TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

III

1. vihik

1983

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise analüüsi kateeder

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

III

1. vihik

TARTU 1983

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 21. jaanuaril 1983.a.

Koostanud E. Reimers

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ III.
Тетрадь I-я.
Составитель Эльмар Реймерс.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja E. Jürimäe.
Paljundamisele antud 03.02.1983.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 12,55.
Arvestuspoognaid 7,9. Trükipoognaid 13,5.
Trükiarv 600.
Tell. nr. 151.
Hind 25 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Pälsoni t. 14.

S I S U K O R D

E E S S Õ N A

Käesolev väljaanne sisaldab näiteid ja ülesandeid matemaatilise analüüsi alalt mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutuse ulatuses ja on mõeldud matemaatilise analüüsi praktikumi läbiviimiseks prof. G.Kangro õpiku "Matemaatiline analüüs" II (Tallinn, 1968) järgi TRÜ Matemaatikateaduskonna ja Füüsika-Keemiateaduskonna füüsikaosakonna esimestel kursustel kevadsemestril.

Ülesannete kogu igas osas on antud lühike teoreetiline sissejuhatus, kus on ära toodud põhilised mõisted, valemid ja teoreemid, mida läheb vaja vastava osa ülesannete lahendamisel. Samuti on toodud rohkesti näiteid tüüpiliste lahendusvõtete rakendamise kohta. See teeb ülesannete kogu kaunis sõltumatuks matemaatilise analüüsi kursuse õpikutest ja võimaldab praktikumi materjali kasutada ka iseseisvalt õppijail. Ülesannete kogu on sobiv kasutamiseks ka teistes ENSV kõrgemates õppeasutustes, kus matemaatilise analüüsi programmid on väiksema ulatusega.

Kõigile arvutusülesannetele on antud vastused. Tärnikesega (*) märgitud ülesannetele on vastustes antud kas lahendust põhjendav märkus, juhised lahendamiseks või on ära toodud lahenduse põhiosa.

Tuletise arvutamise põhivalemid

1. $c' = 0 \quad (c = \text{const})$

2. $x' = 1$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(x^a)' = ax^{a-1}$

6. $(a^x)' = a^x \ln a$

7. $(e^x)' = e^x$

8. $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$

9. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

10. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

16. $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

17. $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

18. $(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$

19. $(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$

20. $(\text{th}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

21. $(\text{cth}\, x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$

22. $(\text{arsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

23. $(\text{arch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $(\text{arth}\, x)' = \frac{1}{1 - x^2}$

25. $(\text{arcth}\, x)' = \frac{1}{1 - x^2}$

I. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

§ 1. Kahe muutuja funktsioonid.

Olgu D mingi arvupaaride (x,y) hulk. Geomeetriliselt kujutab hulk D endast punktide P = (x,y) hulka xy-tasandil (vt. joon. 1).

Kahe muutuja funktsiooni definitsioon. Kui igale arvupaarile (x,y) ehk punktile P = (x,y) hulgast D on seatud vastavusse mingi arv z, siis öeldakse, et suurus z on kahe muutuja x ja y ehk punkti P = (x,y) funktsioon ja kirjutatakse

$$z = f(x,y) \text{ või } z = f(P).$$

Seejuures arvu z nimetatakse funktsiooni f väärtuseks, hulka D ja hulka $Z = \{z\}$ vastavalt funktsiooni f määramis- ja muutumispiirkonnaks.

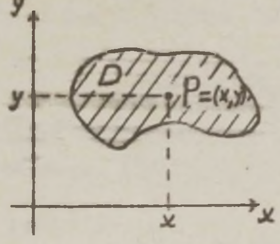
Kui arv z on üheselt määratud iga paari $(x,y) \in D$ korral, siis funktsiooni f nimetatakse üheseks, vastasel juhul mitmeseks.

Vastavalt definitsioonile on funktsioon f antud, kui on teada:

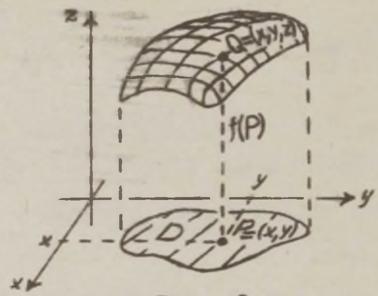
a) funktsiooni f määramispiirkond D,

b) vastavuse eeskiri z = f(x,y).

Kui vastavuse eeskiri z = f(x,y) juba määrab D, siis viimast eraldi enam ei anta. Näiteks, kui vastavuse eeskiri on antud analüütilise valemiga $z = f(P)$ ja määramispiirkond D ei ole ette antud, siis D all mõistetakse kõigi nende punktide P hulka, mille korral antud valemil on mõte, s.t. valem määrab reaalse väärtuse z.



Joon. 1



Joon. 2

Graafiku definitsioon. Arvukolmikute (x,y,z) ehk punktide $Q = (x,y,z)$ hulka, kus $z = f(P)$ ja $P = (x,y) \in D$, nimetatakse funktsiooni $z = f(x,y)$ graafikuks.

Geomeetriliselt kujutab graafik endast pinda xyz-ruumis (vt. joon. 2).

Kaks funktsiooni $z = f(x,y)$ ja $z = g(x,y)$ osutuvad samadeks funktsioonideks, kui neil mõlemal on üks ja seesama määramispiirkond D ning samad vastavuse eeskirjad, s.t. nende graafikud langevad kokku.

Olgu $\varepsilon > 0$ mingi arv. Punkti $P_0 = (x_0, y_0)$ ε-ümbruseks nimetatakse kõigi punktide $P = (x,y)$ hulka, mille kaugused punktist P_0 on väiksemad kui ε, s.o.

$$\overline{PP_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon .$$

Geomeetriliselt punkti P_0 ε-ümbrus kujutab endast ringi raadiusega ε, mille keskpunkt on P_0 ise.

Punkti P_0 nimetatakse hulga D <u>sisepunktiks</u>, kui P_0 kuulub hulka D koos oma mingi ε-ümbrusega, ja <u>rajapunktiks</u>, kui P_0 igas ε-ümbruses leidub nii hulga D punkte kui ka punkte, mis ei kuulu hulka D. Kõigi hulga D rajapunktide hulka nimetatakse hulga D <u>rajajooneks</u> ehk <u>rajaks</u>. Hulka D nimetatakse <u>lahtiseks</u>, kui kõik tema punktid on sisepunktid, ja <u>kinniseks</u>, kui hulka D kuuluvad ka kõik tema rajapunktid.

<u>Näide 1</u>. Leida ja joonistada funktsiooni

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$$

määramispiirkond D.

<u>Lahendus</u>. Funktsiooni avaldisest näeme, et z on määratud, kui

$$(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) \geqslant 0.$$

Viimane tingimus on samaväärne tingimustega

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Esimesest süsteemist saame

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1 \\ x^2 + y^2 \leqslant 4, \end{cases}$$

kust

$$1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4.$$

Teisel süsteemil ei ole lahendeid.

Seega antud funktsiooni määramispiirkond on hulk

$$D = \{(x,y):\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}.$$

Määramispiirkonna D raja moodustavad kontsentrilised ringjooned

$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4$$

keskpunktidega punktis (0,0) ja raadiustega vastavalt 1 ja 2. Nagu näeme, raja kuulub hulka D ning seega D on kinnine hulk. Nüüd võime joonistada määramispiirkonna D (vt. joon. 3).

Antud ülesande võib lahendada ka järgmiselt. Tähistame

$$u = x^2 + y^2,$$

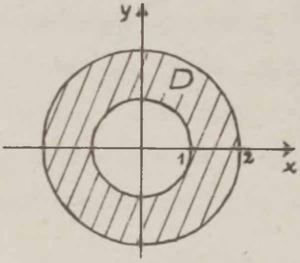
siis D määramiseks saame u suhtes ruutvõrratuse

$$(u - 1)(4 - u) \geqslant 0,$$

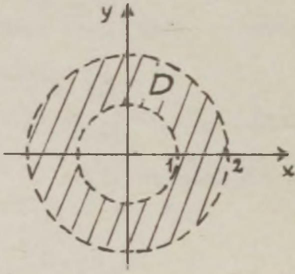
kust

$$1 \leqslant u \leqslant 4.$$

Nüüd, arvestades u tähendust, saame jällegi sama määramispiirkonna D.



Joon. 3



Joon. 4

Näide 2. Leida ja joonistada funktsiooni

$$z = \ln \frac{x^2 + y^2 - 1}{4 - x^2 - y^2}$$

määramispiirkond D.

Lahendus. Funktsiooni avaldisest näeme, et z on määratud, kui

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{4 - x^2 - y^2} > 0,$$

mis on samaväärne võrratusega

$$(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0.$$

Analoogiliselt näitele 1 saame

$$D = \{(x,y): 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Näeme, et määramispiirkonna D raja moodustavad ringjooned

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4$$

ei kuulu hulka D ning seega D on lahtine hulk. Sellepärast piirkonna D joonistamisel kujutame raja punktiiriga (vt. joon. 4).

Näide 3. Leida ja joonistada funktsiooni

$$z = \arcsin \frac{y - 1}{x}$$

määramispiirkond D.

Lahendus. Peab kehtima tingimus

$$\left|\frac{y - 1}{x}\right| \leq 1.$$

Järelikult määramispiirkond D on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} |y - 1| \leq |x| \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Seega võime kirjutada, et

$$D = \{(x,y): |y - 1| \leq |x|,\ x \neq 0\}.$$

Määramispiirkonna D joonistamiseks teisendame süsteemi kujule

$$\begin{cases} -|x| \leq y - 1 \leq |x| \\ x \neq 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 1 - |x| \leq y \leq 1 + |x| \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Edasi peame vaatama eraldi pooltasandeid $x > 0$ ja $x < 0$.

Kui $x > 0$, siis

$$1 - x \leq y \leq 1 + x.$$

Nagu näeme, asetsevad määramispiirkonna punktid (x,y) vaadeldaval pooltasandil $x > 0$ sirgete

$$y = 1 - x,\ y = 1 + x$$

vahel, mis moodustavad nurga tipuga punktis (0,1).

Kui $x < 0$, siis

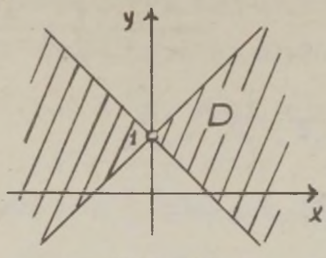
$$1 + x \leq y \leq 1 - x.$$

Näeme, et määramispiirkonna punktid (x,y) ka pooltasandil $x < 0$ asetsevad samade sirgete

$$y = 1 + x,\ y = 1 - x$$

vahel.

Seega need sirged moodustavad määramispiirkonna raja. Et $x \neq 0$, siis tipp (0,1), mis on sirgete lõikepunkt ja seega ka hulga D rajapunkt, ei kuulu määramispiirkonda D. Järelikult D ei ole kinnine hulk. Et ülejäänud rajapunktid



Joon. 5

kuuluvad määramispiirkonda D, siis D ei ole ka lahtine hulk.

Nüüd võime joonistada määramispiirkonna D (vt. joon. 5).

Ülesanded.

Joonistada kinnised piirkonnad, mis on piiratud järgmiste joontega.

1. $y = x^2$, $x = y^2$
2. $y = \sin x$, $y = -x$, $y = \ln(x/\pi)$
3. $y = 2^x$, $x = \sqrt{1 - y^2}$, $x + y + 1 = 0$

Leida järgmiste piirkondade rajajooned, joonistada need piirkonnad ning teha kindlaks, millised neist on kinnised ja millised on lahtised piirkonnad.

4. $x^2 + 4y^2 < 4$
5. $0 \leq y < x$
6. $x^2 < y < x$
7. $x^2 - 4y^2 \leq 4$
8. $4x^2 - y^2 < 4$
9. $0 < \ln(xy) < 1$, $x^2 + y^2 < 4$
10. $y^2 \geq x^3/(2 - x)$, $x^2 + y^2 \leq 2x$

Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad ja joonistada need. Määrata, millised neist on kinnised ja millised on lahtised hulgad.

11. $z = x + \sqrt{y}$
12. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
13. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$
14. $z = \ln(x + y)$

15. $z = \ln(x + y) + 1/\ln x$

16. $z = 3 + \sqrt{-(x - y)^2}$

17. $z = x + e + \arccos y$

18. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

19. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

20. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}$, kus $a > 0$

21. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$

22. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$

23. $z = \ln(x^2 + y) + \sin x$

24. $z = \ln(1 + x)/\ln(1 + y)$

25. $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} + \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)}$

26. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)}$

27. $z = \sqrt{y \sin x}$

28. $z = \cos(x^2 + y^2 - 3)$

29. $z = \sqrt{\ln \cos(x^2 + y^2)}$

30. $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

31. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

32. $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$

33. $z = \arccos \dfrac{x}{x + y} + \arctan \dfrac{2x - y}{1 + x^2 + y^2}$

34. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2} - \operatorname{arccot} \dfrac{x + y^2}{1 - 2x^2 - 4y^2}$

35. $z = \sqrt{\arcsin \dfrac{y + 1}{x - 1}}$

36. $z = \sqrt{\sin \pi x \sin \pi y}$

37. $z = \sqrt{\sin \pi x \sin \pi y} + \sqrt{4 - |x - 4|} + \sqrt{16 - (y - 4)^2}$

38. $z = \log\left[\cos \pi(x + y) \cos \pi(x - y)\right]$

39. $z = \ln \dfrac{10}{x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2}$

40. $z = \left[|x| + \sqrt{y(2 - y)} + \arccos(1 - y)\right]^{-|x|}$

Millistes järgmistes paarides on samad funktsioonid ja millistes erinevad?

41. $f(x,y) = \ln x + \ln y$; $g(x,y) = \ln(xy)$

42. $f(x,y) = \sqrt{x^2y}$; $g(x,y) = x\sqrt{y}$

43. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x}$; $g(x,y) = xy$

44. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2y^2}$; $g(x,y) = \frac{1}{xy}$

45. $f(x,y) = \ln(x^2|y|)$; $g(x,y) = 2\ln(|x|\,|y|)$

46. $f(x,y) = \ln(x^2y^2)$; $g(x,y) = 4\ln(|x|\,|y|)$

47. $f(x,y) = \ln(x^2y)$; $g(x,y) = 2\ln(|x|\,\sqrt{y})$

48. $f(x,y) = |\sin(xy)|$; $g(x,y) = e^{\ln|\sin(xy)|}$

49*. $f(x,y) = xy$; $g(x,y) = e^{\ln|xy|}\operatorname{sgn}(xy)$

Määrata määramispiirkonnad D nii, et vastavustega antud funktsioonide paarid koosneksid samadest funktsioonidest.

50. $f(x,y) = \ln x^2 + \ln y$; $g(x,y) = 2\ln x + \ln y$

51. $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$; $g(x,y) = \sqrt{xy}$

52. $f(x,y) = \cos\sqrt{xy}$; $g(x,y) = e^{\ln\cos\sqrt{xy}}$

53. $f(x,y) = xy\, e^xe^y$; $g(x,y) = xy\, e^{xy}$

Kui funktsiooni $z = f(u,v)$ korral on

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y), \end{cases}$$

kus $(x,y) \in D$, siis kirjutatakse

$$z = f(g(x,y),\ h(x,y)) = F(x,y)$$

ja öeldakse, et z on <u>liitfunktsioon</u> F muutujate x,y suhtes, piirkond D on tema määramispiirkond ja funktsioonid f,g,h tema <u>koostisosad</u>.

Nagu näeme, on funktsiooni f määramispiirkonnaks piirkond $E = \{(u,v):\ u\in U,\ v\in V\}$, kus U ja V on vastavalt funktsioonide g ja h muutumispiirkonnad.

Arvutada järgmiste funktsioonide f väärtused antud punktides A, B ja C.

54. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2xy}$; $A = (2,1)$, $B = (2,-3)$, $C = (-1,8)$

55. $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$; $A = (0,1)$, $B = (1,-1)$, $C = (\frac{1}{2},3)$

56. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$; $A = (1,2)$, $B = (-3,5)$, $C = (a, \frac{1}{a})$

57. $f(x,y) = x^{y^2-1} + y^{x^2-1}$; $A = (2,2)$; $B = (1,2)$, $C = (2,1)$

58. $f(x,y) = \exp\sin(x+y)$; $A = (0,0)$; $B = (\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$; $C=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

59. $f(x,y) = \frac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}$; $A = (0,1)$, $B = (1,0)$;

$C = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

60. $f(x,y) = \frac{\operatorname{arccot}(x+y)}{\arctan(x-y)}$; $A = (1,0)$;

$B = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$; $C = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

61. $f(x,y) = \frac{\operatorname{arccot}(x+y)}{\operatorname{arccot}(x-y)}$; $A = (1,0)$; $B = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$

$C = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

62. $f(x,y) = u^v$;

$$\begin{cases} u = x+y, & A = (0,1),\ B = (2,3),\ C = (-1,1) \\ v = x-y; \end{cases}$$

63. $f(x,y) = \ln(uv)$;

$$\begin{cases} u = \sin x, & A = (\frac{\pi}{2},0),\ B = (-\frac{\pi}{2},\pi),\ C = (\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \\ v = \cos y; \end{cases}$$

64. $f(x,y) = \ln(uv)$

$$\begin{cases} u = \tan x \\ v = \tan y \end{cases} \quad A = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ B = \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right),\ C = \left(\frac{8\pi}{7}, \frac{5\pi}{14}\right)$$

65. $f(x,y) = \ln(u + v)$

$$\begin{cases} u = e^y \sin^2 x \\ v = e^y \cos^2 y \end{cases} \quad A = (-3,3),\ B = (0,\pi),\ C = \left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

66. Leida $f(y,x)$, $f(-x,-y)$, $f(1/x,1/y)$ ja $1/f(x,y)$, kui $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$.

67. Leida $f(1,1/y)$ ja $f(1/y,1/x)$, kui $f(x,y) = x + \dfrac{1}{y}$.

Leida funktsiooni f väärtused kõvera C punktides.

68. $f(x,y) = 1 + x - y$; C on parabool $y = x^2$

69. $f(x,y) = \dfrac{(x^2 + y^2)^2}{1 - x^2 - y^2}$; $C = \{(x,y):\ x^2 + y^2 = a^2\}$

70. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{4(x^2 + 1)}{5x^2 + 2y^2}$; $C = \{(x,y):\ x^2 + 2y^2 = 4\}$

71. Leida $f(x)$, kui $f(y/x) = \sqrt{x^2 + y^2}/y$, kus $y > 0$.

72. Leida $f(x,y)$, kui $f(x + y,\ x - y) = xy + y^2$.

73. Leida $f(x,y)$, kui $f(x + y,\ y/x) = x^2 - y^2$.

Leida funktsioonid f ja z, kui

74. $z(x,y) = f(\sqrt{x} - 1) + \sqrt{y}$ ja $z(x,1) = x$

75. $z(x,y) = |x| f(y/x)$ ja $z(1,y) = \sqrt{1 + y^2}$

76. $z(x,y) = x + y + f(x - y)$ ja $z(x,0) = x^2$

§ 2. Mitme muutuja funktsioonid.

Süsteemi $(x,y,z,\ldots,t)$, mis koosneb m reaalarvust $x,y,z,\ldots,t$, nimetatakse m-mõõtmeliseks ehk m-dimensionaalseks punktiks ja kirjutatakse

$$P = (x,y,z,\ldots,t) \text{ ehk } P = (x,y,z,\ldots).$$

Arve $x,y,z,\ldots,t$ nimetatakse punkti P koordinaatideks, seejuures arvu x punkti P esimeseks koordinaadiks, arvu y punkti P teiseks koordinaadiks jne., lõpuks, arvu t nimetatakse punkti P viimaseks ehk m-ndaks koordinaadiks.

Punkti $O = (0,0,\ldots,0)$ nimetatakse nullpunktiks. Punkte P_1 ja P_2 nimetatakse võrdseiks ja kirjutatakse $P_1 = P_2$, kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed.

Kõigi võimalike m-mõõtmeliste punktide P hulka nimetatakse m-mõõtmeliseks ehk m-dimensionaalseks Eukleidiliseks ruumiks R^m, kui selles hulgas iga kahe punkti

$$P_1 = (x_1,y_1,\ldots,t_1) \text{ ja } P_2 = (x_2,y_2,\ldots,t_2)$$

vaheline kaugus $d(P_1,P_2) = \overline{P_1P_2}$ on defineeritud võrdusega

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \ldots + (t_2 - t_1)^2}.$$

Ruumis R^m kaugus d täidab identsuse, sümmeetria ja kolmnurga aksioome, s.o.

1° $d(P_1,P_2) = 0$ parajasti siis, kui $P_1 = P_2$,

2° $d(P_1,P_2) = d(P_2,P_1)$,

3° $d(P_1,P_2) \leq d(P_1,P_3) + d(P_3,P_2)$

ruumi R^m iga punkti P_1, P_2 ja P_3 korral.

Olgu $\varepsilon > 0$ mingi arv. Punkti $P_0 \in R^m$ <u>ümbruseks</u> ehk <u>ε-ümbruseks</u> nimetatakse kõigi punktide $P \in R^m$ hulka, mis täidavad tingimust

$$d(P_0,P) < \varepsilon,$$

s.o. hulka

$$\{P: P \in R^m, d(P_0,P) < \varepsilon\}.$$

Olgu $E \subset R^m$ mingi punktide hulk ruumis R^m. Öeldakse, et punkt P_0 on hulga E

<u>sisepunkt</u>, kui punkt P_0 kuulub hulka E koos mingi oma ε-ümbrusega;

<u>rajapunkt</u>, kui punkti P_0 igas ε-ümbruses leidub nii hulga E punkte, kui ka punkte, mis ei kuulu hulka E;

<u>välispunkt</u>, kui punktil P_0 leidub ε-ümbrus, mis ei sisalda ühtegi hulga E punkti.

Hulga E kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga E <u>rajapinnaks</u> ehk <u>rajaks</u>. Öeldakse, et hulk E on <u>lahtine</u>, kui tema kõik punktid on sisepunktid, ja <u>kinnine</u>, kui hulka E kuuluvad ka kõik tema rajapunktid.

Hulka E nimetatakse <u>tõkestatud hulgaks</u>, kui leidub arv $M > 0$, et iga punkti $P \in E$ korral on

$$d(O,P) \leq M.$$

Tõkestatud hulga E <u>diameetriks</u> nimetatakse arvu

$$\operatorname{diam} E = \sup_{P,Q \in E} d(P,Q).$$

Järelikult kinnise tõkestatud hulga E diameetriks on suurim kaugus tema kahe punkti vahel, s.o.

$$\operatorname{diam} E = \max_{P,Q \in E} d(P,Q).$$

Ruumis R^m punktide $P = (x,y,z,\ldots)$ hulka, kus koordinaadid $x,y,z,\ldots$ on ühe parameetri t funktsioonid, s.o.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad (1)$$

kus $t \in [\alpha,\beta]$, nimetatakse jooneks ehk kõveraks.

Kui funktsioonid (1) on pidevad t funktsioonid lõigus $[\alpha,\beta]$, siis joont (1) nimetatakse pidevaks jooneks. Erijuhul, kui funktsioonid (1) on lineaarsed t funktsioonid, s.o.

$$\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \qquad t \in [\alpha,\beta] \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

siis joont (1) nimetatakse sirglõiguks.

Hulka E nimetatakse sidusaks, kui hulgas E iga kahte punkti saab ühendada hulka E kuuluva pideva joonega.

Olgu E mingi punktide hulk mitmemõõtmelises Eukleidilises ruumis R^m.

Mitme muutuja funktsiooni definitsioon. Kui igale punktile $P = (x,y,z,\ldots)$ hulgast E on seatud vastavusse mingi arv w, siis kirjutatakse

$$w = f(x,y,z,\ldots) \text{ või } w = f(P)$$

ja öeldakse, et suurus w on muutujate $x,y,z,\ldots$ ehk punkti $P = (x,y,z,\ldots)$ funktsioon f. Seejuures arvu w nimetatakse funktsiooni f väärtuseks, hulka E ja hulka $W = \{w\}$ vastavalt funktsiooni f määramis- ja muutumispiirkonnaks.

Kui arv w on üheselt määratud iga punkti $P \in E$ korral, siis funktsiooni f nimetatakse <u>üheseks</u>, vastasel juhul <u>mitmeseks</u>.

Seega definitsiooni järgi on funktsioon f määratud, kui on teada:

a) funktsiooni f määramispiirkond E,

b) vastavuse eeskiri $w = f(P)$.

Kui funktsiooni f määramispiirkond E ei ole antud, siis määramispiirkonnaks E loetakse kõigi punktide P hulka, mille korral vastavus $w = f(P)$ omab mõtet.

<u>Funktsiooni graafiku definitsioon</u>. Punktide $Q = (x,y,\dots,t,w)$ hulka, kus $w = f(P)$ ja $P = (x,y,\dots,t) \in E$, nimetatakse funktsiooni f <u>graafikuks</u>.

Seega m muutuja funktsiooni graafik on punktide hulk (m+1)-mõõtmelises ruumis.

<u>Mitme muutuja liitfunktsiooni definitsioon</u>. Kui m muutuja u,v,... funktsiooni

$$w = f(u,v,\dots)$$

korral u,v,... on k muutuja funktsioonid

$$\begin{cases} u = g(x,y,\dots) \\ v = h(x,y,\dots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

kus $(x,y,\dots) \in E$, siis kirjutatakse

$$w = f[g(x,y,\dots), h(x,y,\dots),\dots] = F(x,y,\dots)$$

ja öeldakse, et w on <u>liitfunktsioon</u> F muutujate x,y,... suhtes hulgal E. Funktsioone f,g,h,... nimetatakse liitfunktsiooni F <u>koostisosadeks</u>. Suurust

$$\Delta f = f(P) - f(P_0)$$

nimetatakse <u>funktsiooni</u> f <u>muuduks</u> (ehk <u>kasvuks</u>) punkti P_0 ja P vahel ehk üleminekul punktist P_0 punkti P. Seejuures suurusi

$$\Delta x = x - x_0,$$

$$\Delta y = y - y_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

nimetatakse funktsiooni f <u>argumentide</u> $x, y, \ldots$ <u>muutudeks</u> ehk <u>kasvudeks</u> üleminekul punktist $P_0 = (x_0, y_0, \ldots)$ punkti $P = (x, y, \ldots)$.

<u>Elementaarfunktsiooni mõiste</u>. Mitme muutuja $x, y, \ldots$ <u>elementaarfunktsiooniks</u> nimetatakse iga funktsiooni, mida võib saada põhielementaarfunktsioonidest nelja aritmeetilise tehte ja liitfunktsiooni moodustamise teel, rakendades neid lõplik arv kordi. <u>Põhielementaarfunktsioonideks</u> nimetatakse

1) konstantset funktsiooni,
2) eksponentfunktsiooni,
3) logaritmfunktsiooni,
4) astmefunktsiooni,
5) trigonomeetrilisi funktsioone,
6) arkusfunktsioone,

kus argumentideks võib olla iga muutuja $x, y, \ldots$.

<u>Ülesanded</u>.

Leida järgmiste kolme muutuja funktsioonide määramispiirkonnad E.

77. $w = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z}$

78. $w = 1 + \sqrt{2x} - \sqrt{3y} - \sqrt{4z}$

79. $w = \sqrt{x(z^2+1)} - \sqrt{ye^z}$

80. $w = \ln x + \ln y + \ln z$

81. $w = \ln(xy) + \ln z$

82. $w = \ln(xyz)$

83. $w = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sin x}{\sqrt{\ln z}}$

84. $w = \arcsin x - \arccos y + 2\arcsin z$

85. $w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

86. $w = \ln(4 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)$

87. $w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

88. $w = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - 4)}}$

89. $w = y\sqrt{x \ln z}$

90. $w = \dfrac{y}{\sqrt{x \ln z}}$

91. $w = \sqrt{(x^2 + x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 + z - 1)}$

92. $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

93. $w = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4} - \ln(4 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)$

94. $w = \dfrac{\arcsin x + \arcsin 2y}{\arcsin 3z}$

95. $w = \dfrac{\arccos z}{\pi + \arcsin x - \arcsin y}$

96. $w = \dfrac{z\ln(x\sqrt{1 - y^2}) - \ln(y\sqrt{1 - x^2})}{\arcsin x + \arcsin y}$

97*. $w = \dfrac{\ln(1 - xy) + \arcsin z}{\arctan x + \arctan y}$

98. $w = \dfrac{1}{3 + \cos\pi x + \cos\pi y + \cos\pi z}$

Arvutada järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A ja B.

99. $f(x,y,z) = \dfrac{\arctan(x + y + z)}{\arctan(x - y - z)}$, $A = (\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1 - \sqrt{3}}{2})$

$B = (\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 0)$

100. $f(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{arccot}(x + y)}{\operatorname{arccot}(x - z)}$, $A = (1,0,0)$

$B = (\frac{3 + \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6})$

101. $f(x,y,z) = \dfrac{\arctan(x + y - z)}{\operatorname{arccot}(x + y + z)}$, $A = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6})$

$B = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2})$

102. $f(x,y) = u^w + w^{u+v}$

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = xy \end{cases} \qquad A = (-1,2), \quad B = (1,-3)$$

103. $f(x,y,z) = e^u + \ln v$

$$\begin{cases} u = x + \ln y \\ v = ye^z \end{cases} \qquad A = (1,1,2), \quad B = (0,e,-1)$$

104. $f(x,y,z) = \sin(uv) + \cos(vw)$

$$\begin{cases} u = \arcsin x \\ v = \ln y \\ w = \arccos z \end{cases} \qquad A = (1,e,-1), \quad B = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{4})$$

Leida funktsiooni f väärtused märgitud punktide hulgal.

105. $f(x,y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 2(x - y)$ joonel
$x^2 + y^2 = 2$

106. $f(x,y,z) = \sin^2 x^4 + \tan^2 y^2 + \cos^2 z$ joonel $y = x^2$,
$z = y^2$.

107. $f(x,y,z) = (\pi - z)^2 - (x + y)^2 + \ln \sin \frac{x + y + z}{2}$
tasandil $x + y + z = \pi$.

108. $f(x,y,z) = z - \arctan(z^2 - x^2 - y^2)$ pinnal
$z = \operatorname{arccot} (x^2 + y^2 - z^2)$

Leida funktsioon $f(x,y,z)$, kui

109. $f(x,yz,z) = \ln x + y - z$

110. $f(x + y, x - y, z) = xy + y^2 + z^2$

111. $f(x + z, x - z, \ln y) = 4xz + \sqrt{y}$

112. $f(x^2, y^2 - z^2, y + z) = 4yz + \sqrt{x}$

Leida funktsioonid f ja w, kui

113. $w(x,y,z) = f(1 + \sqrt{x}, y) + \sqrt{2z}$ ja $w(x,y,1) = x - y$

114. $w(x,y,z) = f(\sqrt{x} - 1, y) + \sqrt{z}$ ja $w(x,y,0) = x + y^2$

115. $w(x,y,z) = f(\sqrt{x}, e^y) + \sqrt{yz}$ ja $w(x,y,0) = 2x + y$

116. $w(x,y,z) = f(\arcsin x, \cos y) - \arccos z$
$w(x,y,-1) = x \cos y$ ja $0 \leq y \leq \pi$

117. $w(x,y,z) = x + y + e^{z} + f(x/z, y/x)$ ja
$w(1,y^2,z) = \sqrt{y^4 + z^{-2}}$ ning $y \geq 0$.

Leida funktsioonid f, g ja w, kui

118. $w(x,y,z) = f(\arctan x) + g(\operatorname{arccot} y) + z$ ja
$w(x,1,0) = x + 1$ ning $w(0,y,0) = y$, $f(\pi/3) = 2$

119. $w(x,y,z) = 5x + f(2 + \sqrt[3]{y}) + g(3 - \ln z)$,

$w(0,y,1) = \sqrt[3]{2y}$, $w(1,0,z) = 3 + \frac{2}{z}$ ja $g(2) = 1$

120. $w(x,y,z) = \sin x + f(\sqrt{1 - y^2}) + g(z^2)$,

$w(0,0,z) = 1 + \tan z$, $w(0,y,\frac{\pi}{4}) = 1 + \cos y$ ja $g(0)=0$

121. $w(x,y,z) = e^x + f(e^x)\ln y + z + y^x g(2 + \sqrt[3]{z})$,

$w(0,1,z) = 1 + 2z$ ja $w(\ln 2, e^{-x}, 0) = 3$

122. $w(x,y,z) = (x^2-1)y \sin f(z) + x \ln\ln g(y) + \cos[yg(z)]$,

$w(x,e,0) = x + \cos e$, $w(1,1,\ln z) = \cos z$,

$w(0,1,z) = z + \cos \exp z$ ja $g(0) \leqslant 1$

123. Tõestada, et kauguse aksioomidest 1°, 2° ja 3° järeldub kauguse mittenegatiivsus, s.o. $d(P,Q) \geqslant 0$ iga kahe punkti P ja Q korral.

124. Tõestada, et kauguse aksioomidest 1°, 2° ja 3° järeldub võrratus

$$|d(P_1,P_3) - d(P_2,P_3)| \leqslant d(P_1,P_2)$$

iga kolme punkti P_1, P_2 ja P_3 korral.

125. Tõestada, et kauguse kolm aksioomi 1°, 2°, 3° on samaväärsed kahe järgmise aksioomiga

1) identsuse aksioom 1°,

2) $d(P_1,P_2) \leqslant d(P_3,P_1) + d(P_3,P_2)$

iga kolme punkti P_1, P_2, P_3 korral.

Leida järgmiste hulkade diameetrid, kus $A = (a_1,a_2,\ldots,a_m)$ on antud punkt, r ja $r_1,r_2,\ldots,r_m$ on antud arvud, $P = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $k = 1,2,\ldots,m$.

126. Lahtine kera $\{P\colon d(P,A) < r\}$.

127. Kinnine kera $\{P: d(P,A) \leq r\}$.

128. Kinnine ruut $\{P: |x_k - a_k| \leq r\}$.

129. Lahtine risttahukas $\{P: |x_k - a_k| < r_k\}$.

130. $\{(x,y,z): 3x^2 + 5y^2 \leq 1, |z| < r\}$.

Joonistada järgmiste kahe muutuja funktsioonide graafikud.

131. $z = 1 - x - y$, kus $0 \leq y \leq x \leq 1$

132. $z = x^2 + y^2$, kus $z \leq 4$

133. $z = x^2 - y^2$, kus $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$

134. $z = 1 - |x| - |y|$, kus $z \geq 0$

Leida järgmiste funktsioonide graafikud.

135. $w = z + \sqrt{xy}$

136. $w = \frac{\sqrt{x}}{y^2} + \ln(z + 1)$

137. $w = \frac{2x^2}{x^2 + y^2}$

138. $w = \frac{x^2 + y^2}{z\ln(x^2 + y^2 + 1)}$

Leida järgmiste funktsioonide f muudud Δf ning argumentide x,y muudud Δx, Δy üleminekul punktist P_0 punkti P.

139. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$, $P_0 = (1,1)$, $P = (0{,}5;2)$

140. $f(x,y) = \sin(x + y)$, $P_0 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $P = (0,0)$

141. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$, $P_0 = (1,2)$, $P = (2\sqrt{2}; 2)$

142. $f(x,y) = e^{xy}$, $P_0 = (1,0)$, $P = (0,1)$

143. $f(x,y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$, $P_0 = (1,1)$,
$P = (1{,}03; 0{,}98)$

144. $f(x,y) = x^y$, $P_0 = (1;\ 0{,}98)$, $P = (1{,}04;\ 2{,}02)$

145. $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $P_0 = (3{,}4)$, $P = (3;4{,}2)$

<u>Näide 4.</u> Näidata, et funktsioon

$$F(x,y,z) = 2\sin|x| + \log(x^y - \arccos \ln z)$$

on elementaarfunktsioon.

<u>Lahendus.</u> Kõigepealt võime funktsiooni F kirjutada kahe põhielementaarfunktsiooni summana:

$$F(x,y,z) = 2\sin u + \log v,$$

kus

$$u = |x|,\quad v = x^y - \arccos \ln z.$$

Edasi

$$u = |x| = \sqrt{s},\quad \text{kus } s = x^2,$$

$$x^y = e^t,\quad \text{kus } t = y \ln x,$$

$$\arccos \ln z = \arccos w,\quad \text{kus } w = \ln z.$$

Seega funktsioon F on saadud lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel järgmistest põhielementaarfunktsioonidest:

2, $\sin u$, $\log v$, $s^{0,5}$, x^2, e^t, y^1, $\ln x$, $\arccos w$, $\ln z$.

Elementaarfunktsiooni definitsiooni põhjal on funktsioon F elementaarne.

<u>Ülesanded.</u>

Näidata, et järgmised funktsioonid on elementaarsed.

146. $F(x,y) = 3xy - \cos(x + y^2)$

147. $F(x,y) = 1 + \dfrac{\ln|\sin(xy)|}{\arctan \exp(x \ln y)}$

148. $F(x,y,z) = x^{|\cot x|} + (5z)^{y \ln x}$

149. $F(x,y,z) = 4^{1+x \cos z^2} + \ln 2 + \arcsin(xyz)$

150. $F(x,y) = |\sin \ln(x - 2y^2)|^3$

151. $F(x,y,z) = \ln \arctan(x - 2yz) \cdot \ln(\operatorname{arccot} \frac{1}{x - 2yz})^3$

§ 3. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus.

Olgu ruumis R^m antud punktide P_n $(n = 1,2,\ldots)$ jada $\{P_n\}$.

Öeldakse, et jada $\{P_n\}$ koondub punktiks P_0 ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \text{ või } P_n \to P_0,$$

kui

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n,P_0) = 0. \qquad (2)$$

Sel korral punktide jada $\{P_n\}$ nimetatakse koonduvaks ja punkti P_0 tema piirpunktiks. Punktide hulka $\{P_n\}$ nimetatakse ka lähenemisteeks punktile P_0.

Kui $P_n = (x_n, y_n, \ldots)$ ja $P_0 = (x_0, y_0, \ldots)$, siis tingimus (2) on samaväärne tingimusega

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (3)$$

Jada $\{P_n\}$ nimetatakse tõkestatud jadaks, kui punktide hulk $\{P_n\}$ on tõkestatud hulk.

Iga koonduv jada $\{P_n\}$ on tõkestatud jada.

Bolzano-Weierstrassi lemma. Ruumis R^m igast tõkestatud jadast $\{P_n\}$ saab eraldada koonduva osajada $\{P_{k_n}\}$ $(n=1,2,\ldots)$.

Olgu hulgal $E\subset R^m$ määratud m muutuja funktsioon F.

Funktsiooni piirväärtuse definitsioon. Arvu A nimetatakse funktsiooni f (m-kordseks) piirväärtuseks punktis P_0 ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A,$$

kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub arv $\delta = \delta(\varepsilon)>0$, et kehtib

$$|f(P) - A| < \varepsilon$$

iga punkti $P\in E$ korral, mis täidab tingimust

$$0 < d(P,P_0) < \delta .$$

Lõpmata suure suuruse definitsioon. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 on ∞, ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = \infty ,$$

kui iga arvu $M>0$ korral leidub arv $\delta = \delta(M)>0$, et kehtib

$$f(P) > M \text{ alati kui } 0 < d(P,P_0) < \delta .$$

Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 on $-\infty$, ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = -\infty,$$

kui iga arvu $M>0$ korral leidub arv $\delta = \delta(M)>0$, et kehtib

$$f(P)<-M \text{ alati kui } 0<d(P,P_0)<\delta .$$

Mõlemal juhul öeldakse, et funktsioon f on punkti P_0 ümbruses lõpmata suur suurus.

Piirväärtuse olemasolu kriteerium. Suurus A on funktsiooni f m-kordseks piirväärtuseks punktis P_0 parajasti siis, kui iga punktide $P_n \neq P_0$ jada $\{P_n\} \subset E$ korral, kus $P_n \to P_0$, kehtib

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = A .$$

Analoogiliselt nagu ühe muutuja funktsiooni korral laiendatakse funktsiooni piirväärtuse ja lõpmata suure suuruse definitsioonid ka juhule, kus piirpunkti P_0 mõni koordinaat on asendatud sümboliga ∞ või $-\infty$. Piirväärtuse olemasolu kriteerium jääb kehtima ka sel juhul.

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse korral kehtivad järgmised tehetega seotud piirväärtuse omadused.

Kui eksisteerivad lõplikud piirväärtused

$$\lim_{P \to P_0} f(P), \lim_{P \to P_0} g(P),$$

siis

1) $\lim\limits_{P \to P_0} [f(P) + g(P)] = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) + \lim\limits_{P \to P_0} g(P);$

2) $\lim\limits_{P \to P_0} c\, f(P) = c \lim\limits_{P \to P_0} f(P), \quad c = \text{const};$

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)\, g(P) = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) \lim\limits_{P \to P_0} g(P);$

4) $\lim\limits_{P \to P_0} \dfrac{f(P)}{g(P)} = \dfrac{\lim\limits_{P \to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P \to P_0} g(P)}$, kui $\lim\limits_{P \to P_0} g(P) \neq 0.$

Samuti kehtivad mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse korral lõpmata väikeste suuruste ja lõpmata suurte suuruste omadused, mis on analoogilised hariliku piirväärtuse korral olnud omadustega (vt. Matemaatilise analüüsi praktikum. Tartu, 1970, pt. III, § 1).

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse arvutamisel võib kasutada piirväärtuse arvutamise võtteist kõiki neid, mis funktsiooni määramispiirkonnas ei piira lähenemisteed piirpunktile.

<u>Funktsiooni f pidevuse definitsioon</u>. Funktsiooni f nimetatakse <u>pidevaks</u> <u>punktis</u> P_0, kui

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0). \qquad (4)$$

Funktsiooni f nimetatakse <u>pidevaks</u> <u>hulgal</u> E, kui ta on pidev hulga E igas punktis.

Olgu Δf funktsiooni f muut ja $\Delta x, \Delta y, \dots$ tema argumentide muudud üleminekul punktist $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$ punkti $P = (x, y, \dots)$, siis pidevuse tingimuse (4) võime samaväärselt kirjutada kujul

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \dots}} \Delta f = 0$$

ehk

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta f = 0,$$

kus

$$\rho = d(P, P_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \dots} \; .$$

Kahe punktis P_0 pideva funktsiooni f ja g summa $f(P) + g(P)$, vahe $f(P) - g(P)$, korrutis $f(P)\,g(P)$ ja jagatis $f(P)/g(P)$ (kui $g(P_0) \neq 0$) on pidevad funktsioonid punktis P_0.

Liitfunktsioon

$$F(P) = f\left[g(P),\ h(P),\ldots\right] \qquad (5)$$

on pidev oma määramispiirkonnas, kui tema koostisosad $f, g, h, \ldots$ on pidevad funktsioonid oma määramispiirkondades.

Seega punktis P_0 pideva liitfunktsiooni (5) korral kehtib võrdus

$$\lim_{P\to P_0} F(P) = f\left[\lim_{P\to P_0} g(P),\ \lim_{P\to P_0} h(P),\ldots\right]. \qquad (6)$$

Piirväärtuste arvutamisel leiab rakendamist järgmine

Teoreem. Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Seega võrdused (4) ja (6) kehtivad iga elementaarfunktsiooni korral tema määramispiirkonna punktis P_0.

Funktsiooni ühtlase pidevuse definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse ühtlaselt pidevaks piirkonnas E, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et kehtib võrratus

$$|f(P) - f(P')| < \varepsilon \quad \text{alati kui } d(P,P') < \delta$$

sõltumata punktide P ja P' asukohast piirkonnas E.

Pidevate funktsioonide korral kehtivad järgmised omadused.

Weierstrassi teoreem funktsiooni tõkestatusest. Tõkestatud kinnises piirkonnas pidev funktsioon on tõkestatud selles piirkonnas.

Weierstrassi teoreem ekstremaalsetest väärtustest. Tõkestatud kinnises piirkonnas pideval funktsioonil on olemas ekstremaalsed väärtused selles piirkonnas, s.o. leidub vähemalt kaks punkti, et ühes on funktsiooni väärtus võrdne funktsiooni väärtuste ülemise rajaga ja teises väärtuste alumise rajaga.

<u>Bolzano-Cauchy teoreem vahepealsetest väärtustest.</u> Tõkestatud kinnises sidusas piirkonnas pidev funktsioon omab iga väärtust oma ekstremaalsete väärtuste vahel.

<u>Cantori teoreem ühtlasest pidevusest.</u> Tõkestatud kinnises piirkonnas pidev funktsioon on ühtlaselt pidev selles piirkonnas.

Iga kahe punkti

$$P = (x,y,\ldots),\ P_0 = (x_0,y_0,\ldots)$$

korral kehtivad võrratused

$$|x - x_0| \leq d(P,P_0),$$
$$|y - y_0| \leq d(P,P_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

<u>Näide 5</u>. Kasutades funktsiooni kahekordse piirväärtuse definitsiooni, tõestada, et

$$\lim_{x,y\to 2,3} \frac{2x^2 + y^2 + 2x + 3y + 2}{x^2 + y^2 + 3} = 2.$$

<u>Lahendus.</u> Olgu $P_0 = (2,3)$, $P = (x,y)$, siis nende punktide vaheline kaugus

$$d = d(P,P_0) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2}.$$

Tähistame

$$f(x,y) = \frac{2x^2 + y^2 + 2x + 3y + 2}{x^2 + y^2 + 3}.$$

Võtame suvalise arvu $\varepsilon > 0$. Vastavalt piirväärtuse definitsioonile tuleb leida niisugune arv $\delta > 0$, et kehtiks

$$|f(x,y) - 2| < \varepsilon \quad \text{alati kui } 0 < d < \delta \;.$$

Kasutades võrratusi

$$|x - 2| \leqslant d, \; |y - 3| \leqslant d$$

ja jättes nimetajast ära suuruse $x^2 + y^2 \geqslant 0$, saame

$$|f(x,y) - 2| = \frac{|y^2 - 2x - 3y + 4|}{x^2 + y^2 + 3} \leqslant \frac{|y^2 - 2x - 3y + 4|}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}|y^2 - 3y - 2(x - 2)| =$$

$$= \frac{1}{3}|(y - 3)^2 + 3(y - 3) - 2(x - 2)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}(|y - 3|^2 + 3|y - 3| + 2|x - 2|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}(d^2 + 5d).$$

Kuna arvu $\delta > 0$ võime alati vähendada, siis nõuame, et oleks

$$|f(x,y) - 2| \leqslant \frac{1}{3}(d^2 + 5d) < \varepsilon,$$

kust d leidmiseks saame võrratuse

$$d^2 + 5d - 3\varepsilon < 0,$$

mis annab

$$0 < d < \frac{-5 + \sqrt{25 + 12\varepsilon}}{2}.$$

Seega võime võtta

$$\delta = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{25 + 12\varepsilon}),$$

millega vajalik arv δ on leitud.

Näide 6. Kasutades funktsiooni kahekordse piirväärtuse definitsiooni, tõestada, et

$$\lim_{x,y \to 0,-2} \frac{x + y - 1}{x + 2y + 3} = 3.$$

Lahendus. Olgu $P_0 = (0,-2)$, $P = (x,y)$, siis

$$d = d(P,P_0) = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2}.$$

Tähistame

$$f(x,y) = \frac{x + y - 1}{x + 2y + 3}.$$

Võtame suvalise arvu $\varepsilon > 0$. Tuleb leida mingi arv $\delta > 0$, et kehtiks

$$|f(x,y) - 3| < \varepsilon \quad \text{alati kui} \quad 0 < d < \delta .$$

Võime kirjutada

$$|f(x,y) - 3| = \left|\frac{x + y - 1}{x + 2y + 3} - 3\right| = \left|\frac{-2x - 5y - 10}{x + 2y + 3}\right| =$$

$$= \frac{|2x + 5y + 10|}{|x + 2y + 3|} = \frac{|2x + 5(y + 2)|}{|x + 2y + 3|} .$$

Et nimetaja, sõltuvalt lähenemisteest piirpunktile P_0, võib olla ka väiksem arvust 1, siis nimetajat vahetult ära jätta (nagu võis eelmises näites) ei saa. Seepärast leiame nimetaja tõkked. Tingimuse $0 < d < \delta$ tõttu on

$$|x| \leqslant d < \delta \ , \ |y + 2| \leqslant d < \delta \ ,$$

siis

$$-\delta < x < \delta \ , \ -\delta < y + 2 < \delta \ ,$$

kust

$$-4 - 2\delta < 2y < -4 + 2\delta .$$

Seega nimetaja kohta saame

$$-1 - 3\delta < x + 2y + 3 < -1 + 3\delta .$$

Et arvu $\delta > 0$ võime vähendada, siis loeme, et $0 < \delta \leqslant \frac{1}{6}$. Sel korral on $3\delta \leqslant 0,5$ ja $-3\delta \geqslant -0,5$ ning seega

$$-1,5 \leqslant -1 - 3\delta < x + 2y + 3 < -1 + 3\delta \leqslant -0,5,$$

kust

$$-1{,}5 < x + 2y + 3 < -0{,}5$$

ehk

$$1{,}5 > -(x + 2y + 3) > 0{,}5.$$

Ilmselt $x + 2y + 3 < 0$, seega siis

$$0{,}5 < |x + 2y + 3| < 1{,}5.$$

Nüüd võime kirjutada, et

$$|f(x,y) - 3| < \frac{|2x + 5(y + 2)|}{0{,}5} = |4x + 10(y + 2)| \leq$$

$$\leq 4|x| + 10|y + 2| \leq$$

$$\leq 4d + 10d = 14d < \varepsilon,$$

kust

$$0 < d < \frac{\varepsilon}{14}.$$

Seega võime lõplikult võtta

$$\delta = \min\left(\frac{1}{6}, \frac{\varepsilon}{14}\right).$$

Ülesanded.

Kasutades funktsiooni piirväärtuse definitsiooni, tõestada järgmised võrdused. Määrata $\delta = \delta(\varepsilon)$.

152. $\lim\limits_{x,y \to 1,2} (x^2 + y^2 - 2x - 4y) = -5$

153.* $\lim\limits_{x,y \to -1,1} \dfrac{2(x + 1)^2 + (y - 1)^2}{\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}} = 0$

154. $\lim\limits_{x,y \to a,b} (\sin x + \cos y) = \sin a + \cos b$

155. $\lim\limits_{x,y \to a,b} \sin(x - 2y) = \sin(a - 2b)$

156*. $\lim\limits_{x,y\to a,b} \cos(xy) = \cos(ab)$

157. $\lim\limits_{x,y\to 1,-2} \dfrac{(x^2-1)(y+2)}{(x+1)(y^2-4)} = 0$

158. $\lim\limits_{x,y\to -2,1} \dfrac{x^3(x+2)(y^2-1)}{(x^2-4)(y+1)} = 0$

159. $\lim\limits_{x,y\to 2,3} \dfrac{x^2+y^2+2x+11}{x^2+y^2+1} = 2$

160. $\lim\limits_{x,y\to 2,3} \dfrac{x^2+y^2+15}{2(x^2+y^2+1)} = 1$

161*. $\lim\limits_{x,y\to 0,-2} \dfrac{x^2-y^2-3x-y+2}{x^2-2y^2+xy+x-7y-6} = 3$

162. $\lim\limits_{x,y\to \infty} \dfrac{1}{x^2+2y^2+3y} = 0$

163. $\lim\limits_{x,y\to \infty} \dfrac{x+y}{x+y-x} = 1$

Näide 7. Leida kahekordne piirväärtus

$$A = \lim_{x,y\to 0;2} \frac{3x+4y}{1+\ln(x+y)} + \frac{\sin(xy)}{x}.$$

Lahendus. Et esimeses murrus määramatust ei esine ja tegemist on elementaarfunktsiooniga, siis võrduse (4) põhjal võime kirjutada:

$$A = \lim_{x,y\to 0;2} \frac{3x+4y}{1+\ln(x+y)} + \lim_{x,y\to 0;2} \frac{\sin(xy)}{x} =$$

$$= \frac{8}{1+\ln 2} + \lim_{x,y\to 0;2} \frac{\sin(xy)}{x}.$$

Teises murrus esineb määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$. Teeme muutuja vahetuse, võttes muutuja x asemele uue muutuja $u = xy$, saame

$$A \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{8}{1 + \ln 2} + \lim_{u,y \to 0;2} \frac{y \sin u}{u} =$$

$$= \frac{8}{1 + \ln 2} + \lim_{u,y \to 0;2} y =$$

$$= \frac{8}{1 + \ln 2} + 2 = \frac{10 + \ln 4}{1 + \ln 2}.$$

<u>Näide 8</u>. Leida piirväärtus

$$A = \lim_{x,y \to 1,2} \frac{2 - 2x - y + xy}{2 - \sqrt{6 - 2x - y + xy}}.$$

<u>Lahendus.</u> Et antud piirprotsessis lugeja on lõpmata väike suurus ja

$$6 - 2x - y + xy = 4 + o(1),$$

siis esineb siin määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$. Piirväärtuse leidmiseks viime irratsionaalsuse nimetajast lugejasse, saame

$$A \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x,y \to 1,2} \frac{(2 - 2x - y + xy)(2 + \sqrt{4 + o(1)})}{4 - (6 - 2x - y + xy)} =$$

$$= - \lim_{x,y \to 1,2} (2 + \sqrt{4 + o(1)}) = -4.$$

Sama ülesande lahendamise võib muutujate vahetuse teel taandada hariliku piirväärtuse arvutamisele. Tähistades

$$\sqrt{6 - 2x - y + xy} = u,$$

saame

$$A = \lim_{u \to 2} \frac{u^2 - 4}{2 - u} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} - \lim_{u \to 2} (u + 2) = -4.$$

<u>Näide 9</u>. Leida kahekordne piirväärtus

$$A = \lim_{x,y \to 0} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Lahendus. Siin esineb määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$. Et antud piirprotsessis on $\sin(x^3 + y^3) \sim x^3 + y^3$, siis

$$A = \lim_{x,y\to 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{x,y\to 0} \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{x,y\to 0} (x + y)(1 - \frac{xy}{x^2 + y^2}) =$$

$$= - \lim_{x,y\to 0} \frac{(x + y)xy}{x^2 + y^2}.$$

Kuna kehtib võrratus

$$\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2},$$

siis

$$A = - \lim_{x,y\to 0} (x + y)O(1) = \lim_{x,y\to 0} o(1)\, O(1) = 0.$$

Antud ülesannet saab lihtsamini lahendada üleminekuga polaarkoordinaatidele. Siis

$$A = \lim_{x,y\to 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \underset{\begin{cases} x=\varrho\cos\varphi \\ y=\varrho\sin\varphi \end{cases}}{=} \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{\varrho^2} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho\, O(1) = 0,$$

sest piirväärtus ei sõltu φ muutumisest piirprotsessis $\varrho \to 0$.

Näide 10. Leida kahekordne piirväärtus

$$A = \lim_{x,y\to 0+} (x + y)^{xy}.$$

Lahendus. Siin esineb määramatus tüüpi 0^0. Olgu

$$f(x,y) = (x + y)^{xy}.$$

Eksponentfunktsiooni pidevuse tõttu võrdusest (6) saame

$$A = \lim_{x,y\to 0} \exp \ln f(x,y) = \exp \lim_{x,y\to 0+} \ln f(x,y).$$

Seepärast leiame algul logaritmi ln f(x,y) piirväärtuse, saame

$$B = \lim_{x,y\to 0+} \ln f(x,y) = \lim_{x,y\to 0+} xy \ln(x + y).$$

Tekkis määramatus tüüpi $0\cdot\infty$. Tehes muutujate vahetuse $x = 1/u$, $y = 1/v$, leiame

$$B = \lim_{u,v\to\infty} \frac{\ln(\frac{1}{u} + \frac{1}{v})}{uv} = \lim_{u,v\to\infty} \frac{\ln(u + v) - \ln(uv)}{uv} =$$

$$= \lim_{u,v\to\infty} \frac{\ln(u + v)}{uv} - \lim_{u,v\to\infty} \frac{\ln u + \ln v}{uv} =$$

$$= \lim_{u,v\to\infty} \frac{\ln(u + v)}{uv}.$$

Et juhul $u + v \geq 1$ on $0 \leq \ln(u + v) \leq u + v$, siis

$$0 \leq B \leq \lim_{u,v\to\infty} \frac{u + v}{uv} = 0.$$

Seega $B = 0$. Järelikult kahekordne piirväärtus $A = e^B = e^0 = 1$.

Kahekordse piirväärtuse B võime leida ka üleminekuga polaarkoordinaatidele. Siis arvestades, et $\cos\varphi \sin\varphi = O(1)$, saame

$$B = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \ln[\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} [\rho^2 O(1)\ln\rho + \rho^2 O(1)\ln(\cos\varphi + \sin\varphi)] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^2 O(1)\ln(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Kasutame võrdust

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{4}).$$

Et piirprotsessis $x,y \to 0+$ on $x,y > 0$, siis $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{4} < \varphi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, kust

$$1 < \sqrt{2}\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{4}) < \sqrt{2}.$$

Seega vaadeldavas piirprotsessis $\rho \to 0$ on

$$\ln(\cos\varphi + \sin\varphi) = O(1).$$

Järelikult

$$B = \lim_{\rho \to 0} \rho^2 O(1) = 0.$$

Näide 11. Näidata, et kahekordne piirväärtus

$$\lim_{x,y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ei eksisteeri.

Lahendus. Olgu

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Läheneme piirpunktile $(0,0)$ mööda sirget $y = x$, siis

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = 0.$$

Aga lähenedes piirpunktile mööda sirget $y = 2x$, saame

$$\lim_{x \to 0} f(x,2x) = -\frac{3}{5}.$$

Seega piirväärtus sõltub teest, mida mööda läheneme piirpunktile. Järelikult vaadeldav kahekordne piirväärtus ei eksisteeri.

Piirpunktile sobiva lähenemistee leidmiseks on sageli otstarbekohane võtta lähenemisteeks suvalised sirged $y = kx$. Siis

$$\lim_{x \to 0} f(x,kx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2},$$

kust on näha, et piirväärtus sõltub k valikust ja seega lähenemisteest $y = kx$, mis ütlebki, et kahekordne piirväärtus ei eksisteeri.

Sama tulemuse saame ka minnes üle polaarkoordinaatidele. Sel korral

$$\lim_{\rho \to 0} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi) = \lim_{\rho \to 0} \cos 2\varphi = \cos 2\varphi,$$

kust on ka näha, et piirväärtus sõltub φ valikust ja seega lähenemisteest piirpunktile $(0,0)$.

Näide 12. Näidata, et kahekordne piirväärtus

$$\lim_{x,y \to \infty} \frac{2x + 3y}{5x + 4y^2}$$

ei eksisteeri.

Lahendus. Olgu

$$f(x,y) = \frac{2x + 3y}{5x + 4y^2}.$$

Lähenedes lõpmatusele mööda suvalist sirget $y = kx$, kus $k \neq 0$, saame

$$\lim_{x \to \infty} f(x,kx) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3kx}{5x + 4k^2x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + 3k}{5 + 4k^2x} = 0.$$

Samale tulemusele jõuame, kui läheneme mööda suvalist sirget $y = kx + b$, kus $k \neq 0$, sest

$$\lim_{x \to \infty} f(x, kx + b) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3kx + b}{5x + 4(kx + b)^2} = 0.$$

Seega sirgeid mööda piirile minnes ei ole võimalik saada erinevaid piirväärtusi funktsioonile f. Järelikult tuleb otsida komplitseeritumaid lähenemisteid.

Läheneme piirile mööda parabooli $y = \sqrt{x}$, siis saame

$$\lim_{x\to\infty} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 3\sqrt{x}}{5x + 4x} = \frac{2}{9}.$$

Järelikult piirväärtus sõltub lähenemisteest, mis ültebki, et kahekordne piirväärtus ei eksisteeri.

Ülesanded.

Leida järgmised kahekordsed piirväärtused.

164. $\lim\limits_{x,y\to -2,1} x^2y$

165. $\lim\limits_{x,y\to 2,4} (2x + 3y)$

166. $\lim\limits_{x,y\to 1,-1} (x^2 + y^2)$

167. $\lim\limits_{x,y\to 2} \frac{x + \sin(\pi y)}{y}$

168. $\lim\limits_{x,y\to 2} \frac{x^2 + 2x - 2y - xy}{x^2 - y^2}$

169. $\lim\limits_{x,y\to 3,4} \frac{12 - 3x - 4y + xy}{x^2 - 9}$

170. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{1 + xy} - 1}$

171. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x + y}{\sqrt{2 + x + y} - \sqrt{2}}$

172. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$

173. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{2 + x^2 + y^2}$

174.* $\lim\limits_{x,y\to \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$

175. $\lim\limits_{x,y\to 1,0} \frac{\ln(ex + y^e)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

176. $\lim\limits_{x,y\to 0+} \frac{x - \sqrt{y}}{x + \ln x}$

177. $\lim\limits_{x,y\to 0+} \frac{\ln(xy)}{x \sin y}$

178. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{\sin x + \cos y}{\tan x - \ln y}$

179. $\lim\limits_{x,y\to 0} (x^2 + y^2)\sin \frac{3}{xy}$

180. $\lim\limits_{x,y\to \infty} \frac{x + y}{2 + x^2 + y^2}$

181. $\lim\limits_{x,y\to 2,0} \frac{xy}{\tan(xy)}$

187*. $\lim\limits_{x,y\to 0} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$

182. $\lim\limits_{x,y\to 0,10} \frac{\sin(5x)}{xy}$

183. $\lim\limits_{x,y\to\infty,-\infty} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$

188. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2y^2}}{x^2 + y^2}$

184. $\lim\limits_{x,y\to 3,\infty} (1 + \frac{x}{y})^y$

189. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x^2y^2(x^2 + y^2)}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$

185. $\lim\limits_{x,y\to 0} (1 + x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

190. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{\exp\left[-1/(x^2 + y^2)\right]}{x^4 + y^4}$

186. $\lim\limits_{x,y\to\infty,4} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$

191. $\lim\limits_{x,y\to\infty} \frac{x^2 + y^2}{\exp(x + y)}$

Näidata, et järgmised kahekordsed piirväärtused ei eksisteeri.

192. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x}{x + y}$

196. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x + y}{x + y^2}$

193. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2 + xy}$

197*. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x^2}{y - x^2}$

194. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$

198. $\lim\limits_{x,y\to\infty} \frac{x^2}{y - x^2}$

195. $\lim\limits_{x,y\to\infty} \frac{x + y}{x + y^2}$

199*. $\lim\limits_{x,y\to 0,-1} \sin\frac{\pi}{x + y + 1}$

Arvutada järgmised piirväärtused või näidata, et nad ei eksisteeri.

200*. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy}}$

201. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{\sqrt{xy + x + 1} - \sqrt{x + 1}}{\sqrt{xy + y + 1} - \sqrt{y + 1}}$

202*. $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{(x^{10} + y^{10})(x - y)}{xy(\sqrt{x - y + 1} - 1)}$

203. $\lim\limits_{x,y\to 1} \frac{\sin \pi xy}{xy - 1}$

204. $\lim\limits_{x,y\to -2,-1} \frac{y\ln(2 + x - y)}{x\sin(1 + x - y)}$

205*. $\lim\limits_{x,y\to 1} \cos \frac{\pi}{x + y - 2}$

206. $\lim\limits_{x,y\to 1,-1} \tan \frac{1}{x + y}$

Näidata, et järgmised punktide jadad $\{P_n\}$ koonduvad punktiks P_0.

207. $P_n = (\frac{1}{n + 1}, - \frac{5}{n + 1})$, $P_0 = (0,0)$

208. $P_n = (\frac{\sin n}{\ln(n + 2)}, \frac{\arctan n^2}{\cot \frac{2}{n + 1}})$, $P_0 = (0,0)$

209. $P_n = (\sqrt[n]{\frac{\ln(n + 1)}{1 + n}}, (\frac{n + 2}{n + 3})^{4n+\sin 8})$, $P_0 = (1,e^{-4})$.

210. $P_n = (\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 4n + 2}, \operatorname{ch} \frac{3}{e+n})$,

$P_0 = (\frac{7}{2}, 1)$

Näidata, et järgmised punktide jadad $\{P_n\}$ on tõkestatud ja eraldada neist vähemalt üks koonduv osajada $\{P_{k_n}\}$ ning leida selle osajada piirpunkt P_0.

211. $P_n = (2 + (-1)^n, (-1)^n)$

212. $P_n = (\sin \frac{(-1)^n\pi}{2}, \cos (-1)^n\pi)$

213. $P_n = (\cos(-1)^{n/2}\pi , \tan \frac{(-1)^{n/4}\pi}{4})$

214. $P_n = (\arctan(-\pi)^n, \arcsin \frac{\pi}{4 + n})$

215*. $P_n = (\sin n, \cos n)$

<u>Näide 13</u>. Näidata, et funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas.

<u>Lahendus.</u> Funktsiooni f määramispiirkond on kogu xy-tasand. Igas piirkonnas, kus $x^2 + y^2 \neq 0$, on funktsioon f elementaarne ja seega pidev. Järelikult tuleb kontrollida funktsiooni f pidevust vaid punktis (0,0). Et

$$\lim_{x,y \to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

siis f on pidev ka punktis (0,0). Seega funktsioon f on pidev oma määramispiirkonnas.

Selle ülesande saab lahendada ka järgmiselt. Leiame funktsiooni f muudu Δf üleminekul punktist O = (0,0) punkti P = (x,y), saame

$$\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = \frac{xy^2}{\rho^2},$$

kus

$$\rho = d(P,O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Arvestades, et $|xy| \leq \rho^2$, saame

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta f = \lim_{\rho \to 0} \frac{xy^2}{\rho^2} = 0,$$

sest

$$|\Delta f| \leq \frac{|xy|\,|y|}{\rho^2} \leq |y| \leq \rho\,.$$

<u>Ülesanded.</u>

Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

216. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

217. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$

218. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin y}{x^2 + \sin^2 y}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$

219. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$

220. $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$

221. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$

222. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{\ln(1 - x^2 - y^2)}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ -1, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$

223. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1 + x + y)}{\ln(-x - y)}, & \text{kui } x + y + 1 \neq 0, \\ -1, & \text{kui } x + y + 1 = 0 \end{cases}$

224. $f(x,y) = \begin{cases} (1 + xy)^{2/(xy)}, & \text{kui} \quad xy \neq 0, \\ e^2, & \text{kui} \quad xy = 0 \end{cases}$

225. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\arcsin(x + y)}{\arctan x}, & \text{kui} \quad x \neq 0, \\ \arcsin y, & \text{kui} \quad x = 0 \end{cases}$

226. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin^2 \sqrt{x^2 - 2y}}{\arctan(2y - x^2)}, & \text{kui} \quad x^2 \neq 2y, \\ -1, & \text{kui} \quad x^2 = 2y \end{cases}$

227. $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, & \text{kui} \quad x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{kui} \quad x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$

228. $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + 2y^2 - 3)\operatorname{sgn}(x^2 + 2y^2 - 3)}$

229. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \sqrt{x^2 + y^2 - 2}}{2 - x^2y^2}, & \text{kui} \quad x^2 + y^2 \geqslant 2, \\ \dfrac{\arctan^2 \sqrt{2 - x^2 - y^2}}{\arcsin(x^2 + y^2 - 2)}, & \text{kui} \quad x^2 + y^2 < 2 \end{cases}$

230. $f(x,y) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi xy}{2}, & \text{kui} \quad xy \leqslant 1, \\ xy - 1, & \text{kui} \quad xy > 1 \end{cases}$

Öeldakse, et mitme muutuja funktsioon $f(x,y,z,\ldots)$ on punktis P_0 pidev <u>muutuja x järgi</u>, kui

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0, z_0, \ldots) = f(P_0),$$

<u>pidev muutuja y järgi</u>, kui

$$\lim_{y \to y_0} f(x_0, y, z_0, \ldots) = f(P_0),$$

jne. Analoogiliselt defineeritakse funktsiooni f pidevus kahe ja enama muutuja järgi.

Kui funktsioon f on pidev oma määramispiirkonna sisepunktis P_0, siis ta on pidev selles punktis P_0 ka iga muutuja järgi eraldi. Kui P_0 on määramispiirkonna rajapunkt, siis see väide ei kehti.

Kui funktsioon f ei ole pidev punktis P_0, siis öeldakse, et f on <u>katkev</u> punktis P_0. Sel korral punkti P_0 nimetatakse funktsiooni f <u>katkevuspunktiks</u>.

Funktsioon f on katkev punktis P_0, kui leiab aset vähemalt üks järgmisest kolmest tingimusest:

1) $f(P_0)$ ei ole määratud, s.t. punkt P_0 ei kuulu f määramispiirkonda E, kuid on E rajapunkt;

2) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ ei eksisteeri;

3) eksisteerib $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) \neq f(P_0)$.

Leidub funktsioone, mis on katkevad punktis P_0, kuid on pidevad selles punktis P_0 iga muutuja järgi eraldi.

<u>Ülesanded.</u>

Millised järgmistest funktsioonidest on punktis P_0 pidevad, pidevad muutuja x või muutuja y järgi?

231. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \quad P_0 = (0,0)$

232. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \quad P_0 = (0,0)$

233. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\arcsin(y-1)}{1+x^2-2y+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 2y-1, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 2y-1, \end{cases}$ $P_0=(0,1)$

234. $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - y^2}$, $P_0 = (0,0)$

235. $f(x,y) = \ln(2 - \sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2 - 1})$, $P_0 = (2,1)$

236. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = y = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,0)$

237. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ -1, & \text{kui } x = y = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,0)$

238. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y, \end{cases}$ $P_0 = (1,-1)$

239. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ \sin 1 - \cos 1, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ $P_0=(\sin 1,\cos 1)$

240. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,0)$

241. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|xy|}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,0)$

242. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log|xy|}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,0)$

243. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log xy}, & \text{kui} \quad xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui} \quad xy = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,-1)$

244. $f(x,y) = \begin{cases} \arctan \left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{kui} \quad x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{kui} \quad x = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,0)$

245. $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arccot} \dfrac{y}{|x|}, & \text{kui} \quad x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{kui} \quad x = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,0)$

246. $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arccot} \dfrac{y}{|x|}, & \text{kui} \quad x \neq 0, \\ \pi, & \text{kui} \quad x = 0, \end{cases}$ $P_0 = (0,-1)$

Leida järgmiste funktsioonide katkevuspunktid.

247. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{kui} \ |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui} \quad x = y = 0 \end{cases}$

248. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x + y}, & \text{kui} \quad y \neq -x, \\ -1, & \text{kui} \quad y = -x \end{cases}$

249. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui} \quad x + y \neq 0, \\ 0, & \text{kui} \quad x = y = 0 \end{cases}$

250. $f(x,y) = \dfrac{x + y}{x^3 + y^3}$

251. $f(x,y) = \sin \dfrac{1}{xy}$

252. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$

253. $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

254. $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$

255. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{xyz}$

256. $f(x,y,z) = \ln \dfrac{\ln(|x - 1| + |y + 2| + |z - 3|)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2}}$

257. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x + y|}, & \text{kui } x + y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x + y = 0 \end{cases}$

258. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x - y)}{\ln(1 + x - y)}, & \text{kui } x - y \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x - y = 0 \end{cases}$

259. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 1, & \text{kui } xy = 0 \end{cases}$

260. $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln \tan \pi xy}$

261. $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - \exp \dfrac{\sin(y/x)}{y}}$

262. $f(x,y) = \begin{cases} \exp(-|\frac{x}{y}| - |\frac{y}{x}|), & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$

Järgmistel funktsioonidel f kõrvaldada katkevus piirkonnas D, s.t. leida hulgal D pidev funktsioon g, mis hulgal D erineb funktsioonist f ainult viimase katkevuspunktides.

263. $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, $D = R^2$

264. $f(x,y) = \frac{\sin x + \cos y}{\ln|x + y|}$, $D = \{(x,y):\ |x + y| < 1\}$

265. $f(x,y) = \frac{\exp(x - y)}{3 + \cot^2(x + y)}$, $D = R^2$

266. $f(x,y) = \exp(xy\cot \pi xy)$, $D = \{(x,y):\ 0 \leq xy \leq 1\}$

267. $f(x,y) = \frac{y\arctan^2 (x + 1)}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$, $D = R^2$

268. $f(x,y) = \frac{2y\arcsin^2(x - 1)}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$, $D = \{(x,y):\ |x - 1| \leq 1\}$

269. $f(x,y) = \frac{2 - \sqrt{12 - x - 2y}}{x^2 + 4xy + 4y^2 - 64}$, $D = \{(x,y): -7 \leq x+2y \leq 12\}$

270. $f(x,y) = \frac{x^2 + 2y + \sin(x - 2y)}{1 - \exp \frac{x\sin(y/x)}{y}}$, $D = \{(x,y): |y| \leq \pi x\}$

271. $f(x,y) = \operatorname{arccot} \frac{11y}{4x^2 - 12x + 9}$, $D = \{(x,y):\ y<0\}$

Näide 14. Näidata, et funktsioon

$$f(x,y) = \frac{8}{x - y} + \sin(y - 2x)$$

on ühtlaselt pidev piirkonnas

$$D = \{(x,y):\ |x| \geq 6,\ |y| \leq 2\}.$$

Lahendus. Funktsioon f on elementaarne ja seega pidev oma määramispiirkonnas D. Piirkond D on küll kinnine hulk, kuid siiski Cantori teoreemi kasutada ei saa, sest D on tõkestamata. Seepärast lähtume ühtlase pidevuse definitsioonist.

Olgu

$$P = (x,y),\ P' = (x',y')$$

suvalised punktid piirkonnas D ning $\varrho = d(P,P') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$. Tähistame

$$\Delta f = f(P) - f(P').$$

Hindame

$$|\Delta f| \leqslant \left|\frac{8}{x-y} - \frac{8}{x'-y'}\right| + \left|\sin(y-2x) - \sin(y-2x')\right| \leqslant$$

$$\leqslant 8\frac{|x-x'-(y-y')|}{|x-y|\,|x'-y'|} + 2\left|\cos\frac{y-2x+(y'-2x')}{2}\right|\left|\sin\frac{y-2x-(y'-2x)}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 8\,\frac{|x-x'|+|y-y'|}{|x-y|\,|x'-y'|} + 2\left|\sin\frac{y-y'-2(x-x')}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 8\,\frac{2\varrho}{|x-y|\,|x'-y'|} + |y-y'-2(x-x')| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{16\varrho}{|x-y|\,|x'-y'|} + 3\varrho .$$

Et piirkonnas D on

$$|x-y| \geqslant |x| - |y| \geqslant 6 - 2 = 4,$$

siis

$$\frac{1}{|x-y|\,|x'-y'|} \leqslant \frac{1}{16}.$$

Seega

$$|\Delta f| \leqslant \frac{1}{16}\,16\varrho + 3\varrho = 4\varrho .$$

Võtame suvalise arvu $\varepsilon > 0$. Näeme, et võrratus

$$|\Delta f| < \varepsilon$$

kehtib iga kahe punkti $P,P' \in D$ puhul, mille korral on

$$4\varrho < \varepsilon$$

ehk

$$\rho < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seega võime võtta

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Et saadud $\delta > 0$ ei sõltu punktide P ja P' asukohast hulgas D, siis funktsioon f on ühtlaselt pidev hulgal D.

Ülesanded.

Näidata, et järgmised funktsioonid on ühtlaselt pidevad hulgal D.

272*. $f(x,y) = \cos \frac{x}{y}$, $D = \{(x,y)\colon 1 \leq |x| + |y| \leq 7\}$

273. $f(x,y) = \frac{\sin x - \ln(y+1)}{x^2 - 2x + y + 2}$, $D = \{(x,y)\colon |x| \leq y \leq 3\}$

274. $f(x,y) = x - 4y + \ln 2$, $D = R^2$

275. $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3x - 4y$, $D = \{(x,y)\colon |x| + |y| < 8\}$

276. $f(x,y) = \sin(4x - 8y + 1)$, $D = R^2$

277. $f(x,y) = \sin 2x - 7\cos y$, $D = R^2$

278. $f(x,y) = \cos(x - \frac{2}{y})$, $D = \{(x,y)\colon |y| \geq 1\}$

279. $f(x,y) = \frac{3}{x - y} + \frac{1}{5}\cos(x - y + 2)$,

$D = \{(x,y)\colon |x| > 7,\ |y| < 2\}$

280. $f(x,y) = x - 5y + \cos 6$, $D = R^2$

281. $f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{\sin y}{x}$, $D = \{(x,y);\ |x| + |y| \leq |xy|\}$

282. $f(x,y) = \sin(\frac{3}{x} + \frac{1}{y})$, $D = \left\{(x,y):\ |y| \geq |x| > 1\right\}$

283. $f(x,y) = \sin \frac{\sin x}{2y}$, $D = \left\{(x,y):\ |x| > |y| \geq 1/2\right\}$

284. $f(x,y) = \cos \frac{\sin x}{2y} + \frac{\cos y}{3x}$, $D = \left\{(x,y):\ |x| + |y| \leq xy\right\}$

285. Tõestada, et funktsioon $f(x,y)$ on pidev hulgal D, kui

1° $g(x) = f(x,y)$ on pidev muutuja x funktsioon iga y korral;

2° $h(y) = f(x,y)$ on ühtlaselt (x suhtes) pidev muutuja y funktsioon.

286. Tõestada, et funktsioon $f(x,y)$ on pidev hulgal D, kui

1° $g(x) = f(x,y)$ on pidev muutuja x funktsioon iga y korral;

2° $h(y) = f(x,y)$ rahuldab Lipschitzi tingimust, s.o. leidub konstant $L > 0$, et

$$|h(y) - h(y')| \leq L|y - y'|$$

iga punkti $(x,y) \in D$ ja $(x,y') \in D$ korral.

287. Tõestada, et funktsioon $f(x,y)$ on pidev hulgal D, kui ta on pidev muutujate x ja y suhtes eraldi ning on monotoonne kas muutuja x või y järgi.

Kui punkti $P_0 = (x_0, y_0)$ ümbruses on olemas piirväärtus

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = g(y) \tag{7}$$

ja piirväärtus

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = A,$$

siis arvu A nimetatakse funktsiooni f korduvaks piirväärtuseks punktis P_0 ja kirjutatakse

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = A. \tag{8}$$

Vaadeldakse ka juhte, kus x_0 või y_0 või mõlemad on $\pm\infty$.

Analoogiliselt defineeritakse korduv piirväärtus

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = B. \tag{9}$$

Teoreem (kahekordsest ja korduvast piirväärtusest). Kui funktsioonil f on punktis $P_0 = (x_0, y_0)$ olemas kahekordne piirväärtus

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

ja punkti P_0 mingis ümbruses eksisteerib piirväärtus (7), siis on olemas korduv piirväärtus (8), s.t. kehtib võrdus

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y).$$

Analoogiline teoreem kehtib ka korduva piirväärtuse (9) korral.

Ülesanded.

Leida korduvad piirväärtused

$$A = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) \text{ ja } B = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y)$$

punktis $P_0 = (x_0, y_0)$ järgmistest funktsioonidest.

288. $f(x,y) = \frac{x + y^2}{x + y}$, $P_0 = (0,0)$

289. $f(x,y) = \frac{x + y}{x + y^2}$, $P_0 = (0,0+)$

290. $f(x,y) = \frac{x + y}{x + y^2}$, $P_0 = (\infty,\infty)$

291. $f(x,y) = \frac{\ln(1 + x + y)}{x + \sin y}$, $P_0 = (0,0)$

292. $f(x,y) = \frac{y \ln(1 + x + y)}{x + y^2}$, $P_0 = (0,0)$

293. $f(x,y) = \frac{x^y}{1 + x^y}$, $P_0 = (\infty,0+)$

294. $f(x,y) = \sin \frac{x}{2x + y}$, $P_0 = (\infty,\infty)$

295. $f(x,y) = \frac{2}{xy} \tan \frac{xy}{1 + xy}$, $P_0 = (\infty,\infty)$

296. $f(x,y) = \log_x (x + y)$, $P_0 = (1,0)$

297. $f(x,y) = \frac{\arcsin(x - y^2)}{\ln(1 + x - y)}$, $P_0 = (0,0)$

Leida korduvad piirväärtused punktis (0,0) järgmistest funktsioonidest, näidates eelnevalt, et neid ei saa leida, kasutades teoreemi kahekordsest ja korduvast piiväärtusest.

298. $f(x,y) = \frac{x - y}{x + y}$

299. $f(x,y) = \frac{xy}{xy + x - y}$

300. $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$

301. $f(x,y) = \exp \frac{x}{x^2 + y^2}$

Näidata, et järgmistel funktsioonidel ei eksisteeri mõlemad korduvad piirväärtused punktis (0,0), kuid eksisteerib kahekordne piirväärtus

$$\lim_{x,y \to 0} f(x,y) = 0.$$

302. $f(x,y) = (x + y)\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

303. $f(x,y) = (x - y)\cos \frac{1}{x} \sin \frac{\cos y}{2y}$

304. $f(x,y) = (x - \tan y)\sin \cot x \cos \frac{\sin y}{2y^2}$

305. $f(x,y) = (x^2 + \sin y)\cos \ln x \cos \exp \frac{2}{y}$

§ 4. Kahekordsed jadad.

Olgu antud kahest indeksist $m = 0,1,\ldots$ ja $n = 0,1\ldots$ sõltuvate arvude x_{mn} hulk

$$\{x_{mn}\} = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

mida nimetatakse kahekordseks arvujadaks. Arve x_{mn} nimetatakse jada liikmeteks. Tabeli (10) veerge ja ridu nimetatakse vastavalt jada $\{x_{mn}\}$ veergudeks ja ridadeks.

Kahekordset jada (10) võib vaadelda kui kahe muutuja funktsiooni $f(x,y)$, mille määramispiirkond on punktide hulk $\{(m,n)\}$, kus $m,n = 0,1,2,\ldots$, lugedes

$$x_{mn} = f(m,n). \qquad (11)$$

Jada (10) nimetatakse tõkestatuks, kui ta on tõkestatud hulk, s.o. leidub arv $M > 0$, et kehtib $|x_{mn}| \leq M$ iga $m,n = 0,1,\ldots$ korral. Tõkestatud kahekordsete jadade hulka tähistatakse sümboliga b.

Jada (10) nimetatakse koonduvaks (Pringsheim'i mõttes) arvuks s, ja kirjutatakse

$$\lim_{m,n} x_{mn} = s,$$

kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N = N(\varepsilon) \geq 0$, et kehtib võrratus

$$|x_{mn} - s| < \varepsilon \quad \text{alati kui } m,n \geq N.$$

Koonduvate kahekordsete jadade hulka tähistatakse sümboliga c.

Koonduv kahekordne jada ei tarvitse olla tõkestatud.

Jada (10) nimetatakse tõkestatult koonduvaks (ehk b-koonduvaks) arvuks s, kui ta on tõkestatud ja on koonduv arvuks s, s.o. $\{x_{mn}\} \in b \cap c$ ja $\lim_{m,n} x_{mn} = s$. Tõkestatult koonduvate jadade hulka tähistatakse sümboliga bc.

Jada (10) nimetatakse regulaarselt koonduvaks arvuks s, kui ta koondub arvuks s ja eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{m} x_{mn} = x^n \text{ iga } n = 0,1,\ldots \text{ korral,}$$

$$\lim_{n} x_{mn} = x_m \text{ iga } m = 0,1,\ldots \text{ korral,}$$

s.t. jada (10) kõik veerud ja read on koonduvad jadad.

Regulaarselt koonduvate kahekordsete jadade hulka tähistatakse sümboliga rc.

Kui jada (10) koondub regulaarselt, siis

$$\lim_{m,n} x_{mn} = \lim_{n} \lim_{m} x_{mn} = \lim_{m} \lim_{n} x_{mn} \tag{12}$$

ehk

$$\lim_{m,n} x_{mn} = \lim_{n} x^n = \lim_{m} x_m.$$

Kahekordsete jadade nimetatud hulkade vahel on järgmine vahekord:

$$rc \subset bc \begin{smallmatrix} \subset b \\ \subset c. \end{smallmatrix}$$

Näide 15. Näidata, et jada

$$x_{mn} = \begin{cases} \ln(1 - \frac{m + \sin n}{mn}), & \text{kui } mn \neq 0, \\ 2, & \text{kui } mn = 0, \end{cases}$$

on regulaarselt koonduv.

Lahendus. Näitame, et jada veerud on koonduvad. Kui $n = 0$, siis

$$\lim_{m} x_{mo} = 2 .$$

Kui $n = 1,2,\dots$, siis (logaritmfunktsiooni pidevuse tõttu)

$$\lim_{m} x_{mn} = \lim_{m} \ln(1 - \frac{1}{n} - \frac{\sin n}{mn}) =$$

$$= \ln \lim_{m}(1 - \frac{1}{n} + \frac{O(1)}{mn}) =$$

$$= \ln(1 - \frac{1}{n}).$$

Seega kõik veerud jadas $\{x_{mn}\}$ on koonduvad. Analoogiliselt saame, et jadas $\{x_{mn}\}$ iga rida koondub, sest $m = 0$ korral

$$\lim_{n} x_{on} = 2$$

ja iga m = 1,2,... korral

$$\lim_{n} x_{mn} = 0.$$

Jääb näidata kahekordse piirväärtuse olemasolu. Saame (kasutades jälle logaritmfunktsiooni pidevust)

$$\lim_{m,n} x_{mn} = \ln \lim_{m,n}(1 - \frac{1}{n} + \frac{O(1)}{mn}) = 0.$$

Seega $\{x_{mn}\} \in rc$.

Ülesanded.

Kirjutada järgmised jadad $\{x_{mn}\}$ tabeli (10) kujul.

306. $x_{mn} = \frac{1}{m + n + 1}$

307. $x_{mn} = (-1)^m n$

308. $x_{mn} = (-1)^m + n$

309. $x_{mn} = \frac{n + 1}{m + 1}$

310. $x_{mn} = (-1)^{mn}$

311. $x_{mn} = (-1)^{m+n}$

312. $x_{mn} = \frac{1}{(n - 0,5)^m}$

313. $x_{mn} = a^n$

314. $$x_{mn} = \begin{cases} n, & \text{kui } m = 0, \\ 1, & \text{kui } m \geq 1 \end{cases}$$

315. $$x_{mn} = \begin{cases} \ln(m + 1), & \text{kui } n = 0, \\ \ln(n + 1), & \text{kui } m = 0, \\ 1, & \text{kui } mn \neq 0 \end{cases}$$

Koostada kahekordsed jadad (11) järgmistest funktsioonidest f.

316. $f(x,y) = \frac{3}{x + y + 2}$

317. $f(x,y) = \sin(x + 2y)$

318. $f(x,y) = y\cos(\pi x)$ 321. $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{[x + y]}$

319. $f(x,y) = \sin(\pi x)\ln(y^2 + 1)$

320. $f(x,y) = [x - y]$ 322. $f(x,y) = \sin\frac{\pi xy}{2}$

323. $f(x,y) = \arctan(xy)$

Näide 16. Näidata, et jada

$$x_{mn} = \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right)\sin(mn)$$

ei koondu regulaarselt, kuid koondub tõkestatult.

Lahendus. Piirväärtused

$$\lim_{m} x_{mn} = \lim_{m} \frac{1}{n}\sin(mn)$$

ei eksisteeri $n = 1,2,\ldots$ korral. Seega vaadeldav jada $\{x_{mn}\} \notin rc$. Ilmselt

$$x_{mn} = O(1).$$

ja protsessis $m,n \to \infty$ on

$$x_{mn} = o(1)O(1) = o(1),$$

s.t.

$$\lim_{m,n} x_{mn} = 0.$$

Järelikult $\{x_{mn}\} \in bc$. Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\{x_{mn}\} \in bc \setminus rc.$$

Näide 17. Näidata, et jada

$$x_{mn} = \frac{m + n}{m + n^2 + 1}$$

korral eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_m x_{mn}, \quad \lim_n x_{mn},$$

kuid kahekordne jada $\{x_{mn}\}$ ei koondu.

Lahendus. Vastavalt iga n ja m korral saame

$$x^n = \lim_m x_{mn} = 1,$$

$$x_m = \lim_n x_{mn} = 0.$$

Kui nüüd jada $\{x_{mn}\}$ oleks koonduv, siis viimaste võrduste põhjal jada oleks koguni regulaarselt koonduv. Seega selle jada $\{x_{mn}\}$ korral kehtiks tingimus (12), mis on aga võimatu, sest ilmselt

$$\lim_n \lim_m x_{mn} \neq \lim_m \lim_n x_{mn}.$$

Järelikult vaadeldav jada ei ole koonduv.

Ülesanded.

Näidata, et järgmised kahekordsed jadad $\{x_{mn}\}$ on tõkestatud.

324. $x_{mn} = \cos(m + n)$

325. $x_{mn} = (-1)^{mn}$

326. $x_{mn} = (-1)^{m+n}$

327. $x_{mn} = \dfrac{1}{1 + (m - n)^2}$

328. $x_{mn} = \dfrac{m - n}{m + n}$

329. $x_{mn} = \dfrac{m + n}{m + n^2}$

330. $x_{mn} = \dfrac{m}{m + n}$

331. $x_{mn} = \arctan(m - n)$

332. $x_{mn} = \sin \dfrac{\pi m}{2m + n}$

Näidata, et järgmised kahekordsed jadad $\{x_{mn}\}$ on

9

tõkestatult koonduvad arvuks s.

333. $x_{mn} = \frac{(-1)^{m-n}}{m^2 + m + 2}$, $s = 0$

334. $x_{mn} = \frac{\sin(mn)}{m}$, $s = 0$

335. $x_{mn} = \frac{n + \arctan(mn)}{2n + \sin m}$, $s = \frac{1}{2}$

336. $x_{mn} = \frac{\operatorname{costan} m}{n}$, $s = 0$

Näidata, et järgmised kahekordsed jadad $\{x_{mn}\}$ on regulaarselt koonduvad arvuks s.

337. $x_{mn} = \frac{m + n}{m^2 - mn + n^2}$, $s = 0$

338. $x_{mn} = \frac{m + n}{m^2 + n^2}$, $s = 0$

339. $x_{mn} = 2\arctan(m + n)$, $s = \pi$

340. $x_{mn} = \operatorname{arccot}(m + n)$, $s = 0$

341. $x_{mn} = \left(\frac{mn}{m^2 + n^2}\right)^{m^2}$, $s = 0$

342. $x_{mn} = \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right)^{(mn)^{-2}}$, $s = 1$

343. $x_{mn} = (m^2 + n^2)e^{-(m+n)}$, $s = 0$

344. $x_{mn} = \frac{m^2 n}{1 + mn} \sin \frac{\pi}{m}$, $s = \pi$

345. $x_{mn} = \left(1 + \frac{1}{m + n}\right)^{m+n}$, $s = e$

346. $x_{mn} = \cos \frac{m + n}{mn}$, $s = 1$

347. $x_{mn} = \cot \frac{m + n}{mn}$, $s = o$

348. $x_{mn} = \tan \frac{m + n}{mn}$, $\quad s = 0$

349. $x_{mn} = \tan \frac{\pi(m + n)}{4m(m + 1)}$, $\quad s = 1$

350. $x_{mn} = \cot \frac{\pi(m + n)}{3n(m + 2)}$, $\quad s = \sqrt{3}$

Näidata, et järgmised kahekordsed jadad $\{x_{mn}\}$ ei ole tõkestatud.

351. $x_{mn} = \frac{n + 2}{m}$

352. $x_{mn} = \frac{m + n}{m - n}$

353. $x_{mn} = \frac{m}{n} \tan \frac{m}{m + n}$

354. $x_{mn} = \frac{n}{m} \arcsin \frac{m}{m + n}$

355. $x_{mn} = e^{m^2 - n^2} \sin(2mn)$

356. $x_{mn} = \frac{mn}{1 + mn|m - n|}$

357. $x_{mn} = \frac{\arccos \frac{1}{mn}}{\sin(m/n)}$

Millistesse klassidesse järgmised kahekordsed jadad $x = \{x_{mn}\}$ kuuluvad ja millistesse ei kuulu?

358. $x_{mn} = \frac{\cos(m - n)}{2n + 1}$

359. $x_{mn} = \frac{\operatorname{coscot} n}{m + 2}$

360. $x_{mn} = \frac{2}{(m - 0,5)^n}$

361. $x_{mn} = \frac{\sin(m - n)\pi/6}{(n - 0,7)^m}$

362. $x_{mn} = \begin{cases} m, & \text{kui } n = 0, \\ 2, & \text{kui } n \geqslant 1 \end{cases}$

363. $x_{mn} = \frac{1}{(mn - 0,5)^{m+n}}$

Leida arvud s, milleks koonduvad järgmised kahekordsed jadad $\{x_{mn}\}$, kui

364. $x_{mn} = \frac{m^2 + n}{m^4 + n^2}$

365. $x_{mn} = \frac{m + n^2}{m^2 + n^3}$

366. $x_{mn} = \frac{\sin(m + n)}{2m + 3}$

367. $x_{mn} = (1 + \frac{\pi}{mn})^{mn}$

368. $\ln x_{mn} = \frac{m^2 \ln(1 + 1/m)}{m + \cos(1/n)}$

369.
$$\exp x_{mn} = \begin{cases} m+1, & \text{kui } m = 0, \\ n+1, & \text{kui } n = 0, \\ 1, & \text{kui } mn \neq 0 \end{cases}$$

370. Tõestada, et kehtivad järgmised sisalduvused

$$bc \subset b, \ bc \subset c, \ rc \subset bc$$

371. Näidata, et $c \not\subset b$ ja $b \not\subset c$.

372. Olgu $\lim y_m = a \neq \infty$ ja $\lim z_n = b \neq \infty$. Näidata, et kahekordne jada $x_{mn} = y_m z_n$ on regulaarselt koonduv arvuks ab.

§ 5. Kahekordsed read.

Olgu antud kahekordne jada $\{u_{mn}\}$. Ühendame jada liikmed u_{mn} märgiga +, saame avaldise

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} = u_{00} &+ u_{01} + \ldots + u_{0n} + \ldots \\ &+ u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{1n} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ u_{m0} + u_{m1} + \ldots + u_{mn} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{13}$$

mida nimetatakse kahekordseks reaks. Arve $u_{00}, u_{01}, \ldots, u_{mn}, \ldots$ nimetatakse kahekordse rea (13) liikmeteks, aga avaldist u_{mn} rea (13) üldliikmeks.

Kahekordset jada $\{S_{mn}\}$, kus

$$S_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} u_{kl} \tag{14}$$

nimetatakse rea (13) osasummade jadaks.

Rida (13) nimetatakse koonduvaks (tõkestatult koonduvaks, regulaarselt koonduvaks) summaks S, kui selle rea osasummade jada (14) koondub (vastavalt tõkestatult koondub, regulaarselt koondub) arvuks S.

Kui rida (13) koondub summaks S, siis kirjutatakse

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} = S. \qquad (15)$$

Koonduvate ridade hulka tähistatakse sümboliga c. Tõkestatult koonduvaid ja regulaarselt koonduvaid ridu (13) nimetatakse vastavalt ka b-koonduvaiks ja r-koonduvaiks ja nende ridade hulki tähistatakse vastavalt sümbolitega bc ja rc.

Kui rida (13) koondub regulaarselt, siis koonduvad harilikud read

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \quad (m = 0,1,\dots), \qquad (16)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} \quad (n = 0,1,\dots). \qquad (17)$$

Ridu

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}\right), \qquad (18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}\right), \qquad (19)$$

nimetatakse korduvateks ridadeks, kui vastavalt harilikud read (16) ja (17) on koonduvad.

Teoreem kahekordsest ja korduvast reast. Kui koondub kahekordne rida (13) ja koonduvad kõik harilikud read (16), siis koondub ka korduv rida (18) ja kehtib võrdus

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}.$$

Analoogiline teoreem kehtib ka rea (19) korral. Järelikult, kui rida (13) on regulaarselt koonduv, siis kehtivad võrdused

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}. \qquad (20)$$

Rea (13) liikmed u_{mn} avalduvad rea (13) osasummade jada $\{S_{mn}\}$ kaudu järgmiselt:

$$u_{mn} = S_{mn} - S_{m-1,n} - S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1}, \qquad (21)$$

kus tuleb võtta

$$S_{m,-1} = 0,\ S_{-1,n} = 0$$

iga $m,n = 0,1,\dots$ korral.

Kahekordset rida (13) nimetatakse <u>absoluutselt koonduvaks</u>, kui koondub kahekordne rida

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |u_{mn}|$$

ja kirjutatakse

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |u_{mn}| < \infty.$$

Absoluutselt koonduvate ridade hulka tähistatakse sümboliga a.

Suurust

$$R_{mn} = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{kl} - \sum_{k,l=0}^{m,n} u_{kl} =$$

$$= \sum_{k,l=m+1,n+1}^{\infty} u_{kl} + \sum_{k,l=0,n+1}^{m,\infty} u_{kl} + \sum_{k,l=m+1,0}^{\infty,n} u_{kl}$$

nimetatakse rea (13) <u>jääkreaks</u>.

Kui rida (13) osasummadega (14) koondub summaks S, siis kehtib võrdus

$$S = S_{mn} + R_{mn}. \tag{22}$$

Lineaarsuse omadus. Kui kahekordsed read $\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}$ ja $\sum_{m,n=0}^{\infty} v_{mn}$ on koonduvad (b-koonduvad, r-koonduvad, absoluutselt koonduvad) vastavalt summadeks U ja V, siis mis tahes arvude λ ja μ korral koondub (b-koondub, r-koondub, absoluutselt koondub) ka kahekordne rida

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (\lambda u_{mn} + \mu v_{mn})$$

summaks $\lambda U + \mu V$, s.t. kehtib võrdus

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (\lambda u_{mn} + \mu v_{mn}) = \lambda \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} + \mu \sum_{m,n=0}^{\infty} v_{mn}.$$

Ülesanded.

Leida kahekordsed read, kui nende osasummade jadad iga m,n=0,1,... korral on järgmised.

373. $S_{mn} = (-1)^{mn}$

374. $S_{mn} = (-1)^{m+2}$

375. $S_{mn} = (-1)^{m+n}$

376. $S_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)}$

377. $S_{mn} = \frac{1}{m+n+1}$

378. $S_{mn} = 3 + \frac{1}{m+2} + \frac{2}{n+1}$

379. $S_{mn} = \sin\frac{\pi}{m+1} + \cos\frac{\pi}{n+1}$

380. $S_{mn} = \arctan(m+n)$

381. $S_{mn} = \frac{(-1)^m}{mn+1}$

382. $S_{mn} = 2^{-mn}$

383. $S_{mn} = \tan\frac{\pi}{4m+2n+1}$

384. $S_{mn} = \ln(e^3 + \frac{1}{m+2} - \frac{2}{n+1})$

385. Tõestada võrduse (21) abil, et kahekordse rea (13) koonduvuseks on tarvilik, et

$$\lim_{m,n} u_{mn} = 0.$$

386. Tõestada, et kahekordse rea (13) tõkestatult koonduvuseks on tarvilik, et

$$\{u_{mn}\} \in bc \quad \text{ja} \quad \lim_{m,n} u_{mn} = 0.$$

387. Tõestada, et kahekordse rea (13) regulaarseks koonduvuseks on tarvilik, et

$$\{u_{mn}\} \in rc \quad \text{ja} \quad \lim_{m,n} u_{mn} = 0.$$

388. Tõestada võrduse (22) abil, et kahekordne rida (13) on koonduv parajasti siis, kui

$$\lim_{m,n} R_{mn} = 0.$$

389. Tõestada, et kahekordne rida (13) on b-koonduv parajasti siis, kui

$$\{R_{mn}\} \in bc \quad \text{ja} \quad \lim_{m,n} R_{mn} = 0.$$

390. Tõestada, et kahekordne rida (13) on r-koonduv parajasti siis, kui

$$\{R_{mn}\} \in rc \quad \text{ja} \quad \lim_{m,n} R_{mn} = 0.$$

391. Tõestada, et iga absoluutselt koonduv kahekordne rida on r-koonduv.

392. Olgu harilikud read $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ koonduvad vastavalt summadeks U ja V. Tõestada, et kahekordne rida $\sum_{m,n=0}^{\infty} u_m v_n$ on r-koonduv summaks UV.

Näidata, et järgmised kahekordsed read ei koondu.

393. $\sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{mn}$ 394. $\sum_{m,n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi/3}{1 + (m-n)^2}$

395. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \sqrt[mn]{m}$

400. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[m+1]{\ln(n+2)}}$

396. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \sqrt[m]{2n}$

401. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} 2^{m+n}\tan \frac{\pi}{2^{m+n+1}}$

397. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{mn}{1+mn}\right)^{mn}$

402. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \arctan(m+n)$

398. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{m+n}}$

403. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \cot \frac{\pi(m+n)}{3n(m+2)}$

399. $\sum\limits_{m,n=3}^{\infty} \tan \left(\frac{\pi}{m} + \frac{n}{2}\right)$

404. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \tan \frac{\pi(m+n)}{4m(m+1)}$

Näidata, et järgmised kahekordsed read ei ole b-koonduvad.

405. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{\ln(m+n+1)}{(m+1)^2}$

408. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(mn-0,7)^{m+n}}$

406. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \cot \frac{\pi}{mn}$

409*. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{m \sin(mn)}{1+n}$

407. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{\arctan(2m)}{(m-0,5)^n}$

410. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{mn}{m^2 + \sin n}$

Näidata, et järgmised kahekordsed read ei ole r-koonduvad.

411. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m}{2n}$

414. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{\arctan m}{2+n}$

412. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{\sin(mn)}{1+n}$

415. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{m+2}{3^n + \ln m}$

413. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \tan \frac{\pi m}{3+n}$

416. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{2^n}$

Näidata, et järgmised kahekordsed read ei koondu absoluutselt.

417. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \sin \frac{\pi m}{2n+1}$

418. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{mn} \frac{\sin(mn)}{2+m}$

419. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{mn} \sin(m+n)$

420. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \arcsin \frac{(-1)^n}{m}$

Positiivsed read. Kahekordset rida (13) nimetatakse positiivseks, kui $u_{mn} \geq 0$ iga $m,n = 0,1,\ldots$ korral. Positiivne rida (13) koondub parajasti siis, kui tema osasummade jada (14) on tõkestatud, s.t. leidub arv $M > 0$, et iga $m,n = 0,1,\ldots$ korral on

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} u_{kl} \leq M.$$

Seepärast, kui positiivne rida (13) on koonduv, siis kirjutatakse

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} < \infty ,$$

kui aga ei ole koonduv, siis kirjutatakse

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} = \infty .$$

Positiivsete kahekordsete ridade võrdluslause. Kui ridade

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} \tag{U}$$

ja

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} v_{mn} \tag{V}$$

korral iga $m,n = 0,1,\ldots$ korral kehtib võrratus

$$0 \leq u_{mn} \leq v_{mn},$$

siis rea (V) koonduvusest järeldub rea (U) koonduvus ning kui rida (U) ei koondu, siis ka rida (V) ei koondu.

Ülesanded.

421. Tõestada, et iga koonduv positiivne kahekordne rida on r-koonduv.

422. Tõestada positiivsete kahekordsete ridade võrdluslause, kasutades harilike positiivsete ridade esimest võrdluslauset.

423. Tõestada, et kui positiivse kahekordse rea (13) korral üks ridadest (20) koondub, siis koonduvad ka kaks ülejäänud rida ja kehtib võrdus (20).

424. Tõestada, et kui positiivse kahekordse rea (13) korral üks ridadest (20) ei koondu, siis ei koondu ka kaks ülejäänud rida.

Teha kindlaks, millised järgmistest kahekordsetest ridadest on koonduvad ja millised ei koondu.

425. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+n}}$

426. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n^3}$

427. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{3^m(n+1)}$

428. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{2^m}{(m+n+1)3^{m+n}}$

429. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{\arctan(m^2+n^m)}{2^{m+n}}$

430. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi}{2^{m+n}}$

431. $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty} \tan \frac{\pi}{m^2n}$

432. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \ln(1+\arctan \frac{\pi}{2^m n^2})$

433. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \ln^2(1+\frac{1}{mn})$

434. $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty} \ln^2\cos \frac{\pi}{mn}$

435. $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty} \ln^3\sin \frac{\pi}{mn}$

436. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \arctan \frac{\pi}{4^m n^2}$

437. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{\tan(\pi/n^2)}{m!}$

438. $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{\pi}{mn}}{\ln^2 m \ln^3 n}$

439. $\sum_{m,n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m^2}$ 441. $\sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn} \frac{(2n-1)!!}{3^{m+n}\, n!}$

440. $\sum_{m,n=2}^{\infty} \tan \frac{\pi}{m^2 + n}$

Näide 18. Teha kindlaks, milliste α korral kahekordne rida

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{\alpha}} \tag{23}$$

koondub ja milliste korral ei koondu.

Lahendus. Et vaadeldav rida on positiivne, siis võime kasutada ülesannete 423 ja 424 väiteid. Arvestades harilike ridade teooriast tuntud jääkliikme hinnangut integraaltunnuse korral kahaneva funktsiooni f jaoks

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)dx,$$

saame $\alpha > 2$ korral

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} < \infty .$$

Kui $\alpha \leqslant 0$, siis rida (23) ei koondu (vt. ülesanne 385). Kui aga $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, siis

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{\alpha}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \infty ,$$

sest $0 < \alpha - 1 \leqslant 1$. Lõpuks, kui $0 < \alpha < 1$, siis positiivsete kahekordsete ridade võrdluslause põhjal rida (23) ei koondu, sest

$$\frac{1}{(m+n)^{\alpha}} > \frac{1}{m+n} .$$

Kokkuvõttes kahekordne rida (23) koondub, kui $\alpha > 2$ ja ei koondu, kui $\alpha \leq 2$.

Ülesanded.

Näidata, et järgmised kahekordsed read on koonduvad ja leida nende summa, või veenduda, et nad ei koondu.

442. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{m+n}}$

443. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{3^{m+n}}$

444. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^2 n^2}$

445. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{2^m n^2}$

446. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2}$

447. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{1}{m^2 + n^2}$

448. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{2^m - 1}{2^{m(n+2)}}$

449. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1 - 3^n}{3^{n(m+2)}}$

450. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{3^{mn}\, 7^m}$

Otsustada, millised järgmistest kahekordsetest ridadest koonduvad ja millised ei koondu.

451. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \tan \frac{\pi}{m + n + 1}$

452. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^3 + m^3 n^3 + n^3}$

453. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m + n)^2 - 1}$

454. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{\arctan(mn)}{1 + (m + n)^3}$

455. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{(m + n)^{5/2}}$

456. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \ln^4\left(1 + \frac{1}{m + n}\right)$

457. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \sin^3 \frac{1}{m + n}$

458. $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arccot}(1 - mn)}{m + n + 2}$

II. M I T M E M U U T U J A F U N K T S I O O N I D E D I F E R E N T S E E R I M I N E

§ 1. Osatuletised.

Olgu antud mitme muutuja funktsioon

$$u = f(x,y,z,\ldots) \tag{1}$$

ehk lühidalt

$$u = f(P),$$

kus $P = (x,y,z,\ldots)$. Fikseerides muutujad $y,z,\ldots$ saame ühe muutuja x funktsiooni

$$g(x) = f(x,y,z,\ldots).$$

Kui funktsioonil g on kohal x olemas tuletis $g'(x)$, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f osatuletiseks muutuja x järgi punktis P ja tähistatakse sümbolitega $\frac{\partial f}{\partial x}$ või f_x ja arvestades (1), samuti sümbolitega $\frac{\partial u}{\partial x}$ või u_x.

Kui on vaja näidata, et osatuletis muutuja x järgi on võetud punktis P, siis kirjutatakse

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z,\ldots),\ f_x(P) \text{ või } f_x(x,y,z,\ldots).$$

Seega

$$\frac{\partial}{\partial x} f(P) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y,z,\ldots) - f(x,y,z,\ldots)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Analoogiliselt defineeritakse ja tähistatakse funktsiooni f osatuletisi teiste muutujate y,z,... järgi, s.o. osatuletisi f_y, f_z,... .

Funktsiooni osatuletisi arvutatakse ühe muutuja funktsiooni diferentseerimise reeglite ja valemite järgi. Seepärast elementaarfunktsioonide osatuletised on ka elementaarfunktsioonid.

Näide 1. Leida funktsiooni

$$z = x^3 + 2y \sin(y - x^3)$$

osatuletised z_x ja z_y.

Lahendus. Lugedes muutuja y konstandiks, muutub z ühe muutuja x funktsiooniks. Seepärast

$$z_x = 3x^2 + 2y \cos(y - x^3)(-3x^2) =$$
$$= 3x^2[1 - 2y \cos(x^3 - y)].$$

Nüüd, lugedes muutuja x konstandiks, muutub z vaid muutuja y funktsiooniks. Seepärast

$$z_y = 2\sin(y - x^3) + 2y \cos(y - x^3) =$$
$$= 2[\sin(y - x^3) + y \cos(y - x^3)].$$

Teoreem osatuletise piirväärtusest. Kui funktsioon f on pidev muutuja x järgi punktis $(x_0, y, \ldots)$, siis

$$f_x(x_0, y, \ldots) = \lim_{x \to x_0} f_x(x, y, \ldots)$$

eeldusel, et viimane piirväärtus eksisteerib (lõplik või lõpmatu).

Näide 2. Leida osatuletised $f_x(0,y)$ ja $f_y(x,0)$ ning $f_x(0,0)$ ja $f_y(0,0)$, kui

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \text{ või } y = 0. \end{cases}$$

__Lahendus.__ Vaadeldav funktsioon f on pidev punktis $(0,0)$, sest

$$\lim_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Olgu $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Siis

$$f_x(x,y) = 2x\arctan\frac{y}{x} + \frac{x^2}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{y^2}{1+x^2/y^2}\cdot\frac{1}{y} =$$

$$= 2x\arctan\frac{y}{x} - y,$$

$$f_y(x,y) = x - 2y\arctan\frac{x}{y}.$$

Kasutades teoreemi osatuletise piirväärtusest, saame

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} f_x(x,y) = \lim_{x\to 0} \left(2x\arctan\frac{y}{x} - y\right) = -y$$

iga $y \neq 0$ korral. Analoogiliselt saame

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} f_y(x,y) = x$$

iga $x \neq 0$ korral. Vahetult osatuletise definitsioonist (vt. valem (2)) saame

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} f(\Delta x,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$$

Kui funktsioonil $f_x(x,y,\dots)$ on olemas osatuletis muutuja x järgi, siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f __teist järku__ (ehk __teiseks__) __osatuletiseks__ muutuja x järgi ja tähistatakse sümbolitega $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx} või f_{x^2}. Analoogiliselt defineeritakse teist järku osatuletised teiste muutujate $y,z,\dots$ järgi, s.o. osatuletised $f_{yy}, f_{zz}, \dots$.

Kui funktsioonil f_x on olemas osatuletis muutuja y järgi, siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f __segatuletiseks__ muutujate x ja y järgi ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \text{ või } f_{xy}.$$

Analoogiliselt defineeritakse segatuletised f_{yx}, f_{xz}, f_{zx}, f_{yz}, f_{zy},... .

Vaadeldakse ka veel kõrgemat järku osatuletisi ja segatuletisi, mis defineeritakse analoogiliselt.

Teoreem segatuletistest. Kui segatuletised f_{xy} ja f_{yx} on pidevad mingis punktis, siis selles punktis

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Näide 3. Leida segatuletis f_{xy}, kui

$$f(x,y) = x^2y^3 + \ln\left(1 + \frac{\log \arctan x}{\arcsin x}\right).$$

Lahendus. Tuleks arvutada f_x ja seejärel f_{xy}. Et aga f_x arvutamine on raske, aga f_y ja f_{yx} arvutamine on lihtne, siis on otstarbekohane kasutada teoreemi segatuletistest. Et f on elementaarfunktsioon, siis tema osatuletised on ka elementaarfunktsioonid ja seega pidevad oma määramispiirkondades. Järelikult segatuletised f_{xy} ja f_{yx} on pidevad ja teoreemi segatuletistest põhjal saame

$$f_y(x,y) = x^2\, 3y^2 = 3x^2y^2,$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6xy^2.$$

Näide 4. Leida funktsiooni

$$z = (x + \sin y)^x$$

osatuletis z_{xx}.

Lahendus. Et $x + \sin y > 0$, siis on ka $z > 0$ ja seega logaritmides saame

$$\ln z = x \ln(x + \sin y).$$

Nüüd diferentseerides mõlemat poolt x järgi, leiame

$$\frac{z_x}{z} = \ln(x + \sin y) + \frac{x}{x + \sin y}.$$

Osatuletise z_{xx} leidmiseks diferentseerime veel kord mõlemat poolt x järgi, saame

$$\frac{z\, z_{xx} - z_x z_x}{z^2} = \frac{1}{x + \sin y} + \frac{\sin y}{(x + \sin y)^2},$$

kust

$$\frac{z_{xx}}{z} = \left(\frac{z_x}{z}\right)^2 + \frac{1}{x + \sin y} + \frac{\sin y}{(x + \sin y)^2}.$$

Asendades $\frac{z_x}{z}$ ülal leitud avaldisega, saame

$$\frac{z_{xx}}{z} = \left[\ln(x + \sin y) + \frac{x}{x + \sin y}\right]^2 + \frac{1}{x + \sin y} + \frac{\sin y}{(x + \sin y)^2} =$$

$$= \ln^2(x + \sin y) + \frac{1 + 2x\ln(x + \sin y)}{x + \sin y} + \frac{x^2 + \sin y}{(x + \sin y)^2}.$$

Korrutades nüüd võrduse pooli avaldisega $z = (x + \sin y)^x$, saamegi otsitava osatuletise z_{xx}.

Ülesanded.

Leida osatuletised f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} ja f_{xy} järgmistest funktsioonidest.

459. $f(x,y) = 2x + y$

460. $f(x,y) = 3x - y + \ln 2$

461. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

462. $f(x,y) = x^3y - y^3x$

463. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

464. $f(x,y) = (5x^2y - y^3 + 9)^3$

465. $f(x,y) = (1 + 5x^3y^2)^3$

466. $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$

467. $f(x,y) = \frac{x - y}{x + y}$

468. $f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

469. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

470. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

471. $f(x,y) = x \sin(x + y)$

472. $f(x,y) = \frac{\cos y^2}{x}$

473. $f(x,y) = \tan \frac{x^2}{y}$

474. $f(x,y) = x^y$

475. $f(x,y) = \ln(x + y^2)$

476. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

477. $f(x,y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$

478. $f(x,y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

479. $f(x,y) = (1/3)^{y/x}$

480. $f(x,y) = e^{-x/y}$

481. $f(x,y) = \exp\sin \frac{y}{x}$

482. $f(x,y) = (1 + xy)^x$

483. $f(x,y) = \ln(x + \frac{y}{2x})$

484. $f(x,y) = (1 + \log_y x)^3$

485. $f(x,y) = \arctan \sqrt{y^x}$

486*.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\arctan(y/x) - y^2\arctan(x/y), & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = 0 \text{ või } y = 0 \end{cases}$$

487. $f(x,y) = \begin{cases} x^3\sin \frac{y}{x} + y^3\sin \frac{x}{y}, & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \text{ või } y = 0 \end{cases}$

488. Leida $f_x(2,1)$ ja $f_y(2,1)$, kui $f(x,y) = xy + x/y$

489. Leida $f_y(1,y)$, kui $f(x,y) = y + (x - 1)\arcsin y/x$

490. Leida $f_x(2,-1)$ ja $f_y(2,-1)$, kui $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$

491. Olgu
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kui} \quad x = 0 \text{ või } y = 0, \\ 1, & \text{kui} \quad x \neq 0 \text{ ja } \ y \neq 0. \end{cases}$$
Näidata, et funktsioonil f on olemas punktis (0,0) osatuletised, kuid ta on katkev selles punktis.

492. Olgu
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$
Näidata, et f on katkev punktis (0,0), kuid eksisteerivad $f_x(0,0)$ ja $f_y(0,0)$.

493. Olgu
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui} \quad x = y = 0. \end{cases}$$
Näidata, et punktis (0,0) segatuletised f_{xy} ja f_{yx} eksisteerivad, kuid teoreem segatuletistest ei ole rakendatav.

494. Olgu funktsiooni teist järku osatuletised ja kolmandat järku segatuletised pidevad punktis P. Tõestada, kasutades teoreemi segatuletistest, et punktis P on
$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy}.$$

495. Kui kasutada teoreemi segatuletistest, siis milliste funktsiooni f osa- ja segatuletiste pidevust tuleb eeldada, et vaadeldavas punktis kehtiksid võrdused

a) $f_{xxyx} = f_{xxxy}$,

b) $f_{yxxx} = f_{xyxx}$,

c) $f_{xxyy} = f_{xyyx} = f_{yyxx} = f_{yxxy}$?

Leida segatuletis f_{xy}, kui

496. $f(x,y) = x^x + y \sin x$

497. $f(x,y) = x^2 + (1 + y\sin x)^y$

498. $f(x,y,z) = x + y^3 + \arcsin \ln(x + z)$

Leida f_x, f_y, f_z, f_{xy}, f_{xz} ja f_{yz} järgmistest funktsioonidest.

499. $f(x,y,z) = xyz + \ln(x + y + z)$

500. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

501. $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

502. $f(x,y,z) = x^{y/z}$

503. $f(x,y,z) = x^{y^z}$

504. $f(x,y,z) = (xy)^z$

505. $f(x,y) = (x/y)^z$

506. $f(x,y,z) = z^{xy}$

507. Arvutada f_x, f_y, ja f_z punktis $(1,2,0)$, kui $f(x,y,z) = \ln(xy + z)$.

508. Olgu $f(x,y,z) = \sin^2(3x + 2y - z)$. Arvutada $f_x(1,-1,1)$, $f_y(1,1,4)$ ja $f_z(-1/2,0,-1)$.

Arvutada järgmised segatuletised.

509. u_{xxy}, kui $u = x + x\ln(xy)$

510. $u_{x^3y^3}$, kui $u = y^2 + x^3\sin y + y^3\sin x$

511. u_{xyz}, kui $u = x^y + \arctan \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}$

512. u_{xyz}, kui $u = \exp x^y + \exp(xyz)$

513. u_{xyz}, kui $u = \ln \sqrt{(x - z)^2 + (y - z)^2}$

514. Näidata, et funktsioon $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ rahuldab võrrandit

$$xz_x + yz_y = 2.$$

515. Näidata, et funktsioon $z = xy + x\exp(y/x)$ rahuldab võrrandit

$$xz_x + yz_y = xy + z.$$

516. Näidata, et funktsioon $z = \sqrt{xy + x/y}$ rahuldab võrrandit

$$z(xz_x + yz_y) = xy.$$

517. Näidata, et funktsioon $u = (x - y)(y - z)(z - x)$ rahuldab võrrandit

$$u_x + u_y + u_z = 0.$$

518. Näidata, et funktsioon $u = x + (x - y)/(y - z)$ rahuldab võrrandit

$$u_x + u_y + u_z = 1.$$

519. Millised osa- ja segatuletised on olemas funktsioonil f, kui on teada, et

$$z = y^2/(3x) + f(x,y)$$

rahuldab võrrandit

$$xz_x - yz_y + y^2/x = 0 ?$$

520. Millised tuletised on olemas funktsioonidel f ja g, kui on teada, et

$$z = xf(x + y) + yg(x + y)$$

rahuldab võrrandit

$$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0 ?$$

Liitfunktsiooni diferentseerimine toimub üldiselt järgmiste eeskirjade järgi.

Teoreem I. Kui funktsioonil $f(x,y,...)$ on olemas pidevad osatuletised ja tema argumendid $x,y,...$ on diferentseeruvad ühe muutuja t funktsioonid

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \dots , \end{cases}$$

siis liitfunktsiooni $F(t) = f[x(t), y(t), \dots]$ tuletis eksisteerib ja on arvutatav valemiga

$$\frac{dF}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + \dots . \qquad (3)$$

Teoreem II. Kui funktsioonil $f(u, v, \dots)$ on olemas pidevad osatuletised ja argumentidel

$$\begin{cases} u = u(x, y, \dots) \\ v = v(x, y, \dots) \\ \dots\dots\dots \end{cases} \qquad (4)$$

on olemas lõplikud osatuletised, siis liitfunktsiooni

$$F(x, y, \dots) = f[u(x, y, \dots), v(x, y, \dots), \dots]$$

osatuletised eksisteerivad ja kehtivad valemid

$$\begin{cases} F_x = f_u u_x + f_v v_x + \dots \\ F_y = f_u u_y + f_v v_y + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad (5)$$

Näide 5. Leida liitfunktsiooni z tuletis, kui

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos \frac{t}{5} \\ z = \exp(x - 5y). \end{cases}$$

Lahendus. Siin z on ühe argumendi t diferentseeruv funktsioon teoreemi I põhjal, sest eksisteerivad (isegi pidevad)

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{5} \sin \frac{t}{5}$$

ja osatuletised

$$z_x = \exp(x - 5y), \quad z_y = -5\exp(x - 5y)$$

on pidevad. Seega valemi (3) järgi

$$\frac{dz}{dt} = e^{x-5y} \cos t - 5e^{x-5y}\left(-\frac{1}{5} \sin \frac{t}{5}\right) =$$

$$= e^{x-5y}\left(\cos t + \sin \frac{t}{5}\right).$$

Näide 6. Leida liitfunktsiooni z osatuletised, kui

$$\begin{cases} z = u^2 - v^2 \\ u = x \sin y \\ v = x \cos y. \end{cases}$$

Lahendus. Siin funktsiooni z osatuletised z_x ja z_y eksisteerivad teoreemi II põhjal, sest eksisteerivad lõplikud (isegi pidevad)

$$u_x = \sin y, \quad v_x = \cos y,$$

$$u_y = x \cos y, \quad v_y = -x \sin y,$$

ja osatuletised

$$z_u = 2u, \quad z_v = -2v$$

on pidevad. Seega valemite (5) järgi

$$\begin{cases} z_x = 2u \sin y - 2v \cos y \\ z_y = 2u\, x \cos y + 2v\, x \sin y, \end{cases}$$

kust asendades u ja v, saame

$$\begin{cases} z_x = 2x \sin^2 y - 2x \cos^2 y \\ z_y = 2x^2 \sin y \cos y + 2x^2 \cos y \sin y \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} z_x = -2x \cos 2y \\ z_y = 2x^2 \sin 2y. \end{cases}$$

Ülesanded.

Leida liitfunktsiooni tuletis.

521. $z = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = \frac{1}{3}\cos t$

522. $z = \arcsin(x - y)$, $x = t$, $3y = 4t^3$

523. $z = \tan(t + x^2 - y)$, $x = t^2$, $y = 2\sqrt{t}$

524. $z = \arctan(xy)$, $y = e^x$

525. $u = e^x(y - z)$, $y = \sin x$, $z = \cos x$.

526. $z = \arcsin(x/y)$, $y = \sqrt{1 + x^2}$

527. $u = f(x,y,z)$, $x = t$, $y = \ln t$, $z = t + 1$

528. $z = x^2 \ln y\, f(x,y)$, $x = \sqrt{1 - t^2}$, $y = \exp \sin t$

Leida liitfunktsiooni osatuletised.

529. $z = u^2v - uv^2$, $u = x\cos y$, $v = x\sin y$

530. $z = u \ln v$, $(x + y)u = 1$, $v = e^{x+y}$

531. $z = \frac{u}{v}\arctan(u + v)$, $u = xy$, $v = x + y$

532. $z = \operatorname{arccot}(u/v)$, $u = x\sin y$, $v = x\cos y$

Eeldades, et funktsioonil f on pidevad osatuletised, leida liitfunktsiooni osatuletised.

533. $z = f(x - xy, e^{x-xy})$

534. $z = xf(xy + y/x)$

535. $z = f(x, y - \ln x)\ln y$

536. $u = f(x/y, y/z)$

Leida $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja märgitud joonel ka $\frac{dz}{dx}$, kui

537. $z = \arctan(y/x)$ ja $y = x^2$

538. $z = x^y$ ja $y = \ln \ln x$

539. $z = \ln(e^x + e^y)$ ja $y = x^3$

540. $z = x^y$ ja $y = f(x)$

541. $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos x$

§ 2. Täisdiferentsiaal.

Olgu

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \tag{6}$$

funktsiooni f muut punktide $P_0 = (x_0, y_0, \ldots)$ ja $P = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots)$ vahel.

Definitsioon. Öeldakse, et funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0, kui tema muut (6) punkti P_0 ümbruses avaldub kujul

$$\Delta f = f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + \ldots + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \ldots, \tag{7}$$

kus $\alpha, \beta, \ldots \to 0$, kui $\Delta x, \Delta y, \ldots \to 0$. Seejuures suurust

$$df = f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + \ldots \tag{8}$$

nimetatakse funktsiooni f (esimest järku) täisdiferentsiaaliks punktis P_0.

Tähistades $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy, \ldots$, võime funktsiooni f täisdiferentsiaali (8) kirjutada kujul

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + \ldots . \tag{9}$$

Avaldises (8) liidetavaid

$$f_x(P_0)dx,\ f_y(P_0)dy, \ldots$$

nimetatakse funktsiooni f osadiferentsiaalideks punktis P_0 vastavalt muutujate $x, y, \ldots$ järgi ning suurusi dx, dy, ... argumentide diferentsiaalideks.

Diferentseeruva funktsiooni f muudu (6) võib kirjutada kujul

$$\Delta f = df + o(\rho),$$

kus

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \ldots}\,.$$

Iga punktis P_0 diferentseeruv funktsioon on pidev selles punktis P_0.

Võrdusest (7) näeme, et funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis P_0 on tarvilik lõplike osatuletiste f_x, $f_y, \ldots$ olemasolu punktis P_0. Kuid lõplike osatuletiste f_x, f_y, ... olamasolu punktis P_0 ei ole piisav funktsiooni f diferentseeruvuseks selles punktis P_0. Küll aga kehtib järgmine

Teoreem 1. Kui funktsioonil f on olemas pidevad osatuletised $f_x, f_y, \ldots$ punktis P_0, siis funktsioon f on diferentseeruv selles punktis P_0.

Valemid (3) ja (5) liitfunktsiooni osatuletiste leidmiseks kehtivad ka juhul, kui funktsioon f on vaid diferentseeruv vaadeldavates punktides.

Samuti teoreem segatuletistest kehtib ka eeldusel, kui osatuletised f_x ja f_y on diferentseeruvad funktsioonid vaadeldavas punktis.

Fikseeritud dx, dy,... korral on funktsiooni f täisdiferentsiaal

$$df(P) = f_x(P)dx + f_y(P)dy + \ldots \qquad (10)$$

punkti $P = (x, y, \ldots)$ funktsioon. Osutub, et df on diferentseeruv punktis P parajasti siis, kui osatuletised $f_x, f_y, \ldots$ on diferentseeruvad punktis P.

Kui df on diferentseeruv punktis P, siis tema täisdiferentsiaali

$$d^2f = d(df)$$

nimetatakse funktsiooni f teist järku ehk <u>teiseks diferentsiaaliks</u> punktis P.

Analoogiliselt defineeritakse veel kõrgemat järku täisdiferentsiaalid. Üldiselt $d^{n-1}f$ on diferentseeruv parajasti siis, kui kõik (n-1)-järku osatuletised on diferentseeruvad. Kui $d^{n-1}f$ on diferentseeruv, siis tema täisdiferentsiaali

$$d^nf = d(d^{n-1}f)$$

nimetatakse funktsiooni f <u>n-järku täisdiferentsiaaliks</u>.

Kahe muutuja funktsiooni f(x,y) n-järku täisdiferentsiaal arvutatakse valemist

$$d^nf = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}\, dx^{n-k}dy^k, \tag{11}$$

mida analoogia tõttu binoomvalemiga kirjutatakse sümboolselt kujul

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n f.$$

Valemist (11) erijuhtudel n = 1,2,3 saame

$$df = f_x dx + f_y dy,$$

$$d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2, \tag{12}$$

$$d^3f = f_{xxx}dx^3 + 3f_{xxy}dx^2dy + 3f_{xyy}dxdy^2 + f_{yyy}dy^3.$$

Üldiselt mitme muutuja funktsiooni f(x,y,...) täisdiferentsiaali leidmiseks kasutatakse sümboolset valemit

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \dots\right)^n f. \tag{13}$$

<u>Diferentsiaali kuju invariantsus</u>. Diferentseeruva

funktsiooni $f(u,v,\ldots)$ esimese täisdiferentsiaali (10) kuju säilib, kui argumendid $u,v,\ldots$ osutuvad muutujate $x,y,\ldots$ diferentseeruvateks funktsioonideks. Sel korral valemis (10) diferentsiaalide $dx,dy,\ldots$ asemel on funktsioonide (4) täisdiferentsiaalid $du,dv,\ldots$ ning valem (10) saab kuju

$$df(P) = f_u(P)du + f_v(P)dv + \ldots,$$

kus $P = (u,v,\ldots)$.

Teist ja kõrgemat järku täisdiferentsiaalide korral üldiselt diferentsiaali kuju invariantsus enam ei kehti. Kuid juhul kui funktsioonid (4) on lineaarsed, s.o.

$$\begin{cases} u = ax + by + \ldots + h \\ v = a_1x + b_1y + \ldots + h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{14}$$

siis iga järku täisdiferentsiaali kuju säilib, s.o. avaldub valemiga (13) analoogilise valemiga

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv + \ldots\right)^n f, \tag{15}$$

kus $du,dv,\ldots$ on juba funktsioonide (14) täisdiferentsiaalid.

Seega erijuhul, kui f on vaid ühe muutuja u funktsioon,

$$u = ax + by + \ldots + h$$

on lineaarne muutujate $x,y,\ldots$ suhtes, siis valem (15) esitub kujul

$$d^nf = f^{(n)}(u)\,du^n. \tag{16}$$

Esimese diferentsiaali kuju invariantsuse tõttu kehtivad järgmised diferentseerimise reeglid, kus u ja v on mitme muutuja funktsioonid:

1. $d(u + v) = du + dv$,

2. $d(uv) = vdu + udv$,

3. $d\,\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$,

kust erijuhul saame

4. $d(cv) = cdv \quad (c = \mathrm{const})$,

5. $d\,\frac{1}{v} = -\frac{dv}{v^2}$.

Täisdiferentsiaali kuju invariantsust kasutatakse täisdiferentsiaali ja osatuletiste arvutamise lihtsustamiseks. Kui diferentseeruvas funktsioonis $f(u,v,\ldots)$ argumendid

$$\begin{cases} u = u(x,y,\ldots) \\ v = v(x,y,\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4}$$

on diferentseeruvad funktsioonid, siis liitfunktsiooni

$$F(x,y,\ldots) = f(u(x,y,\ldots),\ v(x,y,\ldots),\ldots)$$

täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$dF = f_u du + f_v dv + \ldots,$$

kus diferentsiaalid $du, dv, \ldots$ arvutame seosest (4).

Seega, erijuhul kui $w = f(u)$ on ühe muutuja u diferentseeruv funktsioon ja u on omakorda diferentseeruv mitme muutuja funktsioon, siis

$$dw = f'(u)du. \tag{17}$$

Näiteks, kui u on diferentseeruv mitme muutuja funktsioon, siis kehtivad valemid

$$d(u^a) = au^{a-1}du, \qquad (a = \mathrm{const})$$
$$d(a^u) = a^u \ln a\, du,$$
$$d(\sin u) = \cos u\, du$$

jne.

Näide 7. Leida funktsiooni

$$w = \sqrt{x^2 + \cos(y - 4z)}$$

täisdiferentsiaal ja esimesed osatuletised.

Lahendus. Vaatleme antud funktsiooni kui liitfunktsiooni

$$w = \sqrt{u}, \quad u = x^2 + \cos(y - 4z).$$

Et w ja u kui elementaarfunktsioonid on diferentseeruvad, siis valemi (17) põhjal saame

$$dw = \frac{2xdx - \sin(y - 4z)(dy - 4dz)}{2\sqrt{x^2 + \cos(y - 4z)}}.$$

Et dx, dy ja dz kordajad on vastavalt osatuletised w_x, w_y ja w_z, siis oleme saanud

$$w_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \cos(y - 4z)}},$$

$$w_y = -\frac{\sin(y - 4z)}{2\sqrt{x^2 + \cos(y - 4z)}},$$

$$w_z = \frac{2\sin(y - 4z)}{\sqrt{x^2 + \cos(y - 4z)}}.$$

Näide 8. Olgu

$$w = \sin(x^2yz).$$

Leida $w_x + 2w_y - 6w_z$ ja $w_x + 2w_z$.

Lahendus. Valemi (17) järgi saame

$$dw = \cos(x^2yz)\, d(x^2yz) =$$

$$= \cos(x^2yz)\,(2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz).$$

Võttes $dx = 1$, $dy = 2$ ja $dz = -6$, saame esimese otsitava summa

$$w_x + 2w_y - 6w_z = \cos(x^2yz)(2xyz + 2x^2z - 6x^2y) =$$
$$= 2x(yz + xz - 3xy)\cos(x^2yz).$$

Võttes nüüd $dx = 1$, $dy = 0$ ja $dz = 2$, saame ka teise otsitava summa

$$w_x + 2w_z = \cos(x^2yz)(2xyz + 2x^2y) =$$
$$= 2xy(x + z)\cos(x^2yz).$$

Näide 9. Leida
$$d^{18}\cos(x - 2y + 3z + 4).$$

Lahendus. Tuleb leida $d^{18}\cos u$, kus $u = x-2y+3z+4$. Et u on muutujate x,y,z suhtes lineaarne funktsioon, siis iga järku täisdiferentsiaali kuju on invariantne. Seega valemi (16) põhjal on

$$d^{18}\cos u = \cos^{(18)}u\, du^{18} =$$
$$= -\cos u\,(dx - 2dy + 3dz)^{18}$$

ehk asendades u tema avaldisega, saame

$$d^{18}\cos(x - 2y + 3z + 4) =$$
$$= -\cos(x - 2y + 3z + 4)\,(dx - 2dy + 3dx)^{18}.$$

Ka valemit (13) võime kasutada kõrgemat järku osatuletiste leidmiseks, kui argumendid $x, y, \ldots$ on sõltumatud muutujad (s.o. juhtum, kus seostes (14) on $u = x$, $v = y, \ldots$).

Näide 10. Leida funktsiooni
$$z = \ln(2x + y^2)$$
teine täisdiferentsiaal, teist järku osatuletised ja segatuletis.

Lahendus. Meil on

$$dz = \frac{d(2x + y^2)}{2x + y^2} = \frac{2dx + 2ydy}{2x + y^2}.$$

Arvestades, et dx ja dy on konstandid x ja y suhtes, siis

$$d^2z = d(dz) = d\,\frac{2dx + 2ydy}{2x + y^2} =$$

$$= \frac{(2x + y^2)d(2dx + 2ydy) - (2dx + 2ydy)^2}{(2x + y^2)^2} =$$

$$= \frac{(2x + y^2)\,2dy^2 - (4dx^2 + 8ydxdy + 4y^2dy^2)}{(2x + y^2)^2},$$

sest $d^2x = d^2y = 0$. Seega

$$d^2z = -\frac{2}{(2x + y^2)^2}\left[2dx^2 + 4ydxdy - (2x - y^2)dy^2\right].$$

Valemi (12) põhjal diferentsiaalide dx^2, $dxdy$ ja dy^2 kordajad annavad

$$z_{xx} = -\frac{4}{(2x + y^2)^2}, \quad z_{xy} = -\frac{8y}{(2x + y^2)^2},$$

$$z_{yy} = \frac{2(2x - y^2)}{(2x + y^2)^2}.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide täisdiferentsiaalid ja esimesed osatuletised.

542. $z = x + 3y$
543. $z = 2x^2 - 3xy - y^2$
544. $z = xy$
545. $z = x/y$
546. $z = \exp(1 + xy)$
547. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2}$
548. $z = -\cos(xy)$
549. $z = \arctan\frac{x + y}{y}$

550. $z = y^x$

551. $z = \tan(x^2/y)$

552. $z = x^y + y^x$

553*. $z = \int_0^{x+y} t^{-1}\sin t\,dt$

554. $z = \int_1^{xy} t^{-1}\cos t\,dt$

555. $z = \int_x^y (t^3 + \sin^4 t)\,dt$

556. $w = \exp(2x^2yz^2)$

557. $w = \cos(x^2yz)$

558. $w = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$

559. $w = \tan(x - y + z)$

560. Leida $w_x + w_y + w_z$, kui $w = \exp(x + yz)$

561. Leida $w_x + w_y + w_z$, kui $w = \exp(xyz)^2$

562. Leida $w_x - 2w_y + 3w_z$ ja $w_x - 2w_z$, kui $w = \cos(xy^2z)$

563. Leida $w_x - w_y$, kui $w = \sqrt{x + y + z}$

Leida dz, kui

564. $\begin{cases} z = xy\arctan(xy) \\ x = t^2 + 1 \\ y = t^3 \end{cases}$

565. $\begin{cases} z = \arccos(x/y) \\ x = t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$

566. $\begin{cases} z = \tan(3t - x + 3y^2) \\ x = \sqrt{t} \\ y = 1/t \end{cases}$

567. $\begin{cases} z = \arctan(1 + xy) \\ y = \ln x \end{cases}$

568. $\begin{cases} z = \arcsin(y/x) \\ x = \sqrt{4 + y^2} \end{cases}$

569. $\begin{cases} z = x\sin y + y\cos x \\ x = u/v \\ y = uv \end{cases}$

570. $\begin{cases} z = x^y + y^x \\ x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \end{cases}$

571. $\begin{cases} 2z = \ln(x^2 + y^2) \\ x = u\,\mathrm{sh}\,v \\ y = u\,\mathrm{ch}\,v \end{cases}$

Leides diferentsiaali dz, arvutada $z_u + z_v$, kui

572. $\begin{cases} x = u/v \\ y = 3u - 2v \\ z = x^2 \ln y \end{cases}$ 573. $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = \arctan(x/y) \end{cases}$

574. Olgu $z = \arctan(2x - y)$. Leides dz, tõestada et

$$z_{xx} + 2z_{xy} = 0.$$

575. Olgu $z = \ln(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$. Leides dz, tõestada et

$$z_{xx} + z_{xy} = x^{-2}.$$

576. Olgu $z = e^x \cos y$. Leides dz, näidata et

$$z_{xx} + z_{yy} = 0.$$

Olgu f diferentseeruv muutuja u funktsioon. Leida dz, z_x ja z_y, kui

577. $z = x + f(x^2y + 1)$ 579. $z = yf(xy + x/y)$

578. $z = xy + f(\sqrt{2xy})$

Olgu f diferentseeruv muutujate u,v funktsioon. Leida dz, z_x ja z_y, kui

580. $z = x + f(e^{xy}, x^2 - y^2)$

581. $z = y - f(\sin x, x^2y^2)$

582. $z = 2xy + f(\cos y, x^3 - y)$

583. $z = \sqrt{xy} + f(\sqrt{xy}, x^3 + y^2)$

Ülesanded.

584. Olgu

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}.$$

Näidata, et funktsioon f on pidev punktis (0,0), ja et tal on olemas osatuletised $f_x(0,0)$ ja $f_y(0,0)$, kuid ei ole diferentseeruv punktis $(0,0)$.

585. Olgu

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2 + y^2)^{-1/2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0. \end{cases}$$

Näidata, et punkti $(0,0)$ ümbruses funktsioon f on pidev ja temal on tõkestatud osatuletised $f_x(x,y)$ ja $f_y(x,y)$, kuid ta ei ole diferentseeruv punktis $(0,0)$.

586. Olgu

$$f(x,y) = \begin{cases} (x + y)^2\sin(x^2 + y^2)^{-1/2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0. \end{cases}$$

Näidata, et punkti $(0,0)$ ümbruses eksisteerivad osatuletised f_x ja f_y ja et nad katkevad punktis $(0,0)$, kuid siiski funktsioon f on diferentseeruv punktis $(0,0)$.

587. Olgu

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin(x^2 + y^2)^{-1}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0. \end{cases}$$

Näidata, et punkti $(0,0)$ ümbruses osatuletised f_x ja f_y eksisteerivad ja on tõkestamata (seega punkt $(0,0)$ on nende katkevuspunktiks), kuid siiski f on diferentseeruv punktis $(0,0)$.

Leida järgmiste funktsioonide esimene ja teine diferentsiaal.

588. $z = 2x/y$

589. $z = x + xy$

590. $z = x \sin^2 y$

591. $z = x \cos^3 y$

592. $z = \exp(x + y^2)$

593. $u = xy + yz + xz^2$

594. $u = \sin(5x - 3y + 9z)$

595. $u = \cos(2x + 3y - 5z + 7)$

596. Leida $df(1,1,1)$ ja $d^2f(1,1,1)$, kui $f(x,y,z) = (x/y)^{1/z}$.

Leida

597. d^3z , kui $z = 2^3 + x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$

598. d^3z, kui $z = \sin 3 + \sin(x^2 + y^2)$

599. d^3u, kui $u = 2xyz$

600. d^4u, kui $u = \ln(x^x y^y z^z)$

601. $d^{10}z$, kui $z = \ln 2 + \ln(x + y - 3)$

602. d^6z, kui $z = \operatorname{ch} x \cos y$

603. d^9u, kui $u = (2x + y - 3z^2)^3$

604. d^8u, kui $u = (1 + 2x - 3y + 4z)^{15}$

605. $d^{18}u$, kui $u = \cos(2x + 3y - 5z)$

606. $d^{16}u$, kui $u = \sin(5x - 3y + 9z + 8)$

607. $d^{19}u$, kui $u = \cos(x - 4y - 6z + 7)$

608. $d^{12}u$, kui $u = a^{x+2y-3z+4}$

609. d^nz, kui $z = \exp(2x + 3y + 4)$

610. d^nu, kui $u = \exp(x - y + 2z)$

Leida järgmiste funktsioonide esimene ja teine diferentsiaal, kui f on diferentseeruv funktsioon

611. $w = 1 + f(xy)$

612. $w = x + f(x + y)$

613. $w = f(0) + f(\sqrt{x^2 + y^2})$

614. $w = 2\pi e + f(xyz)$

615. $w = f(x^2 + y^2 + z^2)$

616. $w = f(2x,3y)$

617. $w = f(x - y, x + y)$

618. $w = xy + f(x + y, z)$

619. $w = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$

620. $w = x/z + 2f(x/y, y/z)$

621. $w = f(x^2 + y^2, 2xy, x^2 - y^2)$

Euleri teoreem homogeensetest funktsioonidest. Lahtises piirkonnas D määratud funktsiooni f nimetatakse α-astme homogeenseks funktsiooniks, kui f rahuldab tingimust

$$f(tx,ty,\ldots) = t^{\alpha} f(x,y,\ldots)$$

iga punkti $(x,y,\ldots) \in D$ puhul (punkti $t = 1$ ümbruses).

Diferentseeruv funktsioon f on α-astme homogeenne funktsioon parajasti siis, kui funktsioon f rahuldab Euleri tingimust

$$f_x x + f_y y + \ldots = \alpha f(x,y,\ldots).$$

Näide 11. Veenduda, et funktsioon

$$f(x,y) = \arctan\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

on homogeenne ja leida homogeensuse aste.

Lahendus. Funktsioon f on määratud, kui $x^2 \geqslant y^2$ ja $x^2 + y^2 \neq 0$. Iga $t \neq 0$ korral on

$$f(tx,ty) = \arctan\sqrt{\frac{t^2x^2 - t^2y^2}{t^2x^2 + t^2y^2}} = \arctan\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} =$$

$$= t^0 f(x,y).$$

Seega f on 0-astme homogeenne funktsioon.

Näide 12. Kontrollida Euleri tingimust funktsiooni

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

korral.

Lahendus. Arvutades funktsiooni f täisdiferentsiaali, saame

$$df = \frac{(2xdx + 2ydy)z^2 - (x^2 + y^2)\,2zdz}{z^4}.$$

Võrreldes Euleri tingimust valemiga (10), näeme, et asendades dx, dy ja dz vastavalt suurustega x,y ja z, saamegi

$$f_x x + f_y y + f_z z = 2\,\frac{(x^2 + y^2)z^2 - (x^2 + y^2)z^2}{z^4} =$$

$$= 0 = 0\cdot f(x,y,z).$$

Seega f on null-astme homogeenne funktsioon.

Veenduda, et järgmised funktsioonid f on homogeensed. Kontrollida Euleri tingimust ja leida homogeensuse aste α.

622. $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$

623. $f(x,y) = 3xy^2 + \sqrt{x^6 - y^6}$

624. $f(x,y) = a = \text{const}$

625. $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$

626. $f(x,y,z) = x^2y - 2y^2z + xyz$

627. $f(x,y,z) = x^5 \cos \frac{y^2 + z^2}{x^2}$

628. $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)\log \frac{x}{z}$

629. $f(x,y,z) = \frac{x}{z} \exp \frac{x}{y}$

630. $f(x,y,z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$

631. $f(x,y) = \log \frac{x^2 - y^2}{xy}$

§ 3. Mitme muutuja funktsiooni diferentsiaalarvutuse rakendusi.

Taylori valem. Kui funktsioon f on n+1 korda diferentseeruv punkti $P_0 = (x_0, y_0, \ldots)$ ümbruses, siis selle ümbruse punktis $P = (x,y)$, kus $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, ... kehtib Taylori valem

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0) + \alpha_n . \qquad (18)$$

Liiget α_n nimetatakse Taylori valemi jääkliikmeks ja Lagrange'i järgi avaldub ta kujul

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(Q), \qquad (19)$$

kus Q on tsatav punkt sirglõigul $\overline{P_0P}$, s.o.

$$Q = (x_0 + \theta \Delta x, \; y_0 + \theta \Delta y, \ldots),$$

kus $0 < \theta < 1$.

Kui $x_0 = 0$, $y_0 = 0, \ldots$, s.o. $P_0 = (0,0,\ldots)$ on koordinaatide alguspunkt, siis valemis (18) ja (19) on

$$\Delta x = x, \quad \Delta y = y, \ldots .$$

Valemis (18) jääkliige (19) täidab tingimust $\alpha_n = o(\rho^n)$, kus

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \ldots},$$

s.o. α_n on ρ suhtes kõrgemat kui n järku lõpmata väike suurus. Seega, kui $|\Delta x|$, $|\Delta y|, \ldots$ on küllalt väikesed, kehtib ligikaudne võrdus

$$f(P) \approx f(P_0) + df(P_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0) . \qquad (20)$$

Erijuhul kui $n = 1$, saame valemist (20) valemi

$$f(P) \approx f(P_0) + df(P_0). \qquad (21)$$

Valemist (21) saame ligikaudse valemi funktsiooni f muudu $\Delta f = f(P) - f(P_0)$ arvutamiseks punktide P_0 ja P vahel:

$$\Delta f \approx df(P_0). \qquad (22)$$

Ülesanded.

Leida Taylori valem (18) punktis $P_0 = (0,0)$, kui $n=3$.

632. $f(x,y) = e^x \sin y$

633. $f(x,y) = e^y \cos x$

634. $f(x,y) = \ln(1 + x + y)$

635. $z = e^x \ln(1 + y)$

636. $z = x \cos^2 y$

637. $z = y \sin^2 y$

638. $\sin(x^2 + y^2)$

Leida Taylori valem (18) punktis $P_0 = (1,1)$, kui $n=3$.

639. $f(x,y) = \frac{x}{y}$

640. $f(x,y) = e^{xy}$

641. $f(x,y) = \ln(xy)$

642. $f(x,y) = \frac{\sin \pi x}{y}$

Leida valemi (20) abil ligikaudsed valemid järgmiste funktsioonide väärtuste arvutamiseks, võttes $P_0 = (0,0)$ ja $n = 2$.

643. $\sin(xy)$

644. $\cos(xy)$

645. $\frac{\cos x}{\cos y}$

646. $\arctan \frac{1 + x}{1 + y}$

Näide 13. Arvutada ligikaudu, s.o. valemi (22) abil funktsiooni

$$f(x,y) = \sin(\pi xy)$$

muut üleminekul punktist $P_0 = (1,2)$ punkti $P = (1,1;\ 1,9)$.

Lahendus. Arvutame kõigepealt punktide koordinaatide muudud Δx ja Δy, saame

$$\Delta x = x - x_0 = 1,1 - 1 = 0,1 ,$$

$$\Delta y = y - y_0 = 1,9 - 2 = -0,1.$$

Valemi (22) kasutamiseks tuleb arvutada

$$df(P_0) = f_x(P_0)\,\Delta x + f_y(P_0)\,\Delta y.$$

Saame

$$f_x = \cos(\pi xy)\,\pi y ,$$

$$f_y = \cos(\pi xy)\,\pi x$$

ja seega

$$df(P_0) = \cos 2\pi \cdot 2\pi \cdot 0,1 + \cos 2\pi \cdot \pi \cdot (-0,1) = 0,1\pi .$$

Valemi (22) põhjal

$$\Delta f \approx 0,1\pi .$$

Ülesanded.

Arvutada ligikaudu, s.o. valemi (22) abil funktsiooni muut üleminekul punktist P_0 punkti P.

647. $f(x,y) = e^{xy}$, $P_0 = (1,1)$, $P = (1,2;\ 1,1)$.

648. $f(x,y) = \dfrac{x + 3y}{y - 3x}$, $P_0 = (2,4)$, $P = (2,5;\ 3,5)$

649. $f(x,y) = \sin xy$, $P_0 = (1,\pi)$, $P = (0,9;\ \pi)$

650. $f(x,y) = \ln x \ln y$, $P_0 = (1,1)$, $P = (1,1;\ 0,9)$

651. $f(x,y) = x^y \ln y$, $P_0 = (1,e)$, $P = (1,1;\ e + 0,1)$

Näide 14. Arvutada ligikaudu valemi (21) abil

$$A = \sin 32° \cos 59°.$$

Lahendus. Minnes üle radiaanmõõdule saame

$$A = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{180})\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}).$$

Vaatleme funktsiooni

$$f(x,y) = \sin x \cos y$$

ja punkte $P_0 = (x_0,y_0) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$,

$$P = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{180}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}),$$

kus

$$\Delta x = \frac{2\pi}{180} \approx 0,0349,$$

$$\Delta y = -\frac{\pi}{180} = -0,0175.$$

Seega meil on vaja arvutada ligikaudu funktsiooni f väärtus f(P).

Valemi (21) rakendamiseks arvutame

$$df = \cos x \cos y \Delta x - \sin x \sin y \Delta y.$$

Valemi (21) põhjal on siis

$$A = f(P) \approx f(P_0) + df(P_0) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\Delta x - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\Delta y \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\,0,0349 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,0,0175 \approx$$

$$\approx 0,25 + 0,0227 = 0,2727.$$

Seega

$$\sin 32^0 \cos 59^\circ \approx 0,2727.$$

Ülesanded.

Arvutada ligikaudu valemi (21) abil

652. $\sqrt{2,03\cdot 1,98}$ 653. $\sqrt{3,97}\ 2,03^2$

654. $7{,}97^3/\sqrt{3{,}94}$

655. $\sqrt{4{,}05^2 + 2{,}93^2}$

656. $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$

657. $1{,}04^{2{,}02}$

658. $0{,}94^{1{,}07}$

659. $\sin 59° \tan 46°$

660. $\cos 29° \sin 62°$

661. $1{,}94^2 \exp 0{,}12$

662. $2{,}003^2\ 3{,}998^3\ 1{,}002^2$

663*. $1{,}03^2/\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}$

664. $\sin 1{,}49 \cdot \arctan 0{,}07 \times$
$\times\, 2^{-2{,}95}$

Puutujatasand ja normaal. Olgu antud pind

$$z = f(x,y) \tag{23}$$

ja punkt $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sellel pinnal. Olgu $P_0 = (x_0, y_0)$.

Teoreem 1. Pinnal (23) on olemas z-teljega mitteparalleelne puutujatasand punktis Q_0 parajasti siis, kui funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0.

Pinna (23) puutujatasandi võrrand punktis Q_0 on

$$z - z_0 = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0). \tag{24}$$

Pinna (23) punktis Q_0 puutujatasandiga (24) ristiolevat vektorit (samuti ka sirget) nimetatakse pinna normaaliks selles punktis Q_0.

Vektor

$$\vec{n} = (f_x(P_0),\ f_y(P_0),\ -1)$$

on pinna (23) normaaliks punktis Q_0.

Ülesanded.

Leida puutujatasand ja normaal järgmistele pindadele märgitud punktis Q_0.

665. $z = \frac{x^2}{2} - y^2$, $Q_0 = (2,-1,1)$

666. $z = \arctan \frac{y}{x}$, $Q_0 = (1,1,\frac{\pi}{4})$

667. $z = x^2 + y^2$, $Q_0 = (1,2,5)$

Kas järgmistel pindadel on olemas puutujatasand punktis (0,0,0)?

668*. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 670. $z = |xy|$

669*. $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$ 671. $z = 1 - |x + y|$

672. Leida pinnale

$$z = x^2 - y^2$$

puutujatasand, mis on paralleelne tasandiga

$$4x - 2y - z + 1 = 0.$$

673. Leida pinnale

$$z = x + \sqrt{x^2 - 4xy + 4}$$

puutujatasand, mis on paralleelne tasandiga $x - y + 2z = 0$.

674. Leida pinnale

$$z = x^2 + y^2$$

punkt Q_0, kus pinna normaal on paralleelne vektoriga

$$\vec{m} = (1,2,-3).$$

675. Leida pinnal

$$z = x^2 + x$$

punkt Q_0, mis asetseb zx-tasandil ja kus pinna normaal on risti vektoriga $\vec{m} = (1,0,1)$.

III. ILMUTAMATA FUNKTSIOONID JA EKSTREEMUMID

§ 1. Ühe ja kahe muutuja ilmutamata funktsioonid.

Olgu antud võrrand

$$F(x,y) = 0, \qquad (1)$$

kus funktsioon $F = F(x,y)$ on määratud ristkülikus $E = X \times Y$, kus $X = (a,b)$ ja $Y = (c,d)$.

Öeldakse, et võrrand (1) määrab funktsiooni $y = y(x)$ vahemikus X, kui iga $x \in X$ korral on võrrandil (1) olemas lahend $y \in Y$. Kui see lahend $y \in Y$ on üheselt määratud iga $x \in X$ korral, siis funktsiooni y nimetatakse *üheseks*, vastasel juhul *mitmeseks* oma määramispiirkonnas X.

Kui funktsioon $y = y(x)$ vahemikus X on määratud võrrandiga (1), siis öeldakse, et funktsioon y on antud *ilmutamata kujul* (1).

Teoreem 1. Kui

1° funktsioon F ja tema osatuletis F_y on pidevad punkti $P_0 = (x_0,y_0)$ ümbruses,

2° $F(P_0) = 0$,

3° $F_y(P_0) \neq 0$,

siis võrrand (1) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses ühese pideva funktsiooni $y = y(x)$, kusjuures $y(x_0) = y_0$.

Kui lisaks ka osatuletis F_x on pidev punkti P_0 ümbruses, siis funktsioonil y on punkti x_0 teatavas ümbruses olemas pidev tuletis

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}, \qquad (2)$$

kusjuures

$$y'(x_0) = - \frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)}.$$

Ilmutamata funktsiooni tuletise arvutamisel valmis valemi (2) asemel kasutatakse praktiliselt võrrandi (1) vahetut diferentseerimist muutuja x järgi, lugedes, et võrrand (1) kujutab endast nulliga võrduvat liitfunktsiooni muutuja x suhtes, kus $y = y(x)$, s.o. funktsiooni $G(x) = F(x,y) = 0$, kus $y = y(x)$. Seejuures oletatakse, et teoreemi 1 eeldused on täidetud, mis garanteerib tuletise y' olemasolu. Saame

$$G'(x) = F_x + F_y y' = 0 \qquad (3)$$

(vt. valem (3), lk. 87), kust $F_y \neq 0$ tõttu võime avaldada tuletise (2).

Ilmutamata funktsiooni teise tuletise leidmiseks vaadeldakse võrdust (3) uuesti kui võrrandit

$$G(x,y') = 0, \qquad (4)$$

kus

$$G(x,y') = F_x + F_y y',$$

mis määrab tuletise $y' = y'(x)$ ilmutamata kujul. Kui $G(x,y')$ täidab teoreemile 1 analoogilisi tingimusi, s.o. G, G_x ja $G_{y'}$ on pidevad punkti $P_0' = (x_0, y'_0)$ ümbruses, kus $y'_0 = f'(x_0)$, $G(P'_0) = 0$ ning $G_{y'}(P'_0) \neq 0$, siis teine tuletis

y'' on olemas ja võrrandit (4) vahetult diferentseerides x järgi, saame

$$G_x + G_{y'}y'' = 0 \qquad (5)$$

ehk

$$F_{xx} + F_{xy}y' + F_{yx}y' + F_{yy}y'^2 + F_y y'' = 0, \qquad (6)$$

sest $G = F_x + F_y y'$, kus $F = F(x,y)$ ja $y = y(x)$. Et aga

$$G_{y'} = F_y \neq 0,$$

siis saame võrdustest (5) ja (6) avaldada y''.

Analoogiliselt arvutatakse ilmutamata funktsiooni veel kõrgemaid tuletisi.

Analoogiliselt ühe muutuja ilmutamata funktsioonile defineeritakse kahe ja enama muutuja ilmutamata funktsioonid. Vaatleme kahe muutuja funktsiooni juhtu. Olgu antud võrrand

$$F(x,y,z) = 0, \qquad (7)$$

kus funktsioon F on määratud risttahukas $E = X\times Y\times Z$, kus $X = (a,b)$, $Y = (c,d)$ ja $Z = (e,f)$.

Öeldakse, et võrrand (7) määrab funktsiooni $z = z(x,y)$ ristkülikus $X\times Y$, kui iga punkti $P = (x,y)\in X\times Y$ korral on võrrandil (7) olemas lahend $z\in Z$. Kui iga $P\in X\times Y$ korral see lahend $z\in Z$ on üheselt määratud, siis funktsiooni z nimetatakse <u>üheseks</u>, vastasel juhul <u>mitmeseks</u>. Kui funktsioon $z = z(x,y)$ hulgal $X\times Y$ on määratud võrrandiga (7), siis öeldakse, et funktsioon z on antud ilmutamata kujul (7).

<u>Teoreem 2</u>. Kui

1° funktsioon F ja tema osatuletis F_z on pidevad punkti $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ ümbruses,

2° $F(P_0) = 0$,

3° $F_z(P_0) \neq 0$,

siis võrrand (7) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses ühese pideva funktsiooni $z = z(x,y)$, kusjuures $z(x_0,y_0) = z_0$.

Kui lisaks ka osatuletised F_x ja F_y on pidevad punkti P_0 ümbruses, siis funktsioonil z on punkti (x_0,y_0) teatavas ümbruses olemas pidevad osatuletised

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{8}$$

Osatuletiste z_x ja z_y praktilisel leidmisel valmis valemite (8) asemel kasutatakse võrrandi (7) vahetut diferentseerimist x ja y järgi, lugedes, et $z = z(x,y)$. Saame, kui teoreemi 2 eeldused on täidetud, et

$$F_x + F_z z_x = 0, \; F_y + F_z z_y = 0, \tag{9}$$

kust võime avaldada z_x ja z_y. Kõrgemate osatuletiste leidmiseks toimime analoogiliselt nagu ühe muutuja ilmutamata funktsiooni korral: diferentseerime jälle võrdusi (9) muutujate x ja y järgi, lugedes, et $z = z(x,y)$.

Näide 1. Näidata, et võrrand

$$x \ln y + y\, e^{2x} = 3$$

määrab punkti $x = 0$ ümbruses ühese pideva funktsiooni $y = y(x)$ ja et see funktsioon y on diferentseeruv selle punkti ümbruses, ning leida tema tuletis.

Lahendus. Tähistame

$$F(x,y) = x \ln y + y\, e^{2x} - 3.$$

Kui $x = 0$, siis võrdus $F(0,y) = 0$ kehtib vaid juhul $y = 3$. Seega tuleb kontrollida teoreemi 1 tingimusi $1^\circ - 3^\circ$ punkti

$P_0 = (0,3)$ ümbruses.

Funktsioon F ja tema osatuletis

$$F_y = \frac{x}{y} + e^{2x}$$

on pidevad punkti P_0 ümbruses (isegi kogu pooltasandil $y>0$). Seega tingimus 1° on täidetud. Tingimused 2° ja 3° on ka täidetud, sest $F(P_0) = 0$ ja $F_y(P_0) = 1 \neq 0$. Seega teoreemi 1 põhjal antud võrrand määrab punkti P_0 ümbruses ehk punkti $x = 0$ ümbruses ühese pideva funktsiooni $y = y(x)$, kusjuures $y(0) = 3$. Et ka osatuletis

$$F_x = \ln y + 2y\, e^{2x}$$

on pidev punkti P_0 ümbruses (isegi kogu pooltasandil $y>0$), siis teoreemi 1 järgi on funktsioonil y olemas pidev tuletis y' punkti $x = 0$ ümbruses ja valemi (2) põhjal

$$y' = -\frac{\ln y + 2y\, e^{2x}}{x/y + e^{2x}} = -\frac{y \ln y + 2y^2 e^{2x}}{x + ye^{2x}}.$$

Leiame veel tuletise y' valmis valemit (2) kasutamata. Selleks loeme võrduses

$$x \ln y + y\, e^{2x} - 3 = 0$$

y muutuja x funktsiooniks ja diferentseerime võrdust x järgi (seda võib teha, sest teoreemi 1 järgi $y = y(x)$ ja tema tuletis y' eksisteerivad). Saame

$$\ln y + \frac{x}{y}\, y' + y'e^{2x} + 2y\, e^{2x} = 0,$$

kust

$$y' = -\frac{\ln y + 2y\, e^{2x}}{x/y + e^{2x}}.$$

Tuletise y' saamiseks võib leida lähteavaldise diferentsiaali. Saame

$$\ln y\, dx + x\,\frac{dy}{y} + e^{2x}dy + 2ye^{2x}dx = 0$$

ehk

$$\left(\frac{x}{y} + e^{2x}\right)dy = -(\ln y + 2y\, e^{2x})dx,$$

kust avaldame $y' = dy/dx$.

Näide 2. Kas võrrand

$$4x^2 - 3x^4 + y^2 - 2x^2y = 0$$

määrab punkti $P_0 = (0,0)$ ümbruses ühese pideva funktsiooni $y = y(x)$?

Lahendus. Tähistame

$$F(x,y) = y^2 - 2x^2y + 4x^2 - 3x^4.$$

Funktsioon F ja tema osatuletis

$$F_y = 2y - 2x^2$$

on pidevad punkti P_0 ümbruses. Seega teoreemi 1 tingimus 1° on täidetud. Et $F(P_0) = 0$, siis ka tingimus 2° on täidetud. Kuid

$$F_y(P_0) = 0$$

ja seega teoreemi 1 tingimus 3° ei ole täidetud. Järelikult teoreem 1 seatud küsimusele vastust ei anna.

Antud juhul aga saame võrrandit otseselt lahendada y suhtes, mis annab

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4x^2 + 3x^4} = $$
$$= x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - 1}\,.$$

Need kaks funktsiooni on määratud, kui $|x| \geq 1$ ja kui $x = 0$. Seega antud võrrand ei määra funktsiooni $y = y(x)$ punkti P_0 ümbruses, vaid ainult punktis P_0.

Näide 3. Leida võrrandiga

$$x \ln y + y e^{2x} = 3$$

määratud ilmutamata funktsiooni $y = y(x)$ teine tuletis y'' punktis $x = 0$.

Lahendus. Näites 1 selgitame välja, et antud võrrand määrab punkti $x = 0$ ümbruses pidevalt diferentseeruva funktsiooni $y = y(x)$, kusjuures $y(0) = 3$. Seega funktsiooni y graafik läbib punkti $P_0 = (0,3)$. Järelikult meil tuleb leida tuletise y'' väärtus graafiku punktis P_0.

Diferentseerime antud võrrandit x järgi, siis saame (nagu näites 1)

$$\ln y + \frac{x}{y} y' + y' e^{2x} + 2y e^{2x} = 0,$$

mis punktis P_0 annab

$$\ln 3 + 0 + y'(0) + 2 \cdot 3 = 0,$$

kust

$$y'(0) = -6 - \ln 3.$$

Teise tuletise määramiseks diferentseerime saadud võrdust veel kord x järgi (mida võime teha, sest vastavad eeldused on täidetud). Saame

$$\frac{1}{y} y' + \frac{y - xy'}{y^2} y' + \frac{x}{y} y'' + y'' e^{2x} + 2y' e^{2x} +$$
$$+ 2y' e^{2x} + 4y e^{2x} = 0.$$

Siit võime avaldada y'', sest $F_y(P_0) \neq 0$ näite 1 järgi. Kuna aga meil on tarvis leida vaid $y''(0)$, siis paigutame saadud võrduse vasakusse poolde vahetult punkti P_0 koordinaadid. Saame

$$\frac{1}{3}\,y'(0) + \frac{3-0}{9}\,y'(0) + 0 + y''(0) + 2y'(0)$$

$$+ 2\,y'(0) + 12 = 0,$$

kust

$$y''(0) = -\frac{2}{3}\,y'(0) - 4y'(0) - 12.$$

Arvestades $y'(0)$ väärtust, saame lõplikult

$$y''(0) = -\frac{14}{3}(-6 - \ln 3) - 12 =$$

$$= 16 + \frac{14}{3}\ln 3.$$

Ülesanded.

Näidata, et funktsioon $y = y(x)$ rahuldab võrrandit $F(x,y) = 0$, kui

676. $y = 3x$, $F(x,y) = y^2 - 2xy - 3x^2$

677. $y = \cos x$, $F(x,y) = 2y^2 - 1 - \cos 2x$

678. $y = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv,} \end{cases}$ $F(x,y) = y^3 + y^2 - 2y$

679. $y = 2\sin^2\frac{x}{2}$, $F(x,y) = x - |\sin x| + \sqrt{y(2-y)} - \arccos(1-y)$

Leida järgmiste valemitega määratud funktsioonide $y = y(x)$ määramispiirkonnad X, kui on teada, et nad rahuldavad antud võrrandit.

680. $y = x\cos x$, $\sqrt{\ln y - \ln x} = 0$

681. $y = x\cos x$, $\sqrt{\ln y - \ln|x|} = 0$

682. $y = \cos x$, $2y^2(x) - y(2x) - 1 = 0$

683. $y = -\cos x, \quad x - \sin x + \sqrt{y(2 - y)} - \arccos(1 - y) = 0$

684. Olgu antud võrrand

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

a) Mitu ühest funktsiooni $y = y(x)$ määrab see võrrand lõigus $X = [-1,1]$?

b) Mitu pidevat ühest funktsiooni $y = y(x)$ määrab see võrrand lõigus X?

c) Mitu pidevat ühest funktsiooni $y = y(x)$ määrab see võrrand lõigus X, kui $y(0) = -1$?

d) Mitu pidevat ühest funktsiooni $y = y(x)$ määrab see võrrand lõigus X, kui $y(-1) = 0$?

Avaldada järgmistest võrranditest funktsioonid $y = y(x)$.

685. $e^{y-x} - \sin x = 0$

686. $y^2 - 2xy - 3x^2 = 0$

687. $\cos(y^3 - x) = x$, kus $x \in [0, \pi]$

688. $\arctan y + \arccos x = \pi/2$

689. $2^y 3^y 3^x = 0$

Kas järgmised võrrandid $F(x,y) = 0$ määravad punkti P_0 ümbruses pideva ühese funktsiooni $y = y(x)$? Kas see funktsioon y on pidevalt diferentseeruv punkti P_0 ümbruses?

690. $x e^{\sin y} + \ln(x + y + 1) = 0, \; P_0 = (0,0)$

691. $x^3 + y^3 - 3xy = 0, \; P_0 = (3/2, 3/2)$

692. $x^3 + y^3 - 3xy = 0, \; P_0 = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$

693. $y^2 \sqrt[3]{-x} + \sin y = 0$, $P_0 = (0,0)$

694. $\sin(x^2 + y^2) - \sin(x + y) + \arctan y = 0$, $P_0 = (1,0)$

695. $x^4 - x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$, $P_0 = (0,1)$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised y'.

696. $xe^y + y \ln x - 4 = 0$

697. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$

698. $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$

699. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised y' ja y''.

700. $x + y = e^{x-y}$

701. $1 + \ln(x^2 + y^2) = 2\arctan \frac{y}{x}$

702. $x^y = y^x$ $(x \neq y)$

703. $y - \sin 1 \sin y = x$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ märgitud tuletised punktis P_0.

704. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2$, $y'(x)$, $P_0 = (0,1)$

705. $y = \arctan(y/x)$, $y''(x)$, $P_0 = (2,0)$

706. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $y'''(x)$, $P_0 = (1,1)$

707. Näidata, et võrrand

$$(2 - x)y^2 = x^3$$

määrab punkti $x = 1$ ümbruses kaks diferentseeruvat funktsiooni $y = f(x)$, $y = g(x)$. Leida funktsioonid f ja g ning tuletised $f'(1)$ ja $g'(1)$.

708. Näidata, et võrrand

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

määrab punkti (0,0) ümbruses kaks diferentseeruvat funktsiooni $y = f(x)$ ja $y = g(x)$. Leida $f'(0)$ ja $g'(0)$.

709. Näidata, et võrrand

$$(1 - x)y^2 = x^2(1 + x)$$

määrab punkti (0,0) ümbruses kaks diferentseeruvat funktsiooni $y = f(x)$ ja $y = g(x)$. Leida funktsioonid f ja g ning nende diferentsiaalid $df(0)$ ja $dg(0)$.

Avaldada järgmistest võrranditest funktsioonid $z = z(x,y)$.

710. $e^{z-y+x} = \sin(x^2 + y^2 + 1)$

711. $4x^2 - y^2 + 2yz - z^2 = 0$

712. $5^z e^z - x^2 e^y - 1 = 0$

713. $z^2 + 2yz = \ln(xy^{2x})$

Kas järgmised võrrandid $F(x,y,z) = 0$ määravad punkti P_0 ümbruses pideva ühese funktsiooni $z = z(x,y)$? Kas sel funktsioonil on olemas pidevad osatuletised z_x ja z_y punkti P_0 ümbruses?

714. $xz + y \sin z = 0$, $P_0 = (1,0,1)$

715. $(z + y)^2 = x^2(x^2 - 1)$, $P_0 = (0,0,0)$

716. $z^2 \sqrt[3]{x + y^2} + \arctan z = 0$, $P_0 = (-1,-1,0)$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $z = z(x,y)$ osatuletised z_x ja z_y.

717. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$

718. $e^z = \cos x \cos y$

719. $z^2 \ln(x + z) = xy$

720. $\arcsin z + \tan xy = 0$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $z = z(x,y)$ täisdiferentsiaalid dz.

721. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$

722. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$

723. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $z = z(x,y)$ täisdiferentsiaalid dz ning osatuletiste summad $z_x + z_y$ ja vahed $z_x - z_y$.

724. $x + 2y - 3z = 4\cos(x + 2y - 3z)$

725. $x^2 + y^2 + z^2 = z$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $z = z(x,y)$ teist järku osatuletised z_{xx}, z_{xy} ja z_{yy}.

726. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

727. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

728. $z = \sqrt{x^2 - y^2} \tan \dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$

729. $z = x + \arctan \dfrac{y}{z - x}$

730. Leida võrrandiga

$$z = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 9$$

määratud funktsiooni z teine täisdiferentsiaal d^2z punktis (1,-2,1).

731. Leida võrrandiga

$$x - yz + e^z = 0$$

määratud funktsiooni z teine diferentsiaal d^2z punktis (1,2,0).

732. Leida võrrandiga

$$e^x + e^y = e^z$$

määratud funktsiooni z kolmandat järku osatuletised.

Olgu pinna võrrand antud ilmutamata kujul

$$F(x,y,z) = 0,$$

kus funktsiooni F osatuletised F_x, F_y ja F_z on pidevad. Pinna punktis $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$, kus

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0,$$

on pinnal olemas puutujatasand võrrandiga

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

ja normaal võrrandiga

$$\frac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(P_0)} .$$

Ülesanded.

Leida järgmiste pindade puutujatasandid ja normaalid punktis P_0.

733. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0 = (1,1,1)$

734. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$, $P_0 = (1,2,3)$

735. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $P_0 = (-1,1,2)$

736. $xy^2 + z^3 + 4 = 0$, $P_0 = (1,2,2)$

737. $xy - z + e^z = 3$, $P_0 = (2,1,0)$

§ 2. Võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid.

Olgu antud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

kus funktsioonid $F = F(x,y,z)$ ja $G = G(x,y,z)$ on määratud risttahukas $E = X \times Y \times Z$, kus $X = (a,b)$, $Y = (c,d)$ ja $Z = (e,f)$.

Öeldakse, et võrrandisüsteem (10) määrab funktsioonid

$$y = y(x) \text{ ja } z = z(x)$$

vahemikus X, kui iga $x \in X$ korral on võrrandisüsteemil (10) olemas lahend $(y,z) \in Y \times Z$. Kui see lahend (y,z) on üheselt määratud iga $x \in X$ korral, siis funktsioone y ja z nimetatakse <u>ühesteks</u> oma määramispiirkonnas X.

Kui funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ vahemikus X on määratud võrrandisüsteemiga (10), siis öeldakse, et funktsioonid y ja z on antud <u>ilmutamata kujul</u> (10).

Funktsioonide F ja G osatuletistest moodustatud determinanti

$$J = J(x,y,z) = \begin{vmatrix} F_y, & F_z \\ G_y, & G_z \end{vmatrix}$$

nimetatakse teist järku <u>funktsionaaldeterminandiks</u> ehk <u>jako-</u>

<u>biaaniks</u> süsteemile (10) ja märgitakse sümboliga

$$J = \frac{D(F,G)}{D(y,z)}. \tag{11}$$

<u>Teoreem 1</u>. Kui

1° funktsioonid F ja G ning nende osatuletised y ja z järgi on pidevad punkti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ümbruses,

2° $F(P_0) = 0$, $G(P_0) = 0$,

3° $J(P_0) \neq 0$,

siis võrrandisüsteem (10) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses pidevad ühesed funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$, kusjuures $y(x_0) = y_0$ ja $z(x_0) = z_0$.

Kui lisaks ka osatuletised F_x ja G_x on pidevad punkti P_0 ümbruses, siis funktsioonidel y ja z on punkti x_0 teatavas ümbruses olemas pidevad tuletised

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Kasutades tähistust (11) võime kirjutada valemid (12) kujul

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{J}\,\frac{D(F,G)}{D(x,z)}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J}\,\frac{D(F,G)}{D(y,x)}.$$

Praktiliselt valmis valemeid (12) ei kasutata, vaid tuletised y' ja z' leitakse süsteemi (10) võrrandite vahetu diferentseerimise teel x järgi, lugedes, et y ja z on muutuja x funktsioonid. Siis saame süsteemi

$$\begin{cases} F_x + F_y y' + F_z z' = 0 \\ G_x + G_y y' + G_z z' = 0. \end{cases}$$

Et selle süsteemi determinant J punkti P_0 ümbruses on nullist erinev (tingimuse 3° ja J pidevuse tõttu), siis saame süsteemist punkti P_o ümbruses avaldada y' ja z'.

Analoogiliselt süsteemile (10) saab süsteemiga

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

määrata kaks kahe muutuja funktsiooni

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{14}$$

<u>Teoreem 2</u>. Kui

1° funktsioonid F ja G ning nende osatuletised F_u, F_v, G_u ja G_v on pidevad punkti $P_o = (x_o,y_o,u_o,v_o)$ ümbruses,

2° $F(P_o) = 0$, $G(P_o) = 0$,

3° $J(P_o) \neq 0$,

kus

$$J = \frac{D(F,G)}{D(u,v)},$$

siis võrrandisüsteem (13) määrab punkti P_o teatavas ümbruses pidevad ühesed funktsioonid (14), kusjuures

$$u(x_o,y_o) = u_o \text{ ja } v(x_o,y_o) = v_o.$$

Kui lisaks ka osatuletised F_x ja F_y ning G_x ja G_y on pidevad punkti P_o ümbruses, siis funktsioonidel (14) on punkti P_o teatavas ümbruses olemas pidevad osatuletised u_x, u_y, v_x ja v_y.

Need osatuletised leitakse praktiliselt süsteemi (13) võrrandite vahetu diferentseerimise teel muutujate x ja y järgi, lugedes, et u ja v on muutujate x ja y funktsioonid.

Üldiselt vaadeldakse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F_1(x,y,\ldots;\ u,v,\ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x,y,\ldots;\ u,v,\ldots) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

kus muutujaid $x,y,\ldots$ on m tükki ja muutujaid $u,v,\ldots$ on n tükki. Süsteemi (15) abil saab teatavatel tingimustel määrata n funktsiooni m muutujast

$$\begin{cases} u = u(x,y,\ldots) \\ v = v(x,y,\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{cases} \tag{16}$$

Moodustame determinandi

$$J = \frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(u,v,\ldots)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \ldots \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

mida nimetatakse süsteemi (15) <u>jakobiaaniks</u>.

<u>Teoreem 3</u>. Olgu

1° funktsioonidel F_i pidevad osatuletised muutujate $u,v,\ldots$ järgi punkti $P_0 = (x_0,y_0,\ldots,\ u_0,v_0,\ldots)$ ümbruses,

2° $F_i(P_0) = 0$,

3° $J(P_0) \neq 0$,

Siis võrrandisüsteem (15) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses n pidevat ühest funktsiooni (16), kusjuures

$$\begin{cases} u_0 = u(x_0,y_0,\ldots) \\ v_0 = v(x_0,y_0,\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{cases}$$

<u>Näide 4</u>. Näidata, et võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

määrab punkti $P_0 = (1,0,-1)$ ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$, mis on diferentseeruvad punkti P_0 ümbruses. Leida need funktsioonid y ja z ning nende tuletised.

Lahendus. Kontrollime teoreemi 1 tingimusi. Funktsioonid

$$F = x + y + z, \quad G = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

ja nende osatuletised

$$F_y = 1, \ F_z = 1, \ G_y = 2y, \ G_z = 2z$$

on pidevad punkti P_0 ümbruses. Edasi

$$F(P_0) = 0, \ G(P_0) = 0.$$

Lõpuks leiame jakobiaani

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2(z - y)$$

väärtuse punktis P_0. Saame $J(P_0) = -2 \neq 0$. Seega teoreemi tingimused 1° - 3° on täidetud. Järelikult, vaadeldav võrrandisüsteem määrab punkti P_0 ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $y = g(x)$ ja $z = z(x)$.

Et ka osatuletised

$$F_x = 1, \ G_x = 2x$$

on pidevad punkti P_0 ümbruses, siis nendel funktsioonidel y ja z on punkti x_0 ümbruses olemas pidevad tuletised.

Avaldame võrrandisüsteemist funktsioonid y ja z. Selleks avaldame süsteemi esimesest võrrandist $z = -x - y$ ja paigutame teise võrrandisse, saame ruutvõrrandi

$$x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 2,$$

kust

$$y = \frac{1}{2}(-x \pm \sqrt{4 - 3x^2}).$$

Paigutades leitud y avaldisse $z = -x - y$, saame

$$z = \frac{1}{2}(-x \mp \sqrt{4 - 3x^2}).$$

Et otsitavad funktsioonid y ja z peavad läbima punkti P_0, siis peab olema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{4 - 3x^2}) \\ z = \frac{1}{2}(-x - \sqrt{4 - 3x^2}). \end{cases}$$

Neid funktsioone vahetult diferentseerides võime leida nende tuletised. Tuletised võime leida ka valmis valemite (12) abil, mis annavad

$$y' = -\frac{z - x}{z - y}, \quad z' = -\frac{x - y}{z - y},$$

kus praegu saame asendada y ja z nende avaldistega.

Leiame veel tuletised y' ja z' süsteemi võrrandite vahetu diferentseerimise teel x järgi, lugedes, et y ja z on x funktsioonid. Siis

$$\begin{cases} 1 + y' + z' = 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' = 0, \end{cases}$$

kust avaldame y' ja z'. Saame samad avaldised.

Näide 5. Näidata, et süsteem

$$\begin{cases} u + v = x \\ u^3 + v^3 = y(u^2 + v^2) \end{cases}$$

määrab punkti $P_0 = (1,1,1,0)$ ümbruses ühesed pidevad funktsioonid

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y), \end{cases}$$

millel on selle punkti ümbruses olemas pidevad osatuletised.

Leida need osatuletised.

Lahendus. Kontrollime teoreemi 2 tingimusi. Funktsioonid

$$F = u + v - x,\ G = u^3 + v^3 - y(u^2 + v^2)$$

ja nende osatuletised

$$F_u = 1,\ F_v = 1,\ G_u = 3u^2 - 2yu,\ G_v = 3v^2 - 2yv$$

on pidevad punkti P_0 ümbruses. Samuti

$$F(P_0) = 0,\ G(P_0) = 0.$$

Leiame jakobiaani

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3u^2 - 2yu & 3v^2 - 2yv \end{vmatrix} =$$

$$= 3(v^2 - u^2) - 2y(v - u)$$

väärtuse punktis P_0, saame $J(P_0) = -1 \neq 0$. Seega teoreemi 2 tingimused 1° - 3° on täidetud. Järelikult, vaadeldav võrrandisüsteem määrab punkti P_0 ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$. Et ka osatuletised

$$F_x = -1,\ F_y = 0,\ G_x = 0,\ G_y = -(u^2 + v^2)$$

on pidevad punkti P_0 ümbruses, siis nendel funktsioonidel u ja v on olemas pidevad osatuletised.

Osatuletiste leidmiseks diferentseerime antud süsteemi võrrandeid x ja y järgi, lugedes u ja v nende funktsioonideks. Saame

$$\begin{cases} u_x + v_x = 1 \\ 3u^2u_x + 3v^2v_x = 2y(uu_x + vv_x) \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} u_y + v_y = 0 \\ 3u^2u_y + 3v^2v_y = u^2 + v^2 + 2y(uu_y + vv_y). \end{cases}$$

Et saadud süsteemidel on ühine determinant J, mis punkti P_0 ümbruses on nullist erinev, siis selle punkti P_0 ümbruses on

$$u_x = \frac{3v^2 - 2yv}{J}, \quad v_x = -\frac{3u^2 - 2yu}{J}$$

ning

$$u_y = -\frac{u^2 + v^2}{J}, \quad v_y = \frac{u^2 + v^2}{J}.$$

Ülesanded.

Näidata, et järgmised funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ rahuldavad võrrandisüsteemi (10), kui

738. $\begin{cases} y = 2x \\ z = 4x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} F = 4x - 12x^2 - 2y + 3z \\ G = 4x^2 - y^2 + z^2 + xyz - 24x^4 \end{cases}$

739. $\begin{cases} y = \sin x \\ z = 2\cos^2 x, \end{cases} \quad \begin{cases} F = 2y^2 + z - 2 \\ G = 1 - x - y^2 - z/2 + \arcsin y \end{cases}$

740. $\begin{cases} y = x \operatorname{arccot} x^3 \\ z = x \arctan x^3, \end{cases} \quad \begin{cases} F = \frac{\pi}{2} x - y - z \\ G = x^4 \arctan x^3 - z \cot(y/x) \end{cases}$

Näidata, et järgmised funktsioonid $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$ rahuldavad võrrandisüsteemi (13), kui

741. $\begin{cases} u = \sin(x + y) \\ v = \cos(x + y), \end{cases} \quad \begin{cases} F = 2uv - \sin 2(x + y) \\ G = \frac{u}{v} - \tan(x + y) \end{cases}$

742. $\begin{cases} u = x \arcsin(x - 2y) \\ v = x \arccos(x - 2y), \end{cases} \quad \begin{cases} F = 2(u + v) - \pi x \\ G = 2(u - v) + \pi x - 4u/x \end{cases}$

Avaldada järgmistest võrrandisüsteemidest funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$.

743. $\begin{cases} y + \ln z = x \\ ze^{-y} = x^2 e^x \end{cases}$ 744. $\begin{cases} y - x = \ln(z + x) \\ z - x = e^y \end{cases}$

745. $\begin{cases} y + z = \frac{\pi x}{2} \\ \cot \frac{y}{x} = x^3 \end{cases}$

Avaldada järgmistest võrrandisüsteemidest funktsioonid $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$.

746. $\begin{cases} u + v = 1 \\ \frac{u}{v} = \tan^2(x + y) \end{cases}$

748. $\begin{cases} u + v = \ln(x^2 - y^2) \\ e^u + e^v = 2x \qquad (y > 0) \end{cases}$

747. $\begin{cases} u - v = \cos(x - 2y) \\ \frac{u}{v} = \cot^2(\frac{x}{2} - y) \end{cases}$

Näidata, et järgmised võrrandisüsteemid määravad antud punkti $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$, millel on olemas selle punkti P_0 ümbruses pidevad tuletised. Leida nende tuletiste väärtused punktis P_0.

749. $\begin{cases} 2x^2 - y - z = 0 \\ x^4 - yz = 1, \end{cases}$ $\qquad P_0 = (1,0,2)$

750. $\begin{cases} y + z = \ln(1 - x + x^2 - x^3) \\ e^y - e^z = x^2 + x, \end{cases}$ $\qquad P_0 = (0,0,0)$

751. $\begin{cases} yz = \sin x \\ y^2 - z^2 = x \cos x, \end{cases}$ $\qquad P_0 = (\frac{\pi}{2},1,1)$

Näidata, et järgmised võrrandisüsteemid määravad antud punkti $P_0 = (x_0,y_0,u_0,v_0)$ ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$, millel on olemas selle punkti P_0 ümbruses pidevad osatuletised. Leida nende osatuletiste väärtused punktis P_0.

752. $\begin{cases} u + v = \ln(x^2 - y^2) \\ e^u + e^v = 2x, \end{cases}$ $P_0 = (2,1,0,\ln 3)$

753. $\begin{cases} uv = 1 \\ \frac{u}{v} = \tan\frac{x + y}{8}, \end{cases}$ $P_0 = (\pi, \pi, 1, 1)$

754. $\begin{cases} u^2 - v^2 = 1 \\ 2uv = \operatorname{sh}(x/y), \end{cases}$ $P_0 = (0,1,1,0)$

Leida järgmiste võrrandisüsteemiga määratud funktsioonide $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ tuletised y', y'', z', z'' punktis P_0.

755. $\begin{cases} 8x^2 - 3y^4 - z^3 = 0 \\ x^3 + 5y - z^2 + 3 = 0, \end{cases}$ $P_0 = (1,0,2)$

756. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 10, \end{cases}$ $P_0 = (1,1,-2)$

757. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ z^2 + y^2 = x^2/2, \end{cases}$ $P_0 = (1,-1,2)$

Leida järgmiste võrrandisüsteemiga määratud funktsioonide $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$ täisdiferentsiaalid du, dv, d^2u, d^2v punktis $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$.

758. $\begin{cases} xu + yv = 4 \\ yu - v = 0, \end{cases}$ $P_0 = (1,-1,2,-2)$

759. $\begin{cases} u + v = x + y \\ y \sin u = x \sin v, \end{cases}$ $P_0 = (1,0,1,0)$

760. Leida võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} yz = \sin x \\ y^2 - z^2 = 2\cos x \end{cases}$$

määratud funktsioonid y ja z, kui $y(\pi/2) = z(\pi/2) = 1$, ning nende funktsioonide tuletised valemite (12) abil.

761. Leida võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} xu + yv = 4 \\ yu - v = 0 \end{cases}$$

määratud funktsioonide $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$ täisdiferentsiaalid du ja dv.

§ 3. Parameetrilisel kujul antud mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine.

Olgu kahe muutuja x ja y funktsioon z antud parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v), \end{cases} \tag{17}$$

s.o. kujul, kus funktsioon z ning tema argumendid x ja y määratakse kahe parameetri u ja v funktsioonidena.

Funktsiooni z osatuletised z_x ja z_y leitakse järgmiste meetodite abil.

Osatuletiste meetod. Olgu funktsioonil $z = z(u,v)$ pidevad osatuletised z_u ja z_v. Diferentseerime teda muutujate x ja y järgi, eeldades, et võrrandid

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{18}$$

süsteemist (17) määravad u ja v muutujate x ja y funktsioonidena (14). Selleks piisab, kui vaadeldavas piirkonnas süsteem (18) rahuldab teoreemi 2 tingimusi, s.o. osatuletised x_u, x_v, y_u ja y_v on pidevad ning jakobiaan

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \tag{19}$$

vaadeldavas piirkonnas. Tingimuse (19) saame, kui süsteemis (13) võtame

$$F = x(u,v) - x,$$
$$G = y(u,v) - y,$$

millest $F_u = x_u$, $F_v = x_v$, $G_u = y_u$ ja $G_v = y_v$. Et $F_x = -1$, $F_y = 0$, $G_x = 0$ ja $G_y = -1$, siis sama teoreemi 2 põhjal osatuletised u_x, u_y, v_x ja v_y eksisteerivad ja on pidevad vaadeldavas piirkonnas.

Seega teoreemi II (lk. 87) põhjal

$$\begin{cases} z_x = z_u u_x + z_v v_x \\ z_y = z_u u_y + z_v v_y \,. \end{cases} \tag{20}$$

Süsteemis (20) tundmatud suurused u_x ja v_x leiame süsteemist

$$\begin{cases} 1 = x_u u_x + x_v v_x \\ 0 = y_u u_x + y_v v_x \end{cases} \tag{21}$$

ning suurused u_y ja v_y süsteemist

$$\begin{cases} 0 = x_u u_y + x_v v_y \\ 1 = y_u u_y + y_v v_y \,. \end{cases} \tag{22}$$

Need süsteemid (21) ja (22) saame süsteemi (18) diferentseerimisel vastavalt x ja y järgi (arvestades, et $x_x = 1$, $y_x = 0$, $x_y = 0$, $y_y = 1$). Süsteemid (21) ja (22) on alati lahenduvad, sest süsteemide determinandiks on (19).

<u>Diferentsiaalide</u> <u>meetod</u>. Osatuletiste z_x ja z_y leidmi-

seks samadel eeldustel võib toimida ka järgmiselt. Leiame süsteemis (17) funktsioonide täisdiferentsiaalid

$$\begin{cases} dx = x_u du + x_v dv \\ dy = y_u du + y_v dv \\ dz = z_u du + z_v dv. \end{cases} \tag{23}$$

Et kehtib tingimus (19), siis kahest esimesest võrrandist saame avaldada du ja dv ning paigutades viimasesse võrrandisse, saame dz ja seega osatuletised z_x ja z_y parameetrilisel kujul.

Sageli saab lähtevõrrandite abil z_x ja z_y avaldistest parameetrid u ja v elimineerida.

Näide 6. Leida parameetriliselt antud funktsiooni

$$\begin{cases} 4x = u^2 + v^2 \\ 4y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$$

osatuletised z_x ja z_y ja täisdiferentsiaal dz.

Lahendus. Kasutame osatuletiste meetodit. Vaadeldavate funktsioonide osatuletised on pidevad. Moodustame süsteemi (20), saame

$$\begin{cases} z_x = vu_x + uv_x \\ z_y = vu_y + uv_y. \end{cases}$$

Suurused u_x ja v_x määrame süsteemist (21), s.o. süsteemist

$$\begin{cases} 4 = 2u\, u_x + 2v\, v_x \\ 0 = 2u\, u_x - 2v\, v_x, \end{cases}$$

mis annab

$$u_x = \frac{1}{u}, \quad v_x = \frac{1}{v}.$$

Suurused u_y ja v_y määrame süsteemist (22), s.o. süsteemist

$$\begin{cases} 0 = 2uu_y + 2vv_y \\ 4 = 2uu_y + 2vv_y, \end{cases}$$

mis annab

$$u_y = \frac{1}{u}, \quad v_y = -\frac{1}{v}.$$

Paigutades leitud osatuletised u_x, v_x, u_y ja v_y esimesse süsteemi, saame

$$\begin{cases} z_x = \frac{v}{u} + \frac{u}{v} \\ z_y = \frac{v}{u} - \frac{u}{v}. \end{cases}$$

Saime osatuletised z_x ja z_y parameetrilisel kujul. Viimasest saame

$$z_x = \frac{v^2 + u^2}{uv}, \quad z_y = \frac{v^2 - u^2}{uv},$$

ehk, arvestades lähtevõrrandeid,

$$\begin{cases} z_x = \frac{4x}{z} \\ z_y = -\frac{4y}{z}. \end{cases}$$

Seega funktsiooni z diferentsiaal on

$$dz = \frac{4}{z}(xdx - ydy).$$

Antud ülesande korral osatuletisi u_x, u_y, v_x ja v_y saab leida ka järgmiselt. Kahest esimesest lähtevõrrandist saame

$$4(x + y) = 2u^2, \quad 4(x - y) = 2v^2.$$

Võttes viimastest osatuletised x järgi, saame

$$4 = 4uu_x, \quad 4 = 4vv_x,$$

ja y järgi, saame

$$4 = 4uu_y, \quad -4 = 4vv_y.$$

Osatuletiste leidmiseks diferentsiaalide meetodi järgi koostame süsteemi (23)

$$\begin{cases} 4dx = 2u\,du + 2v\,dv \\ 4dy = 2u\,du - 2v\,dv \\ dz = v\,du + u\,dv\,. \end{cases}$$

Kahest esimesest võrrandist saame

$$du = \frac{dx + dy}{u}, \quad dv = \frac{dx - dy}{v}.$$

Paigutades leitud du ja dv kolmandasse võrrandisse, saame

$$dz = v\,\frac{dx + dy}{u} + u\,\frac{dx + dy}{v} =$$

$$= (\frac{v}{u} + \frac{u}{v})dx + (\frac{v}{u} - \frac{u}{v})dy =$$

$$= \frac{4}{z}(x\,dx - y\,dy),$$

kust avaldame z_x ja z_y.

Antud ülesande korral vajalike diferentsiaalide leidmiseks võime kasutada ka järgmist võtet. Kahest esimesest lähtevõrrandist jälle avaldame

$$4(x + y) = 2u^2, \quad 4(x - y) = 2v^2.$$

Viimaseid diferentseerides saame

$$dx + dy = u\,du,$$

$$dx - dy = v\,dv,$$

kust avaldame du ja dv ning paigutame dz avaldisse jne.

Ülesanded.

Leida järgmiste parameetrilisel kujul antud funktsioonide osatuletised z_x ja z_y ja täisdiferentsiaalid dz.

762. $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases}$

763. $\begin{cases} 2x = u^2 + v^2 \\ 2y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$

764. $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$

765. $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2v^2 \end{cases}$

766. $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = 8v \end{cases}$

767. $\begin{cases} x = \sin u + \cos v \\ y = \cos u - \sin v \\ z = 1 + \sin(u - v) \end{cases}$

768. $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$

769. $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \\ z = uv \end{cases}$

770. $\begin{cases} x = (v - u)\cos u + \sin u \\ y = (v - u)\sin u - \cos u \\ z = (u - v)^2 \end{cases}$

771. Leida funktsiooni

$$\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v - \ln u \\ z = 2u + v \end{cases}$$

osatuletiste z_x ja z_y väärtused kohal $u = 1$, $v = 1$.

772. Leida funktsiooni

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases}$$

osatuletiste z_x ja z_y väärtused kohal $u = \pi/4$, $v = \pi/2$.

Parameetrilisel kujul antud kahe muutuja x ja y funktsiooni z kõrgemate osatuletiste ja täisdiferentsiaalide leidmiseks toimime järgmiselt. Leiame kõigepealt esimest järku osatuletised parameetrilisel kujul

$$z_x = z_x(u,v), \quad z_y = z_y(u,v)$$

ja koostame süsteemid

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z_x = z_x(u,v) \end{cases} \qquad (24)$$

ja

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z_y = z_y(u,v). \end{cases} \qquad (25)$$

Süsteemi (24) vaatleme kui süsteemi, mis määrab funktsiooni z_x parameetrilisel kujul ja süsteemi (25) kui süsteemi, mis määrab funktsiooni z_y parameetrilisel kujul.

Leides nende funktsioonide z_x ja z_y osatuletised x ja y järgi eespool antud meetodite abil, saamegi teist järku osatuletised z_{xx}, z_{xy} ja z_{yy} parameetrilisel kujul.

Analoogiliselt leiame funktsiooni z veel kõrgemat järku osatuletised.

<u>Näide 7</u>. Leida parameetrilisel kujul antud funktsiooni

$$\begin{cases} 4x = u^2 + v^2 \\ 4y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$$

osatuletised z_{xx}, z_{xy}, z_{xyx} ja z_{xyy}.

<u>Lahendus.</u> Esimest järku osatuletised parameetrilisel

kujul näite 6 järgi on

$$z_x = \frac{v}{u} + \frac{u}{v},$$

$$z_y = \frac{v}{u} - \frac{u}{v}.$$

Koostame süsteemi

$$\begin{cases} 4x = u^2 + v^2 \\ 4y = u^2 - v^2 \\ z_x = \frac{v}{u} + \frac{u}{v}. \end{cases}$$

Vaatleme seda süsteemi kui süsteemi, mis määrab funktsiooni z_x parameetrilisel kujul. Leiame tema osatuletised z_{xx} ja z_{xy}. Kasutame selleks näiteks diferentsiaalide meetodit

$$\begin{cases} 4dx = 2u\,du + 2v\,dv \\ 4dy = 2u\,du - 2v\,dv \\ dz_x = (-\frac{v}{u^2} + \frac{1}{v})du + (\frac{1}{u} - \frac{u}{v^2})dv. \end{cases}$$

Viimase süsteemi kahest esimesest võrrandist saame (vt. näide 6)

$$du = \frac{1}{u}(dx + dy),\quad dv = \frac{1}{v}(dx - dy).$$

Paigutades need kolmandasse võrrandisse, saame

$$dz_x = (-\frac{v}{u^2} + \frac{1}{v})\frac{dx + dy}{u} + (\frac{1}{u} - \frac{u}{v^2})\,\frac{dx - dy}{v} =$$

$$= -\frac{(u^2 - v^2)^2}{u^3v^3}\,dx + \frac{u^4 - v^4}{u^3v^3}\,dy =$$

$$= \frac{16y}{z^3}\,(-y\,dx + x\,dy).$$

Et saadud avaldises dx ja dy kordajad on funktsiooni z_x osatuletised vastavalt x ja y järgi, siis olemegi saanud

$$\begin{cases} z_{xx} = -\dfrac{(u^2 - v^2)^2}{u^3v^3} \\ z_{xy} = \dfrac{u^4 - v^4}{u^3v^3}, \end{cases}$$

ehk lähtevõrrandite abil

$$\begin{cases} z_{xx} = -\dfrac{16y^2}{z^3} \\ z_{xy} = \dfrac{16xy}{z^3}. \end{cases}$$

Osatuletiste z_{xyx} ja z_{xyy} leidmiseks koostame süsteemi

$$\begin{cases} 4x = u^2 + v^2 \\ 4y = u^2 - v^2 \\ z_{xy} = \dfrac{u^4 - v^4}{u^3v^3} = \dfrac{u}{v^3} - \dfrac{v}{u^3}. \end{cases}$$

Vaatleme seda süsteemi jälle kui süsteemi, mis määrab funktsiooni z_{xy} parameetrilisel kujul. Leiame tema osatuletised x ja y järgi näiteks diferentsiaalide meetodi abil. Viimast süsteemi diferentseerides saame

$$\begin{cases} 4dx = 2u\,du + 2v\,dv \\ 4dy = 2u\,du - 2v\,dv \\ dz_{xy} = \left(\dfrac{1}{v^3} + \dfrac{3v}{u^4}\right)du - \left(\dfrac{3u}{v^4} + \dfrac{1}{u^3}\right)dv. \end{cases}$$

Viimase süsteemi kahest esimesest võrrandist avaldame jälle

$$du = \frac{1}{u}(dx + dy), \quad dv = \frac{1}{v}(dx - dy)$$

ning paigutame kolmandasse võrrandisse, saame

$$dz_{xy} = \left(\frac{1}{v^3} + \frac{3v}{u^4}\right)\frac{dx + dy}{u} - \left(\frac{3u}{v^4} + \frac{1}{u^3}\right)\frac{dx - dy}{v} =$$

$$= \frac{u^4v^2 + 3v^6 - 3u^6 - u^2v^4}{u^5v^5}\,dx +$$

$$+ \frac{u^4v^2 + 3v^6 + 3u^6 + u^2v^4}{u^5v^5}\,dy.$$

Seega

$$z_{xyx} = \frac{u^4v^2 + 3v^6 - 3u^6 - u^2v^4}{u^5v^5} =$$

$$= \frac{(u^2 - v^2)[4u^2v^2 - 3(u^2 + v^2)^2]}{u^5v^5},$$

$$z_{xyy} = \frac{u^4v^2 + 3v^6 + 3u^6 + u^2v^4}{u^5v^5} =$$

$$= \frac{(u^2 + v^2)[4u^2v^2 + 3(u^2 - v^2)^2]}{u^5v^5}.$$

Lähtevõrrandite abil võime need osatuletised esitada ka kujul

$$z_{xyx} = -\frac{16y}{z^5}(12x^2 - z^2),$$

$$z_{xyy} = \frac{16x}{z^5}(12y^2 + z^2).$$

Ülesanded.

Leida järgmiste parameetrilisel kujul antud funktsioonide osatuletised z_{yx}, z_{yy}, z_{yxx} ja z_{yxy}.

773. $\begin{cases} 4x = u^2 + v^2 \\ 4y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$

774. $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = 8v \end{cases}$

775. $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u^2 \end{cases}$

776. Leida z_{xx}, kui

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases}$$

777. Leida z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} ja d^2z, kui

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v. \end{cases}$$

778. Leida dz ja d^2z kohal $u = v = 0$, kui

$$\begin{cases} x = e^{u+v} \\ y = e^{u-v} \\ z = uv \end{cases}$$

Leida järgmiste pindade puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

779. $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \sqrt{2 - u^2}, \end{cases}$ $\quad P_0 = (-1,0,1)$

780. $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = 4uv, \end{cases}$ $\quad P_0 = (3,1,8)$

781. $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3, \end{cases}$ $\quad P_0 = (2,2,2)$

§ 4. Muutujate vahetus diferentsiaalavaldistes.

Selles paragrahvis vaatleme muutujate asendamist avaldistes, mis sisaldavad tuletisi või osatuletisi. Seejuures jätame esitamata tingimused nende asenduste teostatavuse kohta, mida lugeja võib igal konkreetsel juhul ise kindlaks teha eespool antud teoreemide põhjal.

1. Muutuja vahetus harilike tuletistega avaldistes. Olgu antud diferentsiaalavaldis

$$W = F(x, y, y'_x, y''_{xx}, \ldots), \tag{26}$$

mis sisaldab funktsiooni $y = y(x)$, tema argumenti x ja tuletisi $y'_x, y''_{xx}, \ldots$.

a) Sõltumata muutuja asendamine. Olgu teisendusvalem antud kujul

$$x = x(t), \tag{27}$$

kus t on uus sõltumata muutuja. Asendamiseks arvutame (vt. Matemaatilise analüüsi praktikum. I. Tartu, 1970, lk. 195)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \tag{28}$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \tag{29}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avaldistes (28) ja (29) tuletised x'_t, $x''_{tt}, \ldots$ arvutame võrdusest (27). Seega asendades avaldises (26) suurused x, y'_x, $y''_{xx}, \ldots$ nende uute avaldistega, saame

$$W = F_1(t, y, y'_t, y''_{tt}, \ldots).$$

Kui teisendusvalem (27) on antud ilmutamata kujul

$$G(t, x) = 0, \tag{30}$$

siis tuletised $x'_t, x''_{tt}, \ldots$ valemites (28) ja (29) arvutame antud seosest (30) ilmutamata funktsiooni diferentseerimise reegli järgi (vt. § 1).

b) Muutujate osade vahetamine. Kui avaldises (26) on vaja vahetada muutujate x ja y osad, s.o. võtta y sõltumata muutujaks ja x tema funktsiooniks, siis teisendusvalemiks (27) tuleb võtta funktsiooni $y = y(x)$ pöördfunktsioon

$$x = x(y). \tag{31}$$

Sel korral valemites (28) on $t = y$, mille tõttu $y'_t = y'_y = 1$ ja me saame

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \tag{32}$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\left(\frac{1}{x'_y}\right)'_y}{x'_y} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}, \tag{33}$$

....

Asendades avaldises (26) suurused $x, y'_x, y''_{xx}, \ldots$ nende uute avaldistega, saame

$$W = F_2(y, x, x'_y, x''_{yy}, \ldots).$$

c) Mõlema muutuja asendamine. Kui diferentsiaalavaldises (26) on vaja asendada mõlemad muutujad y ja x ning teisendusvalemid on antud kujul

$$\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u), \end{cases} \tag{34}$$

kus t on uus sõltumata muutuja ja $u=u(t)$ on uus funktsioon, siis toimime järgmiselt. Diferentseerides seoseid (34), saame

$$\begin{cases} dx = x'_t dt = (x_t + x_u u'_t)dt \\ dy = y'_t dt = (y_t + y_u u'_t)dt, \end{cases}$$

kust

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y_t + y_u u'_t}{x_t + x_u u'_t}. \tag{35}$$

Tuletise y''_{xx} arvutamiseks kasutame valemit (29), kus y'_x määrame valemiga (35). Analoogiliselt arvutame veel kõrgemad tuletised. Saadud tuletiste avaldistes suurused x_t, x_u, y_t ja y_u arvutame antud seostest (34). Tulemuseks saame diferentsiaalavaldise (26) kujul

$$W = F_3(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots).$$

Kui teisendusvalemid (33) on antud ilmutamata kujul

$$\begin{cases} G(t,u,x,y) = 0 \\ H(t,u,x,y) = 0, \end{cases} \tag{36}$$

siis osatuletised x_t, x_u, y_t ja y_u valemis (35) arvutame antud seostest (36) ilmutamata funktsioonide diferentseerimise reegli järgi (vt. § 2).

d) Funktsiooni asendamine. Kui diferentsiaalavaldises (26) on vaja asendada ainult funktsioon y seosega

$$y = y(x,u), \tag{37}$$

kus $u = u(x)$ on uus otsitav funktsioon, siis süsteem (34) taandub süsteemiks

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x,u) \end{cases}$$

ja valem (35) omandab kuju

$$y'_x = y_x + y_u u'_x, \tag{38}$$

sest antud juhul $t = x$, mille tõttu $x_x = 1$ ja $x_u = 0$. Kõrgemad tuletised $y''_{xx}, \dots$ arvutame vahetult seosest (38), kus osatuletise y_u arvutame seosest (37). Asendades diferentsiaalavaldises (26) suurused $y, y'_x, y''_{xx}, \dots$ nende uute avaldistega, saame

$$W = F_4(x, u, u'_x, u''_{xx}, \dots).$$

Näide 8. Asendada diferentsiaalavaldises

$$W = (1 - x^2)y''_{xx} - xy'_x + y$$

muutuja x uue muutujaga t seose $x = \cos t$ abil.

Lahendus. Valemitest (28) ja (29) saame

$$y'_x = \frac{y'_t}{-\sin t},$$

$$y''_{xx} = -\frac{1}{\sin t}\left(\frac{y'_t}{-\sin t}\right)'_t = \frac{y''_{tt}\sin t - y'_t\cos t}{\sin^3 t}.$$

Asendades x, y', y'' avaldisse W, saame

$$W = (1 - \cos^2 t)\,\frac{y''_{tt}\sin t - y'_t\cos t}{\sin^3 t} +$$

$$+ \cos t\,\frac{y'_t}{\sin t} + y = y''_{tt} + y.$$

Näide 9. Asendada diferentsiaalavaldises

$$W = \frac{x^4}{(1 - \ln x)^2}\,y''_{xx} + \frac{x^3(3 - 2\ln x)}{(1 - \ln x)^3}\,y'_x + 1$$

muutuja x uue muutujaga t teisendusvalemi $\ln x = xt$ abil.

Lahendus. Diferentseerides teisendusvalemit, saame

$$\frac{x'_t}{x} = x'_t\,t + x, \qquad x'_t = \frac{x^2}{1 - tx}.$$

Valemite (28) ja (29) abil leiame

$$y'_x = \frac{1 - tx}{x^2}\,y'_t,$$

$$y''_{xx} = \frac{1 - tx}{x^2}\left(\frac{1 - tx}{x^2}\,y'_t\right)'_t =$$

$$= \frac{1 - tx}{x^2}\left[\frac{(-x - tx'_t)x^2 - (1 - tx)2x\,x'_t}{x^4}\,y'_t + \frac{1 - tx}{x^2}\,y''_{tt}\right] =$$

$$= \frac{(1 - tx)^2}{x^4}\,y''_{tt} - \frac{1 - tx}{x^5}\left[\left(x + \frac{tx^2}{1 - tx}\right)x + 2x^2\right]y'_t =$$

$$= \frac{(1 - tx)^2}{x^4}\,y''_{tt} - \frac{1 - tx}{x^3}\left(3 + \frac{tx}{1 - tx}\right)y'_t.$$

Asendades avaldisse W, saame

$$W = y''_{tt} - \frac{x}{1 - tx}(3 + \frac{tx}{1 - tx})y'_t + \frac{x(3 - 2tx)}{(1 - tx)^2} y'_t + 1 =$$

$$= y''_{tt} - \frac{x}{1 - tx} \frac{3 - 2tx}{1 - tx} y'_t + \frac{x(3 - 2tx)}{(1 - tx)^2} y'_t + 1 =$$

$$= y''_{tt} + 1.$$

Näide 10. Teisendada võrrand

$$y'' - (x - e^y)y'^3 = 0,$$

võttes y sõltumata muutujaks ja x tema funktsiooniks.

Lahendus. Antud juhul tuleb võrrandis muutujate osad vahetada. Valemite (32) ja (33) põhjal saame

$$-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3} - (x - e^y)\frac{1}{(x'_y)^3} = 0,$$

kust uue otsitava funktsiooni (31) jaoks saame võrrandi

$$x''_{yy} + x = e^y.$$

Näide 11. Teisendada võrrand

$$(1 + x^2)^2 y'' = y$$

asendusega

$$\begin{cases} x = \tan t \\ y = \dfrac{u}{\cos t}. \end{cases}$$

Lahendus. Diferentseerides valemeid t järgi, saame

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'_t = \frac{1}{\cos^2 t}(u'_t \cos t + u \sin t),$$

kust valemite (35) ja (29) põhjal

$$y'_x = u'_t \cos t + u \sin t$$

ja

$$y''_{xx} = \cos^2 t\,(u'_t \cos t + u \sin t)'_t =$$

$$= \cos^2 t\,(u''_{tt} \cos t - u'_t \sin t + u'_t \sin t + u \cos t) =$$

$$= \cos\,(u''_{tt} + u).$$

Asendades x,y ja y''_{xx} antud võrrandisse, saame

$$(1 + \tan^2 t)\cos t(u''_{tt} + u) = \frac{u}{\cos t}$$

ehk

$$\frac{1}{\cos t}\,(u''_{tt} + u) = \frac{u}{\cos t},$$

kust

$$u''_{tt} = 0.$$

Ülesanded.

Asendada järgmistes võrrandites muutuja x uue muutujaga t antud seoste abil.

782. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0,$ $\quad x = \cos t$

783. $x^2y'' + 3xy' + y = 0,$ $\quad x = e^t$

784. $x^2y'' + 2xy' + x^{-2}y = 0,$ $\quad x = 1/t$

785. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0,$ $\quad x = e^t$

786. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0,$ $\quad x = \tan t$

787. $x^3y''' = 6y,$ $\quad t = \ln|x|$

788. $y'' + \mathrm{th}\, x\, y' + \dfrac{y}{\mathrm{ch}^2 x} = 0,$ $\quad x = \ln \tan \frac{t}{2}$

789. $xy'' - y' + xy = 0,$ $\quad x^2 = 4t$

790. $x^2y'' + 2xy' = 2,$ $\quad 2tx = \sin(tx)$

791. $2x^4y' + 2\sin^3 x = x \sin x \sin 2x,$ $\qquad tx = \sin x$

792. $\frac{x^2}{x-1} y' - \frac{e^{2x}}{x} + e^x = 0,$ $\qquad tx = e^x$

793. $x^4(1 - \ln x)y'' + x^3(3 - 2\ln x)y' = 0,$ $\qquad tx = \ln x$

Teisendada järgmised võrrandid, võttes y sõltumata muutujaks ja x tema funktsiooniks.

794. $y'' + 2y'^2 = 0$

795. $y'y''' - 3y''^2 = 0$

796. $y'y''' - 3y''^2 = x$

797. $xy'' + y'^3 = y'$

798. $y'^2y - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0$

Teisendada järgmised võrrandid seoste abil, kus t on uus sõltumatu muutuja ja u uus funktsioon.

799. $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0,$ $\qquad x = e^t, \quad y = ux^2$

800. $(1 - x^2)^2y'' + y = 0,$ $\qquad x = \operatorname{th} t, \quad y = \frac{u}{\operatorname{ch} t}$

801. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0,$ $\qquad x = t + u, \quad y = u - t$

802. $y''' - x^3y'' + xy' - y = 0,$ $\qquad tx = 1, \quad ty = u$

803. $(1 - x^2)^2(1 - y'') - y = 0,$ $\qquad x = \operatorname{th} t, \quad y = \frac{u}{\operatorname{ch} t}$

804. $y' = \frac{x + y}{x - y},$ $\qquad x = u \cos t, y = u \sin t$

805. $y'' = \frac{y}{(x - 1)^2(x - 2)^2},$ $\qquad t = \ln\left|\frac{x - 1}{x - 2}\right|, \quad u = \frac{y}{x - 2}$

Teisendada järgmised diferentsiaalavaldised polaarkoordinaatidesse $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

806. $W = \frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}$

807. $W = \frac{x + yy'}{xy' - y}$

808. $W = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}$

Asendada järgmistes võrrandites funktsioon y uue funktsiooniga u antud seoste abil.

809. $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$, $\quad y = u\exp(-x^2)$

810. $y'' + 2xy' + x^2y = 0$, $\quad y = u\exp(-x^2)$

811. $y'' - 2\cos x\, y' + (\sin x + \cos^2 x)y = 0$, $y = u\sin x$

2. Muutuja vahetus osatuletistega avaldistes. Olgu antud diferentsiaalavaldis

$$W = F(x,y,\ldots,\ u,u_x,u_y,\ldots,\ u_{xx},u_{xy},\ldots), \tag{39}$$

mis sisaldab mitme muutuja funktsiooni $u = u(x,y,\ldots)$, tema argumente $x,y,\ldots$ ja osatuletisi $u_x,u_y,\ldots,u_{xx},u_{xy},\ldots$.

a) Sõltumatute muutujate asendamine. Olgu teisendusvalemid antud kujul

$$\begin{cases} x = x(s,t,\ldots) \\ y = y(s,t,\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{40}$$

kus $s,t,\ldots$ on uued sõltumatud muutujad. Asendamiseks avaldame uued osatuletised $u_s,u_t,\ldots$ vanade osatuletiste u_x, $u_y,\ldots$ kaudu:

$$\begin{cases} u_s = u_x x_s + u_y y_s + \ldots \\ u_t = u_x x_t + u_y y_t + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{41}$$

kus osatuletised $s,t,\ldots$ järgi arvutame süsteemist (40). Edasi lahendame süsteemi (41) vanade osatuletiste $u_x,u_y,\ldots$ suhtes, saame

$$\begin{cases} u_x = Au_s + Bu_t + \ldots \\ u_y = Cu_s + Du_t + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{42}$$

kus kordajad $A, B, \ldots$ koosnevad funktsioonide (40) osatuletistest.

Kõrgemate osatuletiste avaldamiseks uute muutujate $s, t, \ldots$ kaudu kasutame valemeid (42), võttes seal funktsiooni u asemele funktsiooni u_x või $u_y, \ldots$. Saame

$$u_{xx} = (u_x)_x \underset{(42)}{=} A(u_x)_s + B(u_x)_t + \ldots =$$

$$\underset{(42)}{=} A(Au_s + Bu_t + \ldots)_s + B(Au_s + Bu_t + \ldots)_t + \ldots =$$

$$= A(A_s u_s + Au_{ss} + B_s u_t + Bu_{ts} + \ldots) +$$

$$+ B(A_t u_s + Au_{st} + B_t u_t + Bu_{tt} + \ldots) + \ldots .$$

$$u_{xy} = (u_x)_y \underset{(42)}{=} C(u_x)_s + D(u_x)_t + \ldots =$$

$$\underset{(42)}{=} C(Au_s + Bu_t + \ldots)_s + D(Au_s + Bu_t + \ldots)_t + \ldots =$$

$$= \ldots .$$

Asendades avaldises (39) suurused $x, y, \ldots$ ning osatuletised nende uute avaldistega, saame

$$W = F_1(s, t, \ldots, u, u_s, u_t, \ldots, u_{ss}, u_{st}, \ldots). \qquad (43)$$

Kui teisendusvalemid on antud kujul

$$\begin{cases} s = s(x, y, \ldots) \\ t = t(x, y, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad (44)$$

siis vaatleme funktsiooni $u = u(x, y, \ldots)$ kui liitfunktsiooni muutujate $x, y, \ldots$ suhtes vahepealsete muutujate $s, t, \ldots$ kaudu, mistõttu kohe saame asendamiseks vajalikud osatuletised

$$\begin{cases} u_x = u_s s_x + u_t t_x + \dots \\ u_y = u_s s_y + u_t t_y + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \tag{45}$$

kus osatuletised $s_x, s_y, t_x, t_y, \dots$ arvutame valemist (44). Kõrgemate osatuletiste arvutamiseks kasutame korduvalt valemeid (45). Näiteks

$$u_{xx} = (u_x)_x \underset{(45)}{=} (u_s s_x + u_t t_x + \dots)_x =$$

$$= (u_s)_x s_x + u_s s_{xx} + (u_t)_x t_x + u_t t_{xx} + \dots =$$

$$\underset{(45)}{=} (u_{ss} s_x + u_{st} t_x + \dots) s_x + u_s s_{xx} +$$

$$+ (u_{ts} s_x + u_{tt} t_x + \dots) t_x + u_t t_{xx} + \dots .$$

Asendades avaldises (39) osatuletised nende uute avaldistega ja muutujad $x, y, \dots$ seoste (44) abil, saame jälle avaldise (39) kujul (43).

Kui teisendusvalemid on antud ilmutamata kujul

$$\begin{cases} G(s,t,\dots,x,y,\dots) = 0 \\ H(s,t,\dots,x,y,\dots) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \tag{46}$$

siis osatuletised $x_s, x_t, y_s, y_t, \dots$ valemites (41) või osatuletised $s_x, s_y, t_x, x_y, \dots$ valemites (45) arvutame valemeist (46) ilmutamata funktsiooni diferentseerimise reegli järgi.

b) Üldine muutujate vahetus. Olgu teisendusvalemid antud kujul

$$\begin{cases} x = x(s,t,\dots,w) \\ y = y(s,t,\dots,w) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u = u(s,t,\dots,w), \end{cases} \tag{47}$$

kus s,t,... on uued sõltumatud muutujad ja $w = w(s,t,...)$ on uus funktsioon.

Käesoleval juhul muutujate vahetus teostatakse analoogiliselt eelmisele juhule a). Kuna w on muutujate s,t,... funktsioon, siis valemid (41) käesoleval juhul esituvad kujul

$$\begin{cases} u_s + u_w w_s = Ku_x + Lu_y + \ldots \\ u_t + u_w w_t = Mu_x + Nu_y + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{cases} \tag{48}$$

kus

$$K = x_s + x_w w_s, \; L = y_s + y_w w_s, \; \ldots$$
$$M = x_t + x_w w_t, \; N = y_t + y_w w_t, \; \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

ja osatuletised $x_s, x_t, x_w, y_s, y_t, y_w, u_s, u_t, u_w, \ldots$ arvutame teisendusvalemitest (47). Edasi lahendame süsteemi (48) vanade osatuletiste $u_x, u_y, \ldots$ suhtes:

$$\begin{cases} u_x = A(u_s + u_w w_s) + B(u_t + u_w w_t) + \ldots \\ u_y = C(u_s + u_w w_s) + D(u_t + u_w w_t) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{cases} \tag{49}$$

kus kordajad A,B,... koosnevad funktsioonide (47) ja funktsiooni w osatuletistest. Sellega oleme saanud asendamiseks esimest järku osatuletised u_x, $u_y, \ldots$.

Kõrgemate osatuletiste $u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ leidmiseks lähtume süsteemist (47), kus asendame viimase võrduse leitud avaldisega u_x jaoks, s.o. süsteemist

$$\begin{cases} x = x(s,t,\ldots,w) \\ y = y(s,t,\ldots,w) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_x = u_x(s,t,\ldots,w,w_s,w_t,\ldots). \end{cases} \tag{50}$$

Järelikult u_x osatuletiste saamiseks tuleb valemeis (48) võtta u asemele u_x, siis saame

$$\begin{cases} (u_x)_s+(u_x)_w w_s+(u_x)_{w_s} w_{ss}+(u_x)_{w_t} w_{ts}+\ldots = Ku_{xx}+Lu_{xy}+\ldots \\ (u_x)_t+(u_x)_w w_t+(u_x)_{w_s} w_{st}+(u_x)_{w_t} w_{tt}+\ldots = Mu_{xx}+Nu_{xy}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{51}$$

kust pärast osatuletiste arvutamist $s,t,\ldots,w,w_s,w_t,\ \ldots$ järgi süsteemi (50) abil leiame osatuletised $u_{xx},u_{xy},\ldots$.

Analoogiliselt arvutatakse osatuletised $u_{yx},u_{yy},\ \ldots$ süsteemist

$$\begin{cases} (u_y)_s+(u_y)_w w_s+(u_y)_{w_s} w_{ss}+(u_y)_{w_t} w_{ts}+\ldots = Ku_{yx}+Lu_{yy}+\ldots \\ (u_y)_t+(u_y)_w w_s+(u_y)_{w_s} w_{st}+(u_y)_{w_t} w_{tt}+\ldots = Mu_{yx}+Nu_{yy}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{52}$$

Kui näiteks osatuletis u_{xy} on arvutatud süsteemist (51), siis, arvestades võrdust $u_{xy} = u_{yx}$, võime ta asendada süsteemi (52) ülejäänud osatuletiste arvutamise hõlbustamiseks. Veel kõrgemate osatuletiste arvutamine toimub samal viisil.

Kõrgemate osatuletiste avaldamiseks võib rakendada korduvalt ka valemeid (49) nagu eelmisel juhul a). Näit. osatuletise u_{xx} avaldamiseks kirjutame võrduse

$$u_{xx} = (u_x)_x$$

ja rakendame valemeist (49) esimest valemit funktsiooni u asemel funktsioonile u_x.

Kui teisendusvalemid on antud kujul

$$\begin{cases} s = s(x,y,\dots,u) \\ t = t(x,y,\dots,u) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ w = w(x,y,\dots,u), \end{cases} \qquad (53)$$

siis loeme uue funktsiooni w muutujate $x,y,\dots$ suhtes liitfunktsiooniks vahepealsete muutujate $s,t,\dots$ kaudu. Saame

$$\begin{cases} w_x + w_u u_x = w_s(s_x + s_u u_x) + w_t(t_x + t_u u_x) + \dots \\ w_y + w_u u_y = w_s(s_y + s_u u_y) + w_t(t_y + t_u u_y) + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \qquad (54)$$

kust avaldame osatuletised $u_x, u_y, \dots$.

Kõrgemate osatuletiste avaldamiseks diferentseerime saadud avaldisi $u_x, u_y, \dots$ muutujate x,y järgi, lugedes osatuletisi $w_s, w_t, \dots$ liitfunktsiooniks $x,y,\dots$ suhtes vahepealsete muutujate $s,t,\dots$ kaudu. Analoogiliselt arvutatakse veel kõrgemaid osatuletisi.

Üldiselt, kui teisendusvalemid on antud ilmutamata kujul, siis kasutame vajalike osatuletiste saamiseks ilmutamata funktsioonide diferentseerimise reegleid.

<u>Näide 12.</u> Asendada võrrandis

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + y\,u_y = 0$$

muutujad x ja y uute muutujatega s ja t, kus

$$x = \operatorname{sh} s, \quad y = \operatorname{sh} t.$$

<u>Lahendus.</u> Siin on teisendusvalemid antud kujul (40). Seepärast moodustame süsteemi (41):

$$\begin{cases} u_s = u_x \operatorname{ch} s \\ u_t = u_y \operatorname{ch} t, \end{cases}$$

mille lahendamisel saame süsteemi (42) kujul

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} s} u_s \\ u_y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} u_t . \end{cases}$$

Seega

$$A = \frac{1}{\operatorname{ch} s}, \ B = 0, \ C = 0, \ D = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Teist järku osatuletiste arvutamiseks kasutame viimaseid valemeid, asendades seal funktsiooni u järgemööda leitud funktsioonidega u_x ja u_y. Saame

$$u_{xx} = (u_x)_x \underset{(42)}{=} A(u_x)_s = \frac{1}{\operatorname{ch} s} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} s} u_s\right)_s =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} s} \left(- \frac{\operatorname{sh} s}{\operatorname{ch}^2 s} u_s + \frac{1}{\operatorname{ch} s} u_{ss}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^3 s} (\operatorname{ch} s \ u_{ss} - \operatorname{sh} s \ u_s).$$

Analoogiliselt

$$u_{yy} = (u_y)_y \underset{(42)}{=} D(u_y)_t = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t} u_t\right)_t =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t} (\operatorname{ch} t \ u_{tt} - \operatorname{sh} t \ u_t).$$

Asendades leitud osatuletised antud võrrandisse, saame

$$(1 + \operatorname{sh}^2 s) \frac{1}{\operatorname{ch}^3 s} (\operatorname{ch} s \cdot u_{ss} - \operatorname{sh} s \cdot u_s) +$$

$$+ (1 + \operatorname{sh}^2 t) \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t} (\operatorname{ch} t \cdot u_{tt} - \operatorname{sh} t \cdot u_t) +$$

$$+ \operatorname{sh} s \frac{1}{\operatorname{ch} s} u_s + \operatorname{sh} t \frac{1}{\operatorname{ch} t} u_t =$$

$$= u_{ss} - \operatorname{th} s \cdot u_s + u_{tt} - \operatorname{th} t \cdot u_t +$$

$$+ \operatorname{th} s\, u_s + \operatorname{th} t\, u_t =$$

$$= u_{ss} + u_{tt}.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrand esitub kujul

$$u_{ss} + u_{tt} = 0.$$

Vaadeldava ülesande võime lahendada ka veel teisiti. Nimelt antud teisendusvalemid võib viia kujule (44), s.o. lahendada uute muutujate s ja t suhtes, saame

$$s = \operatorname{arsh} x, \quad t = \operatorname{arsh} y.$$

Osatuletiste u_x ja u_y arvutamiseks tuleb kasutada valemeid (45), mille järgi kohe saame

$$\begin{cases} u_x = u_s \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = u_s(1 + x^2)^{-1/2} \\ u_y = u_t \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2}} = u_t(1 + y^2)^{-1/2}. \end{cases}$$

Teist järku osatuletiste u_{xx} ja u_{yy} arvutamiseks kasutame neid viimaseid valemeid:

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_s)_x(1 + x^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} u_s(1 + x^2)^{-3/2} 2x =$$

$$= (u_s)_x(1 + x^2)^{-1/2} - xu_s(1 + x^2)^{-3/2} =$$

$$= u_{ss} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} (1 + x^2)^{-1/2} - xu_s(1 + x^2)^{-3/2} =$$

$$= u_{ss}(1 + x^2)^{-1} - xu_s(1 + x^2)^{-3/2},$$

$$u_{yy} = u_{tt}(1 + y^2)^{-1} - yu_t(1 + y^2)^{-3/2}.$$

Asendades leitud tuletised antud võrrandisse, saame

$$u_{ss} - xu_s(1 + x^2)^{-1/2} + u_{tt} - yu_t(1 + y^2)^{-1/2} +$$

$$+ xu_s(1 + x^2)^{-1/2} + yu_t(1 + y^2)^{-1/2} =$$

$$= u_{ss} + u_{tt} = 0.$$

Näide 13. Asendada võrrandis

$$u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0$$

muutujad x ja y uute muutujatega s ja t, kui

$$x = \frac{1}{5}(2s + 3t), \quad y = \frac{6}{5}(s - t).$$

Lahendus. Teisendusvalemid on antud kujul (40). Seepärast moodustame süsteemi (41):

$$\begin{cases} u_s = u_x \frac{2}{5} + u_y \frac{6}{5} \\ u_t = u_x \frac{3}{5} + u_y(-\frac{6}{5}), \end{cases}$$

kust

$$\begin{cases} u_x = u_s + u_t \\ u_y = \frac{1}{2} u_s - \frac{1}{3} u_t, \end{cases}$$

mis vastab süsteemile (42), kus

$$A = 1,\ B = 1,\ C = \frac{1}{2},\ D = -\frac{1}{3}.$$

Teist järku osatuletiste arvutamisel kasutame jälle neid viimaseid valemeid, asendades seal u järgemööda funktsioonidega u_x ja u_y. Saame

$$u_{xx} = (u_x)_x \underset{(42)}{=} A(u_x)_s + B(u_x)_t =$$

$$= (u_s + u_t)_s + (u_s + u_t)_t =$$

$$= u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt},$$

$$u_{xy} = (u_x)_y \underset{(42)}{=} C(u_x)_s + D(u_x)_t =$$

$$= \frac{1}{2}(u_s + u_t)_s - \frac{1}{3}(u_s + u_t)_t =$$

$$= \frac{1}{2} u_{ss} + \frac{1}{6} u_{st} - \frac{1}{3} u_{tt},$$

$$u_{yy} = (u_y)_y \underset{(42)}{=} C(u_y)_s + D(u_y)_t =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} u_s - \frac{1}{3} u_t)_s - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}u_s - \frac{1}{3} u_t)_t =$$

$$= \frac{1}{4} u_{ss} - \frac{1}{3} u_{st} + \frac{1}{9} u_{tt}.$$

Asendame need antud võrrandisse, saame

$$u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} = u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt} +$$

$$+ \frac{1}{2} u_{ss} + \frac{1}{6} u_{st} - \frac{1}{3} u_{tt} -$$

$$- 6(\frac{1}{4} u - \frac{1}{3} u_{st} + \frac{1}{9} u_{tt}) =$$

$$= \frac{25}{6} u_{st}$$

ehk

$$u_{st} = 0.$$

Vaadeldava ülesande võime lahendada ka veel teisiti. Nimelt antud teisendusvalemid võib viia kujule (44), s.o. lahendada uute muutujate suhtes s ja t, leiame

$$s = x + \frac{1}{2} y, \quad t = x - \frac{1}{3} y.$$

Osatuletiste u_x ja u_y arvutamiseks tuleb kasutada valemeid (45), millest kohe saame

$$\begin{cases} u_x = u_s + u_t \\ u_y = u_s \frac{1}{2} + u_t(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} u_s - \frac{1}{3} u_t. \end{cases}$$

Kasutades neid viimaseid valemeid saame kergesti leida teist järku osatuletised:

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_s)_x + (u_t)_x =$$

$$\underset{(45)}{=} (u_{ss} + u_{ts}) + (u_{ts} + u_{tt}) =$$

$$= u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt},$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = (u_s)_y + (u_t)_y =$$

$$\underset{(45)}{=} u_{ss}\frac{1}{2} + u_{st}(-\frac{1}{3}) + u_{ts}\frac{1}{2} + u_{tt}(-\frac{1}{3}) =$$

$$= \frac{1}{2}u_{ss} + \frac{1}{6}u_{st} - \frac{1}{3}u_{tt},$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = \frac{1}{2}(u_s)_y - \frac{1}{3}(u_t)_y =$$

$$\underset{(45)}{=} \frac{1}{2}\left[u_{ss}\frac{1}{2} + u_{st}(-\frac{1}{3})\right] - \frac{1}{3}\left[u_{ts}\frac{1}{2} + u_{tt}(-\frac{1}{3})\right] =$$

$$= \frac{1}{4}u_{ss} - \frac{1}{3}u_{st} + \frac{1}{9}u_{tt},$$

mis on samad avaldised mis eespoolgi.

Näide 14. Asendada võrrandis

$$u_{xx} + u_{yy} - 2u_{xy} = 0$$

muutujad x,y muutujatega s,t ja funktsioon u funktsiooniga w, kui

$$x = \frac{1}{1 + t}, \quad y = \frac{st}{1 + t}, \quad u = \frac{sw}{1 + t}.$$

Lahendus. Nagu näeme, on teisendusvalemid antud kujul (47). Järelikult osatuletised u_x ja u_y tuleb arvutada valemitest (48). Saame

$$\begin{cases} \dfrac{w + sw_s}{1 + t} = u_x(\dfrac{1}{1 + t} + 0 \cdot w_s) + u_y(\dfrac{t}{1 + t} + 0 \cdot w_s) \\ s\dfrac{(1 + t)w_t - w}{(1 + t)^2} = u_x(-\dfrac{s}{(1 + t)^2} + 0 \cdot w_t) + u_y(\dfrac{s}{(1 + t)^2} + 0 \cdot w_t). \end{cases}$$

Seega

$$K = \frac{1}{1+t}, \quad L = \frac{t}{1+t}, \quad M = -\frac{s}{(1+t)^2}, \quad N = \frac{s}{(1+t)^2}.$$

Viimast süsteemi lihtsustades saame

$$\begin{cases} w + sw_s = u_x + tu_y \\ (1+t)w_t - w = -u_x + u_y, \end{cases}$$

kust

$$\begin{cases} u_x = w + \frac{s}{1+t} w_s - tw_t \\ u_y = \frac{s}{1+t} w_s + w_t. \end{cases}$$

Teist järku osatuletiste u_{xx} ja u_{xy} arvutamiseks moodustame süsteemi (50), s.o. süsteemi

$$\begin{cases} x = \frac{s}{1+t} \\ y = \frac{st}{1+t} \\ u_x = w + \frac{s}{1+t} w_s - tw_t, \end{cases}$$

mis toob võrrandite (51) juurde, kus kordajad K, L, M ja N on meil eespool juba arvutatud. Saame

$$\begin{cases} (u_x)_s + (u_x)_w w_s + (u_x)_{w_s} w_{ss} + (u_x)_{w_t} w_{st} = \frac{1}{1+t} u_{xx} + \frac{t}{1+t} u_{xy} \\ (u_x)_t + (u_x)_w w_t + (u_x)_{w_s} w_{st} + (u_x)_{w_t} w_{tt} = -\frac{s}{(1+t)^2} u_{xx} + \frac{s}{(1+t)^2} u_{xy} \end{cases}$$

ehk, arvestades u_x tähendust,

$$\begin{cases} \frac{1}{1+t} w_s + w_s + \frac{s}{1+t} w_{ss} - tw_{ts} = \frac{1}{1+t}(u_{xx} + tu_{xy}) \\ -\frac{s}{(1+t)^2} w_s - w_t + w_t + \frac{s}{1+t} w_{st} - tw_{tt} = \frac{s}{(1+t)^2}(-u_{xx} + u_{xy}), \end{cases}$$

kust

$$\begin{cases} u_{xx} + tu_{xy} = (2+t)w_s + sw_{ss} - t(1+t)w_{st} \\ -su_{xx} + su_{xy} = -sw_s + s(1+t)w_{st} - t(1+t)^2 w_{tt}. \end{cases}$$

Viimase süsteemi lahendamine annab

$$\begin{cases} u_{xx} = 2w_s + \frac{s}{1+t} w_{ss} - 2tw_{st} + \frac{t^2}{s}(1+t)w_{tt} \\ u_{xy} = w_s + \frac{s}{1+t} w_{ss} + (1-t)w_{st} - \frac{t}{s}(1+t)w_{tt}. \end{cases}$$

Osatuletise u_{yy} leidmiseks piisab süsteemist (52) moodustada vaid üks võrrand, näiteks esimene, kuna u_{xy} on juba teada, saame

$$(u_y)_s + (u_y)_w w_s + (u_y)_{w_s} w_{ss} + (u_y)_{w_t} w_{st} = \frac{1}{1+t} u_{xy} + \frac{1}{1+t} u_{yy}.$$

Arvestades u_y avaldist, saame

$$\frac{1}{1+t} w_s + \frac{1}{1+t} w_{ss} + w_{st} = \frac{1}{1+t} u_{xy} + \frac{t}{1+t} u_{yy},$$

kust

$$u_{yy} = \frac{1}{t} w_s + \frac{s}{t} w_{ss} + \frac{(1+t)}{t} w_{st} - \frac{1}{t} u_{xy} =$$

$$= \frac{s}{1+t} w_{ss} + 2w_{st} + \frac{1+t}{s} w_{tt}.$$

Paigutades need antud võrrandisse, saame

$$0 = u_{xx} + u_{xy} - 2u_{xy} = (2-2)w_s + (1+1-2)\frac{s}{1+t} w_{ss} +$$

$$+ (-2t + 2 - 2 + 2t)w_{st} + (t^2 + 1 - 2t)\frac{1+t}{s} w_{tt} =$$

$$= \frac{1}{s}(1+t)(1-t)^2 w_{tt}.$$

Seega lõplikult

$$w_{tt} = 0.$$

Antud ülesande võib lahendada veel teisiti. Nimelt teisendusvalemid võib viia kujule (53), s.o.

$$s = x + y, \quad t = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{u}{x}.$$

Nüüd tuleb kasutada valemeid (54), saame

$$\begin{cases} -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} u_x = w_s(1 + 0\cdot u_x) + w_t(-\frac{y}{x^2} + 0\cdot u_x) \\ 0 + \frac{1}{x} u_y = w_s(1 + 0\cdot u_y) + w_t(\frac{1}{x} + 0\cdot u_y), \end{cases}$$

kust

$$\begin{cases} u_x = xw_s - \frac{y}{x} w_t + \frac{u}{x} \\ u_y = xw_s + w_t. \end{cases}$$

Teist järku osatuletiste saamiseks diferentseerime saadud avaldisi u_x ja u_y jaoks muutujate x ja y järgi, lugedes osatuletisi w_s ja w_t liitfunktsioonideks x ja y suhtes vahepealsete muutujate s ja t kaudu. Saame

$$u_{xx} = (u_x)_x = (xw_s - \frac{y}{x} w_t + \frac{u}{x})_x = (xw_s)_x - (\frac{y}{x} w_t)_x + (\frac{u}{x})_x =$$

$$= w_s + x(w_s)_x + \frac{y}{x^2} w_t - \frac{y}{x}(w_t)_x - \frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} u_x =$$

$$= w_s + x(w_{ss}s_x + w_{st}t_x) + \frac{y}{x^2} w_t - \frac{y}{x}(w_{ts}s_x + w_{tt}t_x) - \frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} u_x =$$

$$= w_s + x(w_{ss} - \frac{y}{x^2} w_{st}) + \frac{y}{x^2} w_t - \frac{y}{x}(w_{st} - \frac{y}{x^2} w_{tt}) -$$

$$- \frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}(xw_s - \frac{y}{x} w_t + \frac{u}{x}) =$$

$$= 2w_s + xw_{ss} - \frac{2y}{x} w_{st} + \frac{y^2}{x^3} w_{tt};$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = (xw_s + w_t)_y = x(w_s)_y + (w_t)_y =$$

$$= x(w_{ss}s_y + w_{st}t_y) + (w_{ts}s_y + w_{tt}t_y) =$$

$$= x(w_{ss} + w_{st}\frac{1}{x}) + (w_{ts} + w_{tt}\frac{1}{x}) =$$

$$= xw_{ss} + 2w_{st} + \frac{1}{x} w_{tt};$$

$$u_{xy} = u_{yx} = (u_y)_x = (xw_s + w_t)_x =$$

$$= w_s + x(w_s)_x + (w_t)_x =$$

$$= w_s + x(w_{ss} - w_{st} \frac{-y}{x^2}) + (w_{ts} - w_{tt} \frac{-y}{x^2}) =$$

$$= w_s + xw_{ss} + (1 - \frac{y}{x})w_{st} - \frac{y}{x^2} w_{tt}.$$

Paigutades viimased antud võrrandisse, saame

$$0 = u_{xx} + u_{yy} - 2u_{xy} = (2 - 2)w_s + (x + x - 2x)w_{ss} +$$

$$+ (- \frac{2y}{x} + 2 - 2 + \frac{2y}{x})w_{st} + (\frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{2y}{x^2}) w_{tt} =$$

$$= \frac{(x - y)^2}{x^3} w_{tt},$$

kust nagu eespoolgi

$$w_{tt} = 0.$$

Ülesanded.

Järgmistes võrrandites asendada muutujad x ja y uute muutujatega s ja t antud seoste abil.

812. $xu_x + \sqrt{1 + y^2}\, u_y = xy$, $x = e^s$, $y = \operatorname{sh} t$

813. $(x + y)u_x = (x - y)u_y$, $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$

814. $u_{xx} = u_{yy}$, $x = \frac{1}{2}(s - t)$, $y = \frac{1}{2}(s + t)$

815. $2u_{xx} - 2y\, u_{yy} = u_y$, $x = \frac{1}{2}(s + t)$, $y = \frac{1}{16}(s - t)^2$

Järgmistes võrrandites asendada üks muutujatest uue muutujaga t antud seoste abil.

816. $xu_y = yu_x$, $\qquad y = \sqrt{t - x^2}$

817. $xu_x + yu_y = u$, $\qquad x = ty$

818. $x^2u_{xx} - 2x\sin y\, u_{xy} + \sin^2 y\, u_{yy} = 0$, $\qquad t = x\tan(y/2)$

Teisendada järgmised diferentsiaalavaldised polaarkoordinaatidesse $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

819. $W = xu_y - yu_x$

820. $W = xu_x - yu_y$

821. $W = x^2u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2\, u_{yy}$

822. $W = y^2u_{xx} - 2xy\, u_{xy} + x^2u_{yy} - xu_x - yu_y$

Järgmistes võrrandites asendada muutujad x ja y uute muutujatega s ja t antud seoste abil.

823. $1 + x^2\, u_x + yu_y = xy$, $s = \ln y$, $t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

824. $(x + y)u_x - (x - y)u_y = 0$, $\qquad s = \arctan(y/x)$,

$\qquad 2t = \ln(x^2 + y^2)$

825. $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$, $\qquad s = x + y$, $t = x + \frac{y}{2}$

826. $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$, $\qquad s = x + \frac{y}{2}$, $t = x + y$

827. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$, $\qquad s = xy$, $\quad t = \frac{x}{y}$

828. $xu_x + yu_y = u + \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}$, $s = \frac{y}{x}$,

$\qquad t = u + \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}$

829. $xu_x + yu_y = x/u$, $\qquad s = 2x^2 - u^2$, $t = y/u$

Järgmistes võrrandites asendada muutujad x ja y uute muutujatega s ja t ning funktsioon u uue funktsiooniga w antud seoste abil.

830. $u_x + \frac{1}{2}y \cdot u_{yy} = \frac{1}{x}$, $x = t$, $y = \frac{s}{t}$, $u = \frac{s + tw}{t^2}$

831. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$,

$$2x = s + t, \quad 2y = s - t, \quad 4u = s^2 - t^2 - 4w$$

832. $yu_x - xu_y = (y - x)u$,

$$s = x^2 + y^2, \quad t = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad w = \ln u - x - y$$

833. $x^2u_x + y^2u_y = u^2$, $t = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{u} - \frac{1}{x}$

834. $(xy + u)u_x + (1 - y^2)u_y = x + yu$,

$$s = yu - x, \quad t = xu - y, \quad w = xy - u$$

835. $u_x(1 + u_x)u_{yy} - (1 + u_x + u_y + 2u_xu_y)u_{xy} +$

$$+ u_y(1 + u_y)u_{xx} = 0, \qquad x = w-t, \quad y = w-s, \quad u = s+t-w$$

836. Teisendada diferentsiaalvõrrand

$$x^2u_{xx} + y^2u_{yy} + z^2u_{zz} + 2xy\, u_{xy} + 2xz\, u_{xz} + 2yz\, u_{yz} = 0$$

uutele muutujatele

$$s = \frac{y}{x}, \quad t = \frac{z}{x}, \quad v = y - z.$$

837. Teisendada Laplace'i võrrand

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

polaarkoordinaatidesse

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Teisendada sfäärilistesse koordinaatidesse

$x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$

diferentsiaalavaldised

838. $\nabla^2 u = (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2$

839. $\nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

§ 5. Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid.

Olgu antud mitme muutuja funktsioon

$$f(P) = f(x,y,\ldots)$$

määramispiirkonnaga D.

Mitme muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis $P_0 \in D$ lokaalne maksimum (miinimum), kui punktil P_0 leidub ümbrus $U \subset D$, kus

$$f(P) \leqslant f(P_0) \text{ (vastavalt } f(P) \geqslant f(P_0)). \qquad (55)$$

Sel korral punkti P_0 nimetatakse funktsiooni f ekstreemumpunktiks ja väärtust $f(P_0)$ funktsiooni f lokaalseks ekstreemumiks.

Tarvilik tunnus. Funktsioonil f võib lokaalne ekstreemum esineda vaid funktsiooni kriitilises punktis, s.o. määramispiirkonna D punktis, kus kõik osatuletised on võrdsed nulliga või vähemalt üks osatuletis on lõpmatu või ei eksisteeri.

Neid punkte funktsiooni f määramispiirkonnast, kus funktsiooni kõik osatuletised on võrdsed nulliga, nimetatakse tema statsionaarseteks punktideks. Seega diferentseeruval funktsioonil võib lokaalne ekstreemum esineda vaid tema statsionaarses punktis.

Tähistame

$a_{11} = f_{xx}(P_0)$, $a_{12} = f_{xy}(P_0)$, $a_{21} = f_{yx}(P_0)$, $a_{22} = f_{yy}(P_0)$,...
ja vaatleme determinante

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix},\ A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix},\ldots \qquad (56)$$

Piisav tunnus. Kaks korda diferentseeruval funktsioonil f on statsionaarses punktis P_0 lokaalne maksimum, kui determinandid (56) on vaheldumisi negatiivsed ja positiivsed, s.o.

$$A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0, \ldots,$$

ja lokaalne miinimum, kui determinandid (56) on kõik positiivsed, s.o.

$$A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ A_3 > 0, \ldots .$$

Piisav tunnus kahe muutuja funktsiooni jaoks. Kaks korda diferentseeruval funktsioonil $z = f(x,y)$ statsionaarses punktis P_0

a) on lokaalne maksimum, kui $A_1 < 0$, $A_2 > 0$;

b) on lokaalne miinimum, kui $A_1 > 0$, $A_2 > 0$;

c) ei ole lokaalset ekstreemumit, kui $A_2 < 0$;

d) ekstreemumi olemasolu jääb lahtiseks, kui $A_2 = 0$.

Üldiselt, kui piisavate tunnuste põhjal ei ole võimalik funktsiooni kriitilises punktis P_0 ekstreemumi olemasolu või selle puudumist kindlaks teha, siis kontrollitakse vahetult võrratuste (55) kehtivust P_0 ümbruses.

Näide 15. Leida funktsiooni

$$z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

lokaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Funktsioon z ja osatuletised on pidevad kogu xy-tasandil. Leiame funktsiooni z kriitilised punktid. Selleks arvutame osatuletised:

$$z_x = e^{2x+3y}(16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y),$$
$$z_y = e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y).$$

Võrdustades need osatuletised nulliga, saame süsteemi

$$\begin{cases} 8x^2 - 6xy + 3y^2 + 8x - 3y = 0 \\ 8x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x + 2y = 0, \end{cases}$$

kust näeme, et funktsiooni z kriitilisteks punktideks on kaks statsionaarset punkti

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}).$$

Seega funktsioonil z võib olla lokaalne ekstreemum vaid nendes punktides P_0 ja P_1.

Ekstreemumi olemasolu kindlakstegemiseks nendes punktides rakendame nüüd ekstreemumi piisavat tunnust kahe muutuja funktsiooni jaoks. Selleks arvutame teised osatuletised:

$$z_{xx} = 4e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 16x - 6y + 4),$$
$$z_{xy} = 6e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 6x - y - 1),$$
$$z_{yy} = 3e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 12x + 12y + 2).$$

Punktis P_0 on

$$a_{11} = z_{xx}(P_0) = 16, \quad a_{12} = a_{21} = z_{xy}(P_0) = -6,$$
$$a_{22} = z_{yy}(P_0) = 6$$

ja seega

$$A_1 = 16 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} > 0.$$

Järelikult punktis P_0 on funktsioonil z lokaalne miinimum

$$\min z = z(P_0) = 0.$$

Punktis P_1 on

$$a_{11} = 14e^{-2}, \ a_{12} = a_{21} = -9e^{-2}, \ a_{22} = \tfrac{3}{2}e^{-2},$$

ja seega

$$A_1 > 0, \ A_2 = e^{-4}\begin{vmatrix} 14 & -9 \\ -9 & 3/2 \end{vmatrix} < 0.$$

Järelikult punktis P_1 funktsioonil z lokaalset ekstreemumit ei ole.

Ülesanded.

Leida funktsiooni z kriitilised punktid.

840. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

841. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

842. $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

843. $z = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$

844. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$

$$D = \left\{0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

845. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$

Leida järgmiste funktsioonide z lokaalsed ekstreemumid.

846. $z = x^2 + (y - 1)^2$

847. $z = x^2 - (y - 1)^2$

848. $z = x^3 + y^2 - 3x$

849. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

850. $z = 10 - 3x^2 - 2y^2 + 2xy$

851. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

852. $z = (5 - 2x + y)\exp(x^2 - y)$

853. $z = (5x + 7y - 25)\exp(-x^2 - xy - y^2)$

854. $z = \sqrt{x - 1} + \sqrt{y + 2}$ 855. $z = xy \ln(x^2 + y^2)$

856. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 10$

857. $4x = 2(x^3 + z^2) + 3(1 + 2y^2) - 8(y - xz)$

858. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$,

$D = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x,y \leqslant \pi\}$

Leida järgmiste funktsioonide u lokaalsed ekstreemumid.

859. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

860. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$,

$D = \{(x,y,z)\colon x,y,z > 0\}$

861. $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$

862*. $u = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3}$

<u>Mitme muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid</u>. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0 <u>globaalne maksimum</u> ehk maksimaalne väärtus (<u>globaalne miinimum</u> ehk minimaalne väärtus), kui võrratused (55) kehtivad iga punkti $P \in D$ korral.

Kui funktsioon f on pidev ja piirkond D on kinnine ja tõkestatud, siis funktsioonil f on piirkonnas D globaalsed ekstreemumid olemas ja nende leidmiseks toimime järgmiselt:

1) leiame funktsiooni f kõik kriitilised punktid piirkonna D sees ja arvutame neis funktsiooni väärtused;

2) leiame funktsiooni f suurima ja vähima väärtuse piirkonna D rajapunktides;

3) valime saadud arvudest suurima ja vähima. Esimene neist on funktsiooni f globaalne maksimum ja teine globaalne miinimum piirkonnas D.

Kui piirkond D ei ole kinnine või on tõkestamata, siis funktsioonil f võib globaalne ekstreemum puududa. Sel korral tuleb globaalsete ekstreemumite olemasolu uurida vahetult definitsiooni tingimuste (55) põhjal.

Näide 16. Leida funktsiooni

$$z = x^2 - y^2$$

globaalsed ekstreemumid ringis

$$D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Lahendus. Leiame piirkonna D sees asetsevad kriitilised punktid ja funktsiooni väärtused nendes. Et $z_x = 2x$, $z_y = -2y$, siis funktsioonil z on vaid üks kriitiline (statsionaarne) punkt $P_0 = (0,0)$. Seega

$$z(P_0) = 0.$$

Leiame funktsiooni suurima ja vähima väärtuse rajajoonel $x^2 + y^2 = 4$. Selleks on otstarbekohane kirjutada selle ringjoone võrrand parameetrilisel kujul järgmiselt

$$\begin{cases} x = 2\cos(t/2) \\ y = 2\sin(t/2) \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi].$$

Siis funktsiooni z väärtused rajajoonel on

$$z(t) = 4(\cos^2 \tfrac{t}{2} - \sin^2 \tfrac{t}{2}) = 4\cos t.$$

Näeme, et on vaja leida ühe muutuja t funktsiooni z globaalsed ekstreemumid lõigul $[0, 4\pi]$. Selleks arvutame

$$\dot{z} = -4\sin t$$

ja seega kriitilised punktid on

$$t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,$$

milles funktsiooni z väärtused on

$$z(0) = 4,\ z(\pi) = -4,\ z(2\pi) = 4,\ z(3\pi) = -4,\ z(4\pi) = 4.$$

Seega rajajoonel on funktsiooni z suurimaks väärtuseks 4 ja vähimaks väärtuseks -4.

Seega funktsioonil z ekstremaalsed väärtused rajajoonel on punktides

$$P_1 = (2\cos 0, 2\sin 0) = (2,0),$$

$$P_2 = (2\cos \tfrac{\pi}{2}, 2\sin \tfrac{\pi}{2}) = (0,2),$$

(ja analoogiliselt arvutades)

$$P_3 = (-2,0),\ P_4 = (0,-2),\ P_5 = (2,0) = P_1.$$

Võrreldes funktsiooni z väärtusi saadud punktides $P_0,\ldots,P_4$, näeme, et funktsioonil z globaalsed ekstreemumid asetsevad rajajoonel, seejuures globaalne miinimum punktides P_2 ja P_4 ning globaalne maksimum punktides P_1 ja P_3.

Kokkuvõttes saame:

$$\min_{P\in D} z = z(0,\pm 2) = -4,\quad \max_{P\in D} z = z(\pm 2,0) = 4.$$

Suurimat ja vähimat väärtust ringjoonel võime leida ka järgmisel viisil. Nimelt rajajoonel on $y^2 = 4 - x^2$, kus $-2 \leqslant x \leqslant 2$, ja järelikult funktsiooni z väärtused rajajoonel on

$$z(x) = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4.$$

Seega tuleb leida ühe muutuja funktsiooni

$$\begin{cases} z(x) = 2x^2 - 4 \\ X = [-2,2] \end{cases}$$

globaalsed ekstreemumid. Sel funktsioonil on üks statsionaarne punkt $x = 0$. Järelikult on vaja leida väärtused $z(x)$ punktides $x = 0$, $x = -2$ ja $x = 2$. Saame

$$z(0) = -4,\ z(-2) = 4,\ z(2) = 4,$$

mis ongi ekstremaalseteks väärtusteks rajajoonel. Need asetsevad ringi D punktides $(x, \pm\sqrt{4 - x^2})$, kus $x = 0, \pm 2$. Seega jõuame jälle sama tulemuse juurde.

Näide 17. Leida funktsiooni

$$z = x^2y(4 - x - y)$$

globaalsed ekstreemumid kinnises kolmnurgas D külgedega

$$x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6.$$

Lahendus. Funktsioon z ja tema osatuletised on pidevad kolmnurgas D. Leiame funktsiooni kriitilised punktid, mis asetsevad kolmnurga D sees, ja funktsiooni väärtused nendes. Selleks võrdustame osatuletised

$$z_x = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(8 - 3x - 2y),$$

$$z_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4 - x - 2y)$$

nulliga. Tulemuseks saame, et funktsioonil z on kriitiliseks punktiks kolmnurga sees statsionaarne punkt $P_0 = (2,1)$, kus

$$z(P_0) = 4.$$

Rajajoontel $x = 0$ ja $y = 0$ on

$$z(0,y) = 0,\ z(x,0) = 0.$$

Rajajoonel $x + y = 6$ funktsiooni z väärtused on

$$z(x) = x^2(6 - x)(4 - 6) = -12x^2 + 2x^3, \text{ kus } 0 \leqslant x \leqslant 6.$$

Ekstremaalsete väärtuste leidmiseks võrdustame tuletise

$$z'(x) = -24x + 6x^2 = 6x(x - 4)$$

nulliga. Seega kriitiliseks punktiks on veel

$$P_1 = (4,2),$$

kus

$$z(P_1) = -64.$$

Seega globaalne maksimum asetseb kolmnurga D sees punktis P_0 ja globaalne miinimum rajajoonel punktis P_1. Seega

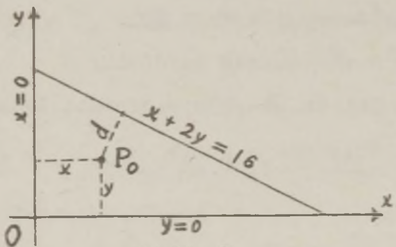
$$\min_D z = z(4,2) = -64, \quad \max_D z = z(2,1) = 4.$$

<u>Näide 18</u>. Tasandil Oxy leida punkt, mille kauguste ruutude summa kolmest sirgest

$$x = 0,\ y = 0 \text{ ja } x + 2y = 16$$

oleks minimaalne.

<u>Lahendus</u>. Olgu otsitav punkt $P_0 = (x,y)$. Siis, nagu joniselt 6 näeme, punkti P_0 kaugus sirgest $x = 0$ on x, sirgest $y = 0$ on y ja (analüütilise geomeetria tuntud valemi põhjal) kaugus d sirgest $x+2y = 16$ on



Joon. 6

$$d = \frac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{1 + 2^2}}.$$

Seega tuleb leida funktsiooni

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x + 2y - 16)^2$$

globaalne miinimumpunkt vaadeldavate sirgetega piiratud kolmnurga sees. Leiame funktsiooni kriitilised punktid kolmnurga sees. Saame süsteemi

$$\begin{cases} z_x = 2x + \frac{2}{5}(x + 2y - 16) = 0 \\ z_y = 2y + \frac{4}{5}(x + 2y - 16) = 0, \end{cases}$$

mille lahendamine annab punkti $P_0 = (\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$. Et see on ainuke kriitiline punkt ja ülesandel on lahend ilmselt olemas, siis leitud punkt P_0 ongi ülesande lahendiks.

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

863. $z = x^2 - y^2 + 2$ ringis $x^2 + y^2 \leq 1$

864. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ kinnises ristkülikus D, mis on piiratud sirgetega $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$

865. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^3 + 3y^2)$ ringis $x^2 + y^2 \leq 4$

866. $z = \sin x + \sin y + \sin(x - y)$ ristkülikus

$$D = \{(x,y):\ 0 \leq x, y \leq \pi/2\}$$

867. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ kolmnurgas

$$D = \{(x,y):\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x+y \geq -3\}$$

868. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ kinnises piirkonnas D, mis on piiratud joontega $y = x^2$ ja $y = 4$

869. $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x - 1)^2}$ piirkonnas $y^2 \leq x \leq 2$

870. $u = x + y + z$ piirkonnas $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

871. Jaotada arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

872. Esitada arv 81 nelja positiivse arvu korrutisena nii, et nende summa oleks minimaalne.

873. Antud kerasse, mille raadius on R, joonestada suurima ruumalaga risttahukas.

874. Kõikidest risttahukatest, millel on antud ruumala, leida see, mille täispindala on minimaalne.

875. Antud püstringkoonusesse joonestada maksimaalse ruumalaga risttahukas.

876. Leida vähim kaugus parabooli $y = x^2$ ja sirge

$x - y = 2$ vahel.

877. Kõikidest ühe ja sama alusega ning tipunurgaga kolmnurkadest leida see, mille pindala on suurim.

878. Kõikidest antud perimeetriga $2p$ kolmnurkadest leida see, millel on maksimaalne pindala.

879. Ellipsoidi joonestada maksimaalse ruumalaga risttahukas.

880. Leida antud perimeetriga $2p$ kolmnurk, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

881. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste korrutis oleks maksimaalne?

882. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste summa oleks maksimaalne?

883. Näidata, et mittenegatiivsete arvude $x_1, \ldots, x_m$ geomeetriline keskmine ei ületa aritmeetilist keskmist.

§ 6. Tinglik ekstreemum.

Olgu antud mitme muutuja funktsioon

$$f(P) = f(x,y,\ldots)$$

määramispiirkonnaga D.

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis $P_0 \in D$ tinglik ehk relatiivne maksimum (relatiivne miinimum), kui võrratused

$$f(P) \leqslant f(P_0) \quad (\text{vastavalt } f(P) \geqslant f(P_0)) \qquad (55)$$

kehtivad punkti P_0 ümbruse selles osas, mille punktid rahuldavad lisatingimusi

$$F_1(P) = 0,\ F_2(P) = 0, \ldots \tag{57}$$

Punkti P_o nimetatakse tinglikuks ehk relatiivseks ekstreemumpunktiks, kusjuures nõutakse, et ka punkt P_o rahuldaks lisatingimusi (57).

Ühe ja kahe lisatingimusega tingliku ekstreemumi korral tüüpilised ülesanded on järgmised.

Ülesanne I. Leida funktsiooni

$$u = f(x,y,\ldots)$$

tinglik ekstreemum lisatingimusel

$$F(x,y,\ldots) = 0.$$

Ülesanne II. Leida funktsiooni

$$u = f(x,y,\ldots)$$

tinglik ekstreemum lisatingimustel

$$F(x,y,\ldots) = 0,\ G(x,y,\ldots) = 0.$$

Seega, kui f on kahe muutuja funktsioon, siis ülesanne I taandub järgmiseks: leida funktsiooni $z = f(x,y)$ tinglik ekstreemum lisatingimusel $F(x,y) = 0$. Kui aga f on kolme muutuja funktsioon, siis ülesanne I on järgmine: leida funktsiooni $u = f(x,y,z)$ tinglik ekstreemum lisatingimusel $F(x,y,z) = 0$; ja ülesanne II on järgmine: leida funktsiooni $u = f(x,y,z)$ tinglik ekstreemum lisatingimustel $F(x,y,z) = 0$ ja $G(x,y,z) = 0$.

Tingliku ekstreemumi ülesanded, kus on enam kui kaks lisatingimust, sõnastatakse analoogiliselt. Järgnevas vaatleme tingliku ekstreemumi leidmise meetodeid ülesannete I ja II korral.

I. Taandamine harilikule ekstreemumile. Seda meetodit ülesande I lahendamiseks kahe muutuja funktsiooni f korral saab kasutada, kui lisatingimusest $F(x,y) = 0$ saab avaldada ühe muutuja teise kaudu. Kui näiteks õnnestub avaldada $y = y(x)$, siis paigutame ta funktsiooni f, saame

$$z = f(x,y) = f(x,y(x)).$$

Nüüd tuleb leida ühe muutuja x funktsiooni $f(x,y,(x))$ harilik (s.o. vastavalt ülesandele kas lokaalne või globaalne) ekstreemum. Kui sel funktsioonil on kohal x_0 maksimum (miinimum), siis punktis $P_0 = (x_0,y(x_0))$ on funktsioonil f tinglik maksimum (vastavalt tinglik miinimum).

Analoogiliselt toimitakse kolme ja enam muutuja funktsiooni korral.

Taandamisel harilikule ekstreemumile võivad mõned tingliku ekstreemumi punktid avastamata jääda (vt. ülesanne nr. 908).

2. Lagrange'i meetod. Ülesande I lahendamiseks tuleb koostada järgmine Lagrange'i funktsioon:

$$\Phi(x,y,\ldots,\lambda) = f(x,y,\ldots) + \lambda F(x,y,\ldots) \qquad (58)$$

ja lahendada süsteem

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Phi_\lambda = F(x,y,\ldots) = 0. \end{cases} \qquad (59)$$

Olgu $(x_0,y_0,\ldots,\lambda_0)$ süsteemi (59) lahend, siis punkti $P_0 = (x_0,y_0,\ldots)$ nimetatakse funktsiooni f tinglikuks statsionaarseks punktiks. Neid punkte P_0, mis on tinglikud statsionaarsed või milles funktsioonide f ja F osatuletised ei ole pidevad või F osatuletised on korraga nullid, nimetatakse funktsiooni f <u>tinglikeks kriitilisteks punktideks</u>.

<u>Tarvilik tunnus</u>. Funktsioonil f tinglik ekstreemum võib olla vaid tinglikus kriitilises punktis P_0.

Tingliku ekstreemumi olemasolu uurimiseks tinglikus kriitilises punktis P_0 kasutatakse järgmist tunnust.

<u>Piisav tunnus</u>. Kui funktsioonil (58) leitud λ_0 korral on punktis P_0 lokaalne maksimum (lokaalne miinimum), siis funktsioonil f on selles punktis P_0 tinglik maksimum (vastavalt tinglik miinimum).

Kui piisav tunnus ei ole rakendatav antud ülesande korral, siis tingliku ekstreemumi olemasolu punktis P_0 jääb lahtiseks ja tuleb kasutada teisi meetodeid.

Ülesande II lahendamiseks tuleb koostada järgmine Lagrange'i funktsioon:

$$\Phi(x,y,\dots,\lambda,\mu) =$$
$$= f(x,y,\dots) + \lambda F(x,y,\dots) + \mu G(x,y,\dots) \qquad (60)$$

ja lahendada süsteem

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \dots\dots \\ \Phi_\lambda = F(x,y,\dots) = 0 \\ \Phi_\mu = G(x,y,\dots) = 0. \end{cases} \qquad (61)$$

Olgu $(x_0,y_0,\dots,\lambda_0,\mu_0)$ süsteemi (61) lahend. Siis jällegi punkti $P_0 = (x_0,y_0,\dots)$ nimetatakse funktsiooni f <u>tinglikuks statsionaarseks punktiks</u>. Samuti neid punkte P_0, mis on tinglikud statsionaarsed või milles funktsioonide

f, F ja G osatuletised ei ole pidevad või maatriksi

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

kõik kolm jakobiaani on korraga nullid, nimetatakse funktsiooni f tinglikeks kriitilisteks punktideks.

Tarvilik tunnus. Funktsioonil f tinglik ekstreemum võib olla vaid tinglikus kriitilises punktis P_0.

Tingliku ekstreemumi olemasolu uurimiseks tinglikus kriitilises punktis P_0 kasutatakse järgmist piisavat tunnust.

Piisav tunnus. Kui funktsioonil (60) leitud λ_0 ja μ_0 korral on punktis P_0 lokaalne maksimum (lokaalne miinimum), siis funktsioonil f on selles punktis P_0 tinglik maksimum (vastavalt tinglik miinimum).

3. Smith'i meetod. Ülesande I lahendamiseks kahe muutuja funktsiooni f korral tuleb leida funktsiooni f tinglikud statsionaarsed punktid $P_0 = (x_0, y_0)$, s.t. lahendada süsteem (59). Seejärel koostatakse jakobiaanid

$$J = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = f_x F_y - F_x f_y$$

ning

$$J_1 = \begin{vmatrix} J_x & J_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}.$$

Piisav tunnus. Kui tinglikus statsionaarses punktis P_0 on

$$J_1 < 0 \qquad (J_1 > 0),$$

siis punktis P_0 on funktsioonil f tinglik maksimum (vastavalt tinglik miinimum).

Juhul kui selles punktis P_0 on

$$J_1 = J_2 = \ldots = J_{n-1} = 0, \; J_n \neq 0,$$

kus

$$J_n = \begin{vmatrix} (J_{n-1})_x & (J_{n-1})_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix},$$

siis kasutatakse järgmist üldisemat tunnust.

<u>Üldine piisav tunnus</u>. Kui n on paaritu arv ja punktis P_0 on

$$J_n < 0 \qquad (J_n > 0),$$

siis selles punktis P_0 on funktsioonil f tinglik maksimum (vastavalt tinglik miinimum).

Kui n on paarisarv, siis kohal P_0 tinglikku ekstreemumit ei ole.

Ülesande II lahendamiseks tuleb jälle leida funktsiooni f tinglikud statsionaarsed punktid $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, s.t. lahendada süsteem (61). Seejärel koostatakse jakobiaanid

$$D = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

ning

$$D_1 = \begin{vmatrix} D_x & D_y & D_z \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}.$$

<u>Piisav tunnus</u>. Kui tinglikus statsionaarses punktis

P_0 on

$$D_1 < 0 \quad (D_1 > 0),$$

siis punktis P_0 on tinglik maksimum (vastavalt tinglik miinimum).

Juhul, kui selles punktis P_0 on

$$D_1 = D_2 = \ldots = D_{n-1} = 0, \; D_n \neq 0,$$

kus

$$D_n = \begin{vmatrix} (D_{n-1})_x & (D_{n-1})_y & (D_{n-1})_z \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix},$$

siis kasutatakse järgmist tunnust.

<u>Üldine piisav tunnus</u>. Kui n on paaritu arv ja punktis P_0 on

$$D_n < 0 \quad (D_n > 0),$$

siis selles punktis P_0 on tinglik maksimum (vastavalt tinglik miinimum).

Kui n on paarisarv, siis kohal P_0 tinglikku ekstreemumit ei ole.

<u>Näide 19</u>. Leida funktsiooni

$$z = x^m + y^m \quad (m > 1)$$

tinglik ekstreemum sirgel

$$x + y = 6.$$

<u>Lahendus</u>. Kasutame Lagrange'i meetodit. Moodustame Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi(x,y,\lambda) = x^m + y^m + \lambda(x + y - 6).$$

Leiame funktsiooni z tinglikud kriitilised punktid. Selleks moodustame süsteemi

$$\begin{cases} \Phi_x = mx^{m-1} + \lambda = 0 \\ \Phi_y = my^{m-1} + \lambda = 0 \\ \Phi_\lambda = x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

Selle süsteemi lahend on

$$x_0 = y_0 = \sqrt[m-1]{\frac{-\lambda}{m}} = 3, \quad \lambda_0 = -m\,3^{m-1}.$$

Seega tinglik ekstreemum võib olla ainult punktis

$$P_0 = (3,3).$$

Kasutame piisavat tunnust. Selleks arvutame

$$\Phi_{xx} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \Phi_{yy} = m(m-1)y^{m-2}, \quad \Phi_{xy} = 0.$$

Punktis P_0 on

$$a_{11} = m(m-1)3^{m-2}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = a_{11},$$

kust

$$A_1 = a_{11} > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} m(m-1)3^{m-2} & 0 \\ 0 & m(m-1)3^{m-2} \end{vmatrix} > 0.$$

Seega on funktsioonil z punktis P_0 olemas tinglik miinimum sirgel F, s.o.

$$\text{rel min } z = z(3,3) = 2\cdot 3^m.$$

Näide 20. Leida funktsiooni

$$u = x - 2y + 2z$$

tinglik ekstreemum lisatingimusel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Lahendus. Leiame funktsiooni u tinglikud statsionaarsed punktid. Selleks koostame Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

ja selle abil süsteemi

$$\begin{cases} \Phi_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \Phi_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ \Phi_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ \Phi_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Viimase süsteemi lahenditeks on

$$(1,-2,2,-1/2) \quad \text{ja} \quad (-1,2,-2,1/2).$$

Seega tinglik ekstreemum võib olla vaid punktides

$$P_0 = (1,-2,2) \quad \text{ja} \quad P_1 = (-1,2,-2).$$

Kasutame piisavat tunnust. Selleks arvutame

$$\Phi_{xx} = \Phi_{yy} = \Phi_{zz} = 2\lambda, \Phi_{xy} = \Phi_{xz} = \Phi_{yz} = 0.$$

Punkti P_0 korral oli $\lambda = -1/2$, seega selles punktis on

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1, \; a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

kust

$$A_1 = -1, \; A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \; A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Järelikult punktis P_0 on funktsioonil u tinglik maksimum.

Punkti P_1 korral oli $\lambda = 1/2$, seega selles punktis on

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, \; a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

kust

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1.$$

Järelikult punktis P_1 on funktsioonil u tinglik miinimum.

Vastuseks saame

$$\text{rel max } u = u(1,-2,2) = 9,$$

$$\text{rel min } u = u(-1,2,-2) = -9.$$

Näide 21. Leida funktsiooni

$$z = x^2 - y^2$$

tinglik ekstreemum ringjoonel

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Lahendus. Näites 15 on see ülesanne juba lahendatud harilikule ekstreemumile taandamise meetodiga. Rakendame selle ülesande lahendamiseks Lagrange'i meetodit. Selleks moodustame Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

ja leiame funktsiooni z tinglikud kriitilised punktid. Selleks koostame süsteemi

$$\begin{cases} \Phi_x = 2x(\lambda + 1) = 0 \\ \Phi_y = 2y(\lambda - 1) = 0 \\ \Phi_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

mille lahendamisel saame

$$\begin{cases} x = \mp 2 \\ y = 0 \\ \lambda = -1, \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = \mp 2 \\ \lambda = 1 . \end{cases}$$

Seega tinglik ekstreemum võib olla punktides

$$P_1 = (2,0),\ P_2 = (0,2),\ P_3 = (-2,0),\ P_4 = (0,-2).$$

Rakendame neis punktides piisavat tunnust. Selleks arvutame

$$\Phi_{xx} = 2 + 2\lambda,\ \Phi_{yy} = -2 + 2\lambda,\ \Phi_{xy} = 0.$$

Punktides P_1 ja P_3 korral oli $\lambda = -1$, siis

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = a_{21} = 0,\ a_{22} = -4,$$

kust

$$A_1 = 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega piisav tunnus punktide P_1 ja P_3 korral ei ole rakendatav. Sama tulemuse saame ka punktide P_2 ja P_4 korral. Seega Lagrange'i meetod selle ülesande lahendamiseks ei ole rakendatav.

Rakendame Smith'i meetodit. Selleks koostame jakobiaanid

$$J = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy + 4xy = 8xy$$

ja

$$J_1 = \begin{vmatrix} J_x & J_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8y & 8x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 16y^2 - 16x^2 = 16(y^2 - x^2).$$

Punktides P_1 ja P_3 on $J_1 = 16(-4) < 0$ ja seega nendes on tinglik maksimum. Punktides P_2 ja P_4 on $J_1 = 16 \cdot 4 > 0$ ja seega nendes on tinglik miinimum. Sama saime ka näites 16, s.o.

$$\text{relmin } z = z(0,\mp 2) = -4, \quad \text{relmax } z = z(\mp 2,0) = 4.$$

Ülesanded.

Leida harilikule ekstreemumile taandamise meetodiga järgmiste funktsioonide z tinglikud lokaalsed ekstreemumid antud joonel.

884. $z = xy$, $\quad y = 2x^2 - 3x$

885. $z = 1 - xy$, $\quad y - x = 0$

886. $z = x(y - 3)$, $\quad y = x^2$

887. $z = x^2 + \sin y^2$, $\quad x^2 + y^2 = \pi$

Leida Lagrange'i või Smith'i meetodiga järgmiste funktsioonide z tinglikud ekstreemumid antud joonel.

888. $z = e^{xy}$, $x + y = 1$

889. $z = x^3 + y^3$, $x + y = 2$

890. $z = xy$, $x^2 + y^2 = 8$

891. $z = xy$, $x - y = 0$

892. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

893. $z = \cos^2 x + 2\cos^2 y$, $4x - 4y + \pi = 0$

894. $z = x^2 - y^2 + 1$, $x^2 + y^2 = 1$

895. $z = x - y$, $\begin{cases} \tan x = 3\tan y \\ 0 \leqslant x,y \leqslant \pi/2 \end{cases}$

896. $z = 6 - 4x - 3y$, $x^2 + y^2 = 1$

897. $z = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$, $x^2 + y^2 = 1$

898. $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Leida järgmiste funktsioonide u tinglikud ekstreemumid antud pinnal

899. $u = x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ $(x,y,z > 0)$

900. $u = x - 2y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

901. $u = x^2 + y^2 + z^2$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

902. $u = xy^2z^3$, $x + y + z = 12$ $(x,y,z > 0)$

903. $u = xyz$, $x + y + z = 5$

904. $u = xyz$, $xy + yz + xz = 8$

905. $u = \cos x \cos y \cos z$, $x + y + z = \pi$

Leida järgmiste funktsioonide u tinglikud ekstreemumid antud joonel.

906. $u = xyz$, $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + xz = 8 \end{cases}$

907. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

908. Leida funktsiooni

$$z = y \sin y - 4x$$

tinglik ekstreemum joonel

$$y \sin y - x^3 - x = 0$$

harilikule ekstreemumile taandamise meetodiga ja seejärel Smith'i meetodiga. Selgitada erinevate vastuste põhjus.

909. Tasandil $3x - 2z = 0$ leida punkt, mille kauguste ruutude summa punktidest (1,1,1) ja (2,3,4) on minimaalne.

910. Ellipsil $9x^2 + 4y^2 = 36$ leida punktid, mis on minimaalsel ja maksimaalsel kaugusel sirgest $3x - y - 9 = 0$.

911. Leida minimaalse pindalaga risttahukas, kui tema ruumala on V.

912. Leida maksimaalse ruumalaga risttahukas, kui tema pindala on S.

913. Leida antud ruumalaga korrapärane kolmnurkne püramiid, mille servade pikkuste summa on minimaalne.

914. Antud ellipsi ümber joonestada minimaalse pindalaga kolmnurk, mille alus on paralleelne ellipsi suurema teljega.

V A S T U S E D

I peatükk

§ 1.

4. $x^2+4y^2 = 4$, lahtine. 5. $y = x(x\geq 0)$; $y = 0(x\geq 0)$. 6. $y=x^2(0\leq x\leq 1)$, $y=\sqrt{x}(0\leq x\leq 1)$, lahtine. 7. $x^2-4y^2=4$, kinnine. 8. $4x^2-y^2=4$, lahtine. 9. $x^2+y^2=4$, $y=1/x(-\sqrt{2+\sqrt{3}}\leq x \leq -\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}\leq x\leq\sqrt{2+\sqrt{3}})$, lahtine. 10. $y^2=x^3/2-x(-2^{1/2}\leq x\leq 2^{1/2})$, $x^2+y^2=4$. 11. $-\infty < x < \infty$, $y\geq 0$, kinnine. 12. $x^2+y^2\leq 4$, kinnine. 13. $x^2+y^2<4$, lahtine. 14. $x>-y$, lahtine. 15. $\{(x,y): x>0,\ x\neq 1,\ y<-x\}$, lahtine. 16. $\{(x,y): x=y\}$, kinnine. 17. $\{(x,y): -1\leq y\leq 1\}$, kinnine. 18. $\{(x,y): -1\leq y\leq 1,\ -1\leq x\leq 1\}$; kinnine. 19. $\{(x,y): -1\leq x\leq 1.;\ y\leq -1$ või $y\geq 1\}$, kinnine. 20. $\{(x,y): a^2\leq x^2+y^2\leq 2a^2\}$, kinnine. 21. $\{(x,y): x\leq x^2+y^2<2x\}$. 22. $\{(x,y): -1\leq x^2+y\leq 1\}$, kinnine. 23. $\{(x,y): x^2>y\}$, lahtine. 24. $\{(x,y): x>-1,\ y>-1,\ y\neq 0\}$, lahtine. 25. $\{(x,y): 2<x^2+y^2<3\}$, lahtine. 26. $\{(x,y): 2<x^2+y^2\leq 4,\ x^2+y^2\neq 3\}$. 27. $\{(x,y): 2n\pi\leq x\leq (2n+1)\pi,\ y>0$ ja $(2n+1)\pi\leq x\leq (2n+2)\pi,\ y\leq 0$, n täisarv$\}$, kinnine. 28. Kogu xy-tasand. 29. $\{(x,y): x^2+y^2=k\pi,\ k=0,1,2,\ldots\}$, kinnine. 30. $\{(x,y): 2k\pi\leq x^2+y^2\leq (2k+1)\pi\}$, kinnine. 31. $\{(x,y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2\geq y\}$, kinnine. 32. $\{(x,y): -x\leq y\leq x$, kui $x>0$; $x\leq y\leq -x$, kui $x<0\}$. 33. $\{(x,y): y+2x\geq 0$, kui $y>0$; $y+2x\leq 0$, kui $y<0\}$ 34. Kogu xy-tasand, välja arvatud punkt $(0,0)$ ja joon $2x^2+4y^2=1$.

35. $x>1$ korral $-1\leq y\leq x-2$, $x<1$ korral $x-2\leq y\leq -1$.

36. $2k\leq x\leq 2k+1$ korral $2j\leq y\leq 2j+1$,

$2k+1\leq x\leq 2(x+1)$ korral $2j+1\geq y\leq 2j$, kus

$k,j=0;\ \mp1;\ \mp2,\ldots$, kinnine.

37. $2k \leqslant x \leqslant 2k+1$ korral $2j \leqslant y \leqslant 2j+1$, $2k+1 \leqslant x \leqslant 2(k+1)$ korral $2j+1 \leqslant y \leqslant 2j$, kus $k,j=0,1,2,3,$ kinnine.

38. $(4k-1)/2 < x+y < (4k+1)2$ korral $(4j-1)/2 < x-y < (4j+1)/2$ $(4k+1)/2 < x+y < (4k+3)/2$ korral $(4j+1)/2 < x-y < (4j+3)/2$, kus $k,j=0,\mp1,\ldots$, lahtine.

39. Rajajoonega $y^4+x^4+2x^2y^2+y^2-x^2=0$ piirkonna sisemus, lahtine. 40. $(-\infty,\infty) \times [0,2] \setminus (0,0)$. 41. Erinevad. 42. Erinevad. 43. Erinevad. 44. Samad. 45. Erinevad. 46. Erinevad. 47. Samad. 48. Erinevad. 49. Erinevad, sest funktsioon $g(x,y)$ ei ole kohal $(0,0)$ määratud, kuna selles punktis tema esimene tegur ei eksisteeri. 50. $x>0$, $y>0$. 51. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. 52. $\max\,(0,(4k-1)^2 \cdot \pi^2/4) < xy < (4k+1)^2 \pi^2/4$, kus $k=0,1,2,\ldots$. 53. Joon $xy=x+y$. 54. $f(A)=5/4$; $f(B)=-13/12$; $f(C)=-65/64$. 55. $f(A)=0$; $f(B)=-2$; $F(C)=5/3$. 56. $f(A)=-3$; $f(B)=-1/4$; $f(C)=(a^2+1)/(a^2-1)$. 57. $f(A)=16$; $f(B)=f(C)=2$. 58. $f(A)=f(B)=f(C)=1$. 59. $f(A)=-1$, $f(B)=1$, $f(C)=3/4$. 60. $f(A)=-1$, $f(B)=3/4$, $f(C)=-1{,}5$. 61. $f(A)=1$, $f(B)=3/4$, $f(C)=1{,}5$. 62. $f(A)=1$, $f(B)=0{,}2$, $f(C)=0$. 63. $f(A)=0$, $f(B)=0$, $f(C)=-\ln 2$. 64. $f(A)=0$, $f(B)=0$, $f(C)=0$. 65. $f(A)=3$, $f(B)=\pi$, $f(C)=-\pi/4$. 66. $(y^2-x^2)/2xy$, $(x^2-y^2)/2xy$, $(y^2-x^2)/2xy$, $2xy/(x^2-y^2)$. 67. $1+y$, $x+1/y$. 68. $f(C)=1+x-x^2$. 69. $f(C)=a^4/(1-a^2)$. 70. $f(C)=\pi/2$. 71. $f(x)=(x^2+1)^{1/2}$. 72. $f(x,y)=(x^2-xy)/2$. 73. $f(x,y)=x^2(1-y)/(1+y)$. 74. $f(x)=x^2+2x$, $z(x,y)=x+\sqrt{y}-1$. 75. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $z(x,y)=|x|\,(1+y^2/x^2)^{1/2}$. 76. $f(x)=x^2-x$, $z(x,y)=(x-y)^2+2y$.

77. $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$. 78. $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$. 79. $x\geq 0,\ y\geq 0$. 80. $x>0,\ y>0,\ z>0$. 81. $y>0,\ z>0$, kui $x>0$; $y<0,\ z>0$ kui $x<0$. 82. $z>0$, kui $x,y>0$ või $y,x<0$; $z<0$, kui $x<0,\ y>0$ või $x>0,\ y<0$. 83. $x>0,\ y>0,\ z>1$. 84. $-1\leq x,y,z\leq 1$. 85. $x^2+y^2+z^2\leq 4$. 86. $x^2+2y^2+3z^2<4$. 87. $1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4$. 88. $4<x^2+y^2+z^2\leq 9$. 89. $0<z\leq 1$, kui $x\leq 0$; $z\geq 1$, kui $x>0$. 90. $0<z<1$, kui $x<0$; $z>1$, kui $x>0$. 91. $z^2+z-1\geq 0$. 92. $x^2+y^2+z^2=1$. 93. $\emptyset$. 94. $|x|\leq 1,\ |y|\leq 1/2,\ 0\leq |z|\leq 1/3$. 95. Kui $-1<x\leq 1$, siis $|y|\leq 1,\ |z|\leq 1$; kui $x=-1$, siis $-1\leq y\leq 1$. 96. $0<x,y<1$. 97. $xy<1,\ x\neq -y,\ |z|\leq 1$. Kasutada valemit $\arctan x+\arctan y=\arctan (x+y)/(1-xy)$. 98. Kogu ruum, välja arvatud punktid, mille kõik koordinaadid on paaritud täisarvud. 100. $f(A)=1,\ f(B)=1{,}5$. 101. $f(A)=2/3,\ f(B)=-4/3$. 102. $f(A)=1{,}25,\ f(B)=8{,}875$. 103. $f(A)=e+2,\ f(B)=e$. 104. $f(A)=0,\ f(B)=-1/4$. 105. 4. 106. $\cos^{-2}x^4$. 107. 0. 108. $\pi/2$. 109. $f(x,y,z)=\ln x+y/z-z$. 110. $f(x,y,z)=x(x-y)/2+z^2$. 111. $f(x,y,z)=x^2-z^2+\sqrt{e^y}$. 112. $\sqrt[4]{x}+(z^4-y^2)/z^2$.

113. $f(x,y)=(1-x)^2-y-\sqrt{2}$.

$h(x,y,z)=x-y-\sqrt{2z}+\sqrt{2}$.

114. $f(x,y)=(x+1)^2+y^2$.

$w(x,y,z)=x+y^2+z^{1/2}$.

115. $f(x,y)=2x^2+\ln y$.

$w(x,y,z)=2x+y+\sqrt{yz}$.

116. $f(x,y)=y\sin x+\pi$.

$w(x,y,z)=x\cos y-\arccos z+\pi$.

117. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x-e^{1/y}-1$.

$w(x,y,z)=x+y+e^z+1/zx\sqrt{x^4+y^2z^2}-x/z-e^{x/y}-1$.

118. $f(x)=2+\sqrt{3}+\tan x$, $g(y)=-2-\sqrt{3}+\cot y$, $w=x+y+z$.

119. $f(x)=\sqrt[3]{2}(x-2)-3+2/e$, $g(y)=2e^{y-3}+1-2/e$.

$w=5x-2+(2y)^{1/3}+2/z$.

120. $f(x)=\cos\sqrt{1-x^2}$, $g(y)=\tan y^{1/2}$,

$w(x,y,z)=\sin x+\cos y+\tan z$.

121. $f(x)=\ln x$, $g(x)=(x-2)^3$,

$w(x,y,z)=e^x+f(1/y)\ln y+z+y^x g(2+\sqrt[3]{z})$.

122. $f(z)=\arcsin(-z)$, $g(y)=e^z$,

$w(x,y,z)=(1-x^2)yz+x\ln y+\cos[ye^z]$.

126. $2r$. 127. $2r$. 128. $2r\sqrt{m}$. 129. $2\sqrt{r_1^2+r_2^2+\ldots+r_m^2}$.

130. $4\sqrt{3}/3$. 135. $\{(x,y,z,w): xy\geqslant 0,\ z\in R^1,\ w=z+\sqrt{xy}\}$.

136. $\{(x,y,z,w): x\geqslant 0,\ y\neq 0,\ z>-1;\ w=\sqrt{x}/y^2+\ln(z+1)\}$.

137. $\{(x,y,z,w): x^2+y^2\neq 0,\ z\in R^1,\ w=(2+z)/(x^2+y^2)\}$.

138. $\{(x,y,z,w): x^2+y^2\neq 0,\ z\neq 0,\ w=(x^2+y^2)/z\ln(x^2+y^2+1)\}$.

139. 1,5; $-0,5$; 1. 140. 0, $-\pi/2$, $-\pi/2$. 141. 1, $2\sqrt{2}-1$, 0.

142. 0, -1, 1. 143. $\ln(1{,}03^{1/3}+0{,}98^{1/4}-1)$; 0,03; $-0{,}02$).

144. $1{,}04^{2,02}-1$; 0,04; 1,04. 145. $5{,}2-\sqrt{26{,}64}$; 0; 0,2.

§ 3.

152. $\delta=\sqrt{\varepsilon}$. 153. $\delta=\varepsilon/2$. Kasutada võrratust $|x+1| < d(T,T_0)$, kus $T=(x,y)$, $T_0=(-1,1)$. 154. $\delta=\varepsilon/2$.

155. $\delta=\varepsilon/3$. 156. $2\delta=-|a|-|b|+\sqrt{(|a|+|b|)^2+4\varepsilon}$. Kasutada võrdust $xy-ab=(x-a)(y-a)+b(x-a)+a(y-b)$.

157. $\delta=\min(1,3\varepsilon)$. 158. $\delta=\min(1,\varepsilon/9)$. 159. $\delta=-4+\sqrt{16+\varepsilon}$.

160. $\delta=-6+\sqrt{36+\varepsilon}$. 161. $12\delta=\min(2,\varepsilon)$. Taandada lugeja ja nimetaja teguriga $x-y-2$. 162. $N=[(1+3\cdot\varepsilon^{-1})^{1/2}+1]$. 163. $N=[1/2\varepsilon^2+1]$. 164. 5. 165. 16. 166. 2. 167. 1. 168. 1.

169. ∞. 170. 2. 171. $2\sqrt{2}$. 172. 1/8. 173. 0. 174. 0. Minna üle

polaarkoordinaatidele. 175. 1. 176. 0. 177. $-\infty$. 178. 0. 179. 0. 180. 0. 181. 1. 182. 0,5. 183. 0. 184. e^3. 185. 1. 186. e. 187. 1. Kasutada võrratust $|xy| \leq 1/2(x^2+y^2)$. 188. 0. 189. 0. 190. 0. 191. 0. 197. Piirväärtus ei eksisteeri. Võtta lähenemisteedeks $y=kx$ ja $y=x^k$. 199. Piirväärtus ei eksisteeri. Võtta lähenemisteedeks mööda sirget $y+1=x$ jadad $x_k=1/4(4k+1)$ ja $x_k=1/4(4k+3)$, kus $k=1,2,\ldots$. 200. Piirväärtus ei eksisteeri. Võtta lähenemisteedeks $y=x$ ja $y=x^3$. 201. 1. 202. Piirväärtus ei eksisteeri. Võtta lähenemisteedeks pärast irratsionaalsuse üleviimist lugejasse $y=x$ ja $y=x^9$. 203. π. Teha asendus $u=xy$. Kasutada L'Hospitali reeglit. 204. 2. 205. Piirväärtus ei eksisteeri. Lähenemisteedeks võtta jadad $P_k=(1+1/4k,\ 1+1/4k)$ ja $P_k'=(1+1/(4k+2),\ 1+1/(4k+2))$, $k=1,2,\ldots$. 206. Piirväärtus ei eksisteeri. 211. $P_{2n}=P_0=(3,1)$. 212. $P_{2n}=P_0=(1,-1)$. 213. $P_{8n}=P_0=(-1,1)$. 214. $\lim P_{2n} = P_0=(\pi/2,\ 0)$. 215. Võtta $k_n = 2\pi Q_n - \theta/Q_n$, kus Q_n on 2π ahelmurru lähismurru nimetaja ja $|\theta|<1$ (vt. J. Gabovitš, L. Kivistik, Arvuteooria. Tartu, 1974, lk. 61, valem (5)), $P_0 = (0,\ 1)$. 231. Pidev, pidev x ja y järgi. 232. Pidev x ja y järgi. 233. Ei ole pidev, pidev x ja y järgi. 234. Pidev punktis P_0, pidev x järgi, muutuja y järgi ei ole pidev. 235. Pidev, pidev x järgi. 236. Pidev x järgi. 237. Pidev y järgi. 238. Pidev, pidev x ja y järgi. 239. Pidev, pidev x ja y järgi. 240. Pidev x ja y järgi. 241. Pidev. 242. Pidev, pidev x ja y järgi. 243. Pidev, pidev y järgi, vasakult pidev x järgi. 244. Pidev y järgi. 245. Pidev x ja y järgi. 246. Pidev x ja y järgi. 247. (0,0). 248. Katkev sirgel $y=-x$. 249. Katkev punktis (0,0). 250. Katkevuspunkt (0,0), sirge $y+x=0$ ($x\neq 0$) punktid kõrvaldatavad katkevused. 251. Koordinaattelgede punktid. 252. Katkeb sirgetel $x=k\pi$, $y=j\pi$ ($k,j=0,\mp 1,\mp 2,\ldots$). 253. Katkeb joonel $x^2+y^2=1$. 254. Katkeb sfääril $x^2+y^2+z^2=z$. 255. Katkeb koordinaattasandil. 256. Katkevuspunkt (1,2,-3). 257. Katkeb sirgetel $x+y=1$, $x+y=-1$. 258. Katkeb sirgetel $1+x-y=0$, $x-y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0,\mp 1,\mp 2,\ldots$. 259. Katkev koordinaattelgedel, välja arvatud punkt (0,1). 260. Katkev joontel $xy=2j$ ja $xy=4k-3$, $j,k=0,\mp 1,\mp 2$. 261. Katkev joontel $y=k\pi x$, $k=0,\mp 1,\ldots$.

262. Katkev punktis (0,0).

263. $g(x,y)=f(x,y)$, kui $x\neq 0$, $g(x,y)=y$, kui $x=0$.

264. $g(x,y)=f(x,y)$, kui $x+y\neq 0$; $g(x,y)=0$, kui $x+y=0$.

265. $f(x,y)=f(x,y)$, kui $x+y\neq k\pi$ ($k=0,\mp 1,\ldots$);
$g(x,y)=0$, kui $x+y=k\pi$ ($k=0,\mp 1,\ldots$).

266. $g(x,y)=e^{1/\pi}$, kui $xy=0$, $g(x,y)=e^{xy\cot(\pi xy)}$, kui $0<xy<1$; $g(x,y)=0$, kui $xy=1$.

267. $g(x,y)=f(x,y)$, kui $P\neq(-1,0)$,
$g(x,y)=0$, kui $P=(-1,0)$.

268. $g(x,y)=f(x,y)$, kui $(x,y)\neq(1,0)$,
$g(x,y)=0$, kui $(x,y)=(1,0)$.

269. $g(x,y)=f(x,y)$, kui $x+2y=8$,
$g(x,y)=\frac{1}{64}$, kui $x+2y=8$.

270. $g(x,y)=f(x,y)$, kui $y\neq 0$,
$g(x,y)=(x^2+\sin x)/(1-e)$, kui $y=0$.

271. $g(x,y)=f(x,y)$, kui $x\neq 1{,}5$;
$g(x,y)=\pi$, kui $x=1{,}5$.

272. Veenduda, et D on tõkestatud kinnine hulk ja rakendada Cantori teoreemi. 274. $\delta=\varepsilon/5$. 275. $\delta=\varepsilon/55$. 276. $\delta=\varepsilon/12$. 277. $\delta=\varepsilon/9$. 278. $\delta=\varepsilon/2$. 279. $\delta=25\varepsilon/16$. 280. $\delta=\varepsilon/6$. 281. $\delta=\varepsilon/3$. 282. $\delta=\varepsilon/4$. 283. $\delta=\varepsilon/3$. 284. $\delta=3\varepsilon/5$. 288. $A=0$, $B=1$. 289. $A=$, $B=1$. 290. $A=1$, $B=0$. 291. $A=1$, $B=1$. 292. $A=1$, $B=0$. 293. $A=1$, $B=1/2$. 294. $A=1$, $B=0$. 295. $A=0$, $B=0$. 296. A ei eksisteeri, $B=1$. 297. $A=0$, $B=1$. 298. $A=1$, $B=1$. 299. $A=0$, $B=0$. 300. $A=0$, $B=0$. 301. $A=1$, $B=\infty$. 302. 0. 303. 0. 304. 0. 305. 0.

§ 4.

316. $x_{mn}=3/(m+n+2)$. 317. $x_{mn}=\sin(m+2n)$. 318. $x_{mn}= m\cos(\pi n)$. 319. $x_{mn}=\sin(\pi n)\ln(n^2+1)$. 320. $x_{mn}=[m-n]$. 321. $x_{mn}=(m^2-n^2)/[m+n]$. 322. $x_{mn}=\sin(\pi mn/2)$. 323. $x_{mn}=\arctan(mn)$. 358. $x\in bc\setminus rc$. 359. $x\in bc\setminus rc$. 360. $x\in c$, $x\notin b$. 361. $x\in c$, $x\notin b$. 362. $x\in c$, $x\notin b$. 363. $x\in rc$. 364. $s=0$. 365. $s=0$. 366. $s=0$. 367. $s=e^{\pi}$. 368. $s=e$.

§ 5.

373. $u_{oo}=1$, $u_{mo}=u_{on}=0$, $u_{mn}=(-1)^{mn}[1-(-1)^n-(-1)^m-(-1)^{m+n}]$, $m,n=1,2,\ldots$. 374. $u_{oo}=1$, $u_{mo}=\operatorname{sgn} m\cdot 2\cdot(-1)^m$, $u_{mn}=0$, $m,n=1,2,\ldots$. 375. $u_{oo}=1$, $u_{on}=2\cdot(-1)^n$, $u_{mo}=2\cdot(-1)^m$, $u_{mn}=4\,(-1)^{m+n}$; $m,n=1,2,\ldots$. 376. $u_{oo}=1$, $u_{mo}=-1/(m+1)m$, $u_{on}=-1/(m+1)\,n$, $u_{nm}=1/[nm(n+1)(m+1)]$, $m,n=1,2,\ldots$. 377. $u_{oo}=1$, $u_{on}=-1/n(n+1)$, $u_{mo}=-1/m(m+1)$, $u_{nm}=2/\,(m+n)^3-(m+n)$. 378. $u_{oo}=5{,}5$, $u_{on}=-2/n(n+1)$, $u_{mo}=-1/(m+1)(m+2)$, $u_{mn}=0$, $m,n=1,2,\ldots$. 379. $u_{oo}=-1$, $u_{on}=\cos[\pi/(n+1)]-\cos(\pi/n)$, $u_{mo}=\sin[\pi/(m+1)]-\sin(\pi/m)$, $u_{mn}=0$; $m,n=1,2,\ldots$. 380. $u_{oo}=0$, $u_{on}=\arctan(1/(1+n(n-1)))$, $u_{mo}=\arctan(1/(1+m(m-1)))$,

$u_{mn}=\arctan(m+2)-2\arctan(m+n-1)+\arctan(m+n-2)$, $m,n=1,2,\ldots$.

381. $u_{oo}=1$, $u_{on}=0$, $u_{mo}=2\,(-1)^m$, $u_{mn}=(-1)^m/(mn+1)-$ $-(-1)^{m-1}/((m-1)n+1))-(-1)^m/(m(n-1)+1)+(-1)^{m-1}/((m-1)(n-2)+1)$

382. $u_{oo}=1$, $u_{on}=u_{mo}=0$, $u_{mn}=2^{-mn}(1-2^n-2^m+2^{m+n-1})$, $m,n=1,2,\ldots$

383. $u_{oo}=0$, $u_{on}=\tan(\pi/(2n+1))-\tan(\pi/(2n-1))$, $u_{mo}=\tan(\pi/(4m+1))-\tan(\pi/(4m-3))$, $u_{mn}=\tan(\pi/(4m+2n+1)-$ $-\tan(\pi/(4m+2n-1))-\tan(\pi/(4m+2n-3))+\tan(\pi/(4m+2n-5)$; $n,m=$ $=1,2,\ldots$.

384. $u_{oo}=\ln(e^3-1{,}5)$; $u_{on}=\ln\left[(e^2+1/2-2/(n+1))/(e^2+1/2-2/n)\right]$; $u_{mo}=\ln\left[(e^2-2+1/(m+2))/(e^2-2+1/(m+1))\right]$;

$$u_{mn}=\ln\frac{(e^2(m+2)(m+1)+n-m-1)(e^2(m+1)n+n-2m-2)}{(e^2(m+2)n+n-2m-2)(e^2(m+1)(n+1)+n-m)}.$$

425. Koondub. 426. Koondub. 427. Ei koondu. 428. Koondub. 429. Koondub. 430. Koondub. 431. Ei koondu. 432. Koondub. 433. Koondub. 434. Koondub. 435. Ei koondu. 436. Koondub. 437. Koondub. 438. Koondub. 439. Ei koondu. 440. Ei koondu. 441. Koondub absoluutselt. 442. 2,25. Koondub. 443. 1,125. Koondub. 444. $-\pi^4/72$. Koondub. 445. $\pi^2/6$. Koondub. 446. Ei koondu. 447. Ei koondu. 448. Ei koondu. 449. $-1/8$. Koondub. 450. Ei koondu. 451. Ei koondu. 452. Koondub. 453. Ei koondu. 454. Koondub. 455. Koondub. 456. Koondub. 457. Koondub. 458. Ei koondu.

II peatükk

§ 1.

459. $f_x=2$, $f_y=1$, $f_{xx}=f_{yy}=f_{xy}=0$. 460. $f_x=3$, $f_y=-1$, $f_{xx}=f_{yy}=f_{xy}=0$. 461. $f_x=3x^2-6y$, $f_y=3y^2-6x$, $f_{xx}=6x$, $f_{yy}=6y$, $f_{xy}=-6$. 462. $f_x=3x^2y-y^3$, $f_y=x^3-3y^2x$, $f_{xx}=-f_{yy}=6xy$, $f_{xy}=$

$=3(x^2-y^2)$. 463. $f_x=4x^3-8xy^2$, $f_y=4y^3-8x^2y$, $f_{xx}=12x^2-8y^2$, $f_{yy}=12y^2-8x^2$, $f_{xy}=-16xy$. 464. $f_x=30xy(5x^2y-y^3+9)^2$, $f_y=3(5x^2y-y^3+9)(5x^2-3y^2)$, $f_{xx}=30(5x^2y-y^3+9)(30x^2y^2+5x^2y+$ $+xy^3+9x)$, $f_{yy}=6(5x^2y-y^3+9)(5x^2-3y^2-15x^2y^2+3y^4-27y)$, $f_{xy}=$ $=30(5x^2y-y^3+9)(16x^3y-7xy^3+9x)$.

465. $f_x=675x^2y^2(1+5x^3y^2)^2$, $f_y=30x^2y(1+5x^3y^2)$,

$f_{xx}=270(1+5x^3y^2)(10x^4y^4+xy)$,

$f_{yy}=30(1+5x^3y^2)(25x^6y^2+x^3)$,

$f_{xy}=10(1+5x^3y^2)(15x^5y^3+x^2y)$.

466. $f_x=y+1/y$, $f_y=x-x/y^2$, $f_{xx}=0$, $f_{yy}=2x/y^3$, $f_{xy}=1-1/y^2$.

467. $f_x=2y/(x+y)^2$, $f_y=-2x/(x+y)^2$, $f_{xx}=-4y(x+y)^{-3}$, $f_{yy}=4x(x+y)^{-3}$, $f_{xy}=2(x-y)/(x+y)^3$. 468. $f_x=(x^4+3x^2y^2-2xy^3)/(x^2+y^2)^2$, $f_y=(y^4+3x^2y^2-2x^3y)/(x^2+y^2)^2$, $f_{xx}=(-2x^3y^2-10x^2y^3+6xy^4-2y^5)/$ $/(x^2+y^2)^3$, $f_{yy}=(-2x^5+6x^4y-10x^3y^2-2x^2y^3)/(x^2+y^2)^3$; $f_{xy}=(2x^4y-6x^3y^2-6x^2y^3+2xy^4)/(x^2+y^2)^3$.

469. $f_x=y^2/(x^2+y^2)^{3/2}$, $f_y=-xy/(x^2+y^2)^{3/2}$, $f_{xx}=-3xy^2/$ $/(x^2+y^2)^{5/2}$, $f_{yy}=-x(x^2-2y^2)/(x^2+y^2)^{5/2}$, $f_{xy}=y(2x^2-y^2)/$ $/(x^2+y^2)^{5/2}$. 470. $f_x=x/\sqrt{x^2-y^2}$, $f_y=-y/\sqrt{x^2-y^2}$, $f_{xx}=-y^2/(x^2-y^2)^{3/2}$, $f_{yy}=-x^2/(x^2-y^2)^{3/2}$, $f_{xy}=xy/(x^2-y^2)^{3/2}$.

471. $f_x=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $f_y=x\cos(x+y)$, $f_{xx}=2\cos(x+y)-$ $-x\sin(x+y)$, $f_{yy}=-x\sin(x+y)$, $f_{xy}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$.

472. $f_x=-(2x\sin x^2)/y$, $f_y=(-\cos x^2)/y^2$, $f_{xx}=-(2\sin x^2+4x^2\cos x^2)/y$, $f_{yy}=(2\cos x^2)/y^3$, $f_{xy}=(2x\sin x^2)/y^2$

473. $f_x=2x/y\cos^{-2}(x^2/y)$, $f_y=-x^2/y\cos^{-2}(x^2/y)$,

$f_{xx}=2/y\cos^{-2}(x^2/y)+8x^2/y^2\sin(x^2/y)\cos^{-3}(x^2/y)$,

$f_{yy}=2x^2/y^3\cos^{-2}(x^2/y)+2x^4/y^4\sin(x^2/y)\cos^{-3}(x^2/y)$,

$f_{xy}=-2x/y^2\cos^{-2}(x^2/y)-4x^3/y^3\sin(x^2/y)\cos^{-3}(x^2/y)$.

<u>474</u>. $f_x=yx^{y-1}$, $f_y=x^y\ln x$, $f_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $f_{yy}=x^y\ln^2 x$, $f_{xy}=x^{y-1}(1+y\ln x)(x>0)$. <u>475</u>. $f_x=1/(x+y^2)$, $f_y=2y/(x+y^2)$, $f_{xx}=-1/(x+y^2)^2$, $f_{yy}=2(x-y^2)/(x+y^2)^2$, $f_{xy}=-2y/(x+y^2)^2$.

<u>476</u>. $f_x=1/\sqrt{x^2+y^2}$, $f_y=y/\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})$, $f_{xx}=-x/(x^2+y^2)^{3/2}$, $f_{yy}=\left[(x^2+y^2)(x+\sqrt{x^2+y^2})+y^2(x+2\sqrt{x^2+y^2})\right]/\left[(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2\right]$ $f_{xy}=-y/(x^2+y^2)^{3/2}$. <u>477</u>. $f_x=1/(1+x^2)$, $f_y=1/(1+y^2)$, $f_{xx}=-2x/$ $/(1+x^2)^2$, $f_{yy}=-2y/(1+y^2)^2$, $f_{xy}=0$ $(xy\neq 1)$. <u>478</u>. $f_x=-|y|/$ $/(x^2+y^2)$, $f_y=(x\,\mathrm{sgn}\,y)/(x^2+y^2)$, $f_{xx}=2x|y|/(x^2+y^2)^2$, $f_{yy}=2x|y|/(x^2+y^2)^2$, $f_{xy}=(x^2-y^2)\mathrm{sgn}\,y/(x^2+y^2)^2$. <u>479</u>. $f_x=$ $=(y/x^2)3^{-y/x}\ln 3$, $f_y=-(1/x)3^{-y/x}\ln 3$, $f_{xx}=(y/x^3)\,3^{-(y/x)}\times$ $\times(-2\ln 3+(y/x)\ln^2 3)$, $f_{yy}=(1/x^2)\ln^2 3\cdot 3^{-(y/x)}$, $f_{xy}=(\ln 3)/$ $/x^2\cdot 3^{-(y/x)}(1-y\cdot\ln 3/x)$. <u>480</u>. $f_x=-(1/y)e^{-x/y}$, $f_y=(x/y^2)\times$ $\times e^{-(x/y)}$, $f_{xx}=(1/y^2)e^{-(x/y)}$, $f_{yy}=(x/y^4)e^{-(x/y)}(2y+x)$, $f_{xy}=(1/y^3)\,e^{-x/y}(y-x)$. <u>481</u>. $f_x=-(y/x^2)e^{\sin(y/x)}\cos(y/x)$, $f_y=1/x\;e^{\sin(y/x)}\cos(y/x)$, $f_{xx}=e^{\sin(y/3)}(y/x^3)\left[2\cos(y/x)-\right.$ $\left.-(y/x)\cos^2(y/x)-(y/x)\sin(y/x)\right]$, $f_{yy}=(1/x^2)\exp\sin(y/x)\times$ $\times\left[\cos^2(y/x)-\sin(y/x)\right]$, $f_{xy}=(1/x^3)\exp\sin(y/x)\left[y\sin(y/x)-\right.$ $\left.-x\cos(y/x)-y\cos^2(y/x)\right]$. <u>482</u>. $f_x=xy(1+xy)^{x-1}+(1+xy)^x\times$ $\times\ln(1+xy)$, $f_y=x^2(1+xy)^{x-1}$, $f_{xx}=2y(1+xy)^{x-1}(1+x\ln(1+xy))+$

$+x(x-1)\cdot y^2(1+xy)^{x-2}+\ln^2(1+xy)(1+xy)^x$, $f_{yy}=x^3(x-1)(1+xy)^{x-2}$,
$f_{xy}=x(1+xy)^{x-1}\ 2+x\ \ln(1+xy)+x^2y(x-1)(1+xy)^{x-2}$.
483. $f_x=(2x^2-y)/(2x^3+yx)$, $f_y=1/(2x^2+y)$,
$f_{xx}=(8x^2y-10x^3y-3y^2x-x^4+y^2)/\left[(2x^2+y^2)^2x^2\right]$, $f_{yy}=-1/(2x^2+y)^2$,
$f_{yx}=4x/(2x^2+y)^2$. 484. $f_x=3(1+\ln x/\ln y)^2/(x\cdot\ln y)$,
$f_y=-(3\ \ln x)(1+\ln x/\ln y)^2/(y\ \ln^2 y)$, $f_{xx}=-3(1+\ln x/\ln y)^2/$
$/(\ln y\cdot x^2)+6(1+\ln x/\ln y)/(x^2\ln^2 y)$, $f_{yy}=-3\ln x(\ln y+2)$
$(1+\ln x/\ln y)^2/(y^2\ \ln^3 y)+6\ln^2 x(1+\ln x/\ln y)/(y^2\ln^4 y)$,
$f_{xy}=3(1+\ln x/\ln y)^2/(xy\ln^2 y)-6\ln x(1+\ln x/\ln y)/(xy\ln^3 y)$.
485. $f_x=\sqrt{y^x}\ \ln y/[2(1+y^x)]$,
$f_y=x\sqrt{y^x}/[2y(1+y^x)]$, $f_{xx}=\left[x(1+y^x)-y^{(x/2-1)}\ln y-2y^{3x/2}\ln^2 y\right]/$
$/\left[4(1+y^x)^2\right]$, $f_{yy}=\left[\ln y\cdot x\cdot y^{(x/2-1)}(1-y^x)-2y^{(x/2-2)}x(1+y^x)\right]/$
$/\left[4(1+yx)^2\right]$, $f_{xy}=\left[y^{(x/2-1)}(x/2\ \ln y+1)(1+y^x)-y^{3x/2}\cdot\ln^2 y\right]/$
$/\left[2\cdot(1+y^x)^2\right]$. 486. Vaata lk. 79 näide 2. $f_x=2x\arctan(y/x)-y$
$(x\neq0)$, $f_x=-y(x=0)$, $f_y=x-2y\ \arctan(x/y)(y\neq0)$, $f_y=x\ (y=0)$,
$f_{xx}=2\arctan(y/x)-2xy/(x^2+y^2)\ (x\neq0)$, $f_{xx}=\pi\ (x=0,y\neq0)$,
$f_{yy}=-2\arctan(x/y)+2yx/(x^2+y^2)\ (y\neq0)$, $f_{yy}=-\pi\ (y=0,x\neq0)$,
$f_{xy}=2x^3/(x^2+y^2)-1$. 487. $f_x=3x^2\ \sin(y/x)-xy\cos(x/y)+y^2\cos(y/x)$
$(x\neq0)$, $f_x=y^2(x=0)$, $f_y=x^2\cos(y/x)+3y^2\sin(x/y)-xy\cos(x/y)$
$(y\neq0)$, $f_y=x^2\ (y=0)$, $f_{xx}=6x\sin(y/x)-4y\cos(y/x)-y^2/x\ \sin(y/x)-$
$-y\sin(x/y)(x\neq0,\ y\neq0)$, $f_{yy}=-x\sin(y/x)+6y\ \sin(x/y)-$
$-4x\ \cos(x/y)-x^2/y\ \sin(x/y)(y\neq0,\ x\neq0)$, $f_{xy}=2x\ \cos(y/x)+$

$+y\sin(y/x)+2y\cos(x/y)+x\sin(x/y)$ $(y\neq0,\ x\neq0)$. 488. $f_x(2,1)=1/2$, $f_y(2,1)=0$. 489. $f_y(1,y)=1$. 496. $f_{xy}=\cos x$.

497. $f_{xy}=2y\cos x\,(1+y\sin x)^{y-1}+1/2\,y^2(y-1)\times\sin 2x(1+y\sin x)^{y-2}+y^2\cos x(1+y\sin x)^{y-1}\ln(1+y\sin x)$.

498. $f_{xy}=0$. 499. $f_x=yz+1/(x+y+z)$, $f_y=xz+1/(x+y+z)$, $f_z=xy+1/(x+y+z)$, $f_{xy}=z-1/(x+y+z)^2$, $f_{xz}=y-1/(x+y+z)^2$, $f_{yz}=x-1/(x+y+z)^2$. 500. $f_x=x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f_y=y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f_z=z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f_{xy}=-xy/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$,

$f_{xz}=-xz/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, $f_{yz}=-yz/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.

501. $f_x=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$, $f_y=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$, $f_z=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$, $f_{xy}=-4xy\sin(x^2+y^2+z^2)$, $f_{xz}=-4xz\sin(x^2+y^2+z^2)$, $f_{yz}=-4yz\sin(x^2+y^2+z^2)$.

502. $f_x=y\,x^{y/z}/(xz)$, $f_y=(\ln x\cdot x^{y/z})/z$, $f_z=-y\,x^{y/z}\cdot\ln x/z^2$, $f_{xy}=(z+y\ln x)x^{y/z}/(xz^2)$, $f_{xz}=-yx^{y/z}(z+y\cdot\ln x)/(xz^3)$, $f_{yz}=-x^{y/z}\ln x(z+y\ln x)/z^3$ $(xz\neq0)$. 503. $f_x=y^z x^{y^z-1}$, $f_y=zy^{z-1}x^{y^z}\cdot\ln x$, $f_z=y^z x^{y^z}\ln x\ln y$, $f_{xy}=(zy^{z-1}x^{y^z})/x\times(1+y^z\ln x)$, $f_{xz}=y^z x^{y^z}\ln y(1+y^z\ln x)/x$, $f_{yz}=y^{z-1}x^{y^z}\times\ln x\left[1+z\ln y(1+y^z\ln x)\right]$. 504. $f_x=yz(xy)^{z-1}$, $f_y=xz(xy)^{z-1}$, $f_z=(xy)^z\ln(xy)$, $f_{xy}=z(xy)^{z-1}+xyz(z-1)(xy)^{z-2}$, $f_{xz}=y(xy)^{z-1}+yz(xy)^{z-1}\cdot\ln(xy)$, $f_{yz}=x(xy)^{z-1}+xz(xy)^{z-1}\ln(xy)$.

505. $f_x=z/x(x/y)^z$, $f_y=-z/y(x/y)^z$, $f_z=(x/y)^z\ln(x/y)$, $f_{xy}=-z^2(x/y)^z/(xy)$, $f_{xz}=1/x(x/y)^z(1+z\ln(x/y))$, $f_{yz}=-1/y(x/y)^z\times$

$x(1+z\ln x/y)(x/y>0)$, 506. $f_x=yz^{xy}\ln z$, $f_y=xz^{xy}\ln z$, $f_z=xyz^{xy-1}$, $f_{xy}=z^{xy}\cdot\ln z(1+xy\cdot\ln z)$, $f_{xz}=yz^{xy-1}(1+xy\ln z)$, $f_{yz}=xz^{xy-1}(1+xy\ln z)$. 507. $f_x=1$, $f_y=1/2$, $f_z=1/2$ (kohal $(1,2,0)$). 508. $f_x(1,-1,1)=0$, $f_y(1,1,4)=2\sin 2$, $f_z=(-1/2,0,-1)=-\sin 1$. 509. $u_{xxy}=0$. 510. $u_{x^3y^3}=-6(\cos x+\cos y)$ 511. $u_{xyz}=0$. 512. $u_{xyz}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$. 513. $u_{xyz}=$ $=2(y+x-2z)((x-z)^2+(y-z)^2+4(x-z)(y-z))/\left[(x-z)^2+(y-z)^2\right]^3$.

519. 1. järku osatuletised. 520. Kõik osa ja segatuletised 2. järguni. 521. $e^{(\sin t+1/3\cos t)}(\cos t+\sin t)=dz/dt$.

522. $(1-(t-4/3\ t^3)^2)^{-1/2}(1-4t^2)=dz/dt$.

523. $1/\cos^2(t+t^4-2\sqrt{t})\cdot(1+4t^3-1/\sqrt{t})=dz/dt$. 524. $dz/dx=$ $=e^x(x+1)/(1+x^2e^{2x})$. 525. $du/dx=1/2\ e^x\sin x$. 526. $du/dx=$ $=1/(1+x^2)$. 527. $du/dt=f_x+f_y/t+f_z$. 528. $dz/dt=(-2x\ln y f(x,y)-$ $-x^2\ln y\ f_x)\ t/\sqrt{1-t^2}+\left[x^2/y\ f(x,y)+x^2\ln y\ f_y\right]e^{\sin t}\cos t$.

529. $z_x=3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y)$, $z_y=x^3(\sin y+\cos y)(1-3\sin y\cos y)$. 530. $z_x=0$; $z_y=0$.

531. $z_x = xy(y+1)/\left[(x+y)(1+(x+y+xy)^2)\right]+$ $+1/(x+y)\arctan(x+y+xy)(1-xy/(x+y))$, $z_y = xy(x+1)/$ $/\left[(x+y)(1+(x+y+xy)^2)\right]+1/(x+y)\arctan(x+y+xy)(1-xy/(x+y))$.

532. $z_x = 0$, $z_y = 1$. 533. $z_x=(1-y)(f_x+f_y\ e^{x(1-y)})$,

$z_y=(-x)(f_x+f_ye^{x(1-y)})$. Märkus: kui f_x ja f_y argument on näitamata, siis $f_x=f_x(x,y)$, $f_y=f_y(x,y)$.

534. $z_x=f(xy+y/x)+xy\ f_x(1-1/x^2)$, $z_y=x(x+1/x)f_x$. 535. $z_x=$ $=\ln y(f_x-1/x\ f_y)$, $z_y=1/y\ f(x,y-\ln x)+\ln y\ f_y$. 536. $u_x=$ $=1/y\ f_x$, $u_y=-x/y^2\ f_x+1/z\ f_y$, $u_z=-y/x^2\ f_y$. 537. $z_x=-y/(x^2+y^2)$, $dz/dx=2/(1+x^2)$. 538. $z_x=y\ x^{y-1}$, $dz/dx=x^{\ln\ln x}(\ln\ln x-1)$. 539. $z_x=e^x/(e^x+e^y)$, $dz/dx=(e^x+3e^{x^3}x^2)/(e^x-e^{x^3})$. 540. $z_x=$ $=yx^{y-1}$, $dz/dx=x^{f(x)}f(x)\ln x+f(x)x^{f(x)-1}$. 541. $z_x=0$, $dz/dx=$ $=\cos x(\sin x)^{\cos x-1}-(\sin x)^{\cos x+1}\ln\sin x$.

§ 2.

542. $dz = dx + 3\,dy$. 543. $dz = (4x - 3y)dx +$ $+(-3x-2y)dy$. 544. $dz=ydx+xdy$. 545. $dz=(ydx-xdy)/y^2$. 546. $dz=e^{(1+xy)}(ydx+xdy)$. 547. $dz=(xdx+ydy)/\sqrt{x^2+y^2+2}$. 548. $dz=\sin xy(ydx+xdy)$. 549. $dz=(ydx-xdy)/(2y^2+x^2+xy)$. 550. $dz=y^x\ln y\,dx+xy^{x-1}dy$. 551. $dz=x/(y\cos^2(x^2/y))\ (2dx-$ $-x/y\,dy)$. 552. $dz=(yx^{y-1}+y^x\ln y)dx+(xy^{x-1}+x^y\ln x)dy$. 553. Kasutada diferentseerimiseeskirja $F'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)dy-$ $-\alpha'(x)f(x,\alpha(x))+\beta'(x)f(x,\beta(x))$, kus $F(x)=$ $=\int_{(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$, $dz=(\sin(x+y))/(x+y)\ (dx+dy)$. 554. $dz=\cos(x\ y)/xy\ (ydx+xdy)$. 555. $-\sqrt{x^3+\sin^4 x}\,dx+$ $+\sqrt{y^3+\sin^4 y}\,dy$. 556. $dz=2xze^{2x^2yz^2}(2yzdx+xzdy+2xydz)$. 557. $dw=-\sin(x^2yz)(2xyzdx+x^2zdy+x^2ydz)$.

558. $dw=\left[(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)\right]/(x^2+y^2)^2$. 559. $dw=1/$ $/\cos^2(x-y+z)\ (dx-dy+dz)$. 560. $w_x+w_y+w_z=e^{x+yz}(1+y+z)$.

561. $w_x+w_y+w_z=2xyze^{x^2y^2z^2}(yz+xz+xy)$. 562. $w_x-2w_y+3w_z=$ $=\sin(xy^2z)(-y^2z+4xyz+3xy^2)$, $w_x-2w_z=-\sin(xy^2z)(y^2z-2xy^2)$.

563. $w_x-w_y=0$. 564. $dz=\{2t\left[t^3\arctan(t^5+t^3)+(t^8+t^6)/\right.$ $\left./(1+(t^5+t^3)^2)\right]+3t^2\left[(t^2+1)\arctan(t^5+t^3)+(t^3(t^2+1)^2)/\right.$ $\left./(1+(t^5+t^3)^2)\right]\}dt$. 565. $dz=-1/\sqrt{1-t^4/\cos^2 t}\ (2t/\cos t+$ $+t^2/\cos^2 t\ \sin t)dt$. 566. $dz=(-1/2t^{-1/2}-6/t^4+3)dt/$ $/\ \cos^2(3t-\sqrt{t}+3/t^2)$. 567. $dz=1/\left[1+(1+x\ln x)^2\right](\ln x+1)dx$.

568. $dz=2dy/(4+y^2)$. 569. $dz=(\sin(uv)/v-u\sin(u/v)+u\cos(uv)+$ $+v\cos(u/v))du+(u^2/v\ \sin(u/v)-u/v^2\ \sin(uv)+u^2/v\ \cos(uv)+$ $+u\cos(u/v))dv$. 570. $dz=2u\left[(u^2-v^2)(u^2+v^2)^{u^2-v^2-1}+(u^2-v^2)^{u^2+v^2}\right.$ $\times\ln(u^2-v^2)+(u^2+v^2)^{u^2-v^2}\ln(u^2+v^2)+(u^2+v^2)(u^2-v^2)^{u^2+v^2-1}\left.\right]du+$ $+2v\left[(u^2\ v^2)(u^2+v^2)^{u^2-v^2-1}+(u^2-v^2)^{u^2+v^2}\ln(u^2+v^2)-\right.$ $\left.-(u^2+v^2)^{u^2-v^2}\ln(u^2+v^2)-(u^2+v^2)(u^2-v^2)^{u^2+v^2-1}\right]dv$.

571. $dz=\left[u(\mathrm{sh}^2v+\mathrm{ch}^2v)du+2u^2\mathrm{sh}v\,\mathrm{ch}v\,dv\right]/(u^2(\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x))$.

572. $z_u+z_v=2\ u/v^2\ \ln(3u-2v)(1-u/v)+u^2/(v^2(3u-2v))$.

573. $z_u+z_v=(u-v)/(u^2+v^2)$. 577. $dz=(1+f_x 2xy)dx+x^2f_x dy$.

578. $dz=(1+1/\sqrt{2xy})(ydx+xdy)$. 579. $dz=(y^2+1)f_x dx+$ $+\left[f(xy+x/y)+xy(1-1/y^2)f_x\right]dy$. 580. $dz=(1+ye^{xy}f_u+2xf_v)dx+$ $+(xe^{xy}f_u-2yf_v)dy$. 581. $dz=-(\cos x f_u+2xy^2f_v)dx+(1-2x^2yf_v)dy$.

582. $dz=(2y+3x^2f_v)dx+(2x-\sin y f_u-f_v)dy$. 583. $dz=\left[y/2\sqrt{xy}\times(1+f_u)+3x^2f_v\right]dx+\left[x/(2\sqrt{xy})(1+f_u)+2yf_v\right]dy$. 588. $dz=-2/y\,dx-2x/y^2\,dy$, $d^2z=-4/y^2\,dxdy+4x/y^3\,dy^2$. 589. $dz=(1+y)dx+xdy$, $d^2z=2dxdy$. 590. $dz=\sin^2y dx+x\sin(2y)dy$, $d^2z=2\sin(2y)dxdy+2x\cos(2y)dy^2$. 591. $dz=\cos^3y\,dx-3x\cos^2y\,\sin y\,dy$, $d^2z=-6\cos^2y\sin y dxdy+3x\cos y(2\sin^2y-\cos^2y)dy^2$. 592. $dz=e^{x+y^2}(dx+2y\,dy)$, $d^2z=e^{x+y^2}(dx^2+4y\,dx\,dy+(2+4y^2)dy^2)$. 593. $dz=(y+z^2)dx+(x+z)dy+(y+2z)dz$, $d^2u=2dx\,dy+4z\,dx\,dz+2dy\,dz+2xdz^2$. 594. $du=\cos(5x-3y+9z)(5dx-3dy+9dz)$, $d^2u=-\sin(5x-3y+9z)(25dx^2+9dy^2+81dz^2-30dxdy+90dxdz-54dydz)$. 595. $du=-\sin(2x+3y-5z+7)(2dx+3dy-5dz)$, $d^2u=-\cos(2x+3y-5z+7)\times(4dx^2+9dy^2+25dz^2+12dxdy-20dxdz-30dydz)$. 596. $df(1,1,1)=dx-dy$, $d^2f(1,1,1)=-2(dx-dy)(dy+dz)$. 597. $d^3z=6(dx^3-3dx^2dy+3dxdy^2+dy^3$. 598. $d^3z=-8(xdx+ydy)^3\cos(x^2+y^2)-12(xdx+ydy)\times(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2)$. 599. $d^3u=12dxdydz$. 600. $d^4u=2(dx^4/x^3+dy^4/y^3+dz^4/z^3)$. 601. $d^{10}z=-9!(dx+dy)^{10}/(x+y)^{10}$. 602. $d^6z=-(dx^6-15dx^2dy^4+15dx^4dy^2-dy^6)\cos y\,\mathrm{ch}\,x-2dxdy(3dx^4-10dx^2dy^2+3dy^4)\sin y\,\mathrm{sh}\,x$. 603. $d^9u=0$. 604. $d^8u=(1+2x-3y+4z)^7\times(2dx-3dy+4dz)^8$. 605. $d^{18}u=-\cos(2x+3y-5z)(2dx+3dy-5dz)^{18}$. 606. $d^{16}u=\sin(5x-3y+9z+8)(5dx-3dy+9dz)^{16}$. 607. $d^{19}u=\sin(x-4y-6z+7)(dx-4dy-6dz)^{19}$. 608. $d^{12}u=a^{x+2y-3z+4}\ln^{12}a\times(dx+2dy-3z)^{12}$. 609. $d^nz=\exp(2x+3y+4)(2dx+3dy)^n$. 610. $d^nz=$

$=\exp(x-y+2z)(dx-dy+2dz)^n$. 611. $dw=f'(ydx+xdy)$, $d^2w=y^2f''dx^2+$ $+2(f''\cdot xy+f')dxdy+x^2f''\,dy^2$. 612. $dw=(1+f')dx+f'dy$, $d^2w=$ $=f''(dx+dy)^2$. 613. $dw=f'\,(xdx+ydy)/\sqrt{x^2+y^2}$, $d^2w=f''(xdx+ydy)^2/$ $/(x^2+y^2)+f'\,(ydx-xdy)^2/(x^2+y^2)^{3/2}$. 614. $dw=f'\,(yzdx+zxdy+$ $+xydz)$, $d^2w=f''\,(yzdx+zxdy+xydz)^2+2f'\,(zdxdy+ydxdz+xdydz)$. 615. $dw=2f'\,(xdx+ydy+zdz)$, $d^2w=4f''\,(xdx+ydy+zdz)^2+2f'\times$ $\times(dx^2+dy^2+dz^2)$. 616. $dw=2f_u\,dx+3f_vdy$, $d^2w=4f_{uu}dx^2+$ $+12_{uv}dxdy+9f_{vv}dy^2$, kus $f=f(u,v)$. 617. $dw=f_u(dx-dy)+$ $+f_v(dx+dy)$, $d^2w=f_{uu}(dx-dy)^2+2f_{uv}(dx^2-dy^2)+f_{vv}(dx+dy)^2$. 618. $dw=(y+f_u)dx+(x+f_u)dy+f_vdz$, $d^2w=f_{uu}(dx^2+2dxdy+dy^2)+$ $+2f_{uv}(dx+dy)dz+f_{vv}\,dz^2+dxdy$. 619. $dw=f_u\,(dx+dy+dz)+$ $+2f_v(xdx+ydy+zdz)$, $d^2w=f_{uu}\,(dx+dy+dz)^2+4f_{uv}\,(dx+dy+dz)$ $(xdx+ydy+zdz)+4f_{vv}(xdx+ydy+zdz)^2+2f_v\,(dx^2+dy^2+dz^2)$. 620. $dw=f_u(dx/y-x/y^2\,dy)+f_v(dy/z-y/z^2\,dz)+dx/z-x/z^2\,dz$, $d^2w=f_{uu}\,(ydx+xdy)^2/y^4+2f_{uv}\left[(ydx+xdy)(zdy-ydz)\right]/(y^2z^2)+$ $+f_{vv}(zdy-ydz)^2/z^4-2f_u\,(ydx-xdy)dy/y^3-2f_v(zdy-ydz)dz/z^3+$ $+2dz^2/z^3-1/z^2\,dxdz$. 621. $dw=2f_u\,(xdx+ydy)+2f_v\,(ydx+xdy)+$ $+2f_t\,(xdx-ydy)$, $d^2w=4f_{uu}\,(xdx+ydy)^2+f_{vv}\,(ydx+xdy)^2+$ $+4f_{tt}\,(xdx-ydy)^2+8f_{uv}\,(xdx+ydy)(ydx+xdy)+8f_{ut}\,(x^2dx^2-y^2dy^2)+$ $+8f_{vt}\,(xdx-ydy)\,(ydx+xdy)+2f_u\,(dx^2+dy^2)+4f_v\,dx\,dy+$ $+2f_t\,(dx^2-dy^2)$, kus $f=f(u,v,t)$. 622. $\alpha=2$. 623. $\alpha=3$. 624. $\alpha=0$. 625. $\alpha=0$. 626. $\alpha=3$. 627. $\alpha=5$. 628. $\alpha=2$. 629. $\alpha=0$.

630. $\alpha=-1$. 631. $\alpha=0$.

§ 3.

632. $e^x \sin y = y + xy + 1/2\, x^2y - 1/6y^3 + \alpha_3$.

633. $1+y+y^2/2-x^2/2+y^3/6-x^2y/2+\alpha_3$. 634. $f(x,y)=x+y-$ $-1/2(x+y)^2+1/3(x+y)^3+\alpha_3$. 635. $y+xy+1/2(-y^2)+1/3y^3-1/2xy^2+$ $+1/2x^2y+\alpha_3$. 636. $x-xy^2+\alpha_3$. 637. $y^3-\alpha_3$. 638. $x^2+y^2+\alpha_3$.

639. $1+\Delta x-\Delta y-1/2\,\Delta x\,\Delta y+\Delta y^2+1/3\,\Delta x\,\Delta y^2-\Delta y^3+\alpha_3$.

640. $1+(\Delta x-\Delta y)+1/2(\Delta x-\Delta y)^2+1/3(\Delta x-\Delta y)^3+\alpha_3$.

641. $\Delta x+\Delta y-1/2(\Delta x^2+\Delta y^2)+1/3(\Delta x^3+\Delta y^3)+\alpha_3$.

642. $-\pi\Delta x+\pi\Delta x\,\Delta y+\pi^3/6\,\Delta x^3-\pi\Delta x\,\Delta y^2+\alpha_3$. 643. $\sin xy \approx$ $\approx xy$. 644. $\cos xy \approx 1$. 645. $\cos x/\cos y \approx 1-1/2(x^2-y^2)$.

646. $\approx \pi/4+1/2(x-y)-1/4(x^2-y^2)$. 647. 0,3e. 648. 7,5.

649. $0,1\pi$. 650. 0. 651. $(e+e^{-1})0,2$. 652. 2,005. 653. 8,21.

654. 2,045. 655. 5,002. 656. 0,005. 657. 1,08. 658. 0,94.

659. 0,888. 660. 0,7539. 661. 4,24. 662. 257,408.

663. 1,0542. Vaadelda funktsiooni $f(x,y,z)=x^2/(\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z})$.

664. 0,00875. 665. $z-1=2(x-2)+2(y+1)$, $\vec{n}=(2,2,-1)$.

666. $z=\pi/4-1/2(x-y)$, $\vec{n}=(-1,1,-2)$. 667. $2x+4y-z-5=0$, $\vec{n}=(2,4,-1)$. 668. Ei ole, sest z pole diferentseeruv selles punktis. 669. Puutujatasand eksisteerib. Kasutada teoreemi 1, lk. 108, ja seost $x/\sqrt[3]{x^2+y^2}=O(\sqrt[3]{y})$. 670. Eksisteerib.

671. Ei eksisteeri. 672. $z-3 = 4(x-2) - 2(y-1)$.

673. $z = -x/2 + y/2 - 9\sqrt{5}/2$. 674. $Q_0=(1/6,1/3,5/36)$. 675. $Q_0=(0,0,0)$.

III peatükk

§ 1.

680. $X = \{2k\pi,\ k=1,2,\dots\}$. 681. $X=\{2k\pi,\ k=\mp1,\mp2,\dots\}$. 682. $X=(-\infty,\infty)$. 683. $X=\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0,\mp1,\mp2,\dots\}$. 684. 1) Lõpmata palju 2) Kaks, 3) Üks, 4) Kaks. 685. $y=x+\ln\sin x$. 686. $y=3x$, $y=-x$. 687. $y=\sqrt[3]{x+\arccos x}$. 688. $y=x/\sqrt{1+x^2}$. 689. $y=\ln 3/\ln 6\cdot x$. 690. Jaa, jaa. 691. Jaa. jaa. 692. Ei, ei. 693. Jaa, ei. 694. Jaa, jaa. 695. Ei, ei. 696. $y'=(e^y+y/x)/(xe^y+\ln x)$. 697. $y'=(x+y)/(x-y)$. 698. $y'=y/x\ (y^2-2x^2\ln y)/(x^2-2y^2\ln x)$. 699. $y'=\sin y/(x\cos y+\sin y-2\sin 2y)$. 700. $y'=(e^{x-y}-1)/(e^{x-y}+1)$, $y''=4e^{x-y}(e^{x-y}+1)^{-3}$. 701. $y'=(x+y)/(x-y)$, $y''=2(x^2+y^2)/(x-y)^3$. 702. $y'=x^{-2}y^2a(x)/a(y)$, $y''=y^2[y\dot{a}(x)-2(x-y)a(x)a(y)-xa^2(y)]\times x^{-4}a^{-3}(y)$, kus $a(t)=1-\ln t$. 703. $y'=1/(1-\sin 1\cdot\cos y)$, $y''=-\sin 1\ \sin y/(1-\sin 1\cdot\cos y)^3$. 704. $y'(P_0)=2$. 705. $y''(P_0)=0$. 706. $y'''(P_0)=1/3$. 707. $f(x)=-\sqrt{x^3/(2-x)}$, $g(x)=\sqrt{x^3/(2-x)}$, $f'(1)=-2$, $g'(1)=2$. 708. $f'(0)=-1$, $g'(0)=1$. 709. $f(x)=-x\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, $g(x)=-f(x)$, $df(0)=-dx$, $dg(0)=dx$. 710. $z=\ln\sin(x^2+y^2+1)+y-x$. 711. $z=y+2x$, $z=y-2x$. 712. $z=\ln(x^2e^y+1)/(\ln 5+1)$. 713. $z=-y-\sqrt{y^2-\ln(xy^{2x})}$, $z=-y+\sqrt{y^2-\ln(xy^{2x})}$. 714. Ei. 715. Ei. 716. Jaa, ei. 717. $z_x=-1$ $z_y=-y/(x+z)$. 718. $z_x=-\sin x\ \cos y\ \exp(-z)$, $z_y=-\cos x\ \sin y\times\exp(-z)$. 719. $z_x=(z^3-yz(x+z))/(z^2(x+z)\ln(x+z)+z^3+xy+xy(x+z))$, $z_y=xz(x+z)/[z^2(x+z)\ln(x+z)+z^3+xy+xy(x+z)]$. 720. $z_x=-\cos^{-2}(xy)\times\sqrt{1-z^2}$, $z_y=-x\cos^{-2}(xy)\sqrt{1-z^2}$. 721. $dz=-(\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy)/$

$/\sin 2x$. 722. $dz=-dx-dy$. 723. $dz=(xdx+ydy)/(1-z)$. 724. $dz=$ $=1/3(dx+2dy)$, $z_x+z_y=1$, $z_x-z_y=-1/3$. 725. $dz=2/(1-2z)\times$ $\times(xdx+ydy)$, $z_x+z_y=2(x+y)/(1-2z)$, $z_x-z_y=2(x-y)/(1-2z)$.

726. $z_{xx}=-(z^2+x^2)/z^3$, $z_{xy}=-xy/z^3$, $z_{yy}=-(z^2+y^2)/z^3$.

727. $z_{xx}=((1-z)^2+x^2)/(1-z)^3$, $z_{xy}=xy/(1-z)^3$, $z_{yy}=((1-z)^2+y^2)/$ $/(1-z)^3$. 728. $z_{xx}=-y^2z/(x^2-y^2)^2$, $z_{xy}=xyz/(x^2-y^2)^2$, $z_{yy}=-x^2z/(x^2-y^2)^2$. 729. $z_{xx}=0$, $z_{xy}=0$, $z_{yy}=8[1-(z-x)/\cos(z-x)]\times$ $\times[\cos(z-x)/(\sin(2z-2x)+z+x)]^2$. 730. $d^2z=-2/5\ dx^2-2/5\ dxdy-$ $-394/125\ dy^2$. 731. $d^2z=-dx^2+2dxdy$. 732. $z_{xxx}=e^{x-z}-3e^{2(x-z)}+$ $+2e^{3(x-z)}$, $z_{yyy}=e^{y-z}-3e^{2(y-z)}+2e^{3(y-z)}$, $z_{xxy}=z_{xyx}=z_{yxx}=$ $=-e^{y+x-2z}+2e^{y+2x-3x}$, $z_{xyy}=z_{yxy}=z_{yyx}=-e^{y+x-2z}+2e^{x+2y-3z}$.

733. $x+y+z=3$, $x=y=z$. 734. $6x+3y+2z=18$, $x=2y-3=3z-8$.

735. $5x+y+11z=18$, $(x+1)/5=y-1=(z-2)/11$. 736. $x+y+3z=9$, $x-1=y-2=(z-2)/3$. 737. $x+2y=4$, $\begin{cases} x-2=y-1 \\ z=0\ . \end{cases}$

§ 2.

743. $y=-\ln|x|$, $z=|x|e^x$. 744. $y=\ln 2x-\ln(1-e^x)$, $z=x(e^x+1)/(1-e^x)$. 745. $y=x\,\mathrm{arccot}\ x^3$, $z=x\ \arctan\ x^3$.

746. $u=\sin^2(x+y)$, $v=\cos^2(x+y)$. 747. $u=\cos^2(x/2-y)$, $v=\sin^2(x/2-y)$. 748. $u=\ln(x\mp y)$, $v=\ln(x\pm y)$. 749. $y'=-2$, $z'=4$.

750. $y'=0$, $z'=-1$. 751. $y'=-\pi/8$, $z'=\pi/8$. 752. $v_x=3/5$, $v_y=1/5$, $u_x=1/5$, $u_y=-3/5$. 753. $u_x=1/8$, $u_y=1/8$, $v_x=-1/8$, $v_y=-1/8$. 754. $u_x=u_y=0$, $v_x=1/2$, $v_y=0$. 755. $y'=7/15$,

$y''=-38/45$, $z'=4/3$, $z''=-4/9$. 756. $y'=-1$, $y''=-4/5$, $z'=0$, $z''=4/5$. 757. $y'=0$, $y''=3/4$, $z'=-1$, $z''=-3/4$. 758. $dv=dx$, $du=-dx+2dy$, $d^2v=-dx^2+2dxdy+2dy^2$, $d^2u=dx^2+4dxdy-2dy^2$.
759. $du=dx+(1-\sin 1)dy$, $dv=\sin 1 dy$, $d^2u=-d^2v=2(\sin 1-\cos 1)dxdy+$ $+(\sin 2-2\cos 1)dy^2$. 760. $y=\sin x/\sqrt{1-\cos x}$, $z=\sqrt{1-\cos x}$, $y_x=(z\cos x-y\sin x)/(z^2-y^2)$, $z_x=(-z\sin x+y\cos x)/(z^2-y^2)$.
761. $du=-((uy+v)dy+udx)/(y^2+x)$, $dv=-((yv-xu)dy+uydx)/(y^2+x)$.

§ 3.

762. $dz=1/2(xdx+ydy)$. 763. $dz=(xdx-ydy)/z$. 764. $dz=$ $=3/2\left[(x^2-y)dx+xdy\right]$. 765. $dz=\sqrt{z}\,(xdx-ydy)$ 766. $dz=8/(x^2+y^2)$ $(-ydx+xdy)$. 767. $dz=xdx+ydy$. 768. $dz=2(xdx+ydy)$. 769. $dz=$ $=e^{-u}\left[(v\cos v-u\sin v)dx+(u\cos v+v\sin v)dy\right]$. 770. $dz=2(xdx+ydy)$.
771. $z_x=3/2$, $z_y=-1/2$. 772. $dz=dy$. 773. $z_{xy}=16xyz^{-3}$, $z_{yy}=$ $=-16x^2z^{-3}$, $z_{yxx}=-64yz^{-5}(y^2+2x^2)$, $z_{yxy}=64x^3z^{-5}(x^2+2y^2)$.
774. $z_{yy}=16xy/(x^2+y^2)^2$, $z_{yx}=8(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2$, $z_{yxy}=$ $=16y(3x^2-y^2)/(x^2+y^2)^3$, $z_{yxx}=-16x(3y^2-x^2)/(x^2+y^2)^3$.
775. $x_{yy}=2$, $z_{yx}=z_{yxy}=z_{yxx}=0$. 776. $z_{xx}=(y^2-1)/z^3$.
777. $d^2z=2/(x^2+y^2)\,(xydx^2+(x^2-y^2)dxdy+x^2dy^2)$. 778. $dz=0$, $d^2z=1/2(dx^2-dy^2)$. 779. $z=x+2$, $\begin{cases} z=x+2, \\ y=0. \end{cases}$ 780. $-6x+2y+z=-8$, $x-3=$ $=-3y+3=-6z+48$. 781. $3x+3y-z=10$, $x-2=y-2=6-3z$.

§ 4.

782. $y''_{tt}+y=0$. 783. $y''_{tt}+2y'_t+y=0$. 784. $y''_{tt}+y=0$.

785. $y'''_{ttt}-y'_{tt}-y'_t+y=0$. 786. $y''_{tt}+y=0$. 787. $y'''_{ttt}-3y''_{tt}+2y'_t-6y=$ $=0$. 788. $y''_{tt}+y=0$. 789. $t\cdot y''_{tt}+y=0$. 790. $t^2\cdot y''_{tt}+2ty'_t=2$.

791. $y'_t-t=0$. 792. $y'_t+t-1=0$. 793. $y''_{tt}=0$. 794. $x''_{yy}-2x'_y=0$.

795. $x'''_{yyy}=0$. 796. $x'''_{yyy}+x(x'_y)^5=0$. 797. $x\cdot x''_{yy}-1+(x'_y)^2=0$.

798. $x^{(4)}_{y^4}=0$. 799. $u''_{tt}-(u+3)u'_t+2u=0$. 800. $u''_{tt}=0$. 801. $u''_{tt}+$ $+8u(u'_t)^3=0$. 802. $t^5u'''_{ttt}+(3t^4+1)u''_{tt}+u'_t=0$. 803. $u''_{tt}=\mathrm{ch}^{-3}t$.

804. $u'_t-u=0$. 805. $u''_{tt}-u'=u$. 806. $w=r^2/\sqrt{r'^2+r^2}$. 807. $w=r'/r$.

808. $w=(r^2+r'^2)^{3/2}/|r^2+zr'^2-rz''|$. 809. $u''-2xu'+(x^2-1)u=0$.

810. $u''-2xu'+(x^2-2)u=0$. 811. $u''\sin x+u'2\cos x(1-\sin x)+$ $+u(\sin^2x(1-\sin x)+2\cos^2x)=0$. 812. $v_s+u_t=e^s\mathrm{sh}t$. 813. $u_s=u_t$.

814. $u_{st}=0$. 815. $u_{st}=0$. 816. $u_x=0$. 817. $xu_x-u=0$. 818. $u_{xx}=$ $=2t/(t^2+x^2)u_t$. 819. $w=u_\varphi$. 820. $w=ru_r\cos 2\varphi-u_\varphi\sin 2\varphi$.

821. $w=r^2u_{rr}$. 822. $w=u_{\varphi\varphi}$. 823. $u_s+u_t=e^s\mathrm{sh}t$. 824. $u_s=u_t$.

825. $u_{st}=0$. 826. $u_{st}=0$. 827. $u_{st}=1/2s\cdot u_t$. 828. $u_t=1/2$.

829. $u_t=u/t\cdot(u^2+s)/(u^2-s)$. 830. $w_{ss}=0$. 831. $w_{ss}=1/2$.

832. $w_s=0$. 833. $w_x=0$. 834. $w_t=0$. 835. $w_{st}=0$. 836. $u_w=0$.

837. $u_{rr}+1/r\ u_r+1/r^2\ u_{\varphi\varphi}=0$. 838. $\nabla^2u=(u_r)^2+(u_\theta)^2/r^2+$ $+(u_\varphi)^2/(r^2\sin^2\theta)$. 839. $\nabla u=u_{rr}+2u_r/r+u_{\theta\theta}/r^3+u_{\varphi\varphi}/$ $/(r^2\sin^2\theta)+u_\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta/r$.

§ 5.

840. (0,0),(-5/3,0),(-1, 2),(-1,-2). 841. (1/2,-1). 842. (0,0). 843. (-2/3,-2/3), x=-1, y=-1. 844. (π/6, π/6). 845. (-2,0),(16/7,0) (kumbki punkt on kriitiline f(x,y) ühe haru jaoks). 846. min z=z(0,1)=0. 847. Ekstreemum puudub. 848. min z=z(1,0)=-2. 849. max z=z(0,0)=1. 850. max z==z(0,0)=10. 851. min z=z(1,1)=-1. 852. Ekstreemum puudub. 853. max $z=e^{-13}$=z(1,3), min z=-26exp(-1/52)=z(-1/26,-3/26). 854. min z=z(1,-2)=0. 855. min z=z($1/\sqrt{2e}$, $1/\sqrt{2e}$)= =z($-1/\sqrt{2e}$,$-1/\sqrt{2e}$)=-1/2e, max z=z($1/\sqrt{2e}$,$-1/\sqrt{2e}$)=z(-1/ 2e, =z(-1/ 2e,1/ 2e)=1/2e. 856. max z=6, min z=-2, kui x=1,y=-1. 857. min z=($4+\sqrt{6}$)/6=z(-(1+$\sqrt{6}$)/3),2/3), max z=($4-\sqrt{6}$)/6= =z(($\sqrt{6}$-1)/3,2/3). 858. min z=z(2 π/3,2 π/3)=$-3\sqrt{3}/8$, max z= =z(π/3, π/3)=$3\sqrt{3}/8$. 859. min u=-14=u(-1,-2,3). 860. min u= =4=u(1/2,1,1). 861. max u=1=u(1,1,1), mitterange ekstreemum, kui y=0, x$\neq$0, z=0, x+2y+3z$\neq$7. 862. min u=u(0,0,0)=0. Uurida vahe u(P)-u(P_0) märki. 863. max z=z(-1,0)=z(1,0)=3, min z=z(0,-1)=z(0,1)=1. 864. max z=z(1,2)=17, min z= =z(1,0)=-3. 865. min z=z(0,0)=0, max z=z(0,$\mp$1)=3/e. 866. max z=z(π/3, π/3)=$3/2\sqrt{3}$, min z=z(0,0)=0. 867. max z= =z(0,-3)=z(-3,0)=6, min z=z(-1,-1)=-1. 868. max z= =z(-2,4)=z(2,4)=32, min z=z(0,0)=0. 869. max z=z(2,0)=

$=2$, $\min z=0$ kõikides D punktides, kus $x=y^2$ või $x=1$.

870. $\max u=u(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,1)=\sqrt{2}+1$, $\min u=u(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,1)=$ $=1-\sqrt{2}$. 871. 10,10,10. 872. 3,3,3,3. 873. Kuup küljega $d=2\sqrt{3}/3\cdot R$. 874. Kuup. 875. Risttahuka kõrgus võrdub 1/3 koonuse kõrgusest. 876. $7\sqrt{2}/8$. 877. Võrdhaarne. 878. Võrdkülgne kolmnurk. 879. Võrdkülgne kolmnurk. 880. Võrdkülgne kolmnurk. 881. Risttahuka mõõtmed on $2a/\sqrt{3}$, $2b/\sqrt{3}$, $2c/\sqrt{3}$, kus a,b,c on ellipsi pooltelgede pikkused. 882. Kolmnurga küljed on $p/2$, $3p/4$, $3p/4$.

§ 6.

884. rel min $z=z(2\frac{2}{3}, 6\frac{2}{9})=16\frac{16}{27}$. 885. rel max $z=z(0,0)=1$. 886. rel max $z=z(-1,1)=2$, rel min $z=z(1,1)=-2$. 887. rel min $z=z(0,\mp\sqrt{\pi})=0$. 888. rel max $z=z(1/2,1/2)=e^{1/4}$. 889. rel min $z=z(1,1)=2$. 890. rel max $z=z(2,2)=z(-2,-2)=4$, rel min $z=z(-2,2)=z(2,-2)=-4$. 891. rel min $z=z(0,0)=0$. 892. rel min $z=z(-2,-2)=-1$, rel max $z=z(2,2)=1$. 893. Statsionaarsed punktid $x=-1/2 \arctan 2+\pi n/2, y=x+\pi/4, n=0,\pm1,\dots$. 894. rel min $z=z(0,1)=0$. 895. rel max $z=z(\pi/3, \pi/6)=\pi/6$, vähim väärtus 0. 896. rel max $z=z(4/5,3/5)=11$, rel min $z=$ $=z(-4/5,-3/5)=1$. 897. rel min $z=z(-3/\sqrt{13},-2/\sqrt{13})=-\sqrt{13}/6$, rel max $z=z(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})=\sqrt{13}/6$. 898. rel max $z=z(18/13, 12/13)=36/13$. 899. rel min $u=u(12,12,12)=36$. 900. rel min $u=$

$=u(-1,2,-2)=-9$, rel max $u=u(1,-2,2)=9$. 901. rel max $u=u(\mp 4,0,0)=4$, rel min $u=u(0,0,\mp 2)=2$. 902. rel max $u=u(2,4,6)=32\cdot 6^3$. 903. rel max $u=u(5/3,5/3,5/3)=125/27$.

904. Ekstreemumid puuduvad. 905. rel max $u=u(\pi/3,\pi/3,\pi/3)=1/8$. 906. Relatiivne maksimum, kui 2 muutujat võrduvad 4/3 ja kolmas 7/3, rel max $u=112/27$. Relatiivne miinimum, kui kaks muutujat võrduvad 2 ja kolmas võrdub 1, rel min $u=4$.

907. rel max $u=(12+3\sqrt{2})/7$, rel min $u=(12-3\sqrt{2})/7$. 908. a) Harilikule ekstreemumile taandades rel max, kui $x=-1$ ja $y\sin y=-2$, rel max $z=2$, rel min, kui $x=1$ ja $y\sin y=2$, rel min $z=-2$. b) Smithi meetodil lisaks eelnevale relatiivsed maksimumid, kui $\begin{cases} \tan y=-y \\ x(x^2+1)=y\sin y, \end{cases}$

ja $(4k+1)\pi/2<y<(2k+1)$ või $-(2k+1)\pi<y<-(4k+1)\pi/2$, ning relatiivne maksimum kohal $(0,0)$. Relatiivsed miinimumid, kui $\begin{cases} \tan y=-y \\ x(x^2+1)=y\sin y, \end{cases}$

ja $\pi/2<|y|<\pi$ või $(4k-1)\pi/2<y<2k\pi$ või $-2k\pi<y<-(4k-1)\pi/2$. Märkus: Igas y muutumispiirkonna eespoolmärgitud vahemikus on parajasti üks tinglik ekstreemum.

909. $(21/13, 2, 63/26)$. 910. $(4/\ 5, 3/\sqrt{5})$ ja $(-4/\sqrt{5}), -3/\sqrt{5})$.

911. Kuup. 912. Kuup. 913. Tetraeeder. 914. Minimaalne pindala on $3\sqrt{3}ab$, kus a, b on ellipsi pooltelgede pikkused.

25 kop.