sind.
- 4) Ein Quadrat zu finden, welches zu einem gegebenen Quadrat ein vorgeschriebenes Verhältniß hat.
- 5) Das arithmetische und geometrische Mittel zweier Kreise durch Kreise darzustellen.
- 6) An zwei excentrische Kreise eine Tangente zu ziehen.
- 7) Die gemeinschaftliche Grundlinie und die Höhen zweier Dreiecke sind gegeben; man soll über einer gegebenen Geraden ein Dreieck construiren, welches das geometrische Mittel zwischen jenen beiden Dreiecken sei.
- 8) Von einem rechth. Dreieck ist die Hypotenuse und das zu derselben gehörige Höhenperpendikel gegeben; man soll die Länge der Katheten bestimmen und das Dreieck construiren.
- 9) Ein Dreieck, dessen Basis b und dessen Höhe c gegeben sind, durch eine der Basis parallele Linie in zwei Theile zu theilen, die sich verhalten wie $m : n$.
- 10) Ein Rechteck zu construiren, das einem gegebenen Rechteck ähnlich, aber nur halb so groß sei als dieses.
- 11) Es ist ein Kreis gegeben und ein Punkt außerhalb desselben; man soll aus diesem Punkte eine Secante so ziehen, daß das innerhalb des Kreises liegende Stück derselben eine vorgeschriebene Größe hat.
- 12) Es sind zwei Punkte außerhalb einer geraden Linie gegeben; man soll auf dieser den Punkt bestimmen, welcher von jenen beiden Punkten gleich weit entfernt ist.
- 13) Innerhalb eines gegebenen Dreiecks den Punkt zu finden, in welchem die gemeinschaftliche Spitze der drei einander gleichen Dreiecke liegt, die über den Seiten des Dreiecks beschrieben werden.
- 14) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck einzuschreiben, welches einen gegebenen Flächeninhalt hat.
- 15) Aus dem Radius eines Kreises die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n ecks zu finden.

Von der Methode der Coordinaten.



§ 28. Um die Lage eines oder mehrerer Punkte in einer Ebene zu bestimmen, ist ein fester Standpunkt erforderlich, von welchem man bei der Bestimmung der Punkte ausgeht, oder in Beziehung auf welchen die Lage derselben eben eine bestimmte wird. Um daher einen solchen Standpunkt zu erhalten, nimmt man zwei beliebige sich schneidende gerade Linien XX' und YY' , die Coordinatenachsen genannt, an, welche nach allen Seiten in's Unendliche fortgehend, die Ebene, in welcher sie liegen, in vier unendliche Räume oder Regionen theilen, die man in der Reihenfolge XAY , YAX' , $X'AY'$, $Y'AX$ als die erste, zweite, dritte und vierte Region zu bezeichnen pflegt. Soll nun die Lage irgend eines Punktes P in der Ebene der Axen angegeben werden, so zieht man aus P zwei Linien mit den Axen parallel, nämlich $PQ \parallel YY'$ und $PM \parallel XX'$, und wenn jetzt die Größe der Abschnitte AQ und AM auf den Axen bekannt ist, so kennt man auch die Lage des Punktes P , indem man bloß durch Q und M zwei Parallele mit den Axen zu ziehen braucht, deren Durchschnittspunkt der zu bestimmende Punkt sein wird.

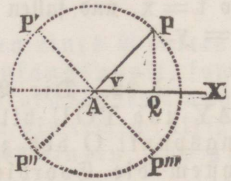
Die beiden, den Punkt P bestimmenden Geraden AQ und AM nennt man die Coordinaten des Punktes P , und zwar AQ die Abscisse, und AM die Ordinate. Der Durchschnittspunkt A der beiden Axen wird der Anfangspunkt der Coordinaten genannt. Die Axe XX' , auf welcher die Abscissen vom Anfangspunkte aus genommen werden, heißt die Abscissenaxe, die andere Axe YY' dagegen die Ordinateaxe, und der von beiden Axen in der ersten Region gebildete Winkel XAY der Coordinatenwinkel. Je nachdem dieser Winkel ein rechter oder schiefes ist, erhält man ein rechtwinkliges oder ein schiefwinkliges Coordinatensystem. Beide Systeme bezeichnet man mit dem gemeinsamen Namen der Parallelencoordinaten. Wir werden im Folgenden meistens das rechtwinklige System anwenden, und unter den Coordinaten eines Punktes immer rechtwinklige verstehen, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird.

§ 29. So lange aber nur die absolute Größe der Coordinaten AQ und AM angegeben wird, bleibt der Punkt P noch gewissermaßen unbestimmt, da beide Abschnitte auf entgegengesetzten Seiten des Anfangspunktes liegen können, und mithin dem nämlichen Coordinatenpaare eigentlich vier verschiedene Lagen P, P', P'', P''' desselben Punktes entsprechen. Man betrachtet daher alle auf der Axe XX' rechts von A liegenden Abscissen als positiv, also die links von A liegenden als negativ, und ebenso alle auf der Axe YY' oberhalb A liegenden Ordinaten als positiv, folglich die unterhalb A liegenden als negativ, wie

man auch die beiden Seiten jeder der beiden Axen selbst vom Punkte A aus als die positive und negative Axe zu bezeichnen pflegt. Demnach haben alle Punkte in der ersten Region positive Coordinaten, in der zweiten aber negative Abscissen und positive Ordinaten, in der dritten negative Coordinaten, und endlich in der vierten positive Abscissen und negative Ordinaten, für welchen Zeichenwechsel wir in der Trigonometrie bei den Vorzeichen des Cosinus und Sinus in den vier Quadranten des Kreises etwas vollkommen Analoges finden.

Denkt man sich nun durch irgend eine Einheit die Coordinaten eines beliebigen Punktes gemessen, so ist dieser durch die mit ihren Vorzeichen versehenen Zahlenwerthe derselben vollständig bestimmt, wobei man gewöhnlich die Abscisse allgemein durch x , und die Ordinate durch y vorstellt, so daß man z. B. unter der Bezeichnung „Punkt (x, y) “ denjenigen Punkt zu verstehen hat, dessen Abscisse den Werth $+x$, und dessen Ordinate den Werth $+y$ hat, der also in der ersten Region liegt. Ebenso bedeutet $(5, -3)$ den Punkt, dessen Abscisse $= 5$ Einheiten, und dessen Ordinate $= -3$ Einheiten ist, welcher folglich in der vierten Region liegt. Für alle in der Abscissenaxe liegenden Punkte ist offenbar $y = 0$, und für sämtliche Punkte der Ordinatenaxe $x = 0$. Daher bezeichnen die Symbole $(x, 0)$, $(0, -y)$, $(0, 0)$ diejenigen Punkte, welche der Reihe nach auf der positiven Abscissenaxe, auf der negativen Ordinatenaxe, und im Anfang A der Coordinaten liegen.

§ 30. Eine andere Methode zur Bestimmung eines Punktes P besteht darin, daß ein fester Punkt A, welchen man den Pol nennt, und eine von demselben ausgehende feste Gerade AX, die Polaraxe, angenommen werden, und dann die Lage des Punktes P, durch seine Entfernung AP von dem Pole, welche Leitstrahl oder Radius vector heißt, und durch den zwischen Polaraxe und Leitstrahl liegenden Winkel v , welchen man Polarwinkel nennt, bestimmt wird. Die beiden Größen, der Leitstrahl und der Polarwinkel werden mit dem Namen Polarcoordinaten des Punktes P bezeichnet. Zieht man $PQ \perp AX$, so ist $AQ = AP \cdot \cos v$, und $PQ = AP \cdot \sin v$, so daß $AP \cdot \cos v$ und $AP \cdot \sin v$ die Stelle der Abscisse und der Ordinate rechtwinkliger Coordinaten vertreten.



Wenn mit AP aus A ein Kreis beschrieben wird, so erhellet sogleich, daß der Punkt P, ohne daß sich die absolute Größe seiner Polarcoordinaten ändert, an vier verschiedenen Stellen, oder in allen vier Quadranten liegen könne. Zur Beseitigung einer solchen Unbestimmtheit nimmt man daher immer an, daß der Polarwinkel nur mit der positiven Polaraxe AX gebildet, und nach einerlei Richtung hin bis 360° fortgezählt werde, woraus folgt, daß der Leitstrahl und der Winkel unter allen Umständen als positive Größen anzusehen sind. Liegt der Punkt P in der Polaraxe selbst, so ist $v = 0$, und liegt er im Pole A, so ist $v = 0$ und $AP = 0$.

§ 31. Oft erscheint es zweckmäßig, die Coordinatenaxen mit anderen, für gewisse analytische Untersuchungen oder Aufgaben bequemer liegenden zu vertauschen, d. h. eine Coordinaten=Verwandlung vorzunehmen, wobei natürlich

die Lage der Axen des neuen Systems zu denen des alten angegeben sein muß. Wir wollen solche Transformationen in einigen Aufgaben behandeln.

Die Axen zweier rechtwinkligen Systeme XAY und TOU sind einander parallel, und der Anfangspunkt O des zweiten Systems hat in Bezug auf das erste System die Coordinaten a und b ; man soll aus den Coordinaten $AQ = x$, $PQ = y$ eines Punktes P im ersten System, die Coordinaten $OR = t$, $PR = u$ desselben Punktes im zweiten System finden.

Da $OR = AQ - a$, und $PR = PQ - b$, so hat man die Formeln

$$t = x - a \text{ und } u = y - b.$$

Läge der Punkt O in O' , also in der zweiten Region, so wäre a negativ, und mithin wie vorhin $t = x - (-a) = x + a$, und würde O in der dritten Region etwa in O'' liegen, so wären a und b negativ, und daher $t = x - (-a) = x + a$, und $u = y - (-b) =$

$y + b$. Wenn ferner P zwischen beiden Ordinatenaxen in P' liegen würde, so wäre t in Bezug auf das neue System negativ, und $-t = a - x$, also wiederum $t = x - a$.

Wenn die Ordinatenaxe beider Systeme in einander liegen, so ist $a = 0$, also $t = x$, und fallen die Abscissenaxen zusammen, so ist $b = 0$, und daher $u = y$.

§ 32. Die Abscissenaxen zweier rechtwinkligen Systeme XAY und TOU bilden mit einander den Winkel v , und der Anfangspunkt O des zweiten Systems hat in Bezug auf das erste System die Coordinaten a und b ; man soll die Coordinaten $AQ = x$, $PQ = y$ eines Punktes P im ersten System durch die Coordinaten $OR = t$, $PR = u$ desselben Punktes im zweiten System ausdrücken und umgekehrt.

Zieht man $RM \perp PQ$, $RS \perp AX$, $ON \parallel AX$, so ist $\sphericalangle NOT = v = \sphericalangle QPR$, und $AQ = a + ON - MR = a + OR \cos v - PR \sin v$, also

$$x = a + t \cos v - u \sin v \quad (1)$$

Ferner ist $PQ = b + NR + MP = b + OR \sin v + PR \cos v$, also

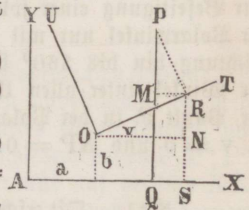
$$y = b + t \sin v + u \cos v \quad (2)$$

Wenn man nun aus (1) und (2) erst u , und dann t eliminiert, so findet man

$$t = (x - a) \cos v = (y - b) \sin v \quad (3)$$

$$u = (y - b) \cos v - (x - a) \sin v \quad (4)$$

Für den Fall, wo die Anfangspunkte A und O beider Systeme in einander liegen, ihre Abscissenaxen aber wie vorhin den $\sphericalangle v$ bilden, ist $a = 0$ und $b = 0$, so daß die voranstehenden Formeln übergehen in



$$(5) \quad x = t \cos v - u \sin v \quad \text{und} \quad y = t \sin v + u \cos v \quad (6)$$

$$(7) \quad t = x \cos v + x \sin v \quad \text{und} \quad u = y \cos v - x \sin v \quad (8).$$

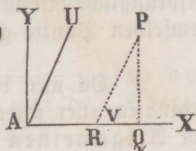
§ 33. Die Anfangspunkte sowol als die Abscissenagen zweier Systeme, eines rechtwinkligen XAY und eines schiefwinkligen XAU , liegen in einander, und die Ordinatengage des zweiten Systems bildet mit der Abscissenage des ersten einen Winkel $XAU = v$; man soll die Coordinaten $AQ = x$, $PQ = y$ eines Punktes P im ersten System durch die Coordinaten $AR = t$, $PR = u$ desselben Punktes im zweiten System ausdrücken und umgekehrt.

Da $AQ = AR + RQ = AR + PR \cos v$, $PQ = PR \sin v$, so ist

$$(1) \quad x = t + u \cos v \quad \text{und} \quad y = u \sin v \quad (2)$$

Durch Elimination der Größe u aus (1) und (2) und durch Umformung der Gl. (2) erhält man

$$(3) \quad t = x - \frac{y \cos v}{\sin v} \quad \text{und} \quad u = \frac{y}{\sin v} \quad (4)$$



Man überzeugt sich leicht, daß diese Formeln immer gelten, wenn auch der Winkel v stumpf ist, und der Punkt P irgend welche andere Lage einnimmt.

§ 34. (Fig. § 30). Die Polarcoordinaten eines Punktes P seien v und $AP = r$, und der Pol werde zum Anfangspunkt, sowie die Polaraxe zur Abscissenage eines rechtwinkligen Systems angenommen; man soll aus den Polarcoordinaten die rechtwinkligen Coordinaten $AQ = x$, $PQ = y$ desselben Punktes finden, und umgekehrt.

Es ergeben sich hier unmittelbar die Formeln:

$$(1) \quad x = r \cos v \quad \text{und} \quad y = r \sin v \quad (2)$$

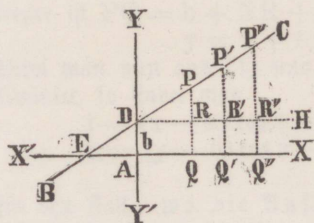
$$(3) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} v = \frac{y}{x} \quad (4)$$

Die Gleichung der geraden Linie.

§ 35. Jede gerade oder krumme Linie läßt sich als eine stetige Folge von Punkten betrachten, die man durch ihre Coordinaten auf ein beliebiges Axensystem beziehen kann. Soll nun überhaupt eine Linie sich einer mathematischen Untersuchung und Betrachtung unterwerfen lassen, so darf sie nicht bloß ein ganz willkürlicher, regelloser Zug sein, sondern es muß in der Richtung, in welcher ihre Punkte auf einander folgen, ein bestimmtes, für die ganze Ausdehnung der Linie geltendes Gesetz sich zu erkennen geben. Solche gesetzmäßige Linien sind unter andern die gerade Linie und die Kreislinie, indem der durch seine stetige Bewegung die Linie beschreibende Punkt bei der ersten fortwährend die ursprüngliche Richtung beibehält, bei der andern dagegen immer von einem und demselben Punkte gleich weit entfernt bleibt.

Da nun das Bildungsgesetz einer Linie sich auch jedesmal in den Coordinaten aller ihrer Punkte offenbaren muß, so sucht die analytische Geometrie im Allgemeinen den Zusammenhang zwischen der Abscisse und der Ordinate jedes Punktes der Linie zu erforschen und in einer Gleichung auszusprechen, welche, umgekehrt, ganz allgemein das Gesetz angiebt, nach welchem sich aus jeder beliebigen Abscisse die zugehörige Ordinate finden läßt, so daß mithin durch einen einzigen algebraischen Ausdruck die Linie in ihrer ganzen Ausdehnung genau charakterisirt und bestimmt wird. Ein solches allgemeines, algebraisch ausgedrücktes Gesetz zwischen den Coordinaten eines jeden Punktes einer geraden oder krummen Linie, heißt ihre Gleichung, sowie andererseits eine Linie, welche alle die Punkte enthält, deren Coordinatenwerthe einer Gleichung genügen, der geometrische Ort der letztern genannt wird. Was insbesondere die gerade Linie betrifft, so müssen die Coordinatenwerthe aller ihrer Punkte ihre Gleichung identisch machen, und umgekehrt alle Punkte, welche dieser Bedingung Genüge leisten, in einer geraden Linie liegen.

§ 36. Man soll die Gleichung der geraden Linie finden.



