3.

Leichtere Auflösungen einiger schwehren trigonometrischen Aufgaben,

zum Gebrauch der Liebhaber mathematischer Wissenschaften

herausgegeben

von

Friederich Johann Buck,

der Weltweißheit und Rechtsgelehrsamkeit Docktor, der Logick und Metaphysick ordentlicher Professor, der Stadtbibliotheck zweyter Inspecktor, der Nürnbergischen Cosmographischen, und der Franckfurtschen Teutschen Gesellschafft Mittglied.

O. U. E v. Sac

Gorstat 13

Königsberg, 1761.

gedruckt in der Hof- und Akademisch-Hartungschen Buchdruckerey.

§. 1.

Ich habe schon seit langer Zeit bemercket, daß diejenigen, welche sich bemühet, die Mathematick zu erlernen, über das Schwerseyn der geradlinichten Trigonometrie empfindliche Klagen geführet haben. Ich bin dahero bemühet gewesen, nicht allein in meinen Vorlesungen, von einigen trigonometrischen Aufgaben leichtere und faßlichere Auflösungen zu geben, sondern auch verschiedene derselben in einer kurtzen academischen Disputation unter dem Titul: Resolutiones problematum quorundam trigonometricorum, im Jahr 1751 öffentlich durch den Druck bekandt zu machen. Bis hieher habe ich mich auf diese Schrift beruffen, und sie den Anfängern in der Mathematick zur Nachlese empfohlen. Bis hieher sind auch diejenigen, welche in der Trigonometrie fortzukommen, sich Mühe gegeben, befließen gewesen, diese geringschätzige Blätter durchzulesen, und zu ihrem Unterricht anzuwenden. Allein da theils die Länge der verfloßenen Zeit, theils das günstige Urtheil, welches verschiedene auswärtige gelehrte Zeitungen, und besonders die Hamburgischen freye Urtheile hievon zu fällen geruhet, vielleicht die gelegentlichen Ursachen gewesen, daß diese kleine academische Schrift wieder Vermuthen dergestalt vergriffen worden, daß mir selbst kein Blatt davon übriggeblieben; so bin ich seit einiger Zeit nicht mehr im Stande gewesen, auf diese kurze Ausarbeitung die Liebhaber der Trigonometrie zu weisen, und diese haben auch keine Gelegenheit auszukundschaften können, sie etwa aufzutreiben, und bey der Wiederholung der Trigonometrie nachzulesen. Bey diesen Umständen, wie? habe ich mich wohl anders entschließen können, als auf ein leichtes Mittel zu sinnen, um dieser Unvermögenheit vollkommen abzuhelfen? In der Rechtmäßigkeit dieses Entschlußes bin

ich noch mehr bestärcket worden, da ich wahrgenommen, daß verschiedene Liebhaber der Trigonometrie mich um eine abermalige Ausfertigung und Uebersetzung der angeführten Disputation ersuchet, und ein unverdientes Verlangen getragen, dieselbe wiederum aufs neue zu ihrem Gebrauch zu erhalten. Dieses alles hat mich dahero bewogen, daß ich, obgleich bey meiner sehr eingeschränckten Zeit, die kleine Mühe mir genommen, allhier nicht allein die vornehmsten Aufgaben, aus der angeführten Schrift zu wiederholen, sondern auch verschiedene Auflösungen, welche damahlen aus Mangel des Raums mit Stillschweigen übergangen, hinzuzusetzen, kurz; das schwereste, was in der geradlinichten Trigonometrie vorkommt, auf eine leichtere und begreiflichere Art in gegenwärtigen Blättern kürzlich auszuführen. Wie aber? haben alle Auflösungen in der Trigonometrie eine gleiche Erleuterung nöthig, oder erforderen nur einige Aufgaben dieser Wissenschaft eine solche Bemühung vorzüglich? Wenn ich anfänglich bedencke, daß die gantze Trigonometrie, welche aus drey gegebenen Theilen des Dreyecks, die drey übrigen durch logarithmische Rechnungen
Fig. 1. zu erfinden lehret, aus fünf Hauptaufgaben bestehet, nemlich 1) aus zwey gegebenen Winckeln A und B und der Seite AC oder CB, den dritten Winckel C und die beyden übrigen Seiten, 2) aus zwey gegebenen Winckeln A und B und der Seite AB, den dritten Winckel C und die übrigen beyden Seiten AC und CB, 3) aus zweyen gegebenen Seiten AC und AB und einem nicht eingeschloßenen Winckel B oder C, die dritte Seite CB und die zwey übrigen Winckel, 4) aus zweyen gegebenen Seiten AC und AB und dem eingeschloßenen Winckel, die dritte Seite BC und die beyde übrigen Winckel C und B, und 5) aus den drey gegebenen Seiten AC, BC und AB, alle drey Winckel A, B, und C im Triangel zu erfinden (†); wenn ich weiter erwege, daß die drey erste Aufgaben nicht leichter auf eine trigonometrische Weise aufgelöset werden können, indem in diesen Fällen nach der Vorschrift der ersten Grundregel in der Trigonometrie von den Seiten auf die Sinus der entgegenstehenden Winckel, und wiederum von den Sinibus der Winckel auf die entgegen stehende Seiten in den Triangel geschlossen, und hiernach die logarithmische Berechnung eingerichtet wird, so kan ich
hieraus

(†) Hiegegen könte eingewendet werden, daß noch ein sechster Fall möglich ist, nemlich, aus drey gegebenen Winckeln die drey Seiten im Triangel zu erfinden; allein wenn man in Betrachtung ziehet, daß in ähnlichen Triangeln die drey Winckel jederzeit gleich, und die gleichnahmigen Seiten beständig ungleich sind, folglich unter allen diesen möglichen Seiten ungewiß ist, welche vor die würcklichen bey einem gegebenen Triangel angenommen werden können; so sieht ein jeder leichtlich ein, daß dieser sechste Fall nur den Schein einer Möglichkeit hat, und auf keine Weise zuverläßig aufzulösen sey. Es kan zwar in einem Triangel die kürzeste Seite $= 1 = 10 = 100$ oder noch in kleineren Theilen angenommen, hierauf vermittelst der gegebenen Winckel die beyden übrigen Seiten be-
stimmet,

hieraus nichts anders schlüßen, als daß die beyde letzte Aufgaben, ohnedem, da sie auf eine von der gedachten Grundschlußart ungewöhnlich abweichenden Weise gemeiniglich aufgelöset werden, zu einer ferneren Erleichterung vornehmlich übrigbleiben. Ich werde also auf diese angeführte Aufgaben meine Aufmercksahmkeit besonders wenden, und in gegenwärtigen Blättern mir angelegen seyn lassen, zwey auf einander folgende Abschnitte mit einigen leichteren, und der in der Trigonometrie gewöhnlichen Schlüßung näherkommenden Auflösungen zu erfüllen.

