$\frac{27 \text{ Mai}}{8 \text{ Juni}}$ 1853.

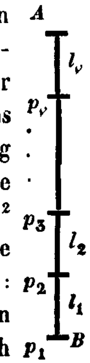
Auflösung einer Aufgabe aus der *Mécanique analytique* von Lagrange; von FERD. MINDING.

Im ersten Bande der *Méc. anal.* Seite 393 der Ausgabe von 1811 liest man Folgendes:

> Ce cas, qui est celui des oscillations très petites d'un fil suspendu à un point fixe et chargé d'un nombre quelconque de poids, est aussi susceptible d'une solution générale lorsque les poids sont tous égaux entre eux et placés à distances égales les uns des autres.

Diese Worte bezeugen, dass Lagrange sich mit der allgemeinen Aufgabe, welche beliebige Gewichte an einem frei hangenden Faden beliebig vertheilt voraussetzt, damals noch nicht näher beschäftigt hatte. Sie gaben mir Veranlassung, den Gesetzen der Schwingungen eines solchen Fadens nachzuforschen, welche sich als verhältnissmässig einfach erwiesen, und da sie meines Wissens anderweitig noch nicht bekannt gemacht worden sind, einer kurzen Darlegung nicht unwerth sein möchten.

Es sei der untere Endpunkt B eines von A frei herabhangenden Fapens AB der Anfang der nach A gerichteten x; in



B sei das Gewicht p_1 angebracht und darüber folgen der Reihe nach die Gewichte $p_2, p_3, \ldots p_\nu$ in den Abständen $p_1p_2 = l_1$, $p_2p_3 = l_2, \ldots p_{\nu-1}p_\nu = l_{\nu-1}$; der Abstand $p_\nu A$ sei $= l_\nu$ und die ganze Länge des Fadens $l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_\nu = L$. Während der Bewegung seien x_1 und y_1 die Cordinaten von p_1, x_2 und y_2 die von p_2 u. s. f., so ist $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_1^2$ u. s. f. Da aber für sehr kleine Schwingungen die Quadrate der y vernachlässigt werden können, so folgt: $x_2 - x_1 = l_1$, $x_3 - x_2 = l_2$ u. s. f. oder es ergeben sich für $x_1, x_2, \ldots$ unveränderliche Werthe, nämlich $x_1 = 0$, $x_2 = l_1, \ldots x_\nu = L - l_\nu$, wie bei dem Gleichgewichte des Fadens. Daher werden auch in den Differentialgleichungen der Bewegung die Beschleunigungen nach x, oder die Ausdrücke $\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \ldots$ sämmtlich gleich Null und die Spannungen bleiben wie in der Gleichgewichtslage, nämlich p_1 auf der Strecke l_1, $p_1 + p_2$ in l_2, $p_1 + p_2 + p_3$ in l_3 u. s. f. Es mag hier noch bemerkt werden, dass der Faden selbst nicht als schwer und auch nicht dehnbar gedacht wird, so wie dass solche Bewegungen, bei welchen die einzelnen unbelasteten Fadenstrecken sich krümmten, ausgeschlossen sind. Man setze noch:

$$p_1 = q_1 l_1, \; p_1 + p_2 = q_2 l_2, \ldots \; p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\mu = q_\mu l_\mu$$

und bezeichne in gewohnter Weise die Schwere mit g, so ergeben sich aus bekannten Gründen die folgenden Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{p_1}{g}\frac{d^2y_1}{dt^2} = \qquad - q_1(y_1 - y_2),$$

$$\frac{p_2}{g}\frac{d^2y_2}{dt^2} = - q_1(y_2 - y_1) - q_2(y_2 - y_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_\mu}{g}\frac{d^2y_\mu}{dt^2} = - q_{\mu-1}(y_\mu - y_{\mu-1}) - q_\mu(y_\mu - y_{\mu+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_\nu}{g}\frac{d^2y_\nu}{dt^2} = - q_{\nu-1}(y_\nu - y_{\nu-1}) - q_\nu(y_\nu - y_{\nu+1}),$$

wo das auf den festen Aufhängepunkt A sich beziehende $y_{\nu+1}$ gleich Null ist und nur der Symmetrie wegen hier beibehalten wird. Um diesen Gleichungen zu genügen, sei $y_1 = C \cos t \sqrt{(gk)} + D \sin t \sqrt{(gk)}$, und

$$y_2 = f_1 y_1,\ y_3 = f_2 y_1, \ldots\ y_\nu = f_{\nu-1} y_1,$$

endlich $y_{\nu+1} = f_\nu y_1 = 0$, daher $f_\nu = 0$.

