$\frac{10}{22}$ December 1874.

Über die mittlere Krümmung der Flächen. Von Ferd. Minding.

Der Ausdruck des Linearelements auf einer krummen Fläche, nämlich

$$ds = \sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$$

kann immer auf folgende Form gebracht werden:

$$ds = \sqrt{E(dp^2 + dq^2)},$$

in welcher also $E = G$ und $F = 0$ ist. Diese Verwandlung, welche nichts anderes ist als die conforme Übertragung (nach der Benennung von Gauss) einer Fläche auf die Ebene, lässt sich auf unzählig viele Arten bewirken; wenn sie jedoch auf eine Art durch die Argumente p und q, auf eine zweite Art durch die Argumente p' und q' geschehen ist, so hat man also

$$ds^2 = E(dp^2 + dq^2) = E'(dp'^2 + dq'^2),$$

daher besteht zwischen den beiderseitigen Argumenten die Relation

$$p + qi = f(p' + q'i),$$

wo f eine willkürliche Function anzeigt und $i = \sqrt{-1}$. ist.

Wenn nun die Argumente p und q den Bedingungen $E = G$ und $F = 0$ entsprechend gewählt sind, so erhält der Ausdruck der mittleren Krümmung der Fläche eine bemerkenswerthe einfache Gestalt, wie sogleich gezeigt werden soll.

Setzt man $dz = tdx + udy$, $dt = Tdx + Udy$, $du = Udx + Vdy$ und bezeichnet die mittlere Krümmung mit P, so ist

$$2P = \frac{(1+u^2)\,T - 2tuU + (1+t^2)\,V}{(1+t^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach den Bezeichnungen von Gauss in den *disqu. c. sup. curvas* ist

$$dx = adp + a'dq,\quad dy = bdp + b'dq,\quad dz = cdp + c'dq$$
$$da = \alpha dp + \alpha' dq,\quad db = \beta dp + \beta' dq,\quad dc = \gamma dp + \gamma' dq$$
$$da' = \alpha' dp + \alpha'' dq,\quad db' = \beta' dp + \beta'' dq,\quad dc' = \gamma' dp + \gamma'' dq,$$
$$bc' - b'c = A,\quad ca' - c'a = B,\quad cb' - c'b = C,$$
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D,\quad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D',\quad A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'',$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = E,\quad aa' + bb' + cc' = F,\quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G,$$
$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2 = \Delta.$$

Aus

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

folgt

$$t = -\frac{A}{C},\quad \mu = -\frac{B}{C},$$

daher

$$2P = \frac{(B^2 + C^2)\,C^3 T - 2ABC^3 U + (A^2 + C^2)\,C^3 V}{\Delta^{\frac{3}{2}}\,.\,C^2}.$$

Die Werthe von T, U, V finden sich in den *disqu. art. 10* durch p und q dargestellt, es ist

$$C^3 T = Db'^2 - 2D'bb' + 2D''b^2$$
$$C^3 U = -Da'b' + D'(ab' + a'b) - D''ab$$
$$C^3 V = Da'^2 - 2D'aa' + D''a^2.$$

Demnach erhält man, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird

$$S = B^2C^3T - 2ABC^3U + A^2C^3V,$$

die Gleichung

$$\Delta^{\frac{3}{2}}.2P = C^3T + C^3V + \frac{S}{C^2}.$$

Dieses S verwandelt sich aber durch Einsetzung der Werthe von $C^3T, \ldots$ in folgenden Ausdruck:

$$S = D(Aa' + Bb')^2 - 2D'(Aa' + Bb')(Aa + Bb) + D''(Aa + Bb)^2,$$

also wird

$$\frac{S}{C^2} = Dc'^2 - 2D'cc' + D''c^2$$

und hiermit schliesslich:

$$2P = \frac{DG - 2D'F + D''E}{\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

Vorstehenden Ausdruck der mittleren Krümmung habe ich in einer im Jahre 1863 als Gelegenheitsschrift hiesiger Universität gedruckten Abhandlung (*de curvatura superficierum quaestiones*) entwickelt; da jedoch diese Abhandlung den meisten Lesern gegenwärtiger Zeilen unbekannt geblieben sein mag, so schien es mir nöthig, die dortige Herleitung hier zu wiederholen.

Sind nun die Argumente p und q so gewählt, dass $E = G$ und $F = 0$ ist, so wird $\Delta = E^2$ und

$$2E^2P = D + D'',$$

oder

$$2E^2P = A(\alpha + \alpha'') + B(\beta + \beta'') + C(\gamma + \gamma'').$$

Es ist aber

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = E, \quad aa' + bb' + cc' = 0,$$

daher:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{1}{2}\frac{dE}{dp}, \quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq},$$

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dp}, \quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq},$$

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$$

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = 0.$$

Hiernach hat man:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma - \frac{1}{2}\frac{dE}{dp} = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} = 0$$

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \frac{1}{2}\frac{dE}{dp} = 0, \quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} = 0,$$

folglich auch:

$$a(\alpha + \alpha'') + b(\beta + \beta'') + c(\gamma + \gamma'') = 0$$

$$a'(\alpha + \alpha'') + b'(\beta + \beta'') + c'(\gamma + \gamma'') = 0,$$

also $\quad \alpha + \alpha'' : \beta + \beta'' : \gamma + \gamma'' = A : B : C$

oder wenn m einen noch zu bestimmenden Factor bezeichnet:

$$\alpha + \alpha'' = mA, \quad \beta + \beta'' = mB, \quad \gamma + \gamma'' = mC.$$

Diese Werthe in den obigen Ausdruck für $2E^2P$ eingesetzt geben:

$$2E^2P = m(A^2 + B^2 + C^2) = mE^2,$$

folglich $\quad m = 2P,$

$$\alpha + \alpha'' = 2PA, \quad \beta + \beta'' = 2PB, \quad \gamma + \gamma'' = 2PC,$$

daher

$$4E^2P^2 = (\alpha + \alpha'')^2 + (\beta + \beta'')^2 + (\gamma + \gamma'')^2$$

oder

$$4E^2P^2 = \left(\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{d^2x}{dq^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dp^2} + \frac{d^2y}{dq^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dp^2} + \frac{d^2z}{dq^2}\right)^2.$$

Diese Gestalt nimmt also der Ausdruck der mittleren Krümmung an, wenn die Argumente p und q so gewählt werden, dass $E = G$ und $F = 0$ ist.

Es liegt nun nahe zu versuchen, wie sich dieser Ausdruck benutzen lässt zur Lösung der Aufgabe: durch eine gegebene Curve alle möglichen Flächen zu legen, deren mittlere Krümmung gleich Null ist. So viel ich finde, führt er jedoch nur zu derjenigen Schaar der Flächen von verlangter Art, auf welchen die gegebene Curve, nachdem p und q den Bedingungen $E = G$ und $F = 0$ entsprechend gewählt sind, eine Curve von constantem q ist.

Damit die mittlere Krümmung gleich Null sei, müssen nach Vorstehendem folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$E = G, \quad F = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{d^2x}{dq^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dp^2} + \frac{d^2y}{dq^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dp^2} + \frac{d^2z}{dq^2} = 0.$$

Es sei p der Bogen der gegebenen Curve, von einem beliebigen Anfangspunkte gezählt, oder auch eine Function des Bogens, und die rechtwinkligen Coordinaten des zu p gehörigen Punktes der Curve seien

$$x = \varphi_1 p, \quad y = \varphi_2 p, \quad z = \varphi_3 p.$$

Alsdann lassen sich die Coordinaten der gesuchten Fläche darstellen, wie folgt:

$$2x = \varphi_1(p+qi) + \varphi_1(p-qi) + i\{\psi_1(p+qi) - \psi_1(p-qi)\}$$
$$2y = \varphi_2(p+qi) + \varphi_2(p-qi) + i\{\psi_2(p+qi) - \psi_2(p-\}q)\, i$$
$$2z = \varphi_3(p+qi) + \varphi_3(p-qi) + i\{\psi_3(p+qi) - \psi_3(p-qi)\}.$$

Diese Ausdrücke stellen reelle Werthe der Coordinaten dar, die für $q = 0$ in die Coordinaten der gegebenen Curve übergehen; sie genügen den Bedingungen $\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{d^2x}{dq^2} = 0, \ldots$ und zwar auf die allgemeinste Weise, indem die erste Hälfte rechter Hand eine gerade, die zweite eine ungerade Function von q darstellt; es bleiben also nur noch die Bedingungen $E = G$ und $F = 0$ zu erfüllen. Dies geschieht durch zweckmässige Bestimmung der Functionen ψ.

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$p + qi = u, \quad p - qi = v$$
$$\varphi_1 u + i\psi_1 u = f_1(u, i) = f_1 u,$$
$$\varphi_1 v - i\psi_1 v = f_1(v, -i) = F_1 v,$$

eben so:

$$\varphi_2 u + i\psi_2 u = f_2 u, \quad \varphi_2 v - i\psi_2 v = F_2 v,$$
$$\varphi_3 u + i\psi_3 u = f_3 u, \quad \varphi_3 v - i\psi_3 u = F_3 v;$$

so hat man

$$2x = f_1 u + F_1 v, \quad 2y = f_2 u + F_2 v, \quad 2z = f_3 u + F_3 v,$$
$$2\frac{dx}{dp} = f_1' u + F_1' v, \quad 2\frac{dx}{dq} = i\{f_1' u - F_1' v\}$$

eben so für y und z; daher durch Addition der Quadrate:

$$4E = (f_1' u + F_1' v)^2 + (f_2' u + F_2' v)^2 + (f_3' u + F_3' v)^2$$
$$-4G = (f_1' u - F_1' v)^2 + (f_2' u - F_2' v)^2 + (f_3' u - F_3' v)^2.$$

Ferner folgt für F:

$$4F = i\{(f_1' u)^2 + (f_2' u)^2 + (f_3' u)^2 - (F_1' v)^2 - (F_2' v)^2 - (F_3' v)^2\}.$$

Aus den vorigen Gleichungen aber folgt:

$$4E - 4G = 2\{(f_1' u)^2 + (f_2' u)^2 + (f_3' u)^2 + (F_1' v)^2 + (F_2' v)^2 + (F_3' v)^2\}.$$

Da nun $F = 0$ und $E - G = 0$ sein soll, so muss man haben:

$$(f_1'u)^2 + (f_2'u)^2 + (f_3'u)^2 = 0$$
$$(F_1'v)^2 + (F_2'v)^2 + (F_3'v)^2 = 0,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(\varphi_1'u + i\psi_1'u)^2 + (\varphi_2'u + i\psi_2'u)^2 + (\varphi_3'u + i\psi_3'u)^2 = 0$$
$$(\varphi_1'v - i\psi_1'v)^2 + (\varphi_2'v - i\psi_2'v)^2 + (\varphi_3'v - i\psi_3'v)^2 = 0.$$

Schreibt man in der zweiten dieser Gleichungen $-q$ für q, so verwandelt sich v in u und die zweite Gleichung geht über in folgende:

$$(\varphi_1'u - i\psi_1'u)^2 + (\varphi_2'u - i\psi_2'u) + (\varphi_3'u - i\psi_3'u)^2 = 0,$$

welche mit der ersten Gleichung (in u) für jedes complexe Argument (u oder v) zusammen bestehen muss. Daher unterliegen die Functionen $\psi_1' u, ..$ folgenden Bedingungen

$$(\varphi_1'u)^2 + (\varphi_2'u)^2 + (\varphi_3'u)^2 = (\psi_1'u)^2 + (\psi_2'u)^2 + (\psi_3'u)^2$$
$$\varphi_1'u \,.\, \psi_1'u + \varphi_2'u \,.\, \psi_2'u + \varphi_3'u \,.\, \psi_3'u = 0,$$

welche allgemein für jedes beliebige reelle oder complexe Argument erfüllt werden müssen. Da nur zwei Bedingungen für drei unbestimmte Functionen ψ vorliegen, so stellen die gefundenen Formeln eine unendliche Mannigfaltigkeit oder vielmehr die Gesammheit aller derjenigen Flächen von mittlerer Krümmung $= 0$ dar, welche sich durch die gegebene Curve legen lassen unter der einschränkenden Bedingung, dass dieser Curve ein constanter Werth von q angehören soll.

Dieser constante Werth von q ist im Vorstehenden immer $= 0$ gesetzt worden; es ist aber klar, dass zur Einführung eines anderen Werthes q^0 von q nur nöthig sein würde, $q - q^0$ für q zu schreiben.

Nachdem die drei Functionen $\psi_1'u$, $\psi_2'u$, $\psi_3'u$ den obigen zwei Bedingungen auf irgend eine Weise entsprechend gewählt sind, erhält man noch:

$$2E = f_1'u \,.\, F_1'v + f_2'u \,.\, F_2'v + f_3'u \,.\, F_3'v$$

oder

$$2E = \Sigma(\varphi_n'u + i\psi_n'u)(\varphi_n'v - i\psi_n'v) \text{ für } n = 1, 2, 3;$$

also für E eine reelle und positive Grösse, wie erforderlich.

Um von $\psi_1'u$ auf $\psi_1 u$ überzugehen, bedarf es nur einer einfachen Integration nach q. Denn wird $\psi_1'u$ in einen reellen und einen imaginären Theil zerlegt, also gesetzt: $\psi_1'u = M' + N'i$, $\psi_1'v = M' - N'i$, so folgt:

$$id\{\psi_1 u - \psi_1 v\} = i\{(M'+N'i)(dp+idq) - (M'-N'i)(dp-idq)\}$$
$$= -2\{M'dq + N'dp\};$$

der Ausdruck rechter Hand ist nothwendig ein vollständiges Differential. Integrirt man also zuerst nach q von 0 anfangend und setzt den Werth, den N' für $q = 0$ erhält, $= N_0$, so wird

$$\int(M'dq + N'dp) = \int_0^q M'dq + \int N_0'dp.$$

Für $q = 0$ wird aber $\psi_1'u = \psi_1'p$ reell, also $N_0' = 0$ und

$$i\{\psi_1 u - \psi_1 v\} = -2\int_0^q M'dq.$$

Folglich wird

$$2x = \varphi_1(p + qi) + \varphi_1(p - qi) - 2\int_0^q M'dq;$$

dieselbe Form erhalten auch die Ausdrücke für $2y$ und $2z$.

Die Curven von constantem p bilden mit denen von constantem q auf der Fläche ein rechtwinkliges Netz, welches auch wegen $E = G$ ein gleichseitiges heissen kann, in so fern man sich bei Zeichnung des Netzes überall $dp = dq$ angenommen denkt, wie es ja auch bei jedem anderen Netze geschehen kann. Ein solches Netz, worin überall $F = 0$ und $E = G$, könnte daher der Kürze wegen ein quadratisches Netz genannt werden, wobei jedoch die Veraussetzung, dass für Netze jeder Art die Argumente p und q, von jedem Knotenpunkte aus, gleiche Zunahmen erhalten, wesentlich zu Grunde gelegt ist.

Wenn in vorstehende Formeln anstatt p eine andere Function des Bogens — sie heisse p' — eingesetzt wird, so ist $p = f(p')$, $p + qi = f(p' + q'i)$, und die Functionen $\varphi(p + qi)$, $\psi(p + qi)$, verwandeln sich in $\varphi(f(p' + q'i)) = \Phi(p' + q'i)$, $\psi(f(p' + q'i)) = \Psi(p' + q'i)$. Die neuen Argumente p' und q' bestimmen alsdann auf derselben Fläche ein neues quadratisches Netz, in welchem aber die gegebene Curve eben so zu $q' = 0$ gehört wie im ersten Netze zu $q = 0$. Beide von einander verschiedene Netze haben, wenn man so sagen darf, die gegebene Curve zur gemeinschaftlichen Basis.

Dorpat.

(Aus dem Bulletin, T. XX, p. 531—537).

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Im April 1875. K. Wesselowski, beständiger Secretair.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
(Wass. Ostr., 9. Lin., № 12.)

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME IV.

$\frac{25 \text{ Juni}}{7 \text{ Jili}}$ 1868.

Über eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von Ferd. Minding.

Die Abhandlung *On shooting stars by* H. A. Newton im ersten Bande der *Memoirs of the national acadėmy of sciences, Washington 1866*, giebt über die wahrscheinliche Häufigkeit und Vertheilung dieser Meteore so viel Aufschluss, als es der gegenwärtige Stand der Beobachtungen erlaubt. Unter vielen anderen tritt daselbst auch die Frage auf: wie viele von sämmtlichen in einer gewissen Zeit zur Erde gefallenen Sternschnuppen im Gesichtsfelde eines in beliebiger Richtung aufgestellten Fernrohrs erscheinen werden. Hr. Newton findet die Wahrscheinlichkeit des geforderten Ereignisses mit einer für den Zweck seiner Schätzungen vollkommen genügenden Genauigkeit gleich $\frac{lb}{4\pi}$, wenn l die mittlere Länge des sichtbaren Laufes eines solchen Meteors, b den Durchmesser des Gesichtsfeldes und 2π den Kreisumfang bezeichnet. Ich habe eine vollständigere Lösung der Aufgabe ge-