TÕENÄOSUSTEOORIA LÜHIKURSUS

Ene Tiit

AVITA

TÕENÄOSUSTEOORIA LÜHIKURSUS

Ene Tiit

AVITA
Tallinn 1995

ISBN 9985-825-35-7

Autor Ene Tiit

Tõenäosusteooria lühikursus – I. trükk
Toimetaja Esta Erit
Keeleline toimetaja Kaire Luide
Raamatukujundus Heiki Savitsch
Kaanekujundus Tiit Aunaste

Trükk Avita Trükk

Kirjastus „Avita
postkast 3119
EE0090 Tallinn

EESSÕNA

Käesolev tõenäosusteooria lühikursus on mõeldud eeskätt matemaatikaõpetajatele, kes asuvad Eesti koolides tõenäosusteooriat ja matemaatilist statistikat õpetama. Kuigi tõenäosusteooriat on käsitletud ka uues algupärases keskkooliõpikus, on käesolev lühikursus põhjalikum. Selle eesmärgiks on näidata õpetajatele pisut ka jäämäe veealust osa, tutvustada (või täpsemini – meenutada) kooliõpetajatele tõenäosusteooria põhitõdesid *nende loogilises järjestuses ja seotuses.*

Oma napi mahu ja kokkusurutud esituse tõttu ei ole selles raamatus aine tehtud õppuritele suupäraseks põnevate seikadega tõenäosusteooria ajaloost ega ka huvitavate rakenduslike näidetega. Autor ei ole asjatundja koolimetoodika alal ning seetõttu pole esituses taotletudki koolipärasust. Puuduvad ka harjutusülesanded – nende poolest on rikkad teised seni õpilaste jaoks ilmunud õpikud ja käsiraamatud.

Siiski ei ole raamatule kavas lisada silti "Alla 18 aasta keelatud" Raamatu mõistmiseks piisab täielikult koolimatemaatikast ja autor loodab leida lugejaid ka nende poiste ja tüdrukute hulgast, kes oskavad näha abstraktsete arutelude ilu. Potentsiaalseteks lugejateks võiksid olla ka need mitmesuguste erialade õppijad (kutse- ja kõrgkoolides), kelle õppekavasse mahub vaid väga lühike tõenäosusteooria ja statistika kursus.

Hoolimata raamatu lühidusest on materjal esitatud kahes kontsentris. Esimese osa moodustab diskreetne tõenäosusteooria, mis olulises osas tugineb esimeses peatükis käsitletavale lõplikule elementaarsündmuste ruumile. Kasutades jaotuse esitusena tõenäosusfunktsiooni defineeritakse diskreetsed juhuslikud suurused ja nende funktsioonid. Tõestatakse ka Tšebõševi võrratus.

Teises peatükis vaadeldakse korduvate katsete skeemi ja jõutakse suurte arvude seaduse tõestuseni ja statistilise tõenäosuse mõisteni. See moodustabki esituse kulminatsiooni – siit järeldub sündmuse tõenäosuse ja esinemissageduse vastastikune seos, mis ühendab teoreetilisi mudeleid praktilise kogemusega. Selle kursuseosa lõpus tuuakse sisse empiiriline jaotus (kasutades selleks statistilist tõenäosust) ning jõutakse uue vaatenurga alt heita pilk noorematest klassidest tuttavatele kirjeldava statistika mõistetele.

Kursuse teise kontsentri moodustab kolmandas peatükis käsitletav pidev tõenäosusruum. Siin esitatakse kursuse esimese osa teatav üldistus, kus enam ei piirduta lõpliku ega loenduva elementaarsündmuste ruumiga ja käsitletakse ka pidevat juhuslikku suurust. Esimeseks näiteks siin on geomeetriline tõenäosus ja sellega seotud ühtlane jaotus, mille puhul säilib veel nn võrdtõenäosuse printsiip. Edasi jõutakse normaaljaotuse defineerimiseni ja selle omaduste käsitlemiseni, mis on möödapääsematuks eelduseks matemaatilise statistika kursuse jaoks. See kursuse osa on suhteliselt lühike, sest selle käsitlemine elementaarsete vahenditega on üsnagi problemaatiline. Kõige raskemaks pähkliks kursuse selles osas on tõenäosusteooria põhimõistete – sündmuse, tõenäosuse ja juhusliku suuruse korrektne käsitlemine, sest lugejate eeldatav ettevalmistuse tase ei võimalda raamatus kasutada selliseid mõisteid nagu σ-algebra, mõõt, mõõtuvad hulgad ja funktsioonid jne, mille abil tõenäosusteooria põhimõisted on elegantselt ja kaasaegselt esitatavad.

Käesoleva õppevahendi kirjutamisel on lugejatena eeldatud *asjahuvilisi* õpetajaid ja õpilasi. Seetõttu on püütud säilitada esituse loogilisus (vt tõestused ning arutelud, mis on markeeritud vastavalt lõpusümboliga ✦ ja ✧) ja välditud pettemängu tõestustega, millesse on salamahti peidetud olulised lüngad. Mõned ettehaaravad mõttekäigud on esitatud peenkirjas, need võib kiirustav lugeja vahele jätta.

Autoril jääb vaid üle loota, et võimalikult paljudel lugejatest tekib huvi võtta edaspidi käsile mõni tõsisem raamat samast valdkonnast.

Kasutan juhust, et avaldada tänu headele kolleegidele professor Kalev Pärnale ja dotsent Anne-Mai Parringule, samuti õpetajatele Mart Mölsile, Ain Rääbisele ja Kadri Hiobile käsikirja läbivaatamise ja hulga kasulike nõuannete eest. Tänan ka dotsent Imbi Traati ja õpilasi Meelis Käärikut ning Peeter Unti, kes eeltööga tutvusid ja häid ettepanekuid tegid.

Märt Mölsile, Baldur Kubole ja Meelis Käärikule suur aitäh tehniliste näpunäidete ning jooniste kujundamise eest! Elvi Ehasalule palju tänu abi eest.

I LÕPLIK TÕENÄOSUSRUUM

1. SÜNDMUS JA TÕENÄOSUS

1.1. Katse ja katsetulemused. Elementaarsündmuste ruum

Tõenäosusteoorias on üheks põhimõisteks *(juhuslik) katse*, mille all mõistetakse teatavat *juhuslikku valikut* etteantud katsetulemuste hulgas. Eeldatakse, et katse on suvaline arv kordi korratav. Käesolevas peatükis me eeldame, et

1^0 katsel on n võimalikku tulemust (n on lõplik arv),
2^0 katse teostamisel esineb alati täpselt üks (üks ja ainult üks) katsetulemus,
3^0 katsetulemused on võrdvõimalikud.

Viimane tingimus sisaldab eneses katsetulemuste teatavat sümmeetrilisuse või samaväärsuse nõuet, mis on tavaliselt intuitiivselt hästi arusaadav.

DEFINITSIOON 1.1. Tingimusi $1^0 - 3^0$ rahuldavaid katsetulemusi nimetatakse *elementaarsündmusteks* ja kõigi antud katsega määratud elementaarsündmuste hulka *elementaarsündmuste ruumiks.*

Elementaarsündmusi tähistame edaspidi sümboliga ω lisades vajaduse korral juurde indeksi, näiteks ω_i Elementaarsündmuste ruumi tähiseks on Ω Seega kehtib käesolevas paragrahvis kokkulepe

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}. \tag{1.1}$$

Näide 1.1. Olgu katseks kaardi tõmbamine 52-kaardisest kaardipakist, kusjuures iga erineva kaardi saamine moodustab ühe elementaarsündmuse, $n = 52$.

Näide 1.2. Olgu katseks täringuvise ja iga erinev visketulemus moodustab elementaarsündmuse, $n = 6$.

Näide 1.3. Olgu katseks juhusliku õpilase väljavalimine klassist, kus on 25 õpilast. Siis vastab igale õpilasele üks elementaarsündmus, $n = 25$. Oluline on siin, et valikumehhanism tagaks elementaarsündmuste võrdvõimalikkuse. Üks võimalus sellise valikumehhanismi loomiseks on näiteks *juhuslike arvude generaatori* kasutamine, millest tuleb juttu kursuse lõpuosas (vt punkt 12.6). Teine võimalus on valmistada 25 ühesugust sedelit õpilaste nimedega ja valida juhuslikult üks sedel.

Näide 1.4. Olgu katseks kahe ühesuguse mündi viskamine. Tähistame vapipoole pealelangemise tähega V, kirjapoole pealelangemise tähega K. Kahe mündi visketulemusteks on kas (K, K) (mõlemad kirjad), (K, V) (üks vapp, teine kiri – kuna mündid on ühesugused, ei tee me vahet, kummal on peal kiri, kummal vapp) või (V, V) (mõlemad vapid). Kuid need tulemused ei moodusta elementaarsündmuste ruumi ülalesitatud tähenduses, sest ei ole võrdtõenäosed – sündmuse (K, V) esinemiseks on kaks korda rohkem võimalusi kui ülejäänud sündmuste esinemiseks. Elementaarsündmuste ruumi saame, kui eristame münte ja lisame elementaarsündmuse (V, K).

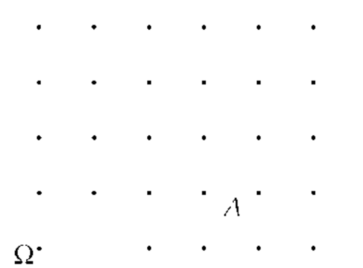
Näide 1.5. Peresse oodati last. Tulemused "sünnib poiss" ja "sünnib tütar" ei moodusta elementaarsündmuste ruumi (isegi mitte siis, kui jätaksime tähele panemata selle, et rahvastikustatistika andmeil on saja vastsündinu hulgas keskmiselt 51 – 52 poissi), sest on ka kolmas võimalus – sünnivad mõlemad.

1.2. Sündmus ja tema klassikaline tõenäosus

Tõenäosusteoorias on väga oluliseks põhimõisteks *sündmus*. Kaugeltki mitte kõik igapäevaelus sündmusteks nimetatavad juhtumid ei ole sündmused tõenäosusteooria mõttes, ja nende jaoks ei saa siis ka *tõenäosusi* arvutada. Sündmuse defineerimiseks on tarvis, et oleks eelnevalt määratud katse ja kirjeldatud selle tulemused – elementaarsündmused.

DEFINITSIOON 1.2. Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω. Ruumi Ω iga alamhulka $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ nimetatakse *sündmuseks.*

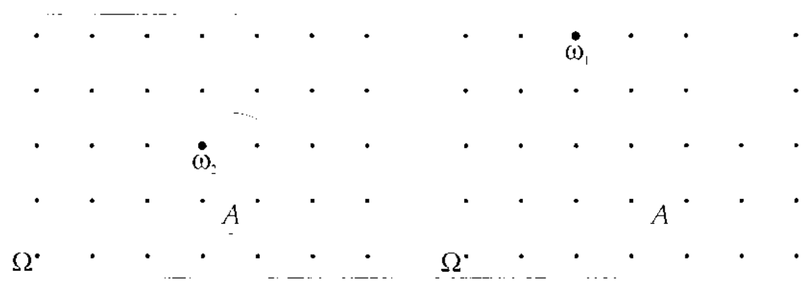
Joonisel 1.1 tähistab iga elementaarsündmust punkt.



Joonis 1.1.
Sündmus A elementaarsündmuste ruumis Ω.

Sündmust määrava alamhulga märkimiseks kasutatakse kahekordseid indekseid sellepärast, et me ei tea, milliste indeksitega elementaarsündmused hulka A kuuluvad, küll aga teame enamasti nende arvu k, mida näitab ka viimane indeks i_k.

Öeldakse, et sündmus A *toimub*, kui katse tulemuseks on üks selles sündmuses sisalduvatest elementaarsündmustest, vt joonis 1.2. Siin markeerib katse tulemusena esinenud elementaarsündmust suurem punkt. Sündmuses sisalduvaid elementaarsündmusi nimetetakse *temale soodsateks elementaarsündmusteks*.



Joonis 1.2.
Sündmuse A toimumise mehhanism. Vasakul sündmus A toimub, paremal ei toimu.

DEFINITSIOON 1.3. Sündmuse A *tõenäosuseks* $P(A)$ nimetatakse temas sisalduvate (ehk *tema jaoks soodsate*) elementaarsündmuste arvu k ja kõigi elementaarsündmuste arvu n suhet

$$P(A) = \frac{k}{n}\ . \tag{1.2}$$

TÕENÄOSUSE 1. OMADUS. Tõenäosuse väärtus on alati 0 ja 1 vahel.

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.3}$$

Tõepoolest, see tõenäosuse omadus järeldub vahetult valemist (1.2).

Seega on sündmuse tõenäosus alati *mittenegatiivne ja ei saa kunagi ületada arvu 1.*

✧

Näide 1.6. Vaatleme katset – kaardi tõmbamine 52-kaardisest pakist (vt näide 1.1) ja selle abil määratud elementaarsündmuste ruumi, ning määratleme sündmuse A – kaardi tõmbamisel saadi piltkaart. See sündmus sisaldab 12 elementaarsündmust (3 piltkaarti igast mastist) ja tema tõenäosus on $P(A) = \frac{12}{52} = 0{,}231.$

Näide 1.7. Vaatleme näites 1.2 kirjeldatud katset (täringuviset) ja sündmust A – täringuviske tulemusena saadakse paaritu arv silmi. Selle sündmuse tõenäosus on $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Näide 1.8. Olgu katseks õpilase juhuslik valik klassist, kus õpib 25 õpilast, neist 11 on poisid (vt näide 1.3), ja sündmuseks A poisi saamine. Siis on sündmuse A tõenäosus $P(A) = \frac{11}{25} = 0{,}44$.

1.3. Kindel, võimatu ja juhuslik sündmus

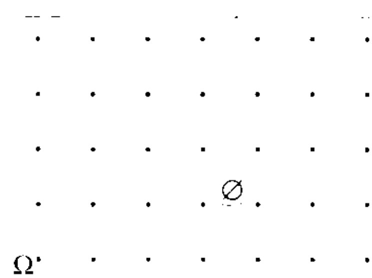
Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω. Kombineerides elementaarsündmusi erinevatel viisidel, saab neist kokku moodustada $2^n - 1$ sündmust. Lisades juurde veel tühja hulga $\varnothing$, saame kokku 2^n sündmust. Sündmuste hulgas on erijuhtudena ka kõik elementaarsündmused ω_i. Ka Ω ise on üks sündmus – see on sündmus, mis sisaldab kõiki elementaarsündmusi ja toimub katse tulemusena *alati*.

DEFINITSIOON 1.4. Sündmust, mis sisaldab kõiki elementaarsündmusi, nimetatakse *kindlaks sündmuseks*.

Kindla sündmuse tähistamiseks kasutatakse tavaliselt sümbolit Ω, mis tähistab ka kogu ruumi.

Ka tühjale elementaarsündmuste hulgale on antud erinimetus.

DEFINITSIOON 1.5. Sündmust, mis ei sisalda ühtki elementaarsündmust, nimetatakse *võimatuks sündmuseks*.



Joonis 1.3.
Võimatu ja kindel sündmus.

Võimatu sündmuse sümbolina kasutakse tavaliselt tühja hulga sümbolit $\varnothing$. Võimatu sündmus ei esine katse puhul kunagi. Joonisel 1.3 on sümboolselt kujutatud ka kindel sündmus ehk kõigi elementaarsündmuste hulk Ω ja mitte ainsatki elementaarsündmust sisaldav võimatu sündmus $\varnothing$.

Kindla ja võimatu sündmuse definitsioonist järeldub ka eeskiri nende tõenäosuste arvutamiseks.

TÕENÄOSUSE 2. OMADUS. Kindla sündmuse tõenäosus on 1 ja võimatu sündmuse tõenäosus on 0.

$$P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0 \tag{1.4}$$

Tõepoolest, kasutades valemit (1.2) saame $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1,\ P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

Lõpliku elementaarsündmuste ruumi puhul on õige ka vastupidine väide: kui sündmuse tõenäosus on 1, siis on see sündmus kindel, ja kui sündmuse tõenäosus on 0, siis on see sündmus võimatu.

Sündmust, mis ei ole ei kindel ega võimatu, nimetatakse *juhuslikuks sündmuseks*. Tõenäosuse teisest omadusest järeldub, et juhusliku sündmuse tõenäosus on rangelt 0 ja 1 vahel.

Näide 1.9. Vaatleme katsena täringuviset (vt näited 1.2 ja 1.7) ja küsime, kui suur on tõenäosus, et täringuviskel langeks peale 9 silma. Kuivõrd selle sündmuse jaoks ühtegi soodsat elementaarsündmust ei leidu, on selle tõenäosus 0.

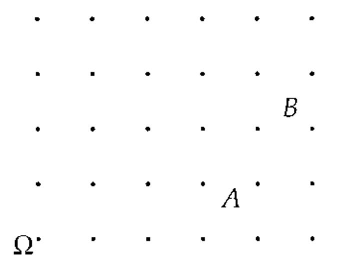
Näide 1.10. Vaatleme katsena taas täringuviset ja küsime, kui suur on tõenäosus, et täringul peale langev silmade arv oleks väiksem kui 7. Et kõik elementaarsündmused on selle sündmuse jaoks soodsad, siis on see kindel sündmus ja tema tõenäosus on 1.

1.4. Sündmuste järeldusseos

On hästi teada, et ühe sündmuse toimumisega võib kaasneda mingi teise sündmuse toimumine, samuti võib juhtuda, et ühe sündmuse toimudes muutub mõne teise sündmuse toimumine hoopis võimatuks.