Erster Abschnitt

darinnen gelehret wird, wie in einem Triangel aus zwey gegebenen Seiten und einem Winckel, der von ihnen eingeschloßen ist, die dritte Seite und die beyden übrigen Winckeln erfunden werden können.

§. 2.

Wenn in diesem Abschnitte gezeiget werden soll, wie in einem Triangel aus zweyen gegebenen Seiten und einem von ihnen eingeschloßenen Winckel, die übrigen Winckel und Seite erfunden werden können; so ist es nothwendig, daß gewiesen wird, wie in den mehresten Fällen zuerst die beyden Winckel, und darauf die dritte Seite in einem vorgegebenen Triangel zu entdecken sind. Da nun die Winckel rechte, spitzige, und stumpfe, ferner die Seiten theils gleich, theils ungleich sind, so erfordert die Nothwendigkeit, daß bey den Auflösungen dieser Aufgaben gelehret wird, wie in einem rechtwincklichtem, spitzwincklichtem, und stumpfwincklichtem Triangel, dessen Seiten gleich oder ungleich sind, die erforderlichen Winckel und Seiten erfunden werden können.

§. 3.

Sind erstlich in einem rechtwincklichten Triangel CAB der Winckel A und Fig. 2.
die Seiten CA und AB gegeben, so lassen sich die Seite CB und die beyde Win-
ckel

stimmet, und durch die besagte Theilchen ausgedruckt werden; allein auf diese Weise werden nicht die Seiten selbsten sondern nur die Proportion derselben gegen einander ausfindig gemacht. Es kan auch in einem Triangel die Höhe als bekandt angesetzt, und hiedurch eine Seite nach der andern in demselben bestimmet werden; allein alsdenn werden entweder aus vier gegebenen Stücken eines Triangels, nemlich aus drey Winckeln, und einer Linie, nicht aber aus drey Theilen desselben, oder aus zwey Winckeln und einer Seite, folglich nicht nach einer besondern sechsten Art, sondern nach der ersten oder zweyten Aufgabe die übrigen Seiten im Triangel erfunden. Es ist also dieser sechste Fall in der Trigonometrie aufzulösen unmöglich.

ckel B und C auf folgende Weise erfinden. 1) Werden die beyde gegebenen Seiten AC und CB qvadriret, das ist, eine jede mit sich selbsten multipliciret. 2) Werden diese beyde Qvadrate zusammenaddiret. 3) Wenn aus dieser Summe die Quadratwurzel gezogen wird, so ist diese herauskommende Zahl die gesuchte erste Seite CB. 4) Ist diese Seite solchergestalt herausgebracht worden, so muß nach der gewöhnlichen Grundschlußart, diese Argumentation:

wie sich die Seite BC
zu dem Sinus totus verhält,
so verhält sich die Seite AC oder AB
zu dem Sinu des entgegenstehenden Winckels B oder C.

mit den Logarithmis berechnet werden. 5) Wird auf diese Weise einer von den besagten Winckeln gefunden, so bleibt der andre von denselben übrig, wenn der gefundene Winckel von 90° abgezogen wird.

§. 4.

Da der Grund sowohl dieser als der folgenden Operationen einem jeden, der ein Anfänger in der Geometrie und Trigonometrie ist, sogleich in die Augen fallen muß; so werde ich, um alle Weitläuftigkeit zu vermeiden, denselben weder in diesen noch in den folgenden Absätzen anführen, sondern mich bemühen, alle diese Regeln mit deutlichen und kurzen Beyspielen zu erleutern. Es sey demnach in unserm rechtwincklichten Triangel CAB die Seite CA $= 3'0''0''$, AB $= 4'0''0'''$, und wie bekannt der rechte Winckel A $= 90°$. Da das Qvadrat von CA $= 9'00''00'''$, das Qvadrat von AB $= 16'00''00'''$, und die Summe dieser Qvadrate $= 25'00''00'''$ ist, so ist die herausgezogene Qvadratwurzel die gesuchte Seite BC $= 5'0''0'''$. Wenn nun weiter (wie oben gewiesen) geschloßen, und dieses mit den Logarithmis berechnet wird;

Log. BC = 26989700
Log. Sin. Tot = 100000000
Log. AB = 26020600
126020600
Log. Sin. C = 99030900

so zeiget sich, daß, da zu diesem der Logarithmus von 53° 7′ in den Tafeln am nächsten kommt, der Winckel C $= 53° 7'$, folglich wenn dieser von 90° = 89° 60′ abgezogen wird, der Winckel B $= 36° 53'$ ist.

§. 5.

Dieses ist die Methode, welche in gedachtem Fall bey denen rechtwincklichten Triangeln, deren Seiten ungleich sind, angebracht werden kan. Denn gleichseitige rechtwincklichte Triangel giebt es keine, und in rechtwincklichten gleichschencklichten Triangel sind die beyden Winckel B und C beständig $= 45°$ (wie die Geometrie lehret.) Daher geht diese Lehrart allein auf die rechtwincklichte ungleichseitige Dreyecke, und können nach derselben, wie gesaget, die Seite und Winckel jederzeit erfunden werden. Bey der allhier vorgeschriebenen Bestimmung der Seite BC geschiehet es wohl offtermahlen, daß, da aus einem jeden Qvadrat die Wurzel nicht vollkommen ausgezogen werden kan, diese Seite BC durch die Rechnung nicht jederzeit sich genau herausbringen läßet; allein wenn die beyde gegebene Seiten CA und AB in Schuhen, Zollen, und Linien, ja noch kleineren Maaßtheilchen angenommen werden, so ist auch diese Qvadratwurzel, besonders, wenn sie durch die Approximation näher bestimmet wird, zureichend, die Grösse der gedachten Seite BC, ohne einen mercklichen Fehler in der Auflösung dieser Aufgabe zu begehen, zu erkennen zu geben.

§. 6.

