TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika instituut

Helen Asuküla

Gravitatsioonilained üldrelatiivsusteoorias ja skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriates

Bakalaureusetöö (12 EAP)

Juhendaja:
Piret Kuusk, tead dr
(füüsika-matemaatika)

Kaitsmisele lubatud ....

Tartu 2018

Gravitatsioonilained üldrelatiivsusteoorias ja skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriates

Antud töös uurime gravitatsioonilainete peamisi omadusi üldrelatiivsusteoorias ja arvutame lainete energia-impulsi pseudotensori Jordani–Fierzi–Bransi–Dicke (JFBD) teoorias. Esmalt anname teoreetilise ülevaate gravitatsioonilainete ja nende omaduste järeldumisest üldrelatiivsusteooria võrranditest, vaadates häiritusarvutusi lineariseeritud gravitatsiooniteoorias. Seejärel anname ülevaate lainete keerulisemate omaduste matemaatilisest päritolust täielikus üldrelatiivsusteoorias lühilainelise lähenduse meetodil. Samuti kirjeldame kvadrupoolvalemi tuletamist, mis annab aimu lainete allikate olemusest. Tutvustame skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriaid ja lineariseeritud gravitatsioonilaineid Bransi–Dicke (BD) teoorias. Originaalse panusena veendume, et meie väljavõrranditest avalduv pseudotensor BD teoorias tuleb õige. Seejärel leiame väljavõrranditest pseudotensori JFBD teoorias.

Märksõnad: gravitatsioonilained, energia-impulsi pseudotensor, skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad

CERCS: P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Gravitational waves in general relativity and scalar-tensor theories of gravity

We examine the main properties of gravitational waves and find the stress-energy pseudotensor of the waves in the Jordan–Fierz–Brans–Dicke (JFBD) theory. We start with a theoretical overview on the derivation of gravitational waves and their properties from the linearized equations of general relativity. Then we give an overview of the mathematical origin of more complicated properties of the waves using the shortwave approximation. We also describe the derivation of the quadrupole formula, which describes the sources of the waves. We introduce scalar-tensor theories of gravity and linearized gravitational waves in the Brans–Dicke (BD) theory. As an original contribution, we verify that our field equations give the correct result in the BD theory. Then we find the pseudotensor in the JFBD theory using the field equations.

Keywords: gravitational waves, stress-energy pseudotensor, scalar-tensor field theories of gravitity

CERCS: P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Sisukord

Sissejuhatus

Gravitatsioonilaineid on teoreetiliselt ennustatud üldrelatiivsusteooria raames juba 20. sajandi algusest ning tööd nende olemasolu kinnitamiseks katselise mõõtmisega alustati juba 1960-ndatel [1]. Detektorite võrgustik suutis esmakordselt otseselt mõõta gravitatsioonilaineid, mis tekkisid kahe musta augu liitumisel, 2015. aastal [2]. Neid on tuvastatud veel viiel mõõtmisel, sealhulgas kaksiktähede kokkutiirlemisel [3].

Eksperimentaalsete andmete ja teoreetiliste teadmiste võrdlemine võimaldab gravitatsioonilaineid uurida põhjalikumalt kui kunagi varem, tuues selle valdkonna kaasaja teaduse esirindele. Käesoleva töö üheks eesmärgiks on mõista gravitatsioonilainete olemust ja nende eeldatavate füüsikaliste omaduste matemaatilisi aluseid. Sellel eesmärgil tutvustame töö esimeses peatükis gravitatsioonilainete järeldumist üldrelatiivsusteooria väljavõrranditest ja saadud tulemustest avalduvaid põhilisi füüsikalisi omadusi nii lineariseeritud kui täielikus üldrelatiivsusteoorias. Alapeatükk 1.3 „Täieliku üldrelatiivsusteooria gravitatsioonilained" põhineb peamiselt raamatul [4], kui pole viidatud teisiti.

Tulevikus võivad olla võimalikud gravitatsioonilainete teatud füüsikaliste käitumiste mõõtmised, mis oleksid kontrolliks laiendatud gravitatsiooniteooriatele, näiteks skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriatele. Selliseid käitumisi määrab lainete energia-impulsi (pseudo)tensor [5]. Antud töös hindame lainete energia-impulsi pseudotensorit üldisemas Jordani–Fierzi–Bransi–Dicke (JFBD) teoorias, kus parameeter $\omega = \omega(\Phi)$ ei ole konstantne.

Teises peatükis tutvustame teoreetilise sissejuhatusena skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriaid ning lineariseeritud gravitatsioonilaineid Bransi–Dicke (BD) teoorias. Originaalses arvutuslikus osas veendume, et meil kasutusel olevatest väljavõrranditest leitav pseudotensor BD teooria raames on kooskõlas teiste allikatega. Seejärel leiame väljavõrranditest teist järku häiritustega pseudotensori JFBD teoorias. Eelduste kohaselt võiks pseudotensori avaldisse lisanduda parameetri $\omega(\Phi)$ vähemalt esimest järku tuletisega $d\omega/d\Phi$ liige.

Peatükk 1

Gravitatsioonilained üldrelatiivsusteoorias

Üldrelatiivsusteoorias erineb gravitatsioon teistest klassikalistest jõududest. Gravitatsioon pole lihtsalt aegruumis leviv väli, vaid on seotud aegruumi enda geomeetriaga ning avaldub selle kõverusena [6]. Üldrelatiivsusteooriat kirjeldavad võrrandid viivad ka gravitatsioonilainete olemasoluni.

1.1 Sissejuhatus üldrelatiivsusteooriasse

Meetrika $g_{\mu\nu}$ on teist järku sümmeetriline tensor, mis kirjeldab aegruumi geomeetriat. See võimaldab kirjeldada vabade osakeste liikumist, defineerides kõveral aegruumil geodeetilise joone ehk „lühima teepikkuse”. Selline on kiirendamata osakeste trajektoor [6]. Töös kasutame Minkowski meetrika märgikokkulepet $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ning loomulikke ühikuid, kus $c = 1$.

Kõveras aegruumis ei ole vektorid lihtsalt aegruumi kahe punkti ühendajad. Igas aegruumi punktis on oma puutujatasand, kus vektorid asuvad. **Christoffeli sümbol** on suurus, mis võimaldab ühendada vektorid ühe punkti puutujapinnal sellele lähedal asuvate vektoritega, liigutades vektoreid puutujapindade vahel [7]. See avaldub meetrika kaudu kui [6]

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \right). \tag{1.1}$$

Kovariantne tuletis on tensor-operaator, mis on kõvera aegruumi üldistus osatuletisele. See tagab sõltumatuse koordinaatidest, eemaldades komponentide koordinaatide valikust põhjustatud muutuse. Nii saab kirjeldada vektorite tõelist muutust [8]. Kovariantset tuletist tähistatakse kui $T_{\mu\nu;\alpha}$ või $\nabla_\alpha T_{\mu\nu}$. Christoffeli sümbolite kaudu avaldub see üldkujul kui [6]

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = \partial_\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\alpha\lambda} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma^{\mu_2}_{\alpha\lambda} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots .\end{aligned} \tag{1.2}$$

Kõveras aegruumis vektor paratamatult muutub liikudes suletud joonel algpunkti tagasi. Muutus sõltub valitud trajektoorist, sest erinevad trajektoorid „katavad” kõverust erinevalt [6]. Seetõttu saab üldrelatiivsusteoorias võrrelda vektoreid ja sündmusi vaid väga lokaalselt. **Riemanni tensor** on aegruumi kõverust kirjeldav tensor, mis väljendab vektori infinitesimaalsel nihutamisel tekkinud muutust [9]. Christoffeli sümbolite kaudu avaldub tensor kui [7]

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \tag{1.3}$$

Ricci tensor on ahendatud Riemanni tensor. Tensoritel saab ahendada vabalt valitud indekseid, kuid Christoffeli sümbolitest koostatud Riemanni tensoril on sümmeetriate tõttu ainuke sõltumatu ahendus [7]

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{1.4}$$

Ricci skalaar ehk kõveruse skalaar on Ricci tensori jälg, mis kirjeldab täielikult kahemõõtmelise aegruumi kõverust [6]

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{1.5}$$

Einsteini tensor on defineeritud kui [9]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{1.6}$$

Neljamõõtmelises ruumis on Einsteini tensor pööratud jäljega versioon Ricci tensorist, kuna selle saab avaldada kui $R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G$. See tähendab samade omadustega tensorit, mille jälg on vastasmärgiga [6]. On võimalik näidata, et üldistades Poissoni võrrandit Newtoni potentsiaali jaoks üldrelatiivsusteooriale omastele tensorsuurustele, on tulemuseks **Einsteini võrrand** [7]. See on teist järku mittelineaarne väljavõrrand meetrika $g_{\mu\nu}$ jaoks [9] ühikutes, kus Newtoni gravitatsioonikonstant on $G = 1$:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\, T_{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Energia-impulsi tensor $T_{\mu\nu}$ kirjeldab aine, kiirguse või muu energiat ja impulssi aegruumis [6].

1.2 Lineariseeritud teooria gravitatsioonilained

Gravitatsioonilainete esmasest olemusest annab aimu lineariseeritud gravitatsiooniteooria. Tegemist on lihtsustava teooriaga, kus aegruumi meetrikat käsitletakse eraldi tausta ja häiritusena. Taustaks on esialgu kõveruseta Minkowski aegruum, mida ei mõjuta mateeria ega teised jõuväljad. Häiritus väljendab gravitatsioonivälja olemasolu [4]. Sellest võib mõelda kui välja amplituudist [10]. Selline lähendus kehtib vaid gravitatsiooni allikast kaugel, kus väli on nõrk. Allikat ennast uurida ei saa. Eeldatakse, et allikas on lokaliseeritud ja tekitab ideaalselt perioodilist lainet. See tähendab, et ei vaadelda allika energia kadu lainete tekkimisel. Lineariseeritud teooria ei arvesta ka gravitatsioonilainetest tekkinud kõveruse mõju lainetele endile [4]. Kehade liikumiskiirusele ega gravitatsioonivälja konstantsusele ajas piiranguid ei seata [6].