Kõiki selliseid sündmuste vahelisi vahekordi kirjeldavad sündmuste *järeldusseosed*.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu antud sündmused $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ ning $B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_m}\}$. Eeldame, et hulkade A ja B vahel on sisaldusseos, $A \subset B$. Sellest sisaldusseosest tuleneb, et kõik elementaarsündmused, mis on soodsad sündmuse A jaoks, on soodsad ka sündmuse B jaoks, vt joonis 1.4. Niisiis, sündmuse A toimumisest järeldub sündmuse B toimumine.



Joonis 1.4.
Sündmuste järeldusseos $A \Rightarrow B$.

DEFINITSIOON 1.6. Kui sündmuse A toimudes toimub kindlasti ka sündmus B, siis öeldakse, et *sündmus B järeldub sündmusest A*.

Järeldusseost märgitakse kas hulkadevahelise sisaldusseose sümboli või noole abil,

$$A \subset B, \quad A \Rightarrow B .$$

Järeldusseos ei ole vastastikune. Kui kahe sündmuse vahel leiavad aset mõlemapoolsed järeldusseosed, siis on need sündmused identsed,

$$\text{kui } A \Rightarrow B \text{ ja } B \Rightarrow A, \text{siis } A = B .$$

Sündmuste järeldusseosest tuleneb järgmine oluline võrratus nende tõenäosuste vahel.

TÕENÄOSUSE 3. (MONOTOONSUSE) OMADUS. Kui sündmus B järeldub sündmusest A, siis ei ole sündmuse A tõenäosus suurem kui sündmuse B tõenäosus,

$$\text{kui } A \Rightarrow B, \text{ siis } P(A) \le P(B). \tag{1.5}$$

Tõepoolest, vastavalt järeldusseose definitsioonile sisaldab sündmus B kõiki neidsamu elementaarsündmusi, mis sündmus A, ja võib-olla veel täiendavaidki. Valemist (1.2) järeldub tõestatav omadus vahetult.

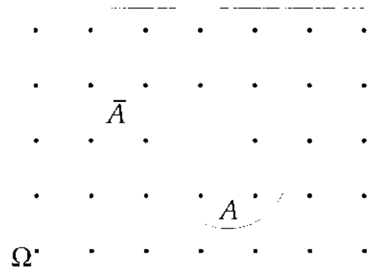
◇

Näide 1.11. Vaatleme katsena täringuviset ja sündmustena näites 1.7 defineeritud sündmust A (täringuviskel langeb peale paaritu arv silmi) ning defineerime veel sündmuse B – täringuviske tulemuseks on viis silma. Ilmselt kehtib seos $B \Rightarrow A$.

1.5. Vastandsündmus ja tema tõenäosus

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu antud sündmus A selles ruumis. Et sündmus A sisaldab mingi hulga elementaarsündmusi, $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, siis on sellega üheselt määratud ka *ülejäänud elementaarsündmuste hulk* (nende arv on $n-k$), vt joonis 1.5.

Seda elementaarsündmuste hulka nimetatakse sündmuse A vastandsündmuseks ja tähistatakse sümboliga $\overline{A}$.



Joonis 1.5.
Sündmuse A vastandsündmus $\overline{A}$.

DEFINITSIOON 1.7. Sündmuse A *vastandsündmuseks* $\overline{A}$ nimetatakse sündmust, mis toimub parajasti siis (siis ja ainult siis), kui sündmus A ei toimu.

Vastandsündmuse definitsioonist järeldub, et sündmuse A vastandsündmuse $\overline{A}$ tõenäosus on lihtsalt arvutatav sündmuse A tõenäosuse järgi: kui sündmus A sisaldab k elementaarsündmust, siis jääb vastandsündmusesse $n-k$ elementaarsündmust, ning seega saame seose:

$$P(\overline{A}) = \frac{n-k}{n} = 1 - P(A).$$

TÕENÄOSUSE 4. OMADUS (VASTANDSÜNDMUSE TÕENÄOSUS). Sündmuse A vastandsündmuse $\overline{A}$ tõenäosus $P(\overline{A})$ avaldub sündmuse A tõenäosuse kaudu järgmiselt:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Võime öelda ka nii – iga sündmuse ja tema vastandsündmuse tõenäosuste summa on võrdne ühega.

Tõenäosuse omaduste vaatlemist jätkame punktis 1.7 ja 1.10.

Kindla sündmuse vastandsündmuseks loetakse võimatut sündmust ja vastupidi, võimatu sündmuse vastandsündmuseks kindlat sündmust.

Näide 1.12. Vaatleme katsena kaardi tõmbamist 52-kaardisest pakist (vt näide 1.6) ning vaatame selles defineeritud sündmuse A (saadav kaart on piltkaart) vastandsündmust $\overline{A}$ – kaardipakist tõmmatav kaart ei ole pilt. Selle sündmuse tõenäosus on $1 - 0{,}231 = 0{,}769$.

Näide 1.13. Vaatame katsena juhusliku õpilase valimist 25 õpilasega klassist, kus poisse on 11, ja leiame näites 1.8 defineeritud sündmuse (valiti poiss) vastandsündmuse (klassist juhuslikult valitud õpilane osutus tütarlapseks) tõenäosuse. See tõenäosus on $1-0,44=0,56$.

1.6. Välistavad sündmused. Sündmuste täissüsteem

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω. Vaatleme mingeid sündmusi A ja B, mis ei sisalda ühtki ühist elementaarsündmust. Need sündmused ei saa korraga, ühe katse tulemusena, toimuda, nad *välistavad teineteist* ehk *on välistavad.*

DEFINITSIOON 1.8. Kaht sündmust, mis ei saa sama katse tulemusena toimuda (st ei saa üheaegselt esineda), nimetatakse *(teineteist) välistavateks.*

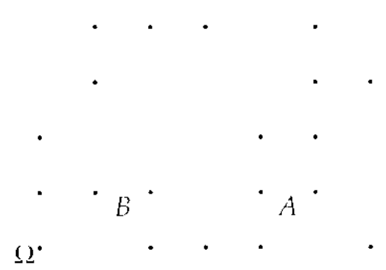
Üheks välistavate sündmuste näiteks on suvaline sündmus A koos oma vastandsündmusega $\bar{A}$. Ka kaks erinevat elementaarsündmust ω_i ja ω_j on alati teineteist välistavad.

DEFINITSIOON 1.9. Sündmuste hulka $\mathcal{H}=\{H_1,\dots,H_m\}$, kus kõik sündmused on paarikaupa teineteist välistavad, nimetatakse *välistavate sündmuste süsteemiks.*

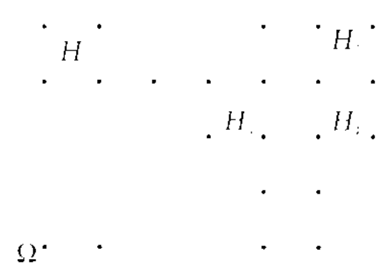
Iga sündmuste hulka $\mathcal{H}$ kuuluv sündmus koosneb erinevatest elementaarsündmustest. Muuhulgas moodustab ka iga elementaarsündmuste hulk välistavate sündmuste süsteemi.

DEFINITSIOON 1.10. Kui välistavate sündmuste süsteemist $\mathcal{H}$ kindlasti üks sündmus toimub, siis nimetatakse seda süsteemi *sündmuste täissüsteemiks.*

Öeldakse ka, et sündmuste täissüsteem $\mathcal{H}$ määrab elementaarsündmuste ruumis Ω *liigenduse,* vt joonis 1.7.



Joonis 1.6.
Välistavad sündmused.



Joonis 1.7.
Sündmuste täissüsteem.

Iga sündmus A koos oma vastandsündmusega $\bar{A}$ moodustab sündmuste täissüsteemi. Näeme, et täissüsteemi kuuluvate sündmuste tõenäosused võivad olla erinevad, kuid nende summa on 1.

Näide 1.14. Olgu katseks kaardi valik 52-kaardisest pakist ja sündmuseks H_1 – potimastist kaardi saamine, H_2 – punasest mastist (ruutu või ärtu) kaardi saamine. Siis H_1 ja H_2 on välistavad sündmused.

Näide 1.15. Lisame eelmises näites kirjeldatud sündmustele veel sündmuse H_3, so ristimastist kaardi saamise. Tulemusena saame sündmuste täissüsteemi. Käesolevas näites on $P(H_1) = 0,25$, $P(H_2) = 0,5$, $P(H_3) = 0,25$, seega liigenduse sündmused ei ole võrdtõenäosed.

1.7. Sündmuste summa. Välistavate sündmuste summa tõenäosus

Üks tõenäosusteooria olulisi ülesandeid on seaduspärasuste leidmine, mille alusel teadaolevate sündmuste põhjal saab määrata uusi sündmusi ja arvutada nende tõenäosusi. Üks lihtsamaid taolisi seaduspärasusi defineerib sündmuste summa.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu selles ruumis antud sündmused $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ ning $B = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}$. Sündmuste A ja B summa $A \cup B$ on määratud kui vastavate elementaarsündmuste hulkade ühend,

$$A \cup B = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \cup \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}.$$

DEFINITSIOON 1.11. Sündmuste *summa* $A \cup B$ on sündmus, mis toimub parajasti siis, kui toimub vähemalt üks sündmustest A ja B.

Võime öelda ka nii, et sündmuse $A \cup B$ jaoks on soodsad kõik need elementaarsündmused, mis sisalduvad kas sündmuses A või sündmuses B (või mõlemas), vt joonis 1.8.

Loomulikult pakub huvi, missugune on äsja defineeritud uue sündmuse tõenäosus, kuidas avaldub see esialgsete sündmuste tõenäosuste kaudu. Esialgu saame sellele küsimusele vastuse anda ainult erijuhul.

TÕENÄOSUSTE LIITMISE LAUSE (VÄLISTAVATE SÜNDMUSTE JUHUL). Olgu A ja B samas elementaarsündmuste ruumis defineeritud sündmused. Eeldame, et A ja B on välistavad, ning olgu nende tõenäosused $P(A)$ ja $P(B)$ teada. Siis nende sündmuste summa $A \cup B$ tõenäosus võrdub liidetavate sündmuste tõenäosuste summaga:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1.6}$$

TÕESTUS. Eeldame, et sündmused A ja B on välistavad (vt joonis 1.6) ning $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, $B = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}$, st A sisaldab k, B aga m elementaarsündmust, kusjuures need on kindlasti erinevad. Sel juhul sisaldab sündmuste summa kõiki sündmustes A ja B sisalduvaid elementaarsündmusi, mida on kokku $m+k$

Sündmuste summa tõenäosuse saame nüüd arvutada lihtsalt: $P(A \cup B) = \dfrac{k+m}{n}$

✦

Saadud lause väljendab olulist tõenäosuse omadust, seepärast kirjutame ta veel kord välja.

TÕENÄOSUSE 5. (ADITIIVSUSE) OMADUS. Välistavate sündmuste summa tõenäosus võrdub liidetavate sündmuste tõenäosuste summaga.

Valemit (1.6) korduvalt rakendades saame tõenäosuse aditiivsuse omaduse üldistada ka mitme välistava sündmuse jaoks.

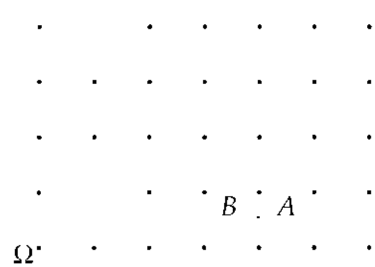
Olgu $\{H_1,\ldots,H_k\}$ välistavate sündmuste süsteem. Nende sündmuste summa $H_1 \cup \ldots \cup H_k$ on sündmus, mis toimub parajasti siis, kui toimub üks liidetavatest sündmustest. Välistavate sündmuste summa tõenäosus võrdub liidetavate sündmuste tõenäosuste summaga:

$$P(H_1 \cup \ldots \cup H_k) = P(H_1) + \ldots + P(H_k). \tag{1.7}$$

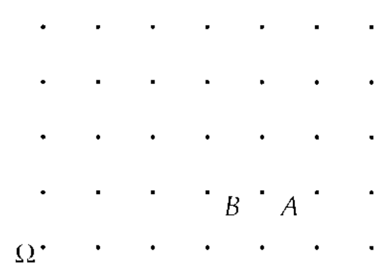
Tõenäosuste liitmise omaduse juurde pöördume tagasi punktis 1.10, kus tuletame sündmuste summa tõenäosuse avaldise üldjuhul.

Näide 1.16. Olgu katseks täringuviske ja sündmuseks A paarituarvuline tulemus (vt näide 1.2). Defineerime sündmuse $C = \{\omega_4\}$, so nelja silma pealelangemine täringuviskel. Et sündmused A ja C on välistavad, siis saame nende summa $A \cup C$ arvutamisel kasutada valemit (1.6), ning leiame $P(A \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Näide 1.17. Olgu katseks kaardi tõmbamine 52-kaardisest kaardipakist ja sündmus A sama, mis näites 1.6 – piltkaardi saamine. Defineerime sündmuse B – ärtumastist kaardi saamine. Siis sündmus $A \cup C$ on kas ärtu- või piltkaardi saamine. Kuivõrd need sündmused ei ole välistavad, ei saa summa tõenäosuse arvutamiseks kasutada valemit (1.6).



Joonis 1.8.
Sündmuste summa.



Joonis 1.9.
Sündmuste korrutis.

1.8. Sündmuste korrutis

Teine oluline sündmustega teostatav tehe on *sündmuste korrutamine*, millega tutvume käesolevas punktis.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu antud sündmused $A = \{\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_k}\}$ ja $B = \{\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_m}\}$.

Sündmuste A ja B korrutis $A \cap B$ on määratud kui vastavate elementaarsündmuste hulkade ühisosa

$$A \cap B = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \cap \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}.$$

See tähendab, et sündmuste korrutise $A \cap B$ jaoks saame järgmise definitsiooni, vt joonis 1.9.

DEFINITSIOON 1.12. Sündmuste A ja B *korrutis* $A \cap B$ on sündmus, mis toimub parajasti siis, kui toimuvad mõlemad sündmused A ja B.

Võime öelda ka nii, et sündmuse $A \cap B$ jaoks on soodsad kõik elementaarsündmused, mis sisalduvad niihästi sündmuses A kui ka sündmuses B.

Sündmuste korrutise märkimiseks kasutatakse sageli ka lihtsustatud sümbolit AB, st

$$A \cap B = AB$$

Esitame mõned sündmuste korrutise omadused, mis osutuvad edaspidigi kasulikeks.

SÜNDMUSTE KORRUTISE OMADUSED.

1^0 Kui sündmused A ja B on välistavad, siis on nende korrutis võimatu sündmus.
Sageli kasutatakse selle tähistamiseks, et sündmused A ja B on välistavad, kirjutist, mis näitab, et nende sündmuste korrutis on võimatu: $AB = \varnothing$

2^0 Sündmuste A ja B korrutisest järeldub niihästi A kui ka B:

$$A \cap B \Rightarrow A, \; A \cap B \Rightarrow B.$$

Sündmuste korrutise omaduste juurde pöördume tagasi punktis 2.2.

Näide 1.18. Vaatleme katsena kaardi valimist 52-kaardisest pakist (meenutame näiteid 1.1, 1.6 ja 1.17). Vaatleme sündmusi A (piltkaardi saamine) ja B (ärtukaardi saamine). Nende sündmuste korrutis $A \cap B$ on ärtumastist piltkaardi saamine, ning see sisaldab vaid kolme elementaarsündmust, need on ärtu kuninga, ärtu emanda ja ärtu soldati saamine. Järelikult on

$$P(A \cap B) = \frac{3}{52}$$

Näide 1.19. Vaatleme täringuviset ja meenutame näites 1.16 defineeritud sündmusi A (paaritu tulemus täringuviskel) ja C (nelja silma saamine täringuviskel). On selge, et nende sündmuste korrutis on võimatu sündmus, sest A ja C on välistavad.

1.9. Sündmuste vahe

Kolmas tehe, mida sündmustele tihti rakendatakse, on *vahe leidmine*.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω, ja olgu selles ruumis antud sündmused $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ ning $B = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}$. Sündmuste A ja B vahe $A \setminus B$ on määratud kui vastavate elementaarsündmuste hulkade hulgateoreetiline vahe, vt joonis 1.10,

$$A \setminus B = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \setminus \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}. \tag{1.8}$$

Siit järeldub sündmuste vahe definitsioon.

DEFINITSIOON 1.13. Sündmuste A ja B *vahe* $A \setminus B$ on sündmus, mis toimub parajasti siis, kui sündmus A toimub, aga sündmus B ei toimu.

Võime öelda ka nii, et sündmuse $A \setminus B$ jaoks on soodsad kõik elementaarsündmused, mis sisalduvad sündmuses A, kuid ei sisaldu sündmuses B.

Tutvume sündmuste vahe olulisemate omadustega.

SÜNDMUSTE VAHE OMADUSED.

1^0 Kui sündmuste vahel on järeldusseos $A \Rightarrow B$, siis $A \setminus B = \varnothing$.
Sel juhul järeldub eeskiri sündmuste vahe tõenäosuse arvutamiseks vahetult definitsioonist, vt joonis 1.4.