Es sei das Stück AD, welches eine gerade Linie BC von der Ordinatnaxe abschneidet, gleich b , und der von ihr mit der Abscissenaxe gebildete Winkel $CEX = w$. Zieht man nun aus beliebigen Punkten $P, P', P'' \dots$ der Geraden die Ordinaten $PQ, P'Q', P''Q'' \dots$, so sind $AQ, AQ', AQ'' \dots$ die entsprechenden Abscissen dieser Punkte, und ist DH parallel AX gezogen, und mithin auch $\sphericalangle CDH = w$, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke, daß

$$\frac{PR}{DR} = \frac{P'R'}{DR'} = \frac{P''R''}{DR''} \dots$$

Das Verhältniß $\frac{PR}{DR}$, welches die Katheten aller Dreiecke DPR, DP'R'... zu einander haben, und das offenbar für die ganze Ausdehnung der unbegrenzt gedachten Linie BC beständig bleibt, ist die trigonometrische Tangente des Winkels w , und bezeichnet man $\frac{PR}{DR}$ oder $\operatorname{tg} w$ der Kürze wegen mit a , so giebt jene Reihe

der gleichen Verhältnisse folgende Gleichungen:

$$PR = a \cdot DR, \quad P'R' = a \cdot DR', \quad P''R'' = a \cdot DR'' \dots \text{ oder}$$

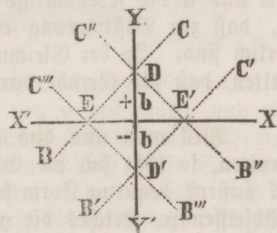
$$PQ - b = a \cdot AQ, \quad P'Q' - b = a \cdot AQ', \quad P''Q'' - b = a \cdot AQ'' \dots$$

d. h. man erhält die um b verminderte Ordinate eines jeden Punktes der Geraden, wenn man die Abscisse desselben mit der Tangente des Winkels w multiplicirt. Alle diese Gleichungen lassen sich aber in eine einzige zusammenfassen. Denn bezeichnet man überhaupt die Coordinaten eines Punktes der Linie BC durch x und y , auf welchen Punkt sich auch x und y beziehen mögen, so ist immer $y - b = ax$, oder

$$y = ax + b.$$

Dies ist also die allgemeine Gleichung der geraden Linie, welche von der Ordinatenahe das Stück b abschneidet, und mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen Tangente a ist.

Eine gerade Linie kann im Allgemeinen die vier verschiedenen, in der nebenstehenden Figur dargestellten Lagen im Axensystem haben, wobei aber unter dem Winkel w zwischen der Geraden und der Abscissenaxe immer derjenige zu verstehen ist, welcher oberhalb der Abscissenaxe liegt und mit seiner Winkelöffnung nach der positiven Seite dieser Axe gerichtet ist, wie die Winkel CEX, C'E'X, C''E''X, C'''E'''X. Je nachdem nun der Winkel w spitz oder stumpf ist, wird seine Tangente a positiv oder negativ, und in jedem dieser beiden Fälle kann die Gerade entweder die positive oder die negative Ordinatenahe schneiden, woraus vier verschiedene Zeichenwechsel für die Gleichung der Geraden hervorgehen, die sich in einen einzigen Ausdruck $y = \pm ax \pm b$ zusammenfassen lassen.



§ 37. Wäre für eine gewisse gerade Linie das Ordinatienstück $b = 1$, und $w = 63^\circ 26' 5,8''$, also $a = 2$, so hätte man als Gleichung dieser Geraden $y = 2x + 1$, welche, wenn $x = 0, 1, 2, 3 \dots$ gesetzt wird, entsprechend $y = 1, 3, 5, 7 \dots$ giebt, und würde man je zwei zusammengehörende Coordinaten auftragen, so erhielte man eine beliebige Anzahl von Punkten der geraden Linie. Nimmt man für x negative Werthe, z. B. $x = -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2 \dots$, so erhält man $y = \frac{1}{2}, 0, -1, -3 \dots$, und könnte, auf AX' fortgehend, alle Punkte des unterhalb der Abscissenaxe liegenden Theils der unbegrenzten Geraden finden.

§ 38. Wenn in der allgemeinen Gleichung $y = ax + b$ der geraden Linie $b = 0$ ist, so erhält man

$$y = ax$$

als Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen Tangente a ist.

Hier ist a positiv oder negativ, je nachdem der Winkel w spitz oder stumpf ist. Durchschneidet z. B. eine Gerade die Abscissenaxe im Anfangspunkt unter einem Winkel von $71^{\circ} 33' 54,18''$, so ist dessen Tangente gleich 3, folglich die Gleichung dieser Geraden $y = 3x$. Für positive Abscissenwerthe, z. B. $x = 1, 2, 3 \dots$ erhält man $y = 3, 6, 9 \dots$, also positive Ordinaten, und durch wirkliches Auftragen dieser Coordinatenpaare ließe sich eine beliebige Anzahl von Punkten des in der ersten Region liegenden Theils der geraden Linie finden. Für negative Abscissenwerthe, z. B. $x = -1, -2 \dots$ wäre $y = -3, -6 \dots$, woraus man die Punkte der Geraden in der dritten Region bestimmen könnte. Wenn dagegen $w = 108^{\circ} 26' 5,82''$, also $a = -3$ ist, so findet die Gleichung $y = -3x$ statt, welche für $x = \pm 1, \pm 2 \dots$ giebt $y = \mp 3, \mp 6 \dots$, so daß also die positiven Abscissen nebst den entsprechenden negativen Ordinaten von der geraden Linie Punkte in der vierten Region, hingegen die negativen Abscissen mit ihren positiven Ordinaten Punkte in der zweiten Region geben. — Zur Construction der beiden Geraden $y = \pm 3x$ ist das Coordinatenpaar $x = 1, y = \pm 3$ am bequemsten, welches aufgetragen, den Punkt angiebt, durch welchen man die den Anfangspunkt durchschneidende Gerade zu legen hat.

§ 39. Die Gleichung $y = ax + b$, in welcher die besondern Werthe von a und b die jedesmalige Gerade von allen andern Geraden unterscheiden, zeigt, daß zur Bestimmung einer geraden Linie immer zwei Bedingungen erforderlich sind. In der Gleichung $y = ax$ ist die eine dieser Bedingungen darin enthalten, daß die Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

Will man nun aus gegebenen Werthen für a und b die gerade Linie construiren, so läßt sich die Gleichung $y = ax + b$ auf eine andere, für diesen Zweck äußerst bequeme Form bringen. Bezeichnet man nämlich mit c das Stück der Abscissenaxe, welches die gerade Linie von ihr abschneidet, so ist (Fig. 2 in § 36) $-\frac{b}{c} = a$, wo das negative Zeichen steht, weil bei jeder möglichen Lage der Geraden entweder nur eine von den Größen a, b, c , oder alle drei zugleich negativ sind. Setzt man also $-\frac{b}{c}$ statt a in die Gleichung $y = ax + b$, so erscheint $y = -\frac{bx}{c} + b$, oder

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1,$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die von der Ordinate- und Abscissenaxe die Stücke b und c abschneidet.

Wenn eine Linie von der Ordinate-axe ein Stück $= 4$ Einheiten abschneidet, und mit der Abscissenaxe einen Winkel von $63^{\circ} 26' 5,8''$ bildet, so ist ihre Gleichung $y = 2x + 4$, oder $\frac{y}{4} - \frac{x}{2} = 1$. Zur Construction schneide man daher von der positiven Ordinate-axe ein Stück $= 4$, und von der negativen Abscissenaxe ein Stück $= 2$ ab, und lege durch diese Durchschnittspunkte eine Gerade. — Durchschneidet ferner eine Gerade die positive Ordinate- und Abscissenaxe in den Entfernungen 5 und $\frac{5}{2}$, so ist ihre Gleichung $\frac{y}{5} + \frac{2x}{5} = 1$,

ober $y = -2x + 5$. Der Winkel w beträgt $116^\circ 33' 54,2''$, weil seine Tangente $= -2$ ist.

§ 40. Wird in der Gleichung $y = ax + b$ der Coefficient $a = 0$, so ist $y = b$ die Gleichung einer mit der Abscissenaxe parallelen Linie, welche sich in dem Abstände b oberhalb oder unterhalb dieser Axe erstreckt, je nachdem b einen positiven oder negativen Werth hat; denn wie groß man auch x annimmt, so ist doch immer $y = b$. Wäre zugleich $b = 0$, so würde $y = 0$ die Gleichung einer Geraden sein, welche mit der Abscissenaxe zusammenfällt.

Bezeichnen wir ferner das durch die gerade Linie auf der Abscissenaxe abgeschnittene Stück mit c , so ist (§ 39) $-\frac{b}{c} = a$, oder $b = -ac$, so daß die Gleichung $y = ax + b$ in $y = ax - ac$ oder $x = \frac{y}{a} + c$ übergeht. Wird nun der Winkel zwischen der Geraden und der Abscissenaxe gleich 90° , also dessen Tangente $a = \infty$, so ist $x = \frac{y}{\infty} + c$, d. h. $x = c$ die Gleichung einer mit der Ordinatenahe parallelen Linie in dem Abstände c , denn für jeden Werth von y bleibt $x = c$. Wird auch $c = 0$, so ist $x = 0$ die Gleichung einer mit der Ordinatenahe zusammenfallenden Linie.

§ 41. Aus einer unbestimmten Gleichung allein, z. B. $y = ax + b$, läßt sich bekanntlich weder der Werth von x , noch von y bestimmen, und es ist leicht einzusehen, daß die allgemeine Gleichung einer Linie stets eine unbestimmte sein muß. Denn eine solche läßt für x und y unendlich viele Werthe zu, und giebt damit eine unendliche Menge von Punkten, die dadurch, daß man der Abscisse nach und nach wenig von einander verschiedene Werthe beilegt, beliebig nahe an einander gefunden werden können, woraus die Möglichkeit der wirklichen Construction einer beliebigen Linie deutlich hervorgeht.

Ferner enthält die Gleichung $y = ax + b$ zwei verschiedene Arten von Größen, indem x und y für jeden dieser Gleichung entsprechenden Punkt andere Werthe annehmen, während a und b für alle Punkte einer und derselben Linie die nämlichen Werthe behalten. — Man nennt überhaupt Größen, die ohne ihre Bedeutung zu ändern, einer steten Zunahme oder Abnahme fähig sind, veränderliche (variable) und bezeichnet sie gewöhnlich durch ... x, y, z , während solche Größen, die immer den nämlichen Werth behalten, wie auch die mit ihnen in Verbindung stehenden veränderlichen Größen zunehmen oder abnehmen mögen, beständige (constante) genannt, und meist durch a, b, c .. bezeichnet werden. In einem Kreise z. B. ist der Radius eine beständige, dagegen eine Sehne eine veränderliche Größe.

§ 42. Alle Linien werden nach dem jedesmaligen Grade ihrer Gleichungen in verschiedene Ordnungen eingetheilt. Man nennt eine Linie von der 1, 2, 3...ten Ordnung, je nachdem ihre Gleichung vom 1, 2, 3...ten Grade ist. — Die gerade Linie ist demnach eine Linie der ersten Ordnung, aber auch jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen

Größen x und y stellt irgend eine gerade Linie vor, d. h. es giebt immer eine gerade Linie, von deren sämtlichen Punkten die Coordinatenwerthe statt x und y gesetzt, der Gleichung genügen, und umgekehrt: alle dieser Gleichung genügenden Coordinatenwerthe gehören den Punkten der geraden Linie an. Es läßt sich nämlich die allgemeinste Form einer solchen Gleichung, $Ay + Bx + C = 0$, worin A, B, C alle möglichen positiven oder negativen Coefficienten oder selbst Null sein können, immer auf den Ausdruck der Gleichung der geraden Linie zurückführen. Denn durch Division mit A erhält man $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$,

und setzt man der Einfachheit wegen $-\frac{B}{A} = a$ und $-\frac{C}{A} = b$, so ist $y = ax + b$, in welcher Form man die Gleichung der geraden Linie erkennt.

§ 43. Man soll die Gleichung der geraden Linie finden, welche durch zwei gegebene Punkte (x', y') und (x'', y'') hindurchgeht.

Da $y = ax + b$ die Gleichung ist für alle möglichen geraden Linien, so muß sie auch für diejenige Gerade gelten, welche durch jene Punkte hindurchgeht. Setzt man also die Coordinatenwerthe x', y' und x'', y'' nach einander für x und y , so erhält man $y' = ax' + b$ und $y'' = ax'' + b$, aus welchen beiden Gleichungen man findet

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \text{ und } b = y' - \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot x'.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gl. $y = ax + b$ giebt

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \text{ oder } y = \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot x + \frac{x'y' - x''y'}{x' - x''}.$$

Die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte $(-1, +2)$ und $(-3, +4)$ geht, ist $y = -x + 1$.

§ 44. Man soll die Gleichung der geraden Linie finden, welche durch den Punkt (x', y') geht, und der durch die Gleichung $y = a'x + b'$ gegebenen Geraden parallel ist.

Damit die Gleichung für alle möglichen Geraden, nämlich $y = ax + b \dots (1)$ insbesondere diejenige Linie vorstelle, welche durch den vorgeschriebenen Punkt der gegebenen Linie parallel läuft, müssen bloß die Größen a und b solche Werthe erhalten, welche diesen Bedingungen entsprechen. Da nun die Linie durch den Punkt (x', y') gehen soll, so setze man x', y' statt x, y in die Gl. (1), wodurch die Gleichung $y' = ax' + b$ entsteht, aus welcher $b = y' - ax'$ folgt. Substituirt man diesen Werth für b in die Gl. (1), so erhält man $y = ax + y' - ax'$ oder

$$y - y' = a(x - x') \quad (2)$$

als die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt (x', y') geht. Weil ferner diese Linie mit der Linie $y = a'x + b'$ parallel sein soll, und daher beide Linien einen gleich großen Winkel mit der Abscissenaxe

bilden müssen, so hat man noch in die Gl. (2) a' für a zu setzen, wodurch man erhält

$$y - y' = a' (x - x') \quad (3).$$

Die Gleichung einer durch den Punkt (4,5) mit der Linie $y = 3x + 2$ parallel laufenden Geraden ist $y = 3x - 7$.

§ 45. Es sind zwei gerade Linien durch ihre Gleichungen $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ gegeben; man soll die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.

Für den Durchschnittspunkt müssen die Coordinaten x und y in beiden Gleichungen dieselben Werthe haben. Bestimmt man daher aus beiden Gleichungen x und y , so findet man

$$x = \frac{b - b'}{a - a'} \quad \text{und} \quad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

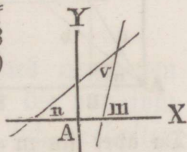
Wenn beide Linien mit der Abscissenaxe gleiche Winkel bilden, also auch $a = a'$, und daher $a - a' = 0$ ist, so ist $x = \frac{b' - b}{0} = \infty$, und $y = \frac{ab' - a'b}{0} = \infty$. In diesem Falle sind aber auch die Linien parallel, deren Durchschnittspunkt man sich unendlich weit entfernt vorstellen kann.

Der Durchschnittspunkt der Linien $y = 3x + 1$ und $y = x - 2$ hat die Coordinaten $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{7}{2}$.

§ 46. Es sind zwei gerade Linien durch ihre Gleichungen $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ gegeben; man soll den Winkel v finden, welchen sie mit einander bilden.

Es seien m und n die Winkel, welche von den gegebenen Linien mit der Abscissenaxe gebildet werden, so daß $\text{tg } m = a'$ und $\text{tg } n = a$ ist. Wenn nun $a' > a$, also auch $m > n$, so ist $v = m - n$, und daher

$$\text{tg } v = \text{tg } (m - n) = \frac{\text{tg } m - \text{tg } n}{1 + \text{tg } m \cdot \text{tg } n} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$



Da die Größen b und b' keinen Einfluß auf die Neigung der beiden Linien haben, so könnte man diese, jede parallel mit sich selbst, in den Anfangspunkt A verschoben denken, und zur Bestimmung des Winkels v auch die Gleichungen $y = ax$ und $y = a'x$ nehmen.

Wenn $1 + aa' = 0$ ist, so ist $\text{tg } v = \frac{a' - a}{0} = \infty$, folglich $v = 90^\circ$, d. h. die Linien stehen auf einander senkrecht. Aus $1 + aa' = 0$ folgt

$$a' = -\frac{1}{a},$$

d. h. für die senkrechte Lage zweier Linien zu einander muß die eine Tangente immer den reciproken Werth der andern mit entgegengesetztem Vorzeichen haben. Wenn z. B. $a = \frac{2}{3}$ ist, so muß $a' = -\frac{3}{2}$ sein. Wären dagegen die Linien parallel, so würde $a' = a$, und daher $v = 0$ sein.

Damit sich die beiden Linien $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ unter einem bestimmten Winkel, etwa 45° , dessen Tangente gleich 1 ist, schneiden, können nicht beide Coefficienten a und a' beliebige Werthe annehmen, weil aus der, in diesem Falle stattfindenden Gleichung $1 = \frac{a' - a}{1 + aa'}$, wenn z. B. a gegeben ist, folgt, daß $a' = \frac{1 + a}{1 - a}$ sein muß.

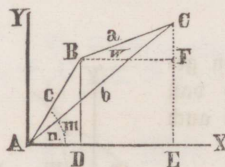
Die Tangente des Winkels v zwischen den Geraden $y = 3x - 2$ und $y = 4x + 5$ ist gleich $\frac{1}{13}$, und daher $v = 4^\circ 23' 55''$.

§ 47. Man soll die Gleichung der geraden Linie finden, welche durch den Punkt (x', y') geht, und auf der, durch die Gleichung $y + a'x + b'$ gegebenen Geraden senkrecht steht.

Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt (x', y') geht, ist (§ 44, 2) diese: $y - y' = a(x - x')$. Setzt man nun, damit die Linien auch auf einander senkrecht stehen (§ 46), $a = -\frac{1}{a'}$, so hat man

$$y - y' = -\frac{1}{a'} (x - x').$$

§ 48. Es sind drei Punkte A, B, C durch ihre Coordinaten $(0,0), (x,y), (x',y')$ gegeben; man soll den Inhalt des Dreiecks ABC finden.



Der Punkt $(0,0)$ liegt im Anfang der Axen. Bezeichnet man die drei Seiten des Dreiecks mit a, b, c , den $\sphericalangle BAX$ mit m , den $\sphericalangle CAX$ mit n , also den $\sphericalangle BAC$ mit $m - n$, so ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(m - n)$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc (\sin m \cdot \cos n - \cos m \cdot \sin n).$$

Da aber $\sin m = \frac{y}{c}$, $\cos n = \frac{x'}{b}$, $\cos m = \frac{x}{c}$, $\sin n = \frac{y'}{b}$, so ist

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \left(\frac{yx'}{cb} - \frac{xy'}{cb} \right) = \pm \frac{1}{2}(x'y - xy').$$

wo dasjenige Vorzeichen zu nehmen ist, welches den Ausdruck für den Inhalt des Dreiecks positiv macht.

§ 49. (Fig. § 48). Aus den Coordinaten (x, y) und (x', y') zweier Punkte B und C soll ihre Entfernung a , sowie der Winkel w , welchen die Verbindungslinie BC mit der Abscissenaxe bildet, gefunden werden.

Zieht man $BF \parallel AX$, so ist auch $\sphericalangle CBF = w$, und $BF = x' - x$, $CF = y' - y$, folglich

$$a = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Zur Bestimmung des Winkels w hat man

$$\operatorname{tg} w = \frac{y' - y}{x' - x} \quad \text{oder} \quad \sin w = \frac{y' - y}{a} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{x' - x}{a}.$$

Die Entfernung der Punkte $(-2, +5)$ und $(+4, -3)$ beträgt 10, und deren Verbindungslinie bildet mit der Abscissenaxe einen Winkel von $126^\circ 52' 11,65''$.

§ 50. Man soll die senkrechte Entfernung eines gegebenen Punktes (x', y') von der Geraden $y = ax + b$ finden.

Die Gl. der Geraden, welche durch den Punkt (x', y') geht, und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht steht ist (§ 47)

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Aus dieser und der gegebenen Gleichung findet man

$$x = \frac{ay' - ab + x'}{a^2 + 1} \quad \text{und} \quad y = \frac{b + a^2y' + ax'}{a^2 + 1}, \quad \text{also ist auch}$$

$$x' - x = \frac{a(ax' + b - y')}{a^2 + 1} \quad \text{und} \quad y' - y = -\frac{ax' + b - y'}{a^2 + 1}.$$

Die Substitution dieser Werthe in den Ausdruck (§ 49) $\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ giebt für die Entfernung

$$\frac{ax' + b - y'}{\pm \sqrt{a^2 + 1}},$$

wo immer dasjenige Vorzeichen zu nehmen ist, welches den ganzen Ausdruck positiv macht.

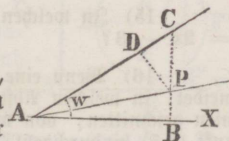
Die Entfernung des Punktes $(-2, +3)$ von der Geraden $y = x + 1$ beträgt $2\sqrt{2}$.

§ 51. Man soll innerhalb der Schenkel eines gegebenen Winkels $CAX = w$ einen Punkt P so bestimmen, daß die von ihm auf die Schenkel gefälltten Senkrechten PB und PD sich verhalten wie $1 : m$.

Man nehme AX zur Abscissenaxe und A zum Anfangspunkte, und setze $AB = x$ und $PB = y$. Da in den rechth. Dreiecken CAB und CDP der $\sphericalangle C$ gemeinschaftlich ist, so ist $\sphericalangle CPD = CAB = w$, ferner $BC = x \cdot \operatorname{tg} w$, $CP = BC - y = x \cdot \operatorname{tg} w - y$, $PD = CP \cdot \cos w = (x \operatorname{tg} w - y) \cos w$. Nach der Aufgabe ist $PB : PD = 1 : m$, folglich $my = (x \operatorname{tg} w - y) \cos w$, und weil $\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w}$ ist, so ist $my = x \sin w - y \cos w$, und daher

$$y = \frac{\sin w}{m + \cos w} \cdot x$$

Diese Gleichung giebt eine unendliche Menge von Punkten, welche alle der Aufgabe genügen, und gehört einer geraden Linie an, welche die Abscissenaxe im Anfangspunkte unter



einem Winkel schneidet, dessen Tangente $\frac{\sin w}{m + \cos w}$ ist. Wird daher diese Linie construirt, so hat jeder ihrer Punkte die verlangte Eigenschaft, d. h. die Linie ist der geometrische Ort des gesuchten Punktes.

§ 52. Aufgaben über die Gleichung der geraden Linie.

1) Die Gleichungen der beiden durch den Anfang der Coordinaten gehenden geraden Linien zu finden, welche mit der Abscissenaxe die Winkel von 45° und $108^\circ 46' 20''$ bilden.

2) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche die negative Ordinatenaxe in der Entfernung = 5 Einheiten, und die Abscissenaxe unter $132^\circ 25'$ schneidet.

3) Man construire die Gleichungen $x = -\frac{1}{3}y$, $y + 4 = \frac{1}{9}x$, $\frac{3}{2}y - 3 = x$, $y = x$. tg $153^\circ 26' 5'' 82''$.

4) Welchen Winkel bildet eine Gerade mit der Abscissenaxe, wenn sie die Abscissen- und Ordinatenaxe in den Abständen 3 und 4 durchschneidet?

5) Man soll die beiden Geraden construiren, welche von der Ordinatenaxe ein Stück = -3 abschneiden, und mit der Abscissenaxe Winkel bilden, deren Tangente = 1 und = $\sqrt{3}$ sind.

6) Eine Gerade schneidet von der negativen Abscissenaxe ein Stück = c ab, und bildet mit ihr einen $\angle = v$; man soll die Gl. der Geraden finden.

7) Eine gerade Linie durchschneidet die Abscissenaxe in der Entfernung = 3 unter einem Winkel, dessen Tangente = $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist; man soll die spitzen Winkel des von der geraden Linie mit den Axen gebildeten Dreiecks bestimmen, und die Länge des abgeschnittenen Stückes der Ordinatenaxe angeben.

8) Man construire die Gleichung $y = x \operatorname{tg} v - m \operatorname{tg} v$, für welche $v = 135^\circ$ $m = -3$ sein soll.

9) In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = -\frac{6}{7}x - 3$ die Axen?

10) Man soll die Gleichungen der beiden Geraden finden, von welchen die eine mit der Ordinatenaxe parallel die negative Abscissenaxe in dem Abstände 5 schneidet, die andere dagegen parallel mit der Abscissenaxe durch den Punkt (0,7) hindurchgeht.

11) In welchen Punkten schneidet eine, durch die Punkte (10,9) und (7,-6) gehende Gerade die Coordinatenaxen?

12) Wie groß ist der stumpfe Winkel, den eine Gerade, deren zwei Punkte die Coordinaten (3,2) und (-1,-2) haben, mit der Ordinatenaxe bildet, und wie weit sind jene beiden Punkte von einander entfernt?

13) Eine Linie schneidet die Abscissenaxe in dem Abstände 1 unter 135° ; wenn nun zwei Punkte derselben die Ordinaten 2 und 4 haben, welche Werthe haben die Abscissen dieser Punkte?

14) Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch den Punkt $(-x', y')$ geht, und mit der Abscissenaxe den Winkel v bildet.

15) In welchen Punkten durchschneiden sich die Geraden $y = 4x - 3$ und $y = 2x - 3$?

16) Wenn eine gerade Linie die Axen in den Abständen $\frac{7}{3}$ und -7 durchschneidet, in welchen Abständen werden die Axen von zwei andern, mit ihr parallelen Linien geschnitten, von welchen die eine durch den Punkt (5,4), die andere durch den Punkt (4,5) hindurchgeht?

17) Die Ordinate y' eines Punktes ist gegeben; wie groß ist die zugehörige Abscisse, deren Endpunkt in der Geraden liegt, welche durch die Punkte (m, n) und (p, q) hindurchgeht?

18) Die Gleichungen zweier Geraden seien $y = ax + 3$ und $y = 3x$; welchen Werth muß a haben, wenn beide Geraden mit einander einen Winkel von 45° bilden sollen?

19) Wenn die beiden Geraden $y = mx - 1$ und $y = x + 2$ sich in dem Punkte $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ schneiden sollen, welchen besondern Werth muß alsdann m annehmen?

20) Die eine Spitze eines Dreiecks liegt im Anfang der Axen, und die beiden andern Spitzen haben die Coordinaten $(3, 4)$ und $(6, 8)$; man bestimme den Winkel, welchen jede Seite des Dreiecks mit der Abscissenaxe bildet, ferner den Inhalt und die drei Seiten des Dreiecks.

21) Wie groß ist der Sinus des Winkels, den eine durch die Punkte $(-1, 3)$ und $(-3, 1)$ gehende Gerade mit der Abscissenaxe bildet?

22) Wenn (Fig. § 51) $PD = 2 \cdot PB$ und $\angle BAP = 19^\circ 6' 23,77''$ ist; wie groß ist der Winkel w ?

23) Es sind (Fig. § 48) zwei Punkte $B(x, y)$ und $C(x', y')$ gegeben; man soll auf der Geraden BC die Coordinaten (t, u) desjenigen Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von B und C sich verhalten wie $m : n$.

24) Die Gleichung der geraden Linie für Polarcoordinaten zu finden.

Die Gleichung der Kreislinie.

§ 53. Die Gleichung der Kreislinie zu finden.

Des Kreises Radius sei gleich r und die Coordinaten seines Mittelpunktes seien $AB = a$, $BC = b$. Wenn nun für einen beliebigen Punkt P der Kreislinie die Coordinaten $AQ = x$, $PQ = y$ sind, und der Durchmesser $DF \parallel AX$ gezogen wird, so hat man

$$CE^2 + PE^2 = CP^2, \text{ oder } (AQ - AB)^2 + (PQ - BC)^2 = CP^2, \text{ also} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

als die allgemeine Gleichung der Kreislinie, in welcher die Größen a und b positiv und negativ sein können, was davon abhängt, in welcher Region der Axen der Mittelpunkt C belegen ist.

Die Gleichung giebt, nach y aufgelöst, die Formel

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2},$$

in welcher, wie auch die Figur zeigt, niemals $x > a + r$ und $x < a - r$ sein darf, damit wirklich ein Punkt der Kreislinie erhalten werde. Ist z. B. $a = 3$, $b = 2$, $r = 1$, und setzt man $x = a - r = 2$, so giebt die Formel $y = 2$, d. h. den Punkt D , und setzt man $x = a + r = 4$, so giebt sie $y = 2$, d. h. den Punkt F . Für alle zwischenliegenden Werthe von x , z. B. 3



giebt die Formel in Folge ihres doppelten Vorzeichens zwei Werthe für die Ordinate, $y = 2 + 1 = 3$ und $y = 2 - 1 = 1$, also zwei verschiedene Punkte der Kreislinie, welche so wie etwa die Punkte P und P' liegen, nämlich der eine oberhalb, und der andere unterhalb des Durchmessers DF, aber in derselben Senkrechten auf der Ase AX. Für $x = 3\frac{1}{2}$, ist $y = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ u. s. w. Geht man aber über die Werthe $x = 2$ und $x = 4$ hinaus, und setzt z. B. $x = 1$ oder $= 5$, so ist $y = 2 \pm \sqrt{-3}$, also imaginär. Es ist klar, daß, wenn man x alle möglichen Werthe von 2 bis 4 annehmen läßt, und die zugehörigen Werthe von y berechnet und austrägt, alle Punkte einer Kreislinie, deren Radius 1 ist, richtig zum Vorschein kommen.

§ 54. Fällt die Abscissenaxe AX mit dem Durchmesser DF zusammen, und liegt A in D, in welchem Falle $b = 0$, $a = r$ ist, so verwandelt sich $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ in die Gleichung $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ oder

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

welche die Scheitelgleichung der Kreislinie genannt wird.

Aus der Umformung $y = \pm \sqrt{x(2r - x)}$ und aus der Figur selbst geht hervor, daß für negative Abscissen und für $x > 2r$ keine Punkte der Kreislinie erhalten werden, wie sich dieses durch ein bestimmtes Beispiel, etwa $r = 3$, vollkommen deutlich machen läßt, wo x nur alle möglichen Werthe von 0 bis $2r = 6$ annehmen kann.

§ 55. Wenn der Anfangspunkt A in den Mittelpunkt O des Kreises fällt, also $a = 0$ und $b = 0$ wird, so giebt die allgemeine Gl. der Kreislinie folgende Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

welche die Mittelpunktsgleichung der Kreislinie heißt.

Aus derselben folgt $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, und Formel und Figur zeigen, daß x nur alle Werthe von $-r$ bis $+r$ erhalten kann, indem für $x > \pm r$ die Ordinate y imaginär wird.

§ 56. Die allgemeine Gl. der Kreislinie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, welche drei beständige Größen a , b , r enthält, zeigt, daß zur vollkommenen Bestimmung eines Kreises drei Bedingungen erforderlich sind. In der Scheitelgleichung und Mittelpunktsgleichung sind zwei dieser Bedingungen bereits darin enthalten, daß der Kreis durch zwei bestimmte Punkte, nämlich bei jener durch $(0,0)$ und $(2r,0)$, bei dieser durch $(r,0)$ und $(-r,0)$ geht, so daß für diese beiden Fälle bloß die Bestimmung des Werthes für r zur Feststellung des Kreises ausreicht.

§ 57. Durch Auflösung der Klammern erhält man aus der allgemeinen Gl. des Kreises $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$, woraus hervorgeht, daß die Kreislinie eine Linie der zweiten Ordnung ist (§ 42).

Die allgemeinste Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ nimmt für $A = 1$, $B = 1$ (oder überhaupt $A = B$) und $C = 0$ die Form an $x^2 + y^2 + Dx + Ey = -F$, und jede Gleichung von dieser Form entspricht einer Kreislinie.

Denn addirt man auf beiden Seiten $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$, so erhält man

$$x^2 + Dx + \frac{1}{4}D^2 + y^2 + Ey + \frac{1}{4}E^2 = \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}E^2 - F, \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F),$$

und wenn man diese Gl. mit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ vergleicht, so sieht man, daß dieselbe einer Kreislinie angehört, für welche der Radius gleich $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ ist, und der Mittelpunkt die Coordinaten $a = -\frac{1}{2}D$ und $b = -\frac{1}{2}E$ hat.

§ 58. Ein Kreis, für welchen die Coordinaten des Mittelpunktes $a = 2$, $b = -1$ sind, und der Radius $r = \frac{3}{2}$ ist, hat die Gl. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{9}{4}$ oder $x^2 + y^2 - 4x + 2y = -\frac{11}{4}$.

Wäre ferner die Gl. $9x^2 + 9y^2 - 6x + 36y = -21$ zur Construction gegeben, so dividire man sie zuerst, um die Coefficienten von x^2 und y^2 auf 1 zu bringen, durch 9, also $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + 4y = -\frac{7}{3}$, und setze beiderseits die Quadrate der halben Coefficienten von x und y , also $(\frac{1}{3})^2$ und 2^2 hinzu; wodurch man erhält

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 + 4y + 4 = \frac{1}{9} + 4 - \frac{7}{3} \text{ oder } (x - \frac{1}{3})^2 + (y + 2)^2 = \frac{16}{9}.$$

Endlich beschreibe man aus dem Punkte, dessen Coordinaten $(\frac{1}{3}, -2)$ sind, mit einem Radius gleich $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ einen Kreis.

§ 59. Man soll die Gleichung der Kreislinie finden, welche durch drei gegebene, nicht in gerader Linie liegende Punkte (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') hindurchgeht.

Es kommt hier darauf an, die Größen a , b , r in der allgemeinen Gl. des Kreises, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \dots (1)$ den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen. Nimmt man nun zur Vereinfachung der Auflösung den Punkt (x''', y''') selbst als Anfang, und läßt die Abscissenaxe durch den Punkt (x', y') gehen, wodurch x''', y''', y'' gleich 0 werden, und setzt man, da der Kreis durch den Anfang der Axen geht,

$$\text{in (1) } x = 0, y = 0, \text{ so entsteht } a^2 + b^2 = r^2 \quad (2),$$

und substituirt man diesen Werth für r^2 in (1), so ergiebt sich

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \quad (3)$$

Um noch die Größen a und b so zu bestimmen, daß der Kreis auch durch die Punkte (x', y') , (x'', y'') geht, setze man in (3) für x und y erst x' , y' , dann x'' , 0 , so erhält man

$$(4) \quad x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' = 0 \text{ und } x''^2 - 2ax'' = 0 \quad (5)$$

Aus (5), (4), (2) ergibt sich nun

$$a = \frac{x''}{2}, b = \frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{2y'}, r^2 = \left(\frac{x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{2y'}\right)^2,$$

und durch Substitution dieser Werthe in (1) erhält man

$$x^2 + y^2 - xx'' - \frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{y'} \cdot y = 0. \quad (6)$$

Ein Kreis, der durch die Punkte (0,0), (1,0), (1, $\sqrt{3}$) geht, hat die Gl. $x^2 + y^2 - x - y\sqrt{3} = 0$ oder $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 1$.

§ 60. Man soll die Coordinaten der Durchschnittspunkte eines gegebenen Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ mit einer gegebenen Geraden $y = ax + b$ finden.

Da die Coordinaten der Durchschnittspunkte für beide Linien dieselben sind, so hat man bloß x und y aus beiden Gleichungen zu bestimmen. Wenn man daher den Werth von y^2 aus der zweiten Gl. in die erste substituirt, und die dadurch erhaltene Gl. nach x auflöst, ferner den so für x gefundenen Ausdruck in die zweite der gegebenen Gleichungen setzt, so findet man

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2(a^2 + 1) - b^2}}{a^2 + 1}, \quad y = \frac{b \pm a\sqrt{r^2(a^2 + 1) - b^2}}{a^2 + 1}.$$

Wegen des doppelten Vorzeichens erhält man im Allgemeinen zwei verschiedene Abscissen und Ordinaten, d. h. die gerade Linie durchschneidet den Kreis in zwei Punkten. Wenn $r^2(a^2 + 1) = b^2$ ist, so giebt es nur einen gemeinschaftlichen Punkt für beide Linien, d. h. die Gerade ist eine Tangente des Kreises. Für $r^2(a^2 + 1) < b^2$ werden x und y imaginär, d. h. beide Linien treffen einander gar nicht.

Der Kreis $y^2 + x^2 = 1$ wird von der Geraden $y = x\sqrt{3} - \sqrt{3}$ in den beiden Punkten (1,0) und ($\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$) geschnitten, von der Geraden $y = x\sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ in dem Punkte ($\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$) berührt, und von der Geraden $y = x + 2$ gar nicht erreicht.

§ 61. Ein Kreis ist durch seine Mittelpunktsgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ gegeben; man soll 1) die Gleichung der Secante, welche den Kreis in den gegebenen Punkten $M(x', y')$ und $P(x'', y'')$ schneidet, und 2) die Gleichung der Tangente für den Punkt $M(x', y')$ finden.

Die Gl. der durch (x, y') und (x'', y'') gehenden Geraden ist (§ 43)

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \quad (1)$$

Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ giebt für diese Punkte

$$(2) \quad x'^2 + y'^2 = r^2 \quad \text{und} \quad x''^2 + y''^2 = r^2 \quad (3)$$

Subtrahirt man (3) von (2), so ist

$$(x'^2 - x''^2) + (y'^2 - y''^2) = 0 \quad \text{oder} \quad (x' + x'')(x' - x'') + (y' + y'')(y' - y'') = 0,$$

$$\text{also} \quad \frac{y' - y''}{x' - x''} = - \frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Dieses in (1) substituirt, giebt als Gleichung der Secante

$$y - y' = - \frac{x' + x''}{y' + y''} (x - x') \quad (4)$$

2) Denkt man sich die Secante Ss um den Punkt M gedreht, bis P mit M zusammenfällt, so wird Ss zur Tangente Tt , und die Gl. (4) giebt, da jetzt $x'' = x'$, $y'' = y'$ ist, zur Gleichung der Tangente

$$(5) \quad y - y' = - \frac{x'}{y'} (x - x') \quad \text{oder} \quad xx' + yy' = r^2 \quad (6)$$

wo (6) dadurch entsteht, daß aus (5) folgt $xx' + yy' = x'^2 + y'^2$ und $x'^2 + y'^2 = r^2$ ist. Der Coefficient $-\frac{x'}{y'}$ ist die trigon. Tangente des von Tt mit der Abscissenaxe gebildeten Winkels T , und wird positiv, wenn entweder x' oder y' negativ ist.

§ 62. Um den Durchschnittspunkt T der Tangente mit der Abscissenaxe zu finden, setze man in (5) oder (6) $y = 0$, so ist

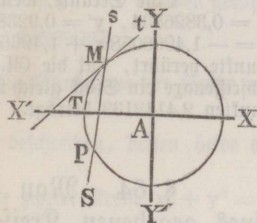
$$x = \frac{r^2}{x'} = AT.$$

§ 63. Für das Stück MT der Tangente von ihrem Berührungspunkte (x', y') bis zum Punkte $(\frac{r^2}{x'}, 0)$ ihres Durchschnittes mit der Abscissenaxe hat man (§ 49) den Ausdruck

$$\sqrt{\left(\frac{r^2}{x'} - x'\right)^2 + y'^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x'} \sqrt{(r^2 - x'^2)^2 + x'^2 y'^2}, \quad \text{und da in (2)}$$

$$r^2 - x'^2 = y'^2 \quad \text{ist,} \quad MT = \frac{y'}{x'} \sqrt{y'^2 + x'^2}, \quad \text{also}$$

$$MT = \frac{ry'}{x'}.$$



Eine Secante, welche einen Kreis, dessen Radius 1 ist, in den beiden Punkten $x' = 0,3826834$, $y' = 0,9238794$ und $x'' = 1$, $y'' = 0$ schneidet, hat die Gleichung $y = -1,4966058x + 1,4966057$. Eine Tangente, welche denselben Kreis in dem ersten Punkte berührt, hat die Gl. $y = -0,0414213x + 1,0823922$, und schneidet von der Abscissenaxe ein Stück gleich 2,613126 ab, während ihre Länge zwischen beiden Treffungspunkten 2,4142133 beträgt.

§ 64. Man soll die Coordinaten des Berührungspunktes eines gegebenen Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ mit einer Tangente finden, welche von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punkte (a, b) an denselben gezogen wird.

Wenn x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen, so ist (§ 61, 6) die Gl. der Tangente $yy' + xx' = r^2 \dots (1)$. Weil nun die Tangente durch (a, b) und der Kreis durch (x', y') geht, so hat man

$$(2) \quad by' + ax' = r^2 \quad \text{und} \quad x'^2 + y'^2 = r^2 \quad (3)$$

Wird jetzt der aus (2) hergeleitete Werth von y'^2 in (3) gesetzt, und aus der dadurch erhaltenen Gl. x' bestimmt, und darauf der gefundene Ausdruck für x' in (2) substituirt, so findet man

$$x' = \frac{ar^2 \pm br\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{a^2 + b^2}, \quad y' = \frac{br^2 \mp ar\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{a^2 + b^2},$$

wo das doppelte Vorzeichen immer auf zwei Berührungspunkte führt.

Die aus dem Punkte $(2, 0)$ an den Kreis vom Radius 1 gezogene Tangente berührt denselben im Punkte $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/4)$ oder im Punkte $(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/4)$.

§ 65. Aufgaben über die Gleichung der Kreislinie.

1) Die Gleichung des Kreises zu finden und zu construiren, dessen Radius gleich 6 ist, und dessen Mittelpunkt die Coordinaten $(2, -5)$ hat.

2) Die Gleichungen $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ und $4x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 30 = 0$ zu construiren.

3) Ein Kreis geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten und schneidet von der Abscissen- und Ordinatensaxe die Stücke -1 und $-\sqrt{3}$ ab; man soll den Kreis mit Hilfe seiner Gleichung construiren.

4) Es sind drei Punkte $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ in einem rechth. System gegeben, dessen Anfangspunkt in Bezug auf ein anderes rechth. System die Coordinaten $(-\sqrt{2}, 0)$ hat, während die beiden Abscissenaxen einen Winkel von 45° bilden; man soll die Kreislinie, welche durch die gegebenen Punkte geht, durch eine Gleichung für das zweite System ausdrücken und construiren.

5) Man soll die Lage des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ zu den drei geraden Linien $y = -x$, $y = -x - \sqrt{2}$, $y = 2$ analytisch bestimmen und geometrisch nachweisen.

6) Welche gemeinschaftlichen Punkte hat der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ mit den geraden Linien $\frac{y}{1,4966057} + x = 1$ und $y = x \cdot \text{tg } 157^\circ 30' + 1,0823922$?

7) Die Basis eines Dreiecks sei gleich $\sqrt{2}$ und der Winkel an der Spitze enthalte 45° ; man soll die Lage der Spitze bestimmen.

8) Ueber einer Linie gleich 5 Fuß ein Dreieck zu beschreiben, dessen beide andern Seiten das Verhältniß 2:3 haben.

9) Die Gleichung für die gemeinschaftliche Secante zweier Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ und $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r'^2$ zu finden.

Die Parabel.

§ 66. Die Parabel ist eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, daß jeder ihrer Punkte von einer gegebenen geraden Linie und von einem gegebenen Punkte gleich weit entfernt ist.

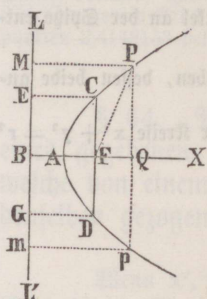
(Fig. § 68). Ist also F der gegebene Punkt und LL' die gegebene Gerade, so liegt der Punkt P in der Parabel, wenn FP der auf LL' senkrechten Linie PM gleich ist.

Der gegebene Punkt F heißt der Brennpunkt (Focus), die Linie LL' die Leit- oder Richtlinie (Directrix), und jede von dem Brennpunkte an die Parabel gezogene Gerade FP ein Leitstrahl oder Radius vector. Eine durch den Brennpunkt F senkrecht auf die Leitlinie gezogene und über den Brennpunkt hinaus verlängerte Gerade BX heißt die Ase, und ihr Durchschnittpunkt A mit der Parabel, welcher nach dem Begriffe dieser Linie von dem Brennpunkte und der Leitlinie gleich weit entfernt ist, der Scheitel der Parabel. Jede der Ase parallele Gerade wird ein Durchmesser, und ihr Durchschnittpunkt mit der Parabel der Scheitel desselben genannt. Jede gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte der Parabel mit einander verbindet, heißt eine Sehne derselben.

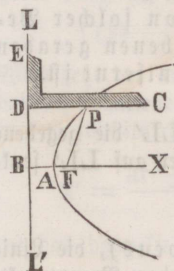
§ 67. Die durch den Brennpunkt F gehende, auf der Ase senkrechte Sehne CD wird der Parameter der Parabel genannt, und gewöhnlich durch p bezeichnet. Der Parameter ist für die Parabel ganz dasselbe, was etwa der Radius für den Kreis ist. Je größer der Parameter ist, desto schneller entfernen sich die beiden Zweige der Parabel von der Ase.

Zieht man aus C und D Senkrechte auf LL' , so ist $CF = CE = FB = DG = DF$, und $AB = AF$, folglich $AB = AF = \frac{1}{4} CD$, d. h. die Leitlinie sowohl als der Brennpunkt ist von dem Scheitel um $\frac{1}{4}$ des Parameters, also der Brennpunkt von der Leitlinie um den halben Parameter entfernt.

§ 68. Die Parabel zu beschreiben, wenn der Brennpunkt F und die Leitlinie LL' gegeben sind.



1) Man ziehe durch F auf LL' eine Senkrechte BX , und halbire BF in A , so erhält man die Ase AX und den Scheitel A der Parabel. Durch einen beliebigen Punkt Q der Ase errichte man auf dieselbe eine Senkrechte, beschreibe mit BQ aus F einen Kreis, welcher jene Senkrechte in P und p schneidet, so sind P und p zwei Punkte der Parabel. Denn zieht man PM und pm senkrecht auf LL' , so ist $FP = Fp = BQ = PM = pm$. Je mehr Punkte man auf diese Weise bestimmt, desto genauer läßt sich durch dieselben die Parabel ziehen.



2) Durch die stetige Bewegung eines Punktes wird eine Parabel beschrieben, wenn ein rechtwinkliger Winkelhaken mit dem einen Schenkel DE an der Leitlinie hingeleitet, während ein Faden, von der Länge des andern Schenkels DC mit dem einen Ende im Brennpunkte F , und mit dem andern in C befestigt, mittels eines längs dem Schenkel DC fortgeführten Zeichenstiftes stets straff gehalten wird. Die von dem Stifte beschriebene Linie ist eine Parabel, weil jeder Punkt derselben, z. B. P , offenbar von der Leitlinie und von dem Brennpunkte gleich weit absteht. Zur Beschreibung des untern Zweiges muß man den Winkelhaken umlegen.

§ 69. (Fig. § 68). Die Gleichung der Parabel zu finden, wenn die Ase AX zur Abscissenaxe und der Scheitel A zum Anfang der Coordinaten genommen wird.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Parabel seien $AQ = x$, $PQ = y$, der Parameter $CD = p$; alsdann ist (§ 67)

$FP = BQ = AQ + AB = x + \frac{1}{4}p$, $FQ = AQ - AF = x - \frac{1}{4}p$, und weil $PQ^2 = FP^2 - FQ^2$ oder $y^2 = (x + \frac{1}{4}p)^2 - (x - \frac{1}{4}p)^2$, so ist

$$y^2 = px \text{ oder } y = \sqrt{px}.$$

In dieser Gl. sind x , y veränderliche Größen, während p für alle Punkte der Parabel denselben Werth behält, und immer als positiv zu betrachten ist.

§ 70. (Fig. § 68). Aus der Gl. $y = \pm \sqrt{px}$, welche zeigt, daß die Parabel eine Linie der zweiten Ordnung ist, lassen sich die Eigenschaften der Parabel ableiten.

1) Für jeden negativen Werth von x wird y imaginär. Die Parabel liegt daher nur auf einer Seite der durch den Scheitel A gehenden Ordinatenaxe.

2) Für $x=0$ ist auch $y=0$. Für jede positive Abscisse giebt die Gleichung immer zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten, die mit den Abscissen wachsen und mit diesen unendlich groß werden, denn für $x=\infty$ wird auch $y=\pm\infty$. Die Parabel geht also vom Scheitel an zu beiden Seiten der Axe völlig auf einerlei Weise in's Unendliche fort, und kann, außer im Scheitel, die Axe nicht schneiden, indem sie sich vielmehr immer weiter auf beiden Seiten von derselben entfernt. Jede Sehne, welche auf der Axe senkrecht steht, wird von dieser halbirt.

3) Bedeuten x, y und x', y' die Coordinaten zweier beliebigen Punkte der Parabel, so ist $y^2=px$ und $y'^2=px'$, mithin $y^2:y'^2=x:x'$, d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die zugehörigen Abscissen. Da also die Ordinaten wie die Quadratwurzeln der Abscissen und mithin immer weniger zunehmen, je größer letztere werden, so biegen sich die Schenkel der Parabel beständig gegen die Axe, und nähern sich unaufhörlich dem Parallelismus mit dieser, ihre hohle Seite allenthalben der Axe zuwendend.

4) Aus $y^2=px$ folgt $x:y=y:p$, d. h. die Ordinate eines beliebigen Punktes ist die mittlere Proportionale zwischen der zugehörigen Abscisse und dem Parameter, oder der Parameter ist die dritte stetige Proportionale zur Abscisse und Ordinate eines jeden Punktes der Parabel.

5) Der Radius vector $v=PF$ irgend eines Punktes P der Parabel ist immer der um $\frac{1}{4}$ des Parameters p vermehrten Abscisse dieses Punktes gleich. Denn aus $v^2=PQ^2+FQ^2=PQ^2+(AQ-AF)^2=y^2+(x-\frac{1}{4}p)^2=px+(x-\frac{1}{4}p)^2$ folgt $v=x+\frac{1}{4}p$.

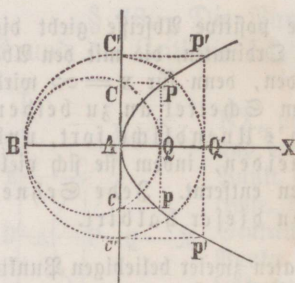
6) Für die Abscisse $AF=\frac{1}{4}p$ giebt die Gl. der Parabel als Ordinate $CF=\frac{1}{2}p$, d. h. die durch den Brennpunkt gehende Ordinate ist dem halben Parameter gleich.

§ 71. (Fig. § 68). Die Gleichung der Parabel zu finden, wenn die Axe AX zur Abscissenaxe und der Brennpunkt F zum Anfang der Coordinaten genommen wird.

Für einen beliebigen Punkt P seien die Ordinaten $FQ=x, PQ=y$. Setzt man für den Scheitel A als Anfang der Coordinaten $AQ=x'$, so ist $x'=\frac{1}{4}p+x$ (§ 67), und weil $y^2=px'$, so ist

$$y^2 = p(x + \frac{1}{4}p).$$

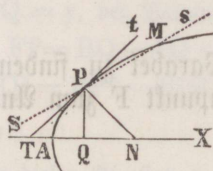
§ 72. Die Parabel zu construiren, deren Parameter $p=AB$ gegeben ist.



Die Verlängerung von BA nehme man als Aye und A als den Scheitel der Parabel an, errichte durch beliebige Punkte Q, Q'... der Aye senkrechte Linien, beschreibe über BQ, BQ'... als Durchmessern Kreise, welche die durch A auf die Aye errichtete Senkrechte in C, C'..., c, c'... schneiden, und ziehe durch diese Punkte parallel zur Aye Linien, welche die durch Q, Q'... gezogenen Senkrechten in P, P'..., p, p'... schneiden werden; so sind die letztern Punkte sämtlich Punkte der Parabel. Denn bezeichnet man eine der Senkrechten, z. B. PQ mit y, und die zugehörige Abscisse AQ mit x, so hat man, weil $AC^2 = AB \cdot AQ$ ist, $y^2 = px$, welches die Gl. der Parabel ist. Die Zeichnung der Parabel wird desto genauer ausfallen, je mehr Punkte man auf die beschriebene Weise gefunden hat.

§ 73. (Fig. § 74). Eine Tangente der Parabel ist im Allgemeinen eine gerade Linie, welche mit dieser nur einen Punkt, den Berührungspunkt, gemein hat, sonst ganz außerhalb der Parabel liegt. — Insbesondere heißt das Stück PT der Tangente vom Berührungspunkte bis zur Aye die Tangente, ferner das zwischen ihr und der Ordinate eingeschlossene Stück TQ die Subtangente, so wie die im Berührungspunkte auf die Tangente senkrecht bis zur Aye gezogene Gerade PN die Normale, endlich das zwischen dieser und der Ordinate liegende Stück NQ der Aye die Subnormale, — alle diese Linien in Bezug auf den Punkt P der Parabel genommen.

§ 74. Die Gleichung der Tangente Tt zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt P (x' , y') einer durch ihre Gleichung $y^2 = px$ bestimmten Parabel hindurchgeht.



Die Gl. der durch P und noch einen zweiten Punkt M (x'' , y'') der Parabel gehenden Geraden ist (§ 43)

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \quad (1).$$

Da P und M in der Parabel $y^2 = px$ liegen, so ist auch

$$(2) \quad y'^2 = px' \quad \text{und} \quad y''^2 = px'' \quad (3).$$

Subtrahirt man (3) von (2) und setzt $y'^2 - y''^2 = (y' + y'')(y' - y'')$, so ist $\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{p}{y' + y''}$. Dieses in (1) gesetzt, giebt als Gl. der Secante Ss

$$y - y' = \frac{p}{y' + y''} (x - x') \quad (4)$$

Läßt man jetzt durch Drehung der Secante um P den Punkt M mit P zusammenfallen, so wird $y'' = y'$, und die Gl. (4) giebt als Gleichung der Tangente Tt

$$(5) \quad y - y' = \frac{p}{2y'} (x - x') \text{ oder } yy' = \frac{p}{2} (x + x') \quad (6),$$

wo (6) dadurch entsteht, daß man (5) mit y' multiplicirt und dann $y'^2 = px'$ setzt.

§ 75. (Fig. § 74). Man soll die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale für einen gegebenen Punkt $P(x', y')$ der Parabel bestimmen.

1) Man setze in § 74, (6), um die Abscisse des Durchschnittspunktes T der Tangente mit der Abscissenaxe zu erhalten, $y = 0$, so erhält man $x = -x'$, also, wenn $PQ \perp AX$ ist, $AT = AQ$, und daher $TQ = 2 \cdot AQ$, oder

$$\text{Subtangente } TQ = 2x',$$

d. h. die Subtangente eines Punktes ist immer der doppelten Abscisse desselben gleich.

2) Für die Tangente PT giebt das rechth. Dreieck PQT

$$PT^2 = TQ^2 + PQ^2 = 4x'^2 + y'^2 = 4x'^2 + px' = x'(4x' + p), \text{ also}$$

$$\text{Tangente } PT = \sqrt{x'(4x' + p)}.$$

Da $PT^2 = x'(4x' + p) = 4x'(x' + \frac{1}{4}p)$ und $x' + \frac{1}{4}p$ der Radius vector des Berührungspunktes P ist (§ 70, 5), so ist die Tangente eines Punktes die mittlere Proportionale zwischen der vierfachen Abscisse und dem Radius vector desselben Punktes.

3) Für die Subnormale NQ folgt aus dem rechth. Dreieck TPN

$$TQ : PQ = PQ : NQ \text{ oder } 2x' : y' = y' : NQ, \text{ also}$$

$$\text{Subnormale } NQ = \frac{y'^2}{2x'} = \frac{px'}{2x'} = \frac{1}{2}p.$$

Die Subnormale ist also immer dem halben Parameter gleich und daher eine beständige Größe.

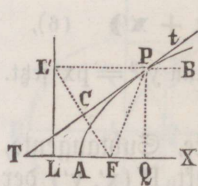
4) Endlich ist $PN^2 = PQ^2 + NQ^2 = y'^2 + \frac{1}{4}p^2 = px' + \frac{1}{4}p^2 = p(x' + \frac{1}{4}p)$, also

$$\text{Normale } PN = \sqrt{p(x' + \frac{1}{4}p)},$$

d. h. die Normale eines Punktes ist immer die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und dem Radius vector desselben Punktes.

§ 76. (Fig. § 77). Durch einen gegebenen Punkt P der Parabel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Man nehme auf der rückwärts verlängerten Axa das Stück AT gleich der Abscisse AQ des Punktes P , und ziehe durch T und P die Gerade Tt , so ist diese die verlangte Tangente, da in Folge der Construction die Subtangente $TQ = 2AQ$ ist (§ 75, 1).



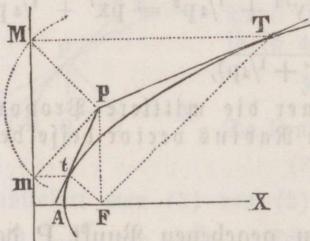
§ 77. 1) Es ist $AF = \frac{1}{4}p$ (§ 67) und $AT = AQ = x$, folglich $TF = x + \frac{1}{4}p = FP$ (§ 70, 5), mithin $\sphericalangle FPT = FTP$, d. h. der Winkel, welchen der nach einem beliebigen Punkte P der Parabel gezogene Radius vector mit der Tangente Tt desselben Punktes bildet, ist gleich dem Winkel, den die Tangente mit der Axe einschließt.

2) Wird durch P die Linie $L'B \parallel AX$ gezogen, so ist $\sphericalangle L'PT = FTP = FPT$, d. h. die Tangente halbirt den Winkel, den eine durch den Berührungspunkt zur Axe parallel gezogene Gerade mit dem Leitstrahl des Berührungspunktes bildet.

3) Hieraus ergibt sich eine andere Auflösung der Aufgabe (§ 76), durch einen gegebenen Punkt P der Parabel eine Tangente zu ziehen — Fällt man nämlich von P auf die Leitlinie eine Senkrechte PL' , zieht $L'F$, und durch deren Mitte C die Linie CP, wodurch der Winkel $L'PF$ halbirt wird, so ist CP die verlangte Tangente.

§ 78. Die Eigenschaft der Parabel, zufolge welcher die Winkel BPt und FPT gleich sind, indem jeder gleich $L'PT$ ist, ist der Grund, weshalb man den Punkt F den Brennpunkt nennt. Denkt man sich nämlich einen parabolischen Hohlspiegel, welcher entsteht, wenn sich der Bogen AP der Parabel um die Axe herumdreht, so werden alle parallel mit der Axe auf die innere Fläche des Spiegels fallenden Lichtstrahlen von demselben nach dem Gesetze der Optik von der Gleichheit des Einfallswinkels so zurückgeworfen, daß sie sich in dem Punkte F vereinigen, wo eine solche Hitze entsteht, daß ein entzündbarer Gegenstand wirklich entzündet wird. Umgekehrt werden alle von einem leuchtenden Punkte in F ausgehenden Lichtstrahlen parallel mit der Axe zurückgeworfen, so daß durch einen parabolischen Spiegel, wie man ihn z. B. auf Leuchttürmen oft antrifft, eine starke Erleuchtung auf einen bestimmten Gegenstand geworfen werden kann.

§ 79. Durch einen außerhalb der Parabel gegebenen Punkt P eine Tangente an die Parabel zu ziehen.



Man beschreibe aus P mit PF als Radius einen Kreis, welcher die Leitlinie in M und m schneidet, ziehe aus M und m zwei Parallele mit der Axe, welche die Parabel in T und t schneiden, und verbinde P mit T und t, so ist PT sowol als Pt die verlangte Tangente, weil wegen Gleichheit aller Seiten das $\triangle TPM \cong TPF$, also $\sphericalangle MTP = FTP$ ist (§ 77, 2) und ebenso die Gleichheit der Winkel mtP und FtP nachgewiesen werden kann.

§ 80. Den Abschnitt ACE der Parabel zu berechnen, welcher von der Axe und von einem Bogen nebst der Ordinate seines Endpunktes begrenzt wird.

Man ziehe aus A die $AF \perp AE$, aus C die $CF \perp AF$, ferner aus einem andern Punkte B des Bogens AC die $BD \perp AE$ und $BG \perp AF$, endlich die Sehne BC. Setzt man $AE = x$, $CE = y$, $AD = x'$, $BD = y'$, so ist

$$\text{Trapez } BE = (y + y') \cdot \frac{x - x'}{2}, \text{ oder weil } (\S 69) \ x = \frac{y^2}{p}, \ x' = \frac{y'^2}{p},$$

$$\text{Trapez } BE = (y + y') \cdot \frac{y^2 - y'^2}{2p} = \frac{(y + y')^2}{p} \cdot \frac{y - y'}{2}. \text{ Ferner}$$

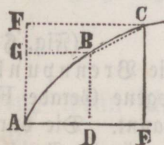
$$\text{Trapez } CG = (x + x') \cdot \frac{y - y'}{2}, \text{ also } \frac{BE}{CG} = \frac{(y + y')^2}{p(x + x')}.$$

Denkt man sich nun die Punkte B und C unendlich nahe an einander, so geht $y + y'$ in $2y$, und $x + x'$ in $2x$ über, und dann ist

$$\frac{BE}{CG} = \frac{2y^2}{px} = 2, \text{ also } BE = 2 \cdot CG.$$

Betrachtet man die ganzen innern und äußern Räume ACE und AFC als aus einer sehr großen Anzahl solcher Trapeze bestehend, so folgt, daß ACE doppelt so groß ist, als AFC, also daß

$$ACE = \frac{2}{3} \text{ Rechteck } AE \cdot CE = \frac{2}{3} xy.$$



§ 81. Es ist die Seite a eines Würfels gegeben; man soll die Seite des doppelt so großen Würfels durch Construction finden.

Man ziehe die Linien AQ und AR auf einander senkrecht, und beschreibe mit A als Scheitel, AQ als Axe, $2a$ als Parameter eine Parabel ABP, so wie mit A als Scheitel, AR als Axe und a als Parameter eine Parabel ACP. Ist nun P der Durchschnittspunkt beider Parabeln, und zieht man aus P auf AQ und AR zwei Senkrechte, so ist

$$PR = AQ = x, \ AR = PQ = y.$$

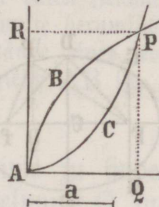
Nach der Natur der Parabel (§ 70, 4) ist

$$PQ^2 = 2a \cdot AQ \text{ oder } y^2 = 2a \cdot x$$

$$PR^2 = a \cdot AR \text{ oder } x^2 = a \cdot y,$$

folglich $x^4 = a^2 y^2 = a^2 \cdot 2ax$, oder $x^3 = 2a^3$,

mithin ist AQ die gesuchte Seite des Würfels.

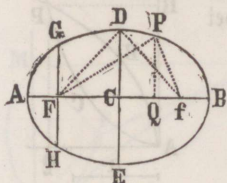


Dieses im Alterthum berühmte Problem wird gewöhnlich das Delische genannt, weil das Orakel zu Delos bei Gelegenheit einer Pest befohlen haben soll, den Altar des Apollo, der ein Würfel war, ohne Veränderung seiner Gestalt zu verdoppeln. Durch die bloße Elementargeometrie läßt sich die Aufgabe nicht lösen.

Die Ellipse.

§ 82. Die Ellipse ist eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der Entfernungen PF und Pf eines jeden ihrer Punkte P von zwei gegebenen Punkten F und f unveränderlich ist.

(Fig. § 83.) Die beiden gegebenen festen Punkte F und f heißen die Brennpunkte. Jede von einem der Brennpunkte an die Ellipse gezogene Gerade FP oder fP wird ein Leitstrahl oder Radius vector genannt. Die durch die Brennpunkte gezogene, auf beiden Seiten von der Ellipse begränzte Gerade AB wird die große Axe oder Hauptaxe, ihre Mitte C der Mittelpunkt, und die durch den Mittelpunkt auf die große Axe senkrecht gezogene, auf beiden Seiten von der Ellipse begränzte, Gerade DE die kleine Axe oder Nebenaxe der Ellipse genannt. Die Punkte A und B heißen die Scheitel der großen, dagegen D und E die Scheitel der kleinen Axe. Jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten von der Ellipse begränzte Gerade heißt ein Durchmesser; ihre Durchschnittspunkte mit der Ellipse werden die Scheitel desselben genannt. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte, CF oder Cf , wird die Excentricität genannt, und gewöhnlich mit e bezeichnet. Die durch einen der Brennpunkte senkrecht zur Hauptaxe gezogene Sehne GH der Ellipse heißt der Parameter derselben. Man pflegt denselben durch p zu bezeichnen.



§ 83. Aus der Erklärung der Ellipse ergeben sich mehre Folgerungen:

1) Es ist $AF + Af = BF + Bf$, oder, wenn man Ff von beiden Seiten wegnimmt, $2AF = 2Bf$, folglich $AF = Bf$, d. h. die Scheitel der großen Axe sind von den beiden Brennpunkten gleich weit entfernt.

2) Da $AC = BC$, so ist $CF = Cf$, d. h. der Mittelpunkt der Ellipse steht von den Brennpunkten gleich weit ab, und die Entfernung der beiden Brennpunkte von einander ist daher gleich der doppelten Excentricität, also gleich $2e$.

3) Bezeichnet man die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den Brennpunkten mit $2a$, so ist $AF + Af = 2a$, und weil

$AF = Bf$, so ist auch $AB = 2a$, d. h. die Summe der beiden Leitstrahlen eines jeden Punktes ist der Hauptaxe der Ellipse gleich.

4) Da $\triangle DCF \cong Dcf$, also $DF = Df$ ist, und weil $DF + Df = AB$, also DF oder Df gleich $\frac{1}{2}AB$ ist, so folgt, daß jeder der beiden Scheitel der kleinen Axe von den Brennpunkten um die halbe große Axe entfernt ist. Auch ergibt sich hieraus, daß die kleine Axe von der großen halbirt wird.

5) Setzt man die halbe große Axe $AC = a$, also auch $DF = a$, ferner die halbe kleine Axe $CD = b$, und die Excentricität $CF = e$, so ist $b^2 = a^2 - e^2$ und $e^2 = a^2 - b^2$, so daß also die kleine und die große Axe und die Excentricität sich gegenseitig bestimmen.

§ 84. (Fig. § 83). Die Ellipse zu beschreiben, wenn die große Axe AB , und die Brennpunkte F, f gegeben sind.

1) Man nehme auf AB zwischen F und f einen beliebigen Punkt Q an, beschreibe aus F mit AQ , und darauf aus f mit BQ zwei Kreise, so ist ihr Durchschnittspunkt ein Punkt der Ellipse, weil die Summe seiner Entfernungen von den Brennpunkten gleich AB ist (§ 83, 3). Je mehr Punkte man auf diese Weise bestimmt, desto genauer läßt sich die Ellipse beschreiben. Wenn Q einer der Brennpunkte ist, z. B. F , so ist der Berührungspunkt A der Kreise ein Punkt der Ellipse. Nähme man aber Q zwischen A und F , oder zwischen B und f an, so würden sich die Kreise nicht schneiden, also keinen Punkt der Ellipse geben.

2) Man befestige in den Brennpunkten F und f die beiden Enden eines Fadens, dessen Länge gleich AB ist. Wenn man nun einen Zeichenstift, der den Faden immer gespannt erhält, um die Brennpunkte herumführt, so beschreibt er eine Ellipse, da die Summe der beiden Abstände eines jeden durch den Stift bezeichneten Punktes von den Brennpunkten gleich AB ist.

§ 85. (Fig. § 83). Die Gleichung der Ellipse zu finden, wenn die Hauptaxe AB zur Abscissenaxe, und der Mittelpunkt C zum Anfang der Coordinaten genommen wird.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Ellipse seien $CQ = x$, $PQ = y$. Setzt man die große Axe $AB = 2a$, die kleine Axe $DE = 2b$, die Excentricität $CF = Cf = e$, so ist $FQ = e + x$, $fQ = e - x$, $FP + fP = 2a$, und die rechth. Dreiecke FPQ und fPQ geben

$$FP = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}, \quad fP = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}, \quad \text{also ist}$$

$$\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2a, \quad \text{oder}$$

$\sqrt{y^2 + (e-x)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (e+x)^2}$, und quadriert

$a\sqrt{y^2 + (e+x)^2} = a^2 + ex$, und abermals quadriert

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Da aber $a^2 - e^2 = b^2$ ist (§ 83, 5), so hat man

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

als Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

§ 86. (Fig. § 83). Aus der eben gefundenen Gleichung, welche zeigt, daß die Ellipse eine Linie der zweiten Ordnung ist, folgt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \text{ oder } y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Hieraus lassen sich die Eigenschaften der Ellipse ableiten.

1) Setzt man $x = \pm a$, so ist $y = 0$. Die Ellipse schneidet also die große Axe zwei Mal (in den Punkten A und B), und ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie.

2) Für $x > \pm a$ wird y imaginär, d. h. die Ellipse liegt ganz zwischen zwei durch A und B auf die große Axe errichteten Senkrechten.

3) Da die Gl. $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ zu jeder Abscisse zwei einander gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten giebt, und y seinen Werth nicht ändert, wenn man $-x$ für x setzt, so folgt, daß die Ellipse von jeder der beiden Axen in zwei congruente Theile getheilt wird.

4) Setzt man x gleich der Excentricität, also $x^2 = e^2 = a^2 - b^2$ (§ 83, 5), so erhält man die in einem der Brennpunkte errichtete Ordinate $y = \frac{b^2}{a}$; folglich ist der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$. Dafür läßt sich auch schreiben $p = \frac{4b^2}{2a}$ oder $2a : 2b = 2b : p$, d. h. der Parameter ist die dritte Proportionale zu der großen und kleinen Axe.

5) Wenn man in der Gl. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ setzt $a=b$, woraus folgt, daß $a^2 - b^2 = e^2 = 0$ ist, so erhält man die Gl. $x^2 + y^2 = a^2$ eines Kreises, dessen Radius a ist (§ 55). Der Kreis kann also als eine Ellipse betrachtet werden, deren beide Axen gleich sind, oder deren Excentricität Null ist.

Denkt man sich die Excentricität e einer Ellipse immer kleiner werden, so nähern sich auch die beiden Vectoren eines Punktes immer

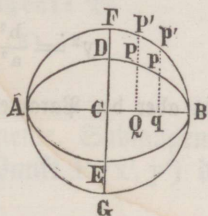
mehr, so daß, wenn $e = 0$ wird, die Punkte F und f in C , so wie die Vektoren in eine gerade Linie, welche gleich a ist, zusammenfallen. In diesem Falle ist die Entfernung eines jeden Punktes der Ellipse von ihrem Mittelpunkte gleich a , und die Ellipse also ein Kreis, dessen Radius die große oder kleine Halbachse ist.

§ 87. Beschreibt man aus dem Mittelpunkte C einer Ellipse mit der halben großen Ase $AC = a$ einen Kreis, und construirt zu einer beliebigen Abscisse $CQ = x$ die gehörigen Ordinaten $PQ = y$ und $P'Q = y'$ beider Curven, so geben die Gleichungen der Ellipse (§ 86) und des Kreises (§ 55)

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{also}$$

$$y : y' = b : a = 2b : 2a,$$

d. h. die zu gleicher Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse und des um ihre große Ase beschriebenen Kreises verhalten sich, wie die kleine Ase zur großen.



Hieraus ergibt sich folgender Satz: Wenn alle Ordinaten eines Kreises (oder einer Ellipse) in demselben Verhältnisse getheilt werden, so liegen die Theilpunkte wieder in einer Ellipse.

§ 88. (Fig. § 87). Eine Ellipse zu beschreiben, wenn die beiden Axen AB und DE gegeben sind.

Man beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, und theile beliebig viele Ordinaten $P'Q, p'q \dots$ dieses Kreises in dem Verhältnisse $CF : CD$, so liegen alle so erhaltenen Theilpunkte $P, p \dots$ in der gesuchten Ellipse (§ 87), welche sich desto genauer beschreiben läßt, je mehr Punkte auf diese Weise bestimmt worden sind.

§ 89. (Fig. § 87). Für die beiden beliebigen Punkte $P(x, y)$ und $p(x', y')$ der Ellipse giebt die Gleichung der letztern (§ 86)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \quad \text{und} \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x'^2), \quad \text{also ist}$$

$$y^2 : y'^2 = (a^2 - x^2) : (a^2 - x'^2) = (a + x)(a - x) : (a + x')(a - x'), \quad \text{oder}$$

$$y^2 : y'^2 = AQ \cdot BQ : Aq \cdot Bq$$

d. h. bei jeder Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke aus den Abschnitten, in welche die große Ase durch die Ordinaten getheilt wird.

§ 90. (Fig. § 83). Die Gleichung der Ellipse zu finden, wenn die Hauptaxe AB zur Abscissenaxe und der Scheitel A zum Anfang der Coordinaten genommen wird.

Bei der Herleitung der Mittelpunktsgleichung (§ 85) wurde die Abscisse CQ eines beliebigen Punktes P gleich x gesetzt. Für die jetzt zu findende Scheitelgleichung bezeichnet aber x die Abscisse AQ desselben Punktes, während die Ordinate $PQ = y$ ungeändert bleibt. Weil nun $CQ = AQ - AC$ ist, so braucht man nur $AQ = AC + x$, d. h. $x + a$ für $CQ = x$ in die Mittelpunktsgleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$ zu setzen, wodurch man erhält

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) = \frac{2b^2}{a} \cdot x - \frac{b^2}{a} \cdot \frac{x^2}{a}.$$

Da aber der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$ ist, (§ 86, 4), so ist

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a}.$$

§ 91. Wenn in der eben gefundenen Gl. a immer größer wird, während x abnimmt oder wenigstens nicht wächst, so nähert sich dieselbe immer mehr der Gl. der Parabel $y^2 = px$ (§ 69). Die Gestalt der Ellipse nähert sich also in der Nähe ihrer Scheitel desto mehr der Gestalt der Parabel, je größer die große Axe ist.

§ 92. (Fig. § 93). Die Benennungen Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale gelten für die Ellipse im gleichen Sinne, wie für die Parabel (§ 73). Ist Tt eine Tangente im Punkte P, ferner $PN \perp Tt$, und $PQ \perp AB$, so heißt PT die Tangente, TQ die Subtangente, PN die Normale, und NQ die Subnormale in Bezug auf den Punkt P der Ellipse.

§ 93. Die Gleichung der Tangente Tt zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt P (x', y') einer durch ihre Mittelpunktsgleichung $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ bestimmten Ellipse hindurchgeht.

Die Gl. der durch P und einen zweiten Punkt M (x'', y'') gehenden Geraden ist (§ 43) $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x')$... (1). Da P und M in der Ellipse liegen, so ist auch (2) ... $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, und $a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$... (3).

Subtrahirt man (3) von (2), so erhält man

$$\frac{y - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''} \quad \text{Dieses in (1)}$$

gesetzt, giebt die Gleichung der Secante Ss

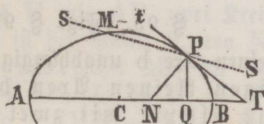
$$y - y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''} \cdot (x - x') \dots (4)$$

Läßt man jetzt durch Drehung der Secante den Punkt M mit P zusammenfallen, wodurch $x'' = x'$ und $y'' = y'$ wird, so ergibt sich aus (4)

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x') \quad \text{oder} \quad a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 y'^2 + b^2 x'^2,$$

folglich, mit Rücksicht auf (2), als Gleichung der Tangente Tt

$$\mathbf{a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2} \quad (5)$$



§ 94. (Fig. § 93). Man soll die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale für einen gegebenen Punkt P (x', y') der Ellipse bestimmen.

1) Setzt man in § 93, (5), um die Abscisse des Durchschnittspunktes T der Tangente mit der Abscissenaxe zu erhalten, $y = 0$, so findet man $x = \frac{a^2}{x'}$. Da nun $CT = x$, $CO = x'$, also $TQ = x - x'$, so ist

$$\text{Subtangente } TQ = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$$

2) Es ist $PT^2 = PQ^2 + TQ^2 = y'^2 + \frac{(a^2 - x'^2)^2}{x'^2}$, und weil (§ 86)

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x'^2), \quad \text{also} \quad (a^2 - x'^2)^2 = \frac{a^4 y'^4}{b^4}, \quad \text{so hat man}$$

$$PT^2 = y'^2 + \frac{a^4 y'^4}{b^4 x'^2} = \frac{y'^2}{b^4 x'^2} (b^4 x'^2 + a^4 y'^2), \quad \text{also}$$

$$\text{Tangente } PT = \frac{y'}{b^2 x'} \sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}$$

3) Es ist $TQ : PQ = PQ : NQ$ oder $\frac{a^2 - x'^2}{x'} : y' = y' : NQ$,

folglich $NQ = \frac{x' y'^2}{a^2 - x'^2}$, und weil (§ 86) $y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x'^2)$, so ist

$$\text{Subnormale } NQ = \frac{b^2 x'}{a^2}$$

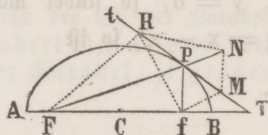
4) Endlich ist $PN^2 = PQ^2 + NQ^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}{a^4}$, also

$$\text{Normale } PN = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}$$

§ 95. (Fig. § 93). Die Subtangente $TQ = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$ ist von der kleinen Axe b unabhängig. Alle über AB als Hauptaxe mit beliebigen kleinen Axen beschriebenen Ellipsen (und selbst der Kreis als Ellipse mit zwei gleichen Axen) haben also für Punkte von einerlei Abscisse auch einerlei Subtangente, folglich schneiden sich die Tangenten dieser Punkte alle in demselben Punkte der verlängerten Hauptaxe.

§ 96. Durch einen gegebenen Punkt P der Ellipse eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

1) (Fig. § 93). Man beschreibe über der Hauptaxe AB als Durchmesser einen Kreis, ziehe die Ordinate PQ des gegebenen Punktes, und verlängere dieselbe, bis sie den Kreis in einem Punkte schneidet, den wir uns durch K bezeichnet denken. Zieht man nun durch K an den Kreis eine Tangente, welche die Hauptaxe der Ellipse in T schneiden mag, so ist PT die gesuchte Tangente der Ellipse (§ 95).



2) Man ziehe die Vektoren FP und fP verlängere FP über P hinaus, und halbire den $\sphericalangle fPN$ durch PT , so ist PT die gesuchte Tangente. Denn hätte PT außer P noch einen zweiten Punkt R mit der Ellipse gemein, so nehme man $PN = Pf$, und ziehe RF, Rf, RN . Da $\sphericalangle TPf = \sphericalangle TPN$, also auch $\sphericalangle fPR = \sphericalangle NPR$, so ist $\triangle fPR \cong \triangle NPR$, also $Rf = RN$. Weil aber P und R in der Ellipse liegen, so ist (§ 82) $PF + Pf = RF + Rf$, oder $FN = RF + RN$, was unmöglich ist, so daß also PT außer P keinen Punkt mit der Ellipse gemein haben kann.

§ 97. Aus der Construction der Tangente (§ 96, 2) ergibt sich, daß $\sphericalangle fPT (= \sphericalangle NPT) = \sphericalangle FPR$ ist, daß also die Tangente mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Vektoren gleiche Winkel bildet.

In einem elliptischen Gewölbe oder einem elliptischen Hohlspiegel werden daher alle von dem einen Brennpunkte ausgehenden Schall-, Licht- und Wärmestrahlen so zurückgeworfen, daß sie sich sämtlich in dem andern Brennpunkte wieder vereinigen, worin die Benennung der Punkte F und f als Brennpunkte ihren Grund hat.

§ 98. (Fig. § 96). Durch einen außerhalb der Ellipse gegebenen Punkt M eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Man beschreibe aus M mit Mf , und aus F mit AB zwei Kreise, und verbinde ihren Durchschnittspunkt N mit F , so ist der Punkt P , wo NF die Ellipse schneidet, der gesuchte Berührungspunkt, und daher MP die verlangte Tangente. Denn weil $NF = AB = FP + fP$, so ist $fP = NP$, und weil $Mf = MN$, so ist $\triangle fPM \cong NPM$, also $\sphericalangle fPM = NPM$, folglich MP eine Tangente § 96, 2). Da sich die aus M und F beschriebenen Kreise außer N noch in einem zweiten Punkte schneiden, so lassen sich von jedem Punkte außerhalb der Ellipse zwei Tangenten an dieselbe ziehen.

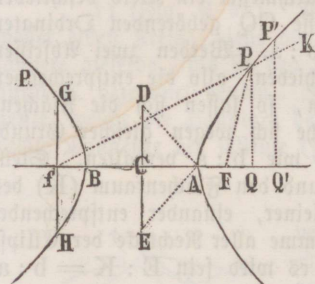
§ 99. (Fig. § 87). Den Flächeninhalt einer Ellipse zu berechnen, deren Axen, $AB = 2a$, $DE = 2b$, gegeben sind.

Wenn über der großen Aze AB als Durchmesser ein Kreis beschrieben ist, so verhalten sich (§ 87) die zu gleicher Abscisse CQ gehörenden Ordinaten PQ und $P'Q$ der Ellipse und des Kreises wie $b : a$. Werden zwei Abscissen CQ und Cq unendlich wenig von einander verschieden, also die entsprechenden Ordinaten unendlich nahe an einander genommen, so lassen sich die Flächenräume Pq und $P'q$ als Rechtecke ansehen, welche sich wegen gleicher Grundlinie, wie ihre Höhen PQ und $P'Q$, also auch wie $b : a$ verhalten. Stellt man sich nun den Flächenraum (E) der Ellipse und den Flächenraum (K) des Kreises aus einer unendlichen Menge solcher kleiner, einander entsprechender Rechtecke bestehend vor, so wird sich auch die Summe aller Rechtecke der Ellipse zu der des Kreises verhalten, wie $b : a$, d. h. es wird sein $E : K = b : a$, also $E = \frac{b}{a} K$. Da aber bekanntlich $K = a^2\pi$, so ist $E = ab\pi$, d. h. der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Producte ihrer beiden Halbaxen, multiplicirt mit der Zahl π .

Bedeutet r die mittlere Proportionale zwischen a und b , so ist $r^2 = ab$, also $E = r^2\pi$, d. h. der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen ihre beiden Halbaxen ist.

Die Hyperbel.

§ 100. Die Hyperbel ist eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, daß der Unterschied der Entfernungen $Pf - PF$ eines jeden ihrer Punkte P von zwei gegebenen Punkten f und F unveränderlich ist.



Die Hyperbel besteht aus zwei von einander getrennten Zweigen, die aber immer als Theile einer einzigen krummen Linie zu betrachten sind. Die beiden festen Punkte f und F heißen die Brennpunkte. Jede von einem der Brennpunkte an die Hyperbel gezogene Gerade, fP oder FP wird ein Leitstrahl oder Radius vector genannt. Zieht man durch die beiden Brennpunkte eine gerade Linie, so wird derjenige Theil derselben, welcher zwischen den beiden Durchschnittspunkten A und B mit der Hyperbel liegt, die große Axe oder Hauptaxe, und ihre Mitte C der Mittelpunkt der Hyperbel genannt. Die Punkte A und B sind die Scheitel der großen Axe. Jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten von der Hyperbel begränzte gerade Linie heißt ein Durchmesser; ihre Durchschnittspunkte mit der Hyperbel heißen die Scheitel desselben. Die Entfernung des Mittelpunktes von jedem der beiden Brennpunkte wird die Excentricität genannt, und immer mit e bezeichnet. Die durch einen der Brennpunkte senkrecht auf die Hauptaxe gezogene Sehne GH der Hyperbel heißt der Parameter derselben, und wird immer durch p vorgestellt.

§ 101. (Fig. § 100). Aus dem Begriffe der Hyperbel ergeben sich mehrere Folgerungen:

1) Es ist $Af - AF = BF - Bf$, und wenn man von beiden Seiten AB wegnimmt, $Bf - AF = AF - Bf$, oder $2Bf = 2AF$, also $AF = Bf$, d. h. die Scheitel der großen Axe sind von den Brennpunkten gleich weit entfernt.

2) Hieraus folgt, daß der Mittelpunkt C von den Brennpunkten gleich weit absteht, so daß also die Entfernung der Brennpunkte von einander der doppelten Excentricität $2e$ gleich ist.

3) Bezeichnet man den Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes der Hyperbel von den Brennpunkten mit $2a$, so ist $Af - AF = 2a$, und weil $AF = Bf$, so ist $AB = 2a$, d. h. der Unterschied der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Hyperbel ist der Hauptaxe derselben gleich.

4) Da $fP - FP = 2a$, in dem $\triangle fPF$ aber $fP - FP < Ff$ ist, so ist $2a < Ff$, d. h. die Hauptaxe der Hyperbel ist immer kleiner als die doppelte Excentricität.

§ 102. Bei der Ellipse (§ 83, 5) steht die kleine Axe in einer solchen Beziehung zur Hauptaxe und zur Excentricität, daß $a^2 - e^2 = b^2$ ist. Obschon die Hyperbel eigentlich nur eine Axe hat, so setzt man auch hier $e^2 - a^2 = b^2$ oder $e^2 = a^2 + b^2$, und nennt b die kleine Halbachse, oder $2b$ die kleine Axe der Hyperbel, wodurch, wie wir später sehen werden, eine große Uebereinstimmung in der Betrachtung der Hyperbel mit der Ellipse herbeigeführt wird.

Um die kleine Halbachse $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ darzustellen, errichte man (Fig. § 100) durch den Mittelpunkt C auf die große Axe eine Senkrechte und durchschneide diese aus einem der Scheitel A mit $CF = e$ als Radius in zwei Punkten D und E , so ist $CD = CE = \sqrt{e^2 - a^2} = b$, folglich DE die kleine Axe.

§ 103. (Fig. § 100). Die Hyperbel zu beschreiben, wenn die große Axe AB , und die Brennpunkte F, f gegeben sind.

1) Man nehme auf der verlängerten großen Axe rechts von F oder links von f einen beliebigen Punkt Q' an, beschreibe aus f mit BQ' , und darauf aus F mit AQ' zwei Kreise, so ist jeder ihrer beiden Durchschnittspunkte, z. B. P , ein Punkt der Hyperbel, weil der Unterschied seiner Entfernungen von den Brennpunkten gleich AB ist. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte der Hyperbel finden. Beschreibt man aus F mit BQ' , und darauf aus f mit AQ' zwei Kreise, so giebt ihr Durchschnittspunkt p einen Punkt des andern Zweiges der Hyperbel. Nimmt man Q' in einem der Brennpunkte F selbst an, so berühren sich die Kreise A und B . Für Punkte zwischen beiden Brennpunkten würden sich die Kreise nicht mehr treffen, also auch keinen Punkt der Hyperbel geben.

2) Das eine Ende eines Lineals, dessen Kante fK vorstelle, sei um den Brennpunkt f beweglich, während das eine Ende eines Fadens, welcher um AB kürzer als das Lineal fK ist, in dem Brennpunkte F , das andere Ende aber an dem Lineal in K befestigt ist. Wird das Lineal aufwärts oder abwärts bewegt, indem man den Faden mittels eines Zeichenstiftes immer

gespannt an das Lineal andrückt, so beschreibt der an dem Lineal fortgleitende Stift die Hälfte eines Zweiges der Hyperbel, da der Unterschied der Entfernungen eines jeden durch den Stift bezeichneten Punktes P von den Brennpunkten gleich AB ist. Die andere Hälfte des rechten Zweiges wird auf dieselbe Weise beschrieben, und den linken Zweig der Hyperbel erhält man, wenn man das Lineal um F bewegt.

§ 104. (Fig. § 100). Die Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn die Hauptaxe AB zur Abscissenaxe, und der Mittelpunkt C zum Anfang der Coordinaten genommen wird.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Hyperbel seien $CQ = x$, $PQ = y$. Setzt man die große Axe $AB = 2a$, die kleine Halbaxe $= b$, die Excentricität $CF = C'f = e$, so ist $fQ = x + e$, $FQ = x - e$, $fP = FP = 2a$, und die rechth. Dreiecke fPQ und FPQ geben

$$fP = \sqrt{y^2 + (x + e)^2}, \quad FP = \sqrt{y^2 + (x - e)^2}, \quad \text{also ist (§ 100)}$$

$$\sqrt{y^2 + (x + e)^2} - \sqrt{y^2 + (x - e)^2} = 2a, \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{y^2 + (x + e)^2} = 2a + \sqrt{y^2 + (x - e)^2}, \quad \text{und quadriert}$$

$$a \sqrt{y^2 + (x - e)^2} = ex - a^2, \quad \text{und abermals quadriert}$$

$$a^2 y^2 - (e^2 - a^2) x^2 = -a^2 (e^2 - a^2).$$

Da aber $e^2 - a^2 = b^2$ ist (§ 102), so hat man

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

als Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.

§ 105. (Fig. § 100). Aus der Gl. $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$, welche zeigt, daß die Hyperbel eine Linie der zweiten Ordnung ist, folgt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \quad \text{oder} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Hieraus lassen sich die Eigenschaften der Hyperbel ableiten.

1) Unter der Gl. der Hyperbel sind beide Zweige derselben enthalten, indem für positive x der eine Zweig, und für negative x der andere Zweig erhalten wird. Beide Zweige hat man daher als Theile einer einzigen Curve zu betrachten.

2) Für $x < \pm a$ wird y imaginär. Die Hyperbel liegt also ganz außerhalb zweier durch A und B auf die große Axe errichteten Senkrechten.

3) Setzt man $x = \pm a$, so ist $y = 0$, d. h. die Hyperbel schneidet die Hauptaxe zwei Mal in den Punkten A und B.

4) Die Gleichung der Hyperbel zeigt, daß zu jeder Abscisse zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten gehören, und weil der Werth von y sich nicht ändert, wenn man $-x$ statt x setzt, so sind die Ordinaten in gleichen Abständen vom Mittelpunkte einander gleich. Da ferner der absolute Werth von y mit dem absoluten Werthe von x fortwährend wächst, so erkennt man, daß sich jeder der beiden Zweige der Hyperbel von der Aze auf beiden Seiten völlig auf einerlei Weise ohne Ende immer mehr entfernt, und die beiden Zweige einander congruent sind.

5) Setzt man x gleich der Excentricität, also $x^2 = e^2 = a^2 + b^2$ (§ 102), so erhält man die durch einen der Brennpunkte gehende Ordinate $y = \frac{b^2}{a}$; folglich ist der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$, also auch $p = \frac{4b^2}{2a}$ oder $2a : 2b = 2b : p$, d. h. der Parameter ist die dritte Proportionale zu der großen und kleinen Aze.

6) Wenn man in der Gl. $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ setzt $a=b$, so erhält man $y^2 = x^2 - a^2$ als Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, d. h. einer solchen, deren beide Azen einander gleich sind. Die gleichseitige Hyperbel ist unter den Hyperbeln dasselbe, was der Kreis unter den Ellipsen ist.

§ 106. (Fig. § 100). Denkt man sich über derselben Hauptaxe $AB = 2a$ zwei Hyperbeln von verschiedenen kleinen Azen b und b' beschrieben, und zu einer beliebigen Abscisse $CQ = x$ die zugehörigen Ordinaten y und y' beider Hyperbeln construirt, so ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \text{ und } y' = \frac{b'}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \text{ also}$$

$$y : y' = b : b' = 2b : 2b',$$

d. h. die zu gleicher Abscisse gehörigen Ordinaten zweier, mit derselben Hauptaxe, aber mit verschiedenen Nebenazen, beschriebenen Hyperbeln verhalten sich wie die Nebenazen.

Hieraus ergibt sich folgender Satz: Theilt man alle Ordinaten einer Hyperbel in demselben Verhältnisse, so liegen die Theilpunkte wieder in einer Hyperbel.

§ 107. (Fig. § 100). Für die beiden beliebigen Punkte $P(x, y)$ und $P(x', y')$ der Hyperbel giebt die Gl. der letztern (§ 105)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \text{ und } y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (x'^2 - a^2), \text{ also ist}$$

$$y^2 : y'^2 = (x^2 - a^2) : (x'^2 - a^2) = (x + a)(x - a) : (x' + a)(x' - a) \text{ oder}$$

$$y^2 : y'^2 = BQ \cdot AQ : BQ' \cdot AQ',$$

d. h. bei jeder Hyperbel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke aus den Entfernungen der Ordinaten von den beiden Scheiteln A und B.

§ 108. (Fig. § 100). Die Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn die Hauptaxe AB zur Abscissenaxe und der Scheitel A zum Anfang der Coordinaten genommen wird.

Um die gesuchte Scheitelsgleichung zu erhalten, braucht man nur $x + a$ statt x in die Mittelpunktsgleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$ zu substituieren, wodurch man erhält

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2) = \frac{2b^2}{a} \cdot x + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{x^2}{a},$$

und weil der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$ ist (§ 105, 5), so ist

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a}.$$

§ 109. Aus der eben gefundenen Gl. geht hervor, daß, je kleiner x und je größer a ist, desto kleiner $\frac{px^2}{2a}$ wird, daß also die Gl. sich unter dieser Voraussetzung immer mehr der Gl. $y^2 = px$ der Parabel nähert. Die Gestalt eines jeden Zweiges der Hyperbel in der Nähe des Scheitels nähert sich also desto mehr der Gestalt einer Parabel, je größer die Hauptaxe der Hyperbel angenommen wird.

§ 110. (Fig. § 112). Ist Tt eine Tangente im Berührungspunkte P, ferner PQ \perp AN, und PN \perp Tt, so heißt PT die Tangente, TQ die Subtangente, PN die Normale, NQ die Subnormale — in Bezug auf den Punkt P der Hyperbel.

§ 111. Die Gleichung der Tangente zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt (x' , y') einer durch ihre Mittelpunktsgleichung $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ bestimmten Hyperbel hindurchgeht.

Für die Hyperbel läßt sich die Gl. der Tangente auf dieselbe Weise finden, wie für die Ellipse (§ 93). Einfacher ist aber folgender Weg. Die Gl. der Hyperbel zeigt eine auffallende Uebereinstimmung mit der Gl. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ der Ellipse (§ 85), so daß, wenn man in diese $bV - 1$ statt

b, oder $-b^2$ statt b^2 setzt, die Gl. der Hyperbel erscheint. Nun fanden wir (§ 93, 5) als Gl. der Tangente der Ellipse $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$, und wird in dieselbe $-b^2$ für b^2 gesetzt, so erhalten wir als Gl. der Tangente der Hyperbel

$$a^2yy' = b^2xx' = -a^2b^2$$

§ 112. Die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale für einen gegebenen Punkt P (x' , y') der Hyperbel zu bestimmen.

Die Gl. der Tangente (§ 111) giebt für $y=0$ die Abscisse des Durchschnittspunktes T der Tangente Tt mit der Abscissenaxe, nämlich $CT = x = \frac{a^2}{x'}$; und weil $TQ = x' - x$, so ist

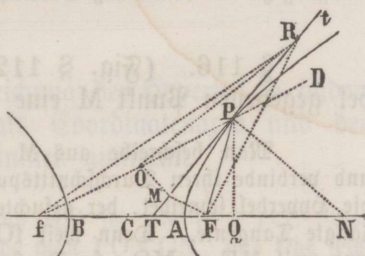
$$\text{Subtangente } TQ = \frac{x'^2 - a^2}{x'}$$

Auf dieselbe Weise wie bei der Ellipse (§ 94) findet man auch hier

$$\text{Tangente } PT = \frac{y'}{b^2x'} \sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}$$

$$\text{Subnormale } NQ = \frac{b^2x'}{a^2}$$

$$\text{Normale } PN = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}$$



§ 113. (Fig. § 112). Die Subtangente $TQ = \frac{x'^2 - a^2}{x'}$ ist von der kleinen Axe unabhängig. Alle über AB als Hauptaxe mit beliebigen kleinen Axen beschriebenen Hyperbeln haben also für Punkte von einerlei Abscisse auch einerlei Subtangente, folglich schneiden sich die Tangenten dieser Punkte alle in demselben Punkte der Hauptaxe.

§ 114. (Fig. § 112). Durch einen gegebenen Punkt P der Hyperbel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

1) Bezeichnet man die Abscisse OQ des Punktes P mit x , so ist für diesen Punkt (§ 112) die Subtangente $= \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{(x+a)(x-a)}{x} = \frac{BQ \cdot AQ}{CQ}$, d. h. gleich der vierten Proportionalen zu der Abscisse und den Entfernungen der Ordinate des Berührungspunktes von den beiden Scheiteln der Hyperbel. Da also die Subtangente aus a und x leicht construirt werden kann, so braucht man nur ihren Endpunkt T, welcher zugleich der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenaxe ist, mit P zu verbinden, um die verlangte Tangente zu erhalten.

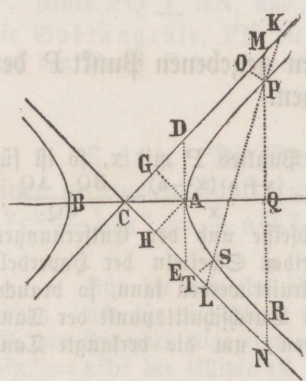
2) Man ziehe die Vektoren Pf und PF , und halbire den $\sphericalangle FPF$ durch PT , so ist PT die gesuchte Tangente. Denn hätte PT außer P noch einen zweiten Punkt R mit der Hyperbel gemein, so nehme man $PO = PF$, und ziehe RF, Rf, RO . Da $\sphericalangle TPF = TPO$, also auch $\sphericalangle FPR = OPR$, so ist $\triangle FPR \cong OPR$, also $RF = RO$. Weil aber P und R in der Hyperbel liegen, so ist (§ 100) $Pf - PF = Rf - RF$, oder $Pf - PO = Rf - RO$, d. h. $Of = Rf - RO$ oder $Of + RO = Rf$, was unmöglich ist, und da sich eben so zeigen läßt, daß PT außer P keinen Punkt mit dem andern Zweige der Hyperbel gemein hat, so ist PT eine Tangente der Hyperbel.

§ 115. (Fig. § 112). Verlängert man fP nach D , so ergibt sich aus § 114 2, daß $\sphericalangle FPT = \sphericalangle PT = \sphericalangle DPT$ ist. In einem hyperbolischen Hohlspiegel vereinigen sich daher alle Schall-, Licht- oder Wärmestrahlen, welche von dem einen Brennpunkte f ausgehen, oder auch auf den Spiegel so auffallen, daß sie über diesen hinaus verlängert gedacht, durch f gehen würden, wieder in dem andern Brennpunkte F . Dieses hat Veranlassung zu der Benennung Brennpunkte gegeben.

§ 116. (Fig. § 112). Durch einen außerhalb der Hyperbel gegebenen Punkt M eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Man beschreibe aus M mit MF , und aus f mit AB zwei Kreise, und verbinde ihren Durchschnittspunkt O mit f , so ist der Punkt P , wo fO die Hyperbel schneidet, der gesuchte Berührungspunkt, und daher MP die verlangte Tangente. Denn weil $fO = AB = fP - FP$, so ist $FP = OP$, und weil $MF = MO$, so ist $\triangle FPM \cong OPM$, folglich MP eine Tangente (§ 114, 2). Da sich die aus M und f beschriebenen Kreise außer O noch in einem zweiten Punkte schneiden, so lassen sich von M zwei Tangenten an die Hyperbel ziehen.

§ 117. Unter einer Asymptote der Hyperbel versteht man eine unbegrenzte gerade Linie, welcher sich die Hyperbel immer mehr und mehr nähert, ohne jemals mit derselben zusammenzutreffen.



Man errichte durch A eine Senkrechte auf die große Ase AB , so daß $AD = AE = b$ ist, und ziehe durch C und D , sowie durch C und E gerade Linien, welche man sich in's Unendliche verlängert vorstelle. Hieran ziehe man durch einen beliebigen Punkt Q der Ase die Senkrechte MN , und setze $CQ = x$, $PQ = y$, $QM = z$, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, und weil $CA : AD = CQ : QM$, oder $a : b = x : z$, so ist $z = \frac{bx}{a}$, oder $z^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Folglich ist $z^2 - y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2} + b^2 = b^2$, oder $(z + y)(z - y) = b^2$,

mithin $z - y = \frac{b^2}{z + y}$. Läßt man nun die Abscisse x in's Unendliche wachsen, so werden auch z und y , also auch $z + y$ in's Unendliche wachsen, folglich wird der Bruch $\frac{b^2}{z + y}$, dessen Zähler beständig ist, in's Unendliche abnehmen, kann aber nie Null werden. Da mithin $z - y$, d. h. die Differenz zwischen den Ordinaten der Linie CM und der Hyperbel für einerlei Abscisse wenn x in's Unendliche wächst, in's Unendliche abnimmt, ohne jemals Null zu werden, so ist CM eine Asymptote der Hyperbel, und weil dieses von CN eben so gilt, so hat die Hyperbel zwei Asymptoten, die sich nach dem angegebenen Verfahren immer leicht finden lassen.

Der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel DCE wird der Asymptotenwinkel genannt. Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $a = b$, oder $CA = AD$, also $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC = 45^\circ$, folglich $\sphericalangle DCE = 90^\circ$, also der Asymptotenwinkel ein rechter.

§ 118. (Fig. § 117). Die Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn man ihre beiden Asymptoten als Coordinatenaxen und den Mittelpunkt C als Anfang der Coordinaten annimmt.

Die Construction der Linien DE und MN sei wie in § 117. Von einem beliebigen Punkte P der Hyperbel ziehe man $PO \parallel CN$, und setze seine Coordinaten $CO = x$, $PO = y$. Da $PO \parallel CN$ und $DE \parallel MN$, so ist

$$NP : CO = PM : OM = DE : CD \text{ und } MP : PO = DE : EC = DE : CD,$$

also aus beiden Proportionen: $NP \cdot MP : CO \cdot PO = DE^2 : CD^2$. In § 117 war aber $(z + y) : (z - y) = b^2$, d. h. $(QM + PQ) : (QM - PQ) = (QN + PQ) : MP = NP \cdot MP = b^2$, und weil $DE = 2b$ und $CD^2 = CA^2 + AD^2 = a^2 + b^2$ ist, so hat man $b^2 : xy = 4b^2 : a^2 + b^2$, folglich als Asymptotengleichung der Hyperbel

$$xy = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$$

§ 119. (Fig. § 117). Die Asymptotengleichung zeigt, daß das Produkt aus jeder Abscisse in die zugehörige Ordinate eine beständige Größe ist. Diese beständige Größe $\frac{1}{4} (a^2 + b^2)$ nennt man die Potenz der Hyperbel. In einer gleichseitigen Hyperbel ist die Potenz gleich $\frac{1}{4} \cdot 2a^2 = \frac{1}{2} a^2$.

Zieht man aus A die Linie $AG \parallel CN$, so ist $DE : CE = AD : AG$, also auch $DE^2 : CE^2 = AD^2 : AG^2$ oder $4b^2 : a^2 + b^2 = b^2 : AG^2$. Man hat also $AG^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$, und wenn $AH \parallel CM$, so ist eben so $AH^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$. Das Quadrat der aus dem Scheitel parallel

mit einer Asymptote bis zur andern Asymptote gezogenen Linie ist also gleich der Potenz der Hyperbel. Für die gleichseitige Hyperbel geht das Parallelogramm AGCH in ein Quadrat über, dessen Inhalt folglich die Potenz einer solchen Hyperbel darstellt.

§ 120. (Fig. § 117). Schneidet eine gerade Linie KL die Hyperbeläste und die Asymptoten, so sind die zwei Stücke PK und SL derselben zwischen den Asymptoten und den Hyperbelästen einander gleich.

Man ziehe PO und ST den beiden Asymptoten parallel, so ist
 $PK : PO = KL : CL = SK : CT$, also $PK = \frac{PO \cdot SK}{CT}$. Ferner

$SL : ST = KL : CK = PL : CO$, also $SL = \frac{ST \cdot PL}{CO}$, also

$\frac{PK}{SL} = \frac{PO \cdot SK \cdot CO}{ST \cdot PL \cdot CT}$, und weil (§ 119) $CO \cdot PO = CT \cdot ST$, so ist

$PK : SL = SK : PL$, also auch $PK : SL = SK - PK : PL - SL$, d. i.

$PK : SL = PS : PS$, folglich $PK = SL$.

§ 120. (Fig. § 117). Eine Hyperbel zu beschreiben, wenn die beiden Asymptoten und ein Punkt P der Hyperbel gegeben sind.

Man ziehe durch P zwischen den beiden Asymptoten eine beliebige Gerade LK, und nehme $SL = PK$, so ist S ein zweiter Punkt der Hyperbel (§ 120). Indem man durch P beliebig viele gerade Linien zieht, kann man auf diese Weise beliebig viele Punkte der Hyperbel finden, und daher diese beschreiben.

Bemerkungen über die Linien der zweiten Ordnung.

§ 122. Linien der zweiten Ordnung sind der Kreis, die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel, da ihre Gleichungen vom zweiten Grade sind (§ 42).

Construirt man über einer gemeinschaftlichen Abscissenaxe, von demselben Scheitel aus und mit dem nämlichen Parameter, die Gleichungen der Parabel $y^2 = px$, der Ellipse $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, und der Hyperbel $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$, so daß für die beiden letztern Linien die Hauptaxe $2a$ die nämliche ist, so hat offenbar für einerlei Abscisse x die Ellipse die kleinste, dagegen die Hyperbel die größte Ordinate y , während die Ordinate y der Parabel sich zwischen beiden befindet, woraus folgt, daß die Parabel zwischen den beiden andern Linien liegt, und zwar die Hyperbel darüber, die Ellipse aber darunter weggeht.

Wie jene Gleichungen ferner zeigen, ist das Quadrat der Ordinate eines beliebigen Punktes bei der Parabel gleich dem Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse jenes Punktes, bei der Ellipse um $\frac{px^2}{2a}$ kleiner, und bei der Hyperbel um $\frac{px^2}{2a}$ größer als dieses Rechteck. Hieraus erklären sich die Namen jener drei Linien, indem das Wort Parabel auf eine Gleichheit, Ellipse auf einen Mangel, Hyperbel auf einen Ueberschuß hindeutet.

Setzt man $\frac{p}{2a} = q$, so drückt die Gl. $y^2 = px + qx^2$ die Hyperbel, Parabel und Ellipse zugleich aus, je nachdem die Größe q positiv, Null oder negativ ist.

§ 123. Die Linien der zweiten Ordnung entstehen auch, wenn man einen geraden oder schiefen Kegel durch eine Ebene auf eine gewisse Art schneidet, so daß nämlich die Linie, in welcher die Kegelfläche von der Ebene geschnitten wird, eine von jenen Linien darstellt. Aus diesem Grunde werden der Kreis, die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel auch Kegelschnitte genannt, und zwar insbesondere mit diesem Namen die drei letztern Linien bezeichnet.

Die Stereometrie lehrt, daß der Durchschnitt eines Kegels durch eine seiner Grundfläche parallele Ebene jederzeit einen Kreis giebt. Hier soll ge-

ferner $PQ = y$ und $\frac{AB \cdot FE}{AE} = p$, so erhält man die Gl. der Ellipse

$$y^2 = p \cdot \frac{x(2a - x)}{2a} = px - \frac{px^2}{2a}.$$

§ 126. Denkt man sich die Linie EG, welche die Kegelfläche beschreibt, von der Spitze S des Kegels aus nach beiden Seiten hin ganz unbeschränkt, so entstehen zwei in S einander entgegengesetzte Kegelflächen. Ist nun FESGH eine durch die Axe des Kegels gelegte, also auf dessen Grundfläche senkrechte Ebene, und schneidet man den Kegel mit einer auf dieser Ebene senkrechten Ebene so, daß beide Seiten SF und SG geschnitten werden, so ist der Schnitt eine Hyperbel, von welcher der eine Zweig in der Fläche des untern, der andere in der Fläche des obren Kegels liegt. Man durchschneide den untern Kegel mit einer der Grundfläche desselben parallelen Ebene CMDP, und ziehe AB und KL parallel zu CD, so ist, wie in § 124, MP auf AQ und CD senkrecht, folglich

$$CQ : PQ = PQ : DQ \text{ oder } PQ^2 = CQ : DQ.$$

Da aber $AK : KL = AQ : CQ$, also $CQ = \frac{AQ \cdot KL}{AK}$, und

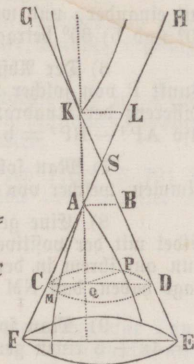
$AK : KQ = AB : DQ$, also $DQ = \frac{AB \cdot KQ}{AK}$, so ist

$$PQ^2 = \frac{AQ \cdot KL}{AK} \cdot \frac{AB \cdot KQ}{AK} = \frac{AB \cdot KL}{AK} \cdot \frac{AQ \cdot KQ}{AK}.$$

Setzt man $AK = 2a$, $AQ = x$, also $KQ = 2a + x$, fer-

ner $PQ = y$ und $\frac{AB \cdot KL}{AK} = p$, so erhält man die Gl. der

Hyperbel $y^2 = p \cdot \frac{x(2a + x)}{2a} = px + \frac{px^2}{2a}.$



§ 127. Aus §§ 124, 125, 126 geht folgende Bemerkung hervor: Wenn (Fig. § 124) die Durchschnittslinie AQ der beiden Ebenen FSE und MAP mit der einen Seite FS des Kegels einen Winkel FAQ bildet, welcher gleich ist dem Winkel ASB an der Spitze, so entsteht eine Parabel. Ist dagegen (Fig. § 125) $\angle FAQ > \angle ASB$, so entsteht eine Ellipse, oder falls $AQ \parallel FE$ ist, ein Kreis. Wenn endlich (Fig. § 126) $\angle FAQ < \angle ASB$ ist, so entsteht eine Hyperbel.

§ 128. Aufgaben.

1) Wenn ein spitzer Winkel w (Fig. § 51) eines rechth. Dreiecks gegeben ist, die eine Kathete (AB) so zu bestimmen, daß das Dreieck einem gegebenen Quadrate b^2 gleich sei.

2) Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, welche zwei parallele Linien so schneidet, daß das zwischen letzteren liegende Stück eine vorgeschriebene Größe habe.

3) Durch einen gegebenen Punkt (x', y') eine gerade Linie so zu ziehen, daß die durch sie abgeschnittenen Stücke der Coordinatenaxen ein Rechteck gleich einem gegebenen Quadrate b^2 bestimmen.

4) Wenn die Gleichungen der Schenkel eines Winkels gegeben sind, die Gleichung der Geraden zu finden, welche jenen Winkel halbt.

5) Welchen Winkel bilden die beiden Geraden $y = x - 2$ und $y = mx + 3$ mit einander, und welchen Werth muß der Coefficient m haben, wenn jener Winkel a) 90° und b) 60° betragen soll?

6) Der Abstand a zweier Punkte A und B ist gegeben; man soll einen dritten Punkt P von solcher Lage finden, daß, wenn er mit A und B verbunden wird, die Differenz der Quadrate dieser Verbindungslinien einem gegebenen Quadrate b^2 gleich sei, also $AP^2 - BP^2 = b^2$.

7) Man soll auf dem einen Schenkel eines gegebenen Winkels den Punkt bestimmen, welcher von dem andern Schenkel einen gegebenen Abstand hat.

8) Eine gerade Linie schneidet von der Abscissenaxe ein Stück $= 1$ ab, und bildet mit der positiven Ordinatenaxe in einem Punkte M einen Winkel von 135° . Wenn nun auf ihrem in der zweiten Region liegenden Theil zwei Punkte N und P eine solche Lage haben, daß $NM = \sqrt{2}$, und $PM = \sqrt{8}$ ist, welche Coordinaten haben diese Punkte?

9) Man soll zeigen, daß die drei geraden Linien $y = 2x + 3$, $y = 3x + 4$, $y = 4x + 5$ einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben.

10) Man versuche die Gleichung $y\sqrt{3} = \sin 30^\circ \left(\frac{x}{\cos 30^\circ} + \sqrt{3} \right)$ auf eine zur Construction der geraden Linie bequeme Form zu bringen.

11) Es sind zwei Linien $y = x + 1$ und $y = 2x + 2$ gegeben; man soll in der Gleichung $y = ax + 3$ den Werth von a so bestimmen, daß die hierdurch ausgedrückte Linie durch den Durchschnittspunkt der beiden vorigen geht.

12) Es ist ein Winkel gegeben, und innerhalb desselben ein Punkt; man soll einen Kreis beschreiben, der beide Schenkel berührt und durch den Punkt geht.

13) Der Abstand $2a$ zweier Punkte A und B ist gegeben; man soll den geom. Ort eines dritten Punktes P von der Beschaffenheit finden, daß, wenn er mit A und B verbunden wird, die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien einem gegebenen Quadrate b^2 gleich sei, also $AP^2 + BP^2 = b^2$.

14) Wenn ein Winkel und der aus einem, innerhalb desselben liegenden, Punkte beschriebene Kreis gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, welcher den gegebenen Kreis und beide Schenkel des Winkels berührt.

15) Es soll analytisch bewiesen werden, daß der Winkel im Halbkreise ein Rechter ist.

16) Die Polargleichung der Kreislinie zu finden.

17) Wenn von einer Parabel außer der Leitlinie a) eine Tangente und ein Punkt, oder b) zwei Punkte, oder c) der Parameter und ein Punkt, oder d) eine Tangente und deren Berührungspunkt gegeben sind, die Aze und den Scheitel der Parabel zu finden.

18) Wenn der Brennpunkt und zwei Punkte der Parabel gegeben sind, die Parabel zu beschreiben.

19) Der Brennpunkt und die Leitlinie einer Parabel sind gegeben; man soll von einem Punkte der über den Scheitel hinaus verlängerten Aze eine Tangente an die Parabel ziehen.

20) Man soll die Längen der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale eines Punktes, dessen Ordinate $y = 11,625$ ist, in einer Parabel berechnen, deren Parameter $p = 3\frac{1}{3}$ ist.

21) Welche Ordinaten erhält man für die Abscissen 1, 3, 5 einer Parabel, deren Parameter $= 6,45$ ist?

22) Man soll den Flächeninhalt des Abschnittes berechnen, welcher von einer Abscisse $= 3$ Fuß, der zugehörigen Ordinate, und dem Bogen einer Parabel begrenzt wird, deren Gl. $y^2 = 3x$ gegeben ist.

23) In einer Parabel (Fig. § 72) verhalten sich die Abscisse AQ zur Ordinate PQ wie 2 : 3. Man soll hieraus den Abschnitt P'A'p' derselben bestimmen, welcher von einer der Ordinate PQ parallelen Sehne $= 12$ Fuß begrenzt wird.

24) Wenn der Flächeninhalt eines Parabelsegmentes PAP (Fig. § 72) 8 Quadrat Zoll beträgt, dessen Sehne Pp die Aze rechtwinklig 3 Zoll vom Scheitel A schneidet, die Sehne Pp zu berechnen.

25) Man soll eine Ellipse beschreiben, a) wenn ihre Hauptaxe und eine Tangente, b) wenn die Hauptaxe und ein Punkt der Ellipse, c) wenn die Brennpunkte und eine Tangente, d) wenn die Brennpunkte und ein Punkt der Ellipse gegeben sind.

26) Wenn die beiden Azen einer Ellipse gegeben sind, die Brennpunkte zu bestimmen und die Ellipse zu beschreiben.

27) Es sollen für eine Ellipse, deren beide Azen 16 und 11 Zoll betragen, die Ordinaten berechnet werden, welche zu den Abscissen $x = 0, 1, 2, 8$ Zoll der Mittelpunktsgleichung gehören.

28) Ueber einer gegebenen, gemeinschaftlichen Grundlinie eine beliebige Anzahl von Dreiecken zu beschreiben, deren beide anderen Seiten zusammen immer einer gegebenen Linie gleich sind.

29) Den Flächeninhalt einer Ellipse zu berechnen, deren Azen 6,08 und 3,99 Zoll betragen.

30) Wenn die beiden Azen einer Ellipse gegeben sind, einen Kreis zu finden, welcher der Ellipse an Flächeninhalt gleich ist.

31) Von einem Punkte der verlängerten Hauptaxe eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.

32) Für eine Ellipse, deren Azen 21,34 und 7,89 Zoll betragen, die Ordinaten zu berechnen, welche den Abscissen $x = 0, 1, 2, 3$ Zoll der Scheitelgleichung entsprechen.

33) Der Parameter einer Ellipse beträgt 4,62 und die Nebenaxe 6,73 Zoll; wie groß ist die Hauptaxe?

34) In einer Ellipse sind die beiden Vektoren eines Punktes 240 und 368 Linien lang, und die Excentricität beträgt 0,0943 Linien; man soll die große und die kleine Halbaxe bestimmen.

35) Ein Kreis und eine Ellipse haben gleichen Flächeninhalt = 684 Quadratfuß, und die beiden Axen der Ellipse verhalten sich wie 8 : 3. Wie groß sind die beiden Axen der Ellipse und der Durchmesser des Kreises?

36) Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels $L'LQ$ (Fig. S 77) bewegt sich eine gerade Linie so, daß ihre Endpunkte F und L' an denselben hingleiten, und folglich die Linie FL' anfangs mit dem Schenkel LQ , zuletzt mit dem Schenkel LL' zusammenfällt; man soll die krumme Linie bestimmen, welche ein bestimmter in FL' angenommener Punkt C beschreibt.

37) Man soll eine Hyperbel beschreiben, a) wenn ihre beiden Axen, b) wenn die Hauptaxe und ein Punkt der Hyperbel, c) wenn die Brennpunkte und eine Tangente, d) wenn der Mittelpunkt, eine Asymptote und zwei Punkte der Hyperbel, e) wenn eine Asymptote und drei Punkte der Hyperbel, f) wenn ein Brennpunkt, eine Tangente und eine Asymptote gegeben sind.

38) Für eine Hyperbel, deren Axen 16 und 10 Fuß betragen, die Ordinaten zu berechnen, welche den Abscissen $x = 0, 6, 8, 10, 12$ Fuß der Mittelpunktsgleichung entsprechen.

39) Welche Ordinaten entsprechen den Abscissen $x = 0, 3\frac{2}{5}, 60\frac{1}{5}$ Fuß der Mittelpunktsgleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Axe 6,85 Fuß beträgt?

40) Ueber einer gemeinschaftlichen Grundlinie mehrere Dreiecke zu beschreiben, deren zwei andere Seiten immer dieselbe vorgeschriebene Differenz haben.

41) Aus einem Punkte der Hauptaxe eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen.

42) Die Hyperbel zu construiren, a) wenn ihre Potenz gegeben ist, b) wenn die Asymptoten und die Hauptaxe gegeben sind.

43) Wie heißen die Ausdrücke für die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale einer gleichseitigen Hyperbel?

44) Man verlangt die Berechnung der zu $x = 1, 2, 3$ Zoll gehörenden Ordinaten der Scheitelgleichung für diejenige Hyperbel, in welcher die Axen 5,6 und 4,5 Zoll betragen.

45) Um eine gleichseitige Hyperbel, deren Axe = 9 Fuß sein soll, zu construiren, berechne man die zu den Abscissen $x = 0, 4, 9\frac{1}{5}$ Fuß gehörenden Ordinaten

Dorpat, 1879.

Druck von H. Laakmann's Buch- und Steindruckerei.