TPI

Materjale keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks

II OSA

Tallinn · 1969

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Matemaatika kateeder

Materjale

KESKKOOLI MATEMAATIKAKURSUSE KORDAMISEKS

II o s a

Geomeetria ja trogonomeetria

Tallinn

1969

Таллинский политехнический институт

Кафедра математики

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Часть II

Геометрия и тригонометрия

Составили:

Э. Этверк, А. Гаршнек, А. Касс, П. Касс,
Х. Крусберг, М. Тээяр

На эстонском языке

Koostanud

E. Etverk, A. Garšnek, A. Kass, P. Kass,

H. Krusberg, M. Teeäär

Täienduste ja parandustega kordustrükk

Vastutav toimetaja E. Etverk

Trükkimisele antud 17.IV 69. Paber 60x84, 1/16
Trükipg. 8,0. Tingpg. 7,6. Tiraaž 2000
MB-04414. TPI rotaprint, Tallinn, Pikk jalg 14
Tell. 184 Hind 22 kop.

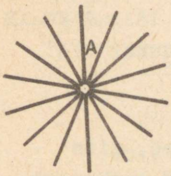
G E O M E E T R I A

I. PLANIMEETRIA

§ 1. S i r g j o o n. N u r k

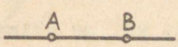
1. **Sirgjoon, kiir, sirglõik.** Geomeetria käsitlemisel lähtutakse tavaliselt kolmest põhikujundist, milleks on punkt, sirgjoon ja tasapind. Põhikujundite tähtsamad omadused on järgmised.

Läbi ühe punkti A läheb tasapinnal lõpmata palju sirgjooni (joonis 1). Seda sirgjoonte kogumit nimetatakse sirgete kimbuks keskpunktiga A. Läbi kahe punkti A ja B läheb üks ja ainult üks sirge AB (joonis 2). Sellest järeldub, et kui kahel sirgjoonel on kaks ühist punkti, siis on neil kõik punktid ühised, s.t. sirged ühtivad. Kui kahel sirgjoonel leidub ainult üks ühine punkt, siis öeldakse, et nad lõikuvad selles punktis (joonis 3). Kaks sirgjoont saavad lõikuda ainult ühes punktis, sest kui neil leiduks kaks ühist punkti, siis nad ühtiksid.

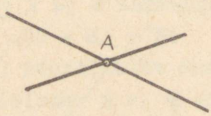


Joonis 1.

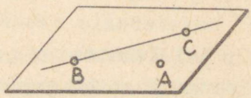
Läbi kolme punkti A, B ja C, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb üks ja ainult üks tasapind (joonis 4). Kui sirgel on tasapinnaga kaks ühist punkti, siis sirge kõik punktid asetsevad sellel tasapinnal ehk, lühemalt, sirge asetseb sellel tasapinnal. Ka öeldakse siis, et tasapind läbib sirget. Näiteks tasapind ABC läbib sirget BC (joonis 4).



Joonis 2.



Joonis 3.



Joonis 4.

Punkt, mis asetseb sirgel, jaotab selle sirge kaheks kiireks. Näiteks sirgete kimbu keskpunkt A (joonis 1) jaotab kimbu iga sirge kaheks kiireks, mistõttu sirgete kimpu nimetatakse ka kiirte kimbuks. Kiir on seega sirgjoone osa, mis on ühelt poolt piiratud punktiga - selle kiire otspunktiga.

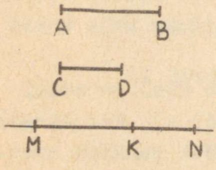
Sirgjoone kaks punkti jaotavad selle sirge kolmeks osaks: kaheks kiireks ja üheks sirglõiguks ehk, lühemalt, lõiguks. Lõik on seega kahe punktiga - lõigu otspunktidega - piiratud osa sirgjoonest (joonis 2). Kaht kiirt, mis tekivad sirgjoone jaotamisel kahe punktiga, nimetatakse ka lõigu pikendusteks üle tema ühe ja teise otspunkti.

Tasapinnal asetsev sirge jaotab selle tasapinna kaheks pooltasapinnaks, näiteks sirge BC jaotab tasapinna ABC kaheks pooltasapinnaks, milledest ühel asetseb punkt A (joonis 4).

2. **Sirglõikude summa ja vahe.** Kasutades liikumise mõistet saab defineerida kahe lõigu võrdsuse mõistet ja viimase abil lõikude summa ja vahe mõistet.

Kahe lõigu AB ja CD summaks nimetatakse kolmandat lõiku MN, mille saame, kui vabalt võetud sirgel märgime lõigud MK=AB ja KN = CD nii, et punkt N asetseb lõigu MK pikendusel üle punkti K (joonis 5):

$$MN = AB + CD.$$



Joonis 5.

Kui liidetavad lõigud on võrdsed, siis punkt K (joonis 5) on lõigu MN keskpunkt.

Samal viisil on võimalik leida ka rohkem kui kahe lõigu summat.

Kahe lõigu AB ja CD vaheks nimetatakse kolmandat lõiku MN, mille liitmisel lõiguga CD saadakse lõik AB. Lõikude AB ja CD vahe saamiseks tuleb vabalt võetud sirgel märkida lõigud MK = AB ja KN = CD nii, et punkt N asetseks lõigul MK ehk, teisiti, punkt N asetseks punktide M ja K vahel (joonis 6):

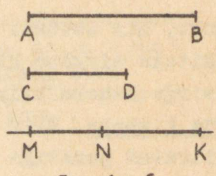
$$MN = AB - CD.$$

Kui lahutamine osutub võimalikuks (s.t. kui on võimalik, et punkt N satub punktide M ja K vahele), siis lõik AB on suurem kui lõik CD:

$$AB > CD.$$

Vastasel juhul kas AB = CD või

$$AB < CD.$$

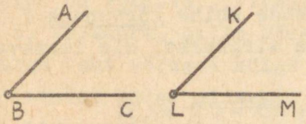


Joonis 6.

3. Nurk. Nurgaks nimetatakse kujundit, mis koosneb kahest ühise otspunktiga kiirest. Neid kiiri nimetatakse nurga haaradeks ja nende ühist otspunkti nurga tipuks. Kui nurga haarad moodustavad sirge, siis nurka nimetatakse sirgnurgaks.

Kui kahel nurgal on üks haar ühine ja teised haarad moodustavad sirge, siis nurki nimetatakse kõrvunurkadeks (nurgad 1 ja 3 joonisel 10).

Kasutades liikumise mõistet saab defineerida nurkade võrdsuse mõistet: kaht nurka nimetatakse võrdseiks, kui neid saab paigutada teineteise peale nii, et nad ühtivad, s.t. ühe nurga tipp ja haarad ühtivad vastavalt teise nurga tipu ja haaradega.



Joonis 7.

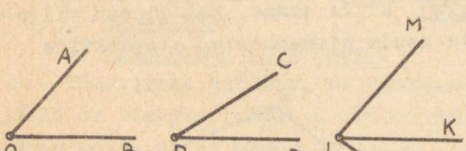
Niisugune nurga ABC paigutamine temaga võrdse nurga KLM peale võib toimuda kahel viisil (joonis 7): kas nii, et haar BA ühtib haaraga LK (ja BC haaraga LM) või haar BA ühtib haaraga LM (ja BC siis haaraga LK).

On selge, et sirgnurgad on võrdsed.

4. Nurkade summa ja vahe. Kahe nurga AOB ja CPD summaks (joonis 8) nimetatakse kolmandat nurka MLN, mille saame, kui vabalt võetud sirge LK punkti L juurde ehitame nurgad $\angle KLM = \angle AOB$ ja $\angle KLN = \angle CPD$ nii, et punktid M ja N ei asetse ühel ja samal pool sirgest LK:

$$\angle MLN = \angle KLM + \angle KLN = \angle AOB + \angle CPD.$$

Kõrvunurkade summa on sirgnurk.



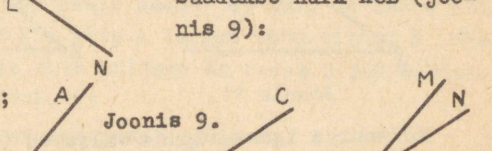
Joonis 8.

Kahe nurga AOB ja CPD vaheks nimetatakse kolmandat nurka MQN, mille liitmisel nurgaga CPD saadakse nurk AOB (joonis 9):

$\angle MQK = \angle AOB$; $\angle NQK = \angle CPD$;

$\angle MQN = \angle MQK - \angle NQK =$

$= \angle AOB - \angle CPD.$



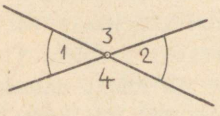
Joonis 9.

Kui liidetavad nurgad on võrdsed, siis kiir LK joonisel 8 on nurga MLN poolitaja.

Sirgnurga poolitamisel saadakse kaks võrdset nurka, mida nimetatakse täisnurkadeks.

Ühenduses nurga lahutamisega nurgast saab nurkade kohta defineerida mõisteid "on suurem" ja "on väiksem".

5. Tippnurgad. Kaht nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui ühe nurga haarad on teise nurga haarade pikendusteks üle nurga tipu. Kahe sirge lõikumisel tekib kaks tippnurkade paari ($\angle 1$ ja $\angle 2$ ning $\angle 3$ ja $\angle 4$ joonisel 10).



Joonis 10.

Tippnurgad on võrdsed, sest kui näiteks tippnurkadega $\angle 1$ ja $\angle 2$ joonisel 10 liita nende ühine kõrvunurk $\angle 3$, siis saame kaks sirgnurka, mis teatavasti on võrdsed:

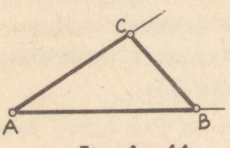
$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3;$$

lahutades võrduse pooltest $\angle 3$ saame:

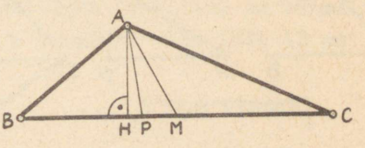
$$\angle 1 = \angle 2.$$

§ 2. Kolmnurk

1. Kolmnurk, tema elemendid. Kolmnurgaks nimetatakse kujundit, mis tekib kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti ühendamisel sirglõikudega. Need punktid on kolmnurga tipud ja neid ühendavad sirglõigud on kolmnurga küljed. Iga tipu juures on kolmnurga üks nurk (sisenurk), mille saame, kui tipust väljuvat kaht külge pikendame üle nende mitteühiste otspunktide (näiteks $\angle A$ joonisel 11).



Joonis 11.



Joonis 12.

Kolmnurga igast tipust väljuvad (peale külgede) kolm tähtsat joont: mediaan, kõrgus ja bisektor.

Kolmnurga mediaaniks nimetatakse sirglõiku, mis ühendab kolmnurga tippu vastaskülje keskpunktiga (AM joonisel 12).

Kolmnurga kõrguseks nimetatakse ristlõiku, mis on tõmmatud tipust vastasküljele või selle pikendusele (AH joonisel 12).

Kolmnurga bisektoriks nimetatakse kolmnurga nurga poolitaja lõiku nurga tipust kuni vastasküljeni (AP joonisel 12).

Kolmnurga külgi, nurki, mediaane, kõrgusi ja bisektoreid nimetatakse tema elementideks.

2. Kolmnurkade liigid. Kolmnurki liigitatakse külgede järgi ja nurkade järgi. Külgede järgi on kolmnurk kas isekülgne (kui kõik küljed on eri pikkusega) või võrdhaarne (kui kaks külge on võrdsed). Viimase alaliigiks on võrdkülgne kolmnurk, s.o. kolmnurk, mille kõik küljed on võrdsed. Võrdhaarse kolmnurga kaht võrdset külge nimetatakse kolmnurga haaradeks ja kolmandat külge aluseks. Aluse vastasnurka nimetatakse kolmnurga tipunurgaks ja aluse lähisnurki alusnurkadeks. Tipunurga tipust tõmmatud kõrgus on lihtsalt võrdhaarse kolmnurga kõrgus.

Nurkade järgi on kolmnurk kas teravnurkne (kui tema kõik nurgad on teravnurgad) või täisnurkne (kui tema üks nurk on täisnurk) või nürinurkne (kui tema üks nurk on nürinurk). Terav- ja nürinurkseid kolmnurki nimetatakse mõnikord ka kaldnurkseteks kolmnurkadeks.

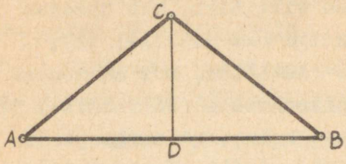
3. Võrdhaarse kolmnurga omadused. Tõestame, et võrdhaarses kolmnurgas

1) tipunurga bisektor on ühtlasi aluse mediaan ja kolmnurga kõrgus;

2) alusnurgad on võrdsed.

Tõestuseks eeldame, et kolmnurgas ABC (joonis 13) AC = BC ja CD on bisektor, s.t. $\angle ACD = \angle BCD$. Pöörates kolmnurga ACD ümber külje CD kolmnurga BCD peale näeme, et külg CA läheb piki külge CB (sest $\angle ACD = \angle BCD$), tipp A langeb ühte tipuga B (sest CA = CB) ja külg AD langeb ühte küljega BD (sest D jäi endisele kohale). Sellest järeldub, et

1) AD = BD, s.t. CD on kolmnurga mediaan;



Joonis 13.

2) $\angle ADC = \angle BDC$ on täisnurk (sest nende summa on sirgnurk), seega CD on kolmnurga kõrgus;
3) $\angle CAD = \angle CBD$, s.t. alusnurgad on võrdsed.

<u>Järeldus</u>. Võrdkülgses kolmnurgas

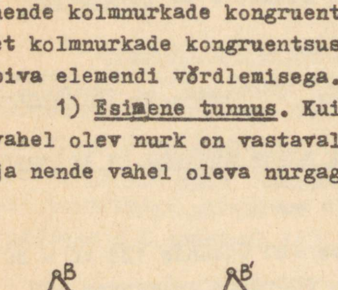
1) igast tipust tõmmatud bisektor on ühtlasi mediaan ja kõrgus;

2) kõik nurgad on võrdsed.

§ 3. Kolmnurkade võrdsus

1. <u>Kolmnurkade võrdsuse tunnused</u>. Kaht tasapinnalist kujundit, näiteks kaht kolmnurka, nimetatakse <u>kongruentseiks</u> ehk <u>võrdseiks</u>, kui neid saab paigutada teineteise peale nii, et nad ühtivad. On selge, et kolmnurga iga element on võrdne temaga kongruentse kolmnurga vastava elemendiga ja, ümberpöördult, kahe kolmnurga kõigi vastavate elementide võrdsusest järeldub nende kolmnurkade kongruentsus. Järgnevad teoreemid näitavad, et kolmnurkade kongruentsust saab kindlaks teha juba kolme sobiva elemendi võrdlemisega.

1) <u>Esimene tunnus</u>. Kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga, siis kolmnurgad on võrdsed.



Joonis 14.

<u>Eeldus</u>. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

<u>Väide</u>. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

<u>Tõestus</u>. Paigutame mõttes kolmnurga ABC kolmnurga A'B'C' peale nii, et tipp A ühtiks tipuga A' ja külg AC satuks küljele A'C'. Siis tipp C ühtib tipuga C', sest $AC = A'C'$, külg AB satub küljele A'B', sest $\angle BAC = \angle B'A'C'$,

ja tipp B ühtib tipuga B', sest $AB = A'B'$. Seega ühtivad ka küljed BC ja B'C' ning kolmnurgad ABC ja A'B'C', mistõttu väide on tõestatud.

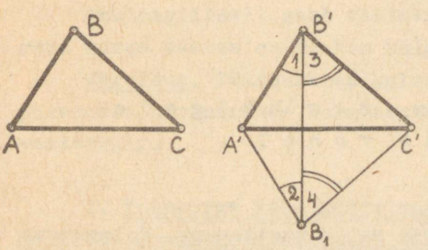
2) <u>Teine tunnus</u>. Kui ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga ühe külje ja selle lähisnurkadega, siis kolmnurgad on võrdsed.

<u>Eeldus</u>. $AC = A'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ (joonis 14).

<u>Väide</u>. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

<u>Tõestus</u>. Paigutame mõttes kolmnurga ABC kolmnurga A'B'C' peale nii, et tipp A ühtiks tipuga A' ja külg AC satuks küljele A'C'. Siis tipp C ühtib tipuga C', sest $AC = A'C'$, külg AB satub küljele A'B', sest $\angle CAB = \angle C'A'B'$, ja külg CB satub küljele C'B', sest $\angle ACB = \angle A'C'B'$. Et kaks sirget lõikuvad ainult ühes punktis, siis ühtivad ka tipud B ja B'. Seega kolmnurgad on võrdsed.

3) <u>Kolmas tunnus</u>. Kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega, siis kolmnurgad on võrdsed.



Joonis 15.

<u>Eeldus</u>. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

<u>Väide</u>. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

<u>Tõestus</u>. Paigutame mõttes kolmnurga ABC kolmnurga A'B'C' kõrvale nii, et tipp A ühtiks tipuga A' ja külg AC satuks küljele A'C'. Siis tipp C ühtib tipuga C', sest $AC = A'C'$, ja kolmnurk ABC tuleb asendisse $A'B_1C'$ (joonis 15). Ühendades punktid B' ja B_1 saame kaks võrdhaarset kolmnurka $A'B'B_1$ ja $C'B'B_1$, milledel on ühine alus $B'B_1$. Et võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed, siis $\angle 1 = \angle 2$ ja $\angle 3 = \angle 4$, seega ka

$$\angle A'B'C' = \angle A'B_1C' = \angle ABC.$$

Nüüd järeldub kolmnurkade ABC ja A'B'C' võrdsus esimese tunnuse põhjal.

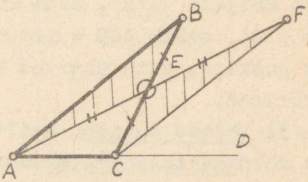
2. <u>Teoreem kolmnurga välisnurgast</u>. Kolmnurga välisnurgaks nimetatakse kolmnurga nurga (sisenurga) kõrvunurka. Näiteks

kolmnurga ABC välisnurk tipu C juures on $\angle BCD$ (joonis 16). Kasutamata paralleelide aksioomist järelduvat teoreemi kolmnurga nurkade summa kohta, saab tõestada järgmise teoreemi:

kolmnurga välisnurk on suurem igast temaga mitte kõrvuti asetsevast sisenurgast.

Tõestuseks tõmbame kolmnurga ABC tipust A mediaani AE ja pikendame seda punktini F nii, et AE = EF (joonis 16). Ühendades punktid F ja C saame kolmnurga FCE, mis kolmnurkade võrdsuse esimese tunnuse järgi on võrdne kolmnurgaga ABE. Seega on võrdsed ka nende vastavad nurgad $\angle B = \angle ECF$. Et $\angle ECF$ on vaid osa välisnurgast BCD, siis välisnurk on suurem sisenurgast B, mis ei asetse temaga kõrvuti. Analoogiliselt saab tõestada väidet ka sisenurga A kohta.

Järeldus. Kolmnurgas võib olla ainult üks nurk täisnurk või nürinurk, sest (joonis 16) kui $\angle ACB \geq 90^\circ$, siis $\angle BCD \leq 90^\circ$, seega $\angle A < 90^\circ$ ja $\angle B < 90^\circ$.



Joonis 16.

§ 4. Seosed kolmnurga külgede ja nurkade vahel

1. Kolmnurga suurem külg ja selle vastasnurk. Kolmnurgas on:

1) võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad ja, ümberpöördult, võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed;

2) suurema külje vastas suurem nurk ja, ümberpöördult, suurema nurga vastas suurem külg.

Tõestus. 1) Kui kolmnurgas ABC kaks külge on võrdsed, ütleme AC = BC, siis kolmnurk on võrdhaarne ja võrdsete külgede vastasnurgad on alusnurgad; kuid nende võrdsus on juba tõestatud (§ 2, 3)*.

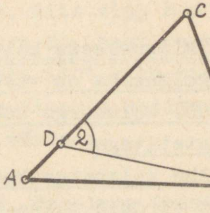
*Viide § 2, 3 tähendab õpiku käesoleva peatüki paragrahvi 2 punkti 3.

2) Olgu kolmnurgas ABC külg AC suurem kui külg BC (joonis 17). Tõestame, et siis $\angle ABC > \angle BAC$. Selleks märgime küljel AC lõigu CD = CB ja ühendame punkti D punktiga B. Tekkinud kolmnurk CDB on võrdhaarne, mistõttu $\angle 1 = \angle 2$. Et $\angle 2$ kui kolmnurga ABD välisnurk on suurem kui $\angle BAC$, siis ka $\angle 1$ on suurem kui $\angle BAC$. Kuid $\angle 1$ on osa nurgast ABC, tähendab ka $\angle ABC > \angle BAC$.

3) Eeldame nüüd, et kolmnurgas ABC kaks nurka on võrdsed, ütleme $\angle A = \angle B$, ja tõestame, et siis ka nende vastasküljed on võrdsed, s.t. BC = AC. Nende külgede kohta on õige üks kolmest väitest: kas

BC > AC või BC < AC või BC = AC.

Antud kolmnurga kohta esimene väide ei ole õige, sest sellest järelduks otsese teoreemi põhjal, et $\angle A > \angle B$, mis on eeldusega vastuolus. Niisamuti ei ole õige teine väide. Ainsa võimalusena jääb püsima väide BC = AC, mis pole vastuolus eeldusega.



Joonis 17.

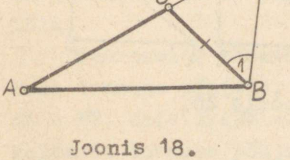
Analoogiliselt saab vastuväiteliselt tõestada ka, et suurema nurga vastas on suurem külg.

Järeldus. Täisnurkses kolmnurgas on kõige pikem külg hüpotenuus; nürinurkses kolmnurgas on kõige pikem külg nürinurga vastaskülg.

2. Kolmnurga kahe külje summa ja vahe. Kolmnurga iga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg ja vahe on väiksem kui kolmas külg.

Tõestame, et kolmnurgas ABC, kus AB on kõige pikem külg, AC + CB > AB (muudel juhtudel on väide summa kohta iseenesestmõistetav). Pikendame külge AC üle tipu C lõigu CD = CB võrra ja ühendame punktid D ja B (joonis 18). Tekkinud kolmnurgas ABD on $\angle ABD > \angle D$, sest $\angle ABD > \angle 1$ ja $\angle 1 = \angle D$. Et kolmnurgas ABD suurema nurga ABD vastas on suurem külg, siis AD > AB ehk AC + CD > AB ehk

AC + CB > AB.



Joonis 18.

Lahutades selle võrratuse pooltest kord CB, teine kord AC, saame:

$$AC > AB - CB \text{ ja } CB > AB - AC.$$

(Kui kolmas külg on kolmnurga kõige pikem külg, siis väide vahe kohta on iseenesestmõistetav.)

Vaadeldud teoreem annab tõkked kolmnurga kolmanda külje pikkusele, kui kaks külge on antud. Näiteks, kui külg $a = 8$ cm ja $b = 6$ cm, siis külje c pikkus on järgmisest vahemikust:

$$(8 - 6) \text{ cm} < c < (8 + 6) \text{ cm}$$

ehk

$$2 \text{ cm} < c < 14 \text{ cm}.$$

3. Täisnurksete kolmnurkade võrdsuse tunnused. Kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed, kui

1) ühe kolmnurga kaatetid on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaatetitega;

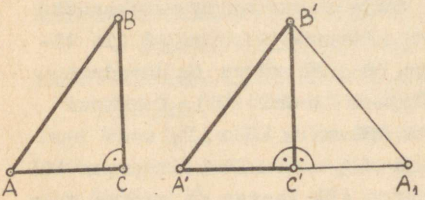
2) ühe kolmnurga kaatet ja selle juures olev teravnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaateti ja selle juures oleva teravnurgaga;

3) ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks kaatet on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja ühe kaatetiga;

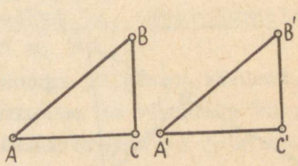
4) ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks teravnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja ühe teravnurgaga.

Esimene ja teine tunnus järelduvad vastavalt üldisest kolmnurkade võrduse esimesest ja teisest tunnusest (sest täisnurk ühes kolmnurgas on võrdne täisnurgaga teises kolmnurgas).

Kolmanda tunnuse tõestamiseks oletame, et kolmnurkade ABC ja A'B'C' nurgad C ja C' on täisnurgad ning AB = A'B' ja BC = B'C' (joonis 19). Paigutades kolmnurga ABC nii kolmnurga



Joonis 19.



Joonis 20.

A'B'C' kõrvale, et tipp B ühtib tipuga B' ja BC läheb piki külge B'C', näeme, et kolmnurkade teised kaatetid satuvad ühele sirgele. Nii saame võrdhaarse kolmnurga $A'A_1B'$, milles kõrguseks on B'C'. Et võrdhaarse kolmnurga kõrgus poolitab aluse, siis $A'C' = A_1C'$. Kuid siis on võrdsed ka antud kolmnurkade kaatetid AC ja A'C' ning kolmnurkade võrdsus järeldub üldisest kolmnurkade võrdsuse kolmandast tunnusest.

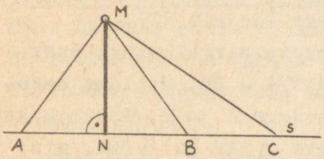
Neljanda tunnuse tõestamiseks oletame, et kolmnurkade ABC ja A'B'C' nurgad C ja C' on täisnurgad ning AB = A'B' ja $\angle A = \angle A'$ (joonis 20). Paigutame kolmnurga ABC nii kolmnurga A'B'C' peale, et tipp A ühtib tipuga A' ja nurk A nurgaga A', kusjuures külg AB läheb piki külge A'B'. Siis tipp B ühtib tipuga B', sest AB = A'B', ja tipp C tipuga C', sest vastasel juhtumil tipust B' oleks tõmmatud sirgele A'C' kaks ristsirget, mis teatavasti pole võimalik. Vastavate tippude ühtivusest järeldub, et kolmnurgad ABC ja A'B'C' on võrdsed.

4. Ristlõigu ja kaldlõigu omadused. Vaatleme ühest ja samast punktist M sirgele s tõmmatud ristlõiku MN ja kaldlõike MA, MB, MC ning viimaste projektsioone NA, NB, NC (joonis 21). Nende lõikude kohta kehtivad järgmised teoreemid:

1) ristlõik on lühem igast kaldlõigust;

2) võrdsetele projektsioonidele vastavad võrdsed kaldlõigud ja, ümberpöördult, võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed projektsioonid;

3) suuremale projektsioonile vastab suurem kaldlõik ja ümberpöördult, suuremal kaldlõigul on suurem projektsioon.



Joonis 21.

Teoreemi 1 kehtivus järeldub sellest, et kaldlõik kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on selles kolmnurgas kõige pikem külg, seega pikem kui kaatetiks olev ristlõik.

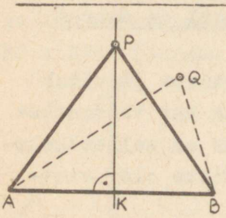
Teoreemi 2 tõestus: kui AN = BN, siis $\triangle ANM = \triangle BNM$ (esimese tunnuse põhjal), järelikult MA = MB; ümberpöördult, kui MA = MB, siis $\triangle ANM = \triangle BNM$ (täisnurksete kolmnurkade võrdsuse kolmanda tunnuse põhjal), järelikult AN = BN.

Teoreemi 3 tõestamiseks eeldame, et NC > NA, ja väidame, et MC > MA. Pöörates kolmnurka ANM ümber kaateti MN sirgnurga võrra, saame ta asendisse BNM, kus B on punktide N ja C vahel (sest AN = BN < NC). Kuid siis on kolmnurgas MBC nurk B nürinurk, sest tema kõrvunurk on teravnurk. Et nürinurga vastas on kolmnurgas kõige suurem külg, siis MC > MB ja seega ka MC > MA. Pöördteoreemi on kerge tõestada vastuväiteliselt.

§ 5. P u n k t i d e g e o m e e t r i l i s e d k o h a d

1. Punkti geomeetrilise koha mõiste. Antud omadusega punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal nimetatakse punktide kogumit (üht või mitut joont), mille igal punktil on antud omadus, kuid tasapinna ühelgi muul punktil seda omadust ei ole. Näiteks tasapinnal antud punktist antud kaugusel oleva punkti geomeetriliseks kohaks on ringjoon, mille keskpunktiks on antud punkt ja raadiuseks antud kaugus, sest selle ringjoone iga punkt on antud punktist antud kaugusel, kuid ühelgi tasapinna muul punktil seda omadust ei ole.

2. Sirglõigu keskristsirge. Kahest antud punktist A ja B võrdsetel kaugustel asetseva punkti P geomeetriliseks kohaks tasapinnal on sirglõigu AB keskristsirge (joonis 22).

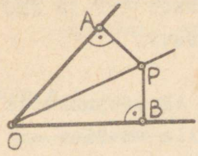


Joonis 22.

Valime lõigu AB keskristsirgel mingi punkti P ja tõestame, et PA = PB. Selleks ühendame punkti P punktidega A ja B. Tekib kaks täisnurkset kolmnurka △PAK ja △PBK, mis on võrdsed, sest nende kaatetid on vastavalt võrdsed. Järelikult PA = PB. Saab tõestada, et ühelgi tasapinna punktil Q väljaspool sirget PK seda omadust ei ole: AQ ≠ BQ.

3. Nurgapoolitaja. Nurga AOB haaradest võrdsetel kaugustel oleva punkti P geomeetriliseks kohaks tasapinnal on nurga-

poolitaja (joonis 23). Tõmbame nurga AOB poolitaja, valime sellel mingi punkti P ja tõestame, et PA = PB, kus PA ⊥ OA ja PB ⊥ OB. Tekkinud täisnurksed kolmnurgad AOP ja BOP on võrdsed, sest neil on ühine hüpotenuus OP ja võrdsed teravnurgad tipu O juures (§ 4, 3, tunnus 4). Järelikult PA = PB.

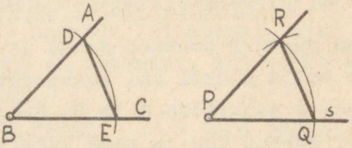


Joonis 23.

Saab tõestada, et tasapinna ühelgi punktil väljaspool nurgapoolitajat seda omadust ei ole.

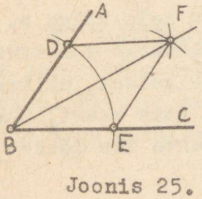
§ 6. Põhilised konstruktsioonülesanded

1. Antud nurgaga võrdse nurga joonestamine. Olgu antud nurk ABC. Selleks et joonestada sirge s punkti P juures antud nurgaga ABC võrdne nurk, mille üks haar on sirgel s, tõmbame punkti B ümber vabalt valitud raadiusega kaare, mis lõigaku nurga haarasid BA ja BC vastavalt punktidest D ja E. Sama raadiusega tõmbame kaare ka punkti P ümber, saades sirgel s punkti Q. Seejärel tõmbame punkti Q ümber kaare raadiusega QR = DE nii, et ta lõikaks punkti P ümber tõmmatud kaart. Nende lõikepunkti R läbiva kiire PR ja sirge s vaheline nurk QPR on võrdne nurgaga ABC, sest △DBE = △RPQ (kolmanda võrdsuse tunnuse põhjal).



Joonis 24.

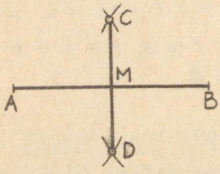
2. Antud nurga poolitamine. Antud nurga ABC poolitamiseks tõmbame punkti B kui keskpunkti ümber vabalt valitud raadiusega kaare, mis lõigaku nurga haarasid punktides D ja E. Viimaste ümber joonestame kaks kaart, mille raadiused on võrdsed ja mis on suuremad kui pool E ja D vahelisest kaugusest. Läbi kaarte lõikepunk-



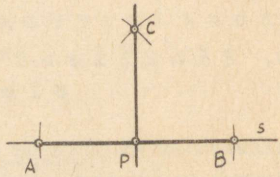
Joonis 25.

ti F minev kiir BF on nurga ABC poolitaja. Nurkade ABF ja FBC võrdsus järeldub kolmnurkade DBF ja EBF võrdsusest.

3. Lõigu poolitamine. Tõmbame antud lõigu AB otspunktide A ja B ümber ühe ja sama raadiusega kaared, mille raadius on suurem kui pool lõigust AB. Need kaared lõikugu punktides C ja D. Neid punkte läbiv sirge CD on lõigu AB keskristsirge, sest konstruktsiooni järgi punktid C ja D on võrdsetel kaugustel lõigu otspunktidest A ja B (§ 5, 2). Lõikudes lõiguga AB punktis M, keskristsirge poolitab selle.

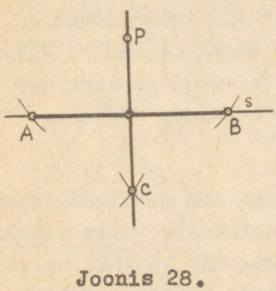


Joonis 26.



Joonis 27.

4. Sirgele ristsirge joonestamine läbi antud punkti. Kui antud punkt P asetseb antud sirgel s (joonis 27), siis joonestame selle punkti kui keskpunkti ümber ringjoone, mis lõigaku sirget s punktides A ja B. Seejärel joonestame punktide A ja B ümber kaared ühe ja sama vabalt valitud raadiusega (mis on suurem kui AP). Ühendades nende lõikepunkti C punktiga P, saamegi otsitava ristsirge: $CP \perp s$, sest ta on lõigu AB keskristsirge.



Joonis 28.