Die Einsetzung dieser Werthe ergiebt für die unbekannten Factoren f folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = p_1 k \qquad\qquad\qquad - q_1 (1 - f_1), \\
0 = p_2 f_1 k + q_1 (1 - f_1) - q_2 (f_1 - f_2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = p_{\mu+1} f_\mu k + q_\mu (f_{\mu-1} - f_\mu) - q_{\mu+1} (f_\mu - f_{\mu+1}). \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = p_\nu f_{\nu-1} k + q_{\nu-1} (f_{\nu-2} - f_{\nu-1}) - q_\nu (f_{\nu-1} - f_\nu).
\end{array}\right\} \text{I.}$$

Zur Abkürzung sei noch

$$p_1 = P_1,\ p_1 + p_2 = P_2, \ldots p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\mu = P_\mu;$$

also auch

$$q_1 l_1 = P_1,\ q_2 l_2 = P_2, \ldots,\ q_\mu l_\mu = P_\mu.$$

Wird ferner gesetzt:

$$f_\mu = \alpha^0{}_\mu - \alpha'{}_\mu k + \alpha''{}_\mu k^2 - \ldots + (-1)^\lambda \alpha^\lambda{}_\mu k^\lambda + \ldots$$

so ist hauptsächlich das Bildungsgesetz der Coefficienten (α) dieser Reihe zu untersuchen. Man findet leicht aus *I:*

$$\alpha^0{}_\mu = 1,\ \alpha'{}_\mu = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_\mu.$$

Um allgemein $\alpha^\lambda{}_\mu$ zu erhalten, setze man in die Gleichung:

$$0 = q_\mu f_{\mu-1} + (p_{\mu+1} k - q_\mu - q_{\mu+1}) f_\mu + q_{\mu+1} f_{\mu+1} \quad \text{I*)}.$$

für f die obige Reihe, so ergeben die in k^λ multiplicirten Glieder die Gleichung:

$$p_{\mu+1} \alpha^\lambda{}_\mu + q_\mu [\alpha^\lambda{}_\mu - \alpha^\lambda{}_{\mu-1}] = q_{\mu+1} [\alpha^\lambda{}_{\mu+1} - \alpha^\lambda{}_\mu],$$

welche, weil

$$p_{\mu+1} = P_{\mu+1} - P_\mu,\ q_{\mu+1} = \frac{P_{\mu+1}}{l_{\mu+1}},\ q_\mu = \frac{P_\mu}{l_\mu}$$

ist, auch folgende Form annimmt:

$$P_{\mu+1} \left(\frac{\alpha^\lambda{}_{\mu+1} - \alpha^\lambda{}_\mu}{l_{\mu+1}} - \alpha_\mu{}^{\lambda-1} \right) =$$

$$P_\mu \left(\frac{\alpha^\lambda{}_\mu - \alpha^\lambda{}_{\mu-1}}{l_\mu} - \alpha_\mu{}^{\lambda-1} \right). \quad \text{II.}$$

Der dieser Bedingung genügende Werth von $\alpha^\lambda{}_\mu$ wird erhalten wie folgt:

Aus den Zahlen $1, 2, 3 \ldots . \mu$ bilde man die Combinationen zu je λ, ohne Wiederholungen; es seien $n', n'', n''', \ldots n^\lambda$ die Glieder einer solchen Combination, nach der Grösse steigend geordnet, also $n' < n'' < n''' . < n^\lambda$. Ferner bilde man das Produkt:

$$\left(1 - \frac{P_{n'}}{P_{n''}}\right)\left(1 - \frac{P_{n''}}{P_{n'''}}\right)\left(1 - \frac{P_{n'''}}{P_n{}^{IV}}\right) \ldots \left(1 - \frac{P_n{}^{\lambda-1}}{P_n{}^\lambda}\right) = \Pi_n{}^\lambda,$$

wo $P_{n'} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_{n'}$, u. s. f., übereinstimmend mit der schon eingeführten Bezeichnung; dieses Produkt werde mit $l_{n'} l_{n''} l_{n'''} \ldots l_n{}^\lambda$ multiplicirt und die Summe sämmtlicher Ausdrücke dieser Art für alle möglichen Verbindungen der Elemente $1, 2, 3 \ldots \mu$ zu je λ genommen; so hat man $\alpha^\lambda{}_\mu$.

Hiernach ist

$$\alpha^\lambda{}_\mu = \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} l_{n'''} \ldots l_n \lambda \,.\, \Pi_n \lambda, \qquad \text{III.}$$

wo $\overset{(\mu)}{\Sigma}$ die Summe aller Combinationen aus μ Elementen andeutet.

Beispiele:

$$\alpha^2{}_2 = l_1 l_2 \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{l_1 l_2 p_2}{p_1 + p_2}.$$

$$\alpha^2{}_3 = l_1 l_2 \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right) + l_1 l_3 \left(1 - \frac{P_1}{P_3}\right) + l_2 l_3 \left(1 - \frac{P_2}{P_3}\right) =$$

$$\frac{l_1 l_2 p_2}{p_1 + p_2} + \frac{l_1 l_3 (p_2 + p_3)}{p_1 + p_2 + p_3} + \frac{l_2 l_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Von der Richtigkeit dieser beispielsweise angeführten Werthe überzeugt man sich leicht durch Entwickelung von

$f_2, f_3 \dots$ aus *I.* Der allgemeine Beweis für den in *III.* angegebenen Werth von $\alpha^\lambda{}_\mu$ lässt sich also führen:

Werden in dem Ausdrucke *III.* für $\alpha^\lambda{}_\mu$ diejenigen Theile, in welchen $n^\lambda = \mu$ ist, von den übrigen abgesondert, worin n^λ höchstens $= \mu - 1$ ist, so geben die letzteren zusammen $\alpha^\lambda{}_{\mu-1}$ und man erhält:

$$\alpha^\lambda{}_\mu - \alpha^\lambda{}_{\mu-1} = l_\mu \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . \left(1 - \frac{P_{n^{\lambda-1}}}{P_\mu}\right)$$

oder

$$\frac{\alpha^\lambda{}_\mu - \alpha^\lambda{}_{\mu-1}}{l_\mu} = \alpha^{\lambda-1}_{\mu-1} - \frac{1}{P_\mu} \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}};$$

ferner ist

$$\alpha_\mu{}^{\lambda-1} = \alpha^{\lambda-1}_{\mu-1} + l_\mu \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-2}} . \Pi_{n^{\lambda-2}} . \left(1 - \frac{P_{n^{\lambda-2}}}{P_\mu}\right),$$

folglich:

$$P_\mu \left(\frac{\alpha^\lambda{}_\mu - \alpha^\lambda{}_{\mu-1}}{l_\mu} - \alpha_\mu{}^{\lambda-1}\right) = -\overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}} - l_\mu \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-2}} . \Pi_{n^{\lambda-2}} . [P_\mu - P_{n^{\lambda-2}}]. \qquad \mathbf{a.}$$

Eben so ist

$$\alpha^\lambda{}_{\mu+1} - \alpha^\lambda{}_\mu = l_{\mu+1} . \alpha_\mu{}^{\lambda-1} - \frac{l_{\mu+1}}{P_{\mu+1}} \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}}$$

oder

$$P_{\mu+1} \left(\frac{\alpha^\lambda{}_{\mu+1} - \alpha^\lambda{}_\mu}{l_{\mu+1}} - \alpha_\mu{}^{\lambda-1}\right) = -\overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}}.$$

Werden hier wieder rechter Hand die in l_μ multiplicirten Glieder, für welche $n^{\lambda-1} = \mu$ ist, von den übrigen abgesondert, so erhält man:

$$P_{\mu+1} \left(\frac{\alpha^\lambda{}_{\mu+1} - \alpha^\lambda{}_\mu}{l_{\mu+1}} - \alpha_\mu{}^{\lambda-1}\right) = -\overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}} - l_\mu \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^{\lambda-2}} . \Pi_{n^{\lambda-2}} . [P_\mu - P_{n^{\lambda-2}}]. \qquad \mathbf{b.}$$

Die Uebereinstimmung der mit *a.* und *b.* bezeichneten Werthe beweist, dass die Gleichung *III.* der Bedingung *II.* genügt. Indem man sich nun leicht überzeugen kann, dass der nach dieser Regel gebildete Ausdruck von f_μ richtig ist für $\mu = 2, 3, \dots$ und indem man mit Hülfe der Gleichung *I**) allgemein von f_μ auf $f_{\mu+1}$ übergeht, so erhält man schliesslich:

$$f_\mu = 1 - \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} . k + \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} . \Pi_{n''} . k^2 + \dots + (-1)^\lambda \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \dots l_{n^\lambda} . \Pi_{n^\lambda} . k^\lambda \dots + (-1)^\mu . l_1 l_2 l_3 \dots l_\mu . \Pi_\mu . k^\mu \qquad \mathbf{IV.}$$

da für $\lambda > \mu$ nach *III.* $\alpha^\lambda{}_\mu = 0$ ist.

In dem von Lagrange untersuchten Falle gleicher Gewichte (p) in gleichen Abständen (l) wird nach obiger Formel:

$$f_\mu = 1 - \mu l k + \overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right) . l^2 k^2 - \overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right)\left(1 - \frac{n''}{n'''}\right) . l^3 k^3 + \dots$$

während die *Méc. anal.* angiebt:

$$f_\mu = 1 - \mu_1 l k + \mu_2 \frac{l^2 k^2}{2'.} - \mu_3 \frac{l^3 k^3}{3'.} + \dots$$

wo $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ die Binomialzahlen $\mu, \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$, u. s. w. bedeuten. Es muss demnach sein:

$$\overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right)\left(1 - \frac{n''}{n'''}\right) \dots \left(1 - \frac{n^{\lambda-1}}{n^\lambda}\right) = \frac{\mu_\lambda}{\lambda'.},$$

welche Summation bemerkenswerth erscheint. Einen von der gegenwärtigen Untersuchung unabhängigen Beweis dieser

Formel will ich hier, als entbehrlich, der Kürze wegen unterdrücken.

Aus dem in *IV.* aufgestellten allgemeinen Ausdrucke für f_μ folgt die zur Bestimmung von k nöthige Gleichung, wenn für μ die Anzahl sämmtlicher Gewichte (ν) gesetzt wird, nämlich:

$$f_\nu = 0. \qquad \textbf{V.}$$

Sie ist in Hinsicht auf k vom νten Grade und die nähere Betrachtung der Gleichungen *I.* lehrt, in so fern die darin vorkommenden p und q der gegenwärtigen Aufgabe gemäss überall positive, von Null verschiedene Grössen sind, dass sie ν reelle, positive, ungleiche Wurzeln hat.

Durch Vertauschung von k mit k' gehe f_μ in f'_μ über. Multiplicirt man nun die ersten $\mu + 1$ der Gleichungen *I.* der Reihe nach mit $1, f'_1, f'_2, \ldots f'_\mu$ und addirt die Produkte, so kommt:

$$k \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} q_{\lambda+1} (f_\lambda - f_{\lambda+1})(f'_\lambda - f'_{\lambda+1}) + q_{\mu+1}(f_\mu - f_{\mu+1}) f'_\mu.$$

Verwechselt man hier k mit k', also auch f mit f', so folgt:

$$k' \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} q_{\lambda+1} (f_\lambda - f_{\lambda+1})(f'_\lambda - f'_{\lambda+1}) + q_{\mu+1}(f'_\mu - f'_{\mu+1}) f_\mu;$$

daher:

$$(k' - k) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda = q_{\mu+1}(f_{\mu+1} f'_\mu - f_\mu f'_{\mu+1}) \qquad \textbf{VI.}$$

oder

$$(k' - k)[p_1 + p_2 f_1 f'_1 + p_3 f_2 f'_2 + \ldots + p_{\mu+1} f_\mu f'_\mu] =$$
$$q_{\mu+1}(f_{\mu+1} f'_\mu - f_\mu f'_{\mu+1}),$$

indem bei der Summation hier überall, wie gewöhnlich, die obere Grenze ausgeschlossen ist.

