Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1908.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg).

Ueber die Bestimmung der Constanten von stark gedämpften Horizontalpendeln.

Von

Fürst B. Galitzin (Golicyn).

Bei Anwendung von Horizontalpendeln bei seismometrischen Beobachtungen ist es unbedingt nothwendig, zum Zweck der Auswerthung der erhaltenen Seismogramme, die Constanten des Pendels zu kennen.

Die Differentialgleichung der Bewegung eines Horizontalpendels, bei Abwesenheit irgend welcher Bodenerschütterung, lautet bekanntlich: №2197.

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

θ bedeutet den dem Zeitmoment t entsprechenden Winkelausschlag des Pendels.

ε und n sind die zwei Constanten, welche die Eigenschaften des Pendels charakterisieren.

ε ist die Dämpfungsconstante des Pendels, während n von seiner Eigenperiode T_0 bei Abwesenheit irgend welcher Dämpfung unmittelbar abhängt, und zwar ist

$$n = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Bedeute nun v das Dämpfungsverhältniss des Pendels, d. h. das Verhältniss zweier auf einander folgenden Maximalausschläge des Pendels (unabhängig vom Vorzeichen derselben) und Λ das entsprechende logarithmische Dekrement, so wird

$$\Lambda = \mathrm{Log}_{10}\, v = \mathrm{Log}_{10} \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}}.$$

Ist nun $\varepsilon < n$, so wird die Pendelbewegung eine periodische sein, wobei die entsprechende Periode T von der Dämpfungsconstante ε abhängig ist und zwar wird

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}}.$$

In diesem Falle lassen sich bekanntlich die gesuchten Pendelconstanten in sehr einfacher Weise durch Λ und T ausdrücken.

Es wird nämlich [1])

$$\varepsilon = 4,6052 \frac{\Lambda}{T} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

und

$$n = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 + 0,53720\,\Lambda^2} \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Wenn das Pendel verhältnissmässig schwach gedämpft ist, so lassen sich das logarithmische Dekrement Λ und die Periode T mit Leichtigkeit experimentell bestimmen. In diesem Falle bietet die Bestimmung der Constanten ε und n keine Schwierigkeit.

Für eigentliche seismometrische Beobachtungen ist es aber, wie ich es anderweitig gezeigt habe, in hohem Maasse wünschenswerth, den entsprechenden Horizontalpendeln eine sehr starke Dämpfung zu verleihen und sogar an die Grenze der Aperiodicität ($\varepsilon = n$) vorzuschreiten.

Ist aber das Dämpfungsverhältniss v schon gross geworden, so lässt sich weder Λ, noch T direct experimentell bestimmen.

Was die Constante n anbelangt, so könnte dieselbe freilich aus Λ und T bei schwacher Dämpfung noch berechnet werden. Ist aber eine starke Dämpfung schon einmal eingeführt, sei es eine Luft- oder magnetische Dämpfung, so hat man kein weiteres Criterium, um zu beurtheilen, ob n wirklich seinen Werth mit der Zeit nicht ändert.

Es wäre für die praktische Seismometrie äusserst wichtig, eine bequeme Methode zur Verfügung zu haben, nach der man die Constanten ε und n bei stark gedämpften und sogar aperiodischen Pendeln direct bestimmen könnte.

Die Bestimmung von ε und n lässt sich z. B. in folgender Weise durchführen, allein ist diese Bestimmungsweise etwas umständlich.

Wird das Horizontalpendel von seiner Ruhelage abgelenkt und die entsprechende Bewegungscurve $\theta = f(t)$ auf einer Registriertrommel, entweder optisch, oder mechanisch aufgeschrieben, so hängt die Form der erhaltenen Curve von den Werthen der Constanten ε und n unmittelbar ab. Es ist also die theoretische Möglichkeit geboten, aus der Curve der Eigenbewegung des stark gedämpften Pendels die Constanten ε und n zu bestimmen.

Man kann dazu verschiedene Methoden anwenden.

Ich habe z. B. dazu verschiedene Methoden benutzt, die sich auf die Ausmessung aequidistanter Ordinaten stützen.

1) Siehe z. B. meinen Aufsatz «Die electromagnetiche Registriermethode». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Liv. 1. p. 11 (1907).

Herr Orloff hat neulich [1]) ganz hübsche Formeln entwickelt, welche die Berechnung von ε und n in ziemlich einfacher Weise gestatten.

Herr Pomerantzeff hat den Fall eines aperiodischen Pendels behandelt [2]) und ein elegantes Criterium zur Beurtheilung der Grenze der Aperiodicität aufgestellt. Seine Methode erfordert aber die graphische Integrierung der entsprechenden Pendelcurve, infolgedessen ist sie etwas compliciert und zeitraubend.

Alle die hier erwähnten Methoden sind insofern unbequem, dass sie die Aufnahme und sehr genaue Ausmessung der Curve der Eigenbewegung des Pendels nöthig machen, was zuweilen ziemlich umständlich ist. Ausserdem treten in der Nähe der Grenze der Aperiodicität gewisse andere Schwierigkeiten auf.

Aus diesen Gründen war es wünschenswerth, nach einer anderen, bequemeren Methode zu suchen. Eine solche habe ich nun ausgebildet und experimentell geprüft; mag sie jetzt beschrieben werden.

Diese neue Methode erfordert keine Curvenaufnahmen und in dieser Hinsicht ist sie besonders einfach und bequem. Sie stützt sich auf die Anwendung eines aperiodischen Galvanometers als Registriervorrichtung [3]) und erfordert nur eine Zeitbestimmung und die Ermittelung des Verhältnisses zweier nach einander folgenden maximalen Ausschläge am Galvanometer, wozu nur ein Fernrohr mit Scala nöthig ist. Die Beobachtungen selber sind besonders einfach, da sie im Ganzen nur einige Secunden dauern; ausserdem erfordet die Bestimmung von ε und n keine weitläufigen Rechnungen. Diese Methode ist besonders geeignet für den Fall, wo das entsprechende Pendel nicht weit von der Grenze der Aperiodicität ist; ausserdem giebt sie ein sehr einfaches Criterium zur Beurtheilung, ob die Grenze der Aperiodicität überschritten ist oder nicht.

Zugleich liefert sie auch ein empfindliches Mittel, das betreffende Horizontalpendel wirklich auf die Grenze der Aperiodicität einzustellen, was bei anderen Methoden eine recht mühsame Sache ist.

Bei Anwendung von aperiodischen Pendeln ist es zweckmässig, um die Empfindlichkeit der Registrierung zu vermehren, die electromagnetische Registriermethode in Anwendung zu bringen. In diesem Fall ist es sehr wichtig, die betreffenden Horizontalpendel möglichst genau an die Grenze

1) Siehe die Protocolle der Sitzungen der Russischen Seismischen Commission (1908).

2) Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Livr. 1 (1908).

3) Siehe «Die electromagnetische Registriermethode». L. c.

der Aperiodicität ($\varepsilon = n$) einzustellen, da die zur Auswerthung der Seismogramme dienenden Formeln dann sehr viel an Einfachheit gewinnen und die Ableitung der wahren Amplitude der harmonischen Bodenschwankungen ganz einfache Rechnungen erfordert.

Für diesen Fall ist also die gleich zu beschreibende Methode besonders geeignet. Wird zugleich der den maximalen Ausschlägen des Galvanometers entsprechende grösste Ausschlag des Pendels θ_m gemessen, so lässt sich nicht nur ε und n, sondern auch der Uebertragungsfactor k der Pendelbewegung auf die Galvanometerbewegung unmittelbar bestimmen.

Denken wir uns nun eine kleine Spule an dem Pendelarm befestigt, die zwischen den Polen zweier fester, permanenter Magnete sich bewegen kann. Dieselbe sei mit einem aperiodischen D'Arsonval'schen Galvanometer verbunden, welches, wenn nöthig, in einer beliebigen Entfernung vom Pendel selbst sich befinden kann.

Bedeute φ den Winkelausschlag des Galvanometers, so muss φ bekanntlich folgender Differentialgleichung genügen:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1 \varphi' + n_1^2 \varphi + k\theta' = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

ε_1 und n_1 sind zwei Galvanometerconstanten.

Ich habe nun in meinem Aufsatz «Die electromagnetische Registriermethode» (l. c. § 2) gezeigt, dass es äusserst einfach ist, das Galvanometer genau an die Grenze der Aperiodicität ($\varepsilon_1 = n_1$) einzustellen, wenn die drei charakteristischen Constanten des Galvanometers (c_0, c_1 und c_2) bekannt sind. Dazu braucht man nur einen bestimmten Gesammtwiderstand des Stromkreises zu wählen.

Wir wollen also von hier aus annehmen, dass diese Aperiodicitätsgrenzbedingung erfüllt sei. Dann erhalten wir, statt Gleichung (4),

$$\varphi'' + 2n_1 \varphi' + n_1^2 \varphi + k\theta' = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

Die Constante n_1 lässt sich ebenso, wie beim Pendel, aus Schwingungsbeobachtungen bei schwacher Dämpfung bestimmen.

Bedeute T_1 die Eigenperiode des Galvanometers, bei Abwesenheit irgend welcher Dämpfung, so ist

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

Wir werden bei dieser Untersuchung annehmen, dass die Eigenperioden

des Galvanometers und Pendels (ohne Dämpfung) sich wenig von einander unterscheiden[1]).

Bedeute nun

$$\xi = \frac{n_1 - n}{n}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

so soll unsere Voraussetzung darauf hindeuten, dass ξ klein ist.

Die ganze Untersuchung werde ich durch Reihenentwickelungen durchführen unter Beibehaltung von Gliedern von der Ordnung ξ^2.

Was nun die Dämpfung des Pendels selbst anbelangt, so werde ich, um einen concreten Fall ins Auge zu fassen, voraussetzen, dass dieselbe durch eine kupferne Platte, die zwischen den Polen zweier kleinen hufeisenförmigen Magnete sich bewegt, bewerkstelligt ist. Durch Aenderung der Entfernung der einander gegenüberliegenden Pole kann die Stärke der Dämpfung passend reguliert werden.

Sind alle diese Anordnungen, die für die Anwendung der electromagnetischen Registriermethode unerlässlich sind, einmal getroffen, so bietet die Bestimmung von ε, n und k keine Schwierigkeiten mehr.

Es soll nun das Pendel, welches vorher in Ruhe war, einen plötzlichen, anfänglichen Anstoss bekommen, etwa durch Anziehung eines kleinen Elektromagneten. Die dadurch ertheilte Anfangsgeschwindigkeit des Pendels sei θ'_0.

In diesem Falle, wenn $\varepsilon < n$ ist, ergiebt sich aus der Differentialgleichung (1) folgender Ausdruck für θ:

$$\theta = \frac{\theta'_0}{\gamma} e^{-\varepsilon t} \operatorname{Sin} \gamma t, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

wo

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$$

gesetzt wird.

Der erste maximale Ausschlag des Pendels sei θ_m; derselbe findet zum Zeitmoment t_m statt, wo t_m die erste Wurzel der Gleichung

$$\operatorname{tang} \gamma t_m = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

ist.

Führen wir nun θ_m in die Gleichung (7) ein, so folgt

$$\theta = n e^{\varepsilon t_m} \theta_m \cdot e^{-\varepsilon t} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \gamma t}{\gamma} \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

1) Die Firma Hartmann und Braun liefert ausgezeichnete d'Arsonval'sche Galvanometer nach specieller Bestellung mit langen Eigenperioden von etwa 23 — 24 Secunden.

Das betreffende Horizontalpendel soll nun stark gedämpft sein, folglich muss γ klein sein.

Setzen wir dementsprechend

$$\mu = \frac{\gamma}{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

so ergiebt sich bis auf Glieder von der Ordnung μ^4

$$\varepsilon = n\left(1 - \frac{1}{2}\mu^2\right)$$

$$e^{\varepsilon t_m} = e\left(1 - \frac{1}{3}\mu^2\right)$$

$$\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{Sin}\,\gamma t = t\left\{1 - \frac{1}{6}\mu^2 n^2 t^2\right\}.$$

Wollen wir nun, statt t, eine neue Variable u einführen, nämlich

$$u = nt, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

dann nimmt die Gleichung (8) folgende definitive Form an:

$$\theta = \theta_m\, e\, u e^{-u}\left[1 + \mu^2\left\{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^2\right\}\right] \ldots\ldots\ldots (11)$$

Hieraus folgt

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = n\frac{d\theta}{du} = ne\theta_m\, e^{-u}\left[1 - u + \mu^2\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\}\right]. (12)$$

Wenden wir uns jetzt der Differentialgleichung der Galvanometerbewegung (5) zu.

Wollen wir in ihr ebenfalls die Variable u einführen und n_1 durch $n(1 + \xi)$ ersetzen[1]).

Dann folgt

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2(1 + \xi)\frac{d\varphi}{du} + (1 + \xi)^2\varphi + \frac{k}{n^2}\theta' = 0 \ldots\ldots\ldots (13)$$

Bringen wir in diese Gleichung den Werth von θ' aus (12) ein und integrieren dieselbe unter den Bedingungen, dass für $t = 0$ φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ beide

1) Siehe Formel (6).

gleich Null sind, so findet man nach ziemlich weitläufigen Rechnungen folgenden definitiven Ausdruck für φ.

$$\varphi = F(u) + \mu^2 F_1(u) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Hierin bedeuten:

$$F(u) = \frac{ke\theta_m}{n} e^{-u} u^2\left[\omega_0(u) + \omega_1(u)\, u\xi + \omega_2(u)\, u^2\xi^2\right] \ldots\ldots (15)$$

$$F_1(u) = \frac{ke\theta_m}{n} e^{-u} u^2\left[f_0(u) + f_1(u)\, u\xi + f_2(u)\, u^2\xi^2\right] \ldots\ldots\ldots (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_0(u) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}u \\ \omega_1(u) &= \quad\frac{1}{3} - \frac{1}{12}u \\ \omega_2(u) &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{40}u \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\left.\begin{aligned} f_0(u) &= \quad\frac{1}{6} - \frac{2}{9}u + \frac{1}{12}u^2 - \frac{1}{120}u^3 \\ f_1(u) &= -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}u - \frac{1}{30}u^2 + \frac{1}{360}u^3 \\ f_2(u) &= \quad\frac{1}{24} - \frac{1}{30}u + \frac{1}{120}u^2 - \frac{1}{1680}u^3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (18)$$

Wollen wir nun die zwei dem anfänglichen Anstoss des Pendels entsprechenden, auf einander folgenden maximalen Winkelausschläge des Galvanometers resp. durch φ_1 und φ_2 bezeichnen. Dieselben finden zu den Zeitmomenten t_1 und t_2 statt. Die entsprechenden Werthe von u seien durch u_{m_1} und u_{m_2} bezeichnet, wo diese u die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dF(u)}{du} + \mu^2\frac{dF_1(u)}{du} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

bedeuten.

Bedeute nun u_1 die erste, kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{dF(u)}{du} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

dann können wir

$$u_{m_1} = u_1 + \delta_1\mu^2$$

setzen.

Der Werth von δ_1 könnte eventuell aus der Gleichung (19) ermittelt werden; dies ist aber ganz überflüssig, da es uns nicht darauf ankommt die Momente t_1 und t_2 zu bestimmen, sondern die diesen Momenten entsprechenden maximalen Ausschläge des Galvanometers φ_1 und φ_2 zu ermitteln.

Für φ_1 finden wir nun bis auf Glieder von der Ordnung μ^4

$$\varphi_1 = F(u_1 + \delta_1 \mu^2) + \mu^2 F_1(u_1) = F(u_1) + \left(\frac{dF(u)}{du}\right)_{u=u_1} \cdot \delta_1 \mu^2 + \mu^2 F_1(u_1).$$

Daraus folgt, mit Rücksicht auf die Beziehung (20),

$$\varphi_1 = F(u_1) + \mu^2 F_1(u_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Wollen wir nun u_1 aufsuchen.

Aus der Gleichung (20) ergiebt sich folgender nach Potenzen von ξ geordneter Ausdruck für u_1:

$$u_1 = (3-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi + \frac{1}{20}(24-9\sqrt{3})\xi^2 \quad \ldots\ldots (22)$$

Um die zweite Wurzel u_2 zu finden, brauchen wir nur in diesem Ausdruck $\sqrt{3}$ durch $-\sqrt{3}$ zu ersetzen. Also

$$u_2 = (3+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})\xi + \frac{1}{20}(24+9\sqrt{3})\xi^2.$$

Es handelt sich jetzt nur darum, u_1 und u_2 in die Gleichung (14) einzusetzen.

Bevor wir es aber thun, wollen wir zur Vereinfachung folgende Bezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{1-u_1} u_1^2 [\omega_0(u_1) + \omega_1(u_1) u_1 \xi + \omega_2(u_1) u_1^2 \xi^2] \\ \Phi_2 &= e^{1-u_2} u_2^2 [\omega_0(u_2) + \omega_1(u_2) u_2 \xi + \omega_2(u_2) u_2^2 \xi^2] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (23)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{f_0(u_1) + f_1(u_1) u_1 \xi + f_2(u_1) u_1^2 \xi^2}{\omega_0(u_1) + \omega_1(u_1) u_1 \xi + \omega_2(u_1) u_1^2 \xi^2} \\ \psi_2 &= \frac{f_0(u_2) + f_1(u_2) u_2 \xi + f_2(u_2) u_2^2 \xi^2}{\omega_0(u_2) + \omega_1(u_2) u_2 \xi + \omega_2(u_2) u_2^2 \xi^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{k\theta_m}{n} \Phi_1 [1 + \mu^2 \psi_1] \\ \varphi_2 &= \frac{k\theta_m}{n} \Phi_2 [1 + \mu^2 \psi_2] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Für die durch die Gleichungen (23) und (24) definierten Grössen findet man folgende definitive Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{2\sqrt{3}-3}{e^{2-\sqrt{3}}} \left[1 - \xi + \frac{1}{20}(15+\sqrt{3})\xi^2\right] \\ \Phi_2 &= \frac{2\sqrt{3}+3}{e^{2+\sqrt{3}}} \left[1 - \xi + \frac{1}{20}(15-\sqrt{3})\xi^2\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (26)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= a_0 [1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2] \\ \psi_2 &= b_0 [1 + b_1 \xi + b_2 \xi^2] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Die verschiedenen Coefficienten a und b haben hier folgende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{30}(5-3\sqrt{3}) = -0{,}0065377 & b_0 &= \frac{1}{30}(5+3\sqrt{3}) = 0{,}33988 \\ a_1 &= \frac{3}{2}(2+\sqrt{3}) = 5{,}5981 & b_1 &= \frac{3}{2}(2-\sqrt{3}) = 0{,}40192 \\ a_2 &= \frac{1}{280}(129+177\sqrt{3}) = 1{,}5556 & b_2 &= \frac{1}{280}(129-177\sqrt{3}) = -0{,}63417 \end{aligned}\right\} (28)$$

Wäre das Horizontalpendel genau an der Grenze der Aperiodicität, also $\mu^2 = 0$, so könnte man zur Bestimmung des Uebertragungsfactors k sich einer der beiden folgenden Formeln, die aus den Gleichungen (25) unmittelbar folgen, bedienen[1])

$$k = n \frac{\varphi_1}{\theta_m} \cdot \frac{1}{\Phi_1} = -n \frac{\varphi_1}{\theta_m} \cdot \frac{e^{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-3} \left[1 + \xi + \frac{5-\sqrt{3}}{20} \xi^2\right] =$$

$$= -n \frac{\varphi_1}{\theta_m} \cdot 2{,}8168 \, [1 + \xi + 0{,}16340 \xi^2] \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$k = n \frac{\varphi_2}{\theta_m} \cdot \frac{1}{\Phi_2} = n \frac{\varphi_2}{\theta_m} \cdot \frac{e^{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}+3} \left[1 + \xi + \frac{5+\sqrt{3}}{20} \xi^2\right] =$$

$$= n \frac{\varphi_2}{\theta_m} \cdot 6{,}4610 \, [1 + \xi + 0{,}33660 \xi^2] \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Man müsste dann gleiche Werthe für k bekommen. Die entgegengesetzten Vorzeichen in diesen Ausdrücken für k bedeuten, dass die maximalen Ausschläge φ_1 und φ_2 auf entgegengesetzten Seiten der Ruhelage des Galvanometers erfolgen.

Die Bestimmung von k nach diesen Formeln erfordert nur die Kenntniss von n und die Bestimmung der maximalen Ausschläge am Pendel und Galvanometer, was mit Hilfe von zwei Fernröhren mit Scala sehr leicht bewerkstelligt werden kann.

Ist aber die Aperiodicitätsgrenzbedingung ($\mu^2 = 0$) nicht streng erfüllt, so unterscheiden sich die nach den Formeln (29) und (30) berechneten Werthe von k von einander.

---

1) Siehe auch «Die electromagnetische Registriermethode». L. c. p. 37.

Wollen wir nun in diesem Falle den aus der ersten dieser beiden Formeln sich ergebenden Werth von k durch k_1 und den aus der zweiten durch k_2 bezeichnen.

Dann wird mit Rücksicht auf die Beziehungen (25)

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = k[1 + \mu^2 \psi_1] \\ k_2 = k[1 + \mu^2 \psi_2] \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Daraus folgt

$$\mu^2 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 \psi_2 - k_2 \psi_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{k_1}{1 + \mu^2 \psi_1} \\ k = \dfrac{k_2}{1 + \mu^2 \psi_2} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Mit der Aenderung der Stärke der Dämpfung am Pendel ändert sich μ^2, folglich auch k_1 und k_2.

Aber hier tritt folgende Eigenthümlichkeit auf, auf welche ich zuerst bei der experimentellen Bestimmung von k_1 und k_2 bei verschiedenen Poldistanzen der dämpfenden Magnete aufmerksam geworden bin.

Die Aenderung von μ^2 zieht eine ziemlich starke Aenderung von k_2 nach sich, während k_1 fast unverändert seinen Werth behält.

Dieses Resultat folgt nun direct aus den Beziehungen (27) und (28). Ist ξ nicht zu gross, so wird ψ_1 sich wenig von a_0 und ψ_2 von b_0 unterscheiden, wobei noch $\psi_1 < 0$ und $\psi_2 > 0$ wird.

Nun ist a_0 seiner absoluten Grösse nach etwa 52 Mal kleiner als b_0, so muss auch k_1 viel weniger durch die Aenderung von μ^2 beeinflusst werden, als k_2. Die weiter folgenden aus den Beobachtungen entnommenen Zahlenbeispiele bestätigen dieses Resultat.

Es lohnt sich also zur Bestimmung von k die erste der Formeln (33) anzuwenden.

Wenn die Grenze der Aperiodicität noch nicht erreicht ist, wird k_2 immer grösser als k_1 sein und da k_2 sich ziemlich rasch mit μ^2 ändert, so haben wir dabei ein empfindliches Mittel, um das betreffende Horizontalpendel an die Grenze der Aperiodicität einzustellen. Man braucht nur diejenige Poldistanz aufzusuchen, für welche die Gleichheit zwischen k_1 und k_2 zutrifft.

Sind aber k_1 und k_2 nicht vollständig einander gleich, so lässt sich der entsprechende Werth von μ^2 nach der Formel (32) leicht berechnen.

Unsere Aufgabe war freilich die, die Constanten ε und n des Horizontalpendels, wenn dasselbe nicht weit von der Grenze der Aperiodicität sich befindet, zu bestimmen. Diese Aufgabe lässt sich nun auf Grund der früher abgeleiteten Formeln in sehr einfacher Weise durchführen. Dazu braucht man gar nicht den Maximalausschlag θ_m am Pendel selbst zu beobachten; es ist nur das Verhältniss $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ nöthig, was sich sofort sehr bequem bestimmen lässt.

Bezeichnen wir dieses Verhältniss seiner absoluten Grösse nach durch α, also

$$\alpha = \left[\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

und setzen wir

$$\beta = -\frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

wo also β positiv wird, so ergiebt sich aus den Beziehungen (25)

$$\alpha = \beta \frac{1 + \mu^2 \psi_1}{1 + \mu^2 \psi_2}.$$

Hieraus folgt

$$\mu^2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\psi_2 - \beta\psi_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Für β findet man aus den Beziehungen (26) folgenden Ausdruck:

$$\beta = (7 - 4\sqrt{3})\, e^{2\sqrt{3}} \left[1 + \frac{1}{10}\sqrt{3}\, \xi^2\right] = 2{,}2937\,[1 + 0{,}1732\, \xi^2]\,^{1)} \,..(37)$$

β lässt sich nach dieser Formel und ψ_1 und ψ_2 nach den Formeln (27) und (28) leicht berechnen; α wird durch die Versuche gegeben.

Dann kann man nach der Gleichung (36) μ^2 sehr leicht berechnen und sehen, wie weit man von der Grenze der Aperiodicität entfernt ist.

Ist der Unterschied zwischen den Eigenperioden des Pendels und des Galvanometers (ohne Dämpfung) sehr gering, sodass ξ vernachlässigt werden darf, so erhält man folgenden sehr einfachen Ausdruck für μ^2. Es wird nämlich

$$\mu^2 = \frac{2{,}2937 - \alpha}{0{,}33988\,\alpha + 0{,}01500} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Ist also das Verhältniss der Ausschläge am Galvanometer $\alpha = \left[\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right]$ kleiner als der kritische Werth 2,2937, so ist die Grenze der Aperiodicität noch nicht erreicht; ist es grösser, so ist die Grenze der Aperiodicität schon überschritten; $\alpha = 2{,}2937$ entspricht genau der Grenze der Aperiodicität.

---

1) Das Glied, welches die erste Potenz von ξ enthält, fehlt.

Dieses Criterium ist besonders einfach und lässt sich praktisch mit aller Leichtigkeit durchführen. Interessant dabei ist, dass die Constanten in der vorigen Formel (38) ihren numerischen Werth behalten für alle Typen von Pendeln und für alle Arten von Galvanometern. Die einzige Bedingung dabei ist, dass die Eigenperioden des Pendels und des Galvanometers gleich seien und dass das Galvanometer selbst sich an der Grenze der Aperiodicität befinde.

Hat man den Werth von α bei verschiedenen Poldistanzen erhalten, was sehr wenig Zeit in Anspruch nimmt, so kann man sofort diejenige Poldistanz ermitteln, für welche $\mu^2 = 0$, also die Aperiodicitätsgrenzbedingung erfüllt wird. Alle complicierten Rechnungen und Curvenausmessungen fallen vollständig weg.

Ist aber α von β verschieden, so lässt sich μ^2 nach einer der beiden Formeln (36) oder (38) berechnen.

Bedeute nun h das Verhältniss der Pendelconstanten ε und n, also

$$h = \frac{\varepsilon}{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

so wird auf Grund der Formel (9) und der Beziehung $\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$

$$h = \sqrt{1 - \mu^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Was nun das entsprechende Dämpfungsverhältniss v anbelangt, so lässt sich bekanntlich[1]) dasselbe aus h nach folgender Formel berechnen:

$$v = e^{\pi \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Wir haben bisjetzt vorausgesetzt, dass $\varepsilon < n$ ist. Ist aber die Grenze der Aperiodicität überschritten, also $\varepsilon > n$, so brauchen wir gar nicht die Rechnungen nochmals für diesen Fall durchzuführen. Es genügt selbstverständlich in den Endformeln einfach μ^2 durch $-\nu^2$ zu ersetzen.

Ist also $\alpha > \beta$, so wird

$$\nu^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\psi_2 - \beta\psi_1}$$

und

$$h = \frac{\varepsilon}{n} = \sqrt{1 + \nu^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

1) Siehe z. B. «Die electromagnetische Registriermethode». L. c. p. 92.

Die hier beschriebene Methode liefert also in sehr einfacher Weise das Verhältniss $h = \frac{\varepsilon}{n}$ beider Pendelconstanten.

Wollen wir sehen, wie sich nun n direct ermitteln lässt.

Dazu wenden wir uns wieder den Gleichungen (14), (15) und (16) zu.

$$\varphi \text{ wird Null für } t = 0.$$

Nach erhaltenem Ausschlag geht die Galvanometerspule durch ihre Ruhelage wieder hindurch bei einem Zeitmoment t_0, der aus den Beobachtungen, wenn man über einen Secundenzähler verfügt, sich sehr leicht bestimmen lässt.

Das entsprechende u sei durch u_0 bezeichnet. Also

$$u_0 = nt_0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

wo u_0 die Wurzel der Gleichung

$$\omega_0(u) + \omega_1(u)u\xi + \omega_2(u)u^2\xi^2 + \mu^2\{f_0(u) + f_1(u)u\xi + f_2(u)u^2\xi^2\} = 0 \quad (44)$$

ist.

Hieraus ergiebt sich für die Wurzel u_0 folgender Ausdruck:

$$u_0 = 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{2}{5}\xi^2\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi + \frac{183}{70}\xi^2\right]\mu^2 \ldots\ldots (45)$$

Da nun jetzt μ^2 als bekannt anzusehen ist, so kann man nach der Formel (45) u_0 ausrechnen. Da ausserdem t_0 gemessen wird, so lässt sich aus der Formel (43) n sofort bestimmen:

$$n = \frac{u_0}{t_0}.$$

Das Verhältniss $h = \frac{\varepsilon}{n} = \sqrt{1 - \mu^2}$ ist ebenfalls bekannt, folglich lassen sich die beiden Constanten des Horizontalpendels ε und n in sehr einfacher Weise ermitteln.

Für den Specialfall, dass ξ vernachlässigt werden kann, wird

$$u_0 = 3\left[1 - \frac{1}{20}\mu^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

In diesem Falle ergeben sich aus den Gleichungen (39), (40), (43) und (46) folgende einfache definitive Ausdrücke für die gesuchten Pendelconstanten ε und n.

Es wird nämlich

$$n = \frac{3}{t_0}\left[1 - \frac{1}{20}\mu^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

$$\varepsilon = \frac{3}{t_0}\left[1 - \frac{1}{20}\mu^2\right]\sqrt{1-\mu^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Für die Grenze der Aperiodicität wird einfach

$$n = \varepsilon = \frac{3}{t_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Diese ganze Methode der Bestimmung der Constanten eines stark gedämpften Horizontalpendels stützt sich also auf die experimentelle Bestimmung zweier Grössen, nämlich α und t_0, was mit aller Leichtigkeit und rasch sich vollziehen lässt.

Zum Schluss wollen wir die hier dargelegte Theorie an einigen aus der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen erläutern.

Es wurde eine Art Zöllner'schen Pendels eigener Construction auf die Eigenperiode des entsprechenden Galvanometers, welches genau an der Grenze der Aperiodicität sich befand, eingestellt.

Dabei ergab sich

$$n = 0{,}258 \text{ (aus Schwingungsbeobachtungen)},$$

$$n_1 = 0{,}260,$$

also

$$\xi = 0{,}0074$$

und

$$\beta = 2{,}294.$$

Bei zwei Poldistanzen (bei der dämpfenden Kupferplatte), nämlich $H = 8{,}0^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ und $H = 7{,}2^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ wurden nun die Werthe von α und t_0 gemessen und aus ihnen nach den Formeln (36), (resp. (27) und (28)), (39), (40), (41), (43) und (45) die Werthe von μ^2, h, v, n und ε berechnet.

Es ergab sich auf diese Weise

H	α	t_0	μ^2	h	v	n	ε
$8{,}0^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$	2,118	11,45	0,239	0,872	272	0,258	0,225
7,2	2,405	11,61	−0,133	1,064	∞	0,259	0,276

Wir sehen also, dass die nach dieser Methode bestimmten Werthe von n fast identisch mit dem aus den Schwingungsbeobachtungen ermittelten Werth ausfallen. Dies ist ein wichtiger Beleg für die unzweifelhafte An-

wendbarkeit der hier beschriebenen Methode, die ausserdem in der Praxis sich äusserst einfach erwiesen hat. Für $H = 7{,}2^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ wurden noch die Werthe von k_1 und k_2 bestimmt und aus ihnen nach den Formeln (33) k berechnet.

Es ergab sich

$$\begin{array}{ll} k_1 = 49{,}5 & k = 49{,}5 \\ k_2 = 47{,}1 & k = 49{,}3 \end{array}\Bigg\} \text{ Im Mittel } k = 49{,}4.$$

Die Grenze der Aperiodicität trifft für $H = 7{,}47^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ ein.

Ausserdem wurden mit einem kleinen Rebeur-Paschwitz'schen Pendel k_1 und k_2 bestimmt für zwei Poldistanzen H der permanenten Magnete (bei der dämpfenden Kupferplatte), nämlich bei $H = 4{,}0^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ und $H = 3{,}5^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$.

Dabei war

$$n = 0{,}4668,$$

$$n_1 = 0{,}5419,$$

also

$$\xi = 0{,}1609.$$

Die Beobachtungen ergaben

H	k_1	k_2	α
$4{,}0^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$	18,12	18,54	2,250
3,5	18,12	15,92	2,622

Nach der Formel (37) ist

$$\beta = 2{,}304,$$

also wird bei $H = 3{,}5$ die Aperiodicitätsgrenze schon überschritten.

Die Werthe von μ^2 (resp. ν^2) wurden nach der Formel (36) berechnet. Sie sind weiter unten angegeben. Nebenbei stehen die aus ihnen berechneten Werthe von h und v, wie auch die Werthe des Uebertragungsfactors k, berechnet aus den Formeln (33) aus k_1 und k_2.

				k	
H	μ^2	h	v	aus k_1	aus k_2
$4{,}0^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$	0,065	0,967	149500	18,13	18,12
3,5	−0,330	1,153	∞	18,05	18,04.

Wir sehen aus diesen Zahlen, dass auch für $H = 4{,}0^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ die Dämpfung des Pendels eine ungemein starke war.

Die Grenze der Aperiodicität tritt für $H = 3{,}91\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ ein.

In einem anderen Fall wurden für die früher erwähnte Art Zöllner'schen Pendels die Werthe von k_1 und k_2 für verschiedene Werthe von H direct bestimmt. Da aber in diesem Falle ξ keineswegs als klein angenommen werden darf (es wurde ein anderes Galvanometer verwendet), so wurden diese Werthe von k_1 und k_2 nicht nach den Näherungsformeln, sondern nach den strengen Formeln berechnet[1]).

Ich führe diese Werthe von k nur darum an, um zu zeigen, dass, mit Aenderung des Dämpfungsverhältnisses, k_1 sich recht wenig ändert, während k_2 mit wachsendem μ^2 ziemlich stark zunimmt.

Es ergab sich in diesem Fall

H	k_1	k_2
7,7 ${}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$	109,5	133,6
7,4	110,1	124,9
6,7	110,1	110,4

Für $H = 6{,}7\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ lag das betreffende Pendel schon ganz nah an der Grenze der Aperiodicität.

In einem anderen Fall ergab sich

H	k_1	k_2
7,1 ${}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$	109,0	143,1
6,1	111,0	105,8

Die Grenze der Aperiodicität trifft für $H = 6{,}23\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$ ein.

Wir sehen also, dass die hier beschriebene Methode nicht nur die Bestimmung der Pendelconstanten ε und n in sehr einfacher Weise gestattet, sondern auch ein recht empfindliches Mittel liefert, um ein Horizontalpendel auf die Grenze der Aperiodicität einzustellen, was zum Zweck der seismometrischen Beobachtungen bei Anwendung der electromagnetischen Registrierung eine ziemlich wesentliche Bedingung ist.

---

1) Siehe «Die electromagnetische Registriermethode». L. c. p. 36.