

F ü n f

Aufgaben aus der Statik.



Bon

G. B la e s e.



228

M it a n,

gedruckt bei Johann Friedrich Steffenhagen und Sohn.

1853.

1 1 1 8

Titel zur Vorrede

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmäßige Anzahl von Exemplaren vorgestellt werde.

Dorpat, den 18. November 1853.

(No. 170.)

(L. S.)

Abgetheilter Censor de la Croix.

Est.



6158

1 1 1 8

Verantwortlich für den Inhalt des Buches ist der Verfasser.

1853

Dasjenige, woraus die uns umgebenden, unsere Sinne afficirenden und uns dadurch wahrnehmbaren Gegenstände bestehen, heißt Materie, und sobald diese eine gewisse Form annimmt, heißt sie Körper. Der Raum, welchen der letztere, als mathematischer Körper betrachtet, einnimmt, heißt sein Volumen; die Quantität der Materie, welche er enthält, seine Masse; das Verhältniß zwischen Masse und Volumen ($\frac{M}{V}$) seine Dichtigkeit. Ein unendlich kleiner Theil eines Körpers heißt ein Element; dieses mit unendlicher Masse gedacht wird ein materieller Punkt genannt.

Man sagt von einem Körper er sei in Ruhe, wenn er oder seine Theile nicht allein einen bestimmten Ort im Raume einnehmen, sondern auch heibehalten; dagegen sagt man von ihm er sei in Bewegung, wenn er oder seine Theile ihren Ort verändern. Die letzte Ursache der Veränderungen der Körper nennt man Kraft. Man muß es also einer Kraft zuschreiben, wenn ein Körper den Ruhezustand aufgibt und sich zu bewegen anfängt, und ebenso, wenn ein sich bewegender Körper entweder seine Bewegung verändert, oder den Ruhezustand annimmt. Weil wir uns einen Körper aus Elementen zusammengesetzt denken, so können wir füglich auch annehmen, daß seine Bewegung aus der Bewegung seiner Elemente hervorgehe; wir werden unsere Betrachtungen daher nur auf die Bewegung von Punkten und auf Kräfte beschränken, welche auf Punkte wirken.

Man sagt von Kräften „sie halten sich das Gleichgewicht,“ wenn sie, auf einen Körper oder materiellen Punkt gleichzeitig wirkend, dessen Zustand, was Ruhe und Bewegung anlangt, nicht ändern; befindet

sich der Körper oder Punkt dabei in Ruhe, so sagt man „er befindet sich im Gleichgewicht“. Die Mechanik oder die Lehre von den Kräften, vom Gleichgewichte und von der Bewegung zerfällt hiernach in zwei Haupttheile, und zwar: 1) in die Statik oder die Lehre vom Gleichgewichte; 2) in die Dynamik oder die Lehre von der Bewegung.

Was die Bewegung eines Punktes anlangt, so hat man zu unterscheiden: a) die Größe des Raumes, welchen derselbe in einer bestimmten Zeit durchläuft [das Verhältniß beider zu einander nennt man Geschwindigkeit = $\frac{\text{Raum}}{\text{Zeit}}$]; b) die Richtung in welcher er sich bewegt. Wenn also ein materieller Punkt während seiner Bewegung seine Geschwindigkeit, oder seine Richtung, oder beides ändert, so ist die Ursache hiervon in dem Wirken einer Kraft zu suchen. — Daß ein materieller Punkt oder ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, wenn er ruht in Ruhe bleibt, wenn er sich bewegt in derselben Bewegung beharrt, sowohl in Beziehung auf Geschwindigkeit als auf Richtung, nennt man das Gesetz der Beharrlichkeit oder Trägheit der Materie *).

Aus dem Begriffe der Kraft geht hervor, daß wir auch an ihr unterscheiden müssen: a) die Größe oder Intensität mit welcher sie wirkt, b) die Richtung in welcher sie wirkt, c) den Ort, wo sie wirkt oder angreift. Da eine mathematische Linie ganz durch dieselben Momente bestimmt wird, so liegt nichts näher, als die Kräfte durch Linien zu repräsentiren.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Punkt, so kann man sich stets eine Kraft denken, deren Größe und Richtung so beschaffen sind, daß genau dieselbe Bewegung erfolgen, oder im Allgemeinen dieselbe Wirkung entstehen würde, als in dem Falle, wo alle diese Kräfte zugleich wirken. Diese eine Kraft nennt man die Resultante, die auf den Punkt wirkenden einzelnen Kräfte heißen die Componenten. Die Componenten können

*) Es ist also eigentlich eine Folge von dem Begriffe, den wir der Kraft beilegen, und wenn wir es aus der Erfahrung bestätigen wollen, so begehen wir einen Zirkel im Schluß.

durch die Resultante, und diese durch jene ersetzt werden. Es versteht sich, daß mehrere auf einen Punkt wirkende Kräfte nur eine einzige ihrer Größe und Richtung nach bestimmte Resultante haben, denn sie können nur eine bestimmte Bewegung dieses Punktes hervorbringen. Auf die Bestimmung dieser Resultante kommt es vornehmlich an, denn ist sie $= 0$, so befinden sich die Kräfte im Gleichgewichte.

Den nachfolgenden Aufgaben schicken wir schließlich diese Grundsätze voraus:

- a) Mehrere Kräfte, die auf einen Punkt in derselben Richtung wirken, haben ihre Summe zur Resultante;
- b) zwei gleiche in entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt wirkende Kräfte halten sich das Gleichgewicht. Daraus folgt **erstens**, daß zwei Kräfte nur unter dieser Bedingung im Gleichgewicht sein können; **zweitens**, daß zwei entgegengesetzt wirkende Kräfte ihren Unterschied zur Resultante haben; **drittens**, daß wenn man eine der Resultante gleiche, aber entgegengesetzte Kraft an ein System von Kräften anbringt, sie diesem System das Gleichgewicht hält, und umgekehrt, wenn ein System von Kräften im Gleichgewicht ist, eine, irgend einer der Kräfte gleiche, aber entgegengesetzte Kraft die Resultante der übrigen ist.

1. Aufgabe.

Die Resultante zweier gleicher unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkender Kräfte zu bestimmen.

A u f l ö s u n g.

Bezeichnet man die beiden einander gleichen Kräfte mit K , den Winkel mit 2ω , so ist gewiß, daß durch die Resultante R der Winkel halbirt wird; man hat also nur noch ihre Größe zu bestimmen, die offenbar eine Funktion von K und ω ist; also

$$R = \psi [K, \omega].$$

Die Resultante R' zweier einander gleicher Kräfte K' , welche unter demselben Winkel 2ω wirken, wäre $\psi[K', \omega]$; also

$$R' = \psi[K', \omega].$$

Läßt man die Componenten $= K + K'$ sein, so ist ihre Resultante offenbar $= R + R'$, aber auch $= \psi[K + K', \omega]$, so daß also

$$\psi[K + K', \omega] = \psi[K, \omega] + \psi[K', \omega],$$

woraus bekanntlich folgt, daß

$$R \text{ oder } \psi[K, \omega] = K \varphi[\omega]^*),$$

so daß also nur noch $\varphi[\omega]$ zu bestimmen wäre. Zu diesem Zwecke wollen wir jede Kraft K in zwei einander gleiche Kräfte k , die mit ihr den Winkel ω_1 bilden, zerlegen, so ist nach dem Vorhergehenden

$$K = k \varphi[\omega_1],$$

also

$$R = K \varphi[\omega] = k \varphi[\omega] \varphi[\omega_1].$$

Andererseits aber ist, als Resultante der vier einander gleichen Kräfte k , Fig. 1, auch

$$R = k \varphi[\omega - \omega_1] + k \varphi[\omega + \omega_1].$$

Folglich hat man:

$$(1.) \quad \varphi[\omega] \varphi[\omega_1] = \varphi[\omega - \omega_1] + \varphi[\omega + \omega_1],$$

aus welcher Gleichung sich die Natur der Funktion φ leicht bestimmen läßt.

Es ist nämlich klar, daß $\varphi[0^\circ] = 2$ und $\varphi[90^\circ] = 0$ ist (Es wirken, wenn $\omega = 0^\circ$ ist, die beiden einander gleichen Kräfte K und K in einerlei Richtung, mithin ist die Resultante $= 2K$, aber es muß auch der Gleichung $R = K \varphi[0^\circ]$ Genüge geleistet sein, folglich muß $\varphi[0^\circ] = 2$ sein; eben so leicht findet man, daß $\varphi[90^\circ] = 0$ ist, denn ist $\omega = 90^\circ$, so wirken die in Rede stehenden beiden Kräfte in entgegengesetzter Richtung, mithin ist die Resultante $= 0$, also $0 = K \varphi[90^\circ]$,

*) Siehe A. L. Cauchy's algebraische Analysis. Man muß bei der Beweisführung die Funktionen nur als Funktionen von K und K' betrachten, dann hat man: $\psi[K+K'] = \psi[K] + \psi[K']$; folglich ist $\psi[K]$ oder $\psi[K, \omega]$ eine solche Funktion, daß sie gleich ist dem Produkt der Variablen K mit einer Constanten, die hier nichts anders sein kann als eine Funktion von ω .

d. h. $\varphi[90^\circ] = 0$.); was auch so geschrieben werden kann $\varphi[0^\circ] = 2 \text{Cos}(0^\circ)$ und $\varphi[90^\circ] = 2 \text{Cos}(90^\circ)$. Aus Gleichung (1.) aber folgt, wenn $\omega = \omega_1 = \frac{90^\circ}{2}$, daß

$$\begin{aligned} \left(\varphi\left[\frac{90^\circ}{2}\right]\right)^2 &= 2 + \varphi[90^\circ] = 2 + 2 \text{Cos}(90^\circ) = 2(1 + \text{Cos}(90^\circ)) \\ &= 4 \text{Cos}^2\left(\frac{90^\circ}{2}\right), \end{aligned}$$

also

$$\varphi\left[\frac{90^\circ}{2}\right] = 2 \text{Cos}\left(\frac{90^\circ}{2}\right)^*.$$

Ebenso leicht findet man, daß

$$\varphi\left[\frac{90^\circ}{4}\right] = 2 \text{Cos}\left(\frac{90^\circ}{4}\right)$$

und endlich, daß

$$\varphi\left[\frac{90^\circ}{2^n}\right] = 2 \text{Cos}\left(\frac{90^\circ}{2^n}\right)$$

ist. Gibt man nun der Gleichung (1.) die Form

$$\varphi[\omega + \omega_1] = \varphi[\omega] \varphi[\omega_1] - \varphi[\omega - \omega_1],$$

und setzt $\omega = 2 \frac{90^\circ}{2^n}$, $\omega_1 = \frac{90^\circ}{2^n}$, so bekommt man:

$$\begin{aligned} \varphi\left[3 \frac{90^\circ}{2^n}\right] &= \varphi\left[2 \frac{90^\circ}{2^n}\right] \varphi\left[\frac{90^\circ}{2^n}\right] - \varphi\left[\frac{90^\circ}{2^n}\right] = \\ &= 2 \left[2 \text{Cos}\left(2 \frac{90^\circ}{2^n}\right) \text{Cos}\left(\frac{90^\circ}{2^n}\right) - \text{Cos}\left(2 \frac{90^\circ}{2^n} - \frac{90^\circ}{2^n}\right)\right] = 2 \text{Cos}\left(3 \frac{90^\circ}{2^n}\right); \end{aligned}$$

setzt man wiederum $\omega = 3 \frac{90^\circ}{2^n}$, $\omega_1 = \frac{90^\circ}{2^n}$, so ergibt sich ebenso

$$\varphi\left[4 \frac{90^\circ}{2^n}\right] = 2 \text{Cos}\left(4 \frac{90^\circ}{2^n}\right),$$

im Allgemeinen also

$$\varphi\left[m \frac{90^\circ}{2^n}\right] = 2 \text{Cos}\left(m \frac{90^\circ}{2^n}\right),$$

*) Der Natur nach kann φ nur einen positiven Werth haben.

was so viel ist, als

$$\varphi[\omega] = 2 \operatorname{Cos}(\omega).$$

Hiermit ist die Funktion $\varphi[\omega]$ bestimmt, und man hat folglich

$$R = 2K \operatorname{Cos}(\omega).$$

Construirt man diesen Ausdruck geometrisch, so findet man, daß die Resultante die Diagonale des aus den beiden einander gleichen Componenten gebildeten Rhombus ist. (Siehe Fig. 2.)

Hieraus läßt sich leicht ableiten, daß die Resultante zweier Kräfte von verschiedener Intensität, welche unter einem rechten Winkel gegen einander wirken, gleich der Diagonale des aus ihnen gebildeten Rechtecks ist. (Siehe Fig. 3.)

Mit Hülfe dieses Resultates aber gelangt man zu dem allgemeinen Satze, daß die Resultante zweier unter einem beliebigen Winkel wirkender Kräfte gleich ist der Diagonale des aus denselben gebildeten Parallelogramms. (Siehe Fig. 4.) Dieses ist der für die ganze Mechanik so wichtige Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

Mit Hülfe dieses Satzes ist man im Stande durch geometrische Construction die Resultante einer beliebigen Anzahl auf einen Punkt wirkender Kräfte zu finden, und umgekehrt kann man jede gegebene Kraft in eine beliebige Anzahl Componenten zerlegen, von denen nur eine der Willkühr anheim gestellt ist. Viel bequemer jedoch läßt sich die Sache behandeln, und viel genauere Resultate erhält man mit Hülfe der analytischen Geometrie, wie es die Auflösungen der nachfolgenden Aufgaben darthun sollen.

2. Aufgabe.

Die Resultante zu bestimmen und die Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktes anzugeben, auf den mehrere Kräfte in verschiedenen Richtungen wirken, und zwar: 1) wenn er ganz frei ist; 2) wenn er sich nur auf einer Fläche bewegen kann; 3) wenn er sich nur auf einer Curve bewegen kann.

A u f l ö s u n g.

Die Kräfte seien K, K', K'', \dots ihre Richtungen, in denen sie den materiellen Punkt zu bewegen streben, seien resp. durch die Determinanten *) $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'; \xi'', \eta'', \zeta''; \dots$ in Bezug auf ein durch den materiellen Punkt gelegtes rechtwinkliges Axensystem, dessen Axen X, Y, Z sind, gegeben, so kann man offenbar eine jede der in Rede stehenden Kräfte zerlegen in ihre Projektion auf die Axe Z und auf die Ebene XY **), diese letztere aber wiederum in ihre Projektion auf die Axe X und auf die Axe Y . Hiernach aber können die Kräfte K, K', K'', \dots ersetzt werden eine jede durch ihre drei Componenten, also resp. durch $K\xi, K\eta, K\zeta; K'\xi', K'\eta', K'\zeta'; K''\xi'', K''\eta'', K''\zeta''; \dots$, denn bekanntlich ist $K\xi$ die Projektion der Kraft K auf die Axe X , $K\eta$ die Projektion der Kraft K auf die Axen Y , $K\zeta$ die Projektion der Kraft K auf die Axe Z , $K'\xi'$ die Projektion der Kraft K' auf die Axe X u. s. w. Es wirken also in der Richtung der Axen X, Y, Z resp. die Kräfte

$$(2.) \quad K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots$$

$$(3.) \quad K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots$$

$$(4.) \quad K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots$$

Bezeichnet man die Resultante der gleichzeitig auf einen Punkt wirkenden Kräfte K, K', K'', \dots durch R , ihre Determinanten durch $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, so sind ihre Projektionen auf die Axen X, Y, Z offenbar resp. $R\bar{\xi}, R\bar{\eta}, R\bar{\zeta}$. Da nun diese letztern als die Componenten der Resultante betrachtet werden können, so müssen sie resp. den Ausdrücken (2.), (3.), (4.) gleich sein, und hiermit ist die Resultante ihrer Größe und Richtung nach bestimmt, nämlich:

*) Die Determinanten einer Linie sind die Cosinüsse der Winkel, welchen die Linie mit jeder der drei Axen, oder mit Linien, die den drei Axen eines rechtwinkligen Axensystems parallel sind, bilden; man bezeichnet sie gewöhnlich mit den griechischen Buchstaben ξ, η, ζ , wo ξ die Determinante in Bezug auf die Axe X , η die Determinante in Bezug auf die Axe Y und ζ die Determinante in Bezug auf die Axe Z ist.

**) XY nennen wir die Ebene, welche man sich durch die Axe X und die Axe Y gelegt denken kann, so daß die Axe Z auf ihr senkrecht steht. Analoges gilt von den Ebenen XZ und YZ .

$$R = \sqrt{[K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots]^2 + [K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots]^2 + [K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots]^2}$$

$$\bar{\xi} = \frac{K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots}{R}, \quad \bar{\eta} = \frac{K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots}{R},$$

$$\bar{\zeta} = \frac{K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots}{R}.$$

1) Wenn der materielle Punkt ganz frei ist, so befindet er sich im Gleichgewichte, wenn die Resultante $R = 0$ ist, wenn also den Bedingungsgleichungen

$$\text{I. } \begin{cases} K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots = 0, \\ K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots = 0, \\ K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots = 0 \end{cases}$$

Genüge geleistet ist. Diese drei Bedingungsgleichungen reduciren sich auf die eine Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes, nämlich:

$$K^2 + K'^2 + K''^2 + \dots + 2KK'[\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'] + 2KK''[\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta''] + \dots = 0.$$

2) Wenn der materielle Punkt an eine Fläche gebunden ist, auf welcher allein nur er sich bewegen kann, so ist derselbe, wenn die Fläche durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$, oder kürzer $u = 0$ gegeben ist, im Gleichgewichte, wenn die Resultante auf der Fläche senkrecht steht. Sind die Determinanten der Normale der Fläche α, β, γ , welche bekanntlich diese Werthe haben:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{d.u}{dx}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.u}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.u}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d.u}{dz}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{\left(\frac{d.u}{dy}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.u}{dx}\right)^2 + \dots}},$$

$$\gamma = \frac{\left(\frac{d.u}{dz}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.u}{dx}\right)^2 + \dots}},$$

so ist Gleichgewicht, wenn sich verhalten

$$(K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots) : (K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots) : (K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots) = \alpha : \beta : \gamma;$$

dieses läßt sich auch so schreiben:

$$\text{II. } \begin{cases} K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots = K\alpha, \\ K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots = K\beta, \\ K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots = K\gamma, \end{cases}$$

und $K = \pm R$ ist dann der Druck, welchen der Punkt auf die Fläche ausübt, und letztere wirkt ganz so, wie eine Kraft in der Richtung der Normale der Fläche, deren Intensität = $-K$. (Es ist dieses der Widerstand der Fläche.)

3) Kann der materielle Punkt sich endlich nur auf einer Ebene bewegen, welche durch die beiden Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ gegeben ist, so ist Gleichgewicht da, wenn die Resultante auf der Curve senkrecht steht. Sind die Determinanten der Tangente der Curve $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, welche bekanntlich resp. die Werthe

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + \dots}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + \dots}}$$

haben, so ist das Gleichgewicht erhalten, wenn

$$(5.) [K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots]\bar{\alpha} + [K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots]\bar{\beta} + [K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots]\bar{\gamma} = 0;$$

dieses läßt sich auch so schreiben:

$$\text{III. } \begin{cases} K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots = K\alpha + K'\alpha' \\ K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots = K\beta + K'\beta' \\ K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots = K\gamma + K'\gamma' \end{cases}$$

wo nämlich $\alpha:\beta:\gamma^*) = \left(\frac{d.u}{dx}\right) : \left(\frac{d.u}{dy}\right) : \left(\frac{d.u}{dz}\right)$ und $\alpha':\beta':\gamma' = \left(\frac{d.v}{dx}\right) : \left(\frac{d.v}{dy}\right) : \left(\frac{d.v}{dz}\right)$;

denn eliminirt man aus den Gleichungen III. K und K' , so erhält man Gleichung (5.). Hier sind nun offenbar K und K' die Componenten des Druckes senkrecht resp. auf die Flächen $u = 0$ und $v = 0$. Der ganze Druck auf die Curve ist wieder = R . Daß aber K und K' wirklich die

*) α, β, γ sind die Determinanten der durch die Gleichung $u = 0$ gegebenen Fläche,

$$\text{also resp.} = \frac{\left(\frac{d.u}{dx}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.u}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.u}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d.u}{dz}\right)^2}}, \quad \frac{\left(\frac{d.u}{dy}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.u}{dx}\right)^2 + \dots}}, \quad \frac{\left(\frac{d.u}{dz}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.u}{dx}\right)^2 + \dots}};$$

ebenso sind α', β', γ' die Determinanten der durch die Gleichung $v = 0$ gegebenen Fläche,

$$\text{also resp.} = \frac{\left(\frac{d.v}{dx}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.v}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.v}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d.v}{dz}\right)^2}}, \quad \frac{\left(\frac{d.v}{dy}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.v}{dx}\right)^2 + \dots}}, \quad \frac{\left(\frac{d.v}{dz}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d.v}{dx}\right)^2 + \dots}}.$$

Druckkräfte auf die beiden in Rede stehenden Flächen sind, sieht man daraus, daß, wenn man sie mit D und D' bezeichnet, sie ebenfalls durch die Gleichungen

$$D\alpha + D'\alpha' = K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots$$

$$D\beta + D'\beta' = K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots$$

$$D\gamma + D'\gamma' = K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots$$

gegeben sind. Auch hier können an die Stelle der beiden widerstehenden Flächen Kräfte substituirt werden = — K und — K' .

Man kann die Bedingungen des Gleichgewichtes für diese verschiedenen Fälle alle unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zusammenfassen. Immer nämlich muß, wenn die Kräfte im Gleichgewichte sind, die Summe der Projektionen aller Kräfte auf eine jede Richtung, in welcher sich der Punkt bewegen kann, = 0 sein (wobei natürlich die Projektionen, welche auf die entgegengesetzte Seite dieser Richtungen fallen, auch das entgegengesetzte Zeichen erhalten). Bezeichnen wir nun mit $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ die Determinanten der Richtung, in welcher der Punkt sich zu bewegen vermag, so sind die auf letztere projicirten Kräfte

$K(\xi\bar{\alpha} + \eta\bar{\beta} + \zeta\bar{\gamma})$, $K'(\xi'\bar{\alpha} + \eta'\bar{\beta} + \zeta'\bar{\gamma})$, $K''(\xi''\bar{\alpha} + \eta''\bar{\beta} + \zeta''\bar{\gamma})$, u., und es ist in jedem Falle Gleichgewicht, wenn

$$\text{IV. } (K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots)\bar{\alpha} + (K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots)\bar{\beta} + (K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots)\bar{\gamma} = 0.$$

Ist nun der Punkt ganz frei, so muß Gleichung IV. für jeden beliebigen Werth von $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ stattfinden, also auch für die resp. Werthe 1, 0, 0; woraus folgt, daß dann

$$K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots = 0$$

sein muß; eben so findet man aber auch, daß

$$K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots = 0 \text{ und } K\zeta + K'\zeta' + K''\zeta'' + \dots = 0$$

sein muß; kurz es müssen die unter I. aufgestellten Bedingungsgleichungen erfüllt sein.

Ist der Punkt an eine Fläche gebunden, so kann die Richtung $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ nur in der Tangentialebene der Fläche liegen, und dann erhält man die Bedingungsgleichungen II.

Kann sich der Punkt endlich nur auf einer Ebene bewegen, so müssen $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ der Richtung der Tangente der Curve angehören, und wir erhalten die Gleichungen III.

Wir können Gleichung IV. noch unter einer andern Form geben. Bezeichnen wir nämlich die Coordinaten des Punktes, auf welchen die Kräfte K , K' , K'' , z. wirken durch x , y , z ; die Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes in der Richtung der Kraft K durch a , b , c , eben so die eines Punktes in der Richtung der Kraft K' durch a' , b' , c' , z. ; und die Entfernungen der Punkte (a, b, c) , (a', b', c') , (a'', b'', c'') , z. von dem Punkte (x, y, z) resp. durch e , e' , e'' z. , so ist $e = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, also $\left(\frac{d \cdot e}{dx}\right) = \frac{x-a}{e} = \xi$; $\left(\frac{d \cdot e}{dy}\right) = \frac{y-b}{e} = \eta$; $\left(\frac{d \cdot e}{dz}\right) = \frac{z-c}{e} = \zeta$;

eben so ist $e' = \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2}$, also $\left(\frac{d \cdot e'}{dx}\right) = \frac{x-a'}{e'} = \xi'$; $\left(\frac{d \cdot e'}{dy}\right) = \frac{y-b'}{e'} = \eta'$; $\left(\frac{d \cdot e'}{dz}\right) = \frac{z-c'}{e'} = \zeta'$; u. s. w.

Findet nun eine unendlich kleine Veränderung des Punktes (x, y, z) nach der Richtung $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ Statt, und wird die entsprechende Veränderung der Coordinaten durch dx , dy , dz bezeichnet, so ist $\bar{\alpha} = \frac{dx}{\varepsilon}$, $\bar{\beta} = \frac{dy}{\varepsilon}$, $\bar{\gamma} = \frac{dz}{\varepsilon}$,

und hiernach verwandelt sich Gleichung IV. in diese:

$$\left[K \left(\frac{d \cdot e}{dx} \right) + K' \left(\frac{d \cdot e'}{dx} \right) + K'' \left(\frac{d \cdot e''}{dx} \right) + \dots \right] \frac{dx}{\varepsilon} + \left[K \left(\frac{d \cdot e}{dy} \right) + K' \left(\frac{d \cdot e'}{dy} \right) + \dots \right] \frac{dy}{\varepsilon} + \left[K \left(\frac{d \cdot e}{dz} \right) + K' \left(\frac{d \cdot e'}{dz} \right) + \dots \right] \frac{dz}{\varepsilon} = 0,$$

oder

$$K d \cdot e + K' d \cdot e' + K'' d \cdot e'' + \dots = 0.$$

Man sieht also, daß beim Gleichgewichte die Summe der Kräfte eine jede von ihnen vorher multiplicirt mit der Veränderung, welche resp. die Linien, in welcher die Kräfte wirken, bei einer unendlich kleinen und zufolge der Bedingungen möglichen Verrückung des Punktes erfahren, Null sein muß; und umgekehrt findet Gleichgewicht Statt, wenn dieses für jede mögliche Verrückung der Fall ist. Dieses ist das sogenannte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

3. Aufgabe.

Man soll, wenn zwei in einer Ebene liegende Kräfte auf zwei mit einander festverbundene Punkte wirken, die Resultate der beiden Kräfte, wenn es überhaupt eine solche gibt, bestimmen.

Auflösung.

L und L' seien die fest mit einander verbundenen Punkte; K und K' die resp. auf sie wirkenden Kräfte; α und α' die Winkel, welche sie mit der Verbindungslinie LL' in einer bestimmten Richtung gerechnet bilden. Es ist nun ersichtlich klar, daß man den Angriffspunkt einer Kraft beliebig in ihrer Richtung versetzen kann, vorausgesetzt, daß der neue Angriffspunkt mit dem ursprünglichen fest verbunden ist. Versetzen wir also beide Kräfte in den Durchschnittspunkt A, Fig. 5., ihrer Richtungen, und machen $AB = K$, $AC = K'$, so wird die Diagonale des Parallelogramms ABDC, oder die Linie AD die gesuchte Resultante R sein, die wir auch in den Punkt I versetzen können. Wir haben nun die Größe und Richtung von AD und die Lage des Punktes I zu bestimmen. Bezeichnen wir den Winkel AIL, welchen die Richtung der Resultante mit LL' bildet durch γ , ziehen die Linie $ST \parallel LL'$, und fällen die Perpendikel BE, CF, DG und CH, so ist

$$BE = K \sin \alpha; \quad CF = K' \sin \alpha'; \quad DG = R \sin \gamma;$$

$$AE = -K \cos \alpha; \quad AF = K' \cos \alpha'; \quad AG = R \cos \gamma;$$

da aber $\triangle DCH \cong BAE$, so ist

$$DG = BE + CF \quad \text{und} \quad AG = AF - AE;$$

also haben wir:

V. $R \sin \gamma = K \sin \alpha + K' \sin \alpha'$, $R \cos \gamma = K \cos \alpha + K' \cos \alpha'$, wodurch R und γ , d. h. Größe und Richtung der Resultante bestimmt sind. Ziehen wir nun noch BB' und $CHC' \parallel LL'$ und IM senkrecht auf ST, und bezeichnen wir IL durch q, IL' durch q', so ist $BB' = q \cdot \frac{K \sin \alpha}{IM}$ und $CC' = q' \cdot \frac{K' \sin \alpha'}{IM}$, also, da $BB' = CC'$

*) Denn $\frac{IM}{AL} = \sin \alpha$, also $AL = \frac{IM}{\sin \alpha}$; $\frac{IM}{AL'} = \sin \alpha'$, also $AL' = \frac{IM}{\sin \alpha'}$.

$$\text{VI. } q K \sin. \alpha = q' K' \sin. \alpha',$$

wodurch die Lage des Punktes I, des Angriffspunktes der Resultante bestimmt ist. In Gleichung VI. ist auch das Gesetz des Hebels gegeben. Denken wir uns nehmlich den Punkt I unverrückbar befestigt, so daß sich die Punkte L, L' nur um ihn drehen können, so haben wir einen mathematischen Hebel, und dieser wird offenbar im Gleichgewichte sein, was auch die Resultante für eine Größe und Richtung haben mag, wenn nur der Punkt I die durch Gleichung VI. bestimmte Lage hat. Die Größe $Kq \sin. \alpha$ nennt man das Moment der Kraft K in Bezug auf den Punkt I, und dieses ist offenbar das Produkt aus der Kraft und dem Perpendikel von I auf ihre Richtung. Man sagt daher: die Bedingung des Gleichgewichts an einem Hebel ist die Gleichheit der Momente beider Kräfte in Bezug auf den Unterstützungspunkt. Richtiger wäre es zu sagen: die Summe der Momente muß Null sein, oder die Momente müssen dem Zahlenwerthe nach einander gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sein; indem man die Momente nur dann als wirklich gleich ansieht, wenn sie den Hebel in demselben Sinne zu drehen streben.

Um die Lage des Punktes I, des sogenannten Hypomochliums, zu bestimmen, nimmt man am besten auf der Linie LL' einen beliebigen Anfangspunkt. Ist die Entfernung des Punktes L von dem letztern = a, die des Punktes L' = a', und die des Punktes I = c, so ist $q = c - a$ und $q' = a' - c$, also gibt Gleichung VI.:

$$(c - a) K \sin. \alpha = (a' - c) K' \sin. \alpha',$$

oder

$$\text{VII. } c = \frac{a K \sin. \alpha + a' K' \sin. \alpha'}{K \sin. \alpha + K' \sin. \alpha'}.$$

Ist in diesem Ausdrucke der Nenner, also $K \sin. \alpha + K' \sin. \alpha' = 0$, so wird $c = \infty$, falls nicht etwa auch der Zähler $a K \sin. \alpha + a' K' \sin. \alpha' = 0$ ist, was dann aber nur sein kann, wenn entweder $a = a'$, oder $K \sin. \alpha = 0 = K' \sin. \alpha'$. Es läßt sich also dann keine Resultante an einem Punkte der Linie LL' angebracht denken, womit noch nicht gesagt ist, daß überhaupt keine Resultante existire, doch kann auch

dieser Fall eintreten. Um dieses genau zu untersuchen, wollen wir die Betrachtung auf eine andere Weise anstellen, wodurch sich zugleich die Allgemeinheit der Gleichungen V. und VII. ergeben wird, die aus der obigen geometrischen Betrachtung nicht ohne Weiteres einleuchtet.

Die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft K mögen a und b heißen, ihre Determinanten ξ und η , eben so für die Kraft K' die Coordinaten a' und b' , die Determinanten ξ' und η' ; versehen wir nun die Kräfte nach ihrem Durchschnittspunkte, und zerlegen sie nach den Axen, so ergeben sich nachstehende Werthe für die Componenten:

$$\begin{aligned} & \text{nach der Axe X : } K\xi \text{ und } K'\xi', \\ & \text{nach der Axe Y : } K\eta \text{ und } K'\eta'. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die Determinanten ihrer Resultante R mit $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$, so haben wir offenbar, wenn wir auch die Resultante nach den Axen zerlegen:

$$\text{VIII. } R\bar{\xi} = K\xi + K'\xi', \quad R\bar{\eta} = K\eta + K'\eta',$$

welche Gleichungen mit den Gleichungen V. identisch sind. Die Resultante geht aber durch den Durchschnittspunkt der beiden Kräfte K und K' , deren Gleichungen diese sind:

$$(6.) \quad \eta(x-a) - \xi(y-b) = 0 \quad \text{und} \quad (7.) \quad \eta'(x-a') - \xi'(y-b') = 0,$$

und die Gleichung der Resultante ist zufolge der Gleichung VIII.

$$(8.) \quad [K\eta + K'\eta'](x-\bar{a}) - [K\xi + K'\xi'](y-\bar{b}) = 0,$$

wo \bar{a} , \bar{b} die Coordinaten eines willkürlichen Punktes in der Resultante bezeichnen; — folglich müssen dieselben Werthe von x und y allen drei Gleichungen entsprechen. Eliminiren wir daher x und y , indem wir Gleichung (6.) mit $-K$, Gleichung (7.) mit $-K'$ multipliciren, und addiren dann, so bekommen wir:

$$\text{IX. } (K\eta + K'\eta')\bar{a} - (K\xi + K'\xi')\bar{b} = (aK\eta + a'K'\eta') - (bK\xi + b'K'\xi'),$$

welcher Gleichung die Coordinaten \bar{a} , \bar{b} entsprechen müssen, oder was dasselbe sagen will, welches in \bar{a} , \bar{b} die Gleichung der Resultante ist. Man sieht also, daß es immer eine Resultante gibt, so lange nicht zugleich

$$\begin{aligned} & K\xi + K'\xi' = 0 \quad \text{und} \quad K\eta + K'\eta' = 0, \\ & \text{d. h. } K = K', \quad \xi' = -\xi \quad \text{und} \quad \eta' = -\eta \end{aligned}$$

ist, was sagen will: so lange nicht die Kräfte einander gleich sind, und in entgegengesetzter Richtung wirken, und selbst dann existirt noch eine Resultante, nämlich wenn auch

$$(aK\eta + a'K'\eta') - (bK\xi + b'K'\xi') = 0^*)$$

ist; welche Bedingungsgleichung sich für unsern Fall auf diese reducirt:

$$[\eta(a - a') - \xi(b - b')] = 0,$$

und ausagt, daß der Punkt (a', b') in der Linie der Kraft K liegen, und also die gleiche Kraft K' , wegen $\xi' = -\xi$ und $\eta' = -\eta$ der Kraft K geradezu entgegengesetzt sein muß.

Nur in dem Falle also, wo die Kräfte in Hinsicht der Intensität einander gleich, in Hinsicht der Richtung einander entgegengesetzt sind, aber nicht in eine Linie zusammenfallen, wo also $\eta(a - a') - \xi(b - b')$ nicht $= 0$ ist, haben wir keine Resultante, indem dieselbe nicht nur Null ist, sondern auch in die Unendlichkeit fällt. Wir wollen solche zwei Kräfte gepaarte Kräfte nennen.

Unter den verschiedenen Werthen, welche der Gleichung IX. entsprechen, sind auch diese:

$$\bar{a} = \frac{aK\eta + a'K'\eta'}{K\eta + K'\eta'}, \quad \bar{b} = \frac{bK\xi + b'K'\xi'}{K\xi + K'\xi'};$$

Ex bibl. math.

es sind dieses aber nicht die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Resultante mit der Verbindungslinie der Punkte (a, b) und (a', b') , wie man leicht daraus ersieht, daß sie der Gleichung

$$\left(\frac{\bar{a} - a}{\bar{b} - b}\right) = \left(\frac{a' - a}{b' - b}\right)$$

nicht nothwendig entsprechen. Wir können uns die Resultante immer in

*) Denn dann kann der Gleichung IX. durch endliche Werthe von \bar{a} , \bar{b} Genüge geleistet werden, und zwar können \bar{a} und \bar{b} jeden beliebigen endlichen Werth haben; dies ist jedoch nicht der Fall, wenn $(aK\eta + a'K'\eta') - (bK\xi + b'K'\xi')$ nicht $= 0$, weil dann der Gleichung IX. nur durch unendliche Werthe von \bar{a} und \bar{b} entsprochen werden kann.

diesen Punkt verlegt denken (nur in dem Falle nicht, wo gar keine Resultante existirt), und sie ist vollständig durch diese Gleichungen bestimmt:

$$X. \quad \begin{cases} R \bar{\xi} = K \xi + K' \xi', & R \bar{\eta} = K \eta + K' \eta', \\ \bar{a} R \bar{\eta} = a K \eta + a' K' \eta', & \bar{b} R \bar{\xi} = b K \xi + b' K' \xi'. \end{cases}$$

4. Aufgabe.

Man soll, wenn auf ein System von Punkten, die alle in einer Ebene liegen und durch ihre Coordinaten gegeben sind, in derselben Ebene liegende Kräfte wirken, die Resultante, wenn es eine solche gibt, bestimmen und die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts entwickeln.

A u f l ö s u n g.

Die Coordinaten der Punkte seien (x, y) , (x', y') , (x'', y'') , zc.; die resp. Kräfte $K, K', K'',$ zc., welche in den Richtungen (ξ, η) , (ξ', η') , (ξ'', η'') , zc. wirken. Zerlegen wir die Kräfte nach den zwei Axen des Axensystems, und bezeichnen die sich ergebenden Componenten mit $X, Y; X', Y'; X'', Y'';$ zc., so können wir die beiden ersten Kräfte K und K' ersetzt denken durch die Resultante R' , deren Componenten $\overset{\cdot}{X}$ und $\overset{\cdot}{Y}$ seien, und die im Punkte $(\overset{\cdot}{x}, \overset{\cdot}{y})$ wirkt, und wir haben nach X.:

$$\overset{\cdot}{X} = X + X', \quad \overset{\cdot}{Y} = Y + Y', \quad \overset{\cdot}{x} \overset{\cdot}{Y} = xY + x'Y', \quad \overset{\cdot}{y} \overset{\cdot}{X} = yX + y'X'.$$

Ersetzen wir ferner die Kräfte R' und K'' durch ihre Resultante R'' , deren Angriffspunkt durch $(\overset{\cdot\cdot}{x}, \overset{\cdot\cdot}{y})$ gegeben sei, und deren Componenten $\overset{\cdot\cdot}{X}, \overset{\cdot\cdot}{Y}$ seien, so hat man:

$$\overset{\cdot\cdot}{X} = \overset{\cdot}{X} + X'' = X + X' + X'', \quad \overset{\cdot\cdot}{Y} = \overset{\cdot}{Y} + Y'' = Y + Y' + Y'', \\ \overset{\cdot\cdot}{x} \overset{\cdot\cdot}{Y} = \overset{\cdot}{x} \overset{\cdot}{Y} + x''Y'' = xY + x'Y' + x''Y'', \quad \overset{\cdot\cdot}{y} \overset{\cdot\cdot}{X} = \overset{\cdot}{y} \overset{\cdot}{X} + y''X'' = yX + y'X' + y''X''.$$

R'' ist also offenbar die Resultante der drei Kräfte K, K', K'' . Führt man nun so fort, so ist klar, daß sich, wenn die Resultante aller Kräfte mit R , ihr Angriffspunkt mit (\bar{x}, \bar{y}) bezeichnet wird, und ihre Componenten \bar{X}, \bar{Y} sind, die nachfolgenden Gleichungen ergeben:

$$\text{XI. } \begin{cases} \bar{X} = X + X' + X'' + X''' + \&c. = \Sigma(X), \\ \bar{Y} = Y + Y' + Y'' + Y''' + \&c. = \Sigma(Y), \end{cases}$$

$$\text{XII. } \begin{cases} \bar{x}\bar{Y} = xY + x'Y' + x''Y'' + x'''Y''' + \&c. = \Sigma(xY), \\ \bar{y}\bar{X} = yX + y'X' + y''X'' + y'''X''' + \&c. = \Sigma(yX). \end{cases}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Resultante aller Kräfte

$$R = \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2}$$

ist, daß ihre Determinanten

$$\frac{\bar{X}}{R} \text{ und } \frac{\bar{Y}}{R}$$

und die Coordinaten ihres Angriffspunktes

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(xY)}{\bar{Y}} \text{ und } \bar{y} = \frac{\Sigma(yX)}{\bar{X}}$$

sind, wobei übrigens zu bemerken ist, daß die Resultante nicht nothwendig in diesem Punkte wirkend gedacht zu werden braucht, sondern in jedem Punkte ihrer Richtung angebracht sein kann; die Größen \bar{x} , \bar{y} brauchen also eigentlich nur der Gleichung

$$\frac{\bar{x} - \frac{\Sigma(xY)}{\bar{Y}}}{\bar{y} - \frac{\Sigma(yX)}{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}},$$

oder

$$\text{XIII. } \bar{x}\bar{Y} - \bar{y}\bar{X} = \Sigma(xY) - \Sigma(yX) = \Sigma(xY - yX)$$

zu entsprechen.

Es wird also immer eine Resultante $= \sqrt{\Sigma[X]^2 + \Sigma[Y]^2}$ sein, deren Gleichung $\bar{x}\Sigma(Y) - \bar{y}\Sigma(X) = \Sigma(xY - yX)$ und Determinanten $\frac{\Sigma(X)}{\sqrt{\quad}}$ und $\frac{\Sigma(Y)}{\sqrt{\quad}}$, es sei denn, daß $\Sigma(X) = 0$ und $\Sigma(Y) = 0$, ohne daß $\Sigma(xY - yX) = 0$ ist.

Finden demnach die Gleichungen Statt:

$$\text{XIV. } \begin{cases} \Sigma(X) = K\xi + K'\xi' + K''\xi'' + \dots = 0, \\ \Sigma(Y) = K\eta + K'\eta' + K''\eta'' + \dots = 0, \\ \Sigma(xY - yX) = K(x\eta - y\xi) + K'(x'\eta' - y'\xi') + \dots = 0, \end{cases}$$

so ist das System von Kräften im Gleichgewichte, denn es hat eine Resultante, die = 0 ist, ohne in die Unendlichkeit zu fallen, und die an jedem beliebigen Punkte angebracht werden kann. Es müssen aber auch umgekehrt diese Bedingungsgleichungen alle drei Statt haben, wenn Gleichgewicht sein soll; die ersten beiden, weil sonst die Resultante nicht Null wäre, die letzte, weil sonst die Kräfte sich auf zwei gepaarte Kräfte reduciren ließen. Dieses sieht man folgendermaßen leicht ein. Bringt man noch eine beliebige Kraft \dot{K} mit den Determinanten $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ und im Punkte (\dot{x}, \dot{y}) wirkend an, so hat das ganze System eine Resultante, welche durch die folgenden Gleichungen bestimmt ist:

$$\dot{R} \bar{\xi} = \dot{K} \dot{\xi} + \Sigma(X) = \dot{K} \dot{\xi},$$

$$\dot{R} \bar{\eta} = \dot{K} \dot{\eta} + \Sigma(Y) = \dot{K} \dot{\eta},$$

$$\dot{R} (\bar{x} \bar{\eta} - \bar{y} \bar{\xi}) = \dot{K} (\dot{x} \dot{y} - \dot{y} \dot{\xi}) + \Sigma(xY - yX),$$

und aus denen folgt, daß $R = \dot{K}$, $\bar{\xi} = \dot{\xi}$, $\bar{\eta} = \dot{\eta}$ und $(\bar{x} - \dot{x}) \dot{\eta} - (\bar{y} - \dot{y}) \dot{\xi} = \frac{\Sigma(xY - yX)}{\dot{K}}$. Da nun das ganze System von Kräften

vereinigt mit der Kraft \dot{K} , deren Richtung $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ und Angriffspunkt (\dot{x}, \dot{y}) , der Resultante R equivalent ist, so ist das System allein dieser Resultante d. h. \dot{K} vereinigt mit einer der \dot{K} entgegengesetzten Kraft equivalent, d. h. es wird ersetzt durch zwei gepaarte Kräfte (Siehe pag. 17.), weil nemlich $(\bar{x} - \dot{x}) \dot{\eta} - (\bar{y} - \dot{y}) \dot{\xi}$ nicht = 0, sondern = $\frac{\Sigma(xY - yX)}{\dot{K}}$,

d. h. die entgegengesetzte Kraft $-\dot{K}$ nicht in der Linie der Resultante $+\dot{K}$ wirkt. Die beiden gepaarten Kräfte $+\dot{K}$ und $-\dot{K}$ sind bestimmt durch

$$\dot{K}; \dot{\xi}, \dot{\eta}; \bar{x}, \bar{y} \text{ und } \dot{K}; -\dot{\xi}, -\dot{\eta}; \dot{x}, \dot{y}.$$

Es folgt weiter, daß, weil wir \dot{K} und die Richtung $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ der neuen Kraft willkürlich gewählt haben, die gemeinschaftliche Richtung und Intensität der gepaarten Kräfte beliebig ist, nur muß $(\bar{x} - \dot{x}) \dot{\eta} - (\bar{y} - \dot{y}) \dot{\xi}$,

d. h. die senkrechte Entfernung *) der beiden Linien in welchen sie wirken, $= \frac{\Sigma(xY - yX)}{K}$, also ihrer Intensität umgekehrt proportional sein. Ein solches System wird also durch unzählige Paare gepaarter Kräfte ersetzt.

Ist ein Punkt der Ebene in welcher die Kräfte wirken unbeweglich, so wird offenbar zum Gleichgewicht erforderlich sein, daß die Resultante durch ihn gehe. Nehmen wir ihn zum Anfangspunkte der Coordinaten, so sind seine Coordinaten $= 0$, also müßte nur der Gleichung XIII. durch die Werthe $\bar{x} = 0$ und $\bar{y} = 0$ genügt werden, d. h. es müßte $\Sigma(xY - yX) = K(x\eta - y\xi) + K'(x'\eta' - y'\xi') + \alpha. = 0$ sein. Das Produkt $K(x\eta - y\xi)$ ist das Moment der Kraft K in Bezug auf den Anfangspunkt des Axensystems, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem die Kraft K den Punkt (x, y) in der Richtung von der Axe x zur Axe y , oder in der entgegengesetzten Richtung um den Anfangspunkt zu drehen strebt.

Die Gleichungen XI., XIII., XIV., und die Gleichungen $\Sigma(xY - yX) = 0$ lassen sich auf folgende Weise resp. in Worte fassen: 1) Die Com-

*) Bezeichnet man nämlich die Entfernung der beiden Punkte (\bar{x}, \bar{y}) , (\dot{x}, \dot{y}) mit r , so kann man, weil $r = \sqrt{(\bar{x} - \dot{x})^2 + (\bar{y} - \dot{y})^2}$ ist, $(\bar{x} - \dot{x})\eta - (\bar{y} - \dot{y})\xi$ schreiben: $\left[\frac{(\bar{x} - \dot{x})\eta}{\sqrt{(\bar{x} - \dot{x})^2 + (\bar{y} - \dot{y})^2}} - \frac{(\bar{y} - \dot{y})\xi}{\sqrt{(\bar{x} - \dot{x})^2 + (\bar{y} - \dot{y})^2}} \right] r$. Stellen nun MN , MO , Fig. 6, die beiden rechtwinkligen Axen, k und k' die beiden gepaarten Kräfte vor, von denen die erstere in dem durch die Coordinaten \dot{x} , \dot{y} bestimmten Punkte p , die andere in dem durch die Coordinaten \bar{x} , \bar{y} bestimmten Punkte p' angreift, so ist offenbar, wenn po senkrecht auf das von p' auf die Axe der Abscissen gefällte Perpendikel $p's$ gezogen, und der Winkel $p'po$ mit φ , der Winkel opt mit ψ bezeichnet wird, $\frac{\bar{x} - \dot{x}}{r} = \text{Cos. } \varphi$, $\frac{\bar{y} - \dot{y}}{r} = \text{Sin } \varphi$; da aber $\eta = \text{Cos. } \text{Oup} = -\text{Sin. } \text{Mtp} = -\text{Sin. } \text{opt} = -\text{Sin. } \psi$, und $\xi = \text{Cos. } \text{Mtp} = \text{Cos. } \text{opt} = \text{Cos. } \psi$, so verwandelt sich der Ausdruck $\left[\frac{(\bar{x} - \dot{x})\eta}{\sqrt{(\bar{x} - \dot{x})^2 + (\bar{y} - \dot{y})^2}} - \frac{(\bar{y} - \dot{y})\xi}{\sqrt{(\bar{x} - \dot{x})^2 + (\bar{y} - \dot{y})^2}} \right] r$ in $-r[\text{Sin. } \psi \cdot \text{Cos. } \varphi + \text{Cos. } \psi \cdot \text{Sin. } \varphi]$ d. i. in $-r \text{Sin}(\varphi + \psi)$, woraus ohne Weiteres die obige Behauptung folgt.

ponenten der Resultante sind gleich der Summe der Componenten der einzelnen Kräfte; 2) das Moment der Resultante ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte; 3) wenn das System von Kräften ganz frei ist, so hat man Gleichgewicht, wenn die Summe der Componenten der Kräfte, und die Summe der Momente in Bezug auf den Anfangspunkt des Axensystems Null ist; 4) wenn ein Punkt in der Ebene in welcher die Kräfte wirken fest ist, so hat man Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente der einzelnen Kräfte bezogen auf diesen Punkt, als Anfangspunkt des Axensystems, Null ist.

5. Aufgabe.

Es sei im Raume ein System von Punkten gegeben, welche zwar beliebige Lage haben, aber fest mit einander verbunden sind; auf dieses System wirken verschiedene Kräfte in beliebigen Richtungen; man soll die Resultante bestimmen, wenn es eine solche gibt, und die Bedingungen des Gleichgewichts finden.

Auflösung.

Die Punkte seien durch die Coordinaten $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; \dots$, die auf sie resp. wirkenden Kräfte durch ihre Componenten $X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; \dots$ gegeben. Schnitten alle diese Kräfte die Ebene (X, Y) , so könnten wir dieselben ohne Weiteres an diese Durchschnittspunkte versetzen, da jedoch nicht von allen Kräften dieses vorauszusetzen ist, so wollen wir dieselben durch zwei Systeme ersetzen, nemlich:

Angriffspunkte.	Kräfte I.	Kräfte II.
$x, y, z;$	$X, Y, Z + Q;$	$0, 0, - Q;$
$x', y', z';$	$X', Y', Z' + Q'$	$0, 0, - Q';$
$x'', y'', z'';$	$X'', Y'', Z'' + Q'';$	$0, 0, - Q'';$
&c. &c.;	&c. &c.;	&c. &c.

Die Kräfte I. werden jetzt immer die Ebene (X, Y) schneiden, wenn wir nur die Q, Q', Q'', \dots gehörig wählen; eben so die Kräfte II. Ver-

setzen wir sie jetzt nach den Durchschnittspunkten, so bekommen wir folgende Systeme:

Angriffspunkte.	Kräfte.	Angriffspunkte.	Kräfte.
$x - \frac{zX}{Z+Q}, y - \frac{zY}{Z+Q};$	$X, Y, Z+Q;$	$x, y;$	$0, 0 - Q,$
$x' - \frac{z'X'}{Z'+Q'}, y' - \frac{z'Y'}{Z'+Q'};$	$X', Y', Z'+Q';$	$x', y';$	$0, 0 - Q_1$
&c. ;	&c.;	&c.;	&c.;

Von diesen beiden Systemen wirken die Kräfte des einen senkrecht zur Hauptebene (X, Y) des Axensystems, und die Kräfte des andern Systems in der Hauptebene (X, Y). Das System von Kräften, welches in der Hauptebene (X, Y) liegt, ist folgendermaßen bestimmt:

$$\Sigma(X) = A, \quad \Sigma(Y) = B, \quad \Sigma(xY - yX) = N.$$

Das System senkrecht zur Hauptebene (X, Y) ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\Sigma(Z) = C, \quad \Sigma(yZ - zY) = L, \quad \Sigma(zX - xZ) = M.$$

Haben wir also erstens

$$A, B \text{ und } C = 0 \text{ und auch } L, M \text{ und } N = 0,$$

so ist Gleichgewicht.

Haben wir zweitens

$$A, B \text{ und } C = 0, \text{ aber nicht auch } L, M \text{ und } N = 0,$$

und wir bringen eine Kraft ($\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$) im Punkte ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) und eine Kraft ($-\dot{X}, -\dot{Y}, -\dot{Z}$) im Punkte ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) an, so ist offenbar Gleichgewicht da, wenn nur

$$(\dot{y} - \bar{y})\dot{Z} - (\dot{z} - \bar{z})\dot{Y} = L, \quad (\dot{z} - \bar{z})\dot{X} - (\dot{x} - \bar{x})\dot{Z} = M, \\ (\dot{x} - \bar{x})\dot{Y} - (\dot{y} - \bar{y})\dot{X} = N,$$

$$d. h. L\dot{X} + M\dot{Y} + N\dot{Z} = 0, \text{ und auch } L(\dot{x} - \bar{x}) + M(\dot{y} - \bar{y}) + N(\dot{z} - \bar{z}) = 0,$$

$$\text{und } \sqrt{[(\dot{y} - \bar{y})\dot{Z} - (\dot{z} - \bar{z})\dot{Y}]^2 + [(\dot{z} - \bar{z})\dot{X} - (\dot{x} - \bar{x})\dot{Z}]^2 + [(\dot{x} - \bar{x})\dot{Y} - (\dot{y} - \bar{y})\dot{X}]^2} \\ = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

das System ist in diesem Falle also equivalent zweien beliebigen gepaarten Kräften, nemlich $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ im Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ und $(-\dot{X}, -\dot{Y}, -\dot{Z})$ im Punkte $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$; jedoch müssen diese in einer Ebene liegen, deren Determinanten sich wie $L : M : N$ verhalten, und das Moment der einen gegen die andern muß $= \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ sein.

Saben wir drittens nicht A, B und $C = 0$, aber doch $AL + BM + CN = 0$, und wir denken uns eine Kraft $(-\dot{X}, -\dot{Y}, -\dot{Z})$ im Punkte $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ angebracht, so entsteht Gleichgewicht, sobald

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A, & \dot{y}\dot{Z} - \dot{z}\dot{Y} &= L, & \dot{y}\dot{C} - \dot{z}\dot{B} &= L, \\ \dot{Y} &= B, & \text{und } \dot{z}\dot{X} - \dot{x}\dot{Z} &= M, & \text{oder } \dot{z}\dot{A} - \dot{x}\dot{C} &= M, \\ \dot{Z} &= C, & \dot{x}\dot{Y} - \dot{y}\dot{X} &= N, & \dot{x}\dot{B} - \dot{y}\dot{A} &= N, \end{aligned}$$

welchen letztern drei Gleichungen durch $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ genügt werden kann, weil $AL + BM + CN = 0$ ist, und zwar durch endliche Werthe von $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Also ist in diesem Falle das System einer Kraft $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ im Punkte $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ equivalent; es hat eine Resultante.

Saben wir viertens nicht A, B und $C = 0$, und auch nicht $AL + BM + CN = 0$, so wollen wir eine Kraft $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ und eine $(-\dot{X}, -\dot{Y}, -\dot{Z})$, beide im Punkte $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ anbringen. Die letztere wird sich mit allen gegebenen in eine Resultante vereinigen lassen $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ im Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, die so bestimmt ist:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= A - \dot{X}, & \bar{Y} &= B - \dot{Y}, & \bar{Z} &= C - \dot{Z}, \\ \bar{y}\bar{Z} - \bar{z}\bar{Y} &= L - (\dot{y}\dot{Z} - \dot{z}\dot{Y}), & \bar{z}\bar{X} - \bar{x}\bar{Z} &= M - (\dot{z}\dot{X} - \dot{x}\dot{Z}), \end{aligned}$$

und endlich

$$\bar{x}\bar{Y} - \bar{y}\bar{X} = N - (\dot{x}\dot{Y} - \dot{y}\dot{X});$$

hiernach also kann das ganze System durch zwei Kräfte ersetzt werden, und zwar auf unzählige Arten, da die willkürlich gewählte Kraft $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ im Punkte $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ nur so beschaffen sein muß, daß $\dot{X} : \dot{Y} : \dot{Z}$ nicht wie $A : B : C$ und daß $L\dot{X} + M\dot{Y} + N\dot{Z} + A(\dot{y}\dot{Z} - \dot{z}\dot{Y}) + B(\dot{z}\dot{X} - \dot{x}\dot{Z}) + C(\dot{z}\dot{Y} - \dot{y}\dot{X})$

= AL + BM + CN, die in Rede stehenden beiden Kräfte liegen aber in zwei verschiedenen Ebenen*) lassen sich also weder zu einer vereinigen, noch sind es zwei gepaarte Kräfte.

Sind zwei der Größen A, B, C nicht = 0, z. B. A und B, so kann man die zwei Kräfte so bestimmen:

$$\dot{X} = 0, \dot{Y} = 0, \dot{Z} = C, \dot{x} = -\frac{M}{C}, \dot{y} = \frac{L}{C}, \dot{z} \text{ beliebig};$$

$$\bar{X} = A, \bar{Y} = B, \bar{Z} = 0, \bar{x}B - \bar{y}A = N, \bar{z} = 0.$$

Ist aber nur eine von den Größen A, B, C nicht = 0, z. B. die Größe C, so kann man die zwei Kräfte so bestimmen:

$$\dot{X} \text{ beliebig}, \dot{Y} = 0, \dot{Z} = 0, \dot{x} \text{ beliebig}, \dot{y} = \frac{L}{C} - \frac{N}{\dot{X}}, \dot{z} = 0;$$

$$\bar{X} = -\dot{X}, \bar{Y} = 0, \bar{Z} = C, \bar{x} = -\frac{M}{C}, \bar{y} = \frac{L}{C}, \bar{z} = 0.$$

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ist nun auch klar, daß die Gleichungen

$$\Sigma(X) = 0, \Sigma(Y) = 0, \Sigma(Z) = 0,$$

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \Sigma(zX - xZ) = 0, \Sigma(xY - yX) = 0$$

nicht nur genügende, sondern auch nothwendige Bedingungen des Gleichgewichts sind. Sie gelten übrigens nicht bloß für ein festes System, sondern auch für ein bewegliches System, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, aber sie genügen im letztern Falle nicht.

Schließlich wollen wir noch die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines Systems von Punkten aufsuchen unter der Voraussetzung, daß dieses nicht ganz frei ist.

Erstens sei der Punkt (a, b, c), der mit dem Systeme von Punkten fest verbunden ist, unbeweglich. In diesem Falle ist offenbar

*) Daß die beiden Kräfte nicht in einer Ebene liegen geht daraus hervor, daß

$$[(\bar{y}-\bar{y})\dot{Z} - (\bar{z}-\bar{z})\dot{Y}] \bar{X} + [(\bar{z}-\bar{z})\dot{X} - (\bar{x}-\bar{x})\dot{Z}] \bar{Y} + [(\bar{x}-\bar{x})\dot{Y} - (\bar{y}-\bar{y})\dot{X}] \bar{Z} =$$

 also nicht = 0 ist.
 AL + BM + CN,

zum Gleichgewichte nothwendig und genügt auch dazu, daß das System eine Resultante habe, die durch den Punkt (a, b, c) geht, was zutreffen wird, wenn die Gleichungen

$$bC - cB = L, \quad cA - aC = M, \quad aB - bA = N$$

erfüllt sind.

Wäre der Punkt (a, b, c) nicht unbeweglich, aber an eine Curve gebunden, deren Tangente in diesem Punkte die Determinanten α, β, γ hat, so käme noch die Gleichung

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

hinzu, und wenn der Punkt an eine Fläche gebunden wäre, deren Normale die Determinanten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ hat, die Proportion

$$A : B : C = \dot{\alpha} : \dot{\beta} : \dot{\gamma}.$$

Zweitens sei eine Linie, welche durch den Punkt (a, b, c) geht, und die Determinanten ξ, η, ζ hat, unbeweglich, dann ist nur nothig, daß die beiden Resultanten des Systems durch diese Linien gehen; daraus gehen die Gleichungen hervor:

$$(9.) \dot{X} + \bar{X} + A = 0, \quad (\lambda\eta + b)\dot{Z} - (\lambda\zeta + c)\dot{Y} + (\lambda'\eta + b)\bar{Z} - (\lambda'\zeta + c)\bar{Y} + L = 0,$$

$$(10.) \dot{Y} + \bar{Y} + B = 0, \quad (\lambda\zeta + c)\dot{X} - (\lambda\xi + a)\dot{Z} + (\lambda'\zeta + c)\bar{X} - (\lambda'\xi + a)\bar{Z} + M = 0,$$

$$(11.) \dot{Z} + \bar{Z} + C = 0, \quad (\lambda\xi + a)\dot{Y} - (\lambda\eta + b)\dot{X} + (\lambda'\xi + a)\bar{Y} - (\lambda'\eta + b)\bar{X} + N = 0,$$

Die Gleichungen (9.), (10.), (11.) können aber leicht in diese umgeformt werden:

$$\lambda(\eta\dot{Z} - \zeta\dot{Y}) + \lambda'(\eta\bar{Z} - \zeta\bar{Y}) + L - bC + cB = 0,$$

$$\lambda(\zeta\dot{X} - \xi\dot{Z}) + \lambda'(\zeta\bar{X} - \xi\bar{Z}) + M - cA + aC = 0,$$

$$\lambda(\xi\dot{Y} - \eta\dot{X}) + \lambda'(\xi\bar{Y} - \eta\bar{X}) + N - aB + bA = 0,$$

welche unabhängig von $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \lambda, \lambda'$ stattfinden müssen; folglich muß die Bedingungsgleichung

$$\text{XV.} \quad \xi(L - bC + cB) + \eta(M - cA + aC) + \zeta(N - aB + bA) = 0$$

bestehen.

Könnte das System längs der in Rede stehenden Linie gleiten, so käme noch die Bedingung hinzu

$$\text{XVI. } \xi A + \eta B + \zeta C = 0,$$

weil nämlich $(\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}) + (\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}) = 0$ sein muß.

Die Bedingungsgleichungen XV. und XVI. lassen sich leichter herleiten, wenn man das Axensystem so verlegt, daß die neue Axe Z' in die Linie (a, b, c; ξ, η, ζ) fällt, und der neue Anfangspunkt der Punkt (a, b, c) ist. Zerlegt man nehmlich das System von Kräften in zwei Systeme, von denen das eine der Axe Z' parallel läuft, das andere in die Ebene (X', Y') fällt, so ist, da nur eine Drehung um die Linie (a, b, c; ξ, η, ζ), d. h. um die Axe Z' möglich, nach dem Früheren Gleichgewicht, wenn

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = 0.$$

Substituiert man aber in diese Gleichung die Werthe $x' = \xi'(x-a) + \eta'(y-b) + \zeta'(z-c)$; $y' = \xi''(x-a) + \eta''(y-b) + \zeta''(z-c)$ *); $X' = \xi'X + \eta'Y + \zeta'Z$; $Y' = \xi''X + \eta''Y + \zeta''Z$, so verwandelt sie sich in diese:

$$\xi(L - bC + cB) + \eta(M - cA + aC) + \zeta(N - aB + bA) = 0.$$

Wäre das ganze System längs der Linie (a, b, c; ξ, η, ζ), d. h. längs der Axe Z' verschiebbar, so müßte auch noch $\Sigma(Z') = 0$, d. h.

$$\xi A + \eta B + \zeta C = 0$$

sein.

Endlich sei drittens eine Ebene (a, b, c; ξ, η, ζ) fest und das System mit drei Punkten an diese gebunden, so, daß es sich jedoch auf derselben verschieben läßt, so ergeben sich die Bedingungen des Gleichgewichts sogleich, wenn man die feste Ebene zur Coordinatenebene (X', Y') macht, und den Punkt (a, b, c) zum Anfangspunkt des neuen Axensystems annimmt; man erhält nehmlich offenbar diese Gleichungen:

$$\Sigma(X') = 0, \quad \Sigma(Y') = 0, \quad \Sigma(x'Y' - y'X') = 0,$$

*) $\xi', \eta', \zeta'; \xi'', \eta'', \zeta''$ sind resp. die Determinanten der Axen X' und Y'.

aus welchen man leicht folgert, wenn man für X', Y' ; x', y' , wie vorher, ihre Werthe substituirt, daß sich verhalten muß

$$0 : A : B : C = \xi : \eta : \zeta,$$

und daß

$$\xi(L - bC + cB) + \eta(M - cA + aC) + \zeta(N - aB + bA) = 0$$

sein muß.