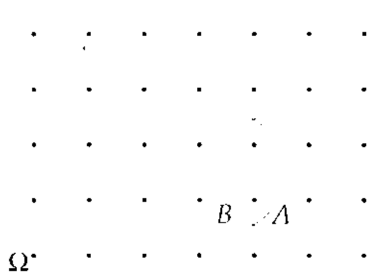
2^0 Kui $A \Rightarrow B$, siis $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

3^0 Kui A ja B on välistavad, siis $A \setminus B = A$ ja $B \setminus A = B$, vt joonis 1.6.

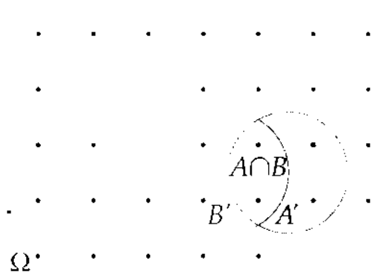
Kasutades sündmuste vahe mõistet saab sündmuse vastandsündmuse avaldada vahena, vt joonis 1.5,

$$\bar{A} = \Omega \setminus A. \tag{1.9}$$

Näide 1.20. Vaatleme katsena täringuviset (nagu ka näites 1.19) ja sündmusi A (paarituarvulise tulemuse saamine) ning C (nelja silma saamine). Defineerime veel sündmuse $B = \{\omega_3\}$, so kolme silma saamine täringuviskel. Siis saame leida järgmised tõenäosused: $P(A \setminus B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A \setminus C) = \frac{1}{2}$, $P(B \setminus C) = \frac{1}{6}$.



Joonis 1.10.
Sündmuste vahe $A \setminus B$.



Joonis 1.11.
Tõenäosuste liitmise lause.

1.10. Tõenäosuste liitmise lause üldjuhul

Seame endale eesmärgiks leida *sündmuste summa tõenäosuse üldjuhul*, ilma kitsenduseta, et A ja B on välistavad. Selle juures aitab meid eelmises punktis defineeritud sündmuste vahe mõiste. Tõestame järgmise lause.

TÕENÄOSUSTE LIITMISE LAUSE.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu selles ruumis antud sündmused $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ ning $B = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}$. Siis kehtib sündmuste A, B ja $A \cup B$ tõenäosuste vahel järgmine seos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.10}$$

TÕESTUS. Defineerime järgmised sündmused, vt joonis 1.11,

$$A' = A \setminus B = \{\omega_{h_1}, \ldots, \omega_{h_q}\},$$

$$B' = B \setminus A = \{\omega_{g_1}, \ldots, \omega_{g_r}\},$$

$$A \cap B = \{\omega_{f_1}, \ldots, \omega_{f_s}\}.$$

Definitsioonist järeldub, et sündmused A' B' ja $A \cap B$ on välistavad.

Peale selle kehtivad järgmised võrdused:

$$A' \cup (A \cap B) = A,$$

$$B' \cup (A \cap B) = B,$$

ja siit järeldub, et

$$A \cup B = A' \cup B' \cup (A \cap B). \tag{1.11}$$

Kasutades valemeid (1.6) ja (1.7) välistavate sündmuste summa tõenäosuste leidmiseks saame:

$$P(A) = P(A') + P(A \cap B),$$

$$P(B) = P(B') + P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B) = P(A') + P(B') + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Sellega on lause tõestatud.

✦

Näide 1.21. Olgu katseks kaardi tõmbamine 52-kaardisest pakist, ning olgu sündmused A ja B defineeritud kui piltkaardi ning ärtukaardi saamine (samuti, kui näites 1.17). Kasutades tõenäosuste liitmise lauset ning näites 1.18 leitud sündmuse $A \cap B$ tõenäosust, saame leida sündmuste summa $A \cup B$ tõenäosuse: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52} = 0{,}423.$

2. SÕLTUVAD JA SÕLTUMATUD SÜNDMUSED. TINGLIK TÕENÄOSUS

2.1. Tinglik tõenäosus

Sündmuste *vastastikuse mõju* kirjeldamiseks kasutatakse *tinglikke tõenäosusi*, mille puhul eeldatakse, et mingi sündmus toimub, ning arvestatakse selle toimumise mõju teistele sündmustele.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu antud juhuslikud sündmused $A=\{\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_k}\}$ ning $B=\{\omega_{j_1},\dots,\omega_{j_m}\}$. Eeldame, et sündmus B toimub (toimus). Kuna niisuguse eelduse puhul kõigi elementaarsündmuste seast on võimalikud üksnes need, mis sisalduvad sündmuses B (vt joonis 2.1), siis ilmselt muutuvad selle tulemusena teiste sündmuste tõenäosused.

DEFINITSIOON 2.1. Sündmuse A *tinglikuks tõenäosuseks tingimusel* B nimetatakse sündmuse A tõenäosust eeldusel, et sündmus B toimub (toimus).

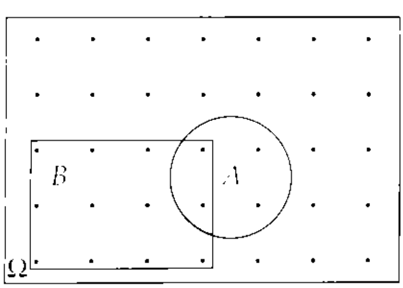
Öeldakse ka: *sündmuse A tinglik tõenäosus sündmuse B suhtes.*

Tinglikku tõenäosust tähistatakse sümboliga $P(A \mid B)$, kus esimesele kohale on märgitud sündmus, mille tõenäosust leitakse, ja teisele kohale tingimust määrav sündmus.

Leiame nüüd tingliku tõenäosuse avaldise. Kui on eeldatud, et sündmus B toimub, siis on võimalikud need elementaarsündmused, mis kuuluvad sündmusesse B (olgu nende arv m).

Sündmuse A toimumiseks on soodsad vaid nood elementaarsündmused, mis kuuluvad ühtlasi ka sündmusesse A, st sündmuste A ja B korrutises $A\cap B$ sisalduvad elementaarsündmused, $A\cap B=\{\omega_{f_1},\dots,\omega_{f_r}\}$. Nende arv on r, $0\le r\le m$. Kasutades tavalist tõenäosuse definitsiooni (tõenäosus on soodsate elementaarsündmuste arvu ja kõigi elementaarsündmuste arvu suhe), saame tingliku tõenäosuse jaoks avaldise

$$P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{2.1}$$



Joonis 2.1.
Elementaarsündmuste hulk sündmusega B määratud tingimuse korral.

Tänu eeldusele, et sündmus B on juhuslik, st ta ei ole võimatu, on tõenäosuse teise omaduse tõttu nimetajas olev avaldis alati positiivne. Seega on tinglik tõenäosus alati määratud.

Näitame, et tinglik tõenäosus on alati 0 ja 1 vahel. Tõepoolest, kuna alati kehtib järeldusseos $A\cap B\subset B$, siis järeldub tõenäosuse kolmandast omadusest, et alati $P(A\cap B)\le P(B)$ ja järelikult

$$P(A \mid B)\le 1.$$

✧

Samast seosest tulenevad vahetult

TINGLIKU TÕENÄOSUSE OMADUSED:

1^0 $P(\varnothing \mid B) = 0$,

2^0 $P(\Omega \mid B) = 1$.

Tuleb aga märkida, et vastupidised seosed ei kehti tinglike tõenäosuste puhul: sellest, et mingi sündmuse A tinglik tõenäosus (mingi teise sündmuse suhtes) on null või üks, ei järeldu sugugi, et sündmus A oleks vastavalt võimatu või kindel.

Valemist (2.1) järelduvad veel järgmised tingliku tõenäosuse omadused:

3^0 Kui $B \Rightarrow A$, siis $P(A \mid B) = 1$.

4^0 Kui A ja B on välistavad, siis $P(A \mid B) = P(B \mid A) = 0$.

Kui kõneldakse ühteaegu (tavalisest) tõenäosusest ja tinglikust tõenäosusest, siis nimetatakse tavalist tõenäosust vahe tegemiseks *tingimatuks tõenäosuseks.*

Näide 2.1. Vaatleme täringuviset ning sündmusi A (paarituarvuline tulemus), B (nelja silma saamine) ja C (kolme silma saamine). Eeldame, et toimub sündmus A ja leiame sündmuste C ning B tinglikud tõenäosused:

$$P(C \mid A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{1}{3}, \quad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.$$

2.2. Tõenäosuste korrutamise lause

Eriti oluline on võtta sündmuste vastastikust mõju arvesse siis, kui meid huvitab sündmuste koosesinemine ehk *korrutis.*

TÕENÄOSUSTE KORRUTAMISE LAUSE.

Samal elementaarsündmuste süsteemil defineeritud juhuslike sündmuste korrutise tõenäosus võrdub ühe sündmuse tõenäosuse ja teise sündmuse tingliku tõenäosuse korrutisega, kusjuures tingimuseks on esimese sündmuse toimumine,

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A \mid B). \tag{2.2}$$

TÕESTUS. Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu juhuslikud sündmused $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ ning $B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_m}\}$.

Vaatleme tingliku tõenäosuse valemit (2.1) ja kirjutame selle ümber korrutisena:

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A \mid B),$$

mille tulemusena saamegi valemi (2.2). Et saadud valemi vasakul poolel paiknevad sündmused A ja B sümmeetriliselt, siis peab ka parem pool olema sümmeetriline, järelikult saame veel teise samaväärse valemi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A). \tag{2.2'}$$

✦

Näide 2.2. Vaatleme katsena kuulikese juhuslikku valikut *urnist*, vt joonis 2.2. Olgu urnis 5 valget ja 6 musta kuuli.

On vaja leida tõenäosus, et kahel järjestikusel võttel saadakse valge kuul. Üks ülesande võimalik lahendus on järgmine. Elementaarsündmuseks on iga kuuli saamine, seega esimesel võttel on $n = 11$ ja soodsate elementaarsündmuste arv $k = 5$. Kui esimesel võttel on saadud valge kuul, siis saame arvutada tingliku tõenäosuse selleks, et ka teisel võttel saadakse valge kuul; nüüd on $n = 10$, $k = 4$.

Tõenäosuste korrutamise lause kohaselt saame otsitavaks tõenäosuseks $\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = 0,18$.

Joonis 2.2.
Kuulid urnis.

2.3. Sõltumatud ja sõltuvad sündmused

Ühe sündmuse toimumine võib teise sündmuse toimumise tõenäosust rohkem või vähem mõjutada, kuid võib ka nii juhtuda, et see mõju üldse puudub – üks sündmus *ei sõltu* teisest.

DEFINITSIOON 2.2. Sündmust A nimetatakse *sõltumatuks sündmusest B*, kui sündmuse A tinglik tõenäosus sündmuse B suhtes on võrdne sündmuse A tingimatu tõenäosusega.

Valemitest (2.2) ja (2.2′) järeldub, et sel juhul võrdub ka sündmuse B tinglik tõenäosus A suhtes tema tingimatu tõenäosusega. Seega on õige järgmine

SÜNDMUSTE VASTASTIKUSE SÕLTUMATUSE OMADUS. Kui juhuslik sündmus A on sõltumatu juhuslikust sündmusest B, siis on ka sündmus B sõltumatu sündmusest A.

Lühidalt, *sündmuste sõltumatus on vastastikune.*

Seosest (2.2) järeldub järgmine oluline lause

TÕENÄOSUSTE KORRUTAMISE LAUSE (SÕLTUMATUTE SÜNDMUSTE PUHUL). Sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosus võrdub nende sündmuste tõenäosuste korrutisega.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2.3}$$

Tõepoolest, sõltumatute sündmuste puhul võrdub tinglik tõenäosus tingimatuga, mille asendamisel valemisse (2.2) saamegi valemi (2.3).

✧

Viimane seos on samaväärne sündmuste sõltumatuse definitsiooniga, ning sellena teda sageli kasutataksegi. Sündmuste *sõltuvuse* mõiste defineeritakse sõltumatuse kaudu.

DEFINITSIOON 2.3. Sündmusi A ja B nimetatakse *sõltuvateks*, kui nad ei ole sõltumatud.

Sündmuste sõltuvuse ja sõltumatuse vahekorra kohta võiks öelda, et üldjuhul on sündmused sõltuvad, sõltumatus on pigem erijuht.

Tihti tuleneb sündmuste sõltuvus nende järeldusseosest.

JÄRELDUVATE SÜNDMUSTE SÕLTUVUSE OMADUS. Kui juhuslike sündmuste vahel on järeldusseos, siis on need sündmused sõltuvad.

Tõepoolest, kui $A \Rightarrow B$, siis $A \cap B = A$ ja sõltumatuse tingimus (2.3) on täidetud üksnes juhul kui $P(B) = 1$ või kui vähemalt ühe sündmuse tõenäosus on 0. Siis aga ei ole sündmused juhuslikud.

✧

VÄLISTAVATE SÜNDMUSTE SÕLTUVUSE OMADUS. Kui juhuslikud sündmused on välistavad, siis on nad sõltuvad.

Tõepoolest, kui sündmused A ja B on välistavad, siis $P(A \cap B) = 0$. Kui A ja B on juhuslikud, st nende tõenäosused erinevad nullist, siis ei saa samal ajal kehtida sõltumatuse tingimus (2.3).

✧

Näide 2.3. Vaatleme katsena kaardi tõmbamist 52-kaardisest pakist ja määrame sündmused A (piltkaardi saamine) ning B (ärtukaardi saamine). Samu sündmusi vaatlesime ka näites 1.19 ja leidsime nende sündmuste tõenäosused $P(A) = \frac{12}{52}$ ja $P(B) = \frac{13}{52}$. Näites 1.19 veendusime, et $P(A \cap B) = \frac{3}{52}$. Näeme, et antud juhul kehtibki võrdus (2.3), sest $\frac{12}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{3}{52}$ järelikult on sündmused A ja B sõltumatud.

Näide 2.4. Vaatleme katsena täringuviset (vt näide 2.1) ja defineerime järgmised sündmused:

A – paarituarvulise tulemuse saamine, $P(A) = \frac{1}{2}$;
B – nelja silma saamine, $P(B) = \frac{1}{6}$ ja
C – kolme silma saamine, $P(C) = \frac{1}{6}$

Leiame ka korrutiste tõenäosused, kasutades selleks sündmuste korrutise definitsiooni: $A \cap C = C, A \cap B = \varnothing, B \cap C = \varnothing$. Seega pole ühegi sündmuste paari korral tingimus (2.3) täidetud, järelikult on vaadeldavad sündmused paarikaupa sõltuvad.

2.4. Täistõenäosuse valem

Mõnikord on uuritava sündmuse tõenäosuse arvutamiseks kasulik vaadelda sündmusi, mis selle sündmusega koos toimuvad.

TÄISTÕENÄOSUSE VALEM. Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu antud juhuslik sündmus A ning sündmuste täissüsteem $\{H_1, \ldots, H_k\}$ selles ruumis. Olgu sündmuste H_i tõenäosused $P(H_i)$ ja sündmuse A tinglikud tõenäosused kõigi sündmuste H_i suhtes $P(A \mid H_i)$ teada. Siis kehtib järgmine valem:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(H_i)\ P(A \mid H_i), \tag{2.4}$$

mida nimetatakse *täistõenäosuse valemiks.*

TÕESTUS. Valemi (2.4) tuletamiseks kirjutame sündmuste täissüsteemi puhul alati kehtiva võrduse

$$\Omega = H_1 \cup \ldots \cup H_k,$$

ning korrutades võrduse mõlemad pooled sündmusega A saame

$$A \cap \Omega = (A \cap H_1) \cup \ldots \cup (A \cap H_k).$$

Võrduse vasakul poolel on sündmus A, sest sündmus ei muutu korrutamisel kindla sündmusega. Kuna kõik sündmused H_i on välistavad, siis on välistavad ka võrduse paremal poolel paiknevad sündmused $A \cap H_i$ Arvutame nüüd võrduse mõlemal poolel asuvate sündmuste tõenäosused, mis loomulikult peavad olema võrdsed. Leidmaks võrduse paremal poolel oleva sündmuse tõenäosust saame kasutada välistavate sündmuste tõenäosuste liitmise lauset, vt valem (1.6). Seega saame

$$P(A) = P(A \cap H_1) + \ldots + P(A \cap H_k).$$

Nüüd rakendame saadud võrduse parema poole igale liidetavale tõenäosuste korrutamise lauset:

$$P(A \cap H_i) = P(A \mid H_i)\ P(H_i),$$

mille tulemusena saamegi valemi (2.4).

✦

Näide 2.5. Olgu tehases 3 tööpinki, neist esimene valmistab vahetuses 100, teine 50 ja kolmas 20 toodet. Esimesel on praagi tõenäosus 0,01, teisel 0,05 ja kolmandal 0,025. Leida tõenäosus, et juhuslikult valitud toode on praak.

Tähistame sündmuse, et juhuslikult valitud toode on praak, sümboliga A. Sündmused, et juhuslikult valitud toode on tehtud vastavalt esimesel, teisel ja kolmandal tööpingil, olgu H_1, H_2 ja H_3 Praagi tinglikud tõenäosused on eelduste kohaselt $P(A \mid H_1) = 0{,}01$, $P(A \mid H_2) = 0{,}05$ ja $P(A \mid H_3) = 0{,}025$.

Sündmuste H_1, H_2 ja H_3 tõenäosused arvutame klassikalisel viisil: $P(H_1) = \frac{100}{170}$, $P(H_2) = \frac{50}{170}$, $P(H_3) = \frac{20}{170}$ Valemi (2.4) järgi saame leida praagi esinemise tõenäosuse: $P(A) = 0{,}01 \cdot \frac{100}{170} + 0{,}05 \cdot \frac{50}{170} + 0{,}025 \cdot \frac{20}{170} =$ $= 0{,}0235$.