Kui punkt P asetseb väljaspool sirget s (joonis 28), siis tõmbame punkti P kui keskpunkti ümber kaare, mis lõikab sirget s kahes punktis A ja B. Edasi toimime nagu eelmisel juhtumil.

5. Kolmnurga konstrueerimine.

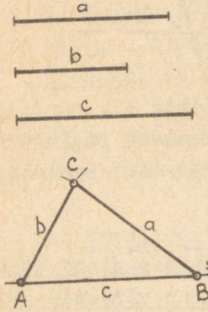
1) Olgu antud kolmnurga kolm külge a, b ja c (joonis 29). Kolmnurga konstrueerimiseks kanname mingile sirgele s ühe antud külgedest, näiteks c. Tekkinud lõigu AB otspunktide ümber tõmbame kaks kaart, ühe raadiusega a, teise raadiusega b. Ühendades kaarte ühe lõike-

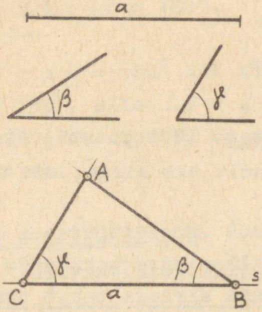
punkti C punktidega A ja B, tekib otsitav kolmnurk ABC.

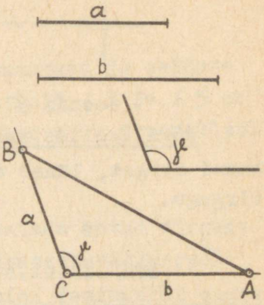
Ülesanne on lahenduv, kui

$$a - b < c < a + b,$$

kus $a > b$.







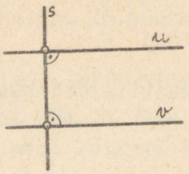
Joonis 29. Joonis 30. Joonis 31.

2) Olgu antud kolmnurga üks külg a ja selle lähisnurgad β ja γ (joonis 30). Kolmnurga konstrueerimiseks kanname lõigu a mingile sirgele s ja joonestame saadud lõigu BC = a otspunktide B ja C juurde antud nurgad β ja γ, nagu näidatud joonisel 30. Nende nurkade teiste haarade lõikepunkt olgu A. Otsitav kolmnurk on ABC. Ülesanne on lahenduv, kui nurkade β ja γ summa on väiksem kui sirgnurk.

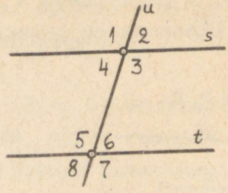
3) Olgu antud kolmnurga kaks külge a ja b ning nende vahelolev nurk γ (joonis 31). Kolmnurga konstrueerimiseks joonestame vabalt valitud punkti C juurde nurgaga γ võrdse nurga ja märgime selle haaradel lõikudega a ja b võrdsed lõigud CA = b ja CB = a. Lõikude teiste otspunktide A ja B ühendamisel tekib otsitav kolmnurk ABC. Ülesanne on lahenduv, kui nurk γ on väiksem kui sirgnurk.

§ 7. Sirgete paralleelsus

1. Paralleelsete sirgete mõiste. Kaht sirget nimetatakse paralleelseteks, kui nad asetsevad ühel tasapinnal ja ei lõiku. Näiteks tasapinnal ühe ja sama sirge s kaks ristsirget u ja v on paralleelsed (joonis 32): $u \parallel v$.



Joonis 32.



Joonis 33.

Paralleelide aksioom: läbi punkti, mis asetseb väljaspool antud sirget, läheb ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

2. Kahe sirge paralleelsuse tunnused. Kui tasapinna kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib üks paar võrdseid kaasnurki või üks paar võrdseid põiknurki või kaks lähisnurka, millede summa on sirgnurk, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Vaatleme tõestust iga eelduse puhul eraldi.

1) Eeldus. Olgu üks paar kaasnurki võrdsed, näiteks $\angle 1 = \angle 5$ (joonis 33).

Väide. $s \parallel t$.

Tõestus. Tõestame vastuväiteliselt, oletades et sirged s ja t lõikuvad. Kui lõikumine toimub sirgest u vasakul, siis tekib kolmnurk, mille üheks välisnurgaks on $\angle 1$ ja temaga mittekõrvuti asetsevaks sisenurgaks $\angle 5$. Välisnurga omaduse (§ 3, 2) põhjal $\angle 1 > \angle 5$, mis on vastuolus eeldusega. Kui lõikumine toimub sirgest u paremal, siis tekib kolmnurk, mille üheks välisnurgaks on $\angle 7$ ja temaga mittekõrvuti asetsevaks sisenurgaks $\angle 3$. Seega $\angle 7 > \angle 3$. Et $\angle 7 = \angle 5$ ja $\angle 3 = \angle 1$ kui tippnurgad, siis $\angle 5 > \angle 1$. Ka see tulemus on eeldusega vastuolus. Seega meie oletus sirgete s ja t lõikumisest oli vale ja jääb üle, et $s \parallel t$.

Analoogiliselt tõestame väidet mistahes kahe kaasnurga võrdsuse korral.

2) Eeldus. Olgu üks paar põiknurki võrdsed, näiteks $\angle 1 = \angle 7$ (joonis 33).

Väide. $s \parallel t$.

Tõestus. Et $\angle 5 = \angle 7$ kui tippnurgad ja eelduse järgi ka $\angle 1 = \angle 7$, siis $\angle 1 = \angle 5$. Kuid $\angle 1$ ja $\angle 5$ on kaasnurgad ja nende võrdsuse korral on sirged s ja t paralleelsed, nagu äsja tõestasime.

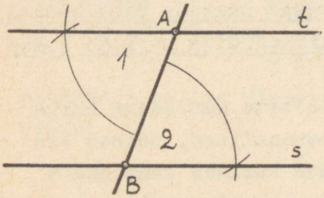
Analoogiliselt tõestame väidet mistahes kahe põiknurga võrduse korral.

3) <u>Eeldus</u>. Olgu $\angle 3 + \angle 6 = 180^{\circ}$.

<u>Väide</u> $s \parallel t$.

<u>Tõestus</u>. Et $\angle 5 + \angle 6 = 180^{\circ}$ kui kõrvunurgad ja eelduse järgi ka $\angle 3 + \angle 6 = 180^{\circ}$, siis $\angle 3 = \angle 5$. Kuid $\angle 3$ ja $\angle 5$ on põiknurgad ja nende võrdsuse korral on sirged s ja t paralleelsed, nagu juba tõestatud.

3. <u>Paralleelide konstruktsioon</u>. Joonestada antud sirgega s paralleelne sirge t läbi punkti A, mis asetseb väljaspool antud sirget.



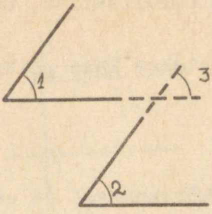
Joonis 34.

Joonestame sirge AB, kus B on sirge s vabalt võetud punkt, ja konstrueerimine punkti A juurde nurga 1, mis on võrdne nurgaga 2 ning moodustab sellega põiknurkade paari (§ 6, 1). Nurga 1 teise haara pikendamisel üle tipu A saame sirge t, mis on paralleelne sirgega s, sest nende lõikamisel sirgega AB tekib paar võrdseid põiknurki.

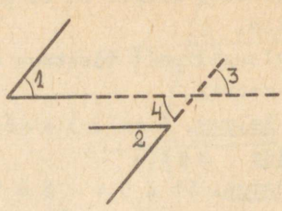
§ 8. Vastavalt paralleelsete ja vastavalt ristuvate haaradega nurgad

1. <u>Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad</u>. <u>Vastavalt paralleelsete ja sama- (või vastand)suunaliste haaradega nurgad on võrdsed</u>.

Vaatleme alul vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurki ($\angle 1$ ja $\angle 2$ joonisel 35). Näitame, et $\angle 1 = \angle 2$. Selleks pikendame nurkade kaht mitteparalleelset haara lõikumiseni. Nende lõikepunkti juures leiduv nurk 3 (joonis 35) on võrdne nurgaga 1 ja ka nurgaga 2, kui kaasnurgad paralleelide juures; järelikult $\angle 1 = \angle 2$.



Joonis 35.



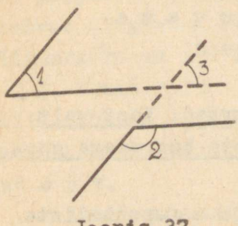
Joonis 36.

Olgu nurkade haarad vastavalt paralleelsed ja vastandsuunalised (joonis 36). Pikendame nurkade kaht mitteparalleelset haara lõikumiseni; siis $\angle 2 = \angle 4$ ja $\angle 1 = \angle 3$ kui kaasnurgad paralleelide juures. Kuid $\angle 3 = \angle 4$ kui tippnurgad, järelikult $\angle 1 = \angle 2$.

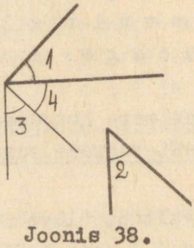
Kui vastavalt paralleelsete haaradega nurkade ühed haarad on samasuunalised, teised vastandsuunalised, siis nurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Olgu antud kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka $\angle 1$ ja $\angle 2$, mille ühed haarad on samasuunalised, teised aga vastandsuunalised (joonis 37). Pikendanud nurkade kaht haara lõikumiseni, saame, et $\angle 1 = \angle 3$ kui kaasnurgad paralleelide juures ja $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$, sest $\angle 2$ ja $\angle 3$ on välised lähisnurgad paralleelide juures. Asendades viimases võrduses $\angle 3$ temaga võrdse nurgaga 1, saame:

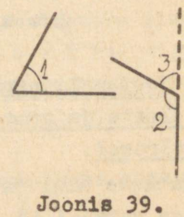
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$



Joonis 37.



Joonis 38.



Joonis 39.

2. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad on võrdsed või nende summa on sirgnurk.

1) Olgu $\angle 1$ ja $\angle 2$ (joonis 38) kaks vastavalt ristuvate haaradega nurka, mis mõlemad on teravnurgad või mõlemad nürinurgad. Joonestame nurga 1 tipu juurde nurga 3 nii, et tema

haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised nurga 2 haaradega. Siis $\angle 3 = \angle 2$ ja nurga 3 haarad on vastavalt risti nurga 1 haaradega. Sellest järeldub:

$$\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ;$$
$$\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ.$$

Järelikult $\angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 4$ ja seega

$$\angle 1 = \angle 3 = \angle 2.$$

2) Olgu $\angle 1$ ja $\angle 2$ (joonis 39) vastavalt ristuvate haaradega nurgad, milledest $\angle 1$ on terav- ja $\angle 2$ nürinurk. Tõestame, et

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$

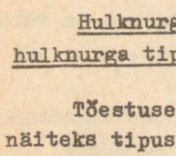
Selleks kasutame nurga 2 kõrvunurka $\angle 3$, mille haarad on samuti vastavalt risti nurga 1 haaradega, kuid mis on teravnurk, nagu $\angle 1$. Eelmise tõestuse põhjal $\angle 1 = \angle 3$. Et nurgad 2 ja 3 on kõrvunurgad, siis

$$\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ.$$

Asendades selles võrduses nurga 3 temaga võrdse nurgaga 1, saame:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$

3. Hulknurga sisenurkade summa. Tõestame esmalt, et kolmnurga sisenurkade summa on 180°.



Joonis 40.

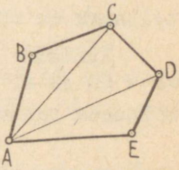
Tõestuseks paneme läbi kolmnurga tipu B küljega AC paralleelse sirge DE. Siis

$$\angle DBA + \angle ABC + \angle CBE = 180^\circ.$$

Kuid $\angle DBA = \angle BAC$ ja $\angle CBE = \angle ACB$ kui põiknurgad paralleelide DE ja AC juures. Asendamisel saame:

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ.$$

Hulknurga sisenurkade summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$, kus n on hulknurga tippude arv.



Joonis 41.

Tõestuseks tõmbame hulknurga ühest tipust, näiteks tipust A, diagonaalid (joonis 41). Need jaotavad hulknurga n - 2 kolmnurgaks, kus n on hulknurga tippude arv. Nende kolmnurkade sisenurkade summa võrdub hulknurga sisenurkade summaga, sest hulknurga nurgad on kas kolmnurga nurkadeks või koosnevad neist. Nende nurkade summa

$$s_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Näiteks 12-nurga sisenurkade summa $s_{12} = 10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$.

§ 9. Rööpkülik. Trapets

1. Rööpküliku omadused. Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed. Näiteks nelinurk ABCD (joonis 42) on rööpkülik, kui $AB \parallel CD$ ja $AD \parallel BC$.

Rööpküliku tähtsamad omadused on järgmised.

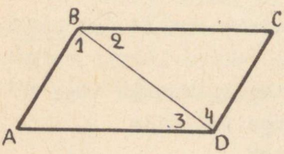
I. Rööpküliku vastasküljed on võrdsed, vastasnurgad on võrdsed ja iga külje lähisnurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Eeldus. $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 42).

Väide. 1) $AB = DC$; $AD = BC$;

2) $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$;

3) $\angle A + \angle B = 180^\circ$ jne.



Joonis 42.

Tõestus. Diagonaal BD jaotab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks: $\triangle ABD = \triangle CDB$, sest külg BD on neil ühine, $\angle 1 = \angle 4$ ja $\angle 3 = \angle 2$ kui põiknurgad paralleelide juures. Seega ka $AB = CD$, $AD = BC$ ja $\angle A = \angle C$, kui võrdsete kolmnurkade vastavad elemendid. Et $\angle 1 = \angle 4$ ja $\angle 2 = \angle 3$, siis ka $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 3$ ehk $\angle B = \angle D$. Edasi saame, et $\angle A + \angle B = 180^\circ$ kui paralleelide AD ja BC lõikamisel saadud lähisnurkade summa.

Pöördteoreem. Kui kumeras nelinurgas vastasküljed on võrdsed või kaks vastaskülge on võrdsed ja paralleelsed, siis see nelinurk on rööpkülik.

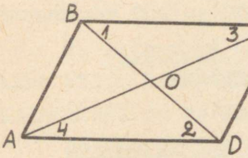
Tõestus. 1) Oletame, et kumera nelinurga ABCD külgedest $AB = CD$ ja $AD = BC$ (joonis 42). Siis kolmnurkade võrdsuse kolmanda tunnuse põhjal

$$\triangle ABD = \triangle BCD.$$

Seega $\angle 1 = \angle 4$ ja $\angle 3 = \angle 2$ kui võrdsete kolmnurkade vastavad nurgad. Kuid siis $AB \parallel CD$ ja $BC \parallel AD$, sest nende sirgete lõikamisel sirgega BD on tekkinud võrdsed põiknurgad. Vastasküigede paralleelsuse tõttu ABCD on rööpkülik.

2) Olgu samas nelinurgas AD = BC ja AD ∥ BC (joonis 42). Siis $\triangle ABD = \triangle CDB$, sest külg BD on neil ühine, AD = BC eelduse põhjal ja $\angle 3 = \angle 2$ kui põiknurgad eelduses antud paralleelide juures. Järelikult ka $\angle 1 = \angle 4$ ja seega AB ∥ CD.

II. <u>Rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist</u>.



Joonis 43.

<u>Tõestus</u>. $\triangle BOC = \triangle AOD$ (joonis 43), sest BC = AD kui rööpküliku vastasküljed, $\angle 1 = \angle 2$ ja $\angle 3 = \angle 4$ kui põiknurgad paralleelide juures. Järelikult OC = OA ja OB = OD kui võrdsete kolmnurkade vastavad küljed.

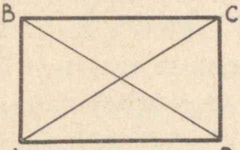
<u>Pöördteoreem</u>. Kui nelinurga diagonaalid poolitavad teineteist, siis nelinurk on rööpkülik.

<u>Tõestus</u>. Kui nelinurgas ABCD (joonis 43) AO = OC ja DO=OB, siis $\triangle AOD = \triangle COB$ esimese võrdsuse tunnuse põhjal. Sellest näeme, et AD = BC ja $\angle 1 = \angle 2$, mistõttu AD ∥ BC. Seega ABCD on rööpkülik, sest tal leidub üks paar paralleelseid ja võrdseid vastaskülgi.

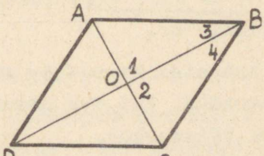
2. <u>Ristküliku, rombi ja ruudu omadused</u>. 1) Ristkülikuks nimetame rööpkülikut, mille nurgad on täisnurgad.

Ristkülikul on kõik rööpküliku omadused. Lisaks sellele on ristkülikul järgmine eriomadus:

<u>ristküliku diagonaalid on võrdsed</u>.



Joonis 44.



Joonis 45.

<u>Tõestus</u>. $\triangle ADB = \triangle DAC$ (joonis 44), sest need on täisnurksed kolmnurgad vastavalt võrdsete kaatetitega: AD = DA ja AB=DC. Seega ka AC = BD.

2) Rombiks nimetatakse rööpkülikut, mille küljed on võrdsed. Järelikult on rombil ka kõik rööpküliku omadused. Kuid

peale selle on tal veel järgmine eriomadus:

rombi diagonaalid on teineteisega risti ja poolitavad rombi nurki.

Tõestus. $\triangle ABO = \triangle CBO$ (joonis 45), sest BO on nende kolmnurkade ühine külg, $AB = BC$ kui rombi küljed ja $AO = OC$, sest rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist. Järelikult $\angle 1 = \angle 2$, millest näeme, et $AC \perp BD$, ja $\angle 3 = \angle 4$, s.t. diagonaal poolitab nurga B.

Analoogiliselt järeldub kolmnurkade BOC ja DOC võrdsusest, et diagonaal AC poolitab nurga C.

3) Ruutu võime defineerida mitmeti, näiteks:

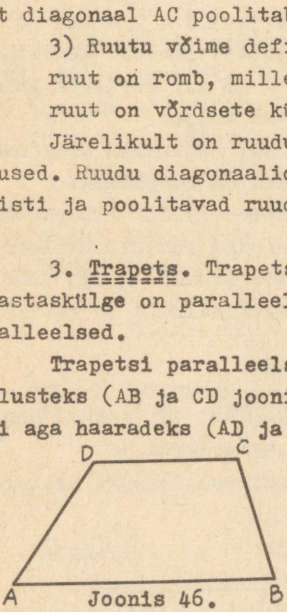
ruut on romb, mille nurgad on täisnurgad;

ruut on võrdsete külgedega ristkülik.

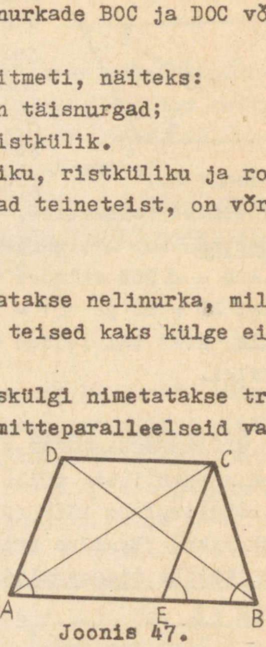
Järelikult on ruudul rööpküliku, ristküliku ja rombi omadused. Ruudu diagonaalid poolitavad teineteist, on võrdsed, on risti ja poolitavad ruudu nurki.

3. Trapets. Trapetsiks nimetatakse nelinurka, mille kaks vastaskülge on paralleelsed, kuid teised kaks külge ei ole paralleelsed.

Trapetsi paralleelseid vastaskülgi nimetatakse trapetsi alusteks (AB ja CD joonisel 46), mitteparalleelseid vastaskülgi aga haaradeks (AD ja BC).



Joonis 46.



Joonis 47.

Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis trapetsit nimetatakse võrdhaarseks. Kui üks haaradest on alustega risti, siis trapets on täisnurkne.

Võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed ja diagonaalid on võrdsed.

Tõepoolest, kui nelinurgas ABCD (joonis 47) $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$, siis joonestades $CE \parallel AD$ saame rööpküliku ADCE, ja seega $AD = EC$. Eelduse $AD = BC$ tõttu järeldub nüüd, et $EC = BC$, seega

$$\angle ABC = \angle BEC = \angle BAD.$$

Kuid siis $\triangle ABC = \triangle BAD$ kolmnurkade võrdsuse esimese tunnuse põhjal, järelikult $AC = BD$.

§ 10. Kolmnurga kesklõik. Trapetsi kesklõik

1. Kolmnurga kesklõik. Sirglõiku, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte, nimetatakse kolmnurga kesklõiguks. Kolmnurgal on kolm kesklõiku.

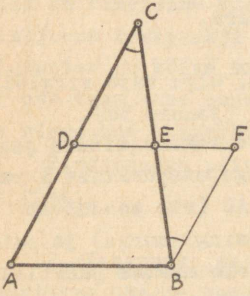
Kolmnurga iga kesklõik on paralleelne kolmnurga ühe küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

Tõestus. Olgu DE kolmnurga ABC kesklõik (joonis 48), s.t. $AD = DC$ ja $BE = EC$. Joonestades $BF \parallel AC$ ja pikendades kesklõiku DE lõikumiseni selle paralleeliga, saame kolmnurga BEF, mis on võrdne kolmnurgaga CED (II tunnuse põhjal). Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$DE = EF \text{ ja } DC = BF.$$

Kuid siis

$$DE = \frac{1}{2} DF \text{ ja } AD = BF,$$



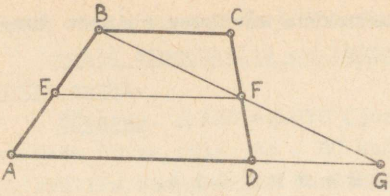
Joonis 48.

viimane eelduse $AD = DC$ tõttu. Nüüd näeme, et nelinurk $ABFD$ on rööpkülik, sest tema vastasküljed AD ja BF on paralleelsed ja võrdsed. Kuid siis ka DF ja AB on paralleelsed ja võrdsed, seega

$$DE \parallel AB \text{ ja } DE = \frac{1}{2} AB.$$

Järeldus. Sirge, mis läbib kolmnurga ühe külje keskpunkti (D joonisel 48) ja on paralleelne teise küljega (AB), poolitab kolmanda külje (BC).

2. Trapetsi kesklõik. Sirglõiku, mis ühendab trapetsi mitteparalleelsete vastaskülgede keskpunkte, nimetatakse trapetsi kesklõiguks.



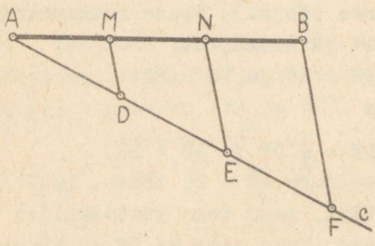
Joonis 49.

<u>Trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja võrdub aluste poolsummaga</u>.

<u>Tõestus</u>. Olgu nelinurgas ABCD (joonis 49) $AD \parallel BC$, $AE = EB$ ja $DF = FC$. Tõestame, et siis $AD \parallel EF \parallel BC$ ja $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Selleks joonestame sirge BF kuni lõikumiseni külje AD pikendusega punktis G. Tekkinud kolmnurgad $\triangle BCF$ ja $\triangle GDF$ on võrdsed, sest $CF = FD$ eelduse põhjal, $\angle BFC = \angle DFG$ kui tippnurgad ja $\angle CBF = \angle DGF$ kui põiknurgad paralleelide juures. Järelikult $BF = FG$ ja $BC = DG$. Seega lõik EF on kesklõiguks kolmnurgas ABG, mistõttu $EF \parallel AD$ ja $EF = \frac{1}{2} AG$ ehk $EF = \frac{1}{2}(AD + DG) = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

<u>Järeldus</u>. Sirge, mis poolitab trapetsi ühe haara ja on paralleelne alustega, poolitab ka teise haara.

3. <u>Lõigu jaotamine võrdseteks osadeks</u>. Olgu vaja sirglõik AB jaotada näiteks kolmeks võrdseks osaks (joonis 50).



Joonis 50.

Ülesande lahendamiseks joonestame lõigu otspunktist A vabalt kiire AC (mis moodustab lõiguga AB mingi nurga) ja paigutame sellele alates punktist A kolm võrdset lõiku: $AD = DE = EF$. Edasi ühendame punktid F ja B ning joonestame läbi punktide D ja E sirged DM ja EN nii, et

$$DM \parallel EN \parallel FB.$$

Et kolmnurga AEN külje AE keskpunktist D on joonestatud lõik $DM \parallel EN$, siis $AM = MN$ (§ 10, 1, järeldus). Analoogiliselt saame trapetsist DFBM, et $MN = NB$ (§ 10, 2, järeldus). Seega on lõik AB jaotatud kolmeks võrdseks osaks:

$$AM = MN = NB.$$

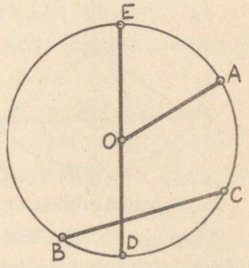
<u>Üldiselt</u>: kui nurga (BAC, joonis 50) ühel haaral on võetud rida võrdseid lõike ($AD = DE = EF = \ldots$) ja nende otspunktidest on tõmmatud rida paralleele, mis lõikavad nurga teist haara,

siis ka teisel haaral tekib rida võrdseid lõike (AM = MN = = NB=...).

§ 11. R i n g j o o n

1. Ringjoone mõiste. Ringjooneks nimetatakse antud punktist antud kaugusel asetseva punkti geomeetrilist kohta tasapinnal. See antud punkt on ringjoone keskpunkt (O joonisel 51) ja lõik, mis ühendab keskpunkti ringjoone mingi punktiga, on ringjoone raadius (OA). Ringjooned on võrdsed, kui on võrdsed nende raadiused. Ringjoone mingit kaht punkti ühendav lõik on ringjoone kõõl (BC). Kõõl läbi ringjoone keskpunkti on diameeter (DE). Diameeter on kõige suurem kõõl. Ringjoone osa tema kahe punkti vahel nimetatakse ringjoone kaareks.

Ringjoonega piiratud tasapinna osa on ring.



Joonis 51.

2. Kesknurk, sellele vastav kõõl ja kaar. Kesknurgaks nimetatakse ühe ja sama ringi kahe raadiuse vahelist nurka. Igale kesknurgale vastab üks kaar ja, ümberpöördult, igale kaarele üks kesknurk. Kaare otspunkte ühendab üks kõõl - sellele kaarele vastav kõõl. Ümberpöördult, iga kõõlu otspunkte ühendavad kaks kaart, milleks kõõlu otspunktid jaotavad ringjoone. Kui teisiti pole öeldud, siis diameetrist väiksemale kõõlule vastavaks kaareks loeme neist kahest kaarest selle, mis on poolringjoonest väiksem.

Diameeter, mis on risti kõõluga, poolitab kõõlu ja sellele vastava kesknurga.

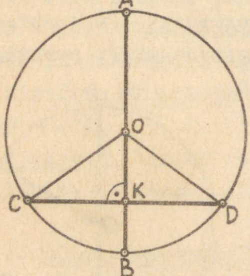
Tõestus. Olgu diameeter AB risti kõõluga CD (joonis 52). Siis diameetri lõik OK on võrdhaarse kolmnurga COD kõrguseks, seega ka bisektoriks ja mediaaniks (§2, 3). Järelikult ∠COK = = ∠DOK ja KC = KD.

Kahe raadiusega ja ringjoone kaarega piiratud osa ringist nimetatakse ringi <u>sektoriks</u>.

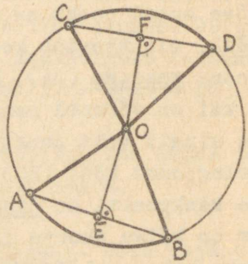
<u>Teoreem</u>. Kui ühes ja samas ringis või võrdsetes ringides

1) kesknurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kaared ja kõõlud, kusjuures viimased on ringi keskpunktist võrdsetel kaugustel;

2) kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kesknurgad ja kõõlud, kusjuures viimased on ringi keskpunktist võrdsetel kaugustel.



Joonis 52.



Joonis 53.

<u>Tõestus</u>. Olgu ühes ja samas ringis kesknurk AOB võrdne kesknurgaga COD (joonis 53). Pöörame sektorit AOB ümber keskpunkti O kuni raadius OB ühtib raadiusega OC. Siis punkt A langeb ühte punktiga D (sest $\angle AOB = \angle COD$). Seega ühtib kaar AB kaarega CD ja kõõl AB kõõluga CD, samuti ühtivad kõõlude keskpunktid E ja F, järelikult $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, AB = CD ja OE = OF.

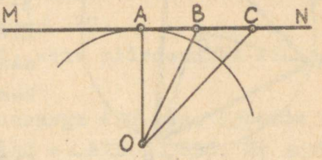
Analoogiliselt saab tõestada teoreemi teist osa. Kui kesknurgad on antud kahes erinevas, kuid võrdsetes ringides, siis paigutame ühe ringi teise peale ja jätkame tõestust endisel viisil.

3. <u>Ringjoone puutuja</u>. Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse <u>ringjoone puutujaks</u>. Seda ühist punkti nimetatakse <u>puutepunktiks</u>. Niisuguse sirge olemasolu näitab järgmine teoreem.

<u>Kui sirge on risti raadiusega selle otspunktis ringjoonel, siis on ta ringjoone puutuja</u>.

Olgu $AM \perp OA$, kus A on raadiuse otspunkt ringjoonel (joonis 54). Tõestame, et punkt A on sirge AM ja ringjoone ainus ühine punkt, s.t. AM on ringjoone puutuja.

Tõepoolest, sirge AM muud punktid B, C, ... asetsevad ringjoone keskpunktist O kaugemal kui punkt A, sest ristlõik OA on lühem igast kaldlõigust OB, OC, ... (§4, 4). Et OA on ringjoone raadius, siis punktide B, C, ... kaugus ringi keskpunktist on suurem kui raadius, s,t, nad asetsevad väljaspool ringjoont.

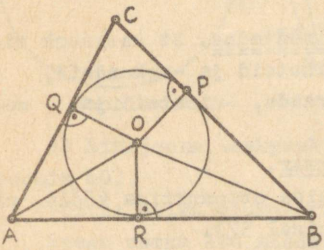


Joonis 54.

Pöördteoreem. Kui sirge on ringjoone puutuja, siis on ta risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

Tõepoolest, kui sirge MN on ringjoone puutuja punktis A, siis raadius OA on vähim nendest lõikudest OA, OB, OC, ... , mis ühendavad keskpunkti O sirgjoone MN punktidega, ja seepärast OA⊥MN.

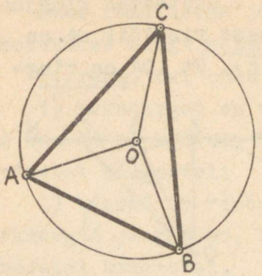
4. Kolmnurga siseringjoone keskpunkt. Kolmnurga sisse joonestatud ringjooneks ehk siseringjooneks nimetatakse ringjoont, mis puudutab kolmnurga külgi (joonis 55). Siseringjoone keskpunkt O peab asetsema võrdsetel kaugustel kolmnurga külgedest: OP = OQ = OR. Et külgedest AB ja AC võrdsetel kaugustel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks on nurga A poolitaja, siis punkt O peab asetsema selle nurga poolitajal. Analoogilisel põhjusel ta peab asetsema nurga B poolitajal. Need kaks nurgapoolitajat lõikuvad punktis O, mida läbib ka nurga C poolitaja.



Joonis 55.

Seega kolmnurga sisse joonestatud ringjoone keskpunkt asetseb nurgapoolitajate lõikepunktis.

5. Kolmnurga ümberringjoone keskpunkt. Kolmnurga ümber joonestatud ringjooneks ehk ümberringjooneks nimetatakse ringjoont, mis läbib kolmnurga tippe (joonis 56). Selle ringjoone keskpunkt O peab asetsema võrdsetel kaugustel kolmnurga tippudest: AO = BO = CO. Et iga punkt, mis on tippudest A ja B võrd-



Joonis 56.

setel kaugustel, asetseb külje AB keskristsirgel, siis ka punkt O asetseb külje AB keskristsirgel. Niisamuti punkt O peab asetsema külje BC keskristsirgel. Külgede AB ja BC keskristsirgete lõikepunkti läbib ka külje AC keskristsirge.

Seega kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkt asetseb külgede keskristsirgete lõikepunktis.

Järeldus. Läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel, läheb üks ja ainult üks rinjoon.

§ 12. N u r g a d   r i n g i s

1. Kesknurkade ja piirdenurkade mõõtmine. Et kesknurk sisaldab niisama palju nurgakraade, -minuteid ja -sekundeid, kuipalju vastav kaar sisaldab kaarekraade, -minuteid ja -sekundeid, siis öeldakse, et

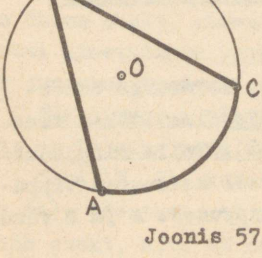
kesknurka mõõdab temale vastav kaar.

Nurka, mille moodustavad kaks ühise otspunktiga kõõlu, nimetatakse piirdenurgaks ($\angle ABC$ joonisel 57).

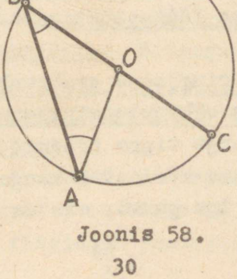
Öeldakse, et piirdenurk toetub kaarele, mis asetseb tema haarade vahel (joonisel 57 kaarele AC).

Piirdenurka mõõdab pool kaarest, millele ta toetub.

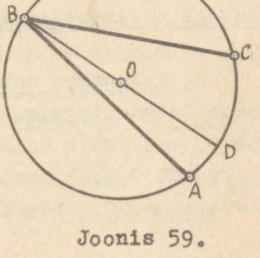
Tõestus. Tuleb vaadelda kolme järgmist võimalust.