1.2.1 Lineariseeritud väljavõrrandid

Nõrga gravitatsioonivälja tingimus tähendab väikest aegruumi kõverust. Sellest tulenevalt saab üldise meetrika esitada kui Minkowski taust-aegruumi meetrika $\eta_{\mu\nu}$, millele lisandub väikene kõverusest tulenev häiritus $h_{\mu\nu}$ [6]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \tag{1.8}$$

Kuna $h_{\mu\nu}$ on väike, saab eirata selle esimesest astmest kõrgemaid liikmeid ehk lineariseeritakse võrrandid $h_{\mu\nu}$ suhtes. Aegruumi kontravariantne meetrika avaldub seosega $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ [7]. Seega kontra- ja kovariantne häiritus on seotud kui $h_{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}$. Häirituse indekseid tõstab ja langetab lineariseeritud teoorias $\eta_{\mu\nu}$ ja $\eta^{\mu\nu}$, mitte üldine aegruumi meetrika [11].

Meetrikale (1.8) vastavad $h_{\mu\nu}$ suhtes lineariseeritud Christoffeli sümbolid avalduvad kui [8]

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\beta h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\beta h_\alpha^{\ \mu} + \partial_\alpha h_\beta^{\ \mu} - \partial^\mu h_{\alpha\beta}\right).\end{aligned}$$

Analoogselt, Ricci tensori puhul omavad tähtsust vaid Christoffeli sümbolite tuletised, sest väljasuuruste korrutis annab vaid meetrika häirituse kõrgemaid astmeid [4]:

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\partial_\nu h_\mu^{\ \alpha} + \partial_\alpha\partial_\mu h_\nu^{\ \alpha} - \partial_\alpha\partial^\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h\right).\end{aligned}$$

Suurus h on häirituse $h_{\mu\nu}$ jälg ehk $h = h^{\alpha}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Ricci skaalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ avaldub lineariseerituna $h_{\mu\nu}$ suhtes kujul $R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ [6].

Esitades Einsteini võrrandi (1.7) $\eta_{\mu\nu}$ ja $h_{\mu\nu}$ kaudu, arvestades Einsteini tensori definitsiooni (1.6), on tulemus [4]

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha}\partial_{\nu}h_{\mu\alpha} + \partial^{\alpha}\partial_{\mu}h_{\nu\alpha} - \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}h - \\ \eta_{\mu\nu}\left(\partial^{\beta}\partial^{\alpha}h_{\alpha\beta} - \partial^{\beta}\partial_{\beta}h\right) = 16\pi\, T_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Eeltoodud võrrandid saab viia lihtsamale kujule defineerides pööratud jäljega häirituse [8]

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h.$$

Et kehtib omadus $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, siis $\bar{h} = -h$ ja $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$. Lineariseeritud Einsteini võrrand pööratud jäljega häirituse kaudu on [4]

$$-\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^{\beta}\partial^{\alpha}\bar{h}_{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\alpha} + \partial^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\alpha} = 16\pi\, T_{\mu\nu}.$$

Neid võrrandeid saab lihtsustada sobivate kalibratsioonidega. Üldrelatiivsusteoorias on lubatud infinitesimaalsed koordinaaditeisendused $x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$, kus ξ^{μ} on samas suurusjärgus kui $h_{\mu\nu}$ [7]. Lineariseeritud gravitatsioonil on sellest tulenevalt kalibratsioonivabadus $h_{\mu\nu} \to h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}$ [9]. Kalibratsiooniteisendus $\bar{h}_{\mu\nu}$ jaoks on [12]

$$\bar{h}_{\mu\nu} \;\to\; \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\xi_{\alpha}, \qquad \bar{h} \;\to\; \bar{h}' = \bar{h} + 2\partial^{\alpha}\xi_{\alpha}.$$

On võimalik valida selline ξ^{μ}, mis oleks lahendiks võrrandile $\partial^{\mu}\partial_{\mu}\xi_{\nu} = \partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu}$ [7]. Jättes edaspidi tähistuses primmi ära, annab see tingimuse [6]

$$\partial_{\alpha}\,\bar{h}^{\mu\alpha} = 0, \qquad \partial^{\alpha}\,\bar{h}_{\mu\alpha} = 0. \tag{1.10}$$

Selline kalibratsioon, mida elektromagnetismi eeskujul nimetatakse Lorentzi kalibratsioonitingimuseks, on leitav igal füüsikalisel juhul, mistõttu ei kaotata üldsust seda rakendades [4]. Osatuletise kommutatiivsusesest on selgelt näha, et sellise kalibratsioonitingimusega on lineaarse teooria väljavõrrandid lõpuks kujul [4]

$$-\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\,\bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi\, T_{\mu\nu}. \tag{1.11}$$

Kasutades Minkowski ruumi d'Alemberti operaatorit $\partial^{\alpha}\partial_{\alpha} \equiv \Box = -\partial^2/\partial t^2 + \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$

võib selle kirjutada ka kujul

$$-\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi\, T_{\mu\nu}. \tag{1.12}$$

Et meetrika häiritus $h_{\mu\nu}$ on gravitatsioonivälja amplituud, siis suurusest $\bar{h}_{\mu\nu}$ võibki mõelda kui gravitatsiooniväljast. Antud väljavõrrandi, mis on sisult teist järku diferentsiaalvõrrandid, lahendid kirjeldavad nõrku gravitatsioonilaineid. Mittetriviaalsete allikate korral on lahendite saamine keerukas ning lõplikult ühest tulemust ei leidu [4].

1.2.2 Tasalaine lahend vaakumis

Gravitatsioonilainete liikumist vaakumis, kus $T_{\mu\nu} = 0$, kirjeldab valemi (1.12) alusel lainevõrrand $-\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$. Lihtsaim lahend on monokromaatiline tasalaine [7]

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re\left[A_{\mu\nu}\, e^{ik_\alpha x^\alpha}\right].$$

$\Re$ tähistab komplekssuuruse reaalosa. $A_{\mu\nu}$ on laine amplituud ning k_α on lainevektor. Lainevõrrandist $-\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ning Lorentzi tingimusest (1.10) kehtivad vastavalt [4]

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \qquad A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0.$$

Esimesest tingimusest võib välja lugeda, et gravitatsioonilaine liigub valguskiirusel [6]. Teine tingimus näitab, et tegemist on ristlainega [12].

Amplituudil $A_{\mu\nu}$ on üldiselt kümme vabadusastet ning ristlaine tingimus $A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0$ fikseerib nendest neli [7]. Kalibratsioonitingimuse (1.10) rakendamine annab meile veel vabaduse $\Box\xi^\mu = 0$ piires valida vektori $\xi^\mu = -iC^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha)$ neli väärtust C^μ, mis määravad ka amplituudi neli komponenti. Sellise kalibratsiooni saab täpselt paika panna valides ühikulise 4-kiiruse $\boldsymbol{u}$, kus $u_\mu u^\mu = -1$, ning nõudes, et kehtiks $A_{\mu\nu}u^\nu = 0$. See fikseerib kolm $A_{\mu\nu}$ vabadusastet. Veel ühe vabadusastme saab fikseerida nõudes $A_{\mu\nu}$ jäljevabadust ehk $A^\mu{}_\mu = 0$ [4]. Tasapinnalisele gravitatsioonilainele jääb seega kaks vabadusastet, mis on kooskõlas teistel kaalutlustel raamatus [6] saadud vabadusastmete arvuga. Need vabadusastmed ilmnevad laine polarisatsioonidena.

Minnes üle Lorentzi taustsüsteemi, kus $\boldsymbol{u} = (1,0,0,0)$, avalduvad tingimused $A_{\mu\alpha}k^\alpha = A_{\mu\nu}u^\nu = A^\mu{}_\mu = 0$ kujul [4]

$$h_{\mu 0} = 0, \qquad \partial_j h_{kj} = 0, \qquad h_{kk} = 0. \tag{1.13}$$

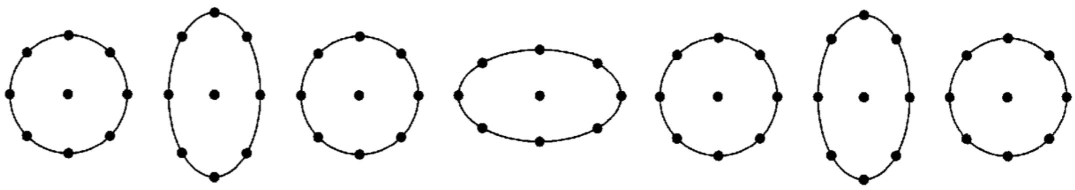
Tensorit, mis täidab tingimusi (1.13) nimetatakse ristlaineliseks jäljevabaks tensoriks. Kalibratsiooni, kus $h_{\mu\nu}$ taandub ristlaineliseks jäljevabaks osaks $h_{ij}^{(TT)}$, nimetatakse vastavalt TT (ingl. transverse-traceless) kalibratsiooniks [6]. Sellises kalibratsioonis on ainult ruumilised komponendid h_{jk} nullist erinevad. Ruumilisel TT-tensoril puudub divergents ehk tegu on ristlainega. Samuti on selle jälg $h_{kk} = h$ võrdne nulliga. Sellest tulenevalt $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$ [4]. TT kalibratsiooni saab leida ainult vaakumsüsteemi korral [6].