2.5. Bayesi valem

Käesolevas punktis lahendame punktis 2.4 püstitatud ülesandega teatud mõttes vastupidise ülesande – kasutame mingi sündmuse *toimumise fakti* selleks, et täpsustada temaga seotud sündmuste tõenäosusi.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu antud juhuslik sündmus A ning sündmuste täissüsteem $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_k\}$ selles ruumis. Olgu sündmuste H_i tõenäosused $P(H_i)$ ja sündmuse A tinglikud tõenäosused kõigi sündmuste H_i suhtes $P(A \mid H_i)$ teada. Siis kehtib klassikalises tõenäosusteoorias oluline *Bayesi lause*, mille sisuks on alljärgnev

BAYESI VALEM

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)\ P(H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A \mid H_j)\ P(H_j)}. \tag{2.5}$$

Lisame valemile tema traditsioonilise sõnastuse Bayesi lause näol.

BAYESI LAUSE (KLASSIKALINE SÕNASTUS). Olgu antud *hüpoteesid* $H_1, \dots, H_k$. Nende hüpoteeside *aprioorsed (enne katset teadaolevad) tõenäosused* on $P(H_1), \dots, P(H_k)$. Sooritati katse, mille tulemusena toimus sündmus A. Seda tulemust arvestades saab valemi (2.5) põhjal hüpoteesidele arvutada täpsustatud, nn *aposterioorsed (peale katset leitud) tõenäosused* $P(H_i \mid A)$.

TÕESTUS. Kirjutame tingliku tõenäosuse $P(H_i \mid A)$ välja valemi (2.1) põhjal:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} \tag{2.6}$$

Saadud murru lugejas oleva avaldise võime tõenäosuste korrutamise lause alusel veel kord ümber kirjutada:

$$P(H_i \cap A) = P(H_i)\ P(A \mid H_i).$$

Valemi (2.6) nimetajas oleva tõenäosuse $P(A)$ asendame tema avaldisega täistõenäosuse valemist (2.4). Sellega ongi valem (2.5) tõestatud.

✦

Märgime, et kuigi Bayesi valem kuulub tõenäosusteooria klassikaliste tulemuste hulka (publitseeritud esmakordselt aastal 1763), on temas sisalduv idee – kasutada teatava sündmuse toimumist tõenäosushinnangu täpsustamiseks – leidnud rakendamist kaasaegses statistikas nn Bayesi meetodite näol.

Näide 2.6. Vaatleme näites 2.5 kirjeldatud tehast. Olgu teada, et juhuslikult valitud toode on praak. Küsitakse, milline on tõenäosus, et see on valmistatud teisel tööpingil.

Selle sündmuse H_2 aprioorne tõenäosus $P(H_2)$ on (eelmise näite andmetel) $\frac{50}{170} = 0{,}29$. Arvutame nüüd Bayesi valemi järgi aposterioorse tõenäosuse

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)\ P(A \mid H_2)}{P(A)},$$

kus sündmuse A tõenäosusena kasutame näites 2.5 täistõenäosuse valemi järgi leitud väärtust. Kasutades eelmise näite arvutusi saame $P(H_2 \mid A) = \dfrac{\frac{50}{170} \cdot 0{,}05}{0{,}0235} = 0{,}63$. Näeme, kuidas katsetulemuse teadmine muudab esialgset tõenäosuse hinnangut märgatavalt.

3. DISKREETNE JUHUSLIK SUURUS

3.1. Diskreetse juhusliku suuruse määratlus

Tõenäosusteooria üks olulisi põhimõisteid on *juhuslik suurus*, mille defineerimise eelduseks on *sündmuse ja tõenäosuse mõiste* olemasolu. Juhuslik suurus sobib mudeliks mitmesuguste tegelikkuses mõõdetavate suuruste käsitlemisel.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, kusjuures kõigi elementaarsündmuste tõenäosused loetakse võrdseiks, st $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$

Põhimõtteliselt ei ole käesolevas peatükis elementaarsündmuste võrdtõenäosuse nõue oluline, üldiselt säilivad saadavad tulemused ka siis, kui eeldada, et elementaarsündmusi on lõplik arv ja nende tõenäosused on teada.

DEFINITSIOON 3.1. *Diskreetseks juhuslikuks suuruseks* nimetatakse elementaarsündmuse funktsiooni, mis igale elementaarsündmusele (katsetulemusele) ω_i seab vastavusse mingi reaalarvu x_i

Elementaarsündmuste ruum võib olla defineeritud ka üldisemal kujul, sh ka pideva hulgana (näit piirkond tasandil). See annab võimaluse ka üldisemaks juhusliku suuruse definitsiooniks. Igal juhul nimetatakse *diskreetseks* niisugust juhuslikku suurust, mille väärtuste hulk on diskreetne. Seega on iga lõpliku väärtuste hulgaga juhuslik suurus diskreetne. Seda asjaolu kasutame me edaspidi selleks, et tõestada juhusliku suuruse diskreetsust. Kuna me käesolevas peatükis käsitleme ainult diskreetseid juhuslikke suurusi, siis loobume edaspidi enamasti täiendist "diskreetne", kasutades seda peamiselt nendel juhtudel, kui käsitletav asjaolu kehtib ainult diskreetse juhusliku suuruse puhul.

Juhusliku suuruse tähistuseks on traditsiooniliselt suurtähed $X, Y, \ldots$ ja juhusliku suuruse väärtusi tähistatakse vastavate väiketähtedega $x, y, \ldots$ Vajaduse korral lisatakse tähistustele indeks(id).

Definitsiooni 3.1 arvestades saame juhusliku suuruse määratluse esitada järgmise valemina:

$$X(\omega_i) = x_i, i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Definitsiooni kohaselt on juhusliku suuruse X väärtuste hulk lõplik ja ei saa olla suurem kui n. Et mitmele elementaarsündmusele saab vastata üks ja sama juhusliku suuruse väärtus, siis võib X *erinevate väärtuste* arv k olla *väiksem* kui elementaarsündmuste arv n.

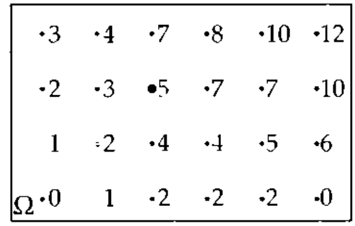
Juhusliku suuruse *juhuslikkus* realiseerub katsetulemuse (elementaarsündmuse) juhusliku valiku kaudu: kui katse tulemuseks on ω_i, siis omandab juhuslik suurus X väärtuse $X(\omega_i)$. Enne katsetulemuse teadasaamist pole X väärtus teada.

Näide 3.1. Vaatleme joonisel 1.1 esitatud elementaarsündmuste ruumi Ω ja oletame, et igale elementaarsündmusele ω_i on vastavusse seatud mingi reaalarv, vt joonis 3.1. Sellega on ruumil Ω defineeritud juhuslik suurus X. Paneme tähele, et X erinevate väärtuste arv k on 11, kuigi elementaarsündmuste arv n on 24.

Näide 3.2. Vaatleme täringuviset ja loeme juhusliku suuruse X väärtuseks pealelangenud silmade arvu.

Näide 3.3. Kaks poissi viskavad münti. Kui peale langeb vapipool (toimub sündmus V), siis maksab Ants Jukule krooni, kui kirjapool (toimub sündmus K), siis saab Ants Jukult krooni. *Antsu võidusummaks* on siis juhuslik suurus X, mis on määratud eeskirjaga:

kui toimub V siis $X = -1$,
kui toimub K, siis $X = 1$.



Joonis 3.1.
Juhusliku suuruse defineerimine elementaarsündmuste abil.

3.2. Juhusliku suuruse jaotus

Juhuslikku suurust iseloomustab

1^0 tema väärtuste hulk $\{x_1, \ldots, x_k\}$,
2^0 iga väärtuse tõenäosus $P(x_j) = p_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Eeskirja, mis seab igale (diskreetse) juhusliku suuruse väärtuste hulgale vastavusse selle tõenäosuse, nimetatakse juhusliku suuruse *jaotuseks*.

Juhusliku suuruse X jaotuse tavaliseks tähiseks on P_X.

Jaotust saab mitmeti *esitada*. Käesolevas punktis tutvume diskreetse juhusliku suuruse *tõenäosusfunktsiooniga*, mida kasutatakse diskreetse juhusliku suuruse jaotuse esitamiseks kõige sagedamini.

DEFINITSIOON 3.2. Juhusliku suuruse X *tõenäosusfunktsioon* on eeskiri, mis seab igale juhusliku suuruse X väärtusele x_i vastavusse selle tõenäosuse $P(x_i)$.

Tõenäosusfunktsiooni tähistakse tavaliselt tähega p_X või, samuti kui jaotustki, tähega P_X. Tõenäosusfunktsiooni võib esitada kas valemina, tabelina, graafikuna või arvupaaride (x_j, p_j) loeteluna. Sageli öeldakse tõenäosusfunktsiooni kohta *jaotus*, täpsustamata, et tegemist on jaotuse ühe esitusega, kuid enamasti ei põhjusta see vääritimõistmist.

3.3. Juhusliku suuruse abil määratud sündmused ja nende tõenäosused

Juhusliku suuruse jaotuse määramine, aga samuti selle rakendamine on vahetult seotud selle juhusliku suuruse kaudu defineeritud sündmuste tõenäosuste leidmisega.

Olgu X juhuslik suurus ja R mingi reaalarvude *piirkond* (lõik, vahemik, poollõik või nende lõplik summa). Kirjutis $(X \in R)$ ehk $(X(\omega_i) \in R)$ tähistab *sündmust*, et katse tulemusena esineb mõni sellistest elementaarsündmustest ω_i, mille korral juhusliku suuruse väärtus $X(\omega_i)$ kuulub hulka R.

Seega koosneb juhusliku suuruse X poolt määratud sündmus $(X \in R)$, kus R on reaalarvuline piirkond, kõigist elementaarsündmustest ω_i, mille korral $X(\omega_i) \in R$.

Praktikas kõige sagedamini kasutatavad sündmused on $(X=r)$, $(X<r)$, $(X>r)$, $(X \neq r)$ ja $(r_1<X<r_2)$, kusjuures kõik võrratused võivad ka mitteranged olla. Loomulikult on veel palju teisigi võimalusi sündmuste defineerimiseks juhusliku suuruse abil. Kõik juhusliku suuruse X abil defineeritud sündmused avalduvad ülalkirjeldatud sündmuste liitmise, lahutamise ja korrutamise kaudu. Sündmuse defineerimisel ei ole oluline, kas punktid r, r_1, r_2 kuuluvad või ei kuulu juhusliku suuruse X väärtuste hulka.

Juhusliku suuruse abil defineeritud sündmuste *tõenäosuste leidmisel* saame kasutada seda, et me eelduse kohaselt teame kõigi elementaarsündmuste tõenäosusi. Jaotuse leidmiseks on meil tarvis leida sündmuste $(X=x_i)$ tõenäosused. Kui juhuslik suurus X omandab l erineva elementaarsündmuse (katsetulemuse) $\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_l}$ puhul sama väärtuse r, siis on sündmuse $(X=r)$ tõenäosus võrdne nende elementaarsündmuste tõenäosuste summaga:

$$P(X=r) = \sum_{j=1}^{l} P(\omega_{i_j}). \tag{3.2}$$

Kuivõrd vastavalt juhusliku suuruse definitsioonile sündmused $(X=x_j)$, $j = 1,\ldots,k$ moodustavad täissüsteemi, siis kehtib alati

TÕENÄOSUSFUNKTSIOONI PÕHIOMADUS

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1. \tag{3.3}$$

Selle võrduse aluseks on juhusliku suuruse definitsioonist tulenev tõsiasi, et katse puhul omandab iga selle katse tulemuste abil defineeritud juhuslik suurus alati ühe (ja ainult ühe) väärtuse.

Tõenäosusfunktsiooni abil on võimalik arvutada kõigi vaadeldava juhusliku suuruse abil defineeritud sündmuste tõenäosusi. Näiteks

$$P(X<a) = \sum_{x_i<a} P(x_i) = \sum_{x_i<a} p_i, \tag{3.4}$$

$$P(X>b) = \sum_{x_i>b} p_i, \tag{3.4'}$$

$$P(a<X<b) = \sum_{a<x_i<b} p_i. \tag{3.4''}$$

Näide 3.4. Vaatame näites 3.1 defineeritud juhuslikku suurust X ja määrame selle põhjal sündmuse $(X=5)$ tõenäosuse. Selle sündmuse jaoks leidub 2 soodsat elementaarsündmust 24 hulgast, vt joonis 3.1, neist üks on joonisel suurema punktiga märgitud.

Järelikult $P(X=5) = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$.

Samal viisil leiame, et $P(X \le 3) = \frac{11}{24}$.

Näide 3.5. Vaatame katsena täringuviset ja juhusliku suurusena X, samuti kui näites 3.2, täringuviske tulemust. Selle juhusliku suuruse tõenäosusfunktsiooni P_X saame esitada valemiga

$$P(X=i) = \frac{1}{6},\ i = 1, \dots, 6. \tag{3.5}$$

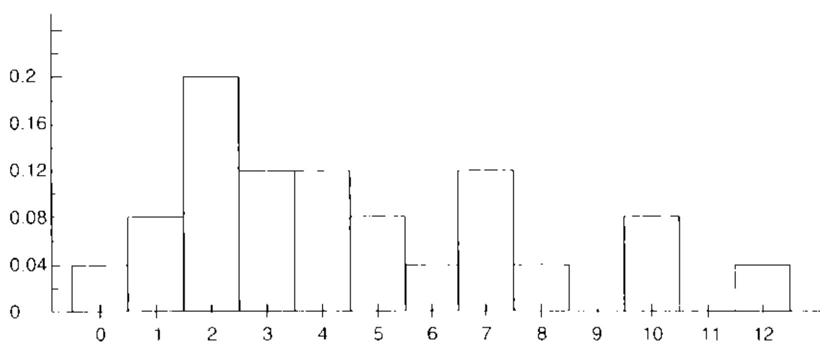
Näide 3.6. Koostame tabeli, mis esitab näites 3.3 toodud juhusliku suuruse jaotust (ühe poisi võidusumma mündiviskel, kui see on vapipoole pealelangemisel 1 ja kirjapoole pealelangemisel –1).

Väärtus	–1	1
Tõenäosus	0,5	0,5

Tabel 3.1.
Mündiviske võidusumma jaotus.

Selle juhusliku suuruse tõenäosusfunktsioon on esitatav ka eeskirjana $P(X=1) = P(X=-1) = 0{,}5$.

Näide 3.7. Näites 3.1 defineeritud juhusliku suuruse tõenäosusfunktsioon on esitatud joonisel 3.2.



Joonis 3.2.
Juhusliku suuruse tõenäosusfunktsiooni kujutamine tulpdiagrammina.

3.4. Konstantne juhuslik suurus

Erijuhul võib juhusliku suuruse väärtuste hulk koosneda ka ühest punktist c.

DEFINITSIOON 3.3. Juhuslikku suurust, millel on üksainus väärtus c, nimetatakse konstantseks.

Konstantse juhusliku suuruse jaotus on

$$P(X=c) = 1.$$

Sellist jaotust nimetatakse *kõdunud jaotuseks*, vt näide 3.9.

3.5. Juhusliku suuruse funktsioon

Paljude praktiliste ülesannete lahendamisel on tarvis kasutada *juhuslike suuruste funktsioone.* Need funktsioonid on määratletud alljärgnevalt.

DEFINITSIOON 3.4. Olgu X juhuslik suurus, mis defineeritud sündmuste ruumis Ω, ja $g(\ )$ mingi reaalarvuliste väärtustega funktsioon. Siis on ka

$$Y = g(X) \tag{3.6}$$

juhuslik suurus.

Tõepoolest, samuti nagu X, nii on ka Y elementaarsündmuse funktsioon, kusjuures igale katsetulemusele ω_i vastab juhusliku suuruse Y mingi väärtus $y_l = g(X(\omega_i))$. Juhusliku suuruse Y väärtuste hulk on $y_1, \ldots, y_h$, kus erinevate väärtuste arv h ei saa olla suurem kui juhusliku suuruse X väärtuste arv k.

✧

Juhusliku suuruse Y tõenäosusfunktsiooni P_Y määramiseks tuleb Y iga väärtuse y_l jaoks välja selgitada kõik X väärtused x_j, mille puhul kehtib võrdus $g(x_j) = y_l$ (on selge, et vähemalt üks niisugune väärtus leidub), ning leida kõigi nende elementaarsündmuste ω_i hulk, mille korral $X(\omega_i) = x_j$. Siit järeldub, et me saame sündmuse $(Y = y_l)$ tõenäosuse jaoks järgmise avaldise:

$$P(Y=y_l) = \sum_{g(x_j)=y_l} P(X = x_j) = \sum_{g(x_j)=y_l} \sum_{X(\omega_i)=x_j} P(\omega_i). \tag{3.7}$$

Viimasest valemist järeldubki, et juhuslikul suurusel Y ei saa olla rohkem erinevaid väärtusi kui juhuslikul suurusel X, samuti see, et tõenäosuste $P(Y=y_l)$ summa üle Y kõigi erinevate väärtuste $y_1, \ldots, y_h$, $h \le k \le n$ võrdub ühega. Järelikult moodustavad seosega (3.7) esitatud tõenäosused tõenäosusfunktsiooni.

