TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND
FÜÜSIKA INSTITUUT

MIHKEL RÜNKLA

Kosmoloogilised skalaarsed häiritused skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria üldrelatiivsusteooria piiril

MAGISTRITÖÖ

Juhendaja:
MARGUS SAAL

Tartu 2014

Sisukord

1 Sissejuhatus **3**

2 Kosmoloogia standardmudel **7**

2.1 Üldrelatiivsusteooria 7

2.2 Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri (FLRW) meetrika, konformne ja kosmoloogiline aeg ning Hubble'i parameeter 9

2.3 Ideaalse vedeliku energia-impulsi tensor 10

2.4 Friedmanni võrrandid 11

2.5 Minimaalselt seotud skalaarväli 12

3 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria **14**

3.1 Mõjufunktsionaal ja üldised väljavõrrandid 14

3.2 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria (STG) väljavõrrandid Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri geomeetrias 15

3.3 Konformne teisendus 16

4 Kosmoloogiliste häirituste teooria **18**

4.1 Lineaarsete häirituste teooria 18

4.2 Häirituste kirjeldamine ja kalibratsioonivabadus 19

4.3 Häirituste klassifitseerimine 21

4.4 Erinevad kalibratsioonid 22

4.5 Fourier' teisendus 23

5 Skalaarsed häiritusvõrrandid **25**

5.1 Meetod 25

5.2 Meetrika häiritused 26

5.3 Seostuse kordajad ja kolmruumi kovariantne tuletis 26

5.4 Ricci tensor 28

5.5 Einsteini tensor 29

5.6 Energia-impulsi tensor 30

5.7 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria häiritusvõrrandid 32

5.8 Üldrelatiivsusteooria ja minimaalselt seotud skalaarvälja häiritusvõrrandid . . . 40

6 Võrrandid üldrelatiivsusteooria piiril **42**

6.1 Üldrelatiivsusteooria piiri mõiste 42

6.2 Üldised skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria kosmoloogia võrrandid üldrelatiivsusteooria piiril 44

6.3 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria häiritusvõrrandid üldrelatiivsusteooria piiril 48

6.4 Arutelu 54

Kokkuvõte **57**

Viited **58**

Summary **62**

1 Sissejuhatus

Universumi struktuur on erinevates mastaapides erinev. Väga suures mastaabis on Universumi ruumiline osa homogeenne ja isotroopne, väiksemas mastaabis on homogeensus ja isotroopsus rikutud ja me näeme keerukaid struktuure. Kanooniline arusaam struktuuride tekkest baseerub järjest enam kinnitust leidval [1] seisukohal, et väga varajases Universumis leidis aset Universumi skaalade väga kiire suurenemine lühikese aja jooksul, mida nimetatakse kosmoloogiliseks inflatsiooniks [2], [3], mille käigus skalaarvälja ϕ kvantfluktuatsioonid $\delta\phi_k$ võimendusid [4] ja panid aluse väikestele energiatiheduse häiritustele $\delta = \delta\rho/\rho$. Mikrolainelise taustkiirguse (CMB) vaatlused [5], [6] kinnitavad, et hetkel millal Universum muutus kiirgusele (footonid) läbipaistvaks (st kadus interaktsioon ülejäänud mateeriaga) olid tihedushäiritused suurusjärgus $\delta = 10^{-5}$. Universumi arenedes need energiatiheduse häiritused võimendusid gravitatsioonilise ebastabiilsuse tagajärjel ning põhjustasid mittelineaarsete struktuuride teket [7].

Universumit kirjeldavalt füüsikaliselt teoorialt tuleb nõuda, et ta suudaks anda kooskõlalise kirjelduse erinevatel struktuuritasanditel. Selleks, et mõista, millised füüsikalised protsessid viivad vaadeldava struktuuri tekkele on vaja alusteooriat, mille raames saame uurida võimalikke stsenaariume ja võrrelda neid vaatlustest saadud andmetega. Häirituste arengu kirjeldamisel paisuvas Universumis on alusteooriaks üldjuhul üldrelatiivsusteooria (ÜRT). Lihtsaimal viisil on varajase Universumi inflatsiooniperiood saavutatav gravitatsiooniväljaga minimaalselt seotud skalaarvälja ϕ lisamisega teooriasse [8], [9] . Uurides sellise mudeli raames häirituste arengut [4], [7] on jõutud järeldusele, et mudel ennustab skaalast praktiliselt sõltumatut häiritusspektrit, mis on vaatlustega päris heas kooskõlas [5], [6] .

Häirituste väiksus tähendab väljavõrrandite lineariseerimist homogeense ning isotroopse kolmruumi taustal. Viimane tähendab mingi füüsikalise suuruse käsitlemist teataval viisil keskmistatud suuruse ning väikese häirituse summana. Kuna üldrelatiivsusteooria on invariantne koordinaatteisendustel, siis ei ole see protseduur ühene. Viimast asjaolu tuntakse kosmoloogiliste häirituste teoorias kalibratsioonivabadusena [10], [11], [12], [13]. Kolmruumi sümmeetriaomadused ning võimalus käsitleda füüsikalisi suurusi väljadena lubavad häiritusi jaotada skalaar-, vektor- ning tensorhäiritusteks [7], mis arenevad lineaarses häiritusteoorias üksteisest sõltumatult. Kosmoloogias on huvipakkuvaimad neist esimesed ja viimased, sest skalaarsed häiritused on seotud vaadeldavate struktuuride tekkega, tensorhäiritused on aga tõlgendatavad gravitatsioonilainetena. Hiljutine uurimus [1] väidab, et on leitud varajase Universumi inflatsiooniperioodil tekkinud gravitatsioonilainete vastasmõju kosmilise taustkiirguse footonitega.

Seletamaks hilise Universumi kiirenevat paisumist [14], [15] (mille põhjustaja kohta kasutatakse üldnimetust tume energia, vt ülevaadet [16]) vajab ÜRT täiendamist ja selleks on mitmeid erinevaid võimalusi. Võime modifitseerida nii teooria mateeriasektorit või vaadata ka ÜRT-le alternatiivseid gravitatsiooniteooriaid. Kui tume energia on Universumi arengu vältel konstantne, siis kõneleme ÜRT kontekstis kosmoloogilisest konstandist Λ. Viimase tõlgendamisel vaakumi energiana esineb aga põhimõttelisi probleeme [17]. Lihtsaimad alternatiivid kosmoloogilisele konstandile on lubada dünaamilist tumedat energiat (näiteks lisades teooria mateeriasektorisse minimaalselt seotud skalaarvälja ehk nn kvintessentsivälja [18]) või asendada ÜRT mõne üldisema gravitatsiooniteooriaga. Viimast võib pidada paratamatuks kui tahame luua gravitatsiooni kvantteooriat, sest üldrelatiivsusteooria on olemuslikult klassikaline teooria.

Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria (STG) [19], [20] on üheks näiteks gravitatsiooniteooriast, milles esinevad võrreldes ÜRT-ga täiendavad vabadusastmed (käsitleme neid kolmandas peatükis), aga mis teatud piirjuhul sisaldab endas ka ÜRT-t [21], [22], [23]. Lisaks ÜRT piiri olemasolule STG-s tuleb rõhutada asjaolu, et mitmed teised gravitatsiooniteooria modifikatsioonid on samuti esitatavad STG-na: muutuva valguse kiirusega gravitatsiooniteooria [24], $f(R)$ teooria [25], braanimaailmad [26]. See asjaolu teeb STG piisavalt üldiseks.

Vaatlused kinnitavad, et ÜRT on väga sobilik kirjeldamaks füüsikat Päikesesüsteemis. Nõrga gravitatsioonivälja käsitlemine parametriseeritud post-Newtoni (PPN) lähenduses (vt näiteks [27]) seab ranged piirid kui palju tohib STG erineda ÜRT-st. Seega STG-t alternatiivse teooriana käsitledes peame arvestama, et Päikesesüsteemis peab STG ennustatu väga vähe erinema ÜRT poolt ennustatust. Täiendavad piirangud tulenevad ka kosmoloogiast ja kokkuvõtlikult võib STG juba varajases Universumis erineda vähe ÜRT-st. Kui eeldame varajase Universumi inflatsiooniperioodi olemasolu, siis STG kontekstis tähendab see ühtlasi protsessi, mis viib algselt ÜRT-st erineva STG teooria väga lähedale sellele piirile, mida nimetame ÜRT piiriks [21], [22], [23] ja kus STG erinevused ÜRT-st on väikesed. Väikesed erinevused suurtel skaaladel ja pikkade ajavahemike jooksul (st kosmoloogilistel skaaladel) võivad põhjustada märkimisväärseid efekte.

Kosmoloogilisi häiritusi käsitletakse enamasti ÜRT ning minimaalselt seotud skalaarvälja kontekstis. STG raames on häiritusi on uuritud peamiselt erijuhtudel (näiteks erijuhul kus skalaarvälja Υ seosefunktsioon $\omega(\Upsilon) = konst$, mis vastab nn Bransi-Dicke' teooriale [28]) [29] - [34]. STG teooria ÜRT piiril peaksid STG teooria meetrika ning skalaarvälja dünaamika üsna vähe erinema ÜRT ning minimaalselt seotud skalaarvälja sisaldava teooria dünaamikast. Viimane motiveerib uurima STG häiritusvõrrandeid ÜRT piiril, kus võrrandid võiksid olla lihtsamad kui üldised STG häiritusvõrrandid.

Töö eesmärk ja ülesehitus

Käesoleva töö eesmärgiks on tutvustada kosmoloogiliste häirituste teooriat ning tuletada lineaarsed häiritusvõrrandid STG teooria ÜRT piiril skalaarsete häirituste jaoks kasutades Newtoni ehk longitudinaalset kalibratsiooni. Arvutused on esitatud detailselt ja peaksid olema igal sammul jälgitavad. See on ka põhjus, miks töö kogupikkus ületab lõputööde koostamise juhendis soovituslikuna antud mahtu. Antud töös tegeleme nimelt võrrandite tuletamisega ja häiritusvõrrandite täpsem analüüs jääb käesolevast käsitlusest välja.

Töö sissejuhatuses tutvustasime häiritusteooria kasutamise vajalikkust ning esitasime mõned argumendid, miks oleks vajalik uurida lineaarsete häirituste arengut just STG kontekstis. Veelgi täpsemini, selle teooria ÜRT piiril. Järgnevad kolm peatükki tutvustavad kosmoloogia standardmudelit, STG-t ning kosmoloogiliste häirituste teooriat üldiselt. Nendes peatükkides kasutame õpikuid [35]- [41], millele tekstis igal sammul ei viita. Käsitluses piirdume üksnes materjaliga, mis otseselt seostub või mida on vaja selleks, et mõista lineaarsete häiritusvõrrandite tuletamist STG raames. Viiendas peatükis on tuletatud lineaarsed häiritusvõrrandid STG kontekstis Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri (FLRW) meetrikaga häirimata aegruumi taustal juhul kui kolmruumi geomeetria võib olla nii tasane ($\mathcal{K} = 0$), sfääriline ($\mathcal{K} = 1$) kui ka hüperboolne ($\mathcal{K} = -1$). Mainitud peatükk on taotluslikult suhteliselt iseseisev ning viimase säilitamise huvides sisaldab mõnda kordust, mis lihtsustab teema jälgimist. Kuuendas peatükis defineerime STG teooria ÜRT piiri olukorras, kus kolmruum on tasane ($\mathcal{K} = 0$) ning mateeria on ideaalne vedelik barotroopse võrrandiga $p = \mathrm{w}\rho$. Esmalt tuletame STG võrrandid ÜRT piiril nii, et need sisaldavad nii mateeriat ($\rho \neq 0$) kui ka skalaarvälja Υ omainteraktsiooni ($V(\Upsilon) \neq 0$). Seejärel leiame eelmises peatükis tuletatud häiritusvõrrandid ÜRT piiril. Peatükk lõpeb aruteluga, mille põhisisuks on plaan, kuidas saadud võrrandeid edasi analüüsida. Seitsmes peatükk on kokkuvõte, millele järgneb viidete loetelu ning kokkuvõte inglise keeles.

Tähistused ja kokkulepped

Toome siinkohal olulisemad tähistused ning kokkulepped, mida töös kasutame (toome nad ka esmamainimisel tekstis) ja mis järgivad Misneri, Thorne'i ja Wheeleri monograafiat [42] .

- Meetrika signatuur on $(-,+,+,+)$.
- Kreeka indeksid $\alpha, \beta, \ldots$ tähistavad aegruumi koordinaate ($\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3$), ladina indeksid $i, j, \ldots$ tähistavad 3-ruumi koordinaate ($i, j, \ldots = 1, 2, 3$).
- Riemanni tensor $R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu}$ ja Ricci tensor $R_{\mu\nu}$ on defineeritud vastavalt valemitele (3) ning (4).
- Valguse kiiruse ning Plancki konstant on võetud ühikuliseks $c \equiv h \equiv 1$.
- Kolmruumi kõveruse määrav konstant $\mathcal{K}$ on dimensioonita, mastaabikordaja a ning kosmoloogiline aeg t on pikkuse dimensiooniga, konformne aeg η ning ruumikoordinaadid x^i on dimensioonita.
- Tuletist konformse aja η järgi tähistame priimiga ning tuletist kosmoloogilise aja t järgi täpiga: $\dfrac{dA}{d\eta} \equiv A'$ ja $\dfrac{dA}{dt} \equiv \dot{A}$.
- Osatuletist koordinaadi järgi tähistame komaga: $\dfrac{\partial A}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} A \equiv A_{,\mu}$.
- Kolmruumi kovariantset tuletist tähistame semikooloniga.
- Aegruumi kovariantse tuletise operaatorit tähistame ∇_{μ} -ga.
- Kasutame Einsteini summeerimiskokkulepet, mis tähendab, et üle korduva ülemise ja alumise indeksi tuleb summeerida: $R^{\mu}{}_{\mu} \equiv \sum\limits_{\mu=0}^{3} R^{\mu}{}_{\mu}$ ja $R^{k}{}_{k} \equiv \sum\limits_{k=1}^{3} R^{k}{}_{k}$.
- Lisaks Einsteini summeerimiskokkuleppele kasutame kokkulepet, kus üle korduvate ruumiliste indeksite tuleb summeerida: $\Phi_{,kk} \equiv \sum\limits_{k=1}^{3} \Phi_{,kk}$.
- Töös kasutame järgmiseid lühendeid:

  1. STG: skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria,
  2. ÜRT: üldrelatiivsusteooria,
  3. FLRW: Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri,
  4. PPN: parametriseeritud post-Newtoni.

- Katusega tähistame häiritud suuruseid mitte häirimata suuruseid (häirimata suurused on ruumilised keskmised, mis õigustaks nende tähistamist katusega, aga meie kasutame vastupidist tähistust, sest häirimata suuruseid kasutame arvutustes rohkem ning eelistame neid lihtsamalt tähistada).

2 Kosmoloogia standardmudel

Peatükis teeme lühikokkuvõtte kosmoloogia standardmudelist. Osas 2.1 tutvustame kosmoloogia standardmudeli aluseks olevat üldrelatiivsusteooriat tuues dünaamikat kirjeldavates võrrandites esinevate Einsteini tensori ning energia-impulsi tensori üldised definitsioonid. Osas 2.2 paneme kirja homogeense ning isotroopse aegruumi meetrika, defineerime konformse ja kosmoloogilise aja ning Hubble'i parameetri. Osas 2.3 tõdeme, et FLRW aegruumis on mateeriaks ideaalne vedelik. Osas 2.4 paneme kirja kosmoloogia standardmudeli põhivõrrandid, mis on tuntud Friedmanni võrranditena. Osas 2.5 tutvume minimaalselt seotud skalaarväljaga.

2.1 Üldrelatiivsusteooria

Kosmoloogia standardmudel formuleeritakse üldrelatiivsusteooria (ÜRT) raames. ÜRT kirjeldab aegruumi diferentseeruva muutkonnana $\mathcal{M}$. Muutkonna struktuur tagab teooria üldkovariantsuse – füüsikaliste nähtuste kirjeldamiseks puudub aegruumis eeliskoordinaatsüsteem. Muutkonnal defineeritakse erinevad füüsikalised väljad ning üldkovariantsus väljendub väljavõrrandite koordinaatsüsteemist sõltumatus tensorkujus.

Kauguse ning nurga arvutamise eeskirja määrab lokaalselt aegruumi meetrika, milleks on sümmeetriline bilineaarvorm g. Võrdlemaks välju muutkonna eri punktides on tarvilik seostus $\mathbf{\Gamma}$. Seostuse abil on defineeritud kovariantne tuletis ∇_μ ning seostus määrab geodeetiliste joonte võrrandite kaudu vabade osakeste liikumistrajektoorid. ÜRT-s on meetrika kovariantselt konstantne: $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ ning seostus on väändevaba: $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$. Need tingimused määravad üheselt seostuse meetrika kaudu:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{g^{\sigma\rho}}{2}\left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right) . \tag{1}$$

Komaga tähistame osatuletist vastava indeksiga koordinaadi järgi: $g_{\mu\rho,\nu} = \dfrac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu g_{\mu\rho}$.

ÜRT väljavõrrandid tuletatakse mõjufunktsioonaali

$$S_{_{YRT}} = \frac{1}{16\pi G_N}\int d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + S_{_M}[\chi, g_{\mu\nu}], \tag{2}$$

varieerimisest meetrika järgi. Siin g on meetrilise tensorvälja $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ determinant, G_N on Newtoni gravitatsioonikonstant, $\Lambda = konst$ on kosmoloogiline konstant ning S_M on mateeriaväljade χ mõjufunktsionaal. Esimene liige paremal pool võrdusmärki on Einsteini-Hilberti mõju, milles on kuni meetrika teisi tuletisi sisaldav skalaarne suurus Ricci skalaar R, mis on saadud Ricci tensori $R_{\mu\nu}$ ahendamisel ning viimane on omakorda defineeritud ahendades Riemanni tensori $R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu}$:

$$
\begin{aligned}
R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} &= \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu,\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\,, && (3)\\
R_{\mu\nu} &= R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\,, && (4)\\
R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\right). && (5)
\end{aligned}
$$

Energia-impulsi tensor on defineeritud

$$
T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}S_{\scriptscriptstyle M} \tag{6}
$$

ning viimase abil saame mõjufunktsionaali (2) varieerimisel Einsteini võrranditena tuntud ÜRT väljavõrrandid

$$
G_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu} = 8\pi G_N\, T_{\mu\nu}\,, \tag{7}
$$

kus $G_{\mu\nu}$ on sümmeetriline teist järku tensor, mida nimetame Einsteini tensoriks:

$$
G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu}\,. \tag{8}
$$

Riemanni tensori sümmeetriaomadustest tuleneva Bianchi identsuse tõttu on Einsteini tensori kovariantne divergents null: $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$. Einsteini võrranditest (7) järeldub siis meetrika kovariantse konstantsuse tõttu jäävusseadus mateeriaväljade jaoks:

$$
\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0\,. \tag{9}
$$

Einsteini võrrandite vasakul pool olev Einsteini tensor kirjeldab aegruumi geomeetriat. Võrrandite paremal pool olev mateeriat kirjeldav energia-impulsi tensor näitab ühest küljest, et aegruumi geomeetria määrab selles paiknev mateeria ning teisest küljest, et mateeria liikumise aegruumis määrab viimase geomeetria. Märgime, et kosmoloogilise konstandi Λ võime kirjutada Einsteini võrrandite vasakule niinimetatud geomeetria poolele, kuid samaväärselt võime ta kirjutada ka Einsteini võrrandite paremale poolele ning tõlgendada teda mateeriaväljana, mille energiatihedus on konstantne. Viimasel juhul kirjutame kosmoloogilisele konstandile vastava liikme energia-impulsi tensorina ning kosmoloogilist konstanti võib tõlgendada vaakumi energiana. See tõlgendus on aga problemaatiline [17].

Einsteini võrrandid moodustavad teist järku mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteemi. Sõltumatute võrrandite arvu sõltub aegruumi dimensioonist. ÜRT üldiselt ei eelda kindlat aegruumi dimensiooni, kuid kosmoloogia standardmudelis lähtume neljamõõtmelisest aegruumist. Viimasel juhul võtavad Einsteini tensori mõlemad indeksid neli erinevat väärtust ning sümmeetria tõttu on Einsteini tensoril kümme sõltumatut komponenti. Bianchi identsus vähendab viimaste ning seega ka sõltumatute väljavõrrandite arvu kuuele.

2.2 Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri (FLRW) meetrika, konformne ja kosmoloogiline aeg ning Hubble'i parameeter

Kosmoloogiline printsiip väidab, et Universum on suuremates mastaapides igal pool ühetaoline. Matemaatiliselt tähendab see aegruumi ruumilise osa maksimaalset sümmeetrilisust. Maksimaalselt sümmeetriline ruum on isotroopne ning homogeene. Isotroopsus tähendab, et mingis kindlas aegruumi muutkonna punktis on ruum sõltumata suunast ühesugune. Homogeensus tähendab, et meetrika on kogu muutkonna ulatuses sama. Üldiselt homogeensusest isotroopsust ei järeldu, kuid kui muutkond on igas punktis isotroopne, siis on ta ka homogeenne.

Käsitleme aegruumi neljamõõtmelise muutkonnana, mille kolmruumi osa on maksimaalselt sümmeetriline. Viimasest järeldub, et aegruumi meetrika on intervalli ruudu kaudu esitatav järgmiselt:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j\right], \tag{10}$$

kus γ_{ij} on kolmruumi meetrika:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\right)^{-2}. \tag{11}$$

Meetrikat kujul (10) nimetatakse Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri (FLRW) meetrikaks. Valemis (10) kasutame ristkoordinaate $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ ja konformset aega η ning dimensioonita kordaja $\mathcal{K}$ erinevatele väärtustele ($\mathcal{K} = 0, 1, -1$) vastavad maksimaalselt sümmeetrilise ruumi võimalikud geomeetriad: tasane, sfääriline, hüperboolne. Funktsioon $a(\eta)$ kirjeldab, kuidas muutuvad ruumilised mastaabid ajas ning seetõttu nimetatakse $a(\eta)$-d mastaabikordajaks (antud käsitluses on $a(\eta)$ pikkuse dimensiooniga ning koordinaadid dimensioonita). Märkusena mainime, et kasutame tähistusi, kus ladina indeksid (nt i, j) tähistavad ainult ruumilisi komponente, kreeka indeksid (nt μ, ν) tähistavad kõikvõimalikke komponente.