Vaatlusel on laine, mis liigub z-telje suunas, sagedusega $\omega = k^0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Tingimustest (1.13) järeldub, et lainevõrrandi lahendi $h_{\mu\nu}^{(TT)}$ mittetriviaalsed komponendid on [4]

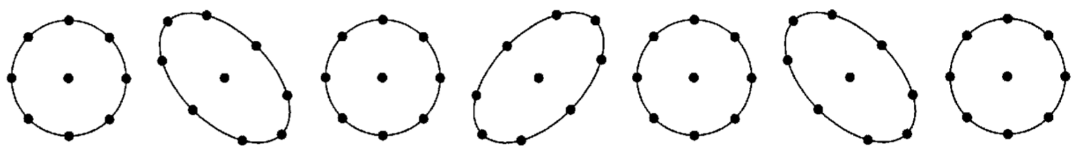
$$
\begin{aligned}
h_{xx}^{(TT)} &= -h_{yy}^{(TT)} = \Re\left[A_+ e^{-i\omega(t-z)}\right], \\
h_{xy}^{(TT)} &= h_{yx}^{(TT)} = \Re\left[A_\times e^{-i\omega(t-z)}\right].
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

Seega saab gravitatsioonilaine jagada kaheks erineva lineaarse polarisatsiooniga komponendiks, kus A_+ ja $A_\times$ on vastavad amplituudid. Analoogselt elektromagnetlainega võib lainet esitada ka kahe ringpolarisatsiooni kaudu [6].

Kui laine polarisatsioonivektoriga $\boldsymbol{e}_x$ paneb test-osakese võnkuma x-tasandis ning $\boldsymbol{e}_y$ y-tasandis, siis ühikpikkusega lineaarselt polariseeritud tensorid on $\boldsymbol{e}_+ = \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y$ ning $\boldsymbol{e}_\times = \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y$. Gravitatsioonilaine mõju test-osakestele saab kõige lihtsamalt kirjeldada vaadeldes laine liikumissuunaga risti xy-tasandil ringis asuvaid osakesi. Joonis 1.1 [6] näitab, kuidas muutuvad osakeste geodeetilised kaugused polarisatsiooniga $\boldsymbol{e}_+$ laine möödumisel (joonis 1.1a) ja polarisatsiooniga $\boldsymbol{e}_x$ laine möödumisel (joonis 1.1b).



(a) Polarisatsioonile $\boldsymbol{e}_+$ vastav osakeste liikumine



(b) Polarisatsioonile $\boldsymbol{e}_x$ vastav osakeste liikumine

Joonis 1.1: Gravitatsioonilainete mõju vastavalt polarisatsioonile raamatust [6].

1.3 Täieliku üldrelatiivsusteooria gravitatsioonilained

Lineariseeritud gravitatsiooniteooria annab edukalt edasi gravitatsioonilainete esmased füüsikalised omadused ning on väga hea lähendus lokaalselt. See ei ole siiski võimeline käsitlema lainete keerulisemat olemust.
Aegruum kõverdub mateeriast ning muudest energiatest, aga ka gravitatsioonilainete tõttu. Seepärast ei ole taust-aegruum ideaalselt tasane. Gravitatsioonilaine muutub puutudes kokku nende kõverustega. Selle lainepikkus muutub ehk toimub gravitatsiooniline punanihe, samuti toimub refraktsioon. Pulsslainel tekivad tagasihajumisest „sabad”, mis liiguvad pulsi taga valguskiirusest aeglasemalt. Selline efekt toimub ka tasases taust-aegruumis lainete enda tekitatud aegruumi kõverusest. Need mõjud on lokaalselt väga väikesed ning neid tuleb arvestada alles aegruumi taustkõveruse $\mathcal{R}$ skaalal.
Gravitatsioonilained kannavad ära energiat gravitatsioonikiirgusena. Lineaarses teoorias kirjeldatud ideaalselt perioodiline laine ei saa reaalsuses tekkida, sest allikas kaotab energiat ning saab parimal juhul kiirata vaid peaaegu perioodilist lainet.

Täpseid gravitatsioonilaine lahendeid on mitmeid, mis on enamasti matemaatiliselt väga keerukad. Kõikide ülaltoodud aspektide hoomamist on raske saavutada kompaktses vormis. Õnneks saab ülalnimetatud lainete füüsikalist sisu kirjeldada ka täielikus üldrelatiivsusteoorias teatud lähendusega. Täpset lahendit saab kasutada alusena gravitatsioonilise kiirguse uurimiseks, tuletades kiirgust ja selle energiat kirjeldavad valemid. Käesolev alapeatükk põhineb allikal [4], kui ei ole viidatud teisiti.

1.3.1 Lühilaineline lähendus

Vaatlusel on vaakum taust-aegruum, mille kõveruse suurusjärk on $\mathcal{R}$. Gravitatsioonilaine amplituud on $\mathcal{A}$ ning nõutud on tingimuse $\mathcal{A} \ll 1$ kehtimine. Samuti kehtigu tingimus $\lambdabar/\mathcal{R} \ll 1$, kus $\lambdabar = \lambda/2\pi$ on taandatud lainepikkus. Täpse lahendi analüüsist järeldub, et laine karakteerne pikkus $\lambdabar$ on palju väiksem kui tausta karakteerne pikkus $\mathcal{R}$, mis võimaldab lainet taustast eristada. Kasutusel on koordinaadisüsteem, milles saab aegruumi meetrika jagada kõverusega taustaks ja häiritusteks:

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{1.15}$$

Antud koordinaadisüsteemis on häirituse amplituud $\mathcal{A}$. Tausta meetrika $\tilde{g}_{\mu\nu}$ muutub skaalas $\gtrsim \mathcal{R}$, häiritus muutub $\lambdabar$ skaalas. Tähistades tüüpilise väärtuse „$\sim$” ülatähisega, rõhutamaks, et tegemist ei ole täpse seosega, saab neid omadusi matemaatiliselt väljendada kui

$$h_{\mu\nu} \lesssim \widetilde{\tilde{g}_{\mu\nu}} \cdot \mathcal{A}, \qquad \partial_\alpha \tilde{g}_{\mu\nu} \lesssim \frac{\widetilde{\tilde{g}_{\mu\nu}}}{\mathcal{R}}, \qquad \partial_\alpha h_{\mu\nu} \sim \frac{\widetilde{h_{\mu\nu}}}{\lambda}.$$

Ricci tensor avaldatuna meetrika (1.15) kaudu on

$$R_{\mu\nu} = R^{(B)}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu}(h) + R^{(2)}_{\mu\nu}(h) + \text{ viga}.$$

Siin $R^{(B)}_{\mu\nu}$ on Ricci tensor taust-meetrika jaoks ning

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = \frac{1}{2}\Big(-\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu h - \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\nu h_{\alpha\mu} + \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\mu h_{\alpha\nu}\Big), \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu}(h) = \frac{1}{2}\Bigg[&\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_\mu h_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}\Big(\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu h_{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\nu h_{\alpha\mu} - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\mu h_{\alpha\nu}\Big) + \\ &+ \tilde{\nabla}^\beta h_\nu^{\ \alpha}\Big(\tilde{\nabla}_\beta h_{\alpha\mu} - \tilde{\nabla}_\alpha h_{\beta\mu}\Big) - \Big(\tilde{\nabla}_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^\alpha h\Big)\Big(\tilde{\nabla}_\nu h_{\alpha\mu} + \tilde{\nabla}_\mu h_{\alpha\nu} - \tilde{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu}\Big)\Bigg]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Suurus $\bar{\nabla}$ tähistab kovariantset tuletist taust-meetrika $\tilde{g}_{\mu\nu}$ suhtes. Tasub ära märkida, et ülaltoodud Ricci tensori liikmete suurusjärgud on

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h) \sim \frac{\mathcal{A}}{\lambda^2}, \qquad R^{(2)}_{\mu\nu}(h) \sim \frac{\mathcal{A}^2}{\lambda^2}, \qquad \text{viga} \sim \frac{\mathcal{A}^3}{\lambda^2}.$$

Lühilainelise lähenduse sisuks on leida ligikaudsed lahendid vaakumi väljavõrranditele $R_{\mu\nu} = 0$. Selleks jagatakse $R_{\mu\nu}$ kolmeks osaks ning pannakse nad kõik võrduma nulliga.

1. Esiteks võetakse $\mathcal{A}$ suhtes lineaarsed komponendid nulliks, mis annab lineaarse teooriaga analoogsed võrrandid. Et taust-aegruumi kõverdumine gravitatsioonilaine mõjul ei esine lineaarses teoorias, siis $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ei ole lineaarne $\mathcal{A}$ suhtes. Sobivaks liikmeks on $R^{(1)}_{\mu\nu}(h)$. Küll aga võib $h_{\mu\nu}$ sisaldada mittelineaarseid $\mathcal{A}$ parandusi, mida ei tohiks kaotada. Need tähistatakse eraldi $j_{\mu\nu}$ ning võetakse

   $$R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0$$

   See on lineaarsete gravitatsioonilainete $h_{\mu\nu}$ liikumisvõrrand, analoogselt võrrandiga (1.9). Sarnaselt saab selle esitada $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}h$ kaudu. See annab viie liidetavaga võrrandi. Lihtsustamiseks kasutatakse taaskord vastava koordinaadimuutuse abil kalibratsioonitingimust $\tilde{\nabla}_\alpha \bar{h}_\mu^{\ \alpha} = 0$, mis kaotab kaks liiget. Samuti arvestatakse, et arvutused ei ole täielikult täpsed. Üks võrrandi liikmetest on arvutuse vea suurusjärgus

$\mathcal{A}^3/\lambda\!\!\!^{-2}$, mistõttu pole mõistlik seda arvestada. Alles jääb

$$\tilde{\nabla}^{\alpha}\,\tilde{\nabla}_{\alpha}\,\bar{h}_{\mu\nu} + 2R^{(B)}_{\alpha\mu\beta\nu}\,\bar{h}^{\alpha\beta} = 0$$

See võrrand kirjeldab gravitatsioonilainete interaktsiooni taust-aegruumiga. Sellest avalduvad gravitatsiooniline punanihe – lainete sageduse muutus gravitatsiooni ehk aegruumi kõveruse mõjul – ning polarisatsiooni pöödumine, pikkadel lainepikkustel ka tausthajumise mõjul „sabade” teke. Kuni lained on nõrgad ($\mathcal{A} \ll 1$) kehtib see võrrand nii suurtel kui väiksestel lainepikkustel.

