T a r t u R i i k l i k Ü l i k o o l

Matemaatika-loodusteaduskond

mehhaanika osakond

Diplomitöö

Maxwelli vastastikuse lause ja selle rakendamine staatiliselt määramatute süsteemide lahendamisel.

Töö teostaja: N o r a V e s k e.

Juhendaja: prof. G. R ä g o.

Luban kaitsmisele.

18.05.54.

Gerhard Rägo
teor. mehh. kat. juhataja

T a r t u s 1954.

Sisukord.

I Sissejuhatus.

1864.a. avaldas kuulus inglise füüsik John Clark Maxwell oma töö "On the calculation of the equilibrium and stiffnes of frames", milles ta esimesena lahendas tasapinnalise sõrestiku elastse kujumuutusprobleemi. Seejuures eeldas Maxwell, et ainult üks varras, näiteks a , on elastne, kõik ülejäänud vardad on aga jäigad. Ta otsib siis varda a pikkuse muutusest $\Delta\alpha$ tingitud kahe sõlmpunkti m_1 ja m_2 vahelise kauguse muutumisest δ_m. Tulemus, millele Maxwell jõuab, on järgmine: kui sõlmedes m_1 ja m_2 mõjuv surve tingib vardas a tungi S' , siis tingib varda a venitamine $\Delta\alpha = 1$ võrra sõlmede m_1 ja m_2 lähenemist S' võrra /1/.

Maxwell kasutas oma põhiseost staatiliselt määratud sõrestiku kahe sõlmpunkti vahelise kauguse muutumise määramiseks vaid juhul, kui ainsa elastse varda otspunktides on rakendatud tung . Kõiki ülejäänud vardaid vaatles ta jäikadena /1/. Maxwelli töö erakordne tähtsus seisneb aga selles, et ta tulemused on rakendatavad igasugustele tasapinnalistele staatiliselt määramatuile sõrestikele. Kahjuks jäi see Maxwelli töö sama probleemi alal töötavatele teadlastele teadmatuks ja tema tulemused avastati temast sõltumatult mitmel korral uuesti. Nii avaldas 1872.a. itaalia matemaatik E. Betty praeguseni tema nime kandva väga üldise vastastikuse seaduse, milles Maxwelli lause sisaldub lihtsa erijuhuna /1, 3/.

Täiesti iseseisvalt jõudis saksa insener-teoreetik O. Mohr 1874.-75.a. samale tulemusele lähtudes võimalike nihutuste printsiibist ja lahendas täiesti üldiselt sõrestiku kujumuutuse probleemi /1, 2/.

Hiljem, 1884.a., näitas saksa teadlane R. Krohn, et Maxwelli meetodil saab leida ka varraste läbipaindeid./1, 2/.

Käesolev töö käsitleb Maxwelli vastastikuse lauset lähtudes võimalike nihutuste printsiibist, nagu seda esimesena näitas O. Mohr ja nagu seda tänapäevalgi tugevusõpetuses enamikul juhtumeil tehakse. Maxwelli lause rakendusena on toodud näiteid staatiliselt määramatude süsteemide valdkonnast.

Ülalmainitud Maxwelli töö suur tähtsus tehnilises mehhaanikas õigustab tema autori tähtsamate elulooliste andmete märkimist.

John Clark Maxwell (1831 - 1879) kuulub koos G. Stokes'i, W. Thomson'i ja J. Rayleigh'ga kuulsasse inglise matemaatikute-füüsikute perre. Maxwell sündis šoti perekonnas aastal 1831. Juba 1846.a. esitas ta šoti akadeemiale rea geomeetrilisi uurimusi. Cambridge ülikooli õppima siirdus ta alles neli aastat hiljem ja juba 1855.a. valiti ta Kolmainujumala Kolledži (Trinity College) liikmeks. Ta töötas siis Aberdeeni ülikooli ja Londoni Kuninga-kolledži (Kingo College) õppejõuna.

1871.a. siirdus Maxwell Cambridge ülikooli eksperimentaalse füüsika laboratooriumi juhatajaks, kus nii enne kui ka peale teda on töötanud paljud kuulsad inglise füüsikud-eksperimentaatorid. Maxwelli teaduslikud tööd haaravad geomeetriat (üks töö näiteks Dupin'i tsikliidi kohta), eriti aga teoreetilist füüsikat, kus erilist tähtsust omavad ta tööd gaaside kineetilise teooria ning elektri ja magnetismi teooria alal, lõpeks t e h n i l i s t m e h h a a n i k a t, kus tähtsaimad on ta uurimised graafilise staatika vastastikuste kujude kohta ja tema nime kandev vastastikuse lause /4/.

II Staatiliselt määramatud sõrestikud.

§1. Üldised märkused.

Sõrestikud jagunevad staatiliselt määramatuiks ja staatiliselt määratuiks vastavalt sellele, kas neis esinevad tundmatud varraste koormised ja toereaktsioonid on kindla keha staatika seaduste abil leitavad või mitte. Staatiliselt määratud sõrestiku puhul toereaktsioodide ja varraste koormiste määramiseks pole vaja teada materjali elastseid omadusi: sõrestikku vaadeldakse ju sel korral absoluutselt muutumatuna. Staatiliselt määramatude sõrestike puhul tundmatute tungide arv on alati suurem kui nende võrrandite arv, mille koostamist võimaldabki kindla keha staatika. Kui tundmatute arv ületab võrrandite arvu n võrra, siis on tegemist n liigse tundmatuga.

Selleks et sõrestik oleks staatiliselt määratud, peab ta eelkõige olema jäik, s.t. sõrestiku kuju peab jääma muutumatuks, kui ta varraste pikkus jääb samaks. Seejuures eeldame, et sõrestik võimaldab iga üksikult võetud varda pikkuse muutust, ilma et seejuures oleks vaja muuta teiste varraste pikkusi. Iga sõrestiku kuju muutus, mis erineb kirjeldatust, eeldatakse vaadeldavana üksikute sõrestiku varraste pikkuste muutuste kogutulemusena. Need üksikute sõrestiku varraste pikkuste muutused esinevad igaüks omaette ja ükski neist pole tõlgendatav teiste varraste pikkuste muutuste resultandina. Neil eeldustel on võimalik näidata nii palju üksteisest sõltumatut sõrestiku võimalikku nihutust, kui palju on vaja saada võrrandeid tundmatute määramiseks.

Kui jäigas sõrestikus mingi ühe varda pikkuse muutus toob enesega kindlasti kaasa ka teiste varraste pikkuse muutuse, siis nimetame seda varrast l i i g s e k s. Staatiliselt määratud süsteem sisaldab vaid nii palju ja nimelt selliseid vardaid, millised o n t i n g i m a t a v a j a l i k u d ta jäikuse säilitamiseks. Kui vardaid on rohkem, siis on osa neist l i i g s e d ja nende koormised on siis staatika võrrandeis liigseteks tundmatuteks.

Jäigad sõrestikud saadakse lähtudes ühest kolmnurgast, mille külge lülitatakse uusi kolmnurki, mis moodustuvad ühest juba olemasolevast ja kahest uuest vardast. Vardad eeldatakse ühendatuna liigendiga s õ l m e s. Vajalike varraste arvu b ja sõlmede arvu m vahel valitseb sõrestiku koostamisviisi põhjal järgmine seos

$$b - 3 = 2(m - 3)$$

kust

$$b = 2m - 3.$$

Iga teisel teel saadud jäiga sõrestiku sõlmede ja varrast vaheline seos on sama. Näiteks, võttes aluseks mingi kümera n -nurkse hulknurga, teeme ta $n - 3$ diagonaaliga jäigaks ja seejärele lisandame talle uusi sõlmi, igaühe ikka kahe uue varda abil. Sel juhul saame

$$b - (2n - 3) = 2(m - n)$$

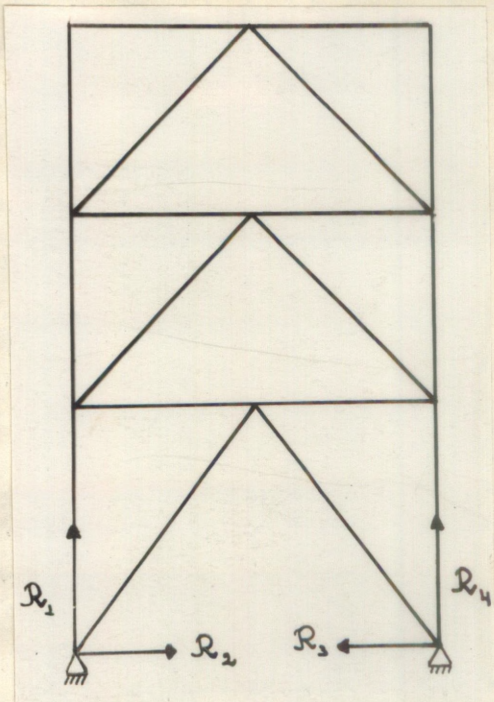
kust, nagu ennegi $b = 2m - 3.$

Esineb ka sõrestikke, mis sisaldavad vähem kui $2m - 3$ varrast, kuid kus puuduvad vardad on asendatud sõrestiku jäikuse säilitamiseks lisatugedega. Joonisel 1 esineb ühe sellise sõrestiku näide.