Joonis 57.



Joonis 58.



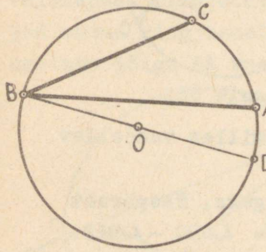
Joonis 59.

1) Ringjoone keskpunkt O asetseb piirdenurga ühel haaral, ütleme haaral BC (joonis 58). Ühendades punktid A ja O raadiuse AO abil, saame võrdhaarse kolmnurga ABO, milles $\angle ABO = \angle BAO$. Et $\angle AOC$ on selle kolmnurga välisnurk, siis $\angle AOC = \angle ABO + \angle BAO = 2\angle ABO = 2\angle ABC$, millest $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

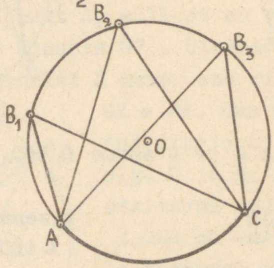
Et kesknurka AOC mõõdab kaar AC, siis piirdenurka ABC mõõdab pool kaarest AC.

2) Ringjoone keskpunkt on piirdenurga ABC sees (joonis 59). Võttes abiks diameetri BD saame: $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$. Et nurka ABD mõõdab pool kaarest AD ja nurka DBC pool kaarest DC, siis nende summat, s.o. nurka ABC mõõdab kaar

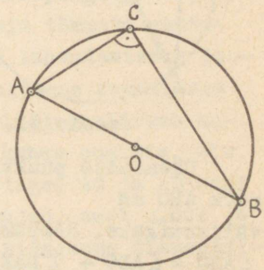
$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.



Joonis 60.



Joonis 61.



Joonis 62.

3) Ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdenurka ABC (joonis 60).

Võttes abiks diameetri BD saame: $\angle ABC = \angle DBC - \angle DBA$.

Seega nurka ABC mõõdab kaar $\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DA} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{DA}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$, mida oligi tarvis tõestada.

Järeldused.

1) Ühele ja samale kaarele AC toetuvad piirdenurgad AB_1C, AB_2C, AB_3C,... on võrdsed, sest igaüht neist mõõdab pool kaarest AC (joonis 61).

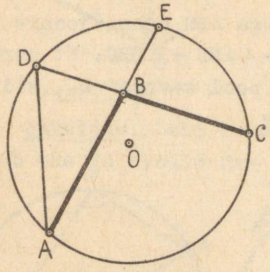
2) Diameetrile AB toetuv piirdenurk ACB on täisnurk, sest teda mõõdab pool poolringjoonest, s.o. kaar, mis sisaldab 90° (joonis 62).

2. Nurk, mille tipp asetseb ringjoone sees või väljaspool ringjoont.

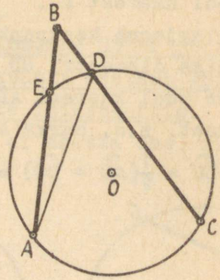
Teoreem 1. Nurka, mille tipp asetseb ringjoone sees, mõõdab kahe kaare poolsumma, milledest üks asetseb nurga haarade vahel, teine aga haarade pikenduste vahel (joonis 63).

Teoreem 2. Nurka, mille tipp asetseb väljaspool ringjoont ja mille haarad lõikavad ringjoont, mõõdab nurga haarade vahel asetseva kahe kaare poolvahe (joonis 64).

Tõestus 1. Tõestus 2.



Joonis 63.



Joonis 64.

Ühendades punktid A ja D saame $\triangle ABD$, milles vaadeldav nurk ABC on

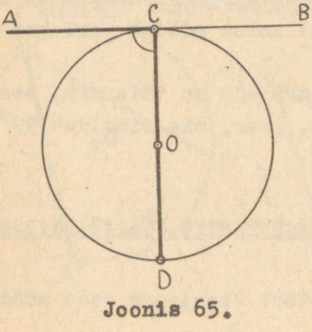
välisnurgaks. Seepärast $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. | sisenurgaks. Seepärast $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$.

Et $\angle ADC$ ja $\angle DAE$ on piirdenurgad, siis nurka ABC mõõdab kaar

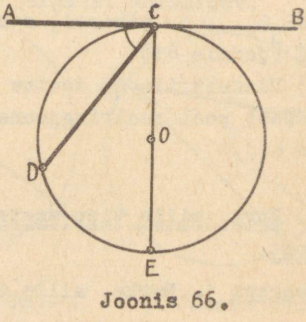
$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE})$. | $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE})$.

3. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk.

Puutuja ja kõõlu vahelist nurka mõõdab pool selle nurga sees asetsevast kaarest.



Joonis 65.



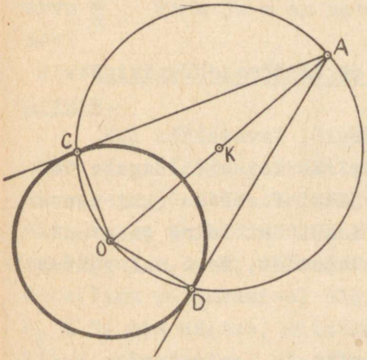
Joonis 66.

Erijuhtumil, kui kõõl läbib ringjoone keskpunkti (joonis 65), on $\angle ACD = 90^\circ$. Pool kaarest CD on $180^\circ : 2 = 90^\circ$, seega teoreem on kehtiv.

Juhtumil, kui kõõl CD ei läbi ringjoone keskpunkti (joonis 66), joonestame abijoonena diameetri CE. Siis $\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE$.

Et nurka ACE eelneva põhjal mõõdab pool kaarest CDE ja nurka DCE kui piirdenurka mõõdab pool kaarest DE, siis nurka ACD mõõdab kaar $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CDE} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CDE} - \overset{\frown}{DE}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$.

4. Puutuja konstrueerimine ringjoonele väljaspool ringjoont antud punktist. Olgu antud ringjoon keskpunktiga O ja väljaspool ringjoont punkt A, millest on vaja tõmmata puutujad antud ringjoonele (joonis 67). Ülesande lahendamiseks joonestame lõigu OA keskpunkti K ümber uue ringjoone raadiusega OK = KA. Uus ringjoon lõikab antud ringjoont kahes punktis, mis olgu C ja D. Sirged AC ja AD ongi otsitavad puutujad, sest $\angle OCA$ ja $\angle ODA$ on uue ringjoone diameetrile toetuvad piirdenurgad, seega täisnurgad. Niisiis kumbki sirgetest AC ja AD on risti antud ringjoone ühe raadiusega selle otspunktis ringjoonel, seega nad on antud ringjoone puutujad.



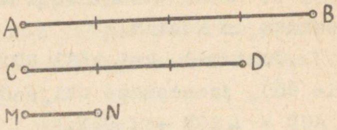
Joonis 67

§ 13. Lõikude võrdelisus

1. Ühismõõduga ja ühismõõduta lõigud. Kahe lõigu AB ja CD ühismõõduks nimetatakse niisugust kolmandat lõiku MN, mis mahub täisarv korda nii lõigusse AB kui ka lõigusse CD. Näiteks joonisel 68 kujutatud lõik MN on lõikude AB ja CD ühismõõt,

sest AB = 4 MN ja CD = 3 MN. Kui MN on lõikude AB ja CD ühismõõt, siis on seda ka lõik

MN : n,

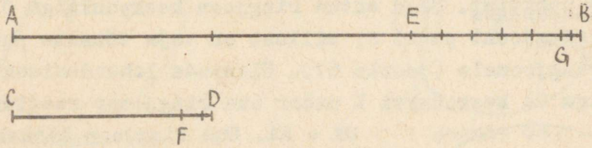


kus n on mistahes naturaalarv. Sel juhtumil on lõikudel AB ja CD lõpmata palju ühismõõte.

Joonis 68.

Kahe antud lõigu AB ja CD ühismõõdu (kui see on olemas) leiame järgmiselt.

Paigutame väiksema lõigu CD suuremale lõigule AB mingi n korda nii, et jääki ei oleks (kui see on võimalik) või jääk EB on väiksem kui lõik CD (joonis 69). Kui jääki ei teki, siis



Joonis 69.

lõik CD ongi antud lõikude ühismõõt ja AB = n · CD. Kui tekib jääk, siis

$$AB = n \cdot CD + EB.$$

Viimasel juhtumil paigutame jäägi EB teisele lõigule CD jälle mingi täisarv m korda nii, et jääki ei oleks (kui see on võimalik) või nii, et teine jääk FD < EB. Kui teine jääk on null, siis lõik EB on antud lõikude ühismõõt, sest sel juhtumil

$CD = m \cdot EB;$

$AB = n \cdot m \cdot EB + EB = (nm + 1)\,EB.$

Kui teine jääk FD ei ole null, siis

$$CD = m \cdot EB + FD.$$

Edasi paigutame teise jäägi FD esimesele jäägile EB mingi arv p korda nii, et uut jääki ei teki (kui see on võimalik) või nii, et kolmas jääk GB < FD. Kui kolmas jääk osutub nulliks, siis teine jääk FD on antud lõikude ühismõõt, sest siis

$EB = p \cdot FD;$

$CD = m \cdot EB + FD = m \cdot p \cdot FD + FD = (mp + 1)FD;$

$AB = n \cdot CD + EB = n(mp + 1)FD + p \cdot FD = (nmp + n + p)FD.$

Kui kolmas jääk ei ole null, siis jätkame jääkide leidmist endisel viisil. Seejuures võib juhtuda üks kahest: kas jääkide jadal tuleb lõpp või seda lõppu ei tule. Kui jääkide jadal tuleb lõpp, siis viimane nullist erinev jääk on antud lõikude ühismõõt, ja antud lõigud on seega ühismõõduga lõigud. Kui jääkide jada ei lõpe, s.t. kui lõikude kirjeldatud paigutamisel ikka tekib jääk, siis lõikudel ühismõõtu ei leidu - lõigud on ühismõõduta.

Saab tõestada, et näiteks ruudu külg ja diagonaal on ühismõõduta lõigud, samuti võrdkülgse kolmnurga külg ja kõrgus.

2. Lõikude suhe. Mistahes kahe lõigu suhte defineerimiseks tuleb esmalt defineerida lõigu pikkuse mõiste.

Leidugu lõigul AB ja ühikuks võetud lõigul CD ühismõõt MN ja mahtugu see ühismõõt m korda lõigusse AB ja n korda ühiklõigusse CD:

$$AB = m \cdot MN; \quad CD = n \cdot MN.$$

Siis lõigu AB <u>pikkuseks</u> ühiku CD korral nimetatakse arvu $\frac{m}{n}$. Et m ja n on naturaalarvud, siis $\frac{m}{n}$ on ratsionaalarv:

<u>ühikuga ühismõõdulise lõigu pikkus väljendub ratsionaalarvuna</u>.

Kui mõõdetaval lõigul ja ühiklõigul ühismõõtu ei leidu, siis saame lõigu pikkust määrata ligikaudselt kuitahes suure täpsusega. Selleks leiame esmalt naturaalarvu n, mis näitab mitu korda ühiklõik ülimalt mahub antud lõigusse, siis naturaalarvu $m_1 \leqslant 9$, mis näitab, mitu korda $\frac{1}{10}$ ühiklõigust mahub ühiklõigu paigutamisel ülejäänud lõigusse, siis naturaalarvu $m_2 \leqslant 9$, mis näitab, mitu korda $\frac{1}{100}$ ühiklõigust mahub $\frac{1}{10}$ ühiklõigu paigutamisel ülejäänud lõigusse jne. Nii tekkiv arvude jada

$$n, m_1, m_2, m_3, \ldots$$

ei lõpe, sest vastasel korral mõõdetaval lõigul ja ühiklõigul leiduks ühismõõt. See arvude jada annab ühe lõpmatu kümnendmurru

$$n, m_1 m_2 m_3 \ldots,$$

mis väljendub antud lõigu AB pikkust antud ühiku CD korral. See lõpmatu kümnendmurd ei saa olla perioodiline, sest siis lõikudel AB ja CD leiduks ühismõõt. Et lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd on irratsionaalarv, siis ühikuga ühismõõduta lõigu pikkus väljendub irratsionaalarvuna.

Olgu nüüd mingid kaks lõiku AB ja CD mõõdetud ühe ja sama ühikuga ja nende mõõtarvudeks saadud p ja q:

$$AB = p \text{ ühikut}; \quad CD = q \text{ ühikut}.$$

Lõikude AB ja CD suhteks nimetatakse nende mõõtarvude suhet, kui lõigud on mõõdetud ühe ja sama ühikuga:

$$AB : CD = p : q.$$

See suhe on ratsionaalarv, kui lõikudel AB ja CD leidub ühismõõt, ja irratsionaalarv, kui lõikudel ei leidu ühismõõtu.

3. Võrdelised lõigud. Olgu antud kaks rida teineteisele vastavaid lõike, näiteks kahe samanimelise hulknurga küljed:

$$a, b, c, d, \ldots, h;$$
$$a', b', c', d', \ldots, h'.$$

Kui vastavate lõikude suhted on võrdsed, s.o. kui

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = \frac{h}{h'},$$

siis ühe rea lõike nimetame võrdelisteks teise rea lõikudega. Väikseim lõikude arv, mille kohta saab tarvitada mõistet "võrdelised", on neli: lõigud a ja b on võrdelised lõikudega a' ja b', kui

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Võrdeliste lõikude jäävat suhet $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots = k$ nimetatakse nende lõikude võrdeteguriks.

Võrdeliste lõikude konstrueerimine põhineb järgmisel nn. kiirteteoreemil (joonis 70).

Kui nurga haarad lõigata paralleelsete sirgetega, siis

1) lõigud, milleks paralleelid jaotavad nurga ühe haara, on võrdelised lõikudega, milleks nad jaotavad nurga teise haara:

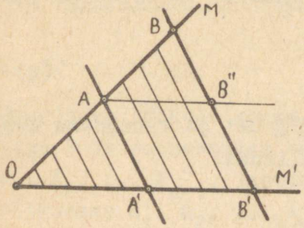
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots$$

2) kolmnurgad, mis paralleelid eraldavad nurgast, on võrdeliste külgedega:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'} .$$

Tõestuseks lõikame nurga MOM' haarasid esmalt kahe paralleeliga AA' $\parallel$ BB' ja tõestame, et OA : OA' = AB : A'B'.

Lõigud OA ja AB on kas ühismõõduga või ühismõõduta. Kui neil leidub ühismõõt ja see mahub lõiku OA m korda ning lõiku AB n korda, siis $\frac{OA}{AB} = \frac{m}{n}$.



Joonis 70.

Edasi jaotame lõigu OA m võrdseks osaks ja AB n samapikkaks osaks. Joonestades läbi jaotuspunktide sirgega AA' paralleelsed sirged, tekivad ka nurga teisel haaral OM' võrdsed lõigud (§ 10, 3), mida lõigus OA' on m tükki ja lõigus A'B' n tükki. Niisiis

$$\frac{OA'}{A'B'} = \frac{m}{n} .$$

Saadud kahest võrdest järeldub, et

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'} \text{ ehk } \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} ,$$

mida oligi vaja tõestada.

Kui lõikudel OA ja AB ühismõõt puudub, siis jaotame lõigu OA esmalt 10-ks, siis 100-ks jne. võrdseks osaks ning paigutame saadud osa lõigule AB niimitu korda, nagu ta mahub. Joonestades läbi jaotuspunktide endiselt sirgega AA' paralleelsed sirged, näeme, et nurga teisel haaral saame ka võrdsed lõigud, kusjuures nende arv lõikudel OA' ja A'B' on vastavalt võrdne võrdsete lõikude arvuga lõikudel OA ja AB. Sellest järeldame, et haaradel saadud lõigud ka nüüd on võrdelised.

Kui nurga haarad lõigata veel uute paralleelidega CC', DD' jne., siis võrdsete suhete rida pikeneb:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots$$

Teoreemi teise poole tõestamiseks asendame saadud võrrete rea esimeses võrdes AB temaga võrdse vahega OB - OA ja A'B' temaga võrdse vahega OB' - OA' ning vahetame selles võrdes välisliikmed. Saadud võrde

$$\frac{OB' - OA'}{OA'} = \frac{OB - OA}{OA}$$

mõlema poolega liidame arvu 1; siis saame võrde

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OB}{OA},$$

mille liikmed vastupidises järjekorras annavad väite teise poole esimese võrde:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}. \qquad (*)$$

Edasi joonestame punktist A abisirge $AB'' \parallel OM'$ ja rakendame nurga OBB' haaradel tekkinud lõikude võrdelisust:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{B''B'}{BB'}$$

ehk, et $B''B' = AA'$,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}$$

Viimane võrre koos võrdega (*) annabki teoreemi teise poole väite:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}.$$

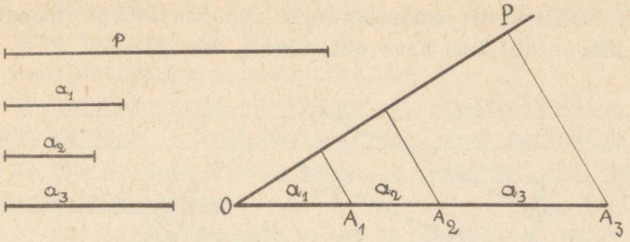
Vastuväiteliselt saab tõestada järgmise kiirteteoreemi <u>pöördteoreemi</u>:

kui kaks sirget lõikavad nurga haarasid nii, et lõigud nurga tipust ühe sirgeni on võrdelised lõikudega nurga tipust teise sirgeni, siis need sirged on paralleelsed.

4. <u>Lõigu jaotamine osadeks, mis on võrdelised antud lõikudega</u>. Teoreem nurga haarade lõikamisest paralleelsete sirgetega võimaldab lahendada sirkli ja joonlaua abil järgmist ülesannet.

<u>Antud lõik p jaotada n osaks</u> (joonisel 71 kolmeks osaks), <u>mis on võrdelised antud lõikudega $a_1, a_2, \ldots, a_n$.</u>

Ülesande lahendamiseks võtame vabalt mingi nurga O ja paigutame selle ühele haarale (alates tipust) lõigu OP = p, teisele haarale (ka alates tipust) aga järjestikku lõigud $a_1, a_2, \ldots, a_n$.



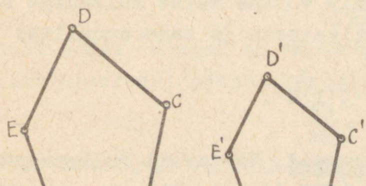
Joonis 71.

Ühendades lõikude summa $a_1 + a_2 + ... + a_n$ otspunkti A_n punktiga P ja joonestades saadud sirgele paralleelid läbi punktide $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$, jaotub lõik OP n osaks, mis on võrdelised lõikudega $a_1, a_2, ..., a_n$.

§ 14. Hulknurkade sarnasus

1. Hulknurkade sarnasuse mõiste. Kaht hulknurka nimetatakse sarnasteks, kui ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja vastavalt võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Niisiis, hulknurgad ABCDE (joonis 72) ja A'B'C'D'E' on sarnased, kui $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$ ja

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$



Joonis 72.

Kahe sarnase hulknurga vastavate külgete suhet nimetatakse nende hulknurkade sarnasusteguriks.

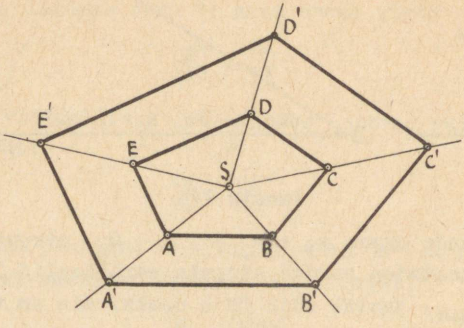
Hulknurkade sarnasust märgitakse sümboliga $\sim$.

Konstrueerida antud hulknurgaga ABCDE sarnane hulknurk on kõige lihtsam sarnasusteisenduse abil (joonis 73):

1) läbi vabalt võetud punkti S (sarnasuskeskpunkti) ja antud hulknurga ABCDE tippude joonestame abisirged SA, SB, ...;

2) ühel abisirgel, näiteks sirgel SA, võtame punkti A' (va-

balt, kui hulknurkade sarnasustegur pole antud) ja joonestame sellest lõigu $A'B' \parallel AB$ kuni abisirgeni SB;



Joonis 73.

3) punktist B' joonestame lõigu $B'C' \parallel BC$ kuni abisirgeni SC', jätkates niiviisi tööd kuni jõuame viimase abisirge punktini E', mille ühendame punktiga A'. Kiirteteoreemi põhjal

$$\frac{SA}{SA'} = \underline{\frac{AB}{A'B'}} = \frac{SB}{SB'} = \underline{\frac{BC}{B'C'}} = \frac{SC}{SC'} = \ldots = \frac{SE}{SE'}\,.$$

Kiirteteoreemi pöördteoreemi põhjal järeldub nüüd võrdest $\frac{SA}{SA'} = \frac{SE}{SE'}$, et ka $A'E' \parallel AE$ ja seega $\frac{SE}{SE'} = \underline{\frac{AE}{A'E'}}$.

Allakriipsutatud suhetest on näha, et hulknurga ABCDE küljed on võrdelised hulknurga A'B'C'D'E' vastavate külgedega. Ka on ühe hulknurga iga nurk vastavalt võrdne teise hulknurga ühe nurgaga kui kaks vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurka. Seega

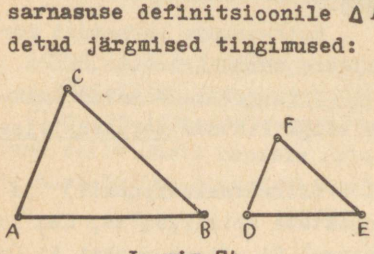
$$ABCDE \sim A'B'C'D'E'.$$

2. <u>Kolmnurkade sarnasuse tunnused</u>. Vastavalt hulknurkade sarnasuse definitsioonile $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (joonis 74), kui on täidetud järgmised tingimused:

$$\angle A = \angle D; \quad \angle B = \angle E; \quad \angle C = \angle F$$

ja

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}\,.$$



Joonis 74.

Kolmnurkade sarnasuse tunnused näitavad, et kui neist võrdustest teatud kaks on kehtivad, siis on ka teised kehtivad, s.t. kolmnurgad on sarnased. Need tunnused on järgmised.

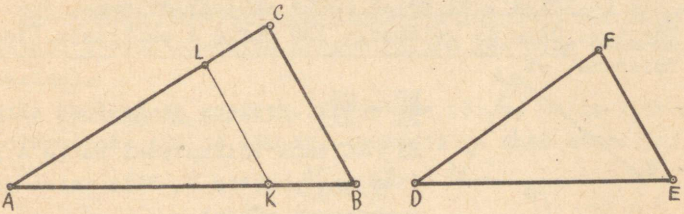
Kaks kolmnurka on sarnased, kui

1) <u>ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed</u>;

2) <u>ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga</u>;

3) <u>ühe kolmnurga kolm külge on võrdelised teise kolmnurga kolme küljega</u>.

<u>Tõestus</u>. Olgu antud, et (joonis 75)



Joonis 75.

1) $AB : DE = AC : DF$; $\angle A = \angle D$.

2) $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$.

3) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

Märgime kolmnurga ABC küljel AB punkti K nii, et $AK = DE$ ja joonestame sirge $KL \parallel BC$. Siis

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL,$$

sest nende nurgad on vastavalt võrdsed (miks?) ja küljed on kiirteteoreemi põhjal võrdelised:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL} = \frac{BC}{KL}.$$

Võrreldes neid võrdeid eeldustes (juhtumitel 1 ja 3) antud võrretega näeme, et tehtud konstruktsiooni tõttu on kolmnurkades AKL ja DEF järgmised küljed võrdsed:

$AK = DE$;	$AK = DE$;	$AK = DE$;
$AL = DF$;		$AL = DF$;
		$KL = EF$.

Võttes nüüd arvesse eeldustes antud nurkade võrdsust saame, et

$$\triangle AKL = \triangle DEF.$$

Et $\triangle ABC$ on sarnane ühega kahest võrdsest kolmnurgast, siis on ta sarnane ka teisega:

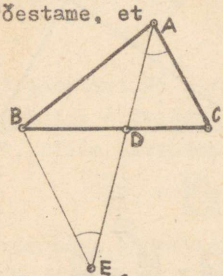
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Järeldus. Sarnaste kolmnurkade külgede võrdelisusest järeldub, et ühe kolmnurga mistahes kahe külje suhe võrdub teise kolmnurga vastavate külgede suhtega.

3. Teoreem kolmnurga sisenurga poolitajast.

Kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mis on võrdelised selle nurga lähisküljedega.

Tõestus. Olgu AD kolmnurga ABC nurga A poolitaja (joonis 76). Tõestame, et



Joonis 76.

$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$. Selleks joonestame sirge $BE \parallel AC$ kuni lõikumiseni nurga A poolitajaga punktis E. Siis teise sarnasustunnuse põhjal

$$\triangle BDE \sim \triangle CDA,$$

järelikult

$$\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CA}.$$

Et kolmnurgas ABE külje AE lähisnurgad on võrdsed (miks?), siis BE = BA. Ülalsaadud võrdest järeldub nüüd, et

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}.$$

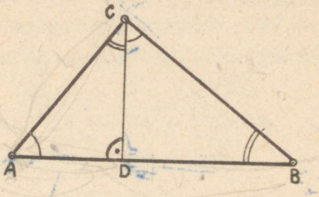
§ 15. Meetrilised seosed kolmnurgas ja ringis

1. Meetrilised seosed täisnurkses kolmnurgas. Kui täisnurkse kolmnurga ABC täisnurga tipust C tõmmata kõrgus hüpotenuusile (joonis 77), siis kolmnurk jaotub kaheks kolmnurgaks, mis mõlemad on sarnased antud kolmnurgaga ja seega ka teineteisega, sest nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed:

$$\triangle ACD \sim \triangle CDB \sim \triangle ABC.$$

Nende kolmnurkade sarnasusest järeldub kolm tähtsat teoreemi.

1) Teoreem kõrgusest. Kirjutame võrde, mille liikmeteks on sarnaste kolmnurkade ACD ja CDB kaatetid:



$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

ehk

$$CD^2 = AD \cdot DB.$$

Joonis 77.

Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine (ehk keskmine võrdeline).

2) Eukleidese teoreem. Kirjutame võrde, mille liikmeteks on kolmnurkade ACD ja ABC hüpotenuusid ja ühed kaatetid:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

ehk

$$AC^2 = AD \cdot AB. \tag{1}$$

Analoogiliselt saaksime kolmnurkadest CBD ja ABC:

$$BC^2 = BD \cdot AB. \tag{2}$$

Täisnurkse kolmnurga kaatet on oma projektsiooni ja hüpotenuusi geomeetriline keskmine.

3) Pütagorase teoreem. Liites võrduste (1) ja (2) vastavad pooled ja viies paremal ühise teguri AB sulgude ette, saame (rakendades võrdust AD + BD = AB):

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga.

Tähistame täisnurkse kolmnurga joonelemente ühe tähega järgmiselt:

hüpotenuus AB = c; kõrgus CD = h;
kaatet AC = b; kaateti b projektsioon AD = g;
kaatet BC = a; kaateti a projektsioon BD = f.

Nende tähiste abil väljenduvad vaadeldud seoses järgmiselt.

1) Pütagorase teoreem: $a^2 + b^2 = c^2$.
2) Eukleidese teoreem: $a^2 = cf$; $b^2 = cg$.
3) Teoreem kõrgusest: $h^2 = fg$.

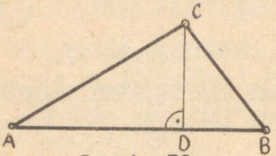
Lisaks neile $f + g = c$.

2. Kolmnurga teravnurga vastaskülje ruut ja nürinurga vastastkülje ruut. Olgu kolmnurgas ABC nurk A teravnurk (joonis 78). Tõmmates kõrguse tipust C saame Pütagorase teoreemi põhjal avaldada külje BC ruudu:

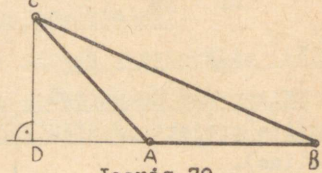
$$BC^2 = CD^2 + DB^2.$$

Et $CD^2 = AC^2 - AD^2$ ja $DB = AB - AD$, siis

$$BC^2 = AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD.$$



Joonis 78.



Joonis 79.

Kolmnurgas teravnurga vastaskülje ruut võrdub ülejäänud kahe külje ruutude summaga, millest on lahutatud kahekordne korrutis, mille teguriteks on üks külg ja selle külje lõik teravnurga tipust kõrguse aluspunktini.

Kui samal viisil avaldame nürinurga vastaskülje ruudu, siis saame (joonis 79):

$$BC^2 = CD^2 + DB^2 = AC^2 - AD^2 + (AB + AD)^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD,$$

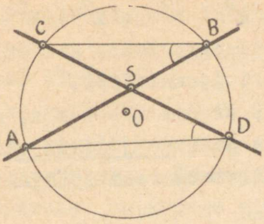
sest lõik DB on nüüd lõikude AB ja AD summa, kuna teravnurga puhul ta on nende vahe.

Kolmnurgas nürinurga vastaskülje ruut võrdub ülejäänud kahe külje ruutude summaga, millega on liidetud kahekordne korrutis, mille teguriteks on üks külg ja selle lõik nürinurga tipust kõrguse aluspunktini.

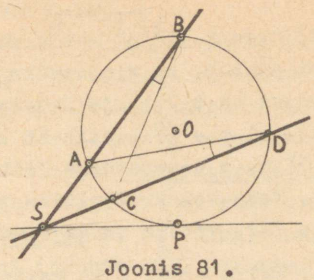
3. Võrdelised lõigud ringis. Kui läbi punkti, mis asetseb ringjoone sees või väljaspool ringjoont, on tõmmatud ringjoone lõikajad, siis nende lõikajate osade korrutised on võrdsed (mõistes lõikajate osade all nende ühise punkti ja ringjoone vahelisi lõike).

Võtame läbi punkti S, mis asetseb ringjoone sees (joonis 80) või väljaspool ringjoont (joonis 81) kaks meelevaldset lõikajat AB ja CD ning tõestame, et $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Väite tõestamiseks ühendame punktid A ja D, samuti ka C ja B. Siis $\Delta SAD \sim \Delta SCB$, sest ühe kolmnurga nurgad S ja D



Joonis 80.



Joonis 81.

on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega S ja B (D ja B on võrdsed kui piirdenurgad, mis toetuvad kaarele AC). Kolmnurkade sarnasusest järeldub, et nende vastavate külgede suhted on võrdsed:

$$SA : SC = SD : SB \qquad \frac{AS}{SC} = \frac{SD}{SB}$$

ehk

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$

Kui välise lõikepunkti puhul lõikajat CD pöörata ümber lõikepunkti S kuni lõikajast saab puutuja, siis lõikaja osadest saab puutuja lõik p = SP (joonis 81) ja

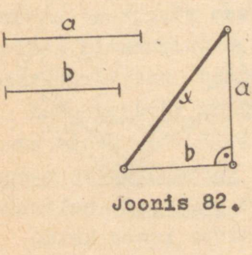
$$SA \cdot SB = p^2:$$

lõikaja osade korrutis võrdub puutuja lõigu ruuduga.

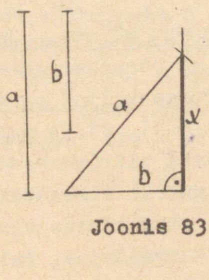
4. Mõnede avaldiste konstruktsioonid. On antud lõigud a, b ja c. Nõutakse konstrueerida sirkli ja joonlaua abil lõigud, mille pikkus on määratud järgmiste avaldistega:

$$\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 - b^2}; \quad \frac{ab}{c}; \quad \frac{a^2}{c}; \quad \sqrt{ab}.$$

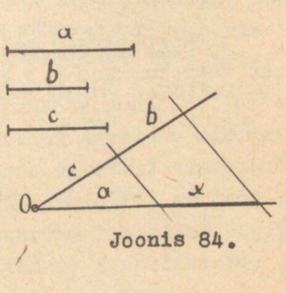
1) Olgu $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; siis $x^2 = a^2 + b^2$, millest nähtub, et x on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, kui kaatetid on a ja b (joonis 82).



Joonis 82.



Joonis 83.



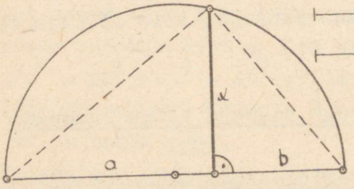
Joonis 84.

2) Olgu $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; siis $x^2 = a^2 - b^2$ ja $x^2 + b^2 = a^2$, millest nähtub, et x on täisnurkse kolmnurga teine kaatet, kui hüpotenuus on $a > b$ ja üks kaatet on b (joonis 83).

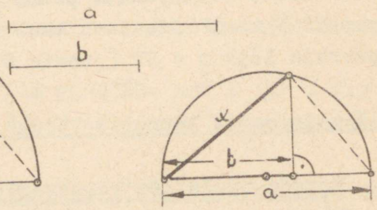
3) Kui $x = \frac{ab}{c}$, siis $ab = cx$, nii et $c : a = b : x$, mistõttu lõiku x nimetatakse lõikude c, a ja b neljandaks võrdeliseks. Tema konstrueerimine toimub kiirteteoreemi põhjal (joonis 84), võttes nurga 0 vabalt.

4) Kui $x = \frac{a^2}{c}$, siis rakendame eelmist konstruktsiooni (joonis 84), võttes selles $b = a$.

5) Kui $x = \sqrt{ab}$, siis $x^2 = ab$ ehk $a : x = x : b$, nii et x on lõikude a ja b keskmine võrdeline ehk geomeetriline keskmine. Geomeetrilist keskmist konstrueerime kas täisnurkse kolmnurga kõrguse kohta käiva teoreemi (joonis 85) või Eukleidese teoreemi (joonis 86) alusel (kasutades tõsiasja, et diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk):



Joonis 85.



Joonis 86.

§ 16. Korrapärased hulknurgad

1. Korrapärase hulknurga mõiste. Jaotame ringjoone n võrdseks kaareks, kus $n > 2$, ja ühendame naaberjaotuspunktid kõõlude abil. Saadud kõõlhulknurga küljed on võrdsed kui võrdsetele kaartele vastavad kõõlud (§ 11, 2) ja nurgad on võrdsed kui võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad (§ 12, 1). Nende kahe omaduse tõttu seda hulknurka nimetatakse korrapäraseks n-nurgaks. Keskkooli kursuses vaadeldakse ainult kumeraid hulknurki (tähtviisnurk on küll korrapärane, kuid mitte kumer hulk-

nurk; ruut on korrapärane kumer hulknurk).

Ringjoont, mis läbib korrapärase hulknurga kõiki tippe, nimetatakse tema ümberringjooneks. Ümberringjoone keskpunkt asetseb võrdsetel kaugustel mitte ainult hulknurga tippudest, vaid ka selle külgedest (võrdsete võrdhaarsete kolmnurkade kõrgused), mistõttu teda nimetatakse lihtsalt korrapärase hulknurga keskpunktiks. Keskpunkti kaugus külgedest on raadiuseks korrapärase hulknurga siseringjoonele, s. o. ringjoonele, mis puudutab hulknurga kõiki külgi (joonis 87). Siseringjoone raadiust r (OK joonisel 87) nimetatakse ka korrapärase hulknurga apoteemiks ja ümberringjoone raadiust R (OA joonisel 87) hulknurga raadiuseks.

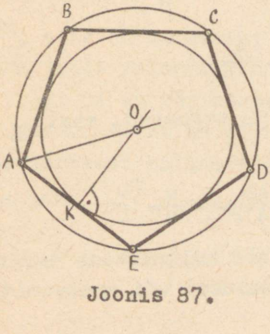
2. Korrapärase hulknurga ümberringjoone ja siseringjoone konstrueerimine. Korrapärase hulknurga sise- ja ümberringjoone ühist keskpunkti, s.o. hulknurga keskpunkti võib leida mitmel viisil.

1) Konstrueerime kahe lähisnurga poolitajad (§ 5, 3). Nende lõikepunkt, mis on võrdsetel kaugustel hulknurga külgedest, on ühtlasi hulknurga keskpunktiks.

2) Konstrueerime kahe mitteparalleelse külje keskristsirged (§ 5, 2). Nende lõikepunkt, mis on võrdsetel kaugustel hulknurga tippudest, on ühtlasi hulknurga keskpunktiks.

3) Konstrueerime ühe nurgapoolitaja ja sellega mitteristuva külje keskristsirge. Nende lõikepunkt on hulknurga keskpunktiks.

Näide. Konstrueerida antud korrapärase viisnurga ümberringjoon ja siseringjoon.



Joonis 87.

Lahendus. Joonestame näiteks nurga A poolitaja ja külje AE keskristsirge. Nende lõikepunkt O on mõlemate ringjoonte keskpunktiks. Ümberringjoone raadiuseks R on punkti O kaugus tipust A, siseringjoone raadiuseks r on punkti O kaugus sirgest AE:

$$R = OA \quad \text{ja} \quad r = OK.$$

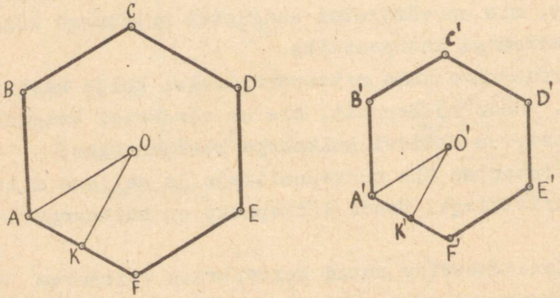
3. Korrapäraste ühenimeliste hulknurkade sarnasus.

Korrapärased ühenimelised (ühesuguse külgede arvuga) hulknurgad on sarnased ja nende ümbermõõdud suhtuvad nii, nagu vastavad küljed, raadiused või apoteemid.

Definitsiooni kohaselt (§ 14, 1) on hulknurgad sarnased siis, kui nende nurgad on vastavalt võrdsed ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Iga kumera n-nurga sisenurkade summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$ (§ 8, 3), korrapärase n-nurga iga sisenurk on seega $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$. Järelikult iga korrapärase hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise, eelmisega samanimelise hulknurga nurkadega. Et kummagi hulknurga küljed on omavahel võrdsed ($AB = BC = \ldots = FA$ ja $A'B' = B'C' = \ldots = F'A'$, joonis 88), siis on ka külgede suhted võrdsed:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{FA}{F'A'}.$$

Sellega on tõestatud korrapäraste ühenimeliste hulknurkade sarnasus.



Joonis 88.

Leiame ümbermõõtude suhte:

$$\frac{u}{u'} = \frac{AB + BC + \ldots + FA}{A'B' + B'C' + \ldots + F'A'} = \frac{n \cdot AB}{n \cdot A'B'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

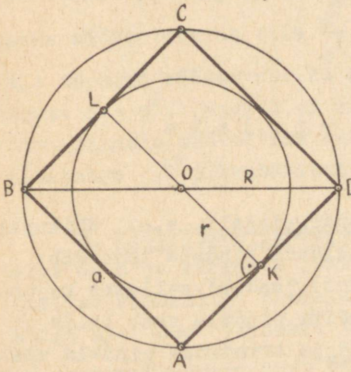
Kolmnurgad AOK ja A'O'K' (joonis 88) on sarnased, sest nende nurgad on vastavalt võrdsed. Saame:

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OK}{O'K'} = \frac{AK}{A'K'} = \frac{2AK}{2A'K'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{u}{u'}.$$

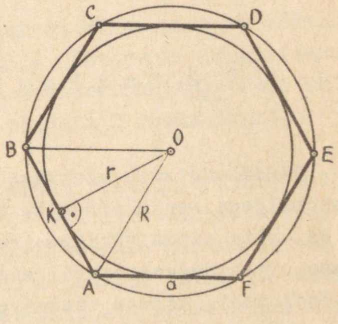
Oleme tõestanud, et korrapäraste ühenimeliste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nii, nagu nende küljed, raadiused või apoteemid.

§ 17. Korrapärase hulknurga külje avaldamine sise- ja ümberringjoone raadiuse kaudu

1. Ruudu külg. Ruudu ABCD siseringjoone raadius $r = OK$ ja ümberringjoone raadius $R = OD$ (joonis 89). On ilmne, et ruudu külg a võrdub siseringjoone diameetriga: $a = 2r$. Külje a avaldamiseks ümberringjoone raadiuse kaudu kasutame võrdhaarset täisnurkset kolmnurka ABD, mille teravnurgad on 45° : $a = 2R \cdot \sin 45^\circ$. Teades, et $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, saame: $a = R \cdot \sqrt{2}$.



Joonis 89.

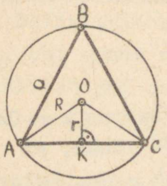


Joonis 90.

2. Korrapärase kuusnurga külg. Korrapärase kuusnurga kesknurk $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Kui võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 60°, siis on ka kumbki alusnurk 60° ja kolmnurk on võrdkülgne. Järelikult kolmnurk AOB (joonis 90) on võrdkülgne ja $a = R$.

Et OK on võrdhaarse kolmnurga kõrgus, siis $AK = \frac{a}{2}$. See kõrgus poolitab ka tipunurga: $\angle AOK = \frac{\angle AOB}{2} = 30^\circ$. AK avaldame täisnurksest kolmnurgast AOK : $\frac{a}{2} = r \cdot \tan 30^\circ$. Teades, et $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, saame: $a = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

3. Korrapärase kolmnurga külg. Korrapärase kolmnurga kesknurk $\angle AOC = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$. Võrdhaarse kolmnurga AOC kõrgus OK poolitab tipunurga AOC: $\angle AOK = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. Täisnurksest kolmnurgast AOK avaldame $\frac{a}{2}$ algul siseringjoone, seejärel ümberringjoone raadiuse kaudu: $\frac{a}{2} = r \tan 60^\circ$; $\frac{a}{2} = R \sin 60^\circ$. Teades, et $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ja $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, saame: $a = 2r\sqrt{3}$; $a = R\sqrt{3}$.



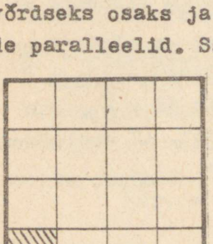
Joonis 91.

Tulemused näitavad, et korrapärase kolmnurga ümberringjoone raadius võrdub siseringjoone diameetriga.

§ 18. Hulknurga pindala

Pindalaühikuks võetakse ühikruudu pindala, s.o. ühikupikkuse küljega ruudu pindala. Mõõta kujundi pindala tähendab leida, mitu pindalaühikut (ruutühikut) "mahub" sellesse kujundisse. Paljude geomeetriliste kujundite pindala saab leida kaudsel teel, mõõtes teatud pikkused ja arvutades pindala vastava valemi abil.

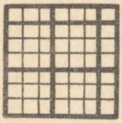
1. Ruudu pindala. 1) Kui ruudu külje pikkus a väljendub täisarvuna (joonis 92), siis jaotame ruudu kaks lähisküIge a võrdseks osaks ja joonestame läbi jaotuspunktide ruudu külgede paralleelid. Saame $a \cdot a$ ruudukest, millest igaüks küljeks on pikkusühik ja pindalaks seega pindalaühik. Järelikult ruudu pindala $S = a^2$.



Joonis 92.

2) Kui ruudu külje pikkus a väljendub murdarvuna $\frac{p}{q}$, siis võtame uueks pikkusühikuks $\frac{1}{q}$ esialgsest pikkusühikust. Ruudu külje pikkus väljendub siis täisarvuna p ja pindala on p^2 uut ruutühikut. Üks esialgne pindalaühik sisaldab $q \cdot q = q^2$ uut

pindalaühikut. Järelikult ruudu pindala esialgsetes pindalaühikutes on $\frac{p^2}{q^2} = (\frac{p}{q})^2$, s.t. väljendub endiselt külje pikkuse ruuduna. Joonisel 93 ruudu külg $a = \frac{p}{q} = \frac{7}{3}$.

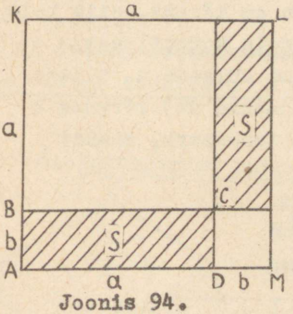


Joonis 93.

Võtame uueks pikkusühikuks $\frac{1}{3}$ esialgsest pikkusühikust. Ruudu külje mõõtarvuks on siis 7 ja pindala mõõtarvuks 49. Uusi pindalaühikuid mahub esialgsele pindalaühikule $3^2 = 9$. Järelikult ruudu pindala mõõtarvuks esialgsetes ühikutes on $\frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$.

3) Kui ruudu külje pikkus a väljendub irratsionaalarvuna, siis asendame arvu a tema ratsionaalse lähisväärtusega $\frac{p}{q}$, mille võime võtta iga soovitud täpsusega. Ruudu pindala ligikaudseks mõõtarvuks on siis $\frac{p^2}{q^2}$. Võtame aksioomina, et ruudu pindala täpseks mõõtarvuks ka sel juhul on külje pikkuse mõõtarvu ruut: $S = a^2$. (Sageli on ruudu külje mõõtarvuks irratsionaalarv, pindala mõõtarvuks aga ratsionaalarv. Näiteks ruut külje pikkusega $\sqrt{2}$ pikkusühikut omab pindala 2 ruutühikut).

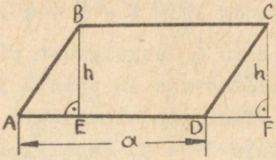
2. Ristküliku pindala. Olgu antud ristkülik ABCD, mille alus on a ja kõrgus b (täis-, murd- või irratsionaalarvud). Otsitav ristküliku pindala olgu S. Pikendame ristküliku kõiki külgi üle ühe otspunkti teise külje pikkuse võrra ja täiendame joonist nii, et saame ruudu AKLM (joonis 94), mille külje pikkus on $a + b$, pindala seega $(a + b)^2$. See ruut koosneb kahest võrdsest ristkülikust külgedega a ja b, ruudust küljega a ja ruudust küljega b. Ruudu AKLM pindala võrdub kahe võrdse ristküliku ja kahe ruudu pindala summaga: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2S$ ehk $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2S$. Saame: $S = a \cdot b$.



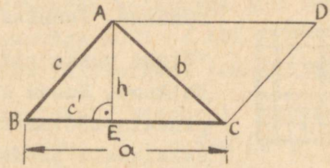
Joonis 94.

Ristküliku pindala võrdub tema aluse ja kõrguse korrutisega.

3. Rööpküliku pindala. Olgu rööpküliku ABCD alus $AD = a$ ja kõrgus $BE = h$ (joonis 95). Pikendame külge AD ja joonestame



Joonis 95.



Joonis 96.

tipust C kõrguse CF. Et täisnurksed kolmnurgad ABE ja DCF on võrdsed ($AB = CD$; $BE = CF = h$), siis on rööpkülik ABCD ja ristkülik BEFC võrdpindsed. Ühtlasi on neil alused võrdsed ja kõrgused võrdsed. Järelikult ka rööpküliku pindala võrdub tema aluse ja kõrguse korrutisega:

$$S = a \cdot h.$$

4. Kolmnurga pindala. Joonestame kolmnurga ABC (joonis 96) tippudest A ja C nende tippude vastaskülgedega paralleelsed sirged. Saadud rööpküliku ABCD pindala võrdub tema aluse $BC = a$ ja kõrguse h korrutisega. Et kolmnurgad ABC ja ADC on võrdsed, siis võrdub kolmnurga ABC pindala S poolega rööpküliku ABCD pindalast:

$$S = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Et a on ühtlasi kolmnurga alus ja h on kõrgus, siis kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega.

Kolmnurga pindala saab avaldada tema külgede a, b ja c kaudu. Selleks avaldame kolmnurga ABC (joonis 96) kõrguse h tema külgede kaudu. Eeldades, et $\angle B$ on teravnurk, saame:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$ (§ 15, 2), millest

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Kolmnurga kõrgus avaldub siis järgmiselt:

$$h = \sqrt{c^2 - c'^2} = \sqrt{c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

Lahutades tegureiks juurimismärgi all oleva ruutude vahe, saame:

$$(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) =$$
$$= \left[(a^2 + 2ac + c^2) - b^2\right] \cdot \left[b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)\right] =$$
$$= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c) =$$
$$= (a + b + c)(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a) =$$
$$= 2p \cdot (2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2a) =$$
$$= 16\, p(p - a)(p - b)(p - c),$$

kus $2p = a + b + c$ (kolmnurga ümbermõõt).

Järelikult

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{16p(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

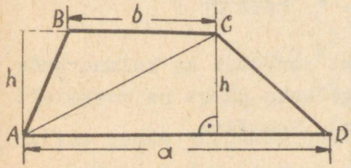
Korrutades leitud kõrguse kolmnurga poole alusega, saamegi nn. Heroni valemi

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

5. Trapetsi pindala. Trapetsi ABCD (joonis 97) diagonaal AC jaotab trapetsi kaheks kolmnurgaks. Trapetsi pindala S võime vaadelda nende kolmnurkade pindalade summana:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Seega trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.



Joonis 97.

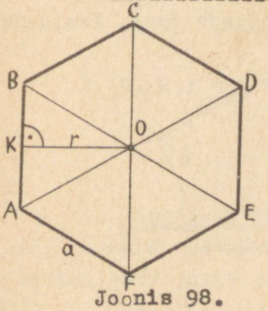
Et (§ 10, 2) trapetsi kesklõik $l = \frac{a + b}{2}$, siis trapetsi pindala võrdub kesklõigu ja kõrguse korrutisega:

$$S = lh.$$

6. Korrapärase hulknurga pindala. Ühendades korrapärase n-nurga tipud tema keskpunktiga O (joonis 98), saame n võrdset võrdhaarset kolmnurka. Ühe kolmnurga pindala

$S_\Delta = \frac{a \cdot r}{2}$, kus $r = OK$ on hulknurga apoteem. Hulknurga pindala $S = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} =$ $= \frac{na \cdot r}{2}$. Et na väljendab hulknurga ümbermõõtu u, siis

$$S = \frac{u \cdot r}{2}.$$

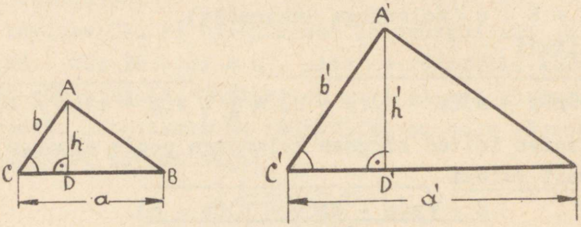


Joonis 98.

Korrapärase hulknurga pindala võrdub ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega.

7. Sarnaste hulknurkade pindalade suhe. Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nii, nagu nende vastavate külgede ruudud.

Tõestame teoreemi esmalt kolmnurkade kohta. Olgu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (joonis 99). Leiame nende pindalade suhte:



Joonis 99.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} .$$

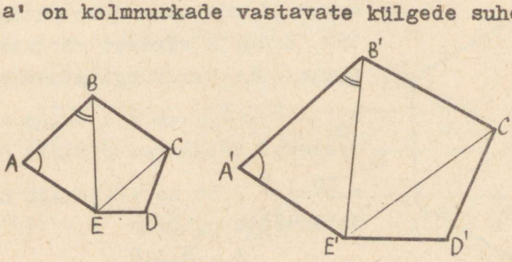
Kolmnurkade ABC ja A'B'C' sarnasusest järeldub ka kolmnurkade ACD ja A'C'D' sarnasus (ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga). Seetõttu

$$\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'},$$

s.t. sarnaste kolmnurkade vastavad kõrgused suhtuvad nii, nagu nende vastavad küljed. Seepärast ka $\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$ ja

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{a^2}{(a')^2} = k^2,$$

kus $k = a : a'$ on kolmnurkade vastavate külgede suhe. Avaldades



Joonis 100.

ühe kolmnurga pindala teise kaudu, saame

$$S_{ABC} = k^2 \cdot S_{A'B'C'}.$$

Vaatleme nüüd sarnaseid hulknurki ABCDE ja A'B'C'D'E'. Tükeldame nad kahest vastavast tipust E ja E' joonestatud diagonaalide abil kolmnurkadeks (joonis 100). Siis

$\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$ (sest hulknurkade sarnasuse tõttu $\angle A = \angle A'$ ja $AB : A'B' = AE : A'E'$);

$\triangle EBC \sim \triangle E'B'C'$ (sest hulknurkade ja eelmiste kolmnurkade sarnasuse tõttu $\angle EBC = \angle E'B'C'$ ja $BE : B'E' = BC : B'C'$); $\triangle EDC \sim \triangle E'D'C'$ (sest $\angle D = \angle D'$ ja $ED : E'D' = CD : C'D'$ hulknurkade sarnasuse tõttu).

Niisiis, sarnased hulknurgad on tükeldatud paariti sarnasteks kolmnurkadeks, milledel on hulknurkadega üks ja sama sarnasustegur:

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Järelikult

$$S_{ABE} = k^2 \cdot S_{A'B'E'};$$

$$S_{EBC} = k^2 \cdot S_{E'B'C'};$$

$$S_{ECD} = k^2 \cdot S_{E'C'D'}.$$

Liites nende võrduste vastavad pooled, saame

$$S_{ABE} + S_{EBC} + S_{ECD} = k^2(S_{A'B'E'} + S_{E'B'C'} + S_{E'C'D'})$$

ehk

$$S = k^2 \cdot S',$$

kus S on hulknurga ABCDE pindala ja S' on hulknurga A'B'C'D'E' pindala.

§ 19. Ringjoone pikkus ja ringi pindala

1. Ringjoone pikkuse mõiste. Sirglõiku saab võrrelda teise, ühikuks võetud sirglõiguga, sest sirgeid saab teha ühtivaiks. Kõverjoone pikkuse leidmine otsese võrdlemise teel pik-

kusühikuga pole võimalik, sest mingit sirglõiku ja kõverjoone lõiku ei saa teha ühtivaiks. Seepärast on vajalik defineerida, mida mõistame ringjoone pikkuse all.

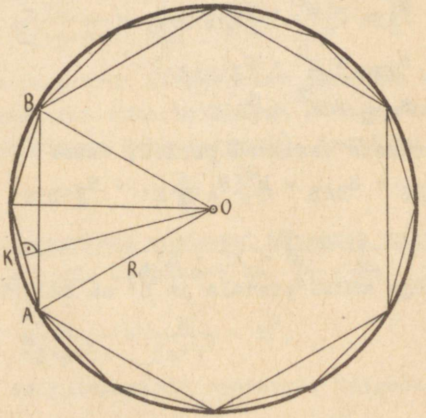
Definitsioon. Ringjoone pikkuseks loetakse piirväärtust, millele läheneb selle ringjoone sisse joonestatud korrapärase kõõlhulknurga (või selle ringjoone ümber joonestatud korrapärase puutujahulknurga) ümbermõõt hulknurga külgede arvu tõkestamatul kahekordistamisel.

Kui ringjoone pikkust tähistada tähega C ja korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõtu tähega u_n, siis antud definitsiooni saame kirjutada kujul

$$C = \lim_{n \to \infty} u_n ,$$

kus n kasvab nii, et omandab väärtused p, 2p, 4p, 8p,...

2. Ringjoone pikkuse valem. Ringjoone pikkuse valemi tuletamiseks joonestame ringjoone sisse korrapärase kõõlkuusnurga (joonis 101). Kui ringi raadius on R, siis kõõlkuusnurga



Joonis 101.

külg $AB = a_6 = R$, ümbermõõt $u_6 = 6R$; ümbermõõdu ja ringi diameetri suhe $\frac{u_6}{2R} = 3$. Poolitame kuusnurga külgedele vastavad kaared ja kahekordistame hulknurga külgede arvu. Saame korrapärase kaksteistnurga. Leiame kaksteistnurga külje a_{12}, tema ümbermõõdu u_{12} ja suhte $\frac{u_{12}}{2R}$.

Pool kaksteistnurga küljele vastavast kesknurgast

$$\angle AOK = \frac{360^\circ}{2 \cdot 12} = 15^\circ .$$

Täisnurksest kolmnurgast AOK

$$\frac{a_{12}}{2} = R \cdot \sin 15^\circ ;$$

$$a_{12} = 2R \cdot \sin 15^\circ \approx 2R \cdot 0{,}2588 .$$

Korrapärase kaksteistnurga ümbermõõt

$$u_{12} = 12 \cdot 2R \cdot 0{,}259 \approx 3{,}106 \cdot 2R ;$$

suhe $\frac{u_{12}}{2R} \approx 3{,}106$.

Kahekordistame uuesti korrapärase hulknurga külgede arvu ja leiame ülalantud viisil korrapärase 24-nurga külje pikkuse a_{24}, ümbermõõdu u_{24} ja suhte $\frac{u_{24}}{2R}$. Samuti võime leida ka korrapärase 48-nurga, 96-nurga, 192-nurga jne. ümbermõõdud. Arvutuste tulemused on esitatud järgmises tabelis.

Kõõlhulknurga külgede arv n	Kõõlhulknurga külje pikkus a_n	Kõõlhulknurga ümbermõõt u_n	Suhe $\frac{u_n}{2R}$
6	R	$3 \cdot 2R$	3
12	$2R \sin 15^\circ$	$3{,}106 \cdot 2R$	3,106
24	$2R \sin 7^\circ 30'$	$3{,}132 \cdot 2R$	3,132
48	$2R \sin 3^\circ 45'$	$3{,}139 \cdot 2R$	3,139
96	$2R \sin 1^\circ 52' 30''$	$3{,}141 \cdot 2R$	3,141
192	$2R \sin 56' 15''$	$3{,}141 \cdot 2R$	3,141
...	...	...	...

Kui jätkame külgede arvu kahekordistamist, siis saadud korrapäraste hulknurkade ümbermõõdud erinevad järjest vähem ringjoone pikkusest (olles sellest väiksemaks).

Tabelist nähtub, et ringjoone pikkuse leidmiseks tuleb diameeter korrutada teatud arvuga, mille esimesed kohad on 3, 1, 4. Seda arvu tähistatakse kreeka tähega π ja selle ligikaudne väärtus on 3,14. Seega ringjoone pikkust C võib arvutada valemi abil $C = 2\pi R$ või $C = \pi d$, kus d on ringi diameeter.

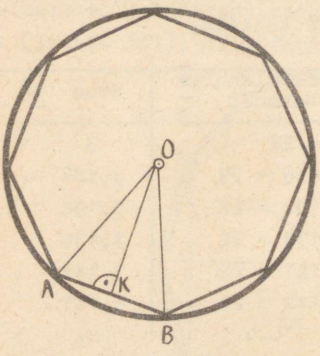
On võimalik tõestada, et arv π on irratsionaalarv (lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd). Suurendades hulknurga külgede arvu ja arvutuste täpsust võime saada arvule π järjest täpsemaid lähisväärtusi. Praktilisteks arvutusteks piisab harilikult väärtusest 3,14.

3. Ringi pindala. Ringi pindalaks loetakse piirväärtust, millele läheneb selle ringi sisse kujundatud korrapärase kõõlhulknurga (või selle ringi ümber kujundatud korrapärase puutujahulknurga) pindala, kui hulknurga külgede arvu tõkestamatult kahekordistada.

Kui korrapärase kõõlhulknurga pindala märkida tähega S_n ja ringi pindala tähega S, siis antud definitsiooni saame kirjutada kujul

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Joonestame antud ringjoonesse, mille raadius on R, korrapärase kõõlhulknurga, mille külgede arv on n (joonis 102).



Joonis 102.

Korrapärase n-nurga pindala $S_n = \frac{u_n \cdot r}{2}$ (§ 18, 6). Kui hulknurga külgede arvu tõkestamatult kahekordistada, siis ümbermõõt läheneb ringjoone pikkusele $2\pi R$. Leiame, millele läheneb apoteem $r = OK$ (joonis 102).

Et kolmnurga iga külg on väiksem teiste külgede summast, siis $OB < OK + KB$ ehk $R < r + \frac{a_n}{2}$ ehk $R - r < \frac{a_n}{2}$. On selge, et a_n muutub külgede arvu tõkestamatul kahekordistamisel kuitahes väikeseks. Seepärast muutub ka raadiuse R ja apoteemi r vahe kuitahes väikeseks. Järelikult apoteemi r piirväärtuseks on R ja korrapärase n-nurga pindala piirväärtus on $\frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$. Oleme saanud valemi ringi pindala arvutamiseks:

$$S = \pi R^2.$$

Kui pindala avaldada diameetri $D = 2R$ kaudu, siis saame valemi

$$S = \frac{1}{4}\pi D^2.$$

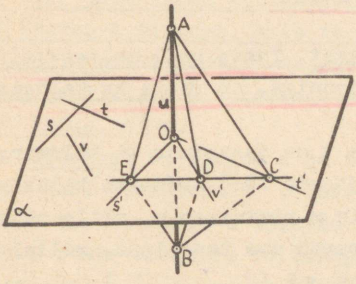
II. STEREOMEETRIA

§ 1. T a s a p i n n a   r i s t s i r g e

1. Sirge ja tasapinna ristseis. Sirget nimetatakse tasapinna ristsirgeks, kui ta on risti selle tasapinna iga sirgega (§ 4, 2). Sirge ja tasapinna ristseisu tunnust väljendab järgmine teoreem.

Kui tasapinda lõikav sirge on risti selle tasapinna mingi kahe lõikuva sirgega, siis on ta risti selle tasapinnaga.

Tõestus. Olgu tasapinda α lõikav sirge $u \perp s$ ja $u \perp t$ (joonis 103), kus s ja t on kaks lõikuvat sirget, mis asetsevad tasapinnal α. Tõestame, et u on risti tasapinna α mistahes kolmanda sirgega v. Selleks paneme läbi sirge u ja tasapinna α lõikepunkti O sirged s', t' ja v', mis on vastavalt paralleelsed sirgetega s, t ja v. Siis $u \perp s'$ ja $u \perp t'$ vastavalt kiivsirgete vahelise nurga definitsioonile (§ 4, 2).



Joonis 103.

Võtame sirgel u punktid A ja B nii, et $OA = OB$. Tõmbame tasapinnal sirge, mis lõikab sirgeid s', v' ja t' vastavalt punktides E, D ja C. Ühendame saadud punktid punktidega A ja B. Vaatleme tekkinud kolmnurki.

$\triangle AOC = \triangle BOC$ ja $\triangle AOE = \triangle BOE$ kui täisnurksed kolmnurgad vastavalt võrdsete kaatetitega. Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$AC = BC \quad \text{ja} \quad AE = BE.$$

Nüüd näeme, et

$$\triangle ACE = \triangle BCE,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. Nende kolmnurkade võrduse tõttu $\angle ACE = $ $= \angle BCE$.

sirge, mis on tasapinnaga risti, on tasapinna normaal.

kui $a \perp \alpha$, siis on $\perp$ iga sirgega, mis asub tasapinnal α

Edasi, $\triangle ACD = \triangle BCD$, sest neis on vastavalt võrdsed kaks külge ja nende vaheline nurk. Sellest järeldub, et $AD = BD$.

Lõpuks, $\triangle AOD = \triangle BOD$, sest neis on vastavalt võrdsed kolm külge. Seega $\angle AOD = \angle BOD$. Et need nurgad on kõrvunurgad, siis kumbki neist on täisnurk. Kuid siis $u \perp v'$ ja järelikult ka $u \perp v$.

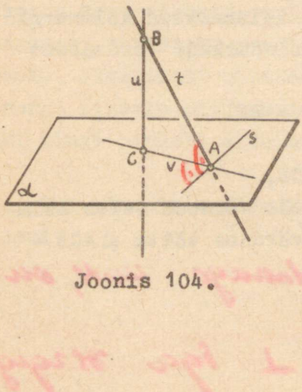
Nii näeme, et sirge u on risti tasapinna α iga sirgega, tähendab, ta on tasapinna ristsirge.

Väljaspool tasapinda antud punktist A tasapinnale tõmmatud ristsirge u (joonis 103) ja tasapinna lõikepunkti O nimetatakse punkti A projektsiooniks tasapinnal. Sirget, mis ei ole risti ega paralleelne tasapinnaga, nimetatakse selle tasapinna kaldsirgeks. Sirge ja tasapinna lõikepunkti nimetatakse sirge aluspunktiks tasapinnal.

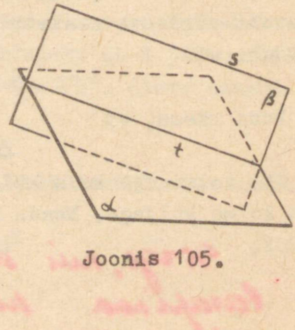
2. Teoreem kolmest ristsirgest. Tasapinnal asetsev sirge, mis on risti kaldsirge projektsiooniga, on risti ka kaldsirge endaga.

Tõestus. Eeldame, et sirge t on tasapinna α kaldsirge ja punkt A on selle aluspunkt (joonis 104). Tõmbame kaldsirge mingist punktist B tasapinnale α ristsirge u, mille aluspunkt olgu C. Sirged t ja u määravad uue tasapinna, millel asetseb ka kaldsirge projektsioon $v \equiv AC$.

Tasapinna α sirge s on risti tasapinna ristsirgega u (§ 1, 1). Kuid sirge s on eelduse järgi risti ka kaldsirge t projektsiooniga v. Tähendab, ta on risti tasapinnaga ABC, sest ta on risti selle tasapinna kahe lõikuva sirgega u ja v. Kuid siis on ta risti selle tasapinna iga sirgega: $s \perp t$.



Joonis 104.



Joonis 105.

Analoogiliselt tõestatakse ka pöördteoreem:

tasapinnal asetsev sirge, mis on risti tasapinna kaldsirgega, on risti ka kaldsirge projektsiooniga.

§ 2. Paralleelsus ruumis

1. Sirge ja tasapinna paralleelsus. Sirget ja tasapinda nimetatakse paralleelseteks, kui neil ei leidu ühtki ühist punkti. Sirge ja tasapinna paralleelsuse tunnust väljendab järgmine teoreem.

Kui tasapinnal mitteasetsev sirge on paralleelne tasapinnal asetseva sirgega, siis ta on paralleelne selle tasapinnaga.

Eeldus. Sirge s ei asetse tasapinnal α ; sirge t asetseb tasapinnal α ; $s \parallel t$ (joonis 105).

Väide. $s \parallel \alpha$.

Tõestus. Et sirged s ja t on paralleelsed, siis nad asetsevad ühel tasapinnal β . Tasapinnad α ja β lõikuvad mööda sirget t. Kui sirge s lõikaks tasapinda α mingis punktis P, siis P peaks asetsema ka tasapinnal β (sest sirge s asetseb tasapinnal β), seega ta peab asetsema tasapindade α ja β lõikejoonel t. Kuid see ei ole võimalik, sest s on paralleelne sirgega t. Jääb üle, et s on paralleelne α-ga.

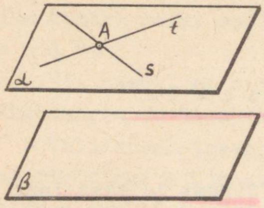
Järeldus. Kui sirge, mis asetseb ühel kahest lõikuvast tasapinnast, on paralleelne teise tasapinnaga, siis ta on paralleelne nende tasapindade lõikesirgega.

Tõepoolest, kui sirge s (joonis 105), mis asetseb tasapinnal β ja on paralleelne tasapinnaga α , ei oleks paralleelne nende tasapindade lõikejoonega t, siis sirged s ja t lõikuksid, sest nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal β . Lõikumise korral sirgete lõikepunkt peab asetsema nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β , s.o. sirge s peaks lõikuma tasapinnaga α Kuid see on vastuolus eeldusega, mistõttu sirge t peab olema paralleelne sirgega s.

2. Kahe tasapinna paralleelsus. Kaht tasapinda nimetatakse paralleelseteks, kui neil ei leidu ühtki ühist punkti.

Niisuguste tasapindade olemasolu näitab järgmine teoreem.

Kui ühe tasapinna kaks lõikuvat sirget on paralleelsed teise tasapinnaga, siis need tasapinnad on paralleelsed.



Joonis 106.

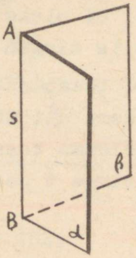
Eeldus. Tasapinna α sirged s ja t lõikuvad; $s \parallel \beta$ ja $t \parallel \beta$ (joonis 106).

Väide. $\alpha \parallel \beta$.

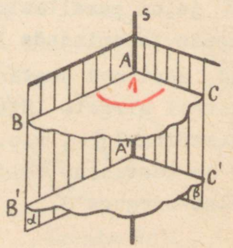
Tõestus. Tasapinnad α ja β kas lõikuvad või on paralleelsed. Kui nad lõikuvad, siis vähemalt üks neist sirgeist (kas s või t) lõikab nende tasapindade lõikesirget (teine võib olla sellega paralleelne) ja seega ta lõikab ka tasapinda β. See on aga vastuolus eeldusega. Järelikult tasapinnad ei või lõikuda, vaid nad on paralleelsed.

§ 3. Kahetahulised nurgad. Risttasapinnad

1. Kahetahulised nurgad ja nende mõõtmine. Sirge, mis asetseb tasapinnal, jaotab selle kaheks pooltasapinnaks, mis väljuvad sellest sirgest. Kaks mistahes pooltasapinda α ja β, mis väljuvad ühest ja samast sirgest s, moodustavad kujundi, mida nimetatakse kahetahuliseks nurgaks (joonis 107). Sirget s nimetatakse kahetahulise nurga servaks ja pooltasapindu α ja β kahetahulise nurga tahkudeks. Seda kahetahulist nurka tähistatakse kas sümboliga $\alpha s \beta$ või $\alpha AB \beta$ või $\alpha\beta$.



Joonis 107.



Joonis 108.

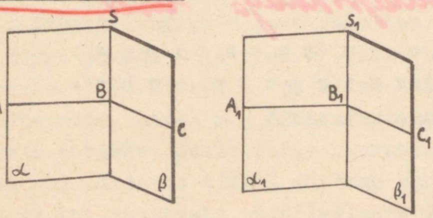
Kahetahulist nurka mõõdab tema joonnurk

Tõmbame kahetahulise nurga serva s mingist punktist A (joonis 108) kummalgi tahul ristsirged servale. Nende sirgete vahelist nurka BAC nimetatakse kahetahulise nurga joonnurgaks. (1) Kahetahulise nurga joonnurga suurus ei sõltu punkti A asukohast serval s. Nii on $\angle BAC = \angle B'A'C'$ sest nende haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised.

Kaks kahetahulist nurka loetakse võrdseiks, kui neid saab teineteise sisse paigutada nii, et nad ühtivad; vastasel korral loetakse väiksemaks see nurk, mis moodustab osa teisest nurgast. Kahet. nurgad on võrdsed kui nende joon- nurgad on võrdsed

Analoogiliselt nurkadega tasapinnal võivad ka kahetahulised nurgad olla kõrvunurgad, tippnurgad jne. Kui kaks kahetahulist kõrvunurka on võrdsed, siis kumbagi neist nimetatakse kahetahuliseks täisnurgaks.

Kui kahetahulised nurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka nende joonnurgad.



Joonis 109.

Eeldus. $\alpha s \beta = \alpha_1 s_1 \beta_1$. Nurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on vastavalt kahetahuliste nurkade $\alpha s \beta$ ja $\alpha_1 s_1 \beta_1$ joonnurgad (joonis 109).

Väide. $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

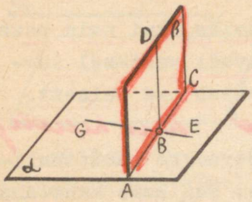
Tõestus. Asetame sirge s_1 sirgele s nii, et punkt B_1 langeb kokku punktiga B ja pöörame teist kahetahulist nurka ümber sirge s kuni pooltasapinnad α_1 ja β_1 ühtivad vastavalt pooltasapindadega α ja β (see on võimalik, sest need kahetahulised nurgad on võrdsed). Siis nurga $A_1B_1C_1$ haaravad ühtivad vastavalt nurga ABC haaradega, sest pooltasapindadel α ja β saab läbi punkti B tõmmata ainult ühe sirge, mis on risti sirgega s. Järelikult

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1.$$

Pöördteoreem. Kui kahetahuliste nurkade joonnurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka kahetahulised nurgad.

Kui kahetahulise nurga mõõtühikuks võtame niisuguse kahetahulise nurga, mis vastab joonnurga mõõtühikule, siis kahetahulist nurka mõõdab tema joonnurk.

2. Risttasapinnad. Kaht tasapinda nimetatakse teineteise risttasapindadeks, kui nad lõikudes moodustavad kahetahulise täisnurga. Kahe tasapinna ristseisu tunnus on järgmine: kui tasapind läbib teise tasapinna ristsirget, siis on ta risti selle tasapinnaga.



Joonis 110.

Eeldus. $BD \perp \alpha$; sirge BD on tasapinnal β (joonis 110).

Väide. $\alpha \perp \beta$.

Tõestus. Tõmbame tasapinnal α läbi punkti B sirge BE risti tasapindade α ja β lõikesirgega AC. Et $BD \perp \alpha$, siis $BD \perp AC$ ja $\angle EBD$ on kahetahulise nurga $\alpha\beta$ joonnurk. See joonnurk on täisnurk, sest $BD \perp BE$ (§ 1, 1).

Seega $\alpha \perp \beta$.

Antud tasapinna α normaali BD läbiv iga tasapind on antud tasapinnaga risti

§ 4. Nurk sirge ja tasapinna vahel. Kiivsirgete vaheline nurk

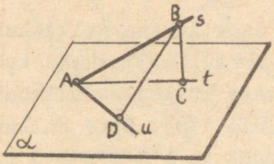
1. Nurk sirge ja tasapinna vahel. Olgu antud tasapind α ja selle kaldsirge s, mis lõikab tasapinda α punktis A (joonis 111). Tasapinnal α asetsevad sirged, mis läbivad punkti A, moodustavad sirgega s mitmesuguse suurusega nurki. Neist üks on väikseim, nagu nähtub järgmisest teoreemist.

Teravnurk, mille moodustab kaldsirge oma projektsiooniga tasapinnal, on väikseim nurk selle sirge ja mistahes teise sellel tasapinnal asetseva sirge vahel.

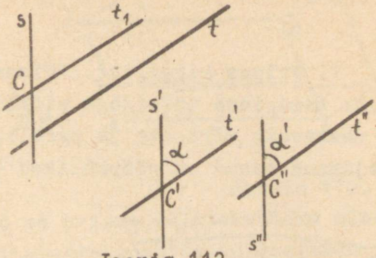
Tõestuseks oletame, et sirge s mingist punktist B on tõmmatud tasapinnale α ristlõik BC. Siis sirge $t \equiv AC$ on sirge s projektsioon tasapinnal α. Olgu sirge u mistahes teine sirge tasapinnal α läbi punkti A. Näitame, et siis

$$\angle BAC < \angle BAD.$$

Selleks võtame sirgel u lõigu $AD = AC$ ja ühendame punktid D ja B; siis $BC < BD$, sest punktist B tasapinnani tõmmatud ristlõik on väiksem kui kaldlõik. Kolmnurkades ABC ja ABD on üks külg AB ühine, AC = AD ning BC < BD; järelikult ∠BAC < ∠BAD.



Joonis 111.



Joonis 112.

Nurka BAC nimetatakse sirge s ja tasapinna α vaheliseks nurgaks. Seega sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks nimetatakse teravnurka sirge ja tema projektsiooni vahel.

2. Kahe kiivsirge vaheline nurk. Kaht sirget, millest ei saa läbi panna tasapinda, nimetatakse kiivsirgeteks.

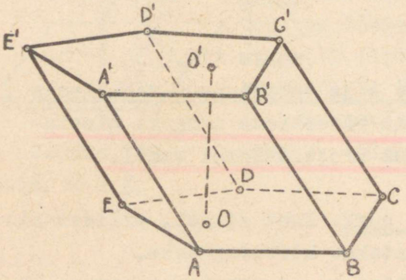
Kahe kiivsirge s ja t vahelise nurga saamiseks paneme läbi mingi punkti C' sirged s' ja t' nii, et s' ∥ s ja t' ∥ t (joonis 112). Sirged s' ja t' asetsevad ühel tasapinnal ja moodustavad nurga α, mida nimetamegi kiivsirgete s ja t vaheliseks nurgaks. Selle nurga suurus ei sõltu punkti C' asukohast, sest kui näidatud viisil ehitame punkti C" juures nurga α', siis α = α' kui vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad.

Seega kahe kiivsirge vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka nende sirgetega paralleelsete sirgete vahel, kui viimased läbivad üht ja sama punkti. Selle nurga leidmiseks piisab, kui valime näiteks sirgel s punkti C ja läbi selle paneme sirge t_1 paralleelselt sirgega t.

Kui kahe kiivsirge vaheline nurk on täisnurk, siis öeldakse, et kiivsirged ristuvad.

§ 5. P r i s m a

1. Prisma kirjeldus. Prismaks nimetatakse hulktahukat (s.o. tasapinna tükkidega piiratud keha), mille kaks tahku on vastavalt võrdsete ja paralleelsete külgedega hulknurgad ja ülejäänud tahud on rööpkülikud (joonis 113). Neid hulknurki (ABCDE ja A'B'C'D'E') nimetame prisma põhjadeks ja rööpkülikuid külgtahkudeks. Lõigud AB, BC, ..., A'B', B'C' ... on prisma põhiservad, lõigud AA' = BB' = ... = EE' aga külgservad.



Joonis 113.

Lõiku, mis ühendab prisma kaht mitte ühele tahule kuuluvat tippu, nimetatakse prisma diagonaaliks (näit. AC'). Tasapinda, mis läbib kaht mitte ühele tahule kuuluvat külgserva, nimetatakse prisma diagonaaltasapinnaks (näit. ACC'A'). Põhjade vahelist kaugust nimetatakse prisma kõrguseks (OO').

Prismasid liigitatakse:

1) püst- ja kaldprismadeks (püstprisma külgservad on põhjadega risti ja külgtahkudeks on seega ristkülikud);

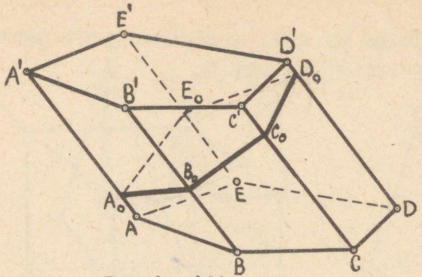
2) korrapärasteks ja mittekorrapärasteks (korrapäraseks nimetatakse püstprismat, mille põhjadeks on korrapärased hulknurgad);

3) vastavalt põhjadeks oleva hulknurga järgi kolmnurkseteks, nelinurkseteks jne.

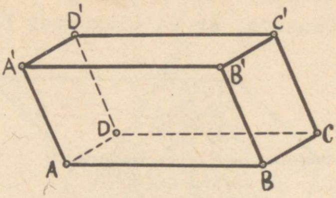
Kergesti võib veenduda, et n-nurksel prismal ($n \geq 3$) on $n + 2$ tahku, $2n$ tippu, $3n$ serva, $n(n-3)$ diagonaali ja $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonaaltasapinda.

2. Prisma külgpindala. Prisma külgpindalaks nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat.

Prisma lõikamisel külgservaga ristuva tasapinnaga saadakse lõige, mida nimetatakse prisma ristlõikeks ($A_oB_oC_oD_oE_o$



Joonis 114.



Joonis 115.

joonisel 114). Ristlõike küljed on prisma külgtahkudeks olevate rööpkülikute kõrgusteks, kui alusteks võtta külgservad.

Prisma külgpindala võrdub tema ristlõike ümbermõõdu ja külgserva korrutisega.

Tõestus. Külgpindala saamiseks liidame külgtahkude pindalad:

$$S_k = AA' \cdot A_oB_o + BB' \cdot B_oC_o + \ldots + EE' \cdot E_oA_o.$$

Et prisma külgservad on võrdsed, siis

$$S_k = AA'(A_oB_o + B_oC_o + \ldots + E_oA_o).$$

Järeldus. Et püstprisma ristlõikena võib vaadelda tema põhja ja külgserv on prisma kõrguseks, siis püstprisma külgpindala võrdub tema põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.

3. Rööptahukas. Prismat, mille põhjadeks on rööpkülikud, nimetatakse rööptahukaks. Rööptahuka kõik kuus tahku on rööpkülikud.

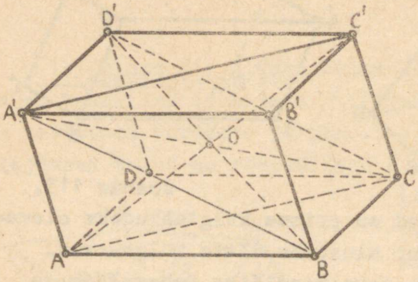
Rööptahuka vastastahud on võrdsed ja paralleelsed.

Tõestus. Tahud ABB'A' ja DCC'D' (joonis 115) on paralleelsed, sest (§ 2, 2) $AB \parallel DC$ ja $BB' \parallel CC'$. Need tahud on võrdsed, sest $AB = DC$ ja $BB' = CC'$ (kui rööpkülikute vastasküljed) ning $\angle ABB' = \angle DCC'$ kui vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad.

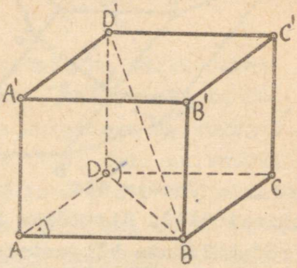
Rööptahuka diagonaalid lõikuvad ühes ja samas punktis, mis poolitab iga diagonaali.

Tõestus. Nelinurk A'BCD' (joonis 116) on rööpkülik, sest tema vastasküljed A'D' ja BC on paralleelsed ja võrdsed. Seega rööptahuka diagonaalid A'C ja D'B lõikuvad ja poolituvad punktis O kui rööpküliku A'BCD' diagonaalid.

Et ka nelinurk ACC'A' on rööpkülik, siis rööptahuka diagonaalid AC' ja A'C samuti lõikuvad ja lõikudes poolitavad teineteist. Kuid diagonaali A'C keskpunktiks oli punkt O, järelikult sama punkti peab läbima ka AC'. Analoogiliselt saab tõestada, et ka diagonaal DB' läbib punkti O.



Joonis 116.



Joonis 117.

4. Risttahuka diagonaalide omadus. Püströöptahukat, mille põhjadeks on ristkülikud, nimetatakse risttahukaks. Tema ühest tipust lähtuva kolme serva pikkust nimetatakse risttahuka mõõtmeteks (pikkus, laius, kõrgus).

Risttahuka diagonaali ruut võrdub tema kolme mõõtme ruutude summaga.

Tõestus. Täisnurksest kolmnurgast ABD (joonis 117)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2.$$

Samuti on $\triangle BDD'$ täisnurkne, nii et

$$(BD')^2 = BD^2 + (DD')^2 .$$

Neist võrdustest saame, et

$$(BD')^2 = AB^2 + AD^2 + (DD')^2.$$

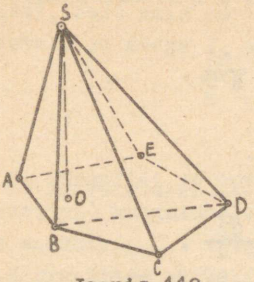
Et $DD' = AA'$, siis $(BD')^2 = AB^2 + AD^2 + (AA')^2$.

Järeldus. Risttahuka diagonaalid on võrdsed.

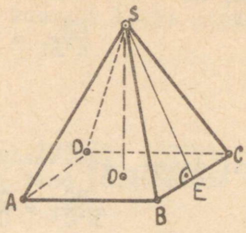
§ 6. Püramiid

1. Püramiidi kirjeldus. Püramiidiks nimetatakse hulktahukat, mille üks tahk on hulknurk (põhi) ja teisteks tahkudeks on ühise tipuga kolmnurgad (külgtahud).

Püramiid tekib mitmetahulise nurga lõikamisel tasapinnaga, mis lõikab nurga kõiki servi. Püramiidi külgtahkude ühist tippu S nimetatakse püramiidi tipuks (joonis 118). Tipust põhjale tõmmatud ristlõik on püramiidi kõrgus.



Joonis 118.

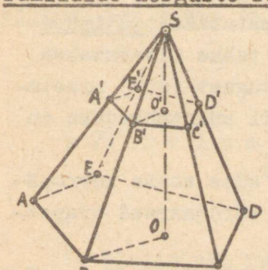


Joonis 119.

Põhja diagonaali ja püramiidi tippu läbivat tasapinda nimetatakse püramiidi <u>diagonaaltasapinnaks</u> (näiteks BDS joonisel 118).

Püramiidi nimetatakse korrapäraseks, kui tema põhjaks on korrapärane hulknurk ja kõrguse aluspunktiks on põhja keskpunkt. Korrapärase püramiidi külgservad on võrdsed ja seega külgtahkudeks on võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad. Korrapärase püramiidi külgtahu kõrgust nimetatakse püramiidi <u>apoteemiks</u> (SE joonisel 119).

2. <u>Püramiidi lõikamine põhjaga paralleelse tasapinnaga</u>. <u>Kui püramiidi lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, siis</u>
1) külgservad ja kõrgus jaotuvad võrdelisteks osadeks;
2) <u>lõige on põhjaga sarnane hulknurk</u>;
3) <u>lõike pindala ja põhja pindala suhtuvad nagu vastavate püramiididе kõrguste ruudud</u>.



Joonis 120.

<u>Tõestus</u>. 1) Lõike küljed A'B', B'C',..., on vastavalt paralleelsed põhja külgedega AB, BC, ... mistõttu kiirteteoreemi põhjal (I pt., § 13, 3) külgservadel on tekkinud võrdelised lõigud (joonis 120):

$$\frac{SA'}{A'A} = \frac{SB'}{B'B} = \frac{SC'}{C'C} = \ldots$$

Samal põhjusel on ka

$$\frac{SB'}{B'B} = \frac{SO'}{O'O}$$

ehk

$$\frac{SA'}{A'A} = \frac{SB'}{B'B} = \frac{SC'}{C'C} = \ldots = \frac{SO'}{O'O} .$$

2) Kolmnurkade ABS ja A'B'S, BCS ja B'C'S sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BS}{B'S} \text{ ja } \frac{BS}{B'S} = \frac{BC}{B'C'},$$

millest

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Niisamuti saame, et

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CS}{C'S} \text{ ja } \frac{CS}{C'S} = \frac{CD}{C'D'},$$

millest

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Nii saame, et

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \ldots$$

Ka on nende hulknurkade nurgad A ja A', B ja B', ... vastavalt võrdsed kui paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Seega põhi ja lõige on sarnased hulknurgad.

3) Et sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud, siis

$$\frac{S_l}{S_p} = \frac{(A'B')^2}{AB^2}, \text{ kus}$$

S_p on püramiidi põhja pindala ja S_l põhjaga paralleelse lõike pindala.

Et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'S}{BS} = \frac{O'S}{OS}$, siis $\frac{S_l}{S_p} = \frac{O'S^2}{OS^2}$.

Püramiidi põhjaga paralleelne lõige jaotab püramiidi kaheks osaks. Lõike ja põhja vahele jäävat osa nimetatakse __tüvipüramiidiks__ (ABCDEA'B'C'D'E'). Paralleelseid tahke nimetatakse tüvipüramiidi põhjadeks. Põhjadevahelist kaugust (OO') nimetatakse tüvipüramiidi kõrguseks. Tüvipüramiidi külgtahkudeks on trapetsid ja põhjadeks sarnased hulknurgad.

Kui lõigatav püramiid on korrapärane, siis saame korrapärase tüvipüramiidi. Selle külgtahkudeks on võrdhaarsed trapetsid ja põhjad on korrapärased hulknurgad.

__Järeldus.__ Kui kahel püramiidil on võrdsed kõrgused ja võrdsed põhja pindalad, siis neil on võrdsed ka põhjaga paralleelsete lõigete pindalad, kui lõiked on tehtud põhjast ühel ja samal kaugusel, sest siis on lõiked ka püramiidi tippudest võrdsetel kaugustel, ja seega 3. omaduse põhjal kummagi lõike pindala

$$S = \frac{O'S^2}{OS^2} \cdot S_p.$$

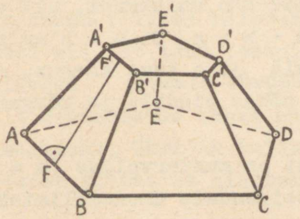
3. Püramiidi ja tüvipüramiidi külgpindala. Püramiidi (tüvipüramiidi) külgpindalaks nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat.

Korrapärase püramiidi külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.

Külgtahkude võrdsuse tõttu külgpindala S_k võrdub ühe külgtahu pindala ja külgtahkude arvu n korrutisega (joonis 119):

$$S_k = n \cdot \frac{BC \cdot SE}{2} = \frac{1}{2}(nBC) \cdot SE.$$

Et nBC on põhja ümbermõõt ja SE püramiidi apoteem, siis teoreem on tõestatud.



Joonis 121.

Analoogiliselt leiame korrapärase tüvipüramiidi külgpindala (joonis 121):

$$S_k = n \cdot \frac{AB + A'B'}{2} \cdot FF' = \frac{nAB + nA'B'}{2} \cdot FF'.$$

Et n AB ja nA'B' on tüvipüramiidi põhjade ümbermõõdud, siis

korrapärase tüvipüramiidi külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja tüvipüramiidi apoteemi korrutisega.

§ 7. Prisma, püramiidi ja tüvipüramiidi ruumala

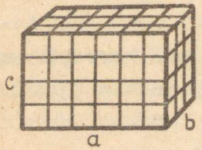
1. Risttahuka ruumala. Ruumalaühikuks võetakse ühikkuubi ruumala, s.o. niisuguse kuubi ruumala, mille serva pikkus võrdub pikkusühikuga. Ruumala mõõtarv näitab, mitu korda keha

ruumala on ruumalaühikust suurem või missuguse osa ta sellest moodustab. Et mitte eksida ruumalaühikute vahelistes seostes, tuleb teada, et kahe ruumalaühiku suhe võrdub vastavate pikkusühikute suhte kuubiga. Vastavalt sellele

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3$$
$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$$
$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$$
$$1\ dm^3 = 1000\,000\ mm^3.$$

Risttahuka ruumala võrdub tema kolme mõõtme korrutisega (või tema põhja pindala ja kõrguse korrutisega).

Tõestus. a) Kui risttahuka mõõtmed avalduvad täisarvudes (näit. $a = 6$, $b = 3$, $c = 4$, joonis 122), siis risttahuka saab tükeldada kuupideks servaga 1 ühik. Põhjale mahub ab ühikkuupi. Kihte, millest igaüks sisaldab ab ühikkuupi, on c. Järelikult risttahukas sisaldab abc ühikkuupi, nii et tema ruumala $V = a \cdot b \cdot c$. Et $a \cdot b$ on risttahuka põhja pindala ja c tema kõrgus, siis võrdub ruumala ka põhja pindala ja kõrguse korrutisega.



Joonis 122.

b) Kui ükski risttahuka mõõtmetest on murdarvuline ($a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, $c = \frac{r}{s}$), siis võib need murrud teisendada ühenimelisteks ($a = \frac{mqs}{nqs}$, $b = \frac{pns}{nqs}$, $c = \frac{nqr}{nqs}$) ja võtta uueks pikkusühikuks $\frac{1}{nqs}$ esialgsest pikkusühikust. Uus ruumalaühik moodustab siis $\frac{1}{(nqs)^3}$ esialgsest. Nüüd on mõõtmed täisarvulised ja ruumala $V = mqs \cdot pns \cdot nqr$ uut ruumalaühikut ehk

$$V = \frac{mqs \cdot pns \cdot nqr}{(nqs)^3} = \frac{mqs}{nqs} \cdot \frac{pns}{nqs} \cdot \frac{nqr}{nqs} = a \cdot b \cdot c$$

esialgset ruumalaühikut.

Olgu näiteks $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{5}$ ja $c = 1$. Ühenimeliste murdudena $a = \frac{10}{15}$, $b = \frac{12}{15}$ ja $c = \frac{15}{15}$. Võtame uueks pikkusühikuks $\frac{1}{15}$ esialgsest; uus ruumalaühik moodustab siis $\frac{1}{15^3}$ esialgsest ruumalaühikust. Risttahuka mõõtmed uutes ühikutes on: $a = 10$; $b = 12$; $c = 15$. Ruumala $V = 10 \cdot 12 \cdot 15 = 1800$ uut ruumalaühikut ehk

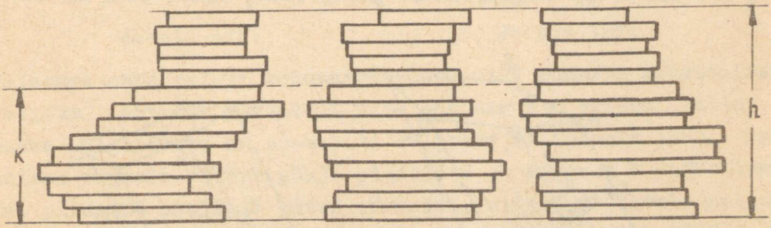
$V = \frac{1800}{15^3} = \frac{8}{15} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1$ esialgset ruumalaühikut.

c) Võib olla, et risttahuka mõõtarvudest mõni on irratsionaalne. Et teoreem kehtib iga risttahuka puhul, millel on irratsionaalsete servapikkuste asemel nende kuitahes täpsed murdarvulised lähisväärtused, siis loeme ta kehtivaks ka irratsionaalsete servapikkuste puhul.

2. Cavalieri printsiip. Itaalia matemaatik Cavalieri (elas 17. saj.) avaldas väite, nn. Cavalieri printsiibi, mis võimaldab tuletada valemeid paljude kehade ruumalade arvutamiseks.

Kui kahel kehal on võrdsed kõrgused ja võrdsed põhjapindalad ning nende lõikamisel põhjadega paralleelsete tasapindadega, mis on põhjadest samal kaugusel, saadakse võrdsete pindaladega lõiked, siis on võrdsed ka kehade ruumalad.

Selle väite sisu selgitamiseks võib lõigata ühe virna näiteks ruudu-, teise kolmnurga- ja kolmanda ringikujulisi papitükikesi nii, et laua tasapinnast samal kaugusel asetsevad papitükikesed oleksid võrdsete pindaladega. Kõigi kolme virna poolt moodustatud kehad on Cavalieri printsiibi järgi võrdsete ruumaladega. Ükskõik kuidas ühes virnas olevaid papitükikesi üksteise suhtes ka nihutada, nende poolt moodustatud keha

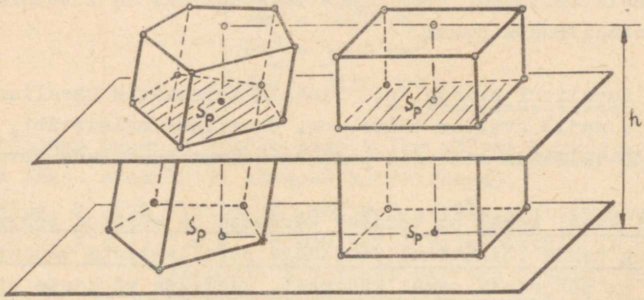


Joonis 123.

ruumala ei muutu (ühtlasi ei muutu põhja pindala, kõrgus ja mistahes kõrgusel tehtud lõike pindala).

3. Prisma ruumala. Prisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega, samuti ka ristlõike pindala ja külgserva korrutisega.

a) Olgu prisma põhja pindala S_p ja kõrgus h. Paigutame selle prisma põhja tasapinnale risttahuka, mille põhja pindala on samuti S_p ja kõrgus h (joonis 124). Prisma ja risttahuka lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekivad põhjaga võrdsed hulknurgad.

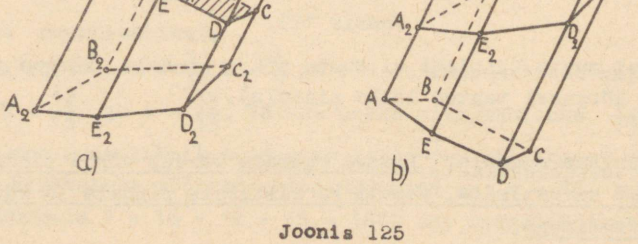


Joonis 124.

Seega prisma ja risttahukas on Cavalieri printsiibi järgi võrdsete ruumaladega. Sellest järeldubki, et ka prisma ruumala

$$\underline{V = S_p \cdot h.}$$

b) **Lõikame kaldprisma külgservadega ristuva tasapinna abil kaheks tahkkehaks (joon.125a) ja asetame ühe neist teise peale** nii, et kaldprisma ülemine ja alumine põhi ühtivad (joonis 125 b). Nii saame kaldprismast püstprisma, mille põhjaks on



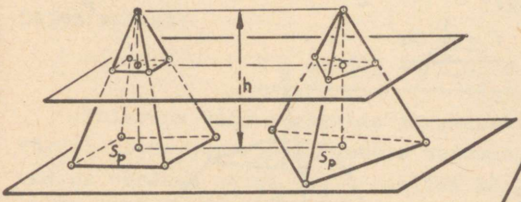
Joonis 125

kaldprisma ristlõige ja mille kõrgus võrdub kaldprisma külgservaga. Et keha ruumala tükeldamisel ja saadud osade teistsugusel kokkupanekul ei muutu, siis on tekkinud püstprisma ja antud kaldprisma võrdsete ruumaladega. Järelikult kaldprisma ruumala võrdub ristlõike pindala ja külgserva korrutisega.

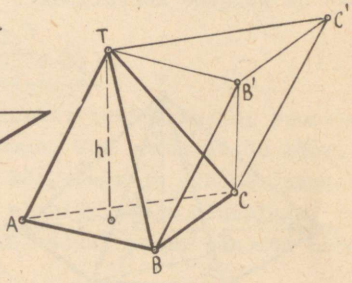
4. Püramiidi ruumala. Püramiidi ruumala valemi tuletamiseks märgime esmalt, et

kui kahel püramiidil on võrdsed kõrgused ja võrdsed põhja pindalad, siis neil on ka võrdsed ruumalad,

sest tehtud eeldusel on neil võrdsed põhjaga paralleelsete lõigete pindalad, kui lõiked on põhjadest võrdsetel kaugustel (§ 6, 2, järeldus) ja seega Cavalieri printsiibi järgi on ka ruumalad võrdsed.



Joonis 126.



Joonis 127.

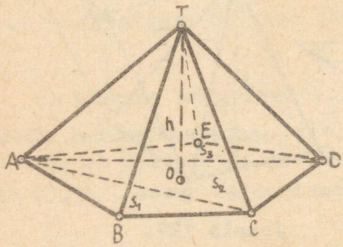
Tuletame nüüd valemi kolmnurkse püramiidi ruumala arvutamiseks. Selleks ehitame püramiidi TABC põhjale ABC prisma, mille üheks külgservaks on püramiidi külgserv TA (joonis 127). Selle prisma ruumala võrdub põhja pindala S ja kõrguse h korrutisega. Kui prismast eraldada antud püramiid, siis jääb järele nelinurkne püramiid, mille tipuks on T ja põhjaks rööpkülik BB'C'C. Tippu T ja põhja diagonaali B'C läbiv tasapind jaotab selle püramiidi kaheks võrdse ruumalaga püramiidiks TB'CB ja TB'CC' (mõlema kõrguseks on tipu T kaugus tahu BB'C'C tasapinnast; põhjade B'CB ja B'C'C pindalad on võrdsed, sest kolmnurgad B'CB ja CB'C on võrdsed). Kui aga püramiidi TB'C'C (ehk CTC'B') põhjana vaadelda prisma põhja TC'B' (vastavaks kõrguseks on antud püramiidi kõrgus h), siis näeme, et ka püramiidide TB'C'C ja TABC ruumalad on abiteoreemi järgi võrdsed. Seega kõik kolm vaadeldud püramiidi on võrdsete ruumaladega ja ühe püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga vastava prisma ruumalast: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Hulknurkse püramiidi saame tükeldada kolmnurkseteks püramiidideks. Selleks joonestame põhja mingist tipust diagonaalid (AD ja AC, joonis 128). Lõikame püramiidi tasapindadega, mis läbivad neid põhja diagonaale ja püramiidi tippu. Tekkivad kolmnurksed püramiidid, millel on ühine kõrgus h ja mille põhjade pindalad olgu $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Hulknurkse püramiidi ruumala võrdub nende püramiidide ruumalade summaga:

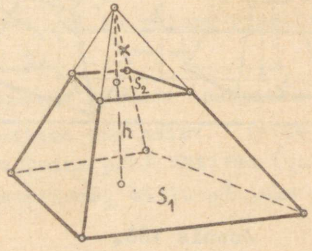
$$V = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \ldots + \frac{1}{3}S_nh = \frac{1}{3}h(S_1+S_2\ldots+S_n) = \frac{1}{3}Sh.$$

Seega iga püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest:

$$\underline{V = \frac{1}{3}Sh.}$$



Joonis 128.



