

-220

TALLINNA POLÜTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 220

**ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ  
И  
АВТОМАТИКЕ**

**СБОРНИК СТАТЕЙ  
III**

Per. A-1459  
-220

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
СЕРИЯ А 220 1965

---

УДК 621

# ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

III

ТАЛЛИН 1965

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Х. Хаак, В. Хейнрихсен. Матрица сопротивлений датчика э. д. с. Холла . . . . .	3
2. В. Кукк, Х. Росс. О конфигурации датчика Холла . . . . .	13
3. В. Кукк, Х. Росс. Схема замещения датчика Холла . . . . .	27
4. Г. Вяльмяэ, В. Хейнрихсен. Исследование датчика Холла при частичном пронизывании его площади магнитным потоком . . . . .	49
5. Х. Силламаа. Компенсация частотной зависимости тока в индуктивных цепях . . . . .	55
6. В. Крахт. Структурные схемы цифровых корректирующих устройств импульсных систем автоматического регулирования . . . . .	73
7. В. Крахт. Арифметический узел цифрового корректирующего устройства импульсных систем автоматического регулирования . . . . .	83
8. Л. Эйнер. Измерение вязкости при помощи низкочастотных колебательных датчиков . . . . .	99
9. Я. Томсон. О расчете магнитного сопротивления магнитоупругого датчика вращающего момента . . . . .	113
10. У. Рандмер. Применение электронной вычислительной машины для определения рациональных параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации . . . . .	123
11. Э. Калм. Линия цинкования с программным управлением . . . . .	145
12. Р. Вырк. Параметры многополюсных асинхронных микродвигателей . . . . .	151
13. П. Плакк. Об измерении диэлектрической проницаемости сыпучих материалов . . . . .	163

P<sub>1</sub>



Х. Хаак, В. Хейнрихсен

## МАТРИЦА СОПРОТИВЛЕНИЙ ДАТЧИКА Э. Д. С. ХОЛЛА

Датчики э. д. с. Холла все шире применяются в различных устройствах. Среди других встречаются и схемы, в которых несколько датчиков могут быть соединены между собой различными способами.

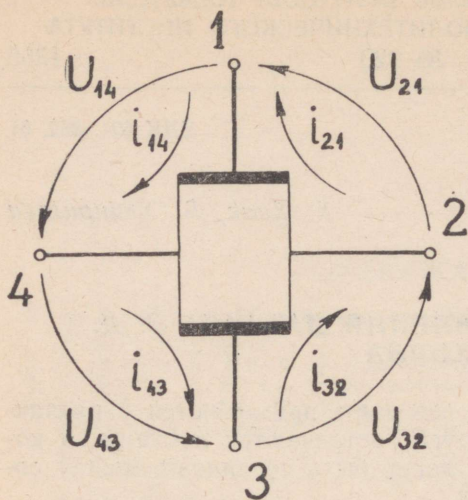
Такое соединение датчиков имеет место например в батареях из датчиков э. д. с. Холла [1, 2, 3] и в функциональных преобразователях [4, 5]. Для анализа схем такого рода наиболее удобными являются обобщенные методы решения линейных цепей [6, 7].

Применение этих методов решения требует составления матрицы датчика э. д. с. Холла как неавтономного управляемого четырехполюсника. Считая датчик э. д. с. Холла линейным элементом относительно токов и напряжений, можно в принципе составить как матрицу проводимостей, так и матрицу сопротивлений. Однако, так как значения элементов матрицы проводимости определяются при замкнутых электродах датчика, то при этом влияние вторичного эффекта Холла приведет к дополнительному изменению сопротивления от магнитной индукции [8].

Зависимость значений элементов матрицы сопротивления, которые определяются при разомкнутых электродах, от магнитной индукции значительно меньше и при необходимости может быть учтена соответствующей поправкой.

Обозначая внешние напряжения и контурные токи через индексы электродов в соответствии с фиг. 1, можно составить уравнения контурных токов для датчика э. д. с. Холла в виде:

$$\left. \begin{aligned} U_{14} &= z_{14}^{14}i_{14} + z_{21}^{14}i_{21} + z_{32}^{14}i_{32} + z_{43}^{14}i_{43} \\ U_{21} &= z_{14}^{21}i_{14} + z_{21}^{21}i_{21} + z_{32}^{21}i_{32} + z_{43}^{21}i_{43} \\ U_{32} &= z_{14}^{32}i_{14} + z_{21}^{32}i_{21} + z_{32}^{32}i_{32} + z_{43}^{32}i_{43} \\ U_{43} &= z_{14}^{43}i_{14} + z_{21}^{43}i_{21} + z_{32}^{43}i_{32} + z_{43}^{43}i_{43}. \end{aligned} \right\} (1)$$



Фиг. 1. Схема напряжения и токов датчика э. д. с. Холла

Собственные сопротивления  $z_{mn}^{mn}$  и взаимные сопротивления  $z_{mn}^{kl}$  в уравнении (1) обозначены двоичными индексами — верхние указывают на соответствующие межзловые напряжения, нижние — контурные токи.

Уравнение (1) можно представить в матричной форме:

$$\|U\| = \|z\| \cdot \|i\|.$$

Элементы  $z$ -матрицы\*, характеризующие датчик э. д. с. Холла, состоят из пассивной части, определяемой сопротивлением датчика и управляемой части, определяемой действием эффекта Холла. Поэтому целесообразно рассматривать  $z$ -матрицу как сумму двух матриц  $R$  и  $\bar{R}$ , составленных из пассивных и управляемых частей элементов  $z$ -матрицы.

Для определения элементов пассивной  $R$ -матрицы  $n$ -порядка необходимо знать  $\frac{n!}{2(n-2)!}$  независимых величин, т. е. в нашем случае ( $n=4$ ) число независимых пассивных значений равно 6. В качестве независимых пассивных сопротивлений удобно выбрать сопротивления между соседними электродами и сопротивления между противоположными электродами.

Первые четыре, так называемые сопротивления плеч, входят в пассивную матрицу сопротивления в качестве элементов главной диагонали, остальные элементы пассивной мат-

\* полная матрица.

рицы надо определить через выбранные независимые сопротивления.

Выражения для определения взаимных сопротивлений можно выводить применением принципов наложения и взаимности.

Рассмотрим взаимное сопротивление  $R_{mk}^{nl}$ , которое определяется напряжением между узлами  $n$  и  $l$  и током в контуре  $mk$ .

На основании принципа наложения сопротивление  $R_{mk}^{nl}$  может быть представлено суммой

$$R_{mk}^{nl} = R_{mk}^{nk} + R_{mk}^{kl}$$

или, пользуясь далее наложением токов

$$R_{mk}^{nl} = R_{mn}^{nk} + R_{nk}^{nk} + R_{ml}^{kl} + R_{lk}^{kl}.$$

Полученное выражение уже содержит два собственных сопротивления:  $R_{nk}^{nk}$  и  $-R_{kl}^{kl}$ . Применяя к двум остальным слагаемым еще раз принцип наложения напряжений, можно их сумму привести к виду:

$$R_{mn}^{nk} + R_{ml}^{kl} = R_{mn}^{nm} + R_{mn}^{mk} + R_{ml}^{km} + R_{ml}^{ml}.$$

Полученные выражения кроме собственных сопротивлений  $R_{ml}^{ml}$  и  $-R_{mn}^{mn}$ , содержат еще сумму  $R_{mn}^{mk} + R_{ml}^{km}$ , которая, как нетрудно показать, равна  $-R_{mk}^{nl}$ .

Следовательно, сопротивление  $R_{mk}^{nl}$  может быть выражено через соответствующие собственные сопротивления следующим образом:

$$R_{mk}^{nl} = \frac{R_{kn}^{kn} + R_{ml}^{ml} - R_{mn}^{mn} - R_{kl}^{kl}}{2}. \quad (2)$$

При этом все контуры напряжения и контуры токов должны иметь одинаковое направление обхода.

Используя общее выражение (2) и применяя для упрощения записи собственных сопротивлений одинарные индексы, можно составить пассивную матрицу датчика в виде уравнения (2а) на стр. 6.

Для определения элементов управляемой  $\bar{R}$ -матрицы необходимо исходить из общего выражения эффекта Холла.

Напряженность поля Холла  $\mathcal{E}_H$ , как известно [10], определяется векторным произведением плотности тока  $j$  на магнитную индукцию  $B$ .

Такое происхождение поля Холла позволяет применять принцип наложения к элементам управляемой матрицы.

С другой стороны можно величину э. д. с. Холла  $E_H$  при токе  $I$  через датчик определить выражением

$$E_H = S_H B I,$$

где  $S_H$  — чувствительность датчика по току ( $v/a$  тл).

14	$R_{14}$	$\frac{R_{24} - R_{21} - R_{14}}{2}$	$\frac{R_{24} - R_{21} - R_{14}}{2}$	$\frac{R_{21} + R_{34} - R_{31} - R_{24}}{2}$	$\frac{R_{31} - R_{41} - R_{34}}{2}$
21	$\frac{R_{24} - R_{21} - R_{14}}{2}$	$R_{21}$	$R_{21}$	$\frac{R_{31} - R_{32} - R_{21}}{2}$	$\frac{R_{32} + R_{41} - R_{42} - R_{31}}{2}$
32	$\frac{R_{21} + R_{34} - R_{31} - R_{24}}{2}$	$\frac{R_{31} - R_{32} - R_{21}}{2}$	$R_{32}$	$R_{32}$	$\frac{R_{42} - R_{43} - R_{32}}{2}$
43	$\frac{R_{31} - R_{41} - R_{34}}{2}$	$\frac{R_{32} + R_{41} - R_{42} - R_{31}}{2}$	$\frac{R_{42} - R_{43} - R_{32}}{2}$	$R_{44}$	

$\|\bar{R}\| =$  (2a)

Произведение  $S_H B$  выражает пропорциональность между э. д. с. Холла  $E_H$  и создающим его током  $I$ , имеет размерность сопротивления и является взаимным сопротивлением этих двух контуров.

При перемене токовых (входных) и холловских (выходных) электродов относительно внешней схемы получаемая э. д. с.  $E'_H$  равна

$$E'_H = S'_H B I.$$

Как указывается в работе [11], можно доказать, что в случае, если датчик имеет хотя бы одну ось симметрии, то  $S_H = -S'_H$ . Практически применяемые формы датчиков Холла приблизительно симметричны по двум осям и условие  $S_H = -S'_H$  практически удовлетворяется и при некоторой асимметрии.

Полученное соотношение показывает, что для элементов управляемой матрицы, определяемых произведением  $S_H B$ , принцип взаимности несправедлив.

Исходя из свойств эффекта Холла сформулируем основные свойства элементов управляемой матрицы  $\|\bar{R}\|$ :

1) изменение направления напряжения между узлами или направления контурных токов меняет знак взаимного сопротивления, т. к. при этом меняется направление э. д. с. Холла

$$\bar{R}_{lk}^{mn} = -\bar{R}_{lk}^{nm} = -\bar{R}_{kl}^{mn};$$

2) из свойств эффекта Холла вытекает, что взаимная замена контуров напряжений и токов меняет знак взаимного сопротивления

$$\bar{R}_{lk}^{mn} = -\bar{R}_{mn}^{lk};$$

3) собственные сопротивления (элементы главной диагонали) равны нулю, т. к. интеграл напряженности поля э. д. с. Холла по любой траектории вектора плотности тока равен нулю

$$\bar{R}_{mn}{}^{mn} = 0;$$

4) принцип наложения применим к контурам напряжений в силу линейности эффекта Холла

$$\bar{R}_{lk}{}^{mn} = \bar{R}_{lk}{}^{mi} + \bar{R}_{lk}{}^{in}$$

и применяя свойство замены контуров напряжений и токов можно показать, что принцип наложения применим также к контурам токов, т. е.

$$\bar{R}_{lk}{}^{mn} = \bar{R}_{li}{}^{mn} + \bar{R}_{ik}{}^{mn}.$$

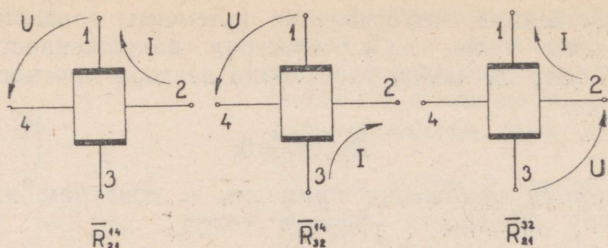
Используя изложение соотношения, можно определить, выбрав независимые взаимные сопротивления, остальные элементы управляемой матрицы.

Как известно, для определения элементов неавтономной матрицы  $n$ -порядка необходимо знать  $(n - 1)^2$  независимых значений. Так как при определении пассивной матрицы использованы  $\frac{n!}{2(n-2)!}$  независимых величин, то для определения элементов управляемой матрицы необходимы дополнительно  $(n - 1)^2 - \frac{n!}{2(n-2)!}$  величины. Следовательно, в случае четырехполюсника для определения элементов управляемой матрицы необходимо иметь три независимых значения, характеризующие э. д. с. Холла.

Независимые взаимные сопротивления (другими словами, контура определяемых э. д. с. Холла и контура токов, создающих эти э. д. с.) могут быть выбраны произвольно. Однако наиболее целесообразно в качестве независимых взаимных сопротивлений выбрать такие элементы матрицы, через которые остальные элементы просто выражаются. Исходя из этих соображений, выбраны в качестве независимых сопротивлений  $\bar{R}_{21}{}^{14}$ ,  $\bar{R}_{32}{}^{14}$  и  $\bar{R}_{21}{}^{32}$ .

Для определения указанных независимых взаимных сопротивлений необходимо по схемам фиг. 2 определить э. д. с. Холла. Практически э. д. с. Холла определяется как половина разности напряжений между соответствующими электродами при двух противоположных направлениях магнитной индукции.

Управляемая матрица датчика э. д. с. Холла, выраженная через выбранные взаимные сопротивления с учетом со-



Фиг. 2. Схема определения независимых взаимных сопротивлений управляемой матрицы

отношений для элементов управляемой матрицы, имеет следующий вид:

	14	21	32	43	
14	0	$\bar{R}_{21}^{14}$	$\bar{R}_{32}^{14}$	$-(\bar{R}_{21}^{14} + R_{32}^{14})$	
21	$-\bar{R}_{21}^{14}$	0	$\bar{R}_{21}^{32}$	$\bar{R}_{21}^{14} - \bar{R}_{14}^{32}$	
32	$-\bar{R}_{32}^{14}$	$-\bar{R}_{21}^{32}$	0	$\bar{R}_{21}^{32} + \bar{R}_{32}^{14}$	
43	$\bar{R}_{21}^{14} + \bar{R}_{32}^{14}$	$\bar{R}_{21}^{32} - \bar{R}_{21}^{14}$	$-(\bar{R}_{32}^{14} + \bar{R}_{21}^{32})$	0	

(3)

В случае симметричного датчика справедливы следующие соотношения:

$$R_{14} = R_{21} = R_{32} = R_{43} = R;$$

$$R_{13} = R_{\text{вх}};$$

$$R_{24} = R_{\text{вых}};$$

$$\bar{R}_{13}^{14} = \bar{R}_{13}^{21} = -\bar{R}_{13}^{32} = -\bar{R}_{13}^{43} = -\bar{R}_{24}^{14} =$$

$$= \bar{R}_{24}^{21} = \bar{R}_{24}^{32} = -\bar{R}_{24}^{43} = \frac{S_{\text{H}} B}{2}.$$

Сумма пассивной и управляемой матрицы, т. е. суммарная матрица датчика может быть приведена к виду уравнения (4) на стр. 9.

Если в расчетах возникает необходимость учесть приращение элементов матрицы за счет некоторой зависимости сопротивлений и чувствительности по току от магнитной ин-

(4)

14	$R$	$R \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{2} - R - \frac{S_{\text{H}} B}{2}$	$R - \frac{R_{\text{ВЫХ}} + R_{\text{ВХ}}}{2}$	$\frac{R_{\text{ВХ}}}{2} - R + \frac{S_{\text{H}} B}{2}$
21	$R \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{2} - R + \frac{S_{\text{H}} B}{2}$	$R$	$R \frac{R_{\text{ВХ}}}{2} - R - \frac{S_{\text{H}} B}{2}$	$R - \frac{R_{\text{ВЫХ}} + R_{\text{ВХ}}}{2}$
32	$R - \frac{R_{\text{ВЫХ}} + R_{\text{ВХ}}}{2}$	$R \frac{R_{\text{ВХ}}}{2} - R + \frac{S_{\text{H}} B}{2}$	$R$	$\frac{R_{\text{ВЫХ}}}{2} - R - \frac{S_{\text{H}} B}{2}$
43	$R \frac{R_{\text{ВХ}}}{2} - R - \frac{S_{\text{H}} B}{2}$	$R - \frac{R_{\text{ВЫХ}} + R_{\text{ВХ}}}{2}$	$R \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{2} - R + \frac{S_{\text{H}} B}{2}$	$R$

$$\|z\| =$$

дукции, то в этом случае можно применить методику, изложенную в [6, 7].

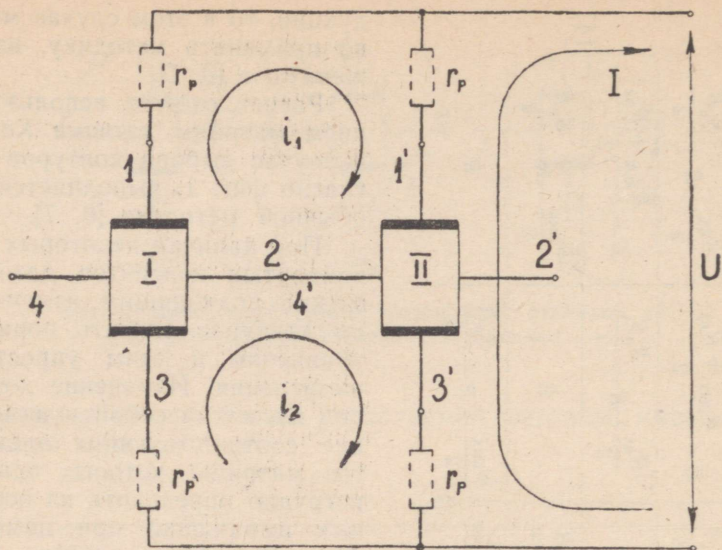
Расчет схем с использованием матрицы датчика Холла в случае выбора контуров согласно фиг. 1. выполняется по обычной методике [6, 7].

При наличии некоторых разомкнутых контактов датчика можно подходящим изменением контуров снизить порядок уравнений и этим упростить вычисления. Изменение контуров влечет за собой и изменение соответствующих элементов матрицы, которых однако нетрудно определить из основных выражений при помощи формулы (1) и свойств элементов управляемой матрицы.

В качестве примера рассмотрим ненагруженную батарею из двух одинаковых симметричных датчиков. Контурные токи выбраны согласно фиг. 3 в одном направлении.

Уравнения контурных токов для рассматриваемого примера примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= z_{3'1'}^{3'1'} I + z_{1'4'}^{3'1'} i_1 + z_{4'3'}^{3'1'} i_2, \\ 0 &= z_{3'1'}^{1'4'} I + (z_{21}^{21} + z_{1'4'}^{1'4'}) i_1 + (z_{32}^{21} + z_{4'3'}^{1'4'}) i_2, \\ 0 &= z_{3'1'}^{4'3'} I + (z_{21}^{32} + z_{1'4'}^{4'3'}) i_1 + (z_{32}^{32} + z_{4'3'}^{4'3'}) i_2. \end{aligned} \right\} (5)$$



Фиг. 3. Схема ненагруженной батареи из двух датчиков

Используя свойства взаимных сопротивлений и матрицу симметричного датчика (4), получим:

$$z_{3'1', 3'1'} = z_{13}^{13} = R_{\text{вх}}$$

$$z_{1'4', 3'1'} = z_{14}^{31} = -z_{14}^{13} = -(z_{14}^{14} + z_{14}^{43}) = -\frac{R_{\text{вх}}}{2} + \frac{S_{\text{н}}B}{2}.$$

Аналогично определяются все остальные значения. Решая систему уравнений (5) относительно токов  $i_1$  и  $i_2$ , получим:

$$i_1 = \frac{I}{2} \left( 1 - \frac{S_{\text{н}}B}{R_{\text{вх}} - 4R} \right), \quad (6)$$

$$i_2 = \frac{I}{2} \left( 1 + \frac{S_{\text{н}}B}{R_{\text{вх}} - 4R} \right). \quad (7)$$

Выходное напряжение 1-го датчика  $U_{42}$  равно:

$$U_{42} = z_{21}^{42}i_1 + z_{32}^{42}i_2$$

или после соответствующего преобразования и учета формул (4), (6) и (7)

$$U_{42} = \frac{S_{\text{н}}BI}{2} \left( 1 - \frac{R_{\text{вых}}}{4R - R_{\text{вх}}} \right). \quad (8)$$

Суммарное напряжение между выходными клеммами в силу симметрии равно

$$U_{42'} = S_n B I \left( 1 - \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{4R - R_{\text{ВХ}}} \right). \quad (9)$$

Для датчиков серии V 3-ТПИ из селенида ртути [9] среднее значение  $R_{\text{ВЫХ}}/R = 1,24$  и  $R_{\text{ВХ}}/R = 1,12$ , а следовательно напряжение батареи, определяемое из уравнения (9), равно

$$U_{42'} = 0,57 S_n I B.$$

Это означает, что при токе  $1/2$  через каждый датчик получаемое повышение выходного напряжения в случае батареи равно 14% по сравнению с одним датчиком.

Эффективность батареи можно увеличить включением разделительных сопротивлений  $r_p$  в токовую цепь.

Считая, что при этом пассивные сопротивления изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} R'_{\text{ВЫХ}} &= R_{\text{ВЫХ}}, \\ R' &= R + r_p, \\ R'_{\text{ВХ}} &= R_{\text{ВХ}} + 2r_p, \end{aligned}$$

получаем из формулы (9) выражение для выходного напряжения батареи, которое равно

$$U'_{42} = S_n I B \left( 1 - \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{4R + 2r_p - R_{\text{ВХ}}} \right). \quad (10)$$

Из (10) следует, что с увеличением  $r_p$  повышается напряжение на выходе батареи, но при этом растут потери энергии во входной цепи.

### Резюме

Предлагаемый в статье метод расчета схем с датчиками Холла применим для любых линейных многополюсников, в которых проявляется эффект Холла.

С целью упрощения расчета матрица датчика Холла искусственно разделена на пассивную и управляемую матрицу. Приведены условия выбора независимых величин и расчета элементов  $z$ -матрицы.

В качестве примера применения произведен расчет ненагруженной батареи из двух одинаковых датчиков.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Epstein, H. Sachs, L. Greenstein. Multipl. Element Hall-Effect sensor. Proc. IRE 1959, vol. 47, p. 2014.
2. H. Bottenberg. Wirkleistungsmessung bei Hochfrequenz, Teil I. ATM, Mai 1963, S. 105—108.
3. G. Arlt. Efficiency and linearity of multicontact Hall plates. Intern. Solid. St. Circuits Conf. Phil., Feb., 1961.
4. A. R. Billing. A Hall effect function generator using thin semiconductor films. Proc. IRE Austr. 1962, Nr 7, 412—415.
5. С. Катаока, Х. Ямада. Генератор функции  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , использующий гальваномагнитный эффект в полупроводниках. Труды Инст. радиоинженеров (русск. перевод), 1962, № 12.
6. В. П. Сигорский. Анализ электронных схем. Гостехиздат, УССР, Киев, 1964.
7. Л. Я. Нагорный. Анализ и расчет усилительных схем. Гостехиздат УССР, Киев, 1963.
8. В. В. Серков. Эффект дополнительного изменения сопротивления полупроводников в магнитном поле, вызванный вторичным эффектом э. д. с. Холла. Автоматика и телемеханика 1962, № 3, стр. 383.
9. Г. Вяльямяз, В. Кукк, Ю. Рехепалп, Х. Хаак, В. Хейнрихсен. Некоторые вопросы изготовления и исследования пленочных датчиков Холла из селенида ртути. Труды ТПИ, серия А, № 213, 1964.
10. Р. Смит. Полупроводники. Изд. ИЛ, Москва, 1962.
11. С. В. Burckhardt, I. O. Strutt. Noise in Nonreciprocal Two Ports Based on Hall Effect. IEEE Transactions of Electron Devices. Vol. ED.-11, Feb. 1964, Nr 2, p. 47.

*В. Кукк, Х. Росс*

## О КОНФИГУРАЦИИ ДАТЧИКА ХОЛЛА

### 1. Введение

Как известно, более важными параметрами датчика Холла являются его сопротивления и проводимости, которые зависят от геометрии датчика и от угла Холла  $\theta$ . В [1] было указано, что геометрию симметричного датчика можно характеризовать двумя обобщенными геометрическими параметрами  $x_1$  и  $x_2$ . При этом все датчики, имеющие одинаковые значения  $x_1$  и  $x_2$ , полностью эквивалентны, независимо от формы датчика. Это позволяет сравнительно легко определить как конфигурации по заданным  $x_1$  и  $x_2$  (и наоборот), так и сопротивления как функции от  $x_1$ ,  $x_2$  и  $\theta$ . Для этого необходимо вычислить вспомогательные параметры, т. е. нормированные сопротивления для разных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\theta$ .

В данной работе даются результаты вычислений нормированных сопротивлений и проводимостей для симметричных датчиков, позволяющие определить сопротивления и проводимости и исследовать другие проблемы, связанные с конфигурацией датчика. Выводятся некоторые аналитические и графические зависимости для упрощения расчетов. Основное внимание в работе уделено симметричному прямоугольному датчику.

### 2. Нормированные сопротивления и проводимости

Как было указано в [1], входное сопротивление  $r_{en}$ , выходное сопротивление  $r_{ex}$ , сопротивление плеча  $r$  и сопротивление Холла  $r_H$  определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} r_{en} &= \frac{\rho}{d} G_{en}, & r &= \frac{\rho}{d} G, \\ r_{ex} &= \frac{\rho}{d} G_{ex}, & r_H &= \frac{\rho}{d} G_H, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала датчика,  
 $d$  — толщина датчика,  
 $G_{en}, G_{ex}, G, G_H$  — нормированные сопротивления датчика.

Кроме сопротивлений важными параметрами датчика являются его проводимости, особенно в расчетах схем с датчиками Холла [2]. Проводимости определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{d}{\rho} G_0, & g_2 &= \frac{d}{\rho} G_2, \\ g_1 &= \frac{d}{\rho} G_1, & g &= \frac{d}{\rho} G'_H, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $G_0, G_1, G_2, G'_H$  — нормированные проводимости.

Приведенные нормированные сопротивления и проводимости являются функциями от параметров  $x_1, x_2$  и  $\theta$ . Сущность параметров  $x_1$  и  $x_2$  заключается в том, что  $x_1$  определяет расположение крайней точки входного и  $x_2$  выходного электрода (1). Если средняя точка входного электрода соответствует началу координат, то  $x_1$  определяет ширину этого электрода. Очевидно, что при этом  $x_2 > x_1$ . Для того, чтобы определить таким же образом ширину выходного электрода, необходимо рассматривать его как входного. При этом параметр  $x$ , соответствующий любой точке края датчика, преобразуется по следующему закону

$$x^* = \frac{1-x}{1+x}. \quad (3)$$

Очевидно, что при вышеуказанных условиях ширина выходного электрода определяется параметром  $x_2^*$ .

### 3. Таблицы нормированных сопротивлений и проводимостей

Нормированные сопротивления и проводимости были вычислены на ЭЦВМ АН ЭССР по методике, указанной в [1] для разных значений  $x_1, x_2$  и  $\theta$ . Результаты вычислений приведены в таблицах 1, 2, 3, 4, 5.

Результаты в приведенных таблицах округлены до двух десятичных знака. При этом некоторые значения аргумента  $x_1$  в таблицах указаны приближенно:

$$\frac{1}{19} \approx 0,05; \quad \frac{1}{9} \approx 0,11; \quad \frac{3}{17} \approx 0,18; \quad \frac{1}{3} \approx 0,33; \quad \sqrt{2} - 1 \approx 0,41.$$

Выбор  $x_1$  и  $x_2$  позволяет дополнительно определить сопротивления и проводимости для 25 конфигураций датчика. Для

этого следует табличные аргументы менять по следующей схеме:

$$x_1 \rightarrow x_2^*, x_2 \rightarrow x_1^*, G_{en} \rightarrow G_{ex}, G_{ex} \rightarrow G_{en}, \\ G \rightarrow G, G_H \rightarrow G_H, G_0 \rightarrow G_0, G_1 \rightarrow G_2, G_2 \rightarrow G_1, G'_H \rightarrow G'_H.$$

Используя интерполяцию можно определить сопротивления и проводимости любой конфигурации симметричного датчика.

Таблица 1

$$\theta = 0,0$$

$x_1$	$x_2$	$G_{en}$	$G_{ex}$	$G$	$G_H$	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G'_H$
0,05	0,90	2,3	2,3	2,09	0,0	0,27	0,44	0,43	0,0
0,11	0,90	1,84	2,30	1,85	0,0	0,31	0,44	0,54	0,0
0,18	0,90	1,54	2,28	1,69	0,0	0,34	0,44	0,65	0,0
0,25	0,90	1,32	2,24	1,57	0,0	0,37	0,45	0,76	0,0
0,33	0,90	1,14	2,17	1,45	0,0	0,40	0,46	0,88	0,0
0,41	0,90	1,00	2,09	1,35	0,0	0,43	0,48	1,01	0,0
0,50	0,90	0,87	1,99	1,25	0,0	0,47	0,50	1,15	0,0
0,60	0,90	0,75	1,83	1,12	0,0	0,52	0,55	1,34	0,0
0,70	0,90	0,64	1,62	0,98	0,0	0,60	0,62	1,58	0,0
0,80	0,90	0,52	1,31	0,79	0,0	0,75	0,76	1,92	0,0
0,11	0,80	1,82	1,82	1,61	0,0	0,36	0,55	0,55	0,0
0,18	0,80	1,53	1,80	1,45	0,0	0,40	0,56	0,65	0,0
0,25	0,80	1,31	1,76	1,32	0,0	0,45	0,57	0,77	0,0
0,33	0,80	1,12	1,69	1,21	0,0	0,50	0,59	0,89	0,0
0,41	0,80	0,98	1,61	1,10	0,0	0,55	0,62	1,02	0,0
0,50	0,80	0,85	1,50	1,00	0,0	0,61	0,67	1,18	0,0
0,60	0,80	0,72	1,33	0,86	0,0	0,71	0,75	1,39	0,0
0,70	0,80	0,59	1,09	0,70	0,0	0,90	0,92	1,71	0,0
0,18	0,70	1,50	1,50	1,29	0,0	0,46	0,67	0,67	0,0
0,25	0,70	1,28	1,46	1,16	0,0	0,52	0,69	0,78	0,0
0,33	0,70	1,09	1,39	1,04	0,0	0,59	0,72	0,92	0,0
0,41	0,70	0,94	1,30	0,94	0,0	0,67	0,77	1,06	0,0
0,50	0,70	0,80	1,18	0,82	0,0	0,77	0,85	1,24	0,0
0,60	0,70	0,65	0,97	0,66	0,0	0,97	1,03	1,54	0,0
0,25	0,60	1,23	1,23	1,03	0,0	0,60	0,81	0,81	0,0
0,33	0,60	1,04	1,16	0,91	0,0	0,70	0,87	0,97	0,0
0,41	0,60	0,88	1,05	0,79	0,0	0,81	0,95	1,14	0,0
0,50	0,60	0,71	0,90	0,65	0,0	1,01	1,11	1,40	0,0
0,33	0,50	0,94	0,94	0,77	0,0	0,84	1,06	1,06	0,0
0,41	0,50	0,75	0,81	0,63	0,0	1,06	1,24	1,33	0,0

Таблица 2

$$\theta = 0,1 \pi$$

$x_1$	$x_2$	$G_{en}$	$G_{ex}$	$G$	$G_H$	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G'_H$
0,05	0,90	2,4	2,4	2,15	0,3	0,26	0,42	0,42	0,05
0,11	0,90	1,9	2,35	1,91	0,28	0,30	0,42	0,52	0,06
0,18	0,90	1,60	2,33	1,75	0,27	0,33	0,42	0,61	0,07
0,25	0,90	1,37	2,29	1,62	0,25	0,35	0,43	0,71	0,08
0,33	0,90	1,19	2,23	1,51	0,23	0,38	0,44	0,83	0,08
0,41	0,90	1,05	2,16	1,41	0,21	0,41	0,46	0,94	0,09
0,50	0,90	0,92	2,05	1,30	0,18	0,45	0,48	1,07	0,10
0,60	0,90	0,79	1,90	1,18	0,16	0,50	0,52	1,24	0,10
0,70	0,90	0,68	1,69	1,03	0,13	0,57	0,58	1,45	0,11
0,80	0,90	0,56	1,38	0,84	0,10	0,71	0,71	1,76	0,13
0,11	0,80	1,88	1,88	1,66	0,27	0,35	0,52	0,52	0,07
0,18	0,80	1,58	1,86	1,51	0,25	0,39	0,53	0,62	0,08
0,25	0,80	1,36	1,82	1,38	0,23	0,43	0,54	0,72	0,09
0,33	0,80	1,17	1,75	1,26	0,21	0,47	0,56	0,83	0,10
0,41	0,80	1,03	1,67	1,16	0,19	0,52	0,59	0,95	0,11
0,50	0,80	0,90	1,56	1,05	0,16	0,58	0,63	1,09	0,11
0,60	0,80	0,76	1,40	0,91	0,13	0,67	0,71	1,29	0,12
0,70	0,80	0,63	1,15	0,74	0,10	0,84	0,86	1,57	0,13
0,18	0,70	1,56	1,56	1,35	0,23	0,44	0,63	0,63	0,09
0,25	0,70	1,33	1,52	1,22	0,21	0,49	0,64	0,73	0,10
0,33	0,70	1,14	1,45	1,10	0,19	0,56	0,68	0,86	0,11
0,41	0,70	0,99	1,36	0,99	0,16	0,63	0,72	0,99	0,12
0,50	0,70	0,85	1,24	0,87	0,14	0,72	0,79	1,15	0,13
0,60	0,70	0,69	1,03	0,71	0,10	0,90	0,95	1,42	0,14
0,25	0,60	1,29	1,29	1,09	0,19	0,57	0,76	0,76	0,11
0,33	0,60	1,09	1,21	0,96	0,16	0,65	0,81	0,90	0,12
0,41	0,60	0,93	1,11	0,84	0,14	0,76	0,88	1,06	0,13
0,50	0,60	0,76	0,96	0,70	0,10	0,93	0,10	1,29	0,14
0,33	0,50	1,00	1,00	0,82	0,13	0,79	0,98	0,98	0,13
0,41	0,50	0,80	0,86	0,67	0,10	0,98	1,14	1,23	0,14

Таблица 3

$$\theta = 0,2 \pi$$

$x_1$	$x_2$	$G_{en}$	$G_{ex}$	$G$	$G_H$	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G'_H$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,05	0,90	2,5	2,5	2,3	0,66	0,23	0,36	0,36	0,09
0,11	0,90	2,09	2,55	2,10	0,64	0,27	0,36	0,44	0,11
0,18	0,90	1,79	2,53	1,95	0,61	0,29	0,36	0,52	0,12
0,25	0,90	1,57	2,50	1,82	0,57	0,31	0,37	0,59	0,13
0,33	0,90	1,38	2,45	1,70	0,53	0,33	0,38	0,67	0,14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,41	0,90	1,23	2,38	1,60	0,49	0,36	0,39	0,75	0,15
0,50	0,90	1,10	2,28	1,50	0,44	0,38	0,41	0,84	0,16
0,60	0,90	0,97	2,14	1,37	0,39	0,42	0,44	0,97	0,17
0,70	0,90	0,84	1,94	1,22	0,33	0,47	0,48	1,12	0,19
0,80	0,90	0,71	1,63	1,02	0,25	0,58	0,58	1,34	0,21
0,11	0,80	2,08	2,08	1,86	0,61	0,31	0,44	0,44	0,13
0,18	0,80	1,78	2,06	1,70	0,58	0,34	0,45	0,51	0,14
0,25	0,80	1,55	2,02	1,57	0,54	0,37	0,45	0,59	0,16
0,33	0,80	1,36	1,96	1,45	0,49	0,40	0,47	0,67	0,17
0,41	0,80	1,22	1,89	1,35	0,45	0,44	0,49	0,76	0,18
0,50	0,80	1,08	1,79	1,24	0,40	0,48	0,52	0,86	0,19
0,60	0,80	0,94	1,63	1,10	0,33	0,55	0,57	1,00	0,20
0,70	0,80	0,79	1,38	0,92	0,25	0,67	0,69	1,20	0,22
0,18	0,70	1,76	1,76	1,54	0,54	0,38	0,52	0,52	0,16
0,25	0,70	1,53	1,72	1,41	0,50	0,42	0,53	0,60	0,17
0,33	0,70	1,34	1,66	1,29	0,45	0,47	0,55	0,69	0,19
0,41	0,70	1,18	1,58	1,17	0,40	0,52	0,58	0,78	0,20
0,50	0,70	1,04	1,46	1,05	0,34	0,59	0,64	0,90	0,21
0,60	0,70	0,86	1,25	0,88	0,25	0,72	0,75	1,09	0,22
0,25	0,60	1,49	1,49	1,27	0,45	0,47	0,62	0,62	0,19
0,33	0,60	1,29	1,42	1,14	0,40	0,54	0,65	0,72	0,20
0,41	0,60	1,12	1,32	1,02	0,34	0,61	0,70	0,83	0,21
0,50	0,60	0,94	1,16	0,86	0,26	0,74	0,81	1,00	0,22
0,33	0,50	1,20	1,20	0,99	0,33	0,63	0,78	0,78	0,21
0,41	0,50	0,99	1,06	0,83	0,25	0,78	0,89	0,95	0,22

Таблица 4

$$\theta = 0,3 \pi$$

$x_1$	$x_2$	$G_{en}$	$G_{ex}$	$G$	$G_H$	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G'_H$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,05	0,90	3,1	3,1	2,83	1,28	0,19	0,28	0,28	0,12
0,11	0,90	2,58	3,04	2,59	1,25	0,21	0,27	0,32	0,13
0,18	0,90	2,28	3,03	2,43	1,20	0,23	0,27	0,36	0,14
0,25	0,90	2,05	3,00	2,31	1,14	0,24	0,27	0,40	0,15
0,33	0,90	1,85	2,96	2,19	1,07	0,25	0,28	0,45	0,16
0,41	0,90	1,70	2,90	2,09	1,01	0,27	0,29	0,49	0,17
0,50	0,90	1,56	2,83	1,99	0,93	0,28	0,30	0,54	0,18
0,60	0,90	1,41	2,70	1,85	0,84	0,30	0,31	0,60	0,19
0,70	0,90	1,26	2,53	1,70	0,74	0,33	0,34	0,68	0,20
0,80	0,90	1,10	2,24	1,48	0,60	0,39	0,39	0,80	0,21
0,11	0,80	2,57	2,57	2,34	1,20	0,24	0,32	0,32	0,15
0,18	0,80	2,27	2,55	2,18	1,15	0,26	0,32	0,36	0,16
0,25	0,80	2,04	2,52	2,04	1,09	0,27	0,32	0,40	0,17
0,33	0,80	1,84	2,48	1,93	1,02	0,29	0,33	0,44	0,18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,41	0,80	1,68	2,42	1,83	0,94	0,31	0,34	0,49	0,19
0,50	0,80	1,54	2,33	1,71	0,86	0,34	0,36	0,54	0,20
0,60	0,80	1,38	2,18	1,56	0,75	0,37	0,39	0,61	0,21
0,70	0,80	1,21	1,94	1,36	0,60	0,44	0,45	0,72	0,22
0,18	0,70	2,25	2,25	2,02	1,09	0,28	0,36	0,36	0,17
0,25	0,70	2,02	2,22	1,89	1,03	0,30	0,36	0,40	0,19
0,33	0,70	1,82	2,17	1,76	0,95	0,33	0,38	0,45	0,20
0,41	0,70	1,65	2,10	1,64	0,86	0,36	0,39	0,50	0,21
0,50	0,70	1,50	1,99	1,51	0,76	0,39	0,42	0,56	0,21
0,60	0,70	1,30	1,79	1,31	0,61	0,46	0,48	0,66	0,23
0,25	0,60	1,98	1,98	1,75	0,96	0,33	0,41	0,41	0,20
0,33	0,60	1,77	1,92	1,61	0,86	0,37	0,43	0,46	0,21
0,41	0,60	1,60	1,83	1,47	0,76	0,41	0,46	0,52	0,22
0,50	0,60	1,40	1,68	1,30	0,62	0,48	0,51	0,61	0,23
0,33	0,50	1,69	1,69	1,45	0,75	0,42	0,49	0,49	0,22
0,41	0,50	1,47	1,55	1,26	0,60	0,49	0,56	0,59	0,23

Таблица 5

$$\theta = 0,4 \pi$$

$x_1$	$x_2$	$G_{en}$	$G_{ex}$	$G$	$G_H$	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G'_H$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,05	0,90	4,62	4,62	4,40	2,96	0,12	0,15	0,15	0,10
0,11	0,90	4,14	4,62	4,16	2,91	0,13	0,15	0,17	0,11
0,18	0,90	3,84	4,61	4,00	2,84	0,13	0,15	0,18	0,11
0,25	0,90	3,60	4,59	3,87	2,76	0,14	0,15	0,19	0,11
0,33	0,90	3,40	4,57	3,75	2,67	0,14	0,15	0,20	0,12
0,41	0,90	3,23	4,53	3,65	2,57	0,15	0,15	0,21	0,12
0,50	0,90	3,08	4,48	3,55	2,46	0,15	0,16	0,23	0,12
0,60	0,90	2,90	4,40	3,41	2,32	0,16	0,16	0,24	0,13
0,70	0,90	2,72	4,28	3,25	2,14	0,17	0,17	0,26	0,13
0,80	0,90	2,51	4,05	3,02	1,89	0,18	0,18	0,30	0,14
0,11	0,80	4,14	4,14	3,91	2,85	0,14	0,16	0,16	0,11
0,18	0,80	3,83	4,13	3,75	2,77	0,14	0,16	0,18	0,12
0,25	0,80	3,60	4,11	3,61	2,69	0,15	0,16	0,19	0,12
0,33	0,80	3,39	4,08	3,49	2,59	0,15	0,17	0,20	0,13
0,41	0,80	3,22	4,04	3,38	2,48	0,16	0,17	0,21	0,13
0,50	0,80	3,06	3,99	3,26	2,35	0,17	0,17	0,22	0,13
0,60	0,80	2,88	3,88	3,10	2,17	0,18	0,18	0,24	0,14
0,70	0,80	2,67	3,69	2,87	1,91	0,20	0,20	0,27	0,14
0,18	0,70	3,82	3,82	3,58	2,70	0,15	0,17	0,17	0,12
0,25	0,70	3,59	3,81	3,44	2,60	0,16	0,18	0,19	0,13
0,33	0,70	3,38	3,77	3,31	2,49	0,16	0,18	0,20	0,13
0,41	0,70	3,20	3,73	3,18	2,36	0,17	0,18	0,21	0,14
0,50	0,70	3,03	3,65	3,04	2,20	0,18	0,19	0,23	0,14
0,60	0,70	2,82	3,49	2,81	1,93	0,20	0,21	0,26	0,14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,25	0,60	3,56	3,56	3,29	2,50	0,17	0,19	0,19	0,13
0,33	0,60	3,35	3,52	3,14	2,36	0,18	0,19	0,20	0,14
0,41	0,60	3,16	3,46	2,99	2,19	0,19	0,20	0,22	0,14
0,50	0,60	2,96	3,33	2,79	1,96	0,21	0,22	0,24	0,14
0,33	0,50	3,29	3,29	2,96	2,18	0,19	0,21	0,21	0,14
0,41	0,50	3,06	3,17	2,74	1,92	0,21	0,23	0,24	0,14

**Пример 1**

Прямоугольный датчик имеет следующие размеры: длина 13,0 мм, ширина 9,8 мм, толщина 0,1 мм, ширина входных электродов 13,0 мм, ширина холловских электродов 0,75 мм; найти сопротивления датчика при  $\varrho = 10^{-2}$  ом и  $\theta = 0,1 \pi$ .

Вычисляем значения  $x_1$  и  $x_2$  (см. пример 3) —  $x_1 = 0,25$ ,  $x_2 = 0,9$ . Из таблицы 2 найдем:  $G_{en} = 1,37$ ,  $G_{ex} = 2,29$ ,  $G = 1,62$ ,  $G_H = 0,25$ . Следовательно  $r_{en} = 137$  ом,  $r_{ex} = 229$  ом,  $r = 162$  ом,  $r_H = 25$  ом.

**Пример 2**

Пусть  $x_1 = 0,111$  и  $x_2 = 0,60$ . Таких значений параметров в таблицах нет. Поэтому найдем  $x_1^* = 0,80$ ,  $x_2^* = 0,25$  и  $G_{en} = 1,82$ ,  $G_{ex} = 1,36$ ,

$G = 1,38$ ,  $G_H = 0,23$  и т. д. ( $\theta = 0,1 \pi$ ). Следовательно, при  $\frac{\varrho}{d} = 100$  ом,  $r_{en} = 182$  ом,  $r_{ex} = 136$  ом,  $r = 138$  ом,  $r_H = 23$  ом,  $g_0 = 0,0043$  ом<sup>-1</sup>,  $g_1 = 0,0072$  ом<sup>-1</sup>,  $g_2 = 0,0054$  ом<sup>-1</sup>,  $g = 0,0009$  ом<sup>-1</sup>.

**4. Анализ результатов вычислений**

Первоначальные выводы были указаны в работе [1]. Здесь мы приведем некоторые новые результаты.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{G_{ex}}{G_{en}}, \quad \beta = \frac{G}{G_{en}}, \quad \gamma = \frac{G_H}{G_{en}}, \quad \varphi_1 = 2\beta - \alpha, \quad \varphi_2 = \frac{2\beta - 1}{\alpha}. \quad (4)$$

Оказывается, что на значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  очень мало влияют соответственно  $x_2$  и  $x_1$ . Следовательно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно считать функциями одного аргумента

$$\varphi_1 = \varphi_1(x_1), \quad \varphi_2 = \varphi_2(x_2). \quad (5)$$

Анализ этих функций показал, что их можно характеризовать следующими уравнениями:

$$E_1 = \frac{4(1 - \varphi_1)^2}{(1 - \gamma^2)^2} + (1 - x_1)^2 \approx 1, \quad (6)$$

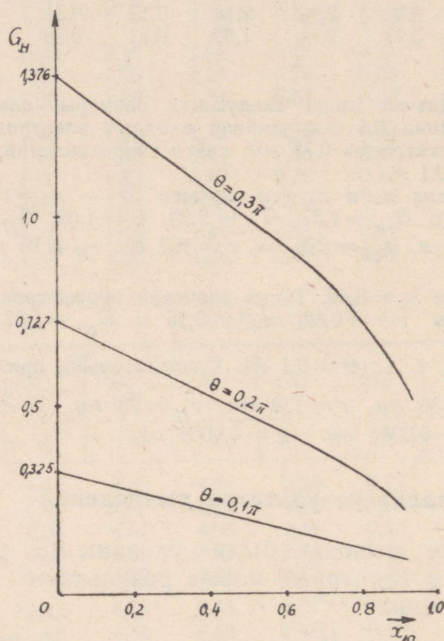
$$E_2 = \frac{4(1 - \varphi_2)^2}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2} + (1 - x_2^*)^2 \approx 1.$$

Притом  $E_1$  и  $E_2$  отличаются от единицы не более нескольких процентов. Формулы (6) позволяют оценить значения  $\alpha$  и  $\beta$  по  $x_1$  и  $x_2$ . При обратных вычислениях надо иметь в виду,

что  $\alpha$  и  $\beta$  нельзя задавать произвольно, а придется учитывать ограничения, указанные в [2].

Была выведена и формула для определения  $G_H$ . Оказалось, что  $G_H$  с высокой точностью зависит только от параметра

$$x_{10} = \frac{1 + 2x_1 - x_2}{1 + x_2} = x_1 + x_2^* + x_1x_2^*. \quad (7)$$



Фиг. 1

Зависимость  $G_H = f(x_{10}, \theta)$  представлена на фиг. 1. Видно, что при маленьких значениях  $x_{10}$  зависимость  $G_H$  от  $x_{10}$  линейна; последняя соблюдается особенно хорошо при маленьких значениях  $\theta$  — вплоть до  $x_{10} = 1$ . Она описывается соотношением

$$G_H = \operatorname{tg} \theta - kx_{10} \quad (8a)$$

или для маленьких значений  $\theta$

$$G_H = \theta(1 - kx_{10}). \quad (8b)$$

На основе результатов работы [3] получаем для  $x_2 = 1$  значение  $k = \frac{8}{\pi^2} = 0,81$ . ... Однако для уменьшения максимальной погрешности следует принимать  $k = 0,8$ , являющимся оптимальным для любого  $x_1, x_2$ .