Kui aegruumi meetrika on kujul (10), siis võime teha kahte tüüpi koordinaatteisendusi, mis ei muuda aegruumi meetrilist struktuuri. Esiteks võime kolmruumi koordinaate nihutada ning pöörata, sest viimased ei mõjuta kolmruumi sümmeetriaomadusi. Teiseks võime parametriseerida ümber ajamuutuja ning ruum jääb viimasest sõltumata igal ajahetkel maksimaalselt sümmeetriliseks. Konformse aja η kõrval kasutame arvutustes kosmoloogilist aega t ning nad on seotud järgmiselt:

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}\,. \tag{12}$$

Käesolevas töös kasutame paralleelselt konformset ja kosmoloogilist aega: väljavõrrandid tuletame konformses ajas ning ÜRT piiri võrrandites kasutame kosmoloogilist aega. Kasutades seost (12) võime alati teisendada suurused konformsest ajast kosmoloogilisse aega ning vastupidi. Paneme siinkohal kirja arvutustes esineva Hubble'i parameetri definitsioonid konformses ning kosmoloogilises ajas:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a(\eta)}\frac{da(\eta)}{d\eta} = \frac{a'}{a}\,, \tag{13}$$

$$H = \frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}\,. \tag{14}$$

Hubble'i parameetrit konformses ajas tähistame $\mathcal{H}$-ga ning kosmoloogilises ajas H-ga. Tuletist konformse aja järgi tähistame primiga, tuletist kosmoloogilise aja järgi täpikesega. Paneme edasiste arvutuste jaoks seose (12) abil kirja, kuidas on seotud $\mathcal{H}$ ja H ning nende tuletised:

$$\mathcal{H} = a^{-1}\frac{da}{d\eta} = a^{-1}a\frac{da}{dt} = \dot{a} = aH\,, \tag{15}$$

$$\mathcal{H}' = a\frac{d}{dt}\Big(aH\Big) = a\dot{a}H + a^2\dot{H} = a^2(H^2 + \dot{H})\,. \tag{16}$$

2.3 Ideaalse vedeliku energia-impulsi tensor

Arvutades FLRW meetrikat kasutades Einsteini tensori komponendid (need arvutame osas 5.5) selgub, et nullist erinevad ainult viimase diagonaalelemendid. Järelikult peab ka energia-impulsi tensor olema diagonaalne. Seega ei saa maksimaalse sümmeetriaga ruum sisaldada suvaliste omadustega mateeriat. FLRW meetrikaga kooskõlas olev energia-impulsi tensor on ideaalse vedeliku energia-impulsi tensor kaasaliikuvates koordinaatides. Ideaalse vedeliku energia-impulsi tensor sõltub kahest skalaarsest funktsioonist, milleks on vedeliku energiatihedus $\rho(\eta)$ ja rõhk $p(\eta)$, mis homogeensuse ja isotroopsuse tõttu ei sõltu ruumikoordinaatidest x^i. Energia-impulsi tensori segakomponendid saame esitada järgmisel viisil:

$$T^{\mu}_{\ \nu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + \delta^{\mu}_{\ \nu}p\,, \tag{17}$$

kus u^μ on vedelikuosakese nelikiirus. Nelikiirus on defineeritud $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$, kus $d\tau$ on vedelikusosakese omaaeg ning kaasaliikuvates koordinaatides $dx^i = 0$ ning $d\tau = dt$. Nelikiiruse jaoks saame $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{dt} = \dfrac{dx^\mu}{d\eta}\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{dx^\mu}{d\eta}a^{-1}$, millest $u^\mu = (a^{-1}, 0, 0, 0)$ ning meetrika abil saame leida kovariantsed komponendid: $u_\mu = (-a, 0, 0, 0)$. Arvutame energia-impulsi tensori segakomponendid:

$$T^0_{\ 0} = -\rho\,, \qquad T^0_{\ i} = T^i_{\ 0} = 0\,, \qquad T^i_{\ j} = \delta^i_{\ j} p\,. \tag{18}$$

Einsteini võrrandite lahendamist võimaldab lihtsustada seos energiatiheduse ρ ning rõhu p vahel ning viimast väljendab barotroopne olekuvõrrand

$$p = \mathrm{w}\rho\,. \tag{19}$$

Järgmiste kosmoloogias huvipakkuvate mateerialiikide puhul on w on konstantne:

$$\mathrm{w} = \begin{cases} 0 & \text{tolm,} \\ \frac{1}{3} & \text{kiirgus,} \\ -1 & \text{kosmoloogiline konstant.} \end{cases} \tag{20}$$

Üldiselt annavad energiatihedusse ning rõhku panuse kõik Universumis leiduvad mateerialiigid[1] ning barotroopne võrrand kujul (19), kus $\mathrm{w} = konst$ ei kehti. Kuna Universumi evolutsiooni erinevatel arenguetappidel domineerivad erinevad energiatiheduse komponendid on barotroopse võrrandi kasutamine mingi konkreetse perioodi käsitlemisel otstarbekas.

2.4 Friedmanni võrrandid

ÜRT väljavõrrandeid (7) FLRW meetrikas (10) tuntakse Friedmanni võrranditena. Eeldame, et mateeriaks on ideaalne vedelik ning energia-impulsi tensori komponendid on antud valemiga (18). Neljamõõtmelises aegruumis on teist järku sümmeetrilisel tensoril kümme sõltumatut komponenti ning Bianchi identsusi arvestades saaksime üldiselt kuus sõltumatut väljavõrrandit, kuid FLRW aegruumis on homogeensuse ning isotroopia tõttu sõltumatuid Einsteini võrrandeid kaks. Einsteini tensori komponendid arvutame osas 5.5 ning siin esitame üksnes tulemuse:

$$G^0_{\ 0} = -\frac{3}{a^2}(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K}) \qquad G^0_{\ i} = G^i_{\ 0} = 0\,, \qquad G^i_{\ j} = -\frac{1}{a^2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K})\delta^i_{\ j}\,. \tag{21}$$

[1] Energia-impulsi tensori komponentides (18) peaksime summerima üle erinevate mateerialiikide energiatiheduste ning rõhkude: $\rho = \sum_i \rho_i$ ja $p = \sum_i p_i$,, kus ρ_i ja p_i on indeksiga i tähistatud mateerialiigi energiatihedus ja rõhk.

Kasutame viimaseid ning energia-impulsi tensori komponente (18) Einsteini võrrandites (7). Komponendid $\mu = 0$ ja $\nu = 0$ annavad seosevõrrandi

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho a^2 - \frac{\Lambda}{3}a^2 - \mathcal{K}\,, \tag{22}$$

Komponendid $\mu = i$ ja $\nu = j$ annavad dünaamilise võrrandi

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -8\pi G_N p a^2 - \Lambda a^2 - \mathcal{K}\,. \tag{23}$$

Energia-impulsi tensori kovariantse divergentsi nulliga võrdumisest (9) saame meetrika kovariantse konstantsuse ning kovariantse tuletise definitsiooni abil:

$$\begin{aligned}\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \nabla^\mu g_{\mu\rho} T^\rho_{\ \nu} = g_{\mu\rho}\nabla^\mu T^\rho_{\ \nu} = \nabla_\rho T^\rho_{\ \nu} = 0\,,\\ \nabla_\rho T^\rho_{\ \nu} = \partial_\rho T^\rho_{\ \nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\rho} T^\lambda_{\ \nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} T^\rho_{\ \lambda} = 0\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Võttes viimases avaldises $\nu = 0$ saab (18) ning seostuse kordajaid (84) kasutades tuletada pidevuse võrrandi:

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0\,. \tag{25}$$

Viimane võrrand pole eelpool kirjapandud Friedmanni võrranditest sõltumatu,[2] kuid leiab kasutust Friedmanni dünaamilise võrrandiga võrreldes mõnevõrra lihtsama kuju tõttu ja on kergesti integreeritav.

Kirjutame Friedmanni võrrandid tasase ruumi ($\mathcal{K} = 0$) eeldusel kosmoloogilises ajas t. Viimase jaoks kasutame seoseid (12), (15) ja (16). Lisaks eeldame, et mateeria rahuldab barotroopset võrrandit (19). Saame järgmised võrrandid:

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \frac{\Lambda}{3}\,, \tag{26}$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi G_N \mathrm{w}\rho - \Lambda\,, \tag{27}$$

$$\dot{\rho} + 3H(1 + \mathrm{w})\rho = 0\,. \tag{28}$$

2.5 Minimaalselt seotud skalaarväli

Kosmoloogia standardmudelis kirjeldame Universumit homogeense ning isotroopsena, mis on vaatlustega heas kooskõlas. Siiski tekib küsimus, miks pole Universum täielikult homogeenne

[2] Kui võrrandid (22) ja (23) kehtivad summaarse rõhu p ja energiatiheduse ρ jaoks, siis (9) ning (25) kehtivad eraldi iga omavahel mitteinterakteeruva mateeria i rõhu p_i ja energiatiheduse ρ_i jaoks.

ning isotroopne ning kust pärinevad tihedushäiritused, mis gravitatsioonilise ebastabiilsuse tõttu kasvavad. Üldisemalt väljendudes on küsimus algtingimuste kohta: milline pidi olema varajane Universum, et ta oleks kooskõlas vaatlustega? Vastus sellele küsimusele oleks: algtingimused pidid olema väga täpselt seatud. Vältimaks täppishäälestatud algtingimusi kasutab kosmoloogia standardmudel skalaarvälja, mis tekitab varajases Universumis väga kiire paisumisega perioodi, mida nimetatakse kosmoloogiliseks inflatsiooniks. Inflatsiooniperioodi abil on võimalik lahendada horisondi ning tasasuse probleemid [38].

Üheks lihtsamaks inflatsiooni tekitavaks mehhanismiks on minimaalselt seotud skalaarväli, mille mõjufunktsionaal on

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi - V_m(\phi)\Big]\,, \tag{29}$$

kus ϕ tähistab skalaarvälja ning $V_m(\phi)$ on skalaarvälja potentsiaal (alaindeks m viitab minimaalselt seotud skalaarväljale). Mõju varieerimisel skalaarvälja järgi saame skalaarvälja võrrandi

$$\nabla^\mu\nabla_\mu\phi - \frac{dV_m}{d\phi} = 0\,. \tag{30}$$

Mõju (29) võime käsitleda mõjus (2) mateeriasektori osana ning energia-impulsi tensori definitsioonist (6) saame arvutada skalaarvälja energia-impulsi tensori segakomponendid:

$$T_{(\phi)}{}^{\mu}{}_{\nu} = \nabla^\mu\phi\nabla_\nu\phi - \Big[\frac{1}{2}\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi + V_m(\phi)\Big]\delta^\mu_\nu\,. \tag{31}$$

Homogeensuse ning isotroopsuse tõttu järeldame, et skalaarväli sõltub ainult ajast: $\phi = \phi(\eta)$. Arvestades energia-impulsi tensori komponente (18) võime defineerida skalaarvälja ϕ energiatiheduse ning rõhu järgmiselt:

$$\rho_\phi = -T_{(\phi)}{}^{0}{}_{0} = \frac{1}{2a^2}(\phi')^2 + V_m\,, \tag{32}$$

$$p_\phi = \frac{T_{(\phi)}{}^{i}{}_{i}}{3} = \frac{1}{2a^2}(\phi')^2 - V_m\,. \tag{33}$$

Paneme tähele, et skalaarvälja rõhk võib olla ka negatiivne ning viimast on vaja inflatsiooni tekitamiseks.

3 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria

Peatükis tutvume lühidalt skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooriaga. Osas (3.1) esitame Jordani raamis STG mõjufunktsionaali ning paneme kirja viimase varieerimisel saadavad üldised väljavõrrandid. Osas (3.2) esitame STG võrrandid FLRW aegruumis. Osas (3.3) arutleme lühidalt konformse teisenduse ning skalaarvälja ümberparametriseerimise teemadel ja tutvustame teooria ümberformuleerimist nn Einsteini raami.

3.1 Mõjufunktsionaal ja üldised väljavõrrandid

Skalaar-tensorgravitatsiooni (STG) mõjufunktsionaal Bergmanni-Wagoneri teoorias Jordani raamis Bransi-Dicke' parametrisatsioonis on esitatav

$$S_{_{JR}} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\Upsilon R - \frac{\omega(\Upsilon)}{\Upsilon}\nabla^\mu\Upsilon\nabla_\mu\Upsilon - 2\kappa^2 V(\Upsilon)\right) + S_{_M}[\chi, g_{\mu\nu}], \tag{34}$$

kus kasutame samu tähistusi nagu mõjus (2) ning $\Upsilon(x^\mu)$ on Ricci skalaariga R mitteminimaalselt seotud skalaarväli, $\omega(\Upsilon)$ ja $V(\Upsilon)$ on skalaarvälja funktsioonid, millest esimest nimetatakse seosefunktsiooniks ja teist ominteraktsiooniks või potentsiaaliks. Konstandi κ^2 defineerime järgmiselt: $\kappa^2 = 8\pi G$. Konstant G on mõjus (34) analoogsel kujul nagu Newtoni gravitatsioonikonstant G_N mõjus (2), kuid üldiselt võib G viimasest erineda: $G \neq G_N$. Konstantide dimensioonid on samad: $[G] = [G_N] = L^2$. Skalaarväli on dimensioonita $[\Upsilon] = 1$ ning $[V] = L^{-4}$. Mõju (34) varieerimisel skalaarvälja Υ järgi saame skalaarvälja jaoks võrrandi

$$\frac{2\omega}{\Upsilon}\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon + R - \frac{\omega}{\Upsilon^2}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon + \frac{1}{\Upsilon}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon - 2\kappa^2\frac{dV}{d\Upsilon} = 0\,. \tag{35}$$

Mõju (34) varieerimisest meetrika järgi on tuletatav võrrand

$$\begin{aligned}\Upsilon G_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\Upsilon + g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon - \frac{\omega}{\Upsilon}\nabla_\mu\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon +\\ +\frac{\omega}{2\Upsilon}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon + g_{\mu\nu}\kappa^2 V = \kappa^2 T_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{36}$$

kus energia-impulsi tensor on defineeritud seosega (6). Meetrikaga $g^{\mu\lambda}$ korrutades saame võrrandi

$$\begin{aligned}\Upsilon G^\lambda_{\ \nu} - g^{\lambda\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu\Upsilon + \delta^\lambda_{\ \nu}\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon - \frac{\omega}{\Upsilon}g^{\lambda\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon +\\ +\frac{\omega}{2\Upsilon}\delta^\lambda_{\ \nu}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon + \delta^\lambda_{\ \nu}\kappa^2 V = \kappa^2 T^\lambda_{\ \nu}\end{aligned} \tag{37}$$

Viimast võrrandit ahendades ning seejärel Ricci skalaari asendamisel võrrandisse (35) on tulemuseks järgmine võrrand:

$$\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon + \frac{1}{2\omega+3}\left(\frac{d\omega}{d\Upsilon}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon + 2\kappa^2(2V - \Upsilon\frac{dV}{d\Upsilon}) - \kappa^2 T\right) = 0\,. \tag{38}$$

3.2 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria (STG) väljavõrrandid Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri geomeetrias

Kosmoloogia standardmudelis järeldus FLRW geomeetria (10) eeldusest, et mateeriaks on ideaalne vedelik, mida kirjeldav energia-impulsi tensor sõltus kahest vaid ajast sõltuvast skalaarsest suurusest, milleks on energiatihedus $\rho(\eta)$ ja rõhk $p(\eta)$. Kui aegruumi meetrika on FLRW, siis ka STG energia-impulsi tensor, mille formaalne definitsioon on sama nagu kosmoloogia standardmudelis, kirjeldab ideaalset vedelikku ning skalaarväli sõltub homogeensuse ja isotroopsuse tõttu ainult ajast: $\Upsilon = \Upsilon(\eta)$. Sellistel eeldustel saame STG väljavõrrandid (36), (38) järgmisel kujul[3] :

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{K} = -\mathcal{H}\frac{\Upsilon'}{\Upsilon} + \frac{1}{6}\frac{(\Upsilon')^2}{\Upsilon^2}\omega(\Upsilon) + \frac{\kappa^2}{\Upsilon}a^2\frac{\rho}{3} + \frac{\kappa^2}{\Upsilon}a^2\frac{V(\Upsilon)}{3}\,, \tag{39}$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K} = -\mathcal{H}\frac{\Upsilon'}{\Upsilon} - \frac{1}{2}\frac{(\Upsilon')^2}{\Upsilon^2}\omega(\Upsilon) - \frac{\Upsilon''}{\Upsilon} - \frac{\kappa^2}{\Upsilon}a^2 p + \frac{\kappa^2}{\Upsilon}a^2 V(\Upsilon)\,, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon'' = -2\mathcal{H}\Upsilon' - \frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon}(\Upsilon')^2 + \frac{\kappa^2 a^2}{2\omega(\Upsilon)+3}(\rho - 3p) + \\ + \frac{2\kappa^2 a^2}{2\omega(\Upsilon)+3}\left[2V(\Upsilon) - \Upsilon\frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon}\right]\,.\end{aligned} \tag{41}$$

Teeme veel kaks eeldust: ruum on tasane ($\mathcal{K} = 0$) ning mateeriaks olev ideaalne vedelik rahuldab barotroopset võrrandit $p = \mathrm{w}\rho$ (19). Nendel eeldustel ning kosmoloogilist aega kasutades on STG võrrandid FLRW-i meetrikas järgmisel kujul:

$$H^2 = -H\frac{\dot\Upsilon}{\Upsilon} + \frac{1}{6}\frac{\dot\Upsilon^2}{\Upsilon^2}\omega(\Upsilon) + \frac{\kappa^2}{\Upsilon}\frac{\rho}{3} + \frac{\kappa^2}{\Upsilon}\frac{V(\Upsilon)}{3}\,, \tag{42}$$

$$2\dot H + 3H^2 = -2H\frac{\dot\Upsilon}{\Upsilon} - \frac{1}{2}\frac{\dot\Upsilon^2}{\Upsilon^2}\omega(\Upsilon) - \frac{\ddot\Upsilon}{\Upsilon} - \frac{\kappa^2}{\Upsilon}\mathrm{w}\rho + \frac{\kappa^2}{\Upsilon}V(\Upsilon)\,, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\ddot\Upsilon = -3H\dot\Upsilon - \frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon}\dot\Upsilon^2 + \frac{\kappa^2}{2\omega(\Upsilon)+3}(1-3\mathrm{w})\rho + \\ + \frac{2\kappa^2}{2\omega(\Upsilon)+3}\left[2V(\Upsilon) - \Upsilon\frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon}\right]\,.\end{aligned} \tag{44}$$

Neid võrrandeid kasutame hiljem ÜRT piiri arvutustuses (osas 6.2). Paneme tähele, et efektiivse gravitatsioonikonstandi $\frac{\kappa^2}{\Upsilon}$ mittenegatiivsuse tagamiseks peab kehtima $\Upsilon \geq 0$.

[3] Võrrandite (39), (40), (41) tuletamiseks vajalikud suurused arvutame peatükis (5), mistõttu ei hakka me siinkohal materjali kordamise huvides arvutuskäiku esitama.

3.3 Konformne teisendus

STG mõjufunktsionaali esitust kujul (34) nimetatakse STG esituseks Jordani raamis. Kasutades meetrika $g_{\mu\nu}$ teisendamiseks konformset teisendust on võimalik teooria ümber formuleerida ja seda protseduuri nimetakse tavaliselt raami vahetuseks. Meetrika konformne teisendus

$$g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\rho) g_{\mu\nu} \,, \tag{45}$$

ei muuda aegruumi põhjuslikku struktuuri [19]. Valemis (45) esinev konformne tegur $\Omega(x^\rho)$ on reaalne ning sõltub üldjuhul aegruumi punktist. Teisendus ei muuda küll aegruumi põhjuslikku struktuuri, küll aga muutub aegruumi geomeetria. Valides sobivalt konformse teguri $\Omega^2 = \Upsilon$, saame skalaar-tensor teooria mõju (34) teisendada kujule:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{2\omega(\Upsilon)+3}{2\Upsilon^2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \Upsilon \tilde{\nabla}_\nu \Upsilon - 2\kappa^2 \frac{V(\Upsilon)}{\Upsilon^2} \right] + S_M[\chi; \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}] \,. \tag{46}$$

Selleks, et mõjufunktsionaalis (46) skalaarvälja Υ kineetiline liige viia kanoonilisele kujule (vt valem (29)), tuleb teha skalaarvälja teisendus: $\Upsilon \to \phi$. Seos välja Υ ja välja ϕ vahel on antud järgmiselt:

$$\phi = \int \sqrt{\frac{2\omega(\Upsilon)+3}{2\kappa^2\,\Upsilon^2}}\, d\Upsilon \,. \tag{47}$$

Pärast konformset teisendust (45) ja skalaarvälja teisendust (47) saame skalaar-tensor teooria formuleeringu nn Einsteini raamis (muutujates $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ja ϕ). Selles raamis on Einsteini võrrandid ja skalaarvälja võrrand esitatavad kujul:

$$\tilde{G}^\mu_{\ \nu} = \kappa^2 \left(\tilde{T}^\mu_{(\phi)\nu} + \tilde{T}^\mu_{\ \nu} \right) \,, \tag{48}$$

$$\tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \phi - \frac{d\tilde{V}}{d\phi} = \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\phi} \tilde{T} \,, \tag{49}$$

kus $\tilde{G}_{\mu\nu}$ on arvutatud meetrikast $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{V} \equiv V[\Upsilon(\phi)] = V/\Upsilon^2$,

$$\tilde{T}^\mu_{(\phi)\nu} = \Omega^{-4}\, T^\mu_{(\phi)\nu} \,, \qquad \tilde{T}^\mu_{\ \nu} = \Omega^{-4}\, T^\mu_{\ \nu} \,, \tag{50}$$

ning $T^\mu_{(\phi)\nu}$ ja $T^\mu_{\ \nu}$ on antud vastavalt valemitega (31) ja (6). Osutub, et mateeria energia-impulsi tensori kovariantne divergents (meetrika $\bar{g}_{\mu\nu}$ järgi) ei ole null:

$$\tilde{\nabla}^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\phi} \tilde{T}\, \tilde{\nabla}_\nu \phi \,. \tag{51}$$

Uurides mõju (46) näeme, et skalaarväli $\tilde{\Upsilon}$ on Einsteini raamis gravitatsiooniga minimaalselt seotud (Ricci skalaar $\tilde{R}$ pole korrutatud skalaarväljaga), kuid muutunud meetrika $\tilde{g}_{\mu\nu}$ tõttu esineb skalaarväli $\tilde{\Upsilon}$ mateeriaväljade mõjus. Viimane asjaolu toob kaasa selle, et Einsteini raamis vabad osakesed ei liigu piki geodeetilisi (võrrandi (51) parem pool ei võrdu nulliga). Järelikult ei kehti Einsteini raamis nõrk ekvivalentsusprintsiip.

Küsimusele Jordani ning Einsteini raami või siis kahe konformse teisenduse ning skalaarvälja ümberdefineerimisega seotud raami füüsikalise ekvivalentsuse kohta pole ühest vastust. Vastus viimasele küsimusele sõltub sellest, mida mõistame füüsikalise ekvivalentsusena [19]. Näiteks kui õnnestuks defineerida nõrk ekvivalentsusprintsiip raamist sõltuvana, siis ei tähendaks printsiibi kehtimine Jordani raamis veel seda, et Einsteini raam poleks viimasega füüsikaliselt samaväärne.

Põhjus, miks me antud töös esitasime STG konformselt teisendatud Einsteini raamis on asjaolu, et on väidetud [43], et häirituste (või ka kvantparanduste) tasemel ei ole Jordani ja Einsteini raamide vahel üksühest vastavust. Kuna me järgnevalt arvutame ka võrranditele (48), (49) ja (51) vastavate häiritusvõrrandite kõik vajalikud liikmed, siis oleks selle vastavuse uurimine võimalik. Mainime seda asjaolu veelkord ka töö lõpus olevas arutelus 6.4.

4 Kosmoloogiliste häirituste teooria

Selles peatükis tutvume kosmoloogiliste häirituste teooriaga. Osas 4.1 teeme sissejuhatavad märkused. Osas 4.2 anname esimest järku häirituse definitsiooni ning arutleme kalibratsioonivabaduse üle kosmoloogiliste häirituste teoorias. Osas 4.3 klassifitseerime häiritusi nende käitumise järgi kolmruumi pööretel ning neid väljadena käsitledes. Osas 4.4 tutvustame sünkroonset ning Newtoni kalibratsiooni. Osas 4.5 defineerime häirituste Fourier' teisenduse ning seletame viimase mõtet.

4.1 Lineaarsete häirituste teooria

Kirjeldamaks füüsikat erinevatel mastaapidel on üheks võimaluseks panna füüsikalised suurused kirja järgmisel kujul:

$$Q = Q^{(0)} + \lambda Q^{(1)} + \lambda^2 Q^{(2)} + \lambda^3 Q^{(3)} + ... \tag{52}$$

Siin füüsikalist suurust Q kirjeldavad kordajad $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$ on kõik sama suurusjärku (või identselt nullid) ning λ määrab suurusjärgu. Kui λ on piisavalt väike, siis on suuruse Q avaldises olulised vaid esimesed liikmed. Siis nimetame suurust $\lambda Q^{(1)}$ suuruse Q esimest järku häirituseks ning suurust $\lambda^2 Q^{(2)}$ suuruse Q teist järku häirituseks. Suurima λ astmega liige, mida teooria arvutustes arvestab, määrab teooria järgu: kui arvestame liiget $\lambda Q^{(1)}$, aga mitte liiget $\lambda^2 Q^{(2)}$, siis on tegu esimest järku häiritusteooriaga, kui arvestame ka liiget $\lambda^2 Q^{(2)}$, aga mitte enam liiget $\lambda^3 Q^{(3)}$, siis on tegu teist järku häiritusteooriaga.

Kosmoloogias on häiritusteooria asjakohane, sest suuremates ruumiskaalades on Universum homogeenne ja isotroopne, kuid väiksemates ruumiskaalades on tekkinud keerukad struktuurid. Praktilistes arvutustes ülaltoodud järku määravat suurust λ ei kasutata ning esimest järku häiritusteooria jaoks kasutame tähistust

$$Q(\eta, x^i) = Q^{(0)}(\eta) + \delta Q(\eta, x^i), \tag{53}$$

kus δQ on Q esimest järku häiritus ning $Q^{(0)}$ on Q-le vastav häirimata suurus. Siin on oluline, et δQ on oluliselt väiksem kui $Q^{(0)}$: $\delta Q \ll Q^{(0)}$. Valemis (53) oleme sulgudes väljendanud sõltuvusi aja- ning ruumikoordinaatidest. Homogeense ning isotroopse ruumi korral sõltub häirimata suurus $Q^{(0)}$ ainult ajast (edaspidi nimetame $Q^{(0)}$-i suuruse Q väärtuseks taustal või taustaväärtuseks). Häiritus δQ sõltub ajast ning ruumikoordinaatidest ning ta on defineeritud nii, et tema keskmistatud väärtus üle kogu ruumi on võrdne nulliga. Viimane tähendab, et suuruse Q ruumiline keskmine on $Q^{(0)}$.

4.2 Häirituste kirjeldamine ja kalibratsioonivabadus

Häirituste kirjeldamiseks esimest järku häiritusteoorias jagame füüsikalise suuruse taustaväärtuse ning häirituse summaks. Häiritud suurus on defineeritud häiritud aegruumis $\mathcal{M}$, taustaväärtus aga häirimata aegruumis $\mathcal{M}_0$ ning häiritud suuruse ja taustaväärtuse võrdlemiseks tuleb aegruumidele vastavad muutkonnad kuidagi omavahel vastavusse seada. Muutkonna punktid samastatakse mingi diffeomorfismi $\phi\ :\mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}$ abil. Vaatleme siinkohal meetrika näitel, kuidas defineeritakse häiritus. Olgu $\bar{g}_{\mu\nu}$ meetrika häiritud aegruumis $\mathcal{M}$ ning $g_{\mu\nu}$ meetrika häirimata aegruumis $\mathcal{M}_0$. Defineerime meetrika häirituse $\delta g_{\mu\nu}$ [35]:

$$\delta g_{\mu\nu} = (\phi^* \bar{g})_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\,, \tag{54}$$

kus $(\phi^* \bar{g})_{\mu\nu}$ on aegruumi $\mathcal{M}_0$ tagasi tõmmatud meetrika (see tähendab, et ϕ^* kujutab meetrika $\bar{g}_{\mu\nu}$ muutkonnale $\mathcal{M}_0$). Häiritusteoorias on lubatud ainult selline diffeomorfism ϕ, mis jätab häirituse $\delta g_{\mu\nu}$ piisavalt väikeseks. Muus osas on diffeomorfismi ϕ valik vaba ning võime teooria seisukohalt samaväärselt käsitleda mõnda teistsugust diffeomorfismi, kui viimane jätab häirituse väikeseks. Vabadust valida diffeomorfismi ϕ nimetatakse kalibratsioonivabaduseks ning ϕ fikseerimine tähendab kalibratsiooni valikut. Kalibratsioonivabaduse olemasolu tõttu pole füüsikalise suuruse taustaväärtuse ning häirituse summaks jaotamine kovariantne protseduur. See tähendab, et üldiselt sõltub häirituse väärtus kalibratsioonist, kuid kuna füüsika seisukohalt pole kalibratsiooni valikuks teisi kitsendusi peale häirituse väiksuse tingimuse, siis on võimalik olukord, kus tekitame pelgalt kalibratsiooni valikuga häirituse, millel võib puududa füüsikaline tähendus. See on oluline küsimus, mida on käsitletud [10]-[13].

Uurime, kuidas muutub häiritus, kui muudame aegruume $\mathcal{M}_0$ ja $\mathcal{M}$ siduvat diffeomorfismi. Olgu $\xi^\mu(x^\rho)$ vektorväli häirimata aegruumis $\mathcal{M}_0$. Vektorväli $\xi^\mu(x^\rho)$ tekitab üheparameetriliste diffeomorfismide pere: $\psi_\epsilon\ :\mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0$. Kui parameeter ϵ ning ϕ poolt tekitatud häiritus (54) on piisavalt väikesed, siis on piisavalt väike ka kompositsioon $\phi \circ \psi_\epsilon$, mis tekitab häiritusest (54) erineva häirituse. Sellisel viisil defineerime ϵ-i järgi parametriseeritud häirituste pere:

$$\delta g^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = [(\phi \circ \psi_\epsilon)^* \bar{g}]_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} = [\psi^*_\epsilon(\phi^* \bar{g})]_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\,. \tag{55}$$

Kasutades viimases häiritust (54):

$$\delta g^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = \psi^*_\epsilon(\delta g + g)_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} = \psi^*_\epsilon(\delta g_{\mu\nu}) + \psi^*_\epsilon(g_{\mu\nu}) - g_{\mu\nu}\,. \tag{56}$$

Kuna eeldame, et ϵ on väike, siis kasutame lähendust $\psi^*_\epsilon(\delta g_{\mu\nu}) \approx \delta g_{\mu\nu}$ ning saame

$$\delta g^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \epsilon \frac{\psi^*_\epsilon(g_{\mu\nu}) - g_{\mu\nu}}{\epsilon} = \delta g_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \,, \tag{57}$$

kus $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$ tähistab tensorvälja $g_{\mu\nu}$ Lie' tuletist vektorvälja ξ^ρ sihis:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \frac{\psi^*_\epsilon(g_{\mu\nu}) - g_{\mu\nu}}{\epsilon} \,. \tag{58}$$

Meetrika Lie' tuletis avaldub järgmiselt:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \,. \tag{59}$$

Teisendust (57) nimetatakse kalibratsiooniteisenduseks ning meetrika häiritus ei sõltu seega kalibratsiooni valikust, kui $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$.[4]

Tulemuseni (57) võime jõuda ka pisut teisel teel [36]. Kirjutame meetrika järgmiselt:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x^\rho) = g_{\mu\nu}(x^\rho) + \delta g_{\mu\nu}(x^\rho) \,, \tag{60}$$

kus $\bar{g}_{\mu\nu}$ on häiritud meetrika, $g_{\mu\nu}$ on häirimata meetrika, mida käsitleme fikseeritud funktsioonina koordinaatidest (mitte geomeetrilise suurusena)[7], $\delta g_{\mu\nu}$ on meetrika häiritus ning x^ρ tähistab sõltuvust koordinaatidest. Teostame koordinaatteisenduse $x^\rho \to \tilde{x}^\rho$:

$$\tilde{x}^\rho = x^\rho - \epsilon \xi^\rho \,, \tag{61}$$

kus ϵ on esimest järku väike suurus ning $\xi^\rho(x^\mu)$ on vektorväli. Eeldame, et häiritud meetrika $\bar{g}_{\mu\nu}$ käitub koordinaatteisendustel nagu teist järku kovariantne tensor ning teisendusel (61) saame:

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\rho) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}\bar{g}_{\alpha\beta}(x^\rho) \approx \left(\delta^\alpha_\mu + \epsilon \xi^\alpha_{\ ,\mu}\right)\left(\delta^\beta_\nu + \epsilon \xi^\beta_{\ ,\nu}\right)\left(g_{\alpha\beta}(x^\rho) + \delta g_{\alpha\beta}(x^\rho)\right) \quad \approx \\ \approx g_{\mu\nu}(x^\rho) + \delta g_{\mu\nu} + \epsilon g_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{\ ,\nu} + \epsilon g_{\beta\nu}\xi^\beta_{\ ,\mu} \,,\end{aligned} \tag{62}$$

kus arvestame maksimaalselt esimest järku väikseid suuruseid (esimesel real arvestame, et $\epsilon \frac{\partial \xi^\alpha(\tilde{x}^\rho)}{\partial \tilde{x}^\mu}$ ja $\epsilon \frac{\partial \xi^\alpha(x^\rho)}{\partial x^\mu}$ erinevus on teist järku väike, teisel real vabaneme ϵ-ide korrutamisel tekkivast mittelineaarsusest). Järgmiseks arvestame, et (60) kehtib ka koordinaatsüsteemis $\tilde{x}^\rho$:

$$\tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\rho) = g_{\mu\nu}(\tilde{x}^\rho) + \delta \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\rho) \,. \tag{63}$$

Arvestame, et $\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\rho)$ ja $\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(x^\rho)$ erinevus on teist järku väike ning arendame

$$g_{\mu\nu}(x^\rho) = g_{\mu\nu}(\tilde{x}^\rho) + \epsilon g_{\mu\nu,\beta}\xi^\beta \,. \tag{64}$$

[4] Meetrikat $g_{\mu\nu}$ käsitlesime siin illustreerivalt ning viimast tulemust võime üldistada muudele väljadele asendades $g_{\mu\nu}$ vastava väljaga.

Asendame viimase koos (63)-ga avaldisse (62) ning saame:

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \epsilon\Big(g_{\mu\alpha}\xi^{\alpha}_{\ ,\nu} + g_{\beta\nu}\xi^{\beta}_{\ ,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\xi^{\beta}\Big)\,. \tag{65}$$

Jõudsime samale tulemusele nagu (57), sest saab näidata, et avaldises (65) sulgudes olev on võrdne Lie' tuletisega (59).

Kalibratsioonivabaduse olemasolu, häirituste sõltumine kalibratsioonist kui füüsikaliselt meelevaldsest valikust, on põhjustanud segadust arvutustulemuste interpreteerimisel, kuna puudub vahend eristamaks füüsika seisukohast olulisi ning pelgalt kalibratsiooni valikust tingitud suurusi [7]. Üks võimalus on lähtudes uuritava probleemi eripärast fikseerida kalibratsioon, töötada vastavas kalibratsioonis ning arvestada, et kõik häiritused ei tarvitse omada füüsikalist mõtet. Teine võimalus on konstrueerida kalibratsiooniinvariantsed suurused [10] ning teostada arvutused viimaste abil.

4.3 Häirituste klassifitseerimine

Kirjeldame häirituste klassifitseerimist meetrilise tensori $g_{\mu\nu}$ näitel. Neljamõõtmelises aegruumis omab sümmeetriline tensor $g_{\mu\nu}$ 10 sõltumatut komponenti. Sama palju peab olema vabadusastmeid meetrika häirituses $\delta g_{\mu\nu}$. Need vabadusastmed võib kirja panna järgmiselt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = a(\eta)^2\Big(-(1+2\Phi)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + (\gamma_{ij}(1-2\Psi) + 2E_{ij})dx^i dx^j\Big). \tag{66}$$

Siin häiritused Φ ja Ψ sisaldavad mõlemad ühe, B_i kolm ning E_{ij} viis vabadusastet (E_{ij} on sümmeetriline ning jäljeta: $\delta^{ij}E_{ij} = 0$). Meetrika sellisel viisil kirja panekut motiveerib toodud suuruste käitumine kolmruumi pööretel. Kolmruumi pööretel käituvad Φ ja Ψ skalaaridena, B_i teiseneb nagu kolmvektor ning E_{ij} teiseneb teist järku kolmtensori teisenemiseeskirja kohaselt. Kui käsitleme B_i-d ja E_{ij}-i väljadena, siis võime vastavad väljad jagada piki- ning ristikomponentideks. Välja B_i jaoks võime siis kirjutada järgmiselt:

$$B_i = B_i^S + B_i^V = B_{;i} + B_i^V, \tag{67}$$

kus B on skalaar ning semikooloniga tähistame kovariantset tuletist kolmruumi meetrika γ_{ij} järgi. Vektorosa B_i^V on divergentsivaba: $\delta^{ij}B_{i;j}^V = 0$. Välja E_{ij} kirjutame

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T = E_{;ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^{kl}E_{;kl} + \frac{1}{2}(E_{i;j} + E_{j;i}) + E_{ij}^T, \tag{68}$$

kus E on skalaarne suurus, vektorvabadusaste E_i on jäljevaba: $\delta^{ij}E_{i;j} = 0$ ning tensorosa E_{ij}^T rahuldab järgmisi tingimusi: $\delta^{ik}E_{ij;k}^T = 0$ (tensorosa kolmruumi kovariantne divergents on null) ning $\delta^{ij}E_{ij}^T = 0$ (tensorosa on jäljevaba).

Suuruseid Φ, Ψ, B ja E nimetame skalaarseteks häiritusteks, suuruseid B_i^V ja E_i vektorhäiritusteks ning suurust E_{ij}^T tensorhäirituseks. Meetrika häiritus sisaldab niisiis neli skalaarset häiritust, kaks vektorhäiritust ning ühe tensorhäirituse. Arvestades seoseid, mida vektorhäiritused ning tensorhäiritus rahuldavad on tulemuseks kümme vabadusastet. Sarnasel viisil nagu siin meetrilise tensori häiritusi võime klassifitseerida ka energia-impulsi tensori häiritusi (teeme seda osas 5.6).

Esimest järku häiritusteoorias on oluline tõsiasi, et skalaarsed, vektor- ning tensorhäiritused arenevad üksteisest sõltumatult. Seetõttu võib neid uurida eraldi. Kosmoloogias on pakuvad eelkõige huvi skalaarsed häiritused ning tensorhäiritused. Skalaarsed häiritused võimaldavad kirjeldada struktuuri teket Universumis, tensorhäiritused kirjeldavad gravitatsioonilaineid. Vektorhäiritused on seotud Universumit kirjeldava kosmilise vedeliku pööriselisusega, kuid paisuvas Universumis vektorhäiritused kahanevad kiiresti ning on seetõttu vähemolulised. Edaspidi käsitleme vaid skalaarseid häiritusi.

4.4 Erinevad kalibratsioonid

Teisendus (61) muudab vektorvälja ξ^μ kaudu kalibratsiooni. Sarnaselt eelneva jaotisega võime vektorvälja ξ^μ kirjutada $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$, kus kolmruumi pööretel on ξ^0 skalaar ning ξ^i on kolmvektor. Viimase võime kirja panna järgmiselt: $\xi^i = \xi^{;i} + \xi_V^i$, kus ξ on skalaar ning ξ_V^i on divergentsivaba kolmvektor($\xi^i_{V;i} = 0$). Seega sisaldab ξ^μ kahte skalaarset ning ühte vektorvabadusastet (vektorvabadusaste sisaldab omakorda kaht vabadusastet). Skalaarseid häiritusi käsitledes tähendab viimane, et kalibratsiooni valikuga saame fikseerida kaks skalaarset häiritust. Järgnevalt käsitleme kahte enamlevinud kalibratsiooni, kus viimane fikseeritakse meetrika abil, kuid vabadusastmeid võib fikseerida ka teisiti [36].

4.4.1 Sünkroonne kalibratsioon

Valides (66)-s $\Phi = 0$ ja $B = 0$ oleme fikseerinud sünkroonse kalibratsiooni. Sünkroonses kalibratsioonis sisalduvad häiritused ainult meetrika ruumilistes komponentides. Märgime, et teisendus (61) ei fikseeri üheselt sünkroonset kalibratsiooni, mistõttu esineb vabadus teha täiendavaid teisendusi, mis ei muuda sünkroonse kalibratsiooni tingimusi $\Phi = 0$ ja $B = 0$.

4.4.2 Newtoni kalibratsioon

Seda kalibratsiooni nimetatakse ka longitudinaalseks, Poissoni ja konformseks Newtoni kalibratsiooniks. Valides (66)-s $B = 0$ ja $E = 0$ oleme fikseerinud Newtoni kalibratsiooni. Viimased tingimused fikseerivad üheselt funktsioonid ξ^0 ja ξ teisenduses (61), mistõttu puudub täiendav võimalus teha kalibratsiooniteisendusi muutmata Newtoni kalibratsiooni tingimusi $B = 0$ ja $E = 0$. Newtoni kalibratsioonis on häiritud meetrika diagonaalne ning käesolevas töös kasutame arvutustes just Newtoni kalibratsiooni.

4.5 Fourier' teisendus

Osas (4.3) tõdesime, et skalaar- vektor- ning tensorhäiritused arenevad sõltumatult, sest nad teisenevad kolmruumi pööretel ning nihetel taandumatult. Viimasest johtuvalt võime häiritusi kirjeldada kolmruumi Laplace'i-Beltrami operaarori $\Delta = (\sqrt{|\gamma|})^{-1}\partial_i(\sqrt{|\gamma|}\partial^i)$ omafunktsioonide Q_k superpositsioonina. Omafunktsioonid rahuldavad võrrandit

$$\Delta Q_k = -k^2 Q_k \,, \tag{69}$$

kus $-k^2$ tähistab omaväärtust. Käsitleme järgnevas olukorda, kus kolmruumi kõverus on null ($\mathcal{K} = 0$). Siis omafunktsioonid Q_k on tasalained $e^{ik_i x^i}$ ning häirituste kirjeldamine viimaste superpositsioonina tähendab häirituste teisendamist Fourier' ruumi, mida järgnevalt kirjeldamegi. Märgime, et kui kõverus on nullist erinev ($\mathcal{K} \neq 0$) on käsitlus keerulisem [40], [41].

Käsitleme häiritusi tasalainete $e^{ik_i x^i}$ superpositsioonina, kus k_i on lainevektor. Lainevektori mooduli ruut on $k_i k^i = k^2$ ning lainearv on $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Käsitledes Universumit lõpmata suure kastina võime suvalise skalaarse häirituse $A(\eta, x^i)$ kirja panna järgmiselt:

$$A(\eta, x^i) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k A(\eta, k^i) e^{ik_i x^i} \,, \tag{70}$$

kus $A(\eta, k^i)$ on lainevektorile k^i vastav Fourier' komponent, mille saame Fourier' pöördteisenduse kaudu

$$A(\eta, k^i) = \int d^3x A(\eta, x^i) e^{-ik_i x^i} \,. \tag{71}$$

Esimest järku häiritusteoorias on häiritusvõrrandite üldkuju järgmine:

$$\sum_j A_j(\eta, x^i) = 0 \,, \tag{72}$$

kus $A_j(\eta, x^i)$ on esimest järku häiritusliikmed. Rakendame viimasele võrrandile Fourier' teisendust (70). Kuna teisendus on argumentide suhtes lineaarne, siis saame tulemuseks

$$\sum_j A_j(\eta, k^i) = 0\,, \tag{73}$$

kus viimane võrrand on rahuldatud iga lainevektori k^i jaoks eraldi. Seega lineaarse häiritusteooria järgi arenevad häiritused erinevatel lainearvudel sõltumatult. Viimane on oluline, sest saame käsitleda häiritusi horisondi sees ning sellest väljas. Häiritusvõrrandites tähendab Fourier' teisendus (70) järgmised asendused:

$$\partial_j \to ik_j\,, \qquad \partial_j\partial_j \to -k^2\,. \tag{74}$$

Sageli kasutatakse häirituste ning viimaste Fourier' komponentide jaoks samu tähistusi.

5 Skalaarsed häiritusvõrrandid

Selles peatükis arvutame häiritusvõrrandite leidmiseks vajalikud suurused ning tuletame üldised STG skalaarsed häiritusvõrrandid Jordani raamis Bransi-Dicke' parametrisatsioonis. Kasutame Newtoni kalibratsiooni ning taustaks on FLRW aegruum. Osas 5.1 kirjeldame meetodit, kuidas esimest järku häiritusvõrranditeni jõuda. Osas 5.2 arvutame meetrika, osas 5.3 seostuse kordajate, osas 5.4 Ricci tensori, osas 5.5 Einsteini tensori, osas 5.6 energia-impulsi tensori komponendid häiritud meetrika jaoks. Osas 5.7 esitame eelmistes osades leitud suuruste abil kolmruumi kõverust $\mathcal{K}$ sisaldavad STG esimest järku häiritusvõrrandid Jordani raamis. Osas (5.8) paneme võrdluseks kirja ÜRT häiritusvõrrandid.

5.1 Meetod

Järgnevalt kirjeldame üldist skeemi, kuidas häiritusvõrranditeni jõuda. Alustame meetrikast Newtoni kalibratsioonis, mis sisaldab kahte skalaarset häiritust Φ ja Ψ. ÜRT-s on meetrika kovariantselt konstantne $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ ning seetõttu määrab meetrika seostuse Γ, milleks on Levi-Civita seostus. Seetõttu saame meetrika abil arvutada seostuse kordajad $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ arvestades arvutustes maksimaalselt esimest järku häiritusliikmeid. Edasi arvutame seostuse kordajate abil Ricci tensori komponendid $R_{\mu\nu}$ ja Ricci skalaari R ning viimaste kaudu ka Einsteini tensori komponendid $G_{\mu\nu}$. Need arvutused on standardsed ÜRT väljavõrrandite tuletamisel, antud juhul on arvutuste juures eriline asjaolu, et nad tuleb teostada esimest järku häiritusliikmete täpsusega.

Mateeriat kirjeldab energia-impulsi tensor $T_{\mu\nu}$ ning FLRW aegruumis kirjeldab ta ideaalset vedelikku. Häiritud energia-impulsi tensori ning ideaalse vedeliku energia-impulsi tensori erinevus on väljendatav esimest järku häiritusliikmete kaudu. Viimased sisaldavad kokku neli skalaarset vabadusastet.

Järgmise sammuna esitame skalaarvälja taustaliikme $\Upsilon(\eta)$ ning esimest järku häirituse $\delta\Upsilon(\eta, x^i)$ summana. Seejuures eeldame, et taustaliige rahuldab taustaks olevas aegruumis STG võrrandeid. Edasi kirjutame eelpool leitud suurused (Einsteini tensori, energia-impulsi tensori komponendid ja Ricci skalaar) STG võrranditesse ning eraldame liikmed, mis ei sisalda häiritusi (null järku liikmed) ning esimest järku häiritusliikmed (seejuures ei arvesta kõrgemat järku liikmetega). Null järku liikmed rahuldavad eelduse kohaselt taustavõrrandeid ning ülejäänud liikmete jaoks saamegi esimest järku häiritusvõrrandid.

5.2 Meetrika häiritused

Kirjutame meetrika FLRW meetrika $g_{\mu\nu}$ (10) ning väikese häirituse $\delta g_{\mu\nu}$ summana:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \,. \tag{75}$$

Kasutame ristkoordinaate $x,\ y,\ z$ ning konformset aega η (samad tähistused nagu (10)). FLRW meetrika kovariantsed komponendid avalduvad järgmiselt:

$$g_{00} = -a(\eta)^2 \,, \qquad g_{i0} = g_{0i} = 0 \,, \qquad g_{ij} = g_{ji} = a(\eta)^2 \Big(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^{-2} \delta_{ij} \,. \tag{76}$$

Häiritusliikmed $\delta g_{\mu\nu}$ sõltuvad Newtoni kalibratsioonis kahest skalaarsest suurusest $\Phi(\eta, x^i)$ ja $\Psi(\eta, x^i)$ (66). Newtoni kalibratsioonis on meetrika diagonaalne ning häiritusliikmete komponendid võime kirja järgmisel kujul:

$$\begin{gathered}\delta g_{00} = -2a(\eta)^2 \Phi(\eta, x^k) \,, \qquad \delta g_{i0} = \delta g_{0i} = 0 \,, \\ \delta g_{ij} = \delta g_{ji} = -2a(\eta)^2 \delta_{ij} \Big(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^{-2} \Psi(\eta, x^k) \,.\end{gathered} \tag{77}$$

Kovariantsetes komponentides väljendatud meetrika $\bar{g}_{\mu\nu}$ pöördmaatriks on meetrika kontravariantsetes komponentides $\bar{g}^{\mu\nu}$, mille kirjutame kujul

$$\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \,. \tag{78}$$

Siin $g^{\mu\nu}$ on maatriksi $g_{\mu\nu}$ pöördmaatriks ning komponentides väljendatuna:

$$g^{00} = -\frac{1}{a(\eta)^2} \,, \qquad g^{i0} = g^{0i} = 0 \,, \qquad g^{ij} = g^{ji} = \frac{1}{a(\eta)^2} \Big(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^{2} \delta_{ij} \,. \tag{79}$$

Kasutades tingimust $\bar{g}^{\mu\lambda}\bar{g}_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu}$ leiame $\delta g^{\mu\nu}$ esimest järku häiritusliikmete täpsusega:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \,. \tag{80}$$

Arvutame $\delta g^{\mu\nu}$ komponendid:

$$\begin{gathered}\delta g^{00} = 2\frac{1}{a(\eta)^2} \Phi(\eta, x^k) \,, \qquad \delta g^{i0} = \delta g^{0i} = 0 \,, \\ \delta g^{ij} = \delta g^{ji} = 2\frac{1}{a(\eta)^2} \Big(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^{2} \delta_{ij} \Psi(\eta, x^k) \,.\end{gathered} \tag{81}$$

5.3 Seostuse kordajad ja kolmruumi kovariantne tuletis

Kirjutame seostuse kordajad taustaliikme ning esimest järku häiritusliikme summana:

$$\bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \,. \tag{82}$$

Seostuse kordajad avalduvad meetrika kaudu valemiga (1). Häiritud seostuse kordajad $\bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}$ arvutame häiritud meetrika $\bar{g}_{\lambda\rho}$ abil, häirimata seostuse kordajad $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ häirimata meetrikat $g_{\lambda\rho}$ kasutades. Viimast arvestades saame esimest järku häiritusliikme $\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ jaoks:

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} &= \frac{\delta g^{\sigma\rho}}{2}\left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right) + \frac{g^{\sigma\rho}}{2}\left(\delta g_{\mu\rho,\nu} + \delta g_{\rho\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\rho}\right) = \\
&= \frac{g^{\sigma\rho}}{2}\left(-2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\rho} + \delta g_{\mu\rho,\nu} + \delta g_{\rho\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\rho}\right) . \qquad (83)
\end{aligned}
$$

Eeldame, et meetrika häirituste tuletised $\delta g_{\mu\nu,\rho}$ on esimest järku väikesed. Häirimata seostuse erinevad komponendid on järgmised:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^0_{00} = \mathcal{H} , \qquad \Gamma^0_{i0} = \Gamma^0_{0i} = 0 , \\
\Gamma^0_{ij} = \Gamma^0_{ji} = \mathcal{H}\Big(1 + \tfrac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^{-2}\delta_{ij} , \qquad \Gamma^i_{00} = 0 , \qquad \Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \mathcal{H}\delta_{ij} , \\
\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = -\frac{1}{2}\mathcal{K}\Big(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^{-1}(\delta_{ki}x^j + \delta_{kj}x^i - \delta_{ij}x^k) . \qquad (84)
\end{gathered}
$$

Seostuse häirituste komponendid on järgmised:

$$
\begin{gathered}
\delta\Gamma^0_{00} = \Phi' , \qquad \delta\Gamma^0_{0i} = \delta\Gamma^0_{i0} = \Phi_{,i} , \\
\delta\Gamma^0_{ij} = \delta\Gamma^0_{ji} = -\Big(2\mathcal{H}(\Phi + \Psi) + \Psi'\Big)\Big(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^{-2}\delta_{ij} , \qquad \delta\Gamma^i_{00} = \Big(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2\Big)^2\Phi_{,i} , \\
\delta\Gamma^i_{j0} = \delta\Gamma^i_{0j} = -\Psi'\delta_{ij} , \qquad \delta\Gamma^k_{ij} = \delta\Gamma^k_{ji} = -(\delta_{ki}\Psi_{,j} + \delta_{kj}\Psi_{,i} - \delta_{ij}\Psi_{,k}) . \qquad (85)
\end{gathered}
$$

Teeme olulise märkuse indeksite asukoha kohta ülal toodud seostuse kordajate komponentides. Nimelt oleme mõnes kohas vasakul pool võrdusmärki üleval paikneva indeksi kirjutanud paremal pool võrdusmärki alumise indeksina. Märgime, et kuna tegu pole tensorvõrrandiga, siis pole indeksite asukoha ühildumine kummalgi pool võrdusmärki oluline (küll aga on oluline kirja pandud indeksi asukoht, sest viimaseid tõstame ja langetame meetrika abil ning kui paremal pool võrdusmärki muudaksime indeksi asukohta, siis peaksime lisama ka meetrikast tulenevat kordaja).

Kolmruumi kovariantne tuletis

Selles alapunktis paneme kirja, kuidas arvutada kolmruumi kovariantset tuletist. Viimase abil saame kõverusliikmeid sisaldavaid võrrandeid kompaktsemalt kirja panna. Tähistame Π^k_{ij}-ga kolmruumi seostuse kordajaid, mis (1)-le tuginedes avalduvad kolmruumi meetrika γ_{ij} (11) kaudu:

$$
\Pi^k_{ij} = \frac{\gamma^{kl}}{2}(\gamma_{il,j} + \gamma_{jl,i} - \gamma_{ij,l}) = -\frac{1}{2}\mathcal{K}(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^{-1}(\delta_{ki}x^j + \delta_{kj}x^i - \delta_{ij}x^k) . \qquad (86)
$$

Näeme, et Π^k_{ij} on võrdne Γ^k_{ij}-ga (84). Kolmruumi kovariantset tuletist tähistame semikooloniga ning viimase kasutamine võimaldab hiljem panna võrrandeid kirja kompaktsemalt. Arvutame skalaarse suuruse A kolmruumi teise kovariantse tuletise:

$$A_{;ij} = (\partial_i\partial_j - \Pi^k_{ij}\partial_k)A = A_{,ij} + \frac{1}{2}\mathcal{K}(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^{-1}(A_{,i}x^j + A_{,j}x^i - \delta_{ij}A_{,k}x^k)\,. \tag{87}$$

Arvutame ka kovariantse divergentsi:

$$A_{;ii} = (\partial_i\partial_i - \Pi^k_{ii}\partial_k)A = A_{,ii} - \frac{1}{2}\mathcal{K}(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^{-1}A_{,k}x^k\,. \tag{88}$$

Siin ja edaspidi kasutame tähistusi, kus üle korduvate ruumiliste indeksite tuleb summeerida. Illustreerime väidet viimastes valemites esinevate vastavate liikmete abil: $A_{,ii} = \partial_i\partial_i A = \sum\limits_{i=1}^{3}\partial_i\partial_i A$ ja $x^k A_{,k} = x^k\partial_k A = \sum\limits_{k=1}^{3} x^k\partial_k A$.

5.4 Ricci tensor

Kirjutame Ricci tensori taustaliikme ning esimest järku häirituse summana:

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}\,. \tag{89}$$

Ricci tensori komponendid avalduvad seostuse kaudu valemiga (4). Häiritud Ricci tensori $\bar{R}_{\mu\nu}$ arvutame häiritud seostuse $\bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu}$ abil, häirimata Ricci tensori $R_{\mu\nu}$ häirimata seostuse $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ abil. Viimast arvestades saame, et Ricci tensori häiritus avaldub

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\,. \tag{90}$$

Eeldame, et meetrika häirituste teised tuletised $\delta g_{\mu\nu,\rho\sigma}$ on esimest järku väikesed. Arvutame häirimata Ricci tensori $R_{\mu\nu}$ komponendid:

$$\begin{gathered} R_{00} = -3\mathcal{H}'\,, \qquad R_{0i} = R_{i0} = 0\,, \\ R_{ij} = R_{ji} = (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{K})(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^{-2}\delta_{ij}\,. \end{gathered} \tag{91}$$

Ricci tensori häirituste $\delta R_{\mu\nu}$ jaoks saame:

$$\begin{aligned} \delta R_{00} &= (1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2\Phi_{;kk} + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}(\Psi' + \Phi')\,, \\ \delta R_{0i} = \delta R_{i0} &= 2(\mathcal{H}\Phi_{,i} + \Psi'_{,i})\,, \\ \delta R_{ij} = \delta R_{ji} &= \Big(\Psi_{;kk} + (1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^{-2}\Big[-2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) - \mathcal{H}\Phi' - \\ &\quad -5\mathcal{H}\Psi' - \Psi''\Big]\Big)\delta_{ij} + \Psi_{;ij} - \Phi_{;ij}\,. \end{aligned} \tag{92}$$

Ricci skalaar R on Ricci tensori jälg, mille kirjutame taustaliikme ning häirituse summana:

$$\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} = R + \delta R\,. \tag{93}$$

Taustaliikme R jaoks saame

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K})\,. \tag{94}$$

Ricci skalaari häiritus δR avaldub

$$\begin{gathered}\delta R = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \\ = \frac{1}{a^2}\Big(-12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + 12\mathcal{K}\Psi - 6\mathcal{H}(\Phi' + 3\Psi') - 6\Psi'' + 2(2\Psi_{;k}^{\ ;k} - \Phi_{;k}^{\ ;k})\Big)\,.\end{gathered} \tag{95}$$

Märgime, et siin kasutame kompaktsema kirjapildi jaoks kolmruumi kovariantset tuletist (87), (88), mida tähistame semikooloniga ning kolmruumi indekseid tõstame ning langetame kolmruumi meetrika γ (11) abil.

5.5 Einsteini tensor

Kirjutame Einsteini tensori taustaliikme ning häirituse summana:

$$\bar{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}\,. \tag{96}$$

Einsteini tensori arvutame valemiga (8). Häiritud Einsteini tensori $\bar{G}_{\mu\nu}$ arvutame häiritud Ricci tensori, häiritud meetrika ja häiritud Ricci skalaari kaudu ning häirimata Einsteini tensori $G_{\mu\nu}$ leiame vastavate häirimata suuruste abil. Viimase abil saame Einsteini tensori häirituste jaoks:

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R\,. \tag{97}$$

Arvutame häirimata Einsteini tensori komponendid:

$$\begin{gathered}G_{00} = 3(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})\,, \qquad G_{0i} = G_{i0} = 0\,, \\ G_{ij} = G_{ji} = (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 - \mathcal{K})(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^{-2}\delta_{ij}\,.\end{gathered} \tag{98}$$

Einsteini tensori häirituste komponendid:

$$\begin{gathered}\delta G_{00} = 6\mathcal{K}(\Phi + \Psi) - 6\mathcal{H}\Psi' + 2(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2\Psi_{;kk}\,, \\ \delta G_{0i} = \delta G_{i0} = 2(\mathcal{H}\Phi_{,i} + \Psi'_{,i})\,, \\ \delta G_{ij} = \delta G_{ji} = \Psi_{;ij} - \Phi_{;ij} + \\ + \Big(\Phi_{;kk} - \Psi_{;kk} + (1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^{-2}\Big[2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) + 2\mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + 2\Psi''\Big]\Big)\delta_{ij}\,.\end{gathered} \tag{99}$$

Eelnevalt arvutasime Einsteini tensori kovariantsed komponendid, tuletatavates häiritusvõrrandeis tahame kasutada segakomponente. Häirimata Einsteini tensori segakomponendid saame lihtsalt häirimata meetrika abil: $G^{\mu}_{\ \nu} = g^{\mu\rho}G_{\rho\nu}$. Viimased avalduvad:

$$G^{0}_{\ 0} = -\frac{1}{a^2}3(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})\,, \qquad G^{0}_{\ i} = 0\,, \qquad G^{i}_{\ j} = -\frac{1}{a^2}\delta_{ij}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K})\,. \tag{100}$$

Einsteini tensori häirituse segakomponendid saame arvutada kovariantsete komponentide kaudu järgmiselt:

$$\delta G^{\mu}_{\ \nu} = \delta(g^{\mu\rho}G_{\rho\nu}) = \delta g^{\mu\rho}G_{\rho\nu} + g^{\mu\rho}\delta G_{\rho\nu}\,. \tag{101}$$

Arvutades saame:

$$\begin{aligned}
\delta G^{0}_{\ 0} &= \frac{1}{a^2}\Big(6\mathcal{H}^2\Phi + 6\mathcal{H}\Psi' - 6\mathcal{K}\Psi - 2(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2\Psi_{;kk}\,,\\
\delta G^{0}_{\ i} &= \frac{1}{a^2}\Big(-2(\Psi')_{,i} - 2\mathcal{H}\Phi_{,i}\Big)\,,\\
\delta G^{i}_{\ j} &= \frac{1}{a^2}\Big\{(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Psi_{;ij} - \Phi_{;ij}) +\\
&+\Big(-2\mathcal{K}\Psi + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + 2\Psi'' + 2\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{H}\Psi' + (1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Phi_{;kk} - \Psi_{;kk})\Big)\delta_{ij}\Big\}\,.
\end{aligned} \tag{102}$$

5.6 Energia-impulsi tensor

Mateeriat kirjeldab energia-impulsi tensor $T^{\mu}_{\ \nu}$ ning taustaks olevas FLRW aegruumis võtab viimane ideaalse vedeliku kuju kaasaliikuvates koordinaatides. Kirjutame häiritud energia-impulsi tensori tausta energia-impulsi tensori ning esimest järku häirituse summana

$$\bar{T}^{\mu}_{\ \nu} = T^{\mu}_{\ \nu} + \delta T^{\mu}_{\ \nu}\,. \tag{103}$$

Tausta energia-impulsi tensor on (17) ning viimase komponendid arvutasime jaotises (2.3). Paneme need (18) täielikkuse huvides siinkohal veelkord kirja:

$$T^{0}_{\ 0} = -\rho\,, \qquad T^{0}_{\ i} = T^{i}_{\ 0} = 0\,, \qquad T^{i}_{\ j} = \delta^{i}_{\ j}p\,. \tag{104}$$

Häiritusliige $\delta T^{\mu}_{\ \nu}$ sisaldab nelja skalaarset vabadusastet, mida võime tõlgendada taustaks olevas energia-impulsi tensoris olevate suuruste (energiatihedus, rõhk, nelikiirus) ning anisotroopse pinge häiritustena. Niiviisi saame füüsikalise energia-impulsi tensori väljendada järgmisel kujul

$$\bar{T}^{\mu}_{\ \nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^{\mu}\bar{u}_{\nu} + \delta^{\mu}_{\ \nu}\bar{p} + \Sigma^{\mu}_{\ \nu}, \tag{105}$$

kus $\bar{\rho} = \rho + \delta\rho$ on vedeliku energiatihedus, $\bar{p} = p + \delta p$ on rõhk ning $\bar{u}^\mu = u^\mu + \delta u^\mu$ on vedelikuosakese nelikiirus. Anisotroopset pinget $\Sigma_{\mu\nu}$ käsitleme esimest järku häiritusena (taustaks olevas aegruumis anisotroopne pinge puudub) ning ta rahuldab tingimusi: $u^\mu \Sigma_{\mu\nu} = 0$ ja $\Sigma^\nu{}_\nu = 0$. Anisotroopne pinge $\Sigma^\mu{}_\nu$ sisaldab ühte skalaarset häiritust $\Sigma(\eta, x^i)$ ning ainult skalaarseid häiritusi käsitledes avaldub anisotroopne pinge valemiga

$$\Sigma^i{}_j = (1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Sigma_{;ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Sigma_{;kk}) . \tag{106}$$

Nelikiiruse häirituste arvutamiseks kasutame nelikiiruse normeerimistingimust

$$\bar{g}^{\mu\nu}\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu = -1, \tag{107}$$

millest järeldub, et $(\delta g^{\mu\nu})u_\mu u_\nu + g^{\mu\nu}\Big((\delta u_\mu)u_\nu + (\delta u_\nu)u_\mu\Big) = 0$. Et taustal $u_i = 0$, siis ei saa δu_i-d normeerimistingimusest tuletada, küll aga on võimalik leida δu_0: $\delta(g^{00})u_0 u_0 = -g^{00}\Big((\delta u_0)u_0 + (\delta u_0)u_0\Big)$, millest saame, et $\delta u_0 = -a\Phi$. Nüüd võime kirjutada nelikiiruse järgmiselt $u_\mu = (a(-1-\Phi), \delta u_i)$. Häiritus δu_i sisaldab ühte skalaarset ning ühte vektorvabadusastet: $\delta u_i = a(v_{,i} + v_i^V)$, kus $\delta^{ij}v^V_{i,j} = 0$. Skalaarsete häirituste jaoks saame seega $u_\mu = (a(-1-\Phi), av_{,i})$ ning kontravariantsetes komponentides esitatuna: $u^\mu = (a^{-1}(1-\Phi), (1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2 a^{-1}v_{,i})$.

Paneme kirja energia-impulsi tensori esimest järku skalaarsed häiritused.

$$\begin{aligned}\delta T^\mu_\nu = {} & (\delta\rho)u^\mu u_\nu + (\delta p)u^\mu u_\nu + \\ & +(\rho+p)\Big[(\delta u^\mu)u_\nu + u^\mu(\delta u_\nu)\Big] + \delta^\mu{}_\nu\delta p + \Sigma^\mu{}_\nu.\end{aligned} \tag{108}$$

Arvutame energia-impulsi tensori erinevad komponendid skalaarsete häirituste jaoks.

$$\begin{aligned}\delta T^0_{\ 0} &= -\delta\rho\,, \\ \delta T^0_{\ i} &= (\rho+p)a^{-1}\delta u_i = (\rho+p)v_{,i}\,, \\ \delta T^i_{\ 0} &= (\rho+p)(-1)a\delta u^i = -(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\rho+p)a^{-1}\delta u_i = -(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\rho+p)v_{,i}\,, \\ \delta T^i_{\ j} &= \delta^i{}_j\delta p + \Sigma^i{}_j\,.\end{aligned} \tag{109}$$

Energiatiheduse häiritus $\delta\rho$ ning rõhu häiritus δp on omavahel seotud:

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial\rho}\Big|_S\delta\rho + \frac{\partial p}{\partial S}\Big|_\rho\delta S = c_s^2\delta\rho + \tau\delta S, \tag{110}$$

kus δS tähistab entroopia häiritust. Häiritusi, kus $\delta S = 0$ nimetatakse adiabaatilisteks häiritusteks ning ühekomponendilises kosmilises vedelikus alati $\delta S = 0$. Entroopia häiritused esinevad mitmekomponendilistes vedelikes, kus erinevad vedelikukomponendid omavahel interakteeruvad. Entroopia häiritusi nimetatakse isokurvatuurseteks häiritusteks.

5.7 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria häiritusvõrrandid

Oleme leidnud $\delta G^{\mu}_{\ \nu}$ ja $\delta T^{\mu}_{\ \nu}$ ning järgmiseks ülesandeks on kirja panna võrrandid (35), (37), (38) esimest järku häirituste jaoks. Viimased sisaldavad ka skalaarvälja Υ, mille kirjutame taustaliikme ning häirituse summana:

$$\bar{\Upsilon}(\eta, x^i) = \Upsilon(\eta) + \delta\Upsilon(\eta, x^i), \tag{111}$$

kus $\bar{\Upsilon}(\eta, x^i)$ rahuldab võrrandeid (35), (37), (38), kus kõik liikmed on arvutatud häiritud aegruumis (neid tähistame kaetud suurustega) ja taustaliige $\Upsilon(\eta)$ rahuldab samu võrrandeid, kus kõik ülejäänud suurused on arvutatud taustal. Asendades eelpool arvutatud Einsteini tensori ning energia-impulsi tensori STG võrranditesse ning arvestades maksimaalselt esimest järku häiritustega liikmeid jõuame võrranditeni, mis sisaldavad null järku taustaliikmeid ning esimest järku häiritusi. Null järku liikmed rahuldavad eelduse kohaselt STG taustavõrrandeid ning viimast arvestades jõuamegi häiritusvõrranditeni.

5.7.1 Skalaarvälja võrrand (35)

Häiritud aegruumis on skalaarvälja võrrand (35) kujul

$$\frac{2\omega(\bar{\Upsilon})}{\bar{\Upsilon}}\overline{\nabla}^{\rho}\overline{\nabla}_{\rho}\bar{\Upsilon} + \bar{R} - \frac{\omega(\bar{\Upsilon})}{\bar{\Upsilon}^2}\overline{\nabla}^{\rho}\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_{\rho}\bar{\Upsilon} + \frac{1}{\bar{\Upsilon}}\frac{d\omega(\bar{\Upsilon})}{d\bar{\Upsilon}}\overline{\nabla}^{\rho}\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_{\rho}\bar{\Upsilon} - 2\kappa^2\frac{dV(\bar{\Upsilon})}{d\bar{\Upsilon}} = 0\,, \tag{112}$$

kus $\overline{\nabla}$ tähistab kovariantse tuletise operaatorit häiritud aegruumis ning on arvutatud seostuse $\bar{\Gamma}$ abil (see tähendab, et mingi suvalise vektorvälja komponentidega $A^{\mu}_{\ \nu}$ kovariantne tuletis avaldub $\overline{\nabla}_{\rho}A^{\mu}_{\ \nu} = \partial_{\rho}A^{\mu}_{\ \nu} + \bar{\Gamma}^{\mu}_{\rho\lambda}A^{\lambda}_{\ \nu} - \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\nu}A^{\mu}_{\ \lambda}$). Väljendame võrrandis (112) kõik suurused taustaliikme ning esimest järku häirituse summana. Seejuures arendame skalaarväljast sõltuvad funktsioonid skalaarvälja taustaväärtusele vastavas punktis Υ Taylori ritta häirituse $\delta\Upsilon$ järgi ning arvestame arenduse kahte esimest liiget. Illustreerime öeldut liikmega $\frac{d\omega(\bar{\Upsilon})}{d\bar{\Upsilon}}$, mille jaoks saame arenduse:

$$\frac{d\omega(\bar{\Upsilon})}{d\bar{\Upsilon}} = \frac{d\omega(\bar{\Upsilon})}{d\Upsilon}\frac{d\Upsilon}{d\bar{\Upsilon}} = \frac{d\omega(\bar{\Upsilon})}{d\Upsilon}\frac{d(\bar{\Upsilon}-\delta\Upsilon)}{d\bar{\Upsilon}} = \frac{d\omega(\bar{\Upsilon})}{d\Upsilon} \approx \frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon} + \frac{d^2\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon^2}\delta\Upsilon\,. \tag{113}$$

Edaspidi me üldiselt skalaarvälja funktsioonide argumente eraldi välja ei too ning arvestame, et vastav funktsioon tuleb arvutada skalaarvälja taustaväärtust kasutades: $\frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon} = \frac{d\omega}{d\Upsilon}$ ja $\frac{d^2\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon^2} = \frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}$. Eelnevaga analoogselt arendame kõik võrrandis (112) skalaarvälja sisaldavad liikmed:

$$
\begin{aligned}
\omega(\bar{\Upsilon}) &\approx \omega(\Upsilon) + \frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon}\delta\Upsilon = \omega + \frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta\Upsilon\,, && (114)\\
\frac{dV(\bar{\Upsilon})}{d\bar{\Upsilon}} &\approx \frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon} + \frac{d^2V(\Upsilon)}{d\Upsilon^2}\delta\Upsilon = \frac{dV}{d\Upsilon} + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\delta\Upsilon\,, && (115)\\
\frac{1}{\bar{\Upsilon}} &\approx \frac{1}{\Upsilon}(1 - \frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon)\,, && (116)\\
\frac{1}{\bar{\Upsilon}^2} &\approx \frac{1}{\Upsilon^2}(1 - 2\frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon)\,. && (117)
\end{aligned}
$$

Järgmiseks eraldame võrrandis (112) kovariantse tuletise operaatorit sisaldavates liikmetes taustaväärtuse ning esimest järku häirituse. Illustreerime viimast d'Alambert'i operaatoriga:

$$
\overline{\nabla}^\rho\overline{\nabla}_\rho\bar{\Upsilon} = \Big[\nabla^\rho\nabla_\rho + \delta(\nabla^\rho\nabla_\rho)\Big](\Upsilon + \delta\Upsilon)\,. \qquad (118)
$$

Siin ∇ tähistab kovariantse tuletise operaatorit taustal. Tausta d'Alambert'i operaatori $\nabla^\rho\nabla_\rho$ mõju skalaarväljale Υ arvutame järgmiselt:

$$
\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon = g^{\rho\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\rho\Upsilon = g^{\rho\kappa}(\partial_\kappa\partial_\rho - \Gamma^\lambda_{\rho\kappa}\partial_\lambda)\Upsilon\,. \qquad (119)
$$

Suurusega $\delta(\nabla^\rho\nabla_\rho)$ tähistame d'Alambert'i operaatoris esinevat esimest järku häiritusi sisaldavat osa ning viimase mõju skalaarväljale Υ arvutame

$$
\begin{aligned}
\delta(\nabla^\rho\nabla_\rho)\Upsilon &= \delta(g^{\rho\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\rho)\Upsilon = \delta\Big(g^{\rho\kappa}(\partial_\kappa\partial_\rho - \Gamma^\lambda_{\rho\kappa}\partial_\lambda)\Big)\Upsilon = \\
&= \Big(\delta g^{\rho\kappa}(\partial_\kappa\partial_\rho - \Gamma^\lambda_{\rho\kappa}\partial_\lambda) - g^{\rho\kappa}\delta\Gamma^\lambda_{\rho\kappa}\partial_\lambda\Big)\Upsilon\,. \qquad (120)
\end{aligned}
$$

Analoogselt kirjutame

$$
\overline{\nabla}^\rho\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_\rho\bar{\Upsilon} = \nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon + \delta(\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon)\,, \qquad (121)
$$

kus suurusega $\delta(\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon)$ tähistame liikmes $\overline{\nabla}^\rho\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_\rho\bar{\Upsilon}$ sisalduvat esimest järku häiritusosa, mis avaldub

$$
\begin{aligned}
\delta(\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon) &= \delta(g^{\rho\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon) = \delta g^{\rho\kappa}\partial_\kappa\Upsilon\partial_\rho\Upsilon + g^{\rho\kappa}\Big(\partial_\kappa\Upsilon\partial_\rho(\delta\Upsilon) + \partial_\rho\Upsilon\partial_\kappa(\delta\Upsilon)\Big) = \\
&= \delta g^{\rho\kappa}\partial_\kappa\Upsilon\partial_\rho\Upsilon + 2g^{\rho\kappa}\partial_\kappa\Upsilon\partial_\rho(\delta\Upsilon)\,. \qquad (122)
\end{aligned}
$$

Asendame nüüd toodud arendused võrrandisse (112) ning kuna meid huvitavad lineaarsed häiritused, siis arvestame maksimaalselt esimest järku häiritustega:

$$
\begin{aligned}
&2(\omega + \frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta\Upsilon)\frac{1}{\Upsilon}\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon + 2\omega\frac{1}{\Upsilon}(-\frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon)\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon + 2\frac{\omega}{\Upsilon}\Big[\delta(\nabla^\rho\nabla_\rho)\Upsilon + \nabla^\rho\nabla_\rho(\delta\Upsilon)\Big] + \\
&+R + \delta R - (\omega + \frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta\Upsilon)\frac{1}{\Upsilon^2}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon - \omega\frac{1}{\Upsilon^2}(-2\frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon)\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon - \\
&-\frac{\omega}{\Upsilon^2}\delta(\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon) + \frac{1}{\Upsilon}(1 - \frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon)\frac{d\omega}{d\Upsilon}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon + \frac{1}{\Upsilon}\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}\delta\Upsilon\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon + \\
&+\frac{1}{\Upsilon}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta(\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon) - 2\kappa^2(\frac{dV}{d\Upsilon} + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\delta\Upsilon) = 0\,. \qquad (123)
\end{aligned}
$$

Oleme korduvalt maininud, et eeldame võrrandi (35) kehtivust ka häirimata aegruumis ning arvestades viimast võrrandis (123) saame võrrandi häirituste jaoks:

$$
\begin{aligned}
2(\frac{d\omega}{d\Upsilon}\frac{1}{\Upsilon}-\frac{\omega}{\Upsilon^2})\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon\delta\Upsilon+2\frac{\omega}{\Upsilon}\Big[\delta(\nabla^\rho\nabla_\rho)\Upsilon+\nabla^\rho\nabla_\rho(\delta\Upsilon)\Big]+\delta R+ \\
+(\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}-2\frac{d\omega}{d\Upsilon}\frac{1}{\Upsilon}+2\frac{\omega}{\Upsilon^2})\frac{1}{\Upsilon}\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon\delta\Upsilon+ \\
+(\frac{d\omega}{d\Upsilon}-\frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}\delta(\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon)-2\kappa^2\frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\delta\Upsilon=0.
\end{aligned} \tag{124}
$$

Võrrand (124) on üldine esimest järku häiritusvõrrand, mille tuletamisel ei ole me meetrikat valinud või kalibratsiooni fikseerinud. Nüüd paneme võrrandi (124) kirja eeldusel, et taustaks on FLRW meetrikaga aegruum ning ning meetrika häiritused on Newtoni kalibratsioonis. Kasutame eelmises peatükis arvutatud meetrikat (76), (77), (79), (81) ning seostuse kordajaid (84), (85) avaldistes (119), (120), 122 ning arvutame vajalikud suurused:

$$
\begin{aligned}
\nabla^\rho\nabla_\rho\Upsilon &= \frac{1}{a^2}\Big(-\Upsilon''-2\mathcal{H}\Upsilon'\Big)\,, && (125)\\
\nabla^\rho\nabla_\rho\delta\Upsilon &= \frac{1}{a^2}\Big(-(\delta\Upsilon)''-2\mathcal{H}(\delta\Upsilon)'+(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;kk}\Big)\,, && (126)\\
\delta(\nabla^\rho\nabla_\rho)\Upsilon &= \frac{1}{a^2}\Big(2(\Upsilon''+2\mathcal{H}\Upsilon')\Phi+\Upsilon'\Phi'+3\Upsilon'\Psi'\Big)\,, && (127)\\
\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon &= -\frac{1}{a^2}(\Upsilon')^2\,, && (128)\\
\delta(\nabla^\rho\Upsilon\nabla_\rho\Upsilon) &= \frac{1}{a^2}\Big(2(\Upsilon')^2\Phi-2\Upsilon'(\delta\Upsilon)'\Big)\,. && (129)
\end{aligned}
$$

Asendades eelarvutatu ning Ricci skalaari häirituse (95) võrrandisse (124) ning rühmitades liikmeid saame skalaarvälja häiritusvõrrandi Newtoni kalibratsioonis järgmisel kujul:

$$
\begin{aligned}
-2\frac{\omega}{\Upsilon}(\delta\Upsilon)''-\Big(4\frac{\omega}{\Upsilon}\mathcal{H}+2(\frac{d\omega}{d\Upsilon}-\frac{\omega}{\Upsilon})\frac{\Upsilon'}{\Upsilon}\Big)(\delta\Upsilon)'+2\frac{\omega}{\Upsilon}(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;kk}+ \\
+\Big(2(\frac{\omega}{\Upsilon}-\frac{d\omega}{d\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}(\Upsilon''+2\mathcal{H}\Upsilon')-(\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}-2\frac{d\omega}{d\Upsilon}\frac{1}{\Upsilon}+2\frac{\omega}{\Upsilon^2})\frac{1}{\Upsilon}(\Upsilon')^2-2\kappa^2a^2\frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big)\delta\Upsilon+ \\
+\Big(4\frac{\omega}{\Upsilon}(\Upsilon''+2\mathcal{H}\Upsilon')-12(\mathcal{H}^2+\mathcal{H}')+2(\frac{d\omega}{d\Upsilon}-\frac{\omega}{\Upsilon})\frac{(\Upsilon')^2}{\Upsilon}\Big)\Phi+ \\
+2(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(2\Psi_{;kk}-\Phi_{;kk})+12\mathcal{K}\Psi+2(\frac{\omega}{\Upsilon}\Upsilon'-3\mathcal{H})(\Phi'+3\Psi')-6\Psi''=0\,.
\end{aligned} \tag{130}
$$

5.7.2 Skalaarvälja võrrand (38)

Rakendame eeltoodud skeemi võrrandile (38). Häiritud aegruumis on võrrand (38) kujul

$$
\overline{\nabla}^\rho\overline{\nabla}_\rho\bar{\Upsilon}+\frac{1}{2\omega(\bar{\Upsilon})+3}\Big(\frac{d\omega(\bar{\Upsilon})}{d\bar{\Upsilon}}\overline{\nabla}^\rho\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_\rho\bar{\Upsilon}+2\kappa^2\Big[2V(\bar{\Upsilon})-\bar{\Upsilon}\frac{dV(\bar{\Upsilon})}{d\bar{\Upsilon}}\Big]-\kappa^2\bar{T}\Big)=0\,. \tag{131}
$$

Kirjutame viimases võrrandis kõik liikmed taustaväärtuse ning esimest järku häirituse summana arvestades skalaarvälja funktsioonide jaoks (113)–(117). Lisaks arendame

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\omega(\bar{\Upsilon})+3} &\approx \frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}(1-\frac{2}{2\omega(\Upsilon)+3}\frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon}\delta\Upsilon) = \\ &= \frac{1}{2\omega+3}(1-\frac{2}{2\omega+3}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta\Upsilon)\,, \end{aligned} \tag{132}$$

$$V(\bar{\Upsilon}) \approx V(\Upsilon)+\frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon}\delta\Upsilon = V+\frac{dV}{d\Upsilon}\delta\Upsilon\,. \tag{133}$$

Energia-impulsi tensori jälg avaldub

$$\bar{T} = \bar{T}^{\rho}_{\ \rho} = T^{\rho}_{\ \rho}+\delta T^{\rho}_{\ \rho} = T+\delta T\,. \tag{134}$$

Arvestame (118) ja (121) ning asendame arendused võrrandisse (131) arvestades maksimaalselt lineaarseid häiritusi:

$$\begin{aligned} &\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\Upsilon+\delta(\nabla^{\rho}\nabla_{\rho})\Upsilon+\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\delta\Upsilon+ \\ &+\frac{1}{2\omega+3}(1-\frac{2}{2\omega+3}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta\Upsilon)\Big(\frac{d\omega}{d\Upsilon}\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon+2\kappa^2\Big[2V-\Upsilon\frac{dV}{d\Upsilon}\Big]-\kappa^2T\Big)+ \\ &+\frac{1}{2\omega+3}\Big(\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}\delta\Upsilon\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon+\frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta(\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon)+ \\ &+2\kappa^2\Big[2\frac{dV}{d\Upsilon}\delta\Upsilon-(\Upsilon\frac{d^2V}{d\Upsilon^2}+\frac{dV}{d\Upsilon})\delta\Upsilon\Big]-\kappa^2\delta T\Big) = 0\,. \end{aligned} \tag{135}$$

Eeldame, et ka häirimata aegruumi jaoks kehtib (38) ning viimast võrrandis (135) arvestades saame häiritusvõrrandi:

$$\begin{aligned} &\delta(\nabla^{\rho}\nabla_{\rho})\Upsilon+\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}(\delta\Upsilon)- \\ &-\frac{2}{(2\omega+3)^2}\frac{d\omega}{d\Upsilon}(\delta\Upsilon)\Big(\frac{d\omega}{d\Upsilon}\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon+2\kappa^2(2V-\Upsilon\frac{dV}{d\Upsilon})-\kappa^2T\Big)+ \\ &+\frac{1}{2\omega+3}\Big(\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}(\delta\Upsilon)\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon+\frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta(\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon)+ \\ &+2\kappa^2(\frac{dV}{d\Upsilon}-\Upsilon\frac{d^2V}{d\Upsilon^2})(\delta\Upsilon)-\kappa^2\delta T\Big) = 0. \end{aligned} \tag{136}$$

Võrrand (136) on üldine häiritusvõrrand ning nüüd arvutame, millisel kujul on ta FLRW taustaga aegruumis, kus meetrika häiritused on Newtoni kalibratsioonis. Esmalt arvutame (104), (109) kasutades energia-impulsi tensori jälje ning viimase häirituse:

$$T = T^{\rho}_{\ \rho} = -\rho+3p\,, \tag{137}$$

$$\delta T = \delta T^{\rho}_{\ \rho} = -\delta\rho+3\delta p\,. \tag{138}$$

Asendades viimase koos eelnevalt arvutatud suurustega (126)–(129) avaldisse (136) jõuame skalaarvälja häiritusvõrrandini

$$
\begin{aligned}
&-(\delta\Upsilon)'' - 2\Big[\mathcal{H} + \frac{1}{2\omega+3}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\Upsilon'\Big](\delta\Upsilon)' + (1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;kk} + \\
&+\Big(\frac{2}{(2\omega+3)^2}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\Big[\frac{d\omega}{d\Upsilon}(\Upsilon')^2 - 2\kappa^2a^2(2V - \Upsilon\frac{dV}{d\Upsilon}) + \kappa^2a^2(-\rho+3p)\Big] + \\
&+\frac{1}{2\omega+3}\Big[-\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}(\Upsilon')^2 + 2\kappa^2a^2(\frac{dV}{d\Upsilon} - \Upsilon\frac{d^2V}{d\Upsilon^2})\Big]\Big)(\delta\Upsilon) + \\
&+2\Big[\Upsilon'' + \mathcal{H}\Upsilon + \frac{1}{2\omega+3}\frac{d\omega}{d\Upsilon}(\Upsilon')^2\Big]\Phi + \Upsilon'\Phi' + 3\Upsilon'\Psi' - \kappa^2a^2\frac{1}{2\omega+3}(-\delta\rho+3\delta p) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{139}
$$

5.7.3 Võrrandid (37)

Analoogselt eelnevaga eeldame võrrandite (37) kehtivust häiritud aegruumis

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Upsilon}\bar{G}^{\mu}_{\ \nu} - \bar{g}^{\mu\kappa}\overline{\nabla}_\kappa\overline{\nabla}_\nu\bar{\Upsilon} + \delta^\mu_\nu\overline{\nabla}^\rho\overline{\nabla}_\rho\bar{\Upsilon} - \frac{\omega(\bar{\Upsilon})}{\bar{\Upsilon}}\bar{g}^{\mu\kappa}\overline{\nabla}_\kappa\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_\nu\bar{\Upsilon} + \\
&+\frac{\omega(\bar{\Upsilon})}{2\bar{\Upsilon}}\delta^\mu_\nu\overline{\nabla}^\rho\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_\rho\bar{\Upsilon} + \delta^\mu_\nu\kappa^2V(\bar{\Upsilon}) = \kappa^2\bar{T}^{\mu}_{\ \nu}\,.
\end{aligned}
\tag{140}
$$

Kasutame viimases avaldises (114), (116), (118), (121) ja (133) ning asendame iga liikme taustaväärtuse ning häirituse summana. Vabu indekseid sisaldavad suurused kirjutame

$$
\begin{aligned}
\bar{g}^{\mu\kappa}\overline{\nabla}_\kappa\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_\nu\bar{\Upsilon} &= g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon + \delta(g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon) = \\
&= g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon + \delta g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon + g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\delta\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon + g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\nu\delta\Upsilon\,,
\end{aligned}
\tag{141}
$$

kus $\delta(g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_\nu\Upsilon)$ on liikmes $\bar{g}^{\mu\kappa}\overline{\nabla}_\kappa\bar{\Upsilon}\overline{\nabla}_\nu\bar{\Upsilon}$ sisalduv esimest järku häiritusosa. Analoogselt:

$$
\bar{g}^{\mu\kappa}\overline{\nabla}_\kappa\overline{\nabla}_\nu\bar{\Upsilon} = g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu\Upsilon + \delta(g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu)\Upsilon + g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu\delta\Upsilon\,,
\tag{142}
$$

Liige $\delta(g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu)\Upsilon$ avaldub

$$
\delta(g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu)\Upsilon = \delta g^{\mu\kappa}(\partial_\kappa\partial_\nu - \Gamma^\lambda_{\kappa\nu}\partial_\lambda)\Upsilon - g^{\mu\kappa}\delta\Gamma^\lambda_{\kappa\nu}\partial_\lambda\Upsilon\,.
\tag{143}
$$

Liige $g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu\delta\Upsilon$ avaldub

$$
g^{\mu\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu\delta\Upsilon = g^{\mu\kappa}(\partial_\kappa\partial_\nu - \Gamma^\lambda_{\kappa\nu}\partial_\lambda)\delta\Upsilon\,.
\tag{144}
$$

Asendame (141), (142) ühes eelpooltooduga võrrandisse (140) ning arvestame kohe maksimaalselt lineaarsete häiritusliikmetega:

$$
\begin{aligned}
&\Upsilon G^{\mu}_{\nu} + \Upsilon \delta G^{\mu}_{\nu} + \delta\Upsilon G^{\mu}_{\nu} - g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\nabla_{\nu}\Upsilon - \delta(g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\nabla_{\nu})\Upsilon - g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\nabla_{\nu}\delta\Upsilon + \\
&+\delta^{\mu}_{\nu}\Big(\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\Upsilon + \delta(\nabla^{\rho}\nabla_{\rho})\Upsilon + \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\delta\Upsilon\Big) - (\omega + \frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta\Upsilon)\frac{1}{\Upsilon}g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{\nu}\Upsilon - \\
&-\frac{\omega}{\Upsilon}(-\frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon)g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{\nu}\Upsilon - \frac{\omega}{\Upsilon}\delta(g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{\nu}\Upsilon) + (\omega + \frac{d\omega}{d\Upsilon}\delta\Upsilon)\frac{1}{2\Upsilon}\delta^{\mu}_{\nu}\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon + \\
&+\frac{\omega}{2\Upsilon}(-\frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon)\delta^{\mu}_{\nu}\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon + \frac{\omega}{2\Upsilon}\delta^{\mu}_{\nu}\delta(\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon) + \delta^{\mu}_{\nu}\kappa^{2}(V + \frac{dV}{d\Upsilon}\delta\Upsilon) = \\
&= \kappa^{2}(T^{\mu}_{\nu} + \delta T^{\mu}_{\nu})\,. \qquad (145)
\end{aligned}
$$

Arvestame, et võrrandid (37) on rahuldatud ka häirimata aegruumis. Saame häiritusvõrrandid:

$$
\begin{aligned}
&\delta\Upsilon G^{\mu}_{\nu} + \Upsilon\delta G^{\mu}_{\nu} - \delta(g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\nabla_{\nu})\Upsilon - g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\nabla_{\nu}\delta\Upsilon + \\
&+\delta^{\mu}_{\nu}\Big(\delta(\nabla^{\rho}\nabla_{\rho})\Upsilon + \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\delta\Upsilon\Big) - (\frac{d\omega}{d\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}\delta\Upsilon g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{\nu}\Upsilon - \\
&-\frac{\omega}{\Upsilon}\Big(\delta g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{\nu}\Upsilon + g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\delta\Upsilon\nabla_{\nu}\Upsilon + g^{\mu\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{\nu}\delta\Upsilon\Big) + \\
&+(\frac{d\omega}{d\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{2\Upsilon}\delta\Upsilon\delta^{\mu}_{\nu}\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon + \frac{\omega}{2\Upsilon}\delta^{\mu}_{\nu}\delta(\nabla^{\rho}\Upsilon\nabla_{\rho}\Upsilon) + \\
&+\delta^{\mu}_{\nu}\kappa^{2}\frac{dV}{d\Upsilon}\delta\Upsilon = \kappa^{2}\delta T^{\mu}_{\nu}\,. \qquad (146)
\end{aligned}
$$

Võrrandid (146) on üldised esimest järku häiritusvõrrandid. Nüüd uurime, millisel kujul on nad FLRW taustaga aegruumis, kus meetrika häiritused on Newtoni kalibratsioonis. Tuletame meelde, et skalaarväli taustal sõltub ainult ajast: $\Upsilon = \Upsilon(\eta)$, mistõttu liikmes (143) pole tarvis arvestada ruumilisi osatuletisi. Skalaarvälja häiritus sõltub ruumikoordinaatidest: $\delta\Upsilon = \delta\Upsilon(\eta, x^{i})$ ning liikmes (144) tuleb arvestada kõiki osatuletisi. Mainime veel, et võrrandis 146 esinevates liikmetes, kus skalaarväljale mõjub kovariantse tuletise operaator ∇_{λ} võime viimase asendada osatuletise operaatoriga ∂_{λ}.

Võrrandeis 146 vabu indekseid fikseerides saame neli häiritusvõrrandit. Esmalt võtame $\mu = 0,\ \nu = 0$ ning arvutame seoseid (143), (144) kasutades vajalikud liikmed:

$$
\begin{aligned}
\delta(g^{0\kappa}\nabla_{\kappa}\nabla_{0})\Upsilon &= \frac{1}{a^{2}}\Big(2(\Upsilon'' + \mathcal{H}\Upsilon)\Phi + \Upsilon'\Phi'\Big), && (147)\\
g^{0\kappa}\nabla_{\kappa}\nabla_{0}\delta\Upsilon &= \frac{1}{a^{2}}\Big(-(\delta\Upsilon)'' + \mathcal{H}(\delta\Upsilon)'\Big), && (148)\\
g^{0\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{0}\Upsilon &= -\frac{1}{a^{2}}(\Upsilon')^{2}, && (149)\\
\delta g^{0\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{0}\Upsilon + g^{0\kappa}\nabla_{\kappa}\delta\Upsilon\nabla_{0}\Upsilon + g^{0\kappa}\nabla_{\kappa}\Upsilon\nabla_{0}\delta\Upsilon &= \frac{1}{a^{2}}\Big(2(\Upsilon')^{2}\Phi - 2\Upsilon'(\delta\Upsilon)'\Big), && (150)
\end{aligned}
$$

Arvutatu koos (100),(102),(109), (126)–(129)-ga (146)-sse asendades saame $\mu = 0,\ \nu = 0$

jaoks võrrandi:

$$\frac{1}{a^2}\Big\{(-3\mathcal{H}+\frac{\omega}{\Upsilon}\Upsilon')(\delta\Upsilon)'+\Big[-3(\mathcal{H}^2+\mathcal{K})+\frac{1}{2}(\frac{d\omega}{d\Upsilon}-\frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}(\Upsilon')^2+\kappa^2a^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big]\delta\Upsilon+$$
$$+(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;kk}-2(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2\Upsilon\Psi_{;kk}+$$
$$+\Big[6\mathcal{H}^2\Upsilon+6\mathcal{H}\Upsilon'-\frac{\omega}{\Upsilon}(\Upsilon')^2\Big]\Phi-6\mathcal{K}\Upsilon\Psi+(3\Upsilon'+6\mathcal{H}\Upsilon)\Psi'\Big\}=-\kappa^2\delta\rho\,. \qquad (151)$$

Järgmiseks võtame $\mu=0,\ \nu=i$ ning (143), (144) kasutades arvutame:

$$\delta(g^{0\kappa}\nabla_\kappa\nabla_i)\Upsilon = \frac{1}{a^2}\Upsilon'\Phi_{,i}\,, \qquad (152)$$
$$g^{0\kappa}\nabla_\kappa\nabla_i\delta\Upsilon = \frac{1}{a^2}\Big(-(\delta\Upsilon)'_{,i}+\mathcal{H}(\delta\Upsilon)_{,i}\Big)\,, \qquad (153)$$
$$g^{0\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_i\Upsilon = 0\,, \qquad (154)$$
$$\delta g^{0\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_i\Upsilon+g^{0\kappa}\nabla_\kappa\delta\Upsilon\nabla_i\Upsilon+g^{0\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_i\delta\Upsilon = -\frac{1}{a^2}\Upsilon'(\delta\Upsilon)_{,i}\,, \qquad (155)$$

Viimased koos (100),(102),(109), (126)–(129)-ga (146)-sse asendades saame $\mu=0,\ \nu=i$ jaoks võrrandi:

$$\frac{1}{a^2}\Big((-\mathcal{H}+\frac{\omega}{\Upsilon}\Upsilon')(\delta\Upsilon)_{,i}+(\delta\Upsilon)'_{,i}-(\Upsilon'+2\mathcal{H}\Upsilon)\Phi_{,i}-2\Upsilon\Psi'_{,i}\Big)=\kappa^2(\rho+p)v_{,i}\,. \qquad (156)$$

Kolmanda sõltumatu võrrandi tarvis võtame $\mu=i,\ \nu=j$ ning (143), (144) kasutades arvutame:

$$\delta(g^{i\kappa}\nabla_\kappa\nabla_j)\Upsilon = \frac{1}{a^2}\delta_{ij}(2\mathcal{H}\Upsilon'\Phi+\Upsilon'\Psi')\,, \qquad (157)$$
$$g^{i\kappa}\nabla_\kappa\nabla_j\delta\Upsilon = \frac{1}{a^2}\Big\{-\mathcal{H}(\delta\Upsilon)'\delta_{ij}+(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;ij}\Big\}\,, \qquad (158)$$
$$g^{i\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_j\Upsilon = 0\,, \qquad (159)$$
$$\delta(g^{i\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_j\Upsilon) = \delta g^{i\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_j\Upsilon+g^{i\kappa}\nabla_\kappa\delta\Upsilon\nabla_j\Upsilon+g^{i\kappa}\nabla_\kappa\Upsilon\nabla_j\delta\Upsilon=0\,. \qquad (160)$$

Viimased koos (100),(102),(109), (126)–(129)-ga (146)-sse asendades saame $\mu=i,\ \nu=j$ jaoks võrrandid:

$$\frac{1}{a^2}\Big\{\Big(-(\delta\Upsilon)''-(\mathcal{H}+\frac{\omega}{\Upsilon}\Upsilon')(\delta\Upsilon)'+(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;kk}+$$
$$+\Big[-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2-\mathcal{K}-\frac{1}{2}(\frac{d\omega}{d\Upsilon}-\frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}(\Upsilon')^2+\kappa^2a^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big]\delta\Upsilon+$$
$$+\Big[2(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\Upsilon+2\Upsilon''+2\mathcal{H}\Upsilon'+\frac{\omega}{\Upsilon}(\Upsilon')^2\Big]\Phi+(2\mathcal{H}\Upsilon+\Upsilon')\Phi'+$$
$$+\Upsilon(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Phi_{;kk}-\Psi_{;kk})+(4\mathcal{H}\Upsilon+2\Upsilon')\Psi'+2\Upsilon\Psi''\Big)\delta_{ij}-$$
$$-(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;ij}+\Upsilon(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Psi_{;ij}-\Phi_{;ij})=\kappa^2\delta_{ij}\delta p+\kappa^2\Sigma^i{}_j\,. \qquad (161)$$

Viimases võime eraldada jäljega osa ($i = j$) ning jäljevaba ($i \neq j$) osa. Jälje leidmiseks võtame (161)-s vabad indeksid i ja j võrdseks ning summeerime üle võrdseks võetud indeksite. Saame:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\Big\{-(\delta\Upsilon)'' - (\mathcal{H} + \frac{\omega}{\Upsilon}\Upsilon')(\delta\Upsilon)' + \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;kk} + \\
&+\Big[-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 - \mathcal{K} - \frac{1}{2}(\frac{d\omega}{d\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}(\Upsilon')^2 + \kappa^2 a^2 \frac{dV}{d\Upsilon}\Big]\delta\Upsilon + \\
&+\Big[2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Upsilon + 2\Upsilon'' + 2\mathcal{H}\Upsilon' + \frac{\omega}{\Upsilon}(\Upsilon')^2\Big]\Phi + (2\mathcal{H}\Upsilon + \Upsilon')\Phi' + \\
&+\frac{2}{3}\Upsilon(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Phi_{;kk} - \Psi_{;kk}) + (4\mathcal{H}\Upsilon + 2\Upsilon')\Psi' + 2\Upsilon\Psi''\Big\} = \kappa^2\delta p\,.
\end{aligned} \tag{162}$$

Jäljevaba osa saame, kui eemaldame (161)-s kõik Kroneckeri deltad:

$$-(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\Upsilon)_{;ij} + \Upsilon(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Psi_{;ij} - \Phi_{;ij}) = \kappa^2 a^2 \Sigma^i{}_j\,, \quad i \neq j\,. \tag{163}$$

5.7.4 Pidevuse võrrand

Energia-impulsi tensori kovariantse divergentsi nulliga võrdumisest saame samuti tuletada häiritusvõrrandid. Energia-impulsitensori definitsiooni tõttu (6) on need võrrandid ühesugused nii ÜRT kui STG puhul. Eeldame, et (9) on rahuldatud häiritud aegruumis:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_\mu \overline{T}^\mu{}_\nu &= \partial_\mu T^\mu_\nu + \partial_\mu \delta T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\rho}T^\rho_\nu + \delta\Gamma^\mu_{\mu\rho}T^\rho_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\rho}\delta T^\rho_\nu - \\
&\quad -\Gamma^\rho_{\mu\nu}T^\mu_\rho - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}T^\mu_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\delta T^\mu_\rho = 0\,.
\end{aligned} \tag{164}$$

Samas eeldame, et (9) on rahuldatud ka häirimata aegruumis. Arvestades viimast võrrandis (164) saame esimest järku häirituste jaoks võrrandid:

$$\partial_\mu \delta T^\mu_\nu + \delta\Gamma^\mu_{\mu\rho}T^\rho_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\rho}\delta T^\rho_\nu - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}T^\mu_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\delta T^\mu_\rho = 0\,. \tag{165}$$

Võtame (165)-s $\nu = 0$ ja saame järgmise võrrandi:

$$-(\delta\rho)' - 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)(3\Psi' - v_{;kk}) = 0\,. \tag{166}$$

Võtame (165)-s $\nu = i$ ja siis saame võrrandi:

$$\Big[(\rho + p)v_{,j}\Big]' + \delta p_{,j} + (p + \rho)\Phi_{,j} + 4\mathcal{H}(p + \rho)v_{,j} + \Sigma^k{}_{j;k} = 0\,. \tag{167}$$

Märgime veel, et omavahel mitteinterakteeruvate mateeriakomponentide jaoks rahuldab iga komponent eraldi tuletatud võrrandeid ning viimane ei järeldu otseselt Einsteini võrranditest [39].

5.8 Üldrelatiivsusteooria ja minimaalselt seotud skalaarvälja häiritusvõrrandid

Eelnevates alajaotustes oleme tuletanud vajalikud suurused, et kirja panna ka üldised ÜRT ja minimaalselt seotud skalaarvälja häiritusvõrrandid skalaarsete häirituste jaoks, mida selles alajaotuses teemegi. Mainitud võrrandid paneme kirja eelkõige sellepärast, et just nende võrranditega tuleks esmajärjekorras võrrelda alajaotuses 6.3 tuletatavaid STG häiritusvõrrandeid ÜRT piiril. Lähtume Einsteini võrrandeist ning minimaalselt seotud skalaarvälja võrrandist.

5.8.1 Minimaalselt seotud skalaarvälja võrrand (30)

Kirjutame minimaalselt seotud skalaarvälja ainult ajast sõltuva taustaliikme ning ka ruumilist sõltuvust omava esimest järku häiritusliikme summana:

$$\bar{\phi}(\eta, x^i) = \phi(\eta) + \delta\phi(\eta, x^i). \tag{168}$$

Lähtume minimaalselt seotud skalaarvälja võrrandist (30). Eeldame, et viimane kehtib nii häiritud kui ka häirimata aegruumis. Häirimata aegruumis võime kasutada tulemust (125) ja saame minimaalselt seotud häirimata skalaarvälja võrrandi:

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2 \frac{dV_m}{d\phi} = 0\,. \tag{169}$$

Esimest järku häirituste jaoks kehtib (kasutades (118)) võrrand:

$$(\delta\nabla^\mu\nabla_\mu)\phi + \nabla^\mu\nabla_\mu\delta\phi - \frac{d^2V_m}{d\phi^2}\delta\phi = 0. \tag{170}$$

Vajalikud suurused arvutasime (126)-s ja (127)-s. Viimaseid kasutades saame minimaalselt seotud skalaarvälja häiritusvõrrandi kirjutada kujul:

$$\begin{aligned} 2(\phi'' + 2\mathcal{H}\phi')\Phi + \phi'\Phi' + 3\phi'\Psi' - (\delta\phi)'' - 2\mathcal{H}(\delta\phi)' + \\ +(1 + \frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\delta\phi)_{;kk} - a^2\frac{d^2V_m}{d\phi^2}\delta\phi = 0\,. \end{aligned} \tag{171}$$

See võrrand on lähtekohaks kui käsitletakse skalaarvälja häiritusi varajase Universumi inflatsiooniperioodil [3], [4].

5.8.2 Einsteini võrrandid (7)

Eeldame, et Einsteini võrrandid (7) kehtivad nii häiritud kui ka häirimata aegruumis. Siis saame häirituste jaoks võrrandid:

$$\delta G^\mu_{\ \nu} = 8\pi G_N(\delta T^\mu_{\ \nu} + \delta T_{(\phi)\nu}^{\ \ \mu})\,, \tag{172}$$

kus oleme eristanud minimaalselt seotud skalaarvälja ϕ häiritud energia-impulsi tensori ülejäänud mateeria häiritud energia-impulsi tensorist. Einsteini tensori häiritused on esitatud valemis (102), energia-impulsi tensori häiritused valemis (109), ning arvutame nüüd skalaarvälja ϕ energia-impulsi tensori (31) häiritused:

$$\delta T_{(\phi)\ \nu}^{\ \mu} = \delta(g^{\rho\mu}\nabla_\rho\phi\nabla_\nu\phi) - \Big[\frac{1}{2}\delta(\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi) + \frac{dV_m}{d\phi}\delta\phi\Big]\delta^\mu_{\ \nu}\,. \tag{173}$$

Kasutades (129), (150), (155), (160) saame:

$$\begin{aligned}
\delta T_{(\phi)0}^{\ 0} &= \frac{1}{a^2}\Big[(\phi')^2\Phi - \phi'(\delta\phi)' - \frac{1}{2}a^2\frac{dV_m}{d\phi}\delta\phi\Big]\,,\\
\delta T_{(\phi)i}^{\ 0} &= -\frac{1}{a^2}\phi'(\delta\phi)_{,i}\,,\\
\delta T_{(\phi)j}^{\ i} &= \frac{1}{a^2}\Big[-(\phi')^2\Phi + \phi'(\delta\phi)' - \frac{1}{2}a^2\frac{dV_m}{d\phi}\delta\phi\Big]\delta^i_{\ j}\,.
\end{aligned} \tag{174}$$

Asendame võrrandisse (172) eelnevalt arvutatud suurused. Võtame $\mu = 0$ ja $\nu = 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\Big(6\mathcal{H}^2\Phi + 6\mathcal{H}\Psi' - 6\mathcal{K}\Psi - 2(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2\Psi_{;kk}\Big) = \\
&= -8\pi G_N\delta\rho + 8\pi G_N\frac{1}{a^2}\Big[(\phi')^2\Phi - \phi'(\delta\phi)' - \frac{1}{2}a^2\frac{dV_m}{d\phi}\delta\phi\Big]\,.
\end{aligned} \tag{175}$$

Võtame $\mu = 0$ ja $\nu = i$:

$$\frac{1}{a^2}\Big(-2(\Psi')_{,i} - 2\mathcal{H}\Phi_{,i}\Big) = 8\pi G_N(\rho + p+)v_{,i} - 8\pi G_N\frac{1}{a^2}\phi'(\delta\phi)_{,i}\,. \tag{176}$$

Võtame $\mu = i$ ja $\nu = j$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\Big\{\Big(-2\mathcal{K}\Psi + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + 2\Psi'' + 2\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{H}\Psi' + \\
&+(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Phi_{;kk} - \Psi_{;kk})\Big)\delta_{ij} + (1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Psi_{;ij} - \Phi_{;ij})\Big\} = \\
&= 8\pi G_N\delta_{ij}\delta p + 8\pi G_N\Sigma^i_{\ j} + 8\pi G_N\frac{1}{a^2}\Big[-(\phi')^2\Phi + \phi'(\delta\phi)' - \frac{1}{2}a^2\frac{dV_m}{d\phi}\delta\phi\Big]\delta_{ij}\,.
\end{aligned} \tag{177}$$

Eraldame viimasest jäljega osa võttes vabad indeksid võrdseks ning summeerides üle nende:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\Big\{-2\mathcal{K}\Psi + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + 2\Psi'' + 2\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{H}\Psi' + \frac{2}{3}(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Phi_{;kk} - \Psi_{;kk})\Big\} = \\
&= 8\pi G_N\delta p + 8\pi G_N\frac{1}{a^2}\Big[-(\phi')^2\Phi + \phi'(\delta\phi)' - \frac{1}{2}a^2\frac{dV_m}{d\phi}\delta\phi\Big]
\end{aligned} \tag{178}$$

Võrrandi (177) jäljevaba osa annab:

$$(1+\frac{1}{4}\mathcal{K}r^2)^2(\Psi_{;ij} - \Phi_{;ij}) = 8\pi G_N a^2\Sigma^i_{\ j}\,, \quad i \neq j\,. \tag{179}$$

6 Võrrandid üldrelatiivsusteooria piiril

Selles peatükis tuletame STG skalaarsed häiritusvõrrandid ÜRT piiril. Osas 6.1 defineerime piirprotsessi, mida me järgnevas käsitluses mõistame ÜRT piirina. Osas 6.2 arvutame häirimata STG võrrandid ÜRT piiril juhul, kui nad sisaldavad nii mateeriat kui ka potentsiaali. Osas 6.3 arvutame STG häiritusvõrrandid ÜRT piiril. Osa 6.4 on pühendatud arutelule.

6.1 Üldrelatiivsusteooria piiri mõiste

Erinevad kosmoloogilised vaatlused ning ka Päikesesüsteemis tehtud nn nõrga välja vaatlused nõuavad, et vaatlustega kooskõlas olev STG teooria (iga üldistatud gravitatsiooniteooria) peab ennustama vaatlustulemusi, mis küllaltki täpselt langevad kokku ÜRT poolt ennustatutega [27]. Seega saab öelda, et STG teooria peab olema sellises režiimis, kus tema poolt tehtud ennustused erinevad väga vähe ÜRT poolt tehtud ennustustest. Sellist olukorda, kus STG ja ÜRT ennustused langevad täpselt kokku, nimetame STG teooria ÜRT punktiks ning piirprotsessi sellele punktile lähenemisel nimetamegi STG teooria ÜRT piiriks. Milline dünaamiline mehhanism selle piirprotsessi realiseerib jääb käesolevas töös vaatluse alt välja. Järgnevalt esitame matemaatilised tingimused, mis peavad STG ÜRT punktis olema täidetud. Neid tingimusi on uuritud artiklites [21], [22], [23] ja käesolevas refereerime seal esitatud tulemusi ja esituse käigus enam originaaltöödele ei viita.

Kuna ÜRT ei sisalda dünaamilist skalaarvälja $\Upsilon(x^\mu)$, siis on kindlasti vajalik, et STG ÜRT punktis oleks täidetud tingimus $\nabla_\mu \Upsilon(x^\nu) = 0$, mis toob kaasa nõude, et skalaarväli on konstantne (nii ajalises kui ruumilises tähenduses) $\Upsilon(x^\mu) = \mathrm{konstant}$. Osutub, et sellest ei piisa, sest võrrandist (38) on näha, et juhul kui selles võrrandis säilib allika liige, siis ei ole tingimus $\Upsilon(x^\mu) = \mathrm{konstant}$ püsiv st skalaarväli liigub sellest punktist uuesti eemale. Võrrandist (38) on näha, et juhul kui energia-impulsi tensori jälg rahuldab tingimust $T = 0$, mis realiseerub mateeria puudumisel (erijuhuna ka siis kui mateeria olekuparameetriks on $\mathrm{w} = 1/3$, st mateeriaks on kiirgus), on allikaliikme kadumise tingimus esitatav kujul

$$\left(\Upsilon \frac{dV}{d\Upsilon} - 2V\right)\Bigg|_{\Upsilon_\bullet} = 0\,, \tag{180}$$

kus $\Upsilon_\bullet$ on konstantne skalaarvälja väärtus selles punktis.

Juhul kui $T \neq 0$, siis tuleb ÜRT punkti tingimus defineerida alljärgnevalt

$$\frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\Big|_{\Upsilon_\star} = \frac{1}{2\omega(\Upsilon_\star)+3} = \frac{1}{2\omega_\star+3} = 0\,, \tag{181}$$

kus $\Upsilon_\star$ on konstantne skalaarvälja väärtus selles punktis. Viimasest võrdusest järeldub, et punktis $\Upsilon_\star$ peab kehtima tingimus $\omega_\star = \infty$. Selline tingimus järeldub ka STG nõrga välja lähendist, kus parametriseeritud post-Newtoni lähendis (PPN) [27] iseloomustatakse STG ja ÜRT erinevust parameetritega γ ja β, mis ÜRT punktis rahuldavad tingimust $\gamma = \beta = 1$ ning mis seosefunktsiooni ω ja tema tuletise $\frac{d\omega}{d\Upsilon}$ jaoks on esitavad kujul

$$\omega|_{\gamma=\beta=1} = \infty \,, \qquad \frac{1}{\omega^3}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\Big|_{\gamma=\beta=1} = 0 \,. \tag{182}$$

Nagu eespool mainitud on STG teooria ÜRT piir defineeritud sellisel juhul kui piirprotsess, kus skalaarvälja Υ väärtus läheneb suurusele $\Upsilon_\star$. Sellises piirprotsessis asendub tingimus (181) järgmise tingimusega:

$$\frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\Big|_{\Upsilon\to\Upsilon_\star} = \frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\Big|_{\omega\to\infty} \to 0 \,. \tag{183}$$

Lähenemisel ÜRT piirile on sobilik defineerida suurused x ja $\dot{x}$, mis iseloomustavad skalaarvälja Υ ja tema tuletise $\dot{\Upsilon}$ „kaugust“ ÜRT punkti väärtustest $\Upsilon_\star$ ja $\dot{\Upsilon}_\star = 0$ järgmiselt:

$$\Upsilon = \Upsilon_\star + x \,, \qquad \dot{\Upsilon} = \frac{d\Upsilon}{dt}\Big|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} + \dot{x} = \dot{x} \,. \tag{184}$$

Defineerides veel täiendavalt suuruse

$$A(\Upsilon) \equiv \frac{d}{d\Upsilon}\left(\frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\right) \tag{185}$$

ning tehes eelduse, et funktsioon $1/(2\omega(\Upsilon)+3)$ on diferentseeruv punktis $\Upsilon_\star$ ja tema tuletis selles punktis ei ole võrdne nulliga, saame selle funktsiooni arendada Taylori ritta punkti $\Upsilon_\star$ ümbruses:

$$\frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3} = \frac{1}{2\omega(\Upsilon_\star)+3} + A_\star x + ... \approx A_\star x \,, \tag{186}$$

kus

$$A_\star \equiv A(\Upsilon_\star) = \frac{d}{d\Upsilon}\left(\frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\right)\Bigg|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} \neq 0 \,. \tag{187}$$

Sellise arenduse tegemisega oleme määratlenud x ja $\dot{x}$ kui esimest järku väikesed suurused ja täiendavalt eeldame, et nad on sama järku väikesed st $x \sim \dot{x} \sim \mathcal{O}(1)$.

Kokkuvõtvalt määratleme STG teooria lähenemise ÜRT-le kui piirprotsessi, kus $\Upsilon \to \Upsilon_\star$ korral on täidetud neli varemesitatud tingimust, mille võib kokkuvõtlikult esitada järgmiselt:

$$\text{(a.)}\ \frac{1}{2\omega(\Upsilon)+3}\Big|_{\Upsilon\to\Upsilon_\star} \to 0 \,, \quad \text{(b.)}\ \frac{d\Upsilon}{dt}\Big|_{\Upsilon\to\Upsilon_\star} \to 0 \,, \quad \text{(c.)}\ \exists\ A(\Upsilon_\star) \,, \quad \text{(d.)}\ A(\Upsilon_\star) \neq 0 \tag{188}$$

Järgnevates alajaotustes esitatavate arvutuste läbiviimiseks saame lähtudes seostest (186), (187) avaldada seosefunktsiooni $\omega(\Upsilon)$ ning tema esimese ning teise tuletise:

$$\omega(\Upsilon) = \frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2}\,, \tag{189}$$

$$\frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon} = -\frac{1}{2A_\star x^2}\frac{dx}{d\Upsilon} = -\frac{1}{2A_\star x^2}\,, \tag{190}$$

$$\frac{d^2\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d\omega(\Upsilon)}{d\Upsilon}\right]\frac{dx}{d\Upsilon} = \frac{1}{A_\star x^3}\frac{dx}{d\Upsilon} = \frac{1}{A_\star x^3}\,. \tag{191}$$

6.2 Üldised skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria kosmoloogia võrrandid üldrelatiivsusteooria piiril

Käesolevas alajaotuses uurime STG teooria taustavõrrandeid ÜRT piiril. STG taustavõrranditena peame silmas üldiseid STG võrrandeid, kus aegruumi meetrika on FLRW meetrika ning mateeriatensor on seetõttu ideaalse vedeliku kujul. Need võrrandid ei sisalda häiritusliikmeid ning kõik suurused sõltuvad ainult ajast. Eelmises jaotises defineeritud ÜRT piiri jaoks arvestame, et skalaarväli $\Upsilon(t)$ on ÜRT punkti lähedal, mis tähendab, et asendame üldistesse väljavõrranditesse arendused (184), (189), (190), (191). Kuna skalaarväli erineb ÜRT punkti väärtusest esimest järku väikese suuruse $x(t)$ võrra, siis eeldame, et kõik võrrandites esinevad ajast sõltuvad suurused (mastaabikordaja, Hubble'i parameeter, tihedus, rõhk) võime väljendada kahe ajast sõltuva funktsiooni summana, kus esimene funktsioon määrab vastava suuruse väärtuse ÜRT punktis ning teine funktsioon kirjeldab ÜRT punkti lähedast olukorda ning on esimest järku väike suurus. Hubble'i parameetri $H(t)$ ning mateeriaväljade energiatihedus $\rho(t)$ erinevad oma väärtustest ÜRT punktis $H_\star(t)$ ja $\rho_\star(t)$ järgmiselt:

$$H(t) = H_\star(t) + h(t)\,, \tag{192}$$

$$\rho(t) = \rho_\star(t) + r(t)\,, \tag{193}$$

kus eeldame, et $h(t)$ ja $r(t)$ ning nende esimesed tuletised on esimest järku väikesed.

STG taustavõrrandites esinevad veel mastaabikordaja $a(t)$ ning rõhk $p(t)$, mille jaoks peaksime kasutama analoogilisi arendusi, kuid edaspidi vaatleme olukorda, kus aegruum on tasane $\mathcal{K} = 0$ ning eeldame, et mateeria tihedus ja rõhk on seotud barotroopse võrrandiga $p = \mathrm{w}\rho$, kus $\mathrm{w} = konst$. Sellistel eeldustel saame võrrandid viia kujule, kus pole ilmutatult liikmeid $a(t)$ ning $p(t)$ ning meil on kolm sõltumatut võrrandit kolme ÜRT piiri kirjeldava esimest järku väikese suuruse $x(t), h(t)$ ning $r(t)$ jaoks.

Eelmises peatükis arvutasime erinevad liikmed, mis esinevad STG taustavõrrandites, kasutades konformset aega η. ÜRT piiri oleme defineerinud aga kosmoloogilist aega t kasutades ning seetõttu peame enne võrranditega ÜRT piirile minekut teisendama kõik suurused kosmoloogilisse aega. ÜRT piiri võiksime defineerida ka konformse aja abil, kuid olukorras, kus $\mathcal{K} = 0$ on otstarbekam kosmoloogiline aeg, sest viimane võimaldab vabaneda kordajast a^2 skalaarvälja potentsiaali V sisaldavas liikmes ning seetõttu ei ole vajalik võrranditesse kirjutada mastaabikordaja arendust ÜRT punkti lähedal (olukorras, kus $\mathcal{K} \neq 0$ ning $V = 0$ on ÜRT piir otstarbekam defineerida konformse aja abil, kui aga $\mathcal{K} \neq 0$ ning $V \neq 0$, tuleb ajamuutuja valikust sõltumata kasutada ÜRT piiri jaoks ka mastaabikordaja arendust).

Eeldustel $\mathcal{K} = 0$ ning $p = \mathrm{w}\rho$ saame STG taustavõrrandid kosmoloogilises ajas (42), (43), (44). Kehtib ka pidevuse võrrand (28), kuid viimane pole kolmest eelnevast sõltumatu. Asendades ÜRT piiri defineerivad arendused STG võrranditesse ning arvestades maksimaalselt esimest järku väikeseid suurusi, jõuame võrranditeni ÜRT piiril. Võrrandid sisaldavad null järku liikmeid, mis kirjeldavad ÜRT punkti ning esimest järku liikmeid, mis kirjeldavad dünaamikat ÜRT punkti lähedal. Eeldame, et võrrandid ÜRT punktis on rahuldatud sõltumata dünaamikast ÜRT punkti lähedal. Niiviisi saame null järku võrrandid suuruste $H_\star(t)$ ja $\rho_\star(t)$ jaoks ning esimest järku võrrandid suuruste $x(t), h(t)$ ning $r(t)$ jaoks.

Johtuvalt skalaarvälja arendusest (184) ÜRT piiril arendame potentsiaali $V(\Upsilon)$ ning tema tuletised ÜRT punkti $\Upsilon_\star$ lähedal Taylori ritta ning arvestame kahte esimest liiget. ÜRT punktis kasutame tähistusi $V(\Upsilon_\star) = V_\star$ ja $\frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon}\big|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} = \frac{dV}{d\Upsilon}\big|_\star$. Paneme kirja edaspidi arvutustes kasutatavad arendused:

$$V(\Upsilon) = V(\Upsilon_\star + x) \approx V(\Upsilon_\star) + \frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon}\Big|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} x = V + \frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star x\,, \tag{194}$$

$$\frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon} \approx \frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon}\Big|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} + \frac{d^2V(\Upsilon)}{d\Upsilon^2}\Big|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} x = \frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star x\,, \tag{195}$$

$$\frac{d^2V(\Upsilon)}{d\Upsilon^2} \approx \frac{d^2V(\Upsilon)}{d\Upsilon^2}\Big|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} + \frac{d^3V(\Upsilon)}{d\Upsilon^3}\Big|_{\Upsilon=\Upsilon_\star} x = \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star + \frac{d^3V}{d\Upsilon^3}\Big|_\star x\,, \tag{196}$$

$$\frac{1}{\Upsilon} = \frac{1}{\Upsilon_\star + x} \approx \frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})\,. \tag{197}$$

Kirjutame võrrandi (42) ÜRT piiril:

$$\begin{aligned}(H_\star + h)^2 = &-(H_\star + h)\frac{\dot{x}}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star}) + \frac{1}{6}\frac{\dot{x}^2}{\Upsilon_\star^2}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})^2(\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2}) + \\ &+\frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})\frac{\rho_\star + r}{3} + \frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})(\frac{V_\star}{3} + \frac{1}{3}\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star x)\,.\end{aligned} \tag{198}$$

Meid huvitavad null ning esimest järku liikmed, seega võime kõik kõrgemat järku liikmed arvestamata jätta:

$$
\begin{aligned}
H_\star^2 + 2H_\star h &= -\frac{H_\star}{\Upsilon_\star}\dot{x} + \frac{1}{12}\frac{1}{A_\star\Upsilon_\star^2}\frac{\dot{x}^2}{x} + \\
+\frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}\frac{\rho_\star}{3} + \frac{1}{3}\frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}r &+ \frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}\frac{V_\star}{3} - \frac{\kappa^2}{3}\Big(\frac{\rho_\star}{\Upsilon_\star^2} + \frac{V_\star}{\Upsilon_\star^2} - \frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star\Big)x\,. \qquad (199)
\end{aligned}
$$

Eeldame, et ÜRT punktis esimest järku liikmed kaovad (seejuures eldame, et $\frac{\dot{x}^2}{x}$ on esimest järku väike). Siis saame ÜRT punktis

$$
H_\star^2 = \frac{1}{3}\frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}(\rho_\star + V_\star), \qquad (200)
$$

milles võib ära tunda ÜRT Friedmanni seosevõrrandi, kus skalaarvälja potentsiaal $V_\star$ on kosmoloogilise konstandi rollis. Kasutades viimast võrrandit võrrandis (199) saame:

$$
-6\Upsilon_\star H_\star h + \Big(\kappa^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star - 3H_\star^2\Big)x - 3H_\star\dot{x} + \frac{1}{4}\frac{1}{A_\star\Upsilon_\star}\frac{\dot{x}^2}{x} = -\kappa^2 r\,. \qquad (201)
$$

See võrrand on ajast sõltuvate kordajatega (ajast sõltuvus esineb $H_\star(t)$ kaudu; tuletame meelde, et ÜRT punktis on skalaarväli konstantne) mittelineaarne diferentsiaalvõrrand esimest järku väikeste suuruste $x(t), h(t)$ ning $r(t)$ jaoks.

Järgmisena kirjutame võrrandi (43) ÜRT piiril.

$$
\begin{aligned}
2(\dot{H}_\star + \dot{h}) + 3(H_\star + h)^2 &= -2(H_\star + h)\frac{\dot{x}}{\Upsilon_\star}\Big(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star}\Big) - \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{\Upsilon_\star^2}\Big(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star}\Big)^2\Big(\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2}\Big) - \\
-\frac{\ddot{x}}{\Upsilon_\star}\Big(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star}\Big) - \frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}\Big(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star}\Big)\mathrm{w}(\rho_\star + r) &+ \frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}\Big(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star}\Big)\Big(V_\star + \frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star x\Big)\,. \qquad (202)
\end{aligned}
$$

Eeldame, et ÜRT punktis esimest ning kõrgemat järku liikmed kaovad. Saame

$$
2\dot{H}_\star + 3H_\star^2 = \frac{\kappa^2}{\Upsilon_\star}(V_\star - \mathrm{w}\rho_\star), \qquad (203)
$$

milles tunneme ära ÜRT Friedmanni dünaamilise võrrandi. Kasutades viimast võrrandis (202) ning arvestades kuni esimest järku liikmeid saame võrrandi

$$
\begin{aligned}
2\Upsilon_\star(\dot{h} + 3H_\star h) &= -(2\dot{H}_\star + 3H_\star^2)x - \ddot{x} - 2H_\star\dot{x} - \\
-\frac{1}{4}\frac{1}{A_\star\Upsilon_\star}\frac{\dot{x}^2}{x} &+ \kappa^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star x - \kappa^2\mathrm{w}r\,. \qquad (204)
\end{aligned}
$$

Eespool oleme eeldanud, et $x(t), h(t), r(t)$ ning nende esimesed tuletised on esimest järku väikesed. Viimases võrrandis oleme arvestanud ka suurusega $\ddot{x}$ kui esimest järku väikesega ($\ddot{x}$ ei saa olla null järku, sest oleme eeldanud, et taustavõrrandid ÜRT punktis ei sõltu ümbruse dünaamikat kirjeldavatest suurustest, küll aga võib $\ddot{x}$ olla kõrgemat järku väike).

Kirjutame skalaarvälja võrrandi (44) ÜRT piiril:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} = -3(H_\star + h)\dot{x} - A_\star x(-\frac{1}{2A_\star x^2})\dot{x}^2 + \kappa^2 A_\star x(1-3\mathrm{w})(\rho_\star + r) + \\
+2\kappa^2 A_\star x\left(2(V_\star + \frac{dV}{d\Upsilon}\big|_\star x) - \Upsilon_\star(1-\frac{x}{\Upsilon_\star})(\frac{dV}{d\Upsilon}\big|_\star + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\big|_\star x)\right) .
\end{aligned}
\tag{205}
$$

See võrrand ei sisalda null järku liikmeid ning esimest järku liikmete jaoks saame:

$$
\ddot{x} = -3H_\star\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{x} + \kappa^2 A_\star\left(4V_\star - 2\Upsilon_\star\frac{dV}{d\Upsilon}\big|_\star + (1-3\mathrm{w})\rho_\star\right)x\,. \tag{206}
$$

Paneme kirja pidevuse võrrandi (28) ÜRT piiril:

$$
\dot{\rho}_\star + \dot{r} + 3(H_\star + h)(1+\mathrm{w})(\rho_\star + r) = 0\,. \tag{207}
$$

Null järku liikmete jaoks saame ÜRT-st tuttava pidevuse võrrandi

$$
\dot{\rho}_\star + 3H_\star(1+\mathrm{w})\rho_\star = 0 \tag{208}
$$

ning esimest järku liikmete jaoks saame võrrandi

$$
\dot{r} + 3H_\star(1+\mathrm{w})r + 3\rho_\star(1+\mathrm{w})h = 0\,. \tag{209}
$$

Võrrandid 201, (204), (206), (209) kujutavad võrrandisüsteemi esimest järku väikeste suuruste $x(t)$, $h(t)$ ja $r(t)$ jaoks. Seejuures koosneb võrrandisüsteem neljast võrrandist, millest kolm on sõltumatud. Esimest järku häiritusvõrrandite kontekstis pakuvad meile huvi $x(t)$ ja $h(t)$, sest STG häiritusvõrranditega ÜRT piirile minnes sisaldavad võrrandid liikmeid, kus esinevad $x(t)$ ja $h(t)$, kuid ei esine $r(t)$. Osutub, et $x(t)$ ja $h(t)$ dünaamikat kirjeldavad diferentsiaalvõrrandid saab kirja panna sõltumatult $r(t)$-st. Skalaarvälja parandi $x(t)$ liikumisvõrrand on (206), mis on juba sobival kujul, sest ei sisalda $r(t)$-d. Liikumisvõrrandeis tahame vabaneda ka energiatiheduse liikmest $\rho_\star$ ning selle jaoks kasutame ÜRT punkti võrrandit (200). Siis saame võrrandi (206) järgmisel kujul:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} = -3H_\star\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{x} + \\
+\left(3H_\star^2 A_\star\Upsilon_\star(1-3\mathrm{w}) + \kappa^2 A_\star\left[3(1+\mathrm{w})V_\star - 2\Upsilon_\star\frac{dV(\Upsilon)}{d\Upsilon}\Big|_\star\right]\right)x\,.
\end{aligned}
\tag{210}
$$

Hubble'i parameetri parandi $h(t)$ tuletist sisaldav võrrand on (204). Viimase sobivale kujule viimiseks teeme järgmised sammud. Kasutame ÜRT punkti võrrandit (203) vabanemaks suurusest $\dot{H}_\star$ ning seejärel kasutame ÜRT punkti võrrandit (200) vabanemaks viimase asenduse teel tekkinud liikmest $\rho_\star$. Seejärel kasutame $\ddot{x}$-st vabanemiseks võrrandit (210) ning suurusest r saame lahti võrrandi (201) abil. Teostades mainitud tehted jõuame järgmise võrrandini:

$$
\begin{aligned}
\dot{h} + 3H_\star(1+w)h = \frac{1}{2}\frac{1}{\Upsilon_\star}H_\star(1-3\mathrm{w})\dot{x} - \\
-\frac{1}{4}\frac{1}{\Upsilon_\star}\Big[1+(1-\mathrm{w})\frac{1}{2A_\star\Upsilon_\star}\Big]\frac{\dot{x}^2}{x} - \bigg(\kappa^2 A_\star\Big[\frac{3}{2}(1+\mathrm{w})\frac{V_\star}{\Upsilon_\star} - \frac{dV}{d\Upsilon}|_\star\Big] + \\
+\frac{\kappa^2}{2}(1+w)(\frac{V_\star}{\Upsilon_\star^2} - \frac{1}{\Upsilon_\star}\frac{dV}{d\Upsilon}|_\star) + \frac{3}{2}(1-3\mathrm{w})H_\star^2 A_\star\bigg)x\,. \qquad (211)
\end{aligned}
$$

Teeme lühikokkuvõtte käesolevast alajaotusest. Üldistes STG taustavõrrandeis kasutame järgmisi eeldusi: kolmruum on tasane $\mathcal{K} = 0$ ning tihedus ja rõhk on seotud barotroopse võrrandiga $p = \mathrm{w}\rho,\ \mathrm{w} = const$. Saame võrrandisüsteemi võrranditega (42), (43), (44)), (28), kuhu asendame ÜRT piiri defineerivad arendused (184), (189), (190), (191). Eeldame, et Hubble'i parameetri $H(t)$ ning mateeria energiatiheduse $\rho(t)$ võime kirjutada ÜRT punkti kirjeldavate null järku suuruste $(H_\star(t),\ \rho_\star(t))$ ning esimest järku parandite $(h(t),\ r(t))$ summana (192), (193) ning asendame needki arendused eelmainitud võrrandisüsteemi. Arvestame maksimaalselt esimest järku liikmeid. Eeldame, et ÜRT punktis esimest järku parandusliikmed kaovad. Null järku liikmete jaoks saame ÜRT võrrandid (200), (203), (208), mis määravad $H_\star(t)$ ning $\rho_\star(t)$ arengu. Esimest järku liikmete $x(t),\ h(t)$ ja $r(t)$ arengu määravad vastavalt võrrandid (210), (211) ja (209)).

6.3 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria häiritusvõrrandid üldrelatiivsusteooria piiril

Eelmises peatükis tuletasime STG esimest järku häiritusvõrrandid Jordani raamis ning nüüd tahame uurida nende võrrandite kuju ÜRT piiril. Selleks tuleb esmalt teisendada STG häiritusvõrrandid (130), (139),(151), (156), (161) konformsest ajast η kosmoloogilisse aega t, sest ÜRT piiri oleme defineerinud kosmoloogilises ajas, ning kasutada eelmises jaotises taustavõrrandite tuletamisel tehtud eeldusi: $\mathcal{K} = 0$ ning $p = \mathrm{w}\rho$.

Konformsest ajast kosmoloogilisse aega teisendamiseks kasutame valemeid (12), (15). Skalaarvälja esimene ning teine tuletis konformses ja kosmoloogilises ajas on seotud järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
\Upsilon' = \frac{d\Upsilon}{d\eta} = a\frac{d\Upsilon}{dt} = a\dot{\Upsilon}\,, \\
\Upsilon'' = \frac{d^2\Upsilon}{d\eta^2} = a\frac{d}{dt}(a\frac{d\Upsilon}{dt}) = a\dot{a}\dot{\Upsilon} + a^2\ddot{\Upsilon} = a^2(H\dot{\Upsilon} + \ddot{\Upsilon})\,. \qquad (212)
\end{aligned}
$$

Defineerime kolmkiiruse skalaarse häirituse kosmoloogilises ajas:

$$u_{,i} = a^{-1} v_{,i} \,. \tag{213}$$

Kasutades toodud seoseid ning eeldusi $\mathcal{K} = 0$ ning $p = \mathrm{w}\rho$ eelmises peatükis tuletatud häiritusvõrrandeis saame viimased järgmisel kujul. Võrrand (130):

$$\begin{aligned} -2\frac{\omega}{\Upsilon}(\delta\ddot{\Upsilon}) - \Big(6\frac{\omega}{\Upsilon}H + 2(\frac{d\omega}{d\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon})\frac{\dot{\Upsilon}}{\Upsilon}\Big)(\delta\dot{\Upsilon}) + 2\frac{\omega}{\Upsilon}\frac{1}{a^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + \\ +\Big(2(\frac{\omega}{\Upsilon} - \frac{d\omega}{d\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}(\ddot{\Upsilon} + 3H\dot{\Upsilon}) - (\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2} - 2\frac{d\omega}{d\Upsilon}\frac{1}{\Upsilon} + 2\frac{\omega}{\Upsilon^2})\frac{(\dot{\Upsilon})^2}{\Upsilon} - 2\kappa^2\frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big)\delta\Upsilon + \\ +\Big(4\frac{\omega}{\Upsilon}(\ddot{\Upsilon} + 3H\dot{\Upsilon}) - 12(2H^2 + \dot{H}) + 2(\frac{d\omega}{d\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon})\frac{(\dot{\Upsilon})^2}{\Upsilon}\Big)\Phi + \\ +2(\frac{\omega}{\Upsilon}\dot{\Upsilon} - 3H)\dot{\Phi} + 6(\frac{\omega}{\Upsilon}\dot{\Upsilon} - 4H)\dot{\Psi} - 6\ddot{\Psi} + 2\frac{1}{a^2}(2\Psi_{,kk} - \Phi_{,kk}) = 0 \,. \end{aligned} \tag{214}$$

Võrrand (139):

$$\begin{aligned} -(\delta\ddot{\Upsilon}) - \Big[3H + \frac{2}{2\omega+3}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\dot{\Upsilon}\Big](\delta\dot{\Upsilon}) + \frac{1}{a^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + \\ +\Big(\frac{2}{(2\omega+3)^2}\frac{d\omega}{d\Upsilon}\Big[\frac{d\omega}{d\Upsilon}(\dot{\Upsilon})^2 - 2\kappa^2(2V - \Upsilon\frac{dV}{d\Upsilon}) + \kappa^2(3\mathrm{w} - 1)\rho\Big] + \\ +\frac{1}{2\omega+3}\Big[-\frac{d^2\omega}{d\Upsilon^2}(\dot{\Upsilon})^2 + 2\kappa^2(\frac{dV}{d\Upsilon} - \Upsilon\frac{d^2V}{d\Upsilon^2})\Big]\Big)(\delta\Upsilon) + \\ +2\Big[\ddot{\Upsilon} + 2H\Upsilon + \frac{1}{2\omega+3}\frac{d\omega}{d\Upsilon}(\dot{\Upsilon})^2\Big]\Phi + \dot{\Upsilon}\dot{\Phi} + 3\dot{\Upsilon}\dot{\Psi} - \\ -\kappa^2\frac{1}{2\omega+3}(-\delta\rho + 3\delta p) = 0 \,. \end{aligned} \tag{215}$$

Võrrand (151):

$$\begin{aligned} (-3H + \frac{\omega}{\Upsilon}\dot{\Upsilon})(\delta\dot{\Upsilon}) + \Big(-3H^2 + \frac{1}{2}(\frac{d\omega}{d\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}(\dot{\Upsilon})^2 + \kappa^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big)\delta\Upsilon + \frac{1}{a^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} - \\ -2\frac{1}{a^2}\Upsilon\Psi_{,kk} + \Big(6H^2\Upsilon + 6H\dot{\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon}(\dot{\Upsilon})^2\Big)\Phi + (3\dot{\Upsilon} + 6H\Upsilon)\dot{\Psi} = -\kappa^2\delta\rho \,. \end{aligned} \tag{216}$$

Võrrand (156):

$$(-H + \frac{\omega}{\Upsilon}\dot{\Upsilon})(\delta\Upsilon)_{,i} + (\delta\dot{\Upsilon})_{,i} - (\dot{\Upsilon} + 2H\Upsilon)\Phi_{,i} - 2\Upsilon\dot{\Psi}_{,i} = \kappa^2(1+\mathrm{w})\rho a^2 u_{,i} \,. \tag{217}$$

Võrrand (162):

$$\begin{aligned} -(\delta\ddot{\Upsilon}) - (2H + \frac{\omega}{\Upsilon}\dot{\Upsilon})(\delta\dot{\Upsilon}) + \frac{2}{3}\frac{1}{a^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + \\ +\Big[-2\dot{H} - 3H^2 - \frac{1}{2}(\frac{d\omega}{d\Upsilon} - \frac{\omega}{\Upsilon})\frac{1}{\Upsilon}(\dot{\Upsilon})^2 + \kappa^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big]\delta\Upsilon + \\ +\Big[2(2\dot{H} + 3H^2)\Upsilon + 2\ddot{\Upsilon} + 4H\dot{\Upsilon} + \frac{\omega}{\Upsilon}(\dot{\Upsilon})^2\Big]\Phi + (2H\Upsilon + \dot{\Upsilon})\dot{\Phi} + \\ +\frac{2}{3}\frac{1}{a^2}\Upsilon(\Phi_{,kk} - \Psi_{,kk}) + (6H\Upsilon + 2\dot{\Upsilon})\dot{\Psi} + 2\Upsilon\ddot{\Psi} = \kappa^2\delta p \,. \end{aligned} \tag{218}$$

Võrrand (163):

$$-(\delta\Upsilon)_{,ij} + \Upsilon(\Psi_{,ij} - \Phi_{,ij}) = \kappa^2 a^2 \Sigma_{,ij}\,, \quad i \neq j\,. \tag{219}$$

Nüüd on võrrandid sobival kujul teostamaks eelnevalt defineeritud ÜRT piirile minekut. Selleks tuleb häiritusvõrrandites teha asendused (184),(186), (189)-(191), (192), (193), (194)-(197) ning arvestada maksimaalselt esimest järku liikmeid. Tulemuseks saame esimest järku häiritusvõrrandid, mis on eelnevalt defineeritud häirituste $\delta\Upsilon$, Φ, Ψ, $\delta\rho$, δp, u (kosmoloogilises ajas kasutame v asemel häiritust u (213)), Σ suhtes lineaarsed, kuid sisaldavad mittelineaarseid liikmeid ÜRT piiri iseloomustavatest suurustest x ja h ning nende tuletistest (suurused x ja h ja nende tuletised on esimest järku väikesed, see tähendab häiritustega sama järku).

STG häiritusvõrranditega ÜRT piirile minnes nõuame, et häiritusvõrrandid säilitaksid oma järgu, see tähendab nõuet, et kõik liikmed oleksid esimest järku väikesed. ÜRT piirile minnes võime kõrgemat järku liikmeid lihtsalt eirata, kuid kui häiritusvõrrandid hakkaksid sisaldama null järku liikmeid, siis nõuame nende liikmete nulliga võrdumist. Viimast tuleb arvestada vaid võrrandiga (214) ÜRT piirile minnes.

Oluline on märkida, et ÜRT piiri defineerivates arendustes arendasime küll Hubble'i parameetrit H ÜRT punkti lähedal (192), kuid ei kirjutanud vastavat arendust mastaabikordaja a jaoks. Häiritusvõrrandites esineb mastaabikordaja vaid liikmetes, kus häiritusest tuleb võtta teist järku ruumilisi tuletisi ning vastavad liikmed ei sisalda suurusi, mis ÜRT piirile minnes hajuksid (ÜRT piiril hajuvad näiteks ω ja tema tuletised (189), (190), (191)). Kuna arvestama peab esimest järku liikmetega, siis pole mastaabikordaja arendus oluline — viimase ning häirituse teise tuletise korrutis on teist järku väike. Järgnevates ÜRT piiri arvutustes, kus asendame STG häiritusvõrranditesse ÜRT piiri arendused jätamegi a arendamata ning kirjutame viimase asemel vastava väärtuse ÜRT punktis: $a_\star$.

6.3.1 Võrrand (214)

Võrrandi (214) võime enne ÜRT piirile mineku teostamist lihtsustuseks läbi korrutada skalaarväljaga Υ, sest viimane on ÜRT piiril nullist erinev konstant $\Upsilon_\star$. ÜRT piiril saame siis:

$$
\begin{aligned}
&-2(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})(\ddot{\delta\Upsilon})-\Bigg(6(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})(H_\star+h)+\\
&+2\Big[(-\frac{1}{2A_\star x^2})-(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1-\frac{x}{\Upsilon_\star})\Big]\dot{x}\Bigg)(\dot{\delta\Upsilon})+2(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk}+\\
&+\Bigg(2\Big[(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1-\frac{x}{\Upsilon_\star})-(-\frac{1}{2A_\star x^2})\Big]\Big[\ddot{x}+3(H_\star+h)\dot{x}\Big]-\\
&-\Big[\frac{1}{A_\star x^3}-2(-\frac{1}{2A_\star x^2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1-\frac{x}{\Upsilon_\star})+2(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star^2}(1-\frac{2x}{\Upsilon_\star})\Big](\dot{x})^2-\\
&-2\kappa^2(\Upsilon_\star+x)(\frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star+\frac{d^3V}{d\Upsilon^3}\Big|_\star x)\Bigg)\delta\Upsilon+\\
&+\Bigg(4(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\Big[\ddot{x}+3(H_\star+h)\dot{x}\Big]-12(\Upsilon_\star+x)\Big[2(H_\star+h)^2+(\dot{H}_\star+\dot{h})\Big]+\\
&+2\Big[(-\frac{1}{2A_\star x^2})-(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1-\frac{x}{\Upsilon_\star})\Big](\dot{x})^2\Bigg)\Phi+\\
&+2\Big[(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\dot{x}-3(\Upsilon_\star+x)(H_\star+h)\Big]\dot{\Phi}+6\Big[(\frac{1}{2A_\star x}-\frac{3}{2})\dot{x}-\\
&-4(\Upsilon_\star+x)(H_\star+h)\Big]\dot{\Psi}-6(\Upsilon_\star+x)\ddot{\Psi}+2\frac{1}{a_\star^2}(\Upsilon_\star+x)(2\Psi_{,kk}-\Phi_{,kk})=0\,. \qquad (220)
\end{aligned}
$$

Võrrand (214) on esimest järku häiritusvõrrand. Nõuame, et sama võrrand ÜRT piiril (220) (viimase oleme küll enne piirile minekut skalaarväljaga Υ läbi korrutanud, kuid lõpptulemust see ei muuda) oleks esimest järku häiritusvõrrand. Rühmitame avaldises liikmed (220) järkude kaupa. Kuna nõuame, et tegemist on esimest järku häiritusvõrrandiga, siis eeldame, et see avaldis sisaldab ainult esimest järku häiritusliikmeid. Tegeledes esimest järku häiritusteooriaga võime kõrgemat järku liikmeid lihtsalt ignoreerida, kuid häiritusvõrrand ei tohi sisaldada madalamat kui esimest järku liikmeid. Avaldise (220) rühmitamisel selgub, et viimane sisaldab ka null järku liikmeid. Nõuame, et avaldises (220) sisalduv null järku liikmete kombinatsioon oleks null. Nõudest järeldub järgmine võrrand:

$$-(\ddot{\delta\Upsilon})+(\frac{\dot{x}}{x}-3H_\star)(\dot{\delta\Upsilon})+(\frac{\ddot{x}}{x}+3H_\star\frac{\dot{x}}{x}-\frac{\dot{x}^2}{x^2})\delta\Upsilon+\frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk}=0. \qquad (221)$$

Esimest järku liikmeid sisaldav osa annab võrrandi:

$$
\begin{aligned}
&3(\delta\ddot{\Upsilon}) + (9H_\star + \frac{1}{\Upsilon_\star A_\star}\frac{\dot{x}}{x} - 3\frac{1}{A_\star}\frac{h}{x})(\delta\dot{\Upsilon}) - 3\frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + \\
&+\left(\frac{1}{\Upsilon_\star A_\star}\Big[\frac{\ddot{x}}{x} + 3H_\star\frac{\dot{x}}{x} - \frac{\dot{x}^2}{x^2}\Big] + 3\frac{1}{A_\star}\frac{h\dot{x}}{x^2} - 2\kappa^2\Upsilon_\star\frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\big|_\star\right)\delta\Upsilon + \\
&+\left(2\frac{1}{A_\star}(\frac{\ddot{x}}{x} + 3H_\star\frac{\dot{x}}{x}) - 12\Upsilon_\star(2H_\star^2 + \dot{H}_\star) - \frac{1}{A_\star}\frac{\dot{x}^2}{x^2}\right)\Phi + (\frac{1}{A_\star}\frac{\dot{x}}{x} - 6\Upsilon_\star H_\star)\dot{\Phi} + \\
&+2\Upsilon_\star\frac{1}{a_\star^2}(2\Psi_{,kk} - \Phi_{,kk}) + 3(\frac{1}{A_\star}\frac{\dot{x}}{x} - 8\Upsilon_\star H_\star)\dot{\Psi} - 6\Upsilon_\star\ddot{\Psi} = 0. \qquad (222)
\end{aligned}
$$