✧

Esitatud mõttekäigust järeldub

DISKREETSE JUHUSLIKU SUURUSE FUNKTSIOONI OMADUS. Diskreetse juhusliku suuruse funktsioon on diskreetne juhuslik suurus.

Näide 3.8. Vaatleme näites 3.1 määratletud juhuslikku suurust X ja defineerime tema funktsiooni Y seosega $Y = \left[\frac{X}{3}\right]$, kus nurksulud tähistavad täisosa võtmise operatsiooni. Leiame näitena sündmuse $(Y=0)$ tõenäosuse, kasutades juhusliku suuruse X tõenäosusfunktsiooni (vt joonis 3.2 ja valem (3.7)), $P(Y=0) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{24} + \frac{2}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3}$.

Näide 3.9. Vaatleme näites 3.3 defineeritud juhuslikku suurust X ja defineerime tema funktsiooni eeskirjaga $Y = X^2$ Näeme, et Y osutub *konstantseks juhuslikuks suuruseks*, sest $(-1)^2 = 1$, $1^2 = 1$.

3.6. Juhusliku suuruse lineaarfunktsioon

Kõigi juhusliku suuruse funktsioonide seast kasutatakse kõige sagedamini *lineaarfunktsiooni*, mis on defineeritud seosega

$$Y = a + bX, \tag{3.8}$$

kus a ja b on suvalised reaalarvud, $b \neq 0$.

Lineaarfunktsiooni puhul vastab juhusliku suuruse X igale väärtusele x_i juhusliku suuruse Y väärtus $y_i = a + bx_i$. Järelikult on juhuslikel suurustel X ja Y ühepalju väärtusi ning X jaotusest on lihtne tuletada Y jaotust:

$$P(Y = a + bx_i) = P(X = x_i) = p_i.$$

Teatavasti eksisteerib lineaarteisendusel alati pöördteisendus, mis on samuti lineaarne. Seega on alati võimalik lineaarselt teisendatud juhuslik suurus *tagasi teisendada*, kasutades lineaarteisendust

$$X = \frac{(Y - a)}{b}.$$

Sellise teisenduse juures ei teki mingit infokadu.

Näide 3.10. Vaatleme näites 3.2 defineeritud juhuslikku suurust ja määrame uue juhusliku suuruse lineaarteisendusega $Y = 2X - 7$ Selle juhusliku suuruse tõenäosusfunktsiooni esitab järgmine tabel.

y_i	-5	-3	-1	1	3	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tabel 3.2.
Täringuviske tulemuse lineaarteisenduse jaotus.

4. JUHUSLIKU SUURUSE ARVKARAKTERISTIKUD. TŠEBÕŠEVI VÕRRATUS

4.1. Juhusliku suuruse keskväärtus

Juhusliku suuruse jaotust iseloomustab mitu *arvkarakteristikut*. Neist tähtsaim on *keskväärtus*, mida tähistatakse sümboliga EX, vahel ka $E(X)$. Keskväärtuse tuntud tähiseks on ka μ (kreeka täht "müü") ja vahel kasutatakse veel tähiseid m ning MX. Eraldi sümbol $\bar{x}$ on kasutusel empiirilise jaotuse keskväärtuse jaoks, millega tutvume punktis 9.9.

Keskväärtus kuulub juhusliku suuruse *asendikarakteristikute* hulka, ta näitab selle juhusliku suuruse asendit (paiknemist) arvsirgel.

DEFINITSIOON 4.1. (Diskreetse) juhusliku suuruse X keskväärtus defineeritakse jaotuse järgi järgmise valemiga:

$$EX = \sum_{i=1}^{k} p_i \, x_i, \tag{4.1}$$

kus x_i tähistab juhusliku suuruse X väärtust ja p_i selle väärtuse tõenäosust, $i = 1, \ldots, k$.

Peame meeles, et juhusliku suuruse keskväärtus on *juhusest sõltumatu konstant*. Valemist (4.1) järelduvad juhusliku suuruse keskväärtuse omadused.

KESKVÄÄRTUSE 1. (MONOTOONSUSE) OMADUS. Keskväärtus paikneb juhusliku suuruse väikseima ja suurima väärtuse vahel,

$$\min_{1 \le i \le k} x_i \le EX \le \max_{1 \le i \le k} x_i .$$

Tõepoolest, kui me keskväärtuse avaldises (4.1) asendame kõik juhusliku suuruse X väärtused väikseimaga (olgu see x_1), saame võrratuse, millele peale x_1 summamärgi ette toomist rakendame valemit (3.3)

$$EX = \sum_{j=1}^{k} p_j x_j \ge \sum_{j=1}^{k} p_j x_1 = x_1 \sum_{j=1}^{k} p_j = x_1 .$$

Võrratuse esimene pool on sellega tõestatud. Samal viisil saab tõestada ka teise poole.

◊

KESKVÄÄRTUSE 2. OMADUS (KONSTANDI KESKVÄÄRTUS). Konstantse juhusliku suuruse c keskväärtus võrdub sama konstandiga, $Ec = c$.

See väide tuleneb eelmisest tõestusest – konstantse juhusliku suuruse vähim ja suurim väärtus ühtivad.

◊

Paneme tähele, et üldiselt ei tarvitse keskväärtus ühtida juhusliku suuruse ühegi väärtusega. Näiteks täisarvuliste väärtustega juhusliku suuruse keskväärtuseks võib olla ka murdarv

KESKVÄÄRTUSE 3. (LINEAARSUSE) OMADUS

$$E(a+bX) = a+b\cdot EX. \tag{4.2}$$

Selle omaduse tõestamisel kasutame lineaarfunktsiooni tõenäosusfunktsiooni avaldist, keskväärtuse arvutuseeskirja ja keskväärtuse teist omadust.

$$E(a+bX) = \sum_{i=1}^{k} p_i(a+bx_i) = a\sum_{i=1}^{k} p_i + b\sum_{i=1}^{k} p_i x_i = a+bEX.$$

◇

Märgime, et keskväärtuse omadused ei ole sellega ammendatud, kuid järgmiste omaduste tõestamiseks on meil tarvis rakendada *juhusliku vektori* ja selle funktsiooni mõisteid, millega tutvume alles järgmises paragrahvis. Alles siis, punktis 5.9, tuletame järgmised juhusliku suuruse keskväärtuse omadused.

Näide 4.1. Leiame täringuviske tulemuse keskväärtuse (vt näide 3.2), kasutades selleks täringuviske tõenäosusfunktsiooni,

$$EX = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3\frac{1}{2}.$$

Näide 4.2. Leiame mündiviske võidusumma keskväärtuse (vt näiteid 3.3 ja 3.6)

$$EX = 0,5\cdot(-1)+0,5\cdot 1 = 0.$$

Näide 4.3. Leiame juhusliku suuruse $Y=2X-7$ keskväärtuse, kui X on täringuviske tulemus (vt ka näide 3.10). Juhusliku suuruse Y keskväärtuse leidmiseks kasutame näidet 4.1, mille kohaselt $EX=3,5$ Kasutades valemit (4.2) saame keskväärtuse lineaarsuse omaduse tõttu $EY=2\cdot 3,5-7=0$.

Viimase seose õigsuses on lihtne veenduda vahetu arvutamise põhjal valemi (4.1) abil, kasutades juhusliku suuruse Y tõenäosusfunktsiooni näitest 3.10.

4.2. Juhusliku suuruse dispersioon

Juhusliku suuruse oluliseks iseärasuseks on tema *hajuvus*. Piltlikult öeldes – mida suurem on juhusliku suuruse hajuvus, seda rohkem erineb see juhuslik suurus konstandist.

Juhusliku suuruse hajuvust keskväärtuse suhtes iseloomustab tema *dispersioon* DX.

DEFINITSIOON 4.2. Juhusliku suuruse X *dispersiooniks* DX nimetatakse tema hälbe ruudu keskväärtust

$$DX = E(X-EX)^2, \tag{4.3}$$

kus hälve on arvutatud keskväärtuse suhtes.

Meenutame, et juhusliku suuruse X *hälbeks* mingi konstandi a suhtes nimetatakse vahet $X-a$

Dispersiooni tähisena kasutatakse ka avaldisi $D(X)$ ja samuti σ^2 (kreeka täht "sigma"). Harvemini kasutatavaid tähistusi $D^2(X)$, $V(X)$, $var(X)$ me käesolevas raamatus ei pruugi, kuid üheksandas paragrahvis võtame kasutusele empiirilise jaotuse dispersiooni sümboli s^2

Olgu märgitud, et dispersioonil on veel teinegi, valemis (4.3) esitatuga samaväärne, kuid mõningates rakendustes käepärasem kuju (vt valem (5.10)), mille me tuletame samuti alles järgmises paragrahvis.

Valemist (4.3) järeldub, et dispersiooni arvutamiseks leitakse juhusliku suuruse *hälbed keskväärtuse ümber* (st juhusliku suuruse üksikväärtuste ja keskväärtuse vahed), võetakse need ruutu ja keskmistatakse. Tõenäosusfunktsiooni kaudu avaldub (diskreetse) juhusliku suuruse dispersioon järgmise valemi abil:

$$DX = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i-EX)^2. \tag{4.4}$$

Valemist (4.4) ilmneb, et mida suuremad on juhusliku suuruse hälbed keskväärtusest ja mida suurema tõenäosusega esineb suuri hälbeid, seda suurem on dispersioon.

Tuletame järgnevas mõned olulised dispersiooni omadused.

DISPERSIOONI 1. OMADUS (MITTENEGATIIVSUS). Juhusliku suuruse dispersioon on mittenegatiivne,

$$DX \geq 0.$$

See omadus järeldub vahetult dispersiooni definitsioonist ja keskväärtuse monotoonsuse omadusest.

◇

Erijuhuna saame siit järeldada järgmise omaduse:

DISPERSIOONI 2. OMADUS (KONSTANDI DISPERSIOON). Konstandi dispersioon on null,

$$Dc = 0.$$

See omadus järeldub vahetult konstantse juhusliku suuruse definitsioonist, sest konstantse juhusliku suuruse hälve keskväärtuse suhtes on keskväärtuse teise omaduse põhjal null, ning samal põhjusel on ka selle hälbe ruudu keskväärtus null.

◇

Kehtib ka vastupidine omadus – kui (diskreetse) juhusliku suuruse dispersioon on võrdne nulliga, siis on see juhuslik suurus konstantne.

DISPERSIOONI 3. OMADUS (INVARIANTSUS NIHKE SUHTES.) Konstandi liitmine juhuslikule suurusele ei muuda tema dispersiooni,

$$D(a+X) = DX$$

Tõepoolest, eelmise omaduse tõttu $E(a+X) = a+EX$, ning järelikult $(a+X)-E(a+X) = X-EX$, millest dispersiooni 3. omadus järeldub vahetult.

✧

DISPERSIOONI 4. OMADUS (RUUTHOMOGEENSUS.) Juhusliku suuruse korrutamisel konstandiga suureneb tema dispersioon võrdeliselt selle konstandi ruuduga,

$$D(bX) = b^2 \cdot DX.$$

Tõepoolest, $E(bX) = bEX$ ja järelikult $E(bX-bEX)^2 = b^2E(X-EX)^2 = b^2DX$.

✧

Dispersiooni järgmised omadused tõestame punktides 5.9 ja 6.3.

Näide 4.4. Leiame näites 3.2 vaadeldud täringuviske tulemuse dispersiooni, arvestades näites 4.1 arvutatud keskväärtust: $DX = \frac{1}{6}[(1-3,5)^2+(2-3,5)^2+$
$+(3-3,5)^2+(4-3,5)^2+(5-3,5)^2+(6-3,5)^2] = \frac{17,5}{6} = 2,92$.

Näide 4.5. Arvutame mündiviske võidusumma dispersiooni (vt näited 3.3 ja 3.6): $DX = 0,5\cdot(-1)^2+0,5\cdot 1^2 = 1$.

Näide 4.6. Leiame juhusliku suuruse $Y = 2X-7$ dispersiooni, kui X on täringuviske tulemus (vt ka näide 3.10). Juhusliku suuruse Y dispersiooni leidmiseks kasutame dispersiooni ruuthomogeensuse omadust ja näite 4.4 tulemusi $DY = 2^2\cdot DX = 11,67$ Arvutuse õigsust saab kontrollida, kasutades valemit (4.4) ja Y tõenäosusfunktsiooni (vt tabel 3.2).

4.3. Juhusliku suuruse standardhälve

Juhusliku suuruse dispersioon sobib küll hästi teoreetiliste arutelude jaoks, kuid tema puuduseks on see, et tema *mõõtühikuks* on vastava juhusliku suuruse mõõtühiku ruut. Seda arvestades kasutatakse praktilises tegevuses juhusliku suuruse hajuvuse iseloomustamiseks sagedamini *ruutjuurt* dispersioonist.

DEFINITSIOON 4.3. Ruutjuurt dispersioonist nimetatakse *standardhälbeks*.

$$S(X) = \sqrt{DX}. \tag{4.5}$$

Standardhälvet tähistakse sümboliga $S(X)$, σ_X või σ.

STANDARDHÄLBE OMADUSED tulenevad vahetult vastavatest dispersiooni omadustest.

1^0 Juhusliku suuruse standardhälve on mittenegatiivne.
2^0 Konstandi standardhälve on null.
3^0 Standardhälve on invariantne nihke suhtes,

$$S(X+a) = S(X).$$

4^0 Standardhälve on absoluutselt homogeenne,

$$S(a+bX) = |b| \cdot S(X).$$

Näide 4.7. Leiame täringuviske tulemuse ja mündiviske võidusumma standardhälbed, kasutades selleks nende suuruste dispersioone, mis said arvutatud näidetes 4.4 ja 4.5. Vastavad standardhälbed on $S(X) = 1{,}708$ ja $S(X) = 1$.

Näide 4.8. Leiame juhusliku suuruse $Y = 2X - 7$ standardhälbe, kui X on täringuviske tulemus (vt näide 4.6). Juhusliku suuruse Y standardhälbe leidmiseks kasutame standardhälbe absoluutse homogeensuse omadust ja näite 4.7 tulemust, $S(Y) = 2 \cdot 1{,}71 = 3{,}42$.

4.4. Juhusliku suuruse standardiseerimine

Juhusliku suuruse keskväärtust ja standardhälvet kasutatakse teatavates lineaarteisendustes, mis oma sagedase rakendatavuse tõttu on saanud erinimed. Vaatame neid käesolevas punktis.

Olgu määratud juhuslik suurus X keskväärtusega μ ja dispersiooniga σ^2,

$$EX = \mu, \; DX = \sigma^2$$

1^0 **JUHUSLIKU SUURUSE TSENTREERIMINE** on juhusliku suuruse lineaarteisendus järgmise eeskirjaga:

$$Y = X - \mu. \tag{4.6}$$

Tsentreerimine *nihutab juhusliku suuruse väärtusi arvsirgel*, kuid ei muuda nende omavahelist paiknemist.

- Tsentreeritud juhusliku suuruse keskväärtus on alati null.
- Tsentreerimine ei muuda juhusliku suuruse hajuvust.

2^0 **JUHUSLIKU SUURUSE NORMEERIMINE** on juhusliku suuruse lineaarteisendus eeskirjaga:

$$Y = \frac{X}{\sigma}. \tag{4.7}$$

Normeerimine muudab juhusliku suuruse *skaalat*, st väärtuste omavahelisi kaugusi, kuid säilitab nende järjestuse.

- Normeeritud juhusliku suuruse dispersioon ja standardhälve võrduvad ühega.

3⁰ JUHUSLIKU SUURUSE STANDARDISEERIMINE on tema tsentreerimine ja normeerimine, st lineaarteisendus

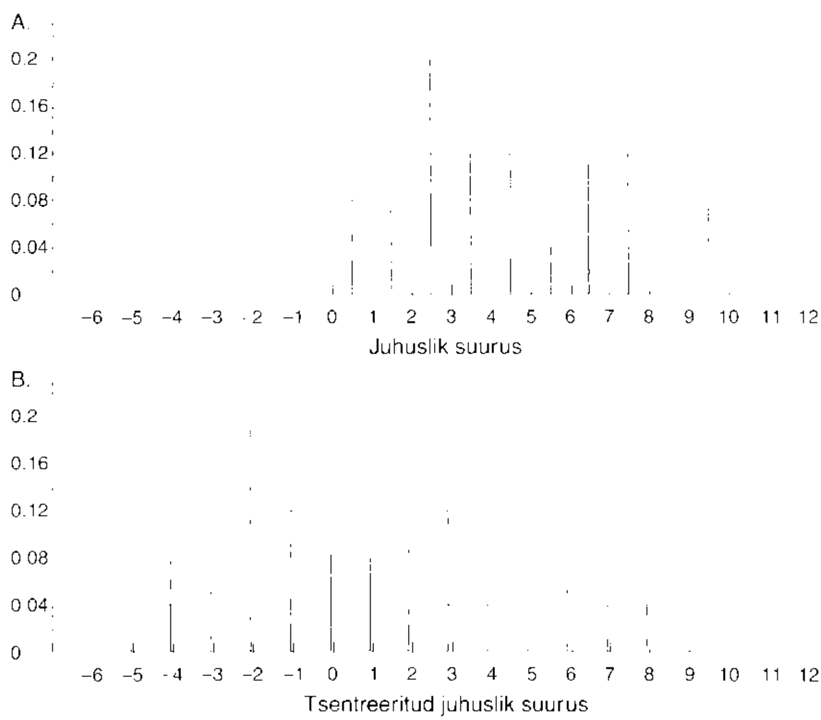
$$Y = \frac{(X-\mu)}{\sigma}. \tag{4.8}$$

- Standardiseeritud juhusliku suuruse keskväärtus on võrdne nulliga ja dispersioon ning standardhälve on võrdsed ühega.