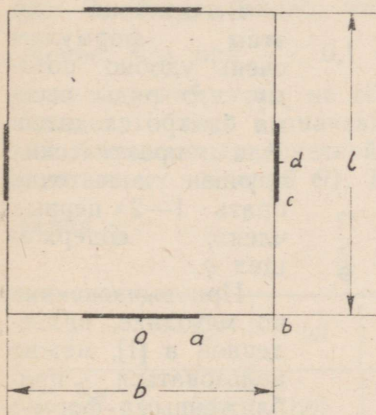
Для больших значений угла Холла можно получить формулу

$$G_H = \operatorname{tg} \theta - 0,8\theta \operatorname{Arth} x_{10}. \quad (9)$$

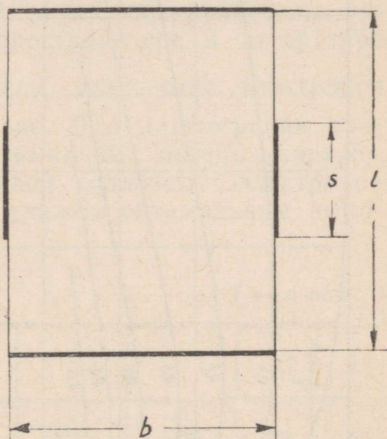
При помощи формул (8) и (9) можно вычислить сопротивление Холла с достаточной точностью.

### 5. Прямоугольный датчик (фиг. 2а)

Более обстоятельное рассмотрение прямоугольного датчика обосновано следующим: во-первых, практически датчики без исключения прямоугольные (это связано с тем, что первые датчики были монокристаллические, для которых такая конструкция является наиболее простой, хотя изготовление пленочных датчиков иной формы испарением в вакууме не сложнее), а во-вторых, гипотезой, что такая форма является оптимальным в некотором смысле (например, для теплового режима).



Фиг. 2а



Фиг. 2б

Сначала, очевидно, надо найти соотношения между геометрическими размерами датчика и параметрами  $x_1$  и  $x_2$ . Эти соотношения и соответствующие кривые приведены в работе [1].

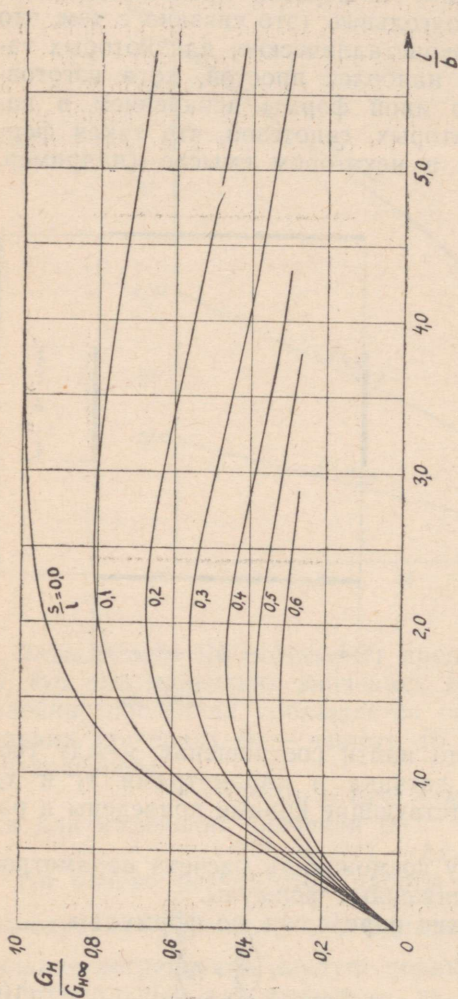
Укажем здесь еще одну возможность расчета параметров  $x_1$  и  $x_2$  и некоторые приближенные формулы.

Параметры  $x_1$  и  $x_2$  можно определить по формулам

$$x_1 = \frac{\vartheta_1\left(\frac{m}{2}, q_1\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{2}, q_1\right)}, \quad x_2^* = \frac{\vartheta_1\left(\frac{n}{2}, q_2\right)}{\vartheta_0\left(\frac{n}{2}, q_2\right)}, \quad (10)$$

где  $\vartheta_0(y, q)$  и  $\vartheta_1(y, q)$  — функции тэта, определяемые рядами [4]:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} \cos 2k\pi y, \\ \vartheta_1 &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{(k+\frac{1}{2})^2} \sin (2k+1)\pi y, \end{aligned} \quad (11)$$



Фиг. 3

где  $q_1 = e^{-2\pi \frac{l}{b}}$ ,

$q_2 = e^{-2\pi \frac{b}{l}}$ ,

$m = \frac{oa}{ob}$ ,  $n = \frac{bc}{bd}$ ,

Вычисление по этим формулам очень удобно потому, что ряды весьма быстро сходятся. Для практических случаев достаточно брать 1—2 первых члена, содержащих  $q$ .

При вычислениях по методике, приведенной в [1], можно пользоваться приближенными формулами (фиг. 2б):

$$x_b^2 \approx 1 - 8 \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{l}{b}\right) \quad (1\%; \quad 0 \leq \frac{l}{b} \leq 0,35),$$

$$x_b^2 \approx 4 \exp\left(-\pi \frac{l}{b}\right) \quad (1\%; \quad 0,85 \leq \frac{l}{b} < \infty), \quad (12)$$

$$\operatorname{sn} mK \approx \sin m \frac{\pi}{2} \quad (1\%; \quad 0,94 \leq \frac{l}{b} < \infty),$$

$$\operatorname{sn} \frac{s}{l} K \approx \operatorname{th} \frac{\pi}{4} \frac{s}{b} \quad (1\%; \quad 3,9 \leq \frac{l}{b} \leq \infty)..$$

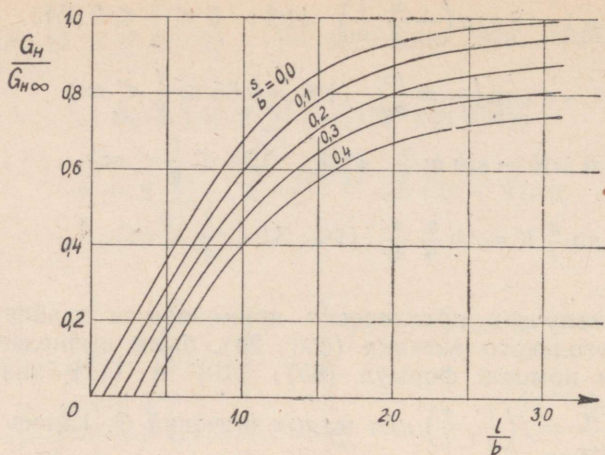
Чтобы получить практически применяемые зависимости для прямоугольного датчика (фиг. 2b), были вычислены на ЭЦВМ при помощи формул (8b), (10) и (11) значения функции  $\frac{G_H}{G_{H\infty}} = f\left(\frac{l}{b}, \frac{s}{l}\right)$  для малых значений  $\theta$ . (Здесь  $G_{H\infty}$  обозначает максимальное значение  $G_H$  при данном  $\theta$  —  $G_{H\infty} = \operatorname{tg} \theta$ ). Графики этой функции приведены на фиг. 3. Оттуда видно, что распространенное в литературе мнение, что при  $\frac{s}{l} < 0,1$  влиянием холловских электродов можно пренебрегать, не обосновано. Для иллюстрации приведем в таблице 6 значения минимальных потерь напряжения, вызываемых конечной шириной холловских электродов (для малых значений  $\theta$ ). Также укажем оптимальные отношения  $\frac{l}{b}$ .

Таблица 6

$\frac{s}{l}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$1 - \frac{G_H}{G_{H\infty}}$	0%	19%	33%	45%	54%	62%	69%
$\frac{l}{b} \text{ opt}$	$\infty$	2,5	1,9	1,8	1,8	1,7	1,5

На фиг. 4 изображена функция  $\frac{G_H}{G_{H\infty}} = f\left(\frac{s}{b}, \frac{l}{b}\right)$ . Ею можно пользоваться, если заданы  $s$  и  $b$  и требуется найти  $l$ .

В отношении вычисления остальных сопротивлений укажем работу [5], где приведены зависимости  $G_{ex} = f\left(\frac{l}{b}, \frac{s}{l}\right)$  для  $\theta = 0$ .



Фиг. 4

### Пример 3.

Вычисляем параметры  $x_1$  и  $x_2$  для датчика примера 1. Определяем  $\frac{l}{b} = 1,325$ ,  $\frac{s}{l} = n = 0,0568$ ,  $m = 1$ ;  $\ln q_1 = -8,33$ ,  $\ln q_2 = -4,74$ .

Пользуясь первыми членами рядов (11) (погрешность ничтожна), найдем

$$x_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0} = \frac{2 \cdot 0,125 \cdot 1}{1 + 2 \cdot 2,42 \cdot 10^{-4}} = 0,25,$$

$$x_2^* = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0} = \frac{2 \cdot 0,296 \cdot 0,090}{1 + 2 \cdot 8,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,98} = 0,0526$$

или

$$x_2 = \frac{0,947}{1,053} = 0,90.$$

Для нахождения  $G_N$  вычисляем  $x_{10}$ :

$$x_{10} = 0,25 + 0,053 + 0,013 = 0,313$$

и при помощи формулы (8а)

$$G_N = 0,325 - 0,8 \cdot 0,314 \cdot 0,313 = 0,246.$$

Отметим, что последний результат точнее, чем табличный 0,25.

## 6. Заключение

В данной работе приведены некоторые результаты исследования соотношений между конфигурацией и электрическими параметрами датчика Холла. Полученные результаты могут быть использованы как при конструировании гальва-

номагнитных приборов, так и при обработке экспериментальных данных (экспериментальное определение функций  $\theta = f(B)$ ,  $\rho = f(B)$ ). Более подробно изучена прямоугольная конструкция, для которой приведены графики для определения сопротивления Холла по геометрическим размерам датчика.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Росс, В. Кукк. Расчетное определение некоторых параметров датчика Холла. Труды Таллинского ПИ, сер. А, № 213, стр. 13.
2. В. Кукк, Х. Росс. Схема замещения датчика Холла (в настоящем сборнике, см. стр. 27).
3. Н.-J. Lippmann und F. Kuhrt. Der Geometrieinfluß auf den Hall-Effekt bei rechteckigen Halbleiterplatten. Z. Naturforschg., 1958, Bd 13a, S. 474.
4. А. М. Журавский. Справочник по эллиптическим функциям. Изд. АН СССР, М.—Л., 1941.
5. S. K. Datta and A. N. Daw. The Hall Side Resistance of a Hall Generator. Z. Naturforschg., 1964, Bd 19a, H. 3, p. 392.

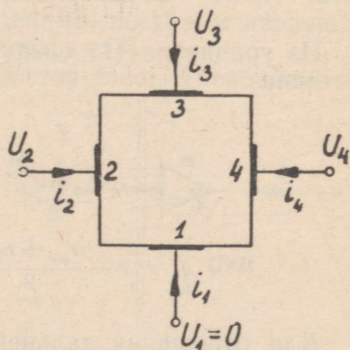
## СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ДАТЧИКА ХОЛЛА

### 1. Введение

Применение гальваномагнитных приборов в технике расширяется. Поэтому необходимо усовершенствовать методику расчета цепей с гальваномагнитными приборами, в которой имеются серьезные недостатки. Среди гальваномагнитных приборов наиболее распространены симметричные четырех-контактные датчики Холла. Они могут работать в двух режимах: с разделенными цепями и с неразделенными цепями.

К первому режиму относятся такие схемы включения датчика, в которых нет никаких внешних соединений между входными (1,3) и выходными (2,4) контактами (фиг. 1).

Фиг. 1. Датчик Холла



В этом режиме датчик является непроходным необратимым четырехполюсником, и он довольно подробно изучен [1, 2].

Режим с неразделенными цепями (могут быть любые внешние соединения) по данным литературы не исследован. Исследование этого режима является главной целью данной работы.

Как известно, геометрически симметричный датчик Холла при некоторых условиях, которые на практике обычно выполняются, характеризуется следующими уравнениями [3]:

$$\begin{aligned} U_2 &= r i_2 + \frac{r_{en} + r_H}{2} i_3 + \left( r - \frac{r_{ex} - r_H}{2} \right) i_4, \\ U_3 &= \frac{r_{en} - r_H}{2} i_2 + r_{en} i_3 + \frac{r_{en} + r_H}{2} i_4, \\ U_4 &= \left( r - \frac{r_{ex} + r_H}{2} \right) i_2 + \frac{r_{en} - r_H}{2} i_3 + r i_4, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r_{en}$  — входное сопротивление датчика (контакты 1—3),  
 $r_{ex}$  — выходное сопротивление датчика (контакты 2—4),  
 $r$  — сопротивление «плеча» (между соседними контактами),  
 $r_H$  — сопротивление Холла, т. е. взаимное сопротивление между входной и выходной цепями (при нулевой индукции  $r_H = 0$ ).

Четырехполюсник, удовлетворяющий данным уравнениям и условиям, указанным в таблице 1, называем симметричным датчиком Холла.\*

Перейдем к исследованию такого четырехполюсника.

## 2. Матрицы и схемы замещения

Из уравнения (1) следует матрица полных сопротивлений датчика

$$Z = \begin{vmatrix} r & \frac{r_{en} + r_H}{2} & r - \frac{r_{ex} - r_H}{2} \\ \frac{r_{en} - r_H}{2} & r_{en} & \frac{r_{en} + r_H}{2} \\ r - \frac{r_{ex} + r_H}{2} & \frac{r_{en} - r_H}{2} & r \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений введем обозначения

$$\alpha = \frac{r_{ex}}{r_{en}}, \quad \beta = \frac{r}{r_{en}}, \quad \gamma = \frac{r_H}{r_{en}}, \quad (3)$$

при помощи которых можно матрицу  $Z$  переписать следующим образом:

\* Ниже мы везде полагаем, что магнитная индукция постоянна.

$$Z = r_{en} \begin{vmatrix} \beta & \frac{1+\gamma}{2} \beta - \frac{\alpha-\gamma}{2} \\ \frac{1-\gamma}{2} & 1 & \frac{1+\gamma}{2} \\ \beta - \frac{\alpha+\gamma}{2} & \frac{1-\gamma}{2} & \beta \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Так как при анализе цепей во многих случаях удобнее пользоваться проводимостями, найдем матрицу полных проводимостей

$$Y = Z^{-1}. \quad (5)$$

Вычисление обратной матрицы даст

$$Y = \begin{vmatrix} g_0 + g_1 & -g_0 - g & g_0 - g_1 \\ -g_0 + g & g_0 + g_2 & -g_0 - g \\ g_0 - g_1 & -g_0 + g & g_0 + g_1 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где

$$g_0 = \frac{1}{\delta r_{en}}, \quad g_1 = \frac{1}{\varepsilon r_{en}}, \quad g_2 = \frac{\alpha}{\varepsilon r_{en}}, \quad g = \frac{\gamma}{\varepsilon r_{en}},$$

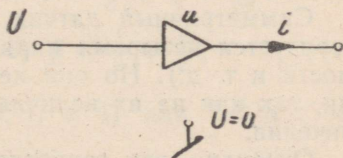
$$\delta = 4\beta - \alpha - 1, \quad \varepsilon = \alpha + \gamma^2. \quad (7)$$

Ниже будет видно, что именно такая запись матрицы наиболее удобна.

Перейдем к построению схемы замещения. Так как матрица  $Y$  несимметрична, то схему замещения нельзя построить только на двухсторонних проводимостях. Ввиду того, что мы имеем дело с линейными цепями, построим первую и основную схему замещения на унисторах [4].

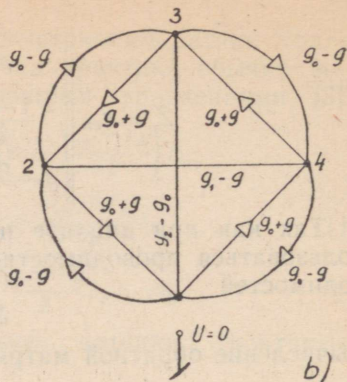
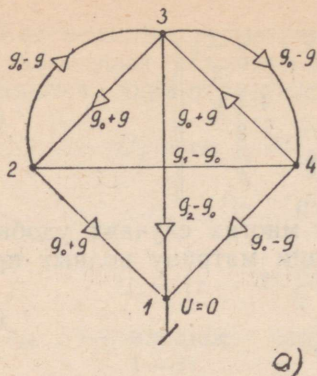
Унистор представляет собой одностороннюю проводимость,

Фиг. 2. К определению унистора



управляемую потенциалом одного зажима (фиг. 2). Поэтому для унисторной схемы надо указать и заземленный узел. В данном случае будем считать заземленным контакт 1. Учитывая правила построения схемы замещения по данной матрице узловых проводимостей, получаем из (6) для симметричного датчика цепь, изображенную на фиг. 3а.

На фиг. 3б показана схема замещения для общего случая, которая хорошо отображает симметрию датчика.



Фиг. 3. Схемы замещения датчика Холла

Определяем еще соотношение между полными сопротивлениями и проводимостями датчика. При помощи формулы (7) легко получить

$$r_{en} = \frac{g_1}{g_1 g_2 + g^2}, \quad (8a)$$

$$r_{ex} = \frac{g_2}{g_1 g_2 + g^2}, \quad (8b)$$

$$r_H = \frac{g}{g_1 g_2 + g^2}. \quad (8c)$$

Выражение для  $r$  более сложное и мы его здесь не приведем.

### 3. Границы изменения параметров датчика

Симметричный датчик Холла как элемент схемы характеризуется четырьмя параметрами (сопротивления, проводимости и т. д.). Но они не являются полностью независимыми, так как на их величины накладываются некоторые ограничения.

Очевидно, что сопротивления  $r_{en}$ ,  $r_{ex}$  и  $r$  положительные, следовательно и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ .

Учитывая, что потенциал в датчике удовлетворяет уравнению Лапласа, мы можем сделать следующие выводы.

1) Все элементы матрицы  $Z$  положительны, следовательно

$$r_{en} > |r_H|, \quad 1 > |\gamma|, \quad (9a)$$

$$r > \frac{r_{ex} + |r_H|}{2}, \quad \beta > \frac{\alpha + |\gamma|}{2}. \quad (9b)$$

2) Элементы матрицы  $Y$  на главной диагонали положительны, остальные отрицательны:

$$g_0 > |g|, \quad \beta < \frac{\alpha}{4\gamma} + \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{4}, \quad (9c)$$

$$g_1 > g_0, \quad \beta > \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{4}. \quad (9d)$$

3) Каждый элемент матрицы ( $Y$  или  $Z$ ) по абсолютной величине меньше элемента главной диагонали соответствующих столбца и строки:

$$\frac{r_{en} + |r_H|}{2} < r, \quad \beta > \frac{1 + |\gamma|}{2}, \quad (9f)$$

$$g_2 > |g|, \quad \alpha > |\gamma|, \quad (9g)$$

$$g_1 > |g|, \quad 1 > |\gamma|. \quad (9h)$$

4) элементы матрицы  $Z$  в столбце уменьшаются с удалением от главной диагонали:

$$\frac{r_{en}}{2} > r - \frac{r_{ex}}{2}, \quad \beta < \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}. \quad (9i)$$

Меняя местами входные и выходные цепи, получаем дополнительно

$$\beta > \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma^2}{4\alpha}. \quad (10)$$

Нетрудно показать, что система (10) содержит лишь пять независимых неравенств:

$$1) |\gamma| < 1, \quad 2) |\gamma| < \alpha, \quad 3) \beta > \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma^2}{4\alpha},$$

$$4) \beta > \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma^2}{4}, \quad 5) \beta < \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}, \quad (11)$$

где 3) более строгий для  $0 < \alpha < 1$ , а 4) для  $1 < \alpha < \infty$ . Условия для  $\delta$  и  $\varepsilon$  имеют вид

$$\varepsilon > |\gamma| + \gamma^2, \quad \delta > \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \gamma^2}, \quad \delta > \varepsilon, \quad \delta < \varepsilon + 1 - \gamma^2, \quad (11a)$$

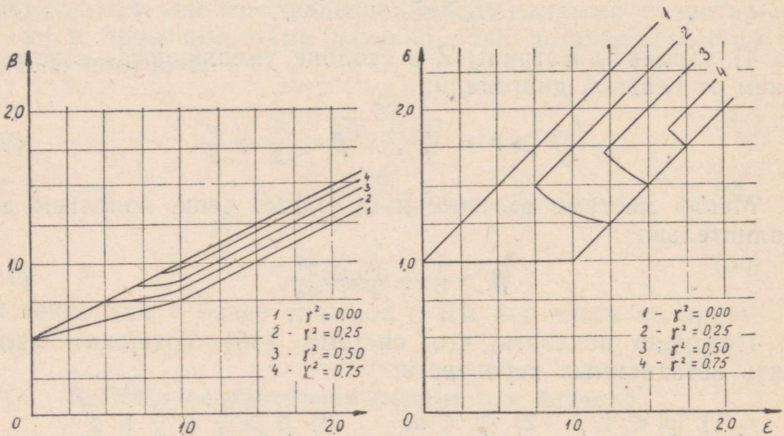
откуда следует

$$g_0 < g_2. \quad (11b)$$

В таблице 1 приведена сводка полученных результатов, а области изменения параметров в координатах  $\alpha - \beta$  и  $\varepsilon - \delta$  изображены на фиг. 4.

Из неравенств (11) следуют минимальные значения для  $\alpha$  и  $\beta$ :

$r_{en} >  r_H $	$r_{ex} >  r_H $	$4r > 2r_{en} + r_{ex} + \frac{r_H^2}{r_{ex}}$	$4r > 2r_{ex} + r_{en} + \frac{r_H^2}{r_{en}}$	$2r < r_{en} + r_{ex}$
$g_1 >  g $	$g_2 >  g $	$g_2 > g_0$	$g_1 > g_0$	$(g_2 - g_0)g_1^2 + (g_1 - g_0)g_2^2 < < g_0 g_1 (g_2 - g)$
$1 >  \gamma $	$\alpha >  \gamma $	$\beta > \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{r^2}{4d}$	$\beta > \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} + \frac{r^2}{4}$	$\beta < \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}$
$1 >  \gamma $	$\varepsilon > r^2 +  \gamma $	$\delta > \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \gamma^2}$	$\delta > \varepsilon$	$\delta < \varepsilon + 1 - \gamma^2$



Фиг. 4. Области изменения параметров датчика

$$\alpha_{min} = |\gamma|, \quad (12a)$$

$$\beta_{min} = \frac{1 + |\gamma|}{2} \quad (12b)$$

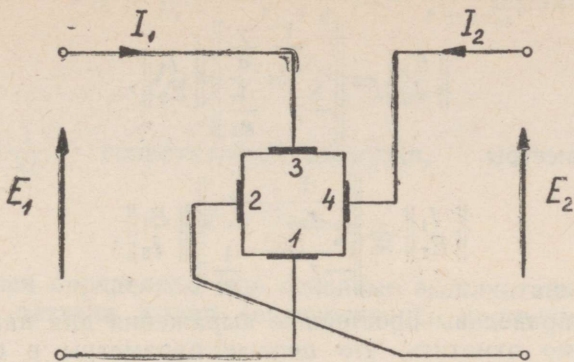
и максимальное значение  $\gamma$ :

$$\gamma^2_{max} = (\delta - 1)\alpha, \quad \alpha < 1, \quad (12c)$$

$$\gamma^2_{max} = \delta - \alpha, \quad \alpha > 1. \quad (12d)$$

#### 4. Режим с разделенными цепями

Обычное включение датчика Холла в режиме с разделенными цепями изображено на фиг. 5.



Фиг. 5. Режим с разделенными цепями

Не ограничивая общности, можно считать потенциал контакта 1 равным нулю. Тогда из уравнений (1) получаем:

$$E_1 = r_{en}I_1 + r_H I_2, \quad (13)$$

$$E_2 = -r_H I_1 + r_{ex}I_2.$$

Матрица  $z$ -параметров этого четырехполюсника очевидно имеет вид

$$\begin{vmatrix} r_{en} & r_H \\ -r_H & r_{ex} \end{vmatrix}. \quad (14a)$$

Таким образом четырехполюсник необратимый и непроходной, притом  $z_{21} = -z_{12}$  и кососимметрическая часть матрицы представляет матрицу гиратора

$$\begin{vmatrix} 0 & r_H \\ -r_H & 0 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Следуя известным формулам, найдем выражения для других систем параметров четырехполюсника:

$y$ -параметры  $\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_2 & -g \\ g & g_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix}, \quad (14b)$

$$\begin{vmatrix} E_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\gamma} & -\frac{1}{g} \\ -\frac{1}{r_H} & -\frac{\alpha}{\gamma} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_2 \\ -I_2 \end{vmatrix}, \quad (14c)$$

$$\begin{vmatrix} E_2 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & \frac{1}{g} \\ \frac{1}{r_H} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ -I_1 \end{vmatrix}, \quad (14d)$$

$h$  — параметры

$$\begin{vmatrix} E_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{g_2} & \frac{\gamma}{\alpha} \\ -\gamma & \frac{1}{g_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ E_2 \end{vmatrix}, \quad (14e)$$

$g$  — параметры

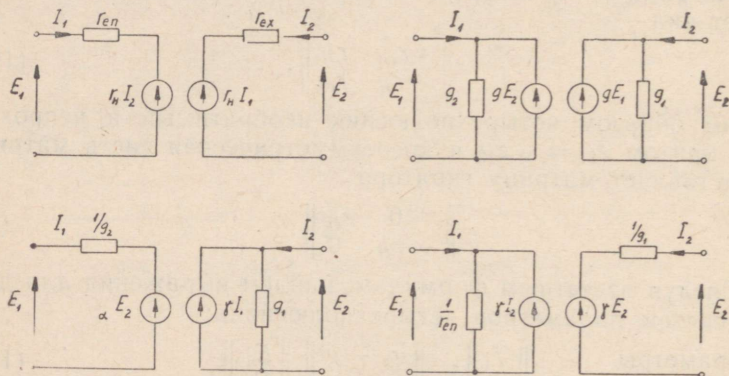
$$\begin{vmatrix} I_1 \\ E_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r_{en}} & -\gamma \\ -\gamma & \frac{1}{g_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ I_2 \end{vmatrix}. \quad (14f)$$

Здесь приведены простейшие выражения для параметров. Необходимо отметить, что цепные параметры в формулах (14c) и (14d) стремятся к бесконечности при  $B=0$ . Это указывает на тот факт, что при  $B=0$  никакой передачи энергии через датчик не происходит.

Цепные параметры связаны между собой соотношением

$$AD - BC = -1. \quad (16)$$

На основе уравнений (14a — f) можно построить схемы замещения датчика Холла в режиме с разделенными цепями, которые изображены на фиг. 6.



Фиг. 6. Схемы замещения в режиме разделенными параметрами

Параметры нагруженного датчика получаются по известным формулам:

$$Z = \frac{E_1}{I_1} = \frac{z_L r_{en} + r_{en} r_{ex} + r_H^2}{z_L + r_{ex}} = \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda + \alpha} r_{en}, \quad (17a)$$

$$Z_{12} = \frac{E_2}{I_1} = \frac{r_H z_L}{z_L + r_{ex}} = \frac{\gamma \lambda}{\lambda + \alpha} r_{en}, \quad (17b)$$

$$Y_{12} = \frac{I_2}{E_1} = -\frac{gY_L}{Y_L + g_1} = -\frac{\gamma}{\varepsilon + \lambda r_{en}}, \quad (17c)$$

$$T_{12} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{Z_{12}}{Z} = \frac{\gamma\lambda}{\lambda + \varepsilon}, \quad (17d)$$

где  $z_L = \frac{1}{Y_L}$  — сопротивление нагрузки,

$$\lambda = \frac{z_L}{r_{en}} = \frac{1}{Y_L r_{en}}.$$

Наконец определяем еще основные эксплуатационные параметры датчика Холла (ограничиваясь постоянной индукцией).

- 1) сопротивление Холла  $r_H$  — уравнения (1);
- 2) коэффициент передачи напряжений на холостом ходу:

$$k_u = \frac{E_2}{E_1} = \frac{r_H}{r_{en}} = \gamma = \frac{g}{g_1}; \quad (18)$$

3) выходное напряжение при данной входной мощности; эффективность датчика в этом отношении можно характеризовать величиной

$$\frac{E_2}{\sqrt{P_1}} = \frac{r_H}{\sqrt{r_{en}}}; \quad (19)$$

4) к. п. д.:

$$\eta = -Z_{12}Y_{12} = \frac{\lambda\gamma^2}{(\lambda + \alpha)(\lambda + \varepsilon)}, \quad (20)$$

откуда оптимальное значение нагрузки

$$z_{Lopt} = \sqrt{r_{ex}^2 + r_{ex} \frac{r_H^2}{r_{en}}} \quad (21)$$

и

$$\lambda_{opt} = \sqrt{\alpha\varepsilon} \quad (22)$$

- 5) входное сопротивление  $r_{en}$  — уравнения (1);
- 6) выходное сопротивление  $r_{ex}$  — уравнения (1).

Первые три параметра мы будем ниже использовать для сравнения качества датчиков.

## 5. Батарея из двух датчиков

Перейдем к вопросам включения датчиков с неразделенными цепями. В данной работе рассматривается только один



Как известно, при исключении узла  $p$  проводимости унисторов преобразуются по следующему закону [4]:

$$u'_{jk} = u_{jk} + \frac{u_{jp}u_{pk}}{\sum_i u_{pi}}, \quad (23)$$

где штрихом отмечены проводимости унистора от  $j$ -го узла к  $k$ -му узлу после исключения, а без штриха — до исключения.

Следуя этому закону, получаем для преобразованной схемы (фиг. 8b):

$$\sum_i u_{5i} = g_1'' + g_0'' + g_1' + g_0' = \Sigma, \quad (24a)$$

$$u_{31} = g_2' + g_2'' - g_0' - g_0'' + \frac{(g_0'' + g_0' - g'' + g')^2}{\Sigma}, \quad (24b)$$

$$u_{24} = u_{42} = \frac{(g_1'' - g_0'')(g_1' - g_0')}{\Sigma}, \quad (24c)$$

$$u_{21} = u_{32} = g_0'' + g'' + \frac{(g_1'' - g_0'')(g_0' + g_0'' + g' - g'')}{\Sigma}, \quad (24d)$$

$$u_{41} = u_{34} = g_0' - g' + \frac{(g_1' - g_0')(g_0' + g_0'' + g' - g'')}{\Sigma}, \quad (24e)$$

$$u_{23} = g_0'' - g'' + \frac{(g_1'' - g_0'')(g_0'' + g_0' + g'' - g')}{\Sigma}, \quad (24f)$$

$$u_{43} = g_0' + g' + \frac{(g_1' - g_0')(g_0'' + g_0' + g'' - g')}{\Sigma}, \quad (24g)$$

Потребуем теперь, чтобы полученный датчик был бы симметричным. Очевидно, что для этого должно быть

$$u_{21} = u_{43}, \quad (25)$$

$$u_{41} = u_{23}.$$

Подставляя (24d), (24e), (24f) и (24g) в (25), найдем

$$g_0''g_1'' = g_1'g_0', \quad (26a)$$

$$g'' = g'. \quad (26b)$$

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы суммарный датчик являлся симметричным.\* Нетрудно установить, что параметры его следующие:

$$g_0 = \frac{(g_0'' + g_0')(g_1'' + g_1')}{\Sigma}, \quad (27a)$$

$$g_1 = \frac{(g_1' + g_0'')(g_1'' + g_0')}{\Sigma}, \quad (27b)$$

$$g_2 = g_2'' + g_2', \quad (27c)$$

$$g = g'' = g'. \quad (27d)$$

Притом

$$g_1g_0 = g_1'g_0' = g_1''g_0'' = c^2. \quad (28)$$

\* Нетрудно доказать, что новые  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g$  удовлетворяют условиям табл. 1.

Этот инвариант играет в некоторых исследованиях весьма важную роль.

Следовательно, условия (26) определяют класс симметричных датчиков, который замкнут относительно включения в батарею.

Устанавливаем некоторые закономерности изменения параметров датчика при включении его в батарею. Из (27) ясно, что  $g_2$  возрастает и  $g$  не изменяется. Покажем еще, что  $g_0$  всегда возрастает, а  $g_1$  убывает.

Для этого найдем значение  $g_0''$ , требуемое для выполнения неравенства

$$g_0 \leq g_0'. \quad (29)$$

После подстановки и упрощения получаем:

$$g_0'' \leq -g_0'. \quad (30)$$

Неравенство (30) не может быть в силе, так как  $g_0'' > 0$  и  $g_0' > 0$ . Следовательно  $g_0$  больше  $g_0'$  и в силу (28)  $g_1$  меньше  $g_1'$ . Далее исследуем поведение сопротивления Холла

$$r_H = \frac{g}{g_1 g_2 + g^2}. \quad (8c)$$

Чтобы  $r_H$  возрастал,  $g_1 g_2$  должен уменьшаться. Полагаем, что это имеет место. Тогда

$$\begin{aligned} g_2 g_1 &< g_1' g_2', \\ g_2 g_1 &< g_1'' g_2''. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя в эти неравенства соответствующие выражения для  $g_1$  и  $g_2$  и требуя одновременного удовлетворения обоих неравенств, приходим к условию

$$g_0'' g_0' + 2c^2 < 0, \quad (31a)$$

которое не в силе, так как все члены в левой части положительные.

Однако, одно из неравенств (31) может быть в силе в некоторых случаях. Тогда новое значение  $r_H$  находится между соответствующими значениями базисных датчиков  $H'$  и  $H''$ .

Рассмотрим еще коэффициент передачи напряжений. Так как согласно (18)

$$k_u = \frac{g}{g_1},$$

то очевидно, что  $k_u$  возрастает при включении в батарею.

Кроме того, из (26b) и (28) следует, что множество значений  $k_u$  датчиков данного класса имеет верхний предел, который равен

$$\limsup k_u = \frac{g}{c}. \quad (32)$$

Преобразуем теперь выражение (27a) для  $g_0$ :

$$g_0 = \frac{(g_0'' + g_0')(g_1'' + g_1')}{g_0'' + g_0' + g_1'' + g_1'} = c \frac{\frac{g_0''}{c} + \frac{g_0'}{c}}{1 + \frac{g_0''}{c} \cdot \frac{g_0'}{c}} \quad (33)$$

или

$$\frac{g_0}{c} = \frac{\frac{g_0''}{c} + \frac{g_0'}{c}}{1 + \frac{g_0''}{c} \cdot \frac{g_0'}{c}} \quad (34)$$

Введем теперь параметр, который при включении в батарею вел бы себя аддитивно, т. е. при

$$\frac{g_0'}{c} = f(x), \quad \frac{g_0''}{c} = f(y) \quad (35)$$

имело бы место

$$\frac{g_0}{c} = f(x + y). \quad (36)$$

Легко видеть, что подходящей функцией является

$$f(x) = \text{th } x, \quad (37)$$

так как

$$\text{th}(x + y) = \frac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{ th } y}. \quad (38)$$

Тогда

$$g_0 = c \text{ th } x \quad (39)$$

и

$$g_1 = c \text{ th } y. \quad (40)$$

Следовательно, для  $n$  параллельно включенных датчиков:

$$g_0 = c \text{ th } \sum_{k=1}^n x_k, \quad (41a)$$

$$g_1 = c \text{ th } \sum_{k=1}^n x_k. \quad (41b)$$

Введенный параметр  $x$  оказывается очень полезным при исследовании однородной батареи датчиков.

## 6. Однородная батарея датчиков Холла

Под однородной батареей понимаем батарею из совершенно одинаковых датчиков. Так как проводимости  $g_2$  складываются, то они пропорциональны параметру  $x$ :

$$g_2 = g_{20} x. \quad (42)$$

Из уравнений (41a), (41b), (42) и (27d) следуют основные соотношения для однородной батареи.

$$g_{0n} = c \operatorname{th} nx_0, \quad (43a)$$

$$g_{1n} = c \operatorname{cth} nx_0, \quad (43b)$$

$$g_{2n} = nx_0 g_{20}, \quad (43c)$$

$$g_n = g, \quad (43d)$$

где  $x_0$  — параметр базисного датчика и  
 $n$  — число датчиков в батарее.

Рассмотрим поведение основных эксплуатационных параметров однородной батареи.

1) Коэффициент передачи напряжений

$$k_v = \frac{g_n}{g_{1n}} = \frac{g}{c} \operatorname{th} nx_0 \quad (44)$$

возрастает и тем более, чем меньше параметр  $x_0$  базисного датчика.

2) Сопротивление Холла

$$r_H = \frac{g_n}{g_{1n} g_{2n} + g_n^2} = \frac{g}{c g_{20} n x_0 \operatorname{cth} nx_0 + g^2}. \quad (45)$$

Дифференцируя  $r_H$  по  $n$  найдем, что  $r_H$  всегда убывает.

3) Выходное напряжение при данной входной мощности

$$\frac{U_{ex}}{\sqrt{P}} = \frac{g}{\sqrt{g_{2n} g_{1n}^2 + g_{1n} g^2}}. \quad (46)$$

Это выражение достигает максимума при минимуме знаменателя. Нахождение последнего приводит к нахождению нулей выражения

$$\operatorname{sh}^2 x - 2x \operatorname{th} x - p \operatorname{th}^2 x, \quad (47)$$

где  $x = nx_0$  и

$$p = \frac{g^2}{c g_{20}} = \frac{g^2 x_0}{c g_2} = \frac{\gamma^2}{\alpha}. \quad (48)$$

Величина  $p$  удовлетворяет условиям

$$0 < p < 1, \quad p < x_0, \quad (48a)$$

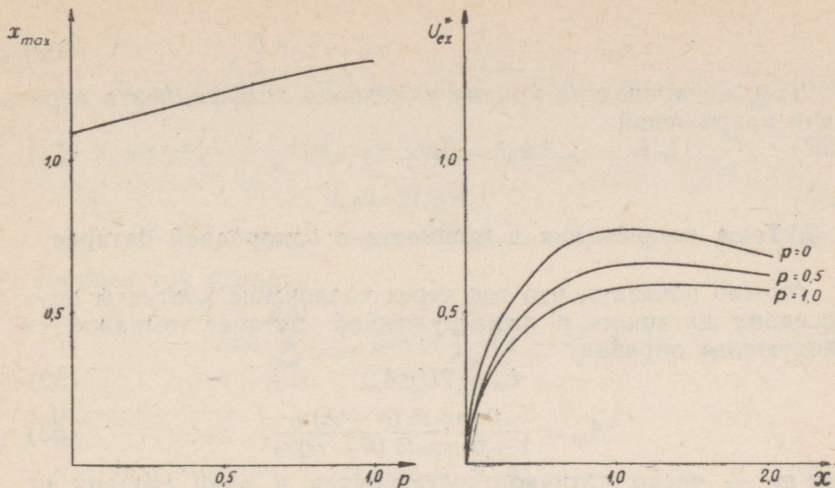
которые следуют из (48) при учете  $g < c$  и  $g < g_2$ .

Зависимость максимизирующего значения  $x$  от  $p$  представлена на фиг. 9. Там же приведена зависимость приведенного выходного напряжения от  $x$ :

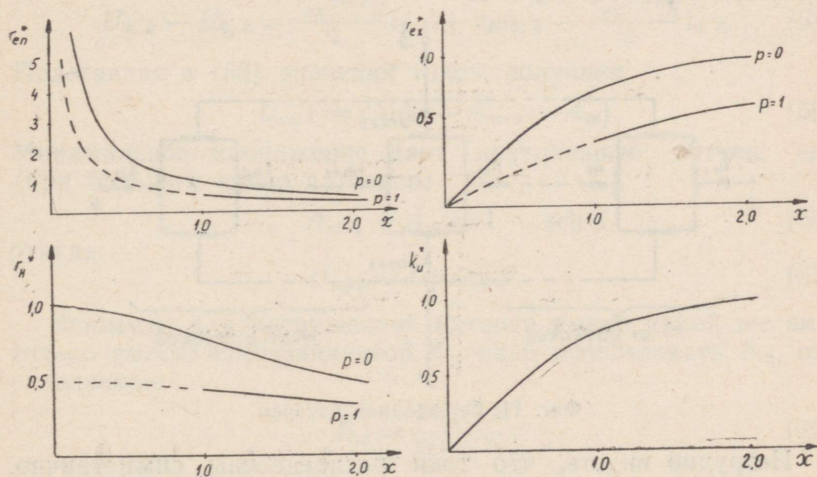
$$U_{ex}^* = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{cth}^2 x + p \operatorname{cth} x}}, \quad (49)$$

$$U_{ex} = U_{ex}^* \frac{g \sqrt{p}}{c g_{20}}, \quad (49a)$$

а на фиг. 10 представлены зависимости приведенных сопротивлений от  $x$ :



Фиг. 9. Зависимости максимирующего значения  $x_{max}$  от  $\rho$  и приведенного выходного напряжения  $U_{ex}^*$  от  $x$



Фиг. 10. Зависимости приведенных сопротивлений и коэффициента передачи напряжения от  $x$

$$r_{en}^* = \frac{\text{cth } x}{x \text{cth } x + \rho}, \quad r_{en} = r_{en}^* \frac{1}{g_{20}}, \quad (50a)$$

$$r_{ex}^* = \frac{x}{x \text{cth } x + \rho}, \quad r_{ex} = r_{ex}^* \frac{1}{c}, \quad (50b)$$

$$r_H^* = \frac{1}{x \operatorname{cth} x + p}, \quad r_H = r_H^* \frac{p}{g}. \quad (50c)$$

Там же приведена кривая изменения коэффициента передачи напряжений

$$k_u^* = \operatorname{th} x. \quad (51)$$

## 7. Токи, напряжения и мощности в однородной батарее

Можно показать, что ток через холловские контакты двух соседних датчиков в ненагруженной батарее выражается следующим образом:

$$i_m = 2UgA_m, \quad (52)$$

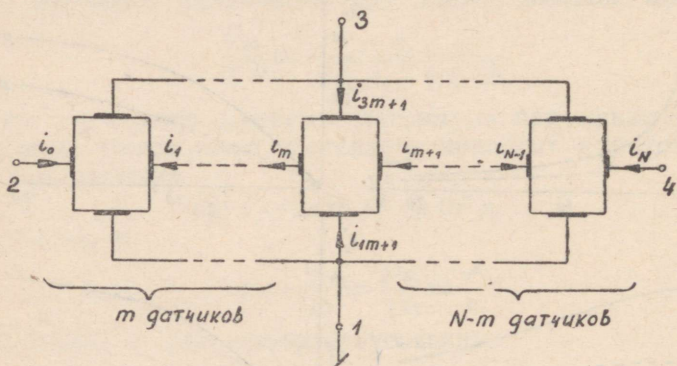
$$A_m = \frac{\operatorname{th} mx_0 \operatorname{th} (N-m)x_0}{1 + \operatorname{th} mx_0 \operatorname{th} (N-m)x_0}, \quad (53)$$

где  $m$  — число датчиков, остающихся в одну сторону от точки измерения,

$N$  — общее число датчиков в батарее,

$x_0$  — параметр базисных датчиков.

Очевидно  $A_0 = 0$  и  $A_N = 0$ .



Фиг. 11. Однородная батарея

Нетрудно видеть, что токи распределены симметрично. Наибольшее значение имеет ток в середине батареи. Можно показать, что максимум  $A$  при четном числе датчиков равен

$$\max A_m = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{sch} X), \quad X = Nx_0. \quad (54)$$

Если число датчиков нечетное, максимум  $A_m$  немного меньше.

Теперь можно при помощи основных формул датчика Холла (1) найти все токи каждого датчика:

$$i_{3, m+1} = \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\varepsilon} [(A_{m+1} - A_m) + \gamma(A_{m+1} + A_m)] \right\} \frac{U}{r_{en}}, \quad (55a)$$

$$i_{1, m+1} = \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\varepsilon} [(A_{m+1} - A_m) - \gamma(A_{m+1} + A_m)] \right\} \frac{U}{r_{en}}, \quad (55b)$$

$$i_m = 2UgA_m, \quad (55c)$$

$$i_{m+1} = 2UgA_{m+1}. \quad (55d)$$

Полный ток батареи

$$I = \sum_{m=0}^{N-1} i_{3, m+1} = N \frac{U}{r_{en}} \left( 1 - \frac{2\gamma^2}{\varepsilon} A_M \right), \quad (56)$$

где

$$A_M = \frac{1}{N} \sum_0^N A_m. \quad (57)$$

Выходные напряжения датчиков найдем при помощи формулы:

$$U_{2, k} - U_{4, k} = \frac{r_{ex} + r_H}{2} i_{2, k} + r_H i_{3, k} - \frac{r_{ex} - r_H}{2} i_{4, k}. \quad (58)$$

Подставляя в (58) значения токов, получаем

$$U_{m+1} = U\gamma(1 - A_{m+1} - A_m). \quad (59)$$

Минимальное напряжение дает центральный датчик, где (при большом числе датчиков)

$$A_{m+1} + A_m \approx 1 - \operatorname{sch} X, \quad (60)$$

откуда

$$U_{min} \approx U\gamma \operatorname{sch} X. \quad (61)$$

Формулы для нагруженной батареи имеют такой же вид, только вместо коэффициентов  $A_m$  надо использовать  $B_m$ , определяемые

$$B_m = \frac{2A_m + \lambda}{2(1 + \lambda)}, \quad (62)$$

где  $\lambda = \frac{Y_L}{g_1}$ ,

$Y_L$  — проводимость нагрузки, а  $g_1$  соответствует целой батарее.

При коротком замыкании  $\lambda = 0$  и  $B_m = \frac{1}{2}$ .

Все токи  $i_m$  равны между собой и имеют значения  $Ug$ , а выходное напряжение каждого датчика равно нулю.

Укажем еще формулу для вычисления мощности, выделяемую в датчике:

$$P_{m+1} = \frac{U^2}{r_{en}} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} [2(A_m + A_{m+1}) - (A_{m+1} - A_m)^2 \frac{\delta}{\varepsilon} - (A_{m+1} + A_m)^2] \right\} \quad (63)$$

Учитывая характер изменения коэффициентов  $A_m$ , нетрудно установить, что наибольшая мощность выделяется в крайних датчиках, где

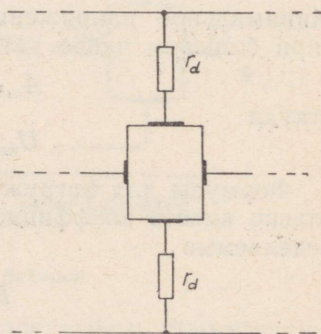
$$P_1 = P_N = \left\{ 1 - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} [2A - \left(1 + \frac{\delta}{\varepsilon}\right) A^2] \right\} \frac{U^2}{r_{en}}, \quad (64)$$

$$A = A_1 = A_{N-1}.$$

## 8. Применение развязок в батарее датчиков Холла

Для практически выгодных конструкций датчиков параметр  $\lambda$  лежит в пределах  $1,0 \div 2,0$ , из чего следует, что простое соединение в батарею не дает существенного улучшения параметров датчика. Входное напряжение ограничивается главным образом мощностью, которую датчик может рассеивать в виде тепла. Эту мощность можно было бы увеличить увеличением площади датчика, но это иногда нецелесообразно, иногда даже невозможно.

Фиг. 12. Датчик с развязками



Если генератор, питающий датчик Холла, довольно мощный, можно включать датчики Холла в батарею с развязками (фиг. 12). Последние в какой-то мере развязывают выходные цепи датчиков и включение в батарею становится более близким к включению с независимым питанием каждого датчика, когда выходные напряжения просто складываются. Надо отметить, что в развязках расходуется значительная мощность и поэтому такой метод повышения выходного напряжения в энергетическом отношении неэкономичен.

Но в некоторых применениях он может оказаться целесообразным и поэтому представляет интерес выяснить возможности этого метода.

Очевидно, что сопротивления нового базисного датчика (включающего в себе сопротивление развязок) выражаются так:

$$r'_{en} = r_{en} + 2r_d, \quad (65a)$$

$$r'_{ex} = r_{ex}, \quad (65b)$$

$$r' = r + r_d, \quad (65c)$$

$$r'_H = r_H. \quad (65d)$$

Используя обозначение  $\lambda = \frac{rd}{r_{en}}$ , найдем

$$r'_{en} = r_{en}(1 + 2\lambda), \quad g'_0 = \frac{1}{r_{en}(\delta + 2\lambda)},$$

$$r'_{ex} = r_{en} \cdot a, \quad g'_1 = \frac{1 + 2\lambda}{r_{en}(\varepsilon + 2a\lambda)}, \quad (66)$$

$$r' = r_{en}(\beta + \lambda), \quad g'_2 = \frac{a}{r_{en}(\varepsilon + 2a\lambda)},$$

$$r'_H = r_{en} \cdot \gamma, \quad g' = \frac{\gamma}{r_{en}(\varepsilon + 2a\lambda)},$$

$$x = \text{Arth} \sqrt{\frac{\varepsilon + 2a\lambda}{(\delta + 2\lambda)(1 + 2\lambda)}}.$$

Продифференцируя эти выражения по  $\lambda$ , найдем, что при  $\lambda > 0$   $g_0$ ,  $g_2$  и  $g$  уменьшаются, а  $r_{en}$ ,  $r$  и  $g_1$  возрастают. Уменьшается и параметр  $x$ . Последний факт свидетельствует о том, что с развязками относительное увеличение выходного напряжения при включении в батарею больше, чем без развязок.