Soll zweytens in einem spitzwincklichten Triangel ACB aus dem gegebenen Winckel A und den Seiten AC und AB, welche ihn einschliessen, die beyden übrigen Winckel C und B nebst der Seite BC gefunden werden, so kan beydes auf folgende Weise geschehen. 1) Wird in dem Triangel ACB aus der Spitze C eine Perpendicularlinie CD auf die Grundlinie AB gefället, und hiedurch der grosse Triangel ACB in zwey kleinere ACD und CDB getheilet. 2) Wird zum Anfang der Triangel ACB vorgenommen, und nachdem folgendergestalt geschlossen: Fig. 3.

wie sich der Sinus totus
zu der gegenüberstehenden Seite AC verhält,
so verhält sich der Sinus des Winckels A oder CAD
zu der entgegenstehenden Seite CD.

und diese Schlüssung logarithmisch berechnet worden, in demselben die Grösse der Perpendicularlinie CD gefunden. 3) Wird der gegebene Winckel A von 90° abgezogen, und hiedurch der Winckel m oder ACD bestimmet. 4) In demselben Triangel ACD wird darauf fortgefahren, und durch folgende mit den Logarithmis berechnete Schlüssung:

wie sich der Sinus totus
zu der gegenüberstehenden Seite AC verhält,
so verhält sich der Sinus des Winckels m oder ACD
zu der gegenüberstehenden Seite AD.

die gesuchte Linie AD gefunden. 5) Endlich wird diese von der gegebenen Seite AB abgezogen, und solchergestalt die Seite DB bestimmet. 6) Wenn nun in gedachtem Triangel ACD die Seite AD, und durch diese in dem Triangel CDB die Seite DB gefunden worden, so wird jenes verlassen und dieses zur weitern Untersuchung ausgesetzet; es wird nehmlich der Winckel n oder DCB nach

nach derjenigen Methode, welche wir vorhin (§. 3.4.) beschrieben, und allhier nicht nochmahls wiederhohlen wollen, herausgebracht. 7) Ist solchergestalt der Winckel n gefunden, so wird er mit dem Winckel m zusammenaddiret, und hiedurch der völlige Winckel ACB entdecket; welcher wenn er 8) mit dem gegebenen Winckel A zusammenaddiret, und von 180° subtrahiret wird, zuletzt den Winckel B zurücklässet. Also werden nach dieser Methode nicht allein die gesuchten Winckel C und B gefunden, sondern auch die unbekannte Seite BC im Triangel ACB zugleich mitentdecket.

§. 7.

Um diese Auflösung zu erläutern, so wollen wir annehmen, daß in dem spitzwincklichten Triangel ACB der Winckel CAD = 35°30′, die Seiten AC = 57′0″0‴, und AB = 84″0″0‴ sind. Da in diesem Triangel vornemlich die Perpendicularlinie CD zu wissen nöthig ist, so muß diese zuerst auf folgende Weise trigonometrisch bestimmet werden.

Log. Sin. Tot.	=	100000000
Log. AC	=	27558749 +
Log. Sin. CAD	=	97639540
		135198289
Log. CD	=	35198289

27558749+

Es ist demnach, wie der nächstkleinere Logarithmus in den Tafeln zeiget, diese gesuchte Seite CD = 33′1″0‴. Wenn weiter der gegebene Winckel CAD = 35°30′ von 90° = 85°60′ abgezogen, und hiedurch der Winckel m = 54°30′ bestimmet worden, so muß darauf in demselben Triangel ACD, die Seite AD auf folgende Art erfunden werden.

Log. Sin. Tot.	=	100000000
Log. AC	=	27558749
Log. Sin. m	=	99106860
		136665609
Log. AD	=	36665609

Es ist also die Seite AD, wie die Logarithmische Tafeln zeigen, = 46′4″0‴. Wenn diese dahero von der gegebenen Seite AB = 84′0″0‴ subtrahiret wird; so kommt endlich die Seite DB = 37′0″0‴ heraus. Nachdem solchergestalt die nöthigen Seiten und Winckel im Triangel ACD ausfindig gemacht worden, so wird hierauf in dem dabeyliegenden Triangel CDB nach der vorhin (§. 3.4.) angezeigten Methode der Winckel n oder DCB folgendermassen erfunden. Es wird nemlich das Qvadrat von CD = 1095′61″00‴ zu dem Qvadrat von DB = 1413′76″00‴ addiret, aus dieser Summe = 2509′37″00″, die Quadratwurzel ausgezogen, und vermittelst dieser herausgekommenen Zahl 50′0″9‴, welche der Seite CB gleich ist, folgende Schlüssung logarithmisch berechnet.

Log CB	=	36997510
Log. Sin. Tot.	=	100000000
Log. DB	=	35751878
		135751878
Log. Sin. n	=	98754368

Der diesem in den Tafeln am nächsten beykommende Logarithmus zeiget also, daß der Winckel n = 48°38′ ist. Wird endlich dieser Winckel zu dem oben bestimmten Winckel m = 54°30′ addiret, so kommt m † n = 54°30′ † 48°38′ = 103°8′ das ist der erste gesuchte Winckel ACB heraus. Und wird dieser mit dem oben angenommenen Winckel CAD zusammenaddiret, und von 180° subtrahiret, so bleibet alsdenn schlüßlich 180° — 138°38′ = 41°22′, das ist der zweyte gesuchte Winckel CBA übrig. Es wird also nach dieser Methode gefunden, daß in dem Triangel ACB der Winckel ACB = 103°8′, der Winckel CBA = 41°22′, und die Seite BC 50′0″9‴ sind.

§. 8.

Bey den übrigen Arten der spitzwincklichten Dreyecke, deren alle drey, oder zwey Seiten einander gleich sind, dörfen solche Weitläuftigkeiten nicht angewandt werden, wenn aus dem gegebenen Winckel A und den Seiten AC und AB, die übrigen Winckel C und B nebst der Seite BC gefunden werden sollen. Denn 1) ist der spitzwincklichte Triangel ACB gleichseitig, so ist ein jeder von den Winckeln C und B = 60°, und die Seite CB = CA. Und 2) ist der spitzwincklichte Triangel ACB gleichschencklicht, so ist die Seite CB = der gegebenen AC, der Winckel B = dem gegebenen A, und folglich der Winckel C = der Zahl, welche heraus komt, wenn die beyden Winckel A und B zusammenaddiret, und diese Summe von 180° subtrahiret werden. Es lässet sich also die obige Methode bey denenjenigen Triangeln anbringen, welche insgesamt spitzwincklicht und zugleich ungleichseitig sind.

§. 9.

Wenn endlich drittens in einem stumpfwincklichten Triangel ACB aus dem gegebenen Winckel A und den beyden Seiten CA und AB, welche ihn einschliessen, die beyden übrigen Winckel C und B nebst der Seite CB gefunden werden sollen, so kan dieses auf folgende Weise bewerckstelliget werden. 1) Muß in den Triangel ACB die gegebene Grundlienie AB verlängert, und auf dieselbe aus der Spitze C eine Perpendicularlinie CD heruntergelassen werden. 2) In dem hiedurch entstandenen rechtwincklichten Dreyeck CDA muß der ge- Fig. 4.

gebene stumpfe Winckel A von 180° abgezogen, und solchergestalt der Winckel o oder CAD gefunden werden. 3) Hierauf muß in diesem Triangel zuförderst die gefällete Höhe CD herausgebracht, und dieselbe dahero nach folgender Schlüssung:

wie sich der Sinus totus
zu der gegenüberstehenden Seite CA verhält,
so verhält sich der Sinus des Winckels o oder CAD
zu der gegenüberstehenden Seite CD

logarithmisch berechnet werden. 4) Darauf muß der gefundene Winckel von 90° subtrahiret, und hiedurch der Winckel m oder DCA bestimmet werden. 5) Nach dieser Operation muß noch in demselben Triangel CDA die Linie DA gesucht, und dahero nach folgender Schlüssung:

wie sich der Sinus totus
zu der gegenüberstehenden Seite CA verhält,
so verhält sich der Sinus des Winckels m oder DCA
zu der gegenüberstehenden Seite DA,

durch die logarithmische Rechnung gefunden werden. 6) Wenn nun im Triangel CDA diese angeführte Theile richtig bestimmet worden, so muß von demselbigen fortgegangen, zu dem grossen rechtwincklichten Triangel CDB fortgeschritten, und in diesem vornemlich der Winckel $m + n$ oder DCB gefunden werden; es wird nemlich zu der gegebenen Seite AB die gefundene DA hinzuaddiret, und vermittelst dem rechten Winckel D nebst diesen bekanten Seiten CD und DB, welche zugleich die Seite DB hervorbringen, nach der vorhin (§. 3. 4.) erklärten Methode der gesuchte Winckel $m + n$ logarithmisch berechnet. 7) Zuletzt muß endlich von diesem Winckel der bereits oben gefundene Winckel m abgezogen, und 8) diese Differentz mit dem gegebenen schiefen Winckel CAB zusammenaddiret, von 180° gleichfals subtrahiret werden. So bleibet in jenem Fall der erste gesuchte Winckel C, und in diesem der zweyte Winckel B übrig. Auf diese Weise werden also im stumpfwincklichten Triangel CAB die beyden Winckel C und B nebst der Seite BC zusammenbestimmet.

§. 10.

Damit diese Auflösung verständlich wird, so wollen wir suchen, durch ein leichtes Beyspiel sie zu erläutern. Wir wollen setzen, daß in dem stumpfwincklichten Triangel CAB die Seite CA $= 58'0''0'''$, AB $= 75'0''0'''$, und der Winckel CAB $= 108^\circ\ 24'$ sind. Um zuförderst in dem Triangel CDA die Perpendicularlienie CD zu finden, so muß vor den Winckel o der Winckel A von 180° abgezogen, und vermittelst desselben, welcher $= 71^\circ 36'$ ist, die obige Schlüssung folgendergestalt mit den Logarithmis berechnet werden.

Log.

Log. Sin. Tot. = 100000000
Log. CA = 37634280
Log. Sin. o = 99772095
137406375
Log. CD = 37406375

Der diesem am nächsten zutreffende Logarithmus in den Tafeln zeiget also, daß die gesuchte Höhe CD $= 55'0''0'''$ ist. Um weiter in demselben Triangel die andere Linie DA zu erfinden, so muß darauf vor dem Winckel m der Winckel o $= 71\ 36'$ von $90^\circ = 89^\circ\ 60'$ abgezogen, und vermittelst dieses Winckels m welcher $= 18^\circ\ 24'$ ist, die obige Schlüssung auf folgende Weise gleichfals logarithmisch berechnet werden.

Log. Sin. Tot. = 100000000
Log CA = 37634280
Log. Sin. m = 94992045
132626325
Log. DA = 32626325

Es weiset sich also, daß nach den logarithmischen Tafeln die Seite DA $= 18'3''0'''$ ist. Um endlich in dem grossen rechtwincklichten Triangel CDB die hierauf erforderlichen Winckel $m + n$ zu erfinden, so muß zuletzt noch folgende Berechnung besonders hinzugesetzet werden. Man addire nemlich, in diesem Triangel von der Seite DB, welche = den Seiten DA + AB $= 93'3''0'''$ ist, das Qvadrat derselben $= 8704'89''00'''$ zu dem Qvadrat der Seite CD $= 3028'30''09'''$, aus dieser Summe $= 11733'19''09'''$ ziehe man die Qvadratwurtzel heraus, und hierauf berechne man vermittelst dieser Zahl, welche $= 108'3''2'''$ = CB ist, mit den Logarithmis folgende Schlüssung.

Log. CB = 40347086
Log. Sin. Tot. = 100000000
Log. CD = 39698816
139698886
Log. Sin. $m + n$ = 99351730

Es kommt also nach den logarithmischen Tafeln heraus, daß der Winckel $m + n$ = DCB $= 59^\circ 28^\circ$ ist. Da nun der gefundene Winckel m $= 18^\circ 24'$ von diesem abgezogen den Winckel n zurückläßt, so zeiget sich weiter, daß der Winckel n = ACB $= 41^\circ 4'$ ist. Und da dieser Winckel mit dem gegebenen stumpfen A zusammenaddiret und von 180° subtrahiret, den Winckel B hervorbringet, so findet sich, daß derselbe $= 30^\circ\ 32'$ ist. Es ist also nach dieser Methode entdecket worden, daß in dem stumpfwincklichten Triangel CAB die Seite

CB

CB = 108′3″2‴, der Winckel C = 41°4′, und der Winckel B = 30° 32′ sind. *

§. 11.

Ich will in diesem Abschnitt nicht noch einmahl wiederhohlen, daß die gegenwärtige Methode hauptsächlich bey den stumpfwincklichten Dreyecken, deren drey Seiten ungleich sind, anzubringen sey. Denn es ist bekandt, daß keine stumpfwincklichte Dreyecke drey gleiche Seite haben können, und daß, wenn in einem stumpfwincklichten Dreyecke die beyden Schenckel CA und AB gleich sind, die beyden Winckel C und B gleichfals eine Gleichheit besitzen, folglich gefunden werden können, wenn nemlich der gegebene stumpfe Winckel A von 180° abgezogen, und diese Differentz halbiret, oder durch 2 dividiret wird. Allein wie? wenn gegen diese von uns beschriebene Methoden (§. 9. 10. 11) eingewandt wird, daß dieselben weitläuftiger sind, als diejenigen, welche in den gewöhnlichen Lehr-Büchern erkläret werden, sind wir wohl vermögend, diese Einwendung zu entkräften, und die Rechtmäßigkeit unserer Auflösungen zu bestätigen? Ich antworte hierauf, um beydes zu bewerckstelligen, folgendes. Es ist wohl wahr, daß die verschiedene logarithmische Berechnungen, welche nach einander angestellet werden müssen, unsere Methode, dem ersten Anschein nach, etwas weitläuftig machen. Allein es ist auch gewiß, daß, da sie nach der gewöhnlichen Grundschlußart der Trigonometrie eingerichtet sind, keine Beschwerlichkeit bey sich führen, und dahero van den Anfängern mit der grösten Leichtigkeit angestellet werden. Denn sollen nach der gewöhnlichen Weise die gedachten Winckel und Seiten gefunden werden, so müssen, wie aus den Lehrbüchern bekant ist, nicht allein gantz besondere, nemlich von der gebräuchlichen Grundschlußart gäntzlich abgehende Berechnungen mit den Summen und Differentzen der gegebenen Seiten, imgleichen mit den Tangenten der halben Summen und der halben Differentzen derer zuerfindenden Winckel, und so weiter vorgenommen, sondern auch, um die Rechtmäßigkeit dieser Auflösungen darzuthun, lange, und aus der tiefsten Geometrie hergeleitete Beweise hinzugefüget werden. Sol-

len

* Daß diese Zahlen mit denjenigen nicht übereinstimmen, welche der Herr von **Wolff** in seiner Trigonometrie bey demselben Exempel nach einer andern Methode herausgebracht hat, kommt von einer kleinen Verrechnung her, welche dieser grosse Mann allda begangen. Denn da er von 89646667 in den Tafeln den nächst kleineren Logarithmum hätte aufsuchen sollen, so hat er den nächstgrössern gefunden und angenommen, daher es geschehen, daß statt 5° 16′ von ihm 5° 17′ gesetzet worden. Wird jene Zahl dieser substituiret, und das Exempel nach seiner Lehrart bis zum Ende berechnet, so findet sich, daß dasselbe bey dem Herrn von **Wolff** eben so wie bey uns herauskommen, nemlich der eine Winckel = 41°4′ und der andre = 30° 32′ seyn muß.

len aber nach unserer Methode dergleichen Seiten und Winckel in den Triangeln ausfündig gemacht werden, so dörfen, wie vorhin gewiesen worden, weder ungewöhnliche und schwehre Berechnungsarten angebracht, noch grosse und hiezu allein dienliche Beweise mitangewandt, sondern nur nach der gebräuchlichen, und angewöhnten Schlußart eingerichtete Rechnungen ohne allen Beweiß appiciret werden. Da nun jenes denen Anfängern in der Trigonometrie sehr schwehr fällt, und dasjenige, was schwehr ist, gemeiniglich vor weitläufftig gehalten wird, dieses aber ihnen leicht vorkomt, und folglich vor kurtz erkannt wird; so ist es offenbahr, daß unsere gegebene Auflösungen bloß den Schein einer Weitläufftigkeit haben, und denen Anfängern jederzeit leichter, folglich auch kürtzer als die gewöhlichen zu seyn scheinen werden. Nachdem solchergestalt der gemachte Einwurff wiederleget, und unsere erklärete Methode gebührend gerechtfertiget worden; so wollen wir jetzo diesen Abschnitt hiemit schliessen, und weiter zu dem folgenden fortschreiten.

Zweyter Abschnitt

darinnen gezeiget wird, wie in einem Triangel aus drey gegebenen Seiten die drey Winckul gefunden werden können.

§. 12.

Da in diesem Abschnitt gewiesen werden soll, wie aus drey gegebenen Seiten ~~eines~~ Triangels die drey Winckel in demselben gefunden werden können, so ist es billig, daß wir auf dieselbe Weise, wie wir im ersten Abschnitt gethan, alle mögliche Arten der Triangel, die sowohl aus der Verschiedenheit der Winckel, als der Mannigfaltigkeit der Seiten entstehen, alhier vornehmen, und bey denselben nacheinander zeigen, wie aus denen gedachten gegebenen Theilen der Triangel die übrigen, welche nicht gegeben sind, gefunden werden können.

§. 13.

Was erstlich den rechtwinckelichten Triangel anbetrifft, so gehet es leichtlich an, aus drey gegebenen Seiten alle drey Winckel in demselben zu entdecken. Denn es darf nur im rechtwinckelichtem Dreyeck ACB, in welchem der rechte Winckel A vor sich bekandt ist, folgendergestalt geschloßen: Fig. 2.

wie sich die Seite CB
zu dem Sinu toto verhält,
so verhält sich die Seite AB
zu dem Sinu des gegenüberstehenden Winckels C

und diese Schliessung logarithmisch berechnet werden, so kommt alsdenn der eine gesuchte Winckel C heraus, welcher wenn er weiter von 90° abgezogen wird,

wird, den anderen Winckel B zurücklässet. Also können nach dieser Methode aus drey gegebenen Seiten eines rechtwinckelichten Triangels die drey Winckel in demselben ohne grosse Mühe ausfindig gemachet werden.

§. 14.

Um diese Auflösung durch ein Beyspiel zu erläutern, so wollen wir setzen, daß in dem rechtwinckelichtem Triangel ACB die Seite CA $= 33'1''0'''$, AB $= 37'6''0'''$, und CB $= 50'0''9'''$ sind. Da in diesem Triangel der Winckel A $= 90°$ ist, so kommt der erste Winckel C in demselben heraus, wenn nach der obigen Anweisung folgende Schliessung trigonometrisch berechnet wird.

Log. CB	=	36997510
Log. Sin. Tot.	=	100000000
Log. AB	=	35751878
		135751878
Log. Sin. C	=	98754368

Der diesem am nächsten zutreffende Logarithmus in den Taffeln zeiget also, daß der Winckel C $= 48°38'$ ist. Wenn nun dieser von $90° = 89°60'$ subtrahiret wird, so bleibet alsdenn der andere Winckel B $= 41°22'$ übrig. Solchergestalt kommt also heraus, daß in dem rechtwinckelichtem Triangel CAB der Winckel A $= 90°$, C $= 48°38'$, und B $= 41°22'$ sind.

§. 15.

Ich darff nicht noch erinnern, daß durch eine kleine in der Schliessung und Rechnung vorgenommene Veränderung zuerst der Winckel B, und darauf der andere C bestimmet werden könne, da ein jeder, der in der Trigonometrie sich ein wenig geübet hat, geschickt seyn wird, dieselbe sogleich in dem obigen Beyspiel anzubringen. Ich darff auch nicht aufs neue wieder anmercken, daß diese erklärte Methode nur bey ungleichseitigen rechtwincklichten Triangeln angewendet werden könne, da ein jeder der nur die ersten Gründe der Geometrie verstehet, einsiehet, daß die gleichseitigen rechtwincklichte Dreyecke unmöglich sind, und in gleichschencklichten rechtwincklichten Triangeln, darinnen die Seiten AC $=$ AB sind, wegen der Gleichheit der beyden Winckel B und C diese nicht besonders erfunden werden dörfen, sondern ein jeder von denselben die Helfte von $90° = 45°$ seyn muß. Ich will vielmehr diese Betrachtungen über den rechtwincklichten Triangel abbrechen, und dieselben bey dem spitzwincklichtem Dreyecke fortsetzen.

§. 16.

Was zweytens den spitzwincklichten Triangel anbelanget, so ist es wohl etwas schwehrer, aus drey gegebenen Seiten die drey Winckel in demselben zu erfinden; doch geht solches an, auf folgende Weise zu erhalten. 1) Muß in dem spitzwincklichten Triangel ACB, darin die Perpendicularlinie CD gefället, und hiedurch dieser Triangel in zwey andere, nemlich in ACD und CDB getheilet worden, die Linie DB durch einen kurzen und leichten algebraischen Calculum folgendergestalt gefunden werden. Es sey nemlich in diesem Triangel ACB $=$ ACD $+$ CDB Fig. 3.

$$AC = a \qquad CD = x$$
$$AB = b \qquad DB = y$$
$$BC = c$$

so ist,

$$a^2 = x^2 + (b - y)^2$$
$$a^2 = x^2 + b^2 - 2by + y^2$$
$$a^2 - b^2 + 2by - y^2 = x^2$$

$$c^2 = x^2 + y^2$$
$$c^2 - y^2 = x^2$$

und also,

$$a^2 - b^2 + 2by - y^2 = c^2 - y^2$$
$$a^2 - b^2 + 2by = c^2$$
$$2by = c^2 + b^2 - a^2$$
$$y = c^2 + b^2 - a^2 : 2b$$

Folglich ist dieses $y =$ der Summe der Quadraten der beyden Seiten CB und AB, weniger dem Quadrate der Seite CA durch die doppelte Seite AB dividiret. Um also die Seite DB $= y$ zu erfinden, so müßen anfänglich alle drey gegebene Seiten quadriret, darauf das Qvadrat der Seite BC zu dem Qvadrat der Seite AB addiret, hievon das Qvadrat der Seite AC subtrahiret, und diese Differenz durch das Duplum der Grundlinie AB dividiret werden. 2) Ist diese Seite DB solchergestalt bestimmet, so muß, um die Seite AD zu erfinden, jene von der Grundlinie AB subtrahiret werden. 3) Wenn nun in diesen beyden Dreyecken ACD und CDB die beyden Seiten AB und DB auf die besagte Art bekandt worden, so muß zuerst der Triangel ACD vorgenommen, und in demselben der Winckel m $=$ ACD erfunden, mithin folgende Trigonometrische Schlüßung logarithmisch berechnet werden;

wie sich die Seite AC
zu dem Sinu toto verhält,
so verhält sich die Seite AD
zu dem Sinu des gegenüberstehenden Winckels m.

4) Wird auf diese Weise der Winckel m gefunden, so muß noch derselbe von $90°$ subtrahiret werden, damit der erste Winckel A solchergestalt heraus kommt. 5) Nach diesen Bestimmungen muß hierauf der Triangel ACD verlaßen, zum nahebeyliegenden CDB fortgegangen, und hierinnen zuförderst der Winckel $n =$ DCB erfunden, folglich gegenwärtige Schlüßung logarithmisch berechnet werden;

wie sich die Seite CB
zu dem Sinu toto verhält,
so verhält sich die Seite DB
zu dem Sinu des gegenüberstehenden Winckels n.

6) Wird dieser gefundene Winckel n mit dem obigen m zusammenaddiret, so kommt nun der zweyte gesuchte Winckel ACB heraus. 7) Und wird hernach dieser mit dem ersten A zusammenaddiret, und von $180°$ subtrahiret, so bleibt endlich der dritte gesuchte Winckel B übrig. Auf diese Art können also in einem jeden spitzwincklichten Triangel aus dreyen gegebenen Seiten die drey Winckel desselben erfunden werden.

§. 17.

Damit diese Auflösung begreiflicher wird, so wollen wir uns jetzo bemühen, durch ein kurzes Beyspiel sie aufzuklären. Es sey demnach in dem spitzwincklichten Triangel ACB die Seite $CA = 36'0''0'''$, $AB = 40'0''0'''$, und $CB = 45'0''0'''$. Da die Nothwendigkeit erfordert, in dem Triangel CDB zuerst die Linie DB bekandt zu machen, so muß nach obiger Vorschrift das Qvadrat der Seite $BC = 2025'00''00'''$ zu dem Qvadrat der Seite $AB = 1600'00'00'''$ addiret, von dieser $Summe = 3625'00''00'''$ das Qvadrat der Seite $CA = 1296'00''00'''$ subtrahiret, und diese $Differenz = 2329'00''00'''$ durch das Duplum der Seite $AB = 8'0''0'''$ dividiret werden, welcher Exponent $29'1''1'''$ alsdenn die Seite DB hervorbringt. Diese Seite $DB = 29'1''1'''$ wird ferner von der Seite $AB = 40'0''0'''$ subtrahiret, durch welche Differenz solchergestalt die Seite $AD = 10'8''9'''$ heraus kommt. Nach dieser Bestimmung wird darauf mit Entdeckung des Winckels $m = ACD$ in dem Triangel ACD der Anfang der drey zu erfindenden Winckel gemacht, und zu dem Ende folgende Schlüßung logarithmisch berechnet.

$$\begin{array}{rcr} \text{Log. AC} & = & 35563025 \\ \text{Log. Sin. Tot.} & = & 100000000 \\ \text{Log. AD} & = & 30370279 \\ \hline & & 130370279 \\ \hline \text{Log. Sin. m.} & = & 94807254 \end{array}$$

Der diesem am nächsten beykommende Logarithmus in den Tafeln weiset also, daß der Winckel $m = 17°36'$, folglich der erste gesuchte Winckel $A = 89°60'$
$- 17°36'$

$- 17°36' = 72°24'$ ist. Wenn dieser Winckel m im Triangel CAD gefunden worden, so wird hierauf zum Triangel CDB fortgeschritten, und darinnen der andere anliegende Winckel n gesuchet, dahero folgende Trigonometrische Schlüßung mit den Logarithmis berechnet.

$$\begin{array}{rcr} \text{Log. CB} & = & 36532125 \\ \text{Log. Sin. Tot.} & = & 100000000 \\ \text{Log. DB} & = & 34640422 \\ \hline & & 134640422 \\ \hline \text{Log. Sin. m.} & = & 98108297 \end{array}$$

Es ist also wie der nächst kleinere Logarithmus in den Tafeln zeiget der Winckel $n = DCB = 40°18'$. Werden nun diese beyde gefundene Winckel m und n zusammenaddiret, so kommt durch diese Summirung der ganze zweyte gesuchte Winckel $C = 57°54'$ heraus. Und wird endlich dieser Winckel C mit dem vorhin gefundenen A zusammenaddiret, und diese Summe von $180°$ subtrahiret, so bleibet zuletzt der dritte gesuchte Winckel $B = 49°42'$ übrig. Es ist also nach dieser Methode herausgebracht worden, daß in dem spitzwincklichten Triangel ACB der Winckel $A = 72°24'$, $C = 57°54'$, und $B = 49°42'$ sind. (*)

§. 18.