Sisaldagu sõrestik b varrast, r toereaktsiooni ja n sõlme. Kui

$$b + r > 2n,$$

siis on sõrestik staatiliselt määramatu, sest sõrestikus vajalikke vardaid on $2n - 3$, vajalikke toereaktsioone 3; seega esineb sõrestikus $2n$ otsitavat./6/.



Joonis 1.

Staatiliselt määramatus sõrestikus valitsevate varraste koormiste ja sõrestiku toereaktsioonide määramiseks on vaja teada peale sõrestiku kuju ja mõõdete ka veel kõikide sõrestiku osade elastseid omadusi. Nõutav on, et sõrestikule rakendatud välistungid omaette oleksid tasakaalus ja samuti peavad nad olema tasakaalus sõrestikus mõjuvate sisetungidega s.o. varraste koormistega. Nende mõjul toimuva sõrestiku deformeerumist jälgides saame puuduvad võrrandid liigsete tundmatute leidmiseks. Teades varraste koormisi ja toereaktsioone, saame arvutada, kas sõrestiku vardad on küllalt jämedad ja toed küllalt tugevad selleks, et ohuta kanda kogu neil lasuvat väliskoormist. Kui süsteemi kandevõime ei rahulda, tuleb valida sõrestiku varrastele uued mõõted ja siis läbi viia uued arvutused ning tulemused uuesti kontrollida.

Niisiis staatiliselt määramatu sõrestiku arvestamisel kasutame jäiga keha staatikat ja Hooke'i seadust sirgjoonse varda deformeerumise kohta. Esmalt tulevad määrata tugede reaktsioonid, edasi varraste koormised,varrastes mõjuvad pinged ja lõpuks varraste ristlõiked.

§ 2. Tasapinnaline sõrestik.

Tasapinnalise sõrestikut toed jagunevad kolme liiki vastavalt sellele, missuguseid sõrestiku sõlmede liikumisi nad võimaldavad. I liiki tugedeks nimetame selliseid, mis võimaldavad sõrestiku sõlmedel hõõrdumisvabalt liikuda mingil p i n n a l, nii et takistatud on vaid liikumine pinnast eemale. Sel juhul esineb vaid ü k s toereaktsioon ja see on risti toetava pinnaga.

II liiki toed on seotud sõrestikuga ühe liikumatu punkti kaudu. Sel juhul on takistatud ühenduspunkti igasugune liikumine. Liikumist tasandis saab alati takistada kahe risti oleva tungiga; nii siis võib sel juhul rääkida kahest ristuvast toereaktsioonist.

III liiki tugede puhul on sõrestiku sõlmpunktid ühendatud toega liikumatult, kusjuures on takistatud ka veel pöörlemine ümber toetuspunkti. Pöörlemise takistamiseks on vaja rakendada tungipaari. Otsitavateks on sel juhul kaks toereaktsiooni ja üks tungipaar. Jäiga keha staatika annab k o l m võrrandit tundmatute leidmiseks; kaks võrrandit tungide projektsioonide jaoks ja kolmanda momentide kohta.

Sõrestik koosneb sageli mitmest osast, millised ühendatakse omavahel liigenditega. Üksikuid sõrestiku osi võime seejuures vaadelda sõrestikena, milledel kas üks tugedest on liikumatu ja teine tugi on nn. rippuv, või on mõlemad toed rippuvad. Rippuva toe puhul saame k a k s toereaktsiooni. Iga sõrestiku osa puhul saame nagu iseseisva sõrestiku puhulgi k o l m tasakaalutingimust /3/.

Vertikaalne koormis tingib tavaliselt ka vertikaalseid toereak reaktsioone, rippuvate ja kaarsõrestike puhul tingib ta aga vertikaalsihist erinevate sihtidega toereaktsioone.

Jagunegu sõrestiku toed järgmiselt: m I liiki tuge, n II liiki tuge, p III liiki tuge ja q rippuvat tuge. Sel juhul on tundmatuid reaktsioone kokku :

$$m + 2n + 3p + 2q.$$

Sõrestik koosneb siis $q+1$ üksikosast ja jäiga keha staatika annab $3(q+1)$ võrrandit /3/. Liigseid tundmatuid saame sel juhul

$$m + 2n + 3p - q - 3.$$

Kui $m + 2n + 3p = q + 3$, siis liigseid tundmatuid pole ja saame staatiliselt määratud süsteemi.

Kui $m + 2n + 3p > q + 3$, siis saame staatiliselt määramatu süsteemi.

Kui $m + 2n + 3p < q + 3$, siis saame liikuva süsteemi, millel puudub tasakaal sise- ja välistungide vahel /2/.

§ 3. Ruumiline sõrestik.

Ruumilise sõrestiku puhul esineb kolme liiki tugesid. Tugi võib võimatuks teha sõrestiku sõlme igasuguse liikumise. Selleks on vaja kolme risti-olevat toereaktsiooni, millede suurused ja suunad on otsitavad. Selliseid tugesid nimetatakse esimest liiki tugedeks.

II liiki toed võimaldavad liikumist ainult mööda antud sirget. Seega ristuvaid sirgeid mööda on igasugune liikumine takistatud. Toest wabanemiseks on seega vaja rakendada k a k s toereaktsiooni. Hõõrdumisvabal juhul mõjuvad toereaktsioonid risti antud sirgega.

III liiki tugede puhul võib toetuspunkt liikuda hõõrdumisvabalt mööda teatud tasandit, takistatud on liikumine tasandist eemale. Sel juhul on tegemist ühe ainsa toereaktsiooniga, mis mõjub risti antud tasandile /3/.

Jäiga keha staatika annab üldjuhul k u u s tarvilikku ja piisavat tasakaalutingimust. See lubab koostada kuus võrrandit tundmatute reaktsioonide määramiseks.

§ 4. Liigsete tundmatute määramine.

Vaatleme tasapinnalisi sõrestikke, mille vardad on kas venitatud või surutud, mitte aga painutatud. Selleks peavad vardad olema seotud hõõrdumisvabade ehk nagu öeldakse ideaalsete liigenditega ja välistungid võivad olla rakendetud ainult sõrestiku sõlmedes. Keerulisema staatiliselt määramatu süsteemi saame siis, kui vardad on sõlmedes kinnitatud j ä i g a l t. Vardais valitsevatele tundmatutele pingetele lisanduvad siis painutavad momendid, mille tõttu tundmatute arv kasvab /5/. Kui vardad on ühendatud jäigalt, asendame mõttes jäiged ühendid liigenditega ja saame siis koormiste jaoks lähenduslahendid, mis ehitustehnika jaoks enamikul juhtudel annavad küllaldase täpsuse.

Liigsete tundmatute leidmiseks võime kasutada võimalike nihituste printsiipi. See ütleb, et süsteemi tasakaalu korral talle rakendatud välis- ja sisetungide töö igal võimalikul lõpmatult väikesel nihutusel on võrdne nulliga. Võimalikud lõpmatult väikesed nihutused pole tegelikud, vaid seostega lubatud kujuteldavad võimalikud nihutused /6/. Seoste all mõistame süsteemi liikumist piiravaid tingimusi. Saame niipalju võrrandeid, kuipalju erinevaid võimalikke nihutusi lubab sõrestik. Võimalikud nihutused sõrestikes on lõplikud suurused kuid sõrestike mõõdetega võrreldes on nad niivõrd väikesed, et neid võib pidada lõpmatult väikesteks ja kasutada võimalike nihutuste printsiibis /6/.

Koormiste määramiseks l i i g s e t e s varrastes ei saa kasutada neid võimalikke nihutusi, millede puhul sõrestiku kuju jääb muutumatuks, kuna sisetungide töö sel juhul on null ja seega koormised langevad võrrandeist üldse välja. Need võrrandid on sobivad vaid liigsete toereaktsioonide määramiseks. Koormiste määramiseks kõlbavad vaid need võimalikud nihutused, millede puhul muutub sõrestiku kuju, sest siis muutub vähemalt ühe varda pikkus, varda kandaoleva koormise tööpole null ja koormis ei lange tasakaaluvõrrandeist välja.

§ 5. Võimalike nihutuste printsiip.

Võimalike nihutuste printsiip ütleb, et tasakaalusolevate tungide süsteemi töö igal võimalikul nihutusel on võrdne nulliga. See printsiip on aluseks kõigi tasakaaluvõrrandite kirjutamisel nii jäiga kui ka elastse keha puhul.

Liigseid toereaktsioone loeme v ä l i s t u n g i d e k s. Sel juhul on võimalik eemaldada liigsed toed ja nende mõju sõrestikule asendada välistungidega. Liigsete varraste koormisi võib kas vaadelda koos vajalike varraste koormistega, või jälle, eemaldades liigsed vardad, asendada igaüks neist sobivalt valitud kahe välistungiga.

Küsimuse otsustamiseks, kas teatav varras on sõrestikus vajalik või liigne, pole alati üheselt võimalik; enamiku sõrestike puhul on ükskõik, millised vardad võtta vajalikeks ja millised liigseteks. Ka liigsete tugede puhul on ükskõik, milliseid tugedest lugeda just vajalikeks ja milliseid liigseteks.

Sõrestikule on võimalik rakendada väga mitmesuguseid tasakaalus olevaid välistungide süsteeme, mis kõik kutsuvad esile sõrestiku deformeerumise, tekitavad varrastes pingeid ja sunnivad sõlmi paigalt nihkuma. Iga selline sõrestiku deformeerimine on üks seoste poolt lubatavatest võimalikest nihutustest. Seega iga sõrestiku puhul on mõeldavad mitu süsteemi võimalikke nihutusi. Tungide tasakaalu korral tungide töö igal võimalikul nihutuste süsteemil on võrdne nulliga. Võimaliku nihutuse all mõistame tungi rakenduspunkti nihutust tasakaaluasendi ja mingi teise talle lähedase, seoste poolt lubatud võimaliku asendi vahel.

Üheks võimalikuks konfiguratsiooniks võtame sõrestiku selle asendi, mis vastab välistungide puudumisele ja nimetame seda nullasendiks. Rakendame mingi tungide süsteemi, mis annab sõrestiku esimese konfiguratsiooni. Mingi teise tungide süsteemi rakendamisel saame sõrestiku teise konfiguratsiooni. Nullasendist võime üle minna esimesele asendile või ka teisele asendile vastava tungide süsteemi rakendamisel. Kui tungide töö kummagi nihutuse puhul on võrdne nulliga, siis on ta null ka nende nihutuste resultandi puhul s.o. nihutuse jaoks nullasendist teise asendisse /7/. Vastastikuse lause puhul kasutamegi esimeste tungide süsteemi tööd nihutuste puhul, mis vastavad teisele tungide süsteemile; see käsitlus avab tee liigsete tundmatute leidmiseks.

III Maxwelli vastastikuse lause.

1. Maxwelli vastastikuse lause tõestus.

Vaatleme mingit sõrestikku, mille sõlmpunktides mõjuvad välistungid $P_1, P_2, P_3, \dots$, mille mõjul sõlmed saavad võimalikud nihutused. Sõlmede võimalike nihutuste projektsioonid vastavas sõlmes mõjuva välistungi sihile olgu $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ Sõrestiku v a j a l i k e tugede reaktsioonid olgu $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ ja neile vastavate nihutuste projektsioonid sõlmes mõjuva reaktsiooni sihile olgu $d_1, d_2, d_3, \dots$ L i i g s e t e tugede reaktsioonid olgu $R_1, R_2, R_3, \dots$, ja neile vastavate nihutuste projektsioonid reaktsiooni sihile olgu $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ Vajalikes varrastes mõjugu koormised $X_1, X_2, X_3, \dots$, ja vajalike varraste pikenemiste projektsioonid koormiste sihile olgu $x_1, x_2, x_3, \dots$ Liigsetes varrastes mõjugu koormised $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ ja liigsete varraste pikenemiste projektsioonid vastavate koormiste sihile olgu $y_1, y_2, y_3, \dots$ Seda koormiseolukorda nimetame e s i m m e s e k s o l u k o r r a k s. Vaatleme selle kõrval veel mingit t e i s t k o o r m i s e o l u k o r d a , mille tähistamiseks kasutame samu tähti kui esimese koormiseolukorra puhul, lisades neile vaid apostroofi.

Sama tähe ja indeksiga tähistatud välistungid ja toereaktsioonid, samuti ka neile vastavad nihutused kuuluvad igal koormiseolukorral ikka samade sõlmede juurde. Sama tähe ja indeksiga tähistatud varraste koormised ja pikenemised kuuluvad erinevatel koormiseolukordadel ikka ühe ja sellesama varda juurde.

Võimalike nihutuste printsiibi kasutamisel e s i m e s e tungide süsteemi kuid t e i s e süsteemi nihutuste puhul saame

$$\sum P_i \delta_i' + \sum Q_j d_j' + \sum R_k \Delta_k' - \sum X_l x_l' - \sum Y_n y_n' = 0, \qquad (I)$$

kus summeerimine algab iga indeksi algväärtusega 1 ja lõpeb indeksi kõige viimase väärtusega. Vasakul poolel seisab võimalikul nihutusel välistungide tööde, vajalike toereaktsioonide tööde, liigsete toereaktsioonide tööde, vajalikes varrastes tekkinud koormiste tööde ja liigsetes varrastes tekkinud koormiste tööde summa. Lagrange'i printsiibi järgi see summa on võrdne nulliga. Tungide töö võimalikel nihutustel ei ole tegelik, vaid on kujuteldav töö /6/.

Analoogselt saame võimalike nihutuste printsiibi põhjal t e i s e tungide süsteemi ja e s i m e s e l e tungide süsteemile vastavate nihutuste puhul, et

$$\sum P_i' \delta_i + \sum Q_j' d_j + \sum R_k' \Delta_k - \sum X_l' x_l - \sum Y_n' y_n = 0, \qquad (II)$$

kus summeerimise indeksite kohta on kehtiv eelpool tehtud märkus. Vajalike varraste pikenemine avaldub Hooke'i seaduse põhjal järgnevalt:

$$x_l' = \frac{X_l' l_l}{E F_l}, \qquad x_l = \frac{X_l l_l}{E F_l}, \qquad (III)$$

kus l_l on varda pikkus, F_l on ristlõike pindala ja E - elastsusmoodul.

Samuti saame liigsete varraste pikenemise kirjutada kujul:

$$y'_n = \frac{y'_n l_n}{EF_n}, \qquad y_n = \frac{y_n l_n}{EF_n}. \qquad (\text{IV})$$

Asetades need avaldised võrdustesse (I) ja (II) leiame, et:

$$\begin{cases} \sum P_i \delta'_i + \sum Q_j \alpha'_j + \sum R_k \Delta'_k = \sum y_n \frac{y'_n l_n}{EF_n} + \sum x_e \frac{x'_e l_e}{EF_e}, \\ \sum P'_i \delta_i + \sum Q'_j \alpha_j + \sum R'_k \Delta_k = \sum y'_n \frac{y_n l_n}{EF_n} + \sum x'_e \frac{x_e l_e}{EF_e}. \end{cases} \qquad (\text{V})$$

Saadud võrduste paremad pooled on võrdsed; kuna summeeritavad liikmed erinevad vaid tegurite järjekorra poolest; seega on võrdsed ka nende vasakud pooled. Seepärast

$$\sum P_i \delta'_i + \sum Q_j \alpha'_j + \sum R_k \Delta'_k = \\ = \sum P'_i \delta_i + \sum Q'_j \alpha_j + \sum R'_k \Delta_k. \qquad (\text{VI})$$

Sõnastatult tähendab see, et esimese välistungide süsteemi töö teisel nihutuste süsteemil on võrdne teise välistungide süsteemi tööga esimesel nihutuste süsteemil.

Saadud võrdus ei sisalda liigsetes varrastes mõjuvaid koormisi, sisaldab aga liigsete tugede reaktsioone ja on igati sobiv nende reaktsioonide määramiseks.

Vaatleme erijuhtu, kus sõrestikule on rakendatud esimese koormiseolukorra puhul ühes sõlmes m tung P_m ja teise koormiseolukorra puhul teises sõlmes n tung P'_n. Esimesele koormiseolukorrale vastavad nihutused olgu, nagu varemgi, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$; samuti teisele koormiseolukorrale vastavad nihutused $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \ldots$ Antud juhul vastastikuse lauset kasutades saame:

$$P_1\delta_1' + 0\cdot\delta_2' + 0\cdot\delta_3' + \ldots = P_1'\delta_1 + 0\cdot\delta_2 + 0\cdot\delta_3 + \ldots ,$$

$$P_1\delta_1' = P_1'\delta_1$$

$$\text{ehk} \quad \frac{P_1}{P_1'} = \frac{\delta_1}{\delta_1'} .$$

Kui võtta siin $P_1 = P_1'$, siis $\delta_1 = \delta_1'$. Sõnastatult annab see Maxwelli vastastikuse lause:

sõlmes r rakendatud tung tingib sõlme m niisuguse nihutuse, et selle nihutuse projektsioon sõlmes rakendatud tungi sihile on sama, mis sõlme r nihutuse projektsioon siin rakendatud tungi sihile sõlmes m rakendatud võrdse tungi mõjul.

Muudame veidi tähiseid: olgu δ_m kahe sõlme m_1 ja m_2 vastastikune nihutus ja δ_r' mingi teise kahe sõlme vastastikune nihutus. Siis saame vastastikuse lauset sõnastada ka järgmisel kujul:

sõlmede m_1 ja m_2 vastastikune nihutus sõlmedes r_1 ja r_2 rakendatud ühiktungide mõjul on sama, mis sõlmede r_1 ja r_2 vastastikune nihutus sõlmedes m_1 ja m_2 rakendatud ühiktungide mõjul /2/.

Kui δ_m tähendab kahe sõlmega m_1 ja m_2 määratid varda lõpmata väikest pööret ja δ_r' tähendab sõlmedega r_1 ja r_2 määratud varda pööret, siis saame vastastikusellauset kujul:

varda m_1m_2 pööre δ_m sõlmedes r_1 ja r_2 risti vardaga r_1r_2 rakendatud ühik-tungipaari mõjul on sama, mis varda r_1r_2 pööre δ_r' sõlmedes m_1 ja m_2 risti vardaga m_1m_2 rakendatud ühik-tungipaari mõjul /2/.

Kui δ_m tähendab kahe varda m_1m_2 ja r_1r_2 vahelise nurga muutust sõlmedes m_1 ja m_2 risti vardaga m_1m_2 mõjuvate ühik-tungipaari mõjul ja δ_r' samade varraste vahelise nurga muutust sõlmedes r_1 ja r_2 risti vardaga $r_1 r_2$ mõjuvate ühik-tungipaari mõjul, siis saame vastastikuse lause kujul:

varraste $m_1 m_2$ ja $r_1 r_2$ vahelise nurga muutust δ_m sõlmedes r_1 ja r_2 rakendatud ühik-tungipaari mõjul on võrdne nurga muutusega δ_r' sõlmedes m_1 ja m_2 rakendatud ühik-tungipaari mõjul /2/.

Olgu nüüd sõrestikule rakendatud tung P_m, mis tingib sõlmede nihutusi $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ ja teine kord tung P_r', mis tingib vastavalt sõlmede nihutusi $\delta_1', \delta_2', \delta_3', \ldots$, kusjuures $\delta_r' = 0$, siis saame vastastikuse lausest, et

$$P_m \cdot 0 = P_r' \cdot \delta_r \quad \text{kust} \quad \delta_r = 0. \qquad (\text{VIII})$$

Sõnastatult tähendab see järgmist:

kui tungi P_r' rakendamisel sõlmes r mingi teise sõlme m nihutus on null, siis mingi tungi P_m rakendamisel sõlmes m sõlme r nihutus on kindlasti samuti null.

Üks väärtuslikumaid Maxwelli vastastikuse lause külgi on see, et teda on võimalik kasutada ka l i i g s e t e s v a r r a s t e s mõjuvate koormiste määramiseks. Selleks kujutleme liigsed vardad eemaldatuna ja asendatuna mõjult ekvivalentse kahe võrdse vastassuunas mõjuva tungiga, mis on rakendatud nendes sõlmedes, mida ühendavad liigsed vardad. Liigsete varraste võimalikeks nihutusteks võtame varraste lühenemised või pikenemised. Kasutades nüüd võimalike nihutuste lauset, saame võrrandid, kust määrame liigsete varraste pikenemise $\Delta l_r = y_r$. Siis annab Hooke'i seadus varraste koormised järgnevalt:

$$y_r = \frac{Y_r l_r}{E F_r}, \qquad \sigma = E \varepsilon_r = E \frac{\Delta l_r}{l_r} = \frac{Y_r}{F_r}. \qquad (\text{IX})$$

§ 2. Temperatuuri muutusest tekkinud koormised staatiliselt määramatudes süsteemides.

Staatiliselt määratud süsteemide puhul ei oma temteratuuri-muutus tähtsust, kuna tugede reaktsioonid ja varraste koormised ei muutu; on ja neis süsteemides hoolitsetud selle eest, et varrad võiksid pikeneda või lüheneda, toed nihkuda jne.

Staatiliselt määramatude süsteemide puhul tingib aga temperatuuri-muutus sõrestiku varrastes lisakoormisi ja muudab tugede reaktsiooni. Eriti tunduvat mõju avaldab temperatuuri-muutus võlvidele, kutsudes sageli esile väga suuri pingeid /3/.

Oletame, et sõrestike materjal on isotroopne, nii et ühtlane temperatuuri tõus ei tingi purunemisi. Loeme elastsusmooduli sõltumatuks temperatuurist. Siis saab temperatuuri muutumise mõju sõrestikule arvestada järgnevalt: 1) lahendame geomeetrilise ülesande - eraldame sõrestikust liigsed toed ja leiame temperatuuri muutusest tingitud nihutused liigsetele tugedele toetuvates sõlmedes; 2) lahendame mehhaanika ülesande - rakendame sõrestikule lisatungid, et uues olukorras hoida liigseile tugedele toetuvaid sõrestiku sõlmi liikumatutena. Need lisatungid ongi liigsete tugede lisareaktsioonid, mida on esile kutsunud temperatuuri muutus.

Geomeetrilist ülesannet on võimalik lahendada ka staatika vahenditega: oletame, et sõrestikule on rakendatud lisaks välistungid, mis kutsuvad esile just niisugused varraste pikkuste muutused, nagu seda tingib uuritav temperatuuri muutus. Need on fiktiivsed välistungid suurusega $EF\alpha t$, kus F on varda ristlõike pindala, α on paisumistegur ja t on temperatuuri muutus. Temperatuuri tõusul loeme tungi $EF\alpha t$ venitavaks, temperatuuri langusel aga suruvaks tungiks, Eeldame seejuures, et sõrestiku varrasteks on konstantse ristlõike-pindalaga sirged vardad, millede temperatuur muutub ühtlaselt, (Kui sõrestiku vardad ei ole sirged või omavad muutuvat ristlõiget või pole temperatuur kõikjal sama, siis tuleb sõrestik jagada lõpmatult väikesteks elementideks ja rakendada igale elemendile tungid $EF\alpha t$, mis muutuvad võrdeliselt elemendi pindalaga ja elemendi temperatuuri muutusega). Nüüd võime kasutada kõiki mehhaanika seadusi toereaktsioonide ja koormiste määramiseks. Kõigist sel teel arvutatud pingetest lahutame fiktiivsest välistungist $P^*=EF\alpha t$ tingitud pinged, mis avalduvad kujul:

$$\sigma^* = \frac{P^*}{F} = E\alpha t.$$

Sõrestiku punktide nihkeid temperatuuri muutudes loeme v õ i m a l i k e k s n i h e t e k s. Varraste pikenemine avaldub siis kujul:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + l\alpha t = \frac{l}{EF}(P + EF\alpha t) = \frac{l}{EF}(P+P^*), \qquad (\overline{X})$$

kus $P^*=EF\alpha t$. $\qquad (\overline{XI})$

Nagu nähtub viimasest võrdusest P^* ei sõltu sõrestiku koormamise ja toetumise viisist.

Rakendame võimalike nihutuste printsiipi Maxwelli vastastikuse lause saamiseks. Vaatleme mingit sõrestikku, mis on koormatud välistungidega $P_1, P_2, P_3, \ldots$; olgu vastavad sõlmpunktide võimalikud nihutused $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$. Sõrestiku vajalike tugede reaktsioonid märgime $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ ja neile vastavad võimalikud nihutused $d_1, d_2, d_3, \ldots$. Liigsete tugede reaktsioonid olgu $R_1, R_2, R_3, \ldots$ ja neile vastavad võimalikud nihutused $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ Vajalike varraste koormised olgu $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ja vajalike varraste pikenemised vastavalt $x_1, x_2, x_3, \ldots$; liigsetes varrastes mõjuvad koormised $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ ja liigsete varraste pikenemised vastavalt $y_1, y_2, y_3, \ldots$

Teise koormiseolukorra puhul jäävad välistungid samadeks, temperatuuri tõusu tõttu on sõrestiku kuju pisut muutunud, mistõttu muutuvad pisut ka toereaktsioonid. Välistungidele lisame fiktiivsed tungid, et leida temperatuuri tõusu tõttu vardais tekkivaid lisapingeid. Teise koormiseolukorra puhul kasutame samu tähiseid kui esimese koormiseolukorra puhul, lisades neile vaid apostroofi. Esimese tungide süsteemi ja teisele tungide süsteemile vastavate nihutuste puhul saame võimalike nihutuste printsiibi põhjal:

$$\sum P_i \delta_i' + \sum Q_j d_j' + \sum R_k \Delta_k' - \sum X_e x_e' - \sum Y_n y_n = 0. \qquad (XII)$$

Teise tungide süsteemi ja esimesele tungide süsteemile vastavate nihutuste puhul saame analoogiliselt:

$$\sum P_i' \delta_i + \sum Q_j' d_j + \sum R_k' \Delta_k - \sum X_e' x_e - \sum Y_n' y_n = 0, \qquad (XIII)$$

kus

$$\begin{aligned} P_i' &= P_i + P_i^*, & R_k' &= R_k + R_k^*, \\ Q_j' &= Q_j + Q_j^*, & X_e' &= X_e + X_e^*, \\ & & Y_n' &= Y_n + Y_n^*. \end{aligned} \qquad (XIV)$$

Siin esinevad P_i^*, Q_j^*, R_k^*, X_e^* ja Y_n^* on temperatuuri muutusest tingitud lisatungid ja lisakoormused. Asendades neid avaldisi võrdusse (XIII), saame:

$$\sum P_i \delta_i + \sum P_i^* \delta_i + \sum Q_j d_j + \sum Q_j^* d_j + \sum R_k \Delta_k + \sum R_k^* \Delta_k -$$
$$- \sum X_e x_e - \sum X_e^* x_e - \sum Y_n y_n - \sum Y_n^* y_n = 0. \qquad (XV)$$

Teisele tungide süsteemile vastavad nihutused kirjutame kahe nihutuse summana, kusjuures neis summades esinevad liidetavad δ_i^*, d_j^*, Δ_k^*, x_e^* ja y_n^* eeldame tingitutena temperatuuri muutusest:

$$\begin{aligned} \delta_i' &= \delta_i + \delta_i^*, & \Delta_k' &= \Delta_k + \Delta_k^*, \\ d_j' &= d_j + d_j^*, & x_e' &= x_e + x_e^*, \\ & & y_n' &= y_n + y_n^*. \end{aligned} \qquad (\mathrm{XVI})$$

Asetades need suurused esimese tungide süsteemi töövõrrandisse (XII), saame:

$$\sum P_i \delta_i + \sum P_i \delta_i^* + \sum Q_j d_j + \sum Q_j d_j^* + \sum R_k \Delta_k + \sum R_k \Delta_k^* - \\ - \sum X_e x_e - \sum X_e x_e^* - \sum Y_n y_n - \sum Y_n y_n^* = 0. \qquad (\mathrm{XVII})$$

Korraldades võrrandite (XVII) ja (XV) liikmeid, saame nad kujul:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum P_i \delta_i + \sum Q_j d_j + \sum R_k \Delta_k - \sum X_e x_e - \sum Y_n y_n = \\ &= \sum X_e x_e^* + \sum Y_n y_n^* - \sum P_i \delta_i^* - \sum Q_j d_j^* - \sum R_k \Delta_k^* \;; \\ &\sum P_i \delta_i + \sum Q_j d_j + \sum R_k \Delta_k - \sum X_e x_e - \sum Y_n y_n = \\ &= \sum X_e^* x_e + \sum Y_n^* y_n - \sum P_i^* \delta_i - \sum Q_j^* d_j - \sum R_k^* \Delta_k . \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{XVIII})$$

Et võrduste vasakud pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka nende paremad pooled; seepärast

$$\sum X_e x_e^* + \sum Y_n y_n^* - \sum P_i \delta_i^* - \sum Q_j d_j^* - \sum R_k \Delta_k^* = \\ = \sum X_e^* x_e + \sum Y_n^* y_n - \sum P_i^* \delta_i - \sum Q_j^* d_j - \sum R_k^* \Delta_k . \qquad (\mathrm{XIX})$$

Et

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{X_e l_e}{EF_e}, & x_e^* &= \frac{X_e^* l_e}{EF_e}, \\ y_n &= \frac{Y_n l_n}{EF_n}, & y_n^* &= \frac{Y_n^* l_n}{EF_n}. \end{aligned} \qquad (\mathrm{XX})$$

Siis saadud võrrandisse asendades saame:

$$\sum X_e X_e^* \frac{l_e}{EF_e} + \sum Y_n Y_n^* \frac{l_n}{EF_n} - \sum P_i \delta_i^* - \sum Q_j d_j^* - \sum R_k \Delta_k^* =$$

$$= \sum X_e^* X_e \frac{l_e}{EF_e} + \sum Y_n^* Y_n \frac{l_n}{EF_n} - \sum P_i^* \delta_i - \sum Q_j^* d_j - \sum R_k^* \Delta_k .$$

Sarnaste liikmete koondamisel ja (-1)-ga korrutamise järele saame:

$$\sum P_i \delta_i^* + \sum Q_j d_j^* + \sum R_k \Delta_k^* =$$

$$= \sum P_i^* \delta_i + \sum Q_j^* d_j + \sum R_k^* \Delta_k . \qquad (XXI)$$

Sõnastatult tähendab see, et välistungide töö temperatuuri muutumisel on võrdne temperatuuri muutusest tingitud lisa-toereaktsioonide ja fiktiivsete välistungide tööga sõrestiku sõlmede võimalikul nihutusel.

Eeldades, et välistungide ja vajalike toereaktsioonide rakenduspunktid temperatuuri muutumisel ei nihku, s.t.

$$\delta_i^* = 0 \text{ ja } \quad d_j^* = 0,$$

ning fiktiivsed välistungid ja vajalike tugede reaktsioontungide muutus temperatuuri muutumisel on võrdne nulliga, s.t.

$$P_i^* = 0 \text{ ja } \quad Q_j^* = 0.$$

Nüüd saame võrramdist (XXI), et

$$\sum R_k \Delta_k^* = \sum R_k^* \Delta_k . \qquad (XXII)$$

Kui ainult ühe liigse toereaktsiooni m rakenduspunkt temperatuuri muutumisel nihkus ning teised jäid paigale ja ainult ühe toereaktsiooni R_r suurus muutus temperatuuri muutusel, siis viimati kirjutatud võrdus taandub võrduseks:

$$R_m \Delta_m^* = R_r^* \Delta_r ,$$

kust

$$\frac{R_m}{R_r^*} = \frac{\Delta_r}{\Delta_m^*} .$$

Kui nüüd veel võtta $R_m = R_r^*$, siis saame, et $\Delta_r = \Delta_m^*$.

Sõnastatult tähendab see võrdus järgmist:

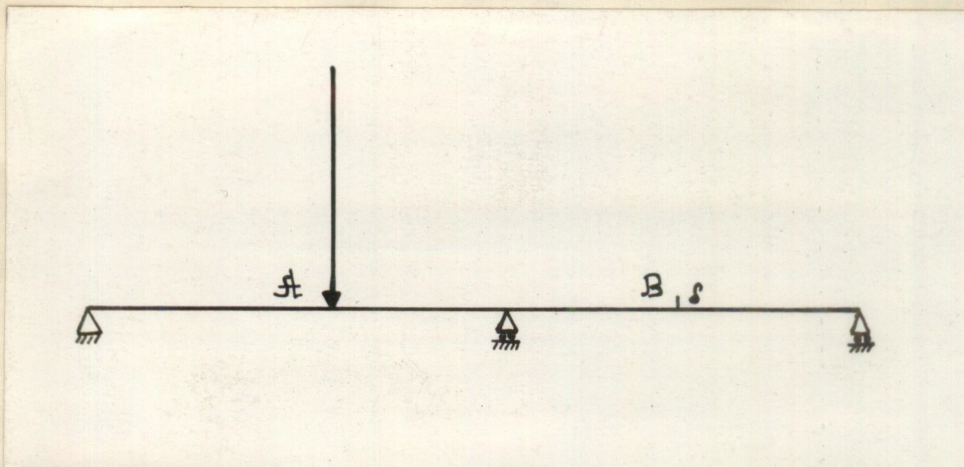
kui mingis sõlmes rakendatud toereaktsioon $\mathfrak{R}_r$ muutus temperatuuri muutumisel mingis teises sõlmes m rakendatud toereaktsiooni $\mathfrak{R}_m$ võrra, siis sõlme m nihutus temperatuuri muutumisel on võrdne sõlme r nihutusega toereaktsiooni $\mathfrak{R}_r$ mõjul.

Tulemus on, nagu näeme, Maxwelli vastastikuse lause konkreetsel erijuhul.

IV Illustreerivaid näiteid Maxwelli lause juurde.

1. Olgu antud tala k o l m e l toel. See tala on staatiliselt määramatu. Olgu mingis punktis A rakendatud koondtung P ; see tingib kõikjal tala teatava läbipainde, väljaarvatud tugede kohtadel. Nõutagu leida punktis B mõjuvat tungi x , kui on teada, et ta tekitab kohal A läbipainde δ'. Mõõdame vastava seadeldise abil tala läbipainde tungi A mõjul kohal B , olgu see δ. Maxwelli vastastikuse lause abil saame siis arvutada punktis B mõjuva tungi x . (Joonis 2).

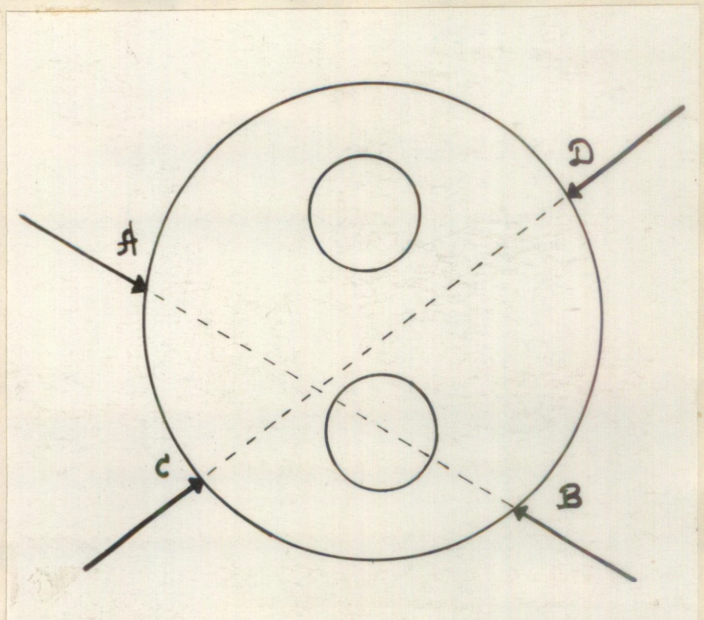
$$P \cdot \delta' = x \cdot \delta , \qquad x = P \cdot \frac{\delta'}{\delta} .$$



Joonis 2.

2. Maxwelli vastastikuse lause kehtib ka plaatide ja koorikute koormamisel koondtungidega. Rakendame mingis plaadi või kooriku punktis A tungi P, siis tingib see plaadi või kooriku punkti B läbipainde δ. Möötes ära selle läbipainde δ, saame nagu eelneva näite puhul määrata punktis B mõjuva tungi, mis tingib punktis A läbipainde δ'.

3. Võtame mingi metalldetaili ja rakendame talle mingit sirget AB mööda kaks võrdset ja vastassuunalist tungi P (Joonis 3). Detail deformeerub, ta läbilõike muutus mingis teises suunas CD olgu δ. Võrdseid ja vastassuunulisi tunge P sirgel CD detailile rakendades saame Maxwelli lause põhjal AB sihis deformatsiooni, mis on võrdne δ-ga.



Joonis 3.

4. Samale metalldetailile ühtlase rõhu $P \frac{kg}{cm^2}$ rakendamisel muutub detaili ruumala ja ta deformeerub sirge AB suunas Δl võrra. Rakendame nüüd sirge AB suunas detaili punktides A ja B kaks võrdset ja vastassuunalist tungi $P\,kg$. Tungide mõjul keha deformeerub, pikkus AB muutub ja muutub ka detaili ruumala ΔV võrra. Maxwelli vastastiluse lause järgi lõigu AB pikkuse muutus ühtlase rõhu $P \frac{kg}{cm^2}$ mõjul on võrdne detaili ruumala muutusega, kui sirge AB sihis detaili pinnal rakendame

kaks võrdset ja vastassuunalist tungi P_{kg}. Mõõtes ruumala muutuse ΔV, saame Maxwelli lause põhjal detaili ristlõike muutuse:

$$\Delta l = \Delta V.$$

V Maxwelli lause kasutamise rakenduslikke näiteid.

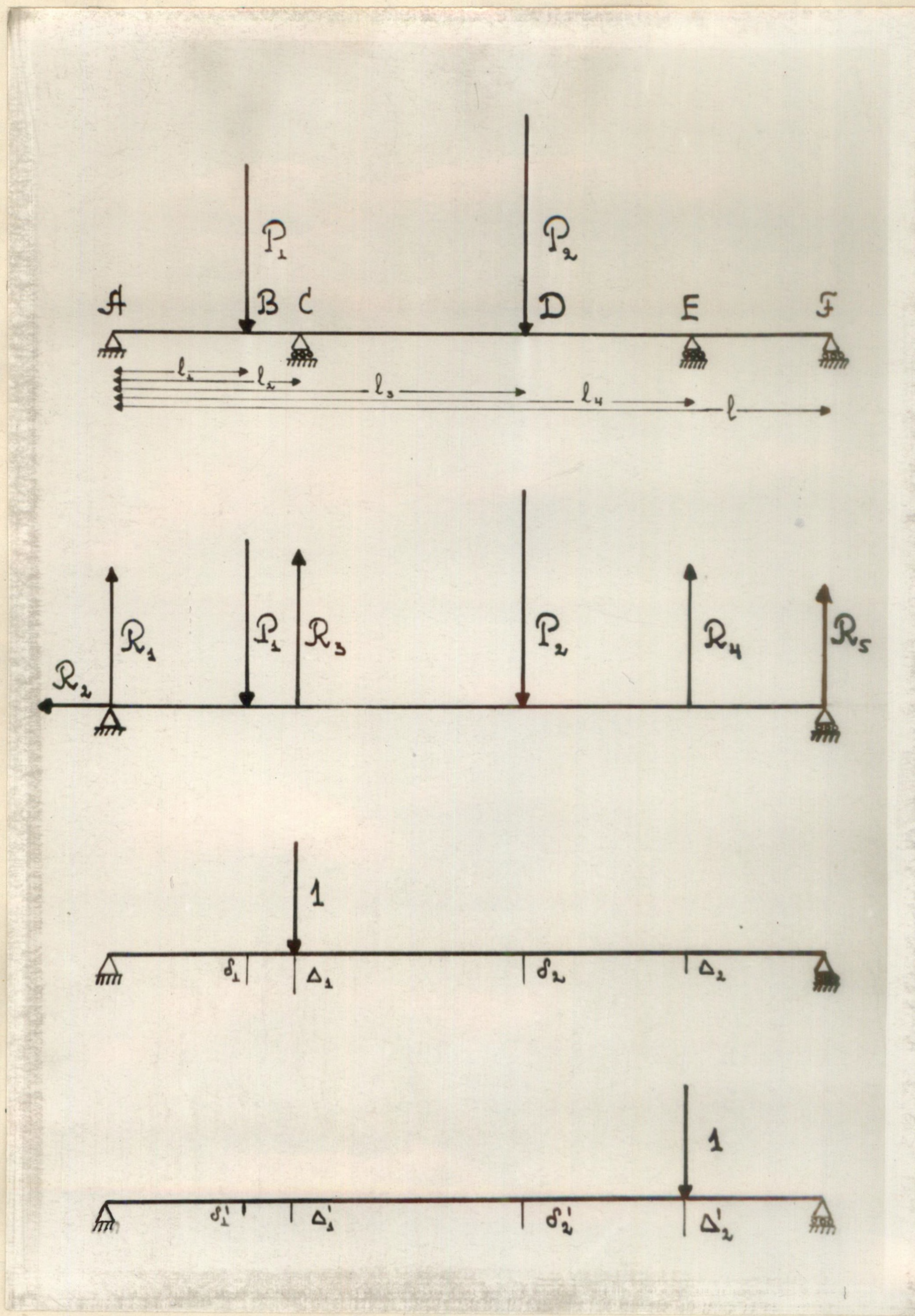
Näide 1.

Tala pikkusega l toetub neljale toele, milledest üks (A) on seotud liikumatult talaga, ülejäänud kolm aga võimaldavad talal nihkuda. Tala on koormatud punktides B ja D kahe koondtungiga P_1 ja P_2 (joonis 4). Leida tugede reaktsioonid.

Otsitavaid reaktsioone on antud juhul viis: R_1 ja R_2 kuuluvad toe A juurde, ülejäänud kolm R_3, R_4 ja R_5 tugedele C, E ja F. Staatika põhiseosed võimaldavad määrata vaid kolm tundmatut, seega esineb siin kaks liigset tundmatut, milledeks võtame tugede C ja E reaktsioonid R_3 ja R_4. Tungide projektsioonide jaoks saame kaks tingimust, tungi momendi jaoks kolmanda tingimuse:

$$\begin{cases} R_2 = 0, \\ R_1 - P_1 + R_3 - P_2 + R_4 + R_5 = 0, \\ P_1 l_1 - R_3 l_2 + P_2 l_3 - R_4 l_4 - R_5 l = 0. \end{cases}$$

Rakendades Maxwelli vastastikuse lauset, leiame võrrandid ülejäänud tundmatute määramiseks. Antud koormiseolukorra võtame esimeseks, asendame vaid tugede C ja E mõju välistungidega R_3 ja R_4.



P1
P2
A
B
C
D
E
F
l1
l2
l3
l4
l
R1
R2
P1
R3
P2
R4
R5
1
δ1
Δ1
δ2
Δ2
1
δ'1
Δ'1
δ'2
Δ'2

Joonis 4.

Teise tungide süsteemi saame, kui eemaldame välistungid ja liigsed toereaktsioonid ning rakendame punktis C ühiktungi, mille tõttu varras kaardub. Läbipainded, mis vastavad punktidele B, C, D ja E olgu märgitud δ_1, Δ_1, δ_2 ja Δ_2 .

Kolmanda tungide süsteemi saame, kui eemaldame välistungid ja liigsed toereaktsioonid ning rakendame punktis ühiktungi. Läbipainded vastavalt punktides B, C, D ja E olgu δ_1', Δ_1', δ_2' ja Δ_2' . Maxwelli vastastikuse lauset rakendades saame kaks võrrandit:

$$P_1\delta_1 - R_3\Delta_1 + P_2\delta_2 - R_4\Delta_2 = 0,$$

$$P_1\delta_1' - R_3\Delta_1' + P_2\delta_2' - R_4\Delta_2' = 0.$$

Saadud viis võrrandit kirjutame kujul

$$R_2 = 0,$$
$$R_1 + R_3 + R_4 + R_5 = P_1 + P_2,$$
$$R_3 l_2 + R_4 l_4 + R_5 l = P_1 l_1 + P_2 l_3,$$
$$R_3\Delta_1 + R_4\Delta_2 = P_1\delta_1 + P_2\delta_2,$$
$$R_3\Delta_1' + R_4\Delta_2' = P_1\delta_1' + P_2\delta_2'.$$

Lahendades selle süsteemi Cramer'i reegli järgi saame tundmatute reaktsioonide jaoks avaldised:

$$R_3 = \frac{\begin{vmatrix} P_1\delta_1 + P_2\delta_2 & \Delta_2 \\ P_1\delta_1' + P_2\delta_2' & \Delta_2' \end{vmatrix}}{\Delta_1\Delta_2' - \Delta_1'\Delta_2} = \frac{\Delta_2'(P_1\delta_1 + P_2\delta_2) - \Delta_2(P_1\delta_1' + P_2\delta_2')}{\Delta_1\Delta_2' - \Delta_1'\Delta_2},$$

$$R_4 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta_1 & P_1\delta_1 + P_2\delta_2 \\ \Delta_1' & P_1\delta_1' + P_2\delta_2' \end{vmatrix}}{\Delta_1\Delta_2' - \Delta_1'\Delta_2} = \frac{\Delta_1(P_1\delta_1' + P_2\delta_2') - \Delta_1'(P_1\delta_1 + P_2\delta_2)}{\Delta_1\Delta_2' - \Delta_1'\Delta_2}.$$

$$R_5 = \frac{1}{l}(P_1 l_1 + P_2 l_3 - R_3 l_2 - R_4 l_4).$$

$$R_1 = P_1 + P_2 - R_3 - R_4 - \frac{1}{l}(P_1 l_1 + P_2 l_3 - R_3 l_2 - R_4 l_4).$$

Välistungide ja toereaktsioonide rakenduspunktid on teada, tala läbipaine ühiktungi mõjul samuti; seega olemegi otsitavad suurused avaldanud tuntud suuruste kaudu.

Mitme liigse tundmatu määramine vastastikuse lause abil on küllaltki lihtne seetõttu, et Maxwelli lause abil saadud võrrandid sisaldavad igaüks vaid ühte liigset tundmatut. Võrrandite koostamisel tuleb aga hoolitseda selle eest, et liigsed tundmatud tungid oleksid valitud nii, et nad ei kutsuks esile mingile teisele liigsele tundmatule vastavaid nihutusi /3/.

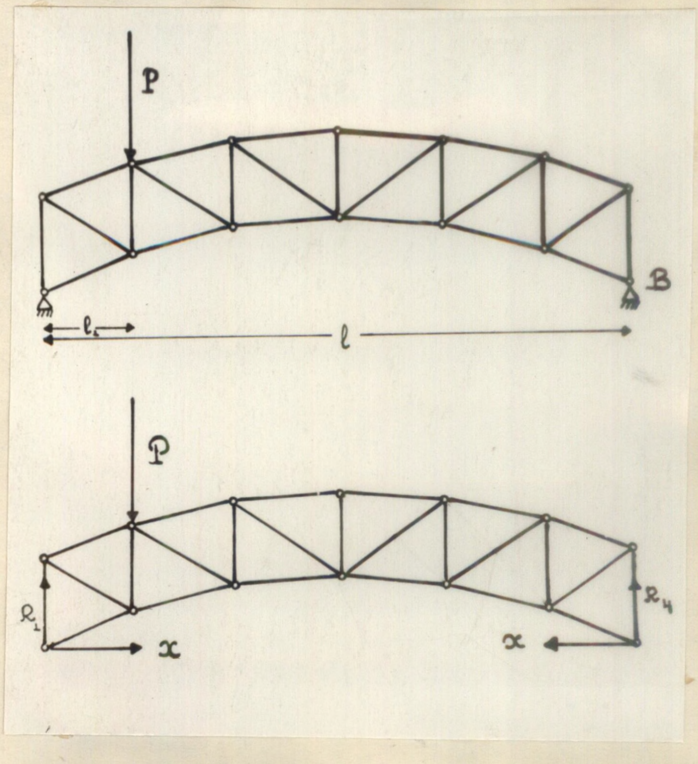
Näide 2.

Vaatleme staatiliselt määramatut sõrestikku kahel sõrestikuga liikumatult kinnitatud toel. Mõjugu koormis P mingis sõrestiku ülemises sõlmes vertikaalselt. Leida toereaktsioonid.

Toereaktsioonide horisontaalsed komponendid on antud juhul võrdsed. Esineb neli otsitavat toereaktsiooni, seega üks liigne tundmatu, milleks võtame toereaktsiooni horisontaalse komponendi

$$x = R_2 = R_3$$

(Joonis 5). Leiame selle komponendi Maxwelli vastastikuse lause abil.



Joonis 5.

Rakendame sõrestiku ülemises sõlmes tungi $\mathcal{P}$ ja leiame sõlmede nihutuste horisontaal- ja vertikaalkomponendid.

Esimeseks tungide süsteemiks võtame tungi $\mathcal{P}$ ja toetuspunktides $\mathcal{A}$ ning $\mathcal{B}$ rakendatud liigse toereaktsiooni $\mathcal{X}$.

Teise tungide süsteemi saame, kui rakendame toetuspunktides $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kaks võrdset ja vastassuunalist ühiktungi. Muutugu tugede $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kaugus seejuures Δ võrra, tungi $\mathcal{P}$ rakenduspunkti vertikaalne komponent δ võrra. Rakendades vastastikuse lauset saame;

$$-\mathcal{X}\cdot\Delta + 1\cdot\delta = 0,$$

mis annab liigse toereaktsiooni jaoks valemi:

$$\mathcal{X} = -\frac{\delta}{\Delta}.$$

Ülejäänud tundmatud määrame tasakaalutingimustest

$$\mathcal{R}_1 - \mathcal{P} + \mathcal{R}_4 = 0,$$
$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \mathcal{X},$$
$$\mathcal{P}\cdot l_1 - \mathcal{R}_4 l = 0,$$

kust saame

$$\mathcal{R}_4 = \frac{l_1}{l}\mathcal{P},$$
$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{P} - \mathcal{R}_4 = \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)\mathcal{P}.$$

Vaatleme tungi $\mathcal{P}$ rakendatuna kord ühele, kord teisele, kolmandale jne. sõrestiku ülemisele sõlmele. Erineva rakenduspunkti puhul on sõlmede nihutused δ -d erinevad.

Vaatleme sama sõrestikku, muutes toe $\mathcal{B}$ liikuvaks ja ühendades sõlmed $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ vardaga, mille võtame liigseks ja milles valitsevat pinget määramegi. Erinevus eelneva sõrestikuga võrreldes seisneb selles, et tugipunktide $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ vaheline kaugus võib nüüd muutuda.

Eemaldame liigse varda ja asendame ta kahe võrdse kuid vastassuunalise sõlmedes A ja B rakendatud tungidega X . Sõlmede A ja B vaheline kaugus muutub seejuures $\frac{Xl}{EF}$ võrra, kus l on varda AB pikkus, F on varda ristlõike pindala ja E on elastsusmoodul.

Esimese tungide süsteemi puhul mõjub tung P mingis ülemises sõlmes ja tung X sõlmedes A ja B .

Teise tungide süsteemi puhul asendame tungi X ühiktungiga, seega lähenevad sõlmed A ja B Δ' võrra, tungi P rakenduspunkt nihkub δ' võrra. Maxwelli vastastikuse lause abil saame:

$$-P\delta' + X\Delta' = 1\cdot\frac{Xl}{EF}$$

kust

$$X = \frac{\delta' P}{\Delta' + \frac{l}{EF}}\,, \qquad \sigma = \frac{X}{F} = \frac{\delta' P}{\Delta' F + \frac{l}{E}}\,.$$

Saime liigses vardas mõjuva tungi ja pinge.

Näide 3.

Sõrestik asub kahel toel A ja B liikumatult ja on koormatud punktis Y (mis pole sõlmpunkt) tungiga P (joonis 6). Sõrestik koosneb kaheksast vardast, mis on ühendatud kuues sõlmes. Üks puuduv varras (BF või EC) on asendatud ühe liigse toereaktsiooniga, et hoida sõrestiku kuju muutumatuna. Olgu ülesandeks leida varda EF koormis.

Esimese tungide süsteemi puhul asendame varda EF mõju kahe võrdse ja vastassuunalise tungiga X .

Teise tungide süsteemi puhul eemaldame tungi P ja rakendame sõlmedes E ja F kaks võrdset ja vastassuunalist ühiktungi. Paindugu seejuures varras AD punktis Y läbi δ võrra ja lähenegu sõlmed E ja F üksteisele Δ võrra. Maxwelli vastastikuse lauset kasutades saame siis järgmise võrrandi:

$$-P\delta + x\Delta = 1\cdot\Delta',$$

kus Δ' on sõlmede E ja F lähenemine tungi x mõjul. See avaldub kujul $\Delta' = \frac{xl}{EF}$, kus l on varda EF pikkus, F on varda ristlõike pindala.

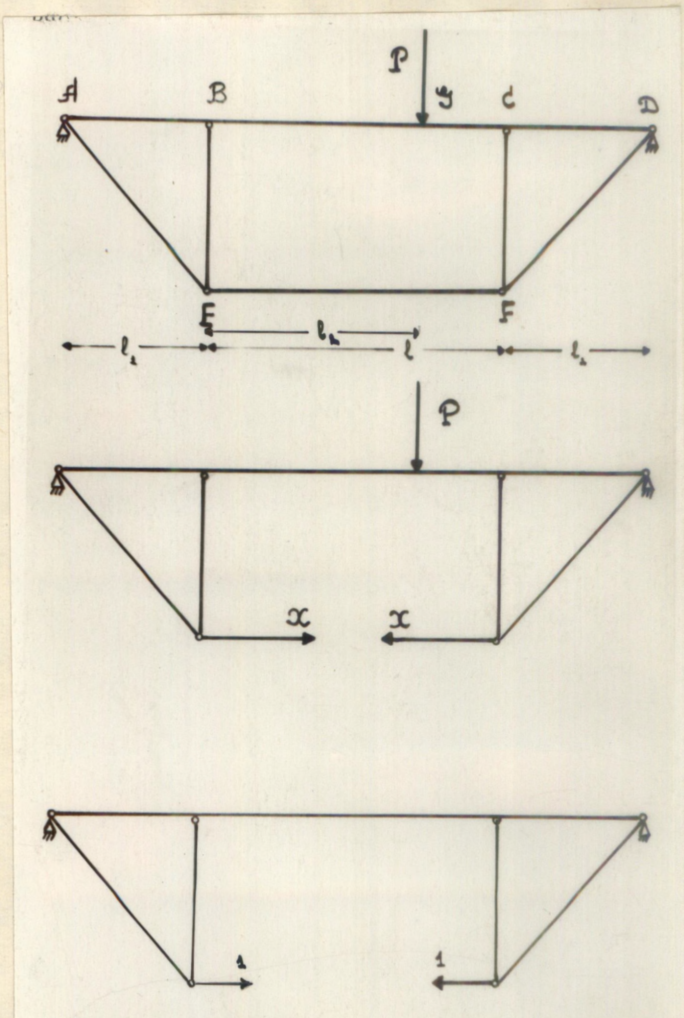
ja E materjali elastsusmoodul. Viimati kirjutatud võrdus annab

$$x = \frac{P\delta}{\Delta - \frac{l}{EF}}$$

seepärast

$$\sigma = \frac{x}{F} = \frac{P\delta}{\Delta F - \frac{l}{E}}.$$

Saime liigses vardas mõjuva tungi ja pinge avaldised antud ja tuntud suuruste kaudu, kuna läbipaine δ ja sõlmede E ning F lähenemine on leitavad tugevusõpetuses tuletatavate valemite järgi.



Joonis 6.

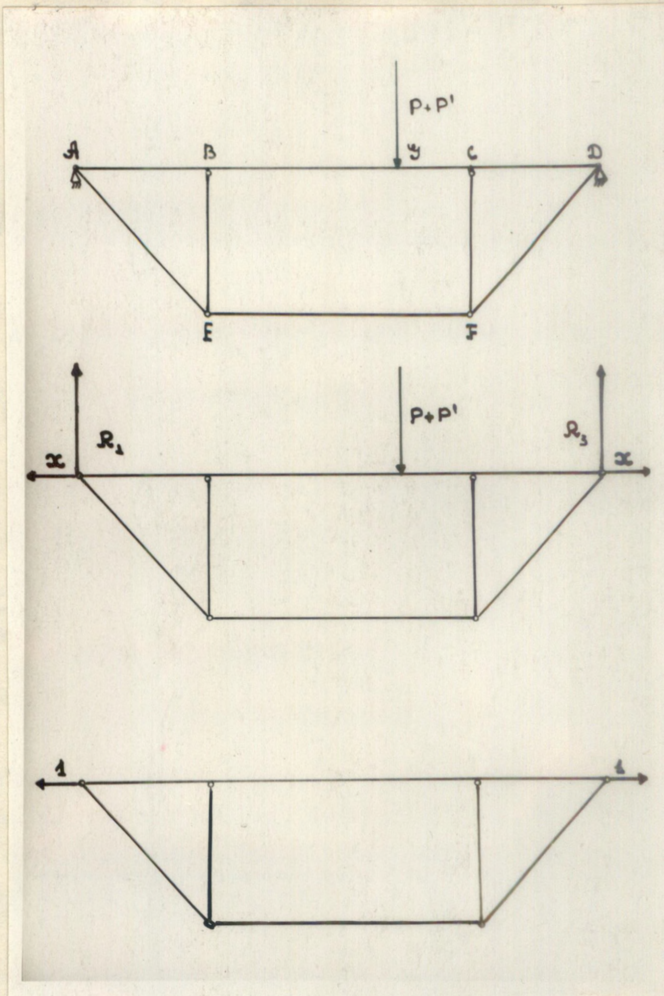
Vaatleme lõpuks temperatuuri muutusest tingitud toereaktsioone ja pingeid vaadeldud sõrestikus. Oletame, et temperatuur kogu sõrestikus muutus ühtlaselt t kraadi võrra. Sõrestiku punktis $\mathcal{Y}$ mõjub tung $\mathcal{P}$ (joonis 7). Leiame toereaktsioonid.

Võtame liigseks tundmatuks toe $\mathcal{A}$ reaktsiooni $\mathcal{R}_2$. Lisame välistungidele fiktiivse tungi $\mathcal{P}' = EF\alpha t$. Saame kolm tasakaalutingimust toereaktsioonide määramiseks:

$$\mathcal{R}_1 - (\mathcal{P} + EF\alpha t) + \mathcal{R}_3 = 0,$$

$$\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_4 = 0,$$

$$-(\mathcal{P} + EF\alpha t)(l_2 + l_1) + \mathcal{R}_3(2l_1 + l) = 0.$$



Joonis 7.

Maxwelli vastastikuse lauset rakendades saame veel ühe võrrandi. Esimese tungide süsteemi puhul rakendame tungi $\mathcal{P} + EF\alpha t$ ja toereaktsioonid $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4$, toe $\mathcal{A}$ teeme liikuvaks, asendades toereaktsiooni $\mathcal{R}_2$ tungiga $\mathcal{X}$. Tugede $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ reaktsioonide horisontaalsed komponendid on võrdsed, seega mõjub ka sõlmes $\mathcal{D}$ tung $\mathcal{R}_4 = \mathcal{X}$.

Teise tungide süsteemi puhul asendame tungi $\mathcal{X}$ ühiktungiga ja eemaldame välistungi $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$.

Maxwelli vastastikuse lauset antud juhul rakendades saame:

$$x\Delta' = 1\cdot\Delta\,,$$

kust

$$x = \frac{\Delta}{\Delta'}\,.$$

Siin on Δ toetuspunkti A nihutus tungide x ja $P+P'$ mõjul, Δ' aga punkti A nihutus ühiktungi mõjul. Saadud võrrandeist määrame otsitavad toereaktsioonid:

$$R_2 = R_4 = \frac{\Delta}{\Delta'}\,,$$

$$R_3 = \frac{l_2+l_1}{2l_1+l}\,(P+EF\alpha t),$$

$$R_1 = P + EF\alpha t - R_3 =$$

$$= \frac{l+l_1-l_2}{2l_1+l}\,(P+EF\alpha t).$$

Erijuhul, kui $l_2 = \frac{1}{2}l$, saame:

$$R_1 = \frac{l+l_1-\frac{1}{2}l}{2l_1+l}\,(P+EF\alpha t) = \frac{1}{2}\,(P+EF\alpha t),$$

$$R_3 = \frac{\frac{1}{2}l+l_1}{2l_1+l}\,(P+EF\alpha t) = \frac{1}{2}\,(P+EF\alpha t).$$

Saime toereaktsioonid antud ja tuntud suuruste kaudu.

VI. Kokkuvõte:

Käesolevas töös käsitletakse Maxwelli vastastikuse lauset, mille Maxwell avaldas 1864.a., lahendades selle abil esimesena tasapinnalise sõrestiku kujumuutusprobleemi. Samadele tulemustele jõudsid hiljem mitmed teised teadlased erinevatel meetoditel. Maxwelli vastastikuse lause on töös tuletatud võimalike nihutuste printsiibi abil, nagu seda tegi O. Mohr.

Töös on ühenduses ta teemaga käsitletud ka üldiseid aluseid staatiliselt määramatute sõrestikkude ja võimalikkude nihutuste printsiibi kohta. Töös tuletatakse Maxwelli vastastikuse lause ka ühel konkreetsel erijuhul, nimelt kui temperatuuri muutus tingib staatiliselt määramatus sõrestikus lisakoormisi. Töö sisaldab mõningaid illustreerivaid ja rakenduslikke näiteid Maxwelli vastastikuse lause rakendamise kohta.

Kasutatud kirjandus.

1. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 4, Heft 4. Leipzig und Berlin.
2. H. Müller-Breslau "Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen." Leipzig 1924.
3. В. Л. Кирпичёв "Лишние неизвестные в строительной механике." ГТТИ М.-Л. 1934.
4. Gino Loria "Storia delle matematiche." Vol. XI. Torino 1933.
5. С. П. Тимошенко "Курс сопротивления материалов." М.-Л. 1931.
6. А. Н. Митинский "Статически неопределимые системы." Л. 1938.
7. В. Л. Кирпичёв "Сопротивление материалов - 2." М.-Л. 1923.
8. Справочник по технической механике. Ред. акад. А. Н. Динник. Гостехиздат М.-Л. 1949.

Tartus 5. mail 1954.a.

N. Neske.

Uuhart Rägo

14. maie 1954.a.