К сожалению пока отсутствуют сведения о том, чем ограничивается входной сигнал отдельного датчика, также не имеется соответствующих зависимостей. Поэтому мы здесь ограничиваемся упрощенным расчетом, полагая, что напряжение на входных контактах ограничено значением  $U_{max}$ . Тогда напряжение питания батареи равно приближенно:

$$U \approx U_{max}(1 + 2\lambda). \quad (67)$$

Выходное напряжение отдельного датчика не зависит от сопротивлений развязок и равно

$$U'_{ex} = U_{max} \cdot \gamma. \quad (68)$$

Выходное напряжение батареи превышает напряжение отдельного датчика в

$$K_u = \frac{\text{th } nx}{\text{th } x} \quad (69)$$

раз, где  $x$  соответствует датчику с развязками (66). Увеличение сопротивлений развязок ограничивается запасом мощности. Этот запас мы учитываем коэффициентом запаса мощности  $K_p$ , определяемым как

$$K_p = \frac{P}{P_{max}}, \quad (70)$$

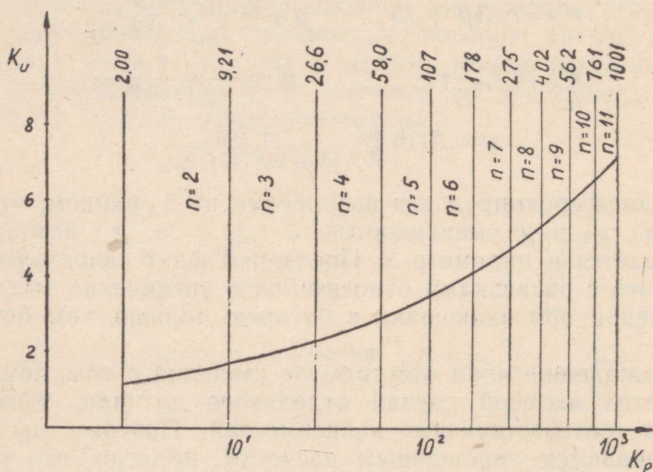
$$P_{max} = \frac{U^2_{max}}{r_{en}}, \quad (71)$$

где  $P$  — имеющаяся мощность. Подставляя в уравнение (70) значение  $U$  из (67) и предполагая, что в каждом датчике выделяется одинаковая мощность, получаем

$$P = \frac{U^2}{r'_{en}} n = \frac{U^2_{max}}{r_{en}} (1 + 2\lambda) n = P_{max} (1 + 2\lambda) n \quad (72)$$

и

$$K_p = (1 + 2\lambda) n. \quad (73)$$



Фиг. 13. Зависимость максимального  $K_u$  от  $K_p$

Задаваясь двумя величинами в уравнении (73) (например,  $K_p$  и  $n$ ), можно найти третью ( $\lambda$ ). При помощи формулы (69) найдем увеличение выходного напряжения.

Очевидно, что при некоторых заданных условиях (базисный датчик,  $K_p$ ,  $\lambda$ , требуемое  $K_u$  или др.) какой-то вариант конструкции батарей является оптимальным. Обычно задан  $K_p$  и требуется найти оптимальное число датчиков  $n$ . Решение этой задачи несложное (упрощается еще из-за того, что  $n$  целое) и мы не будем ее подробно рассматривать, а

приведем только некоторые результаты. На фиг. 13 приведена зависимость максимального  $K_u$  от  $K_p$ . Там же указаны оптимальные значения числа датчиков  $n$ . Расчет произведен для датчика с геометрическими параметрами  $x_1 = 0,25$  и  $x_2 = 0,80$  при  $\theta = 0,1\pi$  [5].

## 9. Заключение

В данной работе рассмотрены матрицы, характеризующие датчик Холла как элемент электрической схемы и установлены пределы изменения его параметров.

На основе матрицы полных проводимостей построена схема замещения датчика. Указано, что наиболее удобно использовать простейшие элементы общей линейной цепи — унисторы. Расчет различных цепей при помощи унисторной схемы замещения не представляет особых трудностей.

Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с эксплуатационными параметрами датчика Холла.

Для примера использования полученных результатов исследованы вопросы включения датчиков в батарею. Более подробно изучена однородная батарея. При этом получены следующие результаты:

- 1) простое включение датчиков Холла в батарею невыгодно;
- 2) включение в батарею с развязками дает лучшие результаты, но неэкономично;
- 3) хотя рассмотрен только частный случай, можно сделать следующий вывод: повышение качества датчиков Холла схемными приемами неэффективно.

В заключение можно сказать, что применение топологических методов анализа оказывается очень эффективным при расчете цепей с датчиками Холла.

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. Kuhrt und W. Hartel, Der Hallgenerator als Vierpol. Arch. Elektrotechnik, 1957, Bd 43, H. 1, S. 1.
2. H. Rosman si A. Braier, Asupra regimului energetic al generatorului Hall. Bul. Inst. Polit. Iasi, 1960, t. (6(10), f. (1-2), p. 245.
3. R. F. Wick, Solution of the Field Problem of the Germanium Gyration, J. Appl. Phys., 1954, v. 25, № 6, p. 741.
4. С. Мэзон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы. ИЛ, М., 1963.
5. Х. Росс, В. Кукк, Расчетное определение некоторых параметров датчика Холла. Тр. ТПИ, 1964, сер. А, № 213, II, стр. 13.

*Г. Вьяльмяэ, В. Хейнрихсен*

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДАТЧИКА ХОЛЛА ПРИ ЧАСТИЧНОМ ПРОНИЗЫВАНИИ ЕГО ПЛОЩАДИ МАГНИТНЫМ ПОТОКОМ

При теоретических исследованиях эффекта Холла в полупроводниках [1, 2, 3 и др.], основанных на решении уравнения Лапласа, предполагается, что датчик полностью находится в однородном магнитном поле. Этот случай имеет особое значение также ввиду того, что при различных практических применениях датчики почти всегда работают в подобных условиях.

Однако по имеющимся сведениям [4, 5, 6] иногда оказывается целесообразным концентрирование магнитного потока через часть площади датчика. Так, например, такой режим работы может представить интерес при использовании датчика Холла в качестве датчика перемещений, при составлении батарей из датчиков Холла и т. д.

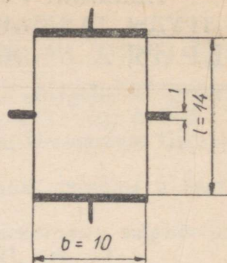
Очевидно, что отдельные точки площади датчика принимают в различной степени участие при создании э. д. с. между его холловскими электродами. Отсюда вытекает вопрос о целесообразности концентрирования магнитного потока через более «активную» область площади датчика с целью увеличения эффективности его работы.

Теоретические исследования датчиков Холла в неоднородном магнитном поле связаны с серьезными математическими трудностями. Поэтому представляется целесообразным экспериментально определить основные зависимости для датчиков Холла, работающих при концентрированном магнитном потоке, который пронизывает только часть площади датчика.

Для исследований были применены пленочные датчики из селенида ртути [7], изображенные на фиг. 1. Эти датчики особенно подходящи для подобных исследований ввиду их достаточно большой площади, а также малой зависимости сопротивления и чувствительности от магнитной индукции.

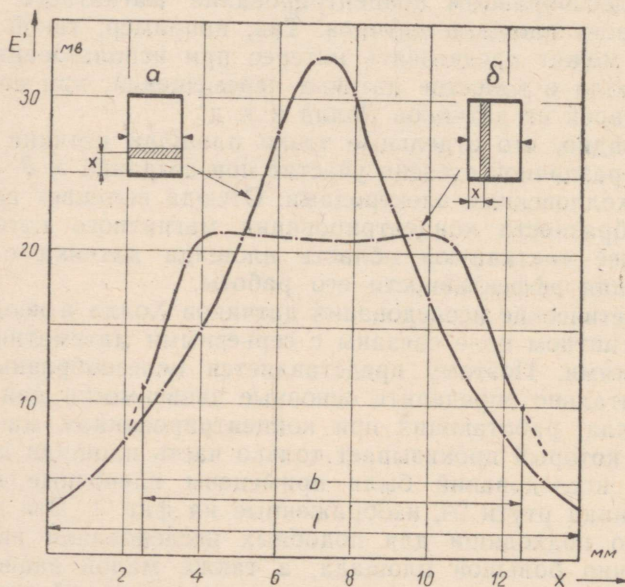
Эксперименты проводились на специальном электромагните, снабженном комплектом сменных полюсных наконечни-

Фиг. 1. Датчик Холла



ков различной формы для концентрирования магнитного потока через датчик. Перемещение датчика в воздушном зазоре ( $\delta = 0,2$  мм) осуществлялось в системе прямоугольных координат при помощи приспособленного для этой цели препаратодержателя микроскопа. Измерение магнитного потока производилось баллистическим методом, измерение э. д. с. Холла датчика — компенсационным методом.

Все исследования проводились при постоянном магнитном поле и постоянном входном токе датчика. Для исклю-

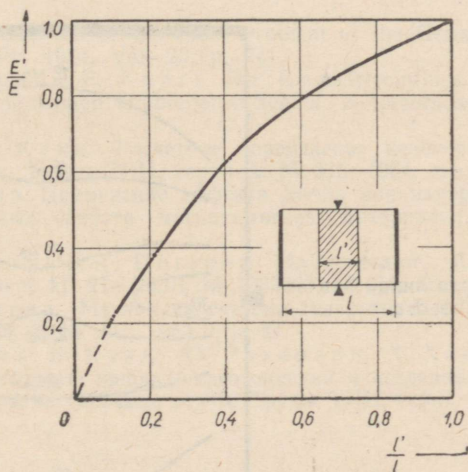


Фиг. 2. Зависимость э. д. с. Холла от расположения полосы действия магнитного поля

чения влияния неэквипотенциальности, измерения э. д. с. Холла были проведены при двух направлениях магнитной индукции, при всех опытах равной 1,2 тл.

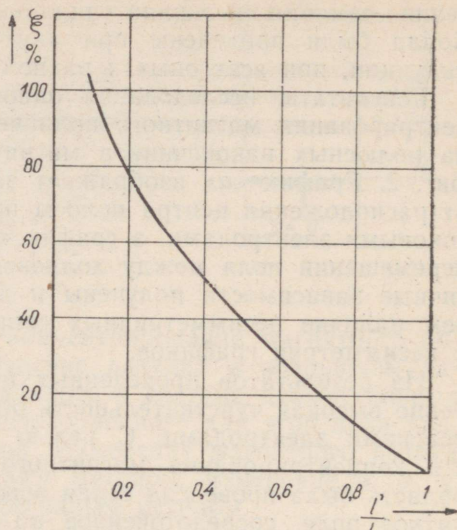
Результаты исследования одного из датчиков при концентрировании магнитного поля через узкую полосу (ширина полюсных наконечников магнита 1,5 мм) приведены на фиг. 2. График «а» изображает зависимость э. д. с. Холла от расположения центра полосы при перемещении ее между токовыми электродами, а график «б» ту же зависимость при перемещении поля между холловскими электродами. Аналогичные зависимости получены и для других датчиков, причем наличие несимметричных сопротивлений плеч приводит к несимметрии графиков.

Из результатов проведенных исследований явствует особенно высокая чувствительность области датчика между холловскими электродами. С целью выяснения целесообразности концентрирования магнитного потока через названную область была проведена серия опытов. При этих опытах магнитное поле, сосредоточенное по оси холловских электродов, охватывало всю ширину датчика, а в другом направлении ширина магнитного поля  $l'$  изменялась. Результаты измерения э. д. с. Холла  $E'$ , выраженные относительно э. д. с. Холла  $E$ , получаемой в случае, когда датчик полностью находится в магнитном поле с индукцией 1,2 тл, приведены на фиг. 3 для различных значений  $l'/l$ . Из этих данных видно,



Фиг. 3. Зависимость э. д. с. Холла от ширины полосы действия магнитного поля

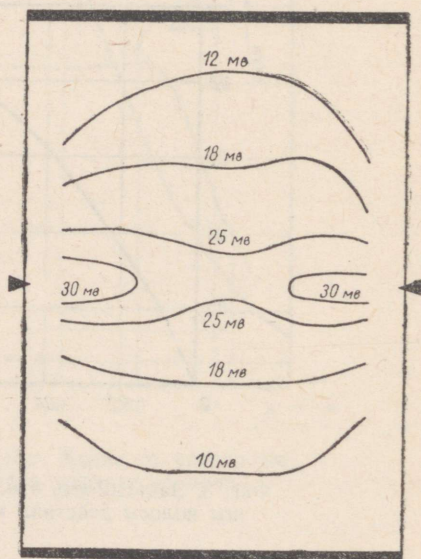
Фиг. 4. Зависимость эффективности  $\xi_M$  от ширины полсы действия магнитного поля



что отношение  $E'/E$  уменьшается медленнее чем  $l/l'$ , особенно при малых величинах последнего. Это соответствует относительной экономии расходуемой энергии поля в магнитном канале, что целесообразно характеризовать эффективностью магнитного канала

$$\xi_M = \left( \frac{E'l}{El'} - 1 \right) 100.$$

Фиг. 5. Карта линий равных э. д. с.



Зависимость  $\xi_M$  от отношения  $\frac{I'}{I}$  приводится на фиг. 4.

В целях выяснения чувствительности отдельных областей площади датчиков, магнитное поле было концентрировано при помощи специальных наконечников на площади  $2 \times 2$  мм. Перемещением датчика в этом концентрированном магнитном поле были определены линии равной *э. д. с.* Холла, карта которых приведена на фиг. 5.

Было установлено, что в случае концентрированного магнитного поля чувствительность датчика *S* не зависит от взаимного изменения холловских и токовых электродов. Подобные эксперименты были проведены как в случае симметричного, так и несимметричного расположения магнитного поля относительно датчика.

### Выводы

1. В результате экспериментального исследования определены зависимости *э. д. с.* Холла от размеров и расположения области действия магнитного поля на датчик.

2. Не обнаружено зависимости чувствительности по току *S* от замены входных и выходных электродов при концентрированных в плоскости датчика магнитных полях.

### ЛИТЕРАТУРА

1. R. F. Wick. Solution of the Field Problem of the Germanium Gyrator. Journ. Appl. Ph. 1954, Vol. 25, p. 741.
2. H. J. Lippmann F. Kuhrt. Der Geometrieinfluss auf den Hall-Effekt bei rechteckigen Halbleiterplatten. Z. Naturforschung 1958, Band 13a, S. 474.
3. Х. Росс, В. Кукк. Расчетное определение некоторых параметров датчика Холла. Труды ТПИ, серия А, № 213, 1964, стр. 13.
4. Г. Вяльямязэ. Применение эффекта Холла для измерения в пермеатре магнитных свойств магнитомягких материалов. Диссертация, ТПИ, 1961.
5. M. Biermann, K-R Dörfler. Hallgenerator. A. G. Siemens-Schuckert, Patent kl. 21e 28/01 № 1089063, 18. 10. 56.
6. В. Хейнрихсен. Магнитная система генератора *э. д. с.* Холла. Труды ТПИ, серия А, № 207, 1963, стр. 27.
7. Г. Вяльямязэ, В. Кукк, Ю. Рэхепап, Х. Хаак, В. Хейнрихсен. Некоторые вопросы изготовления и исследования пленочных датчиков Холла из селенида ртути. Труды ТПИ, серия А, № 213, 1964, стр. 3.

## КОМПЕНСАЦИЯ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТОКА В ИНДУКТИВНЫХ ЦЕПЯХ

Задача компенсации частотной зависимости тока в цепи, содержащей индуктивность и активное сопротивление и питаемой из источника синусоидального напряжения постоянной амплитуды, возникает во многих областях автоматики и измерительной техники. Достаточно упоминать цепи вольтметров переменного тока электродинамических и др. систем, с одной стороны, и магнитные цепи различных датчиков, в частности датчиков Холла, с другой. В связи с этим данная задача неоднократно рассматривалась рядом авторов. Более обстоятельные исследования по измерительной технике принадлежат В. Н. Мильштейну [1] и М. А. Огорелину [2], рассмотревшими только простейшие цепи компенсации типа  $RC$ . Совсем недавно задача рассмотрена с общих позиций синтеза цепей Г. Фритце [4], однако исследованные там компенсационные цепи (кроме простейших) содержат  $L$ ,  $R$  и  $C$  и на практике менее удобны для реализации.

В настоящей работе исследуется задача расчета компенсационных цепей типа  $RC$  для обеспечения постоянства модуля тока в индуктивной нагрузке в низкочастотном диапазоне (от нулевой до некоторой максимальной частоты). Анализ основывается на современных методах синтеза электрических цепей [5].

Общеизвестно, что полное сопротивление цепи, содержащей последовательно включенные индуктивность  $L_t$  и активное сопротивление  $R_t$ , выражается

$$Z_t(j\omega) = R_t + j\omega L_t = ze^{i\varphi}, \quad (1)$$

где модуль

$$z(\omega) = \sqrt{R_t^2 + (\omega L_t)^2} = L_t \sqrt{\omega^2 + \omega_t^2} \quad (2)$$

и  $\omega_t = \frac{R_t}{L_t}$  — величина, обратная постоянной времени. При изменении частоты модуль растет, что вызывает уменьшение тока в цепи. Относительную погрешность можно вычислить

$$\delta = \frac{z(\omega) - z(0)}{z(0)} = \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_t^2} - \omega_t}{\omega_t} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_t} \right)^2, \quad (3)$$

откуда граничная частота  $\omega_p$ , где еще можно пренебречь изменением тока, будет

$$\omega_p = \sqrt{2\delta} \omega_t. \quad (4)$$

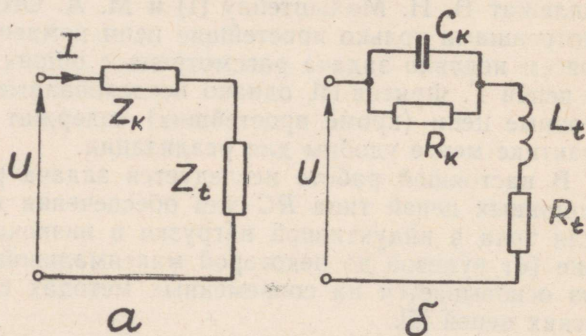
Частотный диапазон может быть расширен включением добавочного активного сопротивления, однако тем самым необходимо значительно увеличить напряжение источника питания. Поэтому рациональное решение проблемы требует применения специальной компенсирующей цепи, включаемого между источником питания и нагрузкой. Компенсирующая цепь может быть двухполюсником или четырехполюсником.

### Компенсация двухполюсником

Компенсирующий двухполюсник включается последовательно с нагрузкой  $Z_t(j\omega)$  (фиг. 1 а) и для полной компенсации, очевидно, необходимо иметь сопротивление

$$Z_k(j\omega) = -j\omega L_t.$$

Фиг. 1



Такой импеданс пассивными элементами нереализуем и поэтому задача может быть решена только приблизительно. Применение же активных компенсирующих цепей на базе усилителей с обратной связью [6] в большинстве случаев нерационально из-за громоздкости и недостаточности временной стабильности, и в настоящей работе не рассматривается.

Компенсирующий двухполюсник выбирается из условия постоянства модуля входного сопротивления результирующего двухполюсника (суммы  $Z_t$  и  $Z_k$ ), в диапазоне частот  $\omega = 0 \dots \omega_m$ . При этом максимальная частота зависит от свойств компенсационного двухполюсника.

Модуль входного сопротивления может быть вычислен на базе известного соотношения [5]

$$|Z_{вх}(j\omega)|^2 = Z_{вх}(j\omega) Z_{вх}^*(j\omega) = Z_{вх}(j\omega) Z_{вх}(-j\omega) \quad (5)$$

где  $Z_{вх}^*$  — сопряженный комплекс входного сопротивления. Переходя к операторным сопротивлениям (заменой  $p = j\omega$ ), получим

$$|Z_{вх}|^2(-p^2) = Z_{вх}(p) Z_{вх}(-p). \quad (6)$$

Из приведенных формул следует, что квадрат модуля сопротивления является четной функцией частоты. Как известно из общей теории синтеза цепей [5], квадрат модуля входного сопротивления можно представить в виде дробно-рациональной функции, содержащей только четные степени частоты как в числителе, так и в знаменателе, т. е.

$$|Z_{вх}|^2(\omega^2) = \frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)}. \quad (7)$$

Согласно условиям нашей задачи, необходимо иметь

$$\frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)} - |Z_{вх}|^2(0) = 0$$

во всем диапазоне частот от нуля до  $\omega_m$  с погрешностью, не превышающей  $2\delta$  (если  $\delta$  — допустимая погрешность модуля сопротивления или тока). Остаточная погрешность будет зависеть от частоты сложным образом. Попытка аппроксимации погрешности полиномами Чебышева четного порядка

$T_{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)$  для достижения наименьшей максимальной погрешности, например в виде

$$\frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)} - |Z_{вх}|^2(0) = 2\delta |Z_{вх}|^2(0) \left[ T_{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) - (-1)^n \right] \quad (8)$$

не увенчается успехом, так как ведет к нереализуемым условиям. Причина заключается в том, что частотная погрешность дробно-рациональной функции не может быть аппроксимирована полиномом при постоянстве максимумов погрешностей.

Решение задачи может быть достигнуто иначе. Если компенсационный двухполюсник составляется из элементов  $RC$ , то сопротивление такого двухполюсника можно представить в общем виде

$$Z_k(p) = a_k \prod_{i=1}^n \frac{p + \sigma_{2i}}{p + \sigma_{2i-1}}, \quad (9)$$

причем  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{2n}$ . Другими словами, полюсы и нули функции чередуются на отрицательной вещественной полу-

оси комплексной плоскости параметра  $p$ , причем ближайшим к началу координат является полюс. Если последний нуль находится в бесконечности, то член  $p + \sigma_{2n}$  в числителе отсутствует. В нашем случае именно такой случай наиболее целесообразен для обеспечения минимальной вещественной части  $Z_k$ , так как у цепей  $RC$  всегда

$$\operatorname{Re}Z_k(0) \geq \operatorname{Re}Z_k(\infty).$$

Следовательно, в выражении (9) степень числителя меньше степени знаменателя. Если теперь выразить общее входное сопротивление схемы, проведя одновременно нормирование сопротивлений по величине индуктивности  $L_t$ , то получим

$$Z_{вх}(p) = Z_k(p) + p + \omega_t$$

или

$$Z_{вх}(p) = \frac{(p + \omega_t) \prod_{i=1}^n (p + \sigma_{2i-1}) + a_k \prod_{i=1}^{n-1} (p + \sigma_{2i})}{\prod_{i=1}^n (p + \sigma_{2i-1})}.$$

Здесь наивысшая степень числителя всегда превышает наивысшую степень знаменателя на единицу. Поэтому в выражении квадрата модуля (7) наивысшая степень полинома  $B(\omega^2)$  будет на два больше наивысшей степени полинома  $A(\omega^2)$ .

В таких условиях полином  $B(\omega^2)$  может быть аппроксимирован через полином  $A(\omega^2)$  путем замены члена  $B(\omega^2)$  с наивысшей степенью линейной комбинацией низших степеней [7], пользуясь для наилучшей аппроксимации соответствующим четным полиномом Чебышева, и проведя затем приравнение соответствующих коэффициентов при равных степенях полиномов  $B(\omega^2)$  и  $A(\omega^2)$ . Если, например,

$$\frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)} = \frac{\omega^6 + B_4\omega^4 + B_2\omega^2 + B_0}{\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0}, \quad (11)$$

то пользуясь полиномом

$$T_6\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) = 32\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^6 - 48\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^4 + 18\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 - 1,$$

получим

$$\omega^6 \approx \frac{3}{2} \omega_m^2 \omega^4 - \frac{9}{16} \omega_m^4 \omega^2 + \frac{\omega_m^6}{32}.$$

где погрешность (при пренебрежении  $T_6$ ), учитывая что  $|T_6| \leq 1$ , не превышает  $\frac{\omega_m^6}{32}$ . Далее получим

$$\frac{B_1(\omega^2)}{A(\omega^2)} \approx \frac{(B_4 + \frac{3}{2} \omega m^2) \omega^4 + (B_2 - \frac{9}{16} \omega m^4) \omega^2 + B_0 + \frac{\omega m^6}{32}}{\omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0}. \quad (12)$$

Отсюда получим приравнованием соответствующих коэффициентов при равных степенях в числителе и знаменателе условия для выбора параметров компенсационной цепочки. Соответствующими условиями будут

$$\frac{16B_2 - 9\omega m^4}{16B_4 + 24\omega m^2} = A_2, \quad (13)$$

$$\frac{32B_0 + \omega m^6}{32B_4 + 48\omega m^2} = A_0. \quad (14)$$

Так как  $|Z_{ex}|^2(0) = \frac{B_0}{A_0}$  и максимальная допустимая погрешность квадрата модуля равна  $2\delta$ , то пользуясь соотношением (12) при  $\omega = 0$ , получим

$$|Z_{ex}|^2(0) (1 + 2\delta) \approx |Z_{ex}|^2(0) + \frac{\omega m^6}{32A_0},$$

откуда

$$2\delta = \frac{\omega m^6}{32B_0}.$$

Таким образом можно при заданной величине погрешности определить максимальную возможную частоту диапазона компенсации

$$\omega_m = 2 \sqrt[6]{\delta B_0} \quad (15)$$

и далее пользоваться формулами (13) и (14) для выбора подходящих параметров компенсационной цепи. Так как число условий меньше числа параметров, то некоторые из них могут быть свободно заданы.

Для иллюстрации методики рассмотрим синтез простейшей компенсационной цепочки (фиг. 1б), состоящей из параллельно включенных сопротивления  $R_k$  и конденсатора  $C_k$ . Согласно формуле (9) в таком случае

$$Z_k = \frac{a_k}{p + \sigma_k}, \quad (16)$$

где  $a_k = \frac{1}{C_k}$  и  $\sigma_k = \frac{1}{R_k C_k}$ . Далее (для нормированной по  $L_t$  нагрузки) имеем

$$Z_{bx}(p) = p + \omega_t + \frac{a_k}{p + \sigma_k}. \quad (17)$$

Проведя вычисления по формуле (6) и заменяя  $-p^2 = \omega^2$ , получим формулу (7) в виде

$$|Z_{bx}|^2(\omega^2) = \frac{\omega^4 + (\sigma_k^2 + \omega_t^2 - 2a_k)\omega^2 + (a_k + \sigma_k\omega_t)^2}{\omega^2 + \sigma_k^2}. \quad (18)$$

Здесь для аппроксимации подходит полином Чебышева четвертого порядка, откуда

$$\omega^4 \approx \omega_m^2 \omega^2 - \frac{\omega_m^4}{8}.$$

Теперь аналогично формуле (15) получим

$$\omega_m = 2 \sqrt[4]{\delta(a_k + \sigma_k\omega_t)^2}, \quad (19)$$

а другим условием будет

$$\frac{(a_k + \sigma_k\omega_t)^2 - \frac{\omega_m^4}{8}}{\sigma_k^2 + \omega_t^2 + \omega_m^2 - 2a_k} = \sigma_k^2. \quad (20)$$

Введением в последнее выражение  $\omega_m$  из (19) получим условие (20) в виде

$$(a_k + \omega_t\sigma_k)^2(1 - 2\delta) = \sigma_k^2(\sigma + \omega_t^2 - 2a_k) + 4\sqrt{\delta}\sigma_k^2(a_k + \sigma_k\omega_t).$$

Для упрощения вычислений вводим вспомогательную величину

$$m = a_k + \sigma_k\omega_t, \quad (21)$$

что даст возможность преобразовать полученное уравнение к виду

$$m^2 + \frac{1 - 2\sqrt{\delta}}{1 - 2\delta} 2\sigma_k^2 m - \frac{\sigma_k^2(\sigma_k + \omega_t)^2}{1 - 2\delta} = 0, \quad (22)$$

пригодную для вычисления параметра  $m$  (при заданных  $\sigma_k$ ,  $\omega_t$  и  $\delta$ ).

Рассмотрим подробнее методику расчета при заданном значении погрешности  $\delta = 0,01$ . Приняв далее  $\omega_t = 1$ , что по существу означает нормирование частот по  $\omega_t$  и поэтому не ограничивает общности, получим уравнение (22) в форме

$$m^2 + 1,633\sigma_k^2 m - 1,020\sigma_k^2(1 + \sigma_k)^2 = 0. \quad (23)$$

Задаваясь различными значениями  $\sigma_k$ , имеем возможность вычислить параметр  $m$ , а по уравнению (21) также  $a_k$ . Тем самым задача решена, хотя в относительном виде. Некоторые вычисленные результаты представлены в таблице 1. Для

Таблица 1

$\sigma_k$	$\delta = 0,005$				$\delta = 0,01$				$\delta = 0,02$			
	$a_k$	$\omega_m$	$\omega_{p1}$	$\frac{\omega_m}{\omega_{p1}}$	$a_k$	$\omega_m$	$\omega_{p1}$	$\frac{\omega_m}{\omega_{p1}}$	$a_k$	$\omega_m$	$\omega_{p1}$	$\frac{\omega_m}{\omega_{p1}}$
1,0	0,334	0,614	0,189	3,25	0,362	0,738	0,272	2,71	0,427	0,898	0,403	2,23
2,0	1,486	0,993	0,246	4,03	1,619	1,203	0,362	3,32	1,827	1,471	0,541	2,72
5,0	10,45	2,090	0,437	4,79	11,12	2,540	0,645	3,94	12,21	3,120	0,974	3,20
10	43,75	3,898	0,760	5,13	46,24	4,743	1,125	4,21	50,20	5,836	1,703	3,44
20	179,3	7,508	1,409	5,33	188,8	9,138	2,088	4,38	203,9	11,26	3,167	3,56
50	1139	18,34	3,360	5,45	1195	22,32	4,981	4,48	1286	27,49	7,558	3,64
100	4577	36,36	6,610	5,50	4802	44,28	9,804	4,52	5162	54,56	14,88	3,67
200	18360	72,44	13,12	5,52	19250	88,20	19,45	4,54	20690	108,7	29,54	3,68
500	114900	180,7	32,64	5,54	120460	220,0	48,38	4,55	129300	271,1	73,48	3,69
1000	459700	360,9	65,14	5,55	482170	439,6	96,63	4,55	517900	541,8	146,8	3,69

Таблица 2

$\sigma_k$	$\delta = 0,005$				$\delta = 0,01$			
	$R_k$ <i>ом</i>	$C_k$ <i>мкф</i>	$\omega_m$	$\eta$	$R_k$ <i>ом</i>	$C_k$ <i>мкф</i>	$\omega_m$	$\eta$
1,0	0,334	$2,99 \cdot 10^6$	0,614	0,750	0,362	$2,76 \cdot 10^6$	0,738	0,734
2,0	0,743	$673 \cdot 10^3$	0,993	0,574	0,809	$618 \cdot 10^3$	1,203	0,553
5,0	2,090	$35,7 \cdot 10^3$	2,090	0,324	2,225	$89,9 \cdot 10^3$	2,540	0,310
10	4,375	$22,86 \cdot 10^3$	3,898	0,186	4,624	$21,63 \cdot 10^3$	4,743	0,178
20	8,965	$5,577 \cdot 10^3$	7,508	0,100	9,438	$5,296 \cdot 10^3$	9,138	0,0958
50	22,78	878,0	18,34	0,0421	23,91	836,8	22,32	0,0401
100	45,77	218,5	36,36	0,0214	48,02	208,2	44,28	0,0204
200	91,82	54,47	72,44	0,0108	96,25	51,95	88,20	0,0103
500	229,9	8,703	180,7	0,00433	240,9	8,303	220,0	0,00413
1000	459,7	2,175	360,9	0,00217	482,2	2,074	439,6	0,00207

$\delta = 0,02$				
$\sigma_k$	$R_k$ ом	$C_k$ мкф	$\omega_m$	$\eta$
1,0	0,427	$2,34 \cdot 10^6$	0,898	0,701
2,0	0,913	$547 \cdot 10^3$	1,471	0,523
5,0	2,442	$81,9 \cdot 10^3$	3,120	0,290
10	5,020	$19,92 \cdot 10^3$	5,836	0,166
20	10,12	$4,904 \cdot 10^3$	11,26	0,0899
50	25,73	777,6	27,49	0,0374
100	51,62	193,7	54,56	0,0190
200	103,5	48,33	108,7	0,00957
500	258,7	7,734	271,1	0,00385
1000	517,9	1,931	541,8	0,00193

сравнения там же представлены значения граничной частоты  $\omega_m$ , а также относительные величины активного сопротивления компенсационной цепи, равные (согласно формуле

$$(16)) \frac{a_k}{\sigma_k}.$$

Для оценки эффективности компенсационной цепи целесообразно вычислить относительное расширение частотного диапазона. Собственная граничная частота компенсируемого индуктивного элемента определялась формулой (4). Добавление последовательного активного сопротивления и смещение погрешности симметрично относительно среднего значения расширяет частотный диапазон до значения

$$\omega_{p1} = 2 \sqrt{\delta} \left( \omega_t + \frac{a_k}{\sigma_k} \right). \quad (24)$$

Введение компенсационной цепи, рассчитанной по вышеприведенной методике, даст максимальную частоту  $\omega_m$  и поэтому фактическое расширение частотного диапазона будет

$$\frac{\omega_m}{\omega_{p1}} = \frac{\sigma_k}{4 \sqrt{\delta} (a_k + \omega_t \sigma_k)^2}, \quad (25)$$

что для нашего случая ( $\omega_t = 1$ ;  $\delta = 0,01$ ) даст

$$\frac{\omega_m}{\omega_{p1}} = \frac{3,162 \sigma_k}{\sqrt{a_k + \sigma_k}}. \quad (26)$$

Вычисленные по этой формуле значения приведены также в таблице 1. По ним видно, что при больших значениях  $\sigma_k$  растет частотный диапазон (до некоторого предела), но растет и активное сопротивление компенсационной цепи, вызывая значительные потери.

При выводе наших формул было произведено нормирование сопротивлений по  $L_t$  и частотного диапазона по  $\omega_t$ . Поэтому представленные в таблице данные непосредственно могут быть использованы для вычисления параметров компенсационной цепи  $R_k$  и  $C_k$  для единичной нагрузки ( $R_t = 1 \text{ ом}$  и  $L_t = 1 \text{ гн}$ ). Непосредственные численные значения параметров компенсационной цепи в таком случае даны в таблице 2. Для случая произвольной нагрузки результаты получаются на основании данных таблицы 2, пользуясь правилами преобразования (нормирования) электрических цепей [5].

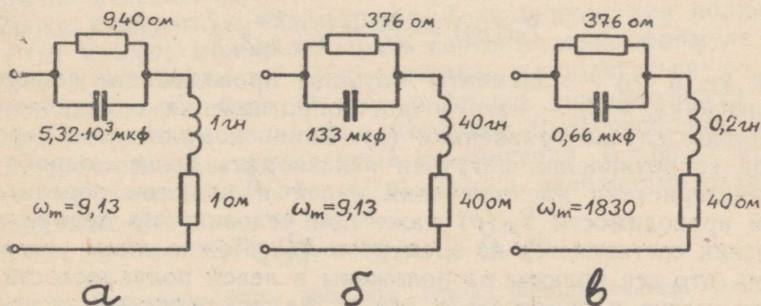
Для ориентации при расчетах в таблице 2 приведена величина  $\eta$ , характеризующая потери мощности в компенсационной цепи (при нулевой частоте и  $\omega_t = 1$ )

$$\eta = \frac{1}{1 + R_k} = \frac{\sigma_k}{a_k + \sigma_k}.$$

Методика расчета исключительно проста и может быть иллюстрирована следующим численным примером.

Задана катушка с сопротивлением  $40 \text{ ом}$  и индуктивностью  $0,2 \text{ гн}$  и потребуется обеспечить независимый от частоты ток в катушке  $30 \text{ ма}$  при мощности источника не более  $0,5 \text{ вт}$ . Так как максимальные потери в катушке  $P_{t \max} = 0,03^2 \cdot 40 = 36 \cdot 10^{-3} \text{ вт}$ , то в нашем случае необходимо иметь  $\eta \geq \frac{36 \cdot 10^{-3}}{0,5} \approx 7 \cdot 10^{-2}$ . Ориентируясь таблицей 2, выбираем  $\sigma_k = 20$ . Этому соответствует цепь, показанная на фиг. 2а.

Дальнейшие этапы заключаются лишь в преобразовании данной цепи. В первую очередь проведем преобразование сопротивлений так, чтобы получить заданное активное сопротивление нагрузки  $40 \text{ ом}$ . Как известно [5], при преобразовании сопротивлений цепей активные сопротивления и индук-



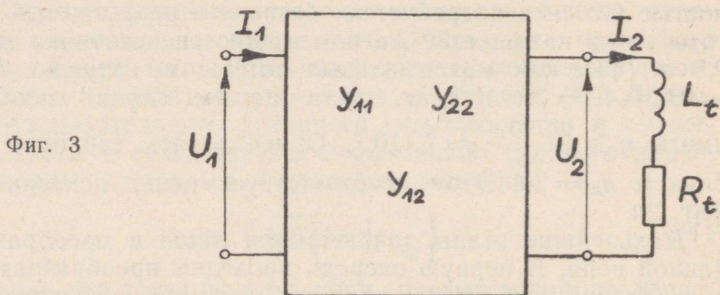
Фиг. 2

тивности увеличиваются, а емкости уменьшаются в одинаковой степени. В результате получается цепь фиг. 2б. Дальнейший этап заключается в преобразовании частоты, при котором активные сопротивления остаются неизменными, индуктивности и емкости увеличиваются или уменьшаются в одинаковой мере. Проведя преобразование так, чтобы получить заданную индуктивность нагрузки  $0,2 \text{ мГн}$ , получим окончательную цепь фиг. 2в, чем и заканчивается процесс синтеза компенсационного двухполюсника.

При применении более сложных двухполюсных компенсационных цепей расчет ведется совершенно аналогично, однако является значительно более громоздким и получение результатов в общем виде затруднительно.

### Компенсация четырехполюсником

В случае включения между источником питания и нагрузкой компенсационного четырехполюсника имеем схему, показанную на фиг. 3. Здесь необходимо обеспечить постоян-



ство передаточной проводимости  $Y_{21}(j\omega)$ , которая для нагруженного четырехполюсника выражается

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{I_2}{U_1} = \frac{-y_{12}}{1 + y_{22}Z_t}, \quad (29)$$

где  $y_{12}$  и  $y_{22}$  — элементы матрицы проводимости четырехполюсника, а  $Z_t$  — нагрузочное сопротивление, определяемое в нашем случае уравнением (1). Ввиду комплексного характера сопротивления нагрузки нельзя дать более подробную характеристику расположения нулей и полюсов передаточной проводимости  $Y_{21}(p)$  даже при условии, что четырехполюсник составляется из элементов  $RC$ . Можно лишь утверждать, что все полюсы расположены в левой полуплоскости, а нули могут располагаться всюду, за исключением положительной вещественной полуоси [5]. В дальнейшем ограничи-

ваем задачу синтезом проходного четырехполюсника, т. е. четырехполюсника с общим входным и выходным зажимом. Как известно, такие четырехполюсники должны еще удовлетворять условиям Фиалькова—Герста [5], заключающимся в том, что коэффициенты числителя проводимостей  $y_{12}$  и  $y_{22}$  должны быть положительные и у  $y_{12}$  соответственно меньше чем у  $y_{22}$  (и  $y_{11}$ ). Математически передаточная проводимость выражается через отношение двух полином, т. е.

$$Y_{21}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}, \quad (30)$$

которая в бесконечности имеет нуль (причины были разъяснены ранее). В таком случае квадрат модуля передаточной проводимости можно найти аналогично ранее рассмотренной методике в случае двухполюсника (формулы (5) и (6))

$$|Y_{21}|^2(\omega) = \left[ \frac{P(p)P(-p)}{Q(p)Q(-p)} \right]_{p=j\omega} = \omega^2, \quad (31)$$

поэтому квадрат модуля можно также представить в виде двух четных полином

$$|Y_{21}|^2(\omega^2) = \frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_i \omega^{2i}}{\sum_{i=0}^n A_i \omega^{2i}}. \quad (32)$$

Допустим, что нам выражение квадрата модуля известно. Дальнейший синтез развивается так\*:

Прежде всего путем замены в формуле (32)  $\omega^2 = -p^2$  получим числитель и знаменатель в функции от  $p$ . Далее находим корни числителя и знаменателя. Ввиду наличия только четных степеней все корни располагаются симметрично относительно мнимой оси (комплексные корни имеют даже квадратную симметрию). Теперь нули для полиномов  $P(p)$  и  $Q(p)$  можно выбирать соответственно формуле (31). Все нули полинома  $Q(p)$  должны располагаться в левой полуплоскости (для  $Q(-p)$  в правой полуплоскости соответственно); расположение же нулей  $P(p)$  свободно, за исключением вышеприведенных ограничений. В результате получим полиномы  $P(p)$  и  $Q(p)$ . Теперь необходимо разделить полином  $Q(p)$  на две части

$$Q(p) = Q_a(p) + Q_b(p), \quad (33)$$

\* Излагаемая ниже методика близка методу синтеза Фиалькова—Герста [5].

где в свою очередь

$$Q_b(p) = (p + \omega_t) Q_c(p). \quad (34)$$

В результате такого разделения можно писать

$$Y_{21}(p) = \frac{P(p)}{Q_a(p) + (p + \omega_t) Q_c(p)} = \frac{\frac{P(p)}{Q_a(p)}}{1 + (p + \omega_t) \frac{Q_c(p)}{Q_a(p)}}.$$

Сравнение полученного выражения с формулой (29) даст возможность писать

$$-y_{12} = \frac{P(p)}{Q_a(p)}, \quad (35)$$

$$y_{22} = \frac{Q_a(p)}{Q_c(p)}. \quad (36)$$

Последние формулы дают также возможность сформулировать требования к разделению полинома  $Q(p)$  согласно формуле (33). Так как выражения (35) и (36) должны удовлетворять условиям проводимостей четырехполюсника типа  $RC$ , то все нули полинома  $Q_a(p)$  должны располагаться на отрицательной вещественной полуоси. Там же должны находиться также нули полинома  $Q_c(p)$ , причем первая нуль от начала координат должна принадлежать полиному  $Q_c(p)$ , а затем нули полиномов  $Q_a(p)$  и  $Q_c(p)$  должны чередоваться. Далее целесообразно, чтобы  $y_{22}$  имел полюс в бесконечности, откуда следует, что порядок полинома  $Q_c(p)$  на единицу выше порядка  $Q_a(p)$ . Разделение полинома  $Q(p)$  на две части согласно вышеизложенному представляет наиболее трудную задачу. Причиной основных трудностей является то, что полином  $Q(p)$  должен содержать еще нуль, созданный комплексной нагрузкой  $Z_t(p)$ .

Если у нас известен полином  $Q(p)$  и тем самым также полином  $A(\omega^2)$ , то полином  $B(\omega^2)$  определяется из условия постоянства  $|Y_{21}|^2$  в диапазоне частот от нуля до определенного максимума  $\omega_m$ . Так как максимальная степень  $B(\omega^2)$  на два меньше максимальной степени  $A(\omega^2)$  (формула (32)), то член с максимальной степенью в выражении  $A(\omega^2)$  можно аппроксимировать по Чебышеву, в результате чего и получим необходимый полином  $B(\omega^2)$ .

Если, например,

$$A(\omega^2) = \omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0, \quad (37)$$

то пользуясь полиномом Чебышева шестого порядка

$$T_6\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) = 32\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^6 - 48\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^4 + 18\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 - 1,$$

можем отсюда писать

$$\omega^6 = \frac{3}{2} \omega_m^2 \omega^4 - \frac{9}{16} \omega_m^4 \omega^2 + \frac{1+T_6}{32} \omega_m^6. \quad (38)$$

Вводя это в выражение  $A(\omega^2)$ , получим

$$B(\omega^2) = K_0 \left[ \left( A_4 + \frac{3}{2} \omega_m^2 \right) \omega^4 + \left( A_2 - \frac{9}{16} \omega_m^4 \right) \omega^2 + A_0 + \right. \\ \left. + \frac{1+T_6}{32} \omega_m^6 \right], \quad (39)$$

где  $K_0 \leq 1$  вводится для обеспечения реализуемости четырех-полюсника в виде проходного, причем приемлемая величина  $K_0$  определяют из условий Фиалькова-Герста. Опускание из выражения (39) величины  $|T_6| \leq 1$  создает погрешность, не превышающую

$$2\delta = \frac{\omega_m^6}{32A_0},$$

откуда максимальная частота выражается

$$\omega_m = 2\sqrt[6]{\delta A_0}. \quad (40).$$

Последняя формула имеет достаточно общий характер. При более высокой максимальной степени  $A(\omega^2)$  (например  $2n$ ) лишь меняется показатель порядка корня (вместо 6 станет равным также  $2n$ ). Очевидно, что для получения широкого диапазона компенсации целесообразно иметь максимальное значение  $A_0$ . Величина  $A_0$  связана с нулем полинома  $Q(p)$ . Если полином  $Q(p)$  имеет вещественные нули, например  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , то

$$A_0 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2.$$

Если же имеется пара комплексных нулей  $\sigma_1 + j\omega_1$ , и  $\sigma_1 - j\omega_1$  и вещественный нуль  $\sigma_2$ , то

$$A_0 = (\sigma_1^2 + \omega_1^2) \sigma_2^2.$$

Таким образом, для достижения широкого диапазона частот компенсации необходимо иметь нули полинома  $Q(p)$  как можно больше. Это однако вызывает необходимость выбора меньших значений  $K_0$  для обеспечения выполнения условий Фиалькова-Герста. Тем самым увеличатся потери в четырехполюснике.

Рассмотрим подробнее взаимоотношения нулей. Допустим, что полином  $Q(p)$  разделен следующим образом (для примера берем полином третьей степени).

$$Q(p) = d(p + \sigma_2) + (p + \sigma_1)(p + \sigma_3)(p + \omega_t) = \\ = p^3 + (\sigma_1 + \omega_t + \sigma_3)p^2 + [\sigma_1\sigma_3 + \omega_t(\sigma_1 + \sigma_3) + d]p + \\ + d\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\omega_t, \quad (41)$$

тогда для  $A(\omega^2)$  получим выражение

$$A(\omega^2) = \omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0, \quad (42)$$

где  $A_4 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \omega_t^2 - 2d$ ,

$$A_2 = (d + \sigma_1\sigma_3)^2 + \omega_t^2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) + 2d\omega_t(\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2) - 2d\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$A_0 = (d\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\omega_t)^2.$$

Далее находим полином  $B(\omega^2)$  согласно формуле (39)

$$B(\omega^2) = K_0[B_4\omega^4 + B_2\omega^2 + B_0], \quad (43)$$

где

$$B_4 = A_4 + 6\sqrt[3]{\delta A_0},$$

$$B_2 = A_2 - 9\sqrt[3]{\delta^2 A_0^2},$$

$$B_0 = A_0(1 + 2\delta).$$

Когда известны коэффициенты полинома  $B(\omega^2)$ , можно также находить коэффициенты полинома  $P(p)$  (формулы 31 и 32)

$$P(p) = b_2p^2 + b_1p + b_0.$$

В результате вычислений получим

$$b_2 = \sqrt{K_0 B_4},$$

$$b_1 = \sqrt{K_0(B_2 + 2\sqrt{B_0 B_4})^3},$$

$$b_0 = \sqrt{K_0 B_0}.$$

Полученные коэффициенты должны быть меньше соответствующих коэффициентов полинома  $Q_c(p)$

$$Q_c(p) = p^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)p + \sigma_1\sigma_3.$$

Таким образом получим условия Фиалькова-Герста, ограничивающие выбор нулей полиномов  $Q_a(p)$  и  $Q_c(p)$

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \omega_t^2 - 2d + 6\sqrt[3]{\delta(d\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\omega_t)^2} \leq \frac{1}{K_0}, \quad (44)$$

$$(d\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\omega_t)\sqrt{1 + 2\delta} \leq \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sqrt{K_0}} \quad (45)$$

и последнее условие, которого из-за громоздкости нецелесообразно выразить через исходные нули

$$A_2 - 9\sqrt[3]{\delta^2 A_0^2} + 2\sqrt{A_0(1 + 2\delta)(A_4 + 6\sqrt[3]{\delta A_0})} \leq \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)^2}{K_0}. \quad (46)$$

С другой стороны, максимальная частота может быть вычислена

$$\omega_m = 2\sqrt[3]{(d\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\omega_t)\sqrt{\delta}}. \quad (47)$$

Таким образом, нули полиномов  $Q_a(p)$  и  $Q_c(p) - \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  необходимо выбирать при заданных  $\omega_t$  и  $\delta$  так, чтобы при выполнении неравенств (44), (45) и (46) обеспечить максимум (47).

Решение такой задачи в общем виде даже для рассмотренного нами относительно простого случая четырехполюсника неизвестно. Поэтому на данном этапе для решения задачи синтеза компенсационного четырехполюсника необходимо задаваться нулями полином  $Q_a(p)$  и  $Q_c(p)$  и в дальнейшем проверить выполнение условий (44), (45) и (46).

Когда определены  $y_{22}$  и  $y_{12}$ , синтез четырехполюсника проводится одним из известных способов [5], например методом Фиалькова-Герста или Озаки.

Пример:

Рассмотрим методику синтеза компенсационной цепи при следующих данных:  $\sigma_1 = 1,2$ ;  $\sigma_2 = 1,5$ ;  $\sigma_3 = 2,0$ ;  $d = 1$ ;  $\omega_t = 1$ ;  $\delta = 0,01$ .

