

EHITUSMEHAANIKA KATEEDER

*R. Räämet*

STAATILISELT MÄÄRAMATA RAAMIDE  
ARVUTAMINE DEFORMATSIOONIMEETODIGA

TALLINN  
1962



A-24764,,

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Ehitusmehaanika kateeder

R. Räämet

STAATILISELT MÄÄRAMATA RAAMIDE ARVUTAMINE  
DEFORMATSIOONIMEETODIGA

Tallinn  
1962

2

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu  
62741

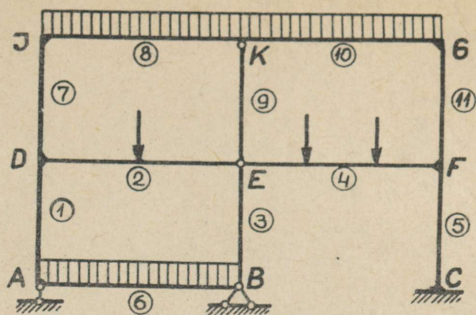
# 1. STAATILISELT MÄÄRAMATA SÜSTEEMIDE ARVUTAMINE

## 1.1. STAATILISELT MÄÄRAMATA SÜSTEEM

Konstruksioonide tugevusarvutustel on pinged varrastes arvutatavad, kui on teada kõik sisejõud ( $M$ ,  $N$ ,  $Q$ ) ja varras- te ristlõigete mõõtmed. Deformatsioonide arvutamiseks on va- ja veel teada ka konstruktsiooni materjali elastsusomadusi.

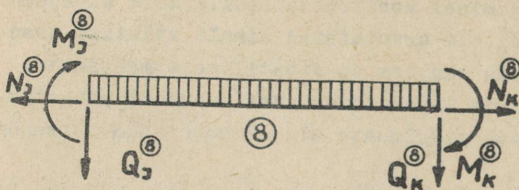
Kui koormuse mõjumisel konstruktsioonile kõik sisejõud ja toereaktsioonid ei ole arvutatavad ainult staatika tasa- kaaluvõrranditest, siis süsteem on staatiliselt määramata. Sel juhul nõuab ülesande lahendamine veel süsteemi paigutus- olukorra geomeetriliste tingimuste alusel koostatud võrrandi- te lahendamist.

Varrastest moodustatud konstruktsiooni elomendid (vardad) on sõlmedes ühendatud paindekangelt või liigenditega. Aluse külge on konstruktsioon ühendatud tugiosadega. Raami kangeks sõlmeks nimetatakse iga sõlme (olenemata selle sõlme külge liigenditega kinnitatud varraste hulgast), milles vähemalt üks varrast on ühendatud paindekangelt (sõlm A joon. 1.1).

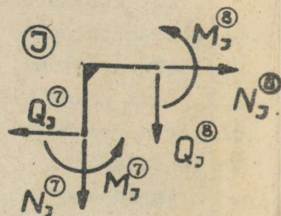


joon. 1.1

Kahe löikega raami sõlmede vahelt eraldatud varras on temale mõjuva väliskoormuse all tasakaalus, kui varda otstes on rakendatud vastavates löigetes esinevate sisejõududega ekvivalentsed löikejõud. Sõlme paindekangelt ühendatud varda läbilõikamisel asendatakse sõlme mõju vardale kolme tundmatu löikejõuga ( $M$ ,  $N$ ,  $Q$ ). Joon. 1.2 kujutatud varras on eraldatud kahe löikega sõlmede J ja K vahelt joon. 1.1 kujutatud raamist. Varras on tasakaalus temale mõjuva koormuse ja kuue tundmatu löikejõu mõjul. Sõlme tasakaalu vaatlemisel on nende löikejõudude suunad vastupidised. Joon. 1.3 on raamist



joon. 1.2



joon. 1.3

eraldatud sõlm J, millel varraste 7 ja 8 mõju on asendatud läbilõigatud ristlõigetes esinevatele sisejõududele ekvivalentsete löikejõududega.

Mõlemast otsast hõrdevaba liigendiga sõlme külge kinni-

tatud varda tasakaalu vaatlemisel rakendatakse peale varda-  
le mõjuva koormuse tema kumbagi otsa kaks tundmatut löike-  
jõudu ( $N, Q$ ).

Kui varras on ühendatud ühest otsast paindekangelt ja  
teisest otsast liigendiga, siis tundmatute löikejõudude arv  
on 5.

Olenevalt varda otste kinnitustest sõlmede külge kas  
paindekangelt või liigendiga on ühel vardal tundmatute löi-  
kejõudude arv 6, 5 või 4.

Raami üldist varraste arvu märgitakse tähega  $v$ , mõlemast  
otsast paindekangelt kinnitatud varraste arvu -  $v_6$ , ühest  
varda otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga  
ühendatud varraste arvu -  $v_5$  ja mõlemast otsast liigendiga  
ühendatud varraste arvu  $v_4$ .

Üldine raami varraste arv on

$$v = v_6 + v_5 + v_4 \quad (a)$$

Üldine tundmatute löikejõudude ja reaktsioonikomponen-  
tide arv on

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t \quad (b)$$

milles  $t$  on liigendtugede toesidemete arv.

Raami varraste ristlõigete paigutused on määratud koor-  
musega ja sõlmede paigutustega. Raami paindekange sõlme  $J$   
paigutusolukord on määratud kolme paigutuskomponendiga  $u_J$ ,  
 $v_J$ ,  $\varphi_J$  ja liigendsõlme  $L$  paigutusolukord kahe komponendiga  
 $u_L$ ,  $v_L$ .

Üldine sõlmede arv  $s$  koosneb  $s_3$  kangest ja  $s_2$  liigend-  
sõlmest

$$s = s_3 + s_2 \quad (c)$$

Raami sõlmede ( $s_3 + s_2$ ) paigutused, mis on tundmatu-  
teks, on määratud

$$3s_3 + 2s_2 - t \quad (d)$$

geomeetrilise suurusega. Avaldises (d) on üldisest paigutus-  
komponentide arvust  $3s_3 + 2s_2$  lahutatud liigendtugede toe-  
sidemete arv  $t$ , kuna iga toeside kõrvaldab ühe liikumisvaba-  
duse.

Raami tundmatute löikejõudude ja paigutuste komponenti-

de arv

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t + 3s_3 + 2s_2 - t \quad (e)$$

koosneb seega  $6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t$  staatiliste tundmatute ( $M, N, Q, R$ ) ja  $3s_3 + 2s_2 - t$  geomeetriliste tundmatute ( $u, v, \varphi$ ) arvust.

Tundmatute lõikejõudude ja reaktsioonide arvutamiseks on võimalik koostada iga varda jaoks 3 tasakaaluvõrrandit ( $\sum M = 0, \sum X = 0, \sum Y = 0$ ). Kõigi varraste jaoks kokku võib koostada

$$3v_6 + 3v_5 + 3v_4 = 3v \quad (f)$$

staatilist tasakaaluvõrrandit.

Iga kange sõlme ja liigendsõlme jaoks on võimalik koostada vastavalt 3 ja 2 tasakaaluvõrrandit ning kõigi raami sõlmede jaoks kokku

$$3s_3 + 2s_2 \quad (g)$$

võrrandit.

Sõlmede paigutused on üksteisest sõltuvad, kuna need on omavahel ühendatud varrastega. Raami sõlmede ja varraste otsete ristlõigete paigutused peavad sobima üksteisega geomeetriselt. Kahe sõlme vahele mõlemas varda otsas liigenditega või paindekangelt kinnitatud varda jaoks on võimalik koostada vastavalt üks või kolm geomeetrilist pidevustingimust. Ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda jaoks on võimalik koostada kaks geomeetrilist pidevustingimust. Kõigi raami varraste jaoks kokku on võimalik koostada

$$3v_6 + 2v_5 + v_4$$

geomeetrilist pidevustingimust.

Üldine võrrandite arv

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + 3s_3 + 2s_2 \quad (h)$$

koosneb

$$3v + 3s_3 + 2s_2 \quad (i)$$

staatika tasakaaluvõrrandist ja

$$3v_6 + 2v_5 + v_4 \quad (j)$$

geomeetrisest pidevusvõrrandist.

Seega on tundmatute arv (e) võrdne üldise võrrandite arvuga (h)

$$\begin{aligned} 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t + 3s_3 + 2s_2 - t &= \\ = 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + 3s_3 + 2s_2 &\quad (k) \end{aligned}$$

Lõpliku koormuse ja geomeetriselt muutmatu süsteemi puhul on tundmatud lõikejõud ja toereaktsioonid üheselt määratud.

Joon. 1.1 kujutatud raamil on staatilisteks tundmatuteks  $6.6 + 5.3 + 4.2 = 59$  lõikejõudu ja 3 toereaktsiooni komponenti ( $A_y, B_x, B_y$ ). Toe c 3 reaktsioonikomponenti on juba arvesse võetud varda 5 lõikejõududena. Geomeetrisesteks tundmatuteks arvutamisel avaldise (d) järgi on  $3.6 + 2.2 - 3 = 19$  paigutuskomponenti.

Staatika tasakaaluvõrrandite arv (i) on  $3.11 + 3.6 + 2.2 = 55$  ja geomeetrisete pidevustingimuste arv (j) on  $3.6 + 2.3 + 2 = 26$ .

Üldine tundmatute arv on võrdne üldise võrrandite arvuga:  $59 + 3 + 19 = 55 + 26$ .

Kui üldine tasakaaluvõrrandite arv (i) on võrdne üldise tundmatute lõikejõudude ja toereaktsioonide komponentide arvuga (b)

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t = 3v + 3s_3 + 2s_2$$

või kui arvestada avaldist (a)

$$3v_6 + 2v_5 + v_4 + t = 2s_3 + 2s_2 \quad (l)$$

siis ülesanne on staatiliselt määratud.

Tundmatud lõikejõud ja toereaktsioonide komponendid arvutatakse sel juhul ainult staatika tasakaalutingimustega. Pärast lõikejõudude ja toereaktsioonide määramist arvutatakse paigutuskomponendid nende ja koormuse funktsioonidena.

Kui aga tundmatute lõikejõudude ja toereaktsioonide komponentide arv (b) on suurem tasakaaluvõrrandite (i) arvust

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t > 3v + 3s_3 + 2s_2$$

või kui arvestada avaldist (a)

$$3v_6 + 2v_5 + v_4 + t > 3s_3 + 2s_2 \quad (m)$$

siis ülesanne on staatiliselt määramata: tundmatud lõikejõud ja toereaktsioonid ei ole arvutatavad ainult tasakaaluvõrranditest.

Staatiliselt määramata süsteemi tundmatuid lõikejõude ja toereaktsioone on võimalik määrata ainult koos paigutustega, s.t. koos geomeetriliste pidevustingimustega.

## 1.2. STAATILISELT MÄÄRAMATA SÜSTEEMIDE ARVUTUSMEETODID

### 1.21. Arvutusmeetodite liigitus

Staatiliselt määramata süsteemi arvutusprobleem sisaldab kaht liiki tundmatuid. Varrastes tekkivad sisejõud ( $M$ ,  $N$ ,  $Q$ ) ja toereaktsioonid ( $R$ ) on staatilised tundmatud ning sõlmede paigutuskomponendid ( $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$ ) on geomeetrilised tundmatud. Staatiliselt määramata ülesande lahendamiseks kasutatakse staatika tasakaaluvõrrandeid ja geomeetrilisi pidevustingimusi.

Staatiliselt määramata süsteeme võib arvutada kolmel erineval viisil, olenevalt sellest, millised tundmatud arvutatakse esimeses järjekorras. Esimeses järjekorras arvutata-  
vaid tundmatuid nimetatakse põhitundmatuteks.

Staatiliselt määramata süsteemil on tundmatute lõikejõude ja toereaktsioonide komponentide arv suurem kui tasakaaluvõrrandite arv.

Kui põhitundmatuteks võetakse osa lõikejõude ja reaktsioone, siis saab nende arvutamiseks koostada võrrandid ainult geomeetriliste pidevustingimuste alusel. Geomeetriliste pidevustingimuste põhjal koostatud võrranditest arvutatavaid põhitundmatuid nimetatakse staatiliselt määramatuteks suurusteks, kuna neid ei ole võimalik leida staatika tasakaaluvõrranditest. Ülejäänud lõikejõud ja reaktsioonid arvutatakse põhitundmatute funktsioonidena staatika tasakaalutingimus-

test ja neid nimetatakse seepärast staatiliselt määratud suurusteks. Seda meetodit nimetatakse jõumeetodiks.

Kui põhitundmatuteks võetakse sõlmede paigutused, siis nende suuruste määramiseks koostatakse võrrandid sõlmede tasakaalutingimuste põhjal. Varraste kohta koostatud tasakaaluvõrrandid ja varraste ning sõlmede vahelised geomeetrilised sobivustingimused kasutatakse tundmatute lõikejõudude ja reaktsioonide elimineerimiseks sõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest. Seda meetodit nimetatakse paigutustehk deformatsioonimeetodiks.

Ülesannete lahendamisel on võimalik kasutada ka segameetodit, mille juures põhitundmatuteks on võetud osalt paigutused ja osalt lõikejõud. Põhitundmatute lõikejõudude arvule vastavalt koostatakse võrrandid geomeetriliste pidevustingimuste alusel ja põhitundmatute paigutuste arvule vastavalt sõlmede tasakaalutingimuste põhjal.

### 1.22. Jõumeetod

Staatiliselt määramata süsteemi üldine tundmatute lõikejõudude ja toereaktsioonide komponentide arv on  $6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t$  (a). Varraste ja sõlmede kohta koostatud tasakaaluvõrrandite arv on  $3v + 3s_3 + 2s_2$  (b). Kui staatiliste tundmatute arv (a) on suurem kui staatika tasakaaluvõrrandite arv (b), siis ülesanne on staatiliselt määramatu. Üleliigsete staatiliste suuruste arv on võrdne tundmatute arvu (a) ja võrrandite arvu (b) vahega ja nimetatakse staatilise määramatuse astmeks:

$$n = 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t - 3v - 3s_3 - 2s_2$$

Asendades selles valemis üldise varraste arvu  $v$  erinevate liikide varraste arvude summaga  $v_6 + v_5 + v_4$ , saadakse üleliigsete staatiliselt määramata suuruste arvu jaoks järgmine valem

$$n = 3v_6 + 2v_5 + v_4 + t - 3s_3 - 2s_2 \quad (1)$$

Ülesannet nimetatakse siis  $n$  kordselt staatiliselt määramatuks. Ülesannete lahendamisel jõumeetodiga võetakse põhitundmatuteks  $n$  staatiliselt määramatut lõikejõudu.

Põhitundmatute suuruste arvutamiseks on kasutada geomeetrilised pidevustingimused sõlmede ja varraste vahel  $3v_6 + 2v_5 + v_4$  (c), mis sisaldavad peale tundmatute lõikejõudude ja toereaktsioonide (a) veel  $3s_3 + 2s_2 - t$  (d) tundmatut paigutuskomponenti.

Staatika tasakaaluvõrranditega (b) elimineeritakse geomeetrilistest pidevustingimustest (c) tasakaalutingimustega (b) võrdne arv tundmatut lõikejõudu ja toereaktsioonide komponenti. Geomeetrilistesse võrranditesse (c) jääb pärast elimineerimist  $n$  staatiliselt määramata lõikejõudu ja toereaktsioonide komponenti ning  $3s_3 + 2s_2 - t$  tundmatut paigutuskomponenti.

Nendest  $3v_6 + 2v_5 + v_4$  geomeetrilistest sobivustingimustest kasutatakse  $3s_3 + 2s_2 - t$  tingimust tundmatute paigutuskomponentide ( $u, v, \varphi$ ) elimineerimiseks. Jääb

$$\begin{aligned} 3v_6 + 2v_5 + v_4 - (3s_3 + 2s_2 - t) &= \\ &= 3v_6 + 2v_5 + v_4 - 3s_3 - 2s_2 + t \end{aligned} \quad (e)$$

geomeetrilist pidevusvõrrandit, mis sisaldavad  $n$  staatiliselt määramata tundmatut lõikejõudu ja toereaktsioonide komponenti. Kuna võrrandite arv (e) on võrdne staatiliselt üleliigsete tundmatute arvuga  $n(1)$ , siis antud koormuse ja temperatuuri muutumise ning tugede nihkumise puhul on need  $n$  staatiliselt määramata põhitundmatut üheselt arvutatavad. Ülejäänud tundmatud lõikejõud ja toereaktsioonide komponendid arvutatakse tasakaalutingimustega põhitundmatute funktsioonidena.

### 1.23. Deformatsioonimeetod

Ülesannete lahendamisel deformatsioonimeetodiga võetakse põhitundmatuteks paigutused. Tundmatutest lõikejõududest ja reaktsioonidest  $6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t$  elimineeritakse varraste kohta kirjutatud tasakaaluvõrrandiga  $3v_6 + 3v_5 + 3v_4$  lõikejõudu ja liigendtoesõlmede kohta kirjutatud  $t$  tasakaaluvõrrandiga niisama palju toereaktsioonide komponente. Raami sõlmede kohta on võimalik kirjutada veel  $3s_3 + 2s_2 - t$  tasakaaluvõrrandit, mis sisaldavad  $3v_6 + 2v_5 + v_4$  tundmatut lõikejõudu ja  $3s_3 + 2s_2 - t$  tundmatut paigutuskomponenti.

Geomeetriliste pidevustingimustega, mida on  $3v_6 + 2v_5 + v_4$ , elimineeritakse sõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest järelejäänud  $3v_6 + 2v_5 + v_4$  tundmatut lõikejõudu. Need tundmatud lõikejõud antakse tundmatute paigutuskomponentide funktsioonidena.

Sõlmede kohta kirjutatud  $3s_3 + 2s_2 - t$  tasakaaluvõrrandid sisaldavad just niisama palju  $3s_3 + 2s_2 - t$  tundmatut paigutuskomponenti  $u, v, \varphi$ . Tundmatud paigutuskomponendid on põhitundmatuteks ja määratakse üheselt tasakaaluvõrranditest. Põhitundmatute arvu nimetatakse ka geomeetrilise määramatuse astmeks

$$n^{(*)} = 3s_3 + 2s_2 - t \quad (2)$$

Lõikejõud arvutatakse pärast põhitundmatute määramist paigutuskomponentide funktsioonidena.

## 2. DEFORMATSIOONIMEETOD

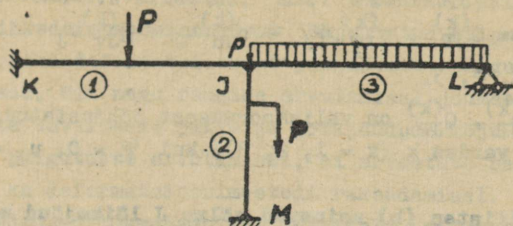
### 2.1. DEFORMATSIOONIMEETODI IDEE

Staatiliselt määramata varrassüsteemide arvutamisel jõumeetodiga võetakse põhitundmatuteks staatiliselt määramatud suurused (jõud, momendid). Põhitundmatud leitakse staatiliselt määramata süsteemi deformeerunud olukorra geomeetriliste pidevustingimuste põhjal koostatud võrrandite lahendamiseks. Sisejõudude arvutamine süsteemi ükskõik millise varda vabalt valitud ristlõikes, samuti aga ka süsteemi meelevaldse punkti paigutuse määramine on pärast põhitundmatute leidmist hõlpus.

Teatavatel tingimustel on otstarbekohane võtta põhitundmatuteks staatiliselt määramata süsteemi deformeerunud olukorda kirjeldavad paigutuskomponendid. Põhitundmatud paigutuskomponendid arvutatakse sel juhul staatika tasakaaluvõrranditest. Pärast põhitundmatute paigutuskomponentide leidmist arvutatakse sisejõud põhitundmatute funktsioonidena. Vahel nimetatakse seda meetodit ka paigutuste meetodiks.

Joon. 2.1 kujutatud raami staatilise määramatuse aste on viis. Raami staatiliselt võimalikud tasakaaluolukorrad

määratakse viie parameetriga. Raami deformeerunud kujule vastavad a i n u l t parameetrite ühed tähendused.

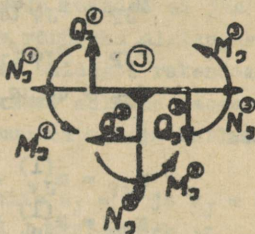


joon. 2.1

Joon. 2.1 esitatud raami paigutusolukord on määratud temale mõjuva koormuse ja sõlme J kolme tundmatu paigutuskomponendiga:  $\psi_J$ ,  $u_J$ ,  $v_J$  (joon. 2.2). Ülesanne on kolmekordselt geomeetriselt määratu.



joon. 2.2



joon. 2.3

Kolme tundmatu paigutuskomponendi arvutamiseks koostatakse sõlme J jaoks kolm tasakaaluvõrrandit (joon. 2.3):

$$\begin{aligned} \sum M = 0 : \quad & M_J^{(1)} + M_J^{(2)} + M_J^{(3)} = 0 \\ \sum X = 0 : \quad & -N_J^{(1)} + N_J^{(3)} - Q_J^{(2)} = 0 \\ \sum Y = 0 : \quad & -Q_J^{(1)} + Q_J^{(3)} + N_J^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Paindemomendid, normaal- ja põikjõud võrrandites (a) on lineaarsed funktsioonid paigutuskomponentidest  $\psi_J$ ,  $u_J$ ,  $v_J$ :

$$\begin{aligned}
 M_J^{(k)} &= M_{JP}^{(k)} + m_{J\varphi}^{(k)} \varphi_J + m_{Ju}^{(k)} u_J + m_{Jv}^{(k)} v_J \\
 N_J^{(k)} &= N_{JP}^{(k)} + n_{J\varphi}^{(k)} \varphi_J + n_{Ju}^{(k)} u_J + n_{Jv}^{(k)} v_J \\
 Q_J^{(k)} &= Q_{JP}^{(k)} + q_{J\varphi}^{(k)} \varphi_J + q_{Ju}^{(k)} u_J + q_{Jv}^{(k)} v_J
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

$k = 1, 2, 3.$

$M_{JP}^{(k)}, N_{JP}^{(k)}, Q_{JP}^{(k)}$  on väliskoormusest põhjustatud lõikejõud sõlme J vardas k ( $k = 1, 2, 3$ ), kui  $\varphi_J = 0, u_J = 0$  ja  $v_J = 0$ .

Avaldistes (b) esinevad sõlme J lõikejõud  $m_{J\varphi}^{(k)}, n_{J\varphi}^{(k)}, q_{J\varphi}^{(k)}$  ja  $m_{Ju}^{(k)}, n_{Ju}^{(k)}, q_{Ju}^{(k)}$  ning  $m_{Jv}^{(k)}, n_{Jv}^{(k)}, q_{Jv}^{(k)}$  on põhjustatud vastavalt sõlme J paigutustest  $\varphi_J = 1, u_J = 1$  ja  $v_J = 1$  ning arvutatakse jõumeetodiga.

Asetades lõikejõudude  $M_J^{(k)}, N_J^{(k)}, Q_J^{(k)}$  avaldised (b) sõlme J jaoks kirjutatud tasakaaluvõrranditesse (a) ja grupeerides liikmeid ümber, saadakse kolme tundmatu paigutuskomponendi  $\varphi_J, u_J, v_J$  määramiseks kolm võrrandit

$$\begin{aligned}
 M_{JP} + m_{J\varphi} \varphi_J + m_{Ju} u_J + m_{Jv} v_J &= 0 \\
 N_{JP} + n_{J\varphi} \varphi_J + n_{Ju} u_J + n_{Jv} v_J &= 0 \\
 Q_{JP} + q_{J\varphi} \varphi_J + q_{Ju} u_J + q_{Jv} v_J &= 0
 \end{aligned}
 \tag{c}$$

milles

$$\begin{aligned}
 m_{J\varphi} &= m_{J\varphi}^{(1)} + m_{J\varphi}^{(2)} + m_{J\varphi}^{(3)} \\
 m_{Ju} &= m_{Ju}^{(1)} + m_{Ju}^{(2)} + m_{Ju}^{(3)} \\
 m_{Jv} &= m_{Jv}^{(1)} + m_{Jv}^{(2)} + m_{Jv}^{(3)} \\
 n_{J\varphi} &= n_{J\varphi}^{(1)} + n_{J\varphi}^{(2)} + n_{J\varphi}^{(3)} \\
 - & - - - - - \\
 q_{J\varphi} &= q_{J\varphi}^{(1)} + q_{J\varphi}^{(2)} + q_{J\varphi}^{(3)} \\
 - & - - - - -
 \end{aligned}$$

Võrrandid (c) on deformatsioonimeetodi tasakaaluvõrrandid ja nende lahendamiseiga leitakse põhitundmatud: sõlme J paigutused  $\varphi_J, u_J, v_J$ .

Kui sõlme J paigutused  $\varphi_J, u_J, v_J$  on arvutatud, siis

valemitega (b) arvutatakse sõlmes J varraste löikejõud.

Sirgetest ja paindekangetest elementidest moodustatud konstruktsioonide varrastes, mis töötavad paindele, on piki- ja nihkedeformatsioonidest põhjustatud paigutused, võrreldes paindedeformatsioonist põhjustatud paigutustega, väga väikesed. Nii nagu raamide arvutamisel jõumeetodiga ei arvestata tavaliselt piki- ja pöikjõudude mõju konstruktsiooni paigutuste arvutamisel, ei arvestata nende mõju harilikult ka deformatsioonimeetodi rakendamisel.

Tuginedes ehitusmehaanika põhilisele eeldusele - võrreldes elementide mõõtmega on deformatsioonidest põhjustatud konstruktsiooni elementide paigutused väikesed - võetakse konstruktsiooni koormamisel paindunud varda otsmiste ristlõigete raskuskeskmeid ühendava kõõlu pikkus võrdne koormamata olukorras oleva sirge varda pikkusega. Seepärast loetakse s i r g e varda paindest põhjustatud varda otsmiste ristlõigete lähenemine nulliks.

Tuleb aga märkida, et kõvera varda paindel ei jää otsmiste ristlõigete vaheline kaugus võrdseks algkaugusega.

Sirgete varraste kohta kehtivate eelduste rakendamisel jäävad konstruktsiooni koormamisel raami sõlmede geomeetriseliste tsentrite vahelised kaugused muutmatuks ja ühtlasi väheneb tundmatute arv tunduvalt.

Joon. 2.1 kujutatud raamil on siis  $u_J = 0$  ja  $v_J = 0$  ning jääb ainult üks tundmatu, sõlme J pöördenurk  $\varphi_J$ . Välekordselt staatiliselt määramata süsteem on nende eelduste rakendamisega taandunud ühekordselt geomeetriselt määramata süsteemiks. Põhitundmatu  $\varphi_J$  määratakse võrrandi-süsteemi (c) esimesest võrrandist, milles  $u_J$  ja  $v_J$  on võetud nulliks:

$$M_{JP} + m_{J\varphi} \varphi_J = 0 \quad (d)$$

mis väljendab momentide tasakaalutingimust sõlme J kohta.

Võrrandis (d) on  $M_{JP} = M_{JP}^{(1)} + M_{JP}^{(2)} + M_{JP}^{(3)}$  väliskoormusest põhjustatud momentide summa sõlmes J, kui sõlm J ei pöörduks ( $\varphi_J = 0$ ), ja  $m_{J\varphi} \varphi_J = (m_{J\varphi}^{(1)} + m_{J\varphi}^{(2)} + m_{J\varphi}^{(3)}) \varphi_J$  on sõlme J pöördumisest nurga  $\varphi_J$  võrra põhjustatud moment

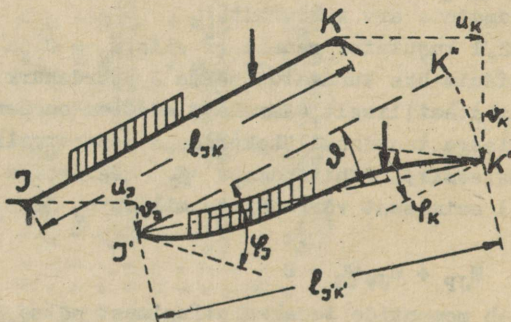
sõlmes J. Momendid  $m_{J\varphi}^{(1)}$ ,  $m_{J\varphi}^{(2)}$  ja  $m_{J\varphi}^{(3)}$  on sõlmes J vastavalt varrastele 1, 2, 3 tekkivad paindemomendid sõlme J pöördumisest ühiknurga võrra ( $\varphi_J = 1$ ).

Lõikejõudude avaldised on nüüd järgmised:

$$\begin{aligned} M_J^{(k)} &= M_{JP}^{(k)} + m_{J\varphi}^{(k)} \varphi_J \\ N_J^{(k)} &= N_{JP}^{(k)} + n_{J\varphi}^{(k)} \varphi_J \quad (k = 1, 2, 3) \quad \bullet (e) \\ Q_J^{(k)} &= Q_{JP}^{(k)} + q_{J\varphi}^{(k)} \varphi_J \end{aligned}$$

## 2.2 GEOMEETRIILISE MÄÄRAMATUSE ASTE

Konstruksioonile mõjuv koormus põhjustab varraste deformatsioone, mille tagajärjel sõlmed pöörduvad ja nihkuvad. Joon. 2.4 on kujutatud raamist eraldatud sirge varras JK ja varda paindunud kuju koormuse poolt põhjustatud deformeerunud olukorras  $J'K'$ . Sirge varda JK paigutamist deformeerunud olukorda  $J'K'$  võib vaadelda järgmiste komponentide summana:



joon. 2.4

- 1) sirge varda translatoorne paigutus asukohta  $J'K'$ ;
- 2) sõlmed J ja K pöörduvad nurkade  $\varphi_J$  ja  $\varphi_K$  võrra, kus-

juures üks sõlmedest (joon. 2.4 sõlm K) nihkub veel nii, et sõlmede J ja K geomeetrilisi tsentreid ühendav sirge J'K' moodustab esialgse teljega JK nurga  $\vartheta$ .

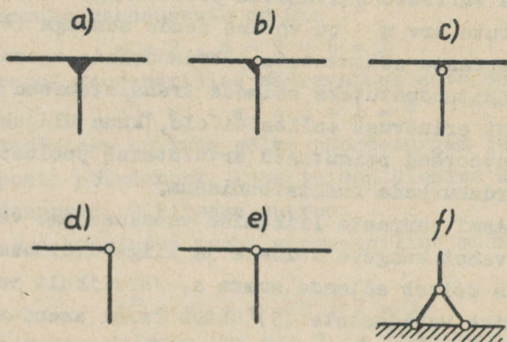
Deformatsioonimeetodi rakendamisel sirgete varraste kohta tehtud eelduste põhjal deformeerunud olukorras ja deformeerumata algolukorras on sõlmede geomeetriliste tsentrite vahelised pikkused võrdsed  $l_{J'K'} = l_{JK}$  (a), mille tõttu sõlmede vastastikused nihkumised olenevad ainult varda pöördenurgast  $\vartheta$ . Tingimuse (a) rakendamisel on võimalik koostada v geomeetrilist võrrandit. Nende geomeetriliste võrranditega elimineeritakse sõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest, millede arv on  $3s_3 + 2s_2 - t$ , v geomeetrilist tundmatut, s.t. nii palju, kui konstruktsioonil on toesidemeteta vardaid.

Tasakaaluvõrrandisse jäänud geomeetriliste tundmatute arv  $n = n^{(*)} - v$  (b) on ühtlasi põhitundmatute arvuks, s.t. geomeetrilise määratuse astmeks

$$n^* = 3s_3 + 2s_2 - t - v \quad (3)$$

milles  $s_3$  on raami kangete sõlmede arv (toesõlmedeta),  
 $s_2$  - liigendsõlmede arv,  
 $v$  - varraste arv,  
 $t$  - toesidemete arv.

Joon. 2.5, a, b, c on kujutatud raami kanged ja joon. 2.5, d, e, f selle liigendsõlmed.



joon. 2.5

Põhitundmatute arvu määramise lihtsustamiseks teisen-  
datakse valemid (3)

$$n^* = s_3 + 2(s_3 + s_2) - v - t = s_3 + 2s - v - t \quad (d)$$

milles  $s = s_3 + s_2$  on üldine raami sõlmede arv kangete toe-  
sõlmedeta.

Sirgetest varrastest moodustatud raamide geometrilise  
määramatuse aste, s.t. põhitundmatute arv arvutatakse  
nüüd valemiga

$$n^* = s_3 + w \quad (4)$$

milles

$$w = 2s - v - t \quad (5)$$

tähistab varraste pöördenurki määravate geometriliste pa-  
rameetrite arvu. Seda sõltumata geometriliste parameetri-  
te arvu  $w$  nimetatakse raami varraste liikumise vabadusast-  
meks. Vastavalt sõltumatutele geometrilistele parameetri-  
tele tähistatakse ka raami varraste sõltumatud pöördenurgad  
 $\psi$  ( $c = 1, 2 \dots w$ ).

Raami varraste pöördenurgad väljendatakse nende sõltu-  
matute pöördenurkadega

$$\vartheta_j = \vartheta_{j_1} \psi_1 + \vartheta_{j_2} \psi_2 + \dots + \vartheta_{j_w} \psi_w = \sum_{c=1}^w \vartheta_{jc} \psi_c \quad (6)$$

milles  $\vartheta_{j_1}$ ,  $\vartheta_{j_2}$  on varda  $j$  pöördenurgad, kui  $\psi_1 = 1$   
ja  $\psi_2 = 1$ .

Põhitundmatuteks on raami kangete sõlmede pöördenurgad  
( $s_3$ ) ja varraste sõltumatud pöördenurgad ( $w$ ). Üldine põhi-  
tundmatute arv  $n$  on võrdne nende summaga (4).

Varraste sõltumatute pöördenurkade asemel võetakse sa-  
geli põhitundmatuteks sõlmede translatoorsed paigutused.  
Põhilist erinevust selles ei ole, kuna üldjuhul sõlmede  
translatoorsed paigutused arvutatakse poolusplaanist varras-  
te pöördenurkade funktsioonidena.

Raami varraste liikumise vabadusastme valemis (5) ei  
tehta vahet kangete sõlmede ja liigendsõlmede vahel, kuna  
valemis esineb sõlmede summa  $s$ . Järelikult raami varraste  
liikumise vabadusaste (5) ühtub raami asendava varrasahela  
kinemaatilise vabadusastmega. Varrasahel saadakse raamist,

kui kõik kanged sõlmed asendatakse liigendsõlmedega.

Varrasahelat vaadeldakse nii mitme üksteisest erineva ühe vabadusastmega kinemaatilise ketina, kui suur on varras-  
te sõltumatute pöördenurkade arv  $w$ . Igas ühe vabadusastmega  
kinemaatilises ketis antakse ühele vardale pöördenurk ette  
ja teiste varraste pöördenurgad avaldatakse selle sõltumatu  
pöördenurga funktsioonidena.

Kui raami varraste liikumise vabadusaste on null ( $w =$   
 $= 0$ ) või negatiivne ( $w < 0$ ), siis ükski raami varras ei saa  
pöörduda ja niisugust süsteemi nimetatakse nihkumatute sõl-  
medega raamiks.

Joon. 2.6, a ja 2.7, a kujutatud raamide varrasahelate  
(joon. 2.6, b ja joon. 2,7, b) vabadusastmed arvutatuna vale-  
miga (5) on vastavalt

$$w = 2.6 - 6 - 6 = 0$$

$$w = 2.6 - 7 - 6 = -1$$

Koormuse mõjumisel nende raamide sõlmed pöörduvad,  
kuid vardad ei pöördu.

Tingimus, et  $w = 0$  või  $w < 0$  on küll vajalik, kuid mit-  
te küllaldane selleks, et raami vardad ei pöörduks. Valemi  
(5) järgi arvutatult saadakse joon. 2.8, a kujutatud raami  
varrasahela (joon. 2.8, b) vabadusaste võrdne nulliga

$$w = 2.9 - 12 - 6 = 0$$

Kuna aga raami alumisel korrusel on üks liigne varras

$$w_1 = 2.6 - 7 - 6 = -1$$

ja ülemise korruse vabadusaste on üks

$$w_2 = 2.6 - 5 - 6 = 1$$

siis üldine raami geomeetrilise määramatuse aste on

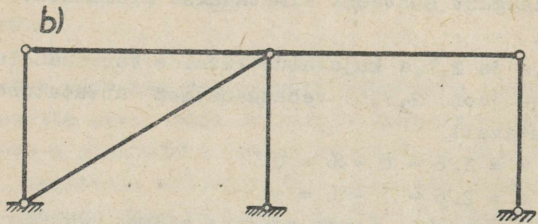
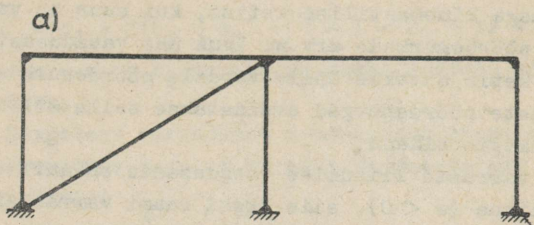
$$n^* = s_3 + w_2 = 6 + 1 = 7$$

Põhitundmatuteks on kuue sõlme pöördenurgad ja ülemise  
korruse ühe posti pöördenurk, kuna teiste ülemise korruse  
postide pöördenurgad on niisama suured.

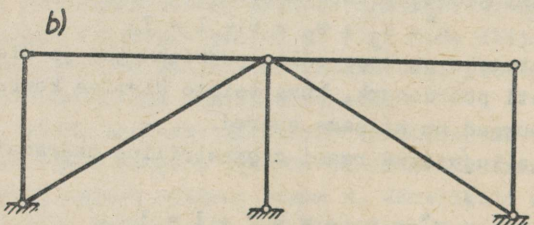
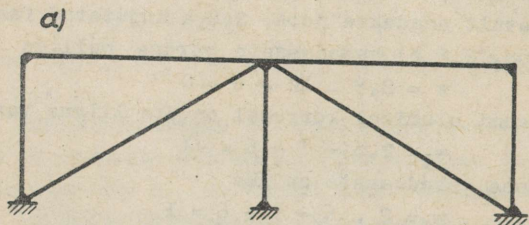
Joon. 2.9, a kujutatud raami geomeetriline määramatuse  
aste on

$$n^* = s_3 + w = 2 + 1 = 3$$

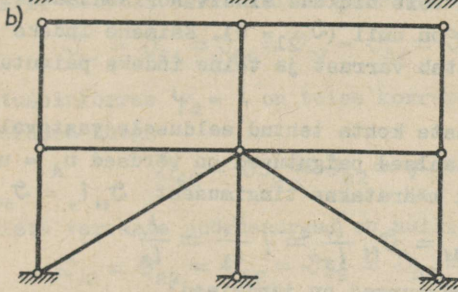
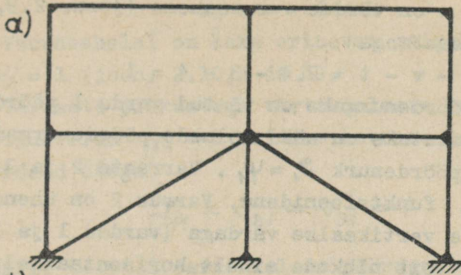
Vabade kangete sõlmede arv  $s_3 = 2$  ja raami varraste lii-



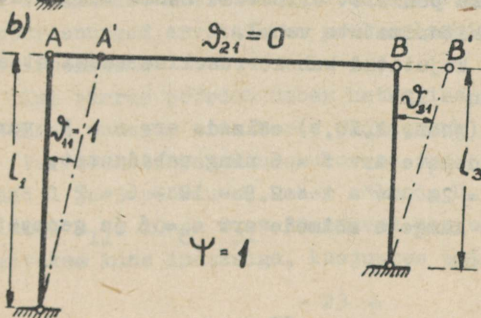
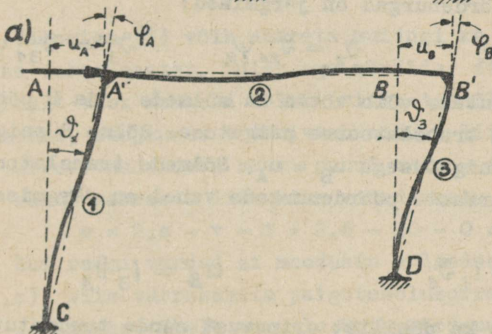
Joon. 2.6



Joon. 2.7



Joona. 2.8



Joona. 2.9

kumise vabadusaste  $w$  on võrdne varrasahela (joon. 2.9,b) kinemaatilise vabadusastmega

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$$

Sõltumatuks pöördenurgaks on võetud varda 1 pöördenurk  $\mathcal{D}_1 = \Psi_1$ . Põhitundmatuteks on nüüd sõlmede pöördenurgad  $\Psi_A$  ja  $\Psi_B$  ning varda 1 pöördenurk  $\mathcal{D}_1 = \Psi_1$ . Varraste 2 ja 3 pöördenurgad antakse  $\Psi_1$  funktsioonidena. Varras 2 on ühendatud toepinna külge kahe vertikaalse vardaga (vardad 1 ja 3) ja seepärast varras 2 võib nihkuda ainult horisontaalselt ning varda 2 pöördenurk on null ( $\mathcal{D}_{21} = 0$ ). Esimene indeks pöördenurga juures tähistab varrast ja teine indeks paigutusloorkorda ( $\Psi_1$ ).

Singete varraste kohta tehtud eeldusele vastavalt sõlmede A ja B horisontaalsed paigutused on võrdsed  $u_A = u_B$  ning varda 3 pöördenurk määratakse tingimusest  $\mathcal{D}_{11} l_1 = \mathcal{D}_{31} l_3$

$$\mathcal{D}_{31} = \mathcal{D}_{11} \frac{l_1}{l_3} = 1 \frac{l_1}{l_3} = \frac{l_1}{l_3}$$

Varraste pöördenurgad on järgmised:

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{11} \Psi_1 \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{21} \Psi_2 \quad \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_{31} \Psi_1$$

Põhitundmatuteks võib võtta ka sõlmede A ja B pöördenurgad ning sõlme A translatoorse paigutuse. Sõlme B paigutus võrdub sõlme A paigutusega  $u_B = u_A$ . Sõlmede translatoorsete paigutuste ja varraste pöördenurkade vahel on järgmised seosed:

$$u_A = l_1 \mathcal{D}_1 \quad u_B = l_3 \mathcal{D}_3$$

mispärast ei ole ka põhilist erinevust nende tundmatute ja eespool võetud põhitundmatute vahel.

Joon. 2.10,a kujutatud kahekorruselise raami staatilise määramatuse aste  $n = 12$ .

Varrrasahela (joon. 2.10,b) sõlmede arv  $s = 9$ , varraste arv  $v = 10$ , toesidemete arv  $t = 6$  ning vabadusaste

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 9 - 10 - 6 = 2$$

Raami vabade kangete sõlmede arv  $s_3 = 6$  ja geomeetrilise määramatuse aste on

$$n^* = s_3 + w = 6 + 2 = 8$$

Varrasahelal on kaks erinevat paigutusolukorda:  $\psi_1 = 1$  ja  $\psi_2 = 1$  (joon. 2.10, c ja d).

Võrdsete pikkustega vertikaalsete postidega raamil paigutusolukorras  $\psi_1 = 1$  esimese korruse postide pöördenurgad on võrdsed ühega

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{21} = \vartheta_{31} = 1$$

ja kõikil teistel varrastel on pöördenurgad nullid

$$\vartheta_{41} = \vartheta_{51} = \vartheta_{61} = \vartheta_{71} = \vartheta_{81} = \vartheta_{91} = \vartheta_{10,1} = 0$$

Paigutusolukorras  $\psi_2 = 1$  on teise korruse postide pöördenurgad võrdsed ühega

$$\vartheta_{62} = \vartheta_{72} = \vartheta_{82} = 1$$

ja teiste varraste pöördenurgad on nullid

$$\vartheta_{12} = \vartheta_{22} = \vartheta_{32} = \vartheta_{42} = \vartheta_{52} = \vartheta_{92} = \vartheta_{10,2} = 0$$

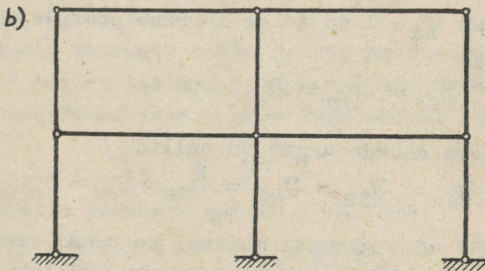
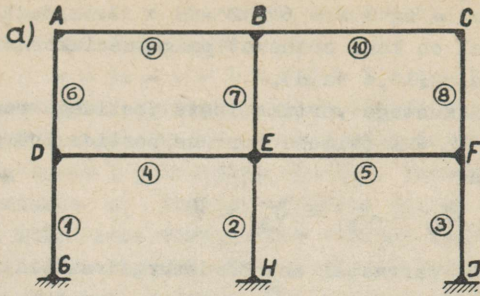
Valemiga (5) võib määrata muidugi ka raami varraste liikumise vabadusastet. Tuleb aga märkida, et sel juhul loetakse ainult vabu kangeid sõlmi (mitte toesõlmi) ja kõiki liigendsõlmi, kusjuures  $t$  tähistab ainult liigendtugede toesidemete arvu. Vaadeldava raami puhul on  $s = 6$ ,  $v = 10$  ja  $t = 0$  ning raami varraste liikumise vabadusaste on

$$w = 2 \cdot s - v - t = 2 \cdot 6 - 10 - 0 = 2$$

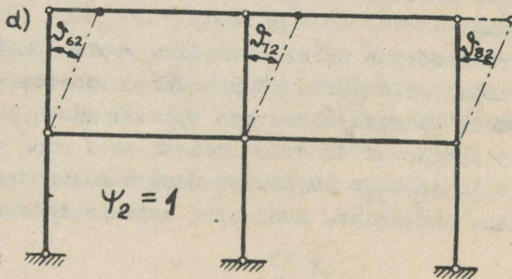
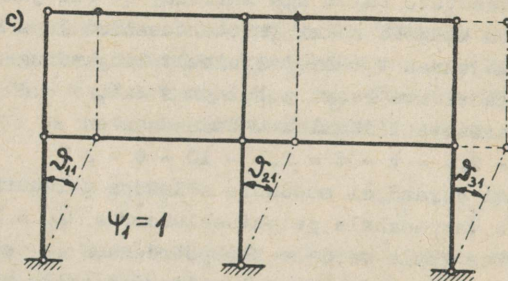
Kui raami vardad ei moodusta sõlmedes täisnurki (joon. 2.11, a), siis varrasahela paigutusolukorras  $\psi_c = 1$  ( $c = 1, 2, \dots, w$ ) antakse ühele vardale ühikpöördenurk ja teiste varraste pöördenurgad arvutatakse poolusplaani selle pöördenurga funktsioonidena.

Kui varras pöörduv ümber hetkelise pooluse kellaosuti liikumise suunas, siis varda pöördenurk on positiivne.

Varrasahela paigutusolukorras  $\psi_1 = 1$  (joon. 2.11, b) vardad 1 ja 3 pöörduvad ümber sõlmede D ja E ning varraste poolused  $O_{11} = 10$  ja  $O_{31} = 30$  asuvad nendes sõlmedes. Poolused märgitakse kahe indeksiga, kusjuures esimene indeks tähistab



Joon. 2.10



varrast ja teine paigutusolukorda.

Varras 2 on ühendatud varrasahelas liigendi A abil vardaga 1 ja see liigend on nende varraste vastastikuse liikumise hetkeliaeks pooluseks 12. Varda 2 liikumise hetkeline poolus  $20 \equiv O_{21}$  asub pooluste 10 ja 12 sihil. Varras 2 on ühendatud sõlmes B liigendi 13 abil vardaga 3 ja varda 2 liikumise hetkeline poolus  $O_{21}$  asub ka sihil 30-32. Varda 2 hetkeline poolus  $20 \equiv O_{21}$  määratakse kahe sirgega 10 - 12 ja 30 - 32 ning see asub nende sirgete, s.t. varraste 1 ja 3 sihtide lõikepunktis.

Vardale 1 on antud ühikpöördenurk  $\mathcal{J}_{11} = 1$ . Tingimusest

$$l_1 \mathcal{J}_{11} = -\overline{AO}_{21} \mathcal{J}_{21}$$

leitakse varda 2 pöördenurk

$$\mathcal{J}_{21} = -\mathcal{J}_{11} \frac{l_1}{\overline{AO}_{21}} = -1 \frac{l_1}{\overline{AO}_{21}} \quad (e)$$

Võrdusest

$$-\overline{BO}_{21} \mathcal{J}_{21} = l_3 \mathcal{J}_{31}$$

arvutatakse varda 3 pöördenurk

$$\mathcal{J}_{31} = -\mathcal{J}_{21} \frac{\overline{BO}_{21}}{l_3} \quad (f)$$

Asetades varda 2 pöördenurga asemele tema tähenduse (e), saadakse varda 3 pöördenurk varda 1 pöördenurga  $\mathcal{J}_{11}$  funktsioonina

$$\mathcal{J}_{31} = \mathcal{J}_{11} \frac{l_1}{\overline{AO}_{21}} \frac{\overline{BO}_{21}}{l_3} = 1 \frac{l_1}{\overline{AO}_{21}} \frac{\overline{BO}_{21}}{l_3}$$

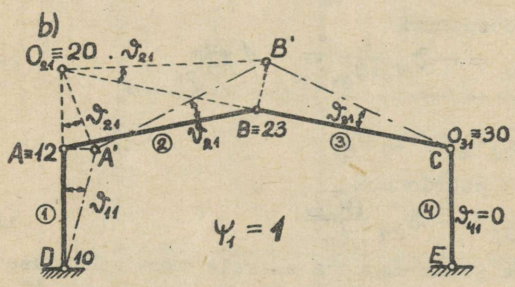
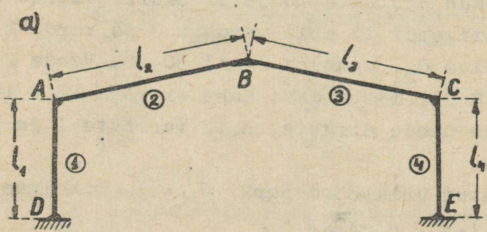
Paigutusolukorras  $\Psi_1 = 1$  varras 4 ei pöördu ( $\mathcal{J}_{41} = 0$ ).

Analoogiliselt arvutatakse varraste pöördenurgad paigutusolukorras  $\Psi_2 = 1$  (joon. 2.11, c), milles vardale 4 on antud ühikpöördenurk  $\mathcal{J}_{41} = 1$ . Varraste 3 ja 2 pöördenurgad leitakse vastavalt tingimustest:

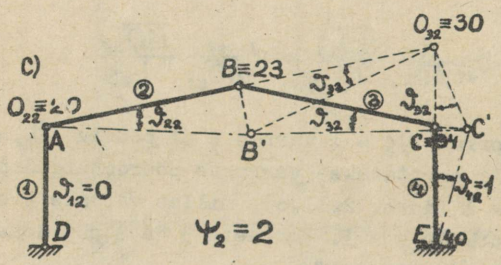
$$-\overline{CO}_{32} \mathcal{J}_{32} = \mathcal{J}_{42} l_4 \quad \text{ja} \quad l_2 \mathcal{J}_{22} = -\overline{BO}_{32} \mathcal{J}_{32}$$

millest

$$\mathcal{J}_{32} = -\mathcal{J}_{42} \frac{l_4}{\overline{CO}_{32}} \quad (g)$$



Joon. 2.11



$$\mathcal{J}_{22} = -\mathcal{J}_{32} \frac{\overline{BO}_{32}}{l_2} = \mathcal{J}_{42} \frac{l_4}{\overline{CO}_{32}} \frac{\overline{BO}_{32}}{l_2} \quad (h)$$

$$\mathcal{J}_{12} = 0 \quad (i)$$

Joon. 2.11, a kujutatud raami geomeetrilise määramatuse aste on

$$n^* = s_3 + w = 3 + 2 = 5$$

### 2.3. GEOMEETRILISELT MÄÄRATUD PÕHISKEEM

Raami arvutamisel deformatsioonimeetodiga tehakse arvutused geomeetriliselt määratud põhiskeemi järgi. Raam on geomeetriliselt määratud, kui kõik põhitundmatute suurused on antud. Geomeetriliselt määratud raami sõlmede paigutused on nullid:

$$\varphi_J = 0 \quad (J = A, B, C \dots; A + B + C + \dots = s_3)$$

$$\psi_c = 0 \quad (c = 1, 2, 3 \dots w)$$

Siin  $\varphi_J$  tähistab sõlme J pöördenurka ja  $\psi_c$  varda c sõltumatut pöördenurka. Raami varrasahela varraste pöördenurgad määratakse w sõltumatu geomeetrilise parameetriga.

Sõlme pöördenurk on positiivne, kui sõlm pöörduv kellaosuti liikumise suunas.

Varda pöördenurk on positiivne, kui varras pöörduv ümber hetkelise pooluse kellaosuti liikumise suunas.

Antud geomeetriliselt määramata süsteemist saadakse geomeetriliselt määratud süsteem, kui antud süsteemile pannakse lisasidemed, mis takistavad sõlmede ja varraste pöördumist.

Sõlmede pöördumist takistavate sidemete arv on võrdne vabade kangete sõlmede arvuga  $s_3$  ja varraste pöördumist takistavate sidemete arv võrdub varrasahela vabadusastmega  $w$ . Varraste pöördumist takistavad sidemed asetatakse nii, et ükski varras ei saa pöörduda.

Sidemete asetamisega geomeetriliselt määratuks muudetud süsteemi nimetatakse põhiskeemiks. Deformatsioonimeetodi geomeetriliselt määratud põhiskeem koosneb mõlemast otsast kangelt kinnitatud, ühest otsast kangelt ja teisest otsast liigendkinnitusega ning mõlemast otsast liigendtugedega varrastest.

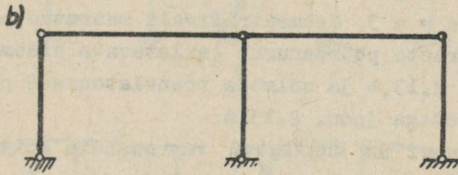
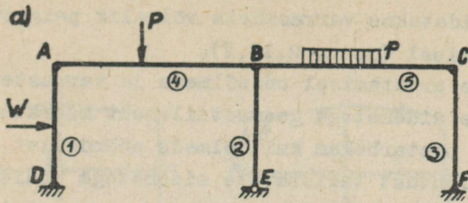
Joon. 2.12,a kujutatud raam on neljakordselt geomeetriliselt määratu. Raamil on kolm vaba kanget sõlme A, B, C ja varrasahela (joon. 2.12,b) vabadusaste on üks. Joon.2.12,c on esitatud geomeetriliselt määratud põhiskeem, mille igas vabas kanges sõlmes on sõlme pöördumist takistav side ja ühel postil, antud juhul parempoolisel, on varda pöördumist takistav side. Viimast sidet tähistatakse numbriga 1.

Siinkohal märgitakse veel kord, et geomeetriliselt määratud põhiskeemi sõlmes astsev side takistab ainult sõlme pöördumist, ei takista aga sõlme translatoorset paigutust. Vardale pandud side takistab samuti ainult varda pöördumist, kuid ei takista varda translatoorset paigutust.

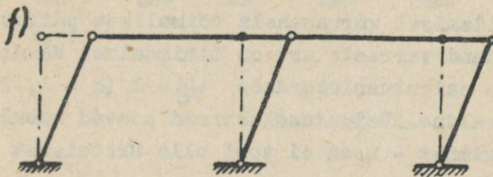
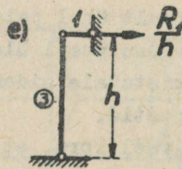
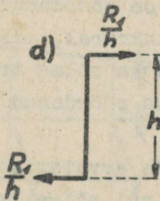
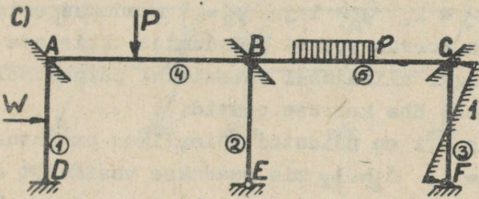
Kuna lisasidemed takistavad ainult sõlmede ja varraste pöördumist, siis nendes tekkivad reaktsioonid on momendid. Varda 3 pöördumist takistavas sidemes 1 tekkivat reaktsioonmomenti  $R_1$  võib esitada jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonmoment jagatud varda pikkusega  $R_1 : h$  (joon. 2.12,d).

Kui varda ühe otsa translatoorne paigutus on null (joon. 2.12,a toesõlm F), siis võib varda pöördumist takistava sideme asendada varda vaba sõlme translatoorset paigutust takistava sidemega (joon. 2.12,e). Viimane side pannakse tavaliselt risti varda teljega. Ka niisugusel juhul vaadeldakse sidemes tekkivat reaktsiooni kui jõupaari komponendi suurusega  $R_1 : h$ , milles  $R_1$  on reaktsioonmomenti suurus ja  $h$  varda pikkus.

Varda pöördumist takistavat sidet võib aga panna ka vardale 1 või 2. Selle asukoht ei ole täpselt kindlaks määratud, nagu on sõlmede pöördumisi takistavate sidemete puhul.



Joon.2/2



Praktilise arvutuse juures ei märgita selle sideme asukohta, vaid näidatakse varrasahela võimalik paigutusolukord sideme puudumisel (joon. 2.12,f).

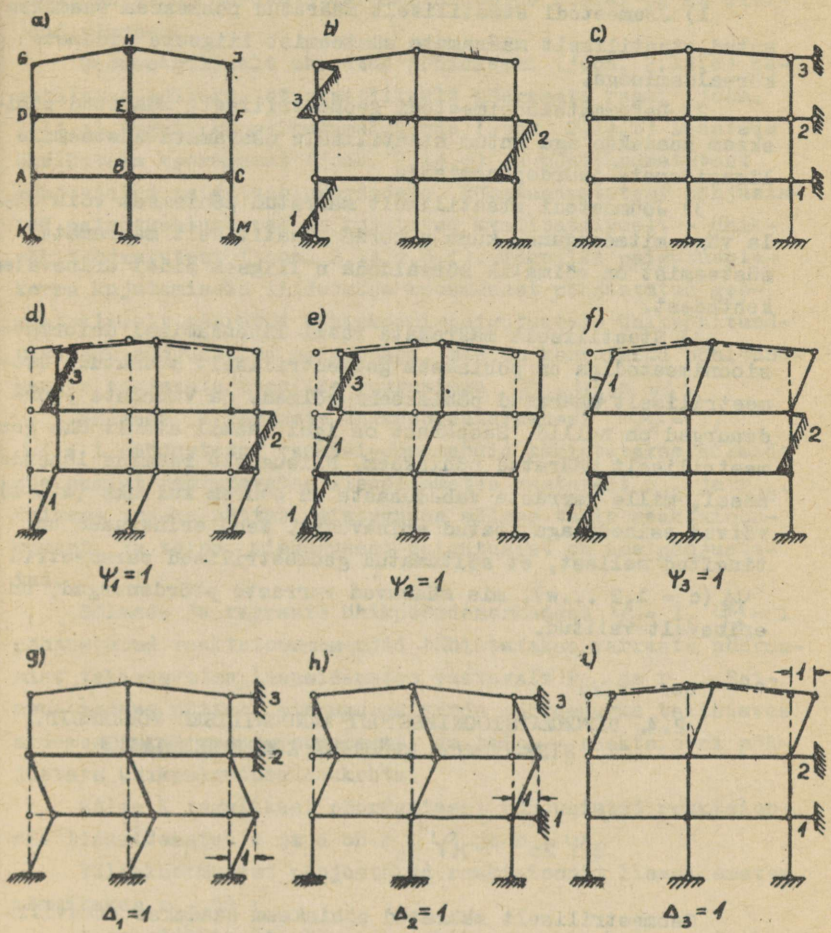
Korrasraamide arvutamisel on sõlmede ja varraste pöördumist takistavate sidemetega geomeetriliselt määratud põhiskeem tunduvalt otstarbekam kui sõlmede pöördumist ja translatoorset paigutust takistavate sidemetega põhiskeem.

Joon. 2.13,a esitatud raam on 12 korda geomeetriliselt määratu. Vabade kangete sõlmede arv  $s_3 = 9$  ja varraste liikumise vabadusaste  $w = 3$ . Geomeetriliselt määratud põhiskeemi varrasahel varraste pöördnurki takistavate sidemetega on näidatud joon. 2.13,b ja sõlmede translatoorset paigutust takistavate sidemetega joon. 2.13,d.

Joon. 2.13,d,e,f on kujutatud varrasahela kolm võimalikku paigutusolukorda  $\psi_1 = 1$ ,  $\psi_2 = 1$  ja  $\psi_3 = 1$ . Paigutusolukorrad  $\psi_1 = 1$ ,  $\psi_2 = 1$  ja  $\psi_3 = 1$  saadakse esimese, teise ja kolmanda korruse posti pöördumist takistava sideme kõrvaldamisega. Igal niisugusel võimalikul paigutusolukorral on pöördunud ainult ühe korruse postid.

Joon. 2.13,g,h,i on näidatud võimalikud paigutusolukorrad  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = 1$ ,  $\Delta_3 = 1$ , mis saadakse vastavalt sõlme C, F ja J translatoorset paigutust takistava sideme kõrvaldamisega. Nendel paigutusolukordadel on pöördunud kahe korruse postid ja ainult ühel paigutusolukorral, mis vastab kõige kõrgema korruse posti ülemise otsa sõlme translatoorset paigutust takistavale sidemele, on pöördunud ühe, kõige kõrgema korruse postid.

Rõhutatakse veel kord, et raamide arvutamisel ei ole oluline, kus asuvad varda pöördumist või sõlme translatoorset paigutust takistavad sidemed. Oluline on aga, et nende sidemete kõrvaldamisel varrasahela võimalikes paigutusolukordades pöördunud varraste arv on minimaalne. Nende varrasahela võimalike paigutusolukordade  $\psi_c = 1$  ( $c = 1, 2 \dots w$ ) valik on meelevaldne. Paigutusolukorrad pöavad rahuлдama ainult üht tingimust - need ei tohi olla üksteisest lineaarselt sõltuvad.



Жон. 2, 13.

Deformatsiooni- ja jõumeetodi põhiskeemid erinevad üksteisest täielikult.

1) Jõumeetodi staatiliselt määratud põhiskeem saadakse antud staatiliselt määramata süsteemist liigsete sidemete kõrvaldamisega.

2) Deformatsioonimeetodi geomeetriliselt määratud põhiskeem saadakse aga antud staatiliselt määramata süsteemile lisasidemete juurdepanemisega.

3) Jõumeetodi staatiliselt määratud põhiskeem võib olla väga mitmesugune, kuna n korda staatiliselt määramata süsteemist on võimalik kõrvaldada n liigset sidet erinevatest kohtadest.

4) Staatiliselt määramata raami lahendamisel deformatsioonimeetodiga on põhiskeem geomeetriliselt määratud. Geomeetriliselt määratud põhiskeemi sõlmede ja varraste pöördenurgad on nullid. Seepärast on igal raamil ainult üks geomeetriliselt määratud põhiskeem. Niisuguste raamide lahendamisel, mille varraste vabadusaste on suurem kui üks ( $w > 1$ ), võivad esineda aga teatud erinevused. Need erinevused on tingitud sellest, et sõltumatud geomeetrilised parameetrid  $\psi_c$  ( $c = 1, 2 \dots w$ ), mis määravad varraste pöördenurgad, on erinevalt valitud.

#### 2.4. DEFORMATSIOONIMEETODI KANOONILISED VÖRRANDID. SISEJÖUDUDE EPÜÜRIDE KONSTRUEERIMINE

Geomeetriliselt määratud põhiskeem saadakse staatiliselt määramata süsteemist lisasidemete juurdepanemisega. Pöhitundmatud, s.t. sõlmede pöördenurgad  $\psi_j$  ( $J = A, B, C \dots N$ ;  $A + B + C + \dots N = s_3$ ) ja varraste sõltumatud pöördenurgad  $\psi_c$  ( $c = 1, 2, 3 \dots w$ ) määratakse tingimustest, millede puhul geomeetriliselt määratud põhiskeemi deformatsioonid koormu-

sest ning sõlmede ja varraste pöördumistest oleksid võrdsed koormusest põhjustatud staatiliselt määramata raami deformatsioonidega. Võrdsete deformatsioonide korral on ka sisejõud võrdsed.

Geomeetriliselt määratud põhiskeemi (joon. 2.14,c) kasutatakse selleks, et staatiliselt määramata raami (joon. 2.14,a) tegelikku paigutusolukorda (joon. 2.14,b) lahutada üksikuteks koormusest (joon. 2.14,c) ja põhitundmatutest põhjustatud paigutusolukordadeks. Põhitundmatutest põhjustatud paigutusolukorrad on kujutatud kvalitatiivselt - ühikpõhitundmatutest (joon. 2.14,d,e,f). Tegelik paigutusolukorra kujutamiseks liidetakse koormusest põhjustatud geomeetriliselt määratud põhiskeemi paigutustele ühikpõhitundmatutest põhjustatud paigutused, mis on korrutatud põhitundmatute vastavate tegelike suurustega  $\varphi_A, \varphi_B$  ja  $\varphi_1$ .

Sõlmede ja varraste ühikpöördenurkadest  $\varphi_K = 1$ ,  $\varphi_b = 1$  põhjustatud reaktsioonmomendid tähistatakse sõlmede pöördumist takistavates lisasidemetes vastavalt  $r_{JK}$  ja  $r_{Jb}$ . Esimene indeks näitab, missuguses sõlmes tekib reaktsioonmoment, ja teine, missugusest paigutusest on see põhjustatud.

Sõlmede ja varraste ühikpöördenurkadest  $\varphi_K = 1$ ,  $\varphi_b = 1$  põhjustatud reaktsioonmomendid tähistatakse varraste pöördumist takistavates lisasidemetes vastavalt  $r_{cK}$  ja  $r_{cb}$ . Esimene indeks näitab, missuguses varda pöördnurka takistavas sidemes tekib reaktsioonmoment, ja teine - reaktsiooni põhjustava ühikpaigutuse asukohta.

Sõlme K tegelikust pöördumisest põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes J ja c on  $r_{JK} \varphi_K$  ja  $r_{cK} \varphi_K$ .

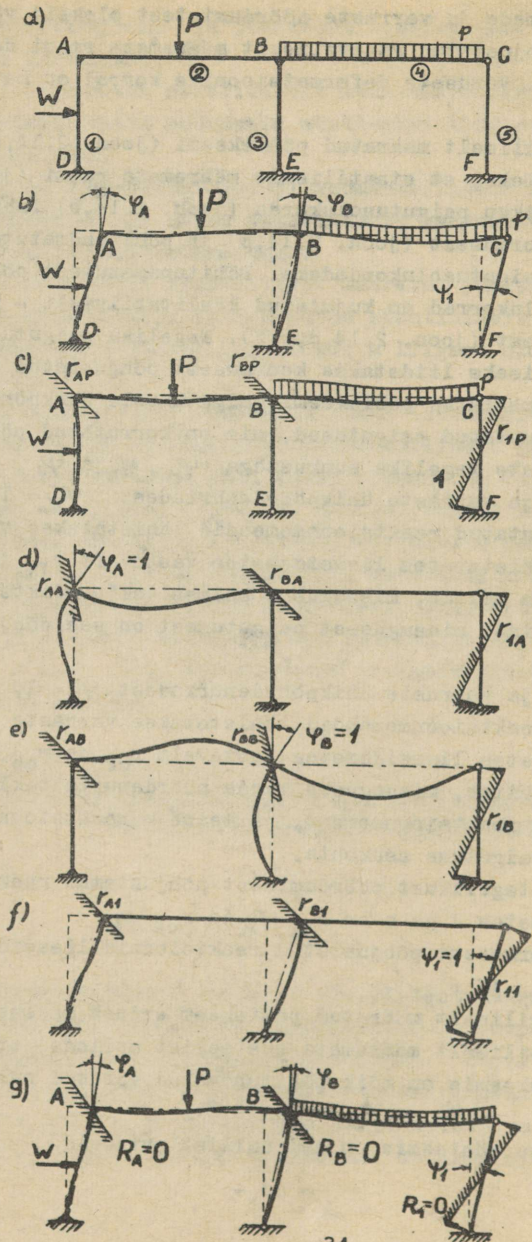
Väliskoormusest põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes märgitakse  $r_{Jp}$  ja  $r_{cp}$ .

Geomeetriliselt määratud põhiskeem erineb geomeetriliselt ja staatiliselt määramata süsteemist sellega, et:

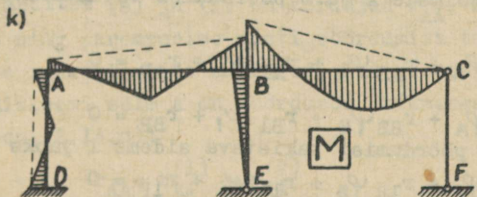
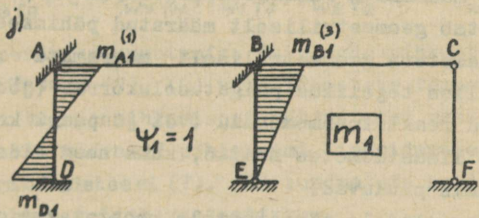
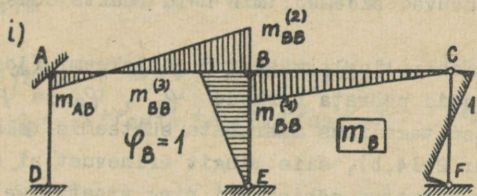
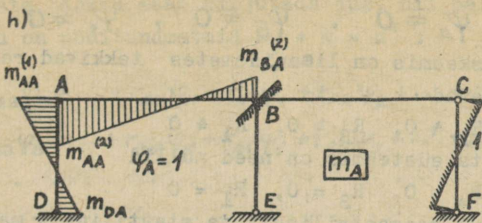
- 1) põhiskeemis on kõik põhitundmatud võrdsed nulliga

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_1 = 0 \quad (a)$$

kuna määramata süsteemis on nad nullist erinevad



Joon. 2.14



Joon. 2.14

$$\varphi_A \neq 0, \quad \varphi_B \neq 0, \quad \varphi_1 \neq 0 \quad (b)$$

2) põhiskeemis on lisasidemetes tekkivad reaktsioonid nullist erinevad

$$R_A \neq 0, \quad R_B \neq 0, \quad R_1 \neq 0 \quad (c)$$

kuna määramata süsteemis on need nullid

$$R_A = 0, \quad R_B = 0, \quad R_1 = 0 \quad (d)$$

sest tegelikus geomeetriselt ja staatiliselt määramata süsteemis puuduvad sidemed, mis neid reaktsioone vastu võtaksid.

Kui geomeetriselt määratud põhiskeemi (joon. 2.14,c) sõlmi ja vardaid pöörata nurkade  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  ja  $\varphi_1$  võrra, mis on võrdsed tegelikus määramata süsteemis tekkivate nurkadega (joon. 2.14,b), siis mingit erinevust ei esine geomeetriselt määratud põhiskeemi ning staatiliselt ja geomeetriselt määramata raami deformatsioonides. Nendes tingimustes töötab geomeetriselt määratud põhiskeem nii kui lisasidemeteta geomeetriselt määramata raam ja seepärast selles tegelikus paigutusolukorras (joon. 2.14,g) on summaarsed reaktsioonmomentid (või jõupaari komponendid  $\frac{R_c}{l}$ ) kõigis lisasidemetes nullid, kuna need sidemed tegelikus süsteemis puuduvad.

Tuginedes nendele tingimustele koostatakse joon. 2.14, a kujutatud raami põhitundmatute arvutamiseks järgmised võrrandid: sõlmede A ja B pöördumist takistavate sidemete kohta

$$r_{AA} \varphi_A + r_{AB} \varphi_B + r_{A1} \varphi_1 + r_{AP} = 0 \quad (e)$$

ja varraste pöördumist takistava sideme l jaoks

$$r_{1A} \varphi_A + r_{1B} \varphi_B + r_{11} \varphi_1 + r_{1P} = 0 \quad (f)$$

Võrrandid (e) ja (f) on staatika tasakaaluvõrrandid, kuna nende vasakud pooled esitavad reaktsioonmomentide summasid.

Üldisel juhul võib kirjutada  $s_3 = A + B + C + \dots + N$  (e) tüüpi ja  $w(f)$  tüüpi võrrandit, s.t. nii palju, kui on vabu kangeid sõlmi ja kui suur on raami varraste liikumise

vabadusaste. Kokku saab kirjutada just nii palju võrrandeid, kui palju on põhitundmatuid  $s_3 + w = n^*$  :

$$\begin{aligned} r_{AA}\varphi_A + r_{AB}\varphi_B + \dots + r_{AN}\varphi_N + r_{A1}\psi_1 + r_{A2}\psi_2 + \dots + r_{AW}\psi_W + r_{AP} &= 0 \\ r_{BA}\varphi_A + r_{BB}\varphi_B + \dots + r_{BN}\varphi_N + r_{B1}\psi_1 + r_{B2}\psi_2 + \dots + r_{BW}\psi_W + r_{BP} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dots$$

$$r_{NA}\varphi_A + r_{NB}\varphi_B + \dots + r_{NN}\varphi_N + r_{N1}\psi_1 + r_{N2}\psi_2 + \dots + r_{NW}\psi_W + r_{NP} = 0$$

$$r_{1A}\varphi_A + r_{1B}\varphi_B + \dots + r_{1N}\varphi_N + r_{11}\psi_1 + r_{12}\psi_2 + \dots + r_{1W}\psi_W + r_{1P} = 0$$

$$r_{2A}\varphi_A + r_{2B}\varphi_B + \dots + r_{2N}\varphi_N + r_{21}\psi_1 + r_{22}\psi_2 + \dots + r_{2W}\psi_W + r_{2P} = 0$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$r_{WA}\varphi_A + r_{WB}\varphi_B + \dots + r_{WN}\varphi_N + r_{W1}\psi_1 + r_{W2}\psi_2 + \dots + r_{WW}\psi_W + r_{WP} = 0$$

Temperatuuri muutumise ja tugede nihkumise puhul on võrrandisüsteemi (7), (8) vabaliikmeteks temperatuuri muutumisest ja tugede nihkumisest põhjustatud reaktsioonid geometriliselt määratud põhiskeemi lisasidemetes.

Võrrandisüsteemi (7), (8) tundmatute kordajate-reaktsioonide suhtes kehtib vastastikkus

$$r_{JK} = r_{KJ}, \quad r_{Jc} = r_{cJ}, \quad r_{cb} = r_{bc} \quad (g)$$

Võrrandites (e) ja (f) on kordajad  $r_{AA}$ ,  $r_{BA}$ ,  $r_{1A}$  sõlmede A ja B ning parempoolse posti pöördumist takistavate lisasidemete reaktsioonide suurused, kui geometriliselt määratud põhiskeemi sõlm A on pöördunud ühiknurga ( $\varphi_A = 1$ ) võrra (joon. 2.14, d):

$$r_{AA} = r_{AA}^{(1)} + r_{AA}^{(2)}$$

$$r_{BA} = r_{BA}^{(2)}$$

$$r_{1A} = r_{1A}^{(1)}$$

Reaktsioon  $r_{AA}$  on kahe momendi summa, kuna paigutusolukorras  $\varphi_A = 1$  on paindunud mõlemad sõlmest A väljuvad vardad 1 ja 2. Reaktsioon  $r_{BA}$  on üheliikmeline, sest paigu-

tusolukorras  $\varphi_A = 1$  on sõlmes B ühendatud varrastest paindunud ainult üks varras (varras 2).

Kuna reaktsioonide kohta kehtib vastastikkus, siis  $r_{1A} = r_{A1}$ . Reaktsiooni  $r_{A1}$  on lihtne arvutada paigutusolukorras  $\varphi_1 = 1$  (joon. 2.14, f). Paigutusolukorras  $\varphi_1 = 1$  on sõlmes A ühendatud varrastest paindunud ainult varras 1. Varras 2 on jäänud sirgeks. Reaktsioon  $r_{1A} = r_{A1}$  on vaadeldava reami puhul üheliikmeline.

Analoogiliselt võib kirjutada paigutusolukorra  $\varphi_B = 1$  jaoks (joon. 2.14, e):

$$r_{BB} = r_{BB}^{(2)} + r_{BB}^{(3)} + r_{BB}^{(4)}$$

$$r_{AB} = r_{BA} = r_{AB}^{(2)}$$

$$r_{1B} = r_{B1} = r_{B1}^{(3)}$$

Reaktsioon  $r_{11}$  (joon. 2.14, f) koosneb kahest liikmest, sest paigutusolukorras  $\varphi_1 = 1$  on paindunud kaks varrast (vardad 1 ja 3). Varras 5 on küll pöörduvad, kuid jäänud sirgeks, ei tekita seepärast reaktsiooni lisasidemes 1

$$r_{11} = r_{11}^{(1)} + r_{11}^{(3)}$$

Väliskoormusest põhjustatud momentide summad lisasidemetes on võrrandite vabaliikmeteks

$$r_{AP} = M_{AP}^{(1)} + M_{AP}^{(2)}$$

$$r_{BP} = M_{BP}^{(2)} + M_{BP}^{(4)}$$

$$r_{1P} = M_{1P}^{(1)}$$

Võrrandisüsteemi (7) kordajate liikmete arvud on järgmised:

1) kordaja  $r_{JJ}$ , s.o. reaktsioon lisasidemes J paigutusolukorras  $\varphi_J = 1$ , koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu varrast on sõlmes J ühendatud paindekangelt;

2) kordaja  $r_{JK} = r_{KJ}$  on üheliikmeline, kui sõlmede J ja K vahel on mõlemas sõlmes paindekangelt ühendatud varras;

3) kordaja  $r_{JK} = r_{KJ} = 0$ , kui sõlmed J ja K ei ole ühendatud vardaga või kui nende vahel olev varras on ühes või

mõlemas sõlmes ühendatud liigendiga;

4) kordaja  $r_{Jc} = r_{cJ}$  koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu sõlmes J paindekangelt ühendatud varrast on paindunud paigutusolukorras  $\psi_c = 1$ ;

5) kordaja  $r_{cc}$  koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu mõlemast otsast paindekangelt või ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varrast on pöördunud paigutusolukorras  $\psi_c = 1$ ;

6) kordaja  $r_{cb} = r_{bc}$  koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu mõlemast otsast paindekangelt või ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud sama numbri varrast on pöördunud paigutusolukordades  $\psi_1 = 1$  ja  $\psi_2 = 1$ ;

7) vabaliige  $r_{JP}$  koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu sõlmes J paindekangelt ühendatud varrast on väliskoormusega koormatud;

8) vabaliige  $r_{cP}$  koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu koormatud varrast on pöördunud paigutusolukorras  $\psi_c = 1$ .

Põhitundmatute ees olevate kordajate (reaktsioonmomentide) ja geomeetriliselt määratud põhiskeemi varraste otses väliskoormusest põhjustatud momentide arvutamiseks on sirgete ja konstantsete ristlõigetega varraste jaoks koostatud tabelid (tabelid 1, 2).

Pärast põhitundmatute  $\psi_A$ ,  $\psi_B$  ja  $\psi_1$  määramist võrrandisüsteemist arvutatakse lõplik paindemomentide epüür eraldi iga raami varda jaoks. Varda mõlema otsa kohta arvutatakse epüüri ordinaat põhitundmatutest ja vardale mõjuvast koormusest põhjustatud momentide summana. Põhitundmatust tekitatud moment arvutatakse ühikpõhitundmatust põhjustatud momentide epüüri (joon. 2.14, h, i, j) ordinaadi ja tundmatu tegeliku suuruse korrutisena.

Lõpliku paindemomentide epüüri (2.14, k) ordinaadid arvutatakse järgmiselt:

$$M_A^{(1)} = M_{AP}^{(1)} + m_{AA}^{(1)} \psi_A + m_{A1}^{(1)} \psi_1$$

$$M_A^{(2)} = M_{AP}^{(2)} + m_{AA}^{(2)} \psi_A + m_{AB}^{(2)} \psi_B$$

$$M_B^{(2)} = M_{BP}^{(2)} + m_{BA}^{(2)} \varphi_A + m_{BB}^{(2)} \varphi_B$$

$$M_B^{(3)} = m_{BB}^{(3)} \varphi_B + m_{B1}^{(3)} \varphi_1$$

$$M_B^{(4)} = M_{BP}^{(4)} + m_{BB}^{(4)} \varphi_B$$

$$M_D^{(1)} = M_{DP}^{(1)} + m_{DA}^{(1)} \varphi_A$$

Pärast paindemomentide epüüri konstrueerimist konstrueeritakse põikjõudude ja normaaljõudude epüürid staatika tasakaalutingimustega paindemomentide epüürist.

## 2.5. SEOSSED VARDA OTSTE PAIGUTUSTE JA LÕIKEJÕUDUDE VAHEL

### 2.51. Varraste liigitus

Staatiliselt määramata süsteemis võib esineda kolme erinevat liiki vardaid:

- 1) mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud vardad,
- 2) ühest otsast paindekange ja teisest otsast liigendkinnitusega vardad,
- 3) mõlemast otsast liigenditega kinnitatud vardad.