Wer die gegenwärtig erklärte Methode nur ein wenig erweget, wird gleich einsehen, daß dieselbe vornehmlich bey denjenigen spitzwincklichten Triangeln angewandt werden könne, welche ungleiche Seiten haben. Denn in den spitzwincklichten gleichseitigen Triangeln dörfen die Winckel nicht besonders gefunden werden, da nach Geometrischen Gründen, wie bekannt ist, ein jeder $60°$ hat. Und in denen spitzwincklichten gleichschencklichten Triangeln geht es gleichfals an, noch auf eine andere und kürtzere Art die drey Winckel in denselben zu

C bestim-

(*) Diese Zahlen kommen zwar mit denenjenigen nicht überein, welche der Herr **von Wolff** in seiner Trigonometrie bey demselben Exempel nach einer andern Methode heraus gebracht hat; allein es kommt dieses von einer kleinen Verrechnung her, da nemlich dieser berühmte Mann von der Zahl 98108297 nicht den nächstkleineren, sondern den nächstgrößern Logarithmum, folglich den Winckel A nicht $40° 18'$, sondern $40° 19'$ angenommen hat. Wird dieses leichte Versehen geändert, und die Berechnung der Winckel nach der Methode des Herrn **von Wolffen** vollendet, so lehret die Erfahrung, daß die drey Winckel bey ihm so wie bey uns herauskommen, nemlich, daß der Winckel $A = 72°24'$, $C = 57°54'$, und $B = 49°42'$ sind.

bestimmen. Denn es sey in unserm Triangel ACB die Seite AC = der Seite CB. Da aus der Geometrie bekannt ist, daß in gleichschencklichten Triangeln die Winckel m = n, und A = B sind, so darf nur, um die Winckel m und n, und durch dieselben die Winckel A und B ausfindig zu machen, eine einzige, das ist, folgende trigonometrische Schlüssung logarithmisch berechnet werden:

wie sich in dem Triangel ACD die Seite AC
zu dem Sinu toto verhält,
so verhält sich die Seite AD = $\frac{1}{2}$ AB
zu dem Sinu des gegenüberstehenden Winckels m.

Kommt auf diese Weise der Winckel m heraus, so wird derselbe dupliret, und solchergestalt der gantze erste Winckel C gefunden. Wird dieser hierauf von 180° abgezogen, und diese Differenz halbiret, so werden auf diese Weise die beyden Winckel an der Grundlinie A und B mitentdecket. Ich will diesen Fall, um alle Weitläuftigkeit zu verhüten, nicht durch ein klares Beyspiel besonders erläutern. Ich will vielmehr, um diese Ausführung vollständiger zu machen, nur noch dieses hinzufügen, daß unsere Methode, aus drey gegebenen Seiten die drey Winckel im spitzwincklichten Triangel zu erfinden, nicht so weitläuftig ist, wie wohl einige dem ersten Anschein nach, von derselben sich etwa vorstellen mögen. Denn wenn wir unsere Auflösung in Betrachtung ziehen, so nehmen wir wahr, daß sie vornemlich aus zweyen logarithmischen Rechnungen bestehet, die ohnedem nicht ungewöhnlich, sondern nach der gebräuchlichen Grundschlußart der Trigonometrie eingerichtet sind. Erwegen wir aber die gemeine und in den mathematischen Lehrbüchern eingeführte Auflösung dieser Aufgabe, so bemercken wir, daß sie nicht allein aus drey logarithmischen Berechnungen zusammengesetzt, sondern vornemlich die ersten derselben, da sie nach einer Schlüßung von der Grundlinie des Triangels auf die Summe der Seiten und von der Differenz derselben auf ein gewisses Stück der Grundlinie eingerichtet ist, und gemeiniglich deswegen mit einem eigenthümlichen und aus der schweren Geometrie hergehohlten Beweiß befestiget wird, besonders fremd und ungewöhnlich ist. Wer machet also hieraus nicht den Schluß, daß unsere Methode, die wir bißhieher erkläret, keinesweges vor weitläuftig, sondern vielmehr kürtzer und leichter als die gewöhnliche zu halten?

§. 19.

Fig. 4. Was endlich drittens den stumpfwincklichten Triangel anbetrift, so machet zwar die Aufgabe, aus drey gegebenen Seiten die drey Winckel in demselben zu erfinden, nicht wenigere Schwierigkeit; doch ist es möglich, dieselbe auf folgende leichtere Weise aufzulösen. Wenn in dem stumpfwincklichten Triangel ACD die drey Seiten AC, CB, und AB bekannt sind, und durch dieselbe die

die drey Winckel CAB, ACB, und CBA bestimmet werden sollen, so muß 1) die Grundlinie AB bis D verlängert, aus der Spitze C eine Perpendicularlinie CD heruntergelassen, und in dem hieraus entstandenen Triangel CDA vornehmlich die Linie DA durch einen kurtzen und leichten algebraischen Calculum auf folgende Weise erfunden werden. Es sey nemlich in diesem Triangel CDA, an welchem der andere CAB grentzet,

$$AC = a \qquad CD = x$$
$$AB = b \qquad DA = y.$$
$$BC = c$$

so ist

$$a^2 = x^2 + y^2 \qquad c^2 = x^2 + (y + b)^2$$
$$a^2 - y^2 = x^2 \qquad c^2 = x^2 + y^2 + 2yb + b^2$$
$$c^2 - y^2 - 2yb - b^2 = x^2$$

und also

$$a^2 - y^2 = c^2 - y^2 - 2yb - b^2$$
$$a^2 = c^2 - 2yb - b^2$$
$$2yb + a^2 = c^2 - b^2$$
$$2yb = c^2 - b^2 - a^2$$
$$y = c^2 - b^2 - a^2 : 2b.$$

Es kommt also dieses y = der gesuchten Seite AD heraus, wenn alle drey gegebene Seiten anfänglich vor sich quadriret, darauf von dem Quadrat der der Seite AB subtrahiret, hievon aufs neue das Quadrat der Seite AC subtrahiret, und diese Differenz endlich durch das Duplum der Grundlinie AB dividiret wird. 2) Wenn diese Seite AD im Triangel CDA solchergestalt herausgebracht worden, so muß darinnen ferner der Winckel m = DCA erfunden, und zu diesem Ende folgende trigonometrische Schlüssung logarithmisch berechnet werden.

Wie sich die Seite CA
zu dem Sinu toto verhält,
so verhält sich die Seite AD
zu dem Sinu des gegenüberstehenden Winckels m

3) Wird dieser gefundene Winckel von 90° abgezogen, so bleibt der Winckel o übrig; welcher wenn er wiederum 4) von 180° subtrahiret wird, den ersten gesuchten Winckel A = CAB im stumpfwincklichten Triangel CAB hervorbringt.

bringt. 5) Nachdem in diesem Triangel auf solche Weise der Winckel A bestimmet worden, so wird, um den Winckel $n = C$ zu erfinden, noch folgende Schlüssung hinzugesetzt, und mit den Logarithmis berechnet:

Wie sich die Seite CB
zu dem Sinu des gegenüberstehenden Winckels $A = CAB$ verhält,
so verhält sich die Seite AB
zu dem Sinu des gegenüberstehenden Winckels $C = ACB$

6) Wenn nun dieser gefundene Winckel C mit dem obigen A zusammenaddiret und von 180° subtrahiret wird, so bleibet zuletzt der dritte Winckel B übrig. Solchergestalt können nach dieser Lehrart in einem stumpfwincklichten Triangel aus drey gegebenen Seiten die drey Winckel erfunden werden.