Joonis 129.

5. Tüvipüramiidi ruumala. Olgu tüvipüramiidi põhjade pindalad S_1 ja S_2, kõrgus h. Täiendame selle tüvipüramiidi täispüramiidiks (joonis 129). Siis tüvipüramiidi ruumala võime vaadelda täispüramiidi ja täienduspüramiidi ruumalade vahena. Täienduspüramiidi kõrguse x avaldame seosest (§ 6, 2):

$$\frac{x^2}{(h+x)^2} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{ehk} \quad \frac{x}{h+x} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} .$$

Sellest

$$x\sqrt{S_1} = h\sqrt{S_2} + x\sqrt{S_2},$$

seega

$$x = \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.$$

Tüvipüramiidi ruumala

$$V = \frac{1}{3} S_1(h + x) - \frac{1}{3} S_2 x =$$

$$= \frac{1}{3} S_1 h + \frac{1}{3} x (S_1 - S_2) = \frac{1}{3} S_1 h + \frac{1}{3} \frac{h\sqrt{S_2}(S_1 - S_2)}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3} h \left[S_1 + \frac{\sqrt{S_2}(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} h \left[S_1 + \sqrt{S_2}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}) \right] = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

Saime valemi

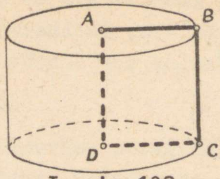
$$\underline{V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).}$$

Tulemuse võib sõnastada järgmiselt: tüvipüramiidi ruumala võrdub kolme püramiidi ruumala summaga, kui püramiidide kõrgused on võrdsed antud tüvipüramiidi kõrgusega ja põhjade pindalad on võrdsed ühel tüvipüramiidi alumise põhja pindalaga, teisel ülemise põhja pindalaga ja kolmandal nende põhjade pindalade geomeetrilise keskmisega.

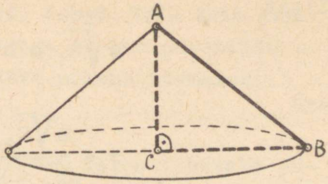
§ 8. Silindri, koonuse ja tüvikoonuse külgpindala ja ruumala

1. Silinder. Koonus. Tüvikoonus. 1) Silindriks nimetatakse keha, mis tekib ristküliku (ABCD) pöörlemisel ümber ühe külje (AD, joonis 130). Silinder on piiratud kahe ringiga (silindri <u>põhjad</u>) ja silindri <u>külgpinnaga</u>.

2) Koonuseks nimetatakse keha, mis tekib täisnurkse kolmnurga (ABC) pöörlemisel ümber ühe kaateti (AC, joonis 131). Koonus on piiratud ühe ringiga (koonuse <u>põhi</u>) ja koonuse <u>külgpinnaga</u>.

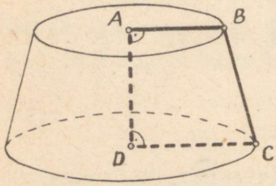


Joonis 130.



Joonis 131.

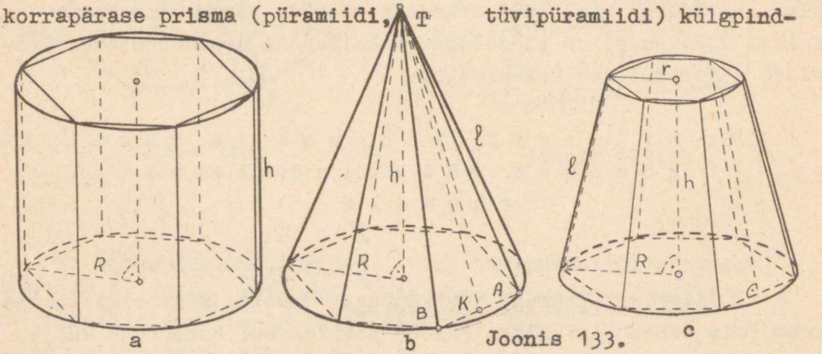
3) Tüvikoonuseks nimetatakse keha, mis tekib täisnurkse trapetsi pöörlemisel ümber alustega ristioleva haara (AD, joonis 132). Tüvikoonust võib defineerida ka kehana, mis tekib koonuse lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga. Tüvikoonus on piiratud kahe ringiga (tüvikoonuse põhjad) ja tüvikoonuse külgpinnaga.



Joonis 132.

2. Külgpindala. Silindri, koonuse ja tüvikoonuse külgpind ei ole tasane ega koosne tasapinnalistest kujunditest. Nimetame neid kõverpindadeks. Nende pindala ei saa määrata ühikruudu pindalaga võrdlemise teel (nagu hulknurga pindala).

Nende kehade külgpindalad defineerime järgmiselt. Silindri (koonuse, tüvikoonuse) külgpindalaks nimetatakse selle keha sisse kujundatud korrapärase prisma (püramiidi, tüvipüramiidi) külgpind-



Joonis 133.

ala piirväärtust prisma (püramiidi, tüvipüramiidi) põhiservade arvu tõkestamatul kasvamisel.

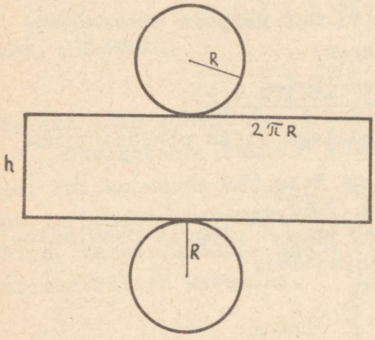
Korrapärase prisma külgpindala võrdub teatavasti põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega (§ 5, 2). Prisma põhiservade arvu tõkestamatul suurenemisel on põhja ümbermõõdu piirväärtuseks ringjoone pikkus; kõrgus ei muutu (joonis 133,a). Järelikult silindri külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega:

$$\underline{S_k = 2\pi Rh}$$

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhjade pindalad:

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \text{ ehk } S = 2\pi R(R + h).$$

Silindri pinnalaotus koosneb kahest võrdsest ringist ja ristkülikust (joonis 134).



Joonis 134.

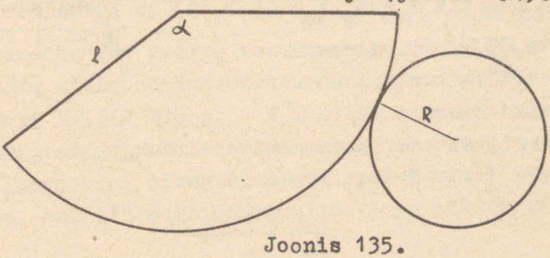
Korrapärase püramiidi külgpindala võrdub teatavasti põhja ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega (§ 6, 3). Püramiidi põhiservade arvu tõkestamatul suurendamisel on põhja ümbermõõdu piiriväärtuseks ringjoone pikkus. Apoteemi piirväärtuseks on koonuse moodustaja l (joonis 133, b), sest moodustaja (TB) ja apoteemi (TK) pikkuste vahe võib saada kuitahes väikeseks (kolmnurga kahe külje vahe on väiksem kolmandast küljest, seega $TB - TK < BK = \frac{AB}{2}$; korrapärase hulknurga külg AB aga võib külgede arvu tõkestamatul suurendamisel saada kuitahes väikeseks). Seega koonuse külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu $2\pi R$ ja moodustaja l poole korrutisega:

$$\underline{S_k = \pi Rl}.$$

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhja pindala:

$$\underline{S = \pi Rl + \pi R^2 \text{ ehk } S = \pi R(l + R)}.$$

Koonuse pinnalaotus koosneb ringist ja niisuguse ringi sektorist, mille raadiuseks on moodustaja (joonis 134).



Joonis 135.

Selle sektori kaare pikkus on $\frac{2\pi l}{360} \cdot \alpha = 2\pi R$, kus α on sektori nurk kraadides. Siit saame seose R, l ja α vahel:

$$l \cdot \alpha = 360\ R.$$

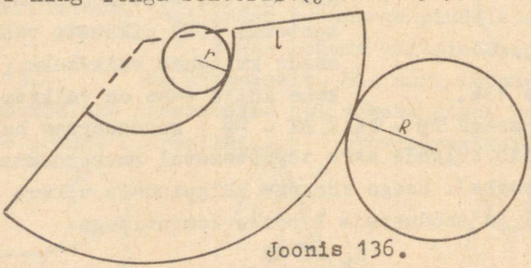
Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala teatavasti võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega (§ 6,3). Põhiservade arvu tõkestamatul suurendamisel on põhjade ümbermõõtude piirväärtusteks vastavate ringjoonte pikkused ja apoteemi piirväärtuseks tüvikoonuse moodustaja l (joonis 133, c). Järelikult tüvikoonuse külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja moodustaja korrutisega:

$$S_k = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)l \quad \text{ehk} \quad \underline{S_k = \pi l(R + r)}.$$

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhjade pindalad:

$$S = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Tüvikoonuse pinnalaotus koosneb kahest ringist raadiustega R ja r ning rõnga sektorist(joonis 136).



Joonis 136.

3. Ruumala. Silindri (koonuse, tüvikoonuse) ruumalaks nimetatakse selle keha sisse kujundatud korrapärase prisma (püramiidi, tüvipüramiidi) ruumala piirväärtust põhiservade arvu tõkestamatul kasvamisel.

Prisma ruumala $V = S_p \cdot h$ (§ 7, 3) ja püramiidi ruumala $V = \frac{1}{3} S_p \cdot h$ (§ 7, 4). Korrapärase prisma või püramiidi põhiservade arvu tõkestamatul suurendamisel on põhja pindala S_p piirväärtuseks ringi pindala πR^2 (joonis 133, a ja b); kõrgus ei muutu. Vastavalt definitsioonile võrdub silindri ruumala põhja pindala ja kõrguse korrutisega:

$$\underline{V = \pi R^2 \cdot h}.$$

Koonuse ruumala võrdub ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Tüvipüramiidi ruumala $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ (§ 7, 5). Põhiservade arvu tõkestamatul suurendamisel on põhjade pindalade piirväärtusteks vastavate ringide pindalad πr^2 ja πR^2 (joonis 133, c). Asendades S_1 ja S_2 vastavate piirväärtustega saame tüvikoonuse ruumala arvutamiseks avaldise

$$V = \frac{1}{3} h (\pi r^2 + \sqrt{\pi^2 r^2 R^2} + \pi R^2)$$

ehk, lühemalt,

$$V = \frac{1}{3}\pi h (r^2 + Rr + R^2).$$

Valemi võib sõnastada järgmiselt.

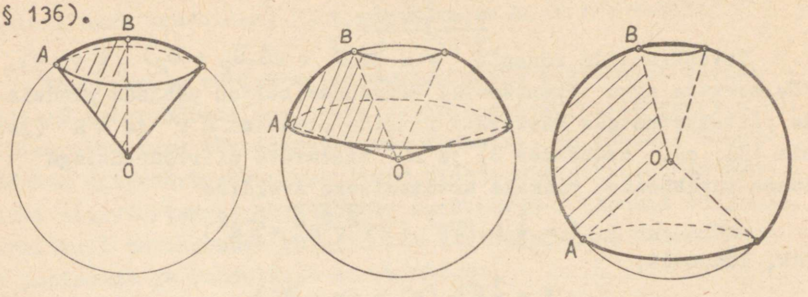
Tüvikoonuse ruumala võrdub kolme koonuse ruumalade summaga, kui koonuste kõrgused on võrdsed antud tüvikoonuse kõrgusega ja põhjade raadiusteks on ühel tüvikoonuse alumise põhja raadius, teisel ülemise põhja raadius ja kolmandal nende raadiuste geomeetriline keskmine.

§ 9. K e r a

1. Definitsioonid. Keraks nimetatakse keha, mis tekib poolringi pöörlemisel ümber diameetri. Poolringjoone poolt pöörlemisel moodustatud pinda nimetatakse kerapinnaks ehk sfääriks. Sfääri segment on kerapinnast mingi tasapinnaga eraldatud osa. Sfääri osa kahe paralleelse lõiketasapinna vahel nimetatakse kera vööks (joonis 137). Lõiketasapindade vaheline kaugus on vöö kõrguseks. Kera sektor on keha, mis tekib ringi sektori pöörlemisel tema kaarega mittelõikuva diameetri ümber (joonis 138).

Joonis 137.

Kera pindalaks nimetatakse piirväärtust, millele läheneb poolringjoonesse kujundatud korrapärase kõõlmurdjoone ümber diameetri pöörlemisel tekkiva keha külgpindala, kui kõõlmurdjoone lülide arvu tõkestamatult suurendada. Analoogiliselt defineeritakse ka sfääri segmendi ja kera vöö pindala (vt. A. Kisseljovi Stereomeetria XI klassile, § 136).

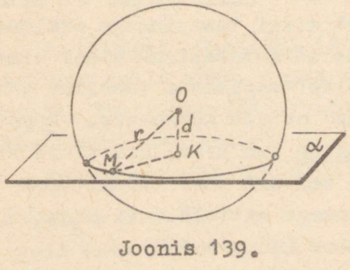


Joonis 138.

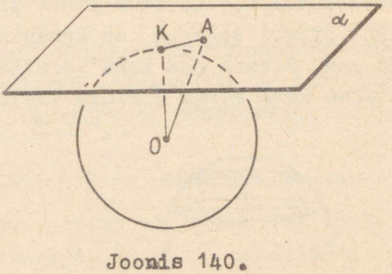
Kerasektori ruumalaks nimetatakse piirväärtust, millele läheneb vastava ringisektori äärmiste raadiustega (OA ja OB, joonis 138) ja sektori kaaresse kujundatud korrapärase kõõlmurdjoonega piiratud hulknurkse sektori pöörlemisel tekkiva keha ruumala, kui murdjoone lülide arv tõkestamatult suureneb.

2. Kera tasapinnalised lõiked. Kera iga tasapinnaline lõige on ring.

Selle teoreemi tõestamiseks valime tasapinna α ja kerapinna lõikejoonel vabalt punkti M (joonis 139), mille ühendame kera keskpunktiga 0. Kui kera raadiuseks on r, siis OM = r, sest kerapinna punkt asub kera keskpunktist kaugusel r. Olgu lõiketasapinna kaugus kera keskpunktist OK = d.



Joonis 139.



Joonis 140.

Ühendades punktid M ja K tekib kolmnurk OMK. See on täisnurkne, sest kui $OK \perp \alpha$, siis ka $OK \perp MK$. Järelikult $MK = \sqrt{r^2 - d^2}$. Punkt M asetseb ringjoonel, mille keskpunktiks on K ja raadiuseks $\sqrt{r^2 - d^2}$. Mida lähemal on lõiketasapind keskpunktile, seda suurem on lõikeringi raadius. Kui lõiketasapind läbib kera keskpunkti, siis lõikeringi raadiuseks on kera raadius ja lõiget nimetatakse kera suurringiks. Kõiki teisi lõikeringe nimetatakse väikeringideks.

Kaht kerapinna punkti, mis ei ole ühe diameetri otspunktideks, läbib üksainus suurringjoon: need kaks punkti koos kera keskpunktiga määravad üheainsa tasapinna, mis lõikab kerapinda mööda suurringjoont.

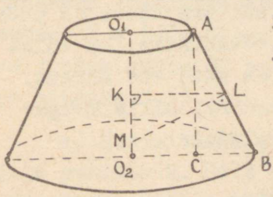
3. Kera puutuvtasapind. Tasapinda, millel on kerapinnaga üksainus ühine punkt, nimetatakse kera puutuvtasapinnaks selles punktis (joonis 140).

Puutuvtasapind on risti puutepunkti mineva raadiusega.

Teoreemi tõestamiseks paneme tähele, et kui α on kera puutuvtasapind punktis K, siis puutepunkt K on kerapinna ja tasapinna α ainus ühine punkt. Sellest järeldub, et tasapinna α iga teine punkt A on väljaspool kerapinda, seega kera keskpunktist kaugemal kui punkt K. Seega lõik OK on punkti O kauguseks tasapinnast α. Et punkti kaugus tasapinnast on punktist tasapinnale juhitud ristlõigu pikkus, siis on raadius OK puutuvtasapinnaga α risti.

4. Sfääri pindala. Selleks, et tuletada valemid sfääri ja tema osade pindalade arvutamiseks, tuleb eelnevalt tõestada järgmine abiteoreem.

Tüvikoonuse külgpindala võrdub tüvikoonuse kõrguse ja niisuguse ringjoone pikkuse korrutisega, mille raadiuseks on moodustaja keskpunktist teljeni juhitud moodustajaga ristuv lõik.



Joonis 141.

Tüvikoonuse külgpindala (joonis 141)

$$S_k = \pi(O_1A + O_2B)AB =$$
$$= 2\pi KL \cdot AB, \text{ kus}$$
$$KL = \frac{O_1A + O_2B}{2}$$

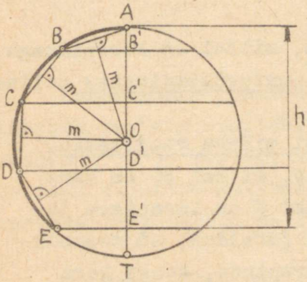
(trapetsi O_1ABO_2 kesklõik).

Joonestame $AC \perp O_2B$. Siis $\angle CAB = \angle KLM$ (vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad.) Kolmnurgad ABC ja KLM on sarnased nende vastavate nurkade võrdsuse tõttu. Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised: $\frac{KL}{AC} = \frac{ML}{AB}$. Siit $KL \cdot AB = AC \cdot ML$. Asendades saamegi tõestatava väite:

$$S_k = 2\pi \cdot AC \cdot ML = 2\pi ML \cdot h,$$

Saab näidata, et see teoreem kehtib ka silindri ja koonuse puhul.

Sfääri segmendi (kera vöö) pindala võrdub tema kõrguse ja kera suurringjoone pikkuse korrutisega.



Joonis 142.

Tekkigu sfääri segment kaare AE pöörlemisel ümber diameetri AT (joonis 142). Kujundame kaaresse AE korrapärase kõõlmurdjoone ABCDE ja leiame murdjoone pöörlemisel tekkiva pinna pindala. Vastavalt vaadeldud abiteoreemile saame: külje AB poolt kujundatud pinna pindala $S_1 = 2\pi m \cdot AB'$;
külje BC poolt kujundatud pinna pindala $S_2 = 2\pi m \cdot B'C'$;
külje CD poolt kujundatud pinna pindala $S_3 = 2\pi m \cdot C'D'$;
" DE " " " " $S_4 = 2\pi m \cdot D'E'$,
kus m on murdjoone apoteem (võrdsete kõõlude kaugused ringi keskpunktist on võrdsed). Murdjoone ABCDE poolt kujundatud pinna pindala $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2\pi m\,(AB' + B'C' + C'D' + D'E') = 2\pi mh$. Murdjoone lülide arvu tõkestamatul suurendamisel segmendi kõrgus h ei muutu, apoteemi m piirväärtuseks aga on raadius r. Seega saame sfääri segmendi pindala arvutamiseks valemi $S = 2\pi rh$.

Vöö pindala leidmisel (kui vöö tekib näiteks kaare CE pöörlemisel ümber diameetri AT) kasutame sama mõttekäiku; ka tulemus ei muutu: vöö pindala $S = 2\pi rh$, kus h on nüüd vöö kõrgus.

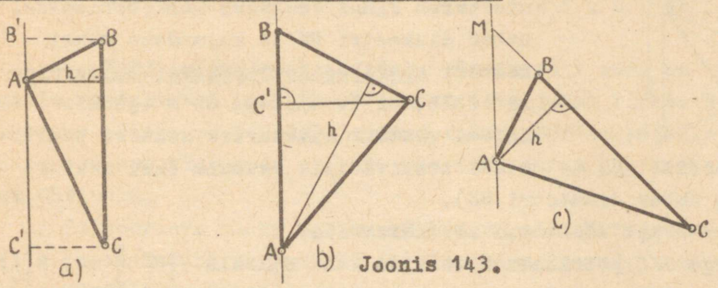
Kerapinda võime vaadelda sfääri segmendina, mille kõrgus $h = 2r$. Eelmisest valemist saame, et kera pindala

$$S = 4\pi r^2.$$

Kera pindala võrdub suurringi ümbermõõdu ja diameetri korrutisega ehk suurringi neljakordse pindalaga.

5. Kera sektori ja kera ruumala. Kera sektori ruumala valemi tuletamiseks tuleb tõestada järgmine abiteoreem:

kui kolmnurk ABC (joonis 143 a, b, c) pöörleb ümber telje, mis asetseb kolmnurga tasapinnas ja läbib tippu A ning ei lõika külge BC, siis pöörlemisel tekkiva keha ruumala võrdub ühe kolmandikuga külje BC poole moodustatud pinna pindala ja selle küljele joonestatud kõrguse korrutisest.



Joonis 143.

a) Kui külg BC on paralleelne pöörlemisteljega (joonis 142, a), siis tekkiva keha ruumala saamiseks tuleb ühe silindri ruumalast lahutada kahe koonuse ruumalade summa:

$$V = \pi h^2 BC - \left(\frac{1}{3}\pi h^2 AB' + \frac{1}{3}\pi h^2 AC' \right) =$$

$$= \pi h^2 BC - \frac{1}{3}\pi h^2 (AB' + AC') = \pi h^2 BC - \frac{1}{3}\pi h^2 BC = \frac{2}{3}\pi h^2 BC.$$

Et $2\pi h \cdot BC$ on külje BC poolt pöörlemisel moodustatud silindrilise pinna pindala, siis $V = S_{BC} \cdot \frac{h}{3}$, mida oligi vaja tõestada.

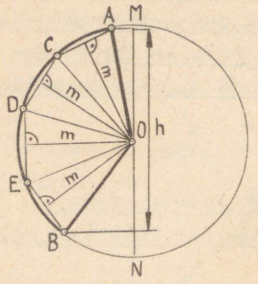
b) Kui külg AB (või AC) asetseb pöörlemisteljel, siis pöörlemisel tekkiva keha ruumala võrdub kahe koonuse ruumalade summaga:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot C'C^2 \cdot BC' + \frac{1}{3}\pi C'C^2 \cdot AC' = \frac{1}{3}\pi C'C^2 (BC' + AC') =$$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot C'C^2 \cdot AB$. Et $CC' \cdot AB = BC \cdot h$ (mõlemad korrutised väljendavad kolmnurga ABC kahekordset pindala), siis asendamisel saame: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot CC' \cdot BC \cdot h = S_{BC} \cdot \frac{h}{3}$ (korrutis $\pi \cdot CC' \cdot BC$ väljendab külje BC poolt pöörlemisel moodustatud koonilise pinna pindala S_{BC}).

c) Üldjuhtumil pikendame külge BC lõikumiseni pöörlemisteljega punktis M. Siis otsitav ruumala võrdub kolmnurkade AMC ja AMB pöörlemisel tekkivate kehade ruumalade vahega. Vastavalt juhtumile b)

$$V = S_{MC} \cdot \frac{h}{3} - S_{MB} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{3}(S_{MC} - S_{MB}) = \frac{h}{3} \cdot S_{BC}.$$



Joonis 144.

Kera sektori ruumala võrdub ühe kolmandikuga vastava vöö (või sfääri segmendi) pindala ja kera raadiuse korrutisest.

Tõestuseks vaatleme kera sektorit, mis tekib ringi sektori OAB pöörlemisel ümber diameetri MN ja kujundame ringi sektori kaaresse korrapärase köölmurdjoone ACDEB, mille apoteem on m (joonis 144). Leiame vastava hulknurkse sektori pöörlemisel tekkiva keha ruumala (kui sektor pöörleb ümber diameetri MN).

Vastavalt tõestatud abiteoreemile:

kolmnurga OAC pöörlemisel tekkiva keha ruumala $V_1 = \frac{1}{3} m \cdot S_{AC}$;

" OCD " " " " $V_2 = \frac{1}{3} m \cdot S_{CD}$;

" ODE " " " " $V_3 = \frac{1}{3} m \cdot S_{DE}$;

" OBE " " " " $V_4 = \frac{1}{3} m \cdot S_{BE}$.

Seega hulknurkse sektori OACDEBO pöörlemisel tekkiva keha ruumala

$$V_n = \frac{1}{3} m (S_{AC} + S_{CD} + S_{DE} + S_{BE}) = \frac{1}{3} m \cdot S_{ACDEB}.$$

Murdjoone lülide arvu n tõkestamatul suurendamisel on apoteemi m piirväärtuseks raadius r ja pindala S_{ACDEB} piirväärtuseks vöö (või segmendi) pindala $S = 2\pi rh$. Seega kera sektori ruumala $V = \frac{1}{3} r \cdot 2\pi rh$ ehk

$$\underline{V = \frac{2}{3}\pi r^2 h}.$$

Kera ruumala võime vaadelda niisuguse sektori ruumalana, mis tekib poolringi pöörlemisel ümber diameetri. Vastava vöö pindalaks on siis kera pindala $4\pi r^2$ ja kõrguseks diameeter 2 r. Saame valemi: $V = \frac{1}{3} r \cdot 4\pi r^2$ ehk

$$\underline{V = \frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Kera ruumala võrdub ühe kolmandikuga tema pindala ja raadiuse korrutisest.

T R I G O N O M E E T R I A

I. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PÕHIOMADUSED

§ 1. N u r k a d e m õ õ t m i n e

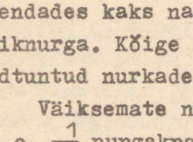
1. Nurga mõõtmine kraadides. Teatavasti nurk on kujund, mille moodustavad kaks ühest punktist väljuvat kiirt. Nurga suuruse mõiste on tihedalt seotud kiire pöörlemise mõistega: nurk iseloomustab seda pööret, mis teeb nurga ühe kaare teisega ühtivaks.

Et pöörleva kiire iga punkt liigub mööda ringjoone kaart, siis on seotud ka kesknurgad ja ringjoone kaared, kusjuures täispöördele vastab ringjoon.

Nurkade mõõtmist teostatakse järgmiselt: võetakse mingi suvaline arv (niisuguseks arvuks on harilikult 4; 24; 60; 360) ning jaotatakse ringjoon vastavaks arvuks võrdseteks osadeks. Ühendades kaks naaberjaotuspunkti ringi keskpunktiga, saamegi ühiknurga. Kõige levinum jaotuste arv on 360, mis annab meile üldtuntud nurkade mõõtmise kraadides.

Väiksemate nurkade mõõtmiseks kasutatakse nurgaminutit (s.o. $\frac{1}{60}$ nurgakraadi) ja nurgasekundit (mis on $\frac{1}{60}$ nurgaminutit). Nii näiteks Päikese nurkdiameeter on $0^{\circ}\,31'59'',3$.

2. Nurga mõõtmine radiaanides. Nurga suuruseks radiaanides ehk nurga radiaanmõõduks on nurgale (kui kesknurgale) vastava kaare pikkuse ja raadiuse jagatis. Kui kaare pikkus on s ja raadiuse pikkus r, siis kaarele vastava kesknurga radiaanmõõt $\alpha = \frac{s}{r}$.



Joonis 145.

Sellest järeldub, et $s = \alpha r$.

Üks radiaan on niisugune kesknurk, millele vastava kaare pikkus on võrdne raadiuse pikkusega: kui $s = r$, siis $\alpha = 1$. Joonisel 145 on esitatud kaks nurka, milledest suurem on 60° (sest OA = AK = KO) ja väiksem on 1 radiaan, sest kaare (mitte kõõlu) AR pikkus on võrdne raadiusega.

Mitu kraadi on üks radiaan ja mitu radiaani on üks kraad? Vastuse sellele küsimusele saame asjaoludest, et

1) nurga kraadimõõt ja radiaanmõõt on võrdelised (s.t. et iga nurga puhul kraadide arvu ja radiaanide arvu suhe on konstantne),

2) täispööre on 360° ja

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radiaani.}$$

See tähendab, et

$$1 \text{ radiaan} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ,3;$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radiaani; } 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ radiaani.}$$

Tähtis on ka ülalsaadud seos

$$s = r\alpha,$$

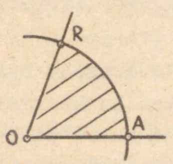
s.t. ringjoone kaare pikkus on võrdne raadiuse ja nurga radiaanmõõdu korrutisega.

Sellest järeldub, et ringi sektori pindala

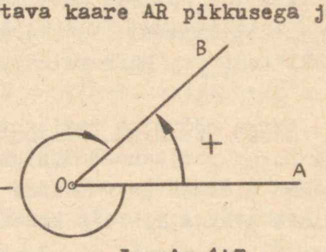
$$S = \frac{1}{2}s \cdot r = \frac{1}{2} r^2\alpha$$

on võrdne raadiuse ruudu ja nurga radiaanmõõdu poole korrutisega.

See tähendab, et kui joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on antud nurga tipp ja mille raadius on üks, siis nurk radiaanides on arvuliselt võrdne vastava kaare AR pikkusega ja ka



Joonis 146.

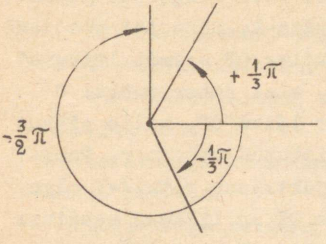


Joonis 147.

vastava sektori kahekordse pindalaga (joonis 146).

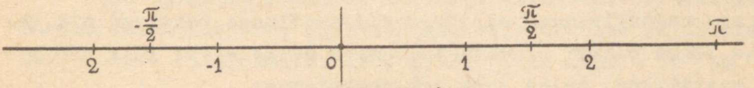
3. Positiivne nurk ja negatiivne nurk. Leidub kaks täispöördest väiksemat pööret, millega nurga AOB haara OA saab teha ühtivaks haaraga OB. Üht neist, nimelt seda, mille puhul haar OA pöördub vastu kellaosutite liikumise suunda, nimetatak-

se <u>positiivseks</u>, teist aga <u>negatiivseks</u> (joonis 147). Kooskõlas sellega nurga väärtus on positiivne, kui nurgaühikute lugemine toimub vastu kellaosutite liikumise suunda ja negatiivne, kui lugemine toimub kellaosutite liikumise suunas. Näiteks joonisel 148 on esitatud nurgad, millede väärtused radiaanides on $+\frac{1}{3}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi$ ja $-\frac{3}{2}\pi$.



Joonis 148.

On ilmne, et muutuv nurk võib omada kõiki väärtusi $-\infty$ ja $+\infty$ vahel. See tähendab, et kui on tegemist mingisuguse funktsiooniga, mille argumendiks on nurk, siis selle funktsiooni graafilisel kujutamisel võime märkida argumendi väärtusi suvalises ulatuses (joonis 149).



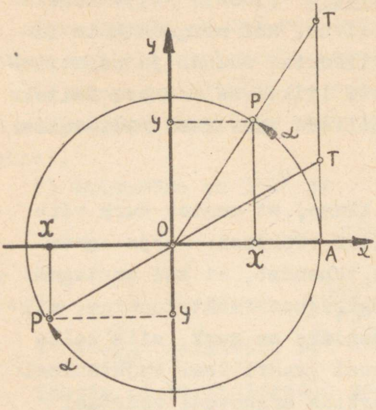
Joonis 149.

Sellel teljel punkt 1 vastab nurgale, mille suurus on üks radiaan, punkt $\frac{\pi}{2}$ vastab täisnurgale jne. Igale nurgale vastab abstsissteljel teatud punkt ja igale punktile vastab teatud nurk.

§ 2. Trigonomeetrilised funktsioonid

1. <u>Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid</u>. Trigonomeetrilistest funktsioonidest vaatleme nurga siinust, koosinust, tangensit ja kootangensit. Nende funktsioonide argumendiks on nurk või sellele nurgale vastav kaar (ladina keeles arcus), mida kujundab pöörleva kiire mingi suvaline punkt. Seda nurka (või kaart) tähistame tähega α.

Trigonomeetriliste funktsioonide defineerimiseks on kõige hõlpsam lähtuda nn. trigonomeetrilisest ringist, mida võib vaadelda kui liikuva kiire OP suvalise punkti P trajektoori



Joonis 150.

(joonis 150). Lisaks sellele ringile võtame koordinaatteljestiku, mille alguseks on ringi keskpunkt O. Nurga lähtehaaraks võtame kiire OA (joonis 150) ja kaare alguspunktiks seega punkti A. Täiendame joonist veel ringjoone puutujaga punktis A. Edaspidi vaatleme liikuva kiire OP asemel liikuvat raadiust, s.o. ümber punkti O pöörlevat lõiku OP, mille pikkus olgu tähistatud tähega r. Punkti P projektsioon x-teljel olgu X, nii et OX on liikuva raadiuse projektsioon x-teljel. Joonisel tähed P ja X esinevad kaks korda sellepärast, et nurk α on võetud kord positiivsena, teine kord aga negatiivsena; alljärgnevad arutlused kehtivad nii ühe kui ka teise punkti P kohta vaatamata sellele, et lõik XP on kord positiivne, teine kord aga negatiivne.

Anname nüüd järgmised definitsioonid.