2. Teiseks eraldatakse „tasane” osa, mis muutub laine karakteersest pikkusest $\lambda\!\!\!^{-}$ palju suuremal skaalal, ning väikeste muutuste skaalal „kare” osa. Et sellist eraldust saavutada, võetakse keskmist üle mitme lainepikkuse. „Tasane” osa avaldub kui

$$R^{(B)}_{\mu\nu} + \left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\right\rangle + \text{ viga} = 0$$

Võrrandist on näha, et gravitatsioonilained tekitavad taust-aegruumil kõverust. Selguse eesmärgil saab võrrandi kirjutada ümber kujul

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = R^{(B)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(B)}\tilde{g}_{\mu\nu} = 8\pi\, T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}, \text{ kus} \tag{1.18}$$

$$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\left[\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle R^{(2)}(h)\right\rangle\tilde{g}_{\mu\nu}\right]. \tag{1.19}$$

Siin $T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ on gravitatsioonilainete efektiivne energia-impulsi pseudotensor. Selle leidmiseks peab arvestama, et gravitatsioonilainete energiat ei saa vaadata lokaalselt, vaid ainult globaalselt. Samuti ei saa energiat lokaliseerida ühte lainepikkusesse. Seega tuleb $T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ hindamiseks keskmistada üle mitme lainepikkuse. Selleks kasutatakse Brilli-Hartle'i keskmistamist. Sellisel keskmistamisel kovariantne tuletis kommuteerub ning gradiendi keskmine on null. Nendest omadustest tulenevalt on võimalik integreerida ositi, liigutades tuletist ühelt h-lt teisele:

$$\begin{aligned}
&\left\langle h\,\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{\nabla}_{\alpha}h_{\mu\nu}\right\rangle = \left\langle h\,\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{\nabla}_{\beta}h_{\mu\nu}\right\rangle,\\
&\left\langle\tilde{\nabla}_{\beta}\left(\tilde{\nabla}_{\alpha}h\,h_{\mu\nu}\right)\right\rangle = 0,\\
&\left\langle h\,\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{\nabla}_{\alpha}h_{\mu\nu}\right\rangle = \left\langle -\tilde{\nabla}_{\beta}h\,\tilde{\nabla}_{\alpha}h_{\mu\nu}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Keskmistamise omaduste rakendamine toob kaasa teatud ebatäpsused. Kovariantse tuletise kommuteerumisel tekib viga suurusjärgus $\sim (\lambda\!\!\!^{-}/\mathcal{R})^2$ ning gradiendi keskmise nulliks võtmisel viga $\sim \lambda\!\!\!^{-}/\mathcal{R}$.

Asendades teist järku häiritustega Ricci tensori (1.17) valemisse (1.19) ning kasutades keskmistamise omadusi, saab näidata, et teine liige avaldises (1.19) on null, $\left\langle R^{(2)}(h)\right\rangle = 0$. Rakendades kalibratsioonitingimust $\tilde{\nabla}_\alpha \bar{h}_\mu^{\ \alpha} = 0$ ning TT teisendust, mis annab $\bar{h} = 0$, tuleb gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensor

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})} = \frac{1}{32\pi}\left\langle \tilde{\nabla}_\mu \bar{h}_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \bar{h}^{\alpha\beta}\right\rangle . \tag{1.21}$$

Energia-impulsi pseudotensori vea suurusjärk on keskmistamisest $\sim \lambda\!\!\!^{-}/\mathcal{R}$. Sellisel täpsusel omab gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensor samasugust rolli taust-aegruumi kõverdumisel nagu iga teine energia-impulsi tensor. Jäävusseadustes käitub see samuti nagu tavaline energia-impulsi tensor – kehtib $\tilde{\nabla}_\nu T^{\mu\nu}_{(\mathrm{GW})} = 0 +$ viga, kus viga on lühilainelisel lähendusel ebaoluline.

3. Väikseid fluktuatsioone hoomav ehk „kare” osa avaldub mittelineaarseid parandeid $j_{\mu\nu}$ sisaldava $R_{\mu\nu}^{(1)}(j)$ ja keskmistatud $R_{\mu\nu}^{(2)}(h)$ kaudu:

$$R_{\mu\nu}^{(1)}(j) + R_{\mu\nu}^{(2)}(h) - \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h)\right\rangle + \text{ viga} = 0 .$$

Võrrandist on näha, kuidas gravitatsioonilaine h tekitab kõrgema astme parandeid j iseenda suhtes. See näitab, et laine interakteerub iseendaga. Seega gravitatsioonilainete kokkusaamisel nad mõjutavad teineteist.

1.3.2 Gravitatsioonikiirguse allikad

Kõige otsekohesem on uurida aeglaselt liikuva allika kiirgust peaaegu newtonlikus süsteemis. Alguses on allika kohta eelduseks vaid tema isoleeritus. Aegruum muutugu asümptootiliselt tasaseks allikast kaugel ning koordinaadisüsteem koos sellega.

Gravitatsioonivälja amplituud $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ defineeritakse selliselt, et see kehtiks igal pool, sealhulgas allika sees. Sarnaselt varasemaga saab defineerida ka $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Nõrga välja korral, näiteks allikast kaugel, on $\bar{h}_{\mu\nu}$ sama gravitatsiooniväli, mis lineariseeritud teoorias. Kui väli on tugev, tavaliselt allika sees, ei ole praegusel $\bar{h}_{\mu\nu}$ mingit seost lineariseeritud teooriaga!

Kiirguse valemite tuletamiseks on vaja leida $\bar{h}_{\mu\nu}$ kaudu varem kirjutamata jäänud täpsed Einsteini väljavõrrandid. Selleks on tarvis kirjutada lineaarse teooria väljavõrrand (1.11) Maxwelli võrranditega $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu$ sarnasele kujule, et mugavalt leida elektromagnetismi eeskujul integraaltulemusi. Tensorile $F^{\mu\nu}$ sobivaks analoogiks on $H^{\mu\alpha\nu\beta} = -\left(\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \bar{h}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}\right)$. Lineaarne võrrand tuleb kujul $\partial_\beta\partial_\alpha H^{\mu\alpha\nu\beta} = 16\pi\ T^{\mu\nu}$. Täpse lahendi saamiseks lisatakse mittelineaarsed parandid. Et

$\partial_\beta \partial_\alpha H^{\mu\alpha\nu\beta}$ on Einsteini kõverustensori $G^{\mu\nu}$ lineariseeritud lähend, siis mittelineaarsed komponendid avalduvad vahega

$$16\pi t^{\mu\nu} = \partial_\beta \partial_\alpha H^{\mu\alpha\nu\beta} - 2G^{\mu\nu} . \tag{1.22}$$

Siin $t^{\mu\nu}$ on gravitatsioonivälja energia-impulsi pseudotensor, mis sisaldab $\bar{h}^{\mu\nu}$ teises või kõrgemas astmes. $t^{\mu\nu}$ on pseudotensor, sest see teiseneb nagu tõeline tensor vaid lineaarteisendustel. Väljavõrrandites täidab energia-impulsi tensori $T^{\mu\nu}$ rolli nüüd keerukam $\mathcal{T}^{\mu\nu} = (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})$. Täpne võrrand avaldub, arvestades ka tingimust $\partial_\alpha \bar{h}_\mu^{\ \alpha} = 0$, kui

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\alpha \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) . \tag{1.23}$$

Tuleb meeles pidada, et $\bar{h}^{\mu\nu}$ on nüüd laiendatud definitsiooniga.

Täpne lahend võrrandile (1.23) on

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x^j) = 4 \int_\Omega \frac{\mathcal{T}^{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|,\ \boldsymbol{x'})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|} d^3x' = 4 \int_\Omega \frac{(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{\mathrm{ret}}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|} d^3x' . \tag{1.24}$$

Integreerimine käib üle tasase kolmemõõtmelise ruumi Ω, kus $d^3x' = dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}$. $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|$ on punktide $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{x'}$ vaheline eukleidiline kaugus $\left(\sum_j (x^j - x^{j\prime})^2\right)^{1/2}$ [10]. Indeks „ret” tähendab suuruste vaatlemist hilinevas aegruumi punktis $(t',\ x^{j\prime}) = (t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|,\ x^{j\prime})$.

Lisandugu eeldus, et R suurune allikas liigub aeglaselt, $R \ll \lambda\!\!\!^{-}$. Tähistagu r kaugust koordinaatide alguspunktist, mis asugu allika sees. Aeglaselt liikuvatel süsteemidel panustavad hilinevatesse integraalidesse a) mateeria allikas, kus $T^{\mu\nu} \neq 0$ ning b) gravitatsiooniline allikas suurusega L, mis on vahemikus $R \lesssim L \ll \lambda\!\!\!^{-}$, sest seal panustab pseudotensor $t^{\mu\nu}$ veel märkimisväärselt. Allika lähialal ($R \ll r \ll \lambda\!\!\!^{-}$) väheneb pseudotensori osa kui $1/r^4$ ning kiirgusalas ($r \gg \lambda\!\!\!^{-}$) kui $1/r^2$. Nende panus avaldub alles üle pikema aja ja kiirgamisprotsessi ei mõjuta.

Eeldusega $\lambda\!\!\!^{-}/R \sim \lambda\!\!\!^{-}/L \ll 1$ saab teguri $\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|}$ integraalis (1.24) ritta arendada $\boldsymbol{x'}/r$ astmetena:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{4}{r} \int [T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x'}, t - r) + t^{\mu\nu}(\boldsymbol{x'}, t - r)] d^3x' \\ + O\left\{ \frac{x^j}{r^2 \lambda\!\!\!^{-}} \int x^{j\prime} [T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x'}, t - r) + t^{\mu\nu}(\boldsymbol{x'}, t - r)] \, d^3x' \right\}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Avaldada tasub kiirgusväli $h_{jk}^{(TT)}$, sest just see sisaldab gravitatsioonilainete levikuinformatsiooni. $h_{jk}^{(TT)} = \bar{h}_{jk}^{(TT)}$ koostamiseks on vaja vaid ruumilisi komponente $\bar{h}^{jk}$, millele vastab integraali sees pingejaotus $T^{jk} + t^{jk}$. Edasiseks arvutamiseks kasutatakse täpset seost $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, mis annab $\partial_\nu(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0$ [4]. Sellest järeldub, et $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu i} = 0$ võib lahti kirjutada kui $\partial_0 \mathcal{T}^{0i} = -\partial_k \mathcal{T}^{ki}$ ning $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu 0} = 0$ kui $\partial_0 \mathcal{T}^{00} = -\partial_k \mathcal{T}^{k0}$. Kasutades neid seoseid on võimalik tuletada vajalik $T^{jk} + t^{jk}$ avaldis [10]

$$\partial_0\partial_0\left[(T^{00} + t^{00})x^j x^k\right] = \partial_0\left(T^{0j}x^k + t^{0k}x^j\right) = 2(T^{jk} + t^{jk}).$$

Gravitatsioonivälja allika kvadrupoolmoment on defineeritud kui

$$I_{jk} \equiv \int \left[T^{00}(t,\boldsymbol{x}) + t^{00}(t,\boldsymbol{x})\right] x^j x^k \, d^3x.$$

Seega saab kirjutada

$$\int (T^{jk} + t^{jk})\, d^3x = \frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2}.$$

Eeldusel, et süsteem on peaaegu newtonlik ehk gravitatsiooni panus koguenergiasse on väike, kehtib

$$t^{00} \sim (\partial_j \Phi)^2 \sim \frac{M^2}{R^4} \sim \frac{M}{R} T^{00} \ll T^{00} \quad \Rightarrow \; I_{jk}(t) = \int T^{00}(t,\boldsymbol{x}) x^j x^k d^3x.$$

Siin on Φ gravitatsioonivälja skaalarpotentsiaal, kusjuures $\Phi \sim \frac{M}{R}$, ning M ja R vastavalt allika mass ja suurus. Allika sees on $|t^{jk}| \sim |\partial_j \Phi \partial_k \Phi| \sim T^{00}|\Phi|$. Võrrand (1.25) avaldub kujul

$$\begin{aligned}\bar{h}^{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{2}{r}\frac{d^2 I_{jk}(t-r)}{dt^2} + O\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|T^{jk}|}{T^{00}} + |\Phi|\right)\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}} M\right] = \\ &= \frac{2}{r}\frac{d^2 I_{jk}(t-r)}{dt^2}\left\{1 + O\left[\frac{|T^{jk}|}{T^{00}} + \frac{M}{R}\right]\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R}\right\}.\end{aligned}$$

Kõiki eeldusi arvestades saab viimase osa lugeda vähetähtsaks. Otsitava $\bar{h}^{(TT)}_{jk}$ saamiseks tuleb indekseid langetada taust-meetrikaga $\eta_{lm} = \delta_{lm}$. Seejärel saab kasutada radiaalselt liikuvate lainete projektsiooni-operaatorit $P_{lm} = \delta_{lm} - n_l n_m$, kus $n_l = x^l/r$, et leida TT osa.

$$h^{(TT)}_{jk}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 I^{(TT)}_{jk}(t-r)}{dt^2}, \quad \text{kus } I^{(TT)}_{jk} = P_{jl} I_{lm} P_{mk} - \frac{1}{2} P_{jk}(P_{lm} I_{ml}).$$

Väline vaatleja ei saa otseselt mõõta kvardupoolmomenti, mistõttu on mõistlik see asendada taandatud kvadrupoolmomendiga

$$I\!\!\!-_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk} I = \int (T^{00} + t^{00})\left(x^j x^k - \frac{1}{3}\delta_{jk} r^2\right) d^3x.$$

Kuna kehtib $I^{(TT)}_{jk} = \not{I}^{(TT)}_{jk}$, siis avaldub gravitatsioonilainete kvadrupoolvõrrand lõpuks valemiga

$$h^{(TT)}_{jk}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{2}{r} \frac{d^2 \not{I}^{(TT)}_{jk}(t-r)}{dt^2} . \tag{1.26}$$

Valemis esinev $\not{I}_{jk}$ langeb täpselt kokku tähe katseliselt mõõdetava taandatud kvadrupoolmomendiga, mis tuleneb tähe potentsiaalist Φ sügaval lähialas $r \ll \lambdabar$.

Elektromagnetismi eeskujul saab analüüsida gravitatsioonilise kiirguse olemust. Aeglaselt muutuva massijaotuse kiirguse saab jagada multipoolide reaks. Mass on jääv suurus, mistõttu puudub monopoolne kiirgus. Massi dipoolmoment ja voolu dipoolmoment on vastavalt võrdelised süsteemi impulsi ja nurkimpulsiga, mis on samuti jäävad suurused. Seega peab gravitatsioonilist kiirgust tekitama kvadrupoolmoment [10]. Valem (1.26) kinnitab seda järeldust.

Sfäärilise sümmeetriaga massijaotuse kvadrupoolmoment on konstantne [10]. Järelikult gravitatsioonilaineid ei kiirga sfäärilise sümmeetriaga mateeria jaotus. Samuti ei kiirga sümmeetrilised protsessid ja liikumine. Lainete tekkeks on vaja asümmeetrilist massi liikumist. Suur osa kosmoses toimuvaid protsesse on piisavalt asümmeetrilised, näiteks kaksiktähtede orbiidid teineteise suhtes [13].

Peatükk 2

Gravitatsioonilained skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteoorias

Üldrelatiivsusteooria on matemaatika mõttes tensorteooria, kuna selles on gravitatsioonväli esitatud meetrilise tensorväljana. Kui g on neljamõõtmelise aegruumi meetrika $g_{\mu\nu}$ determinant, R on Ricci skalaar ning G on Newtoni gravitatsioonikonstant, siis kirjeldab üldrelatiivsusteooriat Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaal [6]

$$S_{\mathrm{GR}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,R.$$

Skalaar-tensorgravitatsioon on alternatiivne üldrelatiivsusteooria laiendus, mille kohaselt panustab gravitatsioonivälja lisaks tensoriaalsele komponendile ka skalaarne väli [14]. Üks esimesi motivatsioone selle arendamiseks oli üldrelatiivsusteooria puudulik ühildus Machi printsiiga, mille kohaselt lokaalseid inertsiaalseid jõude võib tõlgendada kaugest, vaatleja suhtes kiirendusega allikast pärineva gravitatsiooni mõjuna. Seda probleemi saab lahendada skalaarse interaktsiooni lisamisega. See võib kaasa tuua gravitatsioonikonstandi G muutumise vastavalt massijaotusele [15]. Lihtsaim ja levinuim skalaar-tensorväljateooria on nende ideede põhjal arendatud Bransi–Dicke (BD) teooria. Tensorväljaks on füüsikaline meetrika $g_{\mu\nu}$ ning fundamentaalne skalaarväli on tähistatud kui Φ. Teooria ainus vaba dimensioonitu parameeter on konstant ω, mille piirväärtusel $\omega \to \infty$ taastub üldrelatiivsusteooria. Vastav mõjufunktsionaal avaldub kujul [16]

$$S_{\mathrm{BD}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\Phi R - \frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right] + S_{(\mathrm{aine})}.$$

Kosmoloogia ja kvantväljateooria arenguga on tulnud juurde mitmeid küsimusi, näiteks universumi inflatsioon, tumeenergia olemus ja gravitatsiooni ühildamatus kvantfüüsikaga, millele üldrelatiivsusteooria ei anna täielikke üheseid vastuseid. See toetab laiendatud ja alternatiivsete teooriate kandepinda [17].

Kõige üldisemal kujul avaldub skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria mõjufunktsionaal summana gravitatsioonilisest, puhtalt skalaarsest ja ainelisest osast, mis ei sõltu skalaarväljast [6]:

$$S_{\mathrm{ST}} = \int d^4x \sqrt{-g}\left[f(\phi)R - \frac{1}{2}h(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - U(\phi) + \mathcal{L}_M\right].$$

Siin $f(\phi)$, $h(\phi)$ ja $U(\phi)$ on teooriat defineerivad funktsioonid, kusjuures $U(\phi)$ on üldine skalaarvälja potentsiaal ning $\mathcal{L}_M$ on aine lagranžiaan [6]. Bransi–Dicke teooria üldistust, kus $\omega = \omega(\Phi)$, nimetatakse Jordani–Fierzi–Bransi–Dicke (JFBD) teooriaks. Selle mõjufunktsionaal avaldub eeltoodu eeskujul kui [18]

$$S_{\mathrm{JFBD}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{-g}\left[\Phi R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi}\partial_\alpha\Phi\partial^\alpha\Phi - 16\pi G\cdot V(\Phi) + \mathcal{L}_M\right]. \tag{2.1}$$

Newtoni gravitatsioonikonstanti G asendab skalaar-tensortüüpi gravitatsiooni puhul efektiivne gravitatsioonikonstant $G_{\mathrm{eff}} = G/\Phi$ ning üldrelatiivsusteooria taastub tingimusel $\Phi = const = 1$.

Skalaar-tensorteooria väljavõrrandid on leitavad variatsioonarvutustega. Mõjufunktsionaali (2.1) varieerimine meetrika $g_{\mu\nu}$ ja skalaarvälja Φ järgi annab vastavalt [18]

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = \frac{1}{\Phi}&\left[8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\omega+1}{2\omega+3}g_{\mu\nu}T\right) + \nabla_\mu\partial_\nu\Phi + \frac{\omega}{\Phi}\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi - \frac{g_{\mu\nu}}{4\omega+6}\frac{d\omega}{d\Phi}\partial_\alpha\Phi\,\partial^\alpha\Phi\right] + \\ &+ \frac{8\pi G}{\Phi}g_{\mu\nu}\frac{2\omega+1}{2\omega+3}V + g_{\mu\nu}\frac{8\pi G}{2\omega+3}\frac{dV}{d\Phi}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\Box\Phi = \frac{1}{2\omega+3}\left[8\pi GT - \frac{d\omega}{d\Phi}\partial_\alpha\Phi\,\partial^\alpha\Phi + 16\pi G\left(\Phi\frac{dV}{d\Phi} - 2V\right)\right]. \tag{2.3}$$

Võrrandites tähistab $T_{\mu\nu}$ tavalist aine energia-impulsi tensorit ja T selle jälge.

2.1 Lineariseeritud Bransi–Dicke teooria

Gravitatsioonilainete tuletamine ning uurimine skalaar-tensorväljateooria lineaarses lähendis on väga sarnane üldrelatiivsusteoorias tehtuga. Eesmärgiks on saada aimu skalaarvälja olemasolust tulenevatest muutustest. Selleks vaatame artiklis [12] läbitehtud tuletamist. Alguses on kasutusel JFBD teooria mõjufunktsionaaliga (2.1) vaakumsüsteemi korral, kus taust-aegruumile lisandub väikene häiritus. Taustaks on Minkowski aegruum $\eta_{\mu\nu}$ koos skalaarvälja konstantse väärtusega φ_0. Olgu φ_0 ka potentsiaali V miinimum, mis tähendab, et kehtib $V \simeq -\alpha\varphi^2 \Rightarrow \frac{dV}{d\Phi} \simeq -2\alpha\varphi$, kus φ on skalaarvälja häiritus. Erinev potentsiaal võrreldes artikliga [12] tuleneb efektiivse gravitatsioonikonstandi teistsugusest definitsioonist. Aegruumi meetrika $g_{\mu\nu}$ ning skalaarväli Φ koos lineaarsete häiritustega on [12]

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\ \Phi &= \varphi_0 + \varphi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tähistades $\psi = \varphi/\varphi_0$ ja $m^2 = \alpha\varphi_0/(2\omega+3)$ avalduvad häirituste suhtes lineariseeritud väljavõrrandid (2.2) ja (2.3) kujul

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = -\partial_\mu\partial_\nu\psi + \eta_{\mu\nu}\Box\psi, \tag{2.5a}$$

$$\Box\psi = 16\pi G \cdot m^2\psi. \tag{2.5b}$$

Üleminek BD teooriasse, eeldades $\omega = const$ ja $V = 0$, toob kaasa tingimuse $\alpha = 0$ ehk $m^2 = 0$. Võrrand (2.5b) on siis lihtsalt $\Box\psi = 0$ [12].

Defineerides asjakohase gravitatsioonivälja kirjeldava suuruse $\bar{h}_{\mu\nu}$ on võimalik viia võrrand (2.5a) samale kujule nagu üldrelatiivsusteoorias. Sellist soovi täidab skalaar-tensorväljateoorias $\bar{h}_{\mu\nu}$ kuju [5]

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}h - \tilde{g}_{\mu\nu}\psi = \\ &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \eta_{\mu\nu}\psi. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Meetrika häiritus avaldub pöördteisendusest kujul $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} - \eta_{\mu\nu}\psi$, kusjuures $\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h - 4\psi$ ja $h = -\bar{h} - 4\psi$. Võrrandid (2.5) on ülaltoodud tähistustes [12]

$$\begin{aligned} &\Box\bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha\bar{h}_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial^\alpha\bar{h}_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\beta\partial^\alpha\bar{h}_{\alpha\beta} = 0, \\ &\Box\psi = 0. \end{aligned}$$

Neid saab taas lihtsustada rakendades infinitesimaalse koordinaaditeisenduse $x^{\mu\prime} = x^\mu + \xi^\mu$ vabadust. Analoogselt esimese peatükiga saame kalibratsioonitingimuse $\partial^\mu\bar{h}'_{\mu\nu} = 0$. Skalaarväljale kehtib tingimus $\psi \to \psi' = \psi$. Edaspidi jäetakse tähistustes primmi ära. Lorentzi kalibratsioonis on väljavõrrandid seega

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad \Box\psi = 0.$$

Väljavõrrandite lihtsaimad lahendid on taas tasalained [12]

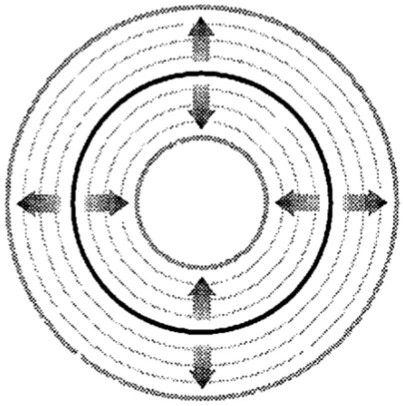
$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re\left[A_{\mu\nu}\, e^{ik^{\alpha}x_{\alpha}}\right],$$
$$\psi = \Re\left[a\, e^{ik^{\alpha}x_{\alpha}}\right].$$

Analoogselt alapeatükiga 1.2.2 kehtivad ka siin lainevektorile k^{α} ja amplituudile $A_{\mu\nu}$ väljavõrrandist ja kalibratsioonist tingimused $k_{\alpha}k^{\alpha} = 0$, $k^{\alpha}A_{\mu\alpha} = 0$. Amplituudi vabadusastmete hindamisel on taas lubatud täiendav kalibratsioon $\Box\xi^{\mu} = 0$, mis õigustab valikut $\partial_{\mu}\xi^{\mu} = -\frac{1}{2}\bar{h} + \psi$. Sellise tingimusega on $\bar{h} = 2\psi$ ja $h = 2\psi$ ning näeme, et $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ [12]. Erinevalt esimesest peatükist ei ole $h_{\mu\nu}$ skalaar-tensorvälja puhul jäljevaba. Võimalik on vaid eraldada jäljevaba osa, mis avaldub analoogselt esimese peatüki tulemusega (1.14). Sellele lisandub skalaarväljaga seotud jälje osa.

Vaadeldes z-telje suunas liikuvad lained $k^{\mu} = (k, 0, 0, k)$ ja tähistades jäljevaba osa lained kui $h^{(+)}(t+z)$ ja $h^{(\times)}(t+z)$, saame gravitatsioonilaineteks [12]

$$h_{jk}(t+z) = h^{(+)}(t+z)\cdot e^{(+)}_{jk} + h^{(\times)}(t+z)\cdot e^{(\times)}_{jk} + \psi(t+z)\cdot e^{(s)}_{jk}. \tag{2.7}$$

Laine esimesed kaks komponenti annavad üldrelatiivsusteooriast tuttavad $\boldsymbol{e}_{+}$ ja $\boldsymbol{e}_{\times}$ polarisatsioonid, mida kirjeldab joonis 1.1. Viimane liige $\psi(t+z)\cdot\boldsymbol{e}_{s}$ on skalaar-tensorteooriast tulenev skalaarne polarisatsioon. Mõtleme taas test-osakestele, mis asuvad ringis laine liikumissuunaga risti oleval xy-tasandil. Joonis 2.1 [6] näitab, kuidas muutuvad osakeste geodeetilised kaugused polarisatsiooniga $\boldsymbol{e}_{s}$ laine möödumisel.



Joonis 2.1: Skalaarse polarisatsiooni mõju raamatust [6].

2.2 Gravitatsioonilainete energia–impulsi pseudotensor Bransi–Dicke teoorias

Peatükis 1.3 defineerisime lühilainelises lähenduses gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensori, mis kirjeldas lainete mõju taust-aegruumile. Taastades valemitesse Newtoni gravitatsioonikonstandi G, avaldub pseudotensor üldrelatiivsusteoorias valemitega (1.19) ja (1.21) kui

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})} = -\frac{1}{8\pi G}\left[\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle R^{(2)}\right\rangle \tilde{g}_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{32\pi G}\left\langle \tilde{\nabla}_\mu \bar{h}_{\alpha\beta}^{(TT)} \tilde{\nabla}_\nu \bar{h}^{\alpha\beta}_{(TT)}\right\rangle. \tag{2.8}$$

Leiame gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensori BD teoorias. Käsitleme vaakumsüsteemi, kus potentsiaal on $V = 0$. Võtame aegruumi meetrika kujul $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ja skalaarvälja kujul $\Phi = \varphi_0 + \varphi$, kus φ_0 on konstantne. Meetrika häirituste teist järku liikmetega Ricci tensori keskmine avaldub valemist (1.17) Minkowski taust-aegruumi puhul kui

$$\begin{aligned}\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h)\right\rangle = \Bigg\langle \frac{1}{2}\bigg[\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\,\partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}\left(\partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta} + \partial_\beta\partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta\partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h_{\alpha\nu}\right) + \\ + \partial^\beta h_\nu^{\ \alpha}\left(\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}\right) - \left(\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\partial^\alpha h\right)\left(\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}\right)\bigg]\Bigg\rangle.\end{aligned}$$

Leiame $R_{\mu\nu}^{(2)}$ keskmise $\bar{h}_{\mu\nu}$ kaudu, kus $\bar{h}_{\mu\nu}$ sisaldab skalaarvälja osa vastavalt valemile (2.6). Meetrika häiritus avaldub sealt kui $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} - \eta_{\mu\nu}\psi$, mille saame otse asendada eelnevasse valemisse:

$$\begin{aligned}\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h)\right\rangle = \Bigg\langle \frac{1}{2}\bigg(\frac{1}{2}\partial_\mu(\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} - \eta_{\alpha\beta}\psi)\partial_\nu(\bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} - \eta^{\alpha\beta}\psi) + (\bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} - \eta^{\alpha\beta}\psi)\cdot \\ \cdot\Big[\partial_\nu\partial_\mu(\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} - \eta_{\alpha\beta}\psi) + \partial_\beta\partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} - \eta_{\mu\nu}\psi) - \partial_\beta\partial_\nu(\bar{h}_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\bar{h} - \eta_{\alpha\mu}\psi) - \\ - \partial_\beta\partial_\mu(\bar{h}_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}\bar{h} - \eta_{\alpha\nu}\psi)\Big] + \partial^\beta(\bar{h}_\nu^{\ \alpha} - \frac{1}{2}\eta_\nu^{\ \alpha}\bar{h} - \eta_\nu^{\ \alpha}\psi)\Big[\partial_\beta(\bar{h}_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\bar{h} - \eta_{\alpha\mu}\psi) - \\ - \partial_\alpha(\bar{h}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\mu}\bar{h} - \eta_{\beta\mu}\psi)\Big] - \Big[\partial_\beta(\bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} - \eta^{\alpha\beta}\psi) - \frac{1}{2}\partial^\alpha(-\bar{h} - 4\psi)\Big]\cdot \\ \cdot\Big[\partial_\nu(\bar{h}_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\bar{h} - \eta_{\alpha\mu}\psi) + \partial_\mu(\bar{h}_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}\bar{h} - \eta_{\alpha\nu}\psi) - \partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} - \eta_{\mu\nu}\psi)\Big]\bigg)\Bigg\rangle.\end{aligned}$$

Arvestame, et lahti korrutamisel puhtalt $\bar{h}_{\mu\nu}$ ja selle jälge $\bar{h}$ sisaldavad liikmed avalduvad samasugusel kujul nagu üldrelatiivsusteoorias. Samuti lihtsustuvad need liikmed vastavate keskmistamise omaduste ja kalibratsioonide rakendamisel samale kujule, mis on toodud esimeses peatükis, mistõttu ei pea me neid eraldi leidma.

Läheme üle TT kalibratsiooni, kus $\partial_\mu \bar{h}_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ja $\bar{h} = 0$. Skalaarvälja $\psi = \varphi/\varphi_0$ sisaldavaid liikmeid saab lihtsustada kasutades keskmistamise omadust $\left\langle \varphi \partial_\mu \partial_\nu \varphi \right\rangle = \left\langle -\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right\rangle$. $R^{(2)}_{\mu\nu}$ keskmine avaldub lõpuks kujul

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h) \right\rangle = \left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\left[(h^{(1)})^2\right] \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi \right\rangle. \tag{2.9}$$

See ei ole skalaarvälja kogu panus Ricci tensorisse. Gravitatsioonilainete efektiivse energia-impulsi pseudotensori leiame, kui liidame meetrika häiritusest leitud Ricci tensorile veel skalaar-tensorteooria väljavõrranditest lisanduva energia-impulsi pseudotensori osa.

Skalaar-tensorteooria väljavõrrandid avaldistest (2.2) ja (2.3) on BD teoorias kujul

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\Phi} \left[\nabla_\mu \partial_\nu \Phi + \frac{\omega}{\Phi} \partial_\mu \Phi \, \partial_\nu \Phi \right], \qquad \Box \Phi = 0. \tag{2.10}$$

Asendame skalaarvälja $\Phi = \varphi_0 + \varphi$ esimesse võrrandisse:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{(\varphi_0 + \varphi)} \left[\partial_\mu \partial_\nu (\varphi_0 + \varphi) + \frac{\omega}{(\varphi_0 + \varphi)} \partial_\mu (\varphi_0 + \varphi) \, \partial_\nu (\varphi_0 + \varphi) \right].$$

Arvestame, et φ_0 on konstantne ja selle tuletis on null. Tingimus $\frac{\varphi}{\varphi_0} \ll 1$ võimaldab meil $\frac{1}{\varphi_0 + \varphi}$ arendada Taylori ritta:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\simeq \left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{\varphi}{\varphi_0^2} \right) \left[\partial_\mu \partial_\nu \varphi + \left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{\varphi}{\varphi_0^2} \right) \omega \, \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi \right] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\varphi_0} \partial_\mu \partial_\nu \varphi}_{\text{1. järku}} - \underbrace{\frac{\varphi}{\varphi_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \varphi}_{\text{2. järku}} + \underbrace{\frac{\omega}{\varphi_0^2} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi}_{\text{2. järku}} - \underbrace{\frac{\omega \varphi}{\varphi_0^3} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi + \frac{\omega \varphi^2}{\varphi_0^4} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi}_{\text{kõrgemat järku} \equiv 0}. \end{aligned}$$

Skalaar-tensor teooria väljavõrranditest avaldub häirituste teist järku sisaldav Ricci tensor kui

$$R^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\varphi_0^2} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi - \frac{\varphi}{\varphi_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \varphi.$$

Võrrandi parem pool käitub kui skalaarvälja energia-impulsi (pseudo)tensor vastavas lähenduses, mis liitub varem leitud $\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h) \right\rangle$ poolt tekitatud energia-impulsi pseudotensorile.

Häirituste teist järku liikmeid sisaldav efektiivne Ricci tensor avaldub summana

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h) \right\rangle = \left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\left[(h^{(1)})^2\right] \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \partial_\nu \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right) - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \partial_\alpha \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right) + \frac{\omega}{\varphi_0^2} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi - \frac{\varphi}{\varphi_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \varphi \right\rangle.$$

Skalaarvälja osa teise liikme saab kirjutada kui $\langle\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi\rangle = \langle -\varphi\partial^\alpha\partial_\alpha\varphi\rangle = \langle -\varphi\cdot\Box\varphi\rangle$, mis on väljavõrrandist $\Box\varphi = 0$ null. Viimases liikmes saame rakendada sama keskmistamise omadust kujul $\left\langle\varphi\partial_\mu\partial_\nu\varphi\right\rangle = \left\langle -\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right\rangle$, mis annab kokku

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\right\rangle = \left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\left[(h^{(1)})^2\right] + \frac{1}{\varphi_0^2}(\omega+1,5)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right\rangle.$$

Näeme, et Ricci skalaari keskmine $\left\langle R^{(2)}\right\rangle$ on null, kuna vastavalt esimesest peatükist ja väljavõrrandist $\Box\varphi = 0$

$$\left\langle R^{(2)}\left[(h^{(1)})^2\right]\right\rangle = 0, \quad \left\langle\frac{1}{\varphi_0^2}(\omega+1,5)\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right\rangle = 0.$$

Gravitatsioonilainete efektiivne energia-impulsi pseudotensor BD teoorias avaldub analoogselt valemiga (2.8), kuid gravitatsioonikonstant G asendub efektiivse gravitatsioonikonstantiga $G_{\text{eff}} = G/\Phi \simeq G/\varphi_0$. Energia-impulsi pseudotensor avaldub lõpuks kujul

$$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} = \frac{\varphi_0}{32\pi G}\left\langle\partial_\mu\bar{h}^{(TT)}_{\alpha\beta}\,\partial_\nu\bar{h}^{\alpha\beta}_{(TT)} - \frac{1}{\varphi_0^2}(4\omega+6)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right\rangle. \tag{2.11}$$

Tulemus on kooskõlas artiklis [5] leitud gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensoriga BD teoorias. Meie tulemuses on vaid liikmete vahel miinus ja artiklis [5] on pluss. See erinevus tuleb skalaar-tensorteooria väljavõrrandite definitsioonist, mis on artiklis antud meiega võrreldes vastupidise märgiga.

2.3 Gravitatsioonilainete energia–impulsi pseudotensor Jordani–Fierzi–Bransi–Dicke teoorias

Gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensori leidmiseks JFBD teoorias rakendame analoogset tuletuskäiku eeltooduga. Võtame taas meetrika kujul $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ja skalaarvälja kujul $\Phi = \varphi_0 + \varphi$, kus φ_0 on konstantne. Meetrika häirituste teist järku liikmetega Ricci tensori keskmine valemist (1.17) avaldub samuti valemina (2.9):

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\right\rangle = \left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\left[(h^{(1)})^2\right]\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\psi\partial_\alpha\psi\right\rangle.$$

Üldisemas JFBD teoorias ei ole parameeter ω enam konstantne, vaid funktsioon skalaarväljast

$\omega = \omega(\Phi)$. See on võimalik arendada Taylori ritta kujul

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \varphi + \omega_2 \varphi^2 + \cdots, \quad \text{kus } \omega_1 = \left.\frac{d\omega}{d\Phi}\right|_{\Phi=\varphi_0}, \ \omega_2 = \left.\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{d\Phi^2}\right|_{\Phi=\varphi_0}.$$

Skalaar-tensorteooria väljavõrrandid vaakumsüsteemis ilma potentsiaalita on

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\Phi}\left[\nabla_\mu\partial_\nu\Phi + \frac{\omega}{\Phi}\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi - \frac{g_{\mu\nu}}{4\omega+6}\frac{d\omega}{d\Phi}\partial_\alpha\Phi\,\partial^\alpha\Phi\right],$$
$$\Box\Phi = -\frac{1}{2\omega+3}\frac{d\omega}{d\Phi}\partial_\alpha\Phi\,\partial^\alpha\Phi.$$

Asendame skalaarvälja $\Phi = \varphi_0 + \varphi$ ja parameetri $\omega = \omega_0 + \omega_1\varphi + \omega_2\varphi^2$ esimesse väljavõrrandisse:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{(\varphi_0+\varphi)}\left[\partial_\mu\partial_\nu\varphi + \frac{\omega_0+\omega_1\varphi+\omega_2\varphi^2}{(\varphi_0+\varphi)}\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi - \frac{g_{\mu\nu}}{4\omega+6}\omega_1\,\partial_\alpha\varphi\,\partial^\alpha\varphi\right].$$

