Tehnika käsiraamat

# Matemaatika

Logaritmid, aritmeetika ja algebra, trigonomeetria, differentsiaal- ja integraalarvamine, analüütiline geomeetria, pind- ja ruumalad, :: :: tôenäoluse ja vigade arvamine :: ::

Joouistustega

„Eesti Tehnika Seltsi“ kirjastus
Tallinnas

# TEHNIKA KÄSIRAAMAT



MATEMAATIKA, MEHAANIKA
ja AINETE TEHNOLOOGIA



TALLINNAS
EESTI TEHNIKA SELTSI KIRJASTUS
1921.

Riigi Väärtmärkide Valmistamise Osakonna trükikoda.

# Sissejuhatuseks.

Eestikeelne kirjandus on vaene tehnikasisuliste raamatute poolest, peale mõne populaarsisulise ehk käsitöösse puutuva raamatu ei ole peaaegu midagi olemas, mis praktiseerivat inseneri ehk tehnikut huvitada võiks. Iseäranis annab ennast see puudus Tallinna tehnikumis tunda, seepärast on Eesti Tehnika Selts, kes ju teatavasti Tallinna tehnikumi asutaja ja tänapäevani tema vaimline ülespidaja on, otsusele jõudnud Eesti Tehnika Seltsi Ajakirja juures Tehnika käsiraamatut välja anda, umbes sarnasel kujul nagu olemas on saksakeelne „Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch“.

Et tehnika käsiraamatu kokkuseadmine suurt tööd ja võrdlemisi sügavat teadmist nõuab, ei usaldanud ETS Ajakirja toimetus seda tööd üksinda oma hooleks võtta ja pani Eesti tehnika seltsi juhatusel ette ETS poolt mõeldud töö läbiviimiseks iseäralist käsiraamatu toimkonda valida, kelle hooleks, peale ajakirja toimetuse, korraldustööde tegemine usaldataks.

Et käsiraamatu väljaandmist ja tema omandamist hõlbustada, ilmub tema vihkudena ETS Ajakirja kaasannete näol. Terve käsiraamat ise jaguneb anneteks erialade järele, ja nimelt:

1. anne. Matemaatika, mehaanika ja ainete tehnoloogia. Toimetab: cand. mat. J. Kiivet, Tehnikumi dotsent ja dekaan.

2. anne. Masinaehitus. Toimetab: ins. W. Reinok, vabariigi raudtee ülem.

3. anne. Elektrotehnika. Toimetab: ins. G. Hacker, Tallinna Tehnikumi dotsent ja dekaan.

4. anne. Laevaehitus. Toimetab: ins. E. Masik, Tall. Tehnikumi dotsent.

5. anne. Inseneriehitus ja arhitektuur. Toimetab: ins. H. Perna, Tall. Tehnikumi dotsent ja dekaan.

Niiviisi on võimalik iga annet üksikult osta, mis tähtis on selle poolest, et igaüks ainult oma erialasse puutuvat osa omandada saab, kuna teised, mis temale enam-vähem võõrad, ostmata võivad jääda.

Tehnika käsiraamatu kokkuseadmise juures on eeskujuks võetud saksakeelne „Hütte", ilma et käesolev raamat otsekohene „Hütte" tõlge ehk eestikeelne väljaanne oleks.

Et ajakirja toimetuse liikmed ühes käsiraamatu toimkonnaga üksinda käsiraamatut kokku seada ei suuda, siis on peale selle veel suur hulk kaastöölisi igalt erialalt olemas, kelle nimesid esialgul veel teatada ei saa, sest et nimetatud kaastööliste nimekiri kaugeltki veel täielik ei ole.

Väljaandjate kõige elavam soov on, et väljaantav raamat oma ülesannet suudaks täita ja lahket vastuvõtmist ja heatahtlist arvustust tehniliste ringkondade poolt leiaks. Igasuguste kasulikkude näpunäidete ja sooviavalduste eest oleksime tänulikud.

Tallinnas, märtsis 1921.