Aus *VI.* folgt: Sind k und k' zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $f_{\mu+1} = 0$, so ist $f_{\mu+1} = 0$ und $f'_{\mu+1} = 0$; also

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda = 0. \qquad \textbf{VII.}$$

Sind die Grössen k und k' einander gleich, so wird $f_\mu = f'_\mu$, $f_{\mu+1} = f'_{\mu+1}$ und man erhält für vorstehende Summen zunächst $\frac{0}{0}$. Der wahre Werth findet sich auf bekannte Weise, nämlich:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f_\lambda = \left(f_{\mu+1} \cdot \frac{df_\mu}{dk} - f_\mu \cdot \frac{df_{\mu+1}}{dk}\right) q_{\mu+1}. \qquad \textbf{VIII.}$$

Wird hier für k eine Wurzel der Gleichung $f_{\mu+1} = 0$ gesetzt, so ist:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f_\lambda = - f_\mu \cdot \frac{df_{\mu+1}}{dk} \cdot q_{\mu+1}. \qquad \textbf{IX.}$$

Nun seien $k' k'' k''' \ldots k^\nu$ die Wurzeln (k) der Gleichung $f_\nu = 0$, nach der Grösse steigend geordnet, k^λ irgend eine derselben; so ist der vollständige Ausdruck der Ordinate des schwingenden Gewichtes p_1 folgender:

$$y_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu+1} [C_\lambda \cos t \sqrt{(gk^\lambda)} + D_\lambda \sin t \sqrt{(gk^\lambda)}],$$

wo C_λ und D_λ die zu k^λ gehörigen Constanten sind, deren Gesammtzahl 2ν beträgt. Wird ferner durch $f^\lambda{}_\mu$ der Werth bezeichnet, welchen f_μ durch Einsetzung von k^λ für k erhält, so findet man für die Schwingungen von $p_{\mu+1}$:

$$y_{\mu+1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu+1} [C_\lambda f^\lambda_\mu \cos t \sqrt{(gk^\lambda)} + D_\lambda f^\lambda_\mu \sin t \sqrt{(gk^\lambda)}]. \qquad \textbf{X.}$$

Wie die Constanten C_λ und D_λ mit Hülfe der Gleichung *VII.* bestimmt werden, bedarf keiner Erläuterung. Man findet, wenn $y^0{}_\mu$ und $k^0{}_\mu$ die Werthe von y_μ und $\frac{dy_\mu}{dt}$ für $t=0$ sind:

$$N . C_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f^\lambda{}_\mu y^0{}_\mu,$$

$$N\,.\,D_\lambda\,.\,V(gk^\lambda) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f^\lambda{}_\mu k^0, \qquad \textbf{XI.}$$

wo der gemeinschaftliche Nenner

$$N = \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f^\lambda{}_\mu f^\lambda{}_\mu$$

ist und nach *IX.* sich auch also schreiben lässt, nämlich:

$$N = -f^\lambda{}_{\nu-1} \cdot \frac{df^\lambda{}_\nu}{dk^\lambda} \cdot q_\nu \text{ für } x = L.$$

Hiermit ist die vorliegende Aufgabe für einen mit getrennten Gewichten beschwerten Faden gelöst. Für eine stetig vertheilte Belastung des Fadens gehen die gefundenen Ausdrücke in die folgenden über, welche ich hier, ausführlichere Betrachtungen einer anderen Gelegenheit vorbehaltend, noch kurz angeben will.

Es sei P_x das Gewicht des Fadens vom tiefsten Punkte bis zur Höhe x, so entspricht den vorigen Differentialgleichungen jetzt die folgende, worin einstweilen P für P_x gesetzt ist, nämlich:

$$\frac{1}{g}\,\frac{dP}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\left(P\,\frac{dy}{dx}\right)}{dx}. \qquad \textbf{XII.}$$

Hierin werde gesetzt: $y = C\,.\,f\cos t\,V(gk) + D\,.\,f\sin t\,V(gk)$, wo f eine noch zu bestimmende Function von x ist, so folgt, entsprechend den Gleichungen *I.* im vorigen Falle,

$$0 = kf\frac{dP}{dx} + \frac{d\left(P\,\frac{df}{dx}\right)}{dx}. \qquad \textbf{XIII.}$$

Nun sei

$$f = 1 - \chi_1 k + \chi_2 k^2 - \chi_3 k^3 + \ldots \text{ in inf.}, \qquad \textbf{XIV.}$$

so wird

$$\chi_1 = x,\quad \chi_2 = \int_0^x dl_2 \int_0^{l_2} dl_1 \left(1 - \frac{Pl_1}{Pl_2}\right)$$

wo Pl_1, Pl_2, .. die Werthe von P für $x = l_1$, $x = l_2$,.. sind. Es sei zur Abkürzung

$$\Pi_n = \left(1 - \frac{Pl_1}{Pl_2}\right)\left(1 - \frac{Pl_2}{Pl_3}\right)\left(1 - \frac{Pl_3}{Pl_4}\right)\ldots\left(1 - \frac{Pl_{n-1}}{Pl_n}\right),$$

so wird allgemein

$$\chi_n = \int_0^x dl_n \int_0^{l_n} dl_{n-1} \int_0^{l_{n-1}} dl_{n-2} \int\ldots \int_0^{l_2} dl_1\,.\,\Pi_n \cdot \textbf{XIV}\,^{*}).$$

Die Reihe für f convergirt für jeden Werth von k, wie leicht zu beweisen ist.