1) Nurga α siinuseks nimetatakse liikuva raadiuse OP otspunktist P x-teljele tõmmatud ristlõigu XP (siinuslõigu) ja raadiuse pikkuste jagatist ehk, täpsemini, punkti P ordinaadi ja raadiuse pikkuse jagatist:

$$\sin\alpha = \frac{XP}{r} .$$

2) Nurga α koosinuseks nimetatakse liikuva raadiuse OP projektsiooni OX (koosinuslõigu) ja raadiuse pikkuste jagatist ehk punkti P abstsissi ja raadiuse pikkuse jagatist:

$$\cos\alpha = \frac{OX}{r} .$$

3) Nurga α tangensiks nimetatakse liikuva raadiuse otspunkti P ordinaadi ja abstsissi jagatist:

$$\tan\alpha = \frac{XP}{OX} .$$

Kui paremal seisva murru lugeja ja nimetaja jagame raadiusega r, siis näeme, et nurga tangens on võrdne nurga siinuse ja koosinuse jagatisega:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} .$$

Kolmnurkade OXP ja OAT sarnasusest järeldub, et nurga tangens on ka puutujalõigu AT ja raadiuse OA jagatis:

$$\tan\alpha = \frac{AT}{OA}.$$

4) Nurga kootangensiks nimetatakse tangensi pöördväärtust:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

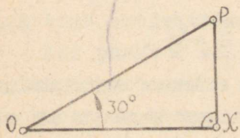
Kui on tegemist ainult teravnurkadega, siis võib kasutada kitsendatud definitsioone:

teravnurga siinus on selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi jagatis;

teravnurga koosinus on selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi jagatis;

teravnurga tangens on selle nurga vastaskaateti ja lähiskaateti jagatis.

Mõne nurga funktsioone on kerge arvutada. Näiteks, kui on tarvis leida $\sin 30^\circ$, siis lähtume täisnurksest kolmnurgast OXP (joonis 151), milles $XP = \frac{1}{2}\,OP$. Siis $\angle XOP = 30^\circ$ ja $\angle XPO = 60^\circ$, seega



Joonis 151.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

Kasutades Pütagorase teoreemi, leiame

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ,$$

seega

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$$

ja

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ.$$

Võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast saame, et

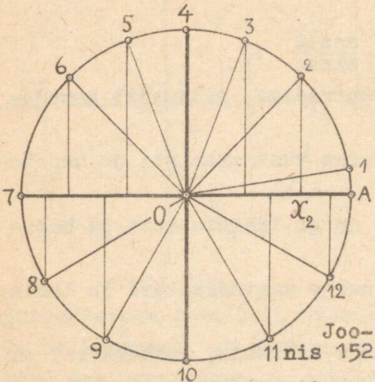
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ,$$

seega

$$\tan 45^\circ = 1 = \cot 45^\circ.$$

2. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine argumendi kasvamisel nullist kuni 2π. Vaatleme esmalt siinuse muutumist. Joonisel 152 on numbritega märgitud punkti P üksikud asukohad; raadiuse pikkus on võetud võrdseks ühega, seega

vertikaalsete lõikude pikkused annavad meile otseselt siinuse väärtused. Nurki mõõdame radiaanides. Tähistame veel nurga A01 tähega α_1, nurga A02 tähega α_2 jne. Kui $\alpha = 0$, siis punkt P langeb ühte punktiga A, vastav ordinaat on null, ning meil on: $\sin 0 = 0$.



Joonis 152.

Kui punkt P liigub piki kaart A1, siis nurk α erineb nullist vähe ja ordinaat langeb kaarega peaaegu ühte: väikeste nurkade puhul $\sin\alpha \approx \alpha$ ning siinus käitub ligikaudu nõnda, nagu funktsioon

$$y = x.$$

(Siinuse graafiku joonestamisel tuleb seda alati meeles pidada).

Nurga edasisel kasvamisel siinuse väärtus kasvab (kuid ikka aeglasemalt) seni, kui α saab võrdseks $\frac{\pi}{2}$. Nagu juba nägime,

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kui aga $\alpha = \frac{\pi}{2}$, siis $\sin\alpha = 1$. See on siinuse maksimaalne väärtus; α muutumisel $\frac{\pi}{2}$ lähemas ümbruses siinus peaaegu ei muutu. Nagu näeme, siinuse muutumise iseloom on samasugune nagu päevapikkuse muutumise iseloom: kevadel algul päevad kasvavad märgatavalt, kuid suvise pööripäeva paiku päike loojub täna sealsamas, kus ta loojus eilegi.

Nurga α muutumisel väärtuselt $\frac{\pi}{2}$ kuni väärtuseni π siinus kahaneb järjest kiiremini väärtuselt 1 kuni väärtuseni 0, korrates vastupidises järjekorras seda, mida ta tegi esimeses veerandis: kui näiteks nurgad 304 ja 405 on võrdsed, siis ka

$$\sin\alpha_3 = \sin\alpha_5.$$

Nurga α edaspidisel kasvamisel (kui α on kolmanda veerandi nurk) siinus muutub negatiivseks ja väheneb kuni −1-ni:

$$\sin 270^\circ = \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Neljandas veerandis siinus kasvab (järjest kiiremini) väärtuselt −1 kuni väärtuseni 0: $\sin 2\pi = 0$.

Kui nurk saab suuremaks kui 2π, siis liikuv punkt P läbib järjekorras asukohad 1, 2, ... ning nurga siinuse väärtused korduvad:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha.$$

Seetõttu öeldakse, et 2π on nurga siinuse periood.

Siinust võiksime võrrelda veel võnkuva pendli kaugusega tasakaalupunktist, kui pendel oli seal parajasti momendil 0. Pendelgi eemaldub järjest aeglasemalt tasakaalupunktist, saavutab oma maksimaalse kauguse, tuleb tagasi tasakaalupunkti ja siis teeb samasuguse võnke teisele poole.

Kuidas muutub koosinus? Lähtemomendil punkt P jälle langeb ühte punktiga A, lõik OA = OP = OX, s.t.

$$\cos 0 = 1.$$

Kui punkt P liigub punktist A punktidesse 1, 2, 3, siis vastavad OP projektsioonid OX_1, OX_2, OX_3 järjest vähenevad, s.t. vähenevad koosinuse väärtused. Nagu juba nägime,

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos\alpha = 0$, sest lõik OP on risti x-teljega ning tema projektsioon on null.

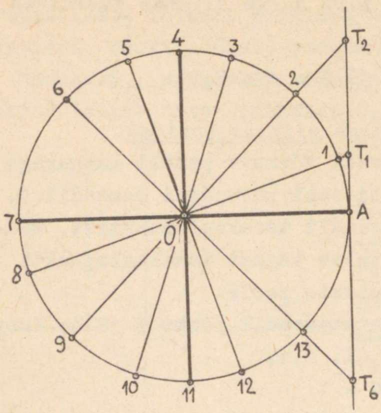
Kui punkt P siirdub teise veerandisse, siis koosinus muutub negatiivseks ning väheneb kuni -1-ni; kolmandas veerandis koosinus kasvab väärtuselt -1 kuni nullini ja neljandas veerandis kasvab edasi nullist kuni $+1$-ni.

Nurga edasisel kasvamisel koosinuse väärtused korduvad, nii et ka koosinuse periood on 2π:

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha.$$

Tangensi muutumist jälgime jooniselt 153. Kui nurk α on võrdne nulliga, s.t. kui punkt P on ühte langenud punktiga A, siis tangens on ilmselt null. Kui nurk α kasvab nullist kuni $\frac{\pi}{4}$-ni, siis tangens kasvab nullist üheni ($AT_2 = OA$). Edasisel nurga kasvamisel tangensi väärtus kasvab järjest suureneva kiirusega, omandades meelevaldselt suuri väärtusi. Kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, siis $\tan\alpha$ ei eksisteeri - paralleelsetel sirgetel ei ole ühist punkti. Neid fakte, et tangensi väärtus kasvab tõkestamatult argumendi lähenemisel väärtusele $\frac{\pi}{2}$ ja et argumendi väärtusel $\frac{\pi}{2}$ tangens ei eksisteeri, märgime kujul

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \tan\alpha = \infty.$$



Joonis 153.

Kui α siirdub teise veerandisse, siis tangens muutub negatiivseks, kusjuures nurga tangensi absoluutväärtus on seda suurem, mida vähem nurk α erineb täisnurgast. Kui nurgad 304 ja 405 on võrdsed, siis

$$\tan\alpha_3 = -\tan\alpha_5.$$

Nurga α kasvamisel väärtusest $-\frac{\pi}{2}$ kuni väärtuseni π tangens kasvab $-\infty$-st nullini. Kui nurk $\alpha_6 = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, siis

$$\tan\alpha_6 = -1.$$

Kolmandas veerandis kordub sama, mis oli esimeses veerandis, sest kui nurgad 708 ja A01 on võrdsed, siis nurgale α_8 vastab sama punkt T_1, mis vastas nurgale α_1. Teiste sõnadega, kehtib samasus (õige iga α väärtuse puhul)

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha,$$

millest nähtub, et nurga tangensi periood on π.

Nurga tangensi muutumisest järeldub tema pöördväärtuse nurga kootangensi muutumine:

kui nurk on 0 või π, siis nurga kootangens puudub (nurga tangens on siis 0);

kui nurk kasvab 0-st kuni $\frac{\pi}{2}$-ni või π-st kuni $\frac{3\pi}{2}$-ni, siis nurga kootangens kahaneb $+\infty$-st kuni 0-ni;

kui nurk kasvab $\frac{\pi}{2}$-st kuni π-ni või $\frac{3\pi}{2}$-st kuni 2π-ni, siis nurga kootangens kahaneb 0-st kuni $-\infty$-ni.

Nurga kootangensi periood on π (nagu tangensilgi):

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

Eelnevast nähtub, et trigonomeetrilise funktsiooni periood on vähim nurk, mille võrra saab argumenti suurendada, ilma et funktsiooni väärtus muutuks. Sellest järeldub, et funktsiooni väärtus ei muutu ka siis, kui argumendiga liita perioodi mistahes kordne. Seda tõsiasja väljendavad valemid

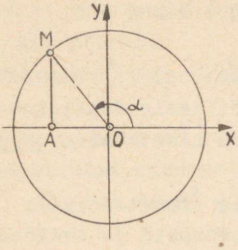
$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n); \qquad \tan\alpha = \tan(\alpha + \pi n);$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n); \qquad \cot\alpha = \cot(\alpha + \pi n);$$

kus n on mistahes naturaalarv.

§ 3. Trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed ühe ja sama argumendi korral

1) Ühe ja sama argumendi siinuse ja koosinuse ruutude summa võrdub ühega:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$$



Joonis 154.

Tõestus. Vaatleme mistahes nurka ühikringis (OM = 1). Siis Pütagorase teoreemi põhjal $MA^2 + AO^2 = OM^2$. Et $MA = \sin\alpha$, $AO = \cos\alpha$ ja $OM = 1$, siis

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

2) Ühe ja sama argumendi siinuse ja koosinuse jagatis on sama argumendi tangens, nagu nägime juba varem (§ 2, 1):

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

3) Ühe ja sama argumendi tangensi ja kootangensi korrutis võrdub ühega.

Definitsiooni kohaselt

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha},$$

seega

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1. \qquad (2)$$

4) Seosest (1) võib tuletada veel kaks seost. Jagades samasuse (1) liikmeti kord $\cos^2\alpha$-ga, kord $\sin^2\alpha$ -ga, saame

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Toodud põhisamasuste abil on võimalik tõestada mitmesuguseid uusi trigonomeetrilisi samasusi ja tuletada valemid trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamiseks, kui on teada mingi ühe funktsiooni väärtus:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \cot^2\alpha}};$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1 + \cot^2\alpha}};$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};$$

$$\cot\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

§ 4. Trigonomeetriliste funktsioonide taandamine

Mistahes nurga trigonomeetrilist funktsiooni on võimalik taandada positiivse teravnurga trigonomeetrilisele funktsioonile. Valemeid, mille abil taandamine toimub nimetatakse <u>taandamisvalemeiks</u>.

Kui nurk on suurem kui 360°, siis võime (funktsioonide perioodsuse tõttu) ära jätta täisarvu täispöördeid ja avaldada nurga trigonomeetrilised funktsioonid 360°-st väiksema positiivse nurga funktsioonide kaudu.

Kui nurk on negatiivne, siis väljendame ta trigonomeetrilised funktsioonid absoluutväärtuselt sama suure positiivse nurga funktsioonide kaudu seoste abil (mis kergesti tuletuvad trigonomeetrilise ringi abil):

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha;$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

Kui taandatava funktsiooni argumendi väärtus on positiivne ja väiksem kui 360°, siis väljendame argumendi summana

$$90^\circ \pm \alpha, \; 180^\circ \pm \alpha, \; 270^\circ \pm \alpha, \; 360^\circ - \alpha,$$

kus α on teravnurk. Seejärel määrame taandatava funktsiooni märgi ja absoluutväärtuse, võttes absoluutväärtuseks teravnurga α trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse, kusjuures tuleb säilitada funktsiooni nimetus, kui argumendi kirjutises esineb 180° või 360° ja asendada funktsiooni nimetus kaasfunktsiooni nimetusega, kui argumendi kirjutises esineb 90° või 270°.

Taandamisvalemeid saab tõestada liitmisvalemite abil (II, §1

Näiteks: 1) $\sin(180^\circ + \alpha) = \sin 180^\circ \cdot \cos\alpha + \cos 180^\circ \cdot \sin\alpha = -\sin\alpha$, sest $\sin 180^\circ = 0$ ja $\cos 180^\circ = -1$.

Reegli kohaselt funktsiooni nimetus säilub ja märk on $-$, sest III veerandi nurga siinus on negatiivne.

2) $\cos(270^\circ - \alpha) = \cos 270^\circ \cdot \cos\alpha + \sin 270^\circ \cdot \sin\alpha =$
$= -\sin\alpha$.

3) $\tan(360^\circ - \alpha) = \dfrac{\tan 360^\circ - \tan\alpha}{1 + \tan 360^\circ \cdot \tan\alpha} = -\tan\alpha$ või .

4) $\tan(360^\circ - \alpha) = \dfrac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$.

Praktiliselt toimub nurga trigonomeetrilise funktsiooni taandamine teravnurga trigonomeetrilisele funktsioonile otseselt reegli põhjal.

Näiteks: 1) $\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ =$
$= \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$.

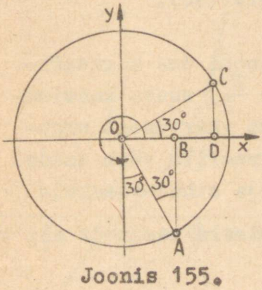
(Märk +, sest II veerandi nurga siinus on positiivne, kaasfunktsiooni nimetus, sest argumendi kirjutises esineb 90°).

2) $\tan 2000^\circ = \tan(1800^\circ + 200^\circ) = \tan 200^\circ =$
$= \tan(180^\circ + 20^\circ) = \tan 20^\circ$.

(Märk +, sest $\tan 200^\circ$ on positiivne, funktsiooni nimetus säilub).

3) $\cos(-300^\circ) = \cos 300^\circ = \cos(270^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$.

Taandamisvalemeid on võimalik tuletada ka geomeetriliselt. Vaatleme näiteks $\cos 300^\circ$ taandamist geomeetriliselt.



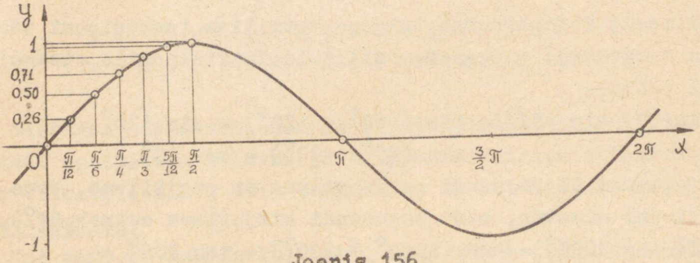
Joonis 155.

Joonestame ühikringis nurga 300°, mis on $270^\circ + 30^\circ$. Joonestame nurga 30° alates lähtehaarast ning nurkade 300° ja 30° siinus- ja koosinuslõigud. $\triangle OCD = \triangle OAB$ kui täisnurksed kolmnurgad, mille hüpotenuusid ja ühed teravnurgad on võrdsed. Järelikult $OB = CD$. Et $OB = \cos 300^\circ$, $CD = \sin 30^\circ$, siis $\cos 300^\circ = \sin 30^\circ$.

§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud

1. Funktsiooni sin x graafik. Trigonomeetrilisi funktsioone, nagu kõiki funktsioone, saab kujutada graafiliselt. Graafiku ehitamiseks võtame 0 ja $\frac{\pi}{2}$ vahelt rea väärtusi, leiame

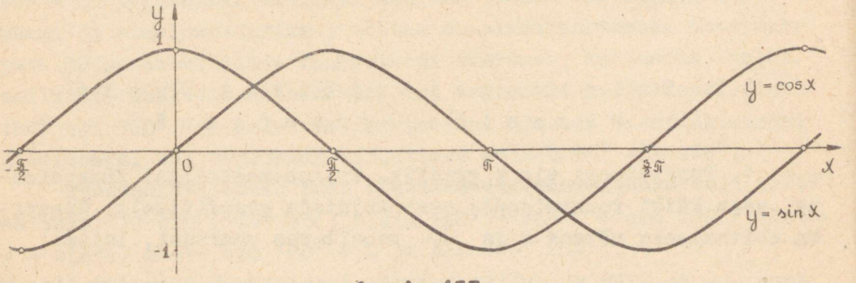
neile trigonomeetriliste funktsioonide tabelist vastavad funktsiooni väärtused ja kujutame saadud arvupaarid koordinaatteljestikus punktidena. Moonutamata kujutise saamiseks kasutame telgedel võrdseid ühikuid. Ehitame esmalt funktsiooni sin x graafiku.



Joonis 156.

Argumendi väärtuste puhul, mis on suuremad kui $\frac{\pi}{2}$, kasutame funktsiooni väärtuste leidmiseks taandamisvalemeid. Et siinuse periood on 2π, siis graafiku ehitamiseks väljaspool vahemikku 0-st kuni 2π kasutame graafiku edasikandmist vasakule ja paremale pikkuste 2π, 4π, ... võrra. Siinusfunktsiooni graafikut nimetatakse sinusoidiks (joonis 156).

2. Funktsiooni cos x graafik. Funktsiooni cos x graafikuks on ka sinusoid, sest $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; seega koosinuse väärtus argumendi x korral võrdub siinuse väärtusega argumendi $x + \frac{\pi}{2}$ korral. Koosinusfunktsiooni graafiku võib saada $y = \sin x$ graafiku ülekandmisel abstsisstelje sihis vasakule $\frac{\pi}{2}$ võrra (joonis 157). Samuti võib joonestamiseks kasutada cos x väärtuste tabelit.



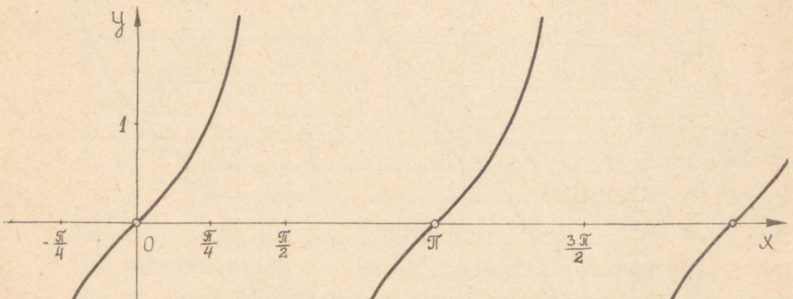
Joonis 157.

3. Funktsiooni tan x graafik. Funktsiooni tan x graafiku konstrueerimine tangensi väärtuste tabeli abil.

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
tan x	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	-

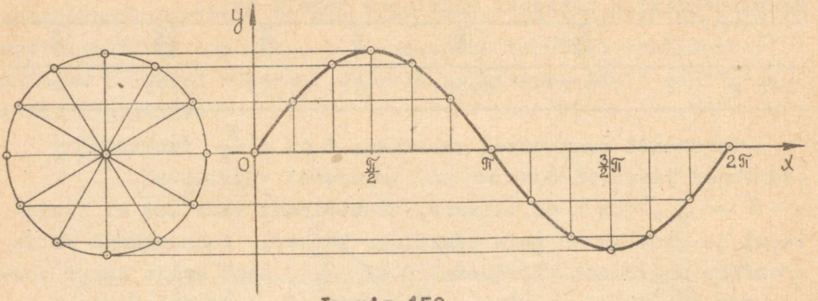
Argumendi muutumisel vahemikus $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ funktsiooni väärtused kasvavad 0-st ∞-ni. Argumendi väärtustel $n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, kus n on täisarv, funktsiooni väärtust ei eksisteeri ja graafik on neis punktides katkev. Joonestanud välja graafiku argumendi väärtustel 0-st $\frac{\pi}{2}$, saab selle järgi joonestada graafiku vahemikus $-\frac{\pi}{2}$-st 0-ni, sest $\tan(-x) = -\tan x$. Et tangensi periood võrdub lõigu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ pikkusega, siis tangensi graafiku ehk <u>tangensoidi</u> saamiseks tuleb seda haru edasi kanda paremale ja vasakule pikkuste π, 2π, 3π ... võrra (joonis 158). Tangensoid koosneb lõpmatust hulgast ühesugustest harudest.

Sinusoidi ja tangensoidi saab konstrueerida ka geomeetriliselt. Selleks jaotame ühikringjoone mingiks arvuks võrdseteks osadeks ning abstsisstelje lõigu $0 \leq x \leq 2\pi$ samaks arvuks

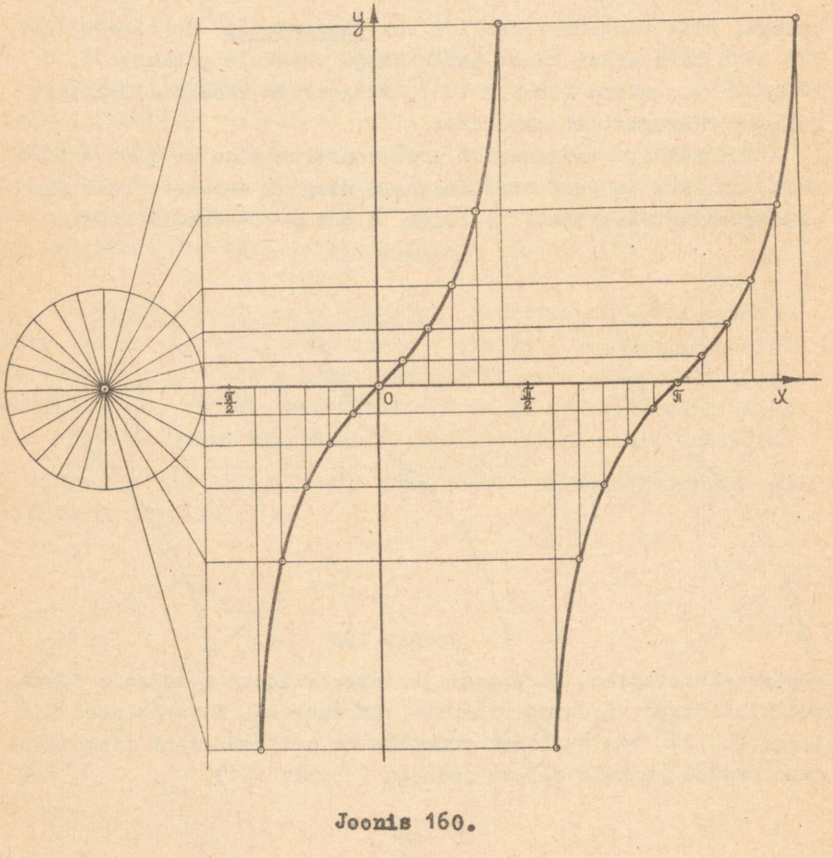


Joonis 158.

võrdseteks osadeks. Ringjoone jaotuspunktidest x-teljele tõmmatud ristlõigud võrduvad siinuste väärtustega. Kanname need üle lõigu $0 - 2\pi$ vastavatesse punktidesse ordinaatidena ning ühendame saadud punktid sujuva joonega (joonis 159).



Joonis 159.

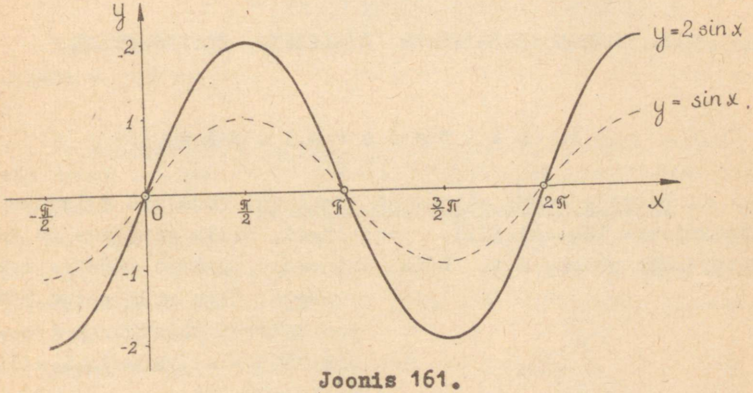


Joonis 160.

Tangensoidi saamiseks tõmbame ringjoone jaotuspunktidest raadiuse pikendused ringjoone puutujani kaarte alguspunktis; saadud lõigud võrduvad tangensi väärtustega vastava argumendi korral. Kandes need puutujal saadud lõigud vastavatesse punktidesse ordinaatidena ning saadud punkte sujuvalt ühendades tekib tangensoid (joonis 160).

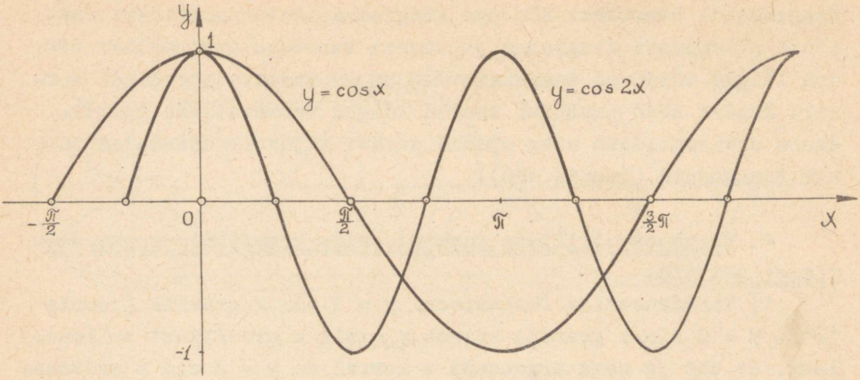
4. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikute konstrueerimise näiteid.

1) Konstrueerida funktsiooni $y = 2 \sin x$ graafik (joonis 161). $y = 2 \sin x$ graafik erineb $y = \sin x$ graafikust sellepoolest, et ühe ja sama argumendi x korral on $y = 2 \sin x$ ordinaadid kaks korda suuremad. Periood on endiselt 2π, muutuspiirkond on aga kaks korda suurem: $-2 \leqslant 2 \sin x \leqslant 2$.



Joonis 161.

2) Konstrueerida $y = \cos 2x$ graafik (joonis 162). $y = \cos 2x$ graafik erineb $y = \cos x$ graafikust selle poolest, et argumendi x iga väärtuse korral $\cos 2x$ väärtus võrdub $\cos x$ väärtusega punktis, mille abstsiss on kaks korda suurem kui x. Näiteks $x = \frac{\pi}{6}$ korral $y = \cos 2x$ võrdub $\cos x$ väärtusega punktis $\frac{\pi}{3}$, s.o. $\cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{4}$ korral $y = \cos 2x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\cos 2x$ periood on 2 korda väiksem $\cos x$ perioodist, muutumispiirkond jääb aga endiseks: $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$.



Joonis 162.

II. TRIGONOMEETRILISTE AVALDISTE TEISENDAMINE

§ 1. L i i t m i s v a l e m i d

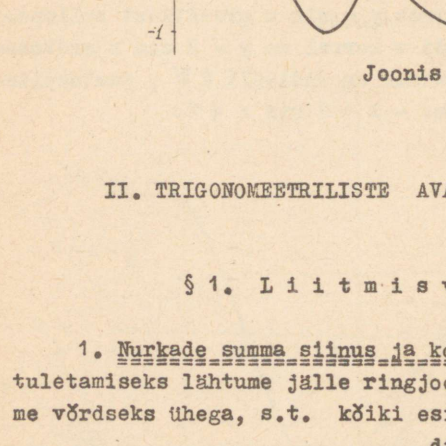
1. Nurkade summa siinus ja koosinus. Vajalike valemite tuletamiseks lähtume jälle ringjoonest, mille raadiuse OR loeme võrdseks ühega, s.t. kõiki esinevaid pikkusi mõõdame raadiusega. Olgu nüüd antud kaks positiivset teravnurka (joonis 163) $\alpha = \angle ROA$ ja $\beta = \angle AOB$, millede summa

$$\alpha + \beta = \angle ROB$$

on samuti teravnurk.

Meil on tarvis avaldada nurga $\alpha + \beta$ siinus ja koosinus nurkade α ja β funktsioonide kaudu. Selleks täiendame joonist järgmiselt (joonis 163): joonestame abilõigud

1) $BX \perp OR$; 2) $BC \perp OA$; 3) $CS \perp OR$; 4) $CD \perp BX$.



Joonis 163.

Siis $\angle DBC = \angle ROA = \alpha$ kui vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Täiendatud joonisest saame nüüd:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{XB}{OB} = \frac{XD + DB}{1} = SC + DB =$$

$$= OC \sin\alpha + BC \cos\alpha,$$

sest kolmnurgast OSC külg $SC = OC \sin\alpha$ ja kolmnurgast BDC külg $DB = BC \cos\alpha$. Lõigud OC ja BC leiame kolmnurgast OCB:

$$OC = OB \cos\beta = \cos\beta\ ;\ BC = OB \sin\beta = \sin\beta.$$

Asendamisel saame, muutes veel tegurite järjekorda:

$$\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Nurkade summa koosinuse leiame analoogiliselt:

$$\underline{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{OX}{OB} = \frac{OS - XS}{1} = OS - DC =$$

$$= OC \cos\alpha - BC \sin\alpha =$$

$$= \underline{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Saab tõestada, et tuletatud valemid on kehtivad mistahes nurkade α ja β korral.

2. <u>Nurkade vahe siinus ja koosinus</u>. Tuletatud valemid nurkade summa siinuse ja koosinuse jaoks on kergesti teisendatavad ka nurkade vahe siinuse ja koosinuse valemiteks. Selleks tarvitseb vaid igal pool β asemel võtta "$-\beta$" ning pidada silmas, et $\cos(-\beta) = \cos\beta$ ja $\sin(-\beta) = -\sin\beta$. Muidugi saab valemid nurkade vahe jaoks tuletada ka otseselt joonisest.

Nii või teisiti saame:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\ ;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Nurkade summa ja vahe siinuse ja koosinuse valemid on aluseks kõigi järgnevate valemite tuletamisel.

3. <u>Nurkade summa ja vahe tangens</u>. On teada, et

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}$$

Võttes arvesse nurkade summa ja vahe siinuse ja koosinuse valemeid ning jagades lugejat ja nimetajat korrutisega $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, saame:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

(Praktiliselt kasulikumaks osutub teine märkidekombinatsioon:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.)$$

§ 2. Kahekordse ja poolnurga funktsioonid

1. Kahekordse nurga funktsioonid. Valemid kahekordse nurga trigonomeetriliste funktsioonide avaldamiseks ühekordse nurga trigonomeetriliste funktsioonide kaudu saame erijuhtumitena valemeist

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta},$$

kui neis $\alpha = \beta$:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

Kui kahekordse nurga koosinuse valemis asendada $\sin^2\alpha$ temaga võrdse avaldisega $1 - \cos^2\alpha$ või $\cos^2\alpha$ temaga võrdse avaldisega $1 - \sin^2\alpha$, siis saame valemid

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \text{ ja } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

2. Poolnurga funktsioonid. Asendame kahekordse nurga koosinuse viimati saadud valemeis 2α tähega x ja α seega murruga $\frac{x}{2}$:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \text{ ja } \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Nende valemite lahendamisel poolnurga funktsioonide suhtes saame:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

kus märk + või - tuleb võtta vastavalt veerandile, millesse kuulub nurk $\frac{x}{2}$. Jagades poolnurga siinuse avaldise poolnurga koosinuse avaldisega, saame poolnurga tangensi avaldise, mille lihtsustamiseks laiendame juuritavat murdu kord selle lugejaga, teine kord selle nimetajaga:

$$\tan \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(Viimase kahe avaldise ees pole vaja märke $\pm$, sest $\sin x$ ja $\tan \frac{x}{2}$ on sama märgiga, kuna $1 \pm \cos x \geqslant 0$). Lugejal soovitatakse tuletada valemid $\sin 3\alpha$ ja $\cos 3\alpha$ avaldamiseks lähtudes sellest, et $3\alpha = 2\alpha + \alpha$.

Näiteks:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha.$$

§ 3. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks. Pöördteisendused

1. Siinuste summa ja vahe. Liites nurkade x ja y summa ja vahe valemite

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

vastavad pooled, saame:

$$\sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y \qquad (1)$$

Lahutades esimese valemi poolest teise pooled, saame:

$$\sin (x + y) - \sin (x - y) = 2 \cos x \sin y \qquad (2)$$

Olgu $\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = \beta. \end{cases}$

Liites võrrandite vastavad pooled, leiame et

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

ja lahutades saame, et

$$y = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Asendame valemites (1) ja (2) x ja y leitud avaldistega:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

2. Koosinuste summa ja vahe. Analoogiliselt leiame:

$$\pm\begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \\ \underline{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;} \end{array}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y;$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y.$$

Asendame x ja y varemsaadud avaldistega:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

3. Tangensite summa ja vahe. Avaldise $\tan\alpha \pm \tan\beta$ teisendamiseks korrutiseks väljendame tangensid siinuste ja koosinuste kaudu:

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Seega

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

4. Pöördteisendused. Siinuste korrutise teisendamisel summaks lähtume koosinuste vahe valemist

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}. \qquad (1)$$

Võtame kasutusele uued argumendid α ja β:

$$\frac{x+y}{2} = \alpha \quad \text{ja} \quad \frac{x-y}{2} = \beta,$$

ning lahendame need seosed x ja y suhtes:

$$\pm\begin{cases} x + y = 2\alpha \\ x - y = 2\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 2\alpha + 2\beta \\ 2y = 2\alpha - 2\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta. \end{cases}$$

Kui lähtevalemis (1) asendada suurused x ja y saadud avaldistega, saame (pärast lihtsat teisendust):

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = 1/2\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right].$$

Samal viisil saame koosinuste summa valemist

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

valemi

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = 1/2\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

ja siinuste summa valemist

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

valemi

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

§ 4. Trigonomeetriliste võrrandite lahendamine

1. Põhivõrrandid. Trigonomeetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb trigonomeetrilise funktsiooni argumendis. Trigonomeetrilised võrrandid on näiteks

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0; \quad \cos 2x + \cos x = 0.$$

Trigonomeetrilise võrrandi lahendamiseks püütakse esmalt leida mingi seda võrrandit rahuldava funktsiooni väärtus ja siis viimase põhjal argumendi väärtus. Selleks tuleb rakendada nii algebralisi kui ka trigonomeetrilisi teisendusi. Näiteks ülalantud võrranditest esimest on sobiv jagada avaldisega $\cos x$, teises aga on sobiv $\cos 2x$ asendada temaga võrdse avaldisega $2 \cos^2 x - 1$. Nii saame võrrandid

$$\sqrt{3} \tan x + 1 = 0 \text{ ja } 2 \cos^2 x - 1 + \cos x = 0,$$

milledest esimene taandub võrrandiks

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ja teine (ruutvõrrandi lahendivalemi abil) võrrandipaariks

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ja } \cos x = -1.$$

Saadud võrrandeid nimetatakse <u>trigonomeetrilisteks põhivõrranditeks</u>. Nende üldkuju on

$$\underline{\sin x = m, \quad \cos x = m, \quad \tan x = m, \quad \cot x = m},$$

kus m on mingi antud arv. Trigonomeetrilise võrrandi lahendamine taandub harilikult ühe või mitme põhivõrrandi lahendamisele.

Kui mingit põhivõrrandit rahuldab lahend x_0, siis rahuldavad teda ka kõik lahendid $x_0 + pn$, kus p on vastava funktsiooni periood ja n on suvaline täisarv. Näiteks ülalsaadud põhivõrrandit $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ rahuldab x väärtus $-\frac{\pi}{6}$, seega ka kõik väärtused $-\frac{\pi}{6} + n\pi$; $\cos x = \frac{1}{2}$ rahuldab x väärtus $\frac{\pi}{3}$, seega ka kõik väärtused $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $\cos x = -1$ rahuldab x väärtus π, seega ka kõik väärtused $\pi + 2n\pi$, kus n on suvaline täisarv (positiivne, negatiivne, null).

2. Võrrandi $\sin x = m$ lahendamine. Kui $|m| > 1$, siis antud võrrandil ei leidu lahendit, sest ühegi nurga siinuse absoluutväärtus ei ole suurem kui 1. Kui $|m| \leq 1$, siis võrrandil $\sin x = m$ leidub lõpmata palju lahendeid, mis kõik on avaldatavad üheainsa lahendi abil. Selleks lahendiks võetakse väikseima absoluutväärtusega lahend ja seda tähistatakse sümboliga $\arcsin m$. Niisiis,

arcsin m on väikseima absoluutväärtusega nurk, mille siinus võrdub antud arvuga m.

Näiteks $\arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$. Arkussiinuse definitsioonist järeldub, et

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin m \leq \frac{\pi}{2} .$$

Kui arkussiinuse argument $m > 0$, siis $\arcsin m$ leitakse otse siinuste tabelist (nurga leidmine siinuse väärtuse järgi). Vastasel juhtumil tuleb enne kasutada taandamisvalemit

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m.$$

Näiteks $\arcsin(-0{,}9) = -\arcsin 0{,}9 = -64^{\circ}10'$.

Kui võrrandi $\sin x = m$ väikseima absoluutväärtusega lahend $\arcsin m$ on leitud, siis kõik muud lahendid leitakse järgmiselt.

1) Väikseima absoluutväärtusega lahendiga liidetakse siinuse perioodi suvaline kordne, saades nii esimese lahendite seeria

$$x_1 = 2\pi n + \arcsin m.$$

2) Et $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, siis peale eelmise seeriaga antud lahendite leidub võrrandil veel lahend $\pi - \arcsin m$ (joonis 164), mis annab teise lahendite seeria

$$x_2 = 2\pi n + \pi - \arcsin m = (2n + 1)\pi - \arcsin m.$$

$OD = m > 0$
$\angle AOB = \arcsin m$
$\angle AOC = \pi - \arcsin m$

Joonis 164.

Neid kaht avaldist saab ühendada üheks, nimelt avaldiseks

$$x = \pi k + (-1)^k \arcsin m,$$

mis paarisarvulise k korral annab seeria x_1 ja paarituarvulise k korral seeria x_2. Viimast lahendite üldavaldist tähistatakse sümboliga $\operatorname{Arcsin} m$. Niisiis, kui $|m| \leq 1$, siis võrrandi $\sin x = m$ lahenditeks on

$$x = \operatorname{Arcsin} m = \pi k + (-1)^k \arcsin m.$$

Näiteks võrrandi $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, lahenditeks on

$$x = \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi k + (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= \pi k - (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi k - (-1)^k \frac{\pi}{4} .$$

3. Võrrandi $\cos x = m$ lahendamine. Kui $|m| > 1$, siis võrrandil lahendeid ei leidu, sest ühegi nurga koosinuse absoluutväärtus ei ületa arvu 1. Kui $|m| \leqslant 1$, siis võrrandil $\cos x = m$ leidub lõpmata palju lahendeid, mis kõik on avaldatavad mingi ühe lahendi abil. Selleks lahendiks võetakse väikseim positiivne lahend ja seda tähistatakse sümboliga arccos m. Niisiis,

arccos m on väikseim positiivne nurk, mille koosinus võrdub antud arvuga m.

Näiteks $\arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}$ ja $\arccos(-0{,}5) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$. Üldiselt

$$\arccos(-m) = \pi - \arccos m.$$

Arkuskoosinuse definitsioonist järeldub, et

$$0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi.$$

Kui võrrandit $\cos x = m$ rahuldab mingi nurk α, siis teda rahuldab ka nurk $-\alpha$, sest $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Niisiis, peale arccos m on võrrandi $\cos x = m$ lahendiks ka $-\arccos m$. Muid lahendeid koosinuse ühe perioodi ulatuses ei leidu. Neist kahest lahendist saadakse perioodi kordse liitmisel selle võrrandi kõik lahendid:

$$x = 2\pi k \pm \arccos m.$$

Seda lahendite üldavaldist tähistatakse sümboliga Arccos m: kui $|m| \leqslant 1$, siis võrrandi $\cos x = m$ lahenditeks on

$$x = \operatorname{Arccos} m = 2\pi k \pm \arccos m.$$

Näiteks võrrandi $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lahenditeks on

$$x = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi k \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi k \pm \left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 2\pi k \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi k \pm \frac{5\pi}{6} = \frac{12k \pm 5}{6}\pi,$$

kus k on suvaline täisarv.

4. Võrrandite $\tan x = m$ ja $\cot x = m$ lahendamine. Neil võrranditel leidub lõpmata palju lahendeid m iga väärtuse juures. Võrrandi $\tan x = m$ lahendid avaldatakse väikseima absoluutväärtusega lahendi ja võrrandi $\cot x = m$ lahendid väikseima positiivse lahendi kaudu. Neid lahendeid tähistatakse vastavalt arctan m ja arccot m:

arctan m on väiseima absoluutväärtusega nurk, mille tangens on m;

arccot m on väikseim positiivne nurk, mille kootangens on m.

Näiteks $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$. Üldiselt

$$\arctan(-m) = -\arctan m \text{ ja } \operatorname{arccot}(-m) = \pi - \operatorname{arccot} m.$$

Kui m kasvab $-\infty$-st kuni $+\infty$-ni, siis $\arctan m$ kasvab $-\frac{\pi}{2}$-st kuni $\frac{\pi}{2}$-ni ja arccot kahaneb π-st kuni 0-ni:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan m < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \operatorname{arccot} m < \pi.$$

Et tangensi ja kootangensi perioodi ulatuses leidub alati ainult üks nurk, mille tangens (kootangens) võrdub antud arvuga m, siis vaadeldavate võrrandite kõik lahendid saab anda üheainsa lahendite seeriaga (mida tähistatakse vastavalt Arctan m ja Arccot m):

võrrandite

$$\tan x = m \qquad \cot x = m$$

lahenditeks on vastavalt

$$x = \operatorname{Arctan} m = \pi k + \arctan m; \quad x = \operatorname{Arccot} m = \pi k + \operatorname{arccot} m.$$

Näiteks võrrandite

$$\tan x = -\sqrt{3} \qquad \cot x = -\sqrt{3}$$

lahenditeks on vastavalt

$$x = \operatorname{Arctan}(-\sqrt{3}) = \pi k - \arctan\sqrt{3} = \pi k - \frac{\pi}{3} = \frac{3k-1}{3}\pi,$$

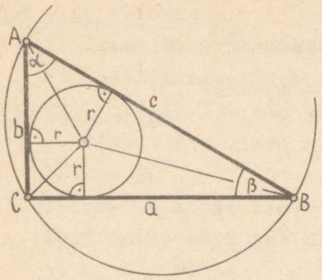
$$x = \operatorname{Arccot}(-\sqrt{3}) = \pi k + (\pi - \operatorname{arccot}\sqrt{3}) = \pi k + \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6k+5}{6}\pi,$$

kus k on suvaline täisarv.

III. KOLMNURKADE LAHENDAMINE

§ 1. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

1. Seosed täisnurkse kolmnurga elementide vahel. Täisnurkse kolmnurga ABC (joonis 165) kaateteid tähistame tähtedega a ja b, hüpotenuusi tähega c. Kaateti a vastas on teravnurk α



ja kaateti b vastas teravnurk β. Niisuguse tähistusviisi puhul kehtivad täisnurkse kolmnurga põhielementide (nurkade ja külgede) vahel järgmised seosed:

$a^2 + b^2 = c^2$; $\alpha + \beta = 90^\circ$;

$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$; $\frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta$;

$\frac{a}{b} = \tan\alpha = \cot\beta$; $\frac{b}{a} = \cot\alpha = \tan\beta$.

Joonis 165.

Need seosed võimaldavad lahendada täisnurkset kolmnurka, s.t. leida antud elementide põhjal puuduvaid elemente (nurki, külgi, mediaane, nurgapoolitajaid jne.).

Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius $R = \frac{c}{2}$; siseringjoone raadius $r = \frac{a + b - c}{2}$.

2. Täisnurkse kolmnurga lahendamine, kui antud on kaatetid a ja b.

1) Teravnurk α leitakse seosest $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

2) Teravnurk β leitakse seosest $\alpha + \beta = 90^\circ$.

3) Hüpotenuus c leitakse seosest $c^2 = a^2 + b^2$ (või seosest $\frac{a}{c} = \sin\alpha$; arvutamine lükati abil on viimasel juhtumil lihtsam).

Näide (lükati abil). $a = 13,4$; $b = 9,5$; leida α, β ja c.

1) $\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{9,5}{13,4}$ (lükati abil arvutades on soovitav enne leida väiksem teravnurk; jagatist pole vaja lugeda);

$\beta = 35^\circ 20'$;

2) $\alpha = 90^\circ - 35^\circ 20' = 54^\circ 40'$;

3) $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{13,4}{\sin 54^\circ 40'} = 16,4$.

Vastus. $\alpha = 54^\circ 40'$; $\beta = 35^\circ 20'$; $c = 16,4$.

3. Täisnurkse kolmnurga lahendamine, kui on antud hüpotenuus c ja kaatet a (või b).

1) Teravnurk α leitakse seosest $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

2) Teravnurk β leitakse seosest $\alpha + \beta = 90^\circ$.

3) Kaatet b leitakse seosest $a^2 + b^2 = c^2$ (või seosest $\frac{b}{c} = \sin\beta$).

Näide (tabelite abil). $a = 0{,}81$; $c = 1{,}07$; leida b, α ja β.

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{0{,}81}{1{,}07}$; $\log\sin\alpha = \log 0{,}81 - \log 1{,}07$;

$\log 0{,}81 = \bar{1}{,}9085$;

$\log 1{,}07 = \underline{0{,}0294}$;

$\log\sin\alpha = \bar{1}{,}8791$;

$\alpha = 49^\circ 12'$;

2) $\beta = 40^\circ 48'$;

3) $b = \sqrt{1{,}07^2 - 0{,}81^2} = \sqrt{1{,}145 - 0{,}656} = \sqrt{0{,}489} =$

$= 0{,}6993 \approx 0{,}70$.

Vastus. $\alpha = 49^\circ 12'$; $\beta = 40^\circ 48'$; $b = 0{,}70$.

4. Täisnurkse kolmnurga lahendamine, kui on antud kaatet ja teravnurk.

1) Teine teravnurk leitakse seosest $\alpha + \beta = 90^\circ$.

2) Teine kaatet leitakse seosest $\frac{a}{b} = \tan\alpha$ (või $\frac{b}{a} = \tan\beta$).

3) Hüpotenuus leitakse seosest $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ (või $\frac{b}{c} = \sin\beta$).

Näide (tabelite abil). $a = 243$; $\beta = 10^\circ 35'$; leida α, b ja c.

1) $\alpha = 90^\circ - 10^\circ 35' = 79^\circ 25'$;

2) $\frac{b}{a} = \tan\beta$; $b = a\tan\beta = 243 \cdot \tan 10^\circ 35'$;

$\log b = \log 243 + \log\tan 10^\circ 35'$;

$$+\begin{array}{l} \log 243 = 2{,}3856; \\ \log\tan \underline{10^\circ 35' = \bar{1}{,}2715}; \end{array}$$

$\log b = 1{,}6571$;

$b = 45{,}40$;

3) $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{243}{\sin 79^\circ 25'}$;

$\log c = \log 243 - \log\sin 79^\circ 25'$;

$$-\begin{array}{l} \log 243 = 2{,}3856 ; \\ \log\sin \underline{79^\circ 25' = \bar{1}{,}9925} ; \end{array}$$

$\log c = 2{,}3931$;

$c = 247{,}3 \approx 247$.

Vastus. $\alpha = 79^\circ 25'$; $b = 45{,}4$; $c = 247$.

5. Täisnurkse kolmnurga lahendamine, kui on antud hüpotenuus c ja teravnurk.

1) Teine teravnurk leitakse seosest $\alpha + \beta = 90^\circ$.

2) Kaatetid leitakse seosest $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ ja $\frac{b}{c} = \sin\beta$.

Näide (lükati abil). $c = 62$; $\beta = 17^\circ 10'$; leida α, a, b, küljele a joonestatud mediaan m_a ja nurga β poolitaja l_b.

1) $\alpha = 90^\circ - 17^\circ 10' = 72^\circ 50'$;

2) $a = 62 \cdot \cos 17^\circ 10' = 59$;

$b = 62 \cdot \sin 17^\circ 10' = 18,3 \approx 18$;

3) $m_a = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b^2} = \sqrt{29,5^2 + 18,3^2} = \sqrt{870 + 335} = \sqrt{1205} =$

$= 34,8 \approx 35$;

4) $\frac{a}{l_b} = \cos\frac{\beta}{2}$; $l_b = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{59}{\cos 8^\circ 35'} = \frac{59}{\sin 81^\circ 25'} =$

$= 59,7 \approx 60$.

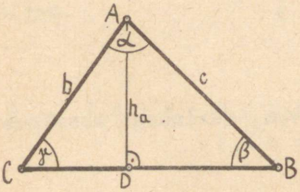
Vastus. $\alpha = 72^\circ 50'$; $a = 59$; $b = 18$; $m_a = 35$; $l_b = 60$.

Täisnurkseid kolmnurki saab lahendada ka graafilisel teel: konstrueeritakse andmetele vastav kolmnurk ja mõõdetakse vajalikud suurused (nurgad, lõigud) jooniselt.

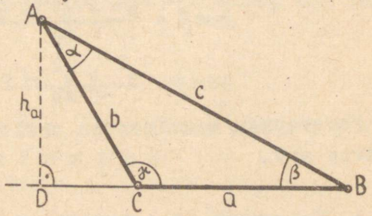
§ 2. Siinus- ja koosinusteoreem. Kolmnurga pindala

1. Siinusteoreem. Kolmnurga küljed on võrdelised nende vastasnurkade siinustega.

Tõestus. Olgu kolmnurga ABC küljed a, b ja c ning nende külgede vastasnurgad vastavalt α, β ja γ (joonis 166 ja 167).



Joonis 166.



Joonis 167.

Joonestame kolmnurga ühest tipust, näiteks tipust A kõrguse h_a ja avaldame selle kõrguse kahel viisil, nimelt kolmnurgast ACD ja kolmnurgast ABD:

kolmnurgast ACD $h_a = b \sin\gamma$ [joonise 167 puhul $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$],

kolmnurgast ABD $h_a = c \sin\beta$.

Võrduste vasakute poolte võrdsuse tõttu ka $b \sin\gamma = c \sin\beta$ ehk $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Joonestades veel ühe kõrguse (näiteks tipust B) saab tõestada, et $c \sin\alpha = a \sin\gamma$ ehk $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Järelikult $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

2. Koosinusteoreem. Kolmnurga iga külje ruut võrdub teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud nende külgede ja nende külgede vahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.

Tõestuseks kasutame teoreeme kolmnurga teravnurga ja nürinurga vastaskülje ruudu kohta (Planimeetria, § 15, 2). Nende teoreemide järgi $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CD$ (joonis 166);

$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot CD$ (joonis 167).

Joonisel 166 $CD = b \cos\gamma$, joonisel 167 aga $CD = b \cos(180^\circ - \gamma) = - b \cos\gamma$. Asendades saame mõlemal juhtumil

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\gamma.$$

Analoogiliselt saab tõestada, et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha \text{ ja}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos\beta.$$

Kolmnurga nurkade koosinused avalduvad nendest võrdustest järgmiselt:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac};$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$

Teravnurga koosinus on positiivne, nürinurga koosinus negatiivne arv.

3. Kolmnurga pindala. Ülalpool nägime, et kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega: $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$ (Planimeetria, § 18, 4). Et $h_a = b \sin\gamma$ (joonis 166 ja 167), saame:

$$S = \frac{ab \sin\gamma}{2}.$$

Analoogiliselt

$$S = \frac{ac \sin\beta}{2}; \quad S = \frac{bc \sin\alpha}{2}.$$

Seega kolmnurga pindala võrdub kahe külje ja nende külgede vahelise nurga siinuse poole korrutisega.

Tuletame valemi kolmnurga pindala arvutamiseks juhtumil, kui teame üht külge ja nurki. Siinusteoreemi järgi

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$; siit $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$. Asendades valemis

$S = \frac{ab \sin\gamma}{2}$ külje b viimase murruga, saame

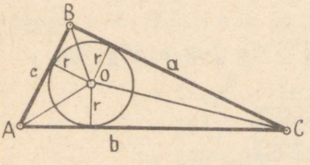
$$S = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}.$$

Analoogiliselt

$$S = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin\beta} \quad \text{ja}$$

$$S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}.$$

Lihtsal kujul avaldub kolmnurga pindala ümbermõõdu ja siseringjoone raadiuse kaudu (joonis 168).



Joonis 168.

$$S_{ABS} = S_{AOC} + S_{BOC} + S_{AOB} =$$
$$= \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a + b + c)r}{2} =$$
$$= \frac{2p \cdot r}{2} = pr; \quad S = pr.$$

Seega kolmnurga pindala võrdub poole ümbermõõdu ja siseringjoone raadiuse korrutisega.

Heroni valem ($S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, Planimeetria, § 18, 4) võimaldab arvutada kolmnurga pindala siis, kui teada on küljed.

§ 3. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine

Kaldnurkse kolmnurga lahendamiseks nimetatakse tema antud elementide põhjal puuduvate elementide (külgede, nurkade, mediaanide, kõrguste jm.) leidmist.

Kaldnurkse kolmnurga kolme otsitava põhielemendi (külje, nurga) leidmiseks kolme antud põhielemendi järgi peab kasutama kolme üksteisest sõltumatut võrrandit. Üheks võrrandiks on nurkade vaheline seos $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, teistena kasutame siinus- või koosinusteoreemist saadavaid seoseid.

Sõltuvalt andmetest eristatakse nelja kolmnurkade lahendamise põhijuhtumit.

1. Kolmnurga lahendamine külje ja kahe nurga järgi. Olgu antud a, α ja β.

1) Kolmas nurk leitakse seosest $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

2) Puuduvad küljed leitakse siinusteoreemi abil:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\text{; siit } b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} \text{ ja } c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

3) Pindala $S = \dfrac{a^2 \sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.

Näide. $b = 53{,}4$; $\alpha = 37^\circ5'$; $\gamma = 97^\circ$; leida a, c ja β.

1) $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (37^\circ5' + 97^\circ) = 45^\circ55'$;

2) $a = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{53{,}4\sin 37^\circ5'}{\sin 45^\circ55'}$;

$\log a = \log 53{,}4 + \log\sin 37^\circ5' - \log\sin 45^\circ55'$;

$$\begin{array}{llll} + & \log 53{,}4 & = 1{,}7275 & \\ - & \log\sin 37^\circ5' & = \underline{\bar{1}{,}7803} & \underline{1{,}5078} \\ & \log\sin 45^\circ55' & = & \underline{\bar{1}{,}8563} \\ & & \log a = & 1{,}6515 \\ & & a = & 44{,}82 \approx 44{,}8; \end{array}$$

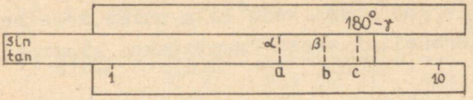
3) $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \dfrac{53{,}4\sin 97^\circ}{\sin 45^\circ55'} = \dfrac{53{,}4\sin 83^\circ}{\sin 45^\circ55'}$;

$\log c = \log 53{,}4 + \log\sin 83^\circ - \log\sin 45^\circ55'$;

$$\begin{array}{llll} + & \log 53{,}4 & = 1{,}7275 & \\ - & \log\sin 83^\circ & = \underline{\bar{1}{,}9968} & \underline{1{,}7243} \\ & \log\sin 45^\circ55' & = & \underline{\bar{1}{,}8563} \\ & & \log c = & 1{,}8680 \\ & & c = & 73{,}79 \approx 73{,}8 \end{array}$$

Vastus. $\beta = 45^\circ55'$; $a = 44{,}8$; $c = 73{,}8$.

Märkus. Arvutuslükati abil lahendub ülesanne märksa kiiremini: võrde $\dfrac{a}{\sin 37^\circ5'} = \dfrac{53{,}4}{\sin 45^\circ55'} = \dfrac{c}{\sin 97^\circ}$ tundmatud liikmed on leitavad üheainsa (mõnede arvuliste andmete puhul kahe) keelelükkega (joonis 169).



(kui γ on nürinurk)

Joonis 169.

2. <u>Kolmnurga lahendamine kahe külje ja nendevahelise nurga järgi</u>. Olgu antud a, b ja γ.

1) Kolmas külg leitakse koosinusteoreemi abil:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

2) Väiksema puuduvatest nurkadest (asetseb väiksema külje vastas) võib leida siinusteoreemi abil ja kolmanda nurga seosest $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Puuduvad nurgad võib leida ka koosinusteoreemi abil. Sel juhtumil pole oluline enne väiksemat nurka leida, sest nürinurga koosinus on negatiivne.

3) Pindala $S = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

<u>Näide</u>. $b = 12{,}3$; $c = 68{,}1$; $\alpha = 32^\circ 15'$; leida a, β ja γ.

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha =$

$= 12{,}3^2 + 68{,}1^{\,2} - 2 \cdot 12{,}3 \cdot 68{,}1 \cdot \cos 32^\circ 15' =$

$= 151{,}3 + 4638 - 24{,}6 \cdot 68{,}1 \cdot \cos 32^\circ 15' =$

$= 4789{,}3 - 1417 = 3372{,}3;$

$a = 58{,}07 \approx 58{,}1$

2) Edasi leiame siinusteoreemi abil nurga β (see on kindlasti teravnurk, sest asetseb väiksema külje vastas):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\,;\ \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{12{,}3\sin 32^\circ 15'}{58{,}07}.$$

Tabelite abil saame, et $\log\sin\beta = \bar{1},0532$ ja $\beta = 6^\circ 29'$.

3) $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 38^\circ 44' = 141^\circ 16'$.

<u>Vastus</u>. $a = 58{,}1$; $\beta = 6^\circ 29'$; $\gamma = 141^\circ 16'$.

Kõik arvutused on teostatavad ka lükati abil.

3. Kolmnurga lahendamine kolme külje järgi

1. võimalus. Kaks nurka leitakse koosinusteoreemi abil, kolmas seosest $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (või kõik kolm nurka koosinusteoreemi abil ja nurkadevahelist seost kasutatakse kontrollimiseks).

2. võimalus. Üks nurk leitakse koosinusteoreemi, teine siinusteoreemi abil ja suurim nurk (asetseb suurima külje vastas) seosest $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Sobiv eriti lükatiga arvutamisel. Pindala $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Näide. $a = 25$; $b = 13$; $c = 17$; leida α, β ja γ.

1) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{169 + 289 - 625}{2 \cdot 13 \cdot 17} = -\dfrac{167}{442} = -0{,}3779$;

$\alpha = 180^\circ - 67^\circ 48' = 112^\circ 12'$;

2) $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{625 + 289 - 169}{2 \cdot 25 \cdot 17} = \dfrac{745}{850} = 0{,}8768$;

$\beta = 28^\circ 44'$;

3) $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{625 + 169 - 289}{2 \cdot 25 \cdot 13} = \dfrac{505}{650} = 0{,}7769$;

$\gamma = 39^\circ 1'$;

Kontroll. $\alpha + \beta + \gamma = 112^\circ 12' + 28^\circ 44' + 39^\circ 1' = 179^\circ 57'$.

Vastus. $\alpha = 112^\circ 12'$; $\beta = 28^\circ 44'$; $\gamma = 39^\circ 1'$.

4. Kolmnurga lahendamine kahe külje ja ühe antud külje vastasnurga järgi. Olgu antud a, b ja α, kusjuures $a > b$.

1) Väiksema külje vastasnurk leitakse siinusteoreemi abil:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}; \qquad \sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}.$$

2) Kolmas nurk leitakse seosest $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

3) Kolmas külg leitakse siinusteoreemi abil.

4) Pindala $S = \dfrac{ab \sin\gamma}{2}$.

Lahendamine tabelite abil on tunduvalt aeganõudvam kui lahendamine lükati abil. Tabelid annavad ühe koha võrra suurema täpsuse kui lükati, kuid tavaliste, mõõtmise tulemusena saadud lähteandmete puhul piisab lükati täpsusest.

Näide. $b = 53{,}4$; $c = 73{,}8$; $\gamma = 97^\circ$; leida a, α ja β.

1) $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$; $\frac{53{,}4}{\sin\beta} = \frac{73{,}8}{\sin 97^\circ}$;

$\beta = 45^\circ 55'$ (lükatilt, vt. joon. 169);

2) $\alpha = 180^\circ - (45^\circ 55' + 97^\circ) = 37^\circ 5'$;

3) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$; $\frac{a}{\sin 37^\circ 5'} = \frac{73{,}8}{\sin 97^\circ}$;

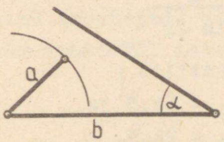
$a = 44{,}8$ (lükatilt, joon. 169).

Vastus. $a = 44{,}8$; $\alpha = 37^\circ 5'$; $\beta = 45^\circ 55'$.

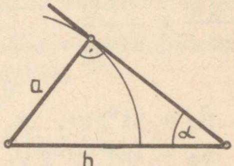
Kui on antud kolmnurga kaks külge ja väiksema külje vastasnurk, näiteks a, b ja α, kusjuures $a < b$, siis üldine lahenduskäik on samasugune, nagu eelmisel juhtumil, kuid nüüd pole kolmnurk külgede mõnesuguste pikkuste puhul üldse määratud või pole üheselt määratud. Esineb üks järgmisest kolmest võimalusest.

a) Andmetele vastavat kolmnurka pole olemas. Sel juhtumil $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} > 1$.

Kui näiteks $a = 3$, $b = 8$ ja $\alpha = 30^\circ$, siis $\sin\beta = \frac{8 \cdot 0{,}5}{3} = \frac{4}{3} > 1$. Pole nurka, mille siinus ületab arvu 1, seega pole ka vastavat kolmnurka. Püüdes otsitavat kolmnurka konstrueerida, saame joonisel 170 esitatud pildi.



Joonis 170.

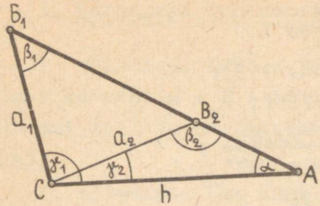


Joonis 171.

b) Andmetele vastab üks täisnurkne kolmnurk. Sel juhtumil $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} = 1$; $\beta = 90^\circ$ (kolmnurk on täisnurkne, joonis 171) : $\gamma = 90^\circ - \alpha$; $c = b \cos\alpha$.

Kui näiteks $a = 3$, $b = 6$ ja $\alpha = 30^\circ$, siis saame täisnurkse kolmnurga: $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 60^\circ$ ja $c = 3\sqrt{3}$.

c) Andmetele vastab kaks kolmnurka. Sel juhtumil $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} < 1$, kusjuures β võib olla nii terav- kui ka nürinurk (joonis 172):



$\beta_1 = \arcsin \frac{b \sin\alpha}{a}$;

$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ (kolmnurk B_1B_2C on võrdhaarne).

Näide. $a = 32$; $b = 51$; $\alpha = 29^\circ 20'$; leida β, γ ja c.

Joonis 172.

1) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$; $\frac{32}{\sin 29^\circ 20'} = \frac{51}{\sin\beta}$;

$\beta_1 = 51^\circ 20'$ (lükatilt); $\beta_2 = 180^\circ - 51^\circ 20' = 128^\circ 40'$;

2) $\gamma_1 = 180^\circ - (29^\circ 20' + 51^\circ 20') = 180^\circ - 80^\circ 40' = 99^\circ 20'$;

$\gamma_2 = 180^\circ - (29^\circ 20' + 128^\circ 40') = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$;

3) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c_1}{\sin\gamma_1}$; $\frac{32}{\sin 29^\circ 20'} = \frac{c_1}{\sin 99^\circ 20'}$;

$\frac{32}{\sin 29^\circ 20'} = \frac{c_1}{\sin 80^\circ 40'}$;

$c_1 = 64{,}5$ (lükatilt);

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c_2}{\sin\gamma_2}$; $\frac{32}{\sin 29^\circ 20'} = \frac{c_2}{\sin 22^\circ}$;

$c_2 = 24{,}5$ (lükatilt) ;

Vastus. $\beta_1 = 51^\circ 20'$; $\gamma_1 = 99^\circ 20'$; $c_1 = 64{,}5$ ja
$\beta_2 = 128^\circ 40'$; $\gamma_2 = 22^\circ$; $c_2 = 24{,}5$.

Kõigil kolmnurkade lahendamise juhtumitel saab lahendusi kontrollida graafilisel teel: joonestatakse mõõtjoonlaua ja malli abil andmetele vastav kolmnurk ja mõõdetakse jooniselt otsitavad suurused ja võrreldakse neid leitud väärtustega. Graafilist meetodit võib kasutada ka kolmnurkade lahendamiseks. Kui arvutati tabelitega, siis on otstarbekam kontrollida lükati abil. Kontrolliks piisab selle asjaolu kindlakstegemisest, et antud ja leitud väärtuste puhul küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.

J ä r e l s õ n a

Käesoleva teise osaga lõppev õpik ei ole mõeldud keskkooli matemaatika esmakordseks õppimiseks. Ta on kordamisõpik ja sisaldab vastavalt oma ülesandele kõiki neid keskkooli matemaatikakursuse teemasid, mis on ette nähtud kõrgemate koolide vastuvõtueksamite programmides (1965.a. väljaanne). Vastava teema kergemaks leidmiseks õpikust on need selles antud samas järjekorras, nagu nad esinevad vastuvõtueksamite programmides. Sellest tingituna ei ole materjali järjestus õpikus süstemaatiline, s.t. mõnda tulemust (valemit, teoreemi) on vaja olnud rakendada enne selle sisulist käsitlust. Näiteks on rakendatud õpiku I osa lk-l 9 lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa valemit, kuna see rida ise leiab käsitlemist alles lk-l 85. Kus hiljem käsitletav tulemus pole vastava viitega kätte juhatatud, seal leiab raamatu kasutaja ta hõlpsasti ise sisukorra järgi.

Vastavalt oma ülesandele ei sisalda käesolev õpik kõiki keskkooli matemaatikakursuses esinevaid mõisteid ja tõdesid, mistõttu vajaduse korral tuleb abi otsida keskkooliõpikutest.

Õpiku kasutajaid palutakse saata oma soovid ja ettepanekud õpiku kohta TPI matemaatika kateedrile.

Autorid.

Sisukord

G E O M E E T R I A

I. PLANIMEETRIA

§ 1. Sirgjoon. Nurk

§ 2. Kolmnurk

§ 3. Kolmnurkade võrdsus

§ 4. Seosed kolmnurga külgede ja nurkade vahel

§ 5. Punktide geomeetrilised kohad

§ 6. Põhilised konstruktsioonülesanded

Hind 22 kop.