**E. T. S. A. toimetus ja**
**Tehnika käsiraamatu toimkond.**

I. anne.

# MATEMAATIKA.

TOIMETAJA:
Cand. mat. **J. KIIVET,** Tall. Tehnikumi
dotsent ja dekaan

# Arvud 1—1000, nende astmed, juured, logaritmid, ringi perimeetrid ja ringpinna suurused.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1,0000 | 1,0000 | 0,00000 | 1000,000 | 3,142 | 0,7854 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 1,4142 | 1,2599 | 0,30103 | 500,000 | 6,283 | 3,1416 | 2 |
| 3 | 9 | 27 | 1,7321 | 1,4422 | 0,47712 | 333,333 | 9,425 | 7,0686 | 3 |
| 4 | 16 | 64 | 2,0000 | 1,5874 | 0,60206 | 250,000 | 12,566 | 12,5664 | 4 |
| 5 | 25 | 125 | 2,2361 | 1,7100 | 0,69897 | 200,000 | 15,708 | 19,6350 | 5 |
| 6 | 36 | 216 | 2,4495 | 1,8171 | 0,77815 | 166,667 | 18,850 | 28,2743 | 6 |
| 7 | 49 | 343 | 2,6458 | 1,9129 | 0,84510 | 142,857 | 21,991 | 38,4845 | 7 |
| 8 | 64 | 512 | 2,8284 | 2,0000 | 0,90309 | 125,000 | 25,133 | 50,2655 | 8 |
| 9 | 81 | 729 | 3,0000 | 2,0801 | 0,95424 | 111,111 | 28,274 | 63,6173 | 9 |
| 10 | 1 00 | 1 000 | 3,1623 | 2,1544 | 1,00000 | 100,000 | 31,416 | 78,5398 | 10 |
| 11 | 1 21 | 1 331 | 3,3166 | 2,2240 | 1,04139 | 90,9091 | 34,558 | 95,0332 | 11 |
| 12 | 1 44 | 1 728 | 3,4641 | 2,2894 | 1,07918 | 83,3333 | 37,699 | 113,097 | 12 |
| 13 | 1 69 | 2 197 | 3,6056 | 2,3513 | 1,11394 | 76,9231 | 40,841 | 132,732 | 13 |
| 14 | 1 96 | 2 744 | 3,7417 | 2,4101 | 1,14613 | 71,4286 | 43,982 | 153,938 | 14 |
| 15 | 2 25 | 3 375 | 3,8730 | 2,4662 | 1,17609 | 66,6667 | 47,124 | 176,715 | 15 |
| 16 | 2 56 | 4 096 | 4,0000 | 2,5198 | 1,20412 | 62,5000 | 50,265 | 201,062 | 16 |
| 17 | 2 89 | 4 913 | 4,1231 | 2,5713 | 1,23045 | 58,8235 | 53,407 | 226,980 | 17 |
| 18 | 3 24 | 5 832 | 4,2426 | 2,6207 | 1,25527 | 55,5556 | 56,549 | 254,469 | 18 |
| 19 | 3 61 | 6 859 | 4,3589 | 2,6684 | 1,27875 | 52,6316 | 59,690 | 283,529 | 19 |
| 20 | 4 00 | 8 000 | 4,4721 | 2,7144 | 1,30103 | 50,0000 | 62,832 | 314,159 | 20 |
| 21 | 4 41 | 9 261 | 4,5826 | 2,7589 | 1,32222 | 47,6190 | 65,973 | 346,361 | 21 |
| 22 | 4 84 | 10 648 | 4,6904 | 2,8020 | 1,34242 | 45,4545 | 69,115 | 380,133 | 22 |
| 23 | 5 29 | 12 167 | 4,7958 | 2,8439 | 1,36173 | 43,4783 | 72,257 | 415,476 | 23 |
| 24 | 5 76 | 13 824 | 4,8990 | 2,8845 | 1,38021 | 41,6667 | 75,398 | 452,389 | 24 |
| 25 | 6 25 | 15 625 | 5,0000 | 2,9240 | 1,39794 | 40,0000 | 78,540 | 490,874 | 25 |
| 26 | 6 76 | 17 576 | 5,0990 | 2,9625 | 1,41497 | 38,4615 | 81,681 | 530,929 | 26 |
| 27 | 7 29 | 19 683 | 5,1962 | 3,0000 | 1,43136 | 37,0370 | 84,823 | 572,555 | 27 |
| 28 | 7 84 | 21 952 | 5,2915 | 3,0366 | 1,44716 | 35,7143 | 87,965 | 615,752 | 28 |
| 29 | 8 41 | 24 389 | 5,3852 | 3,0723 | 1,46240 | 34,4828 | 91,106 | 660,520 | 29 |
| 30 | 9 00 | 27 000 | 5,4772 | 3,1072 | 1,47712 | 33,3333 | 94,248 | 706,858 | 30 |
| 31 | 9 61 | 29 791 | 5,5678 | 3,1414 | 1,49136 | 32,2581 | 97,389 | 754,768 | 31 |
| 32 | 10 24 | 32 768 | 5,6569 | 3,1748 | 1,50515 | 31,2500 | 100,531 | 804,248 | 32 |
| 33 | 10 89 | 35 937 | 5,7446 | 3,2075 | 1,51851 | 30,3030 | 103,673 | 855,299 | 33 |
| 34 | 11 56 | 39 304 | 5,8310 | 3,2396 | 1,53148 | 29,4118 | 106,814 | 907,920 | 34 |
| 35 | 12 25 | 42 875 | 5,9161 | 3,2711 | 1,54407 | 28,5714 | 109,956 | 962,113 | 35 |
| 36 | 12 96 | 46 656 | 6,0000 | 3,3019 | 1,55630 | 27,7778 | 113,097 | 1017,88 | 36 |
| 37 | 13 69 | 50 653 | 6,0828 | 3,3322 | 1,56820 | 27,0270 | 116,239 | 1075,21 | 37 |
| 38 | 14 44 | 54 872 | 6,1644 | 3,3620 | 1,57978 | 26,3158 | 119,381 | 1134,11 | 38 |
| 39 | 15 21 | 59 319 | 6,2450 | 3,3912 | 1,59106 | 25,6410 | 122,522 | 1194,59 | 39 |
| 40 | 16 00 | 64 000 | 6,3246 | 3,4200 | 1,60206 | 25,0000 | 125,66 | 1256,64 | 40 |
| 41 | 16 81 | 68 921 | 6,4031 | 3,4482 | 1,61278 | 24,3902 | 128,81 | 1320,25 | 41 |
| 42 | 17 64 | 74 088 | 6,4807 | 3,4760 | 1,62325 | 23,8095 | 131,95 | 1385,44 | 42 |
| 43 | 18 49 | 79 507 | 6,5574 | 3,5034 | 1,63347 | 23,2558 | 135,09 | 1452,20 | 43 |
| 44 | 19 36 | 85 184 | 6,6332 | 3,5303 | 1,64345 | 22,7273 | 138,23 | 1520,53 | 44 |
| 45 | 20 25 | 91 125 | 6,7082 | 3,5569 | 1,65321 | 22,2222 | 141,37 | 1590,43 | 45 |
| 46 | 21 16 | 97 336 | 6,7823 | 3,5830 | 1,66276 | 21,7391 | 144 51 | 1661,90 | 46 |
| 47 | 22 09 | 103 823 | 6,8557 | 3,6088 | 1,67210 | 21,2766 | 147,65 | 1734,94 | 47 |
| 48 | 23 04 | 110 592 | 6,9282 | 3,6342 | 1,68124 | 20,8333 | 150,80 | 1809,56 | 48 |
| 49 | 24 01 | 117 649 | 7,0000 | 3,6593 | 1,69020 | 20,4082 | 153,94 | 1885,74 | 49 |
| 50 | 25 00 | 125 000 | 7,0711 | 3,6840 | 1,69897 | 20,0000 | 157,08 | 1963,50 | 50 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | log $n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 25 00 | 125 000 | 7,0711 | 3,6840 | 1,69897 | 20,0000 | 157,08 | 1963,50 | **50** |
| 51 | 26 01 | 132 651 | 7,1414 | 3,7084 | 1,70757 | 19,6078 | 160,22 | 2042,82 | 51 |
| 52 | 27 04 | 140 608 | 7,2111 | 3,7325 | 1,71600 | 19,2308 | 163,36 | 2123,72 | 52 |
| 53 | 28 09 | 148 877 | 7,2801 | 3,7563 | 1,72428 | 18,8679 | 166,50 | 2206,18 | 53 |
| 54 | 29 16 | 157 464 | 7,3485 | 3,7798 | 1,73239 | 18,5185 | 169,65 | 2290,22 | 54 |
| 55 | 30 25 | 166 375 | 7,4162 | 3,8030 | 1,74036 | 18,1818 | 172,79 | 2375,83 | 55 |
| 56 | 31 36 | 175 616 | 7,4833 | 3,8259 | 1,74819 | 17,8571 | 175,93 | 2463,01 | 56 |
| 57 | 32 49 | 185 193 | 7,5498 | 3,8485 | 1,75587 | 17,5439 | 179,07 | 2551,76 | 57 |
| 58 | 33 64 | 195 112 | 7,6158 | 3,8709 | 1,76343 | 17,2414 | 182,21 | 2642,08 | 58 |
| 59 | 34 81 | 205 379 | 7,6811 | 3,8930 | 1,77085 | 16,9492 | 185,35 | 2733,97 | 59 |
| **60** | 36 00 | 216 000 | 7,7460 | 3,9149 | 1,77815 | 16,6667 | 188,50 | 2827,43 | **60** |
| 61 | 37 21 | 226 981 | 7,8102 | 3,9365 | 1,78533 | 16,3934 | 191,64 | 2922,47 | 61 |
| 62 | 38 44 | 238 328 | 7,8740 | 3,9579 | 1,79239 | 16,1290 | 194,78 | 3019,07 | 62 |
| 63 | 39 69 | 250 047 | 7,9373 | 3,9791 | 1,79934 | 15,8730 | 197,92 | 3117,25 | 63 |
| 64 | 40 96 | 262 144 | 8,0000 | 4,0000 | 1,80618 | 15,6250 | 201,06 | 3216,99 | 64 |
| 65 | 42 25 | 274 625 | 8,0623 | 4,0207 | 1,81291 | 15,3846 | 204,20 | 3318,31 | 65 |
| 66 | 43 56 | 287 496 | 8,1240 | 4,0412 | 1,81954 | 15,1515 | 207,35 | 3421,19 | 66 |
| 67 | 44 89 | 300 763 | 8,1854 | 4,0615 | 1,82607 | 14,9254 | 210,49 | 3525,65 | 67 |
| 68 | 46 24 | 314 432 | 8,2462 | 4,0817 | 1,83251 | 14,7059 | 213,63 | 3631,68 | 68 |
| 69 | 47 61 | 328 509 | 8,3066 | 4,1016 | 1,83885 | 14,4928 | 216,77 | 3739,28 | 69 |
| **70** | 49 00 | 343 000 | 8,3666 | 4,1213 | 1,84510 | 14,2857 | 219,91 | 3848,45 | **70** |
| 71 | 50 41 | 357 911 | 8,4261 | 4,1408 | 1,85126 | 14,0845 | 223,05 | 3959,19 | 71 |
| 72 | 51 84 | 373 248 | 8,4853 | 4,1602 | 1,85733 | 13,8889 | 226,19 | 4071,50 | 72 |
| 73 | 53 29 | 389 017 | 8,5440 | 4,1793 | 1,86332 | 13,6986 | 229,34 | 4185,39 | 73 |
| 74 | 54 76 | 405 224 | 8,6023 | 4,1983 | 1,86923 | 13,5135 | 232,48 | 4300,84 | 74 |
| 75 | 56 25 | 421 875 | 8,6603 | 4,2172 | 1,87506 | 13,3333 | 235,62 | 4417,86 | 75 |
| 76 | 57 76 | 438 976 | 8,7178 | 4,2358 | 1,88081 | 13,1579 | 238,76 | 4536,46 | 76 |
| 77 | 59 29 | 456 533 | 8,7750 | 4,2543 | 1,88649 | 12,9870 | 241,90 | 4656,63 | 77 |
| 78 | 60 84 | 474 552 | 8,8318 | 4,2727 | 1,89209 | 12,8205 | 245,04 | 4778,36 | 78 |
| 79 | 62 41 | 493 039 | 8,8882 | 4,2908 | 1,89763 | 12,6582 | 248,19 | 4901,67 | 79 |
| **80** | 64 00 | 512 000 | 8,9443 | 4,3089 | 1,90309 | 12,5000 | 251,33 | 5026,55 | **80** |
| 81 | 65 61 | 531 441 | 9,0000 | 4,3267 | 1,90849 | 12,3457 | 254,47 | 5153,00 | 81 |
| 82 | 67 24 | 551 368 | 9,0554 | 4,3445 | 1,91381 | 12,1951 | 257,61 | 5281,02 | 82 |
| 83 | 68 89 | 571 787 | 9,1104 | 4,3621 | 1,91908 | 12,0482 | 260,75 | 5410,61 | 83 |
| 84 | 70 56 | 592 704 | 9,1652 | 4,3795 | 1,92428 | 11,9048 | 263,89 | 5541,77 | 84 |
| 85 | 72 25 | 614 125 | 9,2195 | 4,3968 | 1,92942 | 11,7647 | 267,04 | 5674,50 | 85 |
| 86 | 73 96 | 636 056 | 9,2736 | 4,4140 | 1,93450 | 11,6279 | 270,18 | 5808,80 | 86 |
| 87 | 75 69 | 658 503 | 9,3274 | 4,4310 | 1,93952 | 11,4943 | 273,32 | 5944,68 | 87 |
| 88 | 77 44 | 681 472 | 9,3808 | 4,4480 | 1,94448 | 11,3636 | 276,46 | 6082,12 | 88 |
| 89 | 79 21 | 704 969 | 9,4340 | 4,4647 | 1,94939 | 11,2360 | 279,60 | 6221,14 | 89 |
| **90** | 81 00 | 729 000 | 9,4868 | 4,4814 | 1,95424 | 11,1111 | 282,74 | 6361,73 | **90** |
| 91 | 82 81 | 753 571 | 9,5394 | 4,4979 | 1,95904 | 10,9890 | 285,88 | 6503,88 | 91 |
| 92 | 84 64 | 778 688 | 9,5917 | 4,5144 | 1,96379 | 10,8696 | 289,03 | 6647,61 | 92 |
| 93 | 86 49 | 804 357 | 9,6437 | 4,5307 | 1,96848 | 10,7527 | 292,17 | 6792,91 | 93 |
| 94 | 88 36 | 830 584 | 9,6954 | 4,5468 | 1,97313 | 10,6383 | 295,31 | 6939,78 | 94 |
| 95 | 90 25 | 857 375 | 9,7468 | 4,5629 | 1,97772 | 10,5263 | 298,45 | 7088,22 | 95 |
| 96 | 92 16 | 884 736 | 9,7980 | 4,5789 | 1,98227 | 10,4167 | 301,59 | 7238,23 | 96 |
| 97 | 94 09 | 912 673 | 9,8489 | 4,5947 | 1,98677 | 10,3093 | 304,73 | 7389,81 | 97 |
| 98 | 96 04 | 941 192 | 9,8995 | 4,6104 | 1,99123 | 10,2041 | 307,88 | 7542,96 | 98 |
| 99 | 98 01 | 970 299 | 9,9499 | 4,6261 | 1,99564 | 10,1010 | 311,02 | 7697,69 | 99 |
| **100** | 1 00 00 | 1 000 000 | 10,0000 | 4,6416 | 2,00000 | 10,0000 | 314,16 | 7853,98 | **100** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **100** | 10000 | 1000000 | 10,0000 | 4,6416 | 2,00000 | 10,0000 | 314,16 | 7853,98 | **100** |
| 101 | 10201 | 1030301 | 10,0499 | 4,6570 | 2,00432 | 9,90099 | 317,30 | 8011,85 | 101 |
| 102 | 10404 | 1061208 | 10,0995 | 4,6723 | 2,00860 | 9,80392 | 320,44 | 8171,28 | 102 |
| 103 | 10609 | 1092727 | 10,1489 | 4,6875 | 2,01284 | 9,70874 | 323,58 | 8332,29 | 103 |
| 104 | 10816 | 1124864 | 10,1980 | 4,7027 | 2,01703 | 9,61538 | 326,73 | 8494,87 | 104 |
| 105 | 11025 | 1157625 | 10,2470 | 4,7177 | 2,02119 | 9,52381 | 329,87 | 8659,01 | 105 |
| 106 | 11236 | 1191016 | 10,2956 | 4,7326 | 2,02531 | 9,43396 | 333,01 | 8824,73 | 106 |
| 107 | 11449 | 1225043 | 10,3441 | 4,7475 | 2,02938 | 9,34579 | 336,15 | 8992,02 | 107 |
| 108 | 11664 | 1259712 | 10,3923 | 4,7622 | 2,03342 | 9,25926 | 339,29 | 9160,88 | 108 |
| 109 | 11881 | 1295029 | 10,4403 | 4,7769 | 2,03743 | 9,17431 | 342,43 | 9331,32 | 109 |
| **110** | 12100 | 1331000 | 10,4881 | 4,7914 | 2,04139 | 9,09091 | 345,58 | 9503,32 | **110** |
| 111 | 12321 | 1367631 | 10,5357 | 4,8059 | 2,04532 | 9,00901 | 348,72 | 9676,89 | 111 |
| 112 | 12544 | 1404928 | 10,5830 | 4,8203 | 2,04922 | 8,92857 | 351,86 | 9852,03 | 112 |
| 113 | 12769 | 1442897 | 10,6301 | 4,8346 | 2,05308 | 8,84956 | 355,00 | 10028,7 | 113 |
| 114 | 12996 | 1481544 | 10,6771 | 4,8488 | 2,05690 | 8,77193 | 358,14 | 10207,0 | 114 |
| 115 | 13225 | 1520875 | 10,7238 | 4,8629 | 2,06070 | 8,69565 | 361,28 | 10386,9 | 115 |
| 116 | 13456 | 1560896 | 10,7703 | 4,8770 | 2,06446 | 8,62069 | 364,42 | 10568,3 | 116 |
| 117 | 13689 | 1601613 | 10,8167 | 4,8910 | 2,06819 | 8,54701 | 367,57 | 10751,3 | 117 |
| 118 | 13924 | 1643032 | 10,8628 | 4,9049 | 2,07188 | 8,47458 | 370,71 | 10935,9 | 118 |
| 119 | 14161 | 1685159 | 10,9087 | 4,9187 | 2,07555 | 8,40336 | 373,85 | 11122,0 | 119 |
| **120** | 14400 | 1728000 | 10,9545 | 4,9324 | 2,07918 | 8,33333 | 376,99 | 11309,7 | **120** |
| 121 | 14641 | 1771561 | 11,0000 | 4,9461 | 2,08279 | 8,26446 | 380,13 | 11499,0 | 121 |
| 122 | 14884 | 1815848 | 11,0454 | 4,9597 | 2,08636 | 8,19672 | 383,27 | 11689,9 | 122 |
| 123 | 15129 | 1860867 | 11,0905 | 4,9732 | 2,08991 | 8,13008 | 386,42 | 11882,3 | 123 |
| 124 | 15376 | 1906624 | 11,1355 | 4,9866 | 2,09342 | 8,06452 | 389,56 | 12076,3 | 124 |
| 125 | 15625 | 1953125 | 11,1803 | 5,0000 | 2,09691 | 8,00000 | 392,70 | 12271,8 | 125 |
| 126 | 15876 | 2000376 | 11,2250 | 5,0133 | 2,10037 | 7,93651 | 395,84 | 12469,0 | 126 |
| 127 | 16129 | 2048383 | 11,2694 | 5,0265 | 2,10380 | 7,87402 | 398,98 | 12667,7 | 127 |
| 128 | 16384 | 2097152 | 11,3137 | 5,0397 | 2,10721 | 7,81250 | 402,12 | 12868,0 | 128 |
| 129 | 16641 | 2146689 | 11,3578 | 5,0528 | 2,11059 | 7,75194 | 405,27 | 13069,8 | 129 |
| **130** | 16900 | 2197000 | 11,4018 | 5,0658 | 2,11394 | 7,69231 | 408,41 | 13273,2 | **130** |
| 131 | 17161 | 2248091 | 11,4455 | 5,0788 | 2,11727 | 7,63359 | 411,55 | 13478,2 | 131 |
| 132 | 17424 | 2299968 | 11,4891 | 5,0916 | 2,12057 | 7,57576 | 414,69 | 13684,8 | 132 |
| 133 | 17689 | 2352637 | 11,5326 | 5,1045 | 2,12385 | 7,51880 | 417,83 | 13892,9 | 133 |
| 134 | 17956 | 2406104 | 11,5758 | 5,1172 | 2,12710 | 7,46269 | 420,97 | 14102,6 | 134 |
| 135 | 18225 | 2460375 | 11,6190 | 5,1299 | 2,13033 | 7,40741 | 424,12 | 14313,9 | 135 |
| 136 | 18496 | 2515456 | 11,6619 | 5,1426 | 2,13354 | 7,35294 | 427,26 | 14526,7 | 136 |
| 137 | 18769 | 2571353 | 11,7047 | 5,1551 | 2,13672 | 7,29927 | 430,40 | 14741,1 | 137 |
| 138 | 19044 | 2628072 | 11,7473 | 5,1676 | 2,13988 | 7,24638 | 433,54 | 14957,1 | 138 |
| 139 | 19321 | 2685619 | 11,7898 | 5,1801 | 2,14301 | 7,19424 | 436,68 | 15174,7 | 139 |
| **140** | 19600 | 2744000 | 11,8322 | 5,1925 | 2,14613 | 7,14286 | 439,82 | 15393,8 | **140** |
| 141 | 19881 | 2803221 | 11,8743 | 5,2048 | 2,14922 | 7,09220 | 442,96 | 15614,5 | 141 |
| 142 | 20164 | 2863288 | 11,9164 | 5,2171 | 2,15229 | 7,04225 | 446,11 | 15836,8 | 142 |
| 143 | 20449 | 2924207 | 11,9583 | 5,2293 | 2,15534 | 6,99301 | 449,25 | 16060,6 | 143 |
| 144 | 20736 | 2985984 | 12,0000 | 5,2415 | 2,15836 | 6,94444 | 452,39 | 16286,0 | 144 |
| 145 | 21025 | 3048625 | 12,0416 | 5,2536 | 2,16137 | 6,89655 | 455,53 | 16513,0 | 145 |
| 146 | 21316 | 3112136 | 12,0830 | 5,2656 | 2,16435 | 6,84932 | 458,67 | 16741,5 | 146 |
| 147 | 21609 | 3176523 | 12,1244 | 5,2776 | 2,16732 | 6.80272 | 461,81 | 16971,7 | 147 |
| 148 | 21904 | 3241792 | 12,1655 | 5,2896 | 2,17026 | 6,75676 | 464,96 | 17203,4 | 148 |
| 149 | 22201 | 3307949 | 12,2066 | 5,3015 | 2,17319 | 6,71141 | 468,10 | 17436,6 | 149 |
| **150** | 22500 | 3375000 | 12,2474 | 5,3133 | 2,17609 | 6,66667 | 471,24 | 17671,5 | **150** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 22500 | 3375000 | 12,2474 | 5,3133 | 2,17609 | 6,66667 | 471,24 | 17671,5 | 150 |
| 151 | 22801 | 3442951 | 12,2882 | 5,3251 | 2,17898 | 6,62252 | 474,38 | 17907,9 | 151 |
| 152 | 23104 | 3511808 | 12,3288 | 5,3368 | 2,18184 | 6,57895 | 477,52 | 18145,8 | 152 |
| 153 | 23409 | 3581577 | 12,3693 | 5,3485 | 2,18469 | 6,53595 | 480,66 | 18385,4 | 153 |
| 154 | 23716 | 3652264 | 12,4097 | 5,3601 | 2,18752 | 6,49351 | 483,81 | 18626,5 | 154 |
| 155 | 24025 | 3723875 | 12,4499 | 5,3717 | 2,19033 | 6,45161 | 486,95 | 18869,2 | 155 |
| 156 | 24336 | 3796416 | 12,4900 | 5,3832 | 2,19312 | 6,41026 | 490,09 | 19113,4 | 156 |
| 157 | 24649 | 3869893 | 12,5300 | 5,3947 | 2,19590 | 6,36943 | 493,23 | 19359,3 | 157 |
| 158 | 24964 | 3944312 | 12,5698 | 5,4061 | 2,19866 | 6,32911 | 496,37 | 19606,7 | 158 |
| 159 | 25281 | 4019679 | 12,6095 | 5,4175 | 2,20140 | 6,28931 | 499,51 | 19855,7 | 159 |
| 160 | 25600 | 4096000 | 12,6491 | 5,4288 | 2,20412 | 6,25000 | 502,65 | 20106,2 | 160 |
| 161 | 25921 | 4173281 | 12,6886 | 5,4401 | 2,20683 | 6,21118 | 505,80 | 20358,3 | 161 |
| 162 | 26244 | 4251528 | 12,7279 | 5,4514 | 2,20952 | 6,17284 | 508,94 | 20612,0 | 162 |
| 163 | 26569 | 4330747 | 12,7671 | 5,4626 | 2,21219 | 6,13497 | 512,08 | 20867,2 | 163 |
| 164 | 26896 | 4410944 | 12,8062 | 5,4737 | 2,21484 | 6,09756 | 515,22 | 21124,1 | 164 |
| 165 | 27225 | 4492125 | 12,8452 | 5,4848 | 2,21748 | 6,06061 | 518,36 | 21382,5 | 165 |
| 166 | 27556 | 4574296 | 12,8841 | 5,4959 | 2,22011 | 6,02410 | 521,50 | 21642,4 | 166 |
| 167 | 27889 | 4657463 | 12,9228 | 5,5069 | 2,22272 | 5,98802 | 524,65 | 21904,0 | 167 |
| 168 | 28224 | 4741632 | 12,9615 | 5,5178 | 2,22531 | 5,95238 | 527,79 | 22167,1 | 168 |
| 169 | 28561 | 4826809 | 13,0000 | 5,5288 | 2,22789 | 5,91716 | 530,93 | 22431,8 | 169 |
| 170 | 28900 | 4913000 | 13,0384 | 5,5397 | 2,23045 | 5,88235 | 534,07 | 22698,0 | 170 |
| 171 | 29241 | 5000211 | 13,0767 | 5,5505 | 2,23300 | 5,84795 | 537,21 | 22965,8 | 171 |
| 172 | 29584 | 5088448 | 13,1149 | 5,5613 | 2,23553 | 5,81395 | 540,35 | 23235,2 | 172 |
| 173 | 29929 | 5177717 | 13,1529 | 5,5721 | 2,23805 | 5,78035 | 543,50 | 23506,2 | 173 |
| 174 | 30276 | 5268024 | 13,1909 | 5,5828 | 2,24055 | 5,74713 | 546,64 | 23778,7 | 174 |
| 175 | 30625 | 5359375 | 13,2288 | 5,5934 | 2,24304 | 5,71429 | 549,78 | 24052,8 | 175 |
| 176 | 30976 | 5451776 | 13,2665 | 5,6041 | 2,24551 | 5,68182 | 552,92 | 24328,5 | 176 |
| 177 | 31329 | 5545233 | 13,3041 | 5,6147 | 2,24797 | 5,64972 | 556,06 | 24605,7 | 177 |
| 178 | 31684 | 5639752 | 13,3417 | 5,6252 | 2,25042 | 5,61798 | 559,20 | 24884,6 | 178 |
| 179 | 32041 | 5735339 | 13,3791 | 5,6357 | 2,25285 | 5,58659 | 562,35 | 25164,9 | 179 |
| 180 | 32400 | 5832000 | 13,4164 | 5,6462 | 2,25527 | 5,55556 | 565,49 | 25446,9 | 180 |
| 181 | 32761 | 5929741 | 13,4536 | 5,6567 | 2,25768 | 5,52486 | 568,63 | 25730,4 | 181 |
| 182 | 33124 | 6028568 | 13,4907 | 5,6671 | 2,26007 | 5,49451 | 571,77 | 26015,5 | 182 |
| 183 | 33489 | 6128487 | 13,5277 | 5,6774 | 2,26245 | 5,46448 | 574,91 | 26302,2 | 183 |
| 184 | 33856 | 6229504 | 13,5647 | 5,6877 | 2,26482 | 5,43478 | 578,05 | 26590,4 | 184 |
| 185 | 34225 | 6331625 | 13,6015 | 5,6980 | 2,26717 | 5,40541 | 581,19 | 26880,3 | 185 |
| 186 | 34596 | 6434856 | 13,6382 | 5,7083 | 2,26951 | 5,37634 | 584,34 | 27171,6 | 186 |
| 187 | 34969 | 6539203 | 13,6748 | 5,7185 | 2,27184 | 5,34759 | 587,48 | 27464,6 | 187 |
| 188 | 35344 | 6644672 | 13,7113 | 5,7287 | 2,27416 | 5,31915 | 590,62 | 27759,1 | 188 |
| 189 | 35721 | 6751269 | 13,7477 | 5,7388 | 2,27646 | 5,29101 | 593,76 | 28055,2 | 189 |
| 190 | 36100 | 6859000 | 13,7840 | 5,7489 | 2,27875 | 5,26316 | 596,90 | 28352,9 | 190 |
| 191 | 36481 | 6967871 | 13,8203 | 5,7590 | 2,28103 | 5,23560 | 600,04 | 28652,1 | 191 |
| 192 | 36864 | 7077888 | 13,8564 | 5,7690 | 2,28330 | 5,20833 | 603,19 | 28952,9 | 192 |
| 193 | 37249 | 7189057 | 13,8924 | 5,7790 | 2,28556 | 5,18135 | 606,33 | 29255,3 | 193 |
| 194 | 37636 | 7301384 | 13,9284 | 5,7890 | 2,28780 | 5,15464 | 609,47 | 29559,2 | 194 |
| 195 | 38025 | 7414875 | 13,9642 | 5,7989 | 2,29003 | 5,12821 | 612,61 | 29864,8 | 195 |
| 196 | 38416 | 7529536 | 14,0000 | 5,8088 | 2,29226 | 5,10204 | 615,75 | 30171,9 | 196 |
| 197 | 38809 | 7645373 | 14,0357 | 5,8186 | 2,29447 | 5,07614 | 618,89 | 30480,5 | 197 |
| 198 | 39204 | 7762392 | 14,0712 | 5,8285 | 2,29667 | 5,05051 | 622,04 | 30790,7 | 198 |
| 199 | 39601 | 7880599 | 14,1067 | 5,8383 | 2,29885 | 5,02513 | 625,18 | 31102,6 | 199 |
| 200 | 40000 | 8000000 | 14,1421 | 5,8480 | 2,30103 | 5,00000 | 628,32 | 31415,9 | 200 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **200** | 40000 | 8000000 | 14,1421 | 5,8480 | 2,30103 | 5,00000 | 628,32 | 31415,9 | **200** |
| 201 | 40401 | 8120601 | 14,1774 | 5,8578 | 2,30320 | 4,97512 | 631,46 | 31730,9 | 201 |
| 202 | 40804 | 8242408 | 14,2127 | 5,8675 | 2,30535 | 4,95050 | 634,60 | 32047,4 | 202 |
| 203 | 41209 | 8365427 | 14,2478 | 5,8771 | 2,30750 | 4,92611 | 637,74 | 32365,5 | 203 |
| 204 | 41616 | 8489664 | 14,2829 | 5,8868 | 2,30963 | 4,90196 | 640,88 | 32685,1 | 204 |
| 205 | 42025 | 8615125 | 14,3178 | 5,8964 | 2,31175 | 4,87805 | 644,03 | 33006,4 | 205 |
| 206 | 42436 | 8741816 | 14,3527 | 5,9059 | 2,31387 | 4,85437 | 647,17 | 33329,2 | 206 |
| 207 | 42849 | 8869743 | 14,3875 | 5,9155 | 2,31597 | 4,83092 | 650,31 | 33653,5 | 207 |
| 208 | 43264 | 8998912 | 14,4222 | 5,9250 | 2,31806 | 4,80769 | 653,45 | 33979,5 | 208 |
| 209 | 43681 | 9129329 | 14,4568 | 5,9345 | 2,32015 | 4,78469 | 656,59 | 34307,0 | 209 |
| **210** | 44100 | 9261000 | 14,4914 | 5,9439 | 2,32222 | 4,76190 | 659,73 | 34636,1 | **210** |
| 211 | 44521 | 9393931 | 14,5258 | 5,9533 | 2,32428 | 4,73934 | 662,88 | 34966,7 | 211 |
| 212 | 44944 | 9528128 | 14,5602 | 5,9627 | 2,32634 | 4,71698 | 666,02 | 35298,9 | 212 |
| 213 | 45369 | 9663597 | 14,5945 | 5,9721 | 2,32838 | 4,69484 | 669,16 | 35632,7 | 213 |
| 214 | 45796 | 9800344 | 14,6287 | 5,9814 | 2,33041 | 4,67290 | 672,30 | 35968,1 | 214 |
| 215 | 46225 | 9938375 | 14,6629 | 5,9907 | 2,33244 | 4,65116 | 675,44 | 36305,0 | 215 |
| 216 | 46656 | 10077696 | 14,6969 | 6,0000 | 2,33445 | 4,62963 | 678,58 | 36643,5 | 216 |
| 217 | 47089 | 10218313 | 14,7309 | 6,0092 | 2,33646 | 4,60829 | 681,73 | 36983,6 | 217 |
| 218 | 47524 | 10360232 | 14,7648 | 6,0185 | 2,33846 | 4,58716 | 684,87 | 37325,3 | 218 |
| 219 | 47961 | 10503459 | 14,7986 | 6,0277 | 2,34044 | 4,56621 | 688,01 | 37668,5 | 219 |
| **220** | 48400 | 10648000 | 14,8324 | 6,0368 | 2,34242 | 4,54545 | 691,15 | 38013,3 | **220** |
| 221 | 48841 | 10793861 | 14,8661 | 6,0459 | 2,34439 | 4,52489 | 694,29 | 38359,6 | 221 |
| 222 | 49284 | 10941048 | 14,8997 | 6,0550 | 2,34635 | 4,50450 | 697,43 | 38707,6 | 222 |
| 223 | 49729 | 11089567 | 14,9332 | 6,0641 | 2,34830 | 4,48430 | 700,58 | 39057,1 | 223 |
| 224 | 50176 | 11239424 | 14,9666 | 6,0732 | 2,35025 | 4,46429 | 703,72 | 39408,1 | 224 |
| 225 | 50625 | 11390625 | 15,0000 | 6,0822 | 2,35218 | 4,44444 | 706,86 | 39760,8 | 225 |
| 226 | 51076 | 11543176 | 15,0333 | 6,0912 | 2,35411 | 4,42478 | 710,00 | 40115,0 | 226 |
| 227 | 51529 | 11697083 | 15,0665 | 6,1002 | 2,35603 | 4,40529 | 713,14 | 40470,8 | 227 |
| 228 | 51984 | 11852352 | 15,0997 | 6,1091 | 2,35793 | 4,38596 | 716,28 | 40828,1 | 228 |
| 229 | 52441 | 12008989 | 15,1327 | 6,1180 | 2,35984 | 4,36681 | 719,42 | 41187,1 | 229 |
| **230** | 52900 | 12167000 | 15,1658 | 6,1269 | 2,36173 | 4,34783 | 722,57 | 41547,6 | **230** |
| 231 | 53361 | 12326391 | 15,1987 | 6,1358 | 2,36361 | 4,32900 | 725,71 | 41909,6 | 231 |
| 232 | 53824 | 12487168 | 15,2315 | 6,1446 | 2,36549 | 4,31034 | 728,85 | 42273,3 | 232 |
| 233 | 54289 | 12649337 | 15,2643 | 6,1534 | 2,36736 | 4,29185 | 731,99 | 42638,5 | 233 |
| 234 | 54756 | 12812904 | 15,2971 | 6,1622 | 2,36922 | 4,27350 | 735,13 | 43005,3 | 234 |
| 235 | 55225 | 12977875 | 15,3297 | 6,1710 | 2,37107 | 4,25532 | 738,27 | 43373,6 | 235 |
| 236 | 55696 | 13144256 | 15,3623 | 6,1797 | 2,37291 | 4,23729 | 741,42 | 43743,5 | 236 |
| 237 | 56169 | 13312053 | 15,3948 | 6,1885 | 2,37475 | 4,21941 | 744,56 | 44115,0 | 237 |
| 238 | 56644 | 13481272 | 15,4272 | 6,1972 | 2,37658 | 4,20168 | 747,70 | 44488,1 | 238 |
| 239 | 57121 | 13651919 | 15,4596 | 6,2058 | 2,37840 | 4,18410 | 750,84 | 44862,7 | 239 |
| **240** | 57600 | 13824000 | 15,4919 | 6,2145 | 2,38021 | 4,16667 | 753,98 | 45238,9 | **240** |
| 241 | 58081 | 13997521 | 15,5242 | 6,2231 | 2,38202 | 4,14938 | 757,12 | 45616,7 | 241 |
| 242 | 58564 | 14172488 | 15,5563 | 6,2317 | 2,38382 | 4,13223 | 760,27 | 45996,1 | 242 |
| 243 | 59049 | 14348907 | 15,5885 | 6,2403 | 2,38561 | 4,11523 | 763,41 | 46377,0 | 243 |
| 244 | 59536 | 14526784 | 15,6205 | 6,2488 | 2,38739 | 4,09836 | 766,55 | 46759,5 | 244 |
| 245 | 60025 | 14706125 | 15,6525 | 6,2573 | 2,38917 | 4,08163 | 769,69 | 47143,5 | 245 |
| 246 | 60516 | 14886936 | 15,6844 | 6,2658 | 2,39094 | 4,06504 | 772,83 | 47529,2 | 246 |
| 247 | 61009 | 15069223 | 15,7162 | 6,2743 | 2,39270 | 4,04858 | 775,97 | 47916,4 | 247 |
| 248 | 61504 | 15252992 | 15,7480 | 6,2828 | 2,39445 | 4,03226 | 779,11 | 48305,1 | 248 |
| 249 | 62001 | 15438249 | 15,7797 | 6,2912 | 2,39620 | 4,01606 | 782,26 | 48695,5 | 249 |
| **250** | 62500 | 15625000 | 15,8114 | 6,2996 | 2,39794 | 4,00000 | 785,40 | 49087,4 | **250** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **250** | 62500 | 15625000 | 15,8114 | 6,2996 | 2,39794 | 4,00000 | 785,40 | 49087,4 | **250** |
| 251 | 63001 | 15813251 | 15,8430 | 6,3080 | 2,39967 | 3,98406 | 788,54 | 49480,9 | 251 |
| 252 | 63504 | 16003008 | 15,8745 | 6,3164 | 2,40140 | 3,96825 | 791,68 | 49875,9 | 252 |
| 253 | 64009 | 16194277 | 15,9060 | 6,3247 | 2,40312 | 3,95257 | 794,82 | 50272,6 | 253 |
| 254 | 64516 | 16387064 | 15,9374 | 6,3330 | 2,40483 | 3,93701 | 797,96 | 50670,7 | 254 |
| 255 | 65025 | 16581375 | 15,9687 | 6,3413 | 2,40654 | 3,92157 | 801,11 | 51070,5 | 255 |
| 256 | 65536 | 16777216 | 16,0000 | 6,3496 | 2,40824 | 3,90625 | 804,25 | 51471,9 | 256 |
| 257 | 66049 | 16974593 | 16,0312 | 6,3579 | 2,40993 | 3,89105 | 807,39 | 51874,8 | 257 |
| 258 | 66564 | 17173512 | 16,0624 | 6,3661 | 2,41162 | 3,87597 | 810,53 | 52279,2 | 258 |
| 259 | 67081 | 17373979 | 16,0935 | 6,3743 | 2,41330 | 3,86100 | 813,67 | 52685,3 | 259 |
| **260** | 67600 | 17576000 | 16,1245 | 6,3825 | 2,41497 | 3,84615 | 816,81 | 53092,9 | **260** |
| 261 | 68121 | 17779581 | 16,1555 | 6,3907 | 2,41664 | 3,83142 | 819,96 | 53502,1 | 261 |
| 262 | 68644 | 17984728 | 16,1864 | 6,3988 | 2,41830 | 3,81679 | 823,10 | 53912,9 | 262 |
| 263 | 69169 | 18191447 | 16,2173 | 6,4070 | 2,41996 | 3,80228 | 826,24 | 54325,2 | 263 |
| 264 | 69696 | 18399744 | 16,2481 | 6,4151 | 2,42160 | 3,78788 | 829,38 | 54739,1 | 264 |
| 265 | 70225 | 18609625 | 16,2788 | 6,4232 | 2,42325 | 3,77358 | 832,52 | 55154,6 | 265 |
| 266 | 70756 | 18821096 | 16,3095 | 6,4312 | 2,42488 | 3,75940 | 835,66 | 55571,6 | 266 |
| 267 | 71289 | 19034163 | 16,3401 | 6,4393 | 2,42651 | 3,74532 | 838,81 | 55990,2 | 267 |
| 268 | 71824 | 19248832 | 16,3707 | 6,4473 | 2,42813 | 3,73134 | 841,95 | 56410,4 | 268 |
| 269 | 72361 | 19465109 | 16,4012 | 6,4553 | 2,42975 | 3,71747 | 845,09 | 56832,2 | 269 |
| **270** | 72900 | 19683000 | 16,4317 | 6,4633 | 2,43136 | 3,70370 | 848,23 | 57255,5 | **270** |
| 271 | 73441 | 19902511 | 16,4621 | 6,4713 | 2,43297 | 3,69004 | 851,37 | 57680,4 | 271 |
| 272 | 73984 | 20123648 | 16,4924 | 6,4792 | 2,43457 | 3,67647 | 854,51 | 58106,9 | 272 |
| 273 | 74529 | 20346417 | 16,5227 | 6,4872 | 2,43616 | 3,66300 | 857,65 | 58534,9 | 273 |
| 274 | 75076 | 20570824 | 16,5529 | 6,4951 | 2,43775 | 3,64964 | 860,80 | 58964,6 | 274 |
| 275 | 75625 | 20796875 | 16,5831 | 6,5030 | 2,43933 | 3,63636 | 863,94 | 59395,7 | 275 |
| 276 | 76176 | 21024576 | 16,6132 | 6,5108 | 2,44091 | 3,62319 | 867,08 | 59828,5 | 276 |
| 277 | 76729 | 21253933 | 16,6433 | 6,5187 | 2,44248 | 3,61011 | 870,22 | 60262,8 | 277 |
| 278 | 77284 | 21484952 | 16,6733 | 6,5265 | 2,44404 | 3,59712 | 873,36 | 60698,7 | 278 |
| 279 | 77841 | 21717639 | 16,7033 | 6,5343 | 2,44560 | 3,58423 | 876,50 | 61136,2 | 279 |
| **280** | 78400 | 21952000 | 16,7332 | 6,5421 | 2,44716 | 3,57143 | 879,65 | 61575,2 | **280** |
| 281 | 78961 | 22188041 | 16,7631 | 6,5499 | 2,44871 | 3,55872 | 882,79 | 62015,8 | 281 |
| 282 | 79524 | 22425768 | 16,7929 | 6,5577 | 2,45025 | 3,54610 | 885,93 | 62458,0 | 282 |
| 283 | 80089 | 22665187 | 16,8226 | 6,5654 | 2,45179 | 3,53357 | 889,07 | 62901,8 | 283 |
| 284 | 80656 | 22906304 | 16,8523 | 6,5731 | 2,45332 | 3,52113 | 892,21 | 63347,1 | 284 |
| 285 | 81225 | 23149125 | 16,8819 | 6,5808 | 2,45484 | 3,50877 | 895,35 | 63794,0 | 285 |
| 286 | 81796 | 23393656 | 16,9115 | 6,5885 | 2,45637 | 3,49650 | 898,50 | 64242,4 | 286 |
| 287 | 82369 | 23639903 | 16,9411 | 6,5962 | 2,45788 | 3,48432 | 901,64 | 64692,5 | 287 |
| 288 | 82944 | 23887872 | 16,9706 | 6,6039 | 2,45939 | 3,47222 | 904,78 | 65144,1 | 288 |
| 289 | 83521 | 24137569 | 17,0000 | 6,6115 | 2,46090 | 3,46021 | 907,92 | 65597,2 | 289 |
| **290** | 84100 | 24389000 | 17,0294 | 6,6191 | 2,46240 | 3,44828 | 911,06 | 66052,0 | **290** |
| 291 | 84681 | 24642171 | 17,0587 | 6,6267 | 2,46389 | 3,43643 | 914,20 | 66508,3 | 291 |
| 292 | 85264 | 24897088 | 17,0880 | 6,6343 | 2,46538 | 3,42466 | 917,35 | 66966,2 | 292 |
| 293 | 85849 | 25153757 | 17,1172 | 6,6419 | 2,46687 | 3,41297 | 920,49 | 67425,6 | 293 |
| 294 | 86436 | 25412184 | 17,1464 | 6,6494 | 2,46835 | 3,40136 | 923,63 | 67886,7 | 294 |
| 295 | 87025 | 25672375 | 17,1756 | 6,6569 | 2,46982 | 3,38983 | 926,77 | 68349,3 | 295 |
| 296 | 87616 | 25934336 | 17,2047 | 6,6644 | 2,47129 | 3,37838 | 929,91 | 68813,4 | 296 |
| 297 | 88209 | 26198073 | 17,2337 | 6,6719 | 2,47276 | 3,36700 | 933,05 | 69279,2 | 297 |
| 298 | 88804 | 26463592 | 17,2627 | 6,6794 | 2,47422 | 3,35570 | 936,19 | 69746,5 | 298 |
| 299 | 89401 | 26730899 | 17,2916 | 6,6869 | 2,47567 | 3,34448 | 939,34 | 70215,4 | 299 |
| **300** | 90000 | 27000000 | 17,3205 | 6,6943 | 2,47712 | 3,33333 | 942,48 | 70685,8 | **300** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **300** | 90000 | 27000000 | 17,3205 | 6,6943 | 2,47712 | 3,33333 | 942,48 | 70685,8 | **300** |
| 301 | 90601 | 27270901 | 17,3494 | 6,7018 | 2,47857 | 3,32226 | 945,62 | 71157,9 | 301 |
| 302 | 91204 | 27543608 | 17,3781 | 6,7092 | 2,48001 | 3,31126 | 948,76 | 71631,5 | 302 |
| 303 | 91809 | 27818127 | 17,4069 | 6,7166 | 2,48144 | 3,30033 | 951,90 | 72106,6 | 303 |
| 304 | 92416 | 28094464 | 17,4356 | 6,7240 | 2,48287 | 3,28947 | 955,04 | 72583,4 | 304 |
| 305 | 93025 | 28372625 | 17,4642 | 6,7313 | 2,48430 | 3,27869 | 958,19 | 73061,7 | 305 |
| 306 | 93636 | 28652616 | 17,4929 | 6,7387 | 2,48572 | 3,26797 | 961,33 | 73541,5 | 306 |
| 307 | 94249 | 28934443 | 17,5214 | 6,7460 | 2,48714 | 3,25733 | 964,47 | 74023,0 | 307 |
| 308 | 94864 | 29218112 | 17,5499 | 6,7533 | 2,48855 | 3,24675 | 967,61 | 74506,0 | 308 |
| 309 | 95481 | 29503629 | 17,5784 | 6,7606 | 2,48996 | 3,23625 | 970,75 | 74990,6 | 309 |
| **310** | 96100 | 29791000 | 17,6068 | 6,7679 | 2,49136 | 3,22581 | 973,89 | 75476,8 | **310** |
| 311 | 96721 | 30080231 | 17,6352 | 6,7752 | 2,49276 | 3,21543 | 977,04 | 75964,5 | 311 |
| 312 | 97344 | 30371328 | 17,6635 | 6,7824 | 2,49415 | 3,20513 | 980,18 | 76453,8 | 312 |
| 313 | 97969 | 30664297 | 17,6918 | 6,7897 | 2,49554 | 3,19489 | 983,32 | 76944,7 | 313 |
| 314 | 98596 | 30959144 | 17,7200 | 6,7969 | 2,49693 | 3,18471 | 986,46 | 77437,1 | 314 |
| 315 | 99225 | 31255875 | 17,7482 | 6,8041 | 2,49831 | 3,17460 | 989,60 | 77931,1 | 315 |
| 316 | 99856 | 31554496 | 17,7764 | 6,8113 | 2,49969 | 3,16456 | 992,74 | 78426,7 | 316 |
| 317 | 100489 | 31855013 | 17,8045 | 6,8185 | 2,50106 | 3,15457 | 995,88 | 78923,9 | 317 |
| 318 | 101124 | 32157432 | 17,8326 | 6,8256 | 2,50243 | 3,14465 | 999,03 | 79422,6 | 318 |
| 319 | 101761 | 32461759 | 17,8606 | 6,8328 | 2,50379 | 3,13480 | 1002,2 | 79922,9 | 319 |
| **320** | 102400 | 32768000 | 17,8885 | 6,8399 | 2,50515 | 3,12500 | 1005,3 | 80424.8 | **320** |
| 321 | 103041 | 33076161 | 17,9165 | 6,8470 | 2,50651 | 3,11526 | 1008,5 | 80928,2 | 321 |
| 322 | 103684 | 33386248 | 17,9444 | 6,8541 | 2,50786 | 3,10559 | 1011,6 | 81433,2 | 322 |
| 323 | 104329 | 33698267 | 17,9722 | 6,8612 | 2,50920 | 3,09598 | 1014,7 | 81939,8 | 323 |
| 324 | 104976 | 34012224 | 18,0000 | 6,8683 | 2,51055 | 3,08642 | 1017,9 | 82448,0 | 324 |
| 325 | 105625 | 34328125 | 18,0278 | 6,8753 | 2,51188 | 3,07692 | 1021,0 | 82957,7 | 325 |
| 326 | 106276 | 34645976 | 18,0555 | 6,8824 | 2,51322 | 3,06748 | 1024.2 | 83469,0 | 326 |
| 327 | 106929 | 34965783 | 18,0831 | 6,8894 | 2,51455 | 3,05810 | 1027,3 | 83981,8 | 327 |
| 328 | 107584 | 35287552 | 18,1108 | 6,8964 | 2,51587 | 3,04878 | 1030,4 | 84496,3 | 328 |
| 329 | 108241 | 35611289 | 18,1384 | 6,9034 | 2,51720 | 3,03951 | 1033,6 | 85012,3 | 329 |
| **330** | 108900 | 35937000 | 18,1659 | 6,9104 | 2,51851 | 3,03030 | 1036,7 | 85529,9 | **330** |
| 331 | 109561 | 36264691 | 18,1934 | 6,9174 | 2,51983 | 3,02115 | 1039,9 | 86049,0 | 331 |
| 332 | 110224 | 36594368 | 18,2209 | 6,9244 | 2,52114 | 3,01205 | 1043,0 | 86569,7 | 332 |
| 333 | 110889 | 36926037 | 18,2483 | 6,9313 | 2,52244 | 3,00300 | 1046,2 | 87092,0 | 333 |
| 334 | 111556 | 37259704 | 18,2757 | 6,9382 | 2,52375 | 2,99401 | 1049,3 | 87615,9 | 334 |
| 335 | 112225 | 37595375 | 18,3030 | 6,9451 | 2,52504 | 2,98507 | 1052,4 | 88141,3 | 335 |
| 336 | 112896 | 37933056 | 18,3303 | 6,9521 | 2,52634 | 2,97619 | 1055,6 | 88668,3 | 336 |
| 337 | 113569 | 38272753 | 18,3576 | 6,9589 | 2,52763 | 2,96736 | 1058,7 | 89196,9 | 337 |
| 338 | 114244 | 38614472 | 18,3848 | 6,9658 | 2,52892 | 2,95858 | 1061,9 | 89727,0 | 338 |
| 339 | 114921 | 38958219 | 18,4120 | 6,9727 | 2,53020 | 2,94985 | 1065,0 | 90258,7 | 339 |
| **340** | 115600 | 39304000 | 18,4391 | 6,9795 | 2,53148 | 2,94118 | 1068,1 | 90792,0 | **340** |
| 341 | 116281 | 39651821 | 18,4662 | 6,9864 | 2,53275 | 2,93255 | 1071,3 | 91326,9 | 341 |
| 342 | 116964 | 40001688 | 18,4932 | 6,9932 | 2,53403 | 2,92398 | 1074,4 | 91863,3 | 342 |
| 343 | 117649 | 40353607 | 18,5203 | 7,0000 | 2,53529 | 2,91545 | 1077,6 | 92401,3 | 343 |
| 344 | 118336 | 40707584 | 18,5472 | 7,0068 | 2,53656 | 2,90698 | 1080,7 | 92940,9 | 344 |
| 345 | 119025 | 41063625 | 18,5742 | 7,0136 | 2,53782 | 2,89855 | 1083,8 | 93482,0 | 345 |
| 346 | 119716 | 41421736 | 18,6011 | 7,0203 | 2,53908 | 2,89017 | 1087,0 | 94024,7 | 346 |
| 347 | 120409 | 41781923 | 18,6279 | 7,0271 | 2,54033 | 2,88184 | 1090,1 | 94569,0 | 347 |
| 348 | 121104 | 42144192 | 18,6548 | 7,0338 | 2,54158 | 2,87356 | 1093,3 | 95114,9 | 348 |
| 349 | 121801 | 42508549 | 18,6815 | 7,0406 | 2,54283 | 2,86533 | 1096,4 | 95662,3 | 349 |
| **350** | 122500 | 42875000 | 18,7083 | 7,0473 | 2,54407 | 2,85714 | 1099,6 | 96211,3 | **350** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 350 | 122500 | 42875000 | 18,7083 | 7,0473 | 2,54407 | 2,85714 | 1099,6 | 96211,3 | 350 |
| 351 | 123201 | 43243551 | 18,7350 | 7,0540 | 2,54531 | 2,84900 | 1102,7 | 96761,8 | 351 |
| 352 | 123904 | 43614208 | 18,7617 | 7,0607 | 2,54654 | 2,84091 | 1105,8 | 97314,0 | 352 |
| 353 | 124609 | 43986977 | 18,7883 | 7,0674 | 2,54777 | 2,83286 | 1109,0 | 97867,7 | 353 |
| 354 | 125316 | 44361864 | 18,8149 | 7,0740 | 2,54900 | 2,82486 | 1112,1 | 98423,0 | 354 |
| 355 | 126025 | 44738875 | 18,8414 | 7,0807 | 2,55023 | 2,81690 | 1115,3 | 98979,8 | 355 |
| 356 | 126736 | 45118016 | 18,8680 | 7,0873 | 2,55145 | 2,80899 | 1118,4 | 99538,2 | 356 |
| 357 | 127449 | 45499293 | 18,8944 | 7,0940 | 2,55267 | 2,80112 | 1121,5 | 100098 | 357 |
| 358 | 128164 | 45882712 | 18,9209 | 7,1006 | 2,55388 | 2,79330 | 1124,7 | 100660 | 358 |
| 359 | 128881 | 46268279 | 18,9473 | 7,1072 | 2,55509 | 2,78552 | 1127,8 | 101223 | 359 |
| 360 | 129600 | 46656000 | 18,9737 | 7,1138 | 2,55630 | 2,77778 | 1131,0 | 101788 | 360 |
| 361 | 130321 | 47045881 | 19,0000 | 7,1204 | 2,55751 | 2,77008 | 1134,1 | 102354 | 361 |
| 362 | 131044 | 47437928 | 19,0263 | 7,1269 | 2,55871 | 2,76243 | 1137,3 | 102922 | 362 |
| 363 | 131769 | 47832147 | 19,0526 | 7,1335 | 2,55991 | 2,75482 | 1140,4 | 103491 | 363 |
| 364 | 132496 | 48228544 | 19,0788 | 7,1400 | 2,56110 | 2,74725 | 1143,5 | 104062 | 364 |
| 365 | 133225 | 48627125 | 19,1050 | 7,1466 | 2,56229 | 2,73973 | 1146,7 | 104635 | 365 |
| 366 | 133956 | 49027896 | 19,1311 | 7,1531 | 2,56348 | 2,73224 | 1149,8 | 105209 | 366 |
| 367 | 134689 | 49430863 | 19,1572 | 7,1596 | 2,56467 | 2,72480 | 1153,0 | 105785 | 367 |
| 368 | 135424 | 49836032 | 19,1833 | 7,1661 | 2,56585 | 2,71739 | 1156,1 | 106362 | 368 |
| 369 | 136161 | 50243409 | 19,2094 | 7,1726 | 2,56703 | 2,71003 | 1159,2 | 106941 | 369 |
| 370 | 136900 | 50653000 | 19,2354 | 7,1791 | 2,56820 | 2,70270 | 1162,4 | 107521 | 370 |
| 371 | 137641 | 51064811 | 19,2614 | 7,1855 | 2,56937 | 2,69542 | 1165,5 | 108103 | 371 |
| 372 | 138384 | 51478848 | 19,2873 | 7,1920 | 2,57054 | 2,68817 | 1168,7 | 108687 | 372 |
| 373 | 139129 | 51895117 | 19,3132 | 7,1984 | 2,57171 | 2,68097 | 1171,8 | 109272 | 373 |
| 374 | 139876 | 52313624 | 19,3391 | 7,2048 | 2,57287 | 2,67380 | 1175,0 | 109858 | 374 |
| 375 | 140625 | 52734375 | 19,3649 | 7,2112 | 2,57403 | 2,66667 | 1178,1 | 110447 | 375 |
| 376 | 141376 | 53157376 | 19,3907 | 7,2177 | 2,57519 | 2,65957 | 1181,2 | 111036 | 376 |
| 377 | 142129 | 53582633 | 19,4165 | 7,2240 | 2,57634 | 2,65252 | 1184,4 | 111628 | 377 |
| 378 | 142884 | 54010152 | 19,4422 | 7,2304 | 2,57749 | 2,64550 | 1187,5 | 112221 | 378 |
| 379 | 143641 | 54439939 | 19,4679 | 7,2368 | 2,57864 | 2,63852 | 1190,7 | 112815 | 379 |
| 380 | 144400 | 54872000 | 19,4936 | 7,2432 | 2,57978 | 2,63158 | 1193,8 | 113411 | 380 |
| 381 | 145161 | 55306341 | 19,5192 | 7,2495 | 2,58092 | 2,62467 | 1196,9 | 114009 | 381 |
| 382 | 145924 | 55742968 | 19,5448 | 7,2558 | 2,58206 | 2,61780 | 1200,1 | 114608 | 382 |
| 383 | 146689 | 56181887 | 19,5704 | 7,2622 | 2,58320 | 2,61097 | 1203,2 | 115209 | 383 |
| 384 | 147456 | 56623104 | 19,5959 | 7,2685 | 2,58433 | 2,60417 | 1206,4 | 115812 | 384 |
| 385 | 148225 | 57066625 | 19,6214 | 7,2748 | 2,58546 | 2,59740 | 1209,5 | 116416 | 385 |
| 386 | 148996 | 57512456 | 19,6469 | 7,2811 | 2,58659 | 2,59067 | 1212,7 | 117021 | 386 |
| 387 | 149769 | 57960603 | 19.6723 | 7,2874 | 2,58771 | 2,58398 | 1215,8 | 117628 | 387 |
| 388 | 150544 | 58411072 | 19,6977 | 7,2936 | 2,58883 | 2,57732 | 1218,9 | 118237 | 388 |
| 389 | 151321 | 58863869 | 19,7231 | 7,2999 | 2,58995 | 2,57069 | 1222,1 | 118847 | 389 |
| 390 | 152100 | 59319000 | 19,7484 | 7,3061 | 2,59106 | 2,56410 | 1225,2 | 119459 | 390 |
| 391 | 152881 | 59776471 | 19,7737 | 7,3124 | 2,59218 | 2,55754 | 1228,4 | 120072 | 391 |
| 392 | 153664 | 60236288 | 19,7990 | 7,3186 | 2,59329 | 2,55102 | 1231,5 | 120687 | 392 |
| 393 | 154449 | 60698457 | 19,8242 | 7,3248 | 2,59439 | 2,54453 | 1234,6 | 121304 | 393 |
| 394 | 155236 | 61162984 | 19,8494 | 7,3310 | 2,59550 | 2,53807 | 1237,8 | 121922 | 394 |
| 395 | 156025 | 61629875 | 19,8746 | 7,3372 | 2,59660 | 2,53165 | 1240,9 | 122542 | 395 |
| 396 | 156816 | 62099136 | 19,8997 | 7,3434 | 2,59770 | 2,52525 | 1244,1 | 123163 | 396 |
| 397 | 157609 | 62570773 | 19,9249 | 7,3496 | 2,59879 | 2,51889 | 1247,2 | 123786 | 397 |
| 398 | 158404 | 63044792 | 19,9499 | 7,3558 | 2,59988 | 2,51256 | 1250,4 | 124410 | 398 |
| 399 | 159201 | 63521199 | 19,9750 | 7,3619 | 2,60097 | 2,50627 | 1253,5 | 125036 | 399 |
| 400 | 160000 | 64000000 | 20,0000 | 7,3681 | 2,60206 | 2,50000 | 1256,6 | 125664 | 400 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **400** | 160000 | 64000000 | 20,0000 | 7,3681 | 2,60206 | 2,50000 | 1256,6 | 125664 | **400** |
| 401 | 160801 | 64481201 | 20,0250 | 7,3742 | 2,60314 | 2,49377 | 1259,8 | 126293 | 401 |
| 402 | 161604 | 64964808 | 20,0499 | 7,3803 | 2,60423 | 2,48756 | 1262,9 | 126923 | 402 |
| 403 | 162409 | 65450827 | 20,0749 | 7,3864 | 2,60531 | 2,48139 | 1266,1 | 127556 | 403 |
| 404 | 163216 | 65939264 | 20,0998 | 7,3925 | 2,60638 | 2,47525 | 1269,2 | 128190 | 404 |
| 405 | 164025 | 66430125 | 20,1246 | 7,3986 | 2,60746 | 2,46914 | 1272,3 | 128825 | 405 |
| 406 | 164836 | 66923416 | 20,1494 | 7,4047 | 2,60853 | 2,46305 | 1275,5 | 129462 | 406 |
| 407 | 165649 | 67419143 | 20,1742 | 7,4108 | 2,60959 | 2,45700 | 1278,6 | 130100 | 407 |
| 408 | 166464 | 67917312 | 20,1990 | 7,4169 | 2,61066 | 2,45098 | 1281,8 | 130741 | 408 |
| 409 | 167281 | 68417929 | 20,2237 | 7,4229 | 2,61172 | 2,44499 | 1284,9 | 131382 | 409 |
| **410** | 168100 | 68921000 | 20,2485 | 7,4290 | 2,61278 | 2,43902 | 1288,1 | 132025 | **410** |
| 411 | 168921 | 69426531 | 20,2731 | 7,4350 | 2,61384 | 2,43309 | 1291,2 | 132670 | 411 |
| 412 | 169744 | 69934528 | 20,2978 | 7,4410 | 2,61490 | 2,42718 | 1294,3 | 133317 | 412 |
| 413 | 170569 | 70444997 | 20,3224 | 7,4470 | 2,61595 | 2,42131 | 1297,5 | 133965 | 413 |
| 414 | 171396 | 70957944 | 20,3470 | 7,4530 | 2,61700 | 2,41546 | 1300,6 | 134614 | 414 |
| 415 | 172225 | 71473375 | 20,3715 | 7,4590 | 2,61805 | 2,40964 | 1303,8 | 135265 | 415 |
| 416 | 173056 | 71991296 | 20,3961 | 7,4650 | 2,61909 | 2,40385 | 1306,9 | 135918 | 416 |
| 417 | 173889 | 72511713 | 20,4206 | 7,4710 | 2,62014 | 2,39808 | 1310,0 | 136572 | 417 |
| 418 | 174724 | 73034632 | 20,4450 | 7,4770 | 2,62118 | 2,39234 | 1313,2 | 137228 | 418 |
| 419 | 175561 | 73560059 | 20,4695 | 7,4829 | 2,62221 | 2,38663 | 1316,3 | 137885 | 419 |
| **420** | 176400 | 74088000 | 20,4939 | 7,4889 | 2,62325 | 2,38095 | 1319,5 | 138544 | **420** |
| 421 | 177241 | 74618461 | 20,5183 | 7,4948 | 2,62428 | 2,37530 | 1322,6 | 139205 | 421 |
| 422 | 178084 | 75151448 | 20,5426 | 7,5007 | 2,62531 | 2,36967 | 1325,8 | 139867 | 422 |
| 423 | 178929 | 75686967 | 20,5670 | 7,5067 | 2,62634 | 2,36407 | 1328,9 | 140531 | 423 |
| 424 | 179776 | 76225024 | 20,5913 | 7,5126 | 2,62737 | 2,35849 | 1332,0 | 141196 | 424 |
| 425 | 180625 | 76765625 | 20,6155 | 7,5185 | 2,62839 | 2,35294 | 1335,2 | 141863 | 425 |
| 426 | 181476 | 77308776 | 20,6398 | 7,5244 | 2,62941 | 2,34742 | 1338,3 | 142531 | 426 |
| 427 | 182329 | 77854483 | 20,6640 | 7,5302 | 2,63043 | 2,34192 | 1341,5 | 143201 | 427 |
| 428 | 183184 | 78402752 | 20,6882 | 7,5361 | 2,63144 | 2,33645 | 1344,6 | 143872 | 428 |
| 429 | 184041 | 78953589 | 20,7123 | 7,5420 | 2,63246 | 2,33100 | 1347,7 | 144545 | 429 |
| **430** | 184900 | 79507000 | 20,7364 | 7,5478 | 2,63347 | 2,32558 | 1350,9 | 145220 | **430** |
| 431 | 185761 | 80062991 | 20,7605 | 7,5537 | 2,63448 | 2,32019 | 1354,0 | 145896 | 431 |
| 432 | 186624 | 80621568 | 20,7846 | 7,5595 | 2,63548 | 2,31481 | 1357,2 | 146574 | 432 |
| 433 | 187489 | 81182737 | 20,8087 | 7,5654 | 2,63649 | 2,30947 | 1360,3 | 147254 | 433 |
| 434 | 188356 | 81746504 | 20,8327 | 7,5712 | 2,63749 | 2,30415 | 1363,5 | 147934 | 434 |
| 435 | 189225 | 82312875 | 20,8567 | 7,5770 | 2,63849 | 2,29885 | 1366,6 | 148617 | 435 |
| 436 | 190096 | 82881856 | 20,8806 | 7,5828 | 2,63949 | 2,29358 | 1369,7 | 149301 | 436 |
| 437 | 190969 | 83453453 | 20,9045 | 7,5886 | 2,64048 | 2,28833 | 1372,9 | 149987 | 437 |
| 438 | 191844 | 84027672 | 20,9284 | 7,5944 | 2,64147 | 2,28311 | 1376,0 | 150674 | 438 |
| 439 | 192721 | 84604519 | 20,9523 | 7,6001 | 2,64246 | 2,27790 | 1379,2 | 151363 | 439 |
| **440** | 193600 | 85184000 | 20,9762 | 7,6059 | 2,64345 | 2,27273 | 1382,3 | 152053 | **440** |
| 441 | 194481 | 85766121 | 21,0000 | 7,6117 | 2,64444 | 2,26757 | 1385,4 | 152745 | 441 |
| 442 | 195364 | 86350888 | 21,0238 | 7,6174 | 2,64542 | 2,26244 | 1388,6 | 153439 | 442 |
| 443 | 196249 | 86938307 | 21,0476 | 7,6232 | 2,64640 | 2,25734 | 1391,7 | 154134 | 443 |
| 444 | 197136 | 87528384 | 21,0713 | 7,6289 | 2,64738 | 2,25225 | 1394,9 | 154830 | 444 |
| 445 | 198025 | 88121125 | 21,0950 | 7,6346 | 2,64836 | 2,24719 | 1398,0 | 155528 | 445 |
| 446 | 198916 | 88716536 | 21,1187 | 7,6403 | 2,64933 | 2,24215 | 1401,2 | 156228 | 446 |
| 447 | 199809 | 89314623 | 21,1424 | 7,6460 | 2,65031 | 2,23714 | 1404,3 | 156930 | 447 |
| 448 | 200704 | 89915392 | 21,1660 | 7,6517 | 2,65128 | 2,23214 | 1407,4 | 157633 | 448 |
| 449 | 201601 | 90518849 | 21,1896 | 7,6574 | 2,65225 | 2,22717 | 1410,6 | 158337 | 449 |
| **450** | 202500 | 91125000 | 21,2132 | 7,6631 | 2,65321 | 2,22222 | 1413,7 | 159043 | **450** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 450 | 202500 | 91125000 | 21,2132 | 7,6631 | 2,65321 | 2,22222 | 1413,7 | 159043 | 450 |
| 451 | 203401 | 91733851 | 21,2368 | 7,6688 | 2,65418 | 2,21729 | 1416,9 | 159751 | 451 |
| 452 | 204304 | 92345408 | 21,2603 | 7,6744 | 2,65514 | 2,21239 | 1420,0 | 160460 | 452 |
| 453 | 205209 | 92959677 | 21,2838 | 7,6801 | 2,65610 | 2,20751 | 1423,1 | 161171 | 453 |
| 454 | 206116 | 93576664 | 21,3073 | 7,6857 | 2,65706 | 2,20264 | 1426,3 | 161883 | 454 |
| 455 | 207025 | 94196375 | 21,3307 | 7,6914 | 2,65801 | 2,19780 | 1429,4 | 162597 | 455 |
| 456 | 207936 | 94818816 | 21,3542 | 7,6970 | 2,65896 | 2,19298 | 1432,6 | 163313 | 456 |
| 457 | 208849 | 95443993 | 21,3776 | 7,7026 | 2,65992 | 2,18818 | 1435,7 | 164030 | 457 |
| 458 | 209764 | 96071912 | 21,4009 | 7,7082 | 2,66087 | 2,18341 | 1438,8 | 164748 | 458 |
| 459 | 210681 | 96702579 | 21,4243 | 7,7138 | 2,66181 | 2,17865 | 1442,0 | 165468 | 459 |
| 460 | 211600 | 97336000 | 21,4476 | 7,7194 | 2,66276 | 2,17391 | 1445,1 | 166190 | 460 |
| 461 | 212521 | 97972181 | 21,4709 | 7,7250 | 2,66370 | 2,16920 | 1448,3 | 166914 | 461 |
| 462 | 213444 | 98611128 | 21,4942 | 7,7306 | 2,66464 | 2,16450 | 1451,4 | 167639 | 462 |
| 463 | 214369 | 99252847 | 21,5174 | 7,7362 | 2,66558 | 2,15983 | 1454,6 | 168365 | 463 |
| 464 | 215296 | 99897344 | 21,5407 | 7,7418 | 2,66652 | 2,15517 | 1457,7 | 169093 | 464 |
| 465 | 216225 | 100544625 | 21,5639 | 7,7473 | 2,66745 | 2,15054 | 1460,8 | 169823 | 465 |
| 466 | 217156 | 101194696 | 21,5870 | 7,7529 | 2,66839 | 2,14592 | 1464,0 | 170554 | 466 |
| 467 | 218089 | 101847563 | 21,6102 | 7,7584 | 2,66932 | 2,14133 | 1467,1 | 171287 | 467 |
| 468 | 219024 | 102503232 | 21,6333 | 7,7639 | 2,67025 | 2,13675 | 1470,3 | 172021 | 468 |
| 469 | 219961 | 103161709 | 21,6564 | 7,7695 | 2,67117 | 2,13220 | 1473,4 | 172757 | 469 |
| 470 | 220900 | 103823000 | 21,6795 | 7,7750 | 2,67210 | 2,12766 | 1476,5 | 173494 | 470 |
| 471 | 221841 | 104487111 | 21,7025 | 7,7805 | 2,67302 | 2,12314 | 1479,7 | 174234 | 471 |
| 472 | 222784 | 105154048 | 21,7256 | 7,7860 | 2,67394 | 2,11864 | 1482,8 | 174974 | 472 |
| 473 | 223729 | 105823817 | 21,7486 | 7,7915 | 2,67486 | 2,11416 | 1486,0 | 175716 | 473 |
| 474 | 224676 | 106496424 | 21,7715 | 7,7970 | 2,67578 | 2,10970 | 1489,1 | 176460 | 474 |
| 475 | 225625 | 107171875 | 21,7945 | 7,8025 | 2,67669 | 2,10526 | 1492,3 | 177205 | 475 |
| 476 | 226576 | 107850176 | 21,8174 | 7,8079 | 2,67761 | 2,10084 | 1495,4 | 177952 | 476 |
| 477 | 227529 | 108531333 | 21,8403 | 7,8134 | 2,67852 | 2,09644 | 1498,5 | 178701 | 477 |
| 478 | 228484 | 109215352 | 21,8632 | 7,8188 | 2,67943 | 2,09205 | 1501,7 | 179451 | 478 |
| 479 | 229441 | 109902239 | 21,8861 | 7,8243 | 2,68034 | 2,08768 | 1504,8 | 180203 | 479 |
| 480 | 230400 | 110592000 | 21,9089 | 7,8297 | 2,68124 | 2,08333 | 1508,0 | 180956 | 480 |
| 481 | 231361 | 111284641 | 21,9317 | 7,8352 | 2,68215 | 2,07900 | 1511,1 | 181711 | 481 |
| 482 | 232324 | 111980168 | 21,9545 | 7,8406 | 2,68305 | 2,07469 | 1514,2 | 182467 | 482 |
| 483 | 233289 | 112678587 | 21,9773 | 7,8460 | 2,68395 | 2,07039 | 1517,4 | 183225 | 483 |
| 484 | 234256 | 113379904 | 22,0000 | 7,8514 | 2,68485 | 2,06612 | 1520,5 | 183984 | 484 |
| 485 | 235225 | 114084125 | 22,0227 | 7,8568 | 2,68574 | 2,06186 | 1523,7 | 184745 | 485 |
| 486 | 236196 | 114791256 | 22,0454 | 7,8622 | 2,68664 | 2,05761 | 1526,8 | 185508 | 486 |
| 487 | 237169 | 115501303 | 22,0681 | 7,8676 | 2,68753 | 2,05339 | 1530,0 | 186272 | 487 |
| 488 | 238144 | 116214272 | 22,0907 | 7,8730 | 2,68842 | 2,04918 | 1533,1 | 187038 | 488 |
| 489 | 239121 | 116930169 | 22,1133 | 7,8784 | 2,68931 | 2,04499 | 1536,2 | 187805 | 489 |
| 490 | 240100 | 117649000 | 22,1359 | 7,8837 | 2,69020 | 2,04082 | 1539,4 | 188574 | 490 |
| 491 | 241081 | 118370771 | 22,1585 | 7,8891 | 2,69108 | 2,03666 | 1542,5 | 189345 | 491 |
| 492 | 242064 | 119095488 | 22,1811 | 7,8944 | 2,69197 | 2,03252 | 1545,7 | 190117 | 492 |
| 493 | 243049 | 119823157 | 22,2036 | 7,8998 | 2,69285 | 2,02840 | 1548,8 | 190890 | 493 |
| 494 | 244036 | 120553784 | 22,2261 | 7,9051 | 2,69373 | 2,02429 | 1551,9 | 191665 | 494 |
| 495 | 245025 | 121287375 | 22,2486 | 7,9105 | 2,69461 | 2,02020 | 1555,1 | 192442 | 495 |
| 496 | 246016 | 122023936 | 22,2711 | 7,9158 | 2,69548 | 2,01613 | 1558,2 | 193221 | 496 |
| 497 | 247009 | 122763473 | 22,2935 | 7,9211 | 2,69636 | 2,01207 | 1561,4 | 194000 | 497 |
| 498 | 248004 | 123505992 | 22,3159 | 7,9264 | 2,69723 | 2,00803 | 1564,5 | 194782 | 498 |
| 499 | 249001 | 124251499 | 22,3383 | 7,9317 | 2,69810 | 2,00401 | 1567,7 | 195565 | 499 |
| 500 | 250000 | 125000000 | 22,3607 | 7,9370 | 2,69897 | 2,00000 | 1570,8 | 196350 | 500 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | log $n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **500** | 250000 | 125000000 | 22,3607 | 7,9370 | 2,69897 | 2,00000 | 1570,8 | 196350 | **500** |
| 501 | 251001 | 125751501 | 22,3830 | 7,9423 | 2,69984 | 1,99601 | 1573,9 | 197136 | 501 |
| 502 | 252004 | 126506008 | 22,4054 | 7,9476 | 2,70070 | 1,99203 | 1577,1 | 197923 | 502 |
| 503 | 253009 | 127263527 | 22,4277 | 7,9528 | 2,70157 | 1,98807 | 1580,2 | 198713 | 503 |
| 504 | 254016 | 128024064 | 22,4499 | 7,9581 | 2,70243 | 1,98413 | 1583,4 | 199504 | 504 |
| 505 | 255025 | 128787625 | 22,4722 | 7,9634 | 2,70329 | 1,98020 | 1586,5 | 200296 | 505 |
| 506 | 256036 | 129554216 | 22,4944 | 7,9686 | 2,70415 | 1,97628 | 1589,6 | 201090 | 506 |
| 507 | 257049 | 130323843 | 22,5167 | 7,9739 | 2,70501 | 1,97239 | 1592,8 | 201886 | 507 |
| 508 | 258064 | 131096512 | 22,5389 | 7,9791 | 2,70586 | 1,96850 | 1595,9 | 202683 | 508 |
| 509 | 259081 | 131872229 | 22,5610 | 7,9843 | 2,70672 | 1,96464 | 1599,1 | 203482 | 509 |
| **510** | 260100 | 132651000 | 22,5832 | 7,9896 | 2,70757 | 1,96078 | 1602,2 | 204282 | **510** |
| 511 | 261121 | 133432831 | 22,6053 | 7,9948 | 2,70842 | 1,95695 | 1605,4 | 205084 | 511 |
| 512 | 262144 | 134217728 | 22,6274 | 8,0000 | 2,70927 | 1,95312 | 1608,5 | 205887 | 512 |
| 513 | 263169 | 135005697 | 22,6495 | 8,0052 | 2,71012 | 1,94932 | 1611,6 | 206692 | 513 |
| 514 | 264196 | 135796744 | 22,6716 | 8,0104 | 2,71096 | 1,94553 | 1614,8 | 207499 | 514 |
| 515 | 265225 | 136590875 | 22,6936 | 8,0156 | 2,71181 | 1,94175 | 1617,9 | 208307 | 515 |
| 516 | 266256 | 137388096 | 22,7156 | 8,0208 | 2,71265 | 1,93798 | 1621,1 | 209117 | 516 |
| 517 | 267289 | 138188413 | 22,7376 | 8,0260 | 2,71349 | 1,93424 | 1624,2 | 209928 | 517 |
| 518 | 268324 | 138991832 | 22,7596 | 8,0311 | 2,71433 | 1,93050 | 1627,3 | 210741 | 518 |
| 519 | 269361 | 139798359 | 22,7816 | 8,0363 | 2,71517 | 1,92678 | 1630,5 | 211556 | 519 |
| **520** | 270400 | 140608000 | 22,8035 | 8,0415 | 2,71600 | 1,92308 | 1633,6 | 212372 | **520** |
| 521 | 271441 | 141420761 | 22,8254 | 8,0466 | 2,71684 | 1,91939 | 1636,8 | 213189 | 521 |
| 522 | 272484 | 142236648 | 22,8473 | 8,0517 | 2,71767 | 1,91571 | 1639,9 | 214008 | 522 |
| 523 | 273529 | 143055667 | 22,8692 | 8,0569 | 2,71850 | 1,91205 | 1643,1 | 214829 | 523 |
| 524 | 274576 | 143877824 | 22,8910 | 8,0620 | 2,71933 | 1,90840 | 1646,2 | 215651 | 524 |
| 525 | 275625 | 144703125 | 22,9129 | 8,0671 | 2,72016 | 1,90476 | 1649,3 | 216475 | 525 |
| 526 | 276676 | 145531576 | 22,9347 | 8,0723 | 2,72099 | 1,90114 | 1652,5 | 217301 | 526 |
| 527 | 277729 | 146363183 | 22,9565 | 8,0774 | 2,72181 | 1,89753 | 1655,6 | 218128 | 527 |
| 528 | 278784 | 147197952 | 22,9783 | 8,0825 | 2,72263 | 1,89394 | 1658,8 | 218956 | 528 |
| 529 | 279841 | 148035889 | 23,0000 | 8,0876 | 2,72346 | 1,89036 | 1661,9 | 219787 | 529 |
| **530** | 280900 | 148877000 | 23,0217 | 8,0927 | 2,72428 | 1,88679 | 1665,0 | 220618 | **530** |
| 531 | 281961 | 149721291 | 23,0434 | 8,0978 | 2,72509 | 1,88324 | 1668,2 | 221452 | 531 |
| 532 | 283024 | 150568768 | 23,0651 | 8,1028 | 2,72591 | 1,87970 | 1671,3 | 222287 | 532 |
| 533 | 284089 | 151419437 | 23,0868 | 8,1079 | 2,72673 | 1,87617 | 1674,5 | 223123 | 533 |
| 534 | 285156 | 152273304 | 23,1084 | 8,1130 | 2,72754 | 1,87266 | 1677,6 | 223961 | 534 |
| 535 | 286225 | 153130375 | 23,1301 | 8,1180 | 2,72835 | 1,86916 | 1680,8 | 224801 | 535 |
| 536 | 287296 | 153990656 | 23,1517 | 8,1231 | 2,72916 | 1,86567 | 1683,9 | 225642 | 536 |
| 537 | 288369 | 154854153 | 23,1733 | 8,1281 | 2,72997 | 1,86220 | 1687,0 | 226484 | 537 |
| 538 | 289444 | 155720872 | 23,1948 | 8,1332 | 2,73078 | 1,85874 | 1690,2 | 227329 | 538 |
| 539 | 290521 | 156590819 | 23,2164 | 8,1382 | 2,73159 | 1,85529 | 1693,3 | 228175 | 539 |
| **540** | 291600 | 157464000 | 23,2379 | 8,1433 | 2,73239 | 1,85185 | 1696,5 | 229022 | **540** |
| 541 | 292681 | 158340421 | 23,2594 | 8,1483 | 2,73320 | 1,84843 | 1699,6 | 229871 | 541 |
| 542 | 293764 | 159220088 | 23,2809 | 8,1533 | 2,73400 | 1,84502 | 1702,7 | 230722 | 542 |
| 543 | 294849 | 160103007 | 23,3024 | 8,1583 | 2,73480 | 1,84162 | 1705,9 | 231574 | 543 |
| 544 | 295936 | 160989184 | 23,3238 | 8,1633 | 2,73560 | 1,83824 | 1709,0 | 232428 | 544 |
| 545 | 297025 | 161878625 | 23,3452 | 8,1683 | 2,73640 | 1,83486 | 1712,2 | 233283 | 545 |
| 546 | 298116 | 162771336 | 23,3666 | 8,1733 | 2,73719 | 1,83150 | 1715,3 | 234140 | 546 |
| 547 | 299209 | 163667323 | 23,3880 | 8,1783 | 2,73799 | 1,82815 | 1718,5 | 234998 | 547 |
| 548 | 300304 | 164566592 | 23,4094 | 8,1833 | 2,73878 | 1,82482 | 1721,6 | 235858 | 548 |
| 549 | 301401 | 165469149 | 23,4307 | 8,1882 | 2,73957 | 1,82149 | 1724,7 | 236720 | 549 |
| **550** | 302500 | 166375000 | 23,4521 | 8,1932 | 2,74036 | 1,81818 | 1727,9 | 237583 | **550** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **550** | 302500 | 166375000 | 23,4521 | 8,1932 | 2,74036 | 1,81818 | 1727,9 | 237583 | **550** |
| 551 | 303601 | 167284151 | 23,4734 | 8,1982 | 2,74115 | 1,81488 | 1731,0 | 238448 | 551 |
| 552 | 304704 | 168196608 | 23,4947 | 8,2031 | 2,74194 | 1,81159 | 1734,2 | 239314 | 552 |
| 553 | 305809 | 169112377 | 23,5160 | 8,2081 | 2,74273 | 1,80832 | 1737,3 | 240182 | 553 |
| 554 | 306916 | 170031464 | 23,5372 | 8,2130 | 2,74351 | 1,80505 | 1740,4 | 241051 | 554 |
| 555 | 308025 | 170953875 | 23,5584 | 8,2180 | 2,74429 | 1,80180 | 1743,6 | 241922 | 555 |
| 556 | 309136 | 171879616 | 23,5797 | 8,2229 | 2,74507 | 1,79856 | 1746,7 | 242795 | 556 |
| 557 | 310249 | 172808693 | 23,6008 | 8,2278 | 2,74586 | 1,79533 | 1749,9 | 243669 | 557 |
| 558 | 311364 | 173741112 | 23,6220 | 8,2327 | 2,74663 | 1,79211 | 1753,0 | 244545 | 558 |
| 559 | 312481 | 174676879 | 23,6432 | 8,2377 | 2,74741 | 1,78891 | 1756,2 | 245422 | 559 |
| **560** | 313600 | 175616000 | 23,6643 | 8,2426 | 2,74819 | 1,78571 | 1759,3 | 246301 | **560** |
| 561 | 314721 | 176558481 | 23,6854 | 8,2475 | 2,74896 | 1,78253 | 1762,4 | 247181 | 561 |
| 562 | 315844 | 177504328 | 23,7065 | 8,2524 | 2,74974 | 1,77936 | 1765,6 | 248063 | 562 |
| 563 | 316969 | 178453547 | 23,7276 | 8,2573 | 2,75051 | 1,77620 | 1768,7 | 248947 | 563 |
| 564 | 318096 | 179406144 | 23,7487 | 8,2621 | 2,75128 | 1,77305 | 1771,9 | 249832 | 564 |
| 565 | 319225 | 180362125 | 23,7697 | 8,2670 | 2,75205 | 1,76991 | 1775,0 | 250719 | 565 |
| 566 | 320356 | 181321496 | 23,7908 | 8,2719 | 2,75282 | 1,76678 | 1778,1 | 251607 | 566 |
| 567 | 321489 | 182284263 | 23,8118 | 8,2768 | 2,75358 | 1,76367 | 1781,3 | 252497 | 567 |
| 568 | 322624 | 183250432 | 23,8328 | 8,2816 | 2,75435 | 1,76056 | 1784,4 | 253388 | 568 |
| 569 | 323761 | 184220009 | 23,8537 | 8,2865 | 2,75511 | 1,75747 | 1787,6 | 254281 | 569 |
| **570** | 324900 | 185193000 | 23,8747 | 8,2913 | 2,75587 | 1,75439 | 1790,7 | 255176 | **570** |
| 571 | 326041 | 186169411 | 23,8956 | 8,2962 | 2,75664 | 1,75131 | 1793,8 | 256072 | 571 |
| 572 | 327184 | 187149248 | 23,9165 | 8,3010 | 2,75740 | 1,74825 | 1797,0 | 256970 | 572 |
| 573 | 328329 | 188132517 | 23,9374 | 8,3059 | 2,75815 | 1,74520 | 1800,1 | 257869 | 573 |
| 574 | 329476 | 189119224 | 23,9583 | 8,3107 | 2,75891 | 1,74216 | 1803,3 | 258770 | 574 |
| 575 | 330625 | 190109375 | 23,9792 | 8,3155 | 2,75967 | 1,73913 | 1806,4 | 259672 | 575 |
| 576 | 331776 | 191102976 | 24,0000 | 8,3203 | 2,76042 | 1,73611 | 1809,6 | 260576 | 576 |
| 577 | 332929 | 192100033 | 24,0208 | 8,3251 | 2,76118 | 1,73310 | 1812,7 | 261482 | 577 |
| 578 | 334084 | 193100552 | 24,0416 | 8,3300 | 2,76193 | 1,73010 | 1815,8 | 262389 | 578 |
| 579 | 335241 | 194104539 | 24,0624 | 8,3348 | 2,76268 | 1,72712 | 1819,0 | 263298 | 579 |
| **580** | 336400 | 195112000 | 24,0832 | 8,3396 | 2,76343 | 1,72414 | 1822,1 | 264208 | **580** |
| 581 | 337561 | 196122941 | 24,1039 | 8,3443 | 2,76418 | 1,72117 | 1825,3 | 265120 | 581 |
| 582 | 338724 | 197137368 | 24,1247 | 8,3491 | 2,76492 | 1,71821 | 1828,4 | 266033 | 582 |
| 583 | 339889 | 198155287 | 24,1454 | 8,3539 | 2,76567 | 1,71527 | 1831,6 | 266948 | 583 |
| 584 | 341056 | 199176704 | 24,1661 | 8,3587 | 2,76641 | 1,71233 | 1834,7 | 267865 | 584 |
| 585 | 342225 | 200201625 | 24,1868 | 8,3634 | 2,76716 | 1,70940 | 1837,8 | 268783 | 585 |
| 586 | 343396 | 201230056 | 24,2074 | 8,3682 | 2,76790 | 1,70648 | 1841,0 | 269703 | 586 |
| 587 | 344569 | 202262003 | 24,2281 | 8,3730 | 2,76864 | 1,70358 | 1844,1 | 270624 | 587 |
| 588 | 345744 | 203297472 | 24,2487 | 8,3777 | 2,76938 | 1,70068 | 1847,3 | 271547 | 588 |
| 589 | 346921 | 204336469 | 24,2693 | 8,3825 | 2,77012 | 1,69779 | 1850,4 | 272471 | 589 |
| **590** | 348100 | 205379000 | 24,2899 | 8,3872 | 2,77085 | 1,69492 | 1853,5 | 273397 | **590** |
| 591 | 349281 | 206425071 | 24,3105 | 8,3919 | 2,77159 | 1,69205 | 1856,7 | 274325 | 591 |
| 592 | 350464 | 207474688 | 24,3311 | 8,3967 | 2,77232 | 1,68919 | 1859,8 | 275254 | 592 |
| 593 | 351649 | 208527857 | 24,3516 | 8,4014 | 2,77305 | 1,68634 | 1863,0 | 276184 | 593 |
| 594 | 352836 | 209584584 | 24,3721 | 8,4061 | 2,77379 | 1,68350 | 1866,1 | 277117 | 594 |
| 595 | 354025 | 210644875 | 24,3926 | 8,4108 | 2,77452 | 1,68067 | 1869,2 | 278051 | 595 |
| 596 | 355216 | 211708736 | 24,4131 | 8,4155 | 2,77525 | 1,67785 | 1872,4 | 278986 | 596 |
| 597 | 356409 | 212776173 | 24,4336 | 8,4202 | 2,77597 | 1,67504 | 1875,5 | 279923 | 597 |
| 598 | 357604 | 213847192 | 24,4540 | 8,4249 | 2,77670 | 1,67224 | 1878,7 | 280862 | 598 |
| 599 | 358801 | 214921799 | 24,4745 | 8,4296 | 2,77743 | 1,66945 | 1881,8 | 281802 | 599 |
| **600** | 360000 | 216000000 | 24,4949 | 8,4343 | 2,77815 | 1,66667 | 1885,0 | 282743 | **600** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **600** | 360000 | 216000000 | 24,4949 | 8,4343 | 2,77815 | 1,66667 | 1885,0 | 282743 | **600** |
| 601 | 361201 | 217081801 | 24,5153 | 8,4390 | 2,77887 | 1,66389 | 1888,1 | 283687 | 601 |
| 602 | 362404 | 218167208 | 24,5357 | 8,4437 | 2,77960 | 1,66113 | 1891,2 | 284631 | 602 |
| 603 | 363609 | 219256227 | 24,5561 | 8,4484 | 2,78032 | 1,65837 | 1894,4 | 285578 | 603 |
| 604 | 364816 | 220348864 | 24,5764 | 8,4530 | 2,78104 | 1,65563 | 1897,5 | 286526 | 604 |
| 605 | 366025 | 221445125 | 24,5967 | 8,4577 | 2,78176 | 1,65289 | 1900,7 | 287475 | 605 |
| 606 | 367236 | 222545016 | 24,6171 | 8,4623 | 2,78247 | 1,65017 | 1903,8 | 288426 | 606 |
| 607 | 368449 | 223648543 | 24,6374 | 8,4670 | 2,78319 | 1,64745 | 1906,9 | 289379 | 607 |
| 608 | 369664 | 224755712 | 24,6577 | 8,4716 | 2,78390 | 1,64474 | 1910,1 | 290333 | 608 |
| 609 | 370881 | 225866529 | 24,6779 | 8,4763 | 2,78462 | 1,64204 | 1913,2 | 291289 | 609 |
| **610** | 372100 | 226981000 | 24,6982 | 8,4809 | 2,78533 | 1,63934 | 1916,4 | 292247 | **610** |
| 611 | 373321 | 228099131 | 24,7184 | 8,4856 | 2,78604 | 1,63666 | 1919,5 | 293206 | 611 |
| 612 | 374544 | 229220928 | 24,7386 | 8,4902 | 2,78675 | 1,63399 | 1922,7 | 294166 | 612 |
| 613 | 375769 | 230346397 | 24,7588 | 8,4948 | 2,78746 | 1,63132 | 1925,8 | 295128 | 613 |
| 614 | 376996 | 231475544 | 24,7790 | 8,4994 | 2,78817 | 1,62866 | 1928,9 | 296092 | 614 |
| 615 | 378225 | 232608375 | 24,7992 | 8,5040 | 2,78888 | 1,62602 | 1932,1 | 297057 | 615 |
| 616 | 379456 | 233744896 | 24,8193 | 8,5086 | 2,78958 | 1,62338 | 1935,2 | 298024 | 616 |
| 617 | 380689 | 234885113 | 24,8395 | 8,5132 | 2,79029 | 1,62075 | 1938,4 | 298992 | 617 |
| 618 | 381924 | 236029032 | 24,8596 | 8,5178 | 2,79099 | 1,61812 | 1941,5 | 299962 | 618 |
| 619 | 383161 | 237176659 | 24,8797 | 8,5224 | 2,79169 | 1,61551 | 1944,6 | 300934 | 619 |
| **620** | 384400 | 238328000 | 24,8998 | 8,5270 | 2,79239 | 1,61290 | 1947,8 | 301907 | **620** |
| 621 | 385641 | 239483061 | 24,9199 | 8,5316 | 2,79309 | 1,61031 | 1950,9 | 302882 | 621 |
| 622 | 386884 | 240641848 | 24,9399 | 8,5362 | 2,79379 | 1,60772 | 1954,1 | 303858 | 622 |
| 623 | 388129 | 241804367 | 24,9600 | 8,5408 | 2,79449 | 1,60514 | 1957,2 | 304836 | 623 |
| 624 | 389376 | 242970624 | 24,9800 | 8,5453 | 2,79518 | 1,60256 | 1960,4 | 305815 | 624 |
| 625 | 390625 | 244140625 | 25,0000 | 8,5499 | 2,79588 | 1,60000 | 1963,5 | 306796 | 625 |
| 626 | 391876 | 245314376 | 25,0200 | 8,5544 | 2,79657 | 1,59744 | 1966,6 | 307779 | 626 |
| 627 | 393129 | 246491883 | 25,0400 | 8,5590 | 2,79727 | 1,59490 | 1969,8 | 308763 | 627 |
| 628 | 394384 | 247673152 | 25,0599 | 8,5635 | 2,79796 | 1,59236 | 1972,9 | 309748 | 628 |
| 629 | 395641 | 248858189 | 25,0799 | 8,5681 | 2,79865 | 1,58983 | 1976,1 | 310736 | 629 |
| **630** | 396900 | 250047000 | 25,0998 | 8,5726 | 2,79934 | 1,58730 | 1979,2 | 311725 | **630** |
| 631 | 398161 | 251239591 | 25,1197 | 8,5772 | 2,80003 | 1,58479 | 1982,3 | 312715 | 631 |
| 632 | 399424 | 252435968 | 25,1396 | 8,5817 | 2,80072 | 1,58228 | 1985,5 | 313707 | 632 |
| 633 | 400689 | 253636137 | 25,1595 | 8,5862 | 2,80140 | 1,57978 | 1988,6 | 314700 | 633 |
| 634 | 401956 | 254840104 | 25,1794 | 8,5907 | 2,80209 | 1,57729 | 1991,8 | 315696 | 634 |
| 635 | 403225 | 256047875 | 25,1992 | 8,5952 | 2,80277 | 1,57480 | 1994,9 | 316692 | 635 |
| 636 | 404496 | 257259456 | 25,2190 | 8,5997 | 2,80346 | 1,57233 | 1998,1 | 317690 | 636 |
| 637 | 405769 | 258474853 | 25,2389 | 8,6043 | 2,80414 | 1,56986 | 2001,2 | 318690 | 637 |
| 638 | 407044 | 259694072 | 25,2587 | 8,6088 | 2,80482 | 1,56740 | 2004,3 | 319692 | 638 |
| 639 | 408321 | 260917119 | 25,2784 | 8,6132 | 2,80550 | 1,56495 | 2007,5 | 320695 | 639 |
| **640** | 409600 | 262144000 | 25,2982 | 8,6177 | 2,80618 | 1,56250 | 2010,6 | 321699 | **640** |
| 641 | 410881 | 263374721 | 25,3180 | 8,6222 | 2,80686 | 1,56006 | 2013,8 | 322705 | 641 |
| 642 | 412164 | 264609288 | 25,3377 | 8,6267 | 2,80754 | 1,55763 | 2016,9 | 323713 | 642 |
| 643 | 413449 | 265847707 | 25,3574 | 8,6312 | 2,80821 | 1,55521 | 2020,0 | 324722 | 643 |
| 644 | 414736 | 267089984 | 25,3772 | 8,6357 | 2,80889 | 1,55280 | 2023,2 | 325733 | 644 |
| 645 | 416025 | 268336125 | 25,3969 | 8,6401 | 2,80956 | 1,55039 | 2026,3 | 326745 | 645 |
| 646 | 417316 | 269586136 | 25,4165 | 8,6446 | 2,81023 | 1,54799 | 2029,5 | 327759 | 646 |
| 647 | 418609 | 270840023 | 25,4362 | 8,6490 | 2,81090 | 1,54560 | 2032,6 | 328775 | 647 |
| 648 | 419904 | 272097792 | 25,4558 | 8,6535 | 2,81158 | 1,54321 | 2035,8 | 329792 | 648 |
| 649 | 421201 | 273359449 | 25,4755 | 8,6579 | 2,81224 | 1,54083 | 2038,9 | 330810 | 649 |
| **650** | 422500 | 274625000 | 25,4951 | 8,6624 | 2,81291 | 1,53846 | 2042,0 | 331831 | **650** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 650 | 422500 | 274625000 | 25,4951 | 8,6624 | 2,81291 | 1,53846 | 2042,0 | 331831 | 650 |
| 651 | 423801 | 275894451 | 25,5147 | 8,6668 | 2,81358 | 1,53610 | 2045,2 | 332853 | 651 |
| 652 | 425104 | 277167808 | 25,5343 | 8,6713 | 2,81425 | 1,53374 | 2048,3 | 333876 | 652 |
| 653 | 426409 | 278445077 | 25,5539 | 8,6757 | 2,81491 | 1,53139 | 2051,5 | 334901 | 653 |
| 654 | 427716 | 279726264 | 25,5734 | 8,6801 | 2,81558 | 1,52905 | 2054,6 | 335927 | 654 |
| 655 | 429025 | 281011375 | 25,5930 | 8,6845 | 2,81624 | 1,52672 | 2057,7 | 336955 | 655 |
| 656 | 430336 | 282300416 | 25,6125 | 8,6890 | 2,81690 | 1,52439 | 2060,9 | 337985 | 656 |
| 657 | 431649 | 283593393 | 25,6320 | 8,6934 | 2,81757 | 1,52207 | 2064,0 | 339016 | 657 |
| 658 | 432964 | 284890312 | 25,6515 | 8,6978 | 2,81823 | 1,51976 | 2067,2 | 340049 | 658 |
| 659 | 434281 | 286191179 | 25,6710 | 8,7022 | 2,81889 | 1,51745 | 2070,3 | 341084 | 659 |
| 660 | 435600 | 287496000 | 25,6905 | 8,7066 | 2,81954 | 1,51515 | 2073,5 | 342119 | 660 |
| 661 | 436921 | 288804781 | 25,7099 | 8,7110 | 2,82020 | 1,51286 | 2076,6 | 343157 | 661 |
| 662 | 438244 | 290117528 | 25,7294 | 8,7154 | 2,82086 | 1,51057 | 2079,7 | 344196 | 662 |
| 663 | 439569 | 291434247 | 25,7488 | 8,7198 | 2,82151 | 1,50830 | 2082,9 | 345237 | 663 |
| 664 | 440896 | 292754944 | 25,7682 | 8,7241 | 2,82217 | 1,50602 | 2086,0 | 346279 | 664 |
| 665 | 442225 | 294079625 | 25,7876 | 8,7285 | 2,82282 | 1,50376 | 2089,2 | 347323 | 665 |
| 666 | 443556 | 295408296 | 25,8070 | 8,7329 | 2,82347 | 1,50150 | 2092,3 | 348368 | 666 |
| 667 | 444889 | 296740963 | 25,8263 | 8,7373 | 2,82413 | 1,49925 | 2095,4 | 349415 | 667 |
| 668 | 446224 | 298077632 | 25,8457 | 8,7416 | 2,82478 | 1,49701 | 2098,6 | 350464 | 668 |
| 669 | 447561 | 299418309 | 25,8650 | 8,7460 | 2,82543 | 1,49477 | 2101,7 | 351514 | 669 |
| 670 | 448900 | 300763000 | 25,8844 | 8,7503 | 2,82607 | 1,49254 | 2104,9 | 352565 | 670 |
| 671 | 450241 | 302111711 | 25,9037 | 8,7547 | 2,82672 | 1,49031 | 2108,0 | 353618 | 671 |
| 672 | 451584 | 303464448 | 25,9230 | 8,7590 | 2,82737 | 1,48810 | 2111,2 | 354673 | 672 |
| 673 | 452929 | 304821217 | 25,9422 | 8,7634 | 2,82802 | 1,48588 | 2114,3 | 355730 | 673 |
| 674 | 454276 | 306182024 | 25,9615 | 8,7677 | 2,82866 | 1,48368 | 2117,4 | 356788 | 674 |
| 675 | 455625 | 307546875 | 25,9808 | 8,7721 | 2,82930 | 1,48148 | 2120,6 | 357847 | 675 |
| 676 | 456976 | 308915776 | 26,0000 | 8,7764 | 2,82995 | 1,47929 | 2123,7 | 358908 | 676 |
| 677 | 458329 | 310288733 | 26,0192 | 8,7807 | 2,83059 | 1,47710 | 2126,9 | 359971 | 677 |
| 678 | 459684 | 311665752 | 26,0384 | 8,7850 | 2,83123 | 1,47493 | 2130,0 | 361035 | 678 |
| 679 | 461041 | 313046839 | 26,0576 | 8,7893 | 2,83187 | 1,47275 | 2133,1 | 362101 | 679 |
| 680 | 462400 | 314432000 | 26,0768 | 8,7937 | 2,83251 | 1,47059 | 2136,3 | 363168 | 680 |
| 681 | 463761 | 315821241 | 26,0960 | 8,7980 | 2,83315 | 1,46843 | 2139,4 | 364237 | 681 |
| 682 | 465124 | 317214568 | 26,1151 | 8,8023 | 2,83378 | 1,46628 | 2142,6 | 365308 | 682 |
| 683 | 466489 | 318611987 | 26,1343 | 8,8066 | 2,83442 | 1,46413 | 2145,7 | 366380 | 683 |
| 684 | 467856 | 320013504 | 26,1534 | 8,8109 | 2,83506 | 1,46199 | 2148,8 | 367453 | 684 |
| 685 | 469225 | 321419125 | 26,1725 | 8,8152 | 2,83569 | 1,45985 | 2152,0 | 368528 | 685 |
| 686 | 470596 | 322828856 | 26,1916 | 8,8194 | 2,83632 | 1,45773 | 2155,1 | 369605 | 686 |
| 687 | 471969 | 324242703 | 26,2107 | 8,8237 | 2,83696 | 1,45560 | 2158,3 | 370684 | 687 |
| 688 | 473344 | 325660672 | 26,2298 | 8,8280 | 2,83759 | 1,45349 | 2161,4 | 371764 | 688 |
| 689 | 474721 | 327082769 | 26,2488 | 8,8323 | 2,83822 | 1,45138 | 2164,6 | 372845 | 689 |
| 690 | 476100 | 328509000 | 26,2679 | 8,8366 | 2,83885 | 1,44928 | 2167,7 | 373928 | 690 |
| 691 | 477481 | 329939371 | 26,2869 | 8,8408 | 2,83948 | 1,44718 | 2170,8 | 375013 | 691 |
| 692 | 478864 | 331373888 | 26,3059 | 8,8451 | 2,84011 | 1,44509 | 2174,0 | 376099 | 692 |
| 693 | 480249 | 332812557 | 26,3249 | 8,8493 | 2,84073 | 1,44300 | 2177,1 | 377187 | 693 |
| 694 | 481636 | 334255384 | 26,3439 | 8,8536 | 2,84136 | 1,44092 | 2180,3 | 378276 | 694 |
| 695 | 483025 | 335702375 | 26,3629 | 8,8578 | 2,84198 | 1,43885 | 2183,4 | 379367 | 695 |
| 696 | 484416 | 337153536 | 26,3818 | 8,8621 | 2,84261 | 1,43678 | 2186,5 | 380459 | 696 |
| 697 | 485809 | 338608873 | 26,4008 | 8,8663 | 2,84323 | 1,43472 | 2189,7 | 381553 | 697 |
| 698 | 487204 | 340068392 | 26,4197 | 8,8706 | 2,84386 | 1,43266 | 2192,8 | 382649 | 698 |
| 699 | 488601 | 341532099 | 26,4386 | 8,8748 | 2,84448 | 1,43062 | 2196,0 | 383746 | 699 |
| 700 | 490000 | 343000000 | 26,4575 | 8,8790 | 2,84510 | 1,42857 | 2199,1 | 384845 | 700 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 700 | 490000 | 343000000 | 26,4575 | 8,8790 | 2,84510 | 1,42857 | 2199,1 | 384845 | 700 |
| 701 | 491401 | 344472101 | 26,4764 | 8,8833 | 2,84572 | 1,42653 | 2202,3 | 385945 | 701 |
| 702 | 492804 | 345948408 | 26,4953 | 8,8875 | 2,84634 | 1,42450 | 2205,4 | 387047 | 702 |
| 703 | 494209 | 347428927 | 26,5141 | 8,8917 | 2,84696 | 1,42248 | 2208,5 | 388151 | 703 |
| 704 | 495616 | 348913664 | 26,5330 | 8,8959 | 2,84757 | 1,42045 | 2211,7 | 389256 | 704 |
| 705 | 497025 | 350402625 | 26,5518 | 8,9001 | 2,84819 | 1,41844 | 2214,8 | 390363 | 705 |
| 706 | 498436 | 351895816 | 26,5707 | 8,9043 | 2,84880 | 1,41643 | 2218,0 | 391471 | 706 |
| 707 | 499849 | 353393243 | 26,5895 | 8,9085 | 2,84942 | 1,41443 | 2221,1 | 392580 | 707 |
| 708 | 501264 | 354894912 | 26,6083 | 8,9127 | 2,85003 | 1,41243 | 2224,2 | 393692 | 708 |
| 709 | 502681 | 356400829 | 26,6271 | 8,9169 | 2,85065 | 1,41044 | 2227,4 | 394805 | 709 |
| 710 | 504100 | 357911000 | 26,6458 | 8,9211 | 2,85126 | 1,40845 | 2230,5 | 395919 | 710 |
| 711 | 505521 | 359425431 | 26,6646 | 8,9253 | 2,85187 | 1,40647 | 2233,7 | 397035 | 711 |
| 712 | 506944 | 360944128 | 26,6833 | 8,9295 | 2,85248 | 1,40449 | 2236,8 | 398153 | 712 |
| 713 | 508369 | 362467097 | 26,7021 | 8,9337 | 2,85309 | 1,40252 | 2240,0 | 399272 | 713 |
| 714 | 509796 | 363994344 | 26,7208 | 8,9378 | 2,85370 | 1,40056 | 2243,1 | 400393 | 714 |
| 715 | 511225 | 365525875 | 26,7395 | 8,9420 | 2,85431 | 1,39860 | 2246,2 | 401515 | 715 |
| 716 | 512656 | 367061696 | 26,7582 | 8,9462 | 2,85491 | 1,39665 | 2249,4 | 402639 | 716 |
| 717 | 514089 | 368601813 | 26,7769 | 8,9503 | 2,85552 | 1,39470 | 2252,5 | 403765 | 717 |
| 718 | 515524 | 370146232 | 26,7955 | 8,9545 | 2,85612 | 1,39276 | 2255,7 | 404892 | 718 |
| 719 | 516961 | 371694959 | 26,8142 | 8,9587 | 2,85673 | 1,39082 | 2258,8 | 406020 | 719 |
| 720 | 518400 | 373248000 | 26,8328 | 8,9628 | 2,85733 | 1,38889 | 2261,9 | 407150 | 720 |
| 721 | 519841 | 374805361 | 26,8514 | 8,9670 | 2,85794 | 1,38696 | 2265,1 | 408282 | 721 |
| 722 | 521284 | 376367048 | 26,8701 | 8,9711 | 2,85854 | 1,38504 | 2268,2 | 409415 | 722 |
| 723 | 522729 | 377933067 | 26,8887 | 8,9752 | 2,85914 | 1,38313 | 2271,4 | 410550 | 723 |
| 724 | 524176 | 379503424 | 26,9072 | 8,9794 | 2,85974 | 1,38122 | 2274,5 | 411687 | 724 |
| 725 | 525625 | 381078125 | 26,9258 | 8,9835 | 2,86034 | 1,37931 | 2277,7 | 412825 | 725 |
| 726 | 527076 | 382657176 | 26,9444 | 8,9876 | 2,86094 | 1,37741 | 2280,8 | 413965 | 726 |
| 727 | 528529 | 384240583 | 26,9629 | 8,9918 | 2,86153 | 1,37552 | 2283,9 | 415106 | 727 |
| 728 | 529984 | 385828352 | 26,9815 | 8,9959 | 2,86213 | 1,37363 | 2287,1 | 416248 | 728 |
| 729 | 531441 | 387420489 | 27,0000 | 9,0000 | 2,86273 | 1,37174 | 2290,2 | 417393 | 729 |
| 730 | 532900 | 389017000 | 27,0185 | 9,0041 | 2,86332 | 1,36986 | 2293,4 | 418539 | 730 |
| 731 | 534361 | 390617891 | 27,0370 | 9,0082 | 2,86392 | 1,36799 | 2296,5 | 419686 | 731 |
| 732 | 535824 | 392223168 | 27,0555 | 9,0123 | 2,86451 | 1,36612 | 2299,6 | 420835 | 732 |
| 733 | 537289 | 393832837 | 27,0740 | 9,0164 | 2,86510 | 1,36426 | 2302,8 | 421986 | 733 |
| 734 | 538756 | 395446904 | 27,0924 | 9,0205 | 2,86570 | 1,36240 | 2305,9 | 423138 | 734 |
| 735 | 540225 | 397065375 | 27,1109 | 9,0246 | 2,86629 | 1,36054 | 2309,1 | 424293 | 735 |
| 736 | 541696 | 398688256 | 27,1293 | 9,0287 | 2,86688 | 1,35870 | 2312,2 | 425447 | 736 |
| 737 | 543169 | 400315553 | 27,1477 | 9,0328 | 2,86747 | 1,35685 | 2315,4 | 426604 | 737 |
| 738 | 544644 | 401947272 | 27,1662 | 9,0369 | 2,86806 | 1,35501 | 2318,5 | 427762 | 738 |
| 739 | 546121 | 403583419 | 27,1846 | 9,0410 | 2,86864 | 1,35318 | 2321,6 | 428922 | 739 |
| 740 | 547600 | 405224000 | 27,2029 | 9,0450 | 2,86923 | 1,35135 | 2324,8 | 430084 | 740 |
| 741 | 549081 | 406869021 | 27,2213 | 9,0491 | 2,86982 | 1,34953 | 2327,9 | 431247 | 741 |
| 742 | 550564 | 408518488 | 27,2397 | 9,0532 | 2,87040 | 1,34771 | 2331,1 | 432412 | 742 |
| 743 | 552049 | 410172407 | 27,2580 | 9,0572 | 2,87099 | 1,34590 | 2334,2 | 433578 | 743 |
| 744 | 553536 | 411830784 | 27,2764 | 9,0613 | 2,87157 | 1,34409 | 2337,3 | 434746 | 744 |
| 745 | 555025 | 413493625 | 27,2947 | 9,0654 | 2,87216 | 1,34228 | 2340,5 | 435916 | 745 |
| 746 | 556516 | 415160936 | 27,3130 | 9,0694 | 2,87274 | 1,34048 | 2343,6 | 437087 | 746 |
| 747 | 558009 | 416832723 | 27,3313 | 9,0735 | 2,87332 | 1,33869 | 2346,8 | 438259 | 747 |
| 748 | 559504 | 418508992 | 27,3496 | 9,0775 | 2,87390 | 1,33690 | 2349,9 | 439433 | 748 |
| 749 | 561001 | 420189749 | 27,3679 | 9,0816 | 2,87448 | 1,33511 | 2353,1 | 440609 | 749 |
| 750 | 562500 | 421875000 | 27,3861 | 9,0856 | 2,87506 | 1,33333 | 2356,2 | 441786 | 750 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | log $n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 750 | 562500 | 421875000 | 27,3861 | 9,0856 | 2,87506 | 1,33333 | 2356,2 | 441786 | 750 |
| 751 | 564001 | 423564751 | 27,4044 | 9,0896 | 2,87564 | 1,33156 | 2359,3 | 442965 | 751 |
| 752 | 565504 | 425259008 | 27,4226 | 9,0937 | 2,87622 | 1,32979 | 2362,5 | 444146 | 752 |
| 753 | 567009 | 426957777 | 27,4408 | 9,0977 | 2,87679 | 1,32802 | 2365,6 | 445328 | 753 |
| 754 | 568516 | 428661064 | 27,4591 | 9,1017 | 2,87737 | 1,32626 | 2368,8 | 446511 | 754 |
| 755 | 570025 | 430368875 | 27,4773 | 9,1057 | 2,87795 | 1,32450 | 2371,9 | 447697 | 755 |
| 756 | 571536 | 432081216 | 27,4955 | 9,1098 | 2,87852 | 1,32275 | 2375,0 | 448883 | 756 |
| 757 | 573049 | 433798093 | 27,5136 | 9,1138 | 2,87910 | 1,32100 | 2378,2 | 450072 | 757 |
| 758 | 574564 | 435519512 | 27,5318 | 9,1178 | 2,87967 | 1,31926 | 2381,3 | 451262 | 758 |
| 759 | 576081 | 437245479 | 27,5500 | 9,1218 | 2,88024 | 1,31752 | 2384,5 | 452453 | 759 |
| 760 | 577600 | 438976000 | 27,5681 | 9,1258 | 2,88081 | 1,31579 | 2387,6 | 453646 | 760 |
| 761 | 579121 | 440711081 | 27,5862 | 9,1298 | 2,88138 | 1,31406 | 2390,8 | 454841 | 761 |
| 762 | 580644 | 442450728 | 27,6043 | 9,1338 | 2,88195 | 1,31234 | 2393,9 | 456037 | 762 |
| 763 | 582169 | 444194947 | 27,6225 | 9,1378 | 2,88252 | 1,31062 | 2397,0 | 457234 | 763 |
| 764 | 583696 | 445943744 | 27,6405 | 9,1418 | 2,88309 | 1,30890 | 2400,2 | 458434 | 764 |
| 765 | 585225 | 447697125 | 27,6586 | 9,1458 | 2,88366 | 1,30719 | 2403,3 | 459635 | 765 |
| 766 | 586756 | 449455096 | 27,6767 | 9,1498 | 2,88423 | 1,30548 | 2406,5 | 460837 | 766 |
| 767 | 588289 | 451217663 | 27,6948 | 9,1537 | 2,88480 | 1,30378 | 2409,6 | 462041 | 767 |
| 768 | 589824 | 452984832 | 27,7128 | 9,1577 | 2,88536 | 1,30208 | 2412,7 | 463247 | 768 |
| 769 | 591361 | 454756609 | 27,7308 | 9,1617 | 2,88593 | 1,30039 | 2415,9 | 464454 | 769 |
| 770 | 592900 | 456533000 | 27,7489 | 9,1657 | 2,88649 | 1,29870 | 2419,0 | 465663 | 770 |
| 771 | 594441 | 458314011 | 27,7669 | 9,1696 | 2,88705 | 1,29702 | 2422,2 | 466873 | 771 |
| 772 | 595984 | 460099648 | 27,7849 | 9,1736 | 2,88762 | 1,29534 | 2425,3 | 468085 | 772 |
| 773 | 597529 | 461889917 | 27,8029 | 9,1775 | 2,88818 | 1,29366 | 2428,5 | 469298 | 773 |
| 774 | 599076 | 463684824 | 27,8209 | 9,1815 | 2,88874 | 1,29199 | 2431,6 | 470513 | 774 |
| 775 | 600625 | 465484375 | 27,8388 | 9,1855 | 2,88930 | 1,29032 | 2434,7 | 471730 | 775 |
| 776 | 602176 | 467288576 | 27,8568 | 9,1894 | 2,88986 | 1,28866 | 2437,9 | 472948 | 776 |
| 777 | 603729 | 469097433 | 27,8747 | 9,1933 | 2,89042 | 1,28700 | 2441,0 | 474168 | 777 |
| 778 | 605284 | 470910952 | 27,8927 | 9,1973 | 2,89098 | 1,28535 | 2444,2 | 475389 | 778 |
| 779 | 606841 | 472729139 | 27,9106 | 9,2012 | 2,89154 | 1,28370 | 2447,3 | 476612 | 779 |
| 780 | 608400 | 474552000 | 27,9285 | 9,2052 | 2,89209 | 1,28205 | 2450,4 | 477836 | 780 |
| 781 | 609961 | 476379541 | 27,9464 | 9,2091 | 2,89265 | 1,28041 | 2453,6 | 479062 | 781 |
| 782 | 611524 | 478211768 | 27,9643 | 9,2130 | 2,89321 | 1,27877 | 2456,7 | 480290 | 782 |
| 783 | 613089 | 480048687 | 27,9821 | 9,2170 | 2,89376 | 1,27714 | 2459,9 | 481519 | 783 |
| 784 | 614656 | 481890304 | 28,0000 | 9,2209 | 2,89432 | 1,27551 | 2463,0 | 482750 | 784 |
| 785 | 616225 | 483736625 | 28,0179 | 9,2248 | 2,89487 | 1,27389 | 2466,2 | 483982 | 785 |
| 786 | 617796 | 485587656 | 28,0357 | 9,2287 | 2,89542 | 1,27226 | 2469,3 | 485216 | 786 |
| 787 | 619369 | 487443403 | 28,0535 | 9,2326 | 2,89597 | 1,27065 | 2472,4 | 486451 | 787 |
| 788 | 620944 | 489303872 | 28,0713 | 9,2365 | 2,89653 | 1,26904 | 2475,6 | 487688 | 788 |
| 789 | 622521 | 491169069 | 28,0891 | 9,2404 | 2,89708 | 1,26743 | 2478,7 | 488927 | 789 |
| 790 | 624100 | 493039000 | 28,1069 | 9,2443 | 2,89763 | 1,26582 | 2481,9 | 490167 | 790 |
| 791 | 625681 | 494913671 | 28,1247 | 9,2482 | 2,89818 | 1,26422 | 2485,0 | 491409 | 791 |
| 792 | 627264 | 496793088 | 28,1425 | 9,2521 | 2,89873 | 1,26263 | 2488,1 | 492652 | 792 |
| 793 | 628849 | 498677257 | 28,1603 | 9,2560 | 2,89927 | 1,26103 | 2491,3 | 493897 | 793 |
| 794 | 630436 | 500566184 | 28,1780 | 9,2599 | 2,89982 | 1,25945 | 2494,4 | 495143 | 794 |
| 795 | 632025 | 502459875 | 28,1957 | 9,2638 | 2,90037 | 1,25786 | 2497,6 | 496391 | 795 |
| 796 | 633616 | 504358336 | 28,2135 | 9,2677 | 2,90091 | 1,25628 | 2500,7 | 497641 | 796 |
| 797 | 635209 | 506261573 | 28,2312 | 9,2716 | 2,90146 | 1,25471 | 2503,8 | 498892 | 797 |
| 798 | 636804 | 508169592 | 28,2489 | 9,2754 | 2,90200 | 1,25313 | 2507,0 | 500145 | 798 |
| 799 | 638401 | 510082399 | 28,2666 | 9,2793 | 2,90255 | 1,25156 | 2510,1 | 501399 | 799 |
| 800 | 640000 | 512000000 | 28,2843 | 9,2832 | 2,90309 | 1,25000 | 2513,3 | 502655 | 800 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | log $n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 800 | 640000 | 512000000 | 28,2843 | 9,2832 | 2,90309 | 1,25000 | 2513,3 | 502655 | 800 |
| 801 | 641601 | 513922401 | 28,3019 | 9,2870 | 2,90363 | 1,24844 | 2516,4 | 503912 | 801 |
| 802 | 643204 | 515849608 | 28,3196 | 9,2909 | 2,90417 | 1,24688 | 2519,6 | 505171 | 802 |
| 803 | 644809 | 517781627 | 28,3373 | 9,2948 | 2,90472 | 1,24533 | 2522,7 | 506432 | 803 |
| 804 | 646416 | 519718464 | 28,3549 | 9,2986 | 2,90526 | 1,24378 | 2525,8 | 507694 | 804 |
| 805 | 648025 | 521660125 | 28,3725 | 9,3025 | 2,90580 | 1,24224 | 2529,0 | 508958 | 805 |
| 806 | 649636 | 523606616 | 28,3901 | 9,3063 | 2,90634 | 1,24069 | 2532,1 | 510223 | 806 |
| 807 | 651249 | 525557943 | 28,4077 | 9,3102 | 2,90687 | 1,23916 | 2535,3 | 511490 | 807 |
| 808 | 652864 | 527514112 | 28,4253 | 9,3140 | 2,90741 | 1,23762 | 2538,4 | 512758 | 808 |
| 809 | 654481 | 529475129 | 28,4429 | 9,3179 | 2,90795 | 1,23609 | 2541,5 | 514028 | 809 |
| 810 | 656100 | 531441000 | 28,4605 | 9,3217 | 2,90849 | 1,23457 | 2544,7 | 515300 | 810 |
| 811 | 657721 | 533411731 | 28,4781 | 9,3255 | 2,90902 | 1,23305 | 2547,8 | 516573 | 811 |
| 812 | 659344 | 535387328 | 28,4956 | 9,3294 | 2,90956 | 1,23153 | 2551,0 | 517848 | 812 |
| 813 | 660969 | 537367797 | 28,5132 | 9,3332 | 2,91009 | 1,23001 | 2554,1 | 519124 | 813 |
| 814 | 662596 | 539353144 | 28,5307 | 9,3370 | 2,91062 | 1,22850 | 2557,3 | 520402 | 814 |
| 815 | 664225 | 541343375 | 28,5482 | 9,3408 | 2,91116 | 1,22699 | 2560,4 | 521681 | 815 |
| 816 | 665856 | 543338496 | 28,5657 | 9,3447 | 2,91169 | 1,22549 | 2563,5 | 522962 | 816 |
| 817 | 667489 | 545338513 | 28,5832 | 9,3485 | 2,91222 | 1,22399 | 2566,7 | 524245 | 817 |
| 818 | 669124 | 547343432 | 28,6007 | 9,3523 | 2,91275 | 1,22249 | 2569,8 | 525529 | 818 |
| 819 | 670761 | 549353259 | 28,6182 | 9,3561 | 2,91328 | 1,22100 | 2573,0 | 526814 | 819 |
| 820 | 672400 | 551368000 | 28,6356 | 9,3599 | 2,91381 | 1,21951 | 2576,1 | 528102 | 820 |
| 821 | 674041 | 553387661 | 28,6531 | 9,3637 | 2,91434 | 1,21803 | 2579,2 | 529391 | 821 |
| 822 | 675684 | 555412248 | 28,6705 | 9,3675 | 2,91487 | 1,21655 | 2582,4 | 530681 | 822 |
| 823 | 677329 | 557441767 | 28,6880 | 9,3713 | 2,91540 | 1,21507 | 2585,5 | 531973 | 823 |
| 824 | 678976 | 559476224 | 28,7054 | 9,3751 | 2,91593 | 1,21359 | 2588,7 | 533267 | 824 |
| 825 | 680625 | 561515625 | 28,7228 | 9,3789 | 2,91645 | 1,21212 | 2591,8 | 534562 | 825 |
| 826 | 682276 | 563559976 | 28,7402 | 9,3827 | 2,91698 | 1,21065 | 2595,0 | 535858 | 826 |
| 827 | 683929 | 565609283 | 28,7576 | 9,3865 | 2,91751 | 1,20919 | 2598,1 | 537157 | 827 |
| 828 | 685584 | 567663552 | 28,7750 | 9,3902 | 2,91803 | 1,20773 | 2601,2 | 538456 | 828 |
| 829 | 687241 | 569722789 | 28,7924 | 9,3940 | 2,91855 | 1,20627 | 2604,4 | 539758 | 829 |
| 830 | 688900 | 571787000 | 28,8097 | 9,3978 | 2,91908 | 1,20482 | 2607,5 | 541061 | 830 |
| 831 | 690561 | 573856191 | 28,8271 | 9,4016 | 2,91960 | 1,20337 | 2610,7 | 542365 | 831 |
| 832 | 692224 | 575930368 | 28,8444 | 9,4053 | 2,92012 | 1,20192 | 2613,8 | 543671 | 832 |
| 833 | 693889 | 578009537 | 28,8617 | 9,4091 | 2,92065 | 1,20048 | 2616,9 | 544979 | 833 |
| 834 | 695556 | 580093704 | 28,8791 | 9,4129 | 2,92117 | 1,19904 | 2620,1 | 546288 | 834 |
| 835 | 697225 | 582182875 | 28,8964 | 9,4166 | 2,92169 | 1,19760 | 2623,2 | 547599 | 835 |
| 836 | 698896 | 584277056 | 28,9137 | 9,4204 | 2,92221 | 1,19617 | 2626,4 | 548912 | 836 |
| 837 | 700569 | 586376253 | 28,9310 | 9,4241 | 2,92273 | 1,19474 | 2629,5 | 550226 | 837 |
| 838 | 702244 | 588480472 | 28,9482 | 9,4279 | 2,92324 | 1,19332 | 2632,7 | 551541 | 838 |
| 839 | 703921 | 590589719 | 28,9655 | 9,4316 | 2,92376 | 1,19190 | 2635,8 | 552858 | 839 |
| 840 | 705600 | 592704000 | 28,9828 | 9,4354 | 2,92428 | 1,19048 | 2638,9 | 554177 | 840 |
| 841 | 707281 | 594823321 | 29,0000 | 9,4391 | 2,92480 | 1,18906 | 2642,1 | 555497 | 841 |
| 842 | 708964 | 596947688 | 29,0172 | 9,4429 | 2,92531 | 1,18765 | 2645,2 | 556819 | 842 |
| 843 | 710649 | 599077107 | 29,0345 | 9,4466 | 2,92583 | 1,18624 | 2648,4 | 558142 | 843 |
| 844 | 712336 | 601211584 | 29,0517 | 9,4503 | 2,92634 | 1,18483 | 2651,5 | 559467 | 844 |
| 845 | 714025 | 603351125 | 29,0689 | 9,4541 | 2,92686 | 1,18343 | 2654,6 | 560794 | 845 |
| 846 | 715716 | 605495736 | 29,0861 | 9,4578 | 2,92737 | 1,18203 | 2657,8 | 562122 | 846 |
| 847 | 717409 | 607645423 | 29,1033 | 9,4615 | 2,92788 | 1,18064 | 2660,9 | 563452 | 847 |
| 848 | 719104 | 609800192 | 29,1204 | 9,4652 | 2,92840 | 1,17925 | 2664,1 | 564783 | 848 |
| 849 | 720801 | 611960049 | 29,1376 | 9,4690 | 2,92891 | 1,17786 | 2667,2 | 566116 | 849 |
| 850 | 722500 | 614125000 | 29,1548 | 9,4727 | 2,92942 | 1,17647 | 2670,4 | 567450 | 850 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **850** | 722500 | 614125000 | 29,1548 | 9,4727 | 2,92942 | 1,17647 | 2670,4 | 567450 | **850** |
| 851 | 724201 | 616295051 | 29,1719 | 9,4764 | 2,92993 | 1,17509 | 2673,5 | 568786 | 851 |
| 852 | 725904 | 618470208 | 29,1890 | 9,4801 | 2,93044 | 1,17371 | 2676,6 | 570124 | 852 |
| 853 | 727609 | 620650477 | 29,2062 | 9,4838 | 2,93095 | 1,17233 | 2679,8 | 571463 | 853 |
| 854 | 729316 | 622835864 | 29,2233 | 9,4875 | 2,93146 | 1,17096 | 2682,9 | 572803 | 854 |
| 855 | 731025 | 625026375 | 29,2404 | 9,4912 | 2,93197 | 1,16959 | 2686,1 | 574146 | 855 |
| 856 | 732736 | 627222016 | 29,2575 | 9,4949 | 2,93247 | 1,16822 | 2689,2 | 575490 | 856 |
| 857 | 734449 | 629422793 | 29,2746 | 9,4986 | 2,93298 | 1,16686 | 2692,3 | 576835 | 857 |
| 858 | 736164 | 631628712 | 29,2916 | 9,5023 | 2,93349 | 1,16550 | 2695,5 | 578182 | 858 |
| 859 | 737881 | 633839779 | 29,3087 | 9,5060 | 2,93399 | 1,16414 | 2698,6 | 579530 | 859 |
| **860** | 739600 | 636056000 | 29,3258 | 9,5097 | 2,93450 | 1,16279 | 2701,8 | 580880 | **860** |
| 861 | 741321 | 638277381 | 29,3428 | 9,5134 | 2,93500 | 1,16144 | 2704,9 | 582232 | 861 |
| 862 | 743044 | 640503928 | 29,3598 | 9,5171 | 2,93551 | 1,16009 | 2708,1 | 583585 | 862 |
| 863 | 744769 | 642735647 | 29,3769 | 9,5207 | 2,93601 | 1,15875 | 2711,2 | 584940 | 863 |
| 864 | 746496 | 644972544 | 29,3939 | 9,5244 | 2,93651 | 1,15741 | 2714,3 | 586297 | 864 |
| 865 | 748225 | 647214625 | 29,4109 | 9,5281 | 2,93702 | 1,15607 | 2717,5 | 587655 | 865 |
| 866 | 749956 | 649461896 | 29,4279 | 9,5317 | 2,93752 | 1,15473 | 2720,6 | 589014 | 866 |
| 867 | 751689 | 651714363 | 29,4449 | 9,5354 | 2,93802 | 1,15340 | 2723,8 | 590375 | 867 |
| 868 | 753424 | 653972032 | 29,4618 | 9,5391 | 2,93852 | 1,15207 | 2726,9 | 591738 | 868 |
| 869 | 755161 | 656234909 | 29,4788 | 9,5427 | 2,93902 | 1,15075 | 2730,0 | 593102 | 869 |
| **870** | 756900 | 658503000 | 29,4958 | 9,5464 | 2,93952 | 1,14943 | 2733,2 | 594468 | **870** |
| 871 | 758641 | 660776311 | 29,5127 | 9,5501 | 2,94002 | 1,14811 | 2736,3 | 595835 | 871 |
| 872 | 760384 | 663054848 | 29,5296 | 9,5537 | 2,94052 | 1,14679 | 2739,5 | 597204 | 872 |
| 873 | 762129 | 665338617 | 29,5466 | 9,5574 | 2,94101 | 1,14548 | 2742,6 | 598575 | 873 |
| 874 | 763876 | 667627624 | 29,5635 | 9,5610 | 2,94151 | 1,14416 | 2745,8 | 599947 | 874 |
| 875 | 765625 | 669921875 | 29,5804 | 9,5647 | 2,94201 | 1,14286 | 2748,9 | 601320 | 875 |
| 876 | 767376 | 672221376 | 29,5973 | 9,5683 | 2,94250 | 1,14155 | 2752,0 | 602696 | 876 |
| 877 | 769129 | 674526133 | 29,6142 | 9,5719 | 2,94300 | 1,14025 | 2755,2 | 604073 | 877 |
| 878 | 770884 | 676836152 | 29,6311 | 9,5756 | 2,94349 | 1,13895 | 2758,3 | 605451 | 878 |
| 879 | 772641 | 679151439 | 29,6479 | 9,5792 | 2,94399 | 1,13766 | 2761,5 | 606831 | 879 |
| **880** | 774400 | 681472000 | 29,6648 | 9,5828 | 2,94448 | 1,13636 | 2764,6 | 608212 | **880** |
| 881 | 776161 | 683797841 | 29,6816 | 9,5865 | 2,94498 | 1,13507 | 2767,7 | 609595 | 881 |
| 882 | 777924 | 686128968 | 29,6985 | 9,5901 | 2,94547 | 1,13379 | 2770,9 | 610980 | 882 |
| 883 | 779689 | 688465387 | 29,7153 | 9,5937 | 2,94596 | 1,13250 | 2774,0 | 612366 | 883 |
| 884 | 781456 | 690807104 | 29,7321 | 9,5973 | 2,94645 | 1,13122 | 2777,2 | 613754 | 884 |
| 885 | 783225 | 693154125 | 29,7489 | 9,6010 | 2,94694 | 1,12994 | 2780,3 | 615143 | 885 |
| 886 | 784996 | 695506456 | 29,7658 | 9,6046 | 2,94743 | 1,12867 | 2783,5 | 616534 | 886 |
| 887 | 786769 | 697864103 | 29,7825 | 9,6082 | 2,94792 | 1,12740 | 2786,6 | 617927 | 887 |
| 888 | 788544 | 700227072 | 29,7993 | 9,6118 | 2,94841 | 1,12613 | 2789,7 | 619321 | 888 |
| 889 | 790321 | 702595369 | 29,8161 | 9,6154 | 2,94890 | 1,12486 | 2792,9 | 620717 | 889 |
| **890** | 792100 | 704969000 | 29,8329 | 9,6190 | 2,94939 | 1,12360 | 2796,0 | 622114 | **890** |
| 891 | 793881 | 707347971 | 29,8496 | 9,6226 | 2,94988 | 1,12233 | 2799,2 | 623513 | 891 |
| 892 | 795664 | 709732288 | 29,8664 | 9,6262 | 2,95036 | 1,12108 | 2802,3 | 624913 | 892 |
| 893 | 797449 | 712121957 | 29,8831 | 9,6298 | 2,95085 | 1,11982 | 2805,4 | 626315 | 893 |
| 894 | 799236 | 714516984 | 29,8998 | 9,6334 | 2,95134 | 1,11857 | 2808,6 | 627718 | 894 |
| 895 | 801025 | 716917375 | 29,9166 | 9,6370 | 2,95182 | 1,11732 | 2811,7 | 629124 | 895 |
| 896 | 802816 | 719323136 | 29,9333 | 9,6406 | 2,95231 | 1,11607 | 2814,9 | 630530 | 896 |
| 897 | 804609 | 721734273 | 29,9500 | 9,6442 | 2,95279 | 1,11483 | 2818,0 | 631938 | 897 |
| 898 | 806404 | 724150792 | 29,9666 | 9,6477 | 2,95328 | 1,11359 | 2821,2 | 633348 | 898 |
| 899 | 808201 | 726572699 | 29,9833 | 9,6513 | 2,95376 | 1,11235 | 2824,3 | 634760 | 899 |
| **900** | 810000 | 729000000 | 30,0000 | 9,6549 | 2,95424 | 1,11111 | 2827,4 | 636173 | **900** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | log $n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **900** | 810000 | 729000000 | 30,0000 | 9,6549 | 2,95424 | 1,11111 | 2827,4 | 636173 | **900** |
| 901 | 811801 | 731432701 | 30,0167 | 9,6585 | 2,95472 | 1,10988 | 2830,6 | 637587 | 901 |
| 902 | 813604 | 733870808 | 30,0333 | 9,6620 | 2,95521 | 1,10865 | 2833,7 | 639003 | 902 |
| 903 | 815409 | 736314327 | 30,0500 | 9,6656 | 2,95569 | 1,10742 | 2836,9 | 640421 | 903 |
| 904 | 817216 | 738763264 | 30,0666 | 9,6692 | 2,95617 | 1,10619 | 2840,0 | 641840 | 904 |
| 905 | 819025 | 741217625 | 30,0832 | 9,6727 | 2,95665 | 1,10497 | 2843,1 | 643261 | 905 |
| 906 | 820836 | 743677416 | 30,0998 | 9,6763 | 2,95713 | 1,10375 | 2846,3 | 644683 | 906 |
| 907 | 822649 | 746142643 | 30,1164 | 9,6799 | 2,95761 | 1,10254 | 2849,4 | 646107 | 907 |
| 908 | 824464 | 748613312 | 30,1330 | 9,6834 | 2,95809 | 1,10132 | 2852,6 | 647533 | 908 |
| 909 | 826281 | 751089429 | 30,1496 | 9,6870 | 2,95856 | 1,10011 | 2855,7 | 648960 | 909 |
| **910** | 828100 | 753571000 | 30,1662 | 9,6905 | 2,95904 | 1,09890 | 2858,8 | 650388 | **910** |
| 911 | 829921 | 756058031 | 30,1828 | 9,6941 | 2,95952 | 1,09796 | 2862,0 | 651818 | 911 |
| 912 | 831744 | 758550528 | 30,1993 | 9,6976 | 2,95999 | 1,09649 | 2865,1 | 653250 | 912 |
| 913 | 833569 | 761048497 | 30,2159 | 9,7012 | 2,96047 | 1,09529 | 2868,3 | 654684 | 913 |
| 914 | 835396 | 763551944 | 30,2324 | 9,7047 | 2,96095 | 1,09409 | 2871,4 | 656118 | 914 |
| 915 | 837225 | 766060875 | 30,2490 | 9,7082 | 2,96142 | 1,09290 | 2874,6 | 657555 | 915 |
| 916 | 839056 | 768575296 | 30,2655 | 9,7118 | 2,96190 | 1,09170 | 2877,7 | 658993 | 916 |
| 917 | 840889 | 771095213 | 30,2820 | 9,7153 | 2,96237 | 1,09051 | 2880,8 | 660433 | 917 |
| 918 | 842724 | 773620632 | 30,2985 | 9,7188 | 2,96284 | 1,08932 | 2884,0 | 661874 | 918 |
| 919 | 844561 | 776151559 | 30,3150 | 9,7224 | 2,96332 | 1,08814 | 2887,1 | 663317 | 919 |
| **920** | 846400 | 778688000 | 30,3315 | 9,7259 | 2,96379 | 1,08696 | 2890,3 | 664761 | **920** |
| 921 | 848241 | 781229961 | 30,3480 | 9,7294 | 2,96426 | 1,08578 | 2893,4 | 666207 | 921 |
| 922 | 850084 | 783777448 | 30,3645 | 9,7329 | 2,96473 | 1,08460 | 2896,5 | 667654 | 922 |
| 923 | 851929 | 786330467 | 30,3809 | 9,7364 | 2,96520 | 1,08342 | 2899,7 | 669103 | 923 |
| 924 | 853776 | 788889024 | 30,3974 | 9,7400 | 2,96567 | 1,08225 | 2902,8 | 670554 | 924 |
| 925 | 855625 | 791453125 | 30,4138 | 9,7435 | 2,96614 | 1,08108 | 2906,0 | 672006 | 925 |
| 926 | 857476 | 794022776 | 30,4302 | 9,7470 | 2,96661 | 1,07991 | 2909,1 | 673460 | 926 |
| 927 | 859329 | 796597983 | 30,4467 | 9,7505 | 2,96708 | 1,07875 | 2912,3 | 674915 | 927 |
| 928 | 861184 | 799178752 | 30,4631 | 9,7540 | 2,96755 | 1,07759 | 2915,4 | 676372 | 928 |
| 929 | 863041 | 801765089 | 30,4795 | 9,7575 | 2,96802 | 1,07643 | 2918,5 | 677831 | 929 |
| **930** | 864900 | 804357000 | 30,4959 | 9,7610 | 2,96848 | 1,07527 | 2921,7 | 679291 | **930** |
| 931 | 866761 | 806954491 | 30,5123 | 9,7645 | 2,96895 | 1,07411 | 2924,8 | 680752 | 931 |
| 932 | 868624 | 809557568 | 30,5287 | 9,7680 | 2,96942 | 1,07296 | 2928,0 | 682216 | 932 |
| 933 | 870489 | 812166237 | 30,5450 | 9,7715 | 2,96988 | 1,07181 | 2931,1 | 683680 | 933 |
| 934 | 872356 | 814780504 | 30,5614 | 9,7750 | 2,97035 | 1,07066 | 2934,2 | 685147 | 934 |
| 935 | 874225 | 817400375 | 30,5778 | 9,7785 | 2,97081 | 1,06952 | 2937,4 | 686615 | 935 |
| 936 | 876096 | 820025856 | 30,5941 | 9,7819 | 2,97128 | 1,06838 | 2940,5 | 688084 | 936 |
| 937 | 877969 | 822656953 | 30,6105 | 9,7854 | 2,97174 | 1,06724 | 2943,7 | 689555 | 937 |
| 938 | 879844 | 825293672 | 30,6268 | 9,7889 | 2,97220 | 1,06610 | 2946,8 | 691028 | 938 |
| 939 | 881721 | 827936019 | 30,6431 | 9,7924 | 2,97267 | 1,06496 | 2950,0 | 692502 | 939 |
| **940** | 883600 | 830584000 | 30,6594 | 9,7959 | 2,97313 | 1,06383 | 2953,1 | 693978 | **940** |
| 941 | 885481 | 833237621 | 30,6757 | 9,7993 | 2,97359 | 1,06270 | 2956,2 | 695455 | 941 |
| 942 | 887364 | 835896888 | 30,6920 | 9,8028 | 2,97405 | 1,06157 | 2959,4 | 696934 | 942 |
| 943 | 889249 | 838561807 | 30,7083 | 9,8063 | 2,97451 | 1,06045 | 2962,5 | 698415 | 943 |
| 944 | 891136 | 841232384 | 30,7246 | 9,8097 | 2,97497 | 1,05932 | 2965,7 | 699897 | 944 |
| 945 | 893025 | 843908625 | 30,7409 | 9,8132 | 2,97543 | 1,05820 | 2968,8 | 701380 | 945 |
| 946 | 894916 | 846590536 | 30,7571 | 9,8167 | 2,97589 | 1,05708 | 2971,9 | 702865 | 946 |
| 947 | 896809 | 849278123 | 30,7734 | 9,8201 | 2,97635 | 1,05597 | 2975,1 | 704352 | 947 |
| 948 | 898704 | 851971392 | 30,7896 | 9,8236 | 2,97681 | 1,05485 | 2978,2 | 705840 | 948 |
| 949 | 900601 | 854670349 | 30,8058 | 9,8270 | 2,97727 | 1,05374 | 2981,4 | 707330 | 949 |
| **950** | 902500 | 857375000 | 30,8221 | 9,8305 | 2,97772 | 1,05263 | 2984,5 | 708822 | **950** |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\log n$ | $\frac{1000}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 950 | 902500 | 857375000 | 30,8221 | 9,8305 | 2,97772 | 1,05263 | 2984,5 | 708822 | 950 |
| 951 | 904401 | 860085351 | 30,8383 | 9,8339 | 2,97818 | 1,05152 | 2987,7 | 710315 | 951 |
| 952 | 906304 | 862801408 | 30,8545 | 9,8374 | 2,97864 | 1,05042 | 2990,8 | 711809 | 952 |
| 953 | 908209 | 865523177 | 30,8707 | 9,8408 | 2,97909 | 1,04932 | 2993,9 | 713306 | 953 |
| 954 | 910116 | 868250664 | 30,8869 | 9,8443 | 2,97955 | 1,04822 | 2997,1 | 714803 | 954 |
| 955 | 912025 | 870983875 | 30,9031 | 9,8477 | 2,98000 | 1,04712 | 3000,2 | 716303 | 955 |
| 956 | 913936 | 873722816 | 30,9192 | 9,8511 | 2,98046 | 1,04603 | 3003,4 | 717804 | 956 |
| 957 | 915849 | 876467493 | 30,9354 | 9,8546 | 2,98091 | 1,04493 | 3006,5 | 719306 | 957 |
| 958 | 917764 | 879217912 | 30,9516 | 9,8580 | 2,98137 | 1,04384 | 3009,6 | 720810 | 958 |
| 959 | 919681 | 881974079 | 30,9677 | 9,8614 | 2,98182 | 1,04275 | 3012,8 | 722316 | 959 |
| 960 | 921600 | 884736000 | 30,9839 | 9,8648 | 2,98227 | 1,04167 | 3015,9 | 723823 | 960 |
| 961 | 923521 | 887503681 | 31,0000 | 9,8683 | 2,98272 | 1,04058 | 3019,1 | 725332 | 961 |
| 962 | 925444 | 890277128 | 31,0161 | 9,8717 | 2,98318 | 1,03950 | 3022,2 | 726842 | 962 |
| 963 | 927369 | 893056347 | 31,0322 | 9,8751 | 2,98363 | 1,03842 | 3025,4 | 728354 | 963 |
| 964 | 929296 | 895841344 | 31,0483 | 9,8785 | 2,98408 | 1,03734 | 3028,5 | 729867 | 964 |
| 965 | 931225 | 898632125 | 31,0644 | 9,8819 | 2,98453 | 1,03627 | 3031,6 | 731382 | 965 |
| 966 | 933156 | 901428696 | 31,0805 | 9,8854 | 2,98498 | 1,03520 | 3034,8 | 732899 | 966 |
| 967 | 935089 | 904231063 | 31,0966 | 9,8888 | 2,98543 | 1,03413 | 3037,9 | 734417 | 967 |
| 968 | 937024 | 907039232 | 31,1127 | 9,8922 | 2,98588 | 1,03306 | 3041,1 | 735937 | 968 |
| 969 | 938961 | 909853209 | 31,1288 | 9,8956 | 2,98632 | 1,03199 | 3044,2 | 737458 | 969 |
| 970 | 940900 | 912673000 | 31,1448 | 9,8990 | 2,98677 | 1,03093 | 3047,3 | 738981 | 970 |
| 971 | 942841 | 915498611 | 31,1609 | 9,9024 | 2,98722 | 1,02987 | 3050,5 | 740506 | 971 |
| 972 | 944784 | 918330048 | 31,1769 | 9,9058 | 2,98767 | 1,02881 | 3053,6 | 742032 | 972 |
| 973 | 946729 | 921167317 | 31,1929 | 9,9092 | 2,98811 | 1,02775 | 3056,8 | 743559 | 973 |
| 974 | 948676 | 924010424 | 31,2090 | 9,9126 | 2,98856 | 1,02669 | 3059,9 | 745088 | 974 |
| 975 | 950625 | 926859375 | 31,2250 | 9,9160 | 2,98900 | 1,02564 | 3063,1 | 746619 | 975 |
| 976 | 952576 | 929714176 | 31,2410 | 9,9194 | 2,98945 | 1,02459 | 3066,2 | 748151 | 976 |
| 977 | 954529 | 932574833 | 31,2570 | 9,9227 | 2,98989 | 1,02354 | 3069,3 | 749685 | 977 |
| 978 | 956484 | 935441352 | 31,2730 | 9,9261 | 2,99034 | 1,02249 | 3072,5 | 751221 | 978 |
| 979 | 958441 | 938313739 | 31,2890 | 9,9295 | 2,99078 | 1,02145 | 3075,6 | 752758 | 979 |
| 980 | 960400 | 941192000 | 31,3050 | 9,9329 | 2,99123 | 1,02041 | 3078,8 | 754296 | 980 |
| 981 | 962361 | 944076141 | 31,3209 | 9,9363 | 2,99167 | 1,01937 | 3081,9 | 755837 | 981 |
| 982 | 964324 | 946966168 | 31,3369 | 9,9396 | 2,99211 | 1,01833 | 3085,0 | 757378 | 982 |
| 983 | 966289 | 949862087 | 31,3528 | 9,9430 | 2,99255 | 1,01729 | 3088,2 | 758922 | 983 |
| 984 | 968256 | 952763904 | 31,3688 | 9,9464 | 2,99300 | 1,01626 | 3091,3 | 760466 | 984 |
| 985 | 970225 | 955671625 | 31,3847 | 9,9497 | 2,99344 | 1,01523 | 3094,5 | 762013 | 985 |
| 986 | 972196 | 958585256 | 31,4006 | 9,9531 | 2,99388 | 1,01420 | 3097,6 | 763561 | 986 |
| 987 | 974169 | 961504803 | 31,4166 | 9,9565 | 2,99432 | 1,01317 | 3100,8 | 765111 | 987 |
| 988 | 976144 | 964430272 | 31,4325 | 9,9598 | 2,99476 | 1,01215 | 3103,9 | 766662 | 988 |
| 989 | 978121 | 967361669 | 31,4484 | 9,9632 | 2,99520 | 1,01112 | 3107,0 | 768214 | 989 |
| 990 | 980100 | 970299000 | 31,4643 | 9,9666 | 2,99564 | 1,01010 | 3110,2 | 769769 | 990 |
| 991 | 982081 | 973242271 | 31,4802 | 9,9699 | 2,99607 | 1,00908 | 3113,3 | 771325 | 991 |
| 992 | 984064 | 976191488 | 31,4960 | 9,9733 | 2,99651 | 1,00806 | 3116,5 | 772882 | 992 |
| 993 | 986049 | 979146657 | 31,5119 | 9,9766 | 2,99695 | 1,00705 | 3119,6 | 774441 | 993 |
| 994 | 988036 | 982107784 | 31,5278 | 9,9800 | 2,99739 | 1,00604 | 3122,7 | 776002 | 994 |
| 995 | 990025 | 985074875 | 31,5436 | 9,9833 | 2,99782 | 1,00503 | 3125,9 | 777564 | 995 |
| 996 | 992016 | 988047936 | 31,5595 | 9,9866 | 2,99826 | 1,00402 | 3129,0 | 779128 | 996 |
| 997 | 994009 | 991026973 | 31,5753 | 9,9900 | 2,99870 | 1,00301 | 3132,2 | 780693 | 997 |
| 998 | 996004 | 994011992 | 31,5911 | 9,9933 | 2,99913 | 1,00200 | 3135,3 | 782260 | 998 |
| 999 | 998001 | 997002999 | 31,6070 | 9,9967 | 2,99957 | 1,00100 | 3138,5 | 783828 | 999 |

1000

## Loomulikud logaritmid.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — ∞ | 0,0000 | 0,6931 | 1,0986 | 1,3863 | 1,6094 | 1,7918 | 1,9459 | 2,0794 | 2,1972 |
| 10 | 2,3026 | 2,3979 | 2,4849 | 2,5649 | 2,6391 | 2,7081 | 2,7726 | 2,8332 | 2,8904 | 2,9444 |
| 20 | 2,9957 | 3,0445 | 3,0910 | 3,1355 | 3,1781 | 3,2189 | 3,2581 | 3,2958 | 3,3322 | 3,3673 |
| 30 | 3,4012 | 3,4340 | 3,4657 | 3,4965 | 3,5264 | 3,5553 | 3,5835 | 3,6109 | 3,6376 | 3,6636 |
| 40 | 3,6889 | 3,7136 | 3,7377 | 3,7612 | 3,7842 | 3,8067 | 3,8286 | 3,8501 | 3,8712 | 3,8918 |
| 50 | 3,9120 | 3,9318 | 3,9512 | 3,9703 | 3,9890 | 4,0073 | 4,0254 | 4,0431 | 4,0604 | 4,0775 |
| 60 | 4,0943 | 4,1109 | 4,1271 | 4,1431 | 4,1589 | 4,1744 | 4,1897 | 4,2047 | 4,2195 | 4,2341 |
| 70 | 4,2485 | 4,2627 | 4,2767 | 4,2905 | 4,3041 | 4,3175 | 4,3307 | 4,3438 | 4,3567 | 4,3694 |
| 80 | 4,3820 | 4,3944 | 4,4067 | 4,4188 | 4,4308 | 4,4427 | 4,4543 | 4,4659 | 4,4773 | 4,4886 |
| 90 | 4,4998 | 4,5109 | 4,5218 | 4,5326 | 4,5433 | 4,5539 | 4,5643 | 4,5747 | 4,5850 | 4,5951 |
| 100 | 4,6052 | 4,6151 | 4,6250 | 4,6347 | 4,6444 | 4,6540 | 4,6634 | 4,6728 | 4,6821 | 4,6913 |
| 110 | 4.7005 | 4,7095 | 4,7185 | 4,7274 | 4,7362 | 4,7449 | 4,7536 | 4,7622 | 4,7707 | 4,7791 |
| 120 | 4,7875 | 4,7958 | 4,8040 | 4,8122 | 4,8203 | 4,8283 | 4,8363 | 4,8442 | 4,8520 | 4,8598 |
| 130 | 4,8675 | 4,8752 | 4,8828 | 4,8903 | 4,8978 | 4,9053 | 4,9127 | 4,9200 | 4,9273 | 4,9345 |
| 140 | 4,9416 | 4,9488 | 4,9558 | 4,9628 | 4,9698 | 4,9767 | 4,9836 | 4,9904 | 4,9972 | 5,0039 |
| 150 | 5,0106 | 5,0173 | 5,0239 | 5,0304 | 5,0370 | 5,0434 | 5,0499 | 5,0562 | 5,0626 | 5,0689 |
| 160 | 5,0752 | 5,0814 | 5,0876 | 5,0938 | 5,0999 | 5,1059 | 5,1120 | 5,1180 | 5,1240 | 5,1299 |
| 170 | 5,1358 | 5,1417 | 5,1475 | 5,1533 | 5,1591 | 5,1648 | 5,1705 | 5,1761 | 5,1818 | 5,1874 |
| 180 | 5,1930 | 5,1985 | 5,2040 | 5,2095 | 5,2149 | 5,2204 | 5,2257 | 5,2311 | 5,2364 | 5,2417 |
| 190 | 5,2470 | 5,2523 | 5,2575 | 5,2627 | 5,2679 | 5,2730 | 5,2781 | 5,2832 | 5,2883 | 5,2933 |
| 200 | 5,2983 | 5,3033 | 5,3083 | 5,3132 | 5,3181 | 5,3230 | 5,3279 | 5,3327 | 5,3375 | 5,3423 |
| 210 | 5,3471 | 5,3519 | 5,3566 | 5,3613 | 5,3660 | 5,3706 | 5,3753 | 5,3799 | 5,3845 | 5,3891 |
| 220 | 5,3936 | 5,3982 | 5,4027 | 5,4072 | 5,4116 | 5,4161 | 5,4205 | 5,4250 | 5,4293 | 5,4337 |
| 230 | 5,4381 | 5,4424 | 5,4467 | 5,4510 | 5,4553 | 5,4596 | 5,4638 | 5,4681 | 5,4723 | 5,4765 |
| 240 | 5,4806 | 5,4848 | 5,4889 | 5,4931 | 5,4972 | 5,5013 | 5,5053 | 5,5094 | 5,6134 | 5,5175 |
| 250 | 5,5215 | 5,5255 | 5,5294 | 5,5334 | 5,5373 | 5,5413 | 5,5452 | 5,5491 | 5,5530 | 5,5568 |
| 260 | 5,5607 | 5,5645 | 5,5683 | 5,5722 | 5,5759 | 5,5797 | 5,5835 | 5,5872 | 5,5910 | 5,5947 |
| 270 | 5,5984 | 5,6021 | 5,6058 | 5,6095 | 5,6131 | 5,6168 | 5,6204 | 5,6240 | 5,6276 | 5,6312 |
| 280 | 5,6348 | 5,6384 | 5,6419 | 5,6454 | 5,6490 | 5,6525 | 5,6560 | 5,6595 | 5,6630 | 5,6664 |
| 290 | 5,6699 | 5,6733 | 5,6768 | 5,6802 | 5,6836 | 5,6870 | 5,6904 | 5,6937 | 5,6971 | 5,7004 |
| 300 | 5,7038 | 5,7071 | 5,7104 | 5,7137 | 5,7170 | 5,7203 | 5,7236 | 5,7268 | 5,7301 | 5,7333 |
| 310 | 5,7366 | 5,7398 | 5,7430 | 5,7462 | 5,7494 | 5,7526 | 5,7557 | 5,7589 | 5,7621 | 5,7652 |
| 320 | 5,7683 | 5,7714 | 5,7746 | 5,7777 | 5,7807 | 5,7838 | 5,7869 | 5,7900 | 5,7930 | 5,7961 |
| 330 | 5,7991 | 5,8021 | 5,8051 | 5,8081 | 5,8111 | 5,8141 | 5,8171 | 5,8201 | 5,8230 | 5,8260 |
| 340 | 5,8289 | 5,8319 | 5,8348 | 5,8377 | 5,8406 | 5,8435 | 5,8464 | 5,8493 | 5,8522 | 5,8551 |
| 350 | 5,8579 | 5,8608 | 5,8636 | 5,8665 | 5,8693 | 5,8721 | 5,8749 | 5,8777 | 5,8805 | 5,8833 |
| 360 | 5,8861 | 5,8889 | 5,8916 | 5,8944 | 5,8972 | 5,8999 | 5,9026 | 5,9054 | 5,9081 | 5,9011 |
| 370 | 5,9135 | 5,9162 | 5,9189 | 5,9216 | 5,9243 | 5,9269 | 5,9296 | 5,9322 | 5,9349 | 5,9375 |
| 380 | 5,9402 | 5,9428 | 5,9454 | 5,9480 | 5,9506 | 5,9532 | 5,9558 | 5,9584 | 5,9610 | 5,9636 |
| 390 | 5,9661 | 5,9687 | 5,9713 | 5,9738 | 5,9764 | 5,9789 | 5,9814 | 5,9839 | 5,9865 | 5,9890 |
| 400 | 5,9915 | 5,9940 | 5,9965 | 5,9989 | 6,0014 | 6,0039 | 6,0064 | 6,0088 | 6,0113 | 6,0137 |
| 410 | 6,0162 | 6,0186 | 6,0210 | 6,0234 | 6,0259 | 6,0283 | 6,0307 | 6,0331 | 6,0355 | 6,0379 |
| 420 | 6,0403 | 6,0426 | 6,0450 | 6,0474 | 6,0497 | 6,0521 | 6,0544 | 6,0568 | 6,0591 | 6,0615 |
| 430 | 6,0638 | 6,0661 | 6,0684 | 6,0707 | 6,0730 | 6,0753 | 6,0776 | 6,0799 | 6,0822 | 6,0845 |
| 440 | 6,0868 | 6,0890 | 6,0913 | 6,0936 | 6,0958 | 6,0981 | 6,1003 | 6,1026 | 6,1048 | 6,1070 |
| 450 | 6,1092 | 6,1115 | 6,1137 | 6,1159 | 6,1181 | 6,1203 | 6,1225 | 6,1247 | 6,1269 | 6,1291 |
| 460 | 6,1312 | 6,1334 | 6,1356 | 6,1377 | 6,1399 | 6,1420 | 6,1442 | 6,1463 | 6,1485 | 6,1506 |
| 470 | 6,1527 | 6,1549 | 6,1570 | 6,1591 | 6,1612 | 6,1633 | 6,1654 | 6,1675 | 6,1696 | 6,1717 |
| 480 | 6,1738 | 6,1759 | 6,1779 | 6,1800 | 6,1821 | 6,1841 | 6,1862 | 6,1883 | 6,1903 | 6,1924 |
| 490 | 6,1944 | 6,1964 | 6,1985 | 6,2005 | 6,2025 | 6,2046 | 6,2066 | 6,2086 | 6,2106 | 6,2126 |

## Loomulikud logaritmid.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **500** | 6,2146 | 6,2166 | 6,2186 | 6,2206 | 6,2226 | 6,2246 | 6,2265 | 6,2285 | 6,2305 | 6,2324 |
| 510 | 6,2344 | 6,2364 | 6,2383 | 6,2403 | 6,2422 | 6,2442 | 6,2461 | 6,2480 | 6,2500 | 6,2519 |
| 520 | 6,2538 | 6,2558 | 6,2577 | 6,2596 | 6,2615 | 6,2634 | 6,2653 | 6,2672 | 6,2691 | 6,2710 |
| 530 | 6,2729 | 6,2748 | 6,2766 | 6,2785 | 6,2804 | 6,2823 | 6,2841 | 6,2860 | 6,2879 | 6,2897 |
| 540 | 6,2916 | 6,2934 | 6,2953 | 6,2971 | 6,2989 | 6,3008 | 6,3026 | 6,3044 | 6,3063 | 6,3081 |
| 550 | 6,3099 | 6,3117 | 6,3135 | 6,3154 | 6,3172 | 6,3190 | 6,3208 | 6,3226 | 6,3244 | 6,3261 |
| 560 | 6,3279 | 6,3297 | 6,3315 | 6,3333 | 6,3351 | 6,3368 | 6,3386 | 6,3404 | 6,3421 | 6,3439 |
| 570 | 6,3456 | 6,3474 | 6,3491 | 6,3509 | 6,3526 | 6,3544 | 6,3561 | 6,3578 | 6,3596 | 6,3613 |
| 580 | 6,3630 | 6,3648 | 6,3665 | 6,3682 | 6,3699 | 6,3716 | 6,3733 | 6,3750 | 6,3767 | 6,3784 |
| 590 | 6,3801 | 6,3818 | 6,3835 | 6,3852 | 6,3869 | 6,3886 | 6,3902 | 6,3919 | 6,3936 | 6,3953 |
| **600** | 6,3969 | 6,3986 | 6,4003 | 6,4019 | 6,4036 | 6,4052 | 6,4069 | 6,4085 | 6,4102 | 6,4118 |
| 610 | 6,4135 | 6,4151 | 6,4167 | 6,4184 | 6,4200 | 6,4216 | 6,4232 | 6,4249 | 6,4265 | 6,4281 |
| 620 | 6,4297 | 6,4313 | 6,4329 | 6,4345 | 6,4362 | 6,4378 | 6,4394 | 6,4409 | 6,4425 | 6,4441 |
| 630 | 6,4457 | 6,4473 | 6,4489 | 6,4505 | 6,4520 | 6,4536 | 6,4552 | 6,4568 | 6,4583 | 6,4599 |
| 640 | 6,4615 | 6,4630 | 6,4646 | 6,4661 | 6,4677 | 6,4693 | 6,4708 | 6,4723 | 6,4739 | 6,4754 |
| 650 | 6,4770 | 6,4785 | 6,4800 | 6,4816 | 6,4831 | 6,4846 | 6,4862 | 6,4877 | 6,4892 | 6,4907 |
| 660 | 6,4922 | 6,4938 | 6,4953 | 6,4968 | 6,4983 | 6,4998 | 6,5013 | 6,5028 | 6,5043 | 6,5058 |
| 670 | 6,5073 | 6,5088 | 6,5103 | 6,5117 | 6,5132 | 6,5147 | 6,5162 | 6,5177 | 6,5191 | 6,5206 |
| 680 | 6,5221 | 6,5236 | 6,5250 | 6,5265 | 6,5280 | 6,5294 | 6,5309 | 6,5323 | 6,5338 | 6,5352 |
| 690 | 6,5367 | 6,5381 | 6,5396 | 6,5410 | 6,5425 | 6,5439 | 6,5453 | 6,5468 | 6,5482 | 6,5497 |
| **700** | 6,5511 | 6,5525 | 6,5539 | 6,5554 | 6,5568 | 6,5582 | 6,5596 | 6,5610 | 6,5624 | 6,5639 |
| 710 | 6,5653 | 6,5667 | 6,5681 | 6,5695 | 6,5709 | 6,5723 | 6,5737 | 6,5751 | 6,5765 | 6,5779 |
| 720 | 6,5793 | 6,5806 | 6,5820 | 6,5834 | 6,5848 | 6,5862 | 6,5876 | 6,5889 | 6,5903 | 6,5917 |
| 730 | 6,5930 | 6,5944 | 6,5958 | 6,5971 | 6,5985 | 6,5999 | 6,6012 | 6,6026 | 6,6039 | 6,6053 |
| 740 | 6,6067 | 6,6080 | 6,6093 | 6,6107 | 6,6120 | 6,6134 | 6,6147 | 6,6161 | 6,6174 | 6,6187 |
| 750 | 6,6201 | 6,6214 | 6,6227 | 6,6241 | 6,6254 | 6,6267 | 6,6280 | 6,6294 | 6,6307 | 6,6320 |
| 760 | 6,6333 | 6,6346 | 6,6359 | 6,6373 | 6,6386 | 6,6399 | 6,6412 | 6,6425 | 6,6438 | 6,6451 |
| 770 | 6,6464 | 6,6477 | 6,6490 | 6,6503 | 6,6516 | 6,6529 | 6,6542 | 6,6554 | 6,6567 | 6,6580 |
| 780 | 6,6593 | 6,6606 | 6,6619 | 6,6631 | 6,6644 | 6,6657 | 6,6670 | 6,6682 | 6,6695 | 6,6708 |
| 790 | 6,6720 | 6,6733 | 6,6746 | 6,6758 | 6,6771 | 6,6783 | 6,6796 | 6,6809 | 6,6821 | 6,6834 |
| **800** | 6,6846 | 6,6859 | 6,6871 | 6,6884 | 6,6896 | 6,6908 | 6,6921 | 6,6933 | 6,6946 | 6,6958 |
| 810 | 6,6970 | 6,6983 | 6,6995 | 6,7007 | 6,7020 | 6,7032 | 6,7044 | 6,7056 | 6,7069 | 6,7081 |
| 820 | 6,7093 | 6,7105 | 6,7117 | 6,7130 | 6,7142 | 6,7154 | 6,7166 | 6,7178 | 6,7190 | 6,7202 |
| 830 | 6,7214 | 6,7226 | 6,7238 | 6,7250 | 6,7262 | 6,7274 | 6,7286 | 6,7298 | 6,7310 | 6,7322 |
| 840 | 6,7334 | 6,7346 | 6,7358 | 6,7370 | 6,7382 | 6,7393 | 6,7405 | 6,7417 | 6,7429 | 6,7441 |
| 850 | 6,7452 | 6,7464 | 6,7476 | 6,7488 | 6,7499 | 6,7511 | 6,7523 | 6,7534 | 6,7546 | 6,7558 |
| 860 | 6,7569 | 6,7581 | 6,7593 | 6,7604 | 6,7616 | 6,7627 | 6,7639 | 6,7650 | 6,7662 | 6,7673 |
| 870 | 6,7685 | 6,7696 | 6,7708 | 6,7719 | 6,7731 | 6,7742 | 6,7754 | 6,7765 | 6,7776 | 6,7788 |
| 880 | 6,7799 | 6,7811 | 6,7822 | 6,7833 | 6,7845 | 6,7856 | 6,7867 | 6,7878 | 6,7890 | 6,7901 |
| 890 | 6,7912 | 6,7923 | 6,7935 | 6,7946 | 6,7957 | 6,7968 | 6,7979 | 6,7991 | 6,8002 | 6,8013 |
| **900** | 6,8024 | 6,8035 | 6,8046 | 6,8057 | 6,8068 | 6,8079 | 6,8090 | 6,8101 | 6,8112 | 6,8123 |
| 910 | 6,8134 | 6,8145 | 6,8156 | 6,8167 | 6,8178 | 6,8189 | 6,8200 | 6,8211 | 6,8222 | 6,8233 |
| 920 | 6,8244 | 6,8255 | 6,8265 | 6,8276 | 6,8287 | 6,8298 | 6,8309 | 6,8320 | 6,8330 | 6,8341 |
| 930 | 6,8352 | 6,8363 | 6,8373 | 6,8384 | 6,8395 | 6,8405 | 6,8416 | 6,8427 | 6,8437 | 6,8448 |
| 940 | 6,8459 | 6,8469 | 6,8480 | 6,8491 | 6,8501 | 6,8512 | 6,8522 | 6,8533 | 6,8544 | 6,8554 |
| 950 | 6,8565 | 6,8575 | 6,8586 | 6,8596 | 6,8607 | 6,8617 | 6,8628 | 6,8638 | 6,8648 | 6,8659 |
| 960 | 6,8669 | 6,8680 | 6,8690 | 6,8701 | 6,8711 | 6,8721 | 6,8732 | 6,8742 | 6,8752 | 6,8763 |
| 970 | 6,8773 | 6,8783 | 6,8794 | 6,8804 | 6,8814 | 6,8824 | 6,8835 | 6,8845 | 6,8855 | 6,8865 |
| 980 | 6,8876 | 6,8886 | 6,8896 | 6,8906 | 6,8916 | 6,8926 | 6,8937 | 6,8947 | 6,8957 | 6,8967 |
| 990 | 6,8977 | 6,8987 | 6,8997 | 6,9007 | 6,9017 | 6,9027 | 6,9037 | 6,9047 | 6,9057 | 6,9068 |

| Kraad. | Sinus | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01454 | 0,01745 | 89 |
| 1 | 0,01745 | 0,02036 | 0,02327 | 0,02618 | 0,02908 | 0,03199 | 0,03490 | 88 |
| 2 | 0,03490 | 0,03781 | 0,04071 | 0,04362 | 0,04653 | 0,04943 | 0,05234 | 87 |
| 3 | 0,05234 | 0,05524 | 0,05814 | 0,06105 | 0,06395 | 0,06685 | 0,06976 | 86 |
| 4 | 0,06976 | 0,07266 | 0,07556 | 0,07846 | 0,08136 | 0,08426 | 0,08716 | 85 |
| 5 | 0,08716 | 0,09005 | 0,09295 | 0,09585 | 0,09874 | 0,10164 | 0,10453 | 84 |
| 6 | 0,10453 | 0,10742 | 0,11031 | 0,11320 | 0,11609 | 0,11898 | 0,12187 | 83 |
| 7 | 0,12187 | 0,12476 | 0,12764 | 0,13053 | 0,13341 | 0,13629 | 0,13917 | 82 |
| 8 | 0,13917 | 0,14205 | 0,14493 | 0,14781 | 0,15069 | 0,15356 | 0,15643 | 81 |
| 9 | 0,15643 | 0,15931 | 0,16218 | 0,16505 | 0,16792 | 0,17078 | 0,17365 | 80 |
| 10 | 0,17365 | 0,17651 | 0,17937 | 0,18224 | 0,18509 | 0,18795 | 0,19081 | 79 |
| 11 | 0,19081 | 0,19366 | 0,19652 | 0,19937 | 0,20222 | 0,20507 | 0,20791 | 78 |
| 12 | 0,20791 | 0,21076 | 0,21360 | 0,21644 | 0,21928 | 0,22212 | 0,22495 | 77 |
| 13 | 0,22495 | 0,22778 | 0,23062 | 0,23345 | 0,23627 | 0,23910 | 0,24192 | 76 |
| 14 | 0,24192 | 0,24474 | 0,24756 | 0,25038 | 0,25320 | 0,25601 | 0,25882 | 75 |
| 15 | 0,25882 | 0,26163 | 0,26443 | 0,26724 | 0,27004 | 0,27284 | 0,27564 | 74 |
| 16 | 0,27564 | 0,27843 | 0,28123 | 0,28402 | 0,28680 | 0,28959 | 0,29237 | 73 |
| 17 | 0,29237 | 0,29515 | 0,29793 | 0,30071 | 0,30348 | 0,30625 | 0,30902 | 72 |
| 18 | 0,30902 | 0,31178 | 0,31454 | 0,31730 | 0,32006 | 0,32282 | 0,32557 | 71 |
| 19 | 0,32557 | 0,32832 | 0,33106 | 0,33381 | 0,33655 | 0,33929 | 0,34202 | 70 |
| 20 | 0,34202 | 0,34475 | 0,34748 | 0,35021 | 0,35293 | 0,35565 | 0,35837 | 69 |
| 21 | 0,35837 | 0,36108 | 0,36379 | 0,36650 | 0,36921 | 0,37191 | 0,37461 | 68 |
| 22 | 0,37461 | 0,37730 | 0,37999 | 0,38268 | 0,38537 | 0,38805 | 0,39073 | 67 |
| 23 | 0,39073 | 0,39341 | 0,39608 | 0,39875 | 0,40141 | 0,40408 | 0,40674 | 66 |
| 24 | 0,40674 | 0,40939 | 0,41204 | 0,41469 | 0,41734 | 0,41998 | 0,42262 | 65 |
| 25 | 0,42262 | 0,42525 | 0,42788 | 0,43051 | 0,43313 | 0,43575 | 0,43837 | 64 |
| 26 | 0,43837 | 0,44098 | 0,44359 | 0,44620 | 0,44880 | 0,45140 | 0,45399 | 63 |
| 27 | 0,45399 | 0,45658 | 0,45917 | 0,46175 | 0,46433 | 0.46690 | 0,46947 | 62 |
| 28 | 0,46947 | 0,47204 | 0,47460 | 0,47716 | 0,47971 | 0,48226 | 0,48481 | 61 |
| 29 | 0,48481 | 0,48735 | 0,48989 | 0,49242 | 0,49495 | 0,49748 | 0,50000 | 60 |
| 30 | 0,50000 | 0,50252 | 0,50503 | 0,50754 | 0,51004 | 0,51254 | 0,51504 | 59 |
| 31 | 0,51504 | 0,51753 | 0,52002 | 0,52250 | 0,52498 | 0,52745 | 0,52992 | 58 |
| 32 | 0,52992 | 0,53238 | 0,53484 | 0,53730 | 0,53975 | 0,54220 | 0,54464 | 57 |
| 33 | 0,54464 | 0,54708 | 0,54951 | 0,55194 | 0,55436 | 0,55678 | 0,55919 | 56 |
| 34 | 0,55919 | 0,56160 | 0,56401 | 0,56641 | 0,56880 | 0,57119 | 0,57358 | 55 |
| 35 | 0,57358 | 0,57596 | 0,57833 | 0,58070 | 0,58307 | 0,58543 | 0,58779 | 54 |
| 36 | 0,58779 | 0,59014 | 0,59248 | 0,59482 | 0,59716 | 0,59949 | 0,60182 | 53 |
| 37 | 0,60182 | 0,60414 | 0,60645 | 0,60876 | 0,61107 | 0,61337 | 0,61566 | 52 |
| 38 | 0,61566 | 0,61795 | 0,62024 | 0,62251 | 0,62479 | 0,62706 | 0,62932 | 51 |
| 39 | 0,62932 | 0,63158 | 0,63383 | 0,63608 | 0,63832 | 0,64056 | 0,64279 | 50 |
| 40 | 0,64279 | 0,64501 | 0,64723 | 0,64945 | 0,65166 | 0,65386 | 0,65606 | 49 |
| 41 | 0,65606 | 0,65825 | 0,66044 | 0,66262 | 0,66480 | 0,66697 | 0,66913 | 48 |
| 42 | 0,66913 | 0,67129 | 0,67344 | 0,67559 | 0,67773 | 0,67987 | 0,68200 | 47 |
| 43 | 0,68200 | 0,68412 | 0,68624 | 0,68835 | 0,69046 | 0,69256 | 0,69466 | 46 |
| 44 | 0,69466 | 0,69675 | 0,69883 | 0,70091 | 0,70298 | 0,70505 | 0,70711 | 45 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | Kraad. |
| | Cosinus | | | | | | | |

| Kraad. | Cosinus 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1,00000 | 1,00000 | 0,99998 | 0,99996 | 0,99993 | 0,99989 | 0,99985 | 89 |
| 1 | 0,99985 | 0,99979 | 0,99973 | 0,99966 | 0,99958 | 0,99949 | 0,99939 | 88 |
| 2 | 0,99939 | 0,99929 | 0,99917 | 0,99905 | 0,99892 | 0,99878 | 0,99863 | 87 |
| 3 | 0,99863 | 0,99847 | 0,99831 | 0,99813 | 0,99795 | 0,99776 | 0,99756 | 86 |
| 4 | 0,99756 | 0,99736 | 0,99714 | 0,99692 | 0,99668 | 0,99644 | 0,99619 | 85 |
| 5 | 0,99619 | 0,99594 | 0,99567 | 0,99540 | 0,99511 | 0,99482 | 0,99452 | 84 |
| 6 | 0,99452 | 0,99421 | 0,99390 | 0,99357 | 0,99324 | 0,99290 | 0,99255 | 83 |
| 7 | 0,99255 | 0,99219 | 0,99182 | 0,99144 | 0,99106 | 0,99067 | 0,99027 | 82 |
| 8 | 0,99027 | 0,98986 | 0,98944 | 0,98902 | 0,98858 | 0,98814 | 0,98769 | 81 |
| 9 | 0,98769 | 0,98723 | 0,98676 | 0,98629 | 0,98580 | 0,98531 | 0,98481 | **80** |
| **10** | 0,98481 | 0,98430 | 0,98378 | 0,98325 | 0,98272 | 0,98218 | 0,98163 | 79 |
| 11 | 0,98163 | 0,98107 | 0,98050 | 0,97992 | 0,97934 | 0,97875 | 0,97815 | 78 |
| 12 | 0,97815 | 0,97754 | 0,97692 | 0,97630 | 0,97566 | 0,97502 | 0,97437 | 77 |
| 13 | 0,97437 | 0,97371 | 0,97304 | 0,97237 | 0,97169 | 0,97100 | 0,97030 | 76 |
| 14 | 0,97030 | 0,96959 | 0,96887 | 0,96815 | 0,96742 | 0,96667 | 0,96593 | 75 |
| 15 | 0,96593 | 0,96517 | 0,96440 | 0,96363 | 0,96285 | 0,96206 | 0,96126 | 74 |
| 16 | 0,96126 | 0,96046 | 0,95964 | 0,95882 | 0,95799 | 0,95715 | 0,95630 | 73 |
| 17 | 0,95630 | 0,95545 | 0,95459 | 0,95372 | 0,95284 | 0,95195 | 0,95106 | 72 |
| 18 | 0,95106 | 0,95015 | 0,94924 | 0,94832 | 0,94740 | 0,94646 | 0,94552 | 71 |
| 19 | 0,94552 | 0,94457 | 0,94361 | 0,94264 | 0,94167 | 0,94068 | 0,93969 | **70** |
| **20** | 0,93969 | 0,93869 | 0,93769 | 0,93667 | 0,93565 | 0,93462 | 0,93358 | 69 |
| 21 | 0,93358 | 0,93253 | 0,93148 | 0,93042 | 0,92935 | 0,92827 | 0,92718 | 68 |
| 22 | 0,92718 | 0,92609 | 0,92499 | 0,92388 | 0,92276 | 0,92164 | 0,92050 | 67 |
| 23 | 0,92050 | 0,91936 | 0,91822 | 0,91706 | 0,91590 | 0,91472 | 0,91355 | 66 |
| 24 | 0,91355 | 0,91236 | 0,91116 | 0,90996 | 0,90875 | 0,90753 | 0,90631 | 65 |
| 25 | 0,90631 | 0,90507 | 0,90383 | 0,90259 | 0,90133 | 0,90007 | 0,89879 | 64 |
| 26 | 0,89879 | 0,89752 | 0,89623 | 0,89493 | 0,89363 | 0,89232 | 0,89101 | 63 |
| 27 | 0,89101 | 0,88968 | 0,88835 | 0,88701 | 0,88566 | 0,88431 | 0,88295 | 62 |
| 28 | 0,88295 | 0,88158 | 0,88020 | 0,87882 | 0,87743 | 0,87603 | 0,87462 | 61 |
| 29 | 0,87462 | 0,87321 | 0,87178 | 0,87036 | 0,86892 | 0,86748 | 0,86603 | **60** |
| **30** | 0,86603 | 0,86457 | 0,86310 | 0,86163 | 0,86015 | 0,85866 | 0,85717 | 59 |
| 31 | 0,85717 | 0,85567 | 0,85416 | 0,85264 | 0,85112 | 0,84959 | 0,84805 | 58 |
| 32 | 0,84805 | 0,84650 | 0,84495 | 0,84339 | 0,84182 | 0,84025 | 0,83867 | 57 |
| 33 | 0,83867 | 0,83708 | 0,83549 | 0,83389 | 0,83228 | 0,83066 | 0,82904 | 56 |
| 34 | 0,82904 | 0,82741 | 0,82577 | 0,82413 | 0,82248 | 0,82082 | 0,81915 | 55 |
| 35 | 0,81915 | 0,81748 | 0,81580 | 0,81412 | 0,81242 | 0,81072 | 0,80902 | 54 |
| 36 | 0,80902 | 0,80730 | 0,80558 | 0,80386 | 0,80212 | 0,80038 | 0,79864 | 53 |
| 37 | 0,79864 | 0,79688 | 0,79512 | 0,79335 | 0,79158 | 0,78980 | 0,78801 | 52 |
| 38 | 0,78801 | 0,78622 | 0,78442 | 0,78261 | 0,78079 | 0,77897 | 0,77715 | 51 |
| 39 | 0,77715 | 0,77531 | 0,77347 | 0,77162 | 0,76977 | 0,76791 | 0,76604 | **50** |
| **40** | 0,76604 | 0,76417 | 0,76229 | 0,76041 | 0,75851 | 0,75661 | 0,75471 | 49 |
| 41 | 0,75471 | 0,75280 | 0,75088 | 0,74896 | 0,74703 | 0,74509 | 0,74314 | 48 |
| 42 | 0,74314 | 0,74120 | 0,73924 | 0,73728 | 0,73531 | 0,73333 | 0,73135 | 47 |
| 43 | 0,73135 | 0,72937 | 0,72737 | 0,72537 | 0,72337 | 0,72136 | 0,71934 | 46 |
| 44 | 0,71934 | 0,71732 | 0,71529 | 0,71325 | 0,71121 | 0,70916 | 0,70711 | 45 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | Kraad. |
| | Sinus | | | | | | | |

## Ringi funktsioonid.

| Kraad | Tangens 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01455 | 0,01746 | 89 |
| 1 | 0,01746 | 0,02036 | 0,02328 | 0,02619 | 0,02910 | 0,03201 | 0,03492 | 88 |
| 2 | 0,03492 | 0,03783 | 0,04075 | 0,04366 | 0,04658 | 0,04949 | 0,05241 | 87 |
| 3 | 0,05241 | 0,05533 | 0,05824 | 0,06116 | 0,06408 | 0,06700 | 0,06993 | 86 |
| 4 | 0,06993 | 0,07285 | 0,07578 | 0,07870 | 0,08163 | 0,08456 | 0,08749 | 85 |
| 5 | 0,08749 | 0,09042 | 0,09335 | 0,09629 | 0,09923 | 0,10216 | 0,10510 | 84 |
| 6 | 0,10510 | 0,10805 | 0,11099 | 0,11394 | 0,11688 | 0,11983 | 0,12278 | 83 |
| 7 | 0,12278 | 0,12574 | 0,12869 | 0,13165 | 0,13461 | 0,13758 | 0,14054 | 82 |
| 8 | 0,14054 | 0,14351 | 0,14648 | 0,14945 | 0,15243 | 0,15540 | 0,15838 | 81 |
| 9 | 0,15838 | 0,16137 | 0,16435 | 0,16734 | 0,17033 | 0,17333 | 0,17633 | 80 |
| 10 | 0,17633 | 0,17933 | 0,18233 | 0,18534 | 0,18835 | 0,19136 | 0,19438 | 79 |
| 11 | 0,19438 | 0,19740 | 0,20042 | 0,20345 | 0,20648 | 0,20952 | 0,21256 | 78 |
| 12 | 0,21256 | 0,21560 | 0,21864 | 0,22169 | 0,22475 | 0,22781 | 0,23087 | 77 |
| 13 | 0,23087 | 0,23393 | 0,23700 | 0,24008 | 0,24316 | 0,24624 | 0,24933 | 76 |
| 14 | 0,24933 | 0,25242 | 0,25552 | 0,25862 | 0,26172 | 0,26483 | 0,26795 | 75 |
| 15 | 0,26795 | 0,27107 | 0,27419 | 0,27732 | 0,28046 | 0,28360 | 0,28675 | 74 |
| 16 | 0,28675 | 0,28990 | 0,29305 | 0,29621 | 0,29938 | 0,30255 | 0,30573 | 73 |
| 17 | 0,30573 | 0,30891 | 0,31210 | 0,31530 | 0,31850 | 0,32171 | 0,32492 | 72 |
| 18 | 0,32492 | 0,32814 | 0,33136 | 0,33460 | 0,33783 | 0,34108 | 0,34433 | 71 |
| 19 | 0,34433 | 0,34758 | 0,35085 | 0,35412 | 0,35740 | 0,36068 | 0,36397 | 70 |
| 20 | 0,36397 | 0,36727 | 0,37057 | 0,37388 | 0,37720 | 0,38053 | 0,38386 | 69 |
| 21 | 0,38386 | 0,38721 | 0,39055 | 0,39391 | 0,39727 | 0,40065 | 0,40403 | 68 |
| 22 | 0,40403 | 0,40741 | 0,41081 | 0,41421 | 0,41763 | 0,42105 | 0,42447 | 67 |
| 23 | 0,42447 | 0,42791 | 0,43136 | 0,43481 | 0,43828 | 0,44175 | 0,44523 | 66 |
| 24 | 0,44523 | 0,44872 | 0,45222 | 0,45573 | 0,45924 | 0,46277 | 0,46631 | 65 |
| 25 | 0,46631 | 0,46985 | 0,47341 | 0,47698 | 0,48055 | 0,48414 | 0,48773 | 64 |
| 26 | 0,48773 | 0,49134 | 0,49495 | 0,49858 | 0,50222 | 0,50587 | 0,50953 | 63 |
| 27 | 0,50953 | 0,51319 | 0,51688 | 0,52057 | 0,52427 | 0,52798 | 0,53171 | 62 |
| 28 | 0,53171 | 0,53545 | 0,53920 | 0,54296 | 0,54637 | 0,55051 | 0,55431 | 61 |
| 29 | 0,55431 | 0,55812 | 0,56194 | 0,56577 | 0,56962 | 0,57348 | 0,57735 | 60 |
| 30 | 0,57735 | 0,58124 | 0,58513 | 0,58905 | 0,59297 | 0,59691 | 0,60086 | 59 |
| 31 | 0,60086 | 0,60483 | 0,60881 | 0,61280 | 0,61681 | 0,62083 | 0,62487 | 58 |
| 32 | 0,62487 | 0,62892 | 0,63299 | 0,63707 | 0,64117 | 0,64528 | 0,64941 | 57 |
| 33 | 0,64941 | 0,65355 | 0,65771 | 0,66189 | 0,66608 | 0,67028 | 0,67451 | 56 |
| 34 | 0,67451 | 0,67875 | 0,68301 | 0,68728 | 0,69157 | 0,69588 | 0,70021 | 55 |
| 35 | 0,70021 | 0,70455 | 0,70891 | 0,71329 | 0,71769 | 0,72211 | 0,72654 | 54 |
| 36 | 0,72654 | 0,73100 | 0,73547 | 0,73996 | 0,74447 | 0,74900 | 0,75355 | 53 |
| 37 | 0,75355 | 0,75812 | 0,76272 | 0,76733 | 0,77196 | 0,77661 | 0,78129 | 52 |
| 38 | 0,78129 | 0,78598 | 0,79070 | 0,79544 | 0,80020 | 0,80498 | 0,80978 | 51 |
| 39 | 0,80978 | 0,81461 | 0,81946 | 0,82434 | 0,82923 | 0,83415 | 0,83910 | 50 |
| 40 | 0,83910 | 0,84407 | 0,84906 | 0,85408 | 0,85912 | 0,86419 | 0,86929 | 49 |
| 41 | 0,86929 | 0,87441 | 0,87955 | 0,88473 | 0,88992 | 0,89515 | 0,90040 | 48 |
| 42 | 0,90040 | 0,90569 | 0,91099 | 0,91633 | 0,92170 | 0,92709 | 0,93252 | 47 |
| 43 | 0,93252 | 0,93797 | 0,94345 | 0,94896 | 0,95451 | 0,96008 | 0,96569 | 46 |
| 44 | 0,96569 | 0,97133 | 0,97700 | 0,98270 | 0,98843 | 0,99420 | 1,00000 | 45 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | Kraad |
| | Cotangens | | | | | | | |

| Kraad | Cotangens 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | 343,77371 | 171,88540 | 114,58865 | 85,93979 | 68,75009 | 57,28996 | 89 |
| 1 | 57,28996 | 49,10388 | 42,96408 | 38,18846 | 34,36777 | 31,24158 | 28,63625 | 88 |
| 2 | 28,63625 | 26,43160 | 24,54176 | 22,90377 | 21,47040 | 20,20555 | 19,08114 | 87 |
| 3 | 19,08114 | 18,07498 | 17,16934 | 16,34986 | 15,60478 | 14,92442 | 14,30067 | 86 |
| 4 | 14,30067 | 13,72674 | 13,19688 | 12,70621 | 12,25051 | 11,82617 | 11,43005 | 85 |
| 5 | 11,43005 | 11,05943 | 10,71191 | 10,38540 | 10,07803 | 9,78817 | 9,51436 | 84 |
| 6 | 9,51436 | 9,25530 | 9,00983 | 8,77689 | 8,55555 | 8,34496 | 8,14435 | 83 |
| 7 | 8,14435 | 7,95302 | 7,77035 | 7,59575 | 7,42871 | 7,26873 | 7,11537 | 82 |
| 8 | 7,11537 | 6,96823 | 6,82694 | 6,69116 | 6,56055 | 6,43484 | 6,31375 | 81 |
| 9 | 6,31375 | 6,19703 | 6,08444 | 5,97576 | 5,87080 | 5,76937 | 5,67128 | 80 |
| 10 | 5,67128 | 5,57638 | 5,48451 | 5,39552 | 5,30928 | 5,22566 | 5,14455 | 79 |
| 11 | 5,14455 | 5,06584 | 4,98940 | 4,91516 | 4,84300 | 4,77286 | 4,70463 | 78 |
| 12 | 4,70463 | 4,63825 | 4,57363 | 4,51071 | 4,44942 | 4,38969 | 4,33148 | 77 |
| 13 | 4,33148 | 4,27471 | 4,21933 | 4,16530 | 4,11256 | 4,06107 | 4,01078 | 76 |
| 14 | 4,01078 | 3,96165 | 3,91364 | 3,86671 | 3,82083 | 3,77595 | 3,73205 | 75 |
| 15 | 3,73205 | 3,68909 | 3,64705 | 3,60588 | 3,56557 | 3,52609 | 3,48741 | 74 |
| 16 | 3,48741 | 3,44951 | 3,41236 | 3,37594 | 3,34023 | 3,30521 | 3,27085 | 73 |
| 17 | 3,27085 | 3,23714 | 3,20406 | 3,17159 | 3,13972 | 3,10842 | 3,07768 | 72 |
| 18 | 3,07768 | 3,04749 | 3,01783 | 2,98869 | 2,96004 | 2,93189 | 2,90421 | 71 |
| 19 | 2,90421 | 2,87700 | 2,85023 | 2,82391 | 2,79802 | 2,77254 | 2,74748 | 70 |
| 20 | 2,74748 | 2,72281 | 2,69853 | 2,67462 | 2,65109 | 2,62791 | 2,60509 | 69 |
| 21 | 2,60509 | 2,58261 | 2,56046 | 2,53865 | 2,51715 | 2,49597 | 2,47509 | 68 |
| 22 | 2,47509 | 2,45451 | 2,43422 | 2,41421 | 2,39449 | 2,37504 | 2,35585 | 67 |
| 23 | 2,35585 | 2,33693 | 2,31826 | 2,29984 | 2,28167 | 2,26374 | 2,24604 | 66 |
| 24 | 2,24604 | 2,22857 | 2,21132 | 2,19430 | 2,17749 | 2,16090 | 2,14451 | 65 |
| 25 | 2,14451 | 2,12832 | 2,11233 | 2,09654 | 2,08094 | 2,06553 | 2,05030 | 64 |
| 26 | 2,05030 | 2,03526 | 2,02039 | 2,00569 | 1,99116 | 1,97680 | 1,96261 | 63 |
| 27 | 1,96261 | 1,94858 | 1,93470 | 1,92098 | 1,90741 | 1,89400 | 1,88073 | 62 |
| 28 | 1,88073 | 1,86760 | 1,85462 | 1,84177 | 1,82906 | 1,81649 | 1,80405 | 61 |
| 29 | 1,80405 | 1,79174 | 1,77955 | 1,76749 | 1,75556 | 1,74375 | 1,73205 | 60 |
| 30 | 1,73205 | 1,72047 | 1,70901 | 1,69766 | 1,68643 | 1,67530 | 1,66428 | 59 |
| 31 | 1,66428 | 1,65337 | 1,64256 | 1,63185 | 1,92125 | 1,61074 | 1,60033 | 58 |
| 32 | 1,60033 | 1,59002 | 1,57981 | 1,56969 | 1,55966 | 1,54972 | 1,53987 | 57 |
| 33 | 1,53987 | 1,53010 | 1,52043 | 1,51084 | 1,50133 | 1,49190 | 1,48256 | 56 |
| 34 | 1,48256 | 1,47330 | 1,46411 | 1,45501 | 1,44598 | 1,43703 | 1,42815 | 55 |
| 35 | 1,42815 | 1,41934 | 1,41061 | 1,40195 | 1,39336 | 1,38484 | 1,37638 | 54 |
| 36 | 1,37638 | 1,36800 | 1,35968 | 1,35142 | 1,34323 | 1,33511 | 1,32704 | 53 |
| 37 | 1,32704 | 1,31904 | 1,31110 | 1,30323 | 1,29541 | 1,28764 | 1,27994 | 52 |
| 38 | 1,27994 | 1,27230 | 1,26471 | 1,25717 | 1,24969 | 1,24227 | 1,23490 | 51 |
| 39 | 1,23490 | 1,22758 | 1,22031 | 1,21310 | 1,20593 | 1,19882 | 1,19175 | 50 |
| 40 | 1,19175 | 1,18474 | 1,17777 | 1,17085 | 1,16398 | 1,15715 | 1,15037 | 49 |
| 41 | 1,15037 | 1,14363 | 1,13694 | 1,13029 | 1,12369 | 1,11713 | 1,11061 | 48 |
| 42 | 1,11061 | 1,10414 | 1,09770 | 1,09131 | 1,08496 | 1,07864 | 1,07237 | 47 |
| 43 | 1,07237 | 1,06613 | 1,05994 | 1,05378 | 1,04766 | 1,04158 | 1,03553 | 46 |
| 44 | 1,03553 | 1,02952 | 1,02355 | 1,01761 | 1,01170 | 1,00583 | 1,00000 | 45 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | Kraad |
| | Tangens | | | | | | | |

Ringi osade arvamise tabel poolmõõdule r = 1.

| Tsentri nurk. | Kaare pikkus. | Kaare kõrgus. | Sidejoone pik. | Segmendi pind. | Tsentri nurk. | Kaare pikkus | Kaare kõrgus. | Sidejoone pik. | Segmendi pind. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0175 | 0,0000 | 0,0175 | 0,00000 | 46 | 0,8029 | 0,0795 | 0,7815 | 0,04176 |
| 2 | 0,0349 | 0,0002 | 0,0349 | 0,00000 | 47 | 0,8203 | 0,0829 | 0,7975 | 0,04448 |
| 3 | 0,0524 | 0,0003 | 0,0524 | 0,00001 | 48 | 0,8378 | 0,0865 | 0,8135 | 0,04731 |
| 4 | 0,0698 | 0,0006 | 0,0698 | 0,00003 | 49 | 0,8552 | 0,0900 | 0,8294 | 0,05025 |
| 5 | 0,0873 | 0,0010 | 0,0872 | 0,00006 | 50 | 0,8727 | 0,0937 | 0,8452 | 0,05331 |
| 6 | 0,1047 | 0,0014 | 0,1047 | 0,00010 | 51 | 0,8901 | 0,0974 | 0,8610 | 0,05649 |
| 7 | 0,1222 | 0,0019 | 0,1221 | 0,00015 | 52 | 0,9076 | 0,1012 | 0,8767 | 0,05978 |
| 8 | 0,1396 | 0,0024 | 0,1395 | 0,00023 | 53 | 0,9250 | 0,1051 | 0,8924 | 0,06319 |
| 9 | 0,1571 | 0,0031 | 0,1569 | 0,00032 | 54 | 0,9425 | 0,1090 | 0,9080 | 0,06673 |
| 10 | 0,1745 | 0,0038 | 0,1743 | 0,00044 | 55 | 0,9599 | 0,1130 | 0,9235 | 0,07039 |
| 11 | 0,1920 | 0,0046 | 0,1917 | 0,00059 | 56 | 0,9774 | 0,1171 | 0,9389 | 0,07417 |
| 12 | 0,2094 | 0,0055 | 0,2091 | 0,00076 | 57 | 0,9948 | 0,1212 | 0,9543 | 0,07808 |
| 13 | 0,2269 | 0,0064 | 0,2264 | 0,00097 | 58 | 1,0123 | 0,1254 | 0,9696 | 0,08212 |
| 14 | 0,2443 | 0,0075 | 0,2437 | 0,00121 | 59 | 1,0297 | 0,1296 | 0,9848 | 0,08629 |
| 15 | 0,2618 | 0,0086 | 0,2611 | 0,00149 | 60 | 1,0472 | 0,1340 | 1,0000 | 0,09059 |
| 16 | 0,2793 | 0,0097 | 0,2783 | 0,00181 | 61 | 1,0647 | 0,1384 | 1,0151 | 0,09502 |
| 17 | 0,2967 | 0,0110 | 0,2956 | 0,00217 | 62 | 1,0821 | 0,1428 | 1,0301 | 0,09958 |
| 18 | 0,3142 | 0,0123 | 0,3129 | 0,00257 | 63 | 1,0996 | 0,1474 | 1,0450 | 0,10428 |
| 19 | 0,3316 | 0,0137 | 0,3301 | 0,00302 | 64 | 1,1170 | 0,1520 | 1,0598 | 0,10911 |
| 20 | 0,3491 | 0,0152 | 0,3473 | 0,00352 | 65 | 1,1345 | 0,1566 | 1,0746 | 0,11408 |
| 21 | 0,3665 | 0,0167 | 0,3645 | 0,00408 | 66 | 1,1519 | 0,1613 | 1,0893 | 0,11919 |
| 22 | 0,3840 | 0,0184 | 0,3816 | 0,00468 | 67 | 1,1694 | 0,1661 | 1,1039 | 0,12443 |
| 23 | 0,4014 | 0,0201 | 0,3987 | 0,00535 | 68 | 1,1868 | 0,1710 | 1,1184 | 0,12982 |
| 24 | 0,4189 | 0,0219 | 0,4158 | 0,00607 | 69 | 1,2043 | 0,1759 | 1,1328 | 0,13535 |
| 25 | 0,4363 | 0,0237 | 0,4329 | 0,00686 | 70 | 1,2217 | 0,1808 | 1,1472 | 0,14102 |
| 26 | 0,4538 | 0,0256 | 0,4499 | 0,00771 | 71 | 1,2392 | 0,1859 | 1,1614 | 0,14683 |
| 27 | 0,4712 | 0,0276 | 0,4669 | 0,00862 | 72 | 1,2566 | 0,1910 | 1,1756 | 0,15279 |
| 28 | 0,4887 | 0,0297 | 0,4838 | 0,00961 | 73 | 1,2741 | 0,1961 | 1,1896 | 0,15889 |
| 29 | 0,5061 | 0,0319 | 0,5008 | 0,01067 | 74 | 1,2915 | 0,2014 | 1,2036 | 0,16514 |
| 30 | 0,5236 | 0,0341 | 0,5176 | 0,01180 | 75 | 1,3090 | 0,2066 | 1,2175 | 0,17154 |
| 31 | 0,5411 | 0,0364 | 0,5345 | 0,01301 | 76 | 1,3265 | 0,2120 | 1,2313 | 0,17808 |
| 32 | 0,5585 | 0,0387 | 0,5512 | 0,01429 | 77 | 1,3439 | 0,2174 | 1,2450 | 0,18477 |
| 33 | 0,5760 | 0,0412 | 0,5680 | 0,01566 | 78 | 1,3614 | 0,2229 | 1,2586 | 0,19160 |
| 34 | 0,5934 | 0,0437 | 0,5847 | 0,01711 | 79 | 1,3788 | 0,2284 | 1,2722 | 0,19859 |
| 35 | 0,6109 | 0,0463 | 0,6014 | 0,01864 | 80 | 1,3963 | 0,2340 | 1,2856 | 0,20573 |
| 36 | 0,6283 | 0,0489 | 0,6180 | 0,02027 | 81 | 1,4137 | 0,2396 | 1,2989 | 0,21301 |
| 37 | 0,6458 | 0,0517 | 0,6346 | 0,02198 | 82 | 1,4312 | 0,2453 | 1,3121 | 0,22045 |
| 38 | 0,6632 | 0,0545 | 0,6511 | 0,02378 | 83 | 1,4486 | 0,2510 | 1,3252 | 0,22804 |
| 39 | 0,6807 | 0,0574 | 0,6676 | 0,02568 | 84 | 1,4661 | 0,2569 | 1,3383 | 0,23578 |
| 40 | 0,6981 | 0,0603 | 0,6840 | 0,02767 | 85 | 1,4835 | 0,2627 | 1,3512 | 0,24367 |
| 41 | 0,7156 | 0,0633 | 0,7004 | 0,02976 | 86 | 1,5010 | 0,2686 | 1,3640 | 0,25171 |
| 42 | 0,7330 | 0,0664 | 0,7167 | 0,03195 | 87 | 1,5184 | 0,2746 | 1,3767 | 0,25990 |
| 43 | 0,7505 | 0,0696 | 0,7330 | 0,03425 | 88 | 1,5359 | 0,2807 | 1,3893 | 0,26825 |
| 44 | 0,7679 | 0,0728 | 0,7492 | 0,03664 | 89 | 1,5533 | 0,2867 | 1,4018 | 0,27675 |
| 45 | 0,7854 | 0,0761 | 0,7654 | 0,03915 | 90 | 1,5708 | 0,2929 | 1,4142 | 0,28540 |

Ringi osade arvamise tabel poolmõõdule r=1.

| Tsentri-nurk. | Kaare pikkus. | Kaare kõrgus. | Sidejoone pik. | Segmendi pind. | Tsentri-nurk. | Kaare pikkus. | Kaare kõrgus. | Sidejoone pik. | Segmendi pind. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 91 | 1,5882 | 0,2991 | 1,4265 | 0,29420 | 136 | 2,3736 | 0,6254 | 1,8544 | 0,83949 |
| 92 | 1,6057 | 0,3053 | 1,4387 | 0,30316 | 137 | 2,3911 | 0,6335 | 1,8608 | 0,85455 |
| 93 | 1,6232 | 0,3116 | 1,4507 | 0,31226 | 138 | 2,4086 | 0,6416 | 1,8672 | 0,86971 |
| 94 | 1,6406 | 0,3180 | 1,4627 | 0,32152 | 139 | 2,4260 | 0,6498 | 1,8733 | 0,88497 |
| 95 | 1,6580 | 0,3244 | 1,4746 | 0,33093 | 140 | 2,4435 | 0,6580 | 1,8794 | 0,90034 |
| 96 | 1,6755 | 0,3309 | 1,4863 | 0,34050 | 141 | 2,4609 | 0,6662 | 1,8853 | 0,91580 |
| 97 | 1,6930 | 0,3374 | 1,4979 | 0,35021 | 142 | 2,4784 | 0,6744 | 1,8910 | 0,93135 |
| 98 | 1,7104 | 0,3439 | 1,5094 | 0,36008 | 143 | 2,4958 | 0,6827 | 1,8966 | 0,94700 |
| 99 | 1,7279 | 0,3506 | 1,5208 | 0,37009 | 144 | 2,5133 | 0,6910 | 1,9021 | 0,96274 |
| 100 | 1,7453 | 0,3572 | 1,5321 | 0,38026 | 145 | 2,5307 | 0,6993 | 1,9074 | 0,97858 |
| 101 | 1,7628 | 0,3639 | 1,5432 | 0,39058 | 146 | 2,5482 | 0,7076 | 1,9126 | 0,99449 |
| 102 | 1,7802 | 0,3707 | 1,5543 | 0,40104 | 147 | 2,5656 | 0,7160 | 1,9176 | 1,01050 |
| 103 | 1,7977 | 0,3775 | 1,5652 | 0,41166 | 148 | 2,5831 | 0,7244 | 1,9225 | 1,02658 |
| 104 | 1,8151 | 0,3843 | 1,5760 | 0,42242 | 149 | 2,6005 | 0,7328 | 1,9273 | 1,04275 |
| 105 | 1,8326 | 0,3912 | 1,5867 | 0,43333 | 150 | 2,6180 | 0,7412 | 1,9319 | 1,05900 |
| 106 | 1,8500 | 0,3982 | 1,5973 | 0,44439 | 151 | 2,6354 | 0,7496 | 1,9363 | 1,07532 |
| 107 | 1,8675 | 0,4052 | 1,6077 | 0,45560 | 152 | 2,6529 | 0,7581 | 1,9406 | 1,09171 |
| 108 | 1,8850 | 0,4122 | 1,6180 | 0,46695 | 153 | 2,6704 | 0,7666 | 1,9447 | 1,10818 |
| 109 | 1,9024 | 0,4193 | 1,6282 | 0,47844 | 154 | 2,6878 | 0,7750 | 1,9487 | 1,12472 |
| 110 | 1,9199 | 0,4264 | 1,6383 | 0,49008 | 155 | 2,7053 | 0,7836 | 1,9526 | 1,14132 |
| 111 | 1,9373 | 0,4336 | 1,6483 | 0,50187 | 156 | 2,7227 | 0,7921 | 1,9563 | 1,15799 |
| 112 | 1,9548 | 0,4408 | 1,6581 | 0,51379 | 157 | 2,7402 | 0,8006 | 1,9598 | 1,17472 |
| 113 | 1,9722 | 0,4481 | 1,6678 | 0,52586 | 158 | 2,7576 | 0,8092 | 1,9633 | 1,19151 |
| 114 | 1,9897 | 0,4554 | 1,6773 | 0,53807 | 159 | 2,7751 | 0,8178 | 1,9665 | 1,20835 |
| 115 | 2,0071 | 0,4627 | 1,6868 | 0,55041 | 160 | 2,7925 | 0,8264 | 1,9696 | 1,22525 |
| 116 | 2,0246 | 0,4701 | 1,6961 | 0,56289 | 161 | 2,8100 | 0,8350 | 1,9726 | 1,24221 |
| 117 | 2,0420 | 0,4775 | 1,7053 | 0,57551 | 162 | 2,8274 | 0,8436 | 1,9754 | 1,25921 |
| 118 | 2,0595 | 0,4850 | 1,7143 | 0,58827 | 163 | 2,8449 | 0,8522 | 1,9780 | 1,27626 |
| 119 | 2,0769 | 0,4925 | 1,7233 | 0,60116 | 164 | 2,8623 | 0,8608 | 1,9805 | 1,29335 |
| 120 | 2,0944 | 0,5000 | 1,7321 | 0,61418 | 165 | 2,8798 | 0,8695 | 1,9829 | 1,31049 |
| 121 | 2,1118 | 0,5076 | 1,7407 | 0,62734 | 166 | 2,8972 | 0,8781 | 1,9851 | 1,32766 |
| 122 | 2,1293 | 0,5152 | 1,7492 | 0,64063 | 167 | 2,9147 | 0,8868 | 1,9871 | 1,34487 |
| 123 | 2,1468 | 0,5228 | 1,7576 | 0,65404 | 168 | 2,9322 | 0,8955 | 1,9890 | 1,36212 |
| 124 | 2,1642 | 0,5305 | 1,7659 | 0,66759 | 169 | 2,9496 | 0,9042 | 1,9908 | 1,37940 |
| 125 | 2,1817 | 0,5383 | 1,7740 | 0,68125 | 170 | 2,9671 | 0,9128 | 1,9924 | 1,39671 |
| 126 | 2,1991 | 0,5460 | 1,7820 | 0,69505 | 171 | 2,9845 | 0,9215 | 1,9938 | 1,41404 |
| 127 | 2,2166 | 0,5538 | 1,7899 | 0,70897 | 172 | 3,0020 | 0,9302 | 1,9951 | 1,43140 |
| 128 | 2,2340 | 0,5616 | 1,7976 | 0,72301 | 173 | 3,0194 | 0,9390 | 1,9963 | 1,44878 |
| 129 | 2,2515 | 0,5695 | 1,8052 | 0,73716 | 174 | 3,0369 | 0,9477 | 1,9973 | 1,46617 |
| 130 | 2,2689 | 0,5774 | 1,8126 | 0,75144 | 175 | 3,0543 | 0,9564 | 1,9981 | 1,48359 |
| 131 | 2,2864 | 0,5853 | 1,8199 | 0,76584 | 176 | 3,0718 | 0,9651 | 1,9988 | 1,50101 |
| 132 | 2,3038 | 0,5933 | 1,8271 | 0,78034 | 177 | 3,0892 | 0,9738 | 1,9993 | 1,51845 |
| 133 | 2,3213 | 0,6013 | 1,8341 | 0,79497 | 178 | 3,1067 | 0,9825 | 1,9997 | 1,53589 |
| 134 | 2,3387 | 0,6093 | 1,8410 | 0,80970 | 179 | 3,1241 | 0,9913 | 1,9999 | 1,55334 |
| 135 | 2,3562 | 0,6173 | 1,8478 | 0,82454 | 180 | 3,1416 | 1,0000 | 2,0000 | 1,57080 |

# I. Aritmeetika ja algebra.

## A. Astmed ja juured.

1. $(+a)^n = +a^n$.
2. $(-a)^n = +a^n$, kui $n$ on paarisarv ($n = 2k$).
   $(-a)^n = -a^n$, kui $n$ on paarituarv ($n = 2k+1$).
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
4. $a^m : a^n = a^{m-n}$.
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.
6. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$.
7. $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.
8. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$.
9. $a^0 = 1$; $0^n = 0$; $0^0 =$ määramatus.
10. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
11. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
12. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.
13. Kui $a > 0$ ja $n = \infty$, siis $\lim a^n = \infty$ ja $\lim \frac{1}{a^n} = 0$.
14. $(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots$

    Kui $n$ on positiivne täisarv, siis on rida lõpulik ja tema viimane liige $(\pm 1)^n b^n$, üleüldse $n+1$

liiget. Kui $n$ on negatiivne täisarv või ükskõik missugune murdarv, siis on rida lõputu ning selle juures koonduv, kui $a > b$.

$$\left.\begin{aligned}
&15.\ (1 \pm x)^n = 1 + nx \pm \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 \pm \ldots \\
&16.\ \frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + \ldots \\
&17.\ \sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\,.\,4}x^2 \pm \\
&\qquad \pm \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}x^3 - \ldots \\
&18.\ \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^2 \mp \\
&\qquad \mp \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^3 + \ldots
\end{aligned}\right\} \text{koonduvad kui } -1 < x < 1.$$

19. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

20. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

21. $\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \,.\, \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$

22. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}.$

23. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$

24. $\sqrt{9} = \pm 3;\ \sqrt{-9} = 3\,.\sqrt{-1} = 3i.$

25. $\sqrt[3]{8} = 2;\ \sqrt[3]{-8} = -2.$

26. $\sqrt{349}$ (täpsus 0,1) = ? $\sqrt{50{,}123}$ (täpsus 0.01) = ?

```
√3'49 = 18,6 või 18.7          √ 50,12'30 = 70,8
—1      (18,7 on lähem)          —49
 28 |   24'9                   140 | 112
× 8 |  —22 4                  1408 | 11230
366 |  2 5,0'0                × 8  |—11264
× 6 |—2 1,9 6                      |  —34
       3,04

ehk 367 | 2500
    × 7 | 2569
        |  —69
```

27. $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$

28. $\sqrt{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2}$

ligikaudselt, kui $b$ on väike $a$-ga võrreldes.

29. $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}960\ a + 0{,}398\ b$ ligikaudselt, kui $a > b$ (viga on väiksem, kui 4% tõelikust tähendusest).

30. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0{,}939\ a + 0{,}389\ b + 0{,}297$ ligikaudselt, kui $a > b > c$ (viga on väiksem, kui 6% tõelikust tähendusest).

31. Imaginaar suurused: $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = i$; $i^{10} = i^{2.4+2} = i^{8+2} = i^2 = -1$; $\frac{1}{i} = -i$.

32. Komplekssuurused: Kui $a + bi = 0$, siis $a = 0$, $b = 0$; kui $a + bi = c + di$, siis $a = c$, $b = d$; $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

33. Komplekssuuruse normaalkuju: $a \pm bi = r$ $[\cos(\varphi \pm 2\ k\pi) \pm i \sin(\varphi + 2\ k\pi)]$, kus $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$ on moodul, $\varphi = \operatorname{arctang} \frac{b}{a}$ argument ja $k$ täisarv $> o$.

34. Moivre lause: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, maksev igasuguse $n$ juures, seega:

$$\sqrt[n]{\cos x + i \sin x} = \cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n}.$$

35. $$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$
$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$
$k$ on positiivne täisarv $0$ ja $n-1$ vahel (äärväärtused $0$ ja $n-1$ ühes arvatud).

## B. Logaritmid.

1. Kui $a^n = c$, siis $n$ on $c$ logaritmus alusel $a$. Aluse enese logaritm on 1, sest $a^1 = a$. 1 logaritm igal alusel on 0, sest $a^0 = 1$.

Igal alusel on maksvad võrdused:

$$\text{Log}\,(bc) = \text{Log}\, b + \text{Log}\, c;$$
$$\text{Log}\left(\frac{b}{c}\right) = \text{Log}\, b - \text{Log}\, c;$$
$$\text{Log}\,(b^m) = m\, \text{Log}\, b; \quad \text{Log}\sqrt[m]{b} = \frac{1}{m}\,\text{Log}\, b.$$

3. Aluseks võetakse harilikult kas arv 10 — kümnend — ehk Briggi logaritmid (Log 1000 = 3 ehk lühemalt log 1000 = lg 1000 = 3) — või mõõdutu arv $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459$ — naturaallogaritmid $n = \infty$ ehk Napier'i logaritmid ($\text{Log}_e b = c$ ehk lühemalt $\lg n\, b = c$).

4. Arvu logaritm sisaldab, üldiselt võttes, täis- ja murdarvulise osa, esimene on logaritmi karakteristik, teine mantiss.

lg 10 = 1; lg 100 = 2, lg 1000 = 3 jne.

lg 0,1 = —1; lg 0,01 = —2; lg 0,001 = —3 jne.

lg 2 karakteristik on 0, lg 3452 karakt. on 4 — 1 = 3, lg 524,72 karakt. on 3 — 1 = 2 jne., üleüldse karakteristik on ühe võrra vähem, kui kohtade arv logaritmitava arvu täisosas — sellel puhul, kui arv $> 1$.

lg 0,1 $= -1 = \bar{1}$, lg 0,035 karakt. on $-2$, lg 0,000524 karakt. on $-4 = \bar{4}$; üleüldse lihtmurru (ühest väiksem) karakteristik sisaldab negatiivseid ühtesi sama palju, kui arvu pahemal äärel on nullisi, täisosa kohal seisev null ühes arvatud — mantiss (kui ta üleüldse on) on selle juures positiivne.

Mantissi leiame mõlemil korral tabelist.

5. Komma edasikandmise tagajärjel muutub vastava arvu logaritmil ainult karakteristik (lg 1925 kar. = 3, lg 19,25 kar. = 1, lg 19250 kar. = 4 jne.), kuna mantiss endiseks jääb.

6. Ülemineku vormel naturaal süsteemist kümnendsüsteemi, sama ka ümberpöördult:

$$\lg x = \lg e \operatorname{lgn} x = 0{,}434294482 \operatorname{lgn} x;$$

$$\operatorname{lgn} x = \operatorname{lgn} 10 . \lg x = 2{,}3025850930 \lg x;$$

$$\operatorname{lgn} 10 . \lg e = 1.$$

7. Teades antud arvu logaritmi ühes süsteemis, võib leida selle arvu logaritm mõnes muus süsteemis. Leiame $\operatorname{Log}_{12} 1000 = x$; $\operatorname{Log}_{10} 1000 = 3$; $\operatorname{Log}_{12} 1000 = x$; $10^3 = 1000$; $12^x = 1000$; $10^3 = 12^x$; $3 \log 10 = x \log 12$; $\log 10 = 1$; $3 = x \log 12$; $x = \frac{3}{\log 12} = \frac{3}{1{,}0792}$

## C. Determinandid.

1. Teise järjekorra determinant.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

2. Kolmanda järjekorra determinant.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

3. Neljanda järjekorra determinant.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Üleüldse, koeffitsiendina võetud elemendile vastava minoori, s. o. alama järjekorra determinandi saame, kui elemendile vastava tulba ja rea läbi tõmbame.

4. Determinandi tähenduse lihtsama ja kiirema leidmise otstarbel võib, enne selle lahutamist alama järjekorra determinantideks (minoorideks), mõne tulba (või rea) elementidele juure anda mõne teise tulba (või rea) elemendid, korratud alalise s. o. ühesuguse kõigi selle tulba (või rea) elementide tarvis teguriga (positiivne vôi negatiivne).

Tegur tuleb aga nii valida, et juurearvamisel võimalikult rohkem elemente nulliks muutuks.

Näitus:

$$\begin{array}{ccc} + & & \cdot -2 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 4, & 1, & 2 \\ -2, & -5, & -1 \\ 3, & -1, & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 2 \\ 0, & -5, & -1 \\ -11, & -1, & 7 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \begin{vmatrix} -5, & -1 \\ -1, & 7 \end{vmatrix}}_{0} - \underbrace{0 \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ -1, & 7 \end{vmatrix}}_{0}$$

$$-11 \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ -5, & -1 \end{vmatrix} = 11\,[1\,.\,(-1) - 2\,.\,(-5)] = 11\ (-1+10) =$$

$$11\,.\,9 = 99.$$

5. Determinandi võib lahutada minoorideks, mitte ainult esimese tulba või rea elemente koeffitsientideks võttes, vaid ükskõik missuguse tulba või rea elementide järgi, pannes vastava koeffitsiendi ette märgi $+$, kui elemendile, s. o. koeffitsiendile vastavate tulba ja

rea järjekorda näitavate arvude summa on paarisarv, märk —, kui nimetatud summa on paaritu arv; näit. on koeffitsient võetud II. tulbast ja III. reast, siis 2+3=5 = paaritu arv, märk —.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_2 M_1 + (-1)^{2+2} b_2 M_2 + (-1)^{3+2} c_2 M_3 = -a_2 M_1 + b_2 M_2 - c_2 M_3.$$

6. Determinandi tähendus ei muutu, kui tulbad teeme ridadeks ja read tulpadeks:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. Kui determinandis kaks rida või tulpa üksteisega vahetada, muutub determinandi märk.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 33 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2, & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

8. Kui determinandis on kahel tulbal või real vastavad elemendid isekeskis võrdsed või proportsionaalsed, siis on determinandi tähendus 0.

$$\begin{vmatrix} 2, & 4, & 2 \\ -5, & -1, & -5 \\ 3, & 5, & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3, & -4, & 2 \\ -6, & 8, & -4 \\ 1, & -3, & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Kui determinandi mõne rea või tulba elementidel on ühine tegur, siis vôib selle tuua determinandi märgi ette.

$$\begin{vmatrix} 2, & 4, & 1 \\ -1, & -12, & -2 \\ 5, & 8, & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2, & 1, & 1 \\ -1, & -3, & -2 \\ 5, & 2, & 3 \end{vmatrix}$$

## D. Võrrandid.

### *I. astme võrrandid.*

1. *I. astme võrrand ühe tundmatuga.*

$$ax + b = cx + d;\ ax - cx = d - b;\ (a - c)x = d - b;\ x = \frac{d - b}{a - c}.$$

2. Kahe *I. astme võrrandi süsteem kahe tundmatuga*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1\ b_2 - c_2\ b_1}{a_1\ b_2 - a_2\ a_1} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1\ c_2 - a_2\ c_1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \end{aligned}$$

3. *Kaks ühismõõtelist (homogeen) võrrandit kolme tundmatuga.*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}\right\} x : y : z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

4. *Kolme I. astme võrrandi süsteem kolme tundmatuga.*

$$\left.\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z &= d_3 \end{aligned}\right\} x = \frac{D_x}{D};\ y = \frac{D_y}{D};\ z = \frac{D_z}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\ D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};\ D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b^3 & d_3 \end{vmatrix}$$

5. a) Kui $D \ddagger 0$ ja $D_x = 0$, siis $x = 0$,
„ „ „ $D_y = 0$, „ $y = 0$ jne.

b) Kui $D = 0$ ja $D_x \ddagger 0$, siis $x = \infty$; niisugusel korral on ka $y = \infty$, $z = \infty$, sest järeldusena eelmisest $D_y \ddagger 0$, $D_z \ddagger 0$, kuna $D = 0$.

c) Kui $D = 0$ ja $D_x = 0$, siis $x = \frac{0}{0} =$ määramatus s. o. $x$-i tähenduseks vôib olla igasugune arv; niisugusel korral on ka $y = \frac{0}{0}$, $z = \frac{0}{0}$, sest järeldusena eelmisest $D_y = 0$, $D_v = 0$.

6. *Kolme ühismõõtelise võrrandi süsteem kolme tundmatuga.*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Kui } D \ddagger 0, \text{ siis } x = y = z = 0. \\ \text{Kui } D = 0, \text{ siis } x = \frac{0}{0}\ y = \frac{0}{0}, \\ \quad z = \frac{0}{0} = \text{määramatus.} \end{array}$$

7. *n võrrandi süsteem n tundmatuga.* Lahendamine sünnib determinantide abil, analoogiliselt kolme vôrrandi süsteemi kolme tundmatuga lahendamisele, vôi vôrrandite ja tundmatute arvu järkjärgulise ühevôrra vähendamise teel. Viimase viisi juures tarvitame kas koeffitsientide vôrdamise ja vôrrandite liitmise vôi ühe tundmatu suhtes asetamise viisi. Esimesel puhul vôetakse üks antud vôrranditest ja liidetakse tema järjestikku ülejäädavatega, kuna enne liitmist koeffitsiendid tundmatu ees, millest tahetakse vabaneda, vôrdseteks muudetakse. Teisel puhul ilmutakse üks tundmatutest ühest antud vôrrandist ja asetakse teistesse vôrranditesse, mille järeldusel vôrrandite, niisama ka tundmatute arv ühe vôrra väheneb.

Näitus:

| | Võrdamistegurid. | | |
|---|---|---|---|
| $2x - y + 3z + 5u = 29$ | 3 | 1 | 2 |
| $5x + 2y - 2z + 3u = 15$ | $-5$ | | |
| $3x - 4y + 7z - u = 12$ | | 5 | |
| $4x + 3y - 5z + 2u = 3$ | | | $-5$ |
| $-19x - 13y + 19z = 12$ | $-2$ | $-31$ | |
| $17x - 21y + 38z = 89$ | 1 | | |
| $-16x - 17y + 31z = 43$ | | 19 | |
| $55x + 5y = 65$ $\quad$ $11x + y = 13$ | 16 | | |
| $285x + 80y = 445$ $\quad$ $57x + 16y = 89$ | $-1$ | | |

$119x = 119$ $\qquad x = 1$

$y = 13 - 11x = 13 - 11 = 2$ $\qquad y = 2$

$19z = 12 + 19x + 13y = 12 + 19 + 26 = 57;$ $\qquad z = 3$

$2u = 3 - 4x - 3y + 5z = 3 - 4 - 6 + 15 = 8;$ $\qquad u = 4$

## *II. astme võrrandid.*

### II. astme võrrand ühe tundmatuga.

8. a) $ax^2 + bx = 0;\ x(ax + b) = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$

b) $ax^2 = c;\ x^2 = \frac{c}{a};\ x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}.$

9. a) $x^2 + px + q = 0;\ x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Kui $p = 2k$, siis $x = -k \pm \sqrt{k^2 - q}$ (kui $p \neq 2k$, siis on parem võtta valem: $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$).

b) $ax^2 + bx + c = 0;\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Kui $b = 2k$, siis $x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

10. Vôrrandi $x^2 + px + q = 0$ juurte omadused: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \,.\, x_2 = q$. Ümberpöördult: kui $x_1 + x_2 = m$ ja $x_1 \,.\, x_2 = n$, siis $x_1$ ja $x_2$ on vôrrandi $x^2 - mx + n = 0$ juurteks.

11. Funktsioon $y = ax^2 + bx + c$ lahutub algteguriteks: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kus $x_1$ ja $x_2$ on funktsioon $y$ juured s. o. $x$-i tähendused, mis $y$ nulliks muudavad, teiste sõnadega: $x_1$ ja $x_2$ on võrrandi $a^2 + bx + c = o$ juured.

12. Kui ruutvõrrandid koeffitsiendid on õige suured, nii et tehted nendega tülikad, võib tarvitada goniomeetrilist lahendamise viisi:

a) $x^2 \pm px - q = 0$; $p > 0$ $q > 0$.

Leiame teravnurga $\varphi$, logaritmides avalduse

$$tq\ \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}\text{; siis } x_1 = \mp \sqrt{q}\ tq\frac{\varphi}{2}, x_2 = +\sqrt{q}\ ctq\frac{\varphi}{2}$$

(— või + selle järele, missugune märk $p$ ees).

b) $x^2 \pm px + q = 0$; $p > 0$, $q > 0$.

Leiame teravnurga $\varphi$, logaritmides avalduse

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}\text{; siis } x_1 = \pm \sqrt{q}\ tq\frac{\varphi}{2},\ x_2 = \pm\sqrt{q}\ ctq\frac{\varphi}{2}$$

Kui $\sin\varphi > 1$, siis on juured imaginaarsed, nimelt $x = \sqrt{q}\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$,

kus $\cos\varphi = \mp \dfrac{p}{2\sqrt{q}}$ ($\varphi$ on $0^0$ ja $180^0$ vahel).

*Kahe II astme võrrandi süsteem kahe tundmatuga.*

13. a) $\left.\begin{matrix} x + y = a \\ xy = b \end{matrix}\right\}$ $x$ ja $y$ on võrrandi $z^2 - az + b = 0$ juured.

b) $\left.\begin{matrix} x - y = a \\ xy = b \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x + (-y) = a \\ x.(-y) = -b \end{matrix}\right\}$ $x$ ja $(-y)$ on võrrandi $z^2 - az - b = 0$ juured.

c) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=a \\ xy=b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2+y^2=a \\ x^2\,y^2=b^2 \end{array}\right\}$ $x^2$ ja $y^2$ on võrrandi $z^2-az+b^2=0$ juured.

d) $\left.\begin{array}{l} x^2-3y^2=a \\ xy=b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2+(-3y^2)=a \\ x^2.(-3y^2)=-3b^2 \end{array}\right\}$ $x^2$ ja $(-3y^2)$ on võrrandi $z^2-az-3b^2=0$ juured.

*Kolmanda astme võrrand.*

14. $x^3+ax^2+bx+c=0$; kui võrdame $x=z-\frac{1}{2}a$, saame $z^3+pz+q=0$.

Cardano valemi järele:

$$Z_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$Z_2=w_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+$$
$$+w_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$Z_3=w_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+$$
$$+w_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}}$$

kus $w_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ja $w_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

*Kõrgema astmelised algebralised ja transtsendentsed võrrandid.*

15. Ligikaudselt võib leida juured katsumise või graafilisel teel, mille täpsuse võib suurendada lähendusmetoodi abil.

a) Ligikaudselt leiame juure katsumise teel järgmisel alusel: kui $v = f(x)$ tähendus $a$ juures $f(a) > 0$ ja tähendus $b$ juures $f(b) < 0$, siis on võrrandil $f(x) = 0$ $a$ ja $b$ vahel paaritu arv juuri, seega vähemalt üks juur.

b) Graafilisel teel leiame juured, kui mõne vabalt võetud $x$-i tähenduse järele joonestame millimeetrilisel paberil ligikaudselt funktsiooni $y = f(x)$.

Punktid, kus kõverjoon lõikab $X$-telge, annavad juurtele vastavad $x$-i tähendused.

16. Kõrgema astme võrrandi juurte paranduste leidmine.

Kui $\alpha$ on $f(x) = 0$ ligikaudne juur, siis arvame paranduse $\delta$ võrdusest:

$\delta = -f(\alpha)\frac{\alpha_1 - \alpha}{f(\alpha_1) - f(\alpha)}$, kus $\alpha_1$ õige vähe lahkneb $\alpha$ tähendusest, või N e v t o n i metoodi järele: $\delta = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$

kus $f'(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$

## E. **Kombinatoorik** (ühendused).

1. Teatud gruppis on $n$ elementi. Muudame gruppis kahe vôi rohkema arvu elementide järjekorra, kusjuures elementide arv igas uues, teisendatud elementide järjekorraga gruppis jääb endiseks, s. o. $n$. Niisuguseid elementide ümberasetusi nimetatakse *permutatsioonideks.*

a) Kui elemendid on üksteisest millegi poolest lahknevad, nii et neist igaühte eraldi ära tunda võib, siis permutatsioonide arv $P_n = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n = n!$ ($n$ fakulteet = $n$ faktoraal = $n$ järjekordse arvu kasvatis).

b) Kui elementide seas on mitu alagruppi, millede elemendid igaühes isekeskis täiesti ühesugused, nii et niisuguste ümberasetus mingiski ei tundu ja niisuguseid arvesse ei saa võtta, siis on permutatsioonide arv väiksem, kui eelpool näidatud

$$P_n = p + q + v + \ldots + w = \frac{n!}{p!\ q!\ r!\ \ldots\ w!}.$$

Arusaadav, et kui mõnes alagrupis üksainus element, siis niisugune alagrupp permutatsioonide arvu ei vähenda, sest $1! = 1$.

2. Elementide arv on üleüldse $n$. Neist elementidest ühendatakse grupid, milledest igaüks $m$ elementi ($m < n$) sisaldab ja koosseisus vähemalt ühe elemendi poolest teisest lahkneb. Niisuguseid ühendusi nimetatakse *kombinatsioonideks*.

a) Kui üks ja sama kombinatsioon ühte ja sama elementi sisaldab üksainus kord, s. o. kui elementide seas ei ole ühesuguseid, siis on kombinatsioonide arv

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ (n-m+1)}^{m \text{ tegurit}}}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ m}$$

b) Kui iga kombinatsioon ühte ja sama elementi võib sisaldada $m$ korda (kombinatsioon kordumisega), siis on kombinatsioonide arv

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{\overbrace{(n+m-1)\ (n+m-2\ (n+m-3)\ \ldots\ n}^{m \text{ tegurit}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ m}$$

c) Kombinatsioonide arv üleüldse, kui $m$ on muutuv 1 kuni $n$ ning üks ja sama kombinatsioon sisaldab sama elementi ainult üks kord (juhus $a$), on:

$$C_n{}^1 + C_n{}^2 + C_n{}^3 + C_n{}^4 + \ldots + C_n{}^n =$$
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Kombinatsioonide omadus: $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_{10}^7 = C_{10}^3$

3. On $n$ elementi. Nendest ühendatakse grupid, milledes igaühes $m$ elementi $(m < n)$. Selle juures lahknevad need grupid üksteisest kas elementide järjekorra, või elementide koosseisu, või selle ja teise poolest.

Niisuguseid ühendusi nimetatakse variatsioonideks (arrangement).

a) Kui ühes ja samas variatsioonis ei seisa üks ja sama element rohkem kui üks kord (kui elementide seas ei ole ühesuguseid), siis variatsioonide arv $n$ elemendist $m$ kaupa

$$V_n^m = \binom{n}{m} . m! = \overbrace{n . (n-1) (n-2) \ldots (n-m+1)}^{m \text{ tegurit}}$$

b) Variatsioonide arv kordumisega, s. o. variatsioonide arv, kus igas nendest võib korduda üks ja sama element $m$ korda, on $n^m$.

Variatsioonid saame kombinatsioonidest, kui viimastest iga juures leiame kõik võimalikud permutatsioonid s. o. $V_n^m = C_n^m \, P_m$.

## F. Rentrendi ja tähtajaliste maksude arvamine.

1. Kui kapitaal on $a$ ja tema kannab aastas $p$ protsenti, siis muutub nimetud kapitaal $n$ aastas summaks, mille suurus $A$.

Ühe üksuse (marga) juurdekasv aastas on $\frac{p}{100}$, seega muutub üks üksus (mark) aastas summaks, mille suurus on $1+\frac{p}{100}$ (1 mark muutub 8% juures $1+\frac{8}{100}=1{,}08$ margaks).

a) $A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}=aq^{n}$, kui protsentsumma iga läbikäigu aasta lôpul arvatakse algkapitaalile (algsummale) juure.

b) $A=a\left(1+\frac{p}{2\,.\,100}\right)^{2n}$, kui protsentsumma iga poolaasta lôpul arvatakse algkapitaali juure (iga veerandaasta juures $A=\left(1+\frac{p}{4\,.\,100}\right)^{4n}$ jne.).

c) $A=ae^{\frac{pn}{100}}$ ($e$ — naturaallogaritmi alus), kui protsentsumma pidevalt igal momendil, oma iseloomu poolest iseenesest algsummale lisaneb, näit., rahvaarvu kasvamine.

2. Kui iga aasta algul ühesuurune summa $b$ kasvama pannakse, siis kogub, kui iga aasta lôpuks protsentsumma eelpool kogunud summale juure lisatakse, $n$ aasta lôpuks $B=b\,\frac{q(q^{n}-1)}{q-1}$.

3. Kui iga aasta lôpul ühesuurune summa $b$ kasvama pannakse, siis kogub $n^{\underline{nda}}$ aasta lôpuks summa $B=b\,.\,\frac{q^{n}-1}{q-1}$.

4. Amortisatsioon, kustutamine. Vôlg $C$, mille protsentarv, kustutamist arvesse vôtmata, on $p$, kustutakse $n$ aasta jooksul. Igaaastane protsentarv on siis suurem, nimelt $p_1$. Protsentarvu $p_1$ vôi aja $n$ vôime leida vôrdusest:

$C\,.\,q^{n}=C\,.\,\frac{p_1}{100}\,.\,\frac{q^{n}-1}{q-1}$, kus $q$ endiselt vôrdub $\left(\frac{p}{100}+1\right)$.

5. Mahakirjutamine. Uuendamine. Kui teatud väärtus $C$ (ehitus, masin v. m.) $n$ aasta jooksul kôlb-

matuks muutub, ära kulub, nii et teda uuendama peab, siis tuleb väärtusest iga aasta lôpul maha kirjutada $c = C \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$ ehk $\alpha^0/_0$ $C$ väärtusest:

$\alpha x = 100 \cdot \frac{c}{C} = 100 \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$ ($q = \frac{p}{100}+1$, kus $p$ on protsentarv, missuguse väärtus kandma peab).

6. Kui aasta algul vôetud kapitaal selle ja iga järgneva aasta lôpul vôrdse summa vôrra suurendakse vôi vähendakse, siis on lôpukapitaal $n$ aasta pärast

$$B = aq^n \pm b\frac{q^n-1}{q-1}.$$

7. Punkt 6 tähentud summa $B$ muutub teatud summaks $S$ $n$ aasta jooksul, kus

$$n = \frac{\lg[S(q-1) \pm b] - \lg[a(q-1) \pm b]}{\lg q}.$$

8. Kapitaalist $B$ vôetakse iga aasta lôpul summa $b$ ära: kapitaal on $n$ aasta jooksul ära kulutud, kui $b > \frac{B \cdot p}{100}$;

$$n = \frac{\log b - \log[b - B(q-1)]}{\log q}.$$

9. Rendi s. o. igaaastase sissetuleku, mille suurus $b$, vôimaldab $n$ aasta jooksul (aasta lôpul) kapitaal

$$B = b \cdot \frac{q^n-1}{q^n(q-1)}.$$

10. Igavese rendi $b$ annab kapital $B = \frac{b}{q-1}$.



## G. Read.

### *Aritmeetilised read.*

1. Aritmeetilise progressiooni ehk I järjekorra aritmeetilise rea, mille üldine kuju

$a, a+d, a+2d, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots,$ $a+(n-1)d$ liige, $u_m$, kus järjekordne nummer $m$, on: $u_m = a + (m-1)d$. Kui liikmete arv $n$, siis viimane liige $u_n = u = a + (n-1)d$.

Summa $n$ järjekordsest liikmest

$s = s_n = \frac{a+u}{2} . n$, ehk, kui viimane liige ei ole teada,

$s_n = [a + \frac{(n-1)d}{2}] n$.

2. $1+2+3+4+5+6+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$

3. $p+(p+1)+(p+2)+(p+3)+\ldots+(q-1)+q=\frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$

4. $2+4+6+8+10+\ldots+(2n-2)+2n=n(n+1)$.

5. $1+3+5+7+9+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$.

6. $1+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$
   (kuulub teise järjekorra aritmeetiliste ridade hulka)

7. $1+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
   (kolmanda järjekorra aritm. rida).

8. $1+2^4+3^4+4^4+\ldots+(n-1)^4+n^4$
   $=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$
   (neljanda järjekorra aritm. rida).

*Geomeetrilised read.*

9. Geomeetriline progressioon:
   $a, aq, aq^2, aq^3, aq^n, \ldots aq^{n-1}$.

Liige, mille järjekordne nummer $m$,
$u_m = aq^{m-1}$. Kui liikmete arv $n$, siis viimane liige $u_n = u = aq^{n-1}$

$n$ liikme summa $s_n = s = \frac{a(q^n-1)}{q-1} = \frac{qu-a}{q-1}$

Kui $n = \infty$ ja $q$ positiivne või negatiivne lihtmurd $(-1 < q < 1)$, siis $s = \frac{a}{q-1}$ (lõpmatalt vähenev progressioon).

## *Eksponentsiaal- ja logaritmread.*

10. $e = \lim\limits_{n=\infty}\left((1+\frac{1}{n}\right)^n = +\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots$

($e$ — naturaallogaritmi alus).

11. $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots$; koonduv, kui $-\infty < x < +\infty$ s. o. koondus igasuguse $x$-i juures.

12. $a^x = 1+\frac{\lg n\ a}{1!}x+\frac{(\lg n\ a)^2}{2!}x^2+\frac{(\lg n\ a)^3}{3!}x^3+\ldots\ldots$ $-\infty < x < +\infty$.

13. $\lg n\ (1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$ koonduv, kui $-1 < x < +1$.

14. $\lg n \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots\right)$; $-1 < x < +1$.

15. $\lg n \frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right)$; $x < -1$ või $x > +1$.

16. $\lg n\ x = 2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7+\ldots\right]$; $0 < x < +\infty$.

17. $\lg n(a+x) = \lg n\ a + 2\left[\frac{x}{2a+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5+\ldots\right]$; $0 < a < +\infty$ ja $-a < x < +\infty$.

*Trigonomeetrilised ja tsüklomeetrilised read.*

18. Trigonomeetriliste funktsioonide juures on $x$ kaar (nurk) raadiaalmõõtudes (radiaan); kui $\psi$ on kaar (nurk) kraadides, siis $x = \frac{\pi \cdot \psi}{180}$.

19. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$; $-\infty < x < +\infty$.

20. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$; $-\infty < x < +\infty$.

21. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots$; $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$.

22. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{x^7}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} \ldots$; $-\pi < x < +\pi$.

23. $\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$; $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

24. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

25. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$

# II. Trigonomeetria (goniomeetria).

## A. Trigonomeetrilised funktsioonid tähtsamail nurkadel, märgid, teisendamine.

| Kraad | 0 | 90 | 180 | 270 | 360 | 30 | 45 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin = | 0 | +1 | 0 | −1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| cos = | +1 | 0 | −1 | 0 | +1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg = | 0 | $\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg = | $\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |

### Funktsiooni märgid

| | Nurk $\psi$ asub piirides | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $0^0$ kuni $90^0$ | $90^0$ kuni $180^0$ | $180^0$ kuni $270^0$ | $270^0$ kuni $360^0$ |
| sin $\psi$ | + | + | — | — |
| cos $\psi$ | + | — | — | + |
| tg $\psi$ | + | — | + | — |
| cotg $\psi$ | + | — | + | — |

Reduktsioonvalemid $0 < \alpha < 90^0$.

| $\psi =$ | $\pm\alpha$ | $90^0 \pm \alpha$ | $180^0 \pm \alpha$ | $270^0 \pm \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\psi =$ | $\pm\sin\alpha$ | $+\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ |
| $\cos\psi =$ | $+\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ |
| $\mathrm{tg}\,\psi =$ | $\pm\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
| $\mathrm{ctg}\,\psi =$ | $\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{tg}\,\alpha$ |

$\sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha)$; $\mathrm{tg}(45^0 \pm \alpha) = \mathrm{ctg}(45^0 \mp \alpha)$

## B. Side ühe ja sama nurga funktsioonide vahel.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
2. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
3. $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
4. $\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$.
5. $\frac{1}{\sin\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha$.
6. $\mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.
7. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.
8. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.
9. $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
10. $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

## C. Side kahe nurga funktsioonide vahel.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.
3. $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\beta}$.
4. $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \,.\, \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}$.
5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

10. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}$.

11. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

12. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

### D. Nurga mitmekordse ja osa funktsioonid.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \,.\, \cos\alpha$; $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ jne.

2. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$.

3. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

4. $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

5. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right)$.

6. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right)$.

7. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

8. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

9. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)$;

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

10. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$.

11. $\sin \alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

12. $\cos \alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

13. $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$.

14. $\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \dfrac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos a}}$.

15. $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \pm \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha} = \sqrt{2} \sin \left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$.

## E. Sin $\alpha$ ja cos $\alpha$ astmed.

1. $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$; $2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$ jne.

2. $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$; $2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$ jne.

3. $4 \sin^3 \alpha = -\sin 3\alpha + 3 \sin \alpha$.

4. $4 \cos^3 \alpha = \cos 3\alpha + 3 \cos \alpha$.

5. Kui $n$ on paaritu arv:

$$\sin^n\alpha = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \Big[ \sin n\alpha - n \sin (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$
$$\sin (n-4)\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin (n-6)\alpha + \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-5}{2})}{1 \cdot 2 \ldots \frac{n-3}{2}} \sin 3\alpha + (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-3}{2})}{1 \cdot 2 \ldots \frac{n-1}{2}} \sin \alpha \Big].$$

6. Kui $n$ on paaris arv:

$$\sin^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1} i^n} \Big[ \cos n\alpha - n \cos (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$
$$\cos (n-4)\alpha - \ldots + (-1)^{\frac{n-4}{2}} \frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-6}{2})}{1 \cdot 2 \ldots \frac{n-4}{2}}$$
$$\cos 4\alpha + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-4}{2})}{1 \cdot 2 \ldots \frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha \Big] +$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-2}{2})}{1 \cdot 2\, 3 \ldots \frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2^n i^n}\right).$$

7. Kui $n$ on paaritu arv:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Big[ \cos n\alpha + n \cos (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$
$$\cos (n-4)\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos (n-6)\alpha + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{n-3}{2}} \cos 3\alpha + \frac{n(n-1\ldots(n-\frac{n-3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{n-1}{2}}$$
$$\cos \alpha \Big].$$

8. Kui $n$ on paarisarv:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Big[ \cos n\alpha + n \cos (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}$$

$$\cos (n-4)\alpha + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-6}{2})}{1 \,.\, 2 \ldots \frac{n-4}{2}} \cos 4\alpha +$$

$$+ \frac{n(n-1 \ldots (n-\frac{n-4}{2})}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha \Big] + \frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n-2}{2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

## F. Tsüklomeetrilised funktsioonid.

1. $\operatorname{arc\,sin} u = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2} -$
$- \operatorname{arc\,cos} u.$

2. $\operatorname{arc\,cos} u = \operatorname{arc\,sin} \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} =$
$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} u.$

3. $\operatorname{arctg} u = \operatorname{arc\,sin} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} =$
$= \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{u} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2u}{1-u^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{2u}{1+u^2} =$
$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{1-u^2}{1+u^2}.$

4. $\operatorname{arc\,sin} u \pm \operatorname{arc\,sin} v = \operatorname{arc\,sin} (u \sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2} =$
$= \operatorname{arc\,cos} (\sqrt{1-u^2} \,.\, \sqrt{1-v^2} \pm uv).$

5. $\operatorname{arc\,cos} u \pm \operatorname{arc\,cos} v = \operatorname{arc\,sin} (v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2}) =$
$\operatorname{arc\,cos} (uv \mp \sqrt{1-u^2} \,.\, \sqrt{1-v^2}).$

6. $\operatorname{arctg} u \pm \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u + v}{1 + uv}.$

## G. Side nurkade vahel, millede summa 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} + 1.$

3. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}.$

4. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1.$

5. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2.$

6. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha . \sin\beta\cos\gamma.$

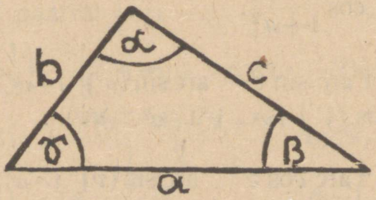
7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma.$

8. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} . \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} . \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

9. $\operatorname{ctg}\alpha . \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha , \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta . \operatorname{ctg}\gamma = 1$

## H. Tasapinnaline kolmnurk.

$a, b, c$ — küljed.
$\alpha, \beta, \gamma$ — nurgad.
$\frac{a+b+c}{2} = p$ poolperimeeter.




$\rho$ — sissekujutud ringi raadius.
$r$ — ümberkujutud ringi raadius.
$s$ — pind (pinna suurus).

## *Üldvalemid.*

1. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2\,r$ (sinusvalem).

2. $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$; $b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$ jne.

3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha = (b+c)^2 - 4\,bc\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$= (b-c)^2 + 4\,bc\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$; $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca\cos\beta$ jne.

(cosinusvalem).

4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$

5. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{p.(p-a)}{bc}}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \dfrac{\rho}{p-a}$

6. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$; $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

(Molveide valemid)

7. $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$ ehk $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

(tangensvalem).

8. $\rho = 4\,r\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{abc}{4\,rp}$

$= \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

9. Nurga $\alpha$ bissektor $= j_\alpha = \dfrac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$

10. Külje $c$ mediaan $= m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

### *Täisnurkne kolmnurk.*

$\gamma = 90^0$; $c =$ hüpotenuus, $a$ ja $b$ — kateedid.

11. $\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$; $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$; $b = c\sin\beta = c\cos\alpha$.

12. $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$; $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$; $a = b\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{ctg}\beta$.

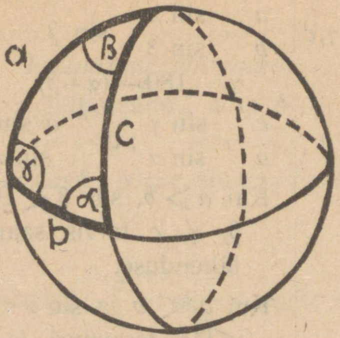
13. $a^2 + b^2 = c^2$.

### *Vildakkolmnurk.*

| On teada | tarvis leida | |
|---|---|---|
| 14. $a, b, c$ | $\alpha(\beta,\gamma)$ | $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ ehk $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. |
| | $s$ | $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}$. |
| 15. $a, \beta, \gamma$, üleüldse, külg ja kaks nurka | $b, c, \alpha$ | $\alpha = 180^0 - (\beta+\gamma)$. $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$; $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; $\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. sin $\alpha$ asemel võib võtta $\sin(\beta+\gamma)$. |

| On teada | tarvis leida | |
|---|---|---|
| 16. $a, b, \alpha$ | $\beta, \gamma, c$ | $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$;<br>$\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$.<br>$\frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.<br>Kui $a>b$, siis $\beta<90^0$ (teravnurk): $\beta$, $\gamma$, $c$ tarvis saame igale ühe tähenduse.<br>Kui $a<b$ ja $\sin\beta<1$ siis $\beta=\beta_1$, $<90^0$– teravnurk ja $\beta=\beta_2=180^0-\beta_1$ — tõmpnurk:<br>$\beta$, $\gamma$, $c$ tarvis saame igale kaks tähendust;<br>kui $\sin\beta=1$, $\beta=90^0$;<br>kui $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}>1$, on kolmnurk võimata. |
| 17. $a, b, \gamma$ | $\alpha, \beta, c$ | $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}$, $\beta=180^0-(\alpha+\gamma)$<br>ehk $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$;<br>$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-$<br>$-\frac{\alpha-\beta}{2}$, kus $\alpha+\beta=180^0-\gamma$;<br>$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (sinusvalem)<br>$=\sqrt{a^2+b^2-2ab\operatorname{cis}\gamma}$ (cosinusvalem); |
| | $s$ | $s=\frac{ab\sin\gamma}{2}$ (võib tarvitada ka eelmisel kahel juhusel). |

## J. Sfääriline kolmnurk.




$a$, $b$, $c$ — küljed (kaare- või nurgaüksustes)
$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nurgad

$\frac{a+b+c}{2} = p$ — poolperimeeter

$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \sigma$ — nurkade poolsumma ($180^0 < 2\sigma < 3.180^0 = 540^0$); $\alpha + \beta + \gamma - 180^0 = \varepsilon$ — sfääriline ekstsess.

*Üldvalemid.*

1. $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ (sinusvalem).
2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ (külje cosinusvolem).
3. $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$ (nurga cosinus volem).
4. $\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha$.
   $\operatorname{cotg} a \sin b = \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \cos \gamma \cos b$.
5. $\cos \alpha \sin \beta = \sin \gamma \cos a - \sin \alpha \cos \beta . \cos c$.
   $\operatorname{ctg} \alpha . \sin \beta = \sin c . \operatorname{ctg} a - \cos c \cos \beta$.

6. $\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$;

$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta.\sin\gamma.}}$

$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha).}}$

7. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b.\sin c}}$;

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b.\sin c}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p.\sin(p-a).}}$

8. $\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}$

9. $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}$

*Gauss'i valemid.*

10. $\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{3}}{\cos\frac{c}{2}}$;

11. $\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$;

12. $$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}};$$

13. $$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

*Neper'i (Napier) analoogiad.*

14. $$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}};\quad\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}};$$

15. $$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};\quad\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

*Täisnurkne kolmnurk.*

$\gamma=90^0$ ja $c$ on hüpotenuus.

16. $\cos c=\cos a\,.\cos b=\operatorname{ctg}\alpha\,.\operatorname{ctg}\beta.$

17. $\cos a=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta};\ \cos b=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$

18. $\sin\alpha=\frac{\sin a}{\sin c};$ 19. $\cos\alpha=\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c};$

20. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}.$

# III. Differentsiaal- ja integraalarvamine.

## A. Differentsiaalvalemid.

Kui $y = f(x)$, siis on $f(x)$ tuletisfunktsioon $=$ tuletis $\frac{dx}{dy}$ (differentsiaalkwotsient) $= f'(x) = y'$ $= \lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja funktsiooni $f(x)$ differentsiaal $dy = \left(\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) . dx = \frac{dy}{dx} . dx =$ $f'(x)\,dx = y'\,dx$. Funktsiooni differentsiaalist saame tuletise, kui differentsiaali jagame argumendi differentsiaal $dx$-ga.

1. $d \,.\, c = 0$ ($c$ alatine suurus).

2. $d\,(c + x) = dx$; $\quad \frac{d\,(c + x)}{dx} = 1$.

3. $d\,(cx) = c dx$.

4. $d\,(x + y + z + \ldots) = dx + dy + dz + \ldots$

5. $d(xy) = x dy + y dx$.

6. $d(xyzu \ldots) = \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} + \ldots\right) xyzu \ldots$

7. $d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

8. $dx^m = mx^{m-1}\,dx$.

9. $d\sqrt{x} = d\,x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

10. $d\frac{1}{x} = d\,x^{-1} = -x^{-2}\,dx = -\frac{dx}{x^2}$

11. $d\frac{1}{\sqrt{x}} = dx^{-1/2} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\,dx = -\frac{dx}{2x\sqrt{x}}$

12. $d\,e^x = e^x\,dx$; $da^x = a^x \operatorname{logn} a\,dx$

13. $d \operatorname{logn} x = \frac{dx}{x}$; $d \log_a x = \frac{1}{\operatorname{logn} a} \cdot \frac{dx}{x}$

14. Kui $y = f(u)$, kus $u = \psi(x)$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ja } dy = f'(u)\,du$$

Näitus 1: $y = \operatorname{logn}^3 x$; siis $\operatorname{logn} x = u$ ja $y = u^3$;

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot \frac{du}{dx} = 3\operatorname{logn}^2 x \,.\, \frac{d(\operatorname{logn} x)}{dx}$$

$$= \frac{3\operatorname{logn}^2 x}{x} \text{ ja } d(\operatorname{logn}^3 x) = 3\operatorname{logn}^2 x \cdot \frac{dx}{x}$$

Näitus 2: $y = e^{3x^2}$; võtame $3x^2 = u$, siis $de^{3x^2} = e^{3x^2} . 3 . 2\,x\,dx = 6\,x.e^{3x^2}\,dx$.

15. $d \sin x = \cos x\, dx$; $d \dfrac{1}{\sin x} = -\dfrac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$

16. $d \cos x = -\sin x\, dx$; $d \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}$

17. $d \operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$; $d \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x\, dx}{\cos^2 x} = \dfrac{2 \sin x\, dx}{\cos^3 x}$

18. $d \operatorname{ctg} x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$;

$$d \operatorname{ctg} x^2 = -\frac{1}{\sin^2 x^2} \cdot 2x\, dx = -\frac{2x\, dx}{\sin^2 x^2};$$

19. $d \arcsin x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $d \arccos x = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $d \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$

22. $d \operatorname{arc\,cotg} x = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

23. $d \operatorname{lgn} \sin x = \operatorname{cotg} x\, dx$

24. $d \operatorname{lgn} \cos x = -\operatorname{tg} x\, dx$

25. $d \operatorname{lgn} \operatorname{tg} x = \dfrac{2\, dx}{\sin 2x}$

26. $d \operatorname{lgn} \operatorname{ctg} x = -\dfrac{2\, dx}{\sin 2x}$

27. $du^v = u^{v-1}(u \lg n\, u\, dv + v\, du)$, kus $u$ ja $v$ on ühe ja sama argumendi, ütleme $x$-i, funktsioonid.

28. Kui $u = F(x, y, z, t, \ldots)$ on rohkema, kui ühe argumendi $x, y, z, t, \ldots$ funktsioon, siis täieline differentsiaal $du = d\, F(x, y, z, t, \ldots)$ $= F'_x(x, y, z, t, \ldots)\, dx + F'_y(x, y, z, t, \ldots)\, dy$ $+ F'_z(x, y, z, t, \ldots) dz + F'_t(x, y, z, t, \ldots)\, dt$ $+ \ldots = \frac{\vartheta F}{\vartheta x} dx + \frac{\vartheta F}{\vartheta y} dy + \frac{\vartheta F}{\vartheta z} dz + \frac{\vartheta F}{\vartheta t} dt +$ $+ \ldots$, kus $\frac{\vartheta F}{\vartheta x}, \frac{\vartheta F}{\vartheta y}, \frac{\vartheta F}{\vartheta z}, \frac{\vartheta F}{\vartheta t}, \ldots$ on funktsiooni $u = F(x, y, z, t, \ldots)$ osalised tuletised vastavate muutuvate $x, y, z, t, \ldots$ suhtes.

Näitus: Kui $u = 2x^2 y - 3xz - 2y + z^3 + 5$, $\frac{\vartheta u}{\vartheta x} = 4xy - 3z$, $\frac{\vartheta u}{\vartheta y} = 2x^2 - 2$, $\frac{\vartheta u}{\vartheta z} =$ $= -3x + 3z^2$ ning $du = (4xy - 3z)\, dx +$ $+ 2(x^2 - 1)\, dy - 3(x - z^2)\, dz$.

29. Kui $F(x, y) = 0$ (ilmutamatu funktsioon), siis

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x} dx + \frac{\vartheta F}{\vartheta y} dy = 0 \text{ ja } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\vartheta F}{\vartheta x}}{\frac{\vartheta F}{\vartheta y}}$$

30. $d^n F(x, y, z, t, \ldots) = \frac{\vartheta^n F}{\vartheta x^n} dx^n +$

$$+ n \frac{\vartheta^n F}{\vartheta x^{n-1} \vartheta y} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\vartheta^n F}{\vartheta x^{n-2} \vartheta y^2}$$

$dx^{n-2} dy^2 + \ldots$ ehk piltlikult: $\left(\frac{\vartheta F}{\vartheta x} dx + \frac{\vartheta F}{\vartheta y} dy + \right.$

$+\frac{\vartheta F}{\vartheta z}dz+\frac{\vartheta F}{\vartheta t}dt+\ldots\Big)^{n}$, kui Nevtoni binoomile vastava $dF$ $n^{\underline{nda}}$ astme asemel lugejas võtta $n^{\underline{es}}$ osaline tuletis ($\vartheta^{n}F$).

Märkus: Teine ehk teise järjekorra tuletis ($F''(x) = \frac{d^2F}{dx^2}$ — ühe argumendi juures, $F_x''(u) = \frac{\vartheta^2F}{\vartheta x^2}$, $F_y''(u) = \frac{\vartheta^2F}{\vartheta y^2}$ — mitme argumendi juures) on võetud harilisest ehk esimese järjekorra tuletisest j.n.e.

## B. Maclaurin'i ja Taylor'i read.

1. Maclaurin'i rida:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(0)+\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n,$$

kus $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $\ldots f^{(n-1)}(0)$ on $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(n-1)}(x)$ tähendused $x=0$ juures. $R_n$ on täiendav liige (jääkliige–rest); $R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\Theta x)$ ehk $R_n=\frac{(1-\Theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}f^{(n)}(\Theta x)$, kus $\Theta$ on positiivne lihtmurd, s. o. $0<\Theta<1$.

2. Taylor'i rida:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+$$

$$\ldots+\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x)+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+$$

$+ R_n$. $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \Theta h)$

ehk $R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1} h^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \Theta h)$, kus $\Theta$, nagu eelpool, on positiivne lihtmurd.

3. Maclaurin'i ja Taylor'i ridade kohta tuleb tähendada, et nii see kui teine on maksvad ainult sellel puhul, kui $f(x)$ ja selle tuletised $f'(x)$, $f''(x)$. . . . $f^{(n)}(x)$ pidevad ning lõpuliku tähendusega on intervallis 0 kuni $x$ — ühe ja $x$ kuni $x+h$ teise juures.

### C. Määramatud avaldused.

1. $\frac{0}{0}$. Kui murd $\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}$ $x=a$ juures omandab määramatu kuju $\frac{0}{0}$, siis leiame murru õige tähenduse, kui võtame $\frac{\varphi'(x)}{\Psi'(x)}$ $x=a$ juures. Annab aga nimetud esimeste tuletiste vahekord ka määramatuse $x=a$ juures, siis võtame $\frac{\varphi''(x)}{\Psi''(x)}$ $x=a$ juures jne.

2. Kui $\frac{\infty}{\infty}$. Kui murd $\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}$ $x=a$ juures annab $\frac{\infty}{\infty}$, tuleb murru õige tähenduse leidmiseks talitada, nagu $\frac{0}{0}$ juures.

3. $0 \cdot \infty$. Kui kasvatises $\varphi(x) \cdot f(x)$ $x=a$ juures $\varphi(x)=0$ ja $f(x)=\infty$, siis jagame kasvatise $\varphi(x) \cdot f(x) =$

$= \frac{\varphi(x) \, . \, f(x)}{1}$ lugeja ja nimetaja $f(x)$-ga ning võrdame murru $\frac{1}{f(x)} = \Psi(x)$, mille tagajärjel saame:

$\varphi(x) f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}$, missugune murd $x = a$ juures annab $\frac{0}{0}$ — 1ne juhus.

4. $0^0$, $1^{\infty}$, $\infty^0$. Kui avaldus $\Psi(x)^{\varphi(x)}$ omandab $x = a$ juures ühe ülesloetud kujudest, siis võrdame $\Psi(x)^{\varphi(x)} = y$, kus tlgn $y = \varphi(x) \lg n \Psi(x)$ ja $y = e^{\varphi(x) \, . \, \lg n \, \Psi(x)}$. Astmenäitaja $\varphi(x) \lg n \Psi(x)$ võib määrata, nagu 3das juhuses.

5. $\infty - \infty$. Juhuse, kus $\varphi(x) - \Psi(x)$ $x = a$ juures annab $\infty - \infty$, tuuakse 1se juhuse $\frac{0}{0}$ juurde teisendamise teel, nimelt:

$$\varphi(x) - \Psi(x) = \frac{\frac{1}{\Psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\Psi(x)}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty \, . \, \infty}} = \frac{0}{0}.$$

## D. Maksimum ja minimum (pöördepunkt).

### *1. Funktsioon ühe tundmatuga.*

Argumendi $x$-i tähendused (pöördepunktid), millede juures $y = f(x)$ võib omada maksimumi või minimumi, leiame, kui esimese tuletise $f'(x)$ võrdame nullile ja saadud võrrandi $f'(x) = 0$ lahendame $x$-i suhtes. Kui leitud $x$-i tähenduse juures:

$f''(x) < 0$, on $f(x)$ vastava $x$-i tähenduse juures maksimum
$f''(x) > 0$, „ $f(x)$ „ $x$-i „ „ minimum.

On aga $f''(x)$ leitud $x$-i tähenduse juures ka 0, siis võib $f(x)$-il maksimum või minimum ainult sellel puhul olla, kui $x$-i nimetud tähenduse juures esimene mitte nulliks muutuv tuletis on paarisarvulisest järjekorrast, s. o. $f^{IV}(x)$, $f^{VI}(x)$ jne., kusjuures maksimumi ja minimumi lähemalt äramääramine analoogiliselt eelmisega sünnib. On esimene mitte nulliks muutuv tuletis võrrandist $f'(x) = 0$ leitud $x$-i tähenduse juures paarituarvulisest järjekorrast, siis ei ole funktsioonil ei maksimumi ega minimumi, vaid vastav $x$ on ***käändepunktiks*** (funktsiooni kujutaval kõverjoonel on selles punktis kumeruse kääne).

Muidugi, võrrandi $f'(x) = 0$ imaginaarsed juured näitavad, et neis, kui võimatuis punktes, ei ole ei pöörde- ega käändepunkti.

*2. Ilmutamatu funktsioon $f(x, y) = 0$.*

$x$-i tähendus, mille juures $y$ omandab maksimumi või minimumi, peavad rahuldama võrrandisi $\frac{\vartheta f(x, y)}{\vartheta x} = 0$, $f(x,y) = 0$ ning võrratust $\frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta y} \neq 0$.

$$y \text{ on maksimum, kui } -\frac{\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}}{\frac{\vartheta f}{\vartheta y}} < 0;$$

$$y \text{ on minimum, kui } -\frac{\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}}{\frac{\vartheta f}{\vartheta y}} > 0.$$

*3. Kahe iseseisva muutuva funktsioon.*

$$z = f(x, y).$$

$x$-i ja $y$-i tähendused, mis $z$ muudavad maksimumi või minimumiks, leiame võrranditest $\frac{\vartheta f(x, y)}{\vartheta x} = 0$ ja $\frac{\vartheta f(x, y)}{\vartheta y} = 0$, kus juures $\frac{\vartheta^2 f \,.\, \vartheta^2 f}{\partial x^2 \,.\, \partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right]^2$ peab olema $> 0$.

Kui $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ mõlemad $< 0$, on maksimum;

kui $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ „ $> 0$, on minimum.

### 4. *Relatiivne (suhteline) maksimum ja minimum.*

Kui funktsioon $u = f(x, y, z)$ maksimum või minimumile vastavate $x, y, z$-i tähendused ühes sellega peavad rahuldama võrrandid: $\varphi(x, y, z) = 0$ ja $\psi(x, y, z) = 0$, siis seame kokku võrrandid.

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

$$2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

$$3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \text{ millistele}$$

ühendame: 4) $\varphi(x, y, z) = 0$,
5) $\psi(x, y, z) = 0$.

Võrranditest 1), 2) ja 3) kõrvaldame abitundmatud $\gamma$, $\eta$, mille tagajärjel ilmub võrrand kolme tundmatuga $x, y, z$. Viimasele ühendame võrrandid 4) ja 5) ning saadud kolmest vôrrandist leiame $x, y, z$-i tähendused, mis $u = f(x, y, z)$ maksimumiks vôi minimumiks muudavad.

## E. Ratsionaalse murru (murdfunktsiooni) lahutamine osalisteks murdudeks.

Osalisteks murdudeks võib lahutada *lihtmurde*, millede üldine kuju:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q}$$

Kui antud murd ei ole lihtmurd, siis tuleb temast täisosa eraldada, kusjuures murdosa lihtmurruna kujuneb.

Nüüd lahutame $F(x)$ algteguriteks, lahendades võrrandi $F(x)=0$. Kui $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ on võrrandi $F(x)=0$ $n$ juurt, siis $F(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots$ Siin juures on võimalikud kolm juhust:

1. Kõik juured on reaalsed ja üksteisest lahknevad.

Osalistes murdudes saame:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\alpha_1}{x-\alpha}+\frac{\beta_1}{x-\beta}+\frac{\gamma_1}{x-\gamma}+\frac{\delta_1}{x-\delta}+\ldots, \text{ üleüldse } n \text{ murdu.}$$

Lugejad $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ leiame võrranditest:

$$\alpha_1=\frac{f(\alpha)}{F^1(\alpha)},\ \beta_1=\frac{f(\beta)}{F^1(\beta)},\ \gamma_1=\frac{f(\gamma)}{F^1(\gamma)},\ \delta_1=\frac{f(\delta)}{F^1(\delta)}, \text{ jne.}$$

2. Juured on osade kaupa võrdsed, kusjuures, muidugi, mõnes osas võib olla üksainus juur, millele võrdset ei leidu. Oletame, et $\alpha$-ga on võrdsed $\mu$ juurt ($\alpha$ on $\mu$-kordne juur) ja $\beta$-ga $\nu$ juurt, kuna teised juured on lihtsad ehk ühekordsed (s. o. nende seas ei ole võrdseid). Siis $F(x)=(x-\alpha)^{\mu}\,.\,(x-\beta)^{\nu}(x-\gamma)(x-\delta)\ldots$

ja
$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\alpha_1}{(x-x)^{\mu}}+\frac{\alpha_2}{(x-\alpha)^{\mu-1}}+\frac{\alpha_3}{(x-\alpha)^{\mu-2}}+\ldots$$
$$+\frac{\alpha_{\mu}}{x-\alpha}+\frac{\beta_1}{(x-\beta)^{\nu}}+\frac{\beta_2}{(x-\beta)^{\nu-1}}+\frac{\beta_3}{(x-\beta)^{\nu-2}}+\ldots$$
$$+\frac{\beta_{\nu}}{x-\beta}+\frac{\gamma_1}{x-\gamma}+\frac{\delta_1}{x-\delta}+\ldots.$$

Lugejad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu}$ leiame koeffitsientidena $z$ astmete juures avalduse

$$\frac{f(\alpha+z)}{(\alpha-p+z)^{\nu}(\alpha-\gamma+z)(\alpha-\delta+z)\ldots}=\alpha_1+\alpha_2 z+\alpha_3 z^2+\ldots$$

$+\alpha_{\mu} z^{\mu-1}+\ldots$ parempoolses osas, missugune on pahempoolse osa lahutus $z$ tõusvate astmete järgi.

Niisama leiame $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{\nu}$ avaldusest:

$$\frac{f(x+z)}{(\beta-\alpha+z)^{\mu}(\beta-\gamma+z)(\beta-\delta+z)}=\beta_1+\beta_2 z+\beta_3 z^2+\ldots$$

$+\beta_{\nu} z^{\nu-1}+\ldots$, kuna $\gamma_1$, $\delta_1$ jne. leiame, nagu eelpool näidatud.

3. Juurtest on kõik või mõned paariviisi imaginaarsed, nii et $F(x)=(x-p+qi)(x-p-qi)\,\Phi(x)$.

On juured kõik lahknevad, siis leiame, nagu esimesel juhusel,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\alpha_1}{x-p+qi}+\frac{\alpha_2}{x-p-qi}+\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

kus $\alpha_1=\dfrac{f(p-qi)}{F^1(p-qi)}=A-iB$, $\alpha_2=\dfrac{f(p+qi)}{F^1(p+qi)}=$ $=A+iB$.

Võrdsete juurtega toimetame, nagu teise juhuse juures.

Tahetakse aga arvamist nii läbi viia, et imaginaarsed juured kaetuks jäävad, siis leiame osalised murrud määramatute koeffitsientide abil, milleks viimase, üldise, näituse võtame.

4. $\dfrac{x}{(x-1)^2\,(x+1)\,(x^2+1)^2\,(x^2+2)}$ osalisteks murdudeks lahutatult $= \dfrac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \dfrac{\alpha_2}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{p_1 x+q_1}{(x^2+1)^2} + \dfrac{p_2 x+q_2}{x^2+1} + \dfrac{\nu x+s}{x^2+2}$; toome võrduse mõlemad pooled ühise nimetajale, milleks on $(x-1^2)\,(x+1)\,(x^2+1)^2\,(x^2+2)$, ja kaotame murrulise kuju, kust saame:

$$x = \alpha_1(x+1)(x^2+1^2)(x^2+2) + \alpha_2(x-1)(x+1)(x^2+1)^2(x^2+2) +$$
$$+\beta_1(x-1)^2(x^2+1)^2(x^2+2) + (p_1 x+q_1)(x-1)^2(x+1)(x^2+2) +$$
$$+ (p_2 x+q_2)\,(x-1)^2\,(x+1)\,(x^2+1)\,(x^2+2) +$$
$$+ (\nu x+s)\,(x-1)^2\,(x+1)\,(x^2+1)^2.$$

Avades parempoolses osas klambrid ja korraldades avalduse $x$-i astmete järgi, võrdleme koeffitsiente ühesuguste $x$-i astmete juures mõlemil pooltel, missugused peavad olema võrdsed. Siit saamegi nii mitu võrrandit, mitu tundmatut koeffitsienti.

Võtame teise, lühema näituse ja viime selle lõpule;

$$\frac{1}{(x^2+4)\,(x-1)^2} = \frac{px+q}{x^2+4} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\alpha_2}{x-1};$$

$$1 = (px+q)\,(x-1)^2 + \alpha_1(x^2+4) + \alpha_2(x^2+4)\,(x-1);$$

$$1 = px^3 - 2px^2 + px + qx^2 - 2qx + q + \alpha_1 x^2 +$$
$$+ 4\alpha_1 + \alpha_2 x^3 + 4\alpha_2 x - \alpha_2 x^2 - 4\alpha_2;$$

$$1 = (p+\alpha_2)\,x^3 + (q-2p+\alpha_1-\alpha_2)\,x^2 + (p-2q+4\alpha_2)\,x +$$
$+ (q + 4\alpha_1 - 4\alpha_2)$; saame võrrandid, milledest leiame $p$, $q$, $\alpha_1$ ja $\alpha_2$, nimelt:

$$p+\alpha_2 = 0;\quad q-2p+\alpha_1-\alpha_2 = 0;\quad p-2q+4\alpha_2 = 0.$$
$$q+4\alpha_1-4\alpha_2 = 1.$$
$$p = {}^2/_{25};\quad q = -{}^3/_{25};\quad \alpha_1 = -{}^1/_{25};\quad \alpha_2 = -{}^2/_{25}.$$

Seega murd $\frac{1}{x^2+4)\ (x-1)^2} = \frac{2x-3}{25\ (x^2+4)} -$

$- \frac{1}{25\,(x-1)^2} - \frac{2}{25\ (x-1)}.$

## F. Integraalvalemid ja võtted.

### *a) Üldalused.*

1. $\int a\,du = a \int du = au + C$, kus $a$ on alaline antud suurus, $u$ argumendi (eelmuutuva) $x$-i funktsioon ja $C$ vabalt valitav alaline suurus.

2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$, kus $u$ ja $v$ on $x$-i funktsioonid (algebralise summa integraal).

3. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (integraali leidmine osade kaupa).

4. $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$, kus $x = \varphi(z)$ (asetähenduse tarvitamine).

5. $\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$ (tuletise või diferentsiaali leidmine integraali märgi all).

6. $\int dy \int f(x,y)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy$ (järjekorra muutmine integraali leidmisel).

## Näitused.

3nda valemi seletuseks (intcegrimine osade kaupa):
$\int x e^x dx = \int x de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$

4nda valemi seletuseks (inteegrimine asetäh. abil:
$\int \frac{xdx}{1+x^2}$; $1+x^2=z$; $d(1+x^2)=dz$ ehk $2xdx=$
$=dz$; $xdx=\frac{dz}{2}$; $\int \frac{xdx}{1+x^2}=\int \frac{dz}{2z}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}=$
$\frac{1}{2} lg\, z + C = \frac{1}{2} lg(1+x^2)+C.$

### *b. Põhivalemid.*

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $n$ on positiivne või negatiivne täis- või murdarv, juhus $n=-1$ välja jäätud.

2. $\int \frac{dx}{x} = \lg n\, x + C$ või $\int \frac{dx}{x} = \lg n\, cx.$

3. $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + C = -\text{arc cos } x + C.$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C = -\text{arc ctg } x + C.$

## c. *Ratsionaalfunktsioonid.*

1. $\int (a+bx)^n \, dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b} + C.$

2. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \text{ lgn } (a+bx) + C = \frac{1}{b} \text{ lgn } c(a+bx).$

3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

4. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b\,(a+bx)} + C.$

5. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \text{ lgn } \frac{1+x}{1-x} + C$, kui $x < 1$.

6. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \text{ lgn } \frac{x-1}{x+1} + C$, kui $x > 1$.

7. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tg}\left(\sqrt{\frac{bx}{a}}\, x\right) + C$

8. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \text{ lgn } \frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} + C$

kui $a > o$, $b > o$.

9. $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} +$
$+ C$, kui $ac - b^2 > o$; $=$
$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \lg n \frac{\sqrt{b^2-ac}-b-cx}{\sqrt{b^2-ac}+b+cx} +$
$+ C$, kui $b^2 - ac > o$; $= -\frac{1}{b+cx} + C$, kui $b^2 = ac$.

10. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\beta}{2c} \lg n\,(a+2bx+cx^2) +$
$+ \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}.$

11. $\int \frac{f(x)\,dx}{\alpha+bx+cx^2}$, kus $f(x)$ on nimetajast kõrgema astmeline täisfunktsioon (astmenäitaja $n > 2$). Siin tuleb integraalalusest murrust enne täisosa eraldada ja siis tarvitada eelmisi võtteid.

12. $\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^n} = \frac{1}{2(ac-b^2)(n-1)} \cdot$
$\cdot \frac{b+cx}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)c}{2(ac-b^2)(n-1)}$
$\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}}$

13. $\int \frac{a+\beta x)\,dx}{(a+2bx+cx^2)^n} = -\frac{\beta}{2c(n-1)} \cdot$
$\cdot \frac{1}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}} + \frac{\alpha c - \beta b}{c}$
$\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^n}.$

14. $\int x^{m-1}(a+bx)^n\,dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}}{(m+n)b} -$

$$-\frac{(m-1)a}{(m+n)b}\int x^{m-2}(a+bx)^n\,dx =$$

$$= \frac{x^m(a+bx)^n}{m+n} + \frac{na}{m+n}\int x^{m-1}(a+bx)^{n-1}\,dx.$$

15. $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + \ldots + px + q}\,dx,$

kus $m$ ja $n$ positiivsed täisarvud ning $m > n$.

Lahutame murru $\frac{f(x)}{F(x)}$ osalisteks murdudeks, nagu peatükis $E$ näidatud, ja tarvitame integreerimisel eelmisi võtteid.

### d. *Irratsionaalfunktsionid.*

1. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3 + C.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C.$

3. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(3\alpha b - 2a\beta +$

$+\beta bx)\sqrt{a+bx} + C.$

4. $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}$; tarvitades asetähendust $\sqrt{a+bx} = z$, leiame avalduse, mis vastab valemitele 7 ja 8 rationaal-funktsioonidest.

5. $\int \frac{\mathrm{f}\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)}{\psi\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)} dx$; asetähendus $\sqrt[n]{a+bx} = z$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin} \frac{x}{a} + C = - \text{arc cos} \frac{x}{a} + C =$

$= 2 \text{ arc tg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$

7. $\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \text{lgn } [x + \sqrt{a^2+x^2}] + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ lgn } [b + cx +$

$+ \sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}] + C$, kui $c > O; =$

$= \frac{-1}{\sqrt{-c}} \text{ arc sin} \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C$, kui $c < O$.

9. $\int \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{\beta}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} +$

$+ \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C.$

10. $\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} + \frac{x^{m-1}X}{mc} -$

$- \frac{(m-1)\, a}{mc} \int \frac{x^{m-2} dx}{X} - \frac{(2m-1\, b}{mc} \int \frac{x^{m-1}\, dx}{X},$

kus $X = \sqrt{a+bx+cx^2}$.

11. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a^2}{2} \text{ lgn } (x +$

$+ \sqrt{a^2+x^2}) + C.$

12. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

13. $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-$

$-\frac{a^2}{2}\operatorname{lgn}(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

14. $\int\sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx=\frac{b+cx}{2c}\sqrt{a+2bx+cx^2}+$

$+\frac{ac-b^2}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}+C.$

15. $\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{a+2bx+cx^2}}$; asetähendus $\frac{1}{x-a}=$ $=y$ ja siis, nagu valem 10.

16. $\frac{A+Bx}{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$; asetähendus $y$, kus $x=\frac{py+q}{y+1}$ ja $p$ ning $q$ on juured süsteemist: $\gamma pq+\beta\ (p+q)+\alpha=o$, $cpq+$ $+b\ (p+q)+a=o$; peale selle uus asetähendus $z=y^2$, mille tagajärjeks kaks integraali $\int\frac{dz}{(\alpha_1+\gamma_1 z)\sqrt{a_1+c_1 z}}$ ja $\int\frac{dz}{(\alpha_2+\gamma_2 z)\sqrt{a_1 z+c_1 z^2}}$ (valemid 4 ja 15).

17. $\int\frac{f(x)\,dx}{F(x)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$; lahutame murru $\frac{f(x)}{F(x)}$ osalisteks ja talitame, nagu valemi 15 ning edasi valemi 16 juures.

18. $\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(\sqrt{a+2bx+cx^2})^3}=\frac{(a\beta-b\alpha)+(b\beta-c\alpha)x}{(b^2-ac)\sqrt{a+2bx+cx^2}}+C.$

## e. *Transtsendentfunktsioonid.*

1. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\lg n \; a} + C.$

2. $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} \Big[ 1 - \frac{n}{ax} + \frac{n\,(n-1)}{a^2 x^2} -$

$- \cdots \overset{+}{\underset{-}{\text{või}}} \frac{n!}{a^n x^n} \Big] + C.$

3. $\int \lg n \; x \, dx = x \; \lg n \; x - x + C.$

4. $\int \frac{\lg n \, x}{x^2} \, dx = - \frac{\lg n \, x}{x} - \frac{1}{x} + C.$

5. $\int \frac{(\lg n \, x)^n}{x} \, dx = \frac{1}{n+1} (\lg n \, x)^{n+1} + C.$

6. $\int \sin^2 x \, dx = - \frac{1}{4} \sin 2\,x + \frac{1}{2}\,x + C.$

7. $\int \cos^2 \; x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2\,x + \frac{1}{2}\,x + C.$

8. $\int \sin \; mx \, dx = - \frac{\cos \; mx}{m} + C.$

9. $\int \cos \; mx \, dx = \frac{\sin \; mx}{m} + C.$

10. $\int \sin \; mx \, \cos \, nx \, dx = - \frac{\cos\,(m+n)x}{2\;(m+n)} -$

$- \frac{\cos\;(m-n)\,x}{2\;(m-n)} + C.$

11. $$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

12. $$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

13. $$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\operatorname{lgn} \cos x + C.$$

14. $$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \operatorname{lgn} \sin x + C.$$

15. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \operatorname{lgn} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

16. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{lgn} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

17. $$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

18. $$\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$$

19. $$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

20. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \operatorname{lgn} \operatorname{tg} x + C.$$

21. $$\int \sin^n x\, dx = \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx$$

(kui $n$ paaritu arv, siis asetähendus $\sin x = z$).

22. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,dx$

(kui $n$ paaritu arv, siis asetähendus $\cos x = z$).

23. $\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,dx.$

24. $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x\,dx.$

25. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

26. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-1} x}$

27. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} +$

$+ \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} +$

$+ \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} \cos^n x\,dx.$

28. $\int \sin^{-m} x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{-m+1} x \cos^{n+1} x}{m-1} +$

$+ \frac{m-n-2}{m-1} \int \sin^{-m+2} x \cos^n x\,dx.$

29. $\int \sin^m x \cos^{-n} x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{-n+1} x}{n-1} +$

$+ \frac{n-m-2}{n-1} \int \sin^m x \cos^{-n+2} x\,dx.$

Kui $m$ või $n$ on paaritu arv, siis leiame integraali kergemalt, kui valemites 27, 28, 29 võtame $\sin x = z$ või $\cos x = z$.

30. $$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) +$$
$$+ C, \text{ kui } a^2 > b^2; =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{lgn} \frac{b + a\cos x + \sin x\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b\cos x} +$$
$$+ C, \text{ kui } a^2 < b^2.$$

31. $$\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b\cos x} C.$$

32. $$\int \frac{\sin x\, dx}{a + b\cos x} = -\frac{1}{b} \operatorname{lgn}(a + b\cos x) + C.$$

33. $$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

34. $$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

35. $$\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

36. $$\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1 - x^2} + C.$$

37. $$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \operatorname{lgn}(1 + x^2) + C.$$

38. $$\int \operatorname{arc\,ctg} x\, dx = x \operatorname{arc\,ctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{lgn}(1 + x^2) + C.$$

### *f. Integraali leidmine funktsiooni reaks lahutamise abil.*

Kui funktsioon $f(x)$ on teatud intervallis muutuva $x$-*i* tarvis koonduv, siis on ka rea liigete integraalide rida koonduv. Niisugusel puhul on võimalus $f(x)$ integraali asemel, kui see otsekohe raskesti võetav, võtta integraalid järjekordseist realiigetest.

Tarvitame siin Mac-Laurin'i rida.

1. $$\int f(x)\,dx = f(o)\,x + f'(o)\frac{x^2}{2} + f''(o)\frac{x^3}{1.2\,3} +$$
$$+ f'''(o)\frac{x^4}{1.2.3.4} + f^{IV}(o)\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

2. $$\int_0^x \frac{dx}{\lg n\ x} = 0{,}5772156649 \cdots + \lg n(-\lg n\,x) +$$
$$+ \lg n\,x + \frac{1}{2}\frac{(\lg n\,x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(\lg n\,x)^3}{1.2.3} + \ldots ;\ o < x < 1.$$

3. $\displaystyle\int_0^x \frac{e^x\,dx}{x}$. Tarvitades asetähendust $e^x = z$, saame:

$$x = \lg n\ z,\ e^x\,dx = dz \text{ ehk } dx = \frac{dz}{e^x} \text{ ja } \int_0^x \frac{e^x\,dx}{x} =$$

$\displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\lg n\,z}$. Selle integraaliga tuleb tallitada, nagu p. 2-*o* näidatud.

## *g. Määratud integraalid.*

1. $\int_b^a = -\int_a^b; \quad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c; \quad \int_a^c - \int_a^b = \int_b^c$

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}.$

3. $\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{a+bx^2} = \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}};$

$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}.$

4. $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$, kui $b < 0$; $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}\, dx = \infty.$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx =$

$= \frac{2.4.6..2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx =$

$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$n$ täisarv $> 0$.

7. $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1; \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

8. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}}$, kus $a$ ja $n$ on positiivsed arvud, $n$ peale selle veel täisarv.

9. $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\, dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$, kui $0 < n < 1$.

### *h. Määratud integraali ligikaudne arvamine.*

Leida $\int_a^b f(x)\, dx$. Jagame intervalli $a$—st $b$—ni s. o. $b-a$ $n$ jakku $\frac{b-a}{n} = h$ ja arvame välja funktsiooni $y = f(x)$ tähenduse: $y_0, y, y_2, y_3 \ldots y_n$, mis vastavad argumendi tähendustele $x = a$. $x = a + h$, $x = a + 2h$, .. $x = a + nh = b$., oletades, et $f(x)$ ja selle alamaltoodud tuletised on selles intervallis pidevad.

1. $$\int_a^b f(x)\, dx = h\left[\tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n\right]$$
$$- \frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_2 h^4}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] -$$
$$- \ldots\ldots + (-1)^{r-1} \frac{B_{r-1} h^{2r-2}}{(2r-2)!}[f^{(2r-3)}(b) -$$
$$- f^{(2r-3)}(a)] + (-1)^r \frac{Br}{(2r)!}\, \varrho\, \frac{(b-a)^{2r+1}}{n^{2r}} M^{(2r)}$$

$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2730}$ jne. $0 < \varrho < 1$, $M^{(r)}$ on suurem väiksemaist $f^{(2r)}(x)$ ja väiksem suuremaist $f^{(2r)}(x)$ intervallis $b$—$a$.

Viimane liige on jääk.

Võtame $\varrho = 1$ ja $M^{(2r)}$ tarvis ükskord suurima ja teine kord väikseima $f^{(2r)}(x)$ tähendustest intervallis $a \ldots b$. Neile tähendustele vastavalt saame rea ülem- ja alampiiri, mille teeme, kui $\int_a^b f(x)\, dx$ tähenduseks võtame kõik rea liikmed ilma viimaseta.

Kui $r = 2$, siis:

2. $$\int_a^b f(x)\, dx = [h\, {}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + {}^1/_2\, y_n] - \frac{1}{12} h^2 [f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{720} \varrho \frac{(b-a)^5}{n^4} M'''.$$

3. Simpsoni valem:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4\, y_1 + 2\, y_2 + 4\, y_3 + 2\, y_4 + \ldots + 4\, y_{n-1} + y_n] - \frac{1}{180} \varrho \frac{(b-a)^5}{n^4} M''''.$$

$n$ on paarisarv.

Valem 2 on ühesugune $r$ juures täpsem, kui valem 3.

Määratud integraali tähenduse võib leida graafiliselt, kui kujutame graafiliselt $f(x)$. Siis on $\int_a^b f(x)\, dx$

pindosa, mille piirab sisse $X$-telje osa $a$ ja $b$ vahel, $a$ ja $b$—*le* vastavad ordinaadid ning funktsiooni kujutava kõverjoone osa $f(a)$ ja $f(b)$ vahel.

## G. Differentsiaalvõrrandid.

### *a. Esimese järjekorra differentsiaalvõrrandid.*

1. $f(x)+\varphi(y)\dfrac{dy}{dx}=o$ ehk $f(x)\,dx+\varphi(y)\,dy=o$

annab lahendamisel: $\int f(x)\,dx+\int\varphi(y)\,dy=C.$

2. $f(x)\,\varphi(y)\,dx+F(x)\,\psi(y)\,dy=0.$ Lahutame muutuvad ja inteegrime: $\displaystyle\int\frac{f(x)}{F(x)}dx+\int\frac{\psi(y)}{\varphi(y)}dy=C.$

3. $f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0.$ Inteegrimine on võimalik, kui $\dfrac{df(x,y)}{dy}=\dfrac{d\varphi(x,y)}{dx}.$ Leiame:

$$\int f(x,y)\,dx+\int\left[\varphi(x,y)-\int\frac{df(x,y)}{dy}dx\right]dy=C.$$

ehk $$\int\varphi(x,y)\,dy+\int\left[f(x,y)-\int\frac{df(x,y)}{dx}dy\right]dx=C.$$

4. Kui inteegrimise võimaluse tunnus $\dfrac{df(x,y)}{dy}=\dfrac{d\varphi(x,y)}{dx}$ puudub, siis teeme võrrandi inteegritavaks, kui tema kordame n. n. **inteegrimisteguriga** $M$.

Viimane peab rahuldama võrrandi:

$$f(x,y)\frac{dM}{dy}-\varphi(x,y)\frac{dM}{dx}=M\left(\frac{d\varphi(x,y)}{dx}-\frac{df(x,y)}{dy}\right)$$

Mõnel juhusel võib $M$ leida võrrandist:

$$\frac{dy}{f(x,y)} = -\frac{dx}{\varphi(x,y)} = \frac{dM}{M\left[\frac{d\varphi(x,y)}{dx} - \frac{df(x,y)}{dy}\right]}.$$

5. Kui võrrand pärast $\frac{dy}{dx}$ ilmutamisel esineb kujul $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, siis kannab differentsiaalvõrrand homogeenvõrrandi (ühtlane) nime.

Võtame asetähenduse $\frac{y}{x} = t$, kust $y = tx, dy = = x\,dt + t\,dx$. Leiame: $\lg n\, x = \int \frac{dt}{f(t) - t} + C.$

6. Kui differentsiaalvõrrandil on kuju:

$$f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x)\,y + \psi(x) = 0.$$

Võtame $y = uv$, kus $u$ ja $v$ on $x$-i funtksioonid. Leiame; $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$. Asetamisel saame:

$$f(x)\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + \varphi(x)\,uv + \psi(x) = 0.$$

$u$ leiame võrrandist $f(x)\frac{du}{dx} + \varphi(x)\,u = 0$

ja saame $\lg n \frac{u}{c} = -\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$ ehk $u = = ce^{-\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx}.$

Siit järgneb $v$ jaoks tingiv võrrand:

$f(x)\,u\frac{dv}{dx} + \psi(x) = 0$ ehk $v =$

$$-\int \frac{\psi(x)}{uf(x)}\,dx + C_1 = -\int\left(\frac{\psi(x)}{cf(x)}\,e^{\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx}\right)dx + C_1.$$

Nüüd leiame:

$$y = uv = e^{-\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx} \left[ -\int \left( \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx\, e^{\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx} \right) dx + C \right]$$

7. Korratud differentsimise kaudu lihtsamaile juhustele toodud võrrandid $y = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$. Võrdame $\frac{dy}{dx} = z$ ja differentsime $x$ suhtes, siis saame: $z = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$. Sagedasti tuleme niisugusel teel eelmisele juhusele. $z$-i tähenduse asetame siis võrrandisse $y = F(x, z)$.

*b. Teise järjekorra differentsiaalvõrrandid.*

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$. Lahendus: $y = \int dx \int f(x) dx + Cx + C_1$.

ja edasi $y = x \int f(x)\, dx - \int x f(x) dx + Cx + C_1$.

2. $\frac{d^2y}{d^2x} = f(y)$. Lahendus: $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\, dy}} + C_1$.

Üldselt oleks käesolev juhus $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) + C_1$.

Üldjuhuse lahendus: Oletades, et $\frac{dy}{dx} = z$, kust $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, kõrvaldame võrranditest $F\left(\frac{dz}{dx}, y\right) = o$ ja $\frac{dy}{dx} = z\, dx$. Lahendamise otstarbel inteegrime osade kaupa lahutamise abil võrrandi $F\left(\frac{zdz}{dy}, y\right) = 0.$

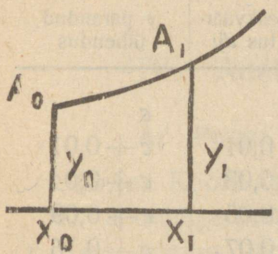
3. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Võtame asetähenduse $\frac{dy}{dx} = z$ ja $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, siis saame võrrandid: $x = \int \frac{dz}{f(x)} + C$ ja $y = \int \frac{zdz}{f(z)} + C^1$, millest $z$-i kõrvaldes leiame soovitava lahenduse.

4. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, x\right)$. Võttes $\frac{dy}{dx} = z$, katsume selle läbi saadavat esimese järjekorra differentsiaalvõrrandit $\frac{dz}{dx} = f(z, x)$ inteegrida. Kui nüüd leiame $z = \varphi(x)$, siis jääb veel inteegrida võrrand $dy = \varphi(x)\,dx$, mis raskust ei sünnita.

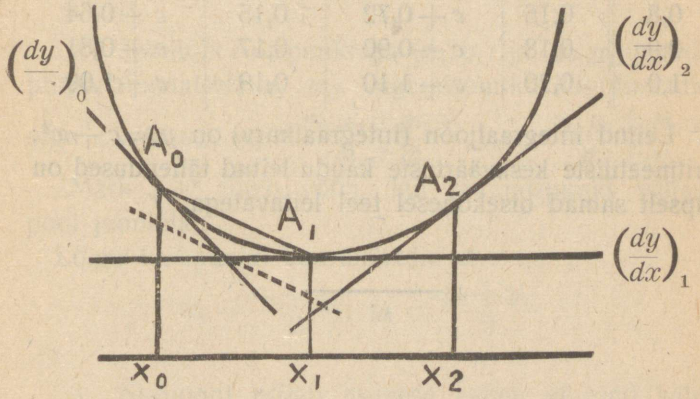
5. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y\right)$. Võtame $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{dz}{dy}$ ja katsume saadavat esimese järjekorra differentsiaalvõrrandit $z\frac{dz}{dy} = f(z, y)$ inteegrida. Kui leiame $z = \varphi(y)$, siis on antud võrrandi integraal: $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$

## *C. Esimese järjekorra differentsialvõrrandi ligikaudne lahendamine.*

On antud differentsialvõrrand $F\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right) = O.$ Peale selle on teada, et võrrandile vastav integraaljoon (kurv) läheb läbi (kulgeb) punkti $A\ (x_0, y_0)$. Siis on võimalik tähendud integraaljoont leida punktide kaupa, alates punktist $A$. Selleks, et leida punkti $A_1$ $(x_1, y_1)$, nimelt ordinaadi $y_1$, kirjutame ligikaudselt $y_1 = y_0 + dx. \left(\frac{dy}{dx}\right)$. $\frac{dy}{dx}$ leiame antud differentsiaalvõrrandist




ligikaudselt, kui $x$, $y$ asemel võtame $x_0$, $y_0$. Nüüd leiame $x_1 = x_0 + dx$ juure kuuluva $y_1$ ja siis võib leida $\frac{dy}{dx}$ tähenduse punktis $A_1$. Kui nüüd $\frac{dy}{dx}$ tähendustest pp. $A_0$ ja $A_1$ võtame keskväärtuse, siis annab see parandud $y_1$ jne. Keskväärtuse geomeetriline tähendus selgub juurde lisatud joonisest.




Kui differentsialvõrrand esineb kujul $f\left(\frac{dy}{dx}, x\right)$, siis on ligikaudne leidmine iseäranis lihtne ja võrdlemisi kaunis täpne.

Alamal võtame näitusena võrrandi, mis ennast ka nii kergesti inteegrida laseb, et täpsust oleks võimalik järelkatsuda.

$\frac{dy}{dx} = 2 \, . \, x \, .$; kui $x = o$, siis $y = c$. Tähenduste leidmiseks võtame $dx = \frac{1}{10}$, siis $dy = 0{,}2x$. Kõik muu leiame alamaljärgnevast tabelist.

| $x =$ | $dy$ | $y$ esimene tähendus | Keskväärtus $dy$ | $y$ parandud tähendus |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $c$ | | $c$ |
| 0,1 | 0,02 | $c+0{,}02$ | 0,01 | $c+0{,}01$ |
| 0,2 | 0,04 | $c+0{,}06$ | 0,03 | $c+0{,}04$ |
| 0,3 | 0,06 | $c+0{,}12$ | 0,05 | $c+0{,}09$ |
| 0,4 | 0,08 | $c+0{,}20$ | 0,07 | $c+0{,}16$ |
| 0,5 | 0,10 | $c+0{,}30$ | 0,09 | $c+0{,}25$ |
| 0,6 | 0,12 | $c+0{,}42$ | 0,11 | $c+0{,}36$ |
| 0,7 | 0,14 | $c+0{,}56$ | 0,13 | $c+0{,}49$ |
| 0,8 | 0,16 | $c+0{,}72$ | 0,15 | $c+0{,}64$ |
| 0,9 | 0,18 | $c+0{,}90$ | 0,17 | $c+0{,}81$ |
| 1,0 | 0,20 | $c+1.10$ | 0,19 | $c+1{,}00$ |

Leitud integraaljoon (integraalkurv) on $y = c + x^2$; aritmeetiliste keskväärtuste kaudu leitud tähendused on täpselt samad otsekohesel teel leitavatega.

# IV. Analüütiline geomeetria.

## A. Punkt ja sirgjoon tasapinnal.

*Märkus.* Koordinaadistik on sirgjooneline täisnurkne.

1. Joonlõigu pikkus $l$ ehk kahe punkti $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ kaugus üksteisest ning joonlõigu kallakus (kaldenurk $\alpha$) $X$-telje positiivse sihi suhtes:

$$l = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2. Joonlõik $l$ otspunktega $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ jagada proportsionaalselt $m_1 : m_2$. Jagamispunkti koordinaadid olgu $x_m$ ja $y_m$. $x_m = \frac{m_1 x_2 \pm m_2 x_1}{m_1 \pm m_2}; y_m = \frac{m_1 y_2 \pm m_2 y_1}{m_1 \pm m_2}$

Märk „—“ tuleb võtta, kui jagamispunkt väljaspool joonlõiku.

Lõigu keskpunkti koordinaadid on:

$$x_k = \frac{x_2 + x_1}{2}; \ y_k = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

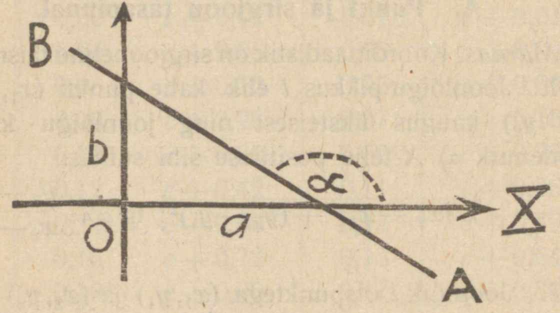
3. Sirgjoont esitab esimese astme võrrand kahe tundmatuga ja, ümberpöördult, esimese astme võrrandit kahe tundmatuga kujutab sirgjoon (kolmest koeffitsiendist võib üks või kaks erakorral võrduda nulliga).

Sirgjoone võrrand võib teisenduda mitmele kujule:

1) $Ax + By + C = 0$.. üldkujuline võrrand.

2) $y = kx + b$... ilmutud kujuline võrrand (ilmutud ühe jooksva koordinaadi suhtes). N. n. nurga

koeffitsient $k$ on $X$-telje positiivsest osast vastupäeva sihis (vastu kellatunni või minutinäitaja liikumise sihti) sirgjooneni loetud nurga ($\alpha$) tangens; $b$ on $Y$-telje lõik algpunktist kuni sirgjooneni. Kui $X$-telje lõiku algpunktist kuni sirgjooneni tähendada $a$, siis $k = -\frac{b}{a}$; kui sirgjoon läheb lõbi algpunkti, siis tuleb $k = \operatorname{tg} \alpha$ määrata, nagu seda (vaata 1) joonlõigu $l$ puhul leitakse.




$AB \; (y = kx + b)$.

$X$-teljega II joone võrrand on $y = b$;
$X$-telje enese „ „ $y = o$;
$Y$-tcljega II joone „ „ $x = a$;
$Y$-telje enese „ „ $x = o$;

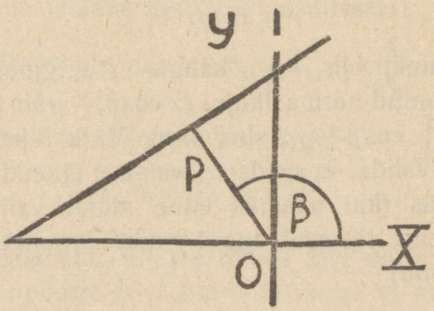
Läbi algpunkti mineva sirgjoone võrrand on $y = kx$.

Võrrand $Ax + By + C = 0$ annab ilmutud kuju tarvis $k = -\frac{A}{B}$ ja $b = -\frac{C}{B}$.

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots$ lõikkujuline võrrand, kus $a$ ja $b$ on $X$- ja $Y$-telje vastavad lõigud algpunktist kuni sirgjooneni.

4) $x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$ normaalkujuline võrrand. $p$ on algpunktist sirgjoonele kujutud normaali

(perpendikulaari) pikkus (kui pikkus, on $p$ alati positiivne); $\beta$ on nurk, mille nimetud normaal sünnitab $X$-telje positiivse sihiga (nurk loetakse alustelje pos. osast normaalini vastu päeva sihis).




Võrrandist $Ax + By + C = o$ saame normaalkujulise, kui seda korrata n. n. normeeriva teguriga

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.\ \text{Siis} \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\beta,$$

$$\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\beta \text{ ja } \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -p.$$

Märk „+“ või „—“ tuleb nii valida, et $p$ suurus oleks positiivne.

4. Läbi antud punkti kujutada sirgjoon (võrrand ilmutud kujul).

1) Kui sirgjoon läheb läbi ühe antud punkti $(x_1, y_1)$, siis on tema võrrand: $y - y_1 = k(x - x_1)$, kus $k$ on vabalt võetav.

2) Kui sirgjoon läheb läbi kahe antud punkti $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$, siis on:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

3) Kui kolm punkti asuvad ühel ja samal sirgjoonel, siis peavad nende punktide koordinaadid rahuldama võrduse:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Punkti $(x_1, y_1)$ kaugus $l$ sirgjoonest, mille võrrand antud normaalkujul $(x \cos \beta + y \sin \beta - p = o)$: $l = \pm (x_1, \cos \beta + y_1, \sin \beta - p)$. Märk „+“ või „—“ tuleb nii valida, et saadava avalduse tähendus muutuks positiivseks (kui avaldus enne märgi valimist ilmub negatiivsena, siis asub antud punkt algpunktile lähemal, kui sirgjoon).

6. Sirgjoonte lõikepunkt.

1)Sirgjoonte $A_1 x + B_1 y + C_1 = o$ ja $A_2 x + B_2 y + C_2 = O$ lõikepunkti koordinaatideks on vastava võrrandite süsteemi juured.

2) Sirgjoone võrrand, mis läbi kahe antud sirgjoone lõikepunkti läheb, on: $A_1 x + B_1 y + C_1 + K (A_2 x + B_2 y + C_2) = O$, kus $K$ on vabalt võetav.

3) Sellel juhusel, kui kolm sirgjoont lõikuvad ühes punktis, peavad sirgjoontele vastavate võrrandite koeffitsiendid rahuldama võrduse:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = O.$$

7. Nurk $(\Theta)$ kahe sirgjoone vahel

1) Sirgjoonte võrrandid on antud ilmutud kujul:

$$(y = k_1 x + b_1 \text{ ja } y = k_2 x + b_2):$$

$$tg\, \Theta = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

2) Võrrandid on antud üldkujul:

$$tg\,\Theta = \pm \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

Et $\Theta$ oleks teravnurk, tuleb mõlemil puhul märk nii valida, et avaldus muutuks positiivseks.

3) Paralleljoonte puhul: $k_2 = k_1$ ehk $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

4) Perpendikulaarjoonte puhul: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ ehk

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

8. Sirgjoonele, milline läheb läbi punkti $(x_1, y_1)$ ja lõikab sirgjoone $(y = kx + b)$ nurga $\Theta$ all, vastab võrrand: $y - y_1 = \frac{k + tg\,\Theta}{1 - k\,tg\,\Theta}(x - x_1)$.

9. Kahe sirgjoone vahelise nurga poolitajaks on sirgjoon, millise võrrand:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \mp \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

(üks märk vastab terav —, teine tõmpnurga poolitajale).

## B. Koordinaatsüsteemide teisendamine.

1. Sirgjoonelise täisnurkse süsteemi teisendamine sirgjooneliseks täisnurkseks.

$x$, $y$ — punkti kordinaadid endises süsteemis,
$x^1, y^1$ — „ „ uues „

1) Algpunkt kantakse teise kohta, mille koordinaadid endises süsteemis $(a, b)$, kuna teljed jäävad endistele paralleelseks:

$$x = a + x^1;\; y = b + y^1.$$

2) Teljed pöörduvad, kusjuures nurk $X$- ja $X^1$-telje positiivsete sihtide vahel ($X$ teljest vastupäeva sihis loetult) on $\alpha$, kuna algpunkt jääb endisele kohale.

$$x = x^1 \cos \alpha - y^1 \sin \alpha,$$
$$y = x^1 \sin \alpha + y^1 \cos \alpha.$$

3) Algpunkt kantakse teise kohta ja teljed pöörduvad:

$$x = a + x^1 \cos \alpha - y^1 \sin \alpha,$$
$$y = b + x^1 \sin \alpha + y^1 \cos \alpha.$$

2. Sirgjoonelise täisnurkse süsteemi teisendamine vildaknurkseks telgede pöördumise puhul, kui $\alpha$ on nurk $X$- ja $X^1$-telje, $\beta$-nurk $Y$- ja $Y^1$-telje vahel (lugemise siht, nagu eelpool tähendud):

$$x = x^1 \cos \alpha + y^1 \cos \beta$$
$$y = x^1 \sin \alpha + y^1 \sin \beta.$$

3. Sirgjoonelise koordinaatide süsteemi teisendamine poolaarsüsteemiks ja ümberpöördult.

1) Sirgjooneline süsteem on täisnurkne, tema algpunkt ja $X$-telje positiivne siht langevad ühte poolaarsüsteemi pooliga (poolusega) ja polaarteljega:

$x = \rho \cos \varphi ; y = \rho \sin \varphi$ ja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$

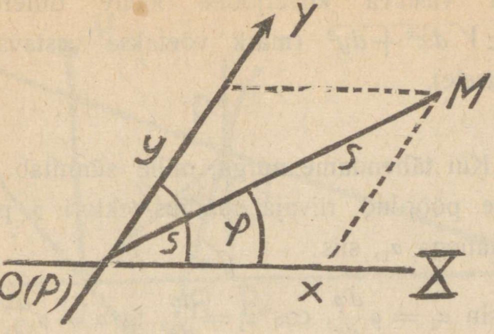
$\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ ehk $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; $\rho$ on raadiusvektor, $\varphi$ — polaarnurk.

2) Sirgjooneline süsteem on vildaknurkne — nurk telgede posit. osade vahel on $\theta$, kuna muude elementide asupaik, nagu eelpool:

$$x = \frac{\rho \sin (\theta - \varphi)}{\sin \theta}, y = \frac{\rho \sin \theta}{\sin \theta} \text{ ja}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + 2\, x\, y \cos \theta}, \cos \varphi = \frac{x + y \cos \theta}{\rho},$$

$$\sin \varphi = \frac{y \sin \varphi}{\rho}.$$




$P$ — pool, $PT$ — polaartelg. Punkt $M$ koordinaadid on ühes süsteemis $(x, y)$, teises — $(\rho, \varphi)$.

## C. Kõverjooned tasapinnal.

### *a. Üldlaused.*

1. Kõverjoone võrrand sirgjoonelises koordinaadistikus ilmutamatul kujul on $F(x, y) = 0$, ilmutud kujul — $y = f(x)$. Kõverjoone võrrand polaarsüsteemis ilmutumatul kujul on $F(\rho, \varphi) = 0$, ilmutud kujul — $\rho = f(\varphi)$.

Mõnikord on arvutamise otstarbel lihtsam võrrand väljendada abimuutuva (parameetri) abil kahe võrrandi kujul: $x = \psi_1(t)$; $y = \psi_2(t)$.

2. Nurk $\alpha$, mille kõverjoonele kujutud riivaja sünnitab $X$-telje positiivse osaga ($X$-teljest riivajani vastupäeva sihis loetud) määratakse täisnurkses süsteemis järgmiselt:

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx};$$

$ds$ on vastava kõverjoone kaare differentsiaal: $ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (märk võetakse vastavalt tg $\alpha$ tähendusele).

3. Kui tähendame nurga, mille sünnitab kasvava $\varphi$ poole pöördud riivaja raadius-vektori $\rho$ positiivse sihiga, tähega $\alpha_1$, siis:

$$\sin \alpha_1 = \rho \frac{d\varphi}{ds}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{d\rho}{ds}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \rho \frac{d\varphi}{d\rho},$$

kus kaare differentsiaal $ds = \pm\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}$ (märk vastavalt tg $\alpha_1$ tähendusele).

4. Punktis $(x, y)$ kujutud riivaja võrrand on:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \text{ ehk } \frac{dF}{dx}(\xi - x) + \frac{dF}{dy}(\eta - y) = 0,$$

kus $\xi$ ja $\eta$ on riivaja jooksvad koordinaadid.

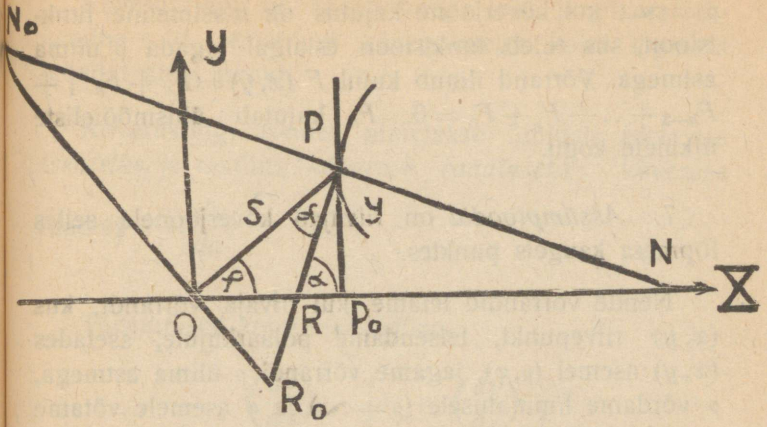
Riivaja (vaata joon.) $PR = y\frac{ds}{dy} =$

$$= y\frac{dx}{dy}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Riivaja alus (subtangente) $P_0R = y\frac{dx}{dy}$.

Polaarriivaja $R_0P = \rho\frac{ds}{d\rho} = \rho\sqrt{1 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2}$.

Polaarriivaja alus $OR_0 = \rho^2\frac{d\varphi}{d\rho}$.




$PO \perp PR,\ PP_0 \perp OX,\ ON_0 \perp OP,\ OP_0 = x.$

5. Normaali võrrand punktis $(x, y)$ on:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x) \text{ ehk } \frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0,$$

kus $\xi$ ja $\eta$ on normaali jooksevad kordinaadid.

Normaal $PN = y\frac{ds}{dy} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$

Normaali alus $P_0N = y\frac{dy}{dx}.$

Polaarnormaal $PN_0 = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}.$

Polaarnormaalalus $ON_0 = \frac{d\rho}{d\varphi}.$

6. Et leida *nurga, mille sünnitab siht lõpmata kaugesse kõverjoone punkti*, tuleb teisendada võrrand polaarkujule ja leida nurk $\varphi$ (või nurgad), mis vastab

$\rho = \infty$; kui kõverjoone kujutus on $n$-astmeline funktsioon, siis tuleb funktsioon esialgul jagada $\rho$ ülima astmega. Võrrand ilmub kujul $F(x, y) = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \ldots + F_1 + F_0 = 0$. $F_k$ kujutab ühismõõteliste liikmete kogu.

7. *Assümptoodid* on riivajad kõverjoonele selles lõpmata kaugeis punktes.

Nende võrrandid leiame, kui riivaja võrrandi, kus $(x, y)$ riivepunkt, teisendame polaarkujule, asetades $(x, y)$ asemel $(\rho, \varphi)$, jagame võrrandi $\rho$ ülima astmega, $\rho$ võrdame lõpmatusele $(\rho = \infty)$ ja $\varphi$ asemele võtame nurga, mille sünnitab siht lõpmata kaugesse punkti.

8. Kui kahel kõverjoonel on ühine punkt, siis on see punkt nende joonte $k^{\text{nda}}$ järjekorra riivamispunktiks sellel puhul, kui mõlema kõverjoone esimesed $k$ tuletist nimetud ühise punkti tarvis on vastavalt paarikaupa võrdsed s. o.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k},$$

kus $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on antud kõverjoonte võrrandid.

Kui riivamise järjekord on paarisarvuline, siis kõverjooned lõikuvad ühises punktis, kui paaritu arvuline, siis riivavad, ilma et üksteist lõikaks.

Antud kõverjoont riivav sirgjoon, millist lühidalt oleme nimetanud riivajaks, annab üldselt 1-se järjekorra ja riivav ring üldselt teise järjekorra riivamispunkti.

9. Ringi, mis antud kõverjoont punktis $(x, y)$ riivab, nimetakse selle kõverjoone kõverusringiks punktis $(x, y)$.

Kõverusringil on kõverjoonega teise järjekorra riivamine s. o. temal on kõverjoonega kolm lõpmata lähedat ühist punkti.

Kõverusringi tsenter nimetakse lühidalt *kõveruse tsentriks* ja raadius *kõveruse raadiuseks;* kõveruse raadius $\rho = \frac{ds}{da}$.

Täisnurkses koordinaadistikus:

$$\rho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{d^2x}}.$$

Polaarkoordinaadistikus:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - v\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Kõverusraadiuse $\rho$ pöördsuurus $\frac{1}{\rho}$ kannab *kõveruse* (kumeruse) nime (mida suurem $\frac{1}{\rho}$, seda suurem on kõverus).

10. Kõveruse tsentri koordinaadid kõverjoone punktile $(x, y)$ vastavalt on $x', y'$, kus $x' = x - \rho\frac{dy}{ds}$, $y' = y + \rho\frac{dx}{ds}$, kus $\rho$ tuleb võtta, nagu p. 9 näidatud.

11. Kõveruse tsentri asupaiga leiame ka, kui punktis $(x, y)$ ja sellele lõpmata lähedas punktis $(x + \varDelta x, y + \varDelta y)$ kujutud normaalid pikendame kuni nad lõikuvad. Saadud punkt on tsenter.

Kõverjoone *evolüüt* on selle kõverjoone kõigi punktide kõverustsentrite geomeetriline koht. Antud kõverjoon ise kannab evolüüti suhtes evolvendi nime.

Evolüüdi võrrandi võib leida, kui evolvendi ja kõverustsentri koordinaatide $x'$ ning $y'$ võrranditest kõverjoone koordinaadid $x$ ja $y$ kõrvaldada ning saadud võrrandis muutuvatena võtta $x'$, $y'$.

Evolüüdi kaare pikkus kahe punkti vahel võrdub kaare otspunktidele vastavate evolvendi punktes võetud kõverusraadiuste pikkuste vahega.

Kõverusraadius on evolvendile normaaljooneks ja evolüüdile riivajaks.

Kui evolüüdile oleks keritud niit, siis kujutaks selle ots lahti kerimisel evolvendi, kui lahtikeritav niidi osa evolüüdile on riivajaks.

Kui evolüüdi võrrand on $F(x', y') = 0$, siis leiame evolvendi võrrandi järgmistest:

$$x = x' - s' \frac{dx'}{ds'}, \quad y = y' - s' \frac{dy'}{ds'}, \quad F(x', y') = 0,$$

kus $s'$ on evolüüdi kaare pikkus alguspunktist lugedes.

12. Kõverjoone kumerus on $Y$ telje positiivsele poole, kui $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$; on Y telje negatiivsele poole, kui $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$. Punktis, kus $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, kuna $\frac{d^3y}{d^3x} \gtreqless 0$, muudab kõverjoon kumeruse sihi läheb negatiivsest sihist positivsesse või ümberpöördult: punkt on *käände*punktiks.

Käärdepunktideks võivad olla võrrandi $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ juured.

Kui need juured samastavad nulliks ka

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots \frac{d^k y}{dx^k} \text{ ja } \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} \lessgtr 0,$$

siis on punkt $(x, y)$ käändepunktis ainult paarisarvulise $k$ juures, paarituarvulise $k$ juures on *pöördepunkt* (maksimum või miinimum).

Käändepunkti puhul on riivajal paarisarvulise järjekorraga riivamine (riivaja lõikab kõverjoont) ja kõverusraadius $\rho=\infty$; pöördepunkti puhul on riivajal riivamine paarituarvulisest järjekorrast.

13. Kõverjoonel on kahekordne punkt,

kui $F(x,y)=0$; $\frac{\partial F}{\partial x}=0$; $\frac{\partial F}{\partial y}=0$. Sellel puhul ilmub

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$ määramatul kujul $\frac{o}{o}$. Kui määramatuse lahendame ja saame $\operatorname{tg}\alpha$ tarvis kaks reaaltähendust, millistele vastavad kaks riivajat, siis on punkt *oluliselt* kahekordseks punktiks. Kui mõlemad $\operatorname{tg}\alpha$ tähendused on võrdsed, siis langevad mõlemad riivajad ühte ja punkt on tagasipöörde punktiks. Kui mõlemad $\operatorname{tg}\alpha$ tähendused on imaginaarsed, siis on punkt eraldud — isoleeritud punktiks.

14, Pinna suuruse (pindala) $s$ arvamine.

a) Pindala kõverjoone, $X$-telje ja kahe ordinaadi $y_0$, $y_1$ (neile vastavad $x_0$, $x_1$) vahel saame, kui võtame:

$$s = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\, dx.$$

b) Pindala kõverjoone ja raadius-vektorite $\rho_0$, $\rho_1$ (neile vastavad $\varphi_0$, $\varphi_1$) vahel saame võttes: $s = {}^1/_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2\, d\varphi.$

15. Kaarepikkuse $l$ arvamine.

Kaarepikkus kahe $x_0$ ja $x_1$ — le vastavate punktide vahel on:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx;$$

polaarkoordinaates

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2}\, d\rho.$$

16. Üldine sissepiirav kõverjoon.

Kui võrrandis $F(x, y, p) = 0$ alalise parameetri võtame muutuva parameetrina, siis saame terve kogu, terve perekonna kõverjoone. Sarnaseid kõverjoone piirab sisse, kui kõigile ühine riivaja, teatud kõverjoon, mis *üldise sissepiirava kõverjoone* nime kannab ja millise võrrandi leiame, kui võrranditest: $F(x, y, p) = 0$, $\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$ kõrvaldame parameetri $p$.

Kui kõverjoonte perekond määratakse võrrandiga $F(x, y, p, q) = 0$, milles kaks muutuvat, võrrandiga $\varphi(p, q) = 0$ seotud parameetrit, siis leiame sissepiirava kõverjoone võrrandi, kui $p$ ja $q$ kõrvaldame võrranditest:

$$\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \; F(x, y, p, q) = 0, \; \varphi(p, q) = 0.$$

17. Trajektoor. Kõverjoon, mis kõverjoonte perekonda $F(x, y, p) = 0$, kus $p$ muutuv parameeter, lõikab täisnurga all, kannab kõverjoonte perekonna trajektoori nime. Kui trajektoori koordinaadid on $\xi, \eta$, siis saame trajektoori võrrandi, kõrvaldades parameetri $p$ võrranditest:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \eta}}{\frac{\partial F}{\partial \xi}} \text{ ja } F(\xi, \eta, p) = 0.$$

Saadud trajektoori võrrandi inteegrimine annab trajektooride perekonna, kui arvesse võtta inteegrimisel ilmuvaid vabalt valitavaid alalisi suurusi.

*b. Teise järjekorra kõverjooned* (***koonuslõiked***).

1. Teise järjekorra kõverjoone võrrand üldsel kujul sirgjoonses koordinaadistikus on:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

See võrrand kujutab:

ellipsi, kui diskriminant $4A.C - B^2 > 0$,
parabooli, „ „ $4A.C - B^2 = 0$,
hüperbooli, „ „ $4A.C - B^2 < 0$.

2. Kõik teise järjekorra kõverjooned võime saada koonuse (kahe poolega) lõikel.

Kui lõikepind asub ühes koonuse pooles ja selle juures: 1) ei ole paralleelne koonuse kujutava joonega, saame *ellipsi;* 2) on paralleelne kujutava joonega, saame *parabooli.* Kui lõikepind asub koonuse mõlemis pooles, saame *hüperbooli.*

Ellips võib erakorral muutuda punktiks, parabool — sirgjooneks ja hüperbool kaheks lõikuvaks sirgjooneks.

3. Koonuslõiget võime vaadelda, kui punkti geomeetrilist kohta.

Kui punkt liigub nii, et temal vahekord $e$ kaugustest antud alalise punktini (tulipunkt = fookus) ja antud sirgjooneni (juhtjoon = direktriss) ei muutu, siis on liikuva punkti geomeetriliseks kohaks:

ellips, kui $e < 1$,
parabool kui $e = 1$,
hüperpool, kui $e > 1$.

Vahekord $e$ kannab vastava kõverjoon *ekstsentrisuse* nime.

4. Ellipsi ja hüperbooli keskpunktiks (tsentriks) on kõverjoonte $2Ax + By + E = 0$ ja $Bx + 2Cy + D = 0$ lõikepunkt. $A$, $B$, $C$, $E$ ja $D$ tähendused on samad, mis $p$. 1-ses.

## *Ring.*

5. Ringi võrrand täisnurkses koordinaadistikus: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, kus $(a, b)$ on ringi keskpunkti koordinaadid. Kui ringi keskpunkt asub koordinaadistiku algpunktis, siis $x^2+y^2=r^2$.

## *Ellips ja hüperbool.*

6. Ellipsi ja hüperbooli keskpunkti suhtes võetud võrrand sirgjoonses täisnurkses koordinaadistikus (keskpunkt asub algpunktis): $Ax^2+Byx+Cy^2=k$.

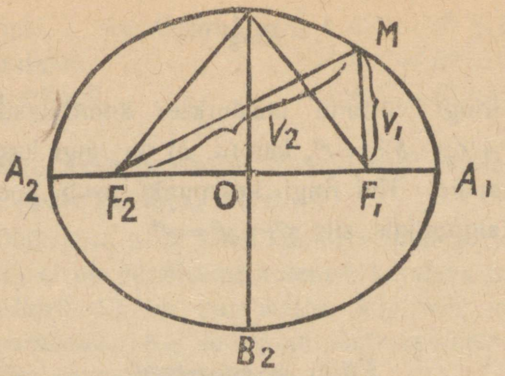
Kui peale selle teljed ühtuvad koordinaattelgiga,

siis: $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$, kus $a=A_1O=A_2O$ ja $b=B_1O=B_2O$

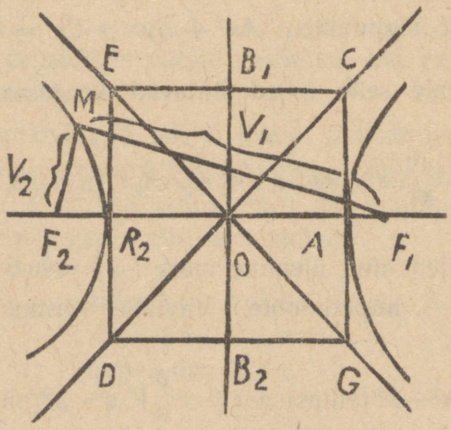
on poolteljed ning ülemine märk (+) vastab ellipsile, alumine (—) hüperboolile. Viimane võrrand annab:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ (ellips) ja } y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \text{ (hüperbool).}$$

7. Tulipunktide $F_1$ ja $F_2$ kaugus keskpunktist $O$: $c=OF_1=OF_2=\sqrt{a^2-b^2}$ ellipsi ja $c=\sqrt{a^2+b^2}$ hüperbooli tarvis. Raadius-vektorid $r_1$ ja $r_2$ annavad: ellipsil $r_1+r_2=2a$ ja $B_1F_1=B_1F_2=a$; hüperboolil $r_1-r_2=\pm 2a$.




Ellips.




Hüperool.

Ekstsentrisus $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ellipsil ja

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ hüperboolil.

Tulipunktile vastav ordinaat $p = \pm a\ (1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$.
2 $p$ tähendus kannab parameetri nime.

8. Raadius — vektorid:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = a - ex \\ r_2 = a + ex \end{array}\right\} \text{ ellips ja } \left.\begin{array}{l} r_1 = -(a - ex) \\ r_2 = a + ex \end{array}\right\} \text{ hüperbool.}$$

9. Riivaja võrrand: $\frac{\xi x}{a^2} \pm \frac{\eta y}{b^2} = 1$.

Normaali võrrand: $\frac{\xi - x}{b^2 x} = \pm \frac{\eta - y}{a^2 y}$; $(x, y)$ on vastava kõverjoone riivamispunkti, $(\xi, \eta)$ riivaja või normaali jooksvad koordinaadid.

10. Hüperbooli jaoks on olemas paar sirgjoone, milleni hüperbooli harud eemaldudes keskpunktist lähenevad alatasa, kuid milleni nad täiesti kunagi ei jõua. Need sirgjooned kannavad *assümptootide* nime: nad on hüperboolile, nõnda ütelda, riivajad lõpmata kauges punktis ($CD$ ja $EG$). Assümptoori võrrand: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$. Assümptoodi nurga koeffitsient $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{b}{a}$. Siit järgneb hüperbooli ehituse viis.

Sirgjoonses koordinaadistikus, kui assümptoodid on võetud telgedeks, on hüperbooli võrrand: $x^1 y^1 = {}^1/_4 (a^2 + b^2)$.

11. Kui $b = a$, siis saame $x^2 \pm y^2 = a^2$ — ellipsi erikuju ring $(x^2 + y^2 = a^2)$ ja võrdtelgne hüperbool

$(x^2 - y^2 = a^2)$. Parameeter $2p = 2a$. Hüperbooli assümptootvõrrand $x^1 y^1 = {}^1/_2\, a^2$. Peale selle: $e = \sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$ ja $135^\circ$.

12. Kõverusraadius

$$\rho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2} = \left(\frac{r_1\, r_2}{ab}\right)^{3/2}.$$

13. Ellipsi ja hüperbooli polaarvõrrandid, kui tulipunkt on pooliks (pooluseks) ja polaartelg ühtub alusteljega $(F_1\, A_1)$:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} = \pm \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}.$$

14. Ellipsi pindala risttelje pos. või neg. osa ja $x$-le vastava samasihilise ordinaadi $y$ vahel

$$s = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Ellipsi kogupindala $s = \pi ab$.

Hüperbooli pindala tipu ja $x$-le vastava pos. või neg. ordinaadi $y$ vahel

$$s_x = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \operatorname{lgn} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

15. Ellipsi ümbermõõt

$$l = \pi(a+b)\left[1 + {}^1/_4 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + {}^1/_{64} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + {}^1/_{256} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \dots\right]$$

ehk lühendatult $l = \pi(a+b)\,w$.

Arvutamisel võib tarvitada tabelit:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a-b}{a+b} = 0{,}1$ | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| $w = 1{,}0025$ | 1,0100 | 1,0226 | 1,0404 | 1,0635 | 1,0922 | 1,1267 | 1,1677 | 1,2155 | 1,2732 |

*Parabool.*

16. Parabooli võrrand, võetud tipu suhtes (tipp on koordinaadistiku algpunktiks, koord. telg ühtub parab. teljega) $y^2 = 2px$, kus $2p$ on parameeter, $p$ tulipunktile vastava koordinaadi pikkus.

17. Tulipunkti $F$ kaugus tipust $A$ s. o. $AF = \frac{p}{2}$. Väljapool parabooli tipus $\frac{p}{2}$ kaugusel paralleelselt $Y$-teljega kujutud sirgjoon on juhtjoon (direktriss).

18. Riivaja võrrand: $\eta y = p(\xi + x)$; normaali võrrand: $\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)$.

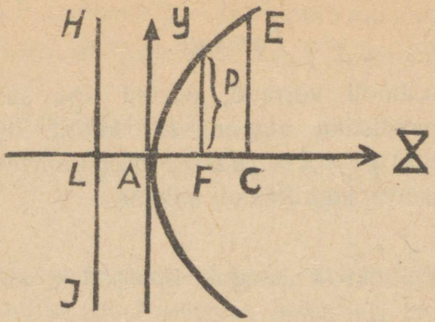
19. Polaarvõrrand, kui tulipunkt on pooliks (pooluseks) ja $FA$ polaarteljeks:

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\varphi} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

20. Kõverusraadius $\delta = \frac{(p + 2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$.

21. Evolüüdi võrrand: $27\,py^2 = 8(x - p)^3$ (semikuupne parabool).

22. Parabooli osa $AEC$ pindala (tipust kuni $x$-le vastava pos. või neg. ordinaadini $y$) tarvis saame valemi: $s_x = {}^2/_3\,xy$. Parabooli iga segmentil, mille aluseks teljel võetud lõik $a$ ja kõrguseks (kaugemal äärel) $h$, võrdub pindala ligikaudselt ${}^2/_3\,ah$.




Parabool.

23. Parabooli kaare $AE$ pikkus tipust kuni $x$-le vastava parabooli punktini

$$l=\frac{p}{2}\left\{\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)}+\lg n\left(\sqrt{\frac{2x}{p}}+\sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right\}.$$

Sellel puhul, kui $\frac{x}{y}$ on väikene murd,

$$l \fallingdotseq y\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

Viimane valem on maksev igasuguse kaare osa kohta, kui $\frac{x}{y}$ asemel võtame $\frac{2h}{a}$ ja $y$ asemel $a$, kus $a$ on kaare projektsioon teljel ja $h$ kaare kaugus teljest.

*Märkus:* Ligikaudse võrduse märgina tarvitame märki $\fallingdotseq$.

## c. Tsükloidid.

*Üldine tsükloid.*

1. Tsükloid on kõverjoon, mille kujutab ringil asuv punkt $A$, kui ring ise ilma libisemata antud sirgjoont mööda edasi weereb.

2. Kui antud sirgjoon on $x$-teljeks ja sirgjoone punkt, millest punkt $A$ sirgjoonel olles oma liikumist algab, koordinaadistiku algpunktiks, siis on tsükloidi võrrand:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),\quad y = r(1 - \cos\varphi), \text{ või}$$

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} \pm \sqrt{(2r-y)\,y},$$

kus $r$ on ringi raadius ja $\varphi$ nurk, mille kujutab punkt $A$-ni tõmmatud raadius $x$-teljega ringi veeremisel (loetud veeremise sihis).

3. Kõverusraadius $\varrho = 4r \sin\frac{\varphi}{2} = 2\sqrt{2ry}$.

Normaalipikkus on $\sqrt{2ry}$, järjelikult, kõverusraadiusest 2 korra lühem.

Tsükloidi evolüüt on samasugule ringile vastav tsükloid.

4. Tsükloidi osale vastav pindala algusest kuni ordinaadini, mis vastab nurgale $\varphi$:

$$s_\varphi = r^2\left(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\right) =$$

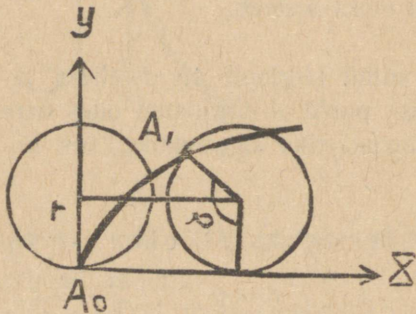
$$= \tfrac{3}{2}rx - \tfrac{1}{2}y\sqrt{2r-y)\,y}$$

Kui $\varphi = 180^0 = \pi$, siis $s = \tfrac{3}{2}\pi r^2$.

5. Kaare pikkus $l = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) =$

$$= 4r - 2\sqrt{2r(2r - y)}.$$

Kui $\varphi = 180^0 = \pi$, siis $s = 4r$.




Tsükloid.

*Epitsükloid ja hüpotsükloid.*

6. Rlng, mille raadius on $r$, veereb ilma libisemata mööda teist ringjoont, mille raadius on $R$. Veereval ringil asuv kindel punkt kujutab kõverjoone, mis kannab *epitsükloidi* nime, kui ringide riivamine veeremisel väline; kannab *hüpotsükloidi* nime, kui ringide riivamine seesmine.

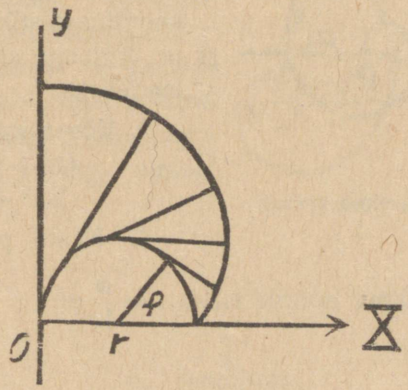
7. Vastavad võrrandid (epitsükloidile vastab ülemine, hüpotsükloidile alumine märk).

$$x = (R \pm r) \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp r. \cos\left(\frac{Rr}{R}\varphi\right);$$

$$y = (R \pm r) \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r \sin\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right).$$

*Ringevolvent.*

8. Sirgjoonel asub kindel punkt, sirgjoon ise aga veereb ilma libisemata mööda ringjoont, mille raadius on $r$. Punkt kujutab liikumisel kõverjoone, mis kannab ringevolvendi nime.




Ringevolvent.

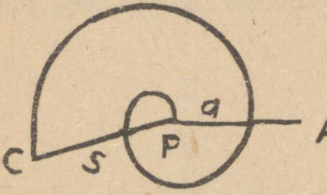
Ringevolvendi võrrand: $x = r\,(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi)$, $y = r\,(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$. kus $r$ on ringi raadius ja $\varphi$ nurk algraadiuse ja veereva ringjoone ning ringi riivamise punktini kujutud raadiuse vahel.

## d. Spiraalid.

*Arhimeedes'e spiraal.*

1. Arhimeedese spiraal tekkib, kui punkt $C$ võrdmöõtselt liigub mööda ühest otsast piiratud sirgjoont (mööda kiirt), alates oma liikumist otspunktist $P$, kuna sirgjoon pöördub oma otspunkti ümber samuti võrdmöõtselt. Liikuv punkt kujutab siis spiraali.

2. Kui sirgjoone terve pöörde ($360^0$) ajal punkti $C$ ärakäidud tee sirgjoonel on $a$, siis saame Arhimeedese spiraali võrrandi polaarkoordinaates:




Arhimeedese spiraal.

$$\rho = \frac{a}{2\pi}\varphi = k\varphi, \text{ kus } k = \frac{a}{2\pi}.$$

Siin on sirgjoone otspunkt koordinaadistiku pooliks ja sirgjoone algseisak polaarteljeks.

3. Kõverusraadius $= \frac{(k^2+\rho^2)^{3/2}}{2k^2+\rho^2}$.

4. Kaare pikkus ligikaudselt mitme pöörde tarvis $l = \frac{a}{4\pi}\varphi^2$.

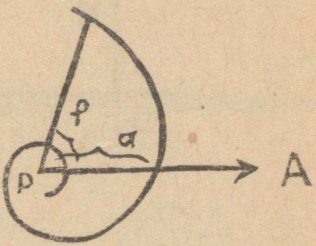
### *Hüperboolne spiraal.*

5. Antud sirgjoonel kujutakse terve rida kontsentrilisi ringe. Kui igal ringil ühest ja samalt poolt äärelt kantakse poolringile kaar, mille pikkus sirgestatult $a$, siis on kaare $a$ otspunkti geomeetriliseks kohaks hüperboolne spiraal, mille võrrand polaar koordinaadistikus:

$$\rho\varphi = a \text{ ehk } \rho = \frac{a}{\varphi}.$$

*Logaritmspiraal.*

6. Logaritmspiraali võrrand on $\rho = ae^{m\varphi}$; kui $\varphi=0$, siis $\rho = a$; kui $\varphi = -\infty$, siis $\rho = 0$. Pool (poolus) $P$ on, järjelikult, spiraalile *assümptoodiliseks* punktiks, millele spiraal negatiivse $\varphi$ absoluutsel suurenemisel vahetpidamata läheneb, ilma et tema selleni kunagi jõuaks.



Logaritmspiraal.

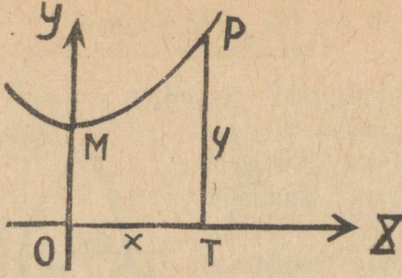
### e. Aheljoon.

1. Aheljoon on tasakaalu jooneks ühtlasel (raskus on proporsionaalne pikkusega) täiesti painduval kahest otsast kinnitud niidil (kõiel, paelal, üldse ahelal).

Aheljoone võrrand on: $y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$

ja $x = h \lg n\left(\frac{y}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\right)$.

Võrrandi niisuguse kuju juures asub koordinaadistiku algpunkt $h$ võrra madalamal, kui ahela sügavaim punkt $M$.




Aheljoon.

2. Kõverusraadius $\rho = \frac{y^2}{h}$.

3. $OMPT$ pindala $= \frac{1}{2}h^2\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h\sqrt{y^2-h^2}$.

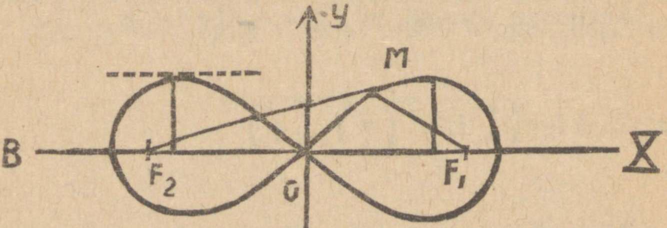
4. Kaare $MP$ pikkus $= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \sqrt{y^2-h^2}$.

## f. Lemniskaat.

Võrrand täisnurkses ja polaarkoordinaadistikus:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2);$$

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$




Lemniskaat: $AO = BO = a$;

$$OF_1 = OF_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Lemniskaadil vabalt valitud punktil $M$ on kahe kindla punktini $F_1$ ja $F_2$ võetud kauguste kasvatis alaline, nimelt $\frac{a^2}{2}$.

### g. Mitmesuguste kõverjoonte võrrandid täisnurkses ja poolaarkoordinaadistikus.

1. Tsissoid: $y^2(a-x)=x^3$; $\rho=\frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$,

2. Konhoid: $(x^2+y^2)(x-b)^2=a^2x^2$; $\rho=$ $=\frac{b}{\cos\varphi}\pm a$.

3. Descartes'e leht: $x^3+y^3=3\,axy$; $\rho=$ $=\frac{3a\ \sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$.

4. Nelileht: $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$; $\rho=a\sin 2\varphi$.

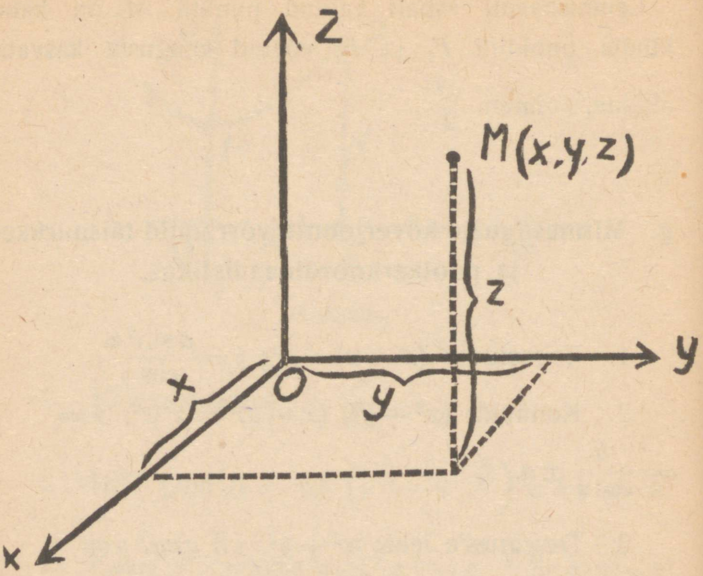
## D. Punkt, sirgjoon ja tasapind ruumis.

1. Joonlõigu pikkus, kui lõigu otspunkteks $(x_1, y_1, z_1)$ ja $(x_2, y_2, z_2)$:

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Joonlõik sünnitab $X$—, $Y$—, ja $Z$— telgedega nurgad: $\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{l}$, $\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{l}$ ja $\cos\gamma=$

$$\frac{z_2-z_1}{l};\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$




Punkti koordinaadid sirgjoonses täisnurkses koordinaadistikus ruumis.

2. Tasapinda kujutab esimese astme võrrand kolme muutuvaga, millise võrrandi võib esitada:

a) üldkujul: $Ax + By + Cz + D = o$,

b) lõikkujul: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

c) normaalkujul: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$.

Kui pind on || mõne koordinaatpinnaga või teljega, siis puuduvad võrrandis vastavad muutuvad.

3. Punkti $(x_1, y_1, z_1)$ kaugus tasapinnast $(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = o)$: $l = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p)$.

4. Et sirgjoont võib vaadelda, kui kahe tasapinna lõikjoont, siis on sirgjoone esitamiseks tarvis kaks võrrandit (parameetrilisel kujutusel võib kolm olla):

$$y = k_1 x + b_1 ; \ z = k_2 x + b_2.$$

5. Sirgjoon, mis läheb läbi punkti $(x_1, y_1, z_1)$ ja sünnitab telgedega nurgad $\alpha$, $\beta$ $\gamma$:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}.$$

Sirgjoon, mis läheb läbi kahe punkti:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

6. Tasapinnaga $Ax + By + Cz + D = O$ perpendikulaarse sirgjoone võrrand: $z - z_1 = \frac{C}{A} (x - x_1)$;

$$z - z_1 = \frac{C}{B} (y - y_1).$$

7. Paralleelpindade võrranditel on koeffitsiendid vastavalt proportsionaalsed. Perpendikulaarpindade tunnuseks on võrdlus: $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

## E. Kõverjooned kahesihilise kõverusega.

### *a. Üldlaused.*

1. Kahesihilise kõverusega kõverjoone võrrandiks on kahe võrrandi süsteem: $F_1 (x, y, z) = O$; $F_2 (x, y, z) = 0$. Kumbgi neist võrrandidest kujutab

üldiselt kõverpinda, milliste lõikejooneks antud kõverjoon (näit., kera ja tsilindri pindade lõikjoon).

Projektsioonina $XY$ ja $XZ$ pindadel saame: $y = \varphi_1(x)$; $z = \varphi_2(x)$, millised võrrandid samuti sirgjoone määravad.

2. Kaare differentsiaal $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

3. Riivaja võrrand punktis $(x, y, z)$:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz},$$

kus $\xi$, $\eta$, $\zeta$ on riivaja jooksvad koordinaadid.

4. Normaalpinna võrrand punktis $(x, y, z)$ on: $(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0$.

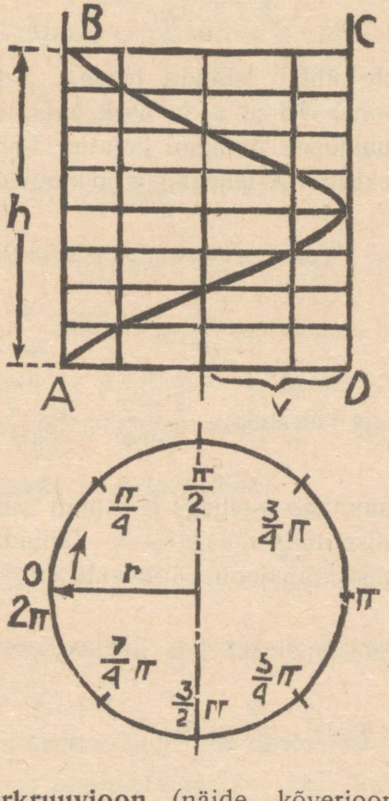
5. Pinda, mis läheb läbi punkti $(x, y, z)$ ja kahe naabruses asuva punkti, nimetakse kõverjoone kõveruspinnaks. Selle pinna võrrand on: $A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$, kus $A = dy\,d^2z - dz\,d^2y$, $B = dz\,d^2x - dx\,d^2z$, $C = dx\,d^2y - dy\,d^2x$.

6. Kahesihilise kõverusega kõverjoone juures vaadeldakse ühe punkti kohta kahte kõverust ja vastavalt kahte kõverusraadiust. *Esimese kõveruse raadius* asub kõveruspinnal ja määrab kõveruse selle pinna sihis: $\rho_1 = \frac{ds}{d\tau}$, kus $s$ on kaar ja $\tau$ nurk kahe üksteise naabruses võetud riivaja vahel.

Kui antud punktile ja naabruses asuva punktile vastavate kõveruspindade vaheline nurk on $\Theta$, siis *teise kõveruse raadius* $\rho_2 = \frac{ds}{d\theta}$.

7. Kõverjoone kõverus on ühesihiline (s. o. kõverjoon asub tasapinnal), kui kõigi punktidele vastavalt $d\vartheta = 0$ ehk

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0.$$




**b. Tsilinderkruuvjoon** (näide kõverjoonest kahesihilise kõverusega).

1. Tsilinderkruuvjoon sünnib punkti liikumisel, kui punkt liigub võrdmõõtselt ringil ja ring samal ajal

liigub võrdmõõtselt sihis, mis perpendikulaarne ringi pinnaga. Ringi enda liikumine kujutab, järjelikult, tsilindri pinna, millel asubgi kruuvjoon.

Tsilindri (antud ringi) raadius on $r$, ühe perioodile (punkti täieline ringkäik) vastava tsilindri kõrgus $h$, tõusu-nurga $\alpha$ tangens:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r} = a.$$

Kui $z$-telg ühtub tsilindri teljega, $X$-telg ringidiameetriga joonel $AB$ ja $\varphi$ on nurk, mille sünnitab algpunktist kruuvjoone punktini kujutud kiire $xy$ pinnal võetud projektsioon $X$-teljega, siis on kruuvjoone võrrand:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = ar\varphi \text{ ehk}$$

$$x = r\cos\frac{z}{ar},\ y = r\sin\frac{z}{ar}.$$

2. Riivaja võrrand: $-\dfrac{\xi - x}{\sin\varphi} = \dfrac{\eta - y}{\cos\varphi} = \dfrac{\zeta - z}{a}.$

Riivaja sünnitab $z$-teljega ja samuti tsilindri kujutavjoonega alalise nurga $\gamma = 90^0 - \alpha$. Tsilindri tasapindsel laotusel esineb kruuvjoon, järjelikult, sirgjoonena.

3. Kõverusraadiused I ja II kõverusel:

$$\rho_1 = r\ (1 + a^2) = \frac{r}{\cos^2\alpha};\ \rho_2 = r\frac{1 + a^2}{a} = \frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{r}.$$

$\rho_1$ ja $\rho_2$ on alalise suurusega, $\rho_1$ selle juure perpendikulaarne $Z$-teljega.

4. Kaare pikkus: $s = \dfrac{r}{\cos\alpha}\varphi = r\varphi\sqrt{1 + a^2}.$

## F. Kõverpinnad.

### *a. Üldlaused.*

1. Kõverpinna võrrand on $F(x, y, z)=0$ ehk $z=f(x, y)$. Tähendame:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \frac{\partial z}{\partial y}=q, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=s, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

2. Riivavpinna võrrand punktile $(x, y, z)$ vastavalt:

$$(\xi-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(\zeta-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

3. Normaali võrrand:

$$\frac{\xi-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\zeta-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

4. Normaalist läbiminev tasapind lõikab kõverpinda kõverjoonel, millist nimetakse *normaallõikeks*.

Normaallõike kõverusraadius:

$$\rho=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\lambda+2s\cos\lambda\cos\mu+t\cos^2\mu},$$

kus $\lambda$, $\mu$, $\nu$ on nurgad, millised riivaja sünnitab koordinaattelgedega.

5. Kaks üksteisega perpendikulaarset normaallõiget nimetakse *pea normaallõigeteks*, kui ühel neist kõverusraadius on maksimum, teisel miinimum.

Pealõigetele vastavad kõveruse raadiused võib leida võrrandite süsteemist:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

6. Avaldus $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ kannab *kõveruse mõõdu,*

avaldus $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ — *keskmise kõveruse* nime.

## b. Teise järjekorra kõverpinuad.

1. Võrrandi üldine kuju:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 xy + 2 b_2 yz + 2 b_3 xz +$$
$$+ 2 c_1 x + 2 c_2 y + 2 c_3 z + d = o.$$

*Tsentrilised kõverpinnad.*

Kui viia koordinaadistiku algpunkt tsentrisse ja koordinaatteljed võtta kõverpinna peatelgede sihil, siis leiame järgmise kujulised võrrandid:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — ellipsoid;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — ühepoolne hüperboloid;

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — kahepoolne hüperboloid;

4) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ — ellipsoidi erikuju kera;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0$ — punkt;

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — koonus;

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ — võimatus (pinda ei ole).

*Tsentritud kõverpinnad.*

3.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \text{ — elliptiline paraboloid} \\[2ex] 2)\ \frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \text{ — hüperboolne paraboloid} \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Alguspunkt}\\ \text{pinnatipus.}\end{array}$$

3) Kui tsilindri pind on perpendikulaarne ühega koordinaatpindadest, siis on tsilindri ja selle koordinaatpinna lõikjoone võrrand ühes sellega ka tsilindri võrrandiks.

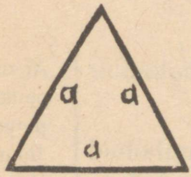
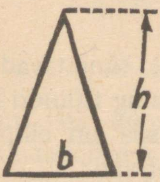
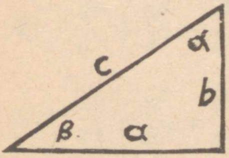
Kui aga tsilindri küljed (külgjoon) sünnitavad telgedega nurgad $\alpha$, $\beta$. $\gamma$ ja $XY$ pinna ning tsilindri lõige on ellips. hüperbool või parabool, siis on elliptilise (+) või hüperboolse (—) tsilindri võrrand:

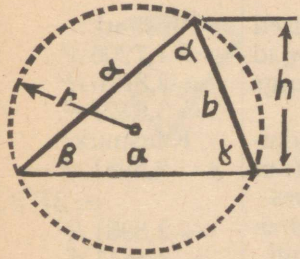
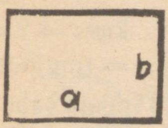
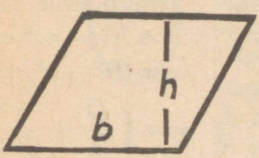
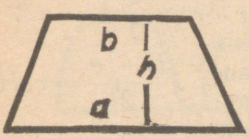
$$\left(x-z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)^2\frac{1}{a^2}\pm\frac{1}{b^2}\left(y-z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^2=1 \text{ ja paraboolsel:}$$

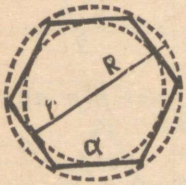
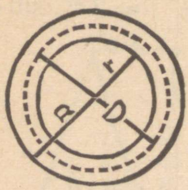
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{2y}{p}-\frac{2x}{q}=0.$$

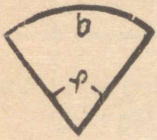
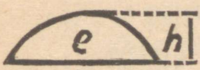
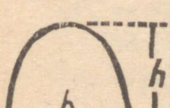
# V. Pind- ja ruumalad.

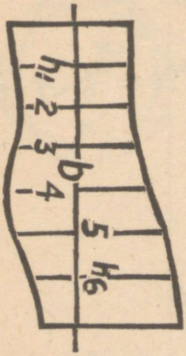
## A. Tasapind.

| | Kujund | Nimetused | Pindala $s$ |
|---|---|---|---|
| 1 |   | Võrdkülgne (külgühtlane) kolmnurk. $a =$ külje- pikkus. | $s = \frac{\sqrt{3}\,.\,a^2}{2} = 0{,}433\,a^2$ |
| 2 |   | Sarikkolm- nurk. $b =$ alus, $h$ — kõrgus. | $s = \frac{b\,.\,h}{2}$ |
| 3 |   | Täisnurkne kolmnurk. $a$ ja $b$ — kateedid, $c =$ hüpote- nuus, $\alpha$ ja $\beta$ — terav- nurgad. | $s = \frac{a\,.\,b}{2} = \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2} = \frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4}$ |

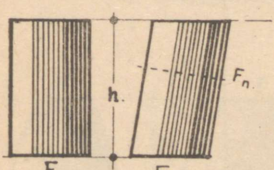
| | Kujund | Nimetused | Pindala $s$ |
|---|---|---|---|
| 4 |  | Isekülgne-kolmnurk. $a$, $b$ ja $c$ — kolmnurga küljed; $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$—külgedele $a$, $b$ ja $c$ vastavad nurgad; $r =$ ümberkujutud (joonetud) ringi raadius; $h =$ kõrgus, vastavalt küljele $a$ s. o. $h_a$. | $s = \frac{a \cdot h}{2} =$ <br> $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ <br> kus $p = \frac{a+b+c}{2}$. <br> Samuti $s = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\gamma =$ <br> $= \frac{a^2}{2} \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} =$ <br> $= 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$. |
| 5 |  | Täisnelinurk (täisnurkne nelinurk). $a$ ja $b$—küljed. | $s = a \cdot b$ |
| 6 |  | Parallelogramm (rööpkülik). $b =$ alus; $h =$ kõrgus. | $s = b \cdot h$ |
| 7 |  | Trapeets. $a$ ja $b$—alused (paralleelküljed); $h =$ kõrgus. | $s = \frac{a+b}{2} \cdot h$ |

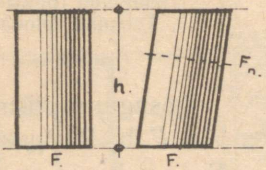
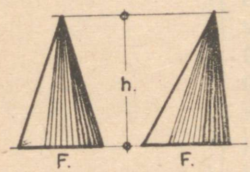
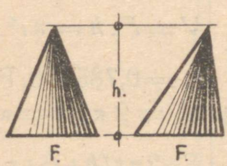
| | Kujund | Nimetused | Pindala $s$ |
|---|---|---|---|
| 8 |  | Korrapärased hulknurgad.<br>$a$=hulknurga külg,<br>$R$=ümberkujutud (ümberjoonestud, joonetud) ringi raadius,<br>$r$= sissekujutud ringi raadius. | Viisnurk:<br>$s = 1{,}7205\, a^2$<br>$= 2{,}3776\, R^2$<br>$= 3{,}6327\, r^2$.<br>Kuusnurk:<br>$s = 2{,}5981\, a^2 =$<br>$= 3\sqrt{3}\, .\, a^2$<br>$= 2{,}5981\, R^2$<br>$= 3{,}4641\, r^2$<br>Kaheksanurk:<br>$s = 4{,}8284\, a^2$<br>$= 2{,}8284\, R^2$<br>$= 3{,}3137\, r^2$ |
| 9 |  | Ring.<br>$r$= raadius (poolläbimõõt),<br>$d$= diameeter (läbimõõt),<br>$c$= ringjoon (ümbermõõt), | $s = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4} =$<br>$= 2\pi r\, \dfrac{r}{2} = c\, .\, \dfrac{r}{2}$<br>kus $c = 2\pi r = \pi d =$<br>= ringjoone pikkus. |
| | | Kahest kontsentrilise ringi raadiustest ja diameetridest olgu väiksemal $r$ ja $\partial$, suuremal $R$ ja $D$ ning diameeter ringil, mis poolel kaugusel nimetud kahe ringivahel, $d$. | Pindala kahe kontsentrilise ringi vahel (ringpindne rõngas)<br>$s = \pi R^2 - \pi r^2 =$<br>$= \pi (R^2 - r^2) =$<br>$= \pi \left(\dfrac{D}{2} + \dfrac{\partial}{2}\right) \left(\dfrac{D}{2} - \dfrac{\partial}{2}\right) = \pi\, \dfrac{D + \partial}{2}\, .$<br>$.\, \dfrac{D - \partial}{2} = \pi . d\, (R - r)$ |

| | Kujund | Nimetus | Pindala $s$ |
|---|---|---|---|
| 10 |  | Ringi sektor (väljalõik). $\varphi$=tsentrinurk, $b$ = kaare pikkus. | $s=\frac{b\,.\,r}{2}=\frac{\pi r^2 \varphi}{360}.$ |
| 11 |  | Ringi segment (lõik). $h$ = kaare kõrgus, $l$ = sidejoon. | $s=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\,.\,\varphi}{180}-\sin\varphi\right)=\frac{r(b-l)+lh}{2}$ |
| 12 |  | Ellips. $a$, $b$ — poolteljed. | $s=\pi ab$ |
| 13 |  | Parabool. $b$ = alus, $h$ = kõrgus. | $s=\frac{2}{3}\,b\,.\,h$ |

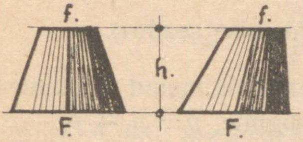
| | Kujund | Nimetus | Pindala $s$ |
|---|---|---|---|
| 14 |  | Igasugused nimeta kujundid. Kujund jaotakse kolm- või nelinurkadeks ja arvatakse nende pindalad kokku. Võib ka teisiti: Tõmmatakse sirgjjoon kujundist läbi ja sellel võetakse üksteisest ühesugusel kaugusel punktid, millistest $n$ kõrgust ($h_1$, $h_2$, . . ., $h_n$) läbi kujutakse, nii et kõrguste vahelolev kujundi äärjoone osa oleks sirgjoon või vähemalt sirgjoone taoline (ligikaudselt sirgjoon) | $s = \frac{(h_1+h_2+h_3 ...+h_n)b}{n}$ |

## B. Kehad ja pinnad ruumis.

| | Keha | Nimetused | Ruumala $V$<br>Külgpind (pindala) $S_k$<br>Täispind (pindala) $S$ |
|---|---|---|---|
| 1 | a) Prisma | $F$ = põhja pindala<br>$p$ = põhja perimeeter<br>$h$ = kõrgus<br><br>Kaldprisma juures:<br>$F_n$ = perpendikulaar-lõikepind<br>$p_n$ = perpendikulaar-lõike perimeeter<br>$l$ = külgserv. | Igasugune prisma:<br>$V = F \,.\, h$. Püstprisma:<br>$S_k = p \,.\, h$,<br>$S = p \,.\, h + 2F$.<br><br>Kaldprismal võib veel teisel viisil:<br>$V = F_n \,.\, l$<br>$S_k = p_n \,.\, l$<br>$S = p_n \,.\, l + 2F$ |
| | |  | |
| | b) Kuup (prisma ja paraleelepipeedi erikuju) | Kuubil:<br>$a$ — serv | Kuubil:<br>$V = a^3$<br>$S = 6a^2$. |
| 2 | Tsilinder | $F$ = põhja pindala<br>$d$ = põhja diameeter<br>$r$ = põhja raadius<br>$F_n$ = perpendikulaar-lõikepind<br>$p_n$ = perp. lõike perimeeter<br>$l$ = külgserv | Igasugune ringpõhjaga tsilinder:<br>$V = F \,.\, h = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4} =$<br>$= 0{,}785\, d^2 h$. Püsttsilinder:<br>$S_k = 2\pi r h = \pi d h$<br>$S = 2\pi r(h+r) + \pi d\left(h + \frac{d}{2}\right)$. |

| | Keha | Nimetused | Ruumala $V$<br>Külgepind $S_k$<br>Täispind $s$ |
|---|---|---|---|
| |  | | Kaldtsilindril võib veel teisel teel:<br>$V = F_n \, . \, l$<br>$S_k = p_n \, . \, l$<br>$S = p_n \, . \, l + 2\,F.$ |
| 3 | Püramiid | $F$ = põhi (põhja pindala)<br>$h$ = kõrgus<br>$t$ = apoteem korrapärisel piiramiidil<br>$p$ = põhja perimeeter | $V = \frac{F\,.\,h}{3}$<br>$S_k$ korrapärasel püramiidil $= \frac{p\,.\,t}{2}$ |
| |  | | |
| 4 | Koonus | $F$ = põhi<br>$h$ = kõrgus<br>$l$ = kujutav joon<br>$d$ = põhja diameeter<br>$r$ = põhja raadius | $V = \frac{F\,.\,h}{3}$ üldse.<br>Ringpõhjalisel:<br>$V = \frac{\pi r^2\,.\,h}{3} =$<br>$= \frac{\pi}{4} \, . \, \frac{d^2\,h}{3} = 0{,}2617\,d^2 h$<br>$S_k = 2\,\pi\,r \, . \, \frac{l}{2} = \pi\,rl =$<br>$= \frac{\pi\,dl}{2}$<br>$S = \pi\,rl + \pi\,r^2 = \pi\,r\,(r + l)$ |
| |  | | |

| | Keha | Nimetused | Ruumala $V$<br>Külgepind $S_k$<br>Täispind $S$ |
|---|---|---|---|
| 5<br>ja<br>6 | Tömppüramiid ja tömpkoonus | $F_1$ ja $F_2$ — põhjad<br>$h$ = kõrgus<br>$d_1$ ja $d_2$ — põhjade diameetrid<br>$r_1$ sa $r_2$ — põhjade raadiused<br>$l$ — apoteem korrapärasel püramiidil ja kujutav joon püstringkoonusel<br>$p_1$ ja $p_2$ = põhjade perimeetrid korrapärasel püramiidil | $V = \frac{h}{3}(F_1 + F_2 + \sqrt{F_1 F_2})$<br>Ringkoonusel peale selle:<br>$V = \frac{\pi h}{3}\ r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$<br>Korrapärasel püramiidil:<br>$S_k = \frac{p_1 + p_1}{2} . l$<br>$S = \frac{p_1 + p_2}{2} . l + F_1 + F_2$<br>Püsiringkoonusel:<br>$S_k = \pi (r_1 + r_2) l$<br>$S = \pi (r_1 + r_2) l + \pi (r_1^2 + r_2^2)$ |




# VI. Tõenäoluse ja vigade arvamine.

## A. Tõenäoluse arvamine.

1. Teatud *sündmuse* tõenäolus *(p)* on murd, mille nimetajaks kõigi nende juhuste arv *(n)*, mis antud sündmuse ootusel võiksid ette tulla, ja lugejaks nende juhuste arv $(a)$, mis antud sündmust sisaldavad:

$$p = \frac{a}{n}$$

Kui kastis on $a$ musta, $b$ punast ja $c$ valget ühetaolist kera, siis on tõenäolus selleks, et ühekordsel kera võtmisel (ilma vaatamata) saame:

musta kera — $\frac{a}{n} = \frac{a}{a+b+c}$;

punase „ — $\frac{b}{n} = \frac{b}{a+b+c}$;

valge „ — $\frac{c}{n} = \frac{c}{a+b+c}$.

$p = 0$ näitab sündmuse võimatust,
$p = 1$ „ „ möödapääsematust.

2. Kui $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_m$ on antud iseseisvate, teine teisest olenematude sündmuste tõenäolused, siis on tõenäolus selleks, et kõik need sündmused ilmuksid korraga või üksteise järel teatud järjekorras, $p = p_1 . . p_2 . p_3 \ldots . . p_m$

(tõenäoluste kordamise seadus).

3. Tõenäolus selleks, et ülalnimetud sündmustest ilmuks üks — ükskõik missugune, $p = p_1 + p_2 + p_3 + + . . + p_m$

(tõenäoluste liitmise seadus).

4. Ühe sündmuse relatiivse tõenõoluse teise suhtes leiame, kui arvesse võtame ainult juhused, mis antud sündmusi sisaldavad. Kui nende sündmuste tõenäolus üldse, s. o. ülalvaadeldud n.n. absoluutne tõenäolus on teada, siis on relatiivsed tõenäolused:

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2} \text{ ja } \frac{p_2}{p_1 + p_2}.$$

5. Kui ühe sündmuse tõenäolus on $p_1$ ja teisel $p_2$, siis on tõenäolus selleks, et teatud järjekorras üks sündmus korduks $m_1$ ja teine $m_2$ korda, $p = p_1^{m_1} . p_2^{m_2}$.

Kui kordumise järjekord ei ole ette nähtud, vaid on vaba, siis on tõenäolus muil samail eeldustel $p =$

$$\frac{(m_1 + m_2)!}{m_1!\ m_2!} . p_1^{m_1} . p_2^{m^2}.$$

## B. Mõõtmise ja vaatlemise vead.

1. Tõenäolus selleks, et viga asub differentsiaalselt väikestes piiride vahes $t$ ja $t + dt$ on $p =$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2} dt.$$

Tõenäolus selleks, et viga asub piirides $t_1$ ja $t_2$, on

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-h^2 t^2} dt.$$

$h$ on alaline koeffitsient, mis oleneb vaatluse täpisusest; teda nimetatakse sellepärast ka täpisuse koeffitsiendiks.

2. Vaatluse tõenäoliseimaks veaks nimetatakse seda eelmises punktis vaadeldud $t$ tähendust, millest viga võib olla ühe ja samasuguse tõenäolusega väiksem või suurem.

Tõenäoliseim viga on ümberpöördult proportsionaalne täpisuse koeffitsiendiga.

Tõenäoliseim viga $v = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma t^2}{n}}$, kus $\Sigma t^2$ on üksikute vigade ruutude summa ja $n$ vigade arv, mis mitmekordsel vaatlemisel või mõõtmisel saadud.

Ümmarguselt oleks $v = {}^2/_3 \sqrt{\frac{\Sigma t^2}{n}}$.

Järelkatsumisel selgub, et 1000 vaatlemisel vigade hulgas ainult 6 viga on, mis neljakordsest $v$ tähendusest suuremad ja viiekordsest $v$ tähendusest väikesemad on.

Harilise arvu mõõtmiste juures peetakse sellepärast viga, mis suurem, kui $5v$, võimatuks.

3. Kui otsitava suuruse tähenduseks võtame keskaritmeetilise mõõtmise või vaatlemise resultaaditest $a_1, a_2, a_3, .. a_n$, s. o. $x_0 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + .. a_n}{n} = \frac{\Sigma a^2}{n}$, siis on viga $w$, mille selle juures teeme, tegelikult küllaldase tõenäolusega piirides $w_0 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n(n-1)}}$, kus $\Sigma \delta^2$ on nende kõrvalkaldumiste ruutude summa, milliste võrra lahkub mõõtmise resultaat keskmisest aritmeetilisest.

Kui aga otsitava suuruse asemel võtame ühe saadud resultaatidest, näituseks $a_k$, siis võime ütelda, et viga asub piirides $w_k = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n-1}}$. s. o. $\sqrt{n}$ korda suurem, kui $w_0$; selle juures ei olene $w_k$ tähendus indeksist $k$, s. o. sellest, missuguse mõõtmise resultaadi võtame otsitava suuruse õige tähenduse asemel.

Tõenäolisem viga oleks jällegi $v_0 = 0{,}6745\, w_0$.

# Sisukord:

## Tabelid:



## I. Aritmeetika ja algebra.



## II. Trigonomeetria (goniomeetria).



## III. Differentsiaal- ja integraalarvamine.

## IV. Analüütiline geomeetria.



## V. Pind- ja ruumalad.



## VI. Tõenäoluse ja vigade arvamine.