Schreibt man in dieser Reihe k' für k, so gehe f in f' über. Alsdann gelten die beiden Gleichungen:

$$kf\,dP + d\left(P\,\frac{df}{dx}\right) = 0 \text{ und } k'f'\,dP + d\left(P\,\frac{df'}{dx}\right) = 0,$$

aus deren Verbindung hervorgeht:

$$(k' - k)\int_0^x ff'\,dP = \left[f'\,\frac{df}{dx} - f\,\frac{df'}{dx}\right] P, \qquad \textbf{XV.}$$

indem hinsichtlich der Integrations-Constante zu bemerken ist, dass für $x = 0$, P verschwindet.

Für $k' = k$ folgt hieraus:

$$\int_0^x ff\,dP = \left[\frac{df}{dk} \cdot \frac{df}{dx} - f\,\frac{d^2f}{dx\,dk}\right] P. \qquad \textbf{XVI.}$$

Für jedes x zwischen 0 und L hat die Gleichung $f = 0$ unendlich viele reelle, positive, ungleiche Wurzeln k und keine anderen.

Nun sei k eine, k' eine andere dieser Wurzeln, so ist $f = 0$ und $f' = 0$, also nach *XV.*

$$\int_0^x ff'\,dP = 0. \qquad \textbf{XVII.}$$

Ist hingegen $k = k'$ und $f = f' = 0$, so wird nach *XVI.*

$$\int_0^x ff\,dP = \frac{df}{dk} \cdot \frac{df}{dx} \cdot P. \qquad \textbf{XVIII.}$$

Man bezeichne durch $k', k'', k''', \ldots k^\lambda \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $f = 0$, nachdem darin L für x gesetzt worden, und zwar, wie bisher, nach der Grösse geordnet, so dass

$$k' < k'' < k''' < \ldots < k^\lambda < k^{\lambda+1} \ldots,$$

so erhält man schliesslich, wenn noch der Deutlichkeit wegen f als Function von x und k durch $f(x, k)$ bezeichnet wird:

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} [C_\lambda f(x,k^\lambda) \cos t\sqrt{(gk^\lambda)} + D_\lambda f(x,k^\lambda) \sin t\sqrt{(gk^\lambda)}] \quad \mathbf{XIX.}$$

und wenn für $t = 0$, $y = y^0$, $\frac{dy}{dt} = u^0$ ist, nach *XVII.*

$$N.C_\lambda = \int_0^L y^0 f(x,k^\lambda)\, dP,\quad N.D_\lambda \sqrt{(gk^\lambda)} = \int_0^L u^0 f(x,k^\lambda)\, dP, \quad \mathbf{XX.}$$

wo der gemeinsame Nenner

$$N = \int_0^L [f(x, k^\lambda)]^2\, dP$$

nach *XVIII.* sich auch ausdrücken lässt durch den Werth von

$$\frac{df}{dk} \cdot \frac{df}{dx} \cdot P \text{ für } x = L \text{ und } k = k^\lambda.$$

Es zerfällt also die gesammte Bewegung des Fadens in eine unendliche Anzahl einfacher Schwingungen, deren jede als für sich bestehend betrachtet werden kann. Bezeichnet man die zu $k', k'', k''', \ldots$ gehörigen Schwingungen der Reihe nach als die erste, zweite, dritte, .. wobei immer $k' < k'' < k''' \ldots$ vorausgesetzt wird, so ist die Dauer der λten Schwingung $= \frac{2\pi}{\sqrt{(gk^\lambda)}}$, also für einen grossen Werth von λ, dem ein noch viel grösseres k^λ entsprechen wird, sehr klein; ferner theilt sich vermöge dieser λten Schwingung der Faden in λ Stücke, zwischen denen sich $\lambda - 1$ Ruhepunkte oder Schwingungsknoten befinden; d. h. es lässt sich zeigen, dass für ein gegebenes k, nämlich k^λ, die transscendente Gleichung in $x: f(x,k^\lambda) = 0$ zwischen $x = 0$ und $x = L$, $\lambda - 1$ reelle, positive, ungleiche Wurzeln x hat, zu welchen noch die Wurzel $x = L$ hinzukommt. Man ersieht hieraus, wie für hinreichend grosse λ die Werthe von C_λ und D_λ, verglichen mit den entsprechenden Werthen für kleinere λ, sehr klein werden können, wie es die Convergenz der Reihe *XIX.* fordert; nämlich in den Werthen *XX.* von C_λ und D_λ heben sich die Theile der