Näeme, et sulgude sees teisel liikmel $\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi$ on juba häirituse teist järku korrutis. Seega $\omega_1\varphi$ ja $\omega_2\varphi^2$ annavaid vaid kõrgemat järku liikmeid, mille loeme nulliks. Sama kehtib ka väljavõrrandi viimase liikme kohta kuna $\frac{1}{4\omega+6}$ saab arendada Taylori ritta, kus $\omega_1\varphi$ ja $\omega_2\varphi^2$ tulevad kordajateks. Samuti saame viimases liikmes $g_{\mu\nu}$ asendada tausta-meetrikaga $\eta_{\mu\nu}$, sest häiritus $h_{\mu\nu}$ tekitaks juba kolmandat järku liikme. Seega

$$R_{\mu\nu} \simeq \left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{\varphi}{\varphi_0^2}\right)\left[\partial_\mu\partial_\nu\varphi + \left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{\varphi}{\varphi_0^2}\right)\omega_0\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2(2\omega_0+3)}\omega_1\,\partial_\alpha\varphi\,\partial^\alpha\varphi\right] =$$
$$= .\underbrace{\frac{1}{\varphi_0}\partial_\mu\partial_\nu\varphi}_{\text{1. järku}} - \underbrace{\frac{\varphi}{\varphi_0^2}\partial_\mu\partial_\nu\varphi}_{\text{2. järku}} + \underbrace{\frac{\omega_0}{\varphi_0^2}\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi}_{\text{2. järku}} - \underbrace{\frac{\eta_{\mu\nu}}{2(2\omega_0+3)}\omega_1\,\partial_\alpha\varphi\,\partial^\alpha\varphi}_{\text{2. järku}}.$$

Teist järku häiritustega Ricci tensori $\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\right\rangle$ avaldub kui

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{\varphi_0^2}(\omega_0+1)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{\eta_{\mu\nu}\omega_1}{2(2\omega_0+3)}\varphi\,\partial_\alpha\partial^\alpha\varphi\right\rangle. \tag{2.12}$$

Uurime nüüd teist väljavõrrandit. Asendades sisse skalaarvälja ja ω rittaarenduse, arvestades eeltoodud $\omega_1\varphi$ ja $\omega_2\varphi^2$ kohta käivaid kaalutlusi, saame

$$\Box\varphi = -\frac{1}{2\omega_0+3}\omega_1\,\partial_\alpha\varphi\,\partial^\alpha\varphi.$$

Võrrandi vasakul pool on tuletised esimest järku skalaarvälja häiritusest, paremal pool aga teist järku liige. Häirituse φ jaoks on võrrandi parem pool võrdne nulliga:

$$\partial_\rho \partial^\rho \varphi = 0. \tag{2.13}$$

See väljavõrrand on mittetriviaalne alles siis, kui tuua skalaarvälja lisaks lineaarsele häiritusele $\varphi = \varphi^{(1)}$ ka eraldi teist järku häiritus $\varphi^{(2)}$: $\Phi = \varphi_0 + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$. Sellisel juhul kehtiks

$$\Box\varphi^{(2)} = -\frac{1}{2\omega_0 + 3}\omega_1 \partial_\alpha \varphi^{(1)} \partial^\alpha \varphi^{(1)}.$$

Küll aga saame Brilli-Hartle'i keskmistamisel kirjutada $\langle \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle -\varphi \partial_\alpha \partial^\alpha \varphi \rangle$, mis võrrandi (2.13) põhjal annab tulemuseks nulli ning seega keskmistatud Ricci tensoris rolli ei mängi. Lisaks avaldub energia-impulsi pseudotensor vaid lineaarsete häirituste astmete kaudu [5].

Skalaarvälja väljavõrrandist (2.13) järeldub, et Ricci tensori keskmise avaldise (2.12) viimane liige on null. Näeme, et JFBD teoorias tuleb skalaar-tensorteooria väljavõrranditest lisanduv osa identne BD teoorias lisanduva liikmega. Gravitatsioonilainete efektiivne energia-impulsi pseudotensor JFBD teoorias on

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})} = \frac{\varphi_0}{32\pi G}\left\langle \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\beta}^{(TT)} \, \partial_\nu \bar{h}^{\alpha\beta}_{(TT)} - \frac{1}{\varphi_0^2}(4\omega_0 + 6)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \right\rangle. \tag{2.14}$$

Oleme jõudnud järeldusele, et sellises lähenduses ja TT kalibratsioonis ei ole gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensori mõttes erinevust $\omega = const$ ja $\omega = \omega(\Phi)$ vahel. Tuletis ω_1 avaldub pseudotensoris alles kolmandat järku liikmete arvestamisel.

Artiklis [5] oli toodud neli erinevat võimalust arvutada gravitatsioonilainete energia-impulsi (pseudo)tensor ja näidatud, et üldrelatiivsusteoorias ning BD teoorias annavad need kõik sama tulemuse, käesolevas töös vastavalt valemid (1.21) ja (2.11). Me kasutasime JFBD teoorias pseudotensori (2.14) arvutamisel ühte neist neljast võimalusest, nimelt häiritud väljavõrrandite meetodit. Huvitavaks uurimiseks tulevikus saab veel arvutada $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})}$ JFBD teoorias ülejäänud kolmel meetodil, et kontrollida, kas ka antud juhul annavad kõik neli meetodit sama tulemuse.

Kokkuvõte

Uurisime gravitatsioonilainete kirjeldamist üldrelatiivsusteoorias ja nende põhilisi füüsikalisi omadusi. Esmalt vaatasime lineariseeritud gravitatsiooniteoorias häirituse ehk gravitatsiooni väljavõrrandite tuletamist, mille jaoks saime vaakumsüsteemi korral kirja panna tasalainelise lahendi. Sealt järeldus, et gravitatsioonilainetel on kaks erinevat polarisatsiooni.

Seejärel vaatasime sarnast tuletuskäiku täielikus üldrelatiivsusteoorias lühilainelise lähenduse korral. Lainete amplituudi suhtes lineaarsed liikmed näitasid, et lained interakteeruvad taust-aegruumiga, mis võib muuta nende sagedust või polarisatsiooni. Taandatud lainepikkusest suuremal skaalal muutuv mittelineaarne osa tõi sisse lainete energia-impulsi pseudotensori, mis kirjeldas lainete rolli taust-aegruumi kõverdumisel. Väiksemate muutustega mittelineaarne osa näitas, et lained interakteeruvad ka iseendaga.

Uurisime põgusalt gravitatsioonikiirguse allikaid peaaegu newtonlikus süsteemis. Sellest järeldus, et gravitatsioonikiirgus on kvadrupoolne ning laineid tekitavad piisavalt asümmeetrilised protsessid ja liikumised, näiteks kaksiktähtede orbiidid teineteise ümber.

Tutvusime skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria põhimõttega ning tõime välja Bransi–Dicke (BD) ja Jordani–Fierzi–Bransi–Dicke (JFBD) teooriad, mis erinevad parameetri ω vastavalt konstandiks ja skalaarvälja funktsiooniks defineerimise poolest. Vaatasime esimese peatükiga analoogset BD teooria lineariseeritud lähendust, kus gravitatsioonilainetele lisandus veel kolmas, skalaarne polarisatsioon.

Arvutuslikus osas kasutasime artiklis [18] antud väljavõrrandeid veendumaks, et nendest leitav pseudotensor klapib BD teooria varasema tulemusega. Seejärel leidsime gravitatsioonilainete energia-impulsi pseudotensori üldisemas JFBD teoorias, kus parameeter ω pole konstantne. Osutus, et parandusliikmed lähevad kõrgematesse lähenditesse, teine lähend ei muutu ning pseudotensor on samal kujul nii BD kui ka JFBD teoorias.

Tänuavaldused

Tänan oma juhendajat Piret Kuuske, kes on minu lõputööga alati olnud toetav ja abivalmis. Tema tagasiside ja selgitused on arendanud lisaks kirjalikule tööle ka minu arusaamist teoreetilisest füüsikast. Samuti suured tänud kõikidele oma kursusekaaslastele, kes on olnud lahutamatu osa heast ülikooli kogemusest.

Helen Asuküla

Kirjandus

[1] J. L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, G. F. Smoot. A Brief History of Gravitational Waves. *Universe*, 2(3):22, 2016.

[2] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.

[3] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101, 2017.

[4] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.

[5] A. Saffer, N. Yunes, K. Yagi. The gravitational wave stress–energy (pseudo)-tensor in modified gravity. *Class. Quant. Grav.*, 35(5):055011, 2018.

[6] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson, 2004.

[7] J. Foster, J. D. Nightingale. *A Short Course in General Relativity*. Springer, Third edition, 2005.

[8] W. Rindler. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, Second edition, 2006.

[9] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[10] C. Bambi. *Black Holes: A Laboratory for Testing Strong Gravity*. Springer, 2017.

[11] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc, 1972.

[12] C. Corda. Gravitational wave astronomy: The definitive test for the ‚Einstein frame versus Jordan frame’ controversy. *Astropart. Phys.*, 34:412–419, 2011.

[13] E. F. Taylor, J. A. Wheeler. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. Addison Wesley Longman, 2000.

[14] Y. Fujii, K.-I. Maeda. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge University Press, 2003.

[15] C. Brans, R. H. Dicke. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961.

[16] T. Damour, K. Nordtvedt. Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phys. Rev.*, D48:3436–3450, 1993.

[17] S. Capozziello, M. Francaviglia. Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. *Gen. Rel. Grav.*, 40:357–420, 2008.

[18] M. Hohmann, L. Järv, P. Kuusk, E. Randla. Post-Newtonian parameters γ and β of scalar-tensor gravity with a general potential. *Phys. Rev.*, D88(8):084054, 2013.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Helen Asuküla,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Gravitatsioonilained üldrelatiivsusteoorias ja skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriates,

   mille juhendaja on Piret Kuusk, tead dr (füüsika-matemaatika),

   (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 31. mai 2018. a.