§. 20.

Da diese Auflösung einer Erleuterung benöthiget ist, so wollen wir zu diesem Ende ein klares und leichtes Exempel geben. Wir wollen setzen, daß in dem stumpfwincklichten Triangel ACB die Seite $CA = 58'0''0'''$, $AB = 75'0''0'''$, und $CB = 108'3''2'''$ sind. Weil in dem rechtwincklichtem Triangel CDA die Seite DA zuerst bekannt seyn muß, so ist nach der obigen Regel nothwendig, daß von dem Qvadrat der Seite $BC = 1173'32''24'''$ das Qvadrat der Seite $AB = 5625'00'00'''$ subtrahiret, von dieser Differenz $= 6108'22'24'''$ wiederum das Qvadrat der Seite $AC = 3364'00''00'''$ subtrahiret, und diese Differenz durch das Duplum der Seite AB dividiret wird; da denn der gefundene Exponent zeiget, daß die gesuchte Seite $DA = 18'2''9'''\frac{7224}{15000}''' = 18'3''0'''$ ist. Vermittelst dieser Seite wird darauf in demselben Triangel CDA der Winckel $m = DCA$ auf folgende Weise logarithmisch berechnet:

Log. CA	=	37634280
Log. Sin. Tot.	=	100000000
Log. DA	=	32624511
		132624511
Log. Sin. m	=	94990231

Der diesem am nächsten kommende Logarithmus in den Tafeln weiset also, daß der Winckel $m = 18^{\circ}23'31\frac{34}{93}'' = 18^{\circ}24'$ ist. Da nun dieser von 90° subtrahiret, und der hiedurch hervorgebrachte Winckel $o = 71^{\circ}36'$ wiederum von 180° subtrahiret wird, so kommet solchergestalt der erste gesuchte Winckel $CAB = 108^{\circ}24'$ heraus. Nach dieser Bestimmung wird darauf in dem anliegenden grossen Triangel CAB der Winckel $n = ACB$ gesucht, und dahero folgende Schlüssung logarithmisch berechnet:

Log. CB	=	40347086
Log. Sin. CAB	=	99772095
Log. AB	=	38750613
		138522708
Log. Sin. n	=	98175622

Der diesem am nächsten zutreffende Logarithmus in den Tafeln zeiget also, daß dieser zweyte gesuchte Winckel $n = ACB = 41^{\circ}4'$ ist. Wenn endlich diese beyde herausgebrachte Winckel A und C zusammenaddirt, und von 180° subtrahiret werden, so bleibet zuletzt der dritte gesuchte Winckel $B = 30^{\circ}32'$, übrig. Und auf solche Weise ist aus den drey gegebenen Seiten des stumpfwincklichten Triangels ACB gefunden worden, daß der Winckel $A = 108^{\circ}24'$, $B = 30^{\circ}32'$, und $C = 41^{\circ}4'$ sind.

§. 21.

Daß diese Methode vornehmlich bey stumpfwincklichten Triangeln, deren Seiten ungleich sind, angewandt werden kan, darf nicht noch besonders erinnert werden. Denn es ist schon vorhin vielmahls angemerckt worden, daß es keine Triangel giebt, die stumpfwincklicht und zugleich gleichseitig sind. Und von solchen Triangeln, deren Schenckel CA und AB gleich sind, ist gleichfals bereits vorhin angezeiget worden, daß in demselben die Winckel C und B gleich sind, folglich ohne Mühe gefunden werden, wenn der durch die erste in dem vorigen Paragrapho angezeigete logarithmische Rechnung herausgebrachte stumpfe Winckel A von 180° abgezogen, und diese Differenz halbiret oder durch 2 dividiret wird. Daß auch diese unsere Auflösung nicht weitläuftiger ist, als diejenige, welche in den Lehrbüchern gemeiniglich angenommen wird, braucht weiter keines besonderen Beweises, da die Wiederlegung dieses Einwurfs bereits oben zureichend ausgeführet worden. (§. 15. 18.) Noch könte zum Beschluß eingewendet werden, daß die beyde von uns gegebene letzte Auflösungen, da sie sich auf Algebraische Lehrsätze gründen, nicht vollkommen trigonometrisch wären; allein es fällt diese scheinbahre Einwendung sogleich weg, wenn darauf geantwortet wird, daß die gemeine und bekannte Auflösung gleichfals auf einem aus der Algebra hergenommenen Lehrsatze sich stützet, und noch dazu mit einem eigenthümlichen und höchstschwehren Beweise, welcher die Rechtmäßigkeit der gantzen Methode zeiget, befestiget ist, welches letzteren wir bey unserer Lehrart gäntzlich überhoben sind, da sie keinesweges neu oder fremde, sondern nach derjenigen Schlußart, welche durch die gantze

Trigonometrie gebraucht wird, und nicht besonders weiter bewiesen werden darf, vollkommen eingerichtet ist.

§. 22.

Dieses ist die Anweisung, welche ich hiemit denenjenigen, die in der Trigonometrie nach einer Erleichterung sich umgesehen habe ertheilen wollen. Ob andere Mathematicker einen gleichen Unterricht in ihren Schriften hievon gegeben, kan ich mit völliger Gewißheit nicht sagen. Ich habe Mühe gehabt, durch eigenes Nachdencken diese Kleinigkeiten herauszubringen, und dahero habe keine weitere Mühe mir machen wollen, ängstlich nachzusehen, ob andere vor mir auf eben dieselben Gedancken gekommen. Ich setze auch in dem Vortrag neuer Wahrheiten keine vorzügliche Ehre; ich bin zufrieden, wenn ich durch meinen Unterricht meines Nebenmenschen Vollkommenheit auch nur einigermaßen zu befördern vermögend bin, es mag derselbe gantz neu oder auch alt zu seyn scheinen. Kurtz! ich habe anjetzo meine Absicht erfüllet, und wünsche hiebey nichts weiter, als daß denenjenigen, welche bishieher in der Trigonometrie einige Schwierigkeit empfunden haben, diese Blätter dienen mögen, um dieselbe leicht und vollkommen zu heben.

Fig. 1.

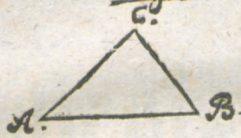

Fig. 2.

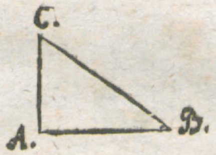

Fig. 3.

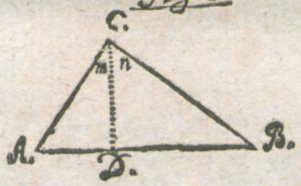

Fig. 4.