Zähler durch den Gegensatz der Zeichen für ein hinreichend grosses λ in beträchtlichem Maasse auf, während der Nenner durch quadratische Elemente anwächst. Dieser Umstand, welcher auch bei andern Reihenentwickelungen willkührlicher Functionen wiederkehrt und gewiss höchst wesentlich ist, reicht jedoch zu einem strengen analytischen Beweise der Convergenz nicht hin und muss ein solcher hier, wie in manchen ähnlichen Fällen, noch erwartet werden, während inzwischen Gründe, die in der Natur der Sache liegen, die Convergenz nicht bezweifeln lassen.

Um noch ein Beispiel anzuführen, sei die Belastung des Fadens nach folgendem Gesetze vertheilt: Auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = L^0$ sei $P = x^n$ (n positiv) und von $x = L^0$ bis $x = L$ sei der Faden leer, d. h. $P = (L^0)^n$. Alsdann ergiebt sich:

$$f(x, k) =$$

$$1 - xk + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^2k^2}{2} - \frac{n \,.\, n}{n+1 \,.\, n+2} \cdot \frac{x^3k^3}{3'.} + \frac{n \,.\, n \,.\, n}{n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3} \cdot \frac{x^4k^4}{4'.} - \ldots$$

gültig von $x = 0$ bis $x = L^0$, und

$$f(x, k) = 1 - xk + \frac{nL^0}{n+1}\left[x - \frac{L^0}{2}\right]\frac{k^2}{1} - \frac{n \,.\, n \,.\, {L^0}^2}{n+1 \,.\, n+2}\left[x - \frac{2L^0}{3}\right]\frac{k^3}{2'.}$$

$$+ \frac{n \,.\, n \,.\, n \,.\, {L^0}^3}{n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3}\left[x - \frac{3L^0}{4}\right]\frac{k^4}{3'.} - \ldots .$$

von $x = L^0$ bis $x = L$. Für $x = L^0$ fallen beide Werthe zusammen.

Für $L^0 = L$, d. h. wenn die unbelastete Strecke verschwindet, gilt die erste Formel für die ganze Länge des Fadens, und wenn n eine ganze Zahl ist, so fällt sie mit einer Reihe zusammen, auf welche Bessel bei einer Untersuchung über planetarische Störungen (Schr. der Berl. Akademie vom Jahre 1824) geführt worden ist und welche er daselbst durch ein sehr einfaches bestimmtes Integral dargestellt hat. Es ist nämlich, wenn n eine positive ganze Zahl, die obige Reihe

$$1 - xk + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^2k^2}{2'} - \ldots =$$

$$\frac{(n-1)'}{\pi\,(nkx)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\pi \cos\left[(n-1)\,\varepsilon - 2\sqrt{(nkx)}\sin\varepsilon\right] d\varepsilon.$$

Die Herleitung dieses Ausdruckes übergehe ich um so mehr, als er für ein gebrochenes n ungültig wird und weil es hier überhaupt um besondere Fälle sich nicht handelt. Zu diesen gehören auch, nämlich der Annahme $n = 1$ entsprechend, die in der *Méc. anal.* betrachtete Schwingung eines gleichmässig schweren Fadens, so wie die bei Untersuchung des Wärmezustandes eines Cylinders in Fourier's Werke vorkommende und dort durch das obige Integral (für $n = 1$) ausgedrückte Reihe. Dies sind, so weit meine Kenntniss reicht, die einzigen Beispiele, in welchen die oben mit $f(x, k)$ bezeichneten Functionen bis jetzt hervorgetreten sind, deren Allgemeinheit durch das Vorstehende vielleicht in helleres Licht gesetzt wird.

Dorpat den 22 Mai (3 Juni) 1853.

(Aus den *Mélanges mathématiques et astronomiques T. I.*)