6.3.2 Võrrand (215)

Teeme võrrandis (215) ÜRT piiri defineerivad arendused:

$$
\begin{aligned}
&-(\delta\ddot{\Upsilon}) - \Big[3(H_\star + h) + 2A_\star x\,(-\frac{1}{2A_\star x^2})\dot{x}\Big](\delta\dot{\Upsilon}) + \frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + \\
&+\Bigg\{2(A_\star x)^2(-\frac{1}{2A_\star x^2})\bigg((-\frac{1}{2A_\star x^2})(\dot{x})^2 - 2\kappa^2\Big[2(V_\star + \frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star x) - \\
&-(\Upsilon_\star + x)(\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star x)\Big] + \kappa^2(3\mathrm{w} - 1)(\rho_\star + r)\bigg) + \\
&+A_\star x\bigg(-\frac{1}{A_\star x^3}(\dot{x})^2 + 2\kappa^2\Big[(\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star x) - (\Upsilon_\star + x)(\frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star + \frac{d^3V}{d\Upsilon^3}\Big|_\star x)\Big]\bigg)\Bigg\}(\delta\Upsilon) + \\
&+2\Big[\ddot{x} + 2(H_\star + h)(\Upsilon_\star + x) + A_\star x(-\frac{1}{2A_\star x^2})(\dot{x})^2\Big]\Phi + \dot{x}\dot{\Phi} + 3\dot{x}\dot{\Psi} - \\
&-\kappa^2 A_\star x(-\delta\rho + 3\delta p) = 0\,. \qquad (223)
\end{aligned}
$$

Arvestame viimases ainult esimest järku häiritusliikmeid:

$$
\begin{aligned}
&-(\delta\ddot{\Upsilon}) + (-3H_\star + \frac{\dot{x}}{x})(\delta\dot{\Upsilon}) + \frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + \\
&+\left(-\frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{x^2} + 2\kappa^2 A_\star(2V_\star - \Upsilon_\star\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star) - \kappa^2(3\mathrm{w} - 1)\rho_\star\right)\delta\Upsilon = 0\,. \qquad (224)
\end{aligned}
$$

Kasutame taustavõrrandit (200) vabanemaks suurusest $\rho_\star$. Siis saame viimase võrrandi järgneval kujul:

$$
\begin{aligned}
&-(\delta\ddot{\Upsilon}) + (-3H_\star + \frac{\dot{x}}{x})(\delta\dot{\Upsilon}) + \frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + \\
&+\left(-\frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{x^2} + \kappa^2 A_\star\Big[3(\mathrm{w} + 1)V_\star - 2\Upsilon_\star\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star\Big] - 3(3\mathrm{w} - 1)A_\star\Upsilon_\star H_\star^2\right)\delta\Upsilon = 0\,. \qquad (225)
\end{aligned}
$$

6.3.3 Võrrand (216)

Teostame võrrandis (216) ÜRT piiri defineerivad arendused:

$$
\begin{aligned}
&\Big[-3(H_\star + h) + (\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})\dot{x}\Big](\delta\dot{\Upsilon}) + \\
&+\Bigg(-3(H_\star + h)^2 + \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2A_\star x^2} - (\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})\Big]\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})(\dot{x})^2 + \\
&+\kappa^2(\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star x)\Bigg)\delta\Upsilon + \frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} - 2\frac{1}{a_\star^2}(\Upsilon_\star + x)\Psi_{,kk} \\
&+\Big[6(H_\star + h)^2(\Upsilon_\star + x) + 6(H_\star + h)\dot{x} - (\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2})(\Upsilon_\star + x)(\dot{x})^2\Big]\Phi \\
&+\Big[3\dot{x} + 6(H_\star + h)(\Upsilon_\star + x)\Big]\dot{\Psi} = -\kappa^2\delta\rho\,. \qquad (226)
\end{aligned}
$$

Arvestame maksimaalselt esimest järku liikmeid ja saame võrrandi:

$$
\begin{aligned}
&(-3H_\star + \frac{1}{2}\frac{1}{\Upsilon_\star A_\star}\frac{\dot{x}}{x})(\delta\dot{\Upsilon}) + \frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + (-3H_\star^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{\Upsilon_\star A_\star}\frac{\dot{x}^2}{x^2} + \kappa^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star)\delta\Upsilon + \\
&+6H_\star^2\Upsilon_\star\Phi - 2\Upsilon_\star\frac{1}{a_\star^2}\Psi_{,kk} + 6H_\star\Upsilon_\star\dot{\Psi} = -\kappa^2\delta\rho. \qquad (227)
\end{aligned}
$$

6.3.4 Võrrand (217)

Teeme võrrandis (217) ÜRT piiri defineerivad arendused:

$$
\begin{aligned}
&\Big[-(H_\star + h) + (\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})\dot{x}\Big](\delta\Upsilon)_{,i} + (\delta\dot{\Upsilon})_{,i} - \\
&-\Big[\dot{x} + 2(H_\star + h)(\Upsilon_\star + x)\Big]\Phi_{,i} - 2(\Upsilon_\star + x)\dot{\Psi}_{,i} = \kappa^2(1 + \mathrm{w})(\rho_\star + r)a_\star^2 u_{,i}\,. \qquad (228)
\end{aligned}
$$

Esimest järku liikmeid arvestades saame võrrandi:

$$
(\delta\dot{\Upsilon})_{,i} + (-H_\star + \frac{1}{2}\frac{1}{\Upsilon_\star A_\star}\frac{\dot{x}}{x})(\delta\Upsilon)_{,i} - 2H_\star\Upsilon_\star\Phi_{,i} - 2\Upsilon_\star\dot{\Psi}_{,i} = \kappa^2(1 + \mathrm{w})\rho_\star a_\star^2 u_{,i}. \qquad (229)
$$

6.3.5 Võrrandid (218) ja (219)

Teeme võrrandis (218) ÜRT piiri defineerivad arendused:

$$-(\delta\ddot{\Upsilon}) - \Big[2(H_\star + h) + (\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})\dot{x}\Big](\delta\dot{\Upsilon}) + \frac{2}{3}\frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} +$$
$$+\Big(-2(\dot{H}_\star + \dot{h}) - 3(H_\star + h)^2 + \kappa^2(\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star + \frac{d^2V}{d\Upsilon^2}\Big|_\star x) -$$
$$-\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2A_\star x^2} - (\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})\Big]\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})(\dot{x})^2\Big)\delta\Upsilon +$$
$$+\Big(2\Big[2(\dot{H}_\star + \dot{h}) + 3(H_\star + h)^2\Big](\Upsilon_\star + x) + 2\ddot{x} + 4(H_\star + h)\dot{x} +$$
$$+(\frac{1}{2A_\star x} - \frac{3}{2})\frac{1}{\Upsilon_\star}(1 - \frac{x}{\Upsilon_\star})(\dot{x})^2\Big)\Phi + \Big[2(H_\star + h)(\Upsilon_\star + x) + \dot{x}\Big]\dot{\Phi} +$$
$$+(\Upsilon_\star + x)\frac{2}{3}\frac{1}{a_\star^2}(\Phi_{,kk} - \Psi_{,kk}) + \Big[6(H_\star + h)(\Upsilon_\star + x) + 2\dot{x}\Big]\dot{\Psi} +$$
$$+2(\Upsilon_\star + x)\ddot{\Psi} = \kappa^2\delta p\,. \tag{230}$$

Arvestame viimases võrrandis ainult esimest järku liikmeid:

$$-(\delta\ddot{\Upsilon}) - (2H_\star + \frac{1}{2}\frac{1}{\Upsilon_\star A_\star}\frac{\dot{x}}{x})(\delta\dot{\Upsilon}) + (-2\dot{H}_\star - 3H_\star^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\Upsilon_\star A_\star}\frac{\dot{x}^2}{x^2} + \kappa^2\frac{dV}{d\Upsilon}\Big|_\star)\delta\Upsilon +$$
$$+\frac{2}{3}\frac{1}{a_\star^2}(\delta\Upsilon)_{,kk} + 2(2\dot{H}_\star + 3H_\star^2)\Upsilon_\star\Phi + 2H_\star\Upsilon_\star\dot{\Phi} +$$
$$+\frac{2}{3}\frac{1}{a_\star^2}\Upsilon_\star(\Phi_{,kk} - \Psi_{,kk}) + 6H_\star\Upsilon_\star\dot{\Psi} + 2\Upsilon_\star\ddot{\Psi} = \kappa^2\delta p\,. \tag{231}$$

Võrrandist (219) saame ÜRT piiril võrrandi:

$$\Upsilon_\star(\Psi_{,ij} - \Phi_{,ij}) - (\delta\Upsilon)_{,ij} = \kappa^2 a_\star^2\Sigma_{,ij}\,, \quad i \neq j\,. \tag{232}$$

6.4 Arutelu

Oleme jõudnud arvutustega lõpusirgele ning aeg on arutada, mida arvutatuga peale hakata. Panemegi siinkohal kirja mõtted, mida käesoleva töö jätkuna teha.

Eesmärk oli tuletada STG häiritusvõrrandid ÜRT piiril ning alustasime üldistest STG võrranditest (35), (37), (38). Need võrrandid pole sõltumatud ning võib järeldada, et tuletatud häiritusvõrrandid pole sõltumatud. Järgmine samm olekski kontrollida häiritusvõrrandite (221), (222),(225), (227), (229), (231), (232) ning energia-impulsi tensori kovariantse divergentsi nulliga võrdumisest tulenenud võrrandite (166), (167) omavahelist kooskõla (näiteks märgime: kasutades võrrandit (210) saab näidata, et võrrandid (221) ja (225) pole sõltumatud ega omavahel vastuolus). Järgnevas kolmes lõigus kirjeldame standardprotseduure, mida häiritusvõrranditele rakendada.

ÜRT piiri defineerisime tasase kolmruumi jaoks ning seega võime häiritusvõrranditele rakendada jaotises 4.5 kirjeldatud Fourier' teisendust. Rõhutame veelkord, et lineaarses teoorias erinevad Fourier' moodid ei segune. Häiritusvõrrandites tähendab Fourier' teisendus lihtsalt ruumiliste osatuletiste asendamist lainevektoriga ($\partial_j \to ik_j$). Käsitledes häiritusi väga väikestel või väga suurtel skaaladel saame ilmselt häiritusvõrrandeid lihtsustada (näiteks horisondist suuremate häirituste puhul võime $k^2 \sim \lambda^{-2}$ liikmed ära jätta).

Tehes häiritusarvutusi varajases Universumis võib sageli arvestamata jätta anisotroopse pinge [38], mis lihtsustab võrrandit (232) (ÜRT-s saaksime siis $\Phi = \Psi$, STG-s üldiselt mitte). Käsitledes adiabaatilisi häiritusi saame omavahel siduda rõhu ning energiatiheduse häiritused (võttes (110)-s entroopia häirituse δS nulliks).

Lisaks häirituste uurimisele erinevatel skaaladel võime uurida erinevaid olukordi vastavalt sellele, millise mateerialiigi osakaal energiatiheduses on märkimisväärseim. Esiteks võime käsitleda olukorda, kus energiatiheduses hakkab domineerima skalaarvälja potentsiaal $V_\star$. Viimane on ÜRT punktis konstantne, mistõttu on ka Hubble'i parameeter $H_\star$ konstantne ning häiritusvõrrandid lihtsustuvad. Teiseks võime käsitleda tolmu- või kiirgusdominantset arengujärku ning sellisel juhul teha võrrandis (200) lähendus $\rho_\star \gg V_\star$. Häiritusvõrrandid on viimases olukorras ilmselt keerulisemad kui potentsiaalidominantsel juhul, sest Hubble'i parameeter jääb sõltuma ajast. Tulemusi tuleb võrrelda STG häiritusvõrrandite uurimisel tehtud töödega [31], [32], [33], [34].

ÜRT kontekstis kvantiseeritakse minimaalselt seotud skalaarväli klassikalisel aegruumi taustal ning selle kaudu tuletatakse häiritustele algtingimused. Sama protseduur peab olema tehtav ka STG häiritusvõrranditega ÜRT piiril.

STG häiritusvõrrandid tuletasime Newtoni kalibratsioonis ning häiritusvõrrandid võivad sisaldada lihtsalt kalibratsiooni valikust tingitud mittefüüsikalisi häiritusi. Et viimastest kindlalt vabaneda peaksime kasutama kalibratsiooniinvariantseid muutujaid (Newtoni kalibratsioonis kasutatavad Bardeeni potentsiaalid Φ ja Ψ küll on kalibratsiooniinvariantsed [10]).

Huvipakkuv oleks võrrelda STG häiritusvõrrandeid ÜRT piiril ÜRT ja minimaalselt seotud skalaarvälja häiritusvõrranditega. ÜRT piiri defineerisime niiviisi, et häirimata võrrandite kuju langeb ÜRT punktis kokku ning ÜRT punkti lähedal kirjeldavad STG erinevust esimest järku parandid. Häiritusvõrrandite puhul ei saa me ÜRT punktis aga ilmselt täpset vastavust, sest

STG häiritusvõrrandid jäävad sisaldama ÜRT piiri parandeid (need lähenevad küll ÜRT punktis nullile, kuid häiritusvõrrandid piiril sisaldavad neid liikmeid nii lugejas kui nimetajas, mistõttu tekivad määramatused).

ÜRT piiri defineerisime ühel kindlal viisil (jaotis 6.1). Tekib küsimus, kas leidub mõni üldisem ÜRT piiri definitsioon, mille raames saaksime niinimetatud ÜRT punktis STG häiritusvõrrandite ÜRT piiril ning ÜRT ja minimaalselt seotud skalaarvälja häiritusvõrrandite vahel täpse vastavuse. Töös käsitlesime olukorda, kus $\mathcal{K} = 0$. Kas saaksime ÜRT piiri defineerida niiviisi, et võiksime käsitleda ka nullist erinevat kolmruumi kõverust?

STG võrrandid formuleerisime Jordani raamis, kuid skalaarvälja ümberdefineerimisega ning meetrika konformse teisendusega saame võrrandid teisendada Einsteini raami (jaotis 3.3). Kas ja millistel tingimustel häiritusvõrrandid Einsteini raamis on ekvivalentsed häiritusvõrranditega Jordani raamis?

Kosmoloogilised skalaarsed häiritused skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria üldrelatiivsusteooria piiril

Mihkel Rünkla

Kokkuvõte

Kosmoloogias on palju erinevaid teooriaid seletamaks, miks Universum on selline nagu ta meile paistab. Eristamaks vaatlustega kooskõlalist teooriat omab kosmoloogiliste häirituste teooria kosmoloogias tähtsat kohta, sest ta seab igale Universumit kirjeldavale teooriale vaatlustega kindlad piirid: sobiv teooria peab olema võimeline ennustama kosmoloogiliste häirituste teket ja kirjeldama nende arengut, mis viib omakorda vaadeldavate struktuuride tekkeni.

Käesoleva töö üheks eesmärgiks on tutvustada kosmoloogiliste häirituste teooriat. Viimase uurimise motivatsioon on kirja pandud sissejuhatuses, teooria mõningatele külgedele on pühendatud neljas peatükk. Kosmoloogiliste häirituste teooria esineb alati mingi alusteooria raames ning seetõttu on teises ja kolmandas peatükis antud lühiülevaade kosmoloogia standardmudelist, mille aluseks on üldrelatiivsusteooria, ning tutvustatud skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooriat.

Töö teiseks eesmärgiks on tuletada lineaarsed häiritusvõrrandid skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria üldrelatiivsusteooria piiril Jordani raamis Newtoni kalibratsioonis eeldusel, et häirimata aegruum on Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri meetrikaga. Eesmärgi teostamiseks on viiendas peatükis tehtud vajalikud arvutused ning tuletatud üldised skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria häiritusvõrrandid Jordani raamis. Samas on leitud võrrandite kuju Newtoni kalibratsioonis eeldusel, et häirimata aegruum on Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri meetrikaga. Kuuendas peatükis on defineeritud skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria üldrelatiivsusteooria piir, mis tähendab sisuliselt skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria võrrandite lineariseerimist üldrelatiivsusteooria punkti ümber, kusjuures üldrelatiivsuteooria punktis on skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria väljavõrrandid samal kujul kui üldrelatiivsusteoorias. Kuuendas peatükis on arvutatud skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria tausta- ning häiritusvõrrandid üldrelatiivsuteooria piiril eeldusel, et häirimata aegruum on tasase Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri meetrikaga ning mateeriaks on barotroopset olekuvõrrandit rahuldav ideaalne vedelik. Kuues peatükk lõpeb aruteluga, kus mõtestatakse, kuidas saadud tulemusi võiks edasises töös rakendada.

Viited

[1] H. C. Chiang, P. A. R. Ade, D. Barkats, J. O. Battle, E. M. Bierman, J. J. Bock, C. D. Dowell, L. Duband *et al.*, “Measurement of CMB Polarization Power Spectra from Two Years of BICEP Data,” Astrophys. J. **711** 1123 (2010) [arXiv:0906.1181 [astro-ph.CO]].

[2] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems,” Phys. Rev. D **23** 347 (1981).

[3] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, D. Wands, “Inflation dynamics and reheating,” Rev. Mod. Phys. **78** 537 (2006) [astro-ph/0507632].

[4] L. A. Kofman, A. D. Linde, “Generation of Density Perturbations in the Inflationary Cosmology,” Nucl. Phys. B **282** 555 (1987).

[5] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], “Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation,” Astrophys. J. Suppl. **192** 18 (2011) [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].

[6] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters,” arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].

[7] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, “Theory of cosmological perturbations,” Phys. Rep. **215** 203 (1992).

[8] A. D. Linde, “A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems,” Phys. Lett. B **108** 389 (1982) .

[9] A. D. Linde, “Chaotic Inflation,” Phys. Lett. B **129** 177 (1983).

[10] J. M. Bardeen, “Gauge Invariant Cosmological Perturbations,” Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).

[11] M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach, S. Sonego, “Perturbations of space-time: Gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond,” Class. Quant. Grav. **14**, 2585 (1997) [gr-qc/9609040].

[12] K. A. Malik, D. R. Matravers, "A Concise Introduction to Perturbation Theory in Cosmology," Class. Quant. Grav. **25**, 193001 (2008) [arXiv:0804.3276 [astro-ph]].

[13] K. A. Malik, D. R. Matravers, "Comments on gauge-invariance in cosmology," Gen. Rel. Grav. (2013) [arXiv:1206.1478 [astro-ph.CO]].

[14] A.G. Riess *et al.* [Hi-Z Supernova Team Collaboration], "Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant," Astron. Journ. **116** 1009 (1998) [astro-ph/9805201].

[15] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], "Measurements of omega and lambda from 42 redshift supernovae," Astrophys. J. **517** 565 (1999) [astro-ph/9812133].

[16] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, "Dynamics of dark energy," Int. J. Mod. Phys. D **15** 1753 (2006) [hep-th/0603057].

[17] S. Weinberg, "The Cosmological Constant Problem," Rev. Mod. Phys. **61** 1 (1989).

[18] P. J. E. Peebles, B. Ratra, "The Cosmological constant and dark energy," Rev. Mod. Phys. **75** 559 (2003) [astro-ph/0207347].

[19] V. Faraoni, S. Capozziello, *Beyond Einstein Gravity : A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics* (Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2011).

[20] Y. Fujii, K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

[21] L.Järv, P. Kuusk, M. Saal, "Potential dominated scalar-tensor cosmologies in the general relativity limit: phase space view," Phys.Rev.D **81** 104007 (2010) arXiv:1003.1686 [gr-qc].

[22] L.Järv, P. Kuusk, M. Saal, "Scalar-tensor cosmologies with a potential in the general relativity limit: time evolution," Phys.Rev.B **694** 1-5 (2010) arXiv:1006.1246 [gr-qc].

[23] L.Järv, P. Kuusk, M. Saal, "Scalar-tensor cosmologies with dust matter in the general relativity limit," Phys.Rev.D **85** 064013 (2012) arXiv:1112.5308 [gr-qc].

[24] A. Albrecht, J. Magueijo, "A Time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles," Phys. Rev. D **59** 043516 (1999) [astro-ph/9811018].

[25] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, "f(R) Theories Of Gravity," Rev. Mod. Phys. **82** 451 (2010) [arXiv:0805.1726 [gr-qc]].

[26] V. Sahni, Y. Shtanov, "Brane world models of dark energy," JCAP **0311** 014 (2003) [astro-ph/0202346].

[27] C. M. Will, "The Confrontation between general relativity and experiment," Living Rev. Rel. **9** 3 (2006) [gr-qc/0510072].

[28] C. Brans, R. H. Dicke, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

[29] A. A. Starobinsky, J. 'i. Yokoyama, "Density fluctuations in Brans-Dicke inflation," gr-qc/9502002.

[30] J. -c. Hwang, H. Noh, "Cosmological perturbations in generalized gravity theories," Phys. Rev. D **54** 1460 (1996).

[31] S. Tsujikawa, "Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy," Phys. Rev. D **76**, 023514 (2007) [arXiv:0705.1032 [astro-ph]].

[32] S. Tsujikawa, K. Uddin, S. Mizuno, R. Tavakol, J. 'i. Yokoyama, "Constraints on scalar-tensor models of dark energy from observational and local gravity tests," Phys. Rev. D **77**, 103009 (2008) [arXiv:0803.1106 [astro-ph]].

[33] R. Gannouji, D. Polarski, "The growth of matter perturbations in some scalar-tensor DE models," JCAP **0805**, 018 (2008) [arXiv:0802.4196 [astro-ph]].

[34] J. C. B. Sanchez, L. Perivolaropoulos, "Evolution of Dark Energy Perturbations in Scalar-Tensor Cosmologies," Phys. Rev. D **81**, 103505 (2010) [arXiv:1002.2042 [astro-ph.CO]].

[35] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2004).

[36] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology,* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).

[37] D. H. Lyth, A. R. Liddle, *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).

[38] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, San Diego, 2003).

[39] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 2008).

[40] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Backround* (Cambridge University Press, New York, 2008).

[41] P. D. Naselsky, I. D. Novikov, D. I. Novikov, *The Physics of the Cosmic Microwave Backround* (Cambridge University Press, New York, 2006).

[42] C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, (W.H. Freeman and Company, 1973).

[43] T. Chiba, M. Yamaguchi, “Conformal-Frame (In)dependence of Cosmological Observations in Scalar-Tensor Theory,” JCAP **1310** 040 (2013) [arXiv:1308.1142 [gr-qc]].

Cosmological Scalar Perturbations of Scalar-Tensor Gravity in the Limit of General Relativity

Mihkel Rünkla

Summary

In cosmology there is a variety of theories explaining the Universe. A viable theory has to be able to describe the evolution of cosmological perturbations. Furthermore, it has to predict the origin of the perturbations.

One of the objectives of this study is to introduce the cosmological perturbation theory. In the introduction we negotiate the motivation to study the cosmological perturbation theory. In the second chapter we give an overview of the standard model of cosmology in the framework of general relativity. In the third chapter we present briefly the scalar-tensor theory of gravity, which is an alternative theory for general relativity. In the fourth chapter we outline some aspects of the cosmological perturbation theory.

Another objective of this study is to derive perturbation equations for scalar perturbations in scalar-tensor theory of gravity in the limit of general relativity. The framework for this calculation is laid in the fifth chapter, in which we derive perturbation equations for scalar perturbations in scalar-tensor theory of gravity. We use Jordan frame, conformal-Newtonian gauge and assume that background is described by Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric. In the sixth chapter we define the limit of general relativity of the scalar-tensor theory of gravity. Using this definition we linearize the field equations of scalar-tensor theory of gravity around the point of general relativity assuming flat Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker background with perfect barotropic fluid. We get background and perturbation equations for scalar-tensor theory of gravity in the limit of general relativity. In the end of the sixth chapter we discuss how to use our results in future work.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Mihkel Rünkla,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose “Kosmoloogilised skalaarsed häiritusvõrrandid skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria üldrelatiivsusteooria piiril”, mille juhendaja on Margus Saal,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 29.05.2014