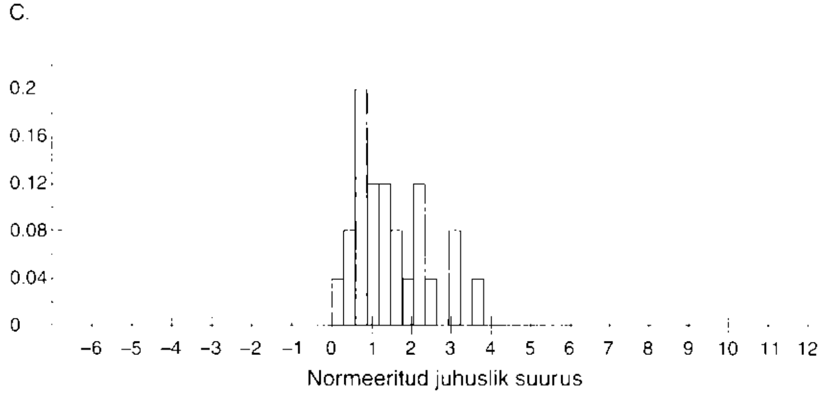
Praktikas kasutatakse standardiseerimist sageli erinevatel skaaladel mõõdetud juhuslike suuruste muutmisel omavahel võrreldavaiks.

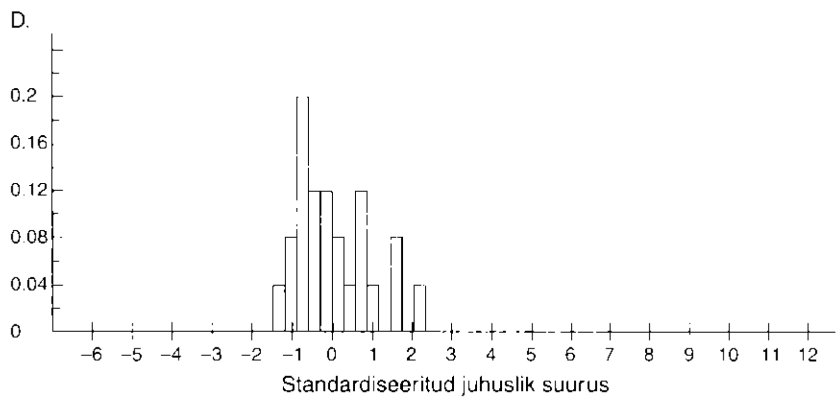
Näide 4.9. Näites 3.3 defineeritud juhuslik suurus (poisi võidusumma mündiviskel) X on keskväärtusega 0 ja standardhälbega 1, seega standardiseeritud.

Näites 4.3 tsentreerisime kahekordse täringuviske tulemuse. Selle juhusliku suuruse standardiseerimiseks tuleb algse juhusliku suuruse väärtused jagada arvuga 3,42. Saame uue juhusliku suuruse väärtusteks −1,46 ; −0,88 ; −0,29 ; 0,29; 0,88; 1,46, kusjuures iga väärtuse tõenäosus on $\frac{1}{6}$.



Joonis 4.1.
Juhuslik suurus X ja tsentreeritud juhuslik suurus $X - \mu$.





Joonis 4.2.

Normeeritud juhuslik suurus $\frac{X}{\sigma}$ ja standardiseeritud juhuslik suurus $\frac{X-\mu}{\sigma}$.

Näide 4.10. Arvutame näites 3.1 defineeritud juhuslikule suurusele X vastavad tsentreeritud, normeeritud ja standardiseeritud juhuslikud suurused X_1, X_2 ja X_3. Kõigepealt leiame tõenäosusfunktsiooni (joonis 3.2) ja seejärel valemeid (4.2), (4.4) ja (4.5) kasutades juhusliku suuruse X keskväärtuse ja standardhälbe, $\mu = 4,583$, $\sigma = 3,121$. Joonistel 4.1 ja 4.2 on esitatud kõigi nende juhuslike suuruste tõenäosusfunktsioonide graafikud tulpdiagrammidena samas mõõtkavas.

4.5. Tšebõševi võrratus

Juhusliku suuruse üksikväärtuste hajumine keskväärtuse ümber allub teatavale üldisele seaduspärasusele, mille sisuks on, et *väga suured hälbed esinevad üsna väikese tõenäosusega*. See seaduspärasus on formaalselt esitatav järgmise võrratusena.

TŠEBÕŠEVI VÕRRATUS.

Iga juhusliku suuruse X korral kehtib alljärgnev võrratus,

$$P(|X-EX|\geq c)\leq\frac{DX}{c^2}, \tag{4.9}$$

kus EX ja DX tähistavad selle juhusliku suuruse keskväärtust ja standardhälvet ning c on suvaline positiivne konstant.

TÕESTUS. Valime vabalt konstandi c. Kirjutame dispersiooni avaldise, kasutades valemit (4.4), ja esitame ta kahe liidetava summana. Esimesse liidetavasse (summasse) arvame need liikmed, mille puhul juhusliku suuruse X väärtus erineb keskväärtusest *mitte vähem* kui c võrra, ja teise need liidetavad, mille puhul see erinevus *on väiksem kui* c:

$$DX=\sum_{i=1}^{k}p_i(x_i-EX)^2=\sum_{|X-EX|\geq c}p_i(X-EX)^2+\sum_{|X-EX|<c}p_i(X-EX)^2$$

Nüüd asendame esimeses liidetavas avaldise $|X-EX|$ konstandiga c, mille tagajärjel see avaldis saab ainult väheneda. Teise liidetava, mis on kindlasti mittenegatiivne, jätame hoopis ära. Ka see saab avaldist ainult vähendada, järelikult on õige järgmine võrratus:

$$DX\geq c^2\sum_{|X-EX|\geq c}p_i.$$

Viimane tõenäosuste summa väljendab sündmuse $|X-EX|\geq c$ tõenäosust, vt valem (3.4'). Seda arvestades saame

$$DX\geq c^2P(|X-EX|\geq c),$$

millest võrratuse mõlema poole jagamisel positiivse konstandiga c^2 saamegi võrratuse (4.9).

◆

Näide 4.11. Illustreerime Tšebõševi võrratust täringuviske tulemuse abil. Võtame $c=2$. Et näidete 4.1 ja 4.4 kohaselt $EX=3,5$ ja $DX=2,92$, saame $\frac{DX}{c^2}=0,73$. Järelikult ei tohiks juhusliku suuruse X väärtused hälbida keskväärtusest 3,5 rohkem kui kahe ühiku võrra suurema tõenäosusega kui 0,73. Niisuguseid väärtusi on kaks, nimelt 1 ja 6, ning nende esinemise tõenäosus on 1/3, mis on tõepoolest väiksem kui 0,73. Seega on leitud tulemus kooskõlas Tšebõševi võrratusega.

4.6. Juhusliku suuruse momendid

Juhusliku suuruse arvkarakteristikute loetelu ei ole esitatud kolme karakteristiku – keskväärtuse, dispersiooni ja standardhälbega kaugeltki mitte ammendatud. Nimetatud karakteristikud kuuluvad *juhusliku suuruse momentide* abil defineeritud arvkarakteristikute peresse, mille tüüpiliste esindajatega järgnevas tutvust teeme.

Juhusliku suuruse moment defineeritakse selle juhusliku suuruse *astme keskväärtuse kaudu.*

DEFINITSIOON 4.4. Olgu m suvaline naturaalarv Juhusliku suuruse X m järku momendiks nimetatakse selle juhusliku suuruse m-nda astme keskväärtust

Momente tähistakse tavaliselt tähisega μ_m. Seega on m järku moment avaldatav valemist

$$\mu_m = E(X^m). \tag{4.10}$$

Arvutusvalem m järku momendi jaoks juhusliku suuruse X tõenäosusfunktsiooni kaudu on järgmine:

$$\mu_m = \sum_{j=1}^{k} p_j x_j^m. \tag{4.11}$$

Praktikas leiavad kõige sagedamini kasutamist teist, kolmandat ja neljandat järku momenendid.

4.7. Juhusliku suuruse tsentraalsed momendid, asümmeetria kordaja ja ekstsess

Lisaks valemiga (4.10) defineeritud nn *algmomentidele* kasutatakse tihti ka juhusliku suuruse *tsentraalseid momente*, mille tavaliseks tähiseks on ν_m (kreeka täht "nüü") ja mis on defineeritud vastava *tsentreeritud juhusliku suuruse momentidena.*

$$\nu_m = E(X-EX)^m, \tag{4.10'}$$

kus m on suvaline naturaalarv.

Paneme tähele, et dispersioon on teine tsentraalne moment. Ka kolmas ja neljas tsentraalne moment on tuntud juhusliku suuruse arvkarakteristikutena.

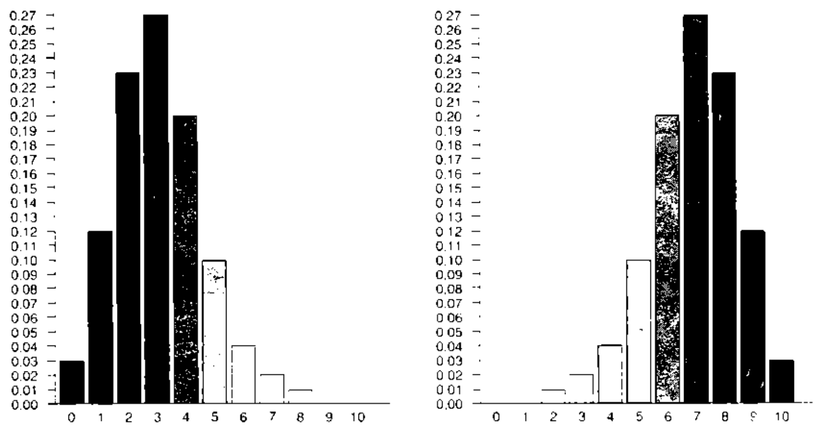
ASÜMMEETRIA KORDAJA. Standardiseeritud juhusliku suuruse kolmandat tsentraalset momenti nimetatakse *asümmeetria kordajaks* ja tähistatakse sümboliga a_X,

$$a_X = \frac{\nu_3}{\sigma^3}. \tag{4.12}$$

Kui juhuslik suurus (täpsemalt, tema tõenäosusfunktsioon) on sümmeetriline, siis on tema asümmeetria kordaja võrdne nulliga. Vastupidine väide ei pea üldiselt paika, kuid enamasti on siiski juhuslik suurus, mille asümmeetria kordaja võrdub nulliga, kaunis lähedane sümmeetrilisele.

Et selgitada jaotuse kuju iseärasusi, võtame kasutusele statistika eriala kirjanduses levinud piltliku jaotuse "saba" mõiste, mis tähistab keskväärtusest kaugel paiknevaid juhusliku suuruse väärtusi. "Raskeks" nimetatakse saba siis, kui tema tõenäosus on suhteliselt suur. Meenutame, et keskväärtusest eemal paiknevate väärtuste tõenäosused on tõkestatud Tšebõševi võrratusega, vt valem (4.9).

Kui asümmeetria kordaja on positiivne, siis on vaadeldaval jaotusel paremal, so suuremate väärtuste pool, "raske saba", vt joonis 4.3. Negatiivse asümmeetria korral on olukord vastupidine.

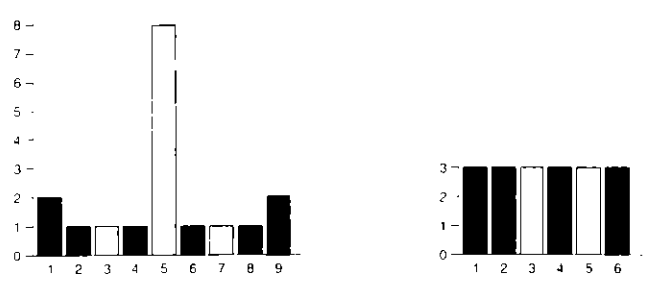


Joonis 4.3.
Positiivse ja negatiivse asümmeetriaga jaotus.

EKSTSESS. Juhusliku suuruse neljanda tsentraalse momendi kaudu avaldub selle jaotuse *kuju karakteristik ekstsess* e_X alljärgneva valemina:

$$e_X = \frac{v_4}{\sigma^4} - 3. \tag{4.13}$$

Terava tipu ja "raskete sabadega" jaotuse puhul on ekstsess positiivne. Tõkestatud väärtuste hulga ja lamedatipulise või nõgusa jaotuse puhul on ekstsess negatiivne (kuid mitte väiksem kui –2), vt joonis 4.4.



Joonis 4.4.
Positiivse ja negatiivse ekstsessiga jaotus.

4.8. Juhusliku suuruse jaotusseadus (parameetriline jaotuste pere)

Juhusliku suuruse jaotust esitav tõenäosusfunktsioon sisaldab tavaliselt mõningaid konstante, mida nimetatakse *jaotusparameetriteks*. Kõige sagedamini on jaotusparameetriks juhusliku suuruse keskväärtus, sageli lisaks ka dispersioon või mõni tema funktsioon. Jaotusparameetrite erinevate väärtuste korral saadakse erinevad jaotused, mis aga kuuluvad samasse *parameetrilisesse jaotuste peresse.*

DEFINITSIOON 4.5. Reaalarvulistest parameetritest sõltuvat *jaotuste peret* esitavat eeskirja nimetatakse *jaotusseaduseks.*

Igal jaotusseadusel on oma tähistus, mille juures märgitakse ära ka parameetrite konkreetsed väärtused. Tõsiasja, et juhuslik suurus X on jaotusega $\mathcal{P}(\theta)$ (siin tähistab kreeka täht "theta" jaotuse $\mathcal{P}$ parameetrit), tähistatakse sümbolite abil järgmiselt:

$$X \sim \mathcal{P}(\theta).$$

Lihtsa näite parameetrilisest jaotuste perest pakub järgmises punktis vaadeldav diskreetse ühtlase jaotuse pere $\mathcal{U}_d$, millega oleme tegelikult juba tutvunud.

4.9. Diskreetne ühtlane jaotus

Diskreetne ühtlane jaotus on defineeritud oma tõenäosusfunktsiooni kaudu, mis avaldub kujul

$$P(X=i) = \frac{1}{k}, i = 1,\dots,k.$$

Siin on parameetriks *erinevate väärtuste arv* k, kusjuures k võib olla suvaline naturaalarv. Diskreetse ühtlase jaotuse tähistuseks on $\mathcal{U}_d(k)$.

Sellesse peresse kuulub täringuviske tulemuste abil defineeritud juhuslik suurus, mille puhul $k = 6$, samuti mündiviske tulemus, mille korral $k = 2$.

Lihtne arvutus annab diskreetse ühtlase jaotusega $\mathcal{U}_d(k)$ juhusliku suuruse keskväärtuse ja dispersiooni:

$$EX = \frac{k}{2}, DX = \frac{k^2-1}{12}$$

Käesolevas paragrahvis defineerime veel ühe, väga sageli kasutatava lihtsa diskreetsete jaotuste pere.

4.10. Bernoulli jaotus

Olgu määratud elementaarsündmuste ruum Ω ja olgu A mingi sündmus selles ruumis, $P(A) = p$.

DEFINITSIOON 4.6. *Bernoulli jaotusega juhuslikuks suuruseks* nimetatakse juhuslikku suurust X, mis on defineeritud järgmiselt:

kui A toimub, siis $X = 1$,
kui A ei toimu, siis $X = 0$.

Lihtne on kontrollida, et X on tõepoolest elementaarsündmuse funktsioon.

Leiame X tõenäosusfunktsiooni:

$$P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p. \tag{4.14}$$

✧

Bernoulli jaotus sõltub ühest parameetrist p (sündmuse tõenäosus), mis võib omandada suvalise reaalarvulise väärtuse vahemikus nullist üheni ja seda tähistatakse sümboliga $\mathcal{B}(p)$.

Seosega (4.14) defineeritud juhuslikku suurust X nimetatakse ka *sündmuse A indikaatoriks.*

Bernoulli jaotusega juhusliku suuruse X keskväärtuse, dispersiooni ja standardhälbe leiame vahetult valemitest:

$$EX = 1 \cdot p = p$$
$$DX = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2\ (1-p) = (1-p)p,$$
$$S(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Bernoulli jaotusega juhuslikku suurust iseloomustab veel tõsiasi, et tema kõik momendid on võrdsed. Tõepoolest,

$$\mu_m = 0^m \cdot (1-p) + 1^m \cdot p = p,\ m = 1, \ldots .$$

✧

Näide 4.12. Vaatleme katsena täringuviset ja sündmusena A kuue silma saamist, ning defineerime sellele sündmuse indikaatori ning vastava Bernoulli jaotuse. Otsitav jaotus on siis

$$P(X=0) = \frac{5}{6},\ P(X=1) = \frac{1}{6}.$$

Keskväärtuse, dispersiooni ja standardhälbe väärtusteks saame:

$$EX = \frac{1}{6} = 0,1667,\ DX = \frac{1}{6}\frac{5}{6} = 0,1389,\ S(X) = 0,3727$$

Et leida asümmeetriakordajat ja ekstsessi, arvutame kolmanda ja neljanda tsentraalse momendi, kasutades seost $\nu_k = \frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^k + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^k$; siit järeldub, et $\nu_3 = \frac{120}{1296} = 0,0926$, $\nu_4 = \frac{630}{7776} = 0,0810$.