Lõikejõudude ja paigutuste vaheliste seoste tuletamiseks eraldatakse varras koos sõlmedega ülejäänud konstruktsioonist (joon. 2.15, a).

Mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud vardal on kuus tundmatut lõikejõudu: kummalgi otsal kolm ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ). Ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud vardal on viis tundmatut lõikejõudu. Mõlemas otsas liigendit omaval vardal on neli tundmatut lõikejõudu: kummalgi otsal kaks ( $Q$ ,  $N$ ).

Tasakaalutingimustega avaldatakse kolm tundmatut lõikejõudu ülejäänud lõikejõudude ja väliskoormuse funktsioonidena. Deformatsioonimeetodi juures tehtud eeldus  $\varepsilon = 0$

lubab normaaljõudu, olenemata varda paindedeformatsioonist, arvutada staatiliselt määratud suurusena.

Järelikult jääb esimest liiki varrastel kaks liigset suurust, teist liiki varrastel üks ja kolmandat liiki varrastel ei jää ühtki üleliigset suurust.

Tundmatute löikejõudude arvutamiseks tuletatakse valemid jõumeetodiga. Piirduetakse ainult sirgetest ja konstantsete ristlõigetega varrastest moodustatud raamide arvutamisega.

## 2.52. Mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud varras

### 2.52.1 Reaktsioonide ja paigutuste lahutamine neljaks komponendiks

Koormuse mõjumisel raami vardad deformeeruvad, mille tulemusel sõlmed nihkuvad ja pöörduvad. Esialgselt sirge varda (joon. 2.15, a) deformeerunud kuju koormusest põhjustatud paigutusolukorras on kujutatud joon. 2.15, b,

Sõlmes J ja K ühendatud varraste otste ristlõiked pöörduvad vastavalt nurkade  $\varphi_J$  ja  $\varphi_K$  võrra. Sõlmed J ja K on paigutunud teineteise suhtes nii, et varda otsmiste ristlõigete raskuskeskmeid ühendav sirge J'K' moodustab varda esialgse teljega JK nurga  $\vartheta$ , mida nimetatakse varda pöördenurgaks.

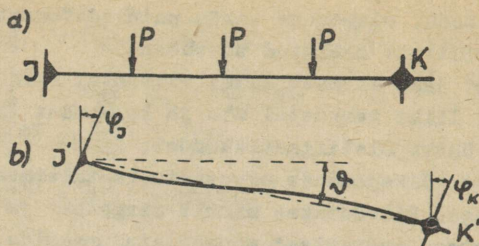
Mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud varda JK reaktsioonid ja paigutused arvutatakse summeerimise teel järgmisest neljast põhjusest:

1) vardale JK mõjuvast koormusest, kui sõlmede J ja K paigutused on nullid:

2) sõlme J pöördumisest nurga  $\varphi_J$  võrra;

3) sõlme K pöördumisest nurga  $\varphi_K$  võrra;

4) varda JK pöördumisest nurga  $\vartheta$  võrra.



joon. 2.15

Märgime veel kord, et sõlmede J ja K pöördenurgad  $\varphi_J$  ja  $\varphi_K$  ning varda pöördenurk  $\delta$  loetakse positiivseks kellaosuti liikumise suunas, samuti ka reaktsioonmomentid  $M_J$  ja  $M_K$  ning põikjõud  $Q_J$  ja  $Q_K$ .

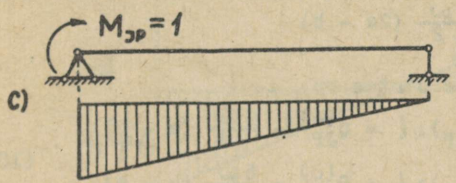
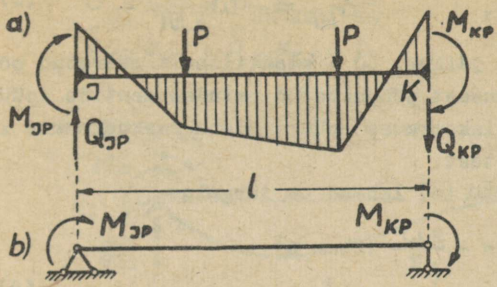
2.52.2 Vardale JK rakendatud koormuse mõju, kui sõlmed J ja K ei saa paigutusi (joon.2.16,a)

Reaktsioonmomentid  $M_{JP}$  ja  $M_{KP}$  arvutatakse jõumeetodiga. Staatiliselt määratud põhiskeem ja põhitundmatud on näidatud joon. 2.16,b. Geomeetriliste tingimuste  $\varphi_J = 0$  ja  $\varphi_K = 0$  alusel koostatakse kaks võrrandit põhitundmatute määramiseks:

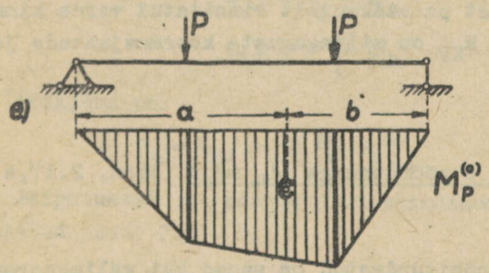
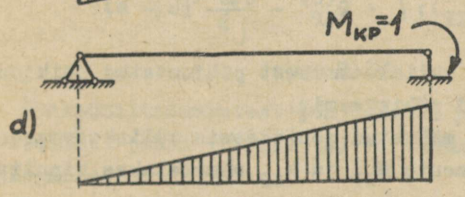
$$\begin{aligned} \delta_{JJ} M_{JP} + \delta_{JK} M_{KP} + \Delta_{JP} &= 0 \\ \delta_{KJ} M_{JP} + \delta_{KK} M_{KP} + \Delta_{KP} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Kasutades ühikpõhitundmatutest  $M_{JP} = 1$ ;  $M_{KP} = 1$  ja väliskoormusest põhjustatud paindemomentide epüüre staatiliselt määratud põhiskeemis (joon. 2.16,e,d,c), arvutatakse võrrandisüsteemis (a) esinevad paigutused:

$$\delta_{JJ} = \frac{l}{3EJ}, \quad \delta_{JK} = \delta_{KJ} = -\frac{l}{6EJ}, \quad \delta_{KK} = \frac{l}{3EJ} \quad (b)$$



Joon. 2.16



$$\Delta_{JP} = \omega \frac{b}{EJl}, \quad \Delta_{KP} = -\omega \frac{a}{EJl} \quad (c)$$

milles EJ on varda jäikus,  $\omega$  - staatiliselt määratud põhiskeemis väliskoormusest põhjustatud paindemomentide epüüri pind, a ja b - väliskoormuse epüüri pinna raskuskeskme kaugused varraste otstest.

Võrrandisüsteemi (a) lahend on järgmine:

$$M_{JP} = -\frac{2\omega}{l^2} (2b - a) \quad (9)$$

$$M_{KP} = \frac{2\omega}{l^2} (2a - b)$$

Põikjõud varraste otstes on:

$$\begin{aligned} Q_{JP} &= Q_{JP}^{(o)} - (M_{JP} + M_{KP}) : l = Q_{JP}^{(o)} - \frac{6\omega}{l^3} (a - b) \\ Q_{KP} &= Q_{KP}^{(o)} - (M_{JP} + M_{KP}) : l = Q_{KP}^{(o)} - \frac{6\omega}{l^3} (a - b) \end{aligned} \quad (10)$$

milles  $Q_{JP}^{(o)}$ ,  $Q_{KP}^{(o)}$  on väliskoormusest põhjustatud põikjõud staatiliselt määratud põhiskeemis.

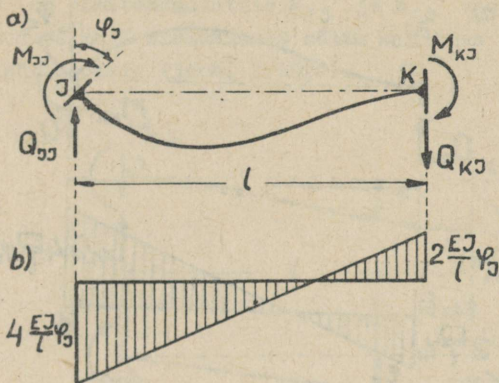
Geomeetriliselt määratud põhiskeemis väliskoormusest põhjustatud paindemomente  $M_{JP}$  ja  $M_{KP}$  nimetatakse kinnitusemomentideks.

Mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud varda kinnitusemomentid  $M_{JP}$  ja  $M_{KP}$  on mitmesuguste koormusjuhtude jaoks antud tabelis 1.

### 2.52.3 Sõlme J pöördnurga $\varphi_J$ mõju (joon. 2.17,a)

Põhiskeem ja põhitundmatud on samad kui väliskoormusest põhjustatud kinnitusemomentide puhul. Põhitundmatute  $M_{JJ}$  ja  $M_{JK}$  määramiseks koostatakse, arvestades geomeetrilisi tingimusi (joon. 2.17,a), kaks järgmist võrrandit:

$$\begin{aligned} \delta_{JJ} M_{JJ} + \delta_{JK} M_{KJ} &= \varphi_J \\ \delta_{KJ} M_{JJ} + \delta_{KK} M_{KJ} &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$



joon. 2.17

Ühikpõhitundmatutest põhjustatud paigutused on samad kui eelmisel juhul (2.5,22 (b)). Võrrandisüsteemi (d) lahend on järgmine:

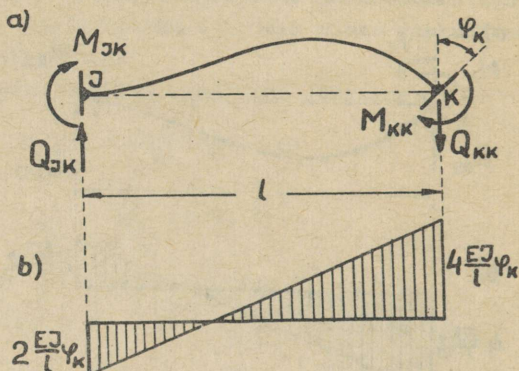
$$\begin{aligned} M_{JJ} &= 4 \frac{EJ}{l} \varphi_J \\ M_{KJ} &= 2 \frac{EJ}{l} \varphi_J \end{aligned} \quad (11)$$

Põikjõud on

$$Q_{JJ} = Q_{KJ} = -6 \frac{EJ}{l^2} \varphi_J \quad (12)$$

Paigutusest  $\varphi_J$  põhjustatud paindemomentide epüür on kujutatud joon. 2.17, b.

2.52.4 Sõlme K pöördnurga  $\varphi_K$  mõju (joon. 2.18, a)



joon. 2.18

Analoogiliselt sõlme J pöördnurga mõjule on reaktsioonmomentid ja põikjõud järgmised:

$$M_{JK} = 2 \frac{EJ}{l} \varphi_K \quad (13)$$

$$M_{KK} = 4 \frac{EJ}{l} \varphi_K$$

$$Q_{JK} = Q_{KK} = -6 \frac{EJ}{l} \varphi_K \quad (14)$$

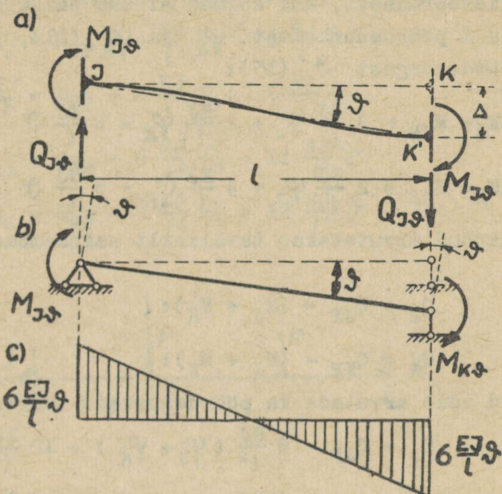
2.52.5 Varda JK pöördnurga  $\vartheta$  mõju (joon. 2.19)

Põhisüsteem ja põhitundmatud on samad kui väliskoormuse puhul (joon. 2.19, b). Põhitundmatute  $M_J$  ja  $M_K$  määramiseks koostatakse, arvestades geomeetrilisi tingimusi (joon. 2.19, a), kaks järgmist võrrandit:

$$\delta_{JJ} M_{J\vartheta} + \delta_{JK} M_{K\vartheta} + \vartheta = 0$$

$$\delta_{KJ} M_{J\vartheta} + \delta_{KK} M_{K\vartheta} + \vartheta = 0 \quad (e)$$

milles  $\vartheta$  on pöhitundmatutele  $M_{J\vartheta}$  ja  $M_{K\vartheta}$  vastav paigutus, põhjustatud sõlme K nihkumisest sõlme J suhtes staatiliselt määratud põhiskeemis (joon. 2.19,b).



joon. 2.19

Ühikpöhitundmatutest põhjustatud paigutused on samad kui väliskoormuse puhul (2.5.22, (b) ).

Võrrandisüsteemi (c) lahend on järgmine:

$$M_{J\vartheta} = M_{K\vartheta} = -6 \frac{EJ}{l} \vartheta \quad (15)$$

või sõlme K suhtelise nihkumise  $\Delta$  funktsioonina

$$M_{J\Delta} = M_{K\Delta} = -6 \frac{EJ}{l^2} \Delta \quad (16)$$

Põikjõud on järgmised:

$$Q_{J\vartheta} = Q_{K\vartheta} = 12 \frac{EJ}{l^2} \vartheta \quad (17)$$

$$Q_{J\Delta} = Q_{K\Delta} = 12 \frac{EJ}{l^2} \Delta \quad (18)$$

2.52.6 Väliskoormusest, sõlmede J ja K ning varda  
pöörumisest põhjustatud reaktsioonid (joon.2.15)

Mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud varda JK otste ristlõigetes arvutatakse paindemomendid summeerimise teel väliskoormusest, kui sõlmed ei saa paigutusi (9), sõlmede J ja K pöördenurkadest  $\varphi_J$  ja  $\varphi_K$  (11), (13) ning varda pöördenurgast  $\vartheta$  (15):

$$M_J = M_{JP} + 4 \frac{EJ}{l} \varphi_J + 2 \frac{EJ}{l} \varphi_K - 6 \frac{EJ}{l} \vartheta \quad (19)$$

$$M_K = M_{KP} + 2 \frac{EJ}{l} \varphi_J + 4 \frac{EJ}{l} \varphi_K - 6 \frac{EJ}{l} \vartheta$$

Põikjõud arvutatakse tavaliselt paindemomentide epüürist

$$Q_J = Q_{JP} - (M_J + M_K) : l \quad (20)$$

$$Q_K = Q_{KP} - (M_J + M_K) : l$$

kuid neid võib arvutada ka pöördenurkade funktsioonidena

$$Q_J = Q_{JP} - 6 \frac{EJ}{l^2} (\varphi_J + \varphi_K) + 12 \frac{EJ}{l^2} \vartheta \quad (21)$$

$$Q_K = Q_{KP} - 6 \frac{EJ}{l^2} (\varphi_J + \varphi_K) + 12 \frac{EJ}{l^2} \vartheta$$

Deformatsioonimeetodi puhul kasutatakse põhitundmatute paigutuskomponentide määramiseks tasakaalutingimusi. Seepärast kontrollitakse lõplikke arvutustulemusi tasakaalutingimustega: nii konstruktsioon tervikuna kui ka iga üksik osa (sõlm, varras) peab rahuldama neid tingimusi.

Kui varras ei pöördu ( $\vartheta = 0$ ), siis avaldisest (19) ja (21) langevad viimased liikmed ära ning paindemomendid ja põikjõud arvutatakse valemitega:

$$M_J = M_{JP} + 4 \frac{EJ}{l} \varphi_J + 2 \frac{EJ}{l} \varphi_K \quad (22)$$

$$M_K = M_{KP} + 2 \frac{EJ}{l} \varphi_J + 4 \frac{EJ}{l} \varphi_K$$

$$\begin{aligned}
 Q_J &= Q_{JP} - 6 \frac{EJ}{l^2} (\varphi_J + \varphi_K) \\
 Q_K &= Q_{KP} - 6 \frac{EJ}{l^2} (\varphi_J + \varphi_K)
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

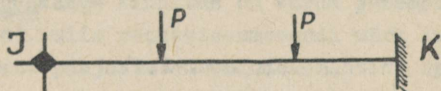
Kui varda JK sõlm K on kange toesõlm (joon. 2.20), siis sõlme K pöördenurk  $\varphi_K = 0$  ja avaldistest (19), (21) langevad ära kolmandad liikmed. Paindemomendid ja põikjõud arvutatakse sel juhul järgmiste valemitega:

$$M_J = M_{JP} + 4 \frac{EJ}{l} \varphi_J - 6 \frac{EJ}{l} \vartheta \tag{24}$$

$$M_K = M_{KP} + 2 \frac{EJ}{l} \varphi_J - 6 \frac{EJ}{l} \vartheta$$

$$Q_J = Q_{JP} - 6 \frac{EJ}{l^2} \varphi_J + 12 \frac{EJ}{l^2} \vartheta \tag{25}$$

$$Q_K = Q_{KP} - 6 \frac{EJ}{l^2} \varphi_J + 12 \frac{EJ}{l^2} \vartheta$$



joon. 2.20

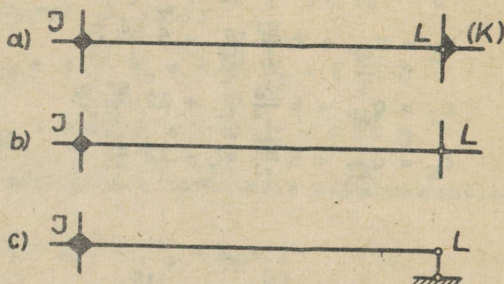
2.53. Ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras (joon. 2.21)

2.53.1 Reaktsioonide ja paigutuste lahutamine kolmeks komponendiks

Joon. 2.21, a kujutatud varda vasakpoolne ots on ühendatud paindekangelt raami vaba kange sõlmega J, kuna teine ots on kinnitatud liigendiga L raami vaba kange sõlme K

külge. Kuna raami vaba kange sõlme K pöördumisest ei teki paindemomente vardas JL, siis selles vardas arvutatakse paindemomente analoogiliselt joon. 2.21, b kujutatud varda paindemomentidega.

Deformatsioonimeetodi juures sirgete varraste kohta tehtud eelduse  $\varepsilon = 0$  põhjal vaadeldakse neid nagu joon. 2.21, c kujutatud varrast.



joon. 2.21

Ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda JL reaktsioonid arvutatakse summeerimise teel järgmistest põhjustest:

- 1) vardale JL mõjuvast koormusest, kui sõlmed JL ei saa paigutusi;
- 2) sõlme J pöördumisest nurga  $\varphi_J$  võrra;
- 3) varda JL pöördumisest nurga  $\vartheta$  võrra.

2.53.2 Vardale JL rakendatud koormuse mõju, kui sõlmed JL ei saa paigutusi (joon. 2.22)

Põhitundmatuks võetakse sõlmes J tekkiv reaktsioonmoment  $M_{JP}$ , mille suurus arvutatakse võrrandist

$$\delta_{JJ} M_{JP} + \Delta_{JP} = 0 \quad (a)$$

Paigutused  $\delta_{JJ}$  ja  $\Delta_{JP}$  arvutatakse staatiliselt määratud põhiskeemis konstrueeritud paindemomentide epüüride abil (joon. 2.22, b, c):

$$\delta_{JJ} = \frac{l}{3EJ} \quad (b)$$

$$\Delta_{JP} = \omega \frac{b}{EJl} \quad (c)$$

Võrrandi (a) lahendamiseks leitakse

$$M_{JP} = -\frac{3b\omega}{l^2} \quad (26)$$

milles  $b$  on väliskoormusest põhjustatud lihttala paindemomentide epüüri pinna raskuskeskme kaugus liigend-sõlmest.

Põikjõud

$$Q_{JP} = Q_{JP}^{(o)} - \frac{M_{JP}}{l} = Q_{JP}^{(o)} + \frac{3\omega}{l^3} b \quad (27)$$

$$Q_{LP} = Q_{LP}^{(o)} - \frac{M_{JP}}{l} = Q_{LP}^{(o)} + \frac{3\omega}{l^3} b$$

Kui paindekange kinnitus on varda parempoolses otsas (joon. 2.22, d), siis reaktsioonmomendi märk on vastupidine. Väliskoormusest põhjustatud paindemomentide epüüri pinna raskuskeskme kaugus võetakse jällegi liigend-sõlmest. Avaldiste (26) ja (27) asemel on siis järgmised valemid:

$$M_{JP} = \frac{3\omega}{l^2} a \quad (28)$$

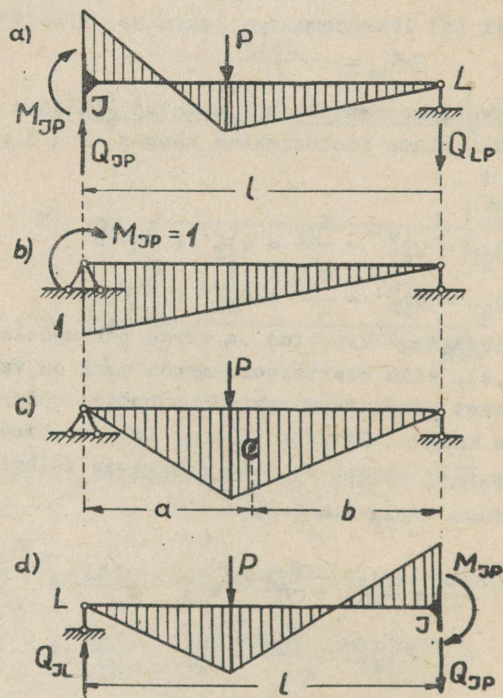
$$Q_{JP} = Q_{JP}^{(o)} - \frac{M_{JP}}{l} = Q_{JP}^{(o)} - \frac{3\omega}{l^3} a \quad (29)$$

$$Q_{LP} = Q_{LP}^{(o)} - \frac{M_{JP}}{l} = Q_{LP}^{(o)} - \frac{3\omega}{l^3} a$$

Kinnitusmomendid mitmesuguste koormusjuhtude jaoks ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda jaoks on antud tabelis 2.

### 2.53.3 Sõlme J pöördemurra $\varphi_J$ mõju (joon. 2.23)

Reaktsioonmoment  $M_{JJ}$  leitakse järgmisest geometriili-



joon. 2.22

sest võrdusest

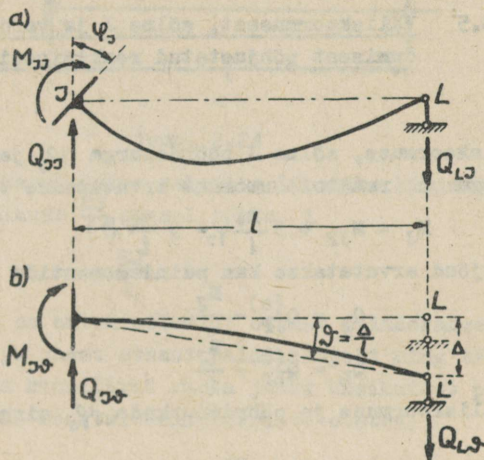
$$\delta_{JJ} M_{JJ} = \varphi_J \quad (d)$$

Jagades võrdust (d) paigutusega  $\delta_{JJ} = \frac{l}{3EJ}$  avaldatakse moment  $M_{JJ}$

$$M_{JJ} = 3 \frac{EJ}{l} \varphi_J \quad (30)$$

Põikjõud on järgmised:

$$Q_{JJ} = Q_{LJ} = -3 \frac{EJ}{l^2} \varphi_J \quad (31)$$



joon. 2.23

#### 2.53.4 Varda JL pöördenurga $\vartheta$ mõju (joon. 2.24)

Võrrandist

$$\delta_{JJ} M_{J\vartheta} + \vartheta = 0 \quad (e)$$

arvutatakse moment sõlmes  $J$  ( $\delta_{JJ} = \frac{l}{3EJ}$ )

$$M_{J\vartheta} = -3 \frac{EJ}{l} \vartheta \quad (32)$$

Põikjõud on

$$Q_{J\vartheta} = Q_{L\vartheta} = 3 \frac{EJ}{l^2} \vartheta \quad (33)$$

Väljendades momenti ja põikjõudu sõlme L suhtelise nihkumise  $\Delta$  funktsioonina, on valemid (32) ja (33) järgmised:

$$M_{J\Delta} = -3 \frac{EJ}{l^2} \Delta \quad (34)$$

$$Q_{J\Delta} = Q_{L\Delta} = 3 \frac{EJ}{l^3} \Delta \quad (35)$$

### 2.53.5 Väliskoormusest, sõlme J ja varda JL pöördumisest põhjustatud reaktsioonid

Väliskoormuse, sõlme J pöördenurga  $\varphi_J$  ja varda JL pöördenurga  $\vartheta$  reaktsioonmoment arvutatakse valemiga

$$M_J = M_{JP} + 3 \frac{EJ}{l} \varphi_J - 3 \frac{EJ}{l} \vartheta \quad (36)$$

Põikjõud arvutatakse kas paindemomentide epüürist

$$Q_J = Q_{JP}^{(o)} - \frac{M_J}{l} \quad (37)$$

$$Q_L = Q_{LP}^{(o)} - \frac{M_J}{l}$$

või ka väliskoormuse ja pöördenurkade  $\varphi_J$  ning  $\vartheta$  funktsioonina

$$Q_J = Q_{JP} - 3 \frac{EJ}{l^2} (\varphi_J - \vartheta) \quad (38)$$

$$Q_L = Q_{LP} - 3 \frac{EJ}{l^2} (\varphi_J - \vartheta)$$

Kui varras ei pöördu ( $\vartheta = 0$ ), siis valemitest (35) ja (37) langevad ära viimased liikmed ning reaktsioonid arvutatakse valemitega

$$M_J = M_{JP} + 3 \frac{EJ}{l} \varphi_J \quad (39)$$

$$Q_J = Q_{JP} - 3 \frac{EJ}{l^2} \varphi_J \quad (40)$$

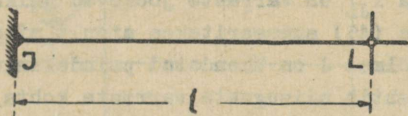
$$Q_L = Q_{LP} - 3 \frac{EJ}{l^2} \varphi_J$$

Kui varda JL sõlm J on kange toesõlm (joon. 2.24), siis  $\varphi_J = 0$  ja reaktsioonid on järgmised:

$$M_J = M_{JP} - 3 \frac{EJ}{l} \vartheta \quad (41)$$

$$Q_J = Q_{JP} + 3 \frac{EJ}{l^2} \vartheta \quad (42)$$

$$Q_L = Q_{LP} + 3 \frac{EJ}{l^2} \vartheta$$



joon. 2.24

Edaspidi kasutatakse valemite lühemaks kirjutamiseks varda paindejäikuse  $\frac{EJ}{l}$  asemel tähte  $i$

$$\frac{EJ}{l} = i \quad (43)$$

Tabelis 3 on antud mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud varda ja ühest otsast paindekangelt ning teisest otsast liigendiga kinnitatud varda jaoks üksikutest paigutus-test põhjustatud reaktsioonid varraste otstes.

## 2.6 NIHKUMATUTE SÖLMEDEGA RAAMIDE ARVUTAMINE

### 2.6.1 Staatika tasakaalutingimused $R_J = 0$

Nihkumatute sõlmedega raami varraste vabadusaste  $w = 0$  ja raami koormamisel vardad ei pöördu. Põhitundmatuteks on vabade kangete sõlmede pöördenurgad  $\varphi_J$ . Raami geomeetrilise määramatuse aste  $n = s_3$ . Raami iga vaba kange sõlme  $J$  ( $J = A, B, C \dots N$ ;  $A + B + C + \dots + N = s_3$ ) kohta koostatakse momentide tasakaalutingimus  $R_J = 0$ . Geo-

meetriselt määratud põhiskeemi sõlmes J tekkivad momendid on põhjustatud sõlme J enda ja naabersõlme K pöördumisest ning väliskoormusest.

Sõlme J pöördumisest nurga  $\varphi_J$  võrra tekib moment  $r_{JJ} \varphi_J$ , milles  $r_{JJ}$  on sõlme J pöördenurgast  $\varphi_J = 1$  põhjustatud reaktsioon sidemes J ja arvutatakse valemiga

$$r_{JJ} = \sum_K 4i_{JK} + \sum_L 3i_{JL} \quad (45)$$

milles  $i_{JK}$  ja  $i_{JL}$  on varraste jooksvad jääkused.

Valemiga (45) summeeritakse ainult niisuguste varraste puhul, mis sõlmes J on ühendatud paindekangelt. Summeerimine K järgi kehtib niisuguste varraste kohta, mis ka teisest otsast on kinnitatud paindekangelt, ja L järgi niisuguste varraste kohta, mille teises otsas on liigend.

Mõlemas sõlmes (J ja K) paindekangelt kinnitatud varda sõlme K pöördumine nurga  $\varphi_K = 1$  võrra tekitab sõlmes J momenti

$$r_{JK} = 2 i_{JK} \quad (46)$$

Kõigi sõlme J mõlemas otsas paindekangelt kinnitust omavate varrastega ühendatud sõlmede K pöördumistest põhjustatud momentide summa sõlmes J arvutatakse nüüd valemiga

$$\sum_K r_{JK} \varphi_K = \sum_K 2i_{JK} \varphi_K \quad (47)$$

Sõlmes J paindekangelt kinnitatud varrastele mõjuv koormus tekitab geomeetriselt määratud põhiskeemi sidemes J momenti

$$r_{JP} = \sum_K M_{JP}^{(K)} + \sum_L M_{JP}^{(L)} \quad (48)$$

milles momendid  $M_{JP}^{(K)}$  ja  $M_{JP}^{(L)}$  arvutatakse tabelites 1 ja 2 esitatud valemitega.

Tasakaalu puhul kõigi sõlmes J tekkivate momentide summa võrdub nulliga

$$r_{JJ} \varphi_J + \sum_K r_{JK} \varphi_K + r_{JP} = 0 \quad (49)$$

$$(J = A, B, C, \dots, N)$$

milles  $r_{JJ}$ ,  $r_{JK}$  ja  $r_{JP}$  arvutatakse valemitega (45), (46) ja (48).

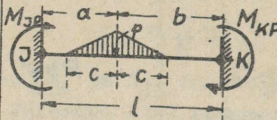
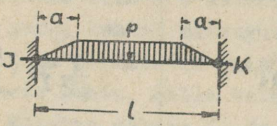
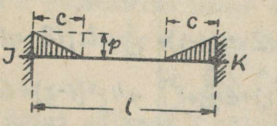
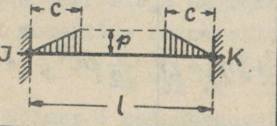
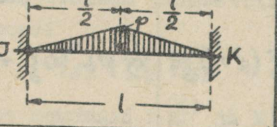
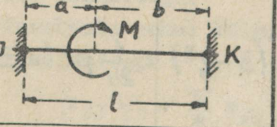
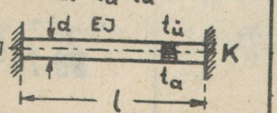
Tabel 1. Kinnitussmomendid mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varrastes

$$a:l = \xi \quad b:l = \eta \quad c:l = \zeta$$

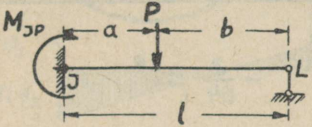
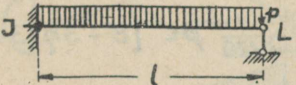
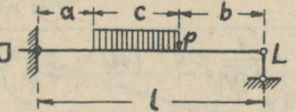
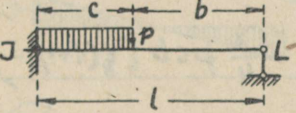
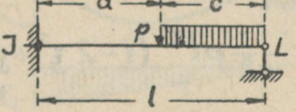
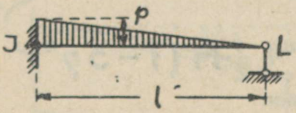
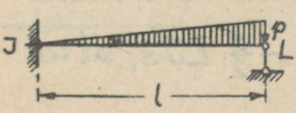
Koormusskeem	$M_{JP}$	$M_{KP}$
	$-Pa\eta^2$	$Pb\xi^2$
	$-\frac{1}{12}pl^2$	$\frac{1}{12}pl^2$
	$-\frac{1}{12}plc [12\xi\eta(1-\xi) + 4\xi^2(1-\xi) + 6\xi^2\xi^3]$	$\frac{1}{12}plc [12\xi\eta(1-\eta) + 4\xi^2(1-\xi) + 6\xi^2\xi + \xi^3]$
	$-\frac{1}{12}pc^2(6\eta^2 + 3\eta\xi + \xi)$	$\frac{1}{12}pc^2\xi(1 + 3\eta)$
	$-\frac{1}{12}pc^2\xi(1 + 3\xi)$	$\frac{1}{12}pc^2(6\xi^2 + 3\xi\xi + \xi)$
	$-\frac{1}{24}pcl(3 - \xi^2)$	$\frac{1}{24}pcl(3 - \xi^2)$
	$-\frac{1}{30}pl^2$	$\frac{1}{20}pl^2$

Tabel 1 (järg). Kinnitusmomendid mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varrastes

$$a:l = \xi \quad b:l = \eta \quad c:l = \zeta$$

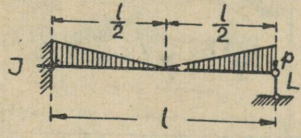
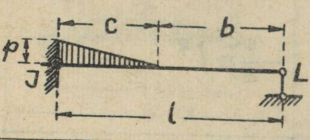
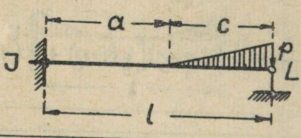
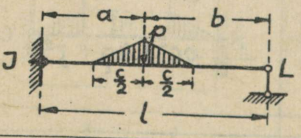
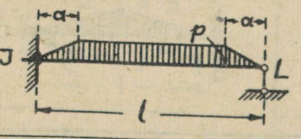
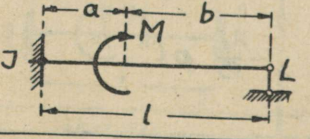
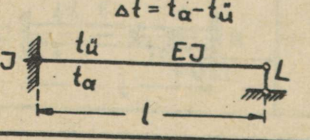
Koormusskeem	$M_{JP}$	$M_{KP}$
<p>8</p> 	$-\frac{1}{6} p c l [6 \xi \eta^2 + \zeta^2 (\xi - 2 \eta)]$	$\frac{1}{6} p c l [6 \xi \eta^2 + \zeta^2 (\eta - 2 \xi)]$
<p>9</p> 	$-\frac{1}{12} p l^2 (1 - 2 \xi^2 + \xi^3)$	$\frac{1}{12} p l^2 (1 - 2 \eta^2 + \eta^3)$
<p>10</p> 	$-\frac{1}{12} p c^2 (2 - \zeta)$	$\frac{1}{12} p c^2 (2 - \zeta)$
<p>11</p> 	$-\frac{1}{12} p c^2 (4 - 3 \zeta)$	$\frac{1}{12} p c^2 (4 - 3 \zeta)$
<p>12</p> 	$-\frac{5}{96} p l^2$	$\frac{5}{96} p l^2$
<p>13</p> 	$+ M \eta (2 - 3 \eta)$	$M \xi (2 - 3 \xi)$
<p>14</p> 	$- E J \alpha_t \Delta t : d$	$E J \alpha_t \Delta t : d$

Tabel 2. Kinnituumomendid ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varrastes  
 $a:l=\xi$   $b:l=\eta$   $c:l=\zeta$

Koormusskeem	$M_{JP}$
	$-\frac{1}{2} Pl \eta (1-\eta^2)$
	$-\frac{1}{8} pl^2$
	$-\frac{1}{4} pcl (2\eta + \zeta) \left[ \frac{\xi}{8} (1+\eta) + \zeta \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta \right) \right]$
	$-\frac{1}{8} pc^2 (4\eta + \zeta^2)$
	$-\frac{1}{8} pc^2 (2 - \zeta^2)$
	$-\frac{1}{15} pl^2$
	$-\frac{7}{120} pl^2$

Tabel 2 (järg). Kinnitussmomendid ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varrastes

$$a:l=\xi \quad b:l=\eta \quad c:l=\zeta$$

Koormusskeem	$M_{JP}$
<p>8</p> 	$-\frac{3}{64} pl^2$
<p>9</p> 	$-\frac{1}{120} pc^2 [8 + 3\eta(3+\eta)]$
<p>10</p> 	$-\frac{1}{120} pc^2 (10 - 3\zeta^2)$
<p>11</p> 	$-\frac{1}{4} pcb \left[ \frac{1}{3}(1+\eta) - \frac{1}{8}\zeta^2 \right]$
<p>12</p> 	$-\frac{1}{8} pl^2 (1 - 2\xi^2 + \xi^3)$
<p>13</p> 	$+\frac{1}{2} M (1 - 3\eta^2)$
<p>14</p>  <p style="text-align: center;"><math>\Delta t = t_\alpha - t_\text{ü}</math></p>	$-\frac{3}{2} EJ \alpha_t \Delta t : d$

Tabel 3. Paigutustest põhjustatud reaktsioonmomentid.

Deformeerunud kuju ja momentide epüür		$M_J$ ja $M_K$
$\varphi_J$		$M_{JJ} = 4i\varphi_J$ $M_{KK} = 2i\varphi_J$
$\varphi_K$		$M_{JK} = 2i\varphi_K$ $M_{KK} = 4i\varphi_K$
$\vartheta$		$M_{J\delta} = -6i\delta$ $M_{K\delta} = -6i\delta$
$\varphi_J$		$M_{JJ} = 3i\varphi_J$
$\vartheta$		$M_{J\delta} = -3i\delta$

Kuna iga vaba kange sõlme  $J$  ( $J = A, B, C, \dots, N$ ) kohta koostatakse üks võrrand, siis on võrrandeid niisama palju kui tundmatuid. Võrrandite lahendamisega leitakse sõlmede pöördenurgad.

Pärast pöördenurkade määramist arvutatakse paindemomentid mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud varrastes valemitega (22) ja ühest otsast paindekangelt ning teisest otsast liigendkinnitusega varrastes valemiga (39).

Põikjõud arvutatakse kas paindemomentide epüürist või põhitundmatute kaudu valemitega (23) ja (40).

Paindemomentide ja põikjõudude arvutamisel asendatakse valemites (22), (23), (39) ja (40) varda ühikjäikus  $\frac{EJ}{l}$  tähega  $i$  (43).

## 2.62 Arvutusnäide

1. Ülesanne. Arvutada joon. 2.25 kujutatud raami paindemomentide, põik- ja normaaljõudude epüürid.

2. Geomeetrilise määramatuse aste. Vabade kangete sõlmede arv  $s_3 = 5$ , varraste arv  $v = 10$  ja raami varraste vabadusaste

$$w = 2.5 - 10 = 0$$

Sama tulemus saadakse muidugi ka raami varrasahela jaoks:

$$w = 2.5 - v - t = 2.11 - 10 - 12 = 0$$

Raami geomeetrilise määramatuse aste on

$$n = s_3 + w = 5 + 0 = 5$$

ja põhitundmatuteks on sõlmede  $A, B, C, D$  ja  $E$  pöördenurgad  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$  ja  $\varphi_E$ .

3. Koormus. Geomeetrilised andmed. Varraste ühikjäikused.

Koondatud jõud:  $P_1 = P_2 = 5, P_3 = P_5 = 3 \text{ t}, P_4 = P_6 = 4 \text{ t}, P_7 = 1 \text{ t}$  ja  $W = 1 \text{ t}$ .

Jaotatud koormus  $p = 2 \text{ t/m}$ .

Ava pikkused:  $l = 6 \text{ m}$  ja  $l_1 = 4 \text{ m}$ .

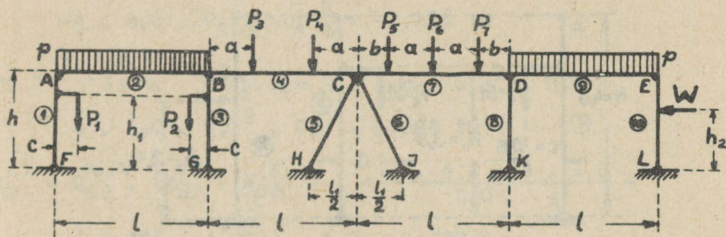
Konsooli pikkus  $c = 0,8 \text{ m}$  ja raami kõrgus  $h = 4 \text{ m}$ .

Muud mõõtmed:  $h_1 = 3,0$  m,  $h_2 = 2,4$  m,  $a = 1,8$  m ja  $b = 1,2$  m.

Varraste jooksvad jäikused  $i = \frac{EJ}{l}$  :

$$i_1 = 3, i_2 = 4, i_3 = 3, i_4 = 4, i_5 = 2$$

$$i_6 = 2, i_7 = 5, i_8 = 2, i_9 = 4, i_{10} = 2$$



joon. 2.25

4. Unikaigutustest põhjustatud reaktsioonid.

$$r_{AA} = 3i_1 + 4i_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$$

$$r_{AB} = r_{BA} = 2i_2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$r_{BB} = 4i_2 + 4i_3 + 4i_4 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 44$$

$$r_{BC} = r_{CB} = 2i_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$r_{CC} = 4i_4 + 4i_5 + 4i_6 + 4i_7 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 52$$

$$r_{CD} = r_{DC} = 2i_7 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$r_{DD} = 4i_7 + 4i_8 + 4i_9 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 44$$

$$r_{DE} = r_{ED} = 2i_9 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$r_{EE} = 4i_9 + 3i_{10} = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 22$$

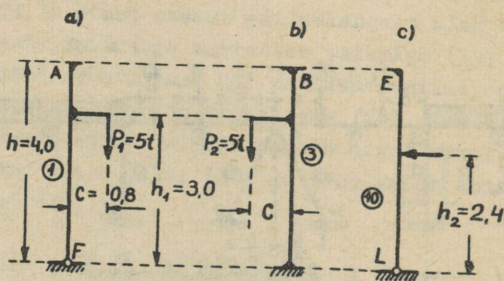
5. Kinnitusemomendid ja -põikjõud geomeetriliselt määratud põhiskeemis.

Varras 1. (joon. 2.26,a):

$$\eta = \frac{h_1}{h} = \frac{3,0}{4,0} = 0,75$$

$$M_{AP} = \gamma_2 M (1 - 3\eta^2) = \gamma_2 \cdot 5 \cdot 0,8 (1 - 3 \cdot 0,75^2) = -1,375 \text{ tm}$$

$$Q_{FP}^{(1)} = Q_{AP}^{(1)} = Q_{AP}^{(1),(0)} - M_{AP}^{(1)} : h = -\frac{5 \cdot 0,8}{4} - \frac{-1,375}{4} = -0,656 \text{ t}$$



joon. 2.26

Varras 2:

$$M_{AP}^{(2)} = -\frac{1}{12} p l^2 = -\frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 6,0^2 = 6,0 \text{ tm}$$

$$M_{BP}^{(2)} = \frac{1}{12} p l^2 = 6,0 \text{ tm}$$

$$Q_{AP}^{(2)} = -Q_{BP}^{(2)} = \gamma_2 \cdot 2 \cdot 6 = 6,0 \text{ t}$$

Varras 3 (joon. 2.26, b):

$$\xi = \frac{h-h_1}{h} = \frac{1,0}{4,0} = 0,25 \quad \eta = \frac{h_1}{h} = \frac{3,0}{4,0} = 0,75$$

$$M_{BP}^{(3)} = M \eta (2 - 3\eta) = -5 \cdot 0,8 \cdot 0,75 (2 - 3 \cdot 0,75) = 0,75 \text{ tm}$$

$$M_{GP}^{(3)} = M \xi (2 - 3\xi) = -5 \cdot 0,8 \cdot 0,25 (2 - 3 \cdot 0,25) = -1,25 \text{ tm}$$

$$Q_{BP}^{(3)} = Q_{GP}^{(3)} = Q_{BP}^{(3),(0)} - (M_{BP}^{(3)} + M_{GP}^{(3)}) : h = \frac{5 \cdot 0,8}{4} - (0,75 - 1,25) : h = 1,125 \text{ t}$$

Varras 4 (joon. 2.27) :

$$\xi_3 = \frac{x_3}{l} = \frac{1,8}{6,0} = 0,3 \quad \eta_3 = 0,7$$

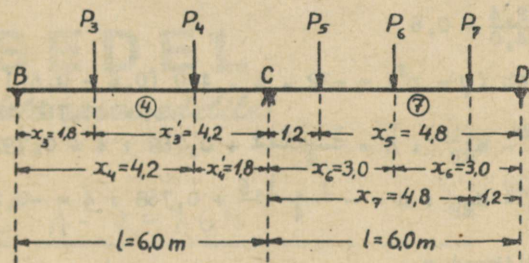
$$\xi_4 = \frac{x_4}{l} = \frac{4,2}{6,0} = 0,7 \quad \eta_4 = 0,3$$

$$M_{BP}^{(4)} = -P_3 l \xi_3 \eta_3^2 - P_4 l \xi_4 \eta_4^2 = -2 \cdot 6,0 \cdot 0,3 \cdot 0,7^2 - 4 \cdot 6,0 \cdot 0,7 \cdot 0,3^2 = -3,276 \text{ tm}$$

$$M_{CP} = P_3 l \xi_3^2 \eta_3 + P_4 l \xi_4^2 \eta_4 = 2 \cdot 6,0 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7 + 4 \cdot 6,0 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3 = 4,284 \text{ tm}$$

$$Q_{BP}^{(4)} = Q_{BP}^{(4),(0)} - (M_{BP}^{(4)} + M_{CP}^{(4)}) : l = \frac{2 \cdot 4,2 + 4 \cdot 1,8}{6,0} - (-3,276 + 4,284) : 6,0 = 2,432 \text{ t}$$

$$Q_{CP}^{(4)} = Q_{CP}^{(4),(0)} - (M_{BP}^{(4)} + M_{CP}^{(4)}) : l = -\frac{2 \cdot 1,8 + 4 \cdot 4,2}{6,0} - (-3,276 + 4,284) : 6,0 = -3,568 \text{ t}$$



joon. 2.27

Varras 7 (joon. 2.27)

$$\xi_5 = \frac{1,2}{6,0} = 0,2 \quad \eta_5 = 0,8$$

$$\xi_6 = \frac{3,0}{6,0} = 0,5 \quad \eta_6 = 0,5$$

$$\xi_7 = \frac{4,8}{6,0} = 0,8 \quad \eta_7 = 0,2$$

$$M_{CP}^{(7)} = -P_5^1 \delta_5^2 \eta_5^2 - P_6^1 \delta_6^2 \eta_6^2 - P_7^1 \delta_7^2 \eta_7^2 =$$

$$= -2 \cdot 6,0 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 - 4 \cdot 6,0 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 -$$

$$- 1 \cdot 6,0 \cdot 0,8 \cdot 0,2^2 = -4,728 \text{ tm}$$

$$M_{DP}^{(7)} = P_5^1 \delta_5^2 \eta_5^2 + P_6^1 \delta_6^2 \eta_6^2 + P_7^1 \delta_7^2 \eta_7^2 = 2 \cdot 6,0 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8 +$$

$$+ 4 \cdot 6,0 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 6,0 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 =$$

$$= 4,152 \text{ tm}$$

$$Q_{CP}^{(7)} = Q_{CP}^{(7),(0)} - (M_{CP}^{(7)} + M_{DP}^{(7)}) : l = \frac{2 \cdot 4,8 + 4 \cdot 3,0 + 1 \cdot 1,2}{6,0} -$$

$$- (-4,728 + 4,152) : 6,0 = 3,896 \text{ t}$$

$$Q_{DP}^{(7)} = Q_{DP}^{(7),(0)} - (M_{CP}^{(7)} + M_{DP}^{(7)}) : l = \frac{2 \cdot 1,2 + 4 \cdot 3,0 + 4,8}{6,0} -$$

$$- (-4,728 + 4,152) : 6,0 = -3,104 \text{ t}$$

Varras 9:

$$M_{DP}^{(9)} = -M_{EP}^{(9)} = -\frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 6,0^2 = -6,0 \text{ tm}$$

$$Q_{DP}^{(9)} = -Q_{EP}^{(9)} = 1/2 \cdot 6,0 \cdot 2 = 6,0 \text{ t}$$

Varras 10 (joon. 2.26,c)

$$\eta = \frac{2,4}{4,0} = 0,6$$

$$M_{EP}^{(10)} = -1/2 Wh (\eta - \eta^3) = -1/2 \cdot 1 \cdot 4,0 (0,6 - 0,6^3) =$$

$$= -0,768 \text{ tm}$$

$$Q_{EP}^{(10)} = Q_{EP}^{(10),(0)} - M_{EP}^{(10)} : h = \frac{1 \cdot 2,4}{4} + 0,768 : 4 = 0,792 \text{ t}$$

$$Q_{LP}^{(10)} = Q_{LP}^{(10),(0)} - M_{EP}^{(10)} : h = -\frac{1 \cdot 1,6}{4} + 0,768 : 4 = -0,208 \text{ t}$$

6. Koormusliikmed  $r_{JP}$

$$r_{AP} = M_{AP}^{(1)} + M_{AP}^{(2)} = -1,375 - 6,0 = -7,375 \text{ tm}$$

$$r_{BP} = M_{BP}^{(2)} + M_{BP}^{(3)} + M_{BP}^{(4)} = 6,0 + 0,75 - 3,276 = 3,474 \text{ tm}$$

$$r_{CP} = M_{CP}^{(4)} + M_{CP}^{(7)} = 4,284 - 4,728 = -0,444 \text{ tm}$$

$$r_{DP} = M_{DP}^{(7)} + M_{DP}^{(9)} = 4,152 - 6,0 = -1,848 \text{ tm}$$

$$r_{EP} = M_{EP}^{(9)} + M_{EP}^{(10)} = 6,0 - 0,768 = 5,232 \text{ tm}$$

7. Tasakaaluvõrrandid ja põhitundmatute arvutamine.

$$\begin{aligned}
 r_{AA} \varphi_A + r_{AB} \varphi_B &+ r_{AP} = 0 \\
 r_{BA} \varphi_A + r_{BB} \varphi_B + r_{BC} \varphi_C &+ r_{BP} = 0 \\
 r_{CB} \varphi_B + r_{CC} \varphi_C + r_{CD} \varphi_D &+ r_{CP} = 0 \quad (a) \\
 r_{DC} \varphi_C + r_{DD} \varphi_D + r_{DE} \varphi_E + r_{DP} &= 0 \\
 r_{ED} \varphi_D + r_{EE} \varphi_E + r_{EP} &= 0
 \end{aligned}$$

Võrrandisüsteem (a), milles reaktsioonid  $r_{JK}$  ja  $r_{JP}$  on asendatud arvsuurustega, on järgmine:

$$\begin{aligned}
 25 \varphi_A + 8 \varphi_B &- 7,375 = 0 \\
 8 \varphi_A + 44 \varphi_B + 8 \varphi_C &+ 3,474 = 0 \\
 8 \varphi_B + 52 \varphi_C + 10 \varphi_D &- 0,444 = 0 \quad (b) \\
 10 \varphi_C + 44 \varphi_D + 8 \varphi_E &- 1,848 = 0 \\
 8 \varphi_D + 22 \varphi_E + 5,232 &= 0
 \end{aligned}$$

ja lahendatakse eliminatsioonimeetodiga (Tabel 4).

8. Paindemomendid arvutatakse, arvestades tähistust (42), valemitega (22) ja (39).

$$\begin{aligned}
 M_A^{(1)} &= M_{AP}^{(1)} + 3i_1 \varphi_A = -1,375 + 9 \cdot 0,3409 = 1,693 \text{ tm} \\
 M_A^{(2)} &= M_{AP}^{(2)} + 4i_2 \varphi_A + 2i_2 \varphi_B = -6,0 + 16 \cdot 0,3409 + 8(-0,1434) = \\
 &= 1,693 \text{ tm}
 \end{aligned}$$

$$\text{Kontroll: } M_A^{(1)} + M_A^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned}
 M_B^{(2)} &= M_{BP}^{(2)} + 2i_2 \varphi_A + 4i_2 \varphi_B = 6,0 + 8 \cdot 0,3409 + 16(-0,1434) = \\
 &= 6,433 \text{ tm}
 \end{aligned}$$

$$M_B^{(3)} = M_{BP}^{(3)} + 4i_3 \varphi_B = 0,75 + 12(-0,1434) = -0,971 \text{ tm}$$

$$\begin{aligned}
 M_B^{(4)} &= M_{BP}^{(4)} + 4i_4 \varphi_B + 2i_4 \varphi_C = -3,276 + 16(-0,1434) + \\
 &+ 8 \cdot 0,0137 = -5,461 \text{ tm}
 \end{aligned}$$

$$\text{Kontroll: } M_B^{(2)} + M_B^{(3)} + M_B^{(4)} = 0,001$$

$$M_G = M_{GP} + 2i_3 \varphi_B = -1,25 + 6(-0,1434) = -2,110 \text{ tm}$$

$$\begin{aligned}
 M_C^{(4)} &= M_{CP}^{(4)} + 2i_4 \varphi_B + 4i_4 \varphi_C = 4,284 + 8(-0,1434) + \\
 &+ 16 \cdot 0,0137 = 3,356 \text{ tm}
 \end{aligned}$$

$$M_C^{(5)} = M_{CP}^{(5)} + 4i_5 \varphi_C = 0 + 8 \cdot 0,0137 = 0,110 \text{ tm}$$

Tabel 4

Vörrand sölme jaoks	$\varphi_A$	$\varphi_B$	$\varphi_C$	$\varphi_D$	$\varphi_E$	$-r_{JP}$	Kontroll
A	25	8				7,375	40,375
B	8	44	8			-3,474	56,526
C		8	52	10		0,444	70,444
D			10	44	8	1,848	63,848
E				8	22	-5,232	24,768
A	25,0	0,32000				0,29500	1,61500
B	8,0	41,44000	0,19305			-0,14078	1,05227
C		8,0	50,45560	0,19819		0,03112	1,22932
D			10,0	42,01810	0,19039	0,03657	1,22697
E				8,0	20,47688	-0,26980	0,73020
$\varphi_J$	0,34089	-0,14342	0,01369	0,08794	-0,26980		
$\varphi_J + 1$	1,34089	0,85658	1,01370	1,08795	0,73020		

$$M_C^{(6)} = M_{CP}^{(6)} + 4i_6 \varphi_C = 0 + 8 \cdot 0,0137 = 0,110 \text{ tm}$$

$$M_C^{(7)} = M_{CP}^{(7)} + 4i_7 \varphi_C + 2i_7 \varphi_D = -4,728 + 20 \cdot 0,0137 + 10 \cdot 0,0879 = -3,575 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_C^{(4)} + M_C^{(5)} + M_C^{(6)} + M_C^{(7)} = 0,001$$

$$M_H = M_{HP} + 2i_5 \varphi_C = 0 + 4 \cdot 0,0137 = 0,055 \text{ tm}$$

$$M_J = M_{JP} + 2i_6 \varphi_C = 0 + 4 \cdot 0,0137 = 0,055 \text{ tm}$$

$$M_D^{(7)} = M_{DP}^{(7)} + 2i_7 \varphi_C + 4i_7 \varphi_D = 4,152 + 10 \cdot 0,0137 + 20 \cdot 0,0879 = 6,047 \text{ tm}$$

$$M_D^{(8)} = M_{DP}^{(8)} + 4i_8 \varphi_D = 0 + 8 \cdot 0,0879 = 0,703 \text{ tm}$$

$$M_D^{(9)} = M_{DP}^{(9)} + 4i_9 \varphi_D + 2i_9 \varphi_E = -6,0 + 16 \cdot 0,0879 + 8(-0,2698) = -6,752 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_D^{(7)} + M_D^{(8)} + M_D^{(9)} = -0,002$$

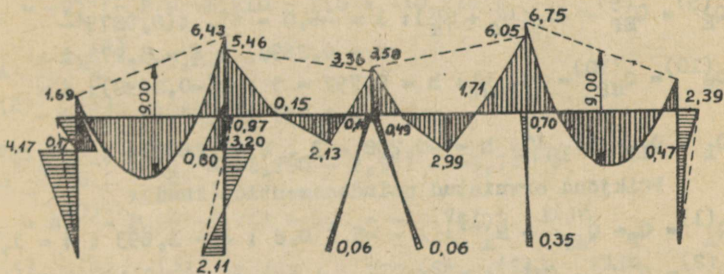
$$M_K = M_{KP} + 2i_8 \varphi_D = 0 + 4 \cdot 0,0879 = 0,352 \text{ tm}$$

$$M_E^{(9)} = M_{EP}^{(9)} + 2i_9 \varphi_D + 4i_9 \varphi_E = 6,0 + 8 \cdot 0,0879 + 16(-0,2698) = 2,386 \text{ tm}$$

$$M_E^{(10)} = M_{EP}^{(10)} + 3i_{10} \varphi_E = -0,768 + 6(-0,2698) = -2,387 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_E^{(9)} + M_E^{(10)} = -0,001$$

Joon. 2.28 on esitatud paindemomentide epiüür.



joon. 2.28

9. Põikjõud arvutatakse valemitega (20) ja (37) või (23) ja (40).

$$Q_A^{(1)} = Q_P = Q_{AP}^{(1)} - 3i_1 \varphi_A : h = -0,656 - 9 \cdot 0,3409 : 4 = -1,423 \text{ t}$$

$$\begin{aligned}
Q_A^{(2)} &= Q_{AP}^{(2)} - 6i_2(\varphi_A + \varphi_B) : 1 = 6,0 - 24(0,3409 - 0,1434) : 6 = 5,210 \text{ t} \\
Q_B^{(2)} &= Q_{BP}^{(2)} - 6i_2(\varphi_A + \varphi_B) : 1 = -6,0 - 24(0,3409 - 0,1434) : 6 = -6,790 \text{ t} \\
Q_B^{(3)} &= Q_{BP}^{(3)} - 6i_3 \varphi_B : h = 1,125 - 18(-0,1434) : 4 = 1,770 \text{ t} \\
Q_G^{(4)} &= Q_{BP}^{(4)} - 6i_4(\varphi_B + \varphi_C) : 1 = 2,432 - 24(-0,1434 + 0,0137) : 6 = 2,951 \text{ t} \\
Q_C^{(4)} &= Q_{CP}^{(4)} - 6i_4(\varphi_B + \varphi_C) : 1 = -3,568 - 24(-0,1434 + 0,0137) : 6 = -3,049 \text{ t} \\
Q_C^{(5)} &= Q_H - 6i_5 \varphi_C : \sqrt{h^2 + (\frac{1}{2})^2} = -6 \cdot 2 \cdot 0,0137 : \sqrt{20} = -0,037 \text{ t} \\
Q_C^{(6)} &= Q_J - 6i_6 \varphi_C : \sqrt{h^2 + (\frac{1}{2})^2} = -6 \cdot 2 \cdot 0,0137 : \sqrt{20} = -0,037 \text{ t} \\
Q_C^{(7)} &= Q_{CP}^{(7)} - 6i_7(\varphi_C + \varphi_D) : 1 = 3,896 - 6 \cdot 5(0,0137 + 0,0879) : 6 = 3,388 \text{ t} \\
Q_D^{(7)} &= Q_{DP}^{(7)} - 6i_7(\varphi_C + \varphi_D) : 1 = -3,104 - 6 \cdot 5(0,0137 + 0,0879) : 6 = -3,612 \text{ t} \\
Q_D^{(8)} &= Q_K - Q_{DP}^{(8)} - 6i_8 \varphi_D : h = 0 - 6 \cdot 2 \cdot 0,0879 : 4 = 0,264 \text{ t} \\
Q_D^{(9)} &= Q_{DP}^{(9)} - 6i_9(\varphi_D + \varphi_E) : 1 = 6,0 - 6 \cdot 4(0,0879 - 0,2698) : 6 = 6,728 \text{ t} \\
Q_E^{(9)} &= Q_{EP}^{(9)} - 6i_9(\varphi_D + \varphi_E) : 1 = -6,0 - 6 \cdot 4(0,0879 - 0,2698) : 6 = 5,272 \text{ t} \\
Q_E^{(10)} &= Q_{EP}^{(10)} - 3i_{10} \varphi_E : h = 0,792 - 3 \cdot 2(-0,2698) : 4 = 1,197 \text{ t} \\
Q_L &= Q_{LP} - 3i_{10} \varphi_E : h = -0,208 - 3 \cdot 2(-0,2698) : 4 = 0,197 \text{ t}
\end{aligned}$$

Pöikjõud arvutatud paindemomentide kaudu:

$$\begin{aligned}
Q_A^{(1)} &= Q_F - Q_{AP}^{(1),(0)} - M_A^{(1)} : 1 = -5 \cdot 0,8 : 4 - 1,693 : 4 = 1,423 \text{ t} \\
Q_A^{(2)} &= Q_{AP}^{(2),(0)} - (M_A^{(2)} + M_B^{(2)}) : 1 = 0,5 \cdot 6 \cdot 2 - (-1,693 + 6,433) : 6 = 5,210 \text{ t} \\
Q_B^{(2)} &= Q_{BP}^{(2),(0)} - (M_A^{(2)} + M_B^{(2)}) : 1 = -0,5 \cdot 6 \cdot 2 - (-1,693 + 6,433) : 6 = -6,790 \text{ t} \\
Q_G^{(3)} &= Q_{GP}^{(3)} - (M_B^{(3)} + M_G) : h = 5 \cdot 0,8 : 4 - (-0,971 - 2,110) : 4 = 1,770 \text{ t}
\end{aligned}$$

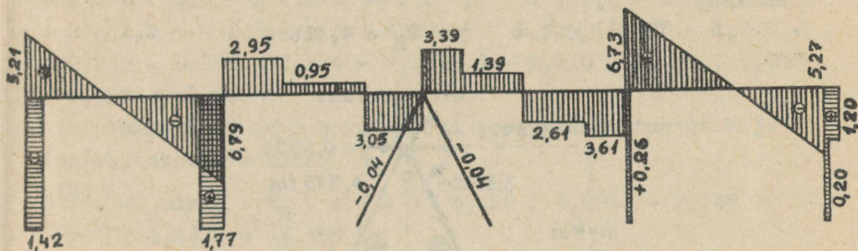
$$Q_B^{(4)} = Q_{BP}^{(4),(0)} - (M_B^{(4)} + M_C^{(4)}) : 1 = (2 \cdot 4,2 + 4 \cdot 1,8) : 6 - (-5,461 + 3,356) : 6 = 2,951 \text{ t}$$

$$Q_C^{(4)} = Q_{CP}^{(4),(0)} - (M_B^{(4)} + M_C^{(4)}) : 1 = -(2 \cdot 1,8 + 4 \cdot 4,2) : 6 - (5,461 + 3,356) : 6 = -3,049 \text{ t}$$

$$Q^{(5)} = -(M_C^{(5)} + M_H^{(5)}) : 1_5 = -(0,110 + 0,055) : 20 = -0,037 \text{ t}$$

Ülejäänud põikjõud arvutatakse analoogiliselt.

Põikjõudude epüüri on kujutatud joon. 2.29.



joon. 2.29

Normaaljõud arvutatakse tasakaalutingimustest.

$$N_P = -Q_A^{(2)} - P_1 = -5,210 - 5,0 = -10,210 \text{ t}$$

$$N_A^{(1)} = -Q_A^{(2)} = -5,210 \text{ t}$$

$$N^{(2)} = Q_A^{(1)} = -1,423 \text{ t}$$

$$N_B^{(3)} = Q_B^{(2)} - Q_B^{(4)} = -6,790 - 2,951 = -9,741 \text{ t}$$

$$N_G = N_B^{(3)} - P_2 = -9,741 - 5,0 = -14,741 \text{ t}$$

$$N^{(4)} = Q_A^{(1)} + Q_B^{(3)} = -1,423 + 1,770 = 0,347 \text{ t}$$

$$N^{(10)} = Q_B^{(9)} = -5,273 \text{ t}$$

$$N^{(9)} = -Q_B^{(10)} = -1,197 \text{ t}$$

$$N^{(8)} = Q_D^{(7)} - Q_D^{(9)} = -3,612 - 6,728 = -10,340 \text{ t}$$

$$N^{(7)} = -Q_E^{(10)} - Q_D^{(8)} = -1,197 + 0,264 = -0,933 \text{ t}$$

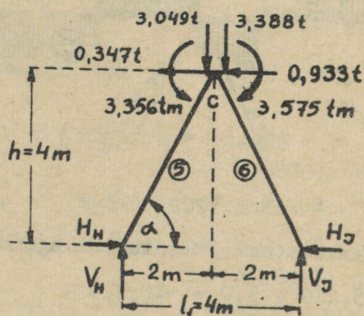
Lõikega teistest varrastest ja tugedest eraldatud raami osa, mis koosneb varrastest 5 ja 6 ning sõlmest C (joon. 2,30), tasakaalutingimustest arvutatakse toereaktsioonid  $V_H$ ,  $V_J$  :

$$\sum M_H = 0 : -V_J \cdot 4 + (3,049 + 3,388) \cdot 2 - (0,933 + 0,347) \cdot 4 + 3,575 - 3,356 + 0,055 \cdot 2 = 0$$

$$\sum M_J = 0 : V_H \cdot 4 - (3,049 + 3,388) \cdot 2 - (0,933 + 0,347) \cdot 4 + 3,575 - 3,356 + 0,055 \cdot 2 = 0$$

millest

$$V_J = 2,021 \text{ t} \quad \text{ja} \quad V_H = 4,416 \text{ t}$$



joon. 2.30

Varraste 5 ja 6 momentide tasakaalutingimustest sõlme C kohta arvutatakse horisontaalsed toereaktsioonid  $H_H$  ja  $H_J$  :

$$\sum M_C = 0 : \quad 0,110 + 0,055 + 4,416 \cdot 2 + H_H \cdot 4 = 0$$

$$\quad 0,110 + 0,055 - 2,021 \cdot 2 + H_J \cdot 2 = 0$$

millest

$$H_H = 2,249 \text{ t}$$

$$H_J = 0,969 \text{ t}$$

Kontroll:

$$\sum X = 0 : -N_C^{(4)} + N_C^{(7)} + H_H - H_J = 0,000$$

$$\sum Y = 0 : Q_C^{(4)} - Q_C^{(7)} + V_H + V_J = 0,000$$

Kõigi toereaktsioonide ja ühtlasi lahendi kontrollimi-  
ne:

$$\sum X = 0$$

$$1,423 - 1,770 + 2,249 - 0,969 + 0,264 - 0,197 - 1 = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$10,210 + 14,741 + 4,416 + 2,021 + 10,340 + 5,273 - 5,0 - 5,0 - 2 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 2 - 4 - 2 - 4 - 1 = 0,001$$

$$\sum M_C = 0$$

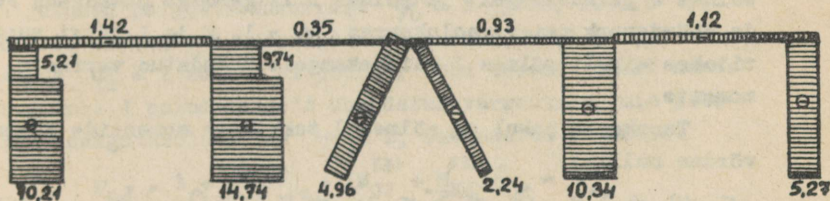
$$10,210 \cdot 12,0 + 14,741 \cdot 6,0 + 4,416 \cdot 2,0 - 2,021 \cdot 2,0 - 10,340 \cdot 6,0 - 5,273 \cdot 12,0 = 2 \cdot 6 \cdot 9,0 + 2 \cdot 6 \cdot 9,0 - 5 \cdot 11,2 - 5 \cdot 6,8 - 2 \cdot 4,2 - 4 \cdot 1,8 + 2 \cdot 1,2 + 4 \cdot 3,0 + 1 \cdot 4,8 + 1 \cdot 1,6 - (1,423 - 1,770 + 2,249 - 0,969 + 0,264 - 0,197) 4 - 2,110 + 0,055 + 0,055 + 0,352 = -0,008$$

Varraste 5 ja 6 normaaljõud arvutatakse tugede H ja J toereaktsioonide kaudu

$$N^{(5)} = -V_H \sin \alpha - H_H \cdot \cos \alpha = -4,416 \cdot 0,8944 - 2,249 \cdot 0,4472 = -4,955 \text{ t}$$

$$N^{(6)} = -V_J \sin \alpha - H_J \cos \alpha = -2,021 \cdot 0,8944 - 0,969 \cdot 0,4472 = -2,241 \text{ t}$$

Normaaljõudude epüür on kujutatud joon. 2.31.



joon. 2.31

## 2.7 NIHKUVATE SÖLMEDEGA RAAMIDE ARVUTAMINE ( $w > 0$ )

### 2.71 Tasakaalutingimused $R_J = 0$ ja $R_C = 0$

Nihkuvate sõlmedega raamidel on põhitundmatuteks vabade kangete sõlmede pöördenurgad ja geomeetrilised parameetrid  $\psi_C$ , mis määravad varraste pöördenurgad. Raami geomeetrilise määramatuse aste  $n^* = s_3 + w$ .

Iga vaba kange sõlme kohta koostatakse momentide tasakaalutingimus  $R_J = 0$ . Peale punktis 2.6l nimetatud momentide, mis tekivad sõlmes J väliskoormusest, sõlme J ja naabersõlmede K pöördumistest, tekivad veel momendid sõlmes J paindekangelt ühendatud varraste pöördumistest.

Geomeetrilisele parameetrile  $\psi_C$  vastavaist raami varraste pöördumistest tekib sõlmes J moment  $r_{Jc} \psi_C$ , milles  $r_{Jc}$  on reaktsioonmoment sõlmes J paigutusolukorras  $\psi_C = 1$ . Reaktsioon  $r_{Jc}$  arvutatakse valemiga (tabel 3)

$$r_{Jc} = - \sum_K 6 i_{JK} \mathcal{J}_{Kc} - \sum_L 3 i_{JL} \mathcal{J}_{Lc} \quad (50)$$

milles  $\mathcal{J}_{Kc}$  on sõlmedes J ja K paindekangelt ühendatud varda pöördenurk paigutusolukorras  $\psi_c = 1$  ning  $\mathcal{J}_{Lc}$  on sõlmes J paindekangelt ja sõlmes L liigendiga ühendatud varda pöördenurk paigutusolukorras  $\psi_c = 1$ . K ja L järgi summeeritakse ainult sõlmes J paindekangelt ühendatud varraste momente.

Tasakaalu puhul on sõlmes J tekkivate momentide summa võrdne nulliga

$$r_{Jj} \psi_j + \sum_K r_{JK} \psi_K + \sum_c r_{Jc} \psi_c + r_{Jp} = 0 \quad (51)$$

$$(J = A, B, C, \dots, N)$$

milles summa  $\sum_c r_{Jc} \psi_c$  väljendab sõlmes J paindekangelt ühendatud varraste pöördumistest põhjustatud momentide resultanti.

Võrranditele (7) vastavates võrrandites (51) esinevad reaktsioonid arvutatakse valemitega

$$r_{JJ} = \sum_K 4i_{JK} + \sum_L 3i_{JL} \quad (45)$$

$$r_{JK} = 2i_{JK} \quad (46)$$

$$r_{Jc} = - \sum_K 6i_{JK} \mathcal{J}_{Kc} - \sum_L 3i_{JL} \mathcal{J}_{Lc} \quad (50)$$

$$r_{JP} = \sum_K M_{JP}^{(KJ)} + \sum_L M_{JP}^{(L)} \quad (48)$$

Varraste pöördumist takistavate sidemete kohta koostatud momentide tasakaaluvõrrandites (8) esinevate reaktsioonide arvutamiseks tuletatakse valemid võimalike paigutuste printsiibi põhjal.

Vaba kange sõlme J pöördumisest nurga  $\varphi_J = 1$  võrra (joon. 2.32,d) varda pöördumist takistavas sidemes c (joon. 2.32,b) reaktsiooni  $r_{cJ}$  leidmiseks eraldatakse liigenditega kanged sõlmed varrastest. Paigutusolukorrale

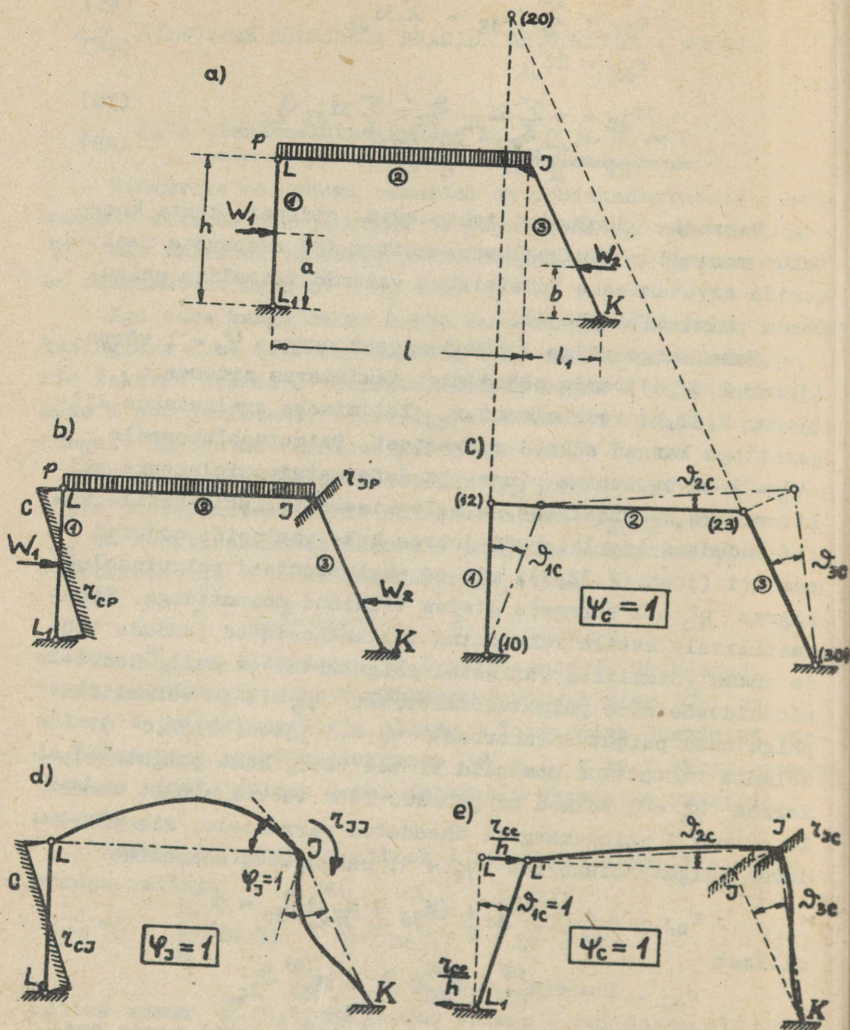
$\varphi_J = 1$  ekvivalentse pinge- ja deformatsiooniolukorra säilitamiseks rakendatakse sellele kinemaatilisele ketile välisjõududena iga liigendi juures kaks vastupidi mõjuvat momenti (joon. 2.33,a), mis on ekvivalentset paigutusolukorras  $\varphi_J = 1$  varraste otstes tekkinud momentidega. Kinemaatilisele ketile rakendatud tasakaalustatud jõudude tööde summa võimalikel väikestel paigutustel on null. Reaktsioonid võetakse paigutusolukorrast  $\varphi_J = 1$  ja võimalikud paigutused paigutusolukorrast  $\varphi_c = 1$  (joon. 2.32,c). Sõlmele rakendatud momendid ei tee tööd, kuna paigutusolukorras  $\varphi_c = 1$  sõlmed ei pöördu. Tööd teevad ainult nendele sõlmes J paindekangelt ühendatud varrastele, mis pöörduvad paigutusolukorras  $\varphi_c = 1$ , rakendatud momendid:

$$r_{cJ} \cdot 1 + M_{JJ}^{(2)} \mathcal{J}_{2c} + (M_{JJ}^{(3)} + M_{KJ}^{(3)}) \mathcal{J}_{3c} = 0$$

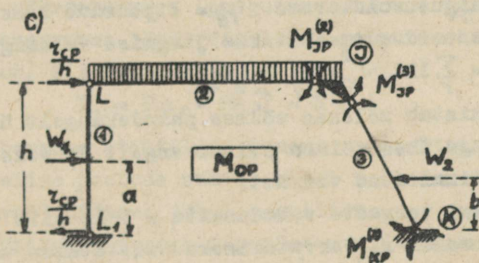
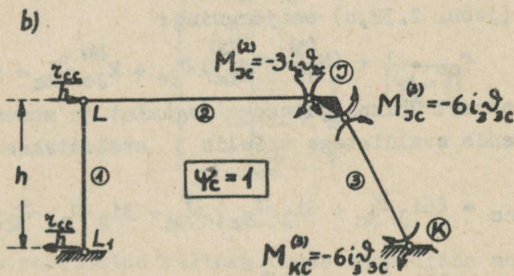
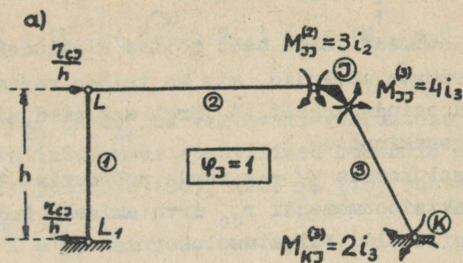
millest

$$r_{cJ} \cdot 1 = -(M_{JJ}^{(3)} + M_{KJ}^{(3)}) \mathcal{J}_{3c} - M_{JJ}^{(2)} \mathcal{J}_{2c}$$

Viies sellesse valemisse momentide asemel nende avaldised (tabel 3) ja jagades ühikpaigutusega, saadakse sõlme J pöördumisest nurga  $\varphi_J = 1$  võrra varda pöördumist takistavas sidemes c reaktsiooni  $r_{cJ}$  arvutamiseks järgmi-



joon. 2.32



joon. 2.33

ne valem

$$r_{cJ} = - (4i_3 + 2i_3) \psi_{3c} - 3i_2 \psi_{2c}$$

või

$$r_{cJ} = -6i_3 \psi_{3c} - 3i_2 \psi_{2c}$$

Kui sõlmest  $J$  väljub rohkem vardaid, siis momendid summeeritakse

$$r_{0J} = - \sum_K 6i_{JK} \mathcal{J}_{Kc} - \sum_L 3i_{JL} \mathcal{J}_{Lc} \quad (52)$$

K järgi summeeritakse need sõlmes J paindekangelt ühendatud varraste momendid, mis ka teises varda otsas on kinnitatud paindekangelt, L järgi aga need, mille teises otsas on liigendkinnitus.

Paigutusolukorras  $\psi_c = 1$  varda pöördumist takistavas sidemes c reaktsioonmomendi  $r_{cc}$  arvutamiseks tuletatakse valem analoogiliselt. Paigutusolukorras  $\psi_c = 1$  tekkinud reaktsioonide (joon. 2.33, b) töö võimalikel paigutustel  $\psi_c = 1$  (joon. 2.32, c) on järgmine:

$$r_{cc} \cdot 1 + (M_{Jc}^{(3)} + M_{Kc}^{(3)}) \mathcal{J}_{3c} + M_{Jc}^{(2)} \mathcal{J}_{2c} = 0$$

millest pärast ühkpaigutusega jagamist ja momentide asendamist nende avaldistega tabelis 3 avaldatakse reaktsioon

$r_{cc}$ :

$$r_{cc} = (6i_3 \mathcal{J}_{3c} + 6i_3 \mathcal{J}_{3c}) \mathcal{J}_{3c} + 3i_2 \mathcal{J}_{2c} \mathcal{J}_{2c}$$

või

$$r_{cc} = 12i_3 \mathcal{J}_{3c}^2 + 3i_2 \mathcal{J}_{2c}^2$$

Kui paigutusolukorras  $\psi_c = 1$  pöörduv rohkem vardaid, siis reaktsioonid summeeritakse järgmise valemiga

$$r_{cc} = \sum_r 12i_r \mathcal{J}_{rc}^2 + \sum_s 3i_s \mathcal{J}_{sc} \quad (53)$$

milles r tähistab mõlemas sõlmes paindekangelt ühendatud varrast, s aga ühes sõlmes paindekangelt ja teises sõlmes liigendiga kinnitatud varrast.

Kui raami varraste vabadusaste  $w > 1$ , siis valem reaktsioonmomendi  $r_{cb}$  arvutamiseks tuletatakse analoogiliselt:

$$r_{cb} = \sum_r 12i_r \mathcal{J}_{rc} \mathcal{J}_{rb} + \sum_s 3i_s \mathcal{J}_{sc} \mathcal{J}_{sb} \quad (54)$$

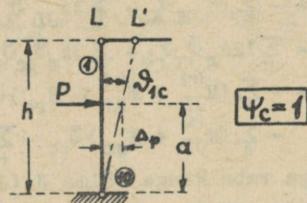
Geomeetriliselt määratud põhiskeemis väliskoormusest põhjustatud reaktsiooni arvutamiseks varda pöördumist takistavas sidemes c tuletatakse valem samuti võimalike paigutuste printsibi alusel.

Väliskoormuse ja geomeetriliselt määratud põhiskeemi reaktsioonide (joon. 2.32, b) tööde summa võimalikul pai-

gutusalukorral  $\psi_c = 1$  võrdub nulliga

$$r_{cP} \cdot 1 + (M_{JP}^{(3)} + M_{KP}^{(3)} + S_{3c}) \mathcal{J}_{3c} + (M_{JP}^{(2)} + S_{2c}) \mathcal{J}_{2c} + S_{1c} \mathcal{J}_{1c} = 0 \quad (a)$$

milles  $S_{3c}$ ,  $S_{2c}$  ja  $S_{1c}$  on vastavalt varrastele 3, 2 ja 1 rakendatud väliskoormuse staatilised momendid nende varraste hetkeliste pooluste (30), (20) ja (10) suhtes paigutusolukorras  $\psi_c = 1$ .



joon. 2.34

Vardale rakendatud väliskoormuse staatiline moment hetkelise pooluse suhtes paigutusolukorras  $\psi_c = 1$  korrutatud varda pöördenurgaga (paigutusolukorras  $\psi_c = 1$ ) väljendab väliskoormuse tööd võimalikul paigutusolukorral  $\psi_c = 1$  (joon. 2.34):

$$T_p = P \Delta_p = Pa \mathcal{J} = S \mathcal{J}$$

Väliskoormuse staatiline moment on positiivne, kui moment hetkelise pooluse suhtes mõjub kellaosuti liikumise suunas, ja vastupidisel juhul negatiivne.

Peale ühikpaigutusega jagamist avaldatakse võrrandist (a) väliskoormuse poolt põhjustatud reaktsioon sidemes c

$$r_{cP} = -(M_{JP}^{(3)} + M_{KP}^{(3)} + S_{3c}) \mathcal{J}_{3c} + (M_{JP}^{(2)} + S_{2c}) \mathcal{J}_{2c} + S_{1c} \mathcal{J}_{1c}$$

Suurema varraste arvuga raami puhul summeeritakse kõik paigutusolukorras  $\psi_c = 1$  pöördenurki saanud varrastele rakendatud väliskoormuse poolt põhjustatud reaktsioonid sidemes c

$$r_{cP} = - \sum_r (M_{JP}^{(r)} + M_{KP}^{(r)} + S_{rc}) \mathcal{J}_{rc} - \sum_s (M_{JP}^{(s)} + S_{sc}) \mathcal{J}_{sc} - \sum_t S_{tc} \mathcal{J}_{tc} \quad (55)$$

milles  $r$  tähistab mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud raami varrast,  $s$  - ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga ühendatud varrast ning  $t$  - mõlemas otsas liigendit omavat varrast.

Tasakaalu puhul on sidemes  $c$  tekkivate reaktsioonmomentide summa võrdne nulliga:

$$\sum_J r_{cJ} \varphi_J + \sum_{b=1}^w r_{cb} \psi_b + r_{cP} = 0 \quad (56)$$

( $c = 1, 2 \dots w$ )

$$\text{milles } r_{cJ} = - \sum_K 6i_{JK} \mathcal{J}_{Kc} - \sum_L 3i_{JL} \mathcal{J}_{Lc} = r_{Jc} \quad (52)$$

$$r_{cb} = \sum_r 12i_r \mathcal{J}_{rc} \mathcal{J}_{rb} + \sum_s 3i_s \mathcal{J}_{sc} \mathcal{J}_{sb} = r_{bc} \quad (54)$$

$$r_{cP} = - \sum_r (M_{JP}^{(r)} + M_{KP}^{(r)} + S_{rc}) \mathcal{J}_{rc} - \sum_s (M_{JP}^{(s)} + S_{sc}) \mathcal{J}_{sc} - \sum_t S_{tc} \mathcal{J}_{tc} \quad (55)$$

Kuna iga vaba kange sõlme  $J$  ( $J = A, B, C, \dots N$ ) ja samuti iga varda pöördumist takistava sideme  $c$  ( $c = 1, 2 \dots w$ ) kohta koostatakse üks võrrand, siis on võrrandeid niisama palju kui tundmatuidki. Võrrandisüsteemi (51), (56) lahendamiseks leitakse vabade kangete sõlmede pöördenurgad  $\varphi_J$  ja varraste pöördenurki määravad geomeetrilised parameetrid  $\psi_c$ .

Varraste pöördenurgad määratakse valemiga (6):

$$\mathcal{J}_j = \sum_{c=1}^w \mathcal{J}_{jc} \psi_c \quad (6)$$

Paindemomendid arvutatakse pärast põhitundmatute määramist valemite (19) ja (36) järgi:

$$M_J = M_{JP} + 4i \varphi_J + 2i \varphi_K - 6i \sum_{c=1}^w \mathcal{J}_{jc} \psi_c \quad (57)$$

$$M_K = M_{KP} + 2i \varphi_J + 4i \varphi_K - 6i \sum_{c=1}^w \mathcal{J}_{kc} \psi_c$$

$$M_J = M_{JP} + 3i \varphi_J - 3i \sum_{c=1}^w \mathcal{J}_{jc} \psi_c \quad (58)$$

Põikjõud arvutatakse paindemomentide eptüürist valemitega (20) ja (37)

$$Q_J = Q_{JP}^{(0)} - (M_J + M_K) : l$$

$$Q_K = Q_{KP}^{(0)} - (M_J + M_K) : l \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 Q_J &= Q_{JP}^{(0)} - M_J : 1 \\
 Q_L &= Q_{LP}^{(0)} - M_J : 1
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

või pöhitundmatute kaudu valemite (21) ja (38) järgi:

$$\begin{aligned}
 Q_J &= Q_{JP} - 6i (\varphi_J + \varphi_K) : 1 + 12 \frac{1}{I} \sum_c \vartheta_{jc} \psi_c \tag{59} \\
 Q_K &= Q_{KP} - 6i (\varphi_J + \varphi_K) : 1 + 12 \frac{1}{I} \sum_c \vartheta_{jc} \psi_c \\
 Q_J &= Q_{JP} - 3i \varphi_J : 1 + 3 \frac{1}{I} \sum_c \vartheta_{jc} \psi_c \\
 Q_L &= Q_{LP} - 3i \varphi_J : 1 + 3 \frac{1}{I} \sum_c \vartheta_{jc} \psi_c
 \end{aligned}
 \tag{60}$$

## 2.72 Arvutusnäide

1. Ülesanne. Arvutada joon. 2.35 kujutatud raami paindemomentide, põik- ja normaaljõudude epüürid.

2. Geomeetrilised andmed. Varraste jäikused

Äärmise löövi avapikkus  $l = 6,0 \text{ m}$

Keskmise löövi avapikkus  $2l = 12,0 \text{ m}$

Äärmise löövi kõrgus  $h = 4,0 \text{ m}$

Keskmise löövi katuseharja kõrgus  $h_1 = 5,0 \text{ m}$

$a = 1,2 \text{ m}$

Varraste jäikused  $i = \frac{EJ}{l}$

$i_1 = 1, \quad i_2 = 3, \quad i_3 = 5, \quad i_4 = 4$

$i_5 = 4, \quad i_6 = 5, \quad i_7 = 3, \quad i_8 = 2$

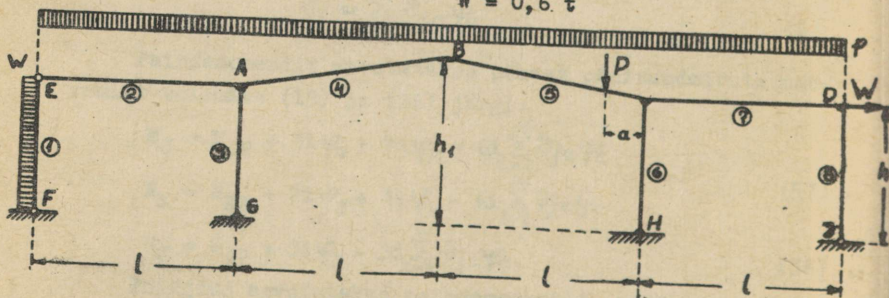
3. Koormus.

Vertikaalne koormus:  $p = 1,0 \text{ t/m}$

$P = 2,0 \text{ t}$

Horisontaalne koormus  $w = 0,3 \text{ t/m}$

$W = 0,6 \text{ t}$



joon. 2.35

4. Geomeetrilise määramatuse aste. Vabade kangete sõlmede arv  $s_3 = 4$ , liigendsõlmede arv  $s_2 = 1$  ja varraste arv  $v = 8$ . Raami varraste liikumise vabadusaste

$$w = 2s - v = 2 \cdot 5 - 8 = 2$$

või varrasahela vabadusaste

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2$$

Raami geomeetrilise määramatuse aste on

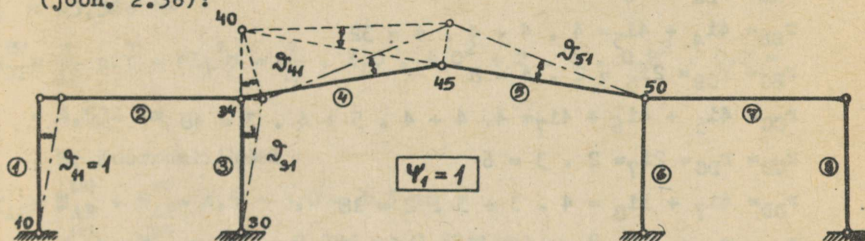
$$n = s_3 + w = 4 + 2 = 6$$

Põhitundmatuteks on sõlmede A, B, C ja D pöördenurgad

$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$  ja  $\varphi_D$  ning geomeetrilised parameetrid  $\psi_1, \psi_2$ , mis määravad varraste pöördenurgad.

5. Varraste pöördenurgad. Paigutusolukord  $\psi_1 = 1$

(joon. 2.36):



joon. 2.36

$$\vartheta_{11} = 1$$

$$\vartheta_{21} = \vartheta_{61} = \vartheta_{71} = \vartheta_{81} = 0$$

$$\vartheta_{31} = \vartheta_{11} = 1$$

$$\vartheta_{41} = -\vartheta_{31} \frac{(30)(34)}{(34)(40)} = -1 \frac{4,0}{2,0} = -2$$

$$\vartheta_{51} = -\vartheta_{41} \frac{(40)(45)}{(45)(50)} = 2 \frac{6 \cdot \cos \alpha}{6 \cdot \cos \alpha} = 2$$

Paigutusolukord  $\psi_2 = 1$  (joon. 2.37):

$$\vartheta_{82} = 1$$

$$\vartheta_{12} = \vartheta_{22} = \vartheta_{32} = \vartheta_{72} = 0$$

$$\vartheta_{62} = \vartheta_{82} = 1$$

$$\vartheta_{52} = -\vartheta_{62} \frac{(60)(65)}{(65)(50)} = -1 \frac{4,0}{2,0} = -2$$

$$\vartheta_{42} = -\vartheta_{52} \frac{(50)(54)}{(54)(40)} = 2 \frac{6 \cdot \cos \alpha}{6 \cdot \cos \alpha} = 2$$



$$r_{22} = 12i_4 \vartheta_{42}^2 + 12i_5 \vartheta_{52}^2 + 12i_6 \vartheta_{62}^2 + 3i_8 \vartheta_{82}^2 = 12 \cdot 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 4 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 = 450$$

7. Kinnitusemomendid geomeetriliselt määratud põhiskeemis

$$M_{AP}^{(2)} = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \cdot 1,0 \cdot 6,0^2 = 4,5 \text{ tm}$$

$$M_{AP}^{(4)} = M_{CP}^{(7)} = -\frac{1}{12} p l^2 = -\frac{1}{12} \cdot 1,0 \cdot 6,0^2 = -3,0 \text{ tm}$$

$$M_{BP}^{(4)} = M_{DP}^{(7)} = \frac{1}{12} p l^2 = \frac{1}{12} \cdot 1,0 \cdot 6,0^2 = 3,0 \text{ tm}$$

$$M_{BP}^{(5)} = -\frac{1}{12} p l^2 - P l \xi \eta^2 = -\frac{1}{12} \cdot 1,0 \cdot 6,0^2 - 2 \cdot 6 \cdot 0,8(0,2)^2 = -3,384 \text{ tm}$$

$$M_{CP}^{(5)} = \frac{1}{12} p l^2 + P l \xi \eta^2 = \frac{1}{12} \cdot 1,0 \cdot 6,0^2 + 2 \cdot 6 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 = 4,536 \text{ tm}$$

8. Koormusliikmed

$$r_{AP} = M_{AP}^{(2)} + M_{AP}^{(4)} = 4,5 - 3,0 = 1,5 \text{ tm}$$

$$r_{BP} = M_{BP}^{(4)} + M_{BP}^{(5)} = 3,0 - 3,384 = -0,384 \text{ tm}$$

$$r_{CP} = M_{CP}^{(5)} + M_{CP}^{(7)} = 4,536 - 3,0 = 1,536 \text{ tm}$$

$$r_{DP} = M_{DP}^{(7)} = 3,0 \text{ tm}$$

$$r_{1p} = -S_{11} \vartheta_{11} - (M_{AP}^{(4)} + M_{BP}^{(4)} + S_{41}) \vartheta_{41} - (M_{BP}^{(5)} + M_{CP}^{(5)} + S_{51}) \vartheta_{51} = -0,3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 - (-3,0 + 3,0 + 1 \cdot 6 \cdot 3)(-2) - (-3,384 + 4,536 - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1,2) 2 = 72,096 \text{ tm}$$

$$r_{2p} = -(M_{AP}^{(4)} + M_{BP}^{(4)} + S_{42}) \vartheta_{42} - (M_{BP}^{(5)} + M_{CP}^{(5)} + S_{52}) \vartheta_{52} - S_{82} \vartheta_{82} = -(3,0 + 3,0 + 1 \cdot 6 \cdot 3) 2 - (-3,384 + 4,536 - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1,2)(-2) - 0,6 \cdot 4 \cdot 1 = -76,896 \text{ tm}$$

9. Tasakaaluvõrrandid ja põhitundmatute arvutamine

$$r_{AA}\varphi_A + r_{AB}\varphi_B + r_{A1}\psi_1 + r_{A2}\psi_2 + r_{AP} = 0$$

$$r_{BA}\varphi_A + r_{BB}\varphi_B + r_{BC}\varphi_C + r_{B1}\psi_1 + r_{B2}\psi_2 + r_{BP} = 0$$

$$r_{CB}\varphi_B + r_{CC}\varphi_C + r_{CD}\varphi_D + r_{C1}\psi_1 + r_{C2}\psi_2 + r_{CP} = 0$$

$$r_{DC}\varphi_C + r_{DD}\varphi_D + r_{D1}\psi_1 + r_{D2}\psi_2 + r_{DP} = 0$$

$$r_{1A}\varphi_A + r_{1B}\varphi_B + r_{1C}\varphi_C + r_{1D}\varphi_D + r_{11}\psi_1 + r_{12}\psi_2 + r_{1P} = 0$$

$$r_{2A}\varphi_A + r_{2B}\varphi_B + r_{2C}\varphi_C + r_{2D}\varphi_D + r_{21}\psi_1 + r_{22}\psi_2 + r_{2P} = 0$$

või arvukordajatega

$$45\varphi_A + 8\varphi_B + 18\psi_1 - 48\psi_2 + 1,5 = 0$$

$$8\varphi_A + 32\varphi_B + 8\varphi_C - 0,384 = 0$$

$$8\varphi_B + 48\varphi_C + 6\varphi_D - 48\psi_1 + 18\psi_2 + 1,536 = 0$$

$$6\varphi_C + 18\varphi_D - 6\psi_2 + 3,0 = 0$$

$$18\varphi_A - 48\varphi_C + 444\psi_1 - 384\psi_2 + 72,096 = 0$$

$$-48\varphi_A + 18\varphi_C - 6\varphi_D - 384\psi_1 + 450\psi_2 - 76,896 = 0$$

Võrrandisüsteemi lahendus on esitatud tabelis 5.

10. Paindemomendid

$$M_A^{(2)} = M_{AP}^{(2)} + 3i_2\varphi_A = 4,5 + 3 \cdot 3 \cdot 0,12713 = 5,644 \text{ tm}$$

$$M_A^{(3)} = M_{AP}^{(3)} + 4i_3\varphi_A - 6i_3\vartheta_{31}\psi_1 = 0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,12713 - 6 \cdot 5 \cdot 1(-0,07536) = 4,803 \text{ tm}$$

$$M_A^{(4)} = M_{AP}^{(4)} + 4i_4\varphi_A + 2i_4\varphi_B - 6i_4(\vartheta_{41}\psi_1 + \vartheta_{42}\psi_2) = -3,0 + 4 \cdot 4 \cdot 0,12713 + 2 \cdot 4 \cdot 0,01712 - 6 \cdot 4 [(-2)(-0,07536) + 2 \cdot 0,12503] = -10,448 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_A^{(2)} + M_A^{(3)} + M_A^{(4)} = -0,001$$

Tabel 5

Vör- rand pöhi- tund- matu jaaks	$\varphi_A$	$\varphi_B$	$\varphi_C$	$\varphi_D$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$-r_{JPja}$ $r_{CP}$	Kontroll
$\varphi_A$	45	8			18	-48	-1,5	21,500
$\varphi_B$	8	32	8		0	0	0,384	48,384
$\varphi_C$		8	48	6	-48	18	-1,536	30,464
$\varphi_D$			6	18	0	-6	-3,0	15,0
$\varphi_1$	18	0	-48	0	444	-384	-72,096	-42,096
$\varphi_2$	-48	0	18	-6	-384	450	76,896	106,896
A	45,0	0,177778			0,4	-1,066667	-0,033333	0,47778
B	8,0	30,577776	0,261627		-0,104651	0,279070	0,021279	1,457326
C		8,0	45,906984	0,130699	-1,027355	0,343465	-0,037167	0,409641
D			6,0	17,215806	0,358051	-0,468220	-0,161305	0,728526
1	18,0	-3,2	-47,162794	6,164130	385,80511	-0,893773	-0,187106	-0,080879
2	-48,0	8,533333	15,767450	-8,060790	-344,82204	79,036171	0,125031	1,125031
$\varphi_{jja\varphi_c}$	0,127132	0,017123	-0,147625	-0,075781	-0,075357	0,125031		
Kont- roll	1,127132	1,017124	0,852374	0,924219	0,924643	1,125031		

$$M_G = M_{GP} + 2i_3 \varphi_A - 6i_3 \vartheta_{31} \psi_1 = 0 + 2 \cdot 5 \cdot 0,12713 - 6 \cdot 5 \cdot 1(-0,07536) = 3,532 \text{ tm}$$

$$M_B^{(4)} = M_{BP}^{(4)} + 2i_4 \varphi_A + 4i_4 \varphi_B - 6i_4 (\vartheta_{41} \psi_1 + \vartheta_{42} \psi_2) = 3,0 + 2 \cdot 4 \cdot 0,12713 + 4 \cdot 4 \cdot 0,01712 - 6 \cdot 4 / (-2) \cdot (-0,07536) + 2 \cdot 0,12503 / = -5,328 \text{ tm}$$

$$M_B^{(5)} = M_{BP}^{(5)} + 4i_5 \varphi_B + 2i_6 \varphi_C - 6i_5 (\vartheta_{51} \psi_1 + \vartheta_{52} \psi_2) = -3,384 + 4 \cdot 4 \cdot 0,01712 + 2 \cdot 4 (-0,14762) - 6 \cdot 4 \sqrt{2}(-0,07536) + (-2) \cdot 0,12503 / = 5,328 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_B^{(4)} + M_B^{(5)} = 0,000$$

$$M_C^{(5)} = M_{CP}^{(5)} + 2i_5 \varphi_B + 4i_5 \varphi_C - 6i_5 (\vartheta_{51} \psi_1 + \vartheta_{52} \psi_2) = 4,536 + 2 \cdot 4 \cdot 0,01712 + 4 \cdot 4(-0,14762) - 6 \cdot 4 \sqrt{2}(-0,07536) + (-2) \cdot 0,12503 / = 11,930 \text{ tm}$$

$$M_C^{(6)} = M_{CP}^{(6)} + 4i_6 \varphi_C - 6i_6 \vartheta_{62} \psi_2 = 0 + 4 \cdot 5(-0,14762) - 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 0,12503 = -6,703 \text{ tm}$$

$$M_C^{(7)} = M_{CP}^{(7)} + 4i_7 \varphi_C + 2i_7 \varphi_D = -3,0 + 4 \cdot 3 (-0,14762) + 2 \cdot 3(-0,07578) = -5,226 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_C^{(5)} + M_C^{(6)} + M_C^{(7)} = 0,001$$

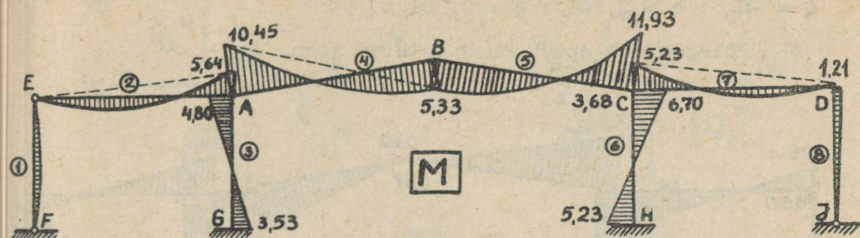
$$M_D^{(7)} = M_{DP}^{(7)} + 2i_7 \varphi_C + 4i_7 \varphi_D = 3,0 + 2 \cdot 3 (-0,14762) + 4 \cdot 3 (-0,07578) = 1,205 \text{ tm}$$

$$M_D^{(8)} = M_{DP}^{(8)} + 3i_8 \varphi_D - 3i_8 \vartheta_{82} \psi_2 = 0 + 3 \cdot 2 (-0,07578) - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,12503 = -1,205 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_D^{(7)} + M_D^{(8)} = 0,000$$

$$M_H = M_{HP} + 2i_6 \varphi_C - 6i_6 \vartheta_{62} \psi_2 = 0 + 2 \cdot 5 (-0,14762) - 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 0,12503 = -5,227 \text{ tm}$$

Paindemomentide epüür on kujutatud joon. 2.38.



joon. 2.38

### 11. Põikjõud

$$Q_F = -Q_E^{(1)} = 4 \cdot 0,3 : 2 = 0,6 \text{ t}$$

$$Q_E^{(2)} = Q_{EP}^{(2),(0)} - M_A^{(2)} : l = 6 \cdot 1 : 2 - 5,644 : 6 = 2,059 \text{ t}$$

$$Q_A^{(2)} = Q_{AP}^{(2),(0)} - M_A^{(2)} : l = -6 \cdot 1 : 2 - 5,644 : 6 = -3,941 \text{ t}$$

$$Q_A^{(3)} = -(M_G + M_A^{(3)}) : h = -(3,532 + 4,803) : 4 = -2,084 \text{ t}$$

$$Q_A^{(4)} = Q_{AP}^{(4),(0)} - (M_A^{(4)} + M_B^{(4)}) : l_4 = 6 \cdot 1 \cdot 0,9864 : 2 + (10,448 + 5,328) : \sqrt{37} = 5,552 \text{ t}$$

Riivi ja horisontaali vahelise nurga tangens on 1:6 ning  $\sin \alpha = 0,1644$  ja  $\cos \alpha = 0,9864$ .

$$Q_B^{(4)} = Q_{BP}^{(4),(0)} - (M_A^{(4)} + M_B^{(4)}) : l_4 = -6 \cdot 1 \cdot 0,9864 : 2 + (10,448 + 5,328) : \sqrt{37} = -0,366 \text{ t}$$

$$Q_B^{(5)} = Q_{BP}^{(5),(0)} - (M_B^{(5)} + M_C^{(5)}) : l_5 = (6 \cdot 1 : 2 + 0,2 \cdot 2) \cdot 0,9864 - (5,328 + 11,930) : \sqrt{37} = 0,517 \text{ t}$$

$$Q_C^{(5)} = Q_{CP}^{(5),(0)} - (M_B^{(5)} + M_C^{(5)}) : l_5 = -(6 \cdot 1 : 2 + 0,8 \cdot 2) \cdot 0,9864 - (5,328 + 11,930) : \sqrt{37} = 0,517 \text{ t}$$

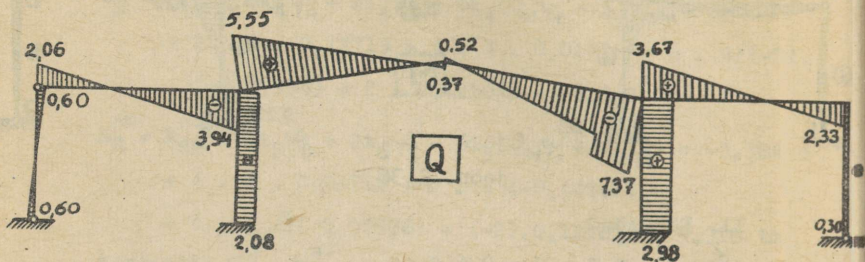
$$Q_C^{(6)} = -(M_H + M_C^{(6)}) : h = (5,227 + 6,703) : 4 = 2,982 \text{ t}$$

$$Q_C^{(7)} = Q_{CP}^{(7),(0)} - (M_C^{(7)} + M_D^{(7)}) : l = 6 \cdot 1 : 2 + (5,226 - 1,205) : 6 = 3,670 \text{ t}$$

$$Q_D^{(7)} = Q_{DP}^{(7),(0)} - (M_C^{(7)} + M_D^{(7)}) : l = -6 \cdot 1 : 2 + (5,226 - 1,205) : 6 = -2,330 \text{ t}$$

$$Q = -M_D^{(8)} : h = 1,205 : 4 = 0,301 \text{ t}$$

Põikjõudude epüür on kujutatud joon. 2.39.



joon. 2.39

## 12. Normaaljõud

$$N^{(1)} = -Q_E^{(2)} = -2,059 \text{ t}$$

$$N^{(2)} = Q_E^{(1)} = -0,600 \text{ t}$$

Varraste 3 ja 4 normaaljõud arvutatakse sõlme A tasakaalutingimustest (joon. 2,40, a).

$$\sum X = 0 : -N_A^{(2)} - Q^{(3)} + N_A^{(4)} \cos \alpha + Q_A^{(4)} \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y = 0 : Q_A^{(2)} - N^{(3)} + N_A^{(4)} \sin \alpha - Q_A^{(4)} \cos \alpha = 0$$

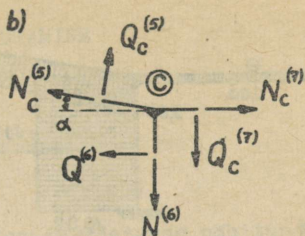
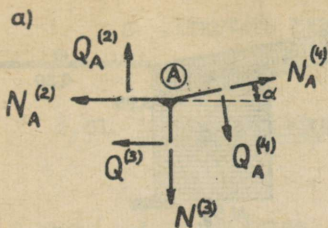
millest

$$N_A^{(4)} = (N_A^{(2)} + Q^{(3)}) : \cos \alpha - Q_A^{(4)} \operatorname{tg} \alpha = (-0,600 - 2,084) :$$

$$: 0,9864 - 5,552 \cdot \gamma_6 = -3,646 \text{ t}$$

$$N = N_A^{(4)} \sin \alpha + Q_A^{(2)} - Q_A^{(4)} \cos \alpha = -3,646 \cdot 0,1644 - 3,941 -$$

$$- 5,552 \cdot 0,9864 = -10,017 \text{ t}$$



joon. 2.40

$$N_B^{(4)} = N_A^{(4)} + pl \cdot \sin \alpha = -3,646 + 1 \cdot 6 \cdot 0,1644 = -2,659 \text{ t}$$

$$N^{(8)} = -Q_D^{(7)} = -2,330 \text{ t}$$

$$N^{(7)} = W - Q^{(8)} = 0,600 - 0,301 = 0,299 \text{ t}$$

Sõlme C tasakaalutingimustest arvutatakse normaaljõud vardas 6 ja vardas 5 lõikes C (joon. 2,40, b):

$$\sum X = 0 : -N_C^{(5)} \cos \alpha + Q_C^{(5)} \sin \alpha + N^{(7)} - Q^{(6)} = 0$$

$$\sum Y = 0 : -N^{(6)} - Q_C^{(7)} + N_C^{(5)} \sin \alpha + Q_C^{(5)} \cos \alpha = 0$$

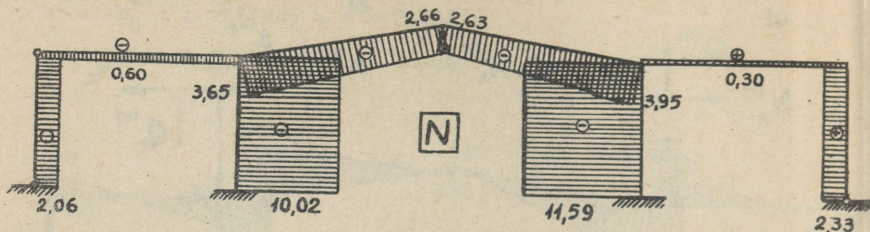
millest

$$N_C^{(5)} = Q_C^{(5)} \operatorname{tg} \alpha + (N^{(7)} - Q^{(6)}) : \cos \alpha = -7,374 \cdot \sqrt{6} + (0,299 - 2,982) : 0,9864 = -3,949 \text{ t}$$

$$N^{(6)} = -Q_C^{(7)} + N_C^{(5)} \sin \alpha + Q_C^{(5)} \cos \alpha = -3,670 - 3,949 \cdot 0,1644 - 7,374 \cdot 0,9864 = -11,593 \text{ t}$$

$$N_B^{(5)} = N_C^{(5)} + (P + p \cdot l) \sin \alpha = -3,949 + (2 + 6) 0,1644 = -2,634^{\circ} \text{ t}$$

Normaaljõudude-epüür on kujutatud joon. 2.41



joon. 2.41

Kontroll:

Lisaks sõlmede tasakaalutingimuste rahuldamisele peavad olema rahuldatud ka kogu väliskoormuse ja toereaktsioonide tasakaalutingimused.

$$\sum X = 0 : wh + W - Q_p^{(1)} - Q^{(3)} - Q^{(6)} - Q^{(8)} = 0,3 \cdot 4 + 0,6 - 0,6 + 2,084 + 2,982 - 0,301 = 0,001$$

$$\sum Y = 0 : -N^{(1)} - N^{(3)} - N^{(6)} - N^{(8)} - 4 p_l - P = 2,059 + 10,017 + 4,593 + 2,330 - 24 - 2 = -0,001$$

## 2.8. JÄTKUVATE TALADE ARVUTAMINE

### 2.81. Liigendääretugedega jätkuv tala

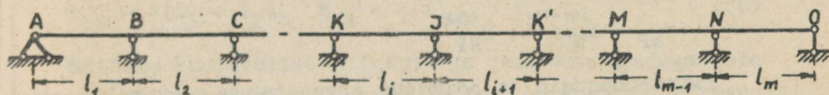
Jätkuva tala arvutamisel jõumeetodiga võetakse põhitundmatuteks toemomendid. Jõumeetodiga liigendääretugedega jätkuva tala arvutamisel põhitundmatute, s.t. staatiliselt määramata suuruste arv on ühe võrra väiksem avade arvust

$$n = m - 1 \quad (a)$$

milles  $m$  on avade arv.

Jätkuva tala arvutamisel deformatsioonimeetodiga on põhitundmatuteks vahepealsete tugede kohal asuvate, toeristlõigeteks või ka sõlmedeks nimetatud ristlõigete pöördenurgad. Põhitundmatute, s.t. geomeetriliselt määramata suuruste arv on nagu jõumeetodigi puhul ühe võrra väiksem avade arvust (joon. 2.42)

$$n^* = m - 1 \quad (b)$$



joon. 2.42

Võrrandi (49) järgi iga toeristlõike pöördenurga, välja arvatud esimese (toe B) ja viimase (toe N) põhitundmatu, arvutamiseks koostatud võrrandid omavad kuju

$$r_{JK} \varphi_K + r_{JJ} \varphi_J + r_{JK'} \varphi_{K'} + r_{JP} = 0 \quad (61)$$

milles  $\varphi_K$  ja  $\varphi_{K'}$  on vastavalt sõlme J vasak- ja parempoolse naabertoeristlõike pöördenurgad.

Ühikpöördenurkadest põhjustatud reaktsioonid arvutatakse valemitega

$$r_{JJ} = 4 (i_{JK} + i_{JK})$$

$$r_{JK} = 2 i_{JK}$$

$$r_{JK} = 2 i_{JK}$$

(62)

Esimene võrrand toe B ja viimane võrrand toe N jaoks on:

$$r_{BB} \varphi_B + r_{BC} \varphi_C + r_{BP} = 0$$

$$r_{NM} \varphi_M + r_{NN} \varphi_N + r_{NP} = 0$$

(63)

milles

$$r_{BB} = 3i_1 + 4i_2$$

$$r_{BC} = 2i_2$$

$$r_{NM} = 2i_{m-1}$$

$$r_{NN} = 4i_{m-1} + 3i_m$$

(64)

Väliskoormusest põhjustatud reaktsioonid arvutatakse tabeliga 1 ja 2

$$r_{JP} = M_{JP}^{(K)} + M_{JP}^{(K')}$$

$$r_{BP} = M_{BP}^{(1)} + M_{BP}^{(2)}$$

$$r_{NP} = M_{NP}^{(m-1)} + M_{NP}^{(m)}$$

(65)

Paindemomendid ja pöikjõud arvutatakse nagu nihkumatute sõlmedega raamilgi.

## 2.82. Jäikääretugedega jätkuv tala

Jäikääretugedega jätkuva tala staatilise määramatuse aste on ühe võrra suurem avade arvust

$$n = m + 1$$

(c)

Sama arvu avadega jäik- ja liigendääretugedega jätkuvate talade geomeetrilise määramatuse astmed on võrdsed, kuna häärmiste jäiktugede pöördenurgad on teada (joon. 2.43)

$$\varphi_A = 0, \quad \varphi_0 = 0 \quad (d)$$

Seepärast on jäikääretugedega jätkuvate talade arvutamine deformatsioonimeetodiga **otstarbekohasem** kui jõumeetodiga. Ka deformatsioonimeetodi võrrandite vabaliikmete, s.t. momentide arvutamine on lihtsam kui jõumeetodi võrrandite vabaliikmete, s.t. paigutuste arvutamine.



joon. 2.43

Jäikääretugedega jätkuva tala vahepealsete tugede jaoks koostatakse võrrandid (61) järgi, kusjuures reaktsioonid arvutatakse valemitega (62).

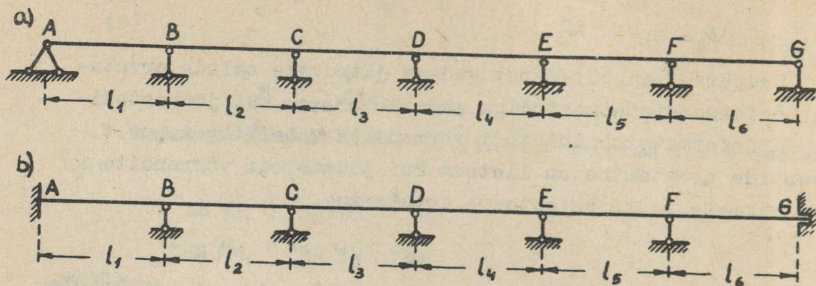
Esimene ja viimane võrrand tugede B ja N jaoks on samad kui liigendääretugedega talal (63). Valemid reaktsioonide  $r_{BB}$  ja  $r_{NN}$  arvutamiseks on aga järgmised:

$$r_{BB} = 4(i_1 + i_2), \quad r_{NN} = 4(i_{m-1} + i_m) \quad (66)$$

Näiteks kuueavalise liigend- ja jäikääretugedega tala (joon. 2.44) põhitundmatute arvutamiseks koostatud võrrandid on mõlema tala jaoks järgmised:

$$\begin{aligned} r_{BB}\varphi_B + r_{BC}\varphi_C &+ r_{BP} = 0 \\ r_{CB}\varphi_B + r_{CC}\varphi_C + r_{CD}\varphi_D &+ r_{CP} = 0 \\ r_{DC}\varphi_C + r_{DD}\varphi_D + r_{DE}\varphi_E &+ r_{EP} = 0 \\ r_{ED}\varphi_D + r_{EE}\varphi_E + r_{EF}\varphi_F + r_{EP} &= 0 \\ r_{FE}\varphi_E + r_{FF}\varphi_F + r_{FP} &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

Kõik reaktsioonid põhitundmatute ees, välja arvatud ainult reaktsioonid  $r_{BB}$  ja  $r_{FF}$ , arvutatakse mõlema tala puhul valemiga (62).



joon. 2.44

Erinevad reaktsioonid on järgmised:

- 1) liigendääretagedega talal

$$r_{BB} = 3i_1 + 4i_2$$

$$r_{FF} = 4i_5 + 3i_6 \quad (f)$$

- 2) jäikääretagedega talal

$$r_{BB} = 4(i_1 + i_2)$$

$$r_{FF} = 4(i_5 + i_6) \quad (g)$$

Võrrandisüsteemis (e) esimeses ja viimases võrrandis on kaks ning igas vahepealses võrrandis kolm põhitundmatut.

Et võrrandisüsteem (e) lahendataks arvutusmasinal kas eliminatsioon- või iteratsioonimeetodiga, siis on otsustarbekohane see koostada kohe tabeli kujul (tabel 6). Reaktsioonid arvutatakse valemitega (62), (64), (65) ja (66).

Tabel 6 on koostatud liigendääretagedega tala jaoks. Jäikääretagedega tala puhul on tabelis  $i_1$  ja  $i_6$  ees kordaja  $\frac{3}{4}$  asemel kordaja  $\frac{4}{4} = 1$ .

Tabel 6. Võrrandisüsteem 6 avaga liigendääretugedega jätkuva tala jaoks (joon. 2.44,a)

Võrrand toe J jaoks	Võrrandi vasak pool					Võrrandi parem pool $-r_{JP}$
	$\varphi_B$	$\varphi_C$	$\varphi_D$	$\varphi_E$	$\varphi_F$	
B	$r_{BB}$ $4(\frac{3}{4}i_1+i_2)$	$r_{BC}$ $2i_2$				$-r_{BP}$ $-(M_{BP}^{(1)} + M_{BP}^{(2)})$
C	$r_{CB}$ $2i_2$	$r_{CC}$ $4(i_2+i_3)$	$r_{CD}$ $2i_3$			$-r_{CP}$ $-(M_{CP}^{(2)} + M_{CP}^{(3)})$
D		$r_{DC}$ $2i_3$	$r_{DD}$ $4(i_3+i_4)$	$2_{DE}$ $2i_4$		$-r_{DP}$ $-(M_{DP}^{(3)} + M_{DP}^{(4)})$
E			$r_{ED}$ $2i_4$	$r_{EE}$ $4(i_4+i_5)$	$r_{EF}$ $2i_5$	$-r_{EP}$ $-(M_{EP}^{(4)} + M_{EP}^{(5)})$
F				$r_{FE}$ $2i_5$	$r_{FF}$ $4(i_5 + \frac{3}{4}i_6)$	$-r_{FP}$ $-(M_{FP}^{(5)} + M_{FP}^{(6)})$

## 2.83. Arvutusnäide

Konstrueerida joon. 2.45 kujutatud viieavalise jätku-  
va tala paindemomentide epüür.

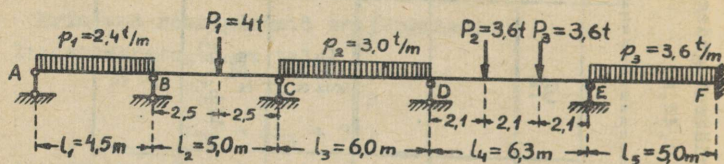
Koormus on antud joon.2.45.

Tala ristlõike mõõtmed:  $b = 30 \text{ cm}$

$h = 80 \text{ cm}$

Ristlõike püsivusmoment:  $J = 0,0120 \text{ m}^4$

Materjali elastsusmoodul:  $E = 210000 \text{ kg/cm}^2$



joon. 2.45

Ühikjäikused:

$$i_1 = \frac{EJ}{l_1} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}}{4,5} = \frac{2,52 \cdot 10^4}{4,5} = 5,60 \cdot 10^3 \text{ tm}$$

$$i_2 = i_5 = EJ : l_2 = 2,52 \cdot 10^4 : 5,0 = 5,04 \cdot 10^3 \text{ tm}$$

$$i_3 = EJ : l_3 = 2,52 \cdot 10^4 : 6,0 = 4,20 \cdot 10^3 \text{ tm}$$

$$i_4 = EJ : l_4 = 2,52 \cdot 10^4 : 6,3 = 4,00 \cdot 10^3 \text{ tm}$$

Et koormusest põhjustatud sisejõudude suurused ei ole-  
ne varraste jäikuste absoluutsetest suurustest, vaid jäik-  
kuste suhetest on jäikusi vähendatud tuhat korda, et arvu-  
sid oleks mugavam käsitleda.

Arvutuslikud jäikused on nüüd järgmised:

$$i_1 = 5,60 \text{ tm}, \quad i_2 = i_5 = 5,04 \text{ tm}$$

$$i_3 = 4,20 \text{ tm}, \quad i_4 = 4,00 \text{ tm}$$

Kinnitismomendid

$$M_{BP}^{(1)} = \frac{1}{8} p_1 l_1^2 = \frac{1}{8} \cdot 2,4 \cdot 4,5^2 = 6,075 \text{ tm}$$

$$M_{BP}^{(2)} = -P_1 l_2 \delta_1 \eta_1^2 = -4,0 \cdot 5,0 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 = -2,500 \text{ tm}$$

$$M_{CP}^{(2)} = P_1 l_2 \delta_1^2 \eta_1 = 4,0 \cdot 5,0 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 = 2,500 \text{ tm}$$

$$M_{DP}^{(3)} = -M_{CP}^{(3)} = \frac{1}{12} P_2 l_3^2 = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 6,0^2 = 9,000 \text{ tm}$$

$$M_{EP}^{(4)} = -M_{DP}^{(4)} = P_2 l_4 \delta_2^2 \eta_2 + P_3 l_4 \delta_3^2 \eta_3 = 3,6 \cdot 6,3 \left( \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \right) = 5,040 \text{ tm}$$

$$M_{FP}^{(5)} = -M_{EP}^{(5)} = \frac{1}{12} P_3 l_5^2 = \frac{1}{12} \cdot 3,6 \cdot 5,0^2 = 7,500 \text{ tm}$$

Reaktsioonmomendid

$$r_{BB} = 3i_1 + 4i_2 = 3 \cdot 5,60 + 4 \cdot 5,04 = 36,96$$

$$r_{BC} = r_{CB} = 2i_2 = 2 \cdot 5,04 = 10,08$$

$$r_{CC} = 4(i_2 + i_3) = 4(5,04 + 4,20) = 36,96$$

$$r_{CD} = r_{DC} = 2i_3 = 2 \cdot 4,20 = 8,40$$

$$r_{DD} = 4(i_3 + i_4) = 4(4,20 + 4,00) = 32,80$$

$$r_{DE} = r_{ED} = 2i_4 = 2 \cdot 4,00 = 8,00$$

$$r_{EE} = 4(i_4 + i_5) = 4(4,00 + 5,04) = 36,16$$

$$r_{BP} = M_{BP}^{(4)} + M_{BP}^{(2)} = 3,575 \text{ tm}$$

$$r_{CP} = M_{CP}^{(2)} + M_{CP}^{(3)} = -6,500 \text{ tm}$$

$$r_{DP} = M_{DP}^{(3)} + M_{DP}^{(4)} = 3,960 \text{ tm}$$

$$r_{EP} = M_{EP}^{(4)} + M_{EP}^{(5)} = -2,460 \text{ tm}$$

Tabelis 7 on esitatud võrrandisüsteem ja selle lahendus.

Paindemomendid.

$$M_B^{(1)} = M_{BP}^{(4)} + 3i_1 \varphi_B = 6,075 - 3 \cdot 5,60 \cdot 0,17097 = 3,203 \text{ tm}$$

$$M_B^{(2)} = M_{BP}^{(2)} + 4i_2 \varphi_B + 2i_2 \varphi_C = -2,500 - 4 \cdot 5,04 \cdot 0,17097 + 2 \cdot 5,04 \cdot 0,27223 = -3,203 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_B^{(1)} + M_B^{(2)} = 3,203 - 3,203 = 0,000$$

Tabel 7

Võrrand toe J jaoks	Võrrandi vasak pool				Võrrandi parem pool → JP	Kontroll
	$\varphi_B$	$\varphi_C$	$\varphi_D$	$\varphi_E$		
B	36,96	10,08			-3,575	43,465
C	10,08	36,96	8,40		6,500	61,940
D		8,40	32,80	8,00	-3,960	45,240
E			8,00	36,16	2,460	46,620
B	36,96	0,27273			-0,09673	1,17600
C	10,08	34,21091	0,24554		0,21850	1,46403
D		8,40	30,73750	0,26027	-0,18854	1,07172
E			8,00	34,07786	0,11645	1,11645
$\varphi_J$	-0,17097	0,27223	-0,21885	0,11645		
$\varphi_J + 1$	0,82903	1,27223	0,78115	1,11645		

$$M_C^{(2)} = M_{CP}^{(2)} + 2i_2 \varphi_B + 4i_2 \varphi_C = 2,500 - 2 \cdot 5,04 \cdot 0,17097 + 4 \cdot 5,04 \cdot 0,27223 = 6,265 \text{ tm}$$

$$M_C^{(3)} = M_{CP}^{(3)} + 4i_3 \varphi_C + 2i_3 \varphi_D = -9,000 + 4 \cdot 4,20 \cdot 0,27223 - 2 \cdot 4,20 \cdot 0,21885 = -6,265 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_C^{(2)} + M_C^{(3)} = 6,265 - 6,265 = 0,000$$

$$M_D^{(3)} = M_{DP}^{(3)} + 2i_3 \varphi_C + 4i_3 \varphi_D = 9,000 + 2 \cdot 4,20 \cdot 0,27223 - 4 \cdot 4,20 \cdot 0,21885 = 7,610 \text{ tm}$$

$$M_D^{(4)} = M_{DP}^{(4)} + 4i_4 \varphi_D + 2i_4 \varphi_E = -5,04 - 4 \cdot 4,00 \cdot 0,21885 + 2 \cdot 4,00 \cdot 0,11645 = -7,610 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_D^{(3)} + M_D^{(4)} = 7,610 - 7,610 = 0,000$$

$$M_E^{(4)} = M_{EP}^{(4)} + 2i_4 \varphi_D + 4i_4 \varphi_E = 5,04 - 2 \cdot 4,00 \cdot 0,21885 + 4 \cdot 4,00 \cdot 0,11645 = 5,152 \text{ tm}$$

$$M_E^{(5)} = M_{EP}^{(5)} + 4i_5 \varphi_E = -7,5 + 4 \cdot 5,04 \cdot 0,11645 = -5,152 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_E^{(4)} + M_E^{(5)} = 5,152 - 5,152 = 0,000$$

$$M_F = M_{FP} + 2i_5 \varphi_E = 7,5 + 2 \cdot 5,04 \cdot 0,11645 = 8,758 \text{ tm}$$

Avamomendid koondatud jõudude kohal

$$M_1 = M_1^{(0)} + \eta_1 M_B^{(2)} - \xi_1 M_C^{(2)} = 4 \cdot 5,0 : 4 - 0,5 \cdot 3,203 - 0,5 \cdot 6,265 = 0,266 \text{ tm}$$

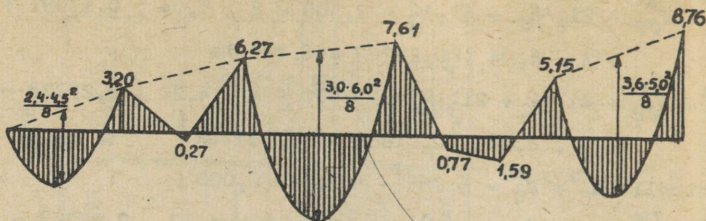
$$M_2 = M_2^{(0)} + \eta_2 M_D^{(4)} - \xi_2 M_E^{(4)} = 3,6 \cdot 2,1 - \frac{2}{3} \cdot 7,610 - \frac{1}{3} \cdot 5,152 = 0,769 \text{ tm}$$

$$M_3 = M_3^{(3)} + \eta_3 M_D^{(4)} - \xi_3 M_E^{(4)} = 3,6 \cdot 2,1 - \frac{1}{3} \cdot 7,610 - \frac{2}{3} \cdot 5,152 = 1,589 \text{ tm}$$

Paindemomentide epiüür on kujutatud joon. 2.46.

Võrrandisüsteemi (tabel 7) lahendamisel saadud pöörde-  
nurgad on 1000 korda suuremad tegelikkudest, seät arvutus-  
likud jääkused on võetud tegelikest jääkustest 1000 korda  
väiksemad.

Tegelikud pöördenurgad on järgmised:



Joon. 2.46

$$\varphi_B = -0,0001710,$$

$$\varphi_C = 0,0002722$$

$$\varphi_D = -0,0002189$$

$$\varphi_E = 0,0001164$$

## 2.9 HORISONTAALSETE RIIVIDE JA VERTIKAALSETE POSTIDEGA ÜHEKORRUSELISTE RAAMIDE ARVUTAMINE

### 2.91. Liigendtugedega raam

Joon. 2.47 kujutatud ühekorruselise raami postide ja-lad on liigenditega kinnitatud aluste külge punktides  $J_0$ ,  $K_0$ ,  $K_0'$  jne. Geomeetrilise määramatuse aste  $n^*$  on ühe võrra suurem raami vabade kangete sõlmede arvust  $S_3$ , kuna raami vaaraste liikumise vabadusaste  $w = 1$ . Kui kaks äärmist tuge  $L_0$  ja  $L_m$  on liigendtoed, siis vabade kangete sõlmede arv on ühe võrra väiksem avade arvust ja raami geomeetrilise määramatuse aste

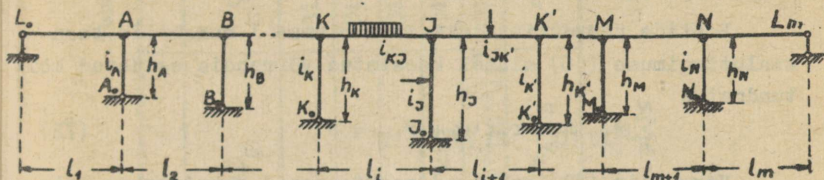
$$n^* = S_3 + 1 = (m - 1) + 1 = m \quad (a)$$

on võrdne raami avade arvuga  $m$ .

Vertikaalsete postidega raami riivid koormuse rakendamisel ei pöördü. Postide pöördenurgad määratakse geomeetrilise parameetriga  $\varphi_C = \varphi_1$ , milleks tavaliselt võetakse

vasakult esimese posti A pöördenurk  $\psi_1 = \psi_A$ . Teiste postide pöördenurgad arvutatakse postide pikkuste suhtega

$$\psi_J = \psi_1 \frac{h_A}{h_J} \quad (67)$$



joon. 2.47

Paigutusolukorras  $\psi_1 = 1$  arvutatakse posti J pöördenurk valemiga

$$\psi_{J1} = h_A : h_J \quad (68)$$

Põhitundmatute arvutamiseks koostatakse võrrandid tasakaalutingimuste alusel. Sõlmes J tekkivate momentide tasakaalutingimuse (51) põhjal koostatud võrrand on järgmine:

$$r_{JK} \psi_K + r_{JJ} \psi_J + r_{JK'} \psi_{K'} + r_{Jl} \psi_1 + r_{JP} = 0 \quad (69)$$

(J = A, B, C ... N)

Võrrandis (69) arvutatakse tundmatute kordajad ja vabaliige valemitega (45), (46), (48) ja (50)

$$\begin{aligned} r_{JK} &= 2i_{JK} \\ r_{JJ} &= 4i_{JK} + 3i_J + 4i_{JK'} \\ &= 4(i_{JK} + \frac{3}{4}i_J + i_{JK'}) \\ r_{JK'} &= 2i_{JK'} \\ r_{Jl} &= -3i_J \psi_{J1} = -3i_J \frac{h_A}{h_J} \\ r_{JP} &= M_{JP}^{(K)} + M_{JP}^{(J)} + M_{JP}^{(K')} \end{aligned} \quad (70)$$

Võrrandites, mis koostatakse sõlmede A ja N jaoks, puudub vastavalt esimene ja kolmas liige.

Reaktsioonides  $r_{AA}$  ja  $r_{NM}$  on äärmise varda jäikuse ees kordaja 3

$$\begin{aligned} r_{AA} &= 3i_{AL} + 3i_A + 4i_{AB} \\ r_{NN} &= 4i_{MN} + 3i_N + 3i_{NL} \end{aligned} \quad (71)$$

Postide pöördumist takistava sideme l momentide tasa-kaalutingimuse (56) alusel koostatud võrrandis esinevad kõik tundmatud

$$\sum_A^N r_{lJ} \varphi_J + r_{ll} \psi_l + r_{lP} = 0 \quad (72)$$

Võrrandis (72) esinevad reaktsioonid arvutatakse valemitega (52), (54) ja (55)

$$\begin{aligned} r_{lJ} &= r_{Jl} = -3i_J \vartheta_{Jl} = -3i_J \frac{h_A}{h_J} \\ r_{ll} &= 3 \sum_A^N i_J \vartheta_{Jl}^2 = 3 \sum_A^N i_J \frac{h_A^2}{h_J^2} \\ r_{lP} &= - \sum_A^N (M_{JP} + S_{Jl}) \frac{h_A}{h_J} \end{aligned} \quad (73)$$

Paindemomendid arvutatakse järgmiste valemitega:

1) riivis (välja arvatud esimene ja viimane ava)

$$\begin{aligned} M_J^{(K)} &= M_{JP}^{(K)} + 4i_{JK} \varphi_J + 2i_{JK} \varphi_K \\ M_J^{(K')} &= M_{JP}^{(K')} + 4i_{JK'} \varphi_J + 2i_{JK'} \varphi_{K'} \end{aligned} \quad (74)$$

Esimeses ja viimases avas

$$M_J = M_{JP} + 3i \varphi_J \quad (75)$$

2) postis

$$M_J = M_{JP} + 3i_J \left( \varphi_J - \frac{h_A}{h_J} \psi_l \right) \quad (76)$$

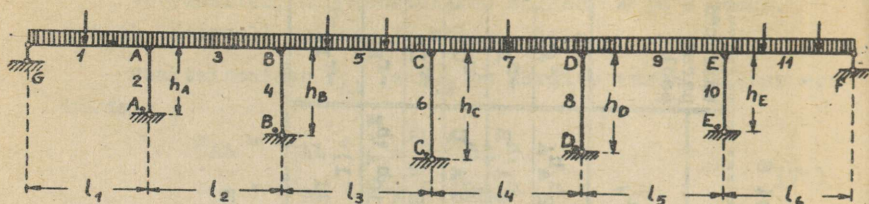
Joon. 2.48 kujutatud kühneavalise raami jaoks on võrrandisüsteem esitatud tabelis 8.

Tabel 8

Võrrandi sideme te J ja C jaaks	Võrrandi vasak pool						Võrrandi parem pool	
	$\varphi_A$	$\varphi_B$	$\varphi_C$	$\varphi_D$	$\varphi_E$	$\varphi_I$		
A	$3(i_1+i_2+\frac{4}{3}i_3)$	$2i_3$					$-3i_2h_A:h_A$	$-r_{AP}$
B	$2i_3$	$4(i_3+i_4+i_5)$	$2i_5$				$-3i_4h_A:h_B$	$-r_{BP}$
C		$2i_5$	$4(i_5+i_6+i_7)$	$2i_7$			$-3i_6h_A:h_C$	$-r_{CP}$
D			$2i_7$	$4(i_7+i_8+i_9)$	$2i_9$		$-3i_8h_A:h_D$	$-r_{DP}$
E				$2i_9$	$3(\frac{4}{3}i_9+i_{10}+i_{11})$		$-3i_{10}h_A:h_E$	$-r_{EP}$
1	$-3i_2h_A:h_A$	$-3i_4h_A:h_B$	$-3i_6h_A:h_C$	$-3i_8h_A:h_D$	$-3i_{10}h_A:h_E$	$r_{11}^{1)}$	$-r_{1P}=0^{2)}$	

$$1) r_{11} = 3(i_2h_A^2:h_A^2 + i_4h_A^2:h_B^2 + i_6h_A^2:h_C^2 + i_8h_A^2:h_D^2 + i_{10}h_A^2:h_E^2)$$

2) Kuna postid on koormamata, siis  $r_{1P} = 0$ .

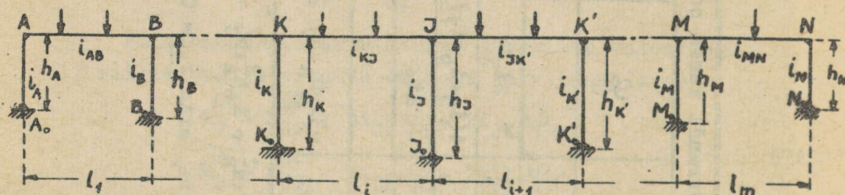


joon. 2.48

## 2.92 Jäigalt kinnitatud postidega raam

Jäigalt kinnitatud postidega raami (joon. 2.49) vabade kangete sõlmede arv on ühe võrra suurem avade arvust  $s_3 = m + 1$ . Raami geomeetrilise määramatuse aste on jällegi ühe võrra suurem vabade kangete sõlmede arvust

$$n^* = s_3 + 1 = m + 2$$



joon. 2.49

Võrrandid, mis koostatakse põhitundmatute arvutamiseks, on analoogilised liigendtugedega raami võrranditega

$$r_{JK} \psi_K + r_{JJ} \psi_J + r_{JK'} \psi_{K'} + r_{Jl} \psi_l + r_{JP} = 0 \quad (69)$$

$$(J = A, B, C, \dots, N)$$

$$\sum_A^N r_{lJ} \psi_J + r_{ll} \psi_l + r_{lP} = 0 \quad (72)$$

Võrrandites (69) ja (72) esinevad reaktsioonid arvutatakse järgmiste valemitega:

$$r_{JK} = 2i_{JK}, \quad r_{JK} = 2i_{JK}$$

$$r_{JJ} = 4(i_{JK} + i_J + i_{JK}) \quad (78)$$

$$r_{J1} = -6i_J \mathcal{J}_{J1} = -6i_J h_A : h_J$$

$$r_{AA} = 4(i_A + i_{AB}), \quad r_{NN} = 4(i_{MN} + i_N)$$

$$r_{1J} = r_{J1} = -6i_J \mathcal{J}_{J1} = -6i_J : h_A : h_J$$

$$r_{11} = 12 \sum_A^N i_J \mathcal{J}_{J1}^2 = 12 \sum_A^N i_J h_A^2 : h_J^2 \quad (79)$$

$$r_{JP} = M_{JP}^{(K)} + M_{JP}^{(J)} + M_{JP}^{(K')}$$

$$r_{1P} = - \sum_A^N (M_{JP}^{(J)} + M_{JOP}^{(J)} + S_{J1}) h_A : h_J \quad (80)$$

Paindemomendid arvutatakse järgmiste valemitega:

1) riivis

$$M_J^{(K)} = M_{JP}^{(K)} + 4i_{JK} \mathcal{P}_J + 2i_{JK} \mathcal{P}_K \quad (81)$$

2) postis

$$M_J^{(J)} = M_{JP}^{(J)} + 4i_J \mathcal{P}_J - 6i_J \frac{h_A}{h_J} \mathcal{P}_1$$

$$M_{J'}^{(J)} = M_{JP}^{(J)} + 2i_J \mathcal{P}_J - 6i_J \frac{h_A}{h_J} \mathcal{P}_1 \quad (82)$$

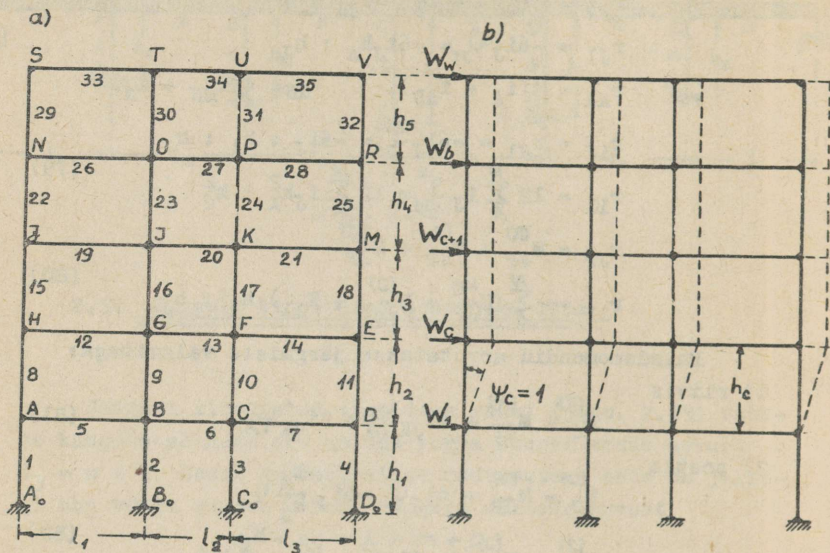
## 2.10. KORRUSRAAMIDE ARVUTAMINE

### 2.101 Võrrandite koostamine

Korrustraami, mille avade arv on  $m$  ja korruste arv  $w$ , paigutusolukord on määratud  $(m+1)w$  sõlme pöördenergiaga ja  $w$  posti pöördenergiaga  $\mathcal{P}_C$ . Korrustraamidel, kuna postid on vertikaalsed, on riivide pöördenergiad nullid. Kui korruste postid on ühepikkused, siis postide pöördenergiad on võrdsed.

Joon. 2.50 kujutatud kolmeavalise ja viiekorruiselise raami geomeetrilise määramatuse aste on

$$n^* = B_3 + w = (3 + 1) 5 + 5 = 25 \quad (a)$$



joon. 250

Iga vaba kange sõlme  $J$  ( $J = A, B, C, \dots$ ) kohta koostatakse üks tasakaaluvõrrand  $R_J = 0$ , mis sisaldab kas kolm, neli või viis sõlme pöördenurka ja ühe või kaks posti pöördenurka määravat parameetrit  $\psi_c$

Sõlme  $J$  kohta koostatud võrrand on järgmine:

$$r_{JJ}\psi_J + \sum_K r_{JK}\psi_K + \sum_C r_{Jc}\psi_c + r_{JP} = 0 \quad (83)$$

või joon. 2.50 kujutatud raami sõlme  $J$  jaoks

$$r_{JJ}\psi_J + r_{JG}\psi_G + r_{Jz}\psi_z + r_{JK}\psi_K + r_{JO}\psi_O + r_{J3}\psi_3 + r_{J4}\psi_4 + r_{JP} = 0 \quad (b)$$

milles

$$r_{JJ} = 4(i_{16} + i_{19} + i_{20} + i_{23})$$

$$r_{JG} = 2i_{16}, \quad r_{Jz} = 2i_{19}, \quad r_{JK} = 2i_{20}, \quad r_{JO} = 2i_{23}$$

$$r_{J3} = -6i_{16}, \quad r_{J4} = -6i_{23}$$

$$r_{Jp} = M_{JP}^{(16)} + M_{JP}^{(19)} + M_{JP}^{(20)} + M_{JP}^{(23)}$$

Iga korruse postide pöördumist takistava sideme  $c$  ( $c = 1, 2 \dots w$ ) jaoks tasakaalutingimuse  $R_c = 0$  alusel koostatud võrrandis on peale korruse  $c$  posti pöördnurga  $\psi_c$  veel selle korruse postide alumiste ja ülemiste sõlmede pöördnurjad.

Sideme  $c$  kohta koostatud võrrand on järgmine:

$$r_{cc}\psi_c + \sum_j r_{cj}\psi_j + r_{cp} = 0 \quad (84)$$

kusjuures summeeritakse korruse  $c$  kõigi postide alumiste ja ülemiste vabade kangete sõlmede momendid.

Võrrandis ( $c$ ) esinevad reaktsioonid arvutatakse valemitega

$$r_{cc} = 12 \sum_p i_p \quad (85)$$

$$r_{cj} = -6 i_{jp} \quad (86)$$

milles  $r$  tähistab korrusel  $c$  postide arvu ja  $i_{jp}$  sõlmes  $J$  ühendatud posti ühikjäikust.

Vertikaalse koormuse mõjumisel, on vabaliige  $r_{cp} = 0$ , kuna riivid ei pöördu.

Horisontaalse tuulekoormuse mõjumisel, kui koormus on rakendatud sõlmedesse, arvutatakse vabaliige  $r_{cp}$  järgmise valemiga

$$r_{cp} = -h_c \sum_{b=c}^w W_b \quad (87)$$

Näiteks teise korruse jaoks  $\psi_c = \psi_2$  on võrrand järgmine (joon. 2.51):

$$r_{22}\psi_2 + r_{2A}\psi_A + r_{2B}\psi_B + r_{2C}\psi_C + r_{2D}\psi_D + r_{2E}\psi_E + r_{2F}\psi_F + r_{2G}\psi_G + r_{2H}\psi_H + r_{2P} = 0$$

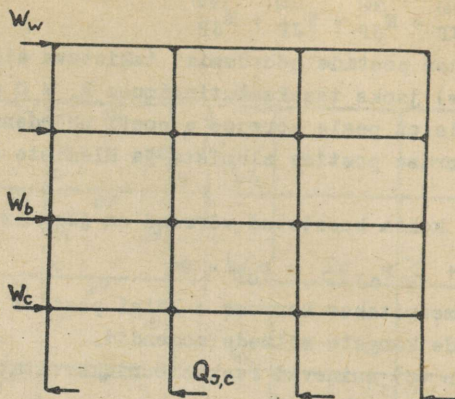
milles

$$r_{22} = 12(i_8 + i_9 + i_{10} + i_{11})$$

$$r_{2A} = -6i_8, \quad r_{2B} = -6i_9, \quad r_{2C} = -6i_{10}, \quad r_{2D} = -6i_{11}$$

$$r_{2H} = -6i_8, \quad r_{2G} = -6i_9, \quad r_{2F} = -6i_{10}, \quad r_{2E} = -6i_{11}$$

$$r_{2P} = -h_2 (W_2 + W_3 + W_4 + W_5)$$



joon. 2.51

Korrusraamide arvutustulemuste kontrollimiseks koostatakse tasakaaluvõrrandid iga sõlme ja iga korruse postide jaoks: 1) sõlmes peab momentide summa võrduma nulliga ja 2) ühel korrusel peab postide põikjõudude summa tasakaalustama ülaltpoolt raamile mõjuva horisontaalse koormuse.

### 2.102 Võrrandite lahendamine

Võrrandite (83), (84) diagonaallikmed on tunduvalt suuremad kui teised liikmed ja seepärast on seda võrrandisüsteemi võimalik lahendada ka iteratsioonimeetodiga. Postide pöördumist takistava sideme c kohta koostatud võrrandist (84) avaldatakse posti pöördnurk  $\psi_c$

$$\text{või} \quad \psi_c = -r_{cP} : r_{cc} - \sum_j r_{cJ} \psi_j : r_{cc} \quad (88)$$

$$\text{milles} \quad \psi_c = \psi_{c,0} + \psi_{c,1} \quad (89)$$

$$\psi_{c,0} = -r_{cP} : r_{cc} \quad (90)$$

Sõlme J jaoks koostatud võrrandist (83), milles  $\psi_c$  on asendatud avaldisega (89)

$$r_{JJ}\psi_J + \sum_K r_{JK}\psi_K + \sum_c r_{Jc}\psi_{c,0} + \sum_c r_{Jc}\psi_{c,1} + r_{JP} = 0$$

avaldatakse pöördenurk  $\psi_J$

$$\psi_J = -(r_{JP} + \sum_c r_{Jc}\psi_{c,0}) : r_{JJ} - \left( \sum_K r_{JK}\psi_K \right) : r_{JJ} - \left( \sum_c r_{Jc}\psi_{c,1} \right) : r_{JJ} \quad (92)$$

või

$$\psi_J = \psi_{J,0} + \psi_{J,1} + \psi_{J,2} \quad (93)$$

milles

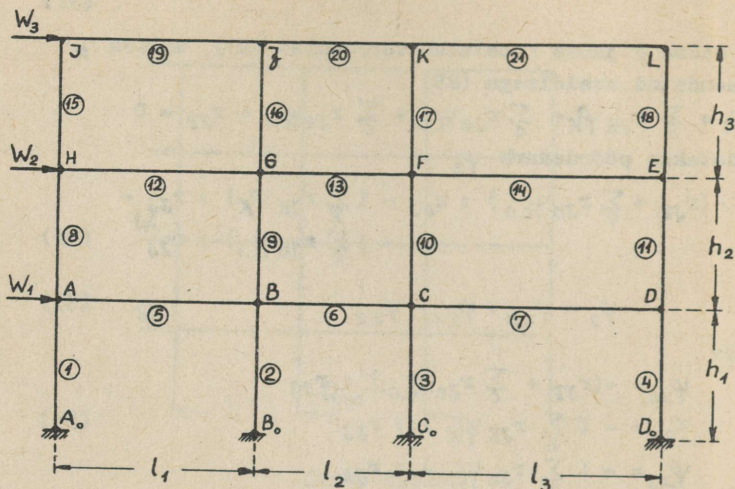
$$\begin{aligned} \psi_{J,0} &= -(r_{JP} + \sum_c r_{Jc}\psi_{c,0}) : r_{JJ} \\ \psi_{J,1} &= - \left( \sum_K r_{JK}\psi_K \right) : r_{JJ} \\ \psi_{J,2} &= - \left( \sum_c r_{Jc}\psi_{c,1} \right) : r_{JJ} \end{aligned} \quad (94)$$

Pöördenurkade  $\psi_c$  ja  $\psi_J$  avaldistes (89) ja (93) esimesed liikmed  $\psi_{c,0}$ ,  $\psi_{J,0}$  on konstantsed, kuna teised liikmed muutuvad lähendamise ajal, lähenedes suurustele, mille sisseviimisel avaldistesse (89), (93) saadud pöördenurgad ei erine täpsel arvutusel leitud nurkadest.

Algul arvutatakse konstandid  $\psi_{c,0}$  ja  $\psi_{J,0}$  ja kasutatakse neid esimeses lähenduses  $\psi_{c,1}$ ,  $\psi_{J,1}$  ja  $\psi_{J,2}$  määramiseks. Arvutustulemuste liitmisel avaldiste (89), (93) järgi saadakse pöördenurkade suurused esimeses lähenduses. Arvutust korratakse seni, kui kahel viimasel lähendusel saadud tulemused praktiliselt ühtuvad.

### 2.103 Arvutusnäide

Konstrueerida joon. 2.52 kujutatud kolmeavalisele ja kolmekorruselisele raamile horisontaalsest tuulekoormusest põhjustatud paindemomentide, põik- ja normaaljõudude epüürid.



joon. 2.52

1. Andmed:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 4,0 \text{ m}$$

$$l_1 = 6,00 \text{ m}, \quad l_2 = 4,50 \text{ m}, \quad l_3 = 7,50 \text{ m}$$

$$i_1 = 4,5 \quad i_2 = 3,0 \quad i_3 = 3,5 \quad i_4 = 5,0$$

$$i_5 = i_{12} = 8,0 \quad i_6 = i_{13} = 10,0 \quad i_7 = i_{14} = 6,0$$

$$i_8 = 4,0 \quad i_9 = 2,0 \quad i_{10} = 2,5 \quad i_{11} = 4,5$$

$$i_{15} = 3,5 \quad i_{16} = 1,0 \quad i_{17} = 1,5 \quad i_{18} = 4,0$$

$$i_{19} = 4,0 \quad i_{20} = 5,0 \quad i_{21} = 3,0$$

2. Koormus sõlmedes

$$W_1 = 1,8 \text{ t} \quad W_2 = 1,8 \text{ t} \quad W_3 = 0,9 \text{ t}$$

3. Reaktsioonid:

$$\begin{aligned}
 r_{AA} &= 4(4,5 + 8,0 + 4,0) = 66 & r_{AB} &= r_{BA} = 2 \cdot 8,0 = 16 \\
 r_{BB} &= 4(3,0 + 8,0 + 10,0 + 2,0) = 92 & r_{AH} &= r_{HA} = 2 \cdot 4,0 = 8 \\
 r_{CC} &= 4(3,5 + 10,0 + 6,0 + 2,5) = 88 & r_{BC} &= r_{CB} = 2 \cdot 10,0 = 20 \\
 r_{DD} &= 4(5,0 + 6,0 + 4,5) = 62 & r_{BG} &= r_{GB} = 2 \cdot 2,0 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{EE} &= 4(4,5 + 6,0 + 4,0) = 58 & r_{CD} &= r_{DC} = 2 \cdot 6,0 = 12 \\
r_{FF} &= 4(2,5 + 10,0 + 6,0 + 1,5) = 80 & r_{CF} &= r_{FC} = 2 \cdot 2,5 = 5 \\
r_{GG} &= 4(2,0 + 8,0 + 10,0 + 1,0) = 84 & r_{DE} &= r_{ED} = 2 \cdot 4,5 = 9 \\
r_{HH} &= 4(4,0 + 8,0 + 3,5) = 62 & r_{EF} &= r_{FE} = 2 \cdot 6,0 = 12 \\
r_{JJ} &= 4(3,5 + 4,0) = 30 & r_{EL} &= r_{LE} = 2 \cdot 4,0 = 8 \\
r_{jJ} &= 4(1,0 + 4,0 + 5,0) = 40 & r_{FG} &= r_{GF} = 2 \cdot 10,0 = 20 \\
r_{KK} &= 4(1,5 + 5,0 + 3,0) = 38 & r_{FK} &= r_{KF} = 2 \cdot 1,5 = 3 \\
r_{LL} &= 4(3,0 + 4,0) = 28 & r_{GH} &= r_{HG} = 2 \cdot 8,0 = 16 \\
r_{Gj} &= r_{jG} = 2 \cdot 1,0 = 2 & r_{HJ} &= r_{JH} = 2 \cdot 3,5 = 7 \\
r_{Jj} &= r_{jJ} = 2 \cdot 4,0 = 8 & r_{JK} &= r_{KJ} = 2 \cdot 5,0 = 10 \\
r_{KL} &= r_{LK} = 2 \cdot 3,0 = 6 \\
\\
r_{A1} &= r_{1A} = -6 \cdot 4,5 = -27 & r_{B1} &= r_{1B} = -6 \cdot 3,0 = -18 \\
r_{C1} &= r_{1C} = -6 \cdot 3,5 = -21 & r_{D1} &= r_{1D} = -6 \cdot 5,0 = -30 \\
r_{A2} &= r_{H2} = r_{2H} = -6 \cdot 4,0 = -24 \\
r_{B2} &= r_{G2} = r_{2G} = -6 \cdot 2,0 = -12 \\
r_{C2} &= r_{2C} = r_{F2} = r_{2F} = -6 \cdot 2,5 = -15 \\
r_{D2} &= r_{2D} = r_{E2} = r_{2E} = -6 \cdot 4,5 = -27 \\
r_{E3} &= r_{3E} = r_{L3} = r_{3L} = -6 \cdot 4,0 = -24 \\
r_{F3} &= r_{3F} = r_{K3} = r_{3K} = -6 \cdot 1,5 = -9 & r_{H3} &= r_{3H} = r_{J3} = \\
r_{G3} &= r_{3G} = r_{j3} = r_{3j} = -6 \cdot 1,0 = -6 & r_{3J} &= -6 \cdot 3,5 = -2 \cdot 1 \\
r_{11} &= 12(4,5 + 3,0 + 3,5 + 5,0) = 192 \\
r_{22} &= 12(4,0 + 2,0 + 2,5 + 4,5) = 156 \\
r_{33} &= 12(3,5 + 1,0 + 1,5 + 4,0) = 120 \\
r_{1P} &= -4,0(1,8 + 1,8 + 0,9) = -18,0 \\
r_{2P} &= -4,0(1,8 + 0,9) = -10,8 \\
r_{3P} &= -4,0 \cdot 0,9 = -3,6
\end{aligned}$$

Võrrandisüsteem on esitatud tabeli kujul (tabel 9).

Tabel 9

Võrrandi sideme J või c jaaks	Võrrandi vasak pool														Võrrandi parem pool	
	$\varphi_A$	$\varphi_B$	$\varphi_C$	$\varphi_D$	$\varphi_E$	$\varphi_F$	$\varphi_G$	$\varphi_H$	$\varphi_J$	$\varphi_Z$	$\varphi_K$	$\varphi_L$	$\varphi_1$	$\varphi_2$		$\varphi_3$
A	66	16						8						-27	-24	
B	16	92	20						4					-18	-12	
C		20	88	12			5							-21	-15	
D			12	62	9									-30	-27	
E				9	58	12						8		-27	-24	
F			5		12	80	20							-15	-9	
G		4				20	84	16		2	3			-12	-6	
H	8						16	62	7					-24	-21	
I								7	30	8					-21	
J							2		8	40	10				-6	
K						3				10	38	6			-9	
L					8						6	28			-24	
1	-27	-18	-21	-30									192			+18,0
2	-24	-12	-15	-27	-27	-15	-12	-24						156		+10,8
3					-24	-9	-6	-21	-21	-6	-9	-24			120	+3,6

#### 4. Võrrandite lahendamise.

Eliminatsioonimeetodiga leitud pöördenurkade suurused on järgmised:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 0,08663 & \varphi_B &= 0,01881 & \varphi_C &= 0,03276 & \varphi_D &= 0,10104 \\ \varphi_E &= 0,06226 & \varphi_F &= 0,01783 & \varphi_G &= 0,00727 & \varphi_H &= 0,05500 \\ \varphi_J &= 0,03478 & \varphi_I &= 0,00083 & \varphi_K &= 0,00840 & \varphi_L &= 0,03898 \\ \varphi_1 &= 0,12707 & \varphi_2 &= 0,12615 & \varphi_3 &= 0,06833. \end{aligned}$$

Tabelis 9 esitatud võrrandisüsteem on lahendatav ka iteratsioonimeetodiga. Esimeses järjekorras arvutatakse valemiga (90) konstandid  $\varphi_{1,0}$ ,  $\varphi_{2,0}$  ja  $\varphi_{3,0}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0} &= -r_{1P} : r_{11} = +18,0 : 192 = 0,09375 \\ \varphi_{2,0} &= -r_{2P} : r_{22} = +10,8 : 156 = 0,06923 \\ \varphi_{3,0} &= -r_{3P} : r_{33} = +3,6 : 120 = 0,03000 \end{aligned}$$

Järgmisena arvutatakse valemitest (94) esimese valemibil konstandid  $\varphi_{J,0}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{A,0} &= -(r_{AP} + r_{A1}\varphi_{1,0} + r_{A2}\varphi_{2,0} + r_{A3}\varphi_{3,0}) : r_{AA} = \\ &= -(0 - 27 \cdot 0,09375 - 24 \cdot 0,06923 - 0 \cdot 0,03) : 66 = \\ &= 0,06353 \end{aligned}$$

$$\varphi_{B,0} = -(r_{BP} + r_{B1}\varphi_{1,0} + r_{B2}\varphi_{2,0} + r_{B3}\varphi_{3,0}) : r_{BB} = 0,02737$$

Esimeses lähenduses arvutatakse nüüd  $\varphi_{C,1}^{(1)}$ ,  $\varphi_{J,1}^{(1)}$  ja  $\varphi_{3,2}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}^{(1)} &= -(r_{1A}\varphi_{A,0} + r_{1B}\varphi_{B,0} + r_{1C}\varphi_{C,0} + r_{1D}\varphi_{D,0}) : r_{11} = \\ &= (27 \cdot 0,06353 + 18 \cdot 0,02737 + 21 \cdot 0,03417 + \\ &+ 30 \cdot 0,07551) : 192 = 0,02704 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2,1}^{(1)} &= -(r_{2A}\varphi_{A,0} + r_{2B}\varphi_{B,0} + r_{2C}\varphi_{C,0} + r_{2D}\varphi_{D,0} + r_{2E}\varphi_{E,0} + \\ &+ r_{2F}\varphi_{F,0} + r_{2G}\varphi_{G,0} + r_{2H}\varphi_{H,0}) : r_{22} = 0,04414 \end{aligned}$$

$$\varphi_{3,1}^{(1)} = 0,02680.$$

Postide pöördenurgad 1. lähenduses on järgmised:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}^{(1)} = 0,09375 + 0,02704 = 0,12079 \\ \varphi_2^{(1)} &= \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}^{(1)} = 0,06923 + 0,04414 = 0,11337 \\ \varphi_3^{(1)} &= \varphi_{3,0} + \varphi_{3,1}^{(1)} = 0,03000 + 0,02680 = 0,05680 \end{aligned}$$

Seejärel arvutatakse  $\varphi_{A,1}^{(1)}$  ja  $\varphi_{A,2}^{(1)}$  ning valemi (93) järgi liites saadakse 1. lähenduses  $\varphi_A^{(1)}$  :

$$\varphi_{A,1}^{(1)} = -(r_{AB}\varphi_{B,0} + r_{AH}\varphi_{H,0}) : r_{AA} = -(16 \cdot 0,02737 + 8 \cdot 0,03696) : 66 = -0,01112$$

$$\varphi_{A,2}^{(1)} = -(r_{A1}\varphi_{1,1}^{(1)} + r_{A2}\varphi_{2,1}^{(1)} + r_{A3}\varphi_{3,1}^{(1)}) : r_{AA} = (27 \cdot 0,02704 + 24 \cdot 0,04414 + 0 \cdot 0,02680) : 66 = 0,02711.$$

Sõlme A pöördenurk 1. lähenduses on:

$$\varphi_A^{(1)} = \varphi_{A,0} + \varphi_{A,1}^{(1)} + \varphi_{A,2}^{(1)} = 0,06353 - 0,01112 + 0,02711 = 0,07952$$

Nüüd juba kasutatakse sõlme B pöördenurga arvutamisel sõlme A pöördenurga 1. lähendust  $\varphi_A^{(1)}$  :

$$\varphi_{B,1}^{(1)} = -(r_{BA}\varphi_A^{(1)} + r_{BC}\varphi_{C,0} + r_{BG}\varphi_{G,0}) : r_{BB} = -0,02178$$

$$\varphi_{B,2}^{(1)} = -(r_{B1}\varphi_{1,1}^{(1)} + r_{B2}\varphi_{2,1}^{(1)} + r_{B3}\varphi_{3,1}^{(1)}) : r_{BB} = 0,01105$$

$$\varphi_B^{(1)} = \varphi_{B,0} + \varphi_{B,1}^{(1)} + \varphi_{B,2}^{(1)} = 0,02737 - 0,02178 + 0,01105 = 0,01664.$$

Edasi arvutatakse  $\varphi_C^{(1)}$ ,  $\varphi_D^{(1)}$  ...

Teises lähenduses tehakse arvutused analoogiliselt esimese lähendusega:

$$\varphi_{1,1}^{(2)} = -(r_{1A}\varphi_A^{(1)} + r_{1B}\varphi_B^{(1)} + r_{1C}\varphi_C^{(1)} + r_{1D}\varphi_D^{(1)}) : r_{11} = 0,03120$$

$$\varphi_{2,1}^{(2)} = -(r_{2A}\varphi_A^{(1)} + r_{2B}\varphi_B^{(1)} + r_{2C}\varphi_C^{(1)} + r_{2D}\varphi_D^{(1)} + r_{2E}\varphi_E^{(1)} + r_{2F}\varphi_F^{(1)} + r_{2G}\varphi_G^{(1)} + r_{2H}\varphi_H^{(1)}) : r_{22} = 0,05205$$

$$\varphi_1^{(2)} = \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}^{(2)} = 0,09375 + 0,03120 = 0,12495$$

$$\varphi_2^{(2)} = \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}^{(2)} = 0,06923 + 0,05205 = 0,12128$$

$$\varphi_{A,1}^{(2)} = -(r_{AB}\varphi_B^{(1)} + r_{AH}\varphi_H^{(1)}) : r_{AA} = -0,00988 \quad \varphi_{A,2}^{(2)} = 0,03169$$

$$\varphi_A^{(2)} = \varphi_{A,0} + \varphi_{A,1}^{(2)} + \varphi_{A,2}^{(2)} = 0,08534$$

$$\varphi_{B,1}^{(2)} = -(r_{BA}\varphi_A^{(1)} + r_{BC}\varphi_C^{(1)} + r_{BG}\varphi_G^{(1)}) : r_{BB} = -0,02243$$

$$\varphi_{B,2}^{(2)} = -(r_{B1}\varphi_{1,1}^{(2)} + r_{B2}\varphi_{2,1}^{(2)}) : r_{BB} = 0,01289$$

$$\varphi_B^{(2)} = \varphi_{B,0} + \varphi_{B,1}^{(2)} + \varphi_{B,2}^{(2)} = 0,01783$$

Edasi  $\varphi_C^{(2)}$ ,  $\varphi_D^{(2)}$  .....

Kahaksa lähenduse arvutustulemused on esitatud tabelis 10.

Tabel 10

Tundmatu	$\psi_{c,0}$ või $\psi_{3,0}$	1.lähend	2.lähend	3.lähend	4.lähend	5.lähend	6.lähend	7.lähend	8.lähend
1	0,09375	0,12079	0,12495	0,12647	0,12690	0,12702	0,12705	0,12706	0,12707
2	0,06923	0,11337	0,12128	0,12449	0,12563	0,12598	0,12610	0,12613	0,12615
3	0,03000	0,05680	0,06257	0,06577	0,06729	0,06792	0,06817	0,06827	0,06831
A	0,06353	0,07952	0,08534	0,08636	0,08658	0,08664	0,08663	0,08663	0,08663
B	0,02737	0,01664	0,01783	0,01854	0,01870	0,01877	0,01879	0,01881	0,01881
C	0,03417	0,03314	0,03268	0,03276	0,03277	0,03276	0,03276	0,03276	0,03276
D	0,07551	0,09493	0,09902	0,10040	0,10085	0,10098	0,10102	0,10104	0,10104
E	0,04464	0,05462	0,05972	0,06143	0,06199	0,06218	0,06224	0,06225	0,06226
F	0,01636	0,01423	0,01625	0,01736	0,01759	0,01773	0,01779	0,01781	0,01782
G	0,01203	0,00892	0,00724	0,00751	0,00740	0,0732	0,00728	0,00727	0,00727
H	0,03696	0,04819	0,05218	0,05384	0,05458	0,05484	0,05494	0,05498	0,05499
I	0,02100	0,02132	0,03140	0,03328	0,03417	0,03454	0,03469	0,03475	0,03477
J	0,00450	0,00084	0,00074	0,00073	0,00076	0,00079	0,00081	0,00082	0,00083
K	0,00710	0,00805	0,00839	0,00852	0,00850	0,00845	0,00842	0,00841	0,00840
L	0,02571	0,03135	0,03477	0,03700	0,03814	0,03863	0,03884	0,03892	0,03896

5. Paindemomendid.

$$M_{A_0} = 2 \cdot 4,5 \cdot 0,08663 - 6 \cdot 4,5 \cdot 0,12707 = -2,651 \text{ tm}$$

$$M_A^{(1)} = 4 \cdot 4,5 \cdot 0,08663 - 6 \cdot 4,5 \cdot 0,12707 = -1,872 \text{ tm}$$

$$M_A^{(5)} = 4 \cdot 8,0 \cdot 0,08663 + 2 \cdot 8,0 \cdot 0,01881 = 3,073 \text{ tm}$$

$$M_A^{(8)} = 4 \cdot 4,0 \cdot 0,08663 + 2 \cdot 4,0 \cdot 0,05500 - 6 \cdot 4 \cdot 0,12615 = -1,202 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_A^{(1)} + M_A^{(5)} + M_A^{(8)} = -1,872 + 3,073 - 1,202 = -0,001$$

$$M_{B_0} = 2 \cdot 3,0 \cdot 0,01881 - 6 \cdot 3,0 \cdot 0,12707 = -2,174 \text{ tm}$$

$$M_B^{(2)} = 4 \cdot 3,0 \cdot 0,01881 - 6 \cdot 3,0 \cdot 0,12707 = -2,062 \text{ tm}$$

$$M_B^{(5)} = 2 \cdot 8,0 \cdot 0,08663 + 4 \cdot 8,0 \cdot 0,01881 = 1,988 \text{ tm}$$

$$M_B^{(6)} = 4 \cdot 10,0 \cdot 0,01881 + 2 \cdot 10,0 \cdot 0,03276 = 1,408 \text{ tm}$$

$$M_B^{(9)} = 4 \cdot 2,0 \cdot 0,01881 + 2 \cdot 2,0 \cdot 0,00727 - 6 \cdot 2,0 \cdot 0,12615 = -1,334 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_B^{(2)} + M_B^{(5)} + M_B^{(6)} + M_B^{(9)} = -2,062 + 1,988 + 1,408 - 1,334 = 0,000$$

$$M_{C_0} = 2 \cdot 3,5 \cdot 0,03276 - 6 \cdot 3,5 \cdot 0,12707 = -2,439 \text{ tm}$$

$$M_C^{(3)} = 4 \cdot 3,5 \cdot 0,03276 - 6 \cdot 3,5 \cdot 0,12707 = -2,210 \text{ tm}$$

$$M_C^{(6)} = 2 \cdot 10,0 \cdot 0,01881 + 4 \cdot 10,0 \cdot 0,03276 = 1,687 \text{ tm}$$

$$M_C^{(7)} = 4 \cdot 6,0 \cdot 0,03276 + 2 \cdot 6,0 \cdot 0,10104 = 1,999 \text{ tm}$$

$$M_C^{(10)} = 4 \cdot 2,5 \cdot 0,03276 + 2 \cdot 2,5 \cdot 0,01782 - 6 \cdot 2,5 \cdot 0,12615 = -1,476 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_C^{(3)} + M_C^{(6)} + M_C^{(7)} + M_C^{(10)} = -2,210 + 1,687 + 1,999 - 1,476 = 0,000$$

$$M_{D_0} = 2 \cdot 5,0 \cdot 0,10104 - 6 \cdot 5,0 \cdot 0,12707 = -2,802 \text{ tm}$$

$$M_D^{(4)} = 4 \cdot 5,0 \cdot 0,10104 - 6 \cdot 5,0 \cdot 0,12707 = -1,791 \text{ tm}$$

$$M_D^{(7)} = 2 \cdot 6,0 \cdot 0,03276 + 4 \cdot 6,0 \cdot 0,10104 = 2,818 \text{ tm}$$

$$M_D^{(44)} = 4 \cdot 4,5 \cdot 0,10104 + 2 \cdot 4,5 \cdot 0,06226 + 6 \cdot 4,5 \cdot 0,12615 = -1,027 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_D^{(4)} + M_D^{(7)} + M_D^{(44)} = -1,791 + 2,818 - 1,027 = 0,000$$

$$M_H^{(8)} = 4 \cdot 4,0 \cdot 0,05500 + 2 \cdot 4,0 \cdot 0,08663 - 6 \cdot 4,0 \cdot 0,12615 = -1,455 \text{ tm}$$

$$M_H^{(12)} = 4 \cdot 8,0 \cdot 0,05500 + 2 \cdot 8,0 \cdot 0,00727 = 1,876 \text{ tm}$$

$$M_H^{(15)} = 4 \cdot 3,5 \cdot 0,05500 + 2 \cdot 3,5 \cdot 0,03478 - 6 \cdot 3,5 \cdot 0,06833 = -0,421 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_H^{(8)} + M_H^{(12)} + M_H^{(15)} = -1,455 + 1,876 - 0,421 = 0,000$$

$$M_G^{(9)} = 4 \cdot 2,0 \cdot 0,00727 + 2 \cdot 2,0 \cdot 0,01881 - 6 \cdot 2,0 \cdot 0,12615 = -1,380 \text{ tm}$$

$$M_G^{(12)} = 4 \cdot 8,0 \cdot 0,00727 + 2 \cdot 8,0 \cdot 0,05500 = 1,113 \text{ tm}$$

$$M_G^{(13)} = 4 \cdot 10,0 \cdot 0,00727 + 2 \cdot 10,0 \cdot 0,01782 = 0,647 \text{ tm}$$

$$M_G^{(16)} = 4 \cdot 1,0 \cdot 0,00727 + 2 \cdot 1,0 \cdot 0,00083 - 6 \cdot 1,0 \cdot 0,06833 = -0,379 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_G^{(9)} + M_G^{(12)} + M_G^{(13)} + M_G^{(16)} = -1,380 + 1,113 + 0,647 - 0,379 = 0,001$$

$$M_F^{(10)} = 4 \cdot 2,5 \cdot 0,01782 + 2 \cdot 2,5 \cdot 0,03276 - 6 \cdot 2,5 \cdot 0,12615 = -1,550 \text{ tm}$$

$$M_F^{(13)} = 4 \cdot 10,0 \cdot 0,01782 + 2 \cdot 10,0 \cdot 0,14540 = 0,858 \text{ tm}$$

$$M_F^{(14)} = 4 \cdot 6,0 \cdot 0,01782 + 2 \cdot 6,0 \cdot 0,06226 = 1,175 \text{ tm}$$

$$M_F^{(17)} = 4 \cdot 1,5 \cdot 0,01782 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0,00840 - 6 \cdot 1,5 \cdot 0,06833 = -0,483 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_F^{(10)} + M_F^{(13)} + M_F^{(14)} + M_F^{(17)} = -1,550 + 0,858 + 1,175 - 0,483 = 0,000$$

$$M_E^{(11)} = 4 \cdot 4,5 \cdot 0,06226 + 2 \cdot 4,5 \cdot 0,10104 - 6 \cdot 4,5 \cdot 0,12615 = -1,376 \text{ tm}$$

$$M_E^{(14)} = 4 \cdot 6,0 \cdot 0,06226 + 2 \cdot 6,0 \cdot 0,01782 = 1,708 \text{ tm}$$

$$M_E^{(18)} = 4 \cdot 4,0 \cdot 0,06226 + 2 \cdot 4,0 \cdot 0,03898 - 6 \cdot 4,0 \cdot 0,06833 = -0,332 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_E^{(11)} + M_E^{(14)} + M_E^{(18)} = -1,376 + 1,708 - 0,332 = 0,000$$

$$M_J^{(15)} = 4 \cdot 3,5 \cdot 0,03478 + 2 \cdot 3,5 \cdot 0,05500 - 6 \cdot 3,5 \cdot 0,06833 = -0,563 \text{ tm}$$

$$M_J^{(19)} = 4 \cdot 4,0 \cdot 0,03478 + 2 \cdot 4,0 \cdot 0,00083 = 0,563 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_J^{(15)} + M_J^{(19)} = -0,563 + 0,563 = 0,000$$

$$M_J^{(16)} = 4 \cdot 1,0 \cdot 0,00083 + 2 \cdot 1,0 \cdot 0,00727 - 6 \cdot 1,0 \cdot 0,06833 = -0,392 \text{ tm}$$

$$M_J^{(19)} = 4 \cdot 4,0 - 0,00083 + 2 \cdot 4,0 \cdot 0,03478 = 0,292 \text{ tm}$$

$$M_J^{(20)} = 4 \cdot 5,0 \cdot 0,00083 + 2 \cdot 5,0 \cdot 0,00840 = 0,101 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_J^{(16)} + M_J^{(19)} + M_J^{(20)} = -0,392 + 0,292 + 0,101 = 0,001$$

$$M_K^{(17)} = 4 \cdot 1,5 \cdot 0,00840 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0,01782 - 6 \cdot 1,5 \cdot 0,06833 = -0,511 \text{ tm}$$

$$M_K^{(20)} = 4 \cdot 5,0 \cdot 0,00840 + 2 \cdot 5,0 \cdot 0,00083 = 0,176 \text{ tm}$$

$$M_K^{(24)} = 4 \cdot 3,0 \cdot 0,00840 + 2 \cdot 3,0 \cdot 0,03898 = 0,335 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_K^{(17)} + M_K^{(20)} + M_K^{(24)} = -0,511 + 0,176 + 0,335 = 0,000$$

$$M_L^{(18)} = 4 \cdot 4,0 \cdot 0,03898 + 2 \cdot 4,0 \cdot 0,06226 - 6 \cdot 4,0 \cdot 0,06833 = -0,518 \text{ tm}$$

$$M_L^{(24)} = 4 \cdot 3,0 \cdot 0,03898 + 2 \cdot 3,0 \cdot 0,00840 = 0,518 \text{ tm}$$

Kontroll:

$$M_L^{(18)} + M_L^{(24)} = -0,518 + 0,518 = 0,000$$

Momentide epüür on kujutatud joon. 2.53

## 6. Põikjõud.

$$Q^{(1)} = -(-2,651 - 1,872) : 4 = 1,131 \text{ t}$$

$$Q^{(2)} = -(-2,174 - 2,062) : 4 = 1,059 \text{ t}$$

$$Q^{(3)} = -(-2,439 - 2,210) : 4 = 1,162 \text{ t}$$

$$Q^{(4)} = -(-2,802 - 1,791) : 4 = 1,148 \text{ t}$$

Kontroll:

$$W_1 + W_2 + W_3 - Q^{(1)} - Q^{(2)} - Q^{(3)} - Q^{(4)} = 1,8 + 1,8 + 0,9 - 1,131 - 1,059 - 1,162 - 1,148 = 0,000$$

$$Q^{(5)} = -(3,073 + 1,988) : 6 = -0,844 \text{ t}$$

$$Q^{(6)} = -(1,408 + 1,687) : 4,5 = -0,688 \text{ t}$$

$$Q^{(7)} = -(1,999 + 2,818) : 7,5 = -0,642 \text{ t}$$

$$Q^{(8)} = (1,455 + 1,202) : 4 = 0,664 \text{ t}$$

$$Q^{(9)} = (1,334 + 1,380) : 4 = 0,678 \text{ t}$$

$$Q^{(10)} = (1,476 + 1,550) : 4 = 0,756 \text{ t}$$

$$Q^{(11)} = (1,027 + 1,376) : 4 = 0,601 \text{ t}$$

Kontroll:

$$W_2 + W_3 - Q^{(8)} - Q^{(9)} - Q^{(10)} - Q^{(11)} = 1,8 + 0,9 - 0,664 - 0,678 - 0,756 - 0,601 = 0,001$$

$$Q^{(12)} = -(1,876 + 1,113) : 6 = -0,498 \text{ t}$$

$$Q^{(13)} = -(0,647 + 0,858) : 4,5 = -0,334 \text{ t}$$

$$Q^{(14)} = -(1,708 + 1,175) : 7,5 = -0,384 \text{ t}$$

$$Q^{(15)} = (0,421 + 0,563) : 4 = 0,246 \text{ t}$$

$$Q^{(16)} = (0,9 + 0,392) : 4 = 0,193 \text{ t}$$

$$Q^{(17)} = (0,4 + 0,511) : 4 = 0,248 \text{ t}$$

$$Q^{(18)} = (0,332 + 0,518) : 4 = 0,212 \text{ t}$$

Kontroll:

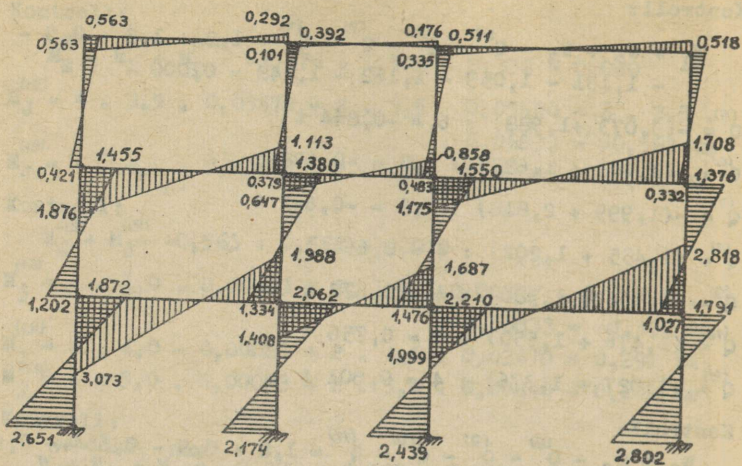
$$W_3 - Q^{(15)} - Q^{(16)} - Q^{(17)} - Q^{(18)} = 0,9 - 0,246 - 0,193 - 0,248 - 0,212 = 0,001$$

$$Q^{(19)} = -(0,563 + 0,292) : 6 = -0,142 \text{ t}$$

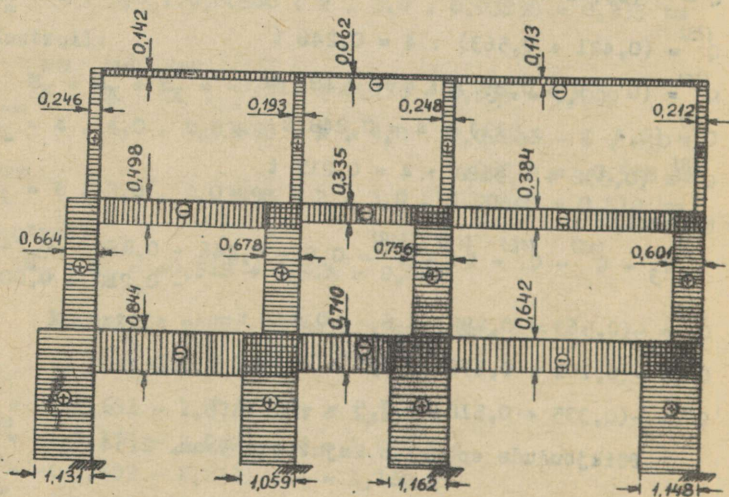
$$Q^{(20)} = -(0,101 + 0,176) : 4,5 = -0,062 \text{ t}$$

$$Q^{(21)} = -(0,335 + 0,518) : 7,5 = -0,114 \text{ t}$$

Põikjõudude epüür on kujutatud joon. 2.54.



joon. 2.53



joon. 2.54

## 7. Normaalkõud.

### Normaalkõud postides

$$N_F^{(15)} = -Q_J^{(19)} = 0,142 \text{ t}$$

$$N^{(8)} = N^{(15)} - Q^{(12)} = 0,142 + 0,498 = 0,640 \text{ t}$$

$$N^{(1)} = N^{(8)} - Q^{(5)} = 0,640 + 0,844 = 1,484 \text{ t}$$

$$N^{(16)} = Q_J^{(19)} - Q_J^{(20)} = -0,142 + 0,062 = -0,080 \text{ t}$$

$$N^{(9)} = N^{(16)} + Q^{(12)} - Q^{(13)} = -0,080 - 0,498 + 0,334 = -0,244 \text{ t}$$

$$N^{(2)} = N^{(9)} + Q^{(5)} - Q^{(6)} = -0,244 - 0,844 + 0,688 = -0,400 \text{ t}$$

$$N^{(17)} = Q^{(20)} - Q^{(21)} = -0,062 + 0,114 = 0,052 \text{ t}$$

$$N^{(10)} = N^{(17)} + Q^{(13)} - Q^{(14)} = 0,052 - 0,334 + 0,384 = 0,102 \text{ t}$$

$$N^{(3)} = N^{(10)} + Q^{(6)} - Q^{(7)} = 0,102 - 0,688 + 0,642 = 0,056$$

$$N^{(18)} = Q^{(21)} = -0,114 \text{ t}$$

$$N^{(11)} = N^{(18)} + Q^{(14)} = -0,114 - 0,384 = -0,498 \text{ t}$$

$$N^{(4)} = N^{(11)} + Q^{(7)} = -0,498 - 0,642 = -1,140 \text{ t}$$

### Normaalkõud riivides

$$N^{(19)} = -W_3 + Q^{(15)} = -0,9 + 0,246 = -0,654 \text{ t}$$

$$N^{(20)} = N^{(19)} + Q^{(16)} = -0,654 + 0,193 = -0,461 \text{ t}$$

$$N^{(21)} = N^{(20)} + Q^{(17)} = -0,461 + 0,248 = -0,213 \text{ t}$$

$$N^{(12)} = -W_2 + Q^{(8)} - Q^{(15)} = -1,800 + 0,664 - 0,246 = -1,382 \text{ t}$$

$$N^{(13)} = N^{(12)} + Q^{(9)} - Q^{(16)} = -1,382 + 0,678 - 0,193 = +0,897 \text{ t}$$

$$N^{(14)} = N^{(13)} + Q^{(10)} - Q^{(17)} = -0,897 + 0,756 - 0,248 = -0,389 \text{ t}$$

$$N^{(14)} = -Q^{(11)} + Q^{(18)} = -0,601 + 0,212 = -0,389 \text{ t}$$

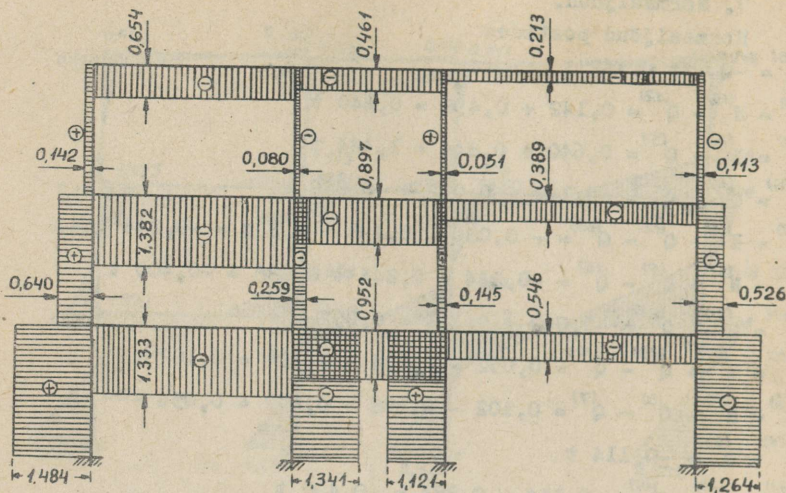
$$N^{(5)} = -W_3 + Q^{(1)} - Q^{(8)} = -1,800 + 1,131 - 0,664 = -1,333 \text{ t}$$

$$N^{(6)} = N^{(5)} + Q^{(2)} - Q^{(9)} = -1,333 + 1,059 - 0,678 = -0,952 \text{ t}$$

$$N^{(7)} = N^{(6)} + Q^{(3)} - Q^{(10)} = -0,952 + 1,162 - 0,756 = -0,546 \text{ t}$$

$$N^{(7)} = Q^{(11)} - Q^{(4)} = 0,601 - 1,148 = -0,547 \text{ t}$$

Normaalkõudude epiür on kujutatud joon. 2.55.



joon. 2.55

## 2.11. SÜMMEETRILISTE RAAMIDE ARVUTAMINE

Kui raami varraste geomeetriselised ja elastsed omadused on sümmeetrilised, siis sümmeetriline koormus põhjustab sümmeetrilise ja antisümmeetrilise koormuse antisümmeetrilise paigutusolukorra. Mis tahes koormuse mõjumisel lahutatakse koormus sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks.

Sümmeetriatelje suhtes sümmeetriliselt asetsevate sõlmede ja varraste pöördenurgad on antisümmeetrilise koormuse mõjumisel võrdsed ning samade märkidega. Sümmeetrilise koormuse puhul sümmeetriliselt asetsevate elementide pöördenurgad on küll võrdsed, kuid vastupidiste märkidega.

Sümmeetrilise koormuse mõjumisel raami sümmeetriateljel asuvate elementide pöördenurgad, samuti aga ka nihkumised risti sümmeetriateljega on nullid. Antisümmeetrilise koormu-

ee mõjumisel raami sümmeetriateljel asuvad elemendid pöörduvad ja nihkuvad risti sümmeetriateljega, kuid nende elementide paigutused sümmeetriatelje suunas on nullid.

Koormuse lahutamiseks sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks ning sümmeetriliste ja antisümmeetriliste gruppundmatute kasutamisega jaguneb üldine  $n^*$  võrrandiga võrrandisüsteem kaheks rühmaks: üks rühm võrrandeid sisaldab ainult sümmeetrilisi gruppundmatuid, teine aga ainult antisümmeetrilisi gruppundmatuid.

Joon. 2.56, a kujutatud kolmeavalise raami geomeetrilise määramatuse aste on 5. Tundmatuteks on 4 sõlme ja 1 posti pöördenurgad.

Sümmeetrilise koormuse mõjumisel on sõlme D pöördenurk võrdne, kuid vastupidise märgiga sõlme A pöördenurgale  $\varphi_D^{(s)} = -\varphi_A^{(s)}$ . Antisümmeetrilise koormuse mõjumisel on sõlme D pöördenurk nii suuruselt kui ka märgilt võrdne sõlme A pöördenurgaga  $\varphi_D^{(a)} = \varphi_A^{(a)}$ . Sama kehtib ka sõlmede B ja C kohta:  $\varphi_C^{(s)} = -\varphi_B^{(s)}$ ,  $\varphi_C^{(a)} = \varphi_B^{(a)}$

Sümmeetrilisteks gruppundmatuteks on  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$  (joon. 2.56, b ja c) ning antisümmeetrilisteks gruppundmatuteks  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  ja  $\varphi_5$  (joon. 2.56, d, e ja f).

Võrrandite põhitundmatute kordajad-reaktsioonid on järgmised:

$$1) \text{ paigutusolukorras } \varphi_1 = 1 \quad (\varphi_A^{(s)} = -\varphi_D^{(s)})$$

$$r_{11} = 2(4i_1 + 4i_2) \quad r_{21} = 2(2i_2),$$

$$2) \text{ paigutusolukorras } \varphi_2 = 1 \quad (\varphi_B^{(s)} = -\varphi_C^{(s)})$$

$$r_{22} = 2(4i_2 + 4i_3 + 2i_4) \quad r_{12} = 2(2i_2)$$

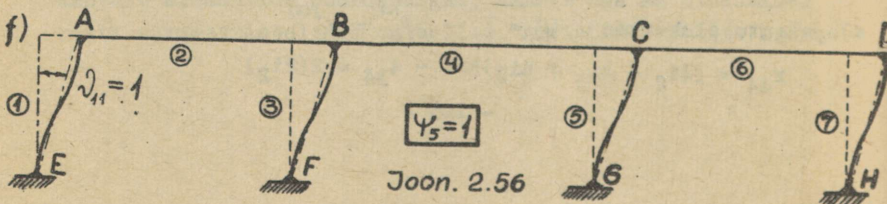
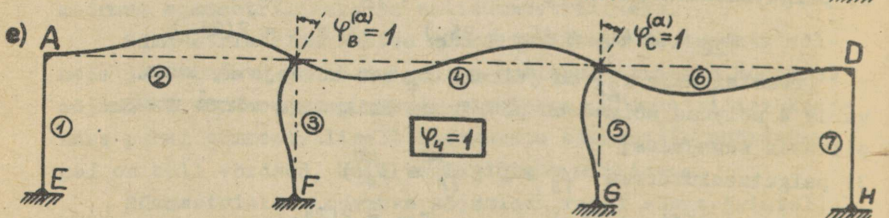
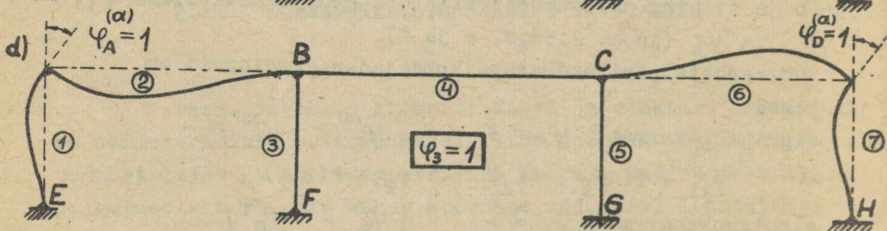
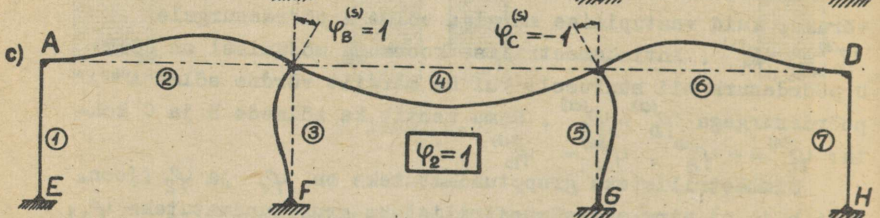
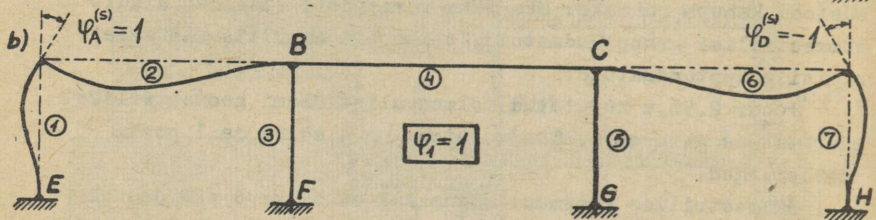
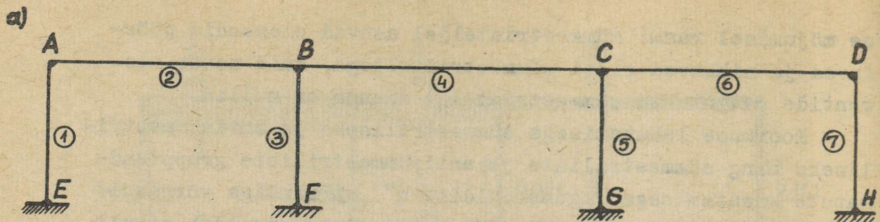
reaktsioonis  $r_{22}$  on jääkuse  $i_4$  ees kordaja 2, kuna varda 4 mõlemad sõlmed on pöörduvad ühiknurga võrra vastupidistes suundades;

$$3) \text{ paigutusolukorras } \varphi_3 = 1 \quad (\varphi_A^{(a)} = \varphi_D^{(a)})$$

$$r_{33} = 2(4i_1 + 4i_2) \quad r_{43} = 2(2i_2)$$

$$4) \text{ paigutusolukorras } \varphi_4 = 1 \quad \varphi_B^{(a)} = \varphi_C^{(a)}$$

$$r_{44} = (4i_2 + 4i_3 + 6i_4) \quad 4_{34} = 2(2i_2)$$



reaktsioonis  $r_{44}$  on jäikuse  $i_4$  ees kordaja 6, kuna var-  
da 4 mõlemad sõlmed on pöördunud ühiknurga võrra samas suu-  
nas;

$$5) \text{ paigutusolukorras } \psi_5 = 1 \quad (\vartheta_{15} = \vartheta_{75}, \vartheta_{35} = \vartheta_{55})$$

$$r_{55} = 2 \cdot 12(i_1 + i_3)$$

$$r_{35} = r_{53} = -2 \cdot 6 i_1 \quad r_{45} = r_{54} = 2 \cdot 6 \cdot i_3$$

Võrrandite vabaliikmed on järgmised:

$$r_{1P} = 2(M_{AP}^{(S),(1)} + M_{AP}^{(S),(2)}) \quad r_{2P} = 2(M_{BP}^{(S),(2)} + M_{BP}^{(S),(3)} + M_{BP}^{(S),(4)})$$

$$r_{3P} = 2(M_{AP}^{(\alpha),(1)} + M_{AP}^{(\alpha),(2)}) \quad r_{4P} = 2(M_{BP}^{(\alpha),(2)} + M_{BP}^{(\alpha),(3)} + M_{BP}^{(\alpha),(4)})$$

$$r_{5P} = -2(M_{AP}^{(\alpha),(1)} + M_{BP}^{(\alpha),(1)} + S_{15}^{(\alpha)}) - 2(M_{BP}^{(\alpha),(3)} + M_{BP}^{(\alpha),(3)} + S_{35}^{(\alpha)})$$

Sümmeetrilised gruppundmatud  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$   
ning antisümmeetrilised gruppundmatud  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  ja  $\varphi_5$   
arvutatakse vastavalt võrrandisüsteemidest

$$r_{11}\varphi_1 + r_{12}\varphi_2 + r_{1P} = 0$$

$$r_{21}\varphi_1 + r_{22}\varphi_2 + r_{2P} = 0$$

ja

$$r_{33}\varphi_3 + r_{34}\varphi_4 + r_{35}\varphi_5 + r_{3P} = 0$$

$$r_{43}\varphi_3 + r_{44}\varphi_4 + r_{45}\varphi_5 + r_{4P} = 0$$

$$r_{53}\varphi_3 + r_{54}\varphi_4 + r_{55}\varphi_5 + r_{5P} = 0$$

Sõlmede pöördenukad leitakse pärast grupp-põhitundma-  
tute arvutamist järgmiselt:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\alpha)} = \varphi_1 + \varphi_3$$

$$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\alpha)} = \varphi_2 + \varphi_4$$

$$\varphi_C = \varphi_C^{(\alpha)} - \varphi_C^{(S)} = \varphi_4 - \varphi_2$$

$$\varphi_D = \varphi_D^{(\alpha)} - \varphi_D^{(S)} = \varphi_3 - \varphi_1$$

Kõik postid pöörduvad nurga  $\psi_5$  võrra.

Paindemomendid, põik- ja normaaljõud arvutatakse tavali-  
selt pöördenukade  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$ ,  $\varphi_D$  ja  $\psi_5$  abil.

Arvutusnäide. Arvutada joon. 257, a kujutatud sümmeetrilisele raamile mõjuvast koormusest paindemomentide epüür

1. Varraste jäikused

$$i_1 = i_6 = 2 \quad i_2 = i_5 = 1 \quad i_3 = i_4 = 3$$

2. Geomeetrilise määramatuse aste

$$n^* = s_3 + w = 3 + 2 = 5$$

Tundmatuteks on sõlmede A, B ja C pöördenurgad  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  ja  $\varphi_C$  ning varraste pöördenurki määravad parameetrid  $\psi_2$  ja  $\psi_5$ .

3. Raamile mõjuv koormus lahutatakse sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks koormuseks (joon. 2,57b, c).

4. Reaktsioonid:

sümmeetrilisteks tundmatuteks on  $\varphi_1 = \varphi_A^{(s)} = -\varphi_C^{(s)}$  ja  $\varphi_2$ . Paigutusolukorrad  $\varphi_1 = 1$  ja  $\varphi_2 = 1$  on kujutatud joon. 2.58, a, b.

$$r_{11} = 2(3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3) = 44$$

$$r_{12} = -2(6 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 3 \cdot 2) = 60$$

$$r_{22} = 2(12 \cdot 1 \cdot 1^2 + 12 \cdot 3 \cdot 2^2) = 312$$

Antisümmeetrilisteks tundmatuteks on  $\varphi_3 = \varphi_A^{(a)} = \varphi_C^{(a)}$  ja  $\varphi_4 = \varphi_B$  ja  $\varphi_5$ . Paigutusolukorrad  $\varphi_3 = 1$ ,  $\varphi_4 = 1$  ja  $\varphi_5 = 1$  on kujutatud joon. 258, c, d, e.

$$r_{33} = 2(3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3) = 44$$

$$r_{34} = 2(2 \cdot 3) = 12$$

$$r_{35} = -2(6 \cdot 1 \cdot 1) = -12$$

$$r_{44} = 2(4 \cdot 3) = 24$$

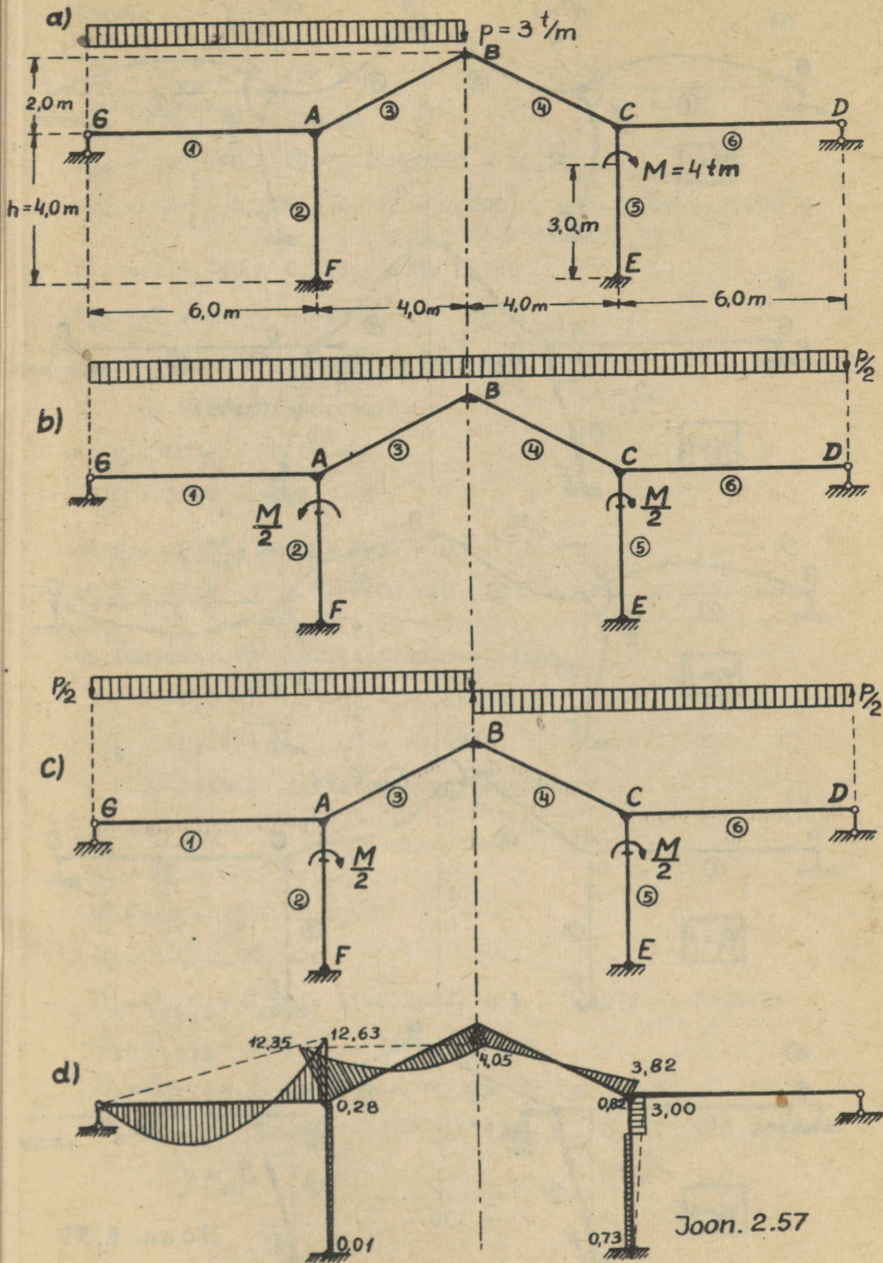
$$r_{45} = 0$$

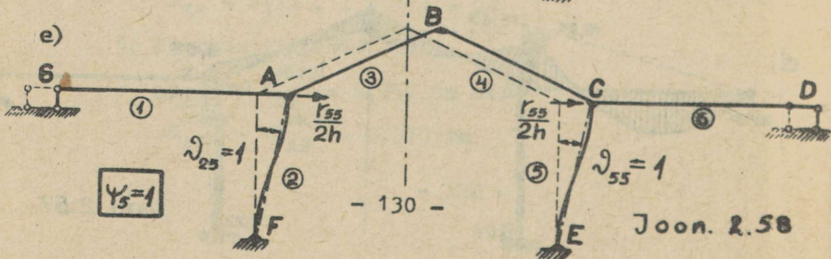
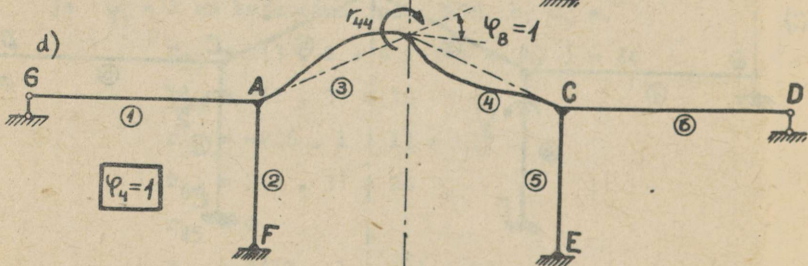
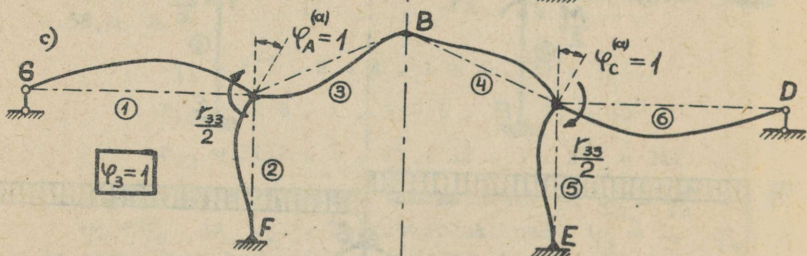
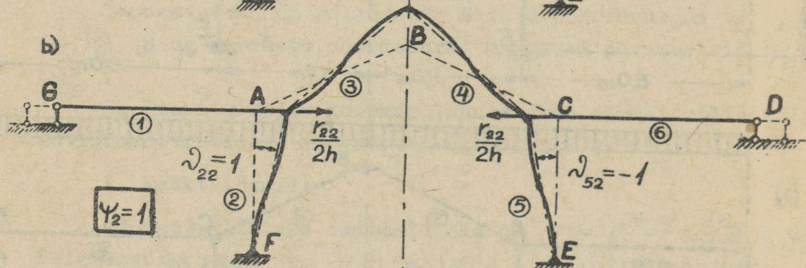
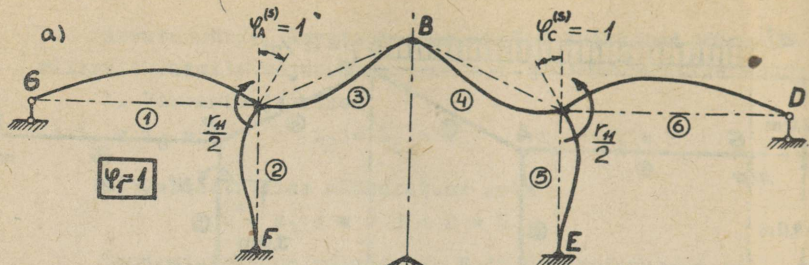
$$r_{55} = 2(12 \cdot 1 \cdot 1^2) = 24$$

5. Koormusliikmed:

$$M_{AP}^{(1),(s)} = M_{AP}^{(1),(\alpha)} = 6,750 \text{ tm}$$

$$M_{AP}^{(2),(s)} = -M_{AP}^{(2),(\alpha)} = 0,375 \text{ tm}$$





$$M_{AP}^{(3),(s)} = -2,000 \text{ tm}$$

$$M_{FP}^{(s)} = -M_{FP}^{(a)} = -0,625 \text{ tm}$$

$$M_{BP}^{(3),(s)} = M_{BP}^{(3),(a)} = 2,000 \text{ tm}$$

$$r_{1P} = 2(6,750 + 0,375 - 2,000) = 10,250$$

$$r_{2P} = -2 \left\{ \begin{aligned} &[-0,625 + 0,375 - 2,000] \cdot 1 + [-2,000 + 2,000 + \\ &+ 4 \cdot 1,5 \cdot 2] \cdot (-2) \end{aligned} \right\} = 52,5$$

$$r_{3P} = 2(6,750 - 0,375 - 2) = 8,750$$

$$r_{4P} = 2 \cdot 2,000 = 4,000$$

$$r_{5P} = -2 \left\{ [0,625 - 0,375 + 2,0] \cdot 1 \right\} = -4,500$$

6. Võrrandisüsteemid:

$$44 \varphi_1 + 60 \varphi_2 + 10,25 = 0$$

$$60 \varphi_1 + 312 \varphi_2 + 52,5 = 0$$

$$44 \varphi_3 + 12 \varphi_4 - 12 \varphi_5 + 8,75 = 0$$

$$12 \varphi_3 + 24 \varphi_4 + 4,00 = 0$$

$$-12 \varphi_3 + 24 \varphi_5 - 4,50 = 0$$

on lahendatud eliminatsioonimeetodiga:

$$\varphi_1 = -0,0047 \quad \varphi_2 = -0,1674$$

$$\varphi_3 = -0,1406 \quad \varphi_4 = -0,0964 \quad \varphi_5 = 0,1172$$

7. Sõlmede ja varraste pöördenurgad:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_3 = -0,1453$$

$$\varphi_B = \varphi_4 = -0,0964$$

$$\varphi_C = -\varphi_1 + \varphi_3 = -0,1359$$

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_6 = 0$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_{22} \varphi_2 + \vartheta_{25} \varphi_5 = 1(-0,1674) + 1 \cdot 0,1172 = -0,0502$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_{32} \varphi_2 = (-2)(-0,1674) = 0,3348$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_{42} \varphi_2 = 2(-0,1674) = -0,3348$$

$$\vartheta_5 = \vartheta_{52} \varphi_2 + \vartheta_{55} \varphi_5 = (-1)(-0,1674) + 1 \cdot 0,1172 = 0,2846$$

Paindemomendid:

$$M_A^{(1)} = 12,63 \text{ tm}$$

$$M_A^{(2)} = -0,28 \text{ tm}$$

$$M_A^{(3)} = 12,35 \text{ tm}$$

$$M_F = 0,01 \text{ tm}$$

$$M_E = 0,73 \text{ tm}$$

$$M_B^{(3)} = -4,05 \text{ tm}$$

$$M_B^{(4)} = 4,05 \text{ tm}$$

$$M_C^{(4)} = 3,82 \text{ tm}$$

$$M_C^{(5)} = -3,00 \text{ tm}$$

$$M_C^{(6)} = -0,82 \text{ tm}$$

Paindemomentide epüür on kujutatud joon. 2.57, d.

## 2.12 TEMPERAATUURI MUUTUMISE, TUGEDE NIHKUMISE JA NORMAALJÕUDUDE MÕJU

### 2.121 Temperatuuri muutumine

Temperatuuri muutumine põhjustab varraste pikkuste muutumist ja ka varraste kõverdumist, kui temperatuuri muutumine varraste erinevatel pooltel ei ole ühesugune. Temperatuuri mõju arvutamisel eeldatakse, et piki varda telge muutub temperatuur ühtlaselt.

Temperatuuri muutumisest põhjustatud paindemomendid, põik- ja normaaljõud arvutatakse kahes osas: ebaühtlasest temperatuuri muutumisest  $\Delta t = t_a - t_u$ , mis põhjustab varraste kõverdumist, ja ühtlaselt temperatuuri muutumisest  $t_0$ , mis põhjustab kas varraste pikenemist või lühenemist.

### 2.122 Ebaühtlane temperatuuri muutumine

Ebaühtlane temperatuuri muutumine põhjustab varraste kõverdumist, mille tagajärjel tekivad kinnitusemomendid geomeetriliselt määratud põhiskeemis.

Kinnitusemomendid arvutatakse tabelites 1 ja 2 esitatud valemitega 16

$$M_{Jt}^{(K)} = -EJ\alpha \frac{\Delta t}{d} \quad M_{Kt}^{(K)} = EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$$

$$M_{Jt}^{(L)} = -\frac{3}{2} EJ\alpha \frac{\Delta t}{d}$$

kusjuures kinnitumoment  $M_{Jt}^{(L)}$  on kirjutatud varda jaoks, millel paindekange kinnitus on vasakpoolses ja liigendkinnitus parempoolses otsas. Vastupidisel juhul on miinusmärgi asemel plussmärk.

Valemitega (48) ja (55) arvutatakse nüüd võrrandite vabaliikmed

$$r_{J\Delta t} = -\sum_K M_{Jt}^{(K)} + \sum_L M_{Jt}^{(L)} \quad (95)$$

$$r_{c\Delta t} = -\sum_S M_{J\Delta t}^{(S)} \vartheta_{st} \quad (96)$$

Paindemomendid, pöik- ja normaaljõud arvutatakse analoogiliselt väliskoormusest põhjustatud sisejõududega.

## 2.123 Ühtlane temperatuuri muutumine

Väliskoormusest ja ebaühtlasest temperatuuri muutumisest põhjustatud kinnitumomendid geomeetriliselt määratud põhiskeemis arvutatakse tabelises 1 ja 2 esitatud valemitega, kusjuures valemites esinevad suurused ei nõua lisaarvutust. Ühtlasest temperatuuri muutumisest põhjustatud kinnitumomendid geomeetriliselt määratud põhiskeemis arvutatakse järgmiste valemitega

$$M_{Jt}^{(r)} = M_{Kt}^{(r)} = -6 \frac{EJ_F}{l_r} \vartheta_{rt} \quad (97)$$

$$M_{Jt}^{(s)} = -3 \frac{EJ_S}{l_s} \vartheta_{st} \quad (98)$$

milles  $\vartheta_{rt}$  ja  $\vartheta_{st}$  on ühtlasest temperatuuri muutumisest põhjustatud varraste pöördenurgad geomeetriliselt määratud põhiskeemis, kusjuures tähega r on märgitud mõlemast otsast paindekangelt ning tähega s ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varrast. Geomeetriliselt määratud põhiskeemis nõuab varraste pöördenurkade  $\vartheta_{rt}$

ja  $\mathcal{J}_{st}$  arvutamine teatud lisaarvutust.

Kui varda telgjoonel temperatuur muutub, arvutatakse iga varda pikkuse muutus valemiga

$$\Delta l = \alpha t_0 l \quad (99)$$

Varraste pikenemiste või lühenemiste kaudu leitakse sõlmede nihkumised, mis on vajalikud varraste pöördenurkade  $\mathcal{J}_{rt}$  ja  $\mathcal{J}_{st}$  arvutamiseks.

Valemitega (48) ja (55) arvutatakse võrrandite vaba-liikmed

$$r_{Jt} = \sum_K M_{Jt}^{(K)} + \sum_L M_{Jt}^{(L)} \quad (100)$$

$$r_{ct} = - \sum_r (M_{Jt}^{(r)} + M_{Kt}^{(r)}) \mathcal{J}_{rt} - \sum_s M_{Jt}^{(s)} \mathcal{J}_{st} \quad (101)$$

mis kinnitussmomentide (97), (98) sisseviimisel saavad kuju

$$r_{Jt} = -6 \sum_K \frac{EJ_K}{l_K} \mathcal{J}_{Kt} - 3 \sum_L \frac{EJ_L}{l_L} \mathcal{J}_{Lt} \quad (102)$$

$$r_{ct} = -12 \sum_r \frac{EJ_r}{l_r} \mathcal{J}_{rt} \mathcal{J}_{rc} + 3 \sum_s \frac{EJ_s}{l_s} \mathcal{J}_{st} \mathcal{J}_{sc} \quad (103)$$

Pöördenurgad ja sisejõud arvutatakse tavalisel viisil.

## 2.124 Arvutusnäide

Konstrueerida joon. 2.59 kujutatud raami jaoks paindemomentide epiür, mis on põhjustatud temperatuuri muutumisest väljaspool raami  $+10^{\circ}\text{C}$  ja raami sees  $+20^{\circ}\text{C}$ .

1. Andmed:

$$h_1 = h_2 = 4,0 \text{ m} \quad h_3 = 3,0 \text{ m} \quad l = 6,0 \text{ m}$$

Varraste ristlõiked

$$b_1 \cdot d_1 = 30 \cdot 50 \text{ cm}^2 \quad b_2 \cdot d_2 = 30 \cdot 60 \text{ cm}^2 \quad b_3 \cdot d_3 = 30 \cdot 30 \text{ cm}^2$$

$$b_4 \cdot d_4 = b_5 \cdot d_5 = 30 \cdot 60 \text{ cm}^2$$

$$J_1 = 0,003125 \text{ m}^4 \quad J_2 = J_4 = J_5 = 0,005400 \text{ m}^4$$

$$J_3 = 0,000675 \text{ m}^4$$

$$\alpha = 0,00001 \quad E = 2000000 \text{ t/m}^2$$

$$i_1 = EJ_1 : h_1 = 2000000 \cdot 0,003125 : 4,0 = 1562,5 \text{ tm}$$

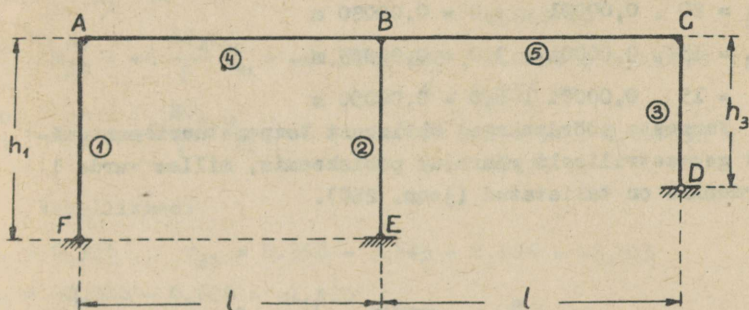
$$i_2 = EJ_2 : h_2 = 2000000 \cdot 0,005400 : 4,0 = 2700,0 \text{ tm}$$

$$i_3 = EJ_3 : h_3 = 2000000 \cdot 0,000675 : 3,0 = 450,0 \text{ tm}$$

$$i_4 = i_5 = EJ_4 : l = 2000000 \cdot 0,005400 : 6,0 = 1800,0 \text{ tm}$$

Arvutuslikud jäikused on 1000 korda vähendatud

$$i_1 = 1,5625 \quad i_2 = 2,700 \quad i_3 = 0,450 \quad i_4 = i_5 = 1,800$$



joon. 2.59

Ühtlaselt muutub temperatuur varrastes 1, 3, 4 ja 5

$$t_o = \frac{1}{2}(20 + 10) = 15^\circ\text{C}$$

ning vardas 2

$$t_o = 20^\circ\text{C}$$

Ebaühtlane on temperatuuri muutus varrastes 1, 3, 4 ja 5

$$\Delta t = 20 - 10 = 10^\circ\text{C}$$

kuna vardas 2  $\Delta t = 0$ .

2. Reaktsioonid:

$$r_{AA} = 4(1,5625 + 1,8) = 13,45 \quad r_{BB} = 4(2,7 + 1,8 + 1,8) = 25,2$$

$$r_{CC} = 4 \cdot 1,8 + 3 \cdot 0,45 = 8,55 \quad r_{AB} = r_{BA} = 2 \cdot 1,8 = 3,6$$

$$r_{BC} = r_{CB} = 2 \cdot 1,8 = 3,6$$

$$r_{A1} = -6 \cdot 1,5625 \cdot 1 = -9,375$$

$$r_{B1} = -6 \cdot 2,7 \cdot 1 = -16,2$$

$$r_{C1} = -3 \cdot 0,45 \cdot \frac{4}{3} = -1,8$$

$$r_{11} = 12 \cdot 1,5625 \cdot 1^2 + 12 \cdot 2,7 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0,45 \cdot \frac{4^2}{3^2} = 53,55$$

3. Kinnitusemomendid ühtlasest temperatuuri muutumisest:

Varraste pikenedes:

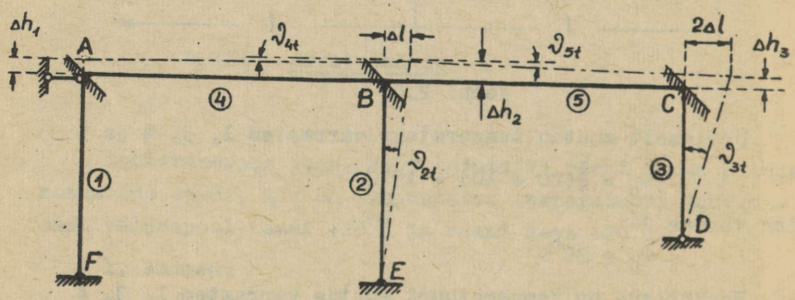
$$\Delta h_1 = 15 \cdot 0,00001 \cdot 4,0 = 0,00060 \text{ m}$$

$$\Delta h_2 = 20 \cdot 0,00001 \cdot 4,0 = 0,00080 \text{ m}$$

$$\Delta h_3 = 15 \cdot 0,00001 \cdot 3,0 = 0,00045 \text{ m}$$

$$\Delta l = 15 \cdot 0,00001 \cdot 6,0 = 0,00090 \text{ m}$$

Varraste pöördenurgad ühtlasest temperatuuri muutumisest geomeetriliselt määratud põhiskeemis, milles varda 1 pöördumine on takistatud (joon. 260).



joon. 2.60

$$\gamma_{4t} = 0$$

$$\gamma_{2t} = \Delta l : h_2 = 0,00090 : 4 = 0,000225$$

$$\gamma_{3t} = 2\Delta l : h_3 = 0,00180 : 3 = 0,000600$$

$$\vartheta_{4t} = (\Delta h_1 - \Delta h_2) : l = (0,00060 - 0,00080) : 6 = -0,000033$$

$$\vartheta_{5t} = (\Delta h_2 - \Delta h_3) : l = (0,00080 - 0,00045) : 6 = 0,000058$$

Kinnitusemomendid:

$$M_{At}^{(1)} = M_{Ft}^{(1)} = -6 \frac{EJ_1}{h_1} \vartheta_{4t} = 0$$

$$M_{Bt}^{(2)} = M_{Et}^{(2)} = -6 \frac{EJ_2}{h_2} \vartheta_{2t} = -6 \cdot 2000000 \cdot 0,0054 \cdot 0,000225 : 4 = -3,645 \text{ tm}$$

$$M_{Ct}^{(3)} = -3 \frac{EJ_3}{h_3} \vartheta_{3t} = -3 \cdot 2000000 \cdot 0,000675 \cdot 0,0006 : 3 = -0,810 \text{ tm}$$

$$M_{At}^{(4)} = M_{Bt}^{(4)} = -6 \frac{EJ_4}{l} \vartheta_{4t} = -6 \cdot 2000000 \cdot 0,0054 \cdot 0,000033 : 6 = 0,356 \text{ tm}$$

$$M_{Bt}^{(5)} = M_{Ct}^{(5)} = -6 \frac{EJ_5}{l} \vartheta_{5t} = -6 \cdot 2000000 \cdot 0,0054 \cdot 0,000058 : 6 = -0,626 \text{ tm}$$

Vabaliikmed:

$$r_{At} = 0,356 \quad r_{Bt} = 0,356 - 3,645 - 0,626 = -3,915$$

$$r_{Ct} = -0,810 - 0,626 = -1,436$$

$$r_{1t} = 12 \frac{EJ_2}{h_2} \vartheta_{2t} \vartheta_{2t} + 3 \frac{EJ_3}{h_3} \vartheta_{3t} \vartheta_{3t} = 12 \cdot 2000000 \cdot 0,0054 \cdot 0,000225 \cdot 1 : 4 + 3 \cdot 2000000 \cdot 0,000675 \cdot 0,0006 \cdot 3 : 3 = 8,37$$

#### 4. Võrrandisüsteemi

$$13,45 \varphi_A + 3,6 \varphi_B - 9,375 \varphi_1 + 0,356 = 0$$

$$3,6 \varphi_A + 25,2 \varphi_B + 3,6 \varphi_1 - 3,915 = 0$$

$$3,6 \varphi_B + 8,55 \varphi_C - 1,8 \varphi_1 - 1,436 = 0$$

$$-9,375 \varphi_A - 16,2 \varphi_B - 1,8 \varphi_C + 53,55 \varphi_1 + 8,370 = 0$$

lahend on järgmine

$$\varphi_A = -0,15503 \quad \varphi_B = 0,05747 \quad \varphi_C = 0,10957 \quad \varphi_1 = -0,16238.$$

5. Paindemomendid ühtlasest temperatuuri muutumisest:

$$M_F = -2 \cdot 1,5625 \cdot 0,15503 + 6 \cdot 1,5625 \cdot 0,16238 = 1,038 \text{ tm}$$

$$M_A^{(1)} = -4 \cdot 1,5625 \cdot 0,15503 + 6 \cdot 1,5625 \cdot 0,16238 = 0,553 \text{ tm}$$

$$M_A^{(4)} = 0,356 - 4 \cdot 1,80 \cdot 0,15503 + 2 \cdot 1,80 \cdot 0,05747 = -0,533 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_A^{(1)} + M_A^{(4)} = 0,533 - 0,533 = 0,000$$

$$M_B^{(4)} = 0,356 - 2 \cdot 1,80 \cdot 0,15503 + 4 \cdot 1,80 \cdot 0,05747 = 0,212 \text{ tm}$$

$$M_B^{(2)} = -3,645 + 4 \cdot 2,70 \cdot 0,05747 + 6 \cdot 2,70 \cdot 0,16238 = -0,394 \text{ tm}$$

$$M_B^{(5)} = -0,626 + 4 \cdot 1,80 \cdot 0,05747 + 2 \cdot 1,80 \cdot 0,10957 = 0,182 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_B^{(4)} + M_B^{(2)} + M_B^{(5)} = 0,212 - 0,394 + 0,182 = 0,000$$

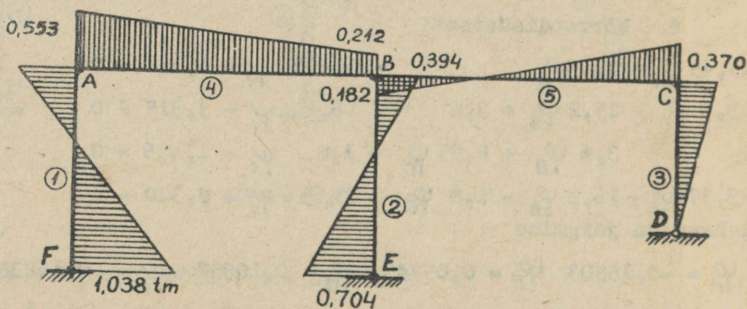
$$M_E^{(2)} = -3,645 + 2 \cdot 2,70 \cdot 0,05747 + 6 \cdot 2,70 \cdot 0,16238 = -0,704 \text{ tm}$$

$$M_C^{(5)} = -0,626 + 2 \cdot 1,80 \cdot 0,05747 + 4 \cdot 1,80 \cdot 0,10957 = 0,370 \text{ tm}$$

$$M_C^{(3)} = -0,810 + 3 \cdot 0,45 \cdot 0,10957 + 3 \cdot 0,45 \cdot 0,16238 \cdot \frac{4}{3} = -0,370 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_C^{(5)} + M_C^{(3)} = 0,370 - 0,370 = 0,000$$

Paindemomentide epüür on kujutatud joon. 2.61



joon. 2.61

Põikjõud postides:

$$Q^{(1)} = -(1,038 + 0,553) : 4 = -0,398 \text{ t}$$

$$Q^{(2)} = (0,704 + 0,394) : 4 = 0,274 \text{ t}$$

$$Q^{(3)} = 0,370 : 3 = 0,123 \text{ t}$$

$$\text{Kontroll: } Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(3)} = -0,398 + 0,274 + 0,123 = -0,001$$

6. Kinnitusemomendid ebaühtlasest temperatuuri muutumisest<sup>2</sup>

$$M_{At}^{(1)} = -M_{Ft} = EJ_1 \alpha \frac{\Delta t}{d_1} = 2000000 \cdot 0,003125 \cdot 0,00001 \cdot 10 : 0,50 = 1,25 \text{ tm}$$

$$M_{Bt}^{(4)} = -M_{At}^{(4)} = M_{Ct}^{(5)} = -M_{Bt}^{(5)} = EJ_4 \alpha \frac{\Delta t}{d_4} = 2000000 \cdot 0,0054 \cdot 0,00001 \cdot 10 : 0,60 = 1,80 \text{ tm}$$

$$M_{Et} = M_{Bt}^{(2)} = 0$$

$$M_{Ct} = -\frac{3}{2} \cdot 2000000 \cdot 0,000675 \cdot 0,00001 \cdot 10 : 0,30 = -0,675 \text{ tm}$$

Vabaliikmed:

$$r_{At} = 1,25 - 1,80 = -0,55$$

$$r_{Ct} = 1,80 - 0,675 = 1,125$$

$$r_{Bt} = 1,80 - 1,80 = 0$$

$$r_{1t} = -(-0,675) \frac{4}{3} = 0,900$$

7. Võrrandisüsteemi

$$13,45 \varphi_A + 3,6 \varphi_B - 9,375 \varphi_1 - 0,55 = 0$$

$$3,6 \varphi_A + 25,2 \varphi_B + 3,6 \varphi_C - 16,2 \varphi_1 + 0 = 0$$

$$3,6 \varphi_B + 8,55 \varphi_C - 1,8 \varphi_1 + 1,125 = 0$$

$$-9,375 - 16,2 \varphi_B - 1,8 \varphi_C + 53,55 \varphi_1 + 0,900 = 0$$

lahend on järgmine:

$$\varphi_A = 0,02917 \quad \varphi_B = 0,00614 \quad \varphi_C = -0,13721 \quad \varphi_1 = -0,01445$$

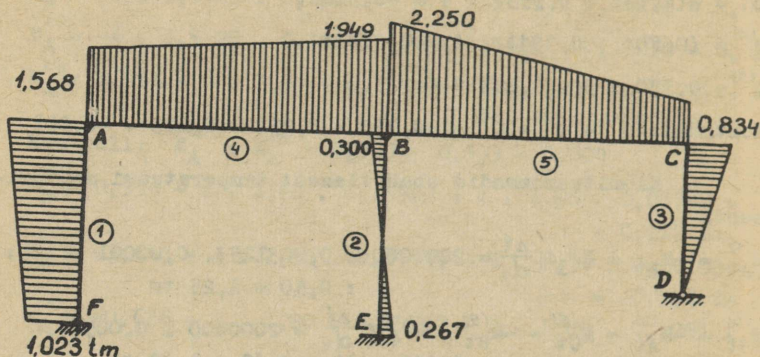
8. Paindemomendid ebaühtlasest temperatuuri muutumisest:

$$M_F = -8,023 \text{ tm} \quad M_A^{(1)} = 1,568 \text{ tm} \quad M_A^{(4)} = -1,568 \text{ tm}$$

$$M_B^{(4)} = 1,949 \text{ tm} \quad M_B^{(2)} = 0,300 \text{ tm} \quad M_B^{(5)} = -2,250 \text{ tm}$$

$$M_B = 0,267 \text{ tm} \quad M_C^{(5)} = 0,834 \text{ tm} \quad M_C^{(3)} = -0,834 \text{ tm}$$

Paindemomentide eplüür on kujutatud joon. 2.62



joon. 2.62

Põikjõud postides

$$Q^{(1)} = -(1,568 - 1,023) : 4 = -0,136 \text{ t}$$

$$Q^{(2)} = -(0,300 + 0,267) : 4 = -0,142 \text{ t}$$

$$Q^{(3)} = 0,834 : 3 = 0,278 \text{ t}$$

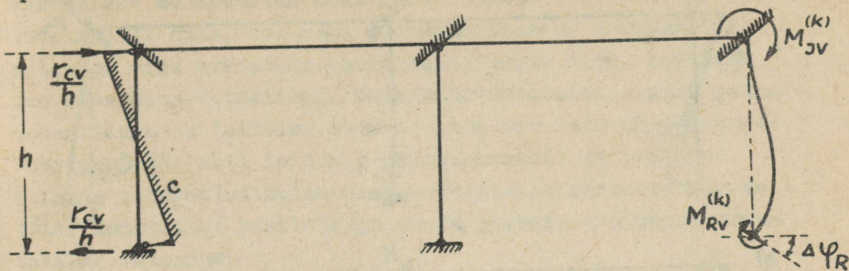
Kontroll:

$$Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(3)} = -0,136 - 0,142 + 0,278 = 0$$

## 2.125 Tugede paigutuste mõju

Tugede paigutustest põhjustatud sisejõud arvutatakse iteratsioonimeetodiga. Arvestades pinnase füüsikalisi omadusi, arvutatakse koormusest põhjustatud toereaktsioonidega tugede paigutused. Nendest paigutustest põhjustatud sisejõud, mis liidetakse koormusest põhjustatud sisejõududele, arvutatakse analoogiliselt temperatuuri muutumisest põhjustatud sisejõududega. Vastavalt parandatud toereaktsioonidele arvutatakse tugede paigutused ja arvutust korratakse seni, kuni

parandused muutuvad küllalt väikeseks.



joon. 2.63

Tugede pöörumisest (joon. 2.63) arvutatakse sõlmede ja varraste pöördenurgad analoogiliselt ebaühtlasest temperatuuri muutumisest põhjustatud pöördenurkadega. Mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud vardas arvutatakse kinnitusemomendid valemitega

$$M_{RV}^{(K)} = 4 \frac{EJ}{l} \Delta\varphi_R^{(K)} \quad M_{JV}^{(K)} = 2 \frac{EJ}{l} \Delta\varphi_R^{(K)} \quad (104)$$

ja paindekange toega, kuid teises otsas liigendühendust omavas vardas valemiga

$$M_{RV}^{(L)} = 3 \frac{EJ}{l} \Delta\varphi_R^{(L)} \quad (105)$$

milles  $\Delta\varphi_R$  on toeristlõike pöördenurk.

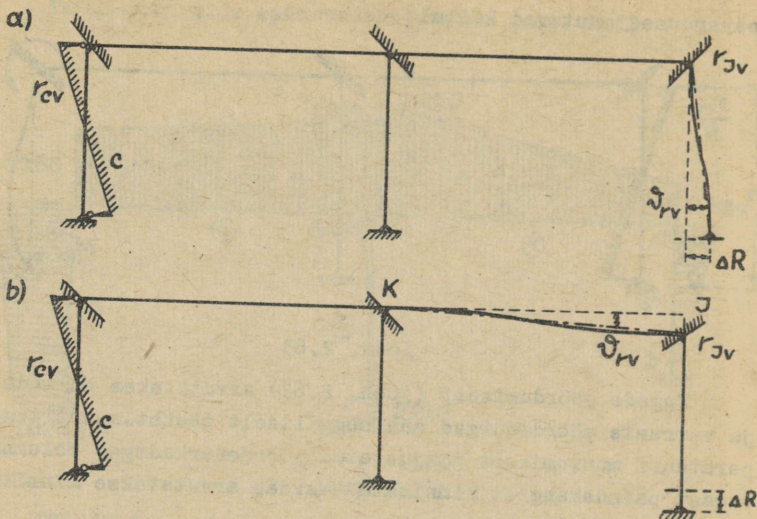
Vabaliikmed arvutatakse valemitega

$$r_{JV} = 2 \sum_K \frac{EJ_K}{l_K} \Delta\varphi_R^{(K)} \quad (106)$$

$$r_{cv} = -6 \sum_r \frac{EJ_r}{l_r} \Delta\varphi_R^{(r)} \varrho_{rc} - 3 \sum_s \frac{EJ_s}{l_s} \Delta\varphi_R^{(s)} \varrho_{sc} \quad (107)$$

Valemities (106), (107) tähistab K sõlmes J ühendatud varrast, r raami iga mõlemast otsast paindekangelt kinnitatud varrast ja s raami iga ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varrast.

Tugede vajumisest või horisontaalsest nihkumisest (joon. 2.64, a, b) tekitatud sisejõud arvutatakse analoogiliselt ühtlasest temperatuuri muutumisest põhjustatud sisejõududega. Kinnitusemomendid leitakse valemitega



joon. 2.64

$$M_{Jv}^{(K)} = M_{Kv}^{(K)} = -6 \frac{EJ_K}{l_k} \vartheta_{Kv} \quad (108)$$

$$M_{Jv} = -3 \frac{EJ_L}{l_L} \vartheta_{Lv} \quad (109)$$

Vabaliikmed arvutatakse pärast kinnitusemomentide leidmist valemitele (102) ja (103) analoogiliste valemitega

$$r_{Jv} = -6 \sum_K \frac{EJ_K}{l_K} \vartheta_{Kv} - 3 \sum_L \frac{EJ_L}{l_L} \vartheta_{Lv} \quad (110)$$

$$r_{cv} = 12 \sum_r \frac{EJ}{l_r} \vartheta_{rv} \vartheta_{rc} + 3 \sum_s \frac{EJ_s}{l_s} \vartheta_{sv} \vartheta_{sc} \quad (111)$$

## 2.126 Normaaljõudude mõju arvutamine

Deformatsioonimeetodi teeb praktiliselt kasutatavaks asjaolu, et normaal- ja põikjõudude mõju deformatsioonidele, võrreldes paindemomentide mõjuga, on niivõrd väike, et seda ei tarvitse arvestada. Enamatel juhtudel sirgetest

varrastest moodustatud konstruktsioonide puhul on see keh-  
 tiv. Ainult siis, kui väga vastutusrikastes konstruktsioo-  
 nides on vaja arvestada ka normaaljõudude mõju, leitakse  
 see lähendusarvutamiseega. Esmalt arvestatakse ainult painde-  
 momentidega ja leitakse sõlmede ning varraste pöördenurgad.  
 Pöördenurkade abil leitakse paindemomendid ja põikjõud.  
 Sõlmede tasakaalutingimustest arvutatakse varraste normaal-  
 jõud. Konstantse ristlõikega varda pikkuse muutumine arvu-  
 tatakse valemiga

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (112)$$

Raami varraste pikkuste muutumisest põhjustatud lisa-  
 paindemomendid, mis vastavad normaaljõudude mõjule esimeses  
 lähenduses, arvutatakse analoogiliselt ühtlasest tempera-  
 tuuri muutumisest põhjustatud paindemomentide arvutamiseega.

Kinnitusmomendid arvutatakse järgmiste valemitega

$$M_{JN}^{(K)} = M_{KN}^{(K)} = -6 \frac{EJ_K}{l_K} \vartheta_{KN} \quad (113)$$

$$M_{JN}^{(L)} = -3 \frac{EJ_L}{l_L} \vartheta_{LN} \quad (114)$$

milles  $\vartheta_{KN}, \vartheta_{LN}$  on geomeetriliselt määratud põhiskeemi var-  
 raste pikkuste muutumisest põhjustatud pöördenurgad.

Koormusliikmed arvutatakse valemitele (102) ja (103)  
 analoogiliste valemitega

$$r_{JN} = -6 \sum_K \frac{EJ_K}{l_K} \vartheta_{KN} - 3 \sum_L \frac{EJ_L}{l_L} \vartheta_{LN} \quad (115)$$

$$r_{eN} = 12 \sum_r \frac{EJ_r}{l_r} \vartheta_{rN} \vartheta_{rc} + 3 \sum_s \frac{EJ_s}{l_s} \vartheta_{sN} \vartheta_{sc} \quad (116)$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseega leitakse sõlmede ja  
 varraste lisapöördenurgad, milledega arvutatakse lisapainde-  
 momendid ja -põikjõud. Esialgsete ja lisapaindemomentide  
 liitmisega saadakse täpsustatud paindemomendid ja nende kau-  
 du ka täpsustatud põikjõud. Sõlmede tasakaalutingimustest  
 arvutatakse täpsustatud normaaljõud. Suurema täpsuse saami-  
 seks võib arvutust korrata, lähtudes täpsustatud normaali-  
 jõududest.

## S i s u k o r d

1. Staatiliselt määramata süsteemide arvutamine	3
1.1 Staatiliselt määramata süsteem	3
1.2 Staatiliselt määramata süsteemide arvutus- meetodid	8
1.21 Arvutusmeetodite liigitus	8
1.22 Jõumeetod	9
1.23 Deformatsioonimeetod	11
2. Deformatsioonimeetod	
2.1 Deformatsioonimeetodi idee	12
2.2 Geomeetrilise määramatuse aste	16
2.3 Geomeetriliselt määratud põhiskeem	27
2.4 Deformatsioonimeetodi kanoonilised võrrandid. Sisejõudude epüüride konstrueerimine	32
2.5 Seosed varda otste paigutuste ja lõike- jõudude vahel	40
2.51 Varraste liigitus	40
2.52 Mõlemast otsast paindekangelt kinni- tatud varras	41
2.53 Ühest otsast paindekangelt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras	49
2.6 Nihkumatute sõlmedega raamide arvutamine	55
2.61 Staatika tasakaalutingimused $R_J = 0$	55
2.62 Arvutusnäide	62
2.7 Nihkuvate sõlmedega raamide arvutamine	74
2.71 Tasakaalutingimused $R_J = 0$ ja $R_C = 0$	74
2.72 Arvutusnäide	82
2.8 Jätkuvate talade arvutamine	93
2.81 Liigendääretutedega jätkuv tala	93
2.82 Jäikääretutedega jätkuv tala	94
2.83 Arvutusnäide	98
2.9 Horisontaalsete riivide ja vertikaalsete postidega ühekorruseliste raamide arvutamine	102
2.91 Liigendtutedega raam	102
2.92 Jäigalt kinnitatud postidega raam	106

2.10	Korruusraamide arvutamine	107
2.101	Võrrandite koostamine	107
2.102	Võrrandite lahendamine	110
2.103	Arvutusnäide	111
2.11	Sümmeetriliste raamide arvutamine	124
2.12	Temperatuuri muutumise, tugede nihkumise ja normaaljõudude mõju	132
2.121	Temperatuuri muutumine	132
2.122	Ebaühtlane temperatuuri muutumine	132
2.123	Ühtlane temperatuuri muutumine	133
2.124	Arvutusnäide	134
2.125	Tugede paigutuste mõju	140
2.126	Normaaljõudude mõju arvutamine	142



Таллинский политехнический институт

Р. Рямет

Расчет статически неопределимых рам  
методом деформации

На эстонском языке

Vastutav toimetaja K. Ollik

---

TPI rotaprint, 1961. Trükiplaanid 9,25.

Tiraaž 275 eks. MB-00277. Tell.nr. 61.

Hind rubl. -.28

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1912

PHYSICS DEPARTMENT

CHICAGO, ILL.

RECEIVED

APR 10 1912

PHYSICS DEPARTMENT

CHICAGO, ILL.

RECEIVED



A-24764

Hind rbl. - .28.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00343839 9

EHITUSMEHAANIKA KATEEDER

*R. Räämet*

STAATILISELT MÄÄRAMATA RAAMIDE  
ARVUTAMINE DEFORMATSIOONIMEETODIGA

TALLINN  
1962

Hind rbl. —. 28.

A-24764

A-24964