На базе исходных данных

$$Q(p) = p^3 + 4,2p^2 + 6,6p + 3,9.$$

Далее

$$A(\omega^2) = \omega^6 + 4,44\omega^4 + 10,8\omega^2 + 15,21.$$

Максимальная частота компенсации

$$\omega_m = 2\sqrt[6]{0,01 \cdot 15,21} = 1,461,$$

что по сравнению с некомпенсированной цепью расширяет частотный диапазон 10,3 раза.

Полином  $B_1(\omega^2)$  будет

$$B_1(\omega^2) = 3,202\omega^4 + 8,24\omega^2 + 15,51.$$

Данный полином имеет четыре комплексных корня, обладающих квадрантной симметрией

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -0,678 + j1,320; & \omega_3 &= +0,678 + j1,320; \\ \omega_2 &= -0,678 - j1,320; & \omega_4 &= 0,678 - j1,320; \end{aligned}$$

На базе этих корней построим полином  $P(p)$

$$P(p) = (p - \omega_1)(p - \omega_2) = p^2 + 1,356p + 1,484.$$

Так как  $Q_c(p) = p^2 + 3,2p + 2,4$ , то условия Фиалькова-Герста выполнены и следовательно для искомого четырехполюсника имеем

$$\begin{aligned} y_{22} &= \frac{p^2 + 3,2p + 2,4}{p + 1,5} = \frac{(p + 1,2)(p + 2,0)}{p + 1,5}, \\ -y_{12} &= \frac{p^2 + 1,356p + 1,484}{p + 1,5}. \end{aligned}$$

Коэффициент передачи напряжения для холостого хода будет

$$K_u = \frac{p^2 + 1,356p + 1,484}{p^2 + 3,2p + 2,4}$$

Проведем синтез методом Фиалькова-Герста [5].

Для этого необходимо прежде всего знаменатель и числитель коэффициента передачи напряжения разделить на две части. При этом выбираем вспомогательный полином  $G(p) = p + 1,55$ .

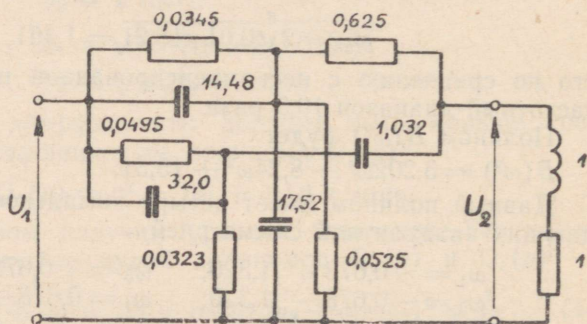
Тогда

$$K_u = \frac{\frac{p(p + 0,632)}{p + 1,55} + \frac{0,724(p + 2)}{p + 1,55}}{\frac{p(p + 1,6)}{p + 1,55} + \frac{0,8(2p + 3)}{p + 1,55}}$$

и искомым полином можно представить через параллельное соединение двух более простых полиномов с данными:

$$\begin{aligned} \text{I. } y_{22a} &= \frac{p(p + 1,6)}{p + 1,55}; & \text{II. } y_{22b} &= \frac{0,8(2p + 3)}{p + 1,55}; \\ -y_{12a} &= \frac{p(p + 0,632)}{p + 1,55}; & -y_{12b} &= \frac{0,724(p + 2)}{p + 1,55}; \\ K_{uI} &= \frac{p + 0,632}{p + 1,6}; & K_{uII} &= \frac{0,905(p + 2)}{2p + 3}. \end{aligned}$$

Фиг. 4



Результаты синтеза четырехполюсника по полученным формулам представлены на фиг. 4. Как видно, при широкой полосе частот компенсации коэффициент передачи напряжения с нагрузкой при нулевой частоте равняется 0,38, т. е. достаточно хорошей величине. Зато входное сопротивление четырехполюсника весьма низкое. Здесь наблюдается общая закономерность, что при лучшей компенсации потери мощности в компенсационном элементе растут. Однако общее исследование соотношений мощностей исключительно громоздко и практически не представляется возможным. Некоторые замечания в этом направлении содержатся в [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Мильштейн. Энергетические соотношения в электроизмерительных приборах. ГЭИ, 1960.
2. М. А. Огорелин. Компенсация частотных погрешностей вольтметров электродинамической системы. Изв. Киевского политехнического института, 1957, 22.
3. R. Langenbein, G. Werkmeister. Elektrische Messgeräte, Band II. Leipzig, 1959.
4. G. Fritsche. Entwurf von Kompensationsschaltungen, Teile I und II. Zeitschrift für Messen, Steuern, Regeln (Automatisierung), 1962, № 11 und 12.
5. Н. Балабанян. Синтез электрических цепей. ГЭИ, 1961.
6. Г. Боде. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. ИИЛ, 1948.
7. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, 1961.
8. G. Fritsche. Entwurf linearer Schaltungen. VEB Verlag Technik. Berlin 1962.

В. Крахт

## СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В настоящее время вопросы синтеза линейных импульсных систем автоматического регулирования (ИСАР) хорошо изучены. Существуют различные методы определения передаточной функции корректирующего устройства системы [1, 2, 3, 4]. Но иначе обстоит дело с технической реализацией определенных передаточных функций. Настоящая статья затрагивает некоторые аспекты последнего направления.

Передаточная функция корректирующего устройства линейной ИСАР, полученная в результате синтеза, в общем случае выражается в следующем виде [2, 3, 4]:

$$W_k(z) = \frac{D(z)}{C(z)} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_m z^{-m}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{E(z)}, \quad (1)$$

где  $D(z)$  — полином от  $z^{-1}$  порядка  $m$ ,  
 $C(z)$  — " " " "  $n$ ,  
 $d_0, d_1 \dots d_m$  — коэффициенты полинома  $D(z)$ ,  
 $c_1, c_2 \dots c_n$  — " "  $C(z)$ ,  
 $Y(z)$  —  $z$  — изображение выходной величины корректирующего устройства,  
 $E(z)$  —  $z$  — изображение входной величины корректирующего устройства, или, что то же самое,  $z$  — изображение величины рассогласования системы регулирования,

$z = e^{pT}$ , причем  $T$  — интервал временной дискретности или, просто, интервал дискретности.

Реализация передаточной функции (1) возможна на основе одного из следующих методов:

1) метод импульсной коррекции с использованием элементов непрерывного действия;

2) метод цифровой коррекции с программированием универсальных или специализированных цифровых вычислительных машин, включенных в контур регулирования;

3) метод цифровой коррекции с применением цифровых вычислительных устройств со специальной структурой, построенных по принципу цифрового моделирования алгоритма коррекции и не нуждающихся в программировании.

Каждый метод имеет ряд разновидностей, причем реализация передаточной функции (1) возможна также комбинацией вышеперечисленных методов.

Метод импульсной коррекции (первый метод) позволяет получить простые устройства только при значениях  $m$  и  $n$ , не превышающих 2—3. В более сложных случаях корректирующие устройства очень усложняются и применения не нашли. Корректирующим устройствам, состоящим из непрерывных элементов, присущи все недостатки аналоговых систем (ограниченная точность, нестабильность характеристик и т. д.).

Метод цифровой коррекции с программированием (второй метод) позволяет реализовать передаточную функцию (1) любой сложности с любой заданной точностью, но требует наличия цифровой вычислительной машины. С другой стороны, само применение подобной машины в целях динамической коррекции систем автоматического регулирования очень неэкономично, так как задача коррекции исчерпывает только долю возможностей машины, но в то же время ликвидирует возможности её применения для решения более сложных задач управления.

Метод цифрового моделирования (третий метод) в настоящее время недостаточно изучен. Поэтому и разработано относительно мало цифровых устройств со специальной структурой, предназначенных для коррекции систем автоматического регулирования. Все известные устройства подобного типа представляют собой или чисто цифровые устройства [6, 7, 11, 12] или комбинированные устройства из цифровых и аналоговых блоков [8, 9, 10, 11], но при относительно высокой сложности позволяют реализовать только простейшие законы регулирования (т. н. ПИ и ПИД законы). Известным достоинством подобных устройств является их высокая и практически неограниченная точность, вследствие чего они в основном нашли применение в следящих приводах [13, 14] и в системах точного регулирования скорости вращения приводов [8, 9, 10, 11, 12]. Но вместе с тем несомненный интерес представляет исследование возможностей осуществления закона коррекции в общем виде (1). Такие возможности на основе цифрового моделирования до сих пор недостаточно изучены.

Целью настоящей работы является анализ и выбор подходящих структурных схем цифровых моделей, осуществляющих заданную передаточную функцию (1).

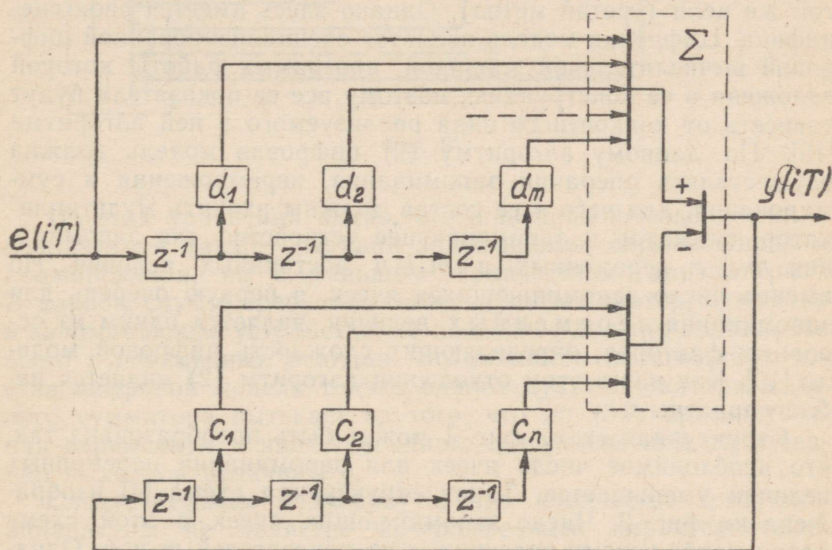
Из теории импульсных систем [1, 2, 3, 4] известно, что для осуществления передаточной функции (1) корректирующее устройство должно к концу каждого текущего интервала дискретности решить разностное уравнение:

$$y(iT) = \sum_{k=0}^m d_k e(iT - kT) - \sum_{k=1}^n c_k y(iT - kT), \quad (2)$$

где

- $e(kT)$  — значение входной величины  $e$  устройства в момент  $t = kT$ ,
- $y(kT)$  — значение выходной величины  $y$  устройства в момент  $t = kT$ ,
- $i$  — порядковый номер текущего интервала,
- $k$  — целочисленная переменная суммирования.

Уравнению (2) соответствует структурная схема корректирующего устройства, изображенная на фиг. 1 [2].



Фиг. 1

При этом нужно учесть, что структурная схема фиг. 1 выведена для случая, когда коэффициент  $d_0$  в числителе функции (1) равно единице ( $d_0 = 1$ ). Это эквивалентно к выведению коэффициента  $d_0$  в числителе (1) за скобки и к рассмотрению его как статического коэффициента передачи устройства. Такое упрощение не снижает общности трактовки и поэтому в дальнейшем везде вводится.

Из структурной схемы фиг. 1 видно, что корректирующее устройство должно запоминать  $m$  последних значений вход-

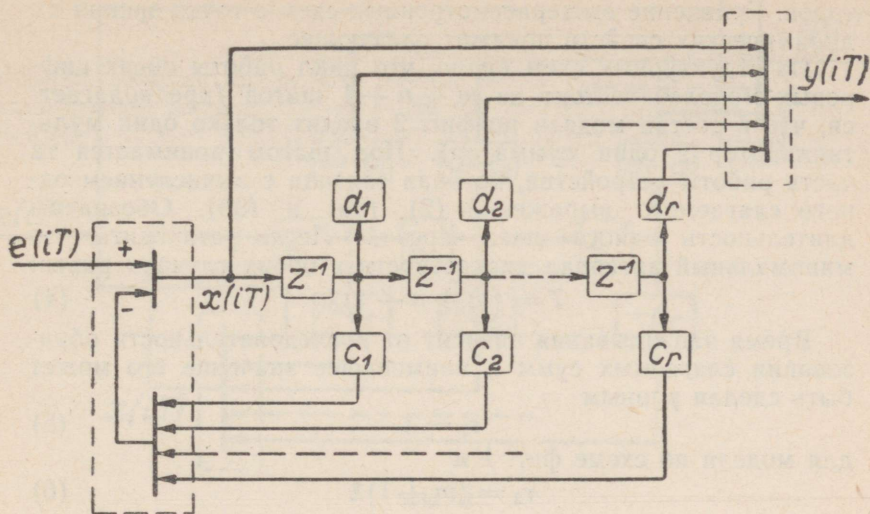
ной переменной  $e$  и  $n$  последних значений выходной переменной  $y$ , совершить в течение интервала дискретности перемножение всех этих  $m + n$  запомненных величин на соответствующие постоянные множители и произвести алгебраическое суммирование полученных произведений и входной переменной, взятой в момент времени, непосредственно предшествующему концу текущего интервала. Образованная таким образом сумма из  $m + n + 1$  слагаемых и будет выходной величиной устройства в момент  $t = iT$ .

Алгоритм (2) является основой программы цифровой вычислительной машины, применяемой в качестве корректирующего устройства (см. второй из вышеотмеченных методов). Но этот же алгоритм может быть поставлен за основу выбора структуры цифровой модели, применяемой для той же цели (третий метод). Однако здесь имеется своя специфика. Цифровая модель является специализированной цифровой вычислительной машиной, программа работы которой заложена в ее конструкцию, поэтому все ее показатели будут зависеть от конкретного вида реализуемого в ней алгоритма [15]. По данному алгоритму (2) цифровая модель должна осуществлять операции запоминания, перемножения и суммирования, для чего в ее состав должны входить мультипликатор, сумматор и запоминающее устройство для запоминания  $m + n$  переменных и  $m + n$  постоянных величин. Но именно число запоминающихся ячеек, в первую очередь для запоминания переменных величин, является одним из основных факторов, определяющих сложность цифровой модели [15]. Как раз в этом отношении алгоритм (2) является неблагоприятным.

Структурная схема фиг. 1 может быть преобразована так, что необходимое число ячеек для запоминания переменных величин уменьшается. Такая структурная схема [4] изображена на фиг. 2. Число запоминающих ячеек в этой схеме равно наибольшему значению  $r$  из показателей  $m$  и  $n$ . Однако основное отличие схемы фиг. 2 от схемы фиг. 1 состоит в том, что запоминается ни входная, ни выходная величина, а т. н. промежуточная переменная  $x$  (фиг. 2).

Цифровая модель по схеме фиг. 2 осуществляет те же операции, что и модель по схеме фиг. 1 и ее работа описывается следующими разностными уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(iT) = x(iT) + \sum_{k=1}^n d_k x(iT - kT), \\ x(iT) = e(iT) - \sum_{k=1}^m c_k x(iT - kT), \end{array} \right. \quad (36) \quad (3a)$$



Фиг. 2

Из этих уравнений видно, что в цифровой модели фиг. 2 реализуются также операции запоминания, перемножения и суммирования, но с меньшим количеством аппаратуры\*. В данном случае требуется также мультипликатор, сумматор и запоминающее устройство, но последнее должно запоминать всего  $r$  переменных величин. Возможность включения в состав цифровой модели только одного мультипликатора и одного сумматора вытекает из того, что по (3б) промежуточная переменная  $x$  является одним слагаемым при образовании выходной величины  $y$ .

Следует однако подчеркнуть, что количество требуемой аппаратуры не является исчерпывающей характеристикой цифровой модели, используемой в качестве корректирующего устройства системы регулирования. Особое значение имеют также следующие динамические характеристики:

1) длительность интервала дискретности  $T$ , определяемая временем, необходимым для вычисления очередного значения выходной величины;

2) время постоянного запаздывания  $\tau$ , вносимое устройством в контур регулирования.

Эти показатели зависят от применяемой аппаратуры, от требуемой точности вычислений — в общем, от разных фак-

\* Схема фиг. 2 выведена для частного случая, когда  $m = n = r$ . Она легко может быть обобщена на общий случай, когда  $m \neq n$ .

торов. Сравнение вышерассмотренных схем с точки зрения их динамических свойств покажет следующее.

Из структурных схем видно, что цикл работы обеих цифровых моделей состоит из  $m + n + 1$  шагов (предполагается, что в состав модели по фиг. 2 входит только один мультипликатор и один сумматор). Под шагом понимается та часть работы устройства, которая связана с вычислением одного слагаемого выражений (2), (3а) и (3б). Обозначим длительность одного шага через  $\lambda$ . Легко установить, что минимальный интервал дискретности в обоих случаях равен:

$$T = (m + n + 1)\lambda. \quad (4)$$

Время запаздывания зависит от последовательности образования слагаемых сумм и наименьшее значение его может быть сделан равным

$$\tau_1 = \lambda \quad (5)$$

для модели по схеме фиг. 1 и

$$\tau_2 = (m + 1)\lambda \quad (6)$$

для модели по схеме фиг. 2.

Из этого вытекает, что схема фиг. 2 имеет преимущества в отношении количества аппаратуры, но уступает схеме фиг. 1 по времени запаздывания.

Динамические свойства модели фиг. 2 могут быть улучшены, если в состав модели включить два мультипликатора и два сумматора, из которых одна пара предназначена для образования промежуточной (запоминаемой) величины  $x$ , а вторая пара — для образования выходной величины  $y$ . В этом случае количество аппаратуры увеличивается, однако динамические свойства улучшаются. Интервал дискретности получается

$$T = (r + 2)\lambda, \quad (7)$$

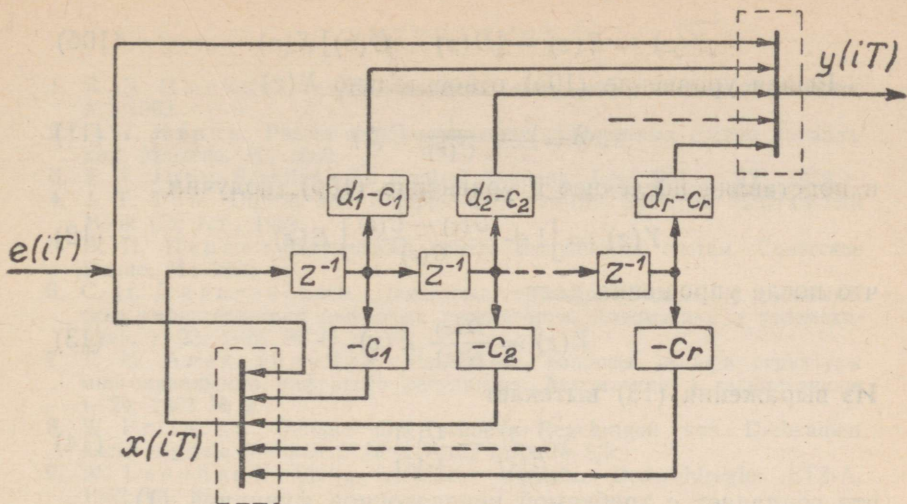
а время запаздывания может быть сделано равным

$$\tau = 2\lambda. \quad (8)$$

Множитель 2 в выражении (8) вызван тем, что промежуточная переменная является слагаемым при образовании выходной переменной  $y$  (3б).

Те же самые динамические показатели (7) и (8) могут быть достигнуты моделью по схеме фиг. 1 с использованием двух мультипликаторов и двух сумматоров, но при этом количество аппаратуры чрезмерно велико, поэтому такое решение не может быть рекомендовано.

Наряду с известными структурными схемами (фиг. 1 и 2) определенный интерес может представлять предлагаемая нами структурная схема, изображенная на фиг. 3. Она получена в результате преобразования структурной схемы фиг. 2,



Фиг. 3

однако отличается от него тем, что образование промежуточной переменной  $x$  и выходной переменной  $y$  производится независимо друг от друга. Это даст определенные преимущества при реализации цифровой модели.

Как видно из схемы фиг. 3, она требует включения в состав модели двух мультипликаторов и двух сумматоров, работающих совместно. Входная переменная  $x$  поступает одновременно на вход обоих сумматоров. На выходе одного сумматора образуется промежуточная переменная  $x$ , а на выходе второго — выходная переменная  $y$ .

Работа цифровой модели по схеме фиг. 3 основывается на одновременном решении следующих разностных уравнений:

$$x(iT) = e(iT) - \sum_{k=1}^n c_k x(iT - kT), \quad (9a)$$

$$y(iT) = e(iT) - \sum_{k=1}^m (d_k - c_k) x(iT - kT). \quad (9б)$$

Необходимо подчеркнуть, что постоянными множителями при образовании выходной величины  $y$  являются не коэффициенты  $d_k$ , как это было в уравнении (3б), а разности коэффициентов  $d_k$  и  $c_k$  (9б).

Легко проверить соответствие алгоритма (9) к передаточной функции (1). Действительно, взяв  $z$ -преобразование [2, 3, 4] уравнений (9а) и (9б), получим:

$$X(z) = E(z) - [C(z) - 1] X(z), \quad (10a)$$

$$Y(z) = E(z) - [D(z) - C(z)]X(z). \quad (10б)$$

Решая уравнение (10а) относительно  $X(z)$ :

$$X(z) = \frac{1}{C(z)} E(z) \quad (11)$$

и подставляя последнее в уравнение (10б), получим

$$Y(z) = \left[ 1 + \frac{D(z) - C(z)}{C(z)} \right] E(z). \quad (12)$$

что после упрощения даст

$$Y(z) = \frac{D(z)}{C(z)} E(z), \quad (13)$$

Из выражения (13) вытекает

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{D(z)}{C(z)}, \quad (14)$$

что совпадает с требуемой передаточной функцией (1).

Интервал дискретности модели по схеме фиг. 3 будет

$$T = (r + 1)\lambda, \quad (15)$$

а время постоянного запаздывания равно

$$\tau = \lambda. \quad (16)$$

Таким образом динамические свойства модели по схеме фиг. 3 получаются лучше, чем модели по схемам фиг. 1 и 2 при том же количестве аппаратуры.

### Выводы

1. При выборе алгоритма работы цифровой модели, используемой в качестве корректирующего устройства, следует в равной мере с количеством аппаратуры, необходимым для реализации выбранного алгоритма, учитывать динамические свойства устройства, осуществляющего этот алгоритм.

2. Наилучшие динамические свойства могут быть достигнуты цифровой моделью, составленной в соответствии с предлагаемой структурной схемой фиг. 3 и решающей алгоритм (9).

3. Количество аппаратуры, необходимое для реализации цифровой модели по предлагаемой схеме, не превышает количества аппаратуры для осуществления цифровой модели по известным схемам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М., 1963.
2. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, М., 1962.
3. E. I. Jury. Sampled-data Control Systems. John Wiley, NY., 1958.
4. J. T. Tou. Digital and Sampled-data Control Systems. McGraw-Hill Book Co, NY., 1959.
5. В. П. Перов. Статический синтез импульсных систем. Советское Радио, М., 1959.
6. С. Н. Дилигенский. Некоторые структурные схемы и динамические характеристики цифровых регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. 23, 1962, № 11.
7. Т. М. Александриди. Некоторые вопросы выбора структуры многоканального цифрового регулятора. Автоматика и телемеханика, т. 24, 1963 № 2.
8. W. Fritsche. Genaue und schnelle Regelungen von Drehzahlen durch digitale Methoden. AEG-Mitt., 1960, № 8/9.
9. W. Leonhard. Stetig wirkender digitaler Drehzahlregler. ETZ-A, 1962, Hf. 12.
10. W. Fritzsche. Digitale Regelung von Drehzahlverhältnissen. AEG-Mitt. 1961, №34.
11. G. Kessler. Digitale Regelung der Relation zweier Drehzahlen. ETZ-A, 1961, Hf. 18.
12. Р. М. Трахтенберг. Дискретный статический регулятор скорости двигателя постоянного тока. Автоматика и телемеханика, т. 24, 1963, № 1.
13. Е. С. Кавун и др. Цифровые следящие системы, построенные на феррит-триодных ячейках. Сб. Автоматическое управление и вычислительная техника, № 5, 1962.
14. G. B. Kent. Hybrid digital-analog servomechanisms. Radio and Electron. Eng., v. 26, 1963, № 3.
15. А. В. Шилейко. Цифровые модели, Энергия, М.—Л., 1964.

*В. Крахт*

## АРИФМЕТИЧЕСКИЙ УЗЕЛ ЦИФРОВОГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Коррекция импульсных систем автоматического регулирования (ИСАР) осуществляется включением в контур регулирования устройства, имеющего заданную передаточную функцию [1, 2, 3]. Одним методом реализации подобного устройства является цифровое моделирование [4]. Цифровая модель в течение цикла своей работы должна решить разностное уравнение, соответствующее заданной передаточной функции коррекции. Возможные виды решаемых разностных уравнений приведены в работе автора [4]. Опираясь на эти уравнения можно сказать, что цифровая модель должна произвести кроме операции запоминания переменных еще определенные арифметические операции над переменными, для чего модель должна иметь блок памяти и арифметический узел. Вычисления, осуществляемые арифметическим узлом, одинаковы для всех видов вышеупомянутых разностных уравнений и могут быть выражены следующей формулой

$$\omega = \sum_{i=1}^r a_i x_i, \quad (1)$$

где  $a_i$  и  $x_i$  — некоторые величины, поступающие от блока памяти на входы арифметического узла, а  $\omega$  — результат вычислений.

Целью настоящей статьи является исследование разработанных нами функциональных (логических) схем арифметического узла цифровой модели, предназначенного для произведения вычислений по формуле (1).

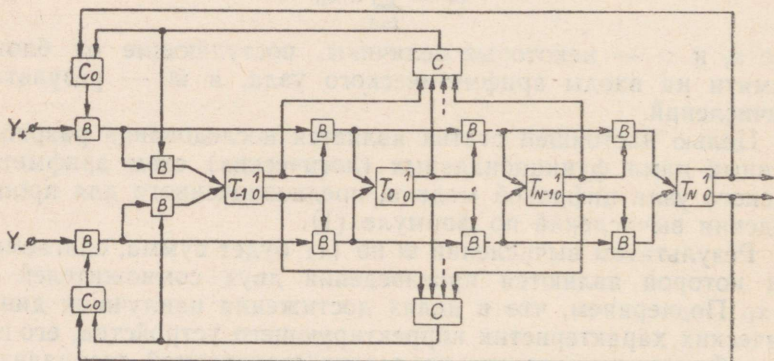
Результатом вычислений  $\omega$  по (1) будет сумма, слагаемыми которой являются произведения двух сомножителей  $a_i$  и  $x_i$ . Подчеркнем, что в целях достижения наилучших динамических характеристик корректирующего устройства, его целесообразно реализовать на основе структурной специализации вычислительной системы [4, 5, 6]. Из этого вытекает, что

в состав арифметического узла входят сумматор и мультипликатор.

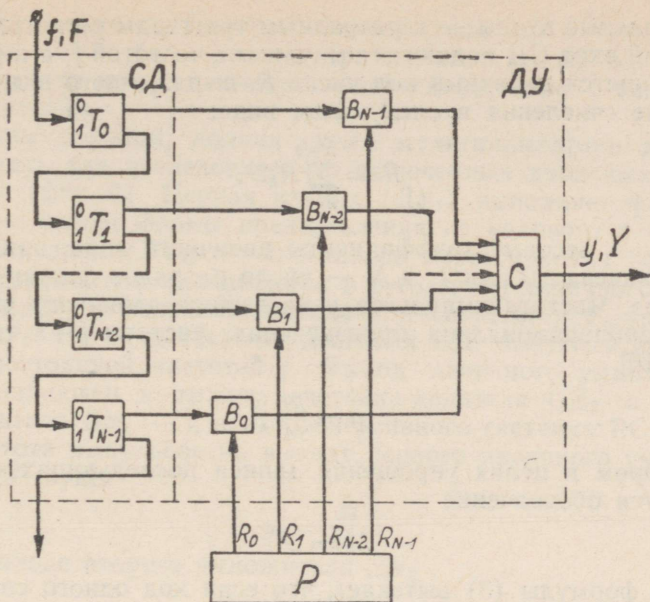
Известны многие схемы сумматоров, применяемые в универсальных вычислительных машинах [7]. Ряд из них могут быть использованы и в цифровых моделях. Специальные схемы умножения до сих пор мало исследованы. Известны только некоторые схемы мультипликаторов [8, 9, 10]. Это связано с тем, что в универсальных вычислительных машинах умножение сводится к суммированию и сдвигу [7], а цифровые модели, нуждающиеся в специальных вычислительных блоках, пока еще сравнительно мало развиты (исключением являются цифровые дифференциальные анализаторы) [5].

Выбор схемы сумматора и мультипликатора зависит от многих факторов, в первую очередь от требуемых динамических характеристик цифровой модели и от форм представления сомножителей  $a_i$  и  $x_i$  и результата вычислений  $\omega$ . Величины  $a_i$  и  $x_i$  поступают на входы арифметического узла от блока памяти, поэтому они обычно имеют параллельнокодое представление. К такому же виду необходимо привести результат вычисления.

Самым простым сумматором, способным выдавать сумму в кодовом представлении, является реверсивный счетчик (имеется в виду суммирование знакопеременных величин). Но он способен принимать слагаемые только в числоимпульсном представлении. Последнее требование не является существенным затруднением, если требования относительно быстродействия системы не чрезмерно высокие. Особенно подходящим счетчиком для рассматриваемого арифметического узла является реверсивный счетчик, в котором используется система кодов, представленная в табл. 1 [11].



Фиг. 1



Фиг. 2

Схема такого счетчика со сквозным переносом представлена на фиг. 1. Она содержит ряд триггерных ячеек  $T_{-p}, T_0, T_1, \dots, T_{N-1}, T_N$ , потенциально-импульсные вентили совпадений  $B$  и потенциальные схемы собирания  $C_0$  и несовпадения  $C$ . Считываемые импульсы поступают в зависимости от требуемого направления счета на входы  $Y_+$  или  $Y_-$ . Схемы совпадений  $C_0$  предотвращают переполнение счетчика, а схемы  $C$  обеспечивают правильные переходы через положения «+0» и «-0» в соответствии с принятой системой кодов. Общее число разрядов счетчика равно  $N + p + 1$ , причем триггер  $T_N$  является знаковым (о величине  $p$  будет сказано ниже).

С реверсивным счетчиком в качестве сумматора хорошо сопрягается схема умножения, известная в отечественной литературе под названием двоичного умножителя [9, 10] и впервые опубликованная в [8]. Схема такого умножителя приведена на фиг. 2. Она содержит импульсно-потенциальные вентили совпадений  $B_0, B_1, \dots, B_{N-1}$  и смеситель импульсов  $C$ , которые собственно и образуют двоичный умножитель ДУ. Неотделимыми от последнего будут еще счетчик-делитель импульсов СД и регистр  $P$ . Импульсные входы вентилях  $B$  подключены через дифференцирующие цепочки (не показаны на схеме) к нулевым выходам триггеров  $T$  делителя СД, а по-

тенциальные входы — к разрядным триггерам регистра Р. На счетный вход СД подаются импульсы с частотой  $f$ , а в регистр Р запишется двоичный код числа  $R$ , выраженного в двоичной системе счисления в следующем виде:

$$R = \sum_{k=0}^{N-1} R_k 2^k, \quad (2)$$

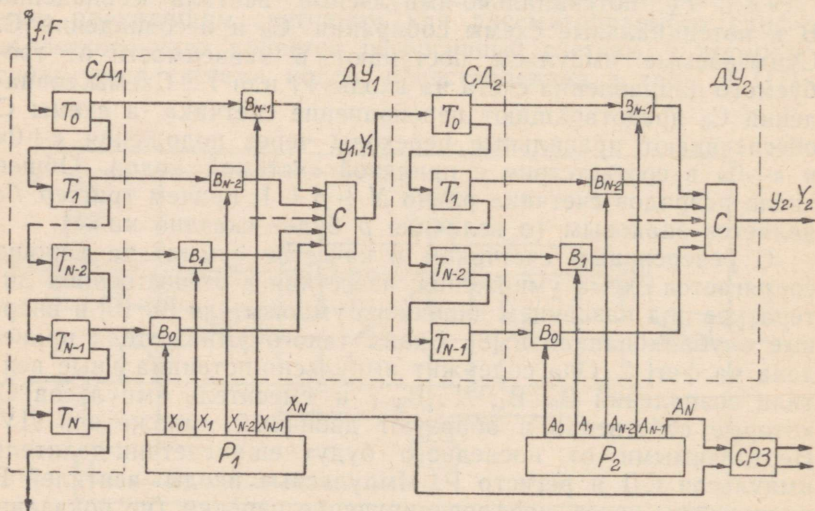
где  $R_k$  — весовые коэффициенты двоичного кода, принимающие значения 0 или 1, а  $M$  — число разрядов значащей части кода. Частота импульсов  $y$  на выходе двоичного умножителя пропорциональна произведению частоты  $f$  на число  $R$  [8, 9, 10]

$$y = \frac{Rf}{M}, \quad (3)$$

в котором в целях упрощения записи последующих формул вводится обозначение

$$M = 2^N. \quad (4)$$

Из формулы (3) вытекает, что если код одного сомножителя (напр.  $a_i$ ) записать в регистр Р, а частоту импульсов  $f$  сделать пропорциональной второму сомножителю ( $x_i$ ), то частота импульсов  $y$  на выходе двоичного умножителя ДУ получается пропорциональной произведению  $a_i x_i$ . Задача



Фиг. 3

преобразования кода второго сомножителя ( $x_i$ ) в частоту импульсов может быть решена при помощи такого же двоичного умножителя, включенного последовательно с основным умножителем.

Таким образом, полная схема мультипликатора должна содержать два последовательно включенных двоичных умножителя (фиг. 3). Первая из них (ДУ<sub>1</sub>) выполняет функции преобразования формы представления из кодового в частотную, а вторая (ДУ<sub>2</sub>) — собственно перемножения величин. Код сомножителя  $x_i$  запишется в регистр Р<sub>1</sub> двоичного умножителя ДУ<sub>1</sub>, а код сомножителя  $a_i$  — в регистр Р<sub>2</sub> умножителя ДУ<sub>2</sub>. На вход счетчика-делителя СД<sub>1</sub> подаются импульсы с постоянной частотой  $f$ . Выход двоичного умножителя ДУ<sub>1</sub> подключен к выходу счетчика-делителя СД<sub>2</sub>, а выход умножителя ДУ<sub>2</sub> — к входу реверсивного счетчика РС.

Частота импульсов на выходе первого двоичного умножителя ДУ<sub>1</sub> будет

$$y_1 = \frac{Xf}{M}, \quad (5a)$$

а на выходе второго умножителя ДУ<sub>2</sub>

$$y_2 = \frac{Ay_1}{M}. \quad (5b)$$

В этих формулах (5a) и (5b) величины  $X$  и  $A$  представляют собой значения сомножителей  $x_i$  и  $a_i$  соответственно в двоичной системе счисления:

$$X = \sum_{k=0}^{N-1} X_k 2^k, \quad (6a)$$

$$A = \sum_{k=0}^N A_k 2^k. \quad (6b)$$

Заменяя  $y_1$  в формуле (5b) ее значением из формулы (5a), получим

$$y_2 = \frac{AXf}{M^2}. \quad (7)$$

Следовательно, частота импульсов на выходе мультипликатора действительно получается пропорциональной произведению  $a_i x_i$ .

Однако такой результат только частично решает поставленную задачу, так как произведение представлено в виде частоты импульсов, что не приемлемо для реверсивного счетчика как сумматора. Последний требует представления результата умножения в виде конечного числа импульсов.

Частоту импульсов можно рассматривать как число импульсов за некоторый определенный интервал времени. Выяс-

ним, какое число импульсов  $Y$  появляется на выходе нашего мультипликатора за интервал времени  $\tau$  или, что то же самое, за время поступления на вход мультипликатора числа импульсов  $F$ , равного произведению интервала  $\tau$  на частоту  $f$  (предполагается, что частота  $f$  остается постоянной):

$$F = \tau f. \quad (8)$$

Из пропорциональности  $F$  и  $f$  на первый взгляд кажется, что формулы (3), (5) и (7) остаются в силах при замене частот  $f$  и  $y$  на числа импульсов  $F$  и  $Y$  соответственно. Однако в общем случае это не так. Причиной этого является дискретный характер работы двоичного умножителя (конечные приращения) и то, что переход с  $f$  и  $y$  на  $F$  и  $Y$  означает замену средней плотности импульсов за длительный (теоретически за бесконечный) период следования на конечное число импульсов за короткий интервал времени. Интересно отметить, что ошибка при такой замене всегда положительна (т. е. возникают лишние импульсы). Однако, как показало более подробное исследование, в частных случаях переход с  $f$  и  $y$  на  $F$  и  $Y$  не сопровождается возникновением ошибки. Более того, возможно правильное округление результата перемножения до заданного числа значащих разрядов произведения. Эти благоприятные частные случаи получаются при определенных значениях интервала  $\tau$  или эквивалентного числа импульсов  $F$  за интервал  $\tau$ , рассчитанного по формуле (8) при  $f = \text{const}$ . Необходимо подчеркнуть, что особый интерес представляет наименьшее значение интервала  $\tau$ , так как это позволяет получить арифметический узел с наилучшими динамическими характеристиками.

Непосредственно из рассмотрения работы отдельного двоичного умножителя (фиг. 2) можно прийти к выводу, что если на вход счетчика-делителя подается  $M$  импульсов, т. е.

$$F = M, \quad (9)$$

то на выходе умножителя получим всегда число импульсов  $Y$ , равное величине  $R$ , записанную в регистр  $P$  [9]:

$$Y = R. \quad (10)$$

Легко понять, что в этом случае интервал  $\tau$  равен времени, необходимому для переполнения счетчика-делителя СД.

Следовательно, если на вход счетчика-делителя СД<sub>1</sub> мультипликатора (фиг. 3) подается  $M$  импульсов, то на выходе ДУ<sub>1</sub> получим  $X$  импульсов:

$$Y_1 = X. \quad (10a)$$

Если же вышеупомянутое количество импульсов подается на вход СД<sub>2</sub> (т. е. предполагается что  $Y_1 = M$ ), то на выходе ДУ<sub>2</sub> получим  $A$  импульсов:

$$Y_2 = A. \quad (10b)$$

Для того, чтобы получить на выходе мультипликатора (на выходе  $ДУ_2$ ) число импульсов, равное произведению  $AX$ , необходимо подать на вход  $СД_1$   $M^2$  импульсов, т. е.

$$F = M^2. \quad (11)$$

Действительно, мы можем такое количество импульсов разложить на  $M$  пачек импульсов, в каждом из которых имеется  $M$  импульсов. Каждая пачка из  $M$  импульсов на основе (10а) возбudit на выходе  $ДУ_1$   $X$  импульсов, причем к началу поступления следующей пачки триггеры счетчика-делителя  $СД_1$  занимают исходное (нулевое) положение. Такой процесс повторяется  $M$  раз и, следовательно, на выходе  $ДУ_1$  получится число импульсов  $Y_1$ , равное

$$Y_1 = MX. \quad (12)$$

На основе (10б) каждая пачка из  $M$  импульсов на входе  $СД_2$  возбudit на выходе  $ДУ_2$   $A$  импульсов, причем к началу поступления пачки счетчик-делитель  $СД_2$  также занимает исходное положение. Так как на основе (12) на вход  $СД_2$  подается  $X$  пачек по  $M$  импульсов, то и получим, что

$$Y_2 = AX. \quad (13)$$

Необходимо отметить, что время  $\tau$ , определяющее длительность операции перемножения величин  $A$  и  $X$ , в данном случае равно времени  $M$ -кратного переполнения счетчика-делителя  $СД_1$ .

Так как оба сомножителя  $A$  и  $X$  заданы  $N$ -разрядными двоичными кодами, то их максимальными значениями будут:

$$A_{\max} = X_{\max} = M - 1, \quad (14)$$

а максимальное значение произведения  $AX$  будет:

$$(AX)_{\max} = (M - 1)^2. \quad (15)$$

Для записи такого количества импульсов потребуется  $2N$ -разрядный реверсивный счетчик. Учитывая, что оба сомножителя формулы (1) по существу представляют округленные до  $N$  двоичных разрядов величины, результат перемножения следует округлить до  $N$ -разрядных двоичных величин. Для этого нужно определить код целочисленной части от частного  $AX$  на  $M$  и к нему прибавить единицу, если дробная часть от деления больше половины. Математически это выражается в следующем виде:

$$Y = \text{ent} \frac{AX}{M} \uparrow \varrho^*, \quad (16)$$

где  $Y$  — округленное значение произведения, а  $\varrho$  — поправ-

\* Символ  $\text{ent}$  от слова  $\text{le entier}$  означает выделения целочисленной части.

ка, зависящая от дробной части частного  $AХ$  на  $M$  и принимающая значение 0 или 1.

Формула (16) определяет (в двоичной системе счисления) теоретическое истинное значение значащей части произведения  $a_i x_i$ , округленное до  $N$  двоичных разрядов.

Из рассмотрения формулы (16) возникает мысль, что число импульсов  $F$ , подаваемое на вход СД<sub>1</sub> и определяемое по формуле (11), может быть уменьшен  $M$  раз, т. е. выбрать число импульсов по формуле (9). Это тем более заманчиво, что позволяет сократить время перемножения  $\tau$  также  $M$  раз и уменьшить число разрядных триггеров реверсивного счетчика на половину. В таком случае на выходе ДУ<sub>2</sub> можно ожидать появления числа импульсов  $Y_2$ , определенного по следующей формуле:

$$Y_2 = \text{ent} \frac{AX}{M}, \quad (17)$$

что отличается от формулы (16) отсутствием только поправочного слагаемого  $\rho$ . Однако формула (17) окажется приближенным. Подробный анализ показал, что по вышеизложенным причинам действительное число импульсов на выходе ДУ<sub>2</sub> получается немного меньше или больше по сравнению с числом импульсов, рассчитанным как по формуле (17) так и по формуле (16), причем ошибка зависит от числа  $N$ .

Для того, чтобы уточнить результат, необходимо очевидно увеличить число импульсов  $F$  на входе СД<sub>1</sub>. Оказывается, что достаточно увеличить  $F$   $2^p$  раза по сравнению с условием (9), при котором выведена формула (17):

$$F = 2^p M = 2^{N+p}. \quad (18)$$

Исследование показало, что число импульсов на выходе ДУ<sub>2</sub> при таком условии определяется следующей формулой:

$$Y_2 = \sum_{j=q}^{2(N-1)} 2^{j-q} \sum_{i=0}^j A_i U_{j-i} + \sum_{i=0}^{q-1} A_i U_{(q-1)-i}, \quad (19)$$

причем

$$q = N - p.$$

Строгое доказательство того, что число импульсов на выходе мультипликатора действительно определяется формулой (19), довольно громоздкое и поэтому в настоящей статье не приводится. В приложении приводятся некоторые примеры, иллюстрирующие способ вывода этой формулы.

Для того, чтобы реверсивный счетчик РС мог бы всегда без переполнения подсчитывать число импульсов, определенное по формуле (19), необходимо увеличить число разрядов

счетчика на  $p$  (т. е. мы должны иметь РС с  $N + p$  значащими разрядами плюс знаковый разряд) (фиг. 1).\*

Результат перемножения однако считывается с  $N$  старших значащих разрядов РС, не обращая внимания на код в последних — прибавленных — разрядах (фиг. 1). Произведение  $N + p$  разрядов выражается в следующем виде:

$$F_2 = 2^q Y_2 = \sum_{j=q}^{2(N-1)} 2^j \sum_{i=0}^j A_i U_{j-i} + 2^q \sum_{i=0}^{2(N-1)} A_i U_{(q-1)-i}. \quad (20)$$

Если  $F$  определяется условием (11), т. е.  $p = N$ , то из формулы (19) получим:

$$F_{20} = \sum_{j=0}^{2(N-1)} 2^j \sum_{i=0}^j A_i U_{j-i}. \quad (21)$$

Последняя формула выражает в развернутом виде истинное значение  $2N$ -разрядного произведения (13).

Разность выражений (20) и (21) очевидно определяет ошибку, связанную с заменой условия (11) условием 18):

$$\Delta F_2 = F_2 - F_{20} = 2^{q-1} \sum_{i=0}^{q-1} A_i U_{(q-1)-i} - \sum_{j=0}^{q-2} 2^j \sum_{i=0}^j A_i U_{j-i}. \quad (22)$$

Легко установить, что ошибка (22) заключается в пределах:

$$-\sum_{j=0}^{q-2} (j+1) 2^j < \Delta F_2 < q 2^{q-1}. \quad (23)$$

Если учесть, что

$$q 2^{q-1} - \sum_{j=0}^{q-2} (j+1) 2^j = 2^q - 1, \quad (24)$$

то оценка максимального значения ошибки будет:

$$|\Delta F_2|_{\max} < q 2^{q-1}. \quad (25)$$

Ошибка в единицах самого младшего разряда  $N$ -разрядного произведения будет:

$$|\delta F_2|_{\max} = \frac{|\Delta F_2|_{\max}}{2^N} < \frac{q 2^{q-1}}{2^N}. \quad (26)$$

Учитывая условие при (19), получим окончательно

$$|\delta F_2|_{\max} < \frac{N-p}{2^{p+1}}. \quad (27)$$

Последнее выражение позволяет определить необходимое значение,  $p$  если заданы максимально допустимая ошибка  $\delta F_2$  и число разрядов  $N$  в кодах сомножителей.

\* На фиг. 1 перед основными триггерами показан только один дополнительный триггер.

Следовательно, если из (27) определить такое значение  $p$ , чтобы ошибка  $\delta F_2$  будет меньше половины младшего разряда произведения, то на основе формулы (20) в  $N$  старших разрядах реверсивного счетчика образуется код истинного значения значащей части произведения  $a_i x_i$ , округленного до  $N$  двоичных разрядов. Длительность операции перемножения  $\tau$  при этом равна  $p$ -кратному времени переполнения счетчика  $СД_1$  и выражается в следующем виде:

$$\tau = \frac{2^p M}{f}. \quad (28)$$

Отметим еще, что аналогичные рассуждения могут быть обобщены на случаи, когда требуется получить истинное значение произведения, округленное до числа значащих разрядов, отличного от  $N$ .

К изложенному следует еще добавить, что после вычисления произведения, соответствующего первому слагаемому суммы (1), необходимо погасить коды в регистрах  $P_1$  и  $P_2$ , записывать туда из блока памяти коды следующих сомножителей и производить новое перемножение. В результате этого в реверсивном счетчике образуется сумма двух слагаемых. Такой процесс повторяется  $r$  раз, после чего в реверсивном счетчике образована сумма (1). Для определения момента перезаписи кодов в регистрах  $P_1$  и  $P_2$  счетчик  $СД_1$  дополняется триггерами (на фиг. 1 показан один из них). Тем самым емкость счетчика  $СД_1$  увеличивается  $2^p$  раза. Импульс переполнения от него, возникающий после подачи на вход  $СД_1$   $2^p M$  импульсов, и является сигналом записи новых кодов в регистры  $P_1$  и  $P_2$ . Вместе с тем занулируются первые (вспомогательные) разряды реверсивного счетчика РС.

Направление считывания в реверсивном счетчике определяется схемой распознавания знака (СРЗ), получившей свои входные сигналы от знаковых разрядов регистров  $P_1$  и  $P_2$  (фиг. 3).

Время вычисления всей суммы по формуле (1) будет:

$$T = r\tau = \frac{rM}{f}. \quad (29)$$

Например, если  $N = 7$ ,  $f = 5$  кГц и  $r = 5$ , свойственные корректирующим устройствам среднего качества, получим  $\tau = 0,05$  сек и  $T = 0,25$  сек, что является вполне приемлемым результатом.

В заключении приводим формулы для определения ошибки рассматриваемого арифметического узла. (Все ошибки выражаются в единицах младшего разряда результата соответствующих вычислений).

Из формулы (16) вытекает, что абсолютное значение ошибки перемножения, осуществляемого мультипликатором, не превышает половины, т. е.

$$|\Delta a_i x_i| \leq \frac{1}{2}. \quad (30)$$

Ошибка определения всей суммы  $\omega$  (формула (1)) складывается из ошибок слагаемых и по абсолютной величине не превышает половины числа слагаемых  $r$ :

$$|\Delta \omega| \leq \frac{r}{2}. \quad (31)$$

Мы можем предполагать, что ошибка перемножения  $\Delta a_i x_i$  подчиняется закону равномерного распределения, причем функция распределения центрирована. В этих условиях математическое ожидание ошибки определения суммы  $\omega$  равно нулю, а ее среднеквадратическое отклонение будет:

$$\sigma_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{3}}. \quad (32)$$

Таблица 1

+7	1111
+6	1110
-----	-----
+1	1001
+0	1000
-0	0111
-1	0110
-----	-----
-6	0001
-7	0000

Пример 1.

Пусть требуется произвести перемножение

$$22 \cdot 29 = 638.$$

Двоичные коды сомножителей и произведения будут

$A = 22$	—	10110,	(1—1)
$X = 29$	—	11101,	(1—2)
$AX = 638$	—	10011.11110.	(1—3)

Число разрядов сомножителей  $N = 5$ ,  
 „ „ произведения  $2N = 10$ ,  
 а модуль  $M = 2^5 = 32$ .

Округленное до 5 значащих двоичных разрядов значение произведения будет

$$(AX)_{\text{окр}} = 10100.00000, \quad (1-4)$$

к чему соответствует десятичный эквивалент

$$(AX)_{\text{окр}} = 640. \quad (1-5)$$

Расчет по формуле (16) даст:

$$\frac{AX}{M} = 10011.11110, \quad (1-6)$$

$$\beta = 0,11110 > \frac{1}{2} \quad (1-7)$$

$$\text{ent} \frac{AX}{M} = 10011, \quad (1-8)$$

$$e = 1, \quad (1-9)$$

$$Y = 10011 + 1 = 10100. \quad (1-10)$$

Расчет действительного числа импульсов  $Y_2$  на выходе мультипликатора и величины  $Y$  в  $N$  старших разрядах реверсивного счетчика будет следующий (для случая  $p = 1$ ).

Предположим, что код сомножителя  $X$  записан в регистр  $P_1$ , а код сомножителя  $A$  — в регистр  $P_2$ . В таком случае при подаче на вход СД<sub>1</sub>  $F = 2M = 64$  импульсов, на выходе ДУ<sub>1</sub> получим  $Y = 2X = 2 \cdot 29 = 58$  импульсов. Такое количество импульсов поступает на вход триггера  $T_0$  счетчика-делителя СД<sub>2</sub>.

Легко определить число импульсов на входах остальных триггеров  $T_1, T_2 \dots T_4$  делителя СД<sub>2</sub> и на входах вентилях  $V_0, V_1 \dots V_4$  умножителя ДУ<sub>2</sub>.

Результаты расчета приведены в таблице 2.

Каждая строка таблицы соответствует одному триггеру делителя СД<sub>2</sub> (столбец 1) и одному вентилю умножителя ДУ<sub>2</sub> (столбец 4). Импульсы на вход вентиля, символ которого указывается в столбце 4, поступают с единичного выхода триггера, символ которого указан на той же строке в столбце 1. Импульсы с нулевого выхода рассматриваемого триггера поступают на вход триггера, указанного на следующей стороне в столбце 1. Сумма этих импульсов должна равняться числу импульсов, поданных на вход рассматриваемого триггера. Например, с нулевого выхода триггера  $T_1$  на вход вентиля  $V_3$  подается 15 импульсов, а с его единичного выхода на вход триггера  $T_2$  — 14 импульсов. Сумма этих импульсов  $15 + 14 = 29$  равна числу импульсов, поданному на вход триггера  $T_1$  и равному 29.

Таблица 2

Символ триггера $T_i$	Число импульсов, поступающих		Символ вентиля $V_i$	Весовые коэфф.-ты $A_i$ второго сомножителя	Число импульсов на выходе вентиля $V_i$
	на вход триггера $T_i$	на вход вентиля $V_i$			
1	2	3	4	5	6
$T_0$	58	29	$V_4$	1	29
$T_1$	29	15	$V_3$	0	—
$T_2$	14	7	$V_2$	1	7
$T_3$	7	4	$V_1$	1	4
$T_4$	3	2	$V_0$	0	—
Число импульсов на выходе ДУ <sub>2</sub>				$Y_2 =$	40
Число в $N$ первых разрядах РС				$Y = \text{ent} \frac{Y_2}{2^P} =$	20
Двоичный код числа $Y$					10100

Вентили  $V_0, V_1 \dots V_4$  пропускают импульсы в зависимости от значений (0 или 1) соответствующих весовых коэффициентов  $A_0, A_1 \dots A_4$  двоичного кода второго сомножителя, записанного в регистре  $P_2$  (в данном случае имеем дело с кодом числа 22). Эти весовые коэффициенты записываются в столбце 5 сверху вниз, начиная с коэффициента старшего разряда (индекс вентиля в столбце 4 указывает индекс коэффициента, располагаемого на той же строке в столбце 5). Отпертыми будут те вентили, рядом которых записана 1.

В столбце 6 записаны числа импульсов, пропустимые вентилем данной строки. Суммируя эти импульсы и получим действительное число импульсов  $Y_2$  на выходе умножителя ДУ<sub>2</sub>. Последнее в свою очередь определяет число  $Y$  (формула (20)), записанное в  $N$  первых разрядов реверсивного счетчика и двоичный код, соответствующий этому числу.

Как видим, результат совпадает с результатом, полученным выше по способу непосредственного округления.

Пример 2

Произведение:  $79 \cdot 114 = 9006$ .

Коды:  $A = 1001111,$  (2—1)  
 $X = 1110010,$  (2—2)  
 $AX = 1000110.0101110.$  (2—3)

Число разрядов  $N = 7,$  а модуль  $M = 2^7 = 128.$

$$(p = 1).$$

7 — разрядный код значащей части округленного произведения, определенного из (2—3) или из формул (16) и (20), будет:

$$Y = 1000110,$$

к чему соответствует десятичное число

$$Y = 70.$$

Результаты расчета произведения, определяемого мультипликатором, приводятся в таблице 3.

Таблица 3

1	2	3	4	5	6
$T_0$	228	114	$B_6$	1	114
$T_1$	114	57	$B_5$	0	—
$T_2$	57	29	$B_4$	0	—
$T_3$	28	14	$B_3$	1	14
$T_4$	14	7	$B_2$	1	7
$T_5$	7	4	$B_1$	1	4
$T_6$	3	2	$B_0$	1	2
				$Y_2 =$	141
				$Y = \frac{Y_2}{2} =$	70
				$Y =$	1000110

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, М., 1962.
3. J. T. Tou. Digital and Sampled-data Control Systems. McGraw-Hill Book Co, NY., 1959.
2. E. I. Jury. Sampled-data Control Systems. John Wiley, NY., 1958.
4. В. Крахт. Структурные схемы цифровых корректирующих устройств импульсных систем автоматического регулирования. См. наст. сборник, стр. 73.
5. А. В. Шилейко. Цифровые модели, «Энергия», М.—Л., 1964.
6. А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, М., 1959.
7. Н. Т. Бруевич, Б. Т. Доступов. Основы теории счетно-решающих устройств. «Советское Радио», М., 1964.
8. M. A. Meuer, Digital Techniques in Analog Systems. Trans. IRE, June 1954, v. EC-3.
9. А. А. Воронов и др. Цифровые аналоги для систем автоматического управления. Изд. АН СССР, 1960.
10. Е. А. Дроздов. Цифровые аналоги. Приборостроение, 1957, № 5.
11. А. Д. Галанцев. О выборе схемы реверсивного счетчика для системы цифрового управления фрезерным станком. Изд. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1961, № 6.

*Л. Эйнер*

## ИЗМЕРЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ПРИ ПОМОЩИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДАТЧИКОВ

### Введение

Непрерывное измерение вязкости, консистенции и т. п. характеристик различных материалов является проблемой, настоятельно требующей дальнейшего усовершенствования во многих отраслях промышленности.

Одним более подходящим путем для создания быстродействующих и непрерывных систем технологического контроля и управления вязкости различных веществ является применение колебательных датчиков. Чувствительным элементом такого датчика служит погружной зонд в виде тонкой пластинки, шарика, стержня и т. д., совершающий продольные, крутильные или возвратно-поступательные колебания.

Существующие вискозиметры с колебательным датчиком (вибрационные вискозиметры) по частоте колебания чувствительного элемента можно разделить на две группы:

а) низкочастотные вискозиметры (рабочая частота до 1000 гц) [2, 4, 5, 6, 9],

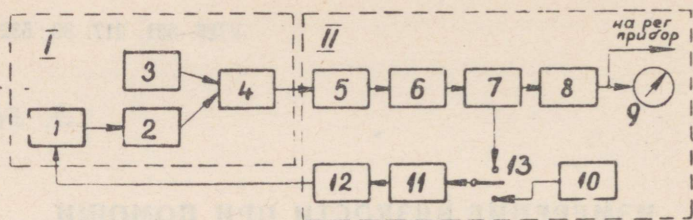
б) ультразвуковые вискозиметры (20 . . . 30 кгц) [1, 8].

Возможности реализации и применения таких устройств в настоящее время мало изучены. Только в одной из статей, рассматривающих низкочастотные колебательные датчики вязкости [5], содержится значительный теоретический материал. Конструкции существующих датчиков в литературе описываются без оснований и обобщений.

Для изучения вопросов, возникающих при создании и использовании колебательных датчиков вязкости, на кафедре автоматики и телемеханики Таллинского ПИ построена экспериментальная аппаратура с низкочастотным датчиком. Ниже излагаются в сжатом виде описание устройства и полученные результаты.

## Описание устройства

Блочная схема устройства приведена на фиг. 1.



Фиг. 1. Блочная схема устройства:

1 — электромагнитный колебательный датчик с емкостным преобразователем; 2 — управляемый генератор высокой частоты; 3 — опорный генератор в/ч; 4 — смеситель; 5 — усилитель в/ч и ограничитель; 6 — частотный дискриминатор; 7 — усилитель низкой частоты; 8 — детектор н/ч; 9 — показывающий прибор; 10 — н/ч генератор возбуждения; 11 — усилитель-ограничитель; 12 — усилитель мощности; 13 — переключатель.

**Измерительная схема.** Измерительная схема (фиг. 1) состоит из двух конструктивно отдельных блоков: от измерительной головки I и вторичного блока II.

Измерительная головка состоит из колебательной системы с емкостным преобразователем 1, из двух генераторов высокой частоты 2 и 3 и смесителя 4. Оба генератора, один из которых является опорным, выполнены на одном двойном миниатюрном триоде, а смеситель на точечном германиевом диоде.

Во вторичный блок входят усилитель-ограничитель 5, частотный дискриминатор 6, усилитель 7, детектор низкой частоты 8 и показывающий милливольтметр 9. Возможно также подключение автоматического регистрирующего потенциометра.

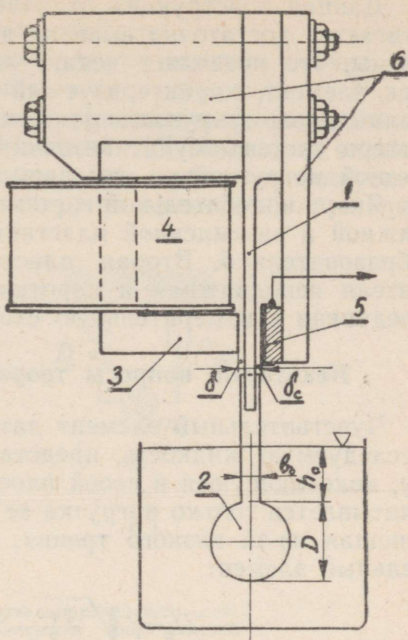
Чувствительность измерительной схемы на амплитуду колебаний — 1 в/мм. Диапазон измеряемых линейных колебаний, определенный конструкцией колебательной системы (зазорами электромагнита  $\delta$  и емкостного преобразователя  $\delta_c$ ) 0 ... 0,3 мм.

Для возбуждения датчика применяется либо замкнутая автоколебательная система, либо питание колебательной системы от постороннего н/ч генератора 10 через ограничитель 11 и усилитель мощности 12.

**Колебательный датчик.** Для возбуждения колебаний чувствительного элемента датчика применяется простая электромагнитная система (фиг. 2). Один конец стального

Фиг. 2. Колебательный датчик:

1 — якорь электромагнита (колеблющийся элемент); 2 — чувствительный элемент; 3 — сердечник электромагнита; 4 — обмотки возбуждения и подмагничивания; 5 — неподвижная пластинка емкостного преобразователя; 6 — крепежные детали



якоря 1 электромагнита жестко закреплен, другой свободен. К свободному концу якоря прикреплен чувствительный элемент датчика 2 — заменяемая тонкая стальная пластинка, колеблющаяся в своей плоскости.

Толщина колеблющейся пластинки  $d$  выбирается по возможности минимальной, не опуская при этом из виду необходимую механическую прочность. Обычно  $d$  можно выбирать в пределах от 0,2 до 0,8 мм. Диаметр круглой части пластинки  $D$  желательно выбирать не менее  $20 \dots 30 d$  так, чтобы рабочая (боковая) поверхность была бы намного больше поверхности краев.

Сердечник электромагнитной системы 3 собран из Ш-образных пластин (УШ-16  $\times$  10), у которых средний язычок отрезан и один из крайних укорочен для получения требуемого зазора  $\delta$ . Сердечник снабжен обмотками возбуждения и подмагничивания 4. Размеры магнитной системы и обмотки рассчитаны для получения возможности регулирования возбуждения в достаточно широких пределах (до 10 ва). При изготовлении приборов узкого назначения габариты и параметры колебательной системы уточняются в зависимости от конкретных условий.

Данная конструкция отличается простотой. При этом достигается достаточно высокая добротность колебательной системы, что позволяет ненагруженный датчик рассматривать как элемент, характеризующийся только упругостью и массой (или только упругостью), т. е. внутренние и акустические потери системы будут незначительными по сравнению с полезной нагрузкой от измеряемой среды.

Якорь колебательной системы является одновременно подвижной и заземленной пластинкой плоского ёмкостного преобразователя 5. Вторая пластинка ёмкостного преобразователя неподвижная и коротким экранированным проводом соединена в измерительную схему.

### Некоторые вопросы теоретического исследования

Чувствительный элемент датчика, который погружается в исследуемую жидкость, представляет собой тонкую пластинку, колеблющуюся в своей плоскости. В упрощенном расчете учитывается только нагрузка ее боковых поверхностей, возникающая из-за вязкого трения. Общая нагрузка на чувствительный элемент

$$R_{\eta} = \sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}} \cdot S_n \quad (\text{мех. ом}), \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,

$\eta$  — динамическая вязкость жидкости,

$\omega$  — угловая частота колебания пластинки,

$S_n \approx 2 \left( \frac{\pi D^2}{4} + b_0 h_0 \right)$  — величина боковой (рабочей) площади пластинки.

Якорь электромагнита в виде прямоугольного стержня, один конец которого жестко закреплен, служит упругим элементом системы и вместе с прикрепленной к нему пластинкой определяет динамические свойства ненагруженной колебательной системы.

Если не учитывать внутренние потери колебательной системы, деформаций и краевую нагрузку чувствительного элемента, а его боковую нагрузку перенести в точку приложения возбуждающей силы (фиг. 3а), то свободное движение такой упрощенной системы описывается уравнением:

$$\frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + \frac{\rho_{\text{я}}}{E x^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{S_n}{EJ} \cdot \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z \cdot \partial y} \right)_{z=0} = 0. \quad (2)$$

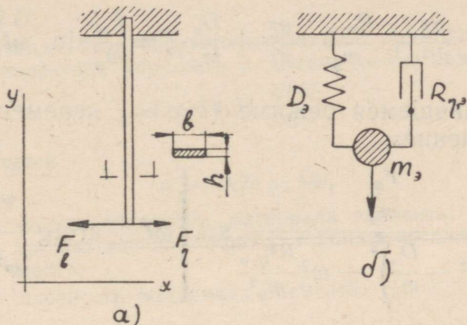
Здесь  $\rho_{\text{я}}$  и  $E$  — соответственно плотность и модуль упругости материала якоря системы;

$x$  и  $J$  — соответственно радиус инерции и момент инерции поперечного сечения якоря;

$S_n$  — величина боковой площади чувствительной пластинки;

- $\eta$  — динамическая вязкость жидкости;  
 $v_x$  — колебательная скорость частиц жидкости, возбужденная колебаниями датчика.

Уравнение (2) получено из общеизвестного волнового уравнения изгибных колебаний стержня [7] введением члена, учитывающего нагрузку от ньютоновского трения в жидкости. Оно применимо, если толщина стержня существенно меньше его длины.



Фиг. 3. *a* — расположение координатных осей;  
*b* — соединение механических сопротивлений узлом.

$F_b$  — сила возбуждения,  
 $F_{\eta}$  — сила вязкого трения

Решение (2) приводит к относительно громоздким выражениям, поэтому для приближенного расчета и анализа такой системы мы можем ее рассматривать как эквивалентную систему с сосредоточенными параметрами и узловым соединением элементов [7]. Уравнение движения системы тогда еще значительно упрощается (фиг. 3б):

$$m_3 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + R_{\eta 3} \frac{d \xi}{dt} + D_3 \xi = 0, \quad (3)$$

где  $m_3$  — динамическая масса колебательной системы;

$D_3$  — эквивалентная упругость колебательной системы;

$R_{\eta 3}$  — приведенное суммарное сопротивление вязкостного трения;

$\xi$  — перемещение узла от равновесного положения.

Движение будет колебательным, если

$$R_{\eta 3} < 2 \sqrt{m_3 D_3}.$$

В элементе трения в один период колебаний рассеивается энергия:

$$A_T = \frac{1}{2} T \dot{\xi}^2 R_{\eta 3}.$$

Следовательно, активная мощность чувствительного элемента колебательного датчика:

$$P = \frac{1}{2} \dot{\xi}_m^2 R_{\eta, \vartheta}. \quad (4)$$

Если система возбуждается гармонической внешней силой  $F_b = F_m \sin \omega t$ , тогда упрощенное дифференциальное уравнение будет

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{R_{\eta, \vartheta}}{m_\vartheta} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{D_\vartheta}{m_\vartheta} \cdot \xi = \frac{F_m}{m_\vartheta} \sin \omega t. \quad (5)$$

В установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ) перемещение  $\xi$  выражается уравнением

$$\xi = \frac{\frac{F_m}{m_\vartheta}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \frac{D_\vartheta}{m_\vartheta}\right)^2 + \omega^2 \frac{R_{\eta, \vartheta}^2}{m_\vartheta^2}}} \sin \left[ \omega t - \arctg \frac{\omega \frac{R_{\eta, \vartheta}}{m_\vartheta}}{\omega^2 - \frac{D_\vartheta}{m_\vartheta}} \right] \quad (6)$$

Обозначим  $\frac{D_\vartheta}{m_\vartheta} = \omega_0^2$  ( $\omega_0$  — собственная частота системы).

Тогда амплитуда вынужденных колебаний выражается уравнением

$$\xi_{ma} = \frac{\frac{F_m}{m_\vartheta}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \frac{R_{\eta, \vartheta}^2}{m_\vartheta^2}}} \quad (7)$$

Если считать  $\omega_0$  и  $F_m$  постоянными\*, то мы можем после несложных преобразований писать, что

$$\varrho \eta = \frac{C_1}{\xi_m^2} - C_2, \quad (8)$$

где  $C_1 = \frac{2F_m^2}{\omega^3 \cdot S_n^2}$  и  $C_2 = \frac{2m_\vartheta(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^3 \cdot S_n^2}$ .

Когда  $\omega \rightarrow \omega_0$  и  $C_2 \rightarrow 0$ , то

$$\eta \varrho = C_1 \frac{1}{\xi_m^2}. \quad (9)$$

\* Фактически  $\omega_0$  можно считать постоянным только в узком диапазоне изменения  $\eta$  и  $\varrho$  жидкостей, т. к. в действительности эквивалентная масса прямо зависит от количества жидкости, прихваченного с колеблющейся пластинкой, то есть от  $\eta$  и  $\varrho$  (см. также фиг. 4).

Фазовый сдвиг между амплитудой вынужденных колебаний и возбуждающей силой будет:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega \sqrt{\omega} \cdot S_n \cdot \sqrt{\rho \eta}}{(\omega^2 m_3 - D_3) \sqrt{2}}. \quad (10)$$

Если в колебательной системе доминирует упругость, т. е. когда  $D_3 \gg m_3 \omega^2$ , то

$$\varphi \approx \operatorname{arctg} C_\varphi \sqrt{\eta \rho}, \quad (11)$$

где  $C_\varphi = \frac{\omega \sqrt{\omega} S_n}{\sqrt{2} D_3}$ .

Примечание: Для упругого элемента с прямоугольным сечением (фиг. 3а) эквивалентная упругость в динамическом режиме [7]:

$$D_3 \approx 1,03 \frac{E b h^3}{4l^3}, \quad (12)$$

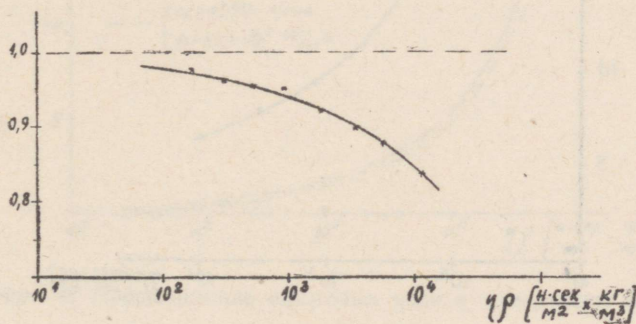
а масса вычисляется

$$m_3 \approx 0,24 \rho_{\text{я}} b h l, \quad (13)$$

где  $E$  — модуль упругости материала элемента;  
 $b$ ,  $h$  и  $l$  — соответственно ширина, толщина и длина упругого элемента;  
 $\rho_{\text{я}}$  — плотность материала элемента.

### Обзор экспериментальных результатов

Ниже излагаются результаты экспериментов, полученные при помощи чувствительного элемента толщиной  $d = 0,8$  мм и диаметром  $D = 22$  мм (глубина погружения  $h_0 = 11$  мм,  $b_0 = 7$  мм). В качестве измеряемой среды применялся глицерин как жидкость, вязкость которой изменением температуры можно изменять в широких пределах.



Фиг. 4. Зависимость собственной частоты нагруженного датчика от  $\eta \rho$

Зависимость резонансной частоты системы от нагрузки. Установлено, что собственная частота нагруженной системы уже начиная с  $\eta\rho \geq 10^{-1}$  нсек/м<sup>2</sup> × кг/м<sup>3</sup> сильно зависит от нагрузки и может считаться постоянной только в узком диапазоне изменения ее (фиг. 4).

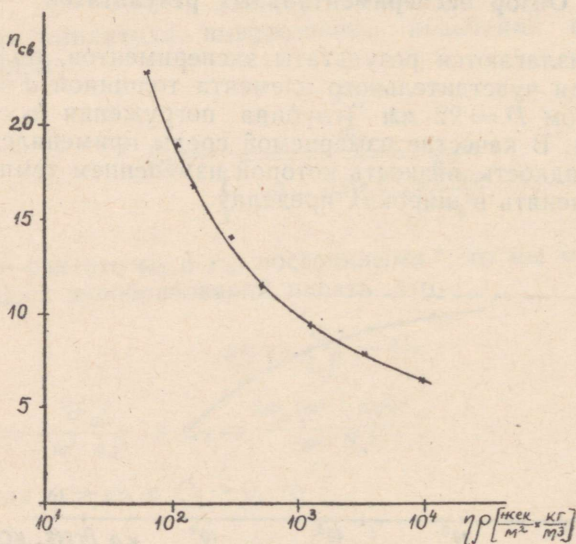
Резонансная частота ненагруженной системы (в воздухе)  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1730$  1/сек.

Измерение затухания свободных колебаний датчика. При упрощениях, описанных выше, коэффициент затухания свободных колебаний нагруженного датчика тем больше, чем больше вязкость и плотность исследуемой жидкости.

Если свободные колебания считать затухнувшими при уменьшении их амплитуды ниже величины  $a$  от первоначальной амплитуды ( $a < 1$ ) и время существования колебаний обозначать через  $t_{св}$ , то количество совершенных колебаний за это время

$$n_{св} = \frac{\omega_0}{2\pi} t_{св} \quad (15)$$

Результаты, полученные осциллографированием свободных колебаний датчика при разных нагрузках, представлены на фиг. 5 ( $a = 0,05$ ).



Фиг. 5. Зависимость количества свободных колебаний датчика от  $\eta\rho$

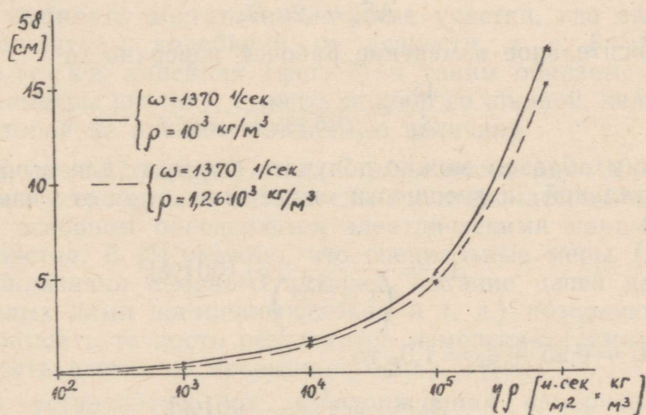
Полученная зависимость показывает достаточно высокую чувствительность датчика и применимость метода измерения  $\eta\rho$  при помощи измерения затухания колебаний или  $n_{св}$  в диапазоне малых вязкостей. Технически не трудно реализовать схему с  $a = 0,05 - 0,01$ , поэтому верхним пределом измерения для вышеописанного чувствительного элемента можно считать  $10^3 \div 10^4$  нсек/м<sup>2</sup>  $\times$  кг/м<sup>3</sup> \*.

Расположение чувствительного элемента датчика в сосуде. Из-за колебаний чувствительного элемента в измеряемой среде возникают сдвиговые волны, распространяющиеся в поперечном направлении от боковых поверхностей пластинки. В режиме вынужденных гармонических колебаний датчика эти волны можно считать полностью затухнувшими на расстоянии  $5\delta$  от поверхности источника (на расстоянии  $\delta$  амплитуда волн сдвига уменьшается в  $e$  раз) [3], где глубина проникновения

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\alpha\rho}}. \quad (16)$$

На фиг. 6 приведена расчетная кривая измерения расстояния  $5\delta$  от  $\eta\rho$  ( $\omega = \omega_0$ ).

Влияние расположения датчика проверялось опытным путем в сосудах с диаметрами 38, 60, 73 и 100 мм. Расположение изменялось во всех направлениях. Дополнительная погрешность от близости стенки сосуда стала заметным



Фиг. 6. Проникновение сдвиговых волн в измеряемую среду

\* Такой метод измерения вязкости используется в существующих ультразвуковых вискозиметрах [1, 8].

( $\geq 0,2\%$ ), когда расстояние от крайней точки колеблющейся пластинки до стенки стало меньше 3,5 ... 4,5 мм (при  $\eta\varrho$  от 500 до 1200  $\text{нсек/м}^2 \times \text{кг/м}^3$ ), независимо от диаметра сосуда. Результаты опыта и расчета хорошо совпадают.

Если диаметр сосуда

$$D_c \geq 2(D + 5\delta), \quad (17)$$

то даже явная асимметрия расположения не вызывает дополнительную погрешность.

Когда расстояние  $5\delta > D_c$ , но соизмеримо с ней, неучет влияния стенок может служить причиной недопустимых погрешностей. Если  $5\delta \gg D_c$ , то необходимость учета влияния стенок снова отпадает.

Чувствительность к изменению уровня. Как видно из уравнения (1), нагрузка колебательного датчика прямо зависит от величины погружаемой площади чувствительного элемента его. Это является существенным недостатком таких датчиков, так как практически невозможно поддерживать уровень среды строго постоянным.

Когда погружаемый элемент датчика имеет вид, изображенный на фиг. 2, то, выражая его размеры  $b_0$  и  $h_0$  через диаметр круглой части  $D$ , т. е.

$$b_0 = a_1 D \text{ и } h_0 = a_2 D, \text{ получим}$$

$$S_n \approx 2D^2(0,785 + a_1 a_2). \quad (18)$$

Далее, так как изменение рабочей поверхности из-за изменения уровня на единицу измерения  $h_0$

$$\Delta S_n = 2a_1 D,$$

то относительное изменение рабочей поверхности

$$\frac{\Delta S_n}{S_n} = \frac{a_1}{D(0,785 + a_1 a_2)}.$$

Таким образом можно получить формулу для вычисления относительной погрешности измерения  $\eta\varrho$  от изменения уровня

$$\Delta_h = \frac{1}{\left(1 \pm \frac{\Delta S_n}{S_n}\right)^2} \cdot 100 [\%]. \quad (19)$$

Если  $a_1 = 0,25$  и  $a_2 = 1,0$ , то

$$\Delta_h \approx \frac{D}{D \pm 0,48} \cdot 100 [\%]. \quad (20)$$

Выделение тепла на поверхности чувствительного элемента. Диссипация энергии в единицу времени, отнесенная к единице площади колеблющейся пластинки, равна [6]:

$$e_1 = \frac{\xi_m^2}{2} \sqrt{\frac{\omega \eta \rho}{2}} \quad [\text{дж/м}^2], \quad (21)$$

где  $\dot{\xi}_m = \omega \xi_m$  — амплитуда колебательной скорости.

Диссипация энергии будет максимальной при максимальной амплитуде колебаний, то есть при измерении малых вязкостей. Например, при  $\eta = 0,1$  нсек/м<sup>2</sup> и  $\rho = 1,25 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> колебательная скорость  $\dot{\xi} = 0,416$  м/сек ( $\omega = 1670$  1/сек,  $\xi = 250$  мкм), а мощность потерь вязкого трения на единицу площади чувствительного элемента  $P_\eta = 24,7 \cdot 10^{-4}$  вт/см<sup>2</sup>.

Рабочая поверхность пластинки  $S_n = 9,14$  см<sup>2</sup>. Полная активная мощность потерь датчика  $P_\eta = P_\eta S_n = 24,7 \cdot 10^{-4} \cdot 9,14 = 22,6$  мвт.

Следовательно можно сказать, что местное повышение температуры измеряемой среды при применении низкочастотных колебательных датчиков мало и оно может иметь значение только в особых случаях\*.

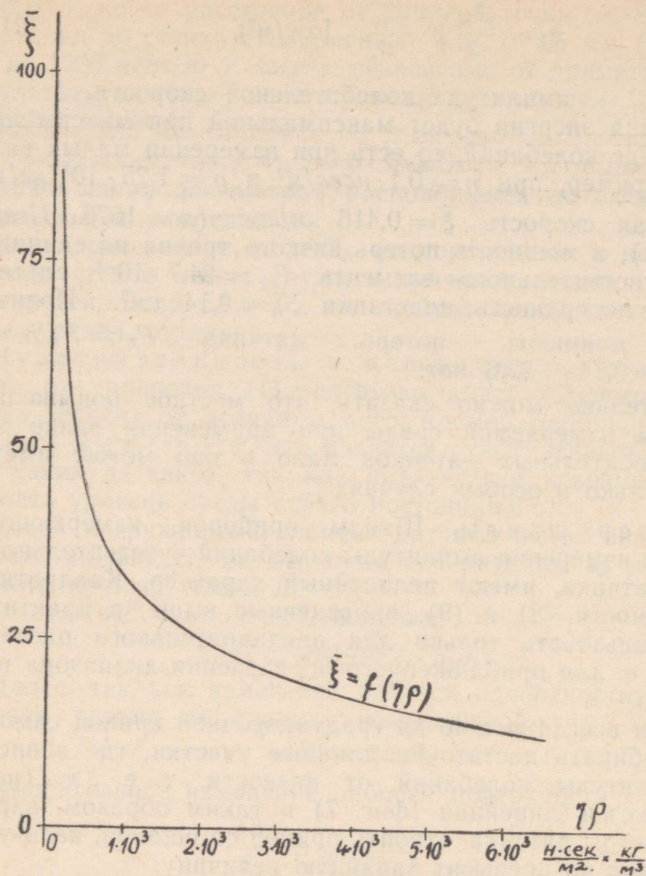
Характер шкалы. Шкалы приборов, измеряющих при помощи измерения амплитуды колебаний чувствительного элемента датчика, имеют нелинейный характер. Квадратичные зависимости (8) и (9), приведенные выше, в практике можно использовать только для предварительного расчета прибора, т. е. для приближенного определения диапазона измерения его.

Но почти всегда можно на градуировочной кривой самого датчика выбирать достаточно длинные участки, где зависимость амплитуды колебаний от вязкости, т. е.  $\xi = f(\eta \rho)$ , практически линейная (фиг. 7) и таким образом, варьируя параметры датчика, строить прибор со шкалой, нелинейность которой не превысит заданную величину.

Стабильность работы. Стабильность работы измерительного устройства с колебательным низкочастотным датчиком в основном определяется электрическими параметрами устройства. В [5] указано, что специальные меры (высокая стабилизация анодного питания, питание цепей накала электронных ламп постоянным током и т. д.) позволяют заметно повысить точность результатов измерения (суммарная погрешность схемы не превышает 0,5 — 1%).

Нами установлено, что вышеописанная измерительная схема в условиях стабилизированного анодного питания (стабильность постоянного анодного напряжения не хуже

\* Удельная теплоемкость глицерина  $c \approx 2,4$  дж/г. град, у воды  $c = 4,2$  дж/г. град и т. д.



Фиг. 7. Зависимость относительной амплитуды вынужденных колебаний  $\xi$  (с подстройкой на резонанс) от  $\eta\rho$ :

$$\xi = \frac{\xi_m}{\xi_0} \cdot 100 [\%], \text{ где } \xi_0 \text{ — амплитуда колебаний в воздухе}$$

$\pm 0,5\%$ , величина пульсации не выше 0,1) обеспечивает хорошую повторяемость результатов измерения (в пределах  $\pm 0,3-0,5\%$  от среднего значения).

### Заключение

Применение низкочастотных колебательных датчиков позволяет создать приборы и устройства для измерения и конт-

роля технической вязкости ( $\eta_0$ ), имеющие ряд достоинств, как быстрое действие прибора, непрерывность контроля, возможность измерения в потоке, хорошая совместимость с регистрирующими и регулирующими приборами, простота эксплуатации и т. д.

Простые электромагнитные колебательные датчики применимы для измерения в широком диапазоне вязкости и плотности (от  $10$  до  $10^5$   $\text{нсек/м}^2 \times \text{кг/м}^3$  и выше). Способ измерения выбирается в зависимости от требуемых пределов измерения. Способ измерения амплитуды вынужденных колебаний более универсален. Способ измерения затухания свободных колебаний следует предпочитать при относительно малых вязкостях ( $\eta_0 \leq 10^3$   $\text{нсек/м}^2 \times \text{кг/м}^3$ ).

Основными недостатками таких датчиков являются их чувствительность к изменению уровня (глубины погружения чувствительного элемента) и трудность осуществления датчика для измерения в трубопроводах и т. п. под давлением (более сложные конструкции [2] применимы только при малых давлениях измеряемой среды и проблему герметизации полностью не решают).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Коган, В. В. Рубинштейн и др. Журн. «Пластические массы», 1961, № 3.
2. В. А. Колесников. Известия высших учебных заведений, журн. «Электромеханика», 1964, № 10.
3. Л. Д. Ландау и Ф. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. Москва, 1953.
4. Г. И. Лесков, Г. Д. Шевченко. Журн. «Заводская лаборатория», 1960, № 6.
5. А. И. Приданцев. Журн. «ПМТФ», 1961, № 1.
6. Г. С. Росин. Журн. «Заводская лаборатория», 1960, № 6.
7. И. И. Теумин. Ультразвуковые колебательные системы. Москва, 1959.
8. W. Roth and R. Rich. "Journal of Appl. Physics", 1953, № 7.
9. J. G. Woodward, "Electronics", 1952, February.

Я. Томсон

## О РАСЧЕТЕ МАГНИТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МАГНИТОУПРУГОГО ДАТЧИКА ВРАЩАЮЩЕГО МОМЕНТА

Магнитная цепь датчика, как системы возбуждения, так и системы индикатора состоит из трех участков: сердечник электромагнита, два воздушных зазора и участок магнитопровода, образующий из поверхностного слоя вала<sup>1</sup>.

Определение магнитного сопротивления первого участка указанных магнитных цепей особых трудностей не представляет. Если считать, что магнитный поток распределен равномерно по сечению, то магнитная индукция также будет одинакова во всех точках рассматриваемого участка (потоками рассеяния в этом участке пренебрегается). Соответственно одинакова во всех точках будет и магнитная проницаемость, если допускать, что материал участка однороден. В таком случае магнитное сопротивление участка может быть выражено известной формулой:

$$R_M = \frac{l}{\mu \cdot S} \quad (1)$$

Наличие воздушного зазора между валом и торцом полюса электромагнита делает магнитное поле неравномерным. Точное определение поля вблизи воздушного зазора (поля выпучивания) представляет большие трудности ввиду его трехмерности и неплоскопараллельности. Распределение магнитного потока под полюсом и вне его зависит от отношения ширины торца полюса к величине воздушного зазора. При отношении ширины полюса к длине воздушного зазора, равным двум и больше, поле можно считать равномерным [1].

Разработаны методы, которые при заданных размерах полюса  $a$  и  $b$  и при известной длине воздушного зазора  $\delta$  позволяют найти расчетные размеры поперечного сечения воздушного зазора. Из них следует подчеркнуть методы, разработанные Б. К. Булем [2], [3], гарантирующие при расчете

<sup>1</sup> более подробно см. [6] и [7].

магнитного сопротивления воздушного зазора погрешность не выше 5—8%.

Из трех вышеуказанных участков более подробно следует рассматривать возможность расчета магнитного сопротивления поверхностного слоя вала, которое выражается в следующем виде:

$$R_{MB} = \frac{l}{\mu_{cp} \cdot S}, \quad (2)$$

где  $l$ ;  $\mu_{cp}$ ;  $S$  — длина, средняя магнитная проницаемость и расчетное поперечное сечение магнитопровода в поверхностном слое вала.

Величина  $S$  определяется глубиной проникновения магнитного поля в вал:

$$S = p \cdot z_3, \quad (3)$$

где  $p$  — расчетная ширина поперечного сечения магнитопровода в поверхностном слое вала;

$z_3$  — эквивалентная глубина проникновения магнитного поля в вал.

На распределение поля в поверхностном слое вала и также в воздушном зазоре может воздействовать уже распределение поля в сердечнике электромагнита возбуждения датчика. Сердечник электромагнита, набранного из штампованных пластин электротехнической стали, пронизывается потоком  $\Phi$ . Магнитный поток  $\Phi$  индуцирует в поперечных сечениях пластин сердечника э. д. с. и под действием этих э. д. с. возникают вихревые токи. Распределение электромагнитного поля по сечению пластин хорошо известно [4]:

$$\begin{cases} \dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha x} + A_2 e^{\alpha x}; \\ \dot{E}_m = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}_m}{dx}. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначения величин в уравнении (4) соответствуют общепринятым [4]. Направление оси  $x$  совпадает с направлением толщины пластины.

Электромагнитные волны проникают в сердечник со всех его сторон. Из них практическое значение в рассматриваемом случае имеет распределение поля по сторонам пластины, перпендикулярным к оси  $x$ . На обеих этих сторонах векторы магнитного поля должны быть одинаковы по величине и направлению. Отсюда видно, что граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{H}_m(a) = \dot{H}_{mn}; \\ \dot{H}_m(-a) = \dot{H}_{mn}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $a$  — половина толщины пластины;

$\dot{H}_{mn}$  — значение магнитного поля на поверхность пластины.

После подстановки граничных условий в выражении (4) и после несложных преобразований получим:

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{H}_{mn}}{\operatorname{ch} aa} \operatorname{ch} ax. \quad (6)$$

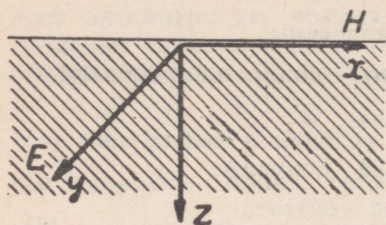
Из равенства (6) видно, что при малых значениях толщины пластины сердечника электромагнита возбуждения и при малых величинах частоты тока возбуждения напряженность поля по сечению пластины изменяется незначительно. Поэтому магнитное поле в следующем участке магнитопровода, т. е. в воздушном зазоре можно рассматривать как однородное. При относительно больших значениях толщины пластин и при больших частотах тока возбуждения поле в воздушном зазоре может быть неоднородным. Это обстоятельство следует учитывать при расчете магнитного сопротивления поверхностного слоя вала. Это показывает также, что не оправдывается попытка применить сплошные сердечники для электромагнита возбуждения.

Из предыдущего видно, что электромагнитное поле в воздушном зазоре датчика можно рассматривать как однородное. В действительности однородность поля в некоторой степени нарушится у краев сердечника. Но так как обычно длина воздушного зазора датчика значительно меньше линейных размеров поперечного сечения электромагнита системы возбуждения, то искажением однородности поля в этой области можно в первом приближении пренебречь.

Если длина воздушного зазора значительно меньше радиуса вала, то можно пренебречь также кривизной зазора и рассматривать поле в воздушном зазоре как плоскопараллельное. Принимается, что магнитная индукция изменяется по синусоидальному закону, а для напряженности магнитного поля используется понятие об эквивалентной синусоиде.

Итак, в соответствии со сделанными допущениями, плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в воздушном зазоре, подходит нормально к плоской поверхности, т. е. к поверхности вала. Вектор потока электромагнитной энергии в поверхностном слое вала направлен вглубь вала, т. е. по координате  $z$ , а его компоненты: вектор магнитного

поля — вдоль оси вала (по координате  $x$ ) и вектор электрического поля — по координате  $y$  (фиг. 1).



Фиг. 1. Координаты электромагнитного поля

Так как в настоящем случае вместо трехмерной задачи рассматривается одномерное решение (поле распространяется только по координате  $z$ ), то волновое уравнение можно записать в скалярной форме и одновременно частные производные в уравнениях Максвелла могут быть заменены полными.

Таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_z = 0; \\ \dot{E} = \dot{E}_y; \quad \dot{H} = \dot{H}_x. \end{aligned}$$

Следовательно, можно записать:

$$\begin{cases} \frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma\dot{E}_m; \\ \frac{d\dot{E}_m}{dz} = j\omega\mu\dot{H}_m, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\gamma$  и  $\mu$  — удельная электрическая проводимость и магнитная проницаемость материала вала.

Дифференцируя уравнения (7) и после несложных преобразований, находим:

$$\begin{cases} \frac{d^2\dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\gamma\mu\dot{H}_m; \\ \frac{d\dot{E}_m}{dz} = j\omega\gamma\mu\dot{E}_m + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{d\dot{E}_m}{dz}. \end{cases} \quad (8)$$

В уравнении (8) принято, что  $\gamma = \text{const}$  и поэтому  $\frac{d\gamma}{dz} = 0$ .

Если предположить, что магнитная проницаемость  $\mu = \text{const}$  (т. е. магнитная индукция и напряженность магнитного поля находятся в линейной зависимости), то первое

уравнение из системы (8) имеет следующее, хорошо известное решение [5]:

$$\dot{H}_m = C_1 e^{-\alpha z} + C_2 e^{\alpha z}, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}. \quad (10)$$

Физический смысл равенства (9) состоит в том, что напряженность магнитного поля в любой точке рассматриваемого участка магнитопровода может быть получена в результате наложения двух волн: падающей и отраженной. Второй член в выражении (9) возрастает до бесконечности при бесконечном увеличении координаты  $z$ . Напряженность поля не может бесконечно расти и, следовательно,  $C_2 = 0$ . Это означает, что в данном случае отраженная волна отсутствует. Кроме того, нетрудно показать, что  $C_1 = \dot{H}_{me}$ , где  $\dot{H}_{me}$  — напряженность магнитного поля на поверхности вала.

Окончательно получим:

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{me} e^{-\alpha z} = \dot{H}_{me} e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} z} \cdot e^{-j\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} z}. \quad (11)$$

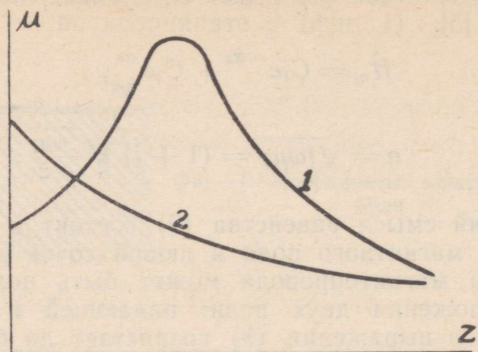
Имея в виду, что эквивалентная глубина проникновения магнитного поля в вал подсчитывается по формуле:

$$z_3 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}, \quad (12)$$

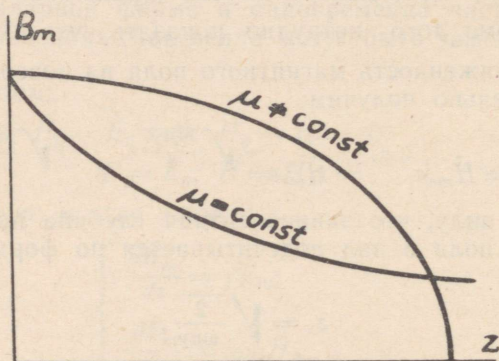
равенство (11) можно переписать следующим образом:

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{me} e^{-\frac{z}{z_3}} \cdot e^{-j\frac{z}{z_3}}. \quad (13)$$

В сильных магнитных полях (т. е. в таких полях, для которых  $\dot{H}_{me} > \dot{H}_{mk}$ , где  $\dot{H}_{mk}$  — значение напряженности магнитного поля, при котором  $\mu = \mu_{\text{макс}}$ ) амплитуда магнитного поля имеет наибольшее значение на поверхности вала. Поэтому  $\mu \neq \text{const}$  по всей глубине проникновения; она сначала растет по мере удаления от поверхности вглубь вала, а затем достигнув максимума, вновь убывает (кривая 1 на фиг. 2) [5]. Такой характер изменения  $\mu$  приводит к более резкому проявлению поверхностного эффекта и способствует более быстрому затуханию волны по сравнению со случаем  $\mu = \text{const}$ . На фиг. 3 показаны кривые магнитной индукции в обоих случаях [4].



Фиг. 2. Изменение магнитной проницаемости в поверхностном слое вала



Фиг. 3. Изменение магнитной индукции в поверхностном слое вала

В слабых магнитных полях ( $\dot{H}_{me} < \dot{H}_{mk}$ ) по мере распространения вглубь вала волна проходит слои со все убывающей магнитной проницаемостью (кривая 2 на фиг. 2).

Анализ экспериментальных данных магнитоупругого датчика вращающего момента показывает, что в нормальных условиях работы  $\dot{H}_{me} > \dot{H}_{mk}$ . Случай же, когда  $\dot{H}_{me} < \dot{H}_{mk}$ , соответствует режимам работы датчика при малых значениях ампервитков возбуждения.

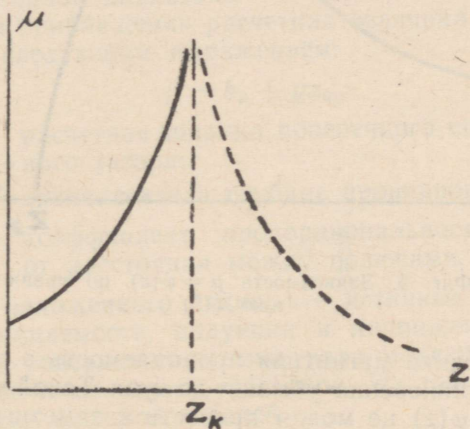
Таким образом, как в случае сильного, так и в случае слабого магнитных полей  $\mu \neq \text{const}$  по всей глубине проникновения поля. Точность решений увеличивается, если ввести  $\mu = \varphi(z)$  вместо  $\mu = \text{const}$ . В [5] предлагается выражение для  $\mu$  в следующем виде:

$$\mu = \frac{\mu_e}{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^2}, \quad (14)$$

где  $\mu_e$  — значение магнитной проницаемости на поверхности вала.

Когда  $\dot{H}_{me} < \dot{H}_{mk}$ , то  $z_k < 0$  и зависимость  $\mu = \varphi(z)$  по формуле (14) имеет вид, показанный на фиг. 2 (кривая 2).

В случае сильных магнитных полей ( $\dot{H}_{me} > \dot{H}_{mk}$ ) величина  $z_k > 0$  и по формуле (14) получаем для зависимости  $\mu = \varphi(z)$  кривую на фиг. 4. Из этой фигуры видно, что заметное расхождение с реальным процессом получается при значении  $z$ , близком к  $z_k$ . В точке  $z = z_k$  значение  $\mu$  будет расти до бесконечности. Из вышеизложенного видно, что при использовании выражения (14) в случае сильных магнитных полей возникают некоторые затруднения в области  $z = z_k$  и  $z > z_k$ .



Фиг. 4. Зависимость  $\mu = \varphi(z)$  по уравнению (14)

Автором предлагается другая зависимость  $\mu = \varphi(z)$  для определения магнитной проницаемости в поверхностном слое вала. Предполагается, что магнитная индукция по мере удаления от поверхности вала вглубь его убывает по косинусоиде. При этом максимальному значению косинусоиды соответствует значение магнитной индукции на поверхности вала. Такое представление о распределении магнитной ин-

дукции в зависимости от координаты  $z$  довольно близко соответствует действительности.

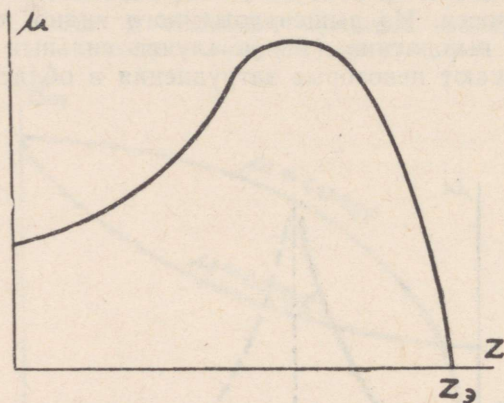
Учитывая сказанное и то обстоятельство, что магнитное поле по мере удаления от поверхности вала убывает экспоненциально, можем на основе известного соотношения  $B = \mu H$  написать:

$$B_{me} \cos az = \mu H_{me} e^{-\alpha z}, \quad (15)$$

откуда

$$\mu = \frac{B_{me}}{H_{me}} \frac{\cos az}{e^{-\alpha z}} = \mu_e e^{\alpha z} \cos az. \quad (16)$$

Связь между магнитной проницаемостью  $\mu$  и координатой  $z$  в этом случае имеет характер, представленный на фиг. 5.



Фиг. 5. Зависимость  $\mu = \varphi(z)$  по уравнению (16)

По этой методике магнитная проницаемость в эквивалентной глубине проникновения убывает до нуля. Такой характер зависимости  $\mu = \varphi(z)$  не может привести к заметным ошибкам в конечных результатах, так как при  $z > z_R$  электромагнитная волна практически полностью затухает.

При вычислении магнитного сопротивления поверхностного слоя вала в случае  $\mu \neq \text{const}$  следует воспользоваться средним значением магнитной проницаемости по всей глубине проникновения волны. Таким образом выражение для среднего значения магнитной проницаемости:

1) на основе зависимости (16)

$$\mu_{\text{ср}} = \frac{1}{z} \int_0^z \mu_e e^{\alpha z} \cos az \, dz; \quad (17)$$

2) при использовании зависимости (14)

$$\mu_{\text{ср}} = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{\mu_e}{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^2} dz. \quad (18)$$

Магнитный поток, протекая в поверхностном слое вала между полюсами электромагнита возбуждения, выпучивается в боковые направления (в направлении периметра), т. е. линии магнитной индукции расходятся по мере удаления от полюсов. По существу данный вопрос является проблемой определения расчетной ширины  $p$  в уравнении (3). По-видимому, описанное выпучивание магнитного потока определяется теми же факторами, что и глубина проникновения магнитного поля в вал. Ввиду того, что ширина магнитного потока  $p$  по участку между полюсами является переменной величиной, то для ее практического использования в формуле (3) должно быть взято какое-нибудь среднее значение в указанном диапазоне.

В первом приближении расчетная величина  $p$  может быть определена следующим выражением:

$$p = b_p + gz_3, \quad (19)$$

- где  $b_p$  — расчетная ширина поперечного сечения воздушного зазора;  
 $z_3$  — эквивалентная глубина проникновения;  
 $g$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от расстояния между полюсами.

Из вышеизложенного видно, что истинные значения магнитной проницаемости, индукции и напряженности магнитного поля в поверхностном слое вала меняются от точки к точке и зависят от многих факторов. Их точный учет будет математически сложной задачей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. К. Буль. К расчету магнитных проводимостей поля вблизи воздушного зазора. Электричество № 7, 1952.
2. Б. К. Буль. Основы теории и расчета магнитных цепей. Издат. «Энергия», М—Л, 1964.
3. Б. К. Буль. Расчет магнитных проводимостей воздушных зазоров для круглых и прямоугольных полюсов. Москва, 1961.
4. Л. Р. Нейман, П. Л. Калантаров. Теоретические основы электротехники, III ч. М—Л, 1959.
5. Л. Р. Нейман. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. Госэнергоиздат, М—Л, 1949.
6. Я. Я. Томсон. Магнитоупругий датчик момента. Труды ТПИ, серия А, № 207, 1963.
7. Я. Я. Томсон. О методике расчета магнитоупругого датчика момента. Труды ТПИ, серия А, № 213, 1964.

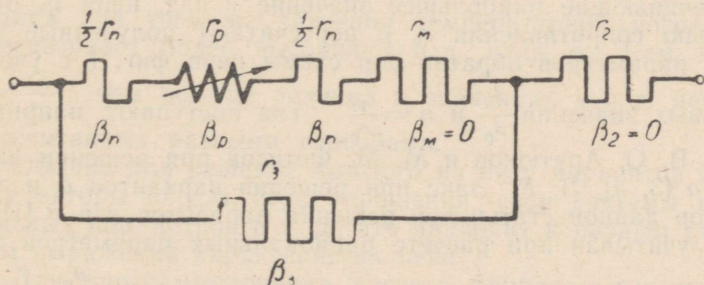
У. Рандмер

### ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЦЕПИ ТЕРМОКОМПЕНСАЦИИ

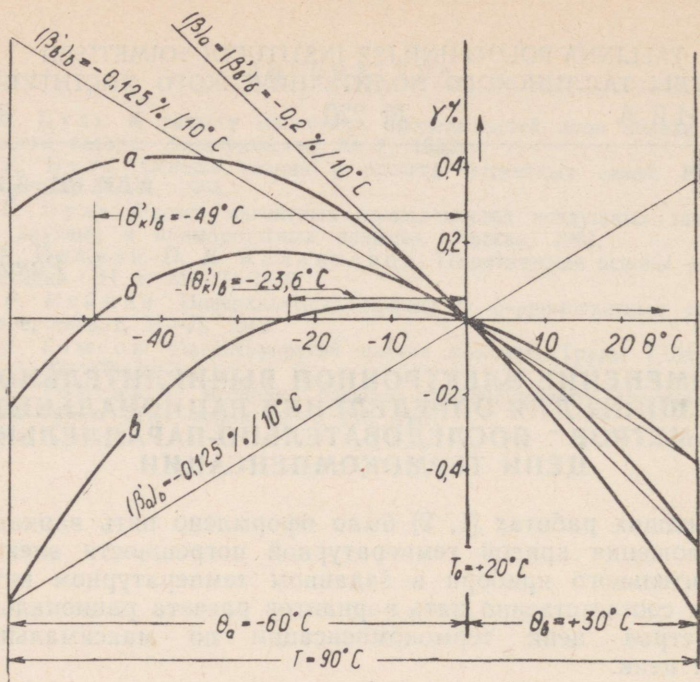
В наших работах [1, 2] было оформлено пять вариантов расположения кривой температурной погрешности электроизмерительного прибора в заданном температурном интервале и соответственно пять вариантов расчета рациональных параметров цепи термокомпенсации по максимальному к. п. д. цепи.

Для магнитоэлектрического милливольтметра с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации фиг. 1 эти пять вариантов расположения кривой температурной погрешности в температурном интервале показаны на фиг. 2 — варианты *а, б, в* при расчете по удельной погрешности (по температурному коэффициенту) и на фиг. 3 — варианты *г* и *д* в случае расчета по амплитудной погрешности.

Расчет рациональных параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации фиг. 1 можно произвести двумя путями:



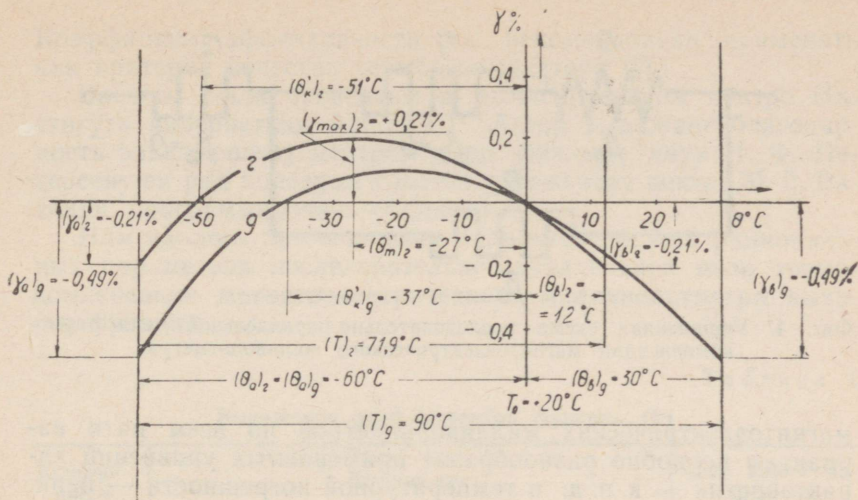
Фиг. 1. Последовательно-параллельная цепь термокомпенсации магнитоэлектрического милливольтметра



Фиг. 2. Кривые температурной погрешности магнитоэлектрического милливольтметра с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации в данном температурном интервале от  $\theta_a = -60^\circ\text{C}$  до  $\theta_b = +30^\circ\text{C}$  при расчете по удельной погрешности прибора: *a* — при расчете по заданной удельной погрешности  $(\beta)_a = -0,2\%/10^\circ\text{C}$ ; *b* — при расчете по заданной условной удельной погрешности  $(\beta'_b)_b = -0,2\%/10^\circ\text{C}$  и *c* — при расчете по минимальной условной удельной погрешности  $|\beta'| = |(\beta'_a)_b| = |(\beta'_b)_b|$

1) преобразовав точную схему цепи фиг. 1 в упрощенную схему фиг. 4, находят рациональные параметры последней, обеспечивающие наибольшее значение к. п. д. цепи  $\eta_0$  относительно сопротивления  $r_0$  и пересчитают полученные значения параметров обратно для схемы цепи фиг. 1 с учетом заданных значений  $\frac{\beta_{\text{п}}}{\beta_{\text{р}}}$  и  $n = \frac{r_{11}}{r_{\text{п}}}$ . Так поступают, например, проф. В. О. Арутюнов и М. М. Фетисов при решении варианта *a* [3, 4], Л. М. Закс при решении вариантов *b* и *г* [5] и автор данной статьи при решении вариантов *в* и *д* [1];

2) учитывая при расчете рациональных параметров точной цепи фиг. 1 заданные значения отношений  $\frac{\beta_{\text{п}}}{\beta_{\text{р}}}$  и  $n =$



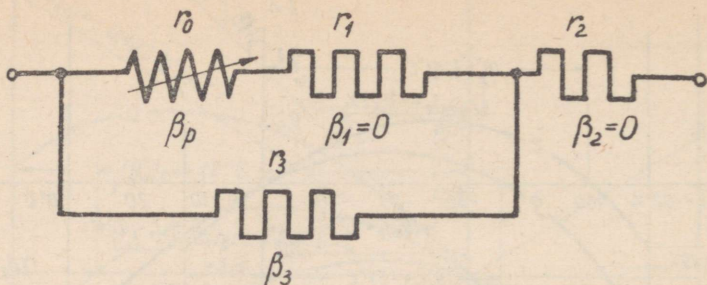
Фиг. 3. Кривые температурной погрешности магнитоэлектрического милливольтметра с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации в заданном температурном интервале:  $z$  — при расчете по минимальной амплитудной погрешности по варианту  $z$  в температурном интервале от  $\theta_a = -60^\circ\text{C}$  до  $\theta_b = +12^\circ\text{C}$  и  $g$  — при расчете по минимальной амплитудной погрешности по варианту  $g$  в температурном интервале от  $\theta_a = -60^\circ\text{C}$  до  $\theta_b = +30^\circ\text{C}$

$= \frac{r_{11}}{r_n}$  перед определением условий максимума к. п. д. цепи  $\eta_p$  относительно сопротивления  $r_p$ . Так поступают, например, П. Б. Усатин при решении варианта  $a$  [6] и автор данной статьи при решении вариантов  $a$  и  $b$  [7].

Как показывают наши расчеты по вариантам  $a$  и  $b$  [7], при заданных значениях отношений  $\frac{\beta_n}{\beta_p}$  и  $n = \frac{r_{11}}{r_n}$  вторая методика для того же значения температурной погрешности обеспечивает более высокий к. п. д. цепи  $\eta_p$ . Чем меньше  $n = \frac{r_{11}}{r_n}$ , тем больше разница в значениях к. п. д. цепей  $\eta_p$ , рассчитанных разными способами.

Обычно для решения каждого из пяти вариантов отдельные авторы вводят свои упрощения, свои системы относительных параметров и т. д., что приводит к разным структурам выражений характеристик цепи.

Для программирования расчета рациональных параметров последовательно-параллельных цепей термокомпенсации



Фиг. 4. Упрощенная схема последовательно-параллельной цепи термокомпенсации магнитоэлектрического милливольтметра

магнитоэлектрических милливольтметров по всем пяти вариантам неудобно разнообразие применяемых уравнений характеристик — к. п. д. и температурной погрешности — цепи. Желательно иметь одно общее выражение интересующей нас характеристики, например, в данном случае к. п. д. цепи, для всех пяти вариантов расчета. Выражения той же характеристики для расчета по отдельным вариантам получаются из общего при определенных значениях коэффициентов последнего.

В данной статье дается одно возможное решение прогаммирования расчета совокупности рациональных параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации, обеспечивающих самый высокий к. п. д. цепи  $\eta_p$  при заданных

значениях  $\frac{\beta_n}{\beta_p}$  и  $n = \frac{r_{11}}{r_n}$  и заданном варианте условия термо-

компенсации. При этом заданные значения  $\frac{\beta_n}{\beta_p}$  и  $n = \frac{r_{11}}{r_n}$  учитывают перед определением условий максимума к. п. д. цепи  $\eta_p$ . Для сравнения между собой последовательно-параллельных цепей термокомпенсации, рассчитанных при разных условиях, особенно по вариантам *в*, *г* и *д*, воспользуемся введенным нами коэффициентом эффективности цепи термокомпенсации

$$K_u = \frac{\eta_p}{|\gamma_{u\max}|}, \quad (1)$$

или в случае учета температурной погрешности механизма — коэффициентом эффективности термокомпенсации прибора

$$K_{np} = \frac{\eta_p}{|\gamma_{\max}|}. \quad (1a)$$

Коэффициент эффективности мы рекомендовали применять как критерий качества термокомпенсатора [8].

Расчеты были проведены в Вычислительном центре Института кибернетики АН ЭССР. Автор выражает благодарность заведующему центром канд. физ.-мат. наук И. Ф. Петерсену за ряд полезных советов и инженеру центра М. Е. Рахенди, программировавшей расчет.

Нам удалось для всех пяти вариантов расчета рациональных параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации магнитоэлектрического милливольтметра вывести функцию

Таблица 1

Выражения коэффициентов функции (2)

Коэффициент	Выражение	Для каких вариантов
$T$	$\frac{r_{11}}{r_{п}} \frac{\beta_3}{\beta_{п}}$	$a, б, в, г, д$
$N$	$\frac{\beta_{м}}{\beta_3} - \frac{\beta}{\beta_3}$	$a$
	$\frac{\beta_{м}}{\beta_3} - \frac{\beta'}{\beta_3}$	$б$
	$\frac{\beta_{м}}{\beta_3}$	$в, г, д$
$P$	$1$	$a$
	$1 + \beta_3 \theta_b$	$б$
	$1 + \beta_3 \theta'_k$	$в, г, д$
$L$	$1 + \frac{\beta_{м}}{\beta_3} - \frac{\beta}{\beta_3}$	$a$
	$1 + \left(\frac{\beta_{м}}{\beta_3} - \frac{\beta'}{\beta_3}\right) (1 + \beta_3 \theta_b)$	$б$
	$1 + \frac{\beta_{м}}{\beta_3} (1 + \beta_3 \theta'_k)$	$в, г, д$
$\theta'_k$	$\frac{\theta_a + \theta_b + 2\beta_3 \theta_a \theta_b}{2 + \beta_3 (\theta_a + \theta_b)}$	$в$
	$\beta_3 \theta_a \frac{(1 + \beta_3 \theta_a) [\pm 2\sqrt{2(1 + \beta_3 \theta_a)} - 1] - 1 + 2\beta_3^2 \theta_a^2}{(1 + \beta_3 \theta_a)^2}$	$г$
	$\theta_a + \theta_b + \beta_3 \theta_a \theta_b$	$д$

$$f_i = \frac{2}{a\eta_p} = \frac{z}{v} [(Tz(Lz - v - 1) + z(1 + P))] \pm$$

$$\pm \frac{z}{v} \sqrt{[Tz(v+1-Lz)z(1+P)]^2 + 4Pz\{Tz[v-N(z-1)] + z-1\}}. \quad (2)$$

Выражения коэффициентов  $L$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $T$  приведены в таблице 1 для всех пяти вариантов расчета.

Аргументы  $v$  и  $z$  выражаются через сопротивления и температурные коэффициенты сопротивлений цепи

$$v = \frac{\beta_p}{\beta_3} \frac{r_p}{r_3} = a \frac{r_p}{r_3}, \quad (3)$$

$$z = \frac{r_p + r_n + r_m}{r_3} + 1. \quad (4)$$

Принятые в статье обозначения см. в приложении.

Для обратного перевода найденных значений функций  $f$  и  $v$  аргументов  $v$  и  $z$  на первичные параметры цепи мы воспользовались формулами, приведенными в таблице 2.

Таблица 2

Формулы перехода от функции  $f(z, v)$  и от ее аргументов  $z$  и  $v$  на параметры цепи

Величина	Формула	Величина	Формула
$\frac{r_p}{r_{11}}$	$\frac{2az^2}{f}$	$\frac{r_p}{r_3}$	$\frac{v}{a}$
$\frac{r_n}{r_{11}}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{p_n}{r_3}$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{v}{z^2} \cdot \frac{f}{2}$
$\frac{r_m}{r_{11}}$	$\frac{2z^2(z-1)}{vf} - \frac{2z^2}{af} - \frac{1}{n}$	$\frac{r_m}{r_3}$	$z-1 - v \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{f}{2} \right)$
$\frac{r_3}{r_{11}}$	$\frac{2z^2}{vf}$	$\frac{r_2}{r_3}$	$\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{v}{z} \cdot \frac{f}{2} \right) - 1$
$\frac{r_2}{r_{11}}$	$1 + \frac{2z(z-1)}{vf}$	$\eta_p$	$\frac{2}{af}$
$\gamma$	$\beta_m \theta + \frac{\left\{ (z-1) \left[ \frac{1}{z} - \frac{2}{vf} (z-1) \right] - \left( \frac{v}{z^2} \cdot \frac{f}{2} + \frac{1}{z} \right) \left( \frac{2}{f} z + \frac{\beta_n}{\beta_3} \frac{1}{nz} \right) \right\} \beta_3 \theta}{1 + \beta_3 \theta} - \frac{\left( \frac{2}{f} z + \frac{\beta_n}{\beta_3} \frac{1}{nz} \right) \beta_3^2 \theta^2}{1 + \beta_3 \theta}$		

### Расчеты

Исходные данные, общие для всех вариантов, приведены в таблице 3.

Таблица 3

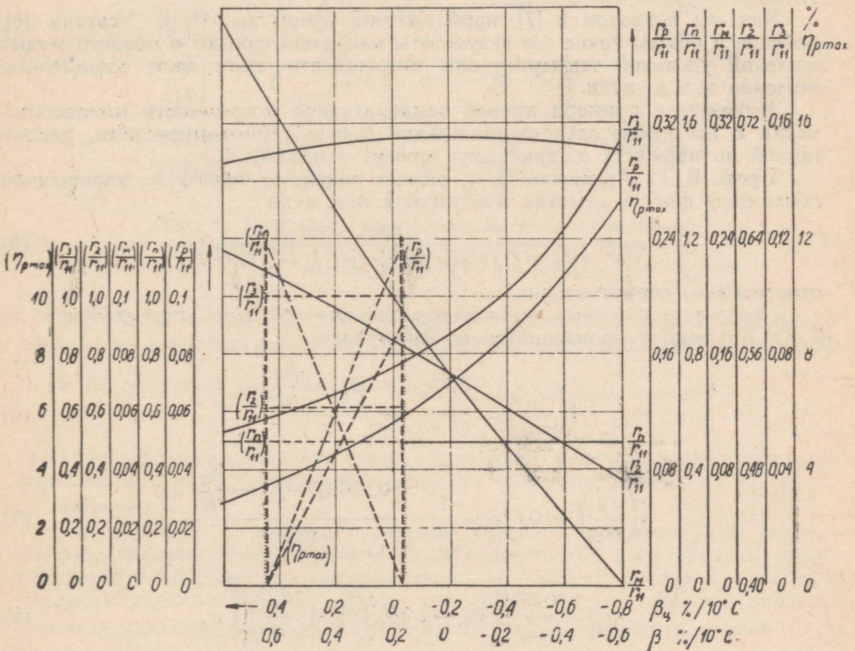
Общие исходные данные для всех вариантов

$\beta_p$ 1/10° С	$\beta_n$ 1/10° С	$\beta_m$ 1/10° С	$\beta_z$ 1/10° С	$\frac{\beta_m}{\beta_z}$	$\frac{\beta_p}{\beta_z}$	$\frac{\beta_n}{\beta_p}$	$n$
0,004	0,001	0,0002	0,004	0,05	1	0,25	2*) 4

\* Для варианта а расчеты производились только для значения  $n = 2$ .

#### Вариант а

По варианту а задается только значение линейной части температурной погрешности. Линейная температурная погрешность характеризуется удельной температурной погрешностью (или температурным коэффициентом) прибора, определяемой наклоном прямой  $(\beta)_a$  на фиг. 2, которая является касательной к кривой температурной погрешности прибора в точке градуировки ( $T_0 = +20^\circ \text{C}$ ,  $\gamma = 0$ ).



Фиг. 5. Зависимости параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации от заданной удельной температурной погрешности (вариант а)

Для этого варианта  $P = 1$ , которое совместно со значениями  $T = 8$ ,  $L$  и  $N$  подставляют в формулу (2), причем значения  $L$  и  $N$  вычислялись по формулам таблицы 1 в пределах изменения  $\beta$  от 0,2 до 0,8%/10° С. Для полученного выражения определялись электронной вычислительной машиной  $f = f_{min}$  и условия минимума в виде соответствующих значений  $v$  и  $z$ .

Относительные параметры цепи  $\frac{r_p}{r_{11}}$ ,  $\frac{r_m}{r_{11}}$ ,  $\frac{r_2}{r_{11}}$ ,  $\frac{r_3}{r_{11}}$  и характеристика цепи  $\eta_p$ , зависимости которых от заданного значения удельной температурной погрешности прибора  $\beta$  приведены на фиг. 5, вычислялись при помощи формул таблицы 2.

Кривые на фиг. 5 для значений удельной температурной погрешности  $\beta < 0,2\%/10^\circ\text{С}$  получены расчетом на базе материалов нашей работы [7]. То, что кривые зависимостей параметров цепи от удельной температурной погрешности прибора  $\beta$  плавные, несмотря на то, что их отдельные участки рассчитаны разными приемами, показывает, что последние при одинаковых исходных условиях приводят к одним и тем же ре-

зультатам. По кривой  $\frac{r_m}{r_{11}}$  на фиг. 5 определяется примерный предел существования последовательно-параллельной цепи термокомпенсации, рассчитанной по данной методике при данных условиях:

$$\beta > -0,60\%/10^\circ\text{С}.$$

Если  $\beta < -0,60\%/10^\circ\text{С}$ , тогда по расчету  $r_m$  получается отрицательным.

Как мы показали в [7], приближенные формулы П. Б. Усатина [6], дающие в общем такие же результаты как наши, только в области малых значений удельной температурной погрешности цепи дают завышенные значения к. п. д. цепи.

В качестве примера кривой температурной погрешности милливольтметра с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации, рассчитанной по варианту *a*, приведена кривая *a* на фиг. 2.

Проф. В. О. Арутюнов [3, 4] решает линейную задачу по упрощенной схеме цепи фиг. 4, изыская максимум к. п. д. цепи

$$\eta_0 = \frac{r_0 r_3^2}{[(r_0 + r_1)(r_2 + r_3) + r_2 r_3](r_0 + r_1 + r_3)} \quad (5)$$

относительно сопротивления  $r_0$ .

Пересчет найденных параметров упрощенной цепи рассчитанной по В. О. Арутюнову производится по формулам

$$\left(\frac{r_p}{r_{11}}\right) = \frac{0,236\beta_3 - \beta_{ц} - \frac{\beta_{п}}{n}}{\beta_p}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{r_m}{r_{11}}\right) = 0,618 - \frac{1}{n} - \frac{0,236\beta_3 - \beta_{ц} - \frac{\beta_{п}}{n}}{\beta_p} \quad (7)$$

и

$$\eta_p = \frac{0,09}{\beta_p} \left[ \beta_3 - 4,236 \left( \beta_{ц} + \frac{\beta_{п}}{n} \right) \right], \quad (8)$$

где

$\beta_{ц} = \beta - \beta_m$  — удельная температурная погрешность цепи.

По формулам (6), (7) и (8) получены пунктирные кривые на фиг. 5.

Условием получения положительного значения  $r_p$  по формуле (6) является

$$\beta < 0,236\beta_3 - \frac{\beta_n}{n} + \beta_m \quad (9)$$

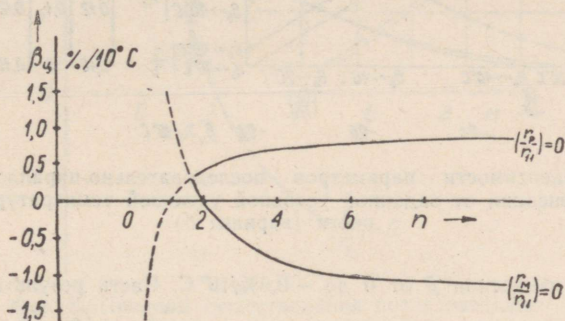
и условием получения положительного значения  $r_m$  по формуле (7) —

$$\beta > 0,236\beta_3 - \frac{\beta_n}{n} + \beta_m + \beta_p \left( \frac{1}{n} - 0,618 \right). \quad (10)$$

При заданных численных значениях исходных величин область существования реальной последовательно-параллельной цепи для примера фиг. 5 пишется

$$0,172\%/10^\circ\text{C} < \beta < 0,644\%/10^\circ\text{C}.$$

Таким образом второй вариант имеет более узкую область погрешностей существования реальной последовательно-параллельной цепи термокомпенсации (между заштрихованными вертикальными прямыми на фиг. 5) и более низкие к. п. д. при одинаковых температурных погрешностях по сравнению с первым вариантом.



Фиг. 6. Пределы существования последовательно-параллельной цепи термокомпенсации, рассчитанной по проф. В. О. Арутюнову

На фиг. 6 приведены кривые пределов существования реальной последовательно-параллельной цепи термокомпенсации, рассчитанной по проф.

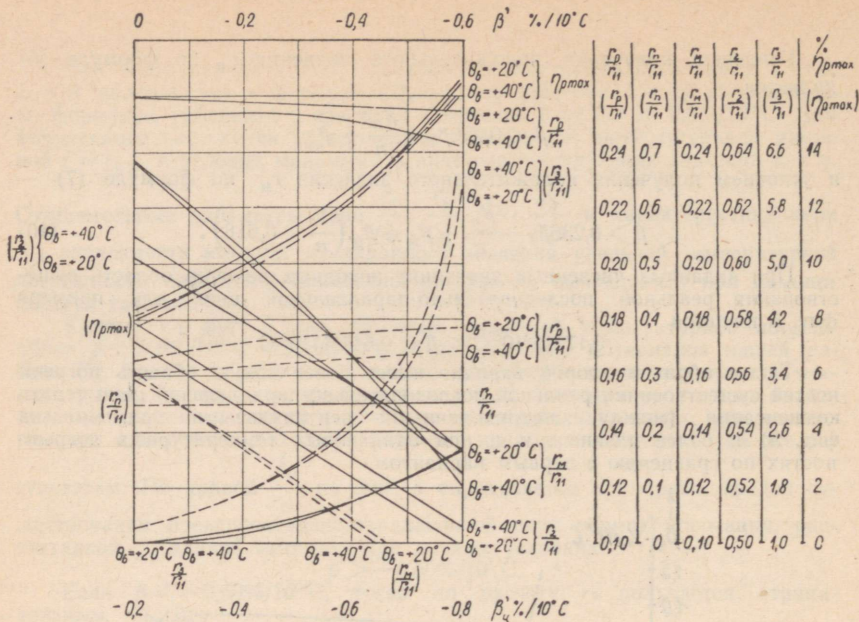
В. О. Арутюнову в координатах  $n = \frac{r_{11}}{r_p} - \beta_{ц}$ . Видим, что при  $n < 1,62$

при данных численных значениях исходных величин последовательно-параллельная цепь неосуществима при ни одной погрешности.

#### Вариант б

По варианту б задается условной удельной температурной погрешностью (средним температурным коэффициентом) у того предела температурного интервала, где эта погрешность больше. В данном случае этим пределом является верхний предел температурного интервала и значение условной удельной температурной погрешности определяется прямой  $(\beta'_b)_6$  на фиг. 2 через начало координат (точку градуировки) и данную точку у верхнего предела температурного интервала.

Расчет производился для верхних пределов температурного интервала  $\theta_h = +20^\circ\text{C}$ ,  $\theta_h = +30^\circ\text{C}$  и  $\theta_h = +40^\circ\text{C}$  для значений  $n = 2$  и



Фиг. 7. Зависимости параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации от заданной условной удельной температурной погрешности (вариант б)

$n = 4$  при изменении  $\beta$  от 0 до  $-0,6\%/10^\circ\text{C}$ . Часть результатов расчета приведена в виде кривых зависимостей параметров  $\frac{r_p}{r_{11}}, \frac{r_m}{r_{11}}, \frac{r_n}{r_{11}}, \frac{r_2}{r_{11}}, \frac{r_3}{r_{11}}$  и  $\eta_{pmax}$  от условной удельной температурной погрешности  $\beta$  на фиг. 7 для  $n = 4$  и для значений  $\theta_b = +20^\circ\text{C}$  и  $\theta_b = +40^\circ\text{C}$ .

Вариант б можно решать для точной схемы цепи фиг. 1 другим способом. Раньше решаем задачу по методике Л. М. Закса [5] для упрощенной схемы цепи на фиг. 4, а потом перейдем от найденных значений параметров упрощенной цепи на значения параметров точной цепи.

Областью существования реальной последовательно-параллельной цепи термокомпенсации по Л. М. Заксу является

$$\frac{r_m}{r_{11}} > 0 \text{ и } \frac{r_p}{r_{11}} > 0,$$

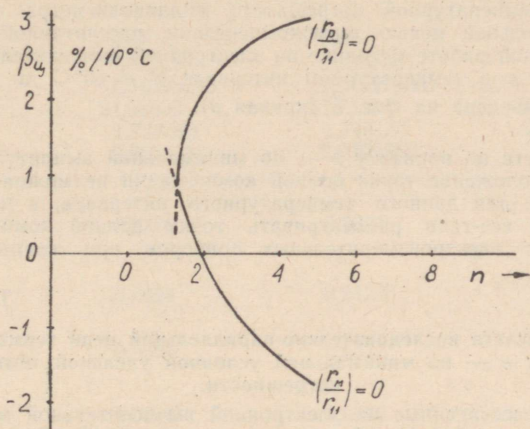
что дает

$$\frac{n(1+a) + a\beta_3\theta \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_p}\right)}{2 \left[ n - \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_p}\right) \right] a} \pm \frac{\sqrt{\left[ n(1+a) + a\beta_3\theta \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_p}\right) \right]^2 - 4an \left[ n - \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_p}\right) \right]}}{2 \left[ n - \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_p}\right) \right] a} <$$

$$\langle b \rangle < \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\beta_n} - \theta \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \beta_3^2 \left( \frac{n}{\beta_n} - \theta \right)^2 - n \frac{\beta_3}{\beta_n}}, \quad (11)$$

где  $b = \frac{\beta_3}{\beta_{01}}$  — введенный Л. М. Заксом обобщенный аргумент — отношение температурных коэффициентов сопротивления  $r_3$  и ветви рамки.

На базе формулы (11) получены (с учетом только знака «плюс» перед корнями) кривые пределов существования реальной точной последовательно-параллельной цепи термокомпенсации, рассчитанной по Л. М. Заксу для варианта б (на фиг. 8) при  $\theta_b = +20^\circ \text{C}$ .



Фиг. 8. Пределы существования последовательно-параллельной цепи термокомпенсации, рассчитанной по Л. М. Заксу для варианта б

Зависимости параметров от условий удельной температурной погрешности рассчитанных по Л. М. Заксу для варианта б последовательно-параллельных цепей термокомпенсации приведены на фиг. 7 в виде пунктирных кривых для  $n=4$ . Для  $n=2$  реальные цепи не существуют при расчете по Л. М. Заксу.

Кривая суммарной температурной погрешности механизма и цепи милливольтметра, имеющего цепь термокомпенсации, рассчитанной при помощи электронной вычислительной машины по заданному значению условной удельной температурной погрешности  $\beta'_b = -0,2\%/10^\circ \text{C}$  для верхнего предела температурного интервала  $\theta_b = +30^\circ \text{C}$  и для  $n=2$  приведена на фиг. 2 (кривая б).

#### Вариант в

Результаты расчета варианта в — по минимальной условной удельной температурной погрешности в заданном температурном интервале для трех температурных интервалов:

- 1)  $\theta_a = -50^\circ \text{C}$  —  $\theta_b = +20^\circ \text{C}$ ;
- 2)  $\theta_a = -60^\circ \text{C}$  —  $\theta_b = +30^\circ \text{C}$ ;
- 3)  $\theta_a = -70^\circ \text{C}$  —  $\theta_b = +40^\circ \text{C}$ ;

по методике данной работы и по методике автора, развитой в [1] на базе Л. М. Закса [7], приведены в таблице 4. Реальных последовательно-

параллельных цепей термокомпенсации, рассчитанных при данных условиях по второй методике, не существует для  $n = 2$ . Цепи, рассчитанные для  $n = 4$  по второй методике, имеют по сравнению с цепями, рассчитанными по первой методике, более низкие к. п. д., но зато значение погрешности  $\beta'$  у них несколько ниже, чем у последних. Применяя для этих цепей коэффициент эффективности в виде

$$K'_{np} = \frac{\eta_p}{|\beta|}, \quad (12)$$

можем убедиться в том, (см. таблица 7) что цепи, рассчитанные по прежней методике варианта  $\beta$ , более эффективны.

Кривая температурной погрешности милливольтметра с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации, рассчитанной по предложенной в данной работе методике на электронной вычислительной машине для варианта  $\beta$  в температурном интервале  $\theta_a = 60^\circ \text{C}$  до  $\theta_b = +30^\circ \text{C}$  для  $n = 2$  приведена на фиг. 3 (кривая  $\beta$ ).

#### Вариант $\varepsilon$

При расчете по варианту  $\varepsilon$  — по минимальной амплитудной погрешности — расположение точки полной компенсации не может быть произвольно задано для данного температурного интервала, а получается из расчета. Если все-таки рассматривать точку полной компенсации, как заданной для электроизмерительных приборов при температуре  $T_0 =$

Таблица 4

Результаты расчета последовательно-параллельной цепи термокомпенсации по варианту  $\varepsilon$  — по минимальной условной удельной температурной погрешности.

Цепи, рассчитанные на электронной вычислительной машине по обобщенной методике для  $n = 2$  ( $T = 8$ )

$\theta_a$ ( $^\circ\text{C}$ )	—50	—60	—70
$\theta_b$ ( $^\circ\text{C}$ )	+20	+30	+40
$N$	0,05	0,05	0,05
$P$	0,919149	0,905530	0,888510
$L$	1,04595745	1,04527660	1,04442500
$f_{min}$	27,12045	26,86000	26,53474
$z$	2,075625	2,060780	2,056093
$v$	0,3568750	0,3514062	0,3521875
$\frac{r_p}{r_{11}}$	0,3177	0,3160	0,3187
$\frac{r_m}{r_{11}}$	0,1399	0,1382	0,1369
$\frac{r_2}{r_{11}}$	0,5387	0,5364	0,5359
$\frac{r_3}{r_{11}}$	0,8903	0,8992	0,9048
$\eta_{pmax}$ (%)	7,38	7,45	7,54
$\gamma_{max}$ (%)	0,097	0,125	0,155

Цепи, рассчитанные по прежней методике для  $n = 2$  ( $T = 8$ )  
не существуют.

Цепи, рассчитанные на электронной вычислительной машине  
по обобщенной методике для  $n = 4$  ( $T = 16$ )

$\theta_a$ (°C)	-50	-60	-70
$\theta_b$ (°C)	+20	+30	+40
$'N$	0,05	0,05	0,05
$P$	0,919149	0,905530	0,888510
$L$	1,04595745	1,04527660	1,04442500
$f_{min}$	21,93833	21,75155	21,51621
$z$	1,743593	1,745155	1,735780
$v$	0,2678124	0,2701562	0,2670310
$\frac{r_p}{r_{11}}$	0,2771	0,2801	0,2800
$\frac{r_M}{r_{11}}$	0,2424	0,2423	0,2416
$\frac{r_2}{r_{11}}$	0,5586	0,5573	0,5554
$\frac{r_3}{r_{11}}$	1,0348	1,0365	1,0487
$\eta_{pmax}$ (%)	9,12	9,20	9,30
$\gamma_{max}$ (%)	0,086	0,111	0,139

Цепи, рассчитанные по прежней методике для  $n = 4$  ( $T = 16$ )

$\theta_a$ (°C)	-50	-60	-70
$\theta_b$ (°C)	+20	+30	+40
$\theta'_k$ (°C)	-20,212	-23,617	-27,872
$\frac{r_p}{r_{11}}$	0,1877	0,1892	0,1922
$\frac{r_M}{r_{11}}$	0,1695	0,1705	0,1709
$\frac{r_2}{r_{11}}$	0,586	0,587	0,584
$\frac{r_3}{r_{11}}$	1,283	1,290	1,296
$\eta_{pmax}$ (%)	8,70	8,75	8,78
$\gamma_{max}$ (%)	0,0636	0,0825	0,1020

$= +20^\circ \text{C}$ , тогда заданным может оказаться только одно предельное изменение температурного интервала, а другое выбирается на базе расчета так, чтобы было выполнено условие

$$\theta_b = - \frac{-\sqrt{2(1 + \beta_3 \theta_a)} + 2(1 + \beta_3 \theta_a) + 1}{(1 + 2\beta_3 \theta_a)^2} \theta_a \quad * \quad (13)$$

Результаты расчета по варианту  $z$  приведены в таблице 5. Цепи, рассчитаны по прежней методике и имеют более высокие коэффициенты эффективности

$$K_{np} = \frac{\eta_p}{|\gamma_{max}|} \quad (14)$$

благодаря меньшим амплитудным погрешностям, (см. таблица 7) хотя к. п. д. у них ниже чем у цепей, рассчитанных по методике данной работы. Цепи для  $n=2$  существуют только при расчете по методике данной работы. В случае расчета по прежней методике  $r_m$  получается отрицательным.

На фиг. 3 приведена кривая температурной погрешности (кривая  $z$ ) милливольтметра с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации, рассчитанной для  $n=2$  для температурного интервала  $\theta_a = -60^\circ \text{C}$  и  $\theta_b = +11,98^\circ \text{C}$ .

Таблица 5

Результаты расчета последовательно-параллельной цепи термокомпенсации по варианту  $z$  — по минимальной амплитудной температурной погрешности — при оптимальном расположении точки полной компенсации

Цепи, рассчитанные на электронной вычислительной машине по обобщенной методике для  $n=2$  ( $T=8$ )

$\theta_a$ ( $^\circ\text{C}$ ) $\theta_b$ ( $^\circ\text{C}$ )	-50 +9,67	-60 +11,98	-70 +14,46	-90,62 +20,0	-121,60 +30,0
$N$	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$P$	0,830944	0,796420	0,761640	0,575230	0,688520
$L$	1,041547	1,039821	1,038082	1,034426	1,028762
$f_{min}$	25,4239	24,75016	24,06536	22,60385	20,27258
$z$	2,036562	2,020937	2,006093	1,967031	1,916249
$v$	0,3529687	0,3514062	0,3506249	0,3451658	0,3435937
$r_p$	0,3363	0,3301	0,3345	0,3421	0,3661
$r_{11}$					
$r_m$	0,1319	0,1287	0,1252	0,1171	0,1036
$r_{11}$					
$r_2$	0,5295	0,5255	0,5216	0,5124	0,4940
$r_{11}$					
$r_3$	0,9244	0,9394	0,9539	0,9912	1,0656
$r_{11}$					
$\eta_{pmax}$ (%)	7,87	8,08	8,31	8,85	9,87
$\gamma_{max}$ (%)	0,135	0,210	0,300	0,540	1,300

\* Если перед корнем знак «плюс», тогда  $\theta_a$  и  $\theta_b$  переменяют места.

Цепи, рассчитанные по прежней методике для  $n = 2$  ( $T = 8$ )  
не существуют.

Цепи, рассчитанные на электронной вычислительной машине  
по обобщенной методике для  $n = 4$  ( $T = 16$ )

$\theta_a$ (°C)	-50	-60	-70	-90,62	-121,60
$\theta_b$ (°C)	+9,67	+11,98	+14,46	+20,0	+30,0
$N$			0,05		
$P$	0,830944	0,796420	0,761640	0,688520	0,575230
$L$	1,041547	1,039821	1,038082	1,034426	1,028762
$f_{min}$	20,71088	20,21958	19,71826	18,64006	16,89743
$z$	1,721718	1,719374	1,715468	1,695937	1,665468
$v$	0,2662499	0,2693749	0,2717187	0,2709375	0,2709374
$r_p$					
$r_{11}$	0,2863	0,2924	0,2985	0,3086	0,3283
$r_m$					
$r_{11}$	0,2397	0,2385	0,2375	0,2341	0,2281
$r_2$					
$r_{11}$	0,5493	0,5458	0,5418	0,5326	0,5158
$r_3$					
$r_{11}$	1,0751	1,0855	1,0985	1,1390	1,2118
$\eta_{pmax}$ (%)	9,66	9,89	10,14	10,73	11,91
$\gamma_{max}$ (%)	0,122	0,188	0,260	0,500	1,000

Цепи, рассчитанные по прежней методике для  $n = 4$  ( $T = 16$ )

$\theta_a$ (°C)	-50	-60	-70	-90,62	-121,60
$\theta_b$ (°C)	+9,67	+11,98	+14,46	+20,0	+30,0
$\theta'_k$ (°C)	-42,26	-50,89	-59,59	-79,80	-105,19
$r_p$					
$r_{11}$	0,1925	0,2045	0,2105	0,2225	0,2445
$r_m$					
$r_{11}$	0,169	0,173	0,173	0,174	0,175
$r_2$					
$r_{11}$	0,583	0,574	0,570	0,560	0,541
$r_3$					
$r_{11}$	1,300	1,327	1,348	1,383	1,448
$\eta_{pmax}$ (%)	8,90	9,41	9,68	10,33	11,43
$\gamma_{max}$ (%)	0,082	0,135	0,192	0,353	0,735

#### Вариант $\delta$

Вариант  $\delta$  получается из варианта  $g$ , если расположение точки полной компенсации относительно предельных отклонений температуры может

быть произвольно задано. Если в случае расчета по варианту  $z$  прибор с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации имеет кривую температурной погрешности, амплитудные значения ординат которой равны по абсолютной величине в трех точках кривой (кривая  $z$  на фиг. 3), то в случае варианта  $d$  такое равенство по абсолютной величине значений температурной погрешности имеет место только в двух точках кривой (кривая  $d$  на фиг. 3).

Результаты расчета последовательно-параллельной цепи термокомпенсации по варианту  $d$  приведены в таблице 6.

Цепи для  $n=2$  существуют только при расчете по методике данной работы. Цепи, рассчитанные для  $n=4$  по методике данной работы, имеют более высокие к. п. д. и меньшие температурные погрешности и тем самым и более высокие коэффициенты эффективности  $K_{np}$  по сравнению с цепями, рассчитанными по прежней методике (см. таблица 7).

Кривая температурной погрешности милливольтметра с последовательно-параллельной цепью термокомпенсации, рассчитанной по варианту  $d$  для  $n=2$  в температурном интервале  $\theta_a = -60^\circ\text{C}$  и  $\theta_b = +30^\circ\text{C}$  приведена на фиг. 3 (кривая  $d$ ).

Таблица 6

**Результаты расчета последовательно-параллельной цепи термокомпенсации по варианту  $d$  — по минимальной амплитудной температурной погрешности — при заданной точке полной компенсации**

Цепи, рассчитанные на электронной вычислительной машине по обобщенной методике для  $n=2$  ( $T=8$ )

$\theta_a$ ( $^\circ\text{C}$ )	-50	+60	-70
$\theta_b$ ( $^\circ\text{C}$ )	+20	+30	+40
$N$	0,05	0,05	0,05
$P$	0,8600	0,8512	0,8352
$L$	1,04300	1,04256	1,04176
$f_{min}$	25,97432	25,81664	25,50654
$z$	2,046718	2,045156	2,033433
$v$	0,3529687	0,3537499	0,3506249
$r_p$			
$r_{11}$	0,3225	0,3240	0,3242
$r_m$			
$r_{11}$	0,1399	0,1332	0,1314
$r_2$			
$r_{11}$	0,5327	0,5319	0,5339
$r_3$			
$r_{11}$	0,9138	0,9160	0,9247
$\eta_{pmax}$ (%)	7,71	7,74	7,84
$\gamma_{max}$ (%)	0,27	0,48	0,77

Цепи, рассчитанные по прежней методике для  $n=2$  ( $T=8$ ), не существуют.

Цепи, рассчитанные на электронной вычислительной машине по обобщенной методике для  $n=4$  ( $T=16$ )

$\theta_a$ (° C)	-50	-60	-70
$\theta_b$ (° C)	+20	+30	+40
$N$	0,05	0,05	0,05
$P$	0,8600	0,8512	0,8352
$L$	1,04300	1,04256	1,04176
$f_{min}$	21,10919	20,99615	20,77135
$z$	1,727968	1,727187	1,719374
$v$	0,2662499	0,2670312	0,2646874
$\frac{r_p}{r_{11}}$	0,2829	0,2842	0,2846
$\frac{r_m}{r_{11}}$	0,2406	0,2397	0,2389
$\frac{r_2}{r_{11}}$	0,5524	0,5520	0,5500
$\frac{r_3}{r_{11}}$	1,0625	1,0642	1,0754
$\eta_{pmax}$ (%)	9,46	9,52	9,62
$\gamma_{max}$ (%)	0,23	0,43	0,68

Цепи, рассчитанные по прежней методике для  $n=4$  ( $T=16$ )

$\theta_a$ (° C)	-50	-60	-70
$\theta_b$ (° C)	+20	+30	+40
$\theta'_k$ (° C)	-34	-37,2	-41,2
$\frac{r_p}{r_{11}}$	0,1946	0,1964	0,1968
$\frac{r_m}{r_{11}}$	0,1704	0,1718	0,1740
$\frac{r_2}{r_{11}}$	0,582	0,580	0,575
$\frac{r_3}{r_{11}}$	1,305	1,310	1,138
$\eta_{pmax}$ (%)	9,01	9,07	9,20
$\gamma_{max}$ (%)	0,307	0,510	0,771

Сравнение последовательно-параллельных цепей термокомпенсации по разным коэффициентам эффективности

Вариант	$\theta_a$	$\theta_b$	Расчет по данной методике на эл. вычислительной машине				Расчет по методикам, где $n$ учитывается после определения условий максимума	
	°C	°C	$n=2$		$n=4$		$n=4$	
			$K_{np} = \frac{\eta_D}{ \gamma_{max} }$	$K'_{np} = \frac{\eta_D}{ \beta' }$	$K_{np} = \frac{\eta_D}{ \gamma_{max} }$	$K'_{np} = \frac{\eta_D}{ \beta' }$	$K_{np} = \frac{\eta_D}{ \gamma_{max} }$	$K'_{np} = \frac{\eta_D}{ \beta' }$
в	-50	+20	15,2	76	21,2	106	27,2	136,5
	-60	+30	9,9	59,6	15,8	82,9	17,7	106,0
	-70	+40	6,9	48,6	9,6	66,9	12,3	86,0
з	-50	+ 9,67	58,3	56,4	79,0	76,4	108,5	105,0
	-60	+11,98	38,5	46,1	52,6	63,0	69,8	83,5
	-70	+14,46	27,7	40,0	39,0	56,3	50,4	72,7
	-90,62	+20	16,4	32,8	21,5	43,0	29,3	58,5
	-121,60	+30	7,6	22,8	11,9	36,7	14,2	42,6
д	-50	+20	28,6	57,2	41,2	82,4	29,4	59,8
	-60	+30	16,1	48,4	22,2	44,4	17,8	35,6
	-70	+40	10,2	40,6	14,2	28,4	11,9	23,8

## Резюме

В данной работе получено для программирования расчета оптимальных параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации с точки зрения обеспечения наибольшего значения к. п. д. цепи одно общее исходное выражение последнего для всех вариантов расчета.

Также показано, что правильный учет отношения  $n = \frac{r_{11}}{r_{\text{п}}}$  всегда приводит к наибольшим значениям к. п. д. цепи. При расчете по вариантам *в*, *г*, *д* это не всегда может обеспечить наилучшее сочетание погрешности и к. п. д., поскольку значение температурной погрешности при расчете по этим вариантам не задано.

Для оценки эффективности цепи термокомпенсации, т. е. сочетания к. п. д. и погрешности введены понятия коэффициента эффективности, которые мы особенно рекомендуем применять для сравнения цепей с последовательно-параллельными цепями термокомпенсации, рассчитанных по вариантам *в*, *г* и *д*.

### Принятые обозначения

$r_{\text{р}}$	— сопротивление обмотки рамки;
$r_{\text{п}}$	— сопротивление токоподводящих моментных пружин;
$r_{\text{м}}$	— термнезависимое сопротивление в ветви рамки;
$r_2$	— термнезависимое сопротивление во входной ветви;
$r_3$	— медный шунт ветви обмотки рамки;
$r_{11}$	— входное сопротивление цепи;
$r_{12}$	— взаимное сопротивление входной и выходной ветвей;
$r_0 = r_{\text{р}} + \frac{\beta_{\text{п}}}{\beta_{\text{р}}} r_{\text{п}}$	— сопротивление обмотки рамки упрощенной цепи;
$r_1 = r_{\text{м}} + \left(1 - \frac{\beta_{\text{п}}}{\beta_{\text{р}}}\right) r_{\text{п}}$	— термнезависимое сопротивление в ветви рамки упрощенной цепи;
$\beta_{\text{р}}$	— температурный коэффициент сопротивления обмотки рамки;
$\beta_{\text{п}}$	— температурный коэффициент сопротивления пружин;
$\beta_{\text{м}}$	— температурный коэффициент механизма;
$\beta_3$	— температурный коэффициент сопротивления медного шунта;

$\beta$	— удельная температурная погрешность прибора;
$\beta'$	— условная удельная температурная погрешность прибора;
$\beta_{ц}$	— удельная температурная погрешность цепи;
$\beta'_{ц}$	— условная удельная температурная погрешность цепи;
$\gamma_{max}$	— амплитудная температурная погрешность прибора;
$\gamma_{ц max}$	— амплитудная температурная погрешность цепи;
$a = \frac{\beta_p}{\beta_3}$	— отношение температурных коэффициентов сопротивления обмотки рамки и медного шунта;
$T_0 = 20^\circ \text{C}$	— градуировочная температура совпадающая с температурой полной компенсации;
$\theta_a = T_a - T_0$	— нижнее предельное отклонение температуры;
$\theta_b = T_b - T_0$	— верхнее предельное отклонение температуры;
$T_a$	— нижняя предельная температура температурного интервала;
$T_b$	— верхняя предельная температура температурного интервала;
$\theta'_k$	— период компенсации — абсцисса левой точки полной компенсации, если правая точка полной компенсации принята за начало координат;
$\eta_p$	— к. п. д. цепи относительно сопротивления $r_0$ ;
$\eta_0$	— к. п. д. цепи относительно сопротивления $r_p$ ;
$n = \frac{r_{11}}{r_{п}}$	— отношение входного сопротивления к сопротивлению пружинок;
$K_{ц} = \frac{\eta_p}{ \gamma_{ц max} }$	— коэффициент эффективности компенсированной цепи по амплитудной погрешности;
$K_{пр} = \frac{\eta_p}{ \gamma_{max} }$	— коэффициент эффективности прибора по амплитудной погрешности;
$K'_{пр} = \frac{\eta_p}{ \beta' }$	— коэффициент эффективности прибора по условной удельной погрешности.

## ЛИТЕРАТУРА

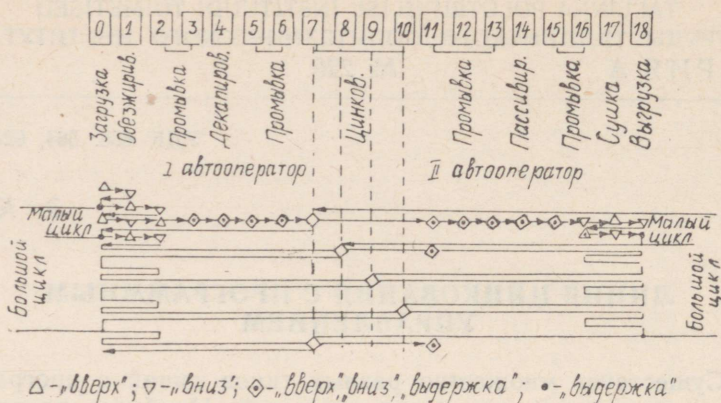
1. У. И. Рандмер. Вопросы расчета цепей температурной компенсации магнитоэлектрических милливольтметров высокого класса точности. Труды ТПИ, серия А, № 130, Таллин, 1958.
2. У. И. Рандмер. О расположении кривой температурной погрешности термокомпенсатора в температурном интервале. Труды ТПИ, серия А, № 213, Таллин, 1964, стр. 103—116.
3. В. О. Арутюнов. Расчет и конструирование электроизмерительных приборов. ГЭИ, 1956, стр. 240—247.
4. В. О. Арутюнов, М. М. Фетисов. К вопросу о расчете температурной компенсации милливольтметров. Труды Ленинградского ПИ им. М. И. Калинина, № 184, 1956, стр. 196—208.
5. Л. М. Закс. Рациональный выбор параметров последовательно-параллельной схемы температурной компенсации милливольтметров. Электричество № 2, 1953, стр. 62—68.
6. П. В. Усатин. Методика и расчет температурной компенсации магнитоэлектрических милливольтметров. Труды Всесоюзного Научно-исследовательского института электроизмерительных приборов, вып. 1, 1959, стр. 163—189.
7. У. И. Рандмер. Об учете добавочных условий при расчете рациональных параметров последовательно-параллельной цепи термокомпенсации. Труды ТПИ, серия А, № 213, Таллин, 1964, стр. 117—125.
8. У. И. Рандмер. Выбор рациональных параметров термокомпенсатора. Труды ТПИ, серия А, № 207, Таллин, 1964, стр. 43—552.

## ЛИНИЯ ЦИНКОВАНИЯ С ПРОГРАММНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Существует множество разных типов линий с программным управлением для главнопокрытий. Наиболее распространенными из них являются линии типа АГ-16 и их модифицированные варианты. Несмотря на их широкое использование в промышленности, они имеют ряд недостатков. Линия многопроцессная, но из-за неудобной перемены программ производительность линии значительно уменьшается. Схемное решение электрической части получается сложное, так как для каждой выдержки времени используется отдельное реле времени механического типа. Увеличиваются размеры шкафа аппаратуры, следовательно, возникают трудности герметизации, так как в заводских условиях недопустимо держать длительное время аппаратуру в агрессивной среде гальванического цеха. Подобные недостатки часто присущи и другим типам линии. Из-за выше перечисленных недостатков и высокой стоимости внедрение подобных линий в заводах затрудняется.

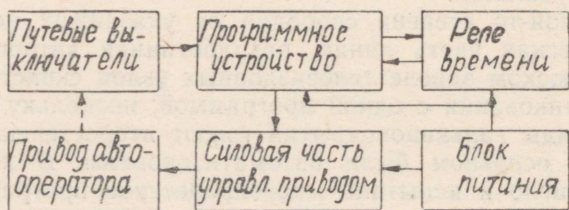
В какой-то степени свободна от указанных недостатков электрическая часть линии, разработанная автором статьи. В Вильнюском заводе телевизионных узлов сконструирована линия цинкования с одной программой; поскольку на заводе другие виды гальванопокрытий имеют второстепенное значение и в основном были автоматизированы. В ходе работ было решено и испытано многопроцессное программное управление с быстрой заменой программ.

Технология цинкования (фиг. 1), примененная в этой линии, имеет только эту разницу в сравнении с общепринятым, что обезжиривание деталей с электрохимическим способом длится около пяти минут. В линии все операции, исключая загрузку и выгрузку подвесок с деталями, автоматизированы, даже калориферная сушка. Для достижения нужной производительности используются четыре одинаковые ванны цинкования. Из технологии выходит, что ванны цинкования на-



Фиг. 1. Блок-схема управления линии

ходятся в середине линии. Поэтому оказалось целесообразным ввести такой порядок работы линии, где первый автооператор обслуживает первую половину линии, включая и ванны цинкования, второй автооператор — вторую половину линии, начиная с ванны цинкования. Поскольку рабочие диапазоны автооператоров перекрываются, отпадает надобность буферной позиции между обеими частями линии. Такая организация работ оправдывает применение отдельных программ обоим автооператорам. При этом необходима только специальная схема синхронизации движения автооператоров. Автооператоры движутся по монорельсу, расположенному вдоль линии над ваннами.

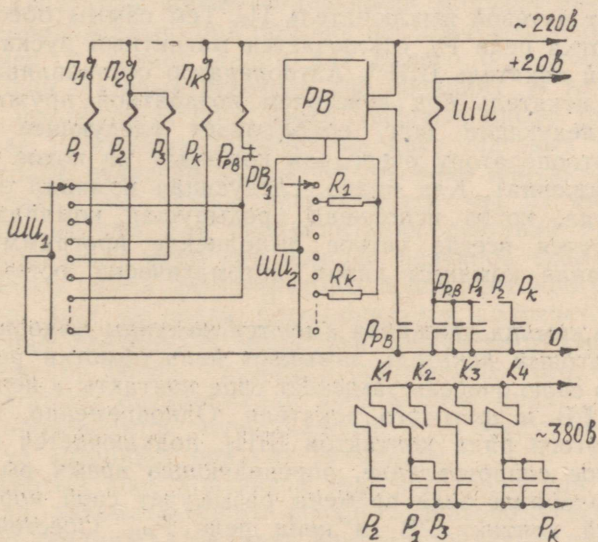


Фиг. 2. Упрощенная принципиальная схема управления линии

На фиг. 2 дана блок-схема электроаппаратуры линии. Основную часть схемы представляет программное устройство. Программа задается схемой соединения шаговых искателей, где каждому шагу соответствует одна определенная команда. Имеется пять разных видов команд, которые условно можно

делить следующим образом: «вперед», «назад», «вверх», «вниз» и «выдержка». При команде «выдержка» программное устройство включает реле времени РВ, которое после выдержки времени дает импульс программному устройству для продолжения обработки программы. При остальных четырех командах подается питание на силовую часть управления приводом. Согласно командам оператору дается одно направление движения из четырех возможных. Пунктирная линия на фиг. 2 обозначает механическую связь между оператором и путевыми выключателями. Срабатывание путевого выключателя является сигналом программному устройству о том, что команда исполнена, после чего программное устройство подает очередную команду.

Из предыдущего станет ясным, что все программное устройство линии можно разделить на две принципиально неразличающиеся друг от друга части. Поэтому в дальнейшем подробнее рассмотрим лишь работу одной части устройства. На фиг. 3 приведена ее значительно упрощенная принципиальная схема, поясняющая работу одного автооператора.



Фиг. 3. Технология и программа линии

Каждая позиция линии, где нужно остановить оператор, включая движение механизма подъема и спуска, вверх и вниз, снабжена путевыми выключателями П<sub>1</sub> — П<sub>к</sub>. Путевые выключатели, являющиеся фиксаторами конца движения опе-

ратора, находятся для направления вперед-назад на моно-рельсе и для направления вверх-вниз на автооператоре. Последовательно с каждым путевым выключателем включены одно или два промежуточных реле  $P^1 - P_k$  в зависимости от того, либо программа требует прихода автооператора соответственно с одной стороны, либо с обеих сторон в разные моменты времени.

До пуска линии шаговый искатель находится на нулевой позиции. Нажатием на пусковую кнопку питание получит обмотка шагового искателя и шаговый искатель переводится на первую позицию. Тем самым по заданной программе получит питание только одно определенное реле и оператору дается первая команда. Шаговый искатель в данном случае дает питание на реле  $P_2$ . Реле  $P_2$  срабатывает и замыкает свои нормально-открытые контакты в цепях обмотки шагового искателя ШИ и магнитного пускателя  $K_1$ . Магнитный пускатель  $K_1$  срабатывая дает питание двигателю автооператора и приводит его в движение. Одновременно срабатывает и шаговый искатель ШИ (обратного действия). Автооператор, двигаясь в заданном направлении, за это время размыкает путевой выключатель  $P_2$ . Тем самым обесточивается обмотка реле  $P_2$ , отключается магнитный пускатель  $K_1$  и шаговый искатель ШИ\*. Автооператор останавливается, а шаговый искатель под действием возвратной пружины совершит следующий шаг, срабатывает следующее реле и дается автооператору очередная команда (на новое направление движения). Как видно, следующая команда задается лишь тогда, когда исполнена предыдущая команда. Этим гарантируется всегда четкое выполнение программы. При невыполнении команды линия автоматически останавливается.

Кроме команд движения имеются команды выдержки времени. Шаговый искатель замыкает цепь обмотки реле  $P_{РВ}$ , которое в свою очередь замыкает свои контакты в цепях реле времени  $PВ$  и шагового искателя. Одновременно, при помощи другого ряда контактов ШИ<sub>2</sub>, подключается на реле  $PВ$  нужное сопротивление, определяющее время выдержки. После выдержки реле времени размыкает свой нормально-замкнутый контакт  $PВ_1$  в цепи реле  $P_{РВ}$ . Обесточивается реле  $P_{РВ}$  и тем самым шаговый искатель, который совершит следующий шаг. Реле времени, которое может дать выдержки на 10 минут и больше, выполнено как электронное

---

\* Во время исполнения команды обмотка шагового искателя находится под током, поэтому нужно шаговый искатель отрегулировать так, чтобы ее обмотка не перегрелась.

реле времени, на двойном триоде. Нетрудно видеть, что одно реле времени дает все нужные выдержки одному автооператору, что значительно упростит схему и удешевит стоимость электроаппаратуры. Как видно, последовательность команд (программа) задается порядком соединения контактов ряда ШИ<sub>1</sub> с реле Р<sub>1</sub>—Р<sub>к</sub> и сопротивлений к реле времени. Если эти соединения, включая и сопротивления для выдержек, сделать на коммутационных досках, тогда с заменой коммутационных досок заменяется и программа. Такая замена программ несложна и требует мало времени.

Шаговый искатель типа ШИ 50/4 имеет 50 рабочих позиций, чем и ограничивается максимальное количество команд одного шагового искателя, которое может оказаться недостаточным. Для увеличения количества команд, с одной стороны, можно несколько шаговых искателей подключить последовательно, а с другой стороны, как показывал опыт проектирования данной линии, часто полную циклическую программу удастся разделить на малые циклы, незначительно отличающиеся друг от друга. Таким образом все малые циклы программы задаются одним и тем же шаговым искателем, а разницы между отдельными малыми циклами введутся дополнительно при помощи несложной релейной схемы. Например, у данной линии для одного оператора понадобится один шаговый искатель (40 позиций). В то же время полная циклическая программа содержит около 160 команд, а полная программа задается на двух шаговых искателях.

Шаговые искатели имеют четыре ряда контактов, причем для задания программы используются два из них. Третий ряд используется для синхронизации действий операторов. Это достигается тоже при помощи релейной схемы. В течение малого цикла автооператоры исполняют программы независимо друг от друга. Синхронизация получается потому, что сигнал для начала отработки следующего цикла дается одновременно обоим автооператорам после того, когда оба автооператоры отработывали предыдущий цикл. Синхронизация производится через каждые 4—6 минут и в работе линии не возникает никаких неполадок.

Четвертый ряд контактов шагового искателя используется для автоматического возврата шагового искателя на нулевую позицию. При этом неиспользованные позиции шагового искателя автоматически пропускаются, а кроме того при переходе на ручное управление или после прекращения питания нужен автоматический возврат.

Блок питания содержит один силовой трансформатор, с отдельными цепями питания обмоток шаговых искателей через выпрямители и обмоткой накала реле времени.

Управление установки производится с пульта управления. Кроме автоматического режима работы линия имеет и ручное управление. Во избежание брака стоп-сигнал останавливает линию всегда после окончания цикла.

В итоге еще некоторые показатели линии. Вся электроаппаратура, основные части которой два шаговых искателя, 66 реле типа РПТ-100, два реле времени, блок питания и блок управления двигателями, вместе с пультом управления помещены в гермитизированный шкаф с размерами  $1600 \times 600 \times 400$  мм. Плавная регулировка выдержек времени гарантирует гибкое управление линий в зависимости от требований технологии. Для нужной толщины покрытия время цинкования регулируется от 6 минут до одного часа.

В работе линия оказалась надежной. Редкие неполадки возникали только из-за выхода из строя путевых выключателей.

Линия спроектирована, построена и дана в эксплуатацию полностью заводскими силами. Ее средняя производительность, при площади подвески  $0,4 \text{ м}^2$ , составляет  $10\text{--}12 \text{ м}^2$  в час и суммарная стоимость порядка десяти тысяч рублей, из чего стоимость электроаппаратуры не превышает двадцати процентов.

## ПАРАМЕТРЫ МНОГОПОЛЮСНЫХ АСИНХРОННЫХ МИКРОДВИГАТЕЛЕЙ

В ряде автономных устройств применяется повышенная частота источника питания ( $f \geq 400$  гц). С повышением частоты увеличивается скорость вращения асинхронных электродвигателей и падает надежность электроприводов (работа подшипников, редукторов). В связи с этим встает проблема создания тихоходных безредукторных электродвигателей.

Одним из возможных способов создания тихоходных безредукторных асинхронных микродвигателей является увеличение числа пар полюсов  $p$  с применением дробных обмоток с числом пазов на полюс и фазу  $q = \frac{c}{d}$  меньше единицы. Применимость дробных обмоток с  $1 > q > \frac{1}{m}$  ( $m$  — число фаз) в двух- и трехфазных асинхронных микродвигателях рассматривалась в [8]. По сравнению с нормальными асинхронными машинами такие двигатели обладают рядом особенностей, которыми нельзя пренебречь даже при приближенных расчетах (конструкция обмотки, форма поля).

В настоящей статье рассматривается определение параметров многополюсных асинхронных микродвигателей с короткозамкнутым ротором типа беличьей клетки. При этом рассматриваются только симметричные двухслойные обмотки с максимальным распределением, т. е. обмотки, у которых обмоточный коэффициент главной гармоники намагничивающей силы (н. с.) получается максимальным [7]. Кривая н. с. дробных обмоток с  $q < 1$  содержит множество гармоник низшего и высшего порядка  $\nu$ , причем по [5]

$$\nu = (1 + ik_{\phi})p + jZ, \quad (1)$$

где  $k_{\phi} = 2m$  — число фазных зон,

$Z$  — число пазов (зубцов),

$i = 0, 1, 2, \dots, c - 1$  и

$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

При  $i = 0$  получим гармоники зубцового порядка, которые согласно (1) равны:

$$v_z = p + jZ.$$

Таким образом в настоящей работе для основной гармоники  $v = 1$  и для главной или синхронной гармоники  $v = p$  ( $i = j = 0$ ). Величина  $v$  означает количество пар полюсов поля вдоль всей окружности статора.

Индуктивное сопротивление самоиндукции обмотки, с учетом взаимоиндукции от других фаз для  $v$ -ой гармоники равно [1, 3]:

$$x_v = 2mf\mu_0 \frac{Dl}{k_\mu k_\delta \delta} \left( \frac{k_{wv} k_{qv} \omega}{v} \right)^2 \Delta_v, \quad (2)$$

где обмоточный коэффициент

$$k_{wv} = k_{pv} k_{yv} k_{cv}, \quad (3)$$

коэффициент демпфирования

$$\Delta_v = 1 - k_{rv}^2 k_{cv}^2, \quad (4)$$

и коэффициент открытия паза

$$k_{qv} = \frac{\sin v \frac{\pi}{Z} \frac{a}{t}}{v \frac{\pi}{Z} \frac{a}{t}},$$

который учитывает изменение гармоник вследствие неравномерности воздушного зазора. Здесь  $a$  — открытие паза,  $t$  — зубцовое деление.

Коэффициент распределения в (3) равен:

$$k_{pv} = \frac{\sin \frac{\pi}{k_\phi}}{c \sin \frac{\pi}{c k_\phi} (1 + i k_\phi)}$$

и коэффициент укорочения шага

$$k_{yv} = \sin \frac{\beta \pi}{2} (1 + i k_\phi),$$

где  $\beta$  — относительный шаг обмотки в долях полюсного деления.

Коэффициент скоса пазов в (3) и (4)

$$k_{cv} = \frac{\sin v \frac{\pi}{Z} \beta_{ск}}{v \frac{\pi}{Z} \beta_{ск}},$$

где  $\beta_{ск}$  — скос пазов в долях зубцового деления.

Входящий в (4) коэффициент  $k_{rv}$  определяется равенством:

$$k_{rv} = \frac{\sin v \frac{\pi}{Z_R}}{v \frac{\pi}{Z_R}}$$

Величины с индексом  $S$  относятся к статору и с индексом  $R$  — к ротору.

Из (2) получим главное индуктивное сопротивление обмотки или индуктивное сопротивление намагничивающей цепи схемы замещения

$$x_m = 2mf\mu_0 \frac{D_{iS} l_{iS}}{\delta'} \left( \frac{k_{wp} k_{qp} \omega}{p} \right)^2, \quad (5)$$

где  $\delta' = k_\mu k_\delta \delta$  — эквивалентный зазор. Обычно машины с  $q < 1$  не насыщены, т. е.  $k_\mu = 1$ .

Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки статора равно

$$x_S = 4\pi f \mu_0 \frac{l_{iS} \omega^2}{pq} \sum \lambda_S,$$

где

$$\sum \lambda_S = \lambda_{nS} + \lambda_{lS} + \lambda_{\omega S}$$

общий коэффициент магнитной проводимости рассеяния обмотки статора.

Коэффициент магнитной проводимости пазового рассеяния для открытого прямоугольного паза, например, равен [10]:

$$\lambda_{nS} = \frac{h_1}{3a_S} k_\beta + \frac{h_2}{a_S} k_{\beta^1},$$

где  $h_1$  — высота обмотки в пазу и  $h_2$  — расстояние от обмотки до поверхности расточки статора. Можно показать, что коэффициенты  $k_\beta = f(\beta)$  и  $k_{\beta^1} = f(\beta)$  [10], учитывающие укорочение шага, справедливы и для дробных обмоток, так как при  $\beta = \text{const}$ , независимо от числа пазов на полюс и фазу,  $\frac{Z_A}{Z_{BC}} = \text{const}$ , где  $Z_A$  — число пазов, у которых верхний и нижний слой обмотки принадлежат одной фазе (например, фазе  $A$ ) и  $Z_{BC}$  — число пазов, у которых один слой принадлежит одной фазе (например, фазе  $A$ ), а другой слой — другой фазе (например, фазе  $B$  или  $C$ ).

Коэффициент магнитной проводимости лобового рассеяния зависит от шага обмотки и от типа обмотки. Для трехфазных двухслойных обмоток с фазовой зоной  $60^\circ$  [10],

$$\lambda_{лS} = 0,39 \frac{q}{l_{IS}} (l_{л} - 0,64\beta\tau)$$

и для двухзначных обмоток с фазовой зоной  $90^\circ$

$$\lambda_{лS} = 0,19 \frac{q}{l_{IS}} (l_{л} - 0,64\beta\tau),$$

где  $l_{л}$  — длина лобовой части полувитка и  $\tau$  — полюсное деление.

Индуктивное сопротивление дифференциального рассеяния фазы обмотки по (2) равно:

$$x_{\partial} = \sum_{v \neq p} x_v = 2mf\mu_0 \frac{D_{IS} l_{IS} \omega^2}{\delta'} \sum_{v \neq p} \frac{k_{wv}^2 k_{\rho v}^2}{v^2} \Delta_v.$$

Отсюда, учитывая (5), получим полный коэффициент дифференциального рассеяния

$$k_{\partial}' = \frac{x_{\partial}}{x_m} = \frac{p^2}{k_{wp}^2 k_{\rho p}^2} \sum_{v \neq p} \frac{k_{wv}^2 k_{\rho v}^2}{v^2} \Delta_v.$$

Коэффициент магнитной проводимости дифференциального рассеяния обмотки статора [6] равен:

$$\lambda_{\partial S} = \frac{mq k_{wp}^2 k_{\rho p}^2 \tau}{\pi^2 \delta'} k_{\partial}' = \frac{t_S}{\delta'} \left( \frac{k_{wp} k_{\rho p} Z_S}{2\pi p} \right)^2 k_{\partial}'.$$

Представим  $k_{\partial}'$  в виде

$$k_{\partial}' = k_{\partial} k_{n\partial} \Delta,$$

где  $k_{\partial}$  — коэффициент дифференциального рассеяния без учета открытия пазов и реакции роторной обмотки

$$k_{\partial} = \frac{p^2}{k_{wp}^2} \sum_{v \neq p} \frac{k_{wv}^2}{v^2}, \quad (6)$$

$k_{n\partial}$  — поправочный коэффициент к коэффициенту дифференциального рассеяния, который учитывает влияние открытия пазов и  $\Delta$  — полный коэффициент демпфирования.

Коэффициент  $k_{\partial}$  в виде бесконечного ряда (6) можно определить на основе [4] из формулы:

$$k_{\partial} = \left( \frac{p'}{k_{wp}} \right)^2 (C'_1 k_{w1}^2 + C'_2 k_{w2}^2 + \dots + C'_v k_{wv}^2 + \dots + C'_T \frac{T}{2} k_{wT}^2 \frac{T}{2}) - 1, \quad (7)$$

который сходится быстрее, чем ряд (6), так как обмоточные коэффициенты повторяются периодически. В формуле (7)

$$C'_v = \frac{\pi^2}{T^2 \sin v \frac{\pi}{T}}, \quad (8)$$

где период  $T = Z'$  ( $p'$  и  $Z'$  соответственно число пар полюсов и число пазов первоначальной обмотки [7]).

Коэффициенты  $C_\nu$ 

$\nu$	$T$						
	3	8	9	12	18	24	36
1	145,21	105,31	104,16	102,31	101,02	100,57	100,25
2			27,151				
3		18,067		13,708		11,701	11,368
4			12,563				
5				7,3456	5,1907	4,6234	4,2633
7					3,4495	2,7223	2,3147
9						2,0025	1,5231
11						1,7431	1,1349
13							0,92708
15							0,81621
17							0,76733

В табл. 1 приведены коэффициенты (8) в виде

$$C_\nu = \frac{100\pi^2}{T^2 \sin \nu} \frac{\pi}{T},$$

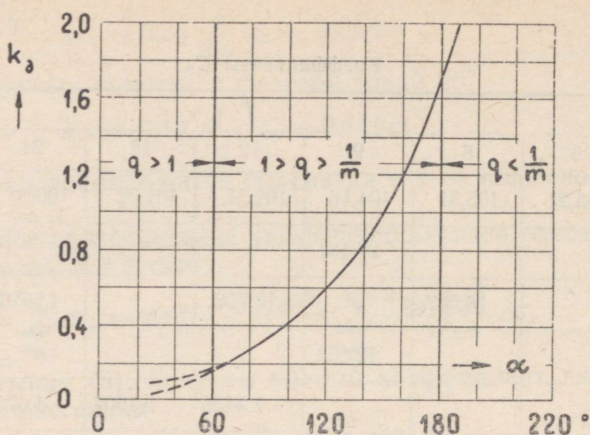
которые более удобные для практического расчета. Формула (7) принимает тогда вид:

$$k_\partial = \left( \frac{p'}{10 k_{wp}} \right)^2 \left( C_1 k_{w1}^2 + C_2 k_{w2}^2 + \dots + C_\nu k_{w\nu} + \dots \right. \\ \left. \dots + C_T k_{w\frac{T}{2}}^2 \right) - 1. \quad (9)$$

Для обмоток с максимальным распределением шаг обмотки  $y$  при  $q < 1$  выбирается по единственному невыгоднейшему варианту и поэтому целесообразно коэффициент дифференциального рассеяния представить как функцию от угла смежных векторов в звезде пазовых э. д. с.  $k_\partial = f(\alpha)$ ,

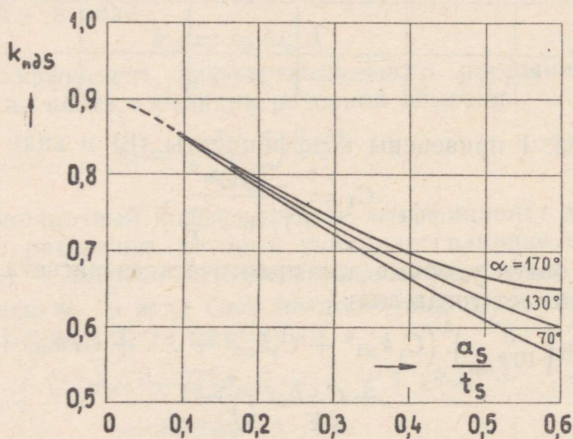
где

$$\alpha = \frac{180^\circ}{mq}.$$



Фиг. 1. Коэффициент дифференциального рассеяния  $k_{\partial} = f(\alpha)$  для трехфазных дробных обмоток с  $q < 1$

На фиг. 1 приведена зависимость  $k_{\partial} = f(\alpha)$  для трехфазных двухслойных обмоток с  $q < 1$ , рассчитанная по (9).



Фиг. 2. Поправочный коэффициент к коэффициенту дифференциального рассеяния  $k_{n\partial S} = f\left(\frac{a_S}{t_S}; \alpha\right)$

На фиг. 2 приведены кривые поправочного коэффициента

$$k_{n\partial S} = f\left(\frac{a_S}{t_S}; \alpha\right),$$

которые рассчитаны по формуле:

$$k_{n\partial S} = \frac{1}{k_{\partial}} \frac{p'^2}{k_{\omega p}^2 k_{\rho p}^2} \sum_{v \neq p} \frac{k_{\omega v}^2 k_{\rho v}^2}{v^2}$$

и являются усредненными.

Общий коэффициент демпфирования для всех гармоник статора, определяющих дифференциальное рассеяние по отношению к главной гармонике поля, равен [1]:

$$\Delta = \frac{\frac{p'^2}{k_{\omega p}^2} \sum_{v \neq p} \frac{k_{\omega v}^2}{v^2} \Delta_v}{\frac{p'^2}{k_{\omega p}^2} \sum_{v \neq p} \frac{k_{\omega v}^2}{v^2}}$$

Многочисленные расчеты показывают, что при определении реакции достаточно учитывать ее для низших гармоник, высших гармоник дозубцового порядка и зубцовых гармоник первого порядка. Тогда, учитывая (4), получаем:

$$\Delta = 1 - \frac{1}{k_{\partial}} \frac{p'^2}{k_{\omega p}^2} \sum_{\substack{v=p'+Z \\ v \neq p \\ v=1}} \frac{k_{\omega v}^2 k_{r v}^2 k_{c v}^2}{v^2},$$

где значения

$$k_{r v}^2 k_{c v}^2 = f\left(\frac{v}{Z_R}; \beta_{ck}\right)$$

приведены в [1].

Аналогично индуктивное сопротивление рассеяния обмотки ротора, приведенное к статору, равно:

$$x'_{R} = 4\pi f \mu_0 \frac{l_{iS} w^2}{\rho q} k_{RS} \sum \lambda_R,$$

где коэффициент приведения

$$k_{RS} = \frac{l_{aR} Z_S}{l_{iS} Z_R} \left( \frac{k_{\omega p} k_{c p S} k_{\rho p S}}{k_{c p R} k_{\rho p R}} \right)^2$$

и общий коэффициент магнитной проводимости рассеяния обмотки ротора

$$\sum \lambda_R = \lambda_{nR} + \lambda_{\pi R} \frac{l_{iS}}{l_{aR}} + \lambda_{\partial R}.$$

Коэффициент магнитной проводимости пазового рассеяния ротора для круглового паза

$$\lambda_{nR} = 0,785 - \frac{a_R}{2d_1} + \frac{h_{2R}}{a_R},$$

где  $a_R$  — открытие паза ротора,  $d_1$  — диаметр стержня и  $h_{2R}$  — высота шлица.

Для прямоугольного паза

$$\lambda_{nR} = \frac{h_{nR}}{3a_R},$$

где  $h_{nR}$  — глубина паза ротора.

Коэффициент магнитной проводимости лобового рассеяния, если короткозамыкающее кольцо примыкает к пакету ротора, равен [10]:

$$\lambda_{лR} = \frac{2,9 D_k}{Z_R' i_s \left( 2 \sin \frac{\pi p}{Z_R} \right)^2} \lg \frac{4,7 D_k}{a + \frac{b}{2}},$$

где  $D_k$  — средний диаметр к. з. кольца;  $a$  — толщина кольца в осевом направлении и  $b$  — ширина кольца в радиальном направлении.

Коэффициент магнитной проводимости дифференциального рассеяния обмотки ротора равен:

$$\lambda_{\partial R} = \frac{t_R}{\delta'} \left( \frac{Z_R}{2\pi p} \right)^2 k'_{\partial R},$$

где

$$k'_{\partial R} = k_{\partial R} k_{n\partial R}.$$

Для короткозамкнутой обмотки в виде беличьей клетки порядковый номер гармоник н. с.  $\mu$  определяется из выражения [5]

$$\mu = \nu + jZ_R,$$

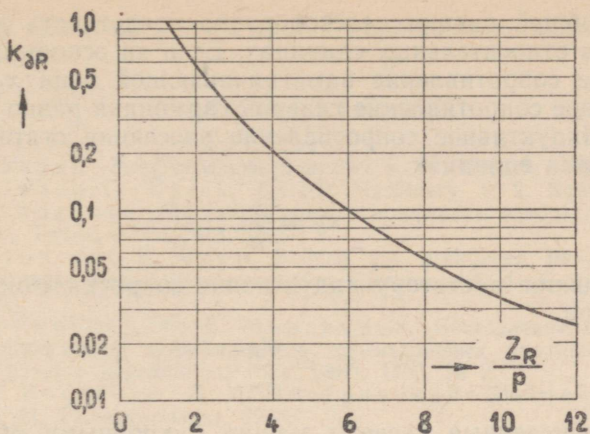
где  $\nu$  — порядковый номер возбуждающий гармоники. Коэффициент дифференциального рассеяния обмотки ротора равен:

$$k_{\partial R} = p^2 \sum_{\mu \neq p} \frac{1}{\mu^2} = \sum_{j \neq 0} \left( \frac{1}{1 + j \frac{Z_R}{p}} \right)^2,$$

так как для главной гармоники  $\nu = p$ . Зависимость

$$k_{\partial R} = f\left(\frac{Z_R}{p}\right)$$

приведена на фиг. 3 [2].

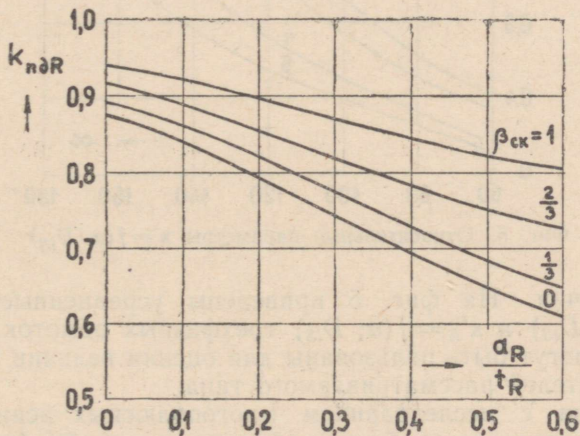


Фиг. 3.  $k_{\partial R} = f\left(\frac{Z_R}{p}\right)$  для обмотки ротора типа беличьей клетки

Поправочный коэффициент  $k_{n\partial R}$  учитывает открытия паза ротора и скос пазов ротора. Кривые [9]

$$k_{n\partial R} = f\left(\frac{a_R}{t_R}; \beta_{ск}\right)$$

приведены на фиг. 4.



Фиг. 4. Поправочный коэффициент  $k_{n\partial R} = f\left(\frac{a_R}{t_R}; \beta_{ск}\right)$  для коэффициента  $k_{\partial R}$

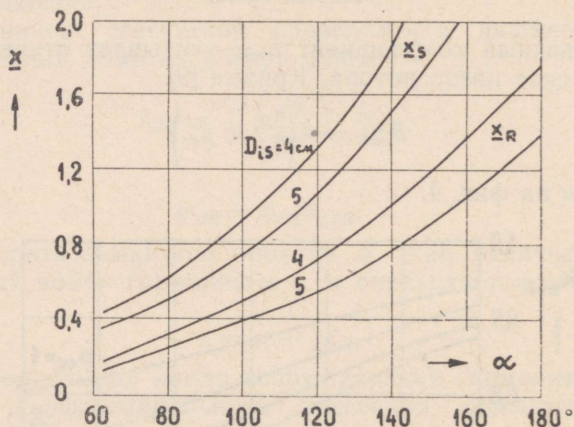
Для общей оценки целесообразно представить величины  $x_S$  и  $x'_R$  в относительных единицах. Если за основу брать индуктивное сопротивление намагничивающей цепи  $x_m$ , то относительное сопротивление главной гармоники равно единице,  $x_m = 1$ . Индуктивное сопротивление рассеяния статора в относительных единицах

$$x_S = \frac{x_S}{x_m}$$

и приведенное к статору индуктивное сопротивление рассеяния ротора

$$x'_R = \frac{x'_R}{x_m}$$

Многочисленные расчеты машин с дробными обмотками при  $q < 1$  показывали, что  $x$  зависит главным образом от числа пазов на полюс и фазу статора и от габарита машины,  $x = f(q; D_{is})$  или  $x = f(\alpha; i_s)$ , и относительно мало от дру-



Фиг. 5. Относительные параметры  $x = f(\alpha, D_{is})$

гих величин. На фиг. 5 приведены усредненные кривые  $x_S = f(\alpha; D_{is})$  и  $x'_R = f(\alpha; D_{is})$  трехфазных обмоток с  $q < 1$ , которые могут быть использованы для оценки величин параметров двигателей рассматриваемого типа.

В связи с исследованием многополюсных асинхронных микродвигателей с дробными обмотками с  $q < 1$  были изготовлены экспериментальные образцы трехфазных машин с  $q = \frac{2}{5}; \frac{4}{7}; \frac{6}{11}; \frac{6}{17}$  и двухфазных машин с  $q = \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{6}{11}$ . Ре-

зультаты испытания этих машин хорошо совпадали с данными расчета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Рихтер. Электрические машины, т. IV. ОНТИ, 1939.
2. M. Liwschitz-Garik. Electric Machinery, v. 2. New-York, 1946.
3. А. И. Вольдек. Магнитное поле в воздушном зазоре асинхронных машин. Труды ЛПИ 1953, № 3.
4. A. Kron und K. Worr. Beitrag zur praktischen Berechnung des Koeffizienten der doppeltverketteten Streuung. A. f. E. 1953, Bd, 41, S. 136.
5. Т. Г. Сорокер, Ю. В. Мордвинов. Составление схем и расчет обмоточных коэффициентов симметричных петлевых обмоток многофазного переменного тока. ВЭП, 1955, № 2.
6. М. П. Костенко, Л. М. Пиотровский. Электрические машины, т. II. Госэнергоиздат, 1958.
7. А. И. Вольдек. Намагничивающие силы трехфазных дробных обмоток. Труды ЛПИ, 1960, № 209.
8. Р. Х. Вырк. Анализ применимости дробных обмоток с  $q < 1$  в двух- и трехфазных асинхронных микродвигателях. Труды ЛПИ, 1964, № 241.
9. Я. А. Тайков. К расчету дифференциального рассеяния в трехфазных асинхронных машинах. Сборник научных трудов Ивановского энергетического института, выпуск VII, 1957.
10. Е. М. Лопухина, Г. С. Сомихина, Расчет асинхронных микродвигателей однофазного и трехфазного тока. Госэнергоиздат, 1961.

*П. Плакк*

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

### Введение

При измерении диэлектрической проницаемости сыпучих материалов имеется ряд трудностей. Обычно частички сыпучих материалов настолько малы, что измерение диэлектрической проницаемости только одной твердой частички оказывается невозможным. Поэтому из сыпучего материала определенным способом создается образец, который обычно состоит из смеси частичек твердого вещества и воздуха. Измеряется электрическая емкость образца, по которой определяется диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_x$  смеси «вещество-воздух». Для выражения зависимости действительной проницаемости  $\epsilon_1$  твердого вещества от  $\epsilon_x$  выполнено много научно-исследовательских работ и выведен ряд формул. К сожалению эти формулы дают значения, которые в общем случае не совпадают с экспериментальными данными (в случае твердого тела).

Некоторые из этих формул проанализированы В. И. Одолевским [1, 2]. В этих статьях дается отрицательная оценка широко распространенным формулам К. Лихтенэкера [3, 4, 5]. Однако предложенная В. И. Одолевским формула также не нашла всеобщего признания. Применимость формул связи между  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_1$  рассматривал также А. В. Нетушил с сотрудниками в [6], где на стр. 107 высказано мнение, что исчерпывающее решение вопроса отсутствует.

Возможность пересчета диэлектрической проницаемости  $\epsilon_x$  гетерогенной смеси (образцов) на диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$  твердого вещества проанализировал особо основательно Г. П. де Лоор [7]. Он пришел к выводу, что невозможно наперед выбрать определенную формулу для определения диэлектрической проницаемости по данным измерительной пробы. Одновременно Р. С. Смес в [8] заявляет, что

ранее разработанные формулы являются неправильными и предлагает свою т. н. правильную формулу. В подтверждение правильности своей формулы он приводит некоторые результаты экспериментальных измерений. Критический анализ последних вызывает серьезные сомнения в ценности формулы Р. С. Смиса.

В связи с автоматизацией технологических процессов сыпучих материалов по емкостному датчику вопрос пересчета диэлектрической проницаемости гетерогенной смеси на диэлектрическую проницаемость твердого вещества стал весьма актуальным. Более детальный анализ показывает, что расхождения имеют место не только в формулах для пересчета, но и в результатах экспериментальных измерений. По-видимому не приходится говорить о правильной формуле до тех пор, пока нет договоренности относительно определенного метода измерения сыпучих веществ до мельчайших подробностей, которые обеспечат полную воспроизводимость измерений. Рассмотрению этого вопроса посвящена настоящая статья.

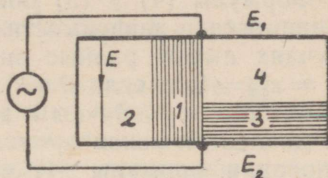
## 1. О сравнении результатов измерений

Вопросы измерения диэлектрической проницаемости сыпучих материалов широко освещены в литературе. Однако только весьма скромная часть из этих материалов содержит все необходимые данные для определения связи диэлектрической проницаемости  $\epsilon_x$  образца с проницаемостью твердого вещества  $\epsilon_1$ . В распоряжении автора имелись следующие источники [2, 8, 9], которые соответствовали указанным требованиям. Для оценки достоверности этого малочисленного материала использована нормированная диэлектрическая проницаемость, сущность которой заключается в нижеследующем.

Структуру образца уплотненного сыпучего материала можно представить в виде смеси цепей из частиц твердого вещества и каналов воздуха, ориентированных произвольно. Цепи твердого вещества и каналы воздуха можно в первом приближении подразделить на две большие группы: одни ориентированы в направлении электрического поля, и другие — поперек электрического поля. Влияние этих цепей на диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_x$  образца различно. Это явление учитывал О. Винер уже в начале настоящего столетия при разработке своей теории. Рассматривая образец, можно в первом приближении представить его состоящим из множества цепей твердого вещества обоих упомянутых предельных случаев, причем цепи одного направления плотно упакованы друг к другу и образуют кусок компактного твердого

вещества. Аналогично твердому веществу представим упакованными таким же образом имеющиеся в образце каналы воздуха (фиг. 1).

Фиг. 1. Упрощенная модель образца



Обозначения на фиг. 1:

- $E_1, E_2$  — измерительные электроды;  
 $E$  — направление электрического поля;  
 1 — кусок вещества, состоящий из ориентированных вдоль электрического поля цепей твердого вещества;  
 2 — кусок вещества, состоящий из цепей, ориентированных поперек электрического поля;  
 3 — ориентированный вдоль электрического поля воздух каналов;  
 4 — ориентированный поперек электрического поля воздух каналов.

Вводим следующие обозначения:

- $\epsilon_x$  — диэлектрическая проницаемость образца (измеренная);  
 $\epsilon_1$  — действительная диэлектрическая проницаемость твердого вещества;  
 $\vartheta$  — объемная концентрация твердого вещества, т. е. отношение заполненного твердым веществом объема к объему всего образца;  
 $1 - \vartheta$  — объемная концентрация воздуха.

Для идеализированного случая, когда все цепи твердого вещества ориентированы в одном направлении, справедливы следующие общеизвестные уравнения:

— при ориентации вдоль электрического поля (индекс  $b$ )

$$\epsilon_{xb} - \epsilon_2 = \vartheta(\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad (1)$$

— при ориентации поперек электрического поля (индекс  $n$ )

$$\epsilon_{xn} - \epsilon_2 = \frac{\vartheta\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 - \vartheta(\epsilon_1 - \epsilon_2)}. \quad (2)$$

Обозначим

$$\frac{\epsilon_x - \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} = \epsilon_c \quad (3)$$

и назовем  $\epsilon_c$  нормированной диэлектрической проницаемостью.

Заменив диэлектрическую проницаемость воздуха  $\epsilon_2 = 1$ , получим из формул (1) и (2) для нормированной проницаемости выражения

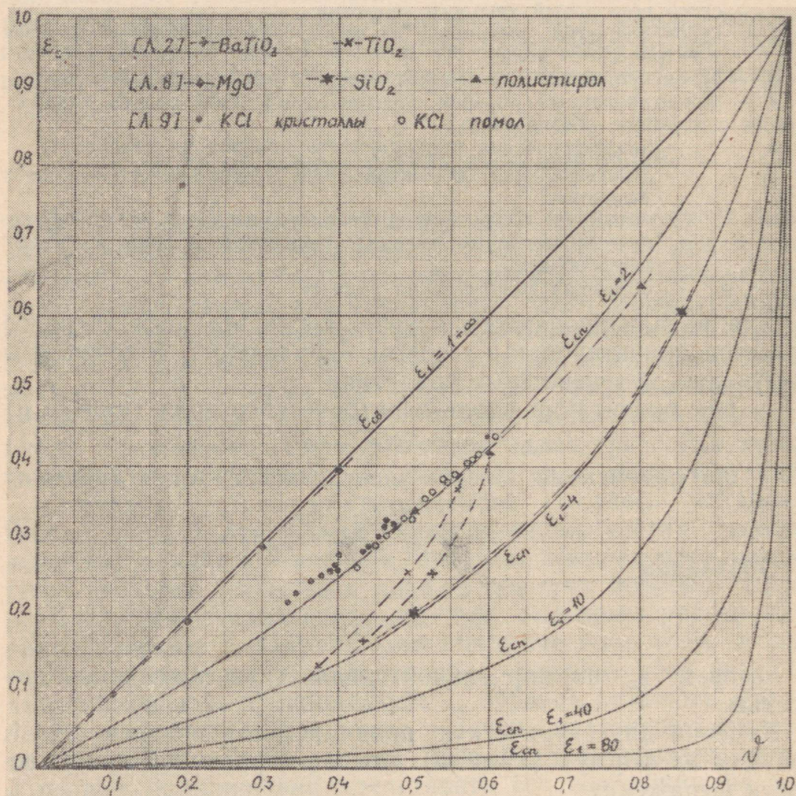
вдоль поля

$$\epsilon_{cb} = \frac{\epsilon_{xb} - 1}{\epsilon_1 - 1} = \vartheta, \quad (4)$$

поперек поля

$$\epsilon_{cn} = \frac{\epsilon_{xn} - 1}{\epsilon_1 - 1} = \frac{\vartheta}{\epsilon_1 - \vartheta(\epsilon_1 - 1)}. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) показывают, что нормированные проницаемости в зависимости от объемной концентрации в двух случаях имеют равные значения, а именно, если  $\vartheta = 0$ , то  $\epsilon_{cb} = \epsilon_{cn} = 0$ , и если  $\vartheta = 1$ , то  $\epsilon_{cb} = \epsilon_{cn} = 1$ . При других значениях  $\vartheta$  они различны и это различие тем больше, чем больше диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$  твердого вещества. На основании формулы (4) нормированная проницаемость численно равна объемной концентрации и не зависит от абсолютного значения  $\epsilon_1$ . Следовательно, с точки зрения измерений здесь имеются благоприятные продольные цепи. Напро-



Фиг. 2. Нормированная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_c$  в зависимости от объемной концентрации  $\vartheta$  и диэлектрической проницаемости твердого тела  $\epsilon_1$

тив, из формулы (5) вытекает, что  $\epsilon_{cn}$  зависит как от  $\vartheta$ , так и от  $\epsilon_1$  и за счет последней при том же значении  $\vartheta$  может давать весьма различные значения нормированной проницаемости. Тем самым поперечные цепи с точки зрения измерений являются неблагоприятными.

На фиг. 2 графически изображены  $\epsilon_{cb}$  и  $\epsilon_{cn}$  в зависимости от  $\vartheta$ , при заданной  $\epsilon_1$ .

Фактически в образце имеются как продольные, так и поперечные цепи. Обозначая отношение объема продольных цепей к объему всего твердого вещества через  $X$ , получим для действительного образца формулу нормированной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_c = X\vartheta + (1 - X)\epsilon_{cn}. \quad (6)$$

Из (6) можно получить выражение для отношения объема продольных цепей  $X$

$$X = \frac{\epsilon_c - \epsilon_{cn}}{\vartheta - \epsilon_{cn}}. \quad (7)$$

На основе результатов измерения  $\epsilon_x$  и  $\vartheta$  и учета твердого вещества по формулам (5) и (7) можно вычислить отношение объема продольных цепей  $X$  и по нему судить о действительной структуре образца.

В целях оценки достоверности результатов измерений диэлектрической проницаемости сыпучих материалов был произведен пересчет  $\epsilon_x$  на нормированную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_c$  и полученные данные приведены на фиг. 2. На последней представлены: точки для титаната бария и двуокиси титаната [2, фиг. 5а и б], кривые для полистирола, окиси магния ( $MgO$ ) и кремнезема ( $SiO_2$ ) [8, фиг. 10 и 11]; точки для кристаллического и размолотого хлористого калия [9, табл. 4]. По этим данным рассчитаны также отношения объема продольных цепей  $X$ .

Из измерений хлористого калия, проведенных Е. Штакером [9], выяснилось, что  $X = 0,53$  независимо от объемной концентрации  $\vartheta$  и от формы частиц. Результат вполне достоверный.

Измерения В. И. Одолевского [2] дали следующие результаты:

$BaTiO_3$ ,	$\epsilon_1 = 1200$	$TiO_2$ ,	$\epsilon_1 = 110$
$\vartheta$	$X$	$\vartheta$	$X$
0,43	0,38	0,37	0,35
0,49	0,52	0,49	0,52
0,60	0,69	0,56	0,65

Из этих данных вытекает, что  $X$  не зависит от диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$  твердого вещества, но в боль-

шой степени зависит от объемной концентрации  $\vartheta$  образца. Так как в случае [2] образец был изготовлен путем спекания частиц порошка материала, то здесь по-видимому образуется структура, которая маловероятна в случае прессовки того же материала. По-видимому формула Одолевского недействительна в случае образца из спрессованного сыпучего материала.

Измерения Р. С. Смиса [8] дают следующую картину:

		$\epsilon_1$	X	
MgO,	форма — листочки	11	1,00	независимо
SiO <sub>2</sub> ,	„ — шарики	4,8	0,12	от $\vartheta$
полистирол,	„ — шарики	2,4	0,16	

Значение X показывает, что в случае листочков (MgO) все твердое вещество сосредоточено в продольные цепи. Наоборот, при шариках (SiO<sub>2</sub> и полистирол) почти все вещество сосредоточено в поперечных цепях, хотя при уплотнении образца применялось сравнительно высокое давление.

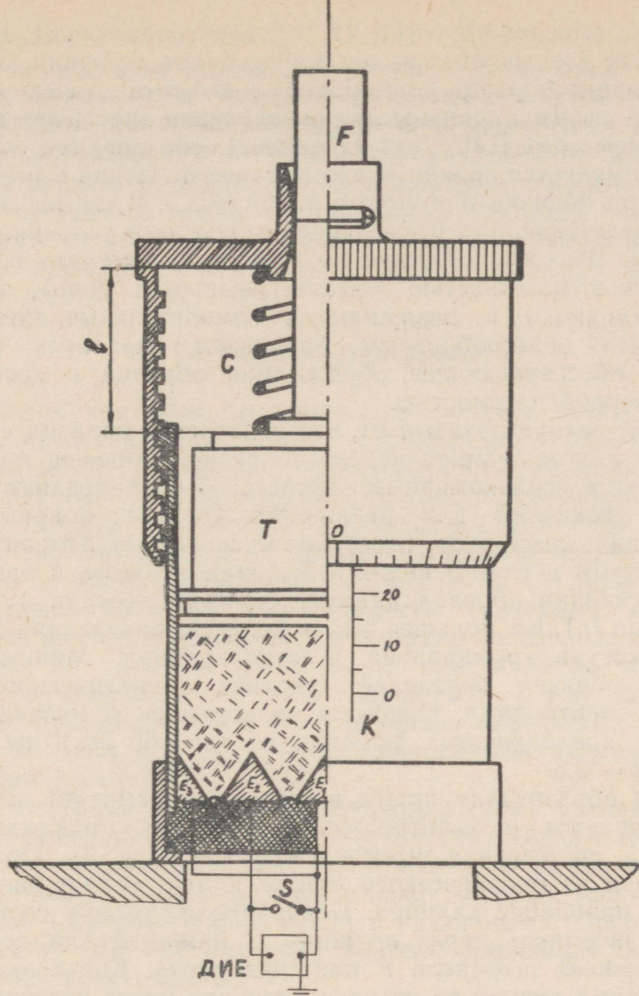
Не ясно, как могут при одинаковой механической обработке образоваться столь различные по структуре образцы? На основании работ автора настоящей статьи можно утверждать, что образование таких структур неправдоподобно.

Из приведенного примера выясняется, что во всех трех случаях измерений, структуры образцов основательно отличались друг от друга. Поэтому совпадение результатов измерений, полученных различными способами, невозможно даже в случае одного и того же вещества. Следовательно, для достижения воспроизводимых результатов измерений необходимо договориться относительно 1) способа образования образца и 2) метода измерения диэлектрической проницаемости.

## 2. Целесообразная структура образца и конструкция электродов

Учитывая высказанные в литературе точки зрения и вышеприведенные рассуждения, целесообразный образец должен обладать следующими свойствами:

- 1) равномерная плотность (отсутствие сводов);
- 2) возможность определять с достаточной точностью объемную концентрацию  $\vartheta$ ;
- 3) сохранять определенное (постоянное) давление на сыпучий материал в течение всего процесса измерения, чем обеспечивается непосредственный контакт между частицами твердого вещества и электродами. Это условие особенно необходимо в случае полупроводящих веществ [10];



Фиг. 3. Система электродов

4) возможно большое и независимое от формы частиц и от объемной концентрации отношение продольных цепей  $X$ ;

5) независимость результатов измерения от количества сыпучего вещества;

6) легкость в обращении, механическая прочность, отсутствие влияния паразитных элементов схемы и соединительных проводов и т. д.

Этим требованиям удовлетворяет предложенная автором система измерительных электродов (фиг. 3). Эта система со-

стоит из описанного в [11, 12, 13] электрода-сосуда и коаксиальных электродных колец треугольного профиля. Условия образования образца равномерной плотности из сыпучего материала сформулированы при определении эластичности грунта в одометрах [14]. Для избежания образования «сводов» там применяется сравнительно высокое давление и отношение диаметра образца  $d$  к высоте  $h$ ,  $d/h = 3,5$ . В случае электродов, представленных в настоящей статье, эти условия не приемлемы. Высокое давление не позволяет измерять вещества с большой влажностью (выпрессовывается вода), а также деформируются и разрушаются измерительные электроды. Наиболее целесообразным давлением оказалось  $0,2-0,6 \text{ кг/см}^2$ , обеспечивающее образование образца с достаточно равномерной плотностью.

Опыт автора показывает, что уплотнение образца встряхиванием или вибрацией нецелесообразно. Образец при этом получается неравномерным вследствие сепарирования частиц разной величины или различного состава, повреждаются крепления электродов, расстраивается работа измерительной аппаратуры и т. д. В целях избежания «сводов» и равномерного оседания образца диаметр электрода-сосуда в нижней части на  $0,1 \text{ мм}$  больше, чем в верхней, внутренняя поверхность сосуда хромирована и отполирована. Минимальную высоту образца определяет картина электрического поля между электродами. Наиболее подходящим отношением для формы предложенных электродов ( $d = 60 \text{ мм}$ ) оказалось  $d/h = 2 - 2,5$ .

Для образования пробы взвешивается сыпучий материал и засыпается в электрод-сосуд. На него накладывается крышка, снабженная штемпелем  $T$  (см. фиг. 3). Последний выполнен из органического стекла и движется в электрод-сосуде наподобие калибра. Поворачивая крышку сосуда как гайку, штемпель через пружину  $C$  нажимает на вещество. На стержень штемполя  $F$  нанесена риска. Когда эта риска совпадает с риской на крышке, пружина имеет некоторую определенную длину  $l$  и вещество находится под давлением  $0,2 \text{ кг/см}^2$ . На стержень штемполя целесообразно нанести три риски, которые обеспечат давление соответственно в  $0,2$ ,  $0,4$  и  $0,6 \text{ кг/см}^2$ . Высоту образца в электрод-сосуде указывает микрометрическая шкала  $K$  на сосуде и ее крышке. Высота образца определяется с точностью  $\pm 0,1 \text{ мм}$ . Тем самым объем образца при  $h = 25-30 \text{ мм}$  определяется с погрешностью ниже  $0,5\%$ , которая одновременно является и погрешностью определения объемной концентрации  $\vartheta$ . Электрическая схема электродов  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  и принцип измерения показаны на фиг. 3. Выключатель  $S$ , находящийся вблизи электродных ко-

лец, в нормальном положении замкнут. Измерения целесообразно производить двухполюсником-измерителем емкости [15, 16]. При замкнутом выключателе  $S$  измеритель емкости ДИЕ устанавливается на ноль и при разомкнутом выключателе (в течение 2—5 секунд) производится измерение. Этот способ измерения позволяет исключить ошибку, могущую возникнуть от влияния паразитных элементов схемы в соединяющих проводах электродов, а также нагревание образца за счет энергии измерения.

### 3. Результаты эксперимента

В целях контроля применимости системы электродов и метода, представленных в пункте 2, проведены многочисленные опыты по измерению диэлектрической проницаемости различных сыпучих материалов. Результаты измерений сведены в таблице 1. Емкость электродов с воздухом ( $C_0 = 3,65$  нф) определена на бензоле, этиловом спирте (абсолютный) и дистиллированной водой при  $20^\circ\text{C}$ , причем значения диэлектрической проницаемости указанных веществ получены из [17]. Для измерений выбраны различные твердые вещества, из которых изготовлены пластинчатые образцы (диски диаметром 70—80 мм и толщиной 3—5 мм). Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$  этих образцов определена классическим методом, причем краевая емкость была вычислена по А. Р. Хиппелю [17, стр. 59/60].

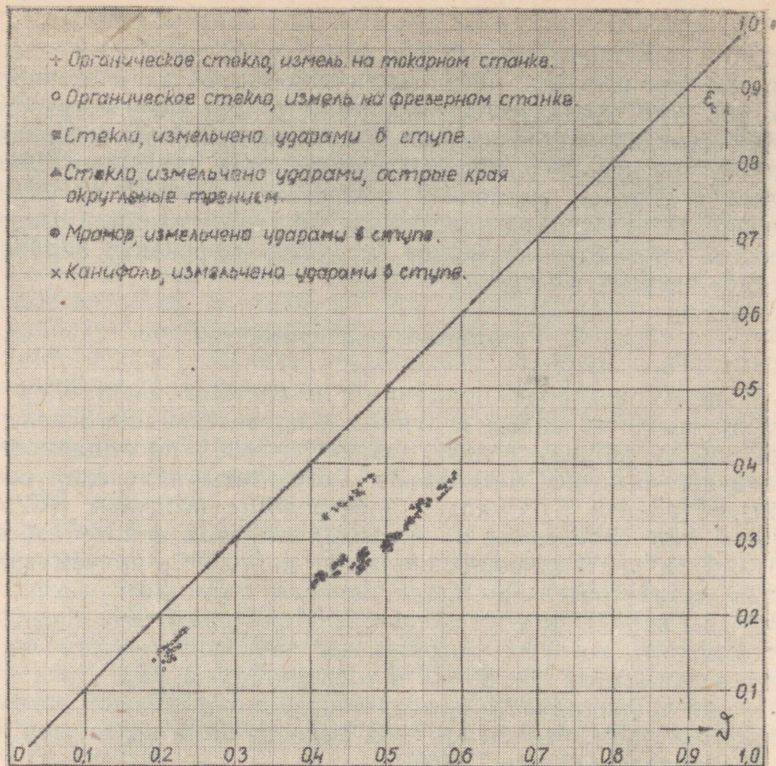
На пластинчатых образцах определен также удельный вес  $\gamma$  твердого вещества. Тем самым  $\epsilon_1$  и  $\gamma$  для каждого вещества были точно определены, хотя при связывании  $\epsilon_x$  образца с  $\epsilon_1$  твердого вещества не возникает никаких спорных вопросов.

Затем пластинки размельчались различными способами и полученный сыпучий материал классифицировался по величине зерен просеиванием.

Измерения производились по сериям, причем для каждой серии брали по два образца, которые уплотнялись при трех различных давлениях. Большее количество параллельных образцов не требовалось, так как данные измерений в пределах серии совпадали сравнительно хорошо.

Емкость образца измерялась двухполюсником — измерителем емкости [16], для которого  $f = 6405$  кгц и точность измерения емкости 0,02 нф. Последняя и определяет погрешность измерения  $\epsilon_x$  образца, которая в таблице 1 обозначена  $\delta\epsilon_x$ .

По данным таблицы 1 построены кривые зависимости  $\epsilon_c = f(\vartheta)$  (фиг. 4). Из последней видно, что точки, характеризующие различные фракции по величине зерен одного



Фиг. 4. Результаты измерений диэлектрической проницаемости сыпучих материалов

и того же вещества, сравнительно хорошо размещаются на общей кривой. По данным фиг. 4 вычислено отношение продольных цепей  $X$  образца и получены следующие результаты.

- |  |       |
|--|-------|
| 1) Органическое стекло, измельченное на токарном станке, серии 1 и 2.  | 0,58  |
| 2) Органическое стекло, измельченное на фрезерном станке, серии 3 и 4. | 0,50  |
| 3) Стекло, измельченное ударами в ступе.                               | 0,51  |
| 4) То же, серии 5 и 6.   | 0,45  |
| 5) Стекло, измельченное ударами, острые края округлены трением.        | 0,51  |
| 6) Мрамор, измельчен ударами в ступе.                                  | 0,49  |
| 7) То же, серии 14 и 15.   | 0,45  |
| 8) Канифоль, измельченная ударами в ступе.                             | 0,55. |

Выясняется, что среднее отношение объема продольных цепей  $X$  для всех измеренных веществ находится вблизи 0,5. Отклонения от этой величины по всей вероятности вызваны следующими обстоятельствами.

Таблица 1

Результаты измерений диэлектрической проницаемости сыпучих материалов

Серия изм.	Давление при измерении, кг/см <sup>2</sup>	Диэл. проницаем. образца, $\epsilon_x$	Нормированная диэл. проницаемость, $\epsilon_c$	Объемная концентрация, $\vartheta$	Размер частиц, мм	Рассеяние измеренных точек в серии, %
1	2	3	4	5	6	7

Органическое стекло (плексиглас):  $\epsilon_1 = 2,86$ ,  $\gamma = 1,195$ ; измельчено на токарном станке, форма частиц — палочки;  $\delta\epsilon_x = 3\%$ .

1	0,2	1,30	0,163	0,215	толщина 0,3—0,5 длина 2—10	1,5
	0,4	1,32	0,170	0,222		
	0,6	1,33	0,177	0,228		
	0,2	1,31	0,167	0,220		
	0,4	1,32	0,173	0,228		
	0,6	1,34	0,181	0,235		
2	0,2	1,28	0,156	0,205	то же, что в серии I	1,5
	0,4	1,28	0,159	0,210		
	0,6	1,29	0,162	0,217		
	0,2	1,27	0,151	0,198		
	0,4	1,29	0,162	0,215		
	0,6	1,30	0,166	0,221		

Органическое стекло:  $\epsilon_1 = 2,86$ ,  $\gamma = 1,195$ ; измельчено на фрезерном станке, форма частиц — смесь частиц в виде размятых крошек с тонкими спиральными пластинками, отношение 1 : 1;  $\delta\epsilon_x = 3\%$ .

3	0,2	1,24	0,128	0,205	крошки 1,1—1,7 пластинки 1,1 × 1,7 × × 0,02	5
	0,4	1,26	0,138	0,212		
	0,6	1,27	0,145	0,216		
	0,2	1,26	0,138	0,206		
	0,4	1,28	0,152	0,212		
	0,6	1,29	0,156	0,218		
4	0,2	1,26	0,140	0,191	то же, что в серии 3	3
	0,4	1,26	0,140	0,213		
	0,6	1,27	0,144	0,219		
	0,2	1,28	0,148	0,212		
	0,4	1,29	0,155	0,220		
	0,6	1,30	0,159	0,225		

Стекло:  $\epsilon_1 = 7,06$ ,  $\gamma = 2,46$ ; измельчено ударами в ступе, форма частиц — с острыми краями, в большинстве с треугольными сторонами многогранники;  $\delta\epsilon_x = 0,5\%$ .

5	0,2	2,74	0,287	0,505	1,6—1	2
	0,4	2,75	0,288	0,505		
	0,6	2,75	0,288	0,506		
	0,2	2,84	0,304	0,511		
	0,4	2,84	0,304	0,511		
	0,6	2,84	0,304	0,512		

1	2	3	4	5	6	7
6	0,2	2,73	0,285	0,469	1—0,63	2
	0,4	2,73	0,285	0,470		
	0,6	2,74	0,287	0,471		
	0,2	2,68	0,278	0,469		
	0,4	2,68	0,278	0,470		
	0,6	2,69	0,279	0,471		
7	0,2	2,65	0,273	0,447	0,63—0,315	1,5
	0,4	2,65	0,273	0,447		
	0,6	2,65	0,273	0,448		
	0,2	2,64	0,271	0,443		
	0,4	2,67	0,275	0,445		
	0,6	2,67	0,275	0,447		
8	0,2	2,59	0,263	0,430	0,315—0,1	1
	0,4	2,60	0,264	0,432		
	0,6	2,61	0,266	0,434		
	0,2	2,58	0,261	0,431		
	0,4	2,60	0,264	0,432		
	0,6	2,61	0,265	0,434		
9	0,2	2,45	0,239	0,402	ниже 0,1	1,5
	0,4	2,51	0,249	0,415		
	0,6	2,54	0,255	0,417		
	0,2	2,47	0,243	0,405		
	0,4	2,53	0,253	0,411		
	0,6	2,54	0,255	0,417		
10	0,2	3,09	0,346	0,542	1,6—0	1,5
	0,4	3,11	0,349	0,547		
	0,6	3,13	0,351	0,548		
	0,2	3,11	0,348	0,555		
	0,4	3,12	0,350	0,555		
	0,6	3,13	0,351	0,556		
11	0,2	2,91	0,316	0,525	0,63—0	1,5
	0,4	2,93	0,318	0,525		
	0,6	2,94	0,321	0,527		
	0,2	2,84	0,304	0,516		
	0,4	2,85	0,305	0,518		
	0,6	2,86	0,307	0,522		

Стекло: то же, что в сериях 5—11, измельчено ударами, острые края округлены трением, в остальном форма та же;  $\delta\epsilon_x = 0,5\%$ .

12	0,2	3,08	0,344	0,535	1,6—0,63	2
	0,4	3,08	0,344	0,536		
	0,6	3,09	0,345	0,545		
	0,2	2,98	0,327	0,531		
	0,4	2,98	0,327	0,533		
	0,6	2,98	0,327	0,533		

1	2	3	4	5	6	7
13	0,2	3,23	0,368	0,572	1,6—0	1,5
	0,4	3,25	0,371	0,576		
	0,6	3,25	0,371	0,578		
	0,2	3,29	0,378	0,584		
	0,4	3,32	0,383	0,588		
	0,6	3,34	0,387	0,589		

Мрамор:  $\varepsilon_1 = 8,30$ ,  $\gamma = 2,71$ ; измельчен ударами в ступе, форма частиц — бугристые многогранники;  $\delta\varepsilon_x = 0,5\%$ .

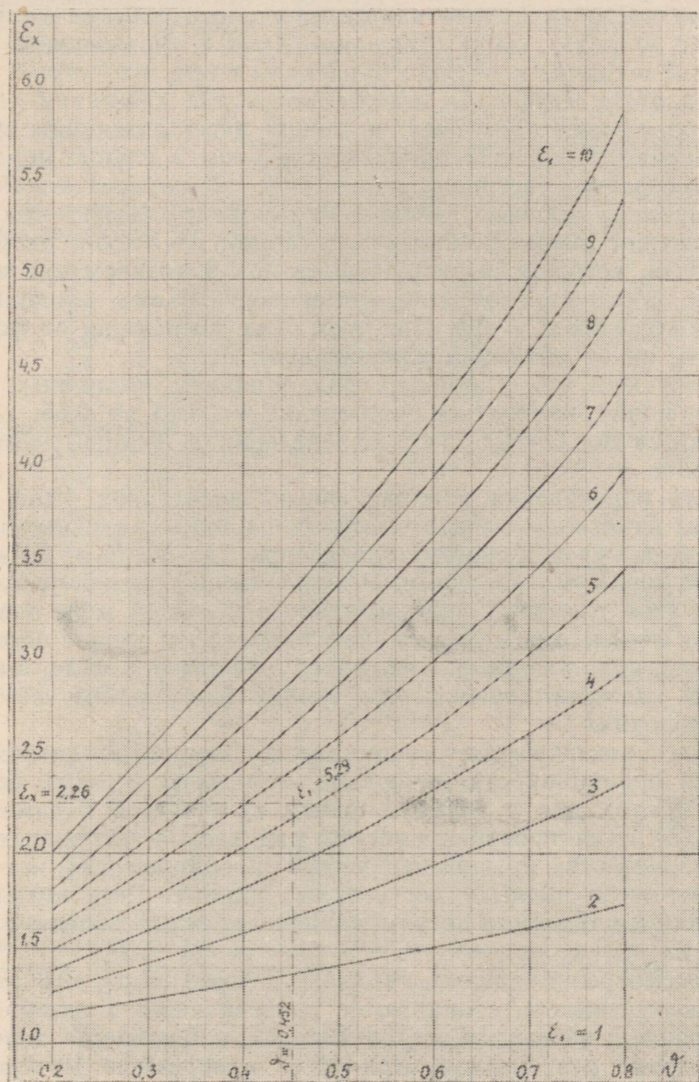
14	0,2	2,90	0,261	0,468	1,6—1	1,5
	0,4	2,90	0,261	0,471		
	0,6	2,96	0,268	0,473		
	0,2	2,88	0,257	0,464		
	0,4	2,93	0,264	0,468		
	0,6	2,94	0,266	0,470		
15	0,2	2,94	0,266	0,466	1—0,63	1,5
	0,4	2,95	0,267	0,469		
	0,6	2,96	0,268	0,471		
	0,2	2,95	0,267	0,471		
	0,4	2,96	0,269	0,474		
	0,6	2,98	0,271	0,476		
16	0,2	3,12	0,290	0,500	0,63—0,315	1,5
	0,4	3,12	0,291	0,503		
	0,6	3,13	0,292	0,505		
	0,2	3,09	0,287	0,499		
	0,4	3,10	0,288	0,501		
	0,6	3,12	0,291	0,502		
17	0,2	3,08	0,285	0,497	0,315—0,25	1,5
	0,4	3,09	0,286	0,499		
	0,6	3,10	0,288	0,502		
	0,2	3,12	0,290	0,494		
	0,4	3,13	0,292	0,497		
	0,6	3,14	0,293	0,498		
18	0,2	3,20	0,302	0,506	0,25—0,1	1,5
	0,4	3,21	0,303	0,509		
	0,6	3,22	0,304	0,510		
	0,2	3,16	0,296	0,497		
	0,4	3,16	0,296	0,499		
	0,6	3,18	0,298	0,502		
19	0,2	2,85	0,253	0,433	0 —0,063	2
	0,4	2,86	0,255	0,437		
	0,6	2,96	0,268	0,457		
	0,2	2,92	0,263	0,454		
	0,4	2,94	0,266	0,459		
	0,6	2,96	0,268	0,461		

1	2	3	4	5	6	7
20	0,2	2,94	0,266	0,456	ниже 0,063	1,5
	0,4	3,00	0,274	0,466		
	0,6	3,04	0,279	0,472		
	0,2	2,95	0,267	0,459		
	0,4	3,00	0,274	0,470		
	0,6	3,05	0,281	0,475		
21	0,2	3,60	0,356	0,570	1,6—0	1,5
	0,4	3,63	0,360	0,574		
	0,6	3,64	0,361	0,575		
	0,2	3,64	0,362	0,573		
	0,4	3,66	0,365	0,579		
	0,6	3,69	0,369	0,581		
22	0,2	3,36	0,324	0,531	0,25—0	1,5
	0,4	3,40	0,329	0,536		
	0,6	3,43	0,333	0,541		
	0,2	3,33	0,319	0,536		
	0,4	3,40	0,329	0,542		
	0,6	3,43	0,333	0,544		

Канифоль:  $\varepsilon_1 = 2,64$ ,  $\gamma = 1,11$ ; измельчена ударами в ступе, форма частиц — смесь частиц круглой и вытянутой формы;  $\delta\varepsilon_x = 1\%$ .

23	0,2	1,57	0,346	0,445	1,6—1,0	2
	0,4	1,58	0,355	0,453		
	0,6	1,60	0,365	0,462		
	0,2	1,59	0,360	0,462		
	0,4	1,59	0,360	0,469		
	0,6	1,62	0,380	0,485		
24	0,2	1,60	0,364	0,457	1—0,63	2
	0,4	1,61	0,372	0,466		
	0,6	1,62	0,380	0,487		
	0,2	1,62	0,380	0,471		
	0,4	1,63	0,384	0,476		
	0,6	1,63	0,384	0,482		
25	0,2	1,54	0,332	0,420	0,63—0,31	2
	0,4	1,56	0,340	0,430		
	0,6	1,57	0,345	0,439		
	0,2	1,54	0,328	0,423		
	0,4	1,56	0,340	0,434		
	0,6	1,57	0,345	0,442		
26	0,2	1,54	0,330	0,418	ниже 0,31	2
	0,4	1,56	0,340	0,434		
	0,6	1,57	0,348	0,440		
	0,2	1,55	0,336	0,438		
	0,4	1,56	0,344	0,444		
	0,6	1,58	0,344	0,449		

Палочки органического стекла, измельченные на токарном станке (серии 1 и 2), настолько длинные, что достигают от электрода к электроду и дают несколько большее значение  $X$ . Серии 5 и 6 для стекла и серии 14 и 15 для мрамора дали отношение 0,45. В эти серии входили частицы



Фиг. 5. Семейство кривых для определения  $\epsilon_1$  по  $\varphi$  и  $\epsilon_x$

размером 0,63—1,6 мм с острыми краями. По-видимому столь большие частицы не способствуют образованию в отдельности равномерного образца в нижней, клинообразной части между электродами. Эти частицы, взятые в отдельности, являются слишком большими для размеров данных электродов. Высказанное предположение подтверждается обстоятельством, что эти же частицы, будучи измерены в смеси с более мелкими (серии 10 и 21), дали отношение  $X = 0,5$ . Повышенное значение  $X$  в случае канифоли объясняется тем, что острые края частиц этого материала откалываются под действием давления, образующего образец, и между ними возникают места соединения с большей поверхностью, чем в случае неразрушенной формы частиц.

Учитывая данные таблицы 1 можно полагать, что при применении вышеуказанных электродов из частиц твердого вещества, которые не разрушаются под давлением при измерении, образуется образец, отношение объема продольных цепей которого  $X = 0,5$ . При этом  $X$  не зависит ни от формы частиц, ни от объемной концентрации  $\varphi$ .

Допуская, что  $X$  образца под влиянием различных факторов может изменяться в пределах от 0,45 до 0,55,  $\epsilon_1$  же находится по  $X = 0,5$ , то в определении  $\epsilon_1$  получится ошибка менее  $\pm 5\%$ .

Для определения влияния формы электродов были проведены измерения сыпучих материалов, представленных в таблице 1, также и в системе электродов, где  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  заменялись плоскими кольцами. Результаты измерений показали, что в этом случае  $X$  действительно в большой мере зависит как от формы, так и от величины частиц. Это вполне понятно, так как при подобных электродах отсутствует сила, равномерно уплотняющая частицы между электродами во всех направлениях.

Для практического осуществления измерения диэлектрической проницаемости вычислено, исходя из  $X = 0,5$ , семейство кривых для  $\epsilon_x = f(\varphi)$ , причем  $\epsilon_1$  является параметром (фиг. 5). Для проверки измерен ряд весьма различных сыпучих веществ, о диэлектрической проницаемости которых в литературе имеются достоверные данные. Результаты измерений и найденные по ним значения  $\epsilon_1$  представлены в таблице 2.

Рассмотрение данных таблицы 2 показывает, что значения измеренных  $\epsilon_1$  совпадают с приведенными в литературе. При чистых веществах, серии 1 до 14, наблюдается хорошее совпадение результатов. При этом измеряемые материалы имели от серии к серии весьма различную форму и размер частиц. В части нафталина и шеллака структура образцов

Сравнение результатов измерений некоторых сыпучих веществ с данными литературы  $x = 0,5$ ,  $\epsilon_1$  определено по фиг. 5

Серия измер.	Давление при измерении, $кг/см^2$	Диэлектрическая проницаемость образца, $\epsilon_x$	Объемная концентрация, $\vartheta$	Истинная диэлектр. проницаемость, $\epsilon_1$	Среднее, $\epsilon_1$	Размер частиц, $мм$
1	2	3	4	5	6	7

Натрий хлористый «Ч. Д. А.»:  $\gamma = 2,16$ ; форма частиц — измельченные, неправильной формы с острыми краями кристаллы;  $\epsilon_1$  значения по данным литературы [18, стр. 139] — 5,60—6,36; [19, стр. 1186] — 6,12.

1	0,2	2,273	0,405	6,02	5,97	0,17—0,85
	0,4	2,273	0,406	6,00		
	0,6	2,273	0,406	6,00		
	0,2	2,235	0,398	5,95		
	0,4	2,240	0,401	5,95		
	0,6	2,253	0,402	5,91		

Калий хлористый «Х. Ч.»:  $\gamma = 1,99$ ; форма частиц — кубика;  $\epsilon_1$  значения по данным литературы [9] — 4,79; [18, стр. 139] — 4,51—4,94; [19, стр. 1186] — 5,03.

2	0,2	2,260	0,452	5,29	5,23	длина края 0,06—0,1
	0,4	2,273	0,453	5,31		
	0,6	2,273	0,453	5,31		
	0,2	2,214	0,447	5,17		
	0,4	2,220	0,449	5,16		
	0,6	2,220	0,450	5,16		

Калий азотнокислый «Х. Ч.»:  $\gamma = 2,11$ ; форма частиц — эллипсоид, с отношением осей 1:2;  $\epsilon_1$  значения по данным литературы [Л. 18, стр. 136] — 5,0

3	0,2	2,66	0,588	5,12	5,13	Главная ось 0,45—0,75
	0,4	2,67	0,589	5,14		
	0,6	2,67	0,590	5,12		
	0,2	2,67	0,589	5,14		
	0,4	2,68	0,590	5,13		
	0,6	2,68	0,591	5,13		

Нафталин сублимированный «Ч. Д. А.»:  $\gamma = 1,145$ ; форма частиц — пластинки неправильной формы, просеянные по величине зерна на фракции;  $\epsilon_1$  значения по данным литературы [Л. 18, стр. 127] — 2,50; [Л. 21, стр. 235] — 2,7.

4	0,2	1,52	0,437	2,57	2,58	1,6—1,0
	0,4	1,53	0,456	2,53		
	0,6	1,57	0,469	2,58		
	0,2	1,53	0,46	2,61		
	0,4	1,54	0,450	2,59		
	0,6	1,58	0,464	2,61		

1	2	3	4	5	6	7
5	0,2	1,57	0,441	2,74	2,66	1,0—0,63
	0,4	1,56	0,455	2,58		
	0,6	1,57	0,467	2,61		
	0,2	1,57	0,440	2,73		
	0,4	1,58	0,457	2,63		
	0,6	1,58	0,464	2,67		
6	0,2	1,59	0,454	2,73	2,66	0,63—0,4
	0,4	1,58	0,468	2,65		
	0,6	1,62	0,476	2,70		
	0,2	1,59	0,458	2,67		
	0,4	1,58	0,468	2,58		
	0,6	1,59	0,477	2,62		
7	0,2	1,59	0,486	2,62	2,54	0,4—0,25
	0,4	1,58	0,498	2,54		
	0,6	1,58	0,502	2,49		
	0,2	1,58	0,489	2,53		
	0,4	1,58	0,497	2,52		
	0,6	1,62	0,515	2,58		
8	0,2	1,60	0,466	2,69	2,66	Сквозь сита 0,25
	0,4	1,60	0,474	2,68		
	0,6	1,61	0,485	2,66		
	0,2	1,61	0,477	2,66		
	0,4	1,61	0,486	2,64		
	0,6	1,62	0,498	2,62		

Шеллак:  $\gamma = 1,04$ ; форма частиц — пластинки неправильной формы, просеянные по величине зерна на фракции;  $\epsilon_1$  значения по данным литературы [17, стр. 296] — 3,26—3,47; [18, стр. 171] — 3,1; [21, стр. 236] — 3,1; [22, стр. 94] — 3,5; [23, стр. 150] — 3,5.

9	0,2	1,63	0,436	3,00	3,03	1,6—1,0
	0,4	1,64	0,456	2,93		
	0,6	1,68	0,473	2,97		
	0,2	1,64	0,439	3,08		
	0,4	1,68	0,457	3,07		
	0,6	1,72	0,475	3,16		
10	0,2	1,70	0,448	3,23	3,25	1,0—0,63
	0,4	1,72	0,458	3,21		
	0,6	1,74	0,468	3,28		
	0,2	1,73	0,456	3,31		
	0,4	1,73	0,466	3,25		
	0,6	1,74	0,476	3,22		
11	0,2	1,66	0,446	3,12	3,19	0,63—0,4
	0,4	1,70	0,456	3,15		
	0,6	1,74	0,465	3,26		
	0,2	1,70	0,442	3,22		
	0,4	1,72	0,454	3,22		
	0,6	1,72	0,464	3,15		

1	2	3	4	5	6	7
12	0,2	1,78	0,477	3,35	3,34	сквозь сита 0,4
	0,4	1,80	0,485	3,38		
	0,6	1,81	0,491	3,36		
	0,2	1,75	0,477	3,24		
	0,4	1,80	0,486	3,36		
	0,6	1,81	0,493	3,36		
13	0,2	1,81	0,518	3,29	3,31	измельчены в ступе, просеян- ные сквозь сита 0,25
	0,4	1,83	0,524	3,30		
	0,6	1,85	0,529	3,31		
	0,2	1,83	0,517	3,29		
	0,4	1,85	0,526	3,30		
	0,6	1,87	0,531	3,35		
14	0,2	1,79	0,513	3,20	3,21	смесь всех фракций 1,6—0
	0,4	1,81	0,526	3,20		
	0,6	1,82	0,532	3,21		
	0,2	1,79	0,516	3,20		
	0,4	1,80	0,527	3,20		
	0,6	1,84	0,535	3,25		

Кварцевый песок (песок нормальный для испытаний цементов),  $\text{SiO}_2$  98,08%;  $\gamma = 2,65$ ; форма частиц — шарики с трещинами на поверхности;  $\epsilon_1$  значения для кварца по данным литературы [21, стр. 235] || оси 5,0;  $\perp$  оси 4,7.

15	0,2	2,62	0,583	5,05	5,07	0,85—0,4
	0,4	2,63	0,590	5,01		
	0,6	2,66	0,591	5,09		
	0,2	2,63	0,579	5,09		
	0,4	2,64	0,583	5,12		
	0,6	2,65	0,591	5,06		
16	0,2	2,59	0,579	5,01	4,95	просеяно 0,85—0,63
	0,4	2,59	0,579	5,01		
	0,6	2,60	0,581	5,01		
	0,2	2,56	0,579	4,92		
	0,4	2,56	0,581	4,89		
	0,6	2,56	0,582	4,88		
17	0,2	2,60	0,568	5,15	5,12	просеяно 0,63—0,4
	0,4	2,60	0,568	5,15		
	0,6	2,60	0,571	5,10		
	0,2	2,59	0,565	5,12		
	0,4	2,59	0,567	5,11		
	0,6	2,59	0,567	5,11		

Кварцевый песок (то же, что серии 15—17), молотый в шаровой мельнице и просеянный, форма частиц — шаровой сегмент.

18	0,2	2,44	0,523	5,11	5,07	0,4—0,25
	0,4	2,44	0,524	5,10		
	0,6	2,44	0,526	5,07		
	0,2	2,40	0,513	5,08		
	0,4	2,41	0,515	5,02		
	0,6	2,42	0,517	5,03		

1	2	3	4	5	6	7
19	0,2	2,21	0,449	5,12	5,14	сквозь ситы 0,25
	0,4	2,24	0,458	5,16		
	0,6	2,26	0,464	5,13		
	0,2	2,25	0,456	5,19		
	0,4	2,28	0,467	5,15		
	0,6	2,29	0,470	5,07		

Хлористый свинец «Ч»:  $\gamma = 5,85$ ; форма частиц — прямые призматические палочки;  $\varepsilon_1$  значения по данным литературы [Л. 18, стр. 139] — 33,5 — 37,0.

20	0,2	5,77	0,366	25,7	26,0	длина 0,3—1,7 диаметр 0,05—0,2
	0,4	5,79	0,367	25,7		
	0,6	5,86	0,373	25,7		
	0,2	6,09	0,381	26,2		
	0,4	6,10	0,383	26,1		
	0,6	6,14	0,385	26,2		

Хлористый свинец, то же, что серия 20, измельчен в ступе до размеров зерна  $< 0,1$  мм; форма частиц — цилиндры, диаметр которых равен длине.

21	0,2	6,12	0,428	23,4	23,8	ниже 0,1
	0,4	6,37	0,436	24,1		
	0,6	6,70	0,444	25,0		
	0,2	6,17	0,443	22,9		
	0,4	6,33	0,453	23,2		
	0,6	6,56	0,454	24,0		

Олово окись «Ч»:  $\gamma = 7,0$ ; форма частиц — многогранники неправильной формы с острыми краями;  $\varepsilon_1$  значения по данным литературы (рассчитанные) [Л. 18, стр. 136] — 24.

22	0,2	7,87	0,254	53,9	56,2	0,001 — —0,002
	0,4	8,55	0,264	57,0		
	0,6	9,20	0,273	59,6		
	0,2	8,11	0,255	55,6		
	0,4	8,95	0,267	59,4		
	0,6	9,57	0,276	61,7		

Медь закись «Ч»  $\gamma = 6,0$ ; форма частиц — многогранники неправильной формы с круглыми краями.

23	0,2	10,57	0,514	36,1	35,8	0,004 — —0,02
	0,4	10,63	0,515	36,4		
	0,6	10,68	0,515	36,5		
	0,2	10,20	0,512	34,9		
	0,4	10,25	0,512	35,1		
	0,6	10,38	0,512	35,6		

значительно изменялась по мере изменения размера частиц. Если в случае крупных частиц (серии 4—6 и 11—14) структура образцов имеет подчеркнуто слоистый характер (плоские листочки), то при мелких, раздробленных в ступе фракциях (серии 8 и 13) слоистое строение уже не доминирует.

Изменение формы частиц отмечалось также в случае кварцевого песка, где шарики превращаются в сегменты, и хлористого свинца, длинные палочки которого разбиваются на короткие обрубки. Несмотря на это, измеренное значение  $\epsilon_1$  не изменяется сколь-либо значительно. Сказанное еще раз подтверждает, что структура образца, образовавшегося в данной системе электродов, не зависит от формы частиц. Серия 9 показывает также, что размер частиц 1—1,6 мм в общей сложности слишком велик для данных размеров электродов.

Результаты измерения веществ с большой диэлектрической проницаемостью ( $\epsilon_1 > 20$ ), серии 20—22, коренным образом расходятся с литературными данными [18]. Так как относительно этих веществ имеется еще мало материала экспериментального характера, то вопрос о действительном  $X$  остается пока открытым.

При определении влажности пищевых продуктов и во многих других случаях приходится измерять диэлектрическую проницаемость сыпучих материалов клеточного строения. Для выяснения объемного отношения  $X$  в этом случае были проведены измерения древесины и ее опилок, при различных влажностях, следующим образом. Из хорошо стабилизированной, однородной по структуре сухой древесины (ель и рябина) изготовили кубик, из трех поперечных граней которого выточили диски диаметром 80 мм и толщиной 5 мм. Остатки древесины распилили круглой пилой в опилки, одну часть — направление пилы поперек древесного волокна, другую часть — вдоль волокна. Для дисков древесины, при различных степенях влажности (от абсолютно сухой до насыщения волокон), определили объемный вес  $\gamma$  и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$  классическим методом и составили график их зависимости от влажности. Затем измеряли диэлектрическую проницаемость древесных опилок вышеуказанными электродами и по данным измерений рассчитывали отношение объема продольных цепей  $X$ . Измеряли при давлении 0,6 кг/см<sup>2</sup>, через 2 минуты после приложения давления, так как «пластические» сыпучие материалы — древесные опилки, фрезерный торф и др., требуют время для образования воспроизводимого образца [11, 12]. Результаты измерений представлены в таблице 3.

По данным таблицы 3 построен график для отношения объема продольных цепей  $X$  в зависимости от диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$  твердого вещества (фиг. 6). Отсюда следует, что в случае вещества с клеточным строением (сухие древесные опилки) значение  $X$  находится в пределах 0,25—0,3). По мере увеличения влажности структура вещества ста-

## Измерение диэлектрической проницаемости измельченной древесины

№№	Истинная диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_1$	Диэлектр. проницаемость образца, $\epsilon_x$	Объемная концентрация, $\varphi$	Отношение объемов продольных цепей, X
1	2	3	4	5

Распиленная поперек волокна ель, форма опилок — палочки с диаметром 0,03—0,1 мм, длиной 1,1—1,4 мм и состоящие из них маты.

1	1,85	1,35	0,591	0,282
2	2,05	1,51	0,610	0,275
3	4,13	2,12	0,593	0,291
4	6,22	2,62	0,605	0,277
5	12,2	3,79	0,580	0,301
6	20,3	5,27	0,530	0,358
7	26,2	8,17	0,545	0,482

Распиленная по волокну ель, форма опилок — пластинки неправильной формы с размерами от 0,1×0,2 до 0,5×1,1 мм, толщиной 0,005 мм; большие пластинки имеют отверстия.

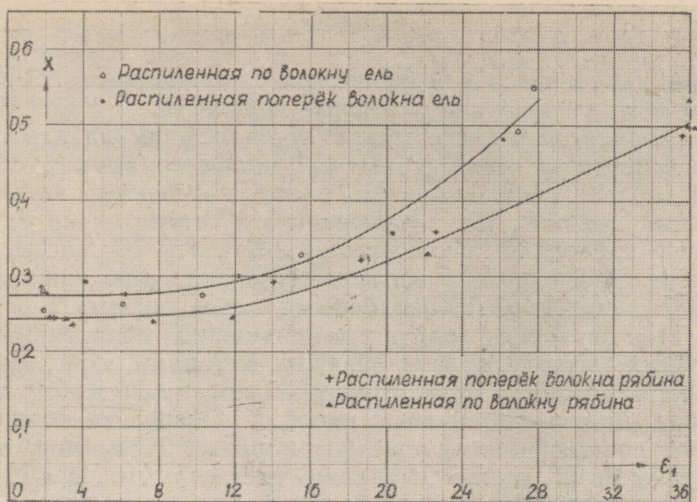
8	1,87	1,36	0,599	0,279
9	1,95	1,45	0,600	0,255
10	6,07	2,61	0,618	0,262
11	10,3	3,60	0,652	0,273
12	15,5	5,04	0,640	0,328
13	26,9	10,65	0,681	0,493
14	27,8	12,30	0,701	0,551

Распиленная поперек волокна рябина, форма опилок — палочки с диаметром 0,06—0,12 мм, длиной 1,1—1,4 мм, и состоящие из них маты.

15	2,40	1,36	0,415	0,243
16	3,51	1,46	0,348	0,235
17	14,04	2,96	0,402	0,291
18	18,7	3,99	0,449	0,321
19	22,6	4,68	0,421	0,363
20	35,6	8,63	0,433	0,486
21	36,1	8,74	0,423	0,498

Распиленная по волокну рябина, форма опилок — стружки с шириной 0,3—0,6 мм, длиной 1—6 мм и толщиной 0,05—0,08 мм.

22	2,30	1,36	0,400	0,240
23	3,02	1,40	0,357	0,243
24	7,71	2,01	0,422	0,240
25	11,9	2,88	0,480	0,245
26	22,2	5,56	0,528	0,330
27	36,1	10,95	0,506	0,535
28	36,3	10,43	0,506	0,498



Фиг. 6. Отношение объема продольных цепей  $X$  опилок в зависимости от диэлектрической проницаемости твердого тела  $\epsilon_1$

новится как бы более однородной (в диэлектрической проницаемости начинает доминировать вода) и при насыщенности волокон  $X$  имеет значение 0,5.

Форма частиц древесины, распиленной вдоль и поперек волокон, весьма различна как для ели, так и для рябины. Несмотря на это существенных расхождений в отношении объема не отмечалось. Аналогично с предыдущими  $X$  это еще раз подтверждает, что описанная выше система электродов дает результаты измерений независимо от формы частиц.

Для определения диэлектрической проницаемости сыпучих материалов клеточной структуры необходимо предварительно определить  $X$  для структуры данного вещества. Далее на основе  $X$  вычерчивается график, аналогичный фиг. 5, и обычным путем производится пересчет.

Суммируя вышеизложенное можно утверждать, что описанная выше система электродов и метод пересчета данных измерения позволяют с достаточной точностью определить достоверную диэлектрическую проницаемость сыпучих материалов, независимо от формы и размера частиц. Эта система электродов применима также для автоматического измерения непрерывно перемещаемого материала. В таком случае целесообразно применять метод «непрерывного отбора образцов и циклического измерения» [11, 24].

## Выводы

При измерении диэлектрической проницаемости сыпучих материалов имеются две основные трудности.

С одной стороны, отсутствует единая формула для пересчета измеренной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_x$  образца на диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$  твердого вещества. С другой стороны, нет договоренности относительно единой системы измерений, позволяющей получить сравнимые результаты. Рассмотрению последнего вопроса и посвящено настоящее сообщение, заключающееся в следующем.

1) Для сравнения результатов измерений, полученных для различных материалов или разными методами, используется т. н. нормированная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_c$  и отношение объема продольных цепей  $X$ . Последнее позволяет оценить достоверность структуры образца. Например, представленные в [9] данные оказались достоверными, а в [2 и 8] недостоверными для сжатого образца.

2) Сформулированы условия для целесообразного образца и представлена удовлетворяющая этим условиям конструкция электродов и методика измерений.

3) Представлены многочисленные данные экспериментальных измерений (322 отдельных измерения). Анализ последних подтверждает применимость предложенной в пункте 2 системы измерений для определения диэлектрической проницаемости сыпучих материалов.

Установлено, что образующийся в предлагаемых электродах образец имеет устойчивое отношение объема  $X$ , не зависящее от формы частиц, объемной концентрации  $\vartheta$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$  твердого вещества. Значение  $X$  для материалов с однородной структурой равняется 0,5; в случае же материалов клеточного строения (древесные опилки)  $X$  изменяется от 0,25 до 0,5, в зависимости от влажности вещества.

Для пересчета результатов измерений представлен график (фиг. 5):  $\epsilon_1$  в зависимости от  $\epsilon_x$  и  $\vartheta$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Оделевский. Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем, I. Журнал техн. физики. Т. XXI, вып. 6, стр. 667. (1951).
2. В. И. Оделевский. Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем. II. Журнал техн. физики, Т. XXI, вып. 6, стр. 678. (1951).
3. K. Lichteneker. Die Dielektrizitätskonstante natürlicher und künstlicher Mischkörper. Physik. Zeitschr. XXVII, S. 115, (1926).
4. K. Lichteneker. Mischkörpertheorie als Wahrscheinlichkeitsproblem. Physik. Zeitschr. XXX, S. 805, (1929).
5. K. Lichteneker und K. Rother. Die Herleitung des logarithmischen Mischungsgesetzes aus allgemeinen Prinzipien der stationäre Strömung. Physik. Zeitschr. XXXII, S. 255 (1931).
6. А. В. Нетушил, Б. Я. Жуховицкий, В. Н. Кудин и Е. П. Парини. Высоочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников. Госэнергоиздат, (1959).
7. G. P. de Loor. Le choix d'une formale pour la détermination de la constante diélectrique des mélanges hétérogènes. Archives des Sciences, Volume 9, Fascicule spécial 37 (1956).
8. R. S. Smith. Effective Dielectric Constant of Heterogeneous Media. Journal of applied Physics, Vol. 27. Nr. 7, p. 824, (1956).
9. E. Stoecker. Dielektrizitätskonstanten und Formzahlen von Mischkörpern aus Salzkörnern und Luft. Zs. J. Phys. 2, S. 236, (1920).
10. П. М. Плакк. Об измерении диэлектрической проницаемости веществ с большой проводимостью. Труды Таллинского политехнического института, Серия А, № 207, стр. 63 (1963).
11. П. М. Плакк, Диссертация, Таллинский Политехнический институт, (1952).
12. П. М. Плакк. Измерение влажности фрезерного торфа электрическим путем. Труды Таллинского политехнического института, Серия А, № 193, стр. 25 (1962).
13. П. М. Плакк. Авторское свидетельство № 98512.
14. Руководство по лабораторному определению физико-механических характеристик грунтов при устройстве оснований сооружений. Госстройиздат, Москва — 1956.
15. П. М. Плакк. Новый метод измерения емкости конденсаторов с большими потерями. Труды Таллинского политехнического института, Серия А, № 137, (1958).
16. П. М. Плакк. Двухполюсник-измеритель емкости. Труды Таллинского политехнического института, Серия А, № 193, (1962).
17. А. Р. Хиппель. Диэлектрики и их применение. Госэнергоиздат, 1959.
18. Г. И. Сканави. Физика диэлектриков. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1949.
19. Краткая химическая энциклопедия I, Гос. научное изд. «Советская энциклопедия», 1961.
20. Краткий справочник физико-химических величин. Госхимиздат, 1959.
21. В. И. Перельман. Краткий справочник химика. Госхимиздат 1954.
22. Справочник по электротехническим материалам, том I, часть первая, под общей ред. Ю. В. Корицкого и Б. М. Тареева. Госэнергоиздат, 1958.
23. Н. П. Богородицкий, В. В. Пасынков, Б. М. Тареев. Электротехнические материалы. Госэнергоиздат, 1955.
24. П. М. Плакк. Авторское свидетельство № 95376.

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ  
И АВТОМАТИКЕ  
СБОРНИК СТАТЕЙ III

Таллинский политехнический институт

Редактор Х. Силламаа

Технический редактор Я. Мыттус

Сдано в набор 6 II 1965. Подписано к печати 2 X 1965.  
Бумага  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ . Печатных листов 11,75. Учетно-изда-  
тельских листов 9,25. Тираж 500 экз. МВ-10517.  
Заказ № 1374.

Типография им. Х. Хейдеманна  
Тарту, ул. Юликооли 17/19. II

Цена 65 коп.

Цена 65 коп.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00291802 9