Arvutame nüüd asümmeetria kordaja $a_X = \frac{\nu_3}{S(X)^3} = \frac{0,0926}{0,0518} = 1,789$ ja ekstsessi $e_X = \frac{0,0810}{0,0193} - 3 = 1,2$.

Järelikult on saadud jaotus märgatavalt ebasümmeetriline "raske" sabaga suuremate väärtuste poole. Tõepoolest, "suur" väärtus 1, mille tõenäosus on $\frac{1}{6}$, asub keskväärtusest rohkem kui kahe standardhälbe ühiku võrra paremal.

5. JUHUSLIK VEKTOR

5.1. Juhusliku vektori mõiste

Sageli on tarvis vaadelda mitut juhuslikku suurust üheskoos. Sel eesmärgil defineeritaksegi *juhuslik vektor*

Olgu fikseeritud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, ning olgu sellel elementaarsündmuste ruumil määratud mitu juhuslikku suurust.

DEFINITSIOON 5.1. Olgu $X_1, \dots, X_m$ juhuslikud suurused, mis on defineeritud samal elementaarsündmuste ruumil Ω. Need juhuslikud suurused üheskoos moodustavad *m-mõõtmelise juhusliku vektori.*

Juhuslikku vektorit tähistatakse kas sümboliga $\vec{X} = (X_1, \dots, X_m)$ või ka $\mathbf{X}$. Juhuslikke suurusi X_i nimetatakse *juhusliku vektori* $\vec{X}$ *komponentideks.* Kui juhusliku vektori kõik komponendid on diskreetsed juhuslikud suurused, siis nimetatakse seda juhuslikku vektorit *diskreetseks juhuslikuks vektoriks.* Me eeldame käesolevas paragrahvis, et kõik käsiteldavad juhuslikud vektorid on diskreetsed.

Kui katse tagajärjel toimub üks elementaarsündmus ω_i, siis omandab juhuslik vektor $\vec{X}$ konkreetse *väärtuse* $(\omega_i) = (X_1(\omega_i), \dots, X_m(\omega_i)$. Seda väärtust $(x_1, \dots, x_m) = (X_1(\omega_i), \dots, X_m(\omega_i))$ nimetatakse ka juhusliku vektori $\vec{X}$ *realisatsiooniks.*

Näide 5.1. Olgu katseks kahe (sinise ja punase) täringu vise. Määraku sinise täringu näit juhusliku suuruse X, punase täringu näit – juhusliku suuruse Y ja silmade kogusumma juhusliku suuruse Z väärtuse. Siis on (X, Y, Z) kolmemõõtmeline juhuslik vektor $(m = 3)$ ja arvvektor $(3,2,5)$ on üks tema võimalikke väärtusi (realisatsioone).

5.2. Juhusliku vektori jaotus

Samuti nagu juhuslikku suurust, nii iseloomustab ka juhuslikku vektorit tema *jaotus.*

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu selles ruumis defineeritud juhuslik vektor $\vec{X}$.

DEFINITSIOON 5.2. Juhusliku vektori $\vec{X}$ *jaotuseks* (komponentide ühisjaotuseks) $P_{\vec{X}}$ nimetatakse eeskirja, mis seab igale vektori $\vec{X}$ väärtusele (väärtushulgale) vastavusse selle tõenäosuse.

DEFINITSIOON 5.3. Juhusliku vektori $\vec{X}$ iga komponendi X_i (kui juhusliku suuruse) jaotust nimetatakse *marginaaljaotuseks.*

Ühisjaotus sisaldab eneses lisaks kõigi komponentide marginaaljaotustele veel teavet komponentide paaride ja rühmade *omavaheliste sõltuvuste* kohta.

Juhusliku vektori jaotuse tavapärane tähistus on $P_{\vec{X}}$. Seda, et vektor $\vec{X}$ on jaotusega P, märgitakse avaldisega $\vec{X} \sim P$ Käesolevas paragrahvis tutvume ainult kahemõõtmelise diskreetse juhusliku vektori jaotusega, st eeldame edaspidi, et $m = 2$.

5.3. Kahemõõtmelise juhusliku vektori jaotus

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu selles ruumis defineeritud kaks juhuslikku suurust. Kirjapildi lihtsustamiseks (et vältida indekseid) tähistame $X_1 = X$ ja $X_2 = Y$ mis kokku moodustavad juhusliku vektori (X, Y).

Oletame, et juhuslikul suurusel X on k erinevat väärtust $x_1, \dots, x_k$ ja juhuslikul suurusel Y vastavalt h väärtust $y_1, \dots, y_h$, kusjuures loomulikult $1 \le k \le n$, $1 \le h \le n$. Siin tähistab n elementaarsündmuste arvu ruumis Ω (vt punkt 3.1). On loomulik eeldada, et kummagi komponendi jaotus ei ole kõdunud, st et $k > 1$, $h > 1$. Juhuslik vektor võib põhimõtteliselt omandada $k \cdot h$ erinevat väärtust (x_i, y_j), $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, h$ Seda hulka nimetataksegi *juhusliku vektori võimalike väärtuste hulgaks.* Paneme tähele, et juhusliku vektori *tegelik väärtuste hulk* võib olla ka ainult osa sellest võimalike väärtuste hulgast, st mõnede komponentide väärtuste kombinatsioonide tõenäosus võib olla null (vt tabel 5.3). Kindlasti ei saa reaalselt omandatavate (nullist erineva tõenäosusega) väärtuste arv olla suurem elementaarsündmuste arvust n.

Diskreetse juhusliku vektori jaotuse kõige käepärasemaks *esituseks* on selle *tõenäosusfunktsioon*, mis kahemõõtmelisel juhul tavaliselt esitatakse nn *risttabeli ehk jaotustabeli* kujul.

DEFINITSIOON 5.4. *Juhusliku vektori tõenäosusfunktsiooniks* nimetatakse eeskirja, mis seab igale selle vektori võimalikule väärtusele (x_i, y_j) vastavusse selle väärtuse tõenäosuse $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$.

Edaspidi tähistame juhusliku vektori (X, Y) jaotust sümboliga P_{XY} ja kasutame sama sümbolit ka selle vektori tõenäosusfunktsiooni jaoks. Juhusliku vektori tõenäosusfunktsiooni on võimalik leida, kui on teada

1^0 kõigi elementaarsündmuste tõenäosused (meie eeldusel $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$),

2^0 juhusliku vektori kui elementaarsündmuse funktsiooni eeskiri.

Juhusliku vektori abil määratud sündmus $(X = x_i, Y = y_j)$ on selle komponentide poolt määratud sündmuste $(X = x_i)$ ja $(Y = y_j)$ korrutis,

$$((X, Y) = (x_i, y_j)) = (X = x_i, Y = y_j) = (X = x_i) \cap (Y = y_j). \tag{5.1}$$

Märgime, et esimese sündmuse puhul loobutakse enamasti lihtsuse mõttes välistest sulgudest.

Järgnevas toome kahemõõtmelise vektori jaotust esitava tavakohase jaotustabeli (risttabeli).

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_h	P_X
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1h}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2h}	$p_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
x_k	p_{k1}	p_{k2}	...	p_{kh}	$p_{k\cdot}$
P_Y	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	...	$p_{\cdot h}$	1

Tabel 5.1.
Juhusliku vektori (X, Y) jaotustabel.

Märgime, et kõneldes edaspidi (diskreetsest) juhuslikust vektorist (X, Y) ilma jaotust täpsustamata mõistame sellena juhuslikku vektorit tabelis 5.1 esitatud jaotusega.

Esimene rida ja esimene veerg moodustavad tabelis nn *päise*, mis selgitab tabeli ülejäänud lahtrite sisu. Alates teisest reast/veerust vastab igale reale üks juhusliku suuruse X väärtus x_i ja igale veerule juhusliku suuruse Y mingi väärtus y_j. Vastava rea ja veeru ristumiskohal paikneb tõenäosus p_{ij}, so tõenäosus, et juhuslik vektor (X, Y) omandab väärtuse (x_i, y_j).

Tabeli äärmises parempoolses veerus ja kõige alumises reas paiknevad komponentide X ja Y jaotused, mis on vektori jaotuse suhtes *marginaal-* ehk servajaotused. Täpsemalt on need muidugi vastavate jaotuste tõenäosusfunktsioonid. On lihtne näha, et need on saadud ühisjaotusest tõenäosuste summeerimisel vastavalt ridade ja veergude kaupa:

$$P(X = x_i) = p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{h} p_{ij}, \tag{5.2}$$

$$P(Y = y_j) = p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}. \tag{5.2'}$$

Näide 5.2. Visatagu kaht münti, ühe visketulemused määravad juhusliku suuruse X, teise visketulemused juhusliku suuruse Y, kusjuures mõlema juhusliku suuruse sisuks on poisi võidusumma, mis määratud (samuti kui näites 3.3) nii, et vapi pealelangemisel poiss kaotab, kirjapoole pealelangemisel võidab ühe krooni. Juhusliku vektori (X, Y) ühisjaotust kirjeldab siis tabel 5.2.

$X \backslash Y$	–1	1	P_X
–1	0,25	0,25	0,5
1	0,25	0,25	0,5
P_Y	0,5	0,5	1

Tabel 5.2.
Võidusumma jaotus pärast kaht mündiviset.

Tabelist 5.2 järeldame, et sündmus $(X,Y) = (-1,-1)$, st poiss kaotab mõlemal viskel krooni, esineb tõenäosusega 0,25. Sama suur on ka kahekordse võidu tõenäosus $P(X,Y) = (1,1)$.

Näide 5.3. Visatagu kaht täringut (sinist ja punast). Juhuslikuks suuruseks X on sinise täringu silmade arv, Y – punase täringu silmade arv ja Z – mõlema täringu silmade arvude summa. Moodustame *kahemõõtmelise* juhusliku vektori (X,Z) ühisjaotuse jaotustabeli alljärgneval kujul.

$X \backslash Z$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	P_X
1	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0	0	0	0	0	0,167
2	0	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0	0	0	0	0,167
3	0	0	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0	0	0	0,167
4	0	0	0	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0	0	0,167
5	0	0	0	0	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0	0,167
6	0	0	0	0	0	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,167
P_Z	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028	1

Tabel 5.3.
Ühe ja kahe täringu visketulemuste ühisjaotus.

Juhuslike suuruste X (ühe täringu visketulemus) ja Z (kahe täringu visketulemuste summa) marginaaljaotused P_X ja P_Z paiknevad vastavalt tabeli äärmises parempoolses veerus ja alumises reas.

5.4. Kahemõõtmelise juhusliku vektori tinglikud jaotused

Olgu (X,Y) kahemõõtmeline juhuslik vektor, mille jaotus on esitatud jaotustabelina, vt tabel 5.1. Paneme tähele, et kui ühe juhusliku suuruse väärtus on mingil viisil fikseeritud (tema kaudu on määratud mingi sündmus ehk *tingimus*), siis võib teise juhusliku suuruse jaotus sõltuvalt sellest tingimusest muutuda.

DEFINITSIOON 5.5. Olgu juhusliku vektori komponendi Y kaudu määratud mingi sündmus $A = (Y \in R)$, kus R on suvaline reaalarvuline piirkond, mille puhul $P(Y \in R) \neq 0$. Juhusliku vektori komponendi X jaotust tingimusel A nimetatakse X *tinglikuks jaotuseks*.

Tinglik jaotus leitakse, kasutades selleks *tingliku tõenäosuse* mõistet $P(X=x_i \mid A)$, $i=1,\dots,k$. Praktikas kasutatakse kõige sagedamini tingimust $A=(Y=y_j)$, sel juhul avalduvad tinglikud tõenäosused järgmise seosega:

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ i=1,\dots,k. \tag{5.3}$$

Seega saame tinglikud tõenäosused leida tabeli sellest veerust, mille number on tingimusega fikseeritud (veerg nr j), jagades tabelis paiknevad tõenäosused vastava marginaalse tõenäosusega.

Samal viisil on lihtne leida ka juhusliku suuruse Y tinglikke tõenäosusi, kui tingimused on fikseeritud juhusliku suuruse X abil, $(X=x_i)$,

$$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\ j=1,\dots,s. \tag{5.4}$$

Näide 5.4. Vaatame kaht täringuviset, nagu ka näites 5.3, kusjuures X on sinise, Y punase täringu näit ja Z summaarne visketulemus. Leiame Z tingliku jaotuse $P(Z \mid X=3)$ tingimusel $X=3$ ning X tingliku jaotuse $P(X \mid Z=3)$ tingimusel $Z=3$.

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0	0	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0	0	0

Tabel 5.4.
Kahe täringu visketulemuste summa jaotus tingimusel, et esimese tulemus on 3 silma.

X	1	2	3	4	5	6
P	0,5	0,5	0	0	0	0

Tabel 5.5.
Ühe täringu visketulemuse jaotus tingimusel, et kahe täringu summaarne tulemus on 3.

5.5. Kahe juhusliku suuruse sõltumatus

Juhusliku vektori uurimisel on üheks peaeesmärgiks selle komponentide vaheliste mõjude selgitamine. Selle aluseks on juhuslike suuruste *sõltuvuse* mõiste. Sõltuvuse määratluseni jõudmiseks alustame tutvumist *sõltumatuse* mõistega.

DEFINITSIOON 5.6. Olgu (X,Y) kahemõõtmeline juhuslik vektor. Öeldakse, et *juhuslik suurus X ei sõltu juhuslikust suurusest Y*, kui X kõik tinglikud jaotused on omavahel võrdsed (ühtivad) alati, kui tingimus on määratud Y kaudu.

Arusaadavalt ühtivad X tinglikud jaotused siis ka X marginaaljaotusega P_X (selles veendumiseks meenutame tingliku jaotuse ja sündmuste sõltumatuse määratlusi).

Viimasest asjaolust järeldub, et kui juhusliku vektori üks komponent X ei sõltu teisest komponendist Y siis avaldub vektori tõenäosusfunktsioon marginaalsete tõenäosusfunktsioonide korrutisena:

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}, i = 1, \ldots, k. \tag{5.5}$$

Saadud võrdus kehtib kõigi indeksi j väärtuste korral, $j = 1, \ldots, h$. Kokkuvõttes kehtib definitsiooniga 5.6 samaväärne määratlus:

(DISKREETSETE) JUHUSLIKE SUURUSTE SÕLTUMATUS.

Juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud parajasti siis, kui juhusliku vektori (X, Y) tõenäosusfunktsioon avaldub marginaalsete tõenäosusfunktsioonide korrutisena.

Arvestades tõsiasja, et tõenäosusfunktsioon on *jaotuse esitus*, sõnastatakse juhuslike suuruste sõltumatuse määratlus tavaliselt jaotuste kaudu.

JUHUSLIKE SUURUSTE SÕLTUMATUS. Juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud parajasti siis, kui juhusliku vektori (X, Y) jaotus P_{XY} võrdub marginaaljaotuste korrutisega.

$$P_{XY} = P_X \; P_Y. \tag{5.6}$$

Viimane võrdus on kõige üldisem, selle kaudu defineeritakse suvaliste juhuslike suuruste sõltumatus.

Siit tulenevad sõltumatute komponentidega juhusliku vektori omadused.

JUHUSLIKE SUURUSTE SÕLTUMATUSE VASTASTIKKUSE OMADUS. Juhuslike suuruste sõltumatus on vastastikune, st alati, kui X on sõltumatu Y-st, on ka Y sõltumatu X-st.

SÕLTUMATUTE JUHUSLIKE SUURUSTE KAUDU DEFINEERITUD SÜNDMUSTE SÕLTUMATUS.

Kui X ja Y on sõltumatud juhuslikud suurused ja A ning B on nende kaudu defineeritud sündmused, $A = (X \in R_1)$, $B = (Y \in R_2)$, kus R_1, R_2 on suvalised reaalarvude hulgad, siis on A ja B sõltumatud.

TÕESTUS. Kuulugu hulka R_1 juhusliku suuruse X väärtused $x_1, \ldots, x_s$ ja hulka R_2 juhusliku suuruse Y väärtused $y_1, \ldots, y_t$. Siis avaldub sündmus $A \cap B$ järgmise summana

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (X = x_i, Y = y_j).$$

Juhuslike suuruste X ja Y sõltumatuse tunnusest (5.6) järeldub, et sündmuse $A \cap B$ tõenäosuse saame esitada järgmise korrutisena:

$$P(A \cap B) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} p_{ij} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} p_{i\cdot} \sum_{j=1}^{t} p_{\cdot j} = P(A) P(B).$$

Saadud võrratus tõestabki sündmuste A ja B sõltumatuse.

✦

Näeme, et kui juhusliku vektori komponendid on sõltumatud, siis määravad marginaaljaotused ühisjaotuse täielikult. Üldjuhul ei ole see nii.

Näide 5.5. Vaatame kahe mündi viset (näide 5.2, tabel 5.2). Lihtne on kontrollida, et selles tabelis on ühine tõenäosusfunktsioon iga i ja j korral määratud vastavate marginaalsete tõenäosusfunktsioonide korrutisena. Järelikult on X ja Y sõltumatud – mis on ka üsna ootuspärane, sest pole mingit sisulist alust arvata, et mündiviske tulemus kuidagi sõltuks eelmise viske tulemusest.

Näide 5.6. Vaatame sinise ja punase täringu viskega määratud juhuslikke suurusi X ja Y, nagu ka näites 5.1, ning leiame juhusliku vektori (X, Y) ühisjaotuse, vt tabel 5.6.

X\Y	1	2	3	4	5	6	P_X
1	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,167
2	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,167
3	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,167
4	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,167
5	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,167
6	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,167
P_Y	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	1

Tabel 5.6.
Kahe täringu visketulemuste ühisjaotus.

On näha, et selles tabelis on kõik tinglikud jaotused võrdsed marginaaljaotustega, järelikult on juhuslikud suurused X ja Y sõltumatud. See, et X ja Y marginaaljaotused on samuti omavahel võrdsed, ei ole oluline.

5.6. Juhuslike suuruste sõltuvus

Kui juhuslikud suurused X ja Y (juhusliku vektori (X, Y) komponendid) ei ole sõltumatud, siis on nad *sõltuvad*.

Sõltuvus võib olla mitmesuguse tugevuse ja iseloomuga. Sõltuvuse teatud äärmuslikuks vormiks on see, kui juhuslikud suurused X ja Y *ühtivad*, st kui iga elementaarsündmuse ω_i korral $X(\omega_i) = Y(\omega_i)$. Sel korral määrab ühe juhusliku suuruse väärtus teise väärtuse alati täiesti täpselt. Üldiselt öeldakse, et juhuslike suuruste vaheline sõltuvus on seda *tugevam*, mida täpsemalt võimaldab ühe juhusliku suuruse väärtuse teadmine määrata teise juhusliku suuruse väärtust. Selles mõttes esindabki juhtum $X = Y$ maksimaalse tugevusega sõltuvust.

Minimaalse tugevusega sõltuvus on *sõltumatus*, sel juhul ei lisa ühe juhusliku suuruse väärtuse teadmine mingit teavet teise juhusliku suuruse kohta.

Juhuslike suuruste omavahelise sõltuvuse iseloomustamiseks kasutatakse mitmesuguseid arvkarakteristikuid, nn *seosekordajaid*. Tutvume mõnega nendest järgmises paragrahvis.

5.7. Juhusliku vektori funktsioon

Niihästi praktiliste kui ka teoreetiliste ülesannete lahendamisel on tihti tarvis leida *juhusliku vektori funktsiooni*. Määratleme selle järgmiselt.

DEFINITSIOON 5.7. Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi Ω ja olgu selles ruumis defineeritud (m-mõõtmeline) juhuslik vektor $\vec{X}$ Olgu $g(\cdot)$ mingi reaalarvuline (m argumendi) funktsioon. Siis on

$$Y = g(\vec{X}) \tag{5.7}$$

juhuslik suurus.

Kuigi esitatud definitsioonis võib m olla suvaline naturaalarv, piirdume käesolevas raamatus enamasti juhuga $m = 2$.

Samuti nagu juhusliku suuruse funktsiooni puhulgi on lihtne näidata, et

DISKREETSE JUHUSLIKU VEKTORI FUNKTSIOON ON DISKREETNE JUHUSLIK SUURUS.

Tõepoolest, olgu suuruse Y erinevate väärtuste arv s. On selge, et s ei saa olla suurem kui $\min(n, k \cdot h)$, kus n, k ja h tähistavad vastavalt elementaarsündmuste ja X ning Y väärtuste arvu.

✧

Juhusliku suuruse Y tõenäosusfunktsioon on arvutatav juhusliku vektori $\vec{X}$ tõenäosusfunktsiooni kaudu:

$$P(Y = y_j) = \sum_{g(x_1,\ldots,x_m) = y_j} P(\vec{X} = (x_1,\ldots,x_m)).$$

Et leida vektori funktsiooni teatava väärtuse tõenäosust, tuleb leida kõik need juhusliku vektori $\vec{X}$ väärtused, mille puhul funktsiooni $g(\vec{x})$ väärtuseks on y_j, ja nende tõenäosused liita (vt ka valem 3.7).

✧

5.8. Juhuslike suuruste summa

Üks lihtsamaid juhusliku vektori funktsioone on selle komponentide *summa*. Tutvume sellega käesolevas punktis lähemalt.

DEFINITSIOON 5.8. Olgu X ja Y juhuslikud suurused, mis on defineeritud elementaarsündmuste ruumis Ω Juhuslike suuruste *summaks* nimetame suurust $Z = X+Y$ mis on määratud nii, et kui katse tulemusena esineb elementaarsündmus ω_i, siis omandab suurus Z väärtuse

$$Z(\omega_i) = X(\omega_i)+Y(\omega_i),\ i = 1,\ldots,n.$$

Veendume, et selliselt defineeritud suurus Z on tõepoolest *juhuslik suurus*. Vahetult definitsioonist järeldub, et ta on elementaarsündmuse funktsioon, sest iga elementaarsündmuse puhul on Z väärtus üheselt määratud. Lisaks sellele on selge, et Z võib omandada kuni $k \cdot h$ erinevat väärtust. Need saadakse X ja Y erinevate väärtuste kombineerimisel. Loomulikult ei saa Z väärtuste arv olla suurem kui elementaarsündmuste arv n. Järelikult on Z tõepoolest (diskreetne) juhuslik suurus.

✧

Juhusliku suuruse Z iga väärtuse z_l tõenäosus on leitav kui kõigi niisuguste elementaarsündmuste ω_i tõenäosuste summa, mille puhul X väärtuse ja Y väärtuse summaks on z_l,

$$P(Z=z_l) = \sum_{X(\omega_i)+Y(\omega_i)=z_l} P(\omega_i).$$

On lihtne kontrollida, et nii määratud sündmuste tõenäosused moodustavad juhusliku suuruse Z tõenäosusfunktsiooni,

$$\sum_{l=1}^{u} P(z_l) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} p_{ij} = 1,$$

sest Z defineerimisel arvestatakse kõiki X ja Y väärtuste kombinatsioone.

✧

Näide 5.7 Näites 5.3 defineeritud juhuslik suurus Z on juhuslike suuruste X ja Y summa. Tema erinevate väärtuste arv on 11, kusjuures erinevate väärtuste jaoks on soodsate elementaarsündmuste arvud ja järelikult ka tõenäosused üldiselt erinevad. Näiteks juhusliku suuruse Z väärtus 5 saadakse nelja elementaarsündmuse puhul, need on (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), kus igas vektoris näitab esimene komponent sinise, teine punase täringu näitu. Vastavalt sellele ongi $P(Z=5) = \frac{4}{36}$.

5.9. Juhusliku vektori funktsiooni arvkarakteristikud

Käesolev punkt võiks oma sisu poolest kuuluda küll eelmisesse paragrahvi, sest siin räägitakse *juhusliku suuruse arvkarakteristikutest*. Et aga siin vaadeldav juhuslik suurus on defineeritud kui juhuslike suuruste (juhusliku vektori komponentide) funktsioon, siis ei olnud nimetatud omadusi võimalik tuletada enne tutvumist juhusliku vektori ja selle funktsiooni põhiomadustega.

KESKVÄÄRTUSE 4. (ADITIIVSUSE) OMADUS. Juhuslike suuruste *summa keskväärtus* võrdub liidetavate keskväärtuste summaga.

$$E(X+Y)=EX+EY \tag{5.8}$$

TÕESTUS. Arvutame summa keskväärtuse, kasutades juhuslike suuruste summa ja selle tõenäosusfunktsiooni definitsiooni:

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}p_{ij}(x_i+y_j)=\sum_{i=1}^{k}x_i\sum_{j=1}^{h}p_{ij}+\sum_{j=1}^{h}y_j\sum_{i=1}^{k}p_{ij}=\sum_{i=1}^{k}x_ip_{i\cdot}+\sum_{j=1}^{h}y_jp_{\cdot j}=EX+EY,$$

järelikult seos (5.8) kehtib.

✦

KESKVÄÄRTUSE 5. OMADUS. Sõltumatute juhuslike suuruste korrutise keskväärtus võrdub korrutatavate juhuslike suuruste keskväärtuste korrutisega,

$$E(X\ Y)=EX\ EY \tag{5.9}$$

TÕESTUS. Juhuslike suuruste korrutise tõenäosusfunktsiooni arvutamine toimub täpselt samuti nagu summa tõenäosusfunktsiooni leidmine. Arvestades valemit (5.5) saame

$$E(X\ Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}p_{ij}(x_i\ y_j)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}\cdot x_i\ y_j=\sum_{i=1}^{k}p_{i\cdot}x_i\cdot\sum_{j=1}^{h}p_{\cdot j}y_j=EX\ EY$$

✦

Kasutades momente, saame lihtsalt tuletada ka

JUHUSLIKU SUURUSE DISPERSIOONI ALTERNATIIVSE AVALDISE.

$$DX=E(X^2)-(EX)^2, \tag{5.10}$$

mille võib kirjutada ka momentide abil:

$$DX=\mu_2-\mu_1^2 \tag{5.10'}$$

TÕESTUS. Avaldame dispersiooni vastavalt definitsioonile ja teisendame seejärel keskväärtuse märgi all olevat avaldist, rakendades ühtlasi keskväärtuse aditiivsuse ja lineaarsuse omadusi:

$$DX = E(X-EX)^2 = E(X^2-2EX\ X+(EX)^2) = E(X^2)-2EX\ EX+(EX)^2$$

Saadud seos annabki peale sarnaste liikmete koondamist avaldise (5.10).

✦

Tõestame ka dispersiooni väga olulise omaduse.

DISPERSIOONI 5. (ADITIIVSUSE) OMADUS. Sõltumatute juhuslike suuruste summa dispersioon võrdub liidetavate dispersioonide summaga.

$$D(X+Y) = DX+DY \tag{5.11}$$

TÕESTUS. Lähtume jälle dispersiooni avaldisest ja kasutame kõigepealt keskväärtuse aditiivsust

$$D(X+Y) = E(X+Y-EX-EY)^2 = E(X-EX)^2+2E(X-EX)(Y-EY)+E(Y-EY)^2$$

Arvestades tehtud eeldust X ja Y sõltumatuse kohta, millest loomulikult järeldub ka $X-EX$ ja $Y-EY$ sõltumatus, saame keskväärtuse viienda omaduse tõttu arendise teise liikme ümber kirjutada:

$$E(X-EX)(Y-EY) = E(X-EX)\ E(Y-EY) = 0,$$

sest

$$E(X-EX) = EX-EX.$$

Tulemus ongi tõestatud. Üldjuhul tõestame selle omaduse punktis 6.3.

✦

Näide 5.8. Jätkame näites 5.1 kirjeldatud juhuslike suuruste vaatlemist. Et $Z = X+Y$ kusjuures, nagu tegime kindlaks näites 5.6, on X ja Y sõltumatud, siis peaksid kehtima ka seosed

$$EZ = EX+EY \quad DZ = DX+DY$$

Arvestades, et $EY = EX$, sest mõlemad on ühesuguse jaotusega juhuslikud suurused, veendumegi näites esitatud tabeli 5.3 põhjal, et ootuspärased seosed kehtivad: $EZ = 2EX = 7$ $(DZ=2DX=5,833)$.

5.10. Mitme juhusliku suuruse summa

Et kahe juhusliku suuruse summa on juhuslik suurus, siis võime kahe liidetava summale liita omakorda kolmanda liidetava jne. Siit järeldub, et kui juhuslikud suurused $X_1, \dots, X_k$ on defineeritud sama katsega määratud elementaarsündmuste ruumis, siis on ka summa $X_1 + \dots + X_k$ juhuslik suurus.

Kehtima jäävad summa arvkarakteristikuid iseloomustavad seosed.

KESKVÄÄRTUSE ADITIIVSUS

$$E(X_1 + \dots + X_k) = EX_1 + \dots + EX_k. \tag{5.8'}$$

Kui liidetavad on sõltumatud, siis säilib ka

DISPERSIOONI ADITIIVSUS

$$D(X_1 + \dots + X_k) = DX_1 + \dots + DX_k. \tag{5.11'}$$

5.11. Juhuslike suuruste aritmeetilise keskmise arvkarakteristikud

Muuhulgas järelduvad eelmises punktis tõestatud valemitest ka juhuslike suuruste aritmeetilise keskmise

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

arvkarakteristikute avaldised, mis on niihästi tõenäosusteoorias kui ka statistikas erilise tähtsusega.

ARITMEETILISE KESKMISE KESKVÄÄRTUS VÕRDUB LIIDETAVATE KESKVÄÄRTUSTE ARITMEETILISE KESKMISEGA.

$$E\overline{X} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} EX_i\right). \tag{5.12}$$

Kui liidetavad X_i on sõltumatud, siis kehtib sarnane omadus ka dispersiooni jaoks.

SÕLTUMATUTE LIIDETAVATE ARITMEETILISE KESKMISE DISPERSIOON ON n KORDA VÄIKSEM KUI LIIDETAVATE DISPERSIOONIDE ARITMEETILINE KESKMINE, kus n on liidetavate arv,

$$D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} DX_i\right). \tag{5.13}$$

Erijuhul, kui juhuslikel suurustel X_i on sama keskväärtus ja sama dispersioon, $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, saame veelgi lihtsamad valemid:

$$E\overline{X} = \mu; \tag{5.12'}$$

$$D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{5.13'}$$

Viimases valemis loomulikult säilib liidetavate sõltumatuse eeldus.

Näide 5.9. Leiame kümne ja saja täringuviske keskmise tulemuse keskväärtuse ja dispersiooni. Viimaste valemite põhjal saame, et igasuguse katseseeria korral on $E\overline{X} = 3,5$. Keskmise $\overline{X}$ dispersioon ja standardhälve aga sõltuvad katseseeriast. Kümne viske puhul on $D\overline{X} = 0,292$, saja viske puhul $D\overline{X} = 0,029$. Standardhälve on vastavalt üksikviske puhul $S(X) = 1,708$, kümne viske puhul $S(\overline{X}) = 0,540$ ja saja viske puhul $S(\overline{X}) = 0,171$.

6. JUHUSLIKE SUURUSTE KORRELATIIVNE SÕLTUVUS

6.1. Juhuslike suuruste kovariatsioon

Üks juhuslike suuruste seost iseloomustavaid arvkarakteristikuid on *kovariatsioon* $cov(X, Y)$.

DEFINITSIOON 6.1. Kahemõõtmelise juhusliku vektori kovariatsioon on määratud järgmise seosega:

$$cov(X, Y) = E(X-EX)(Y-EY). \tag{6.1}$$

Kovariatsiooni tähiseks on ka σ_{xy}.

Seosest (6.1) järeldub kovariatsiooni arvutusvalem:

$$cov(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} p_{ij}(x_i-EX)(y_j-EY). \tag{6.2}$$

Kovariatsioonil on järgmised omadused:

KOVARIATSIOONI 1. OMADUS. Identsete juhuslike suuruste kovariatsioon võrdub nende dispersiooniga,

$$\text{kui } X = Y \text{ siis } cov(X, Y) = DX = DY$$

Kovariatsiooni esimene omadus järeldub vahetult kovariatsiooni definitsioonist. Olgu märgitud, et see kovariatsiooni omadus ei ole pööratav: sellest, et kehtib seos $cov(X, Y) = DX = DY$ ei järeldu üldiselt juhuslike suuruste X ja Y identsus.

KOVARIATSIOONI 2. OMADUS. Sõltumatute juhuslike suuruste X ja Y kovariatsioon on võrdne nulliga, $cov(X, Y) = 0$.

Selle omaduse tõestamiseks kasutame keskväärtuse 5. omadust, mille kohaselt X ja Y sõltumatuse korral kehtib võrdus

$$E(X-EX)(Y-EY) = E(X-EX)\ E(Y-EY) = 0.$$

◇

Ka see kovariatsiooni omadus ei ole pööratav Sellest, et juhuslike suuruste kovariatsioon on null, ei järeldu nende sõltumatus, vt näide 6.1. Seda, et siiski leidub ka selline jaotus, mille korral sõltumatus ja mittekorreleeritus on samaväärsed, näeme 13. paragrahvis, kus vaatleme normaaljaotust.

KOVARIATSIOONI 3. OMADUS (LINEAARSUS MÕLEMA JUHUSLIKU SUURUSE SUHTES).

$$cov(a+bX, c+dY) = bd \cdot cov(X, Y). \tag{6.3}$$

Selle omaduse tõestamisel kasutame keskväärtuse lineaarsuse omadust, seega saame:

$$E(a+bX) = a+bEX,\ E(c+dY) = c+dEY$$

Paigutades leitud keskväärtused kovariatsiooni arvutusvalemisse, saame

$$cov(a+bX, c+dY) = E(bX-bEX)(dY-dEY) = bd\cdot cov(X,Y),$$

kus kasutame veelkord keskväärtuse lineaarsuse omadust.

◇

Saadud valemist tuleneb erijuhuna kovariatsiooni esimene omadus, kuid ka järgmine praktilist huvi pakkuv seos, mille saame, võttes $X=Y$, $a=c=0$, $b=1$, $d=-1$,

$$cov(X,-X) = -DX. \tag{6.4}$$

DEFINITSIOON 6.2. Kui juhuslike suuruste X ja Y kovariatsioon erineb nullist, siis öeldakse, et need juhuslikud suurused on *korreleeritud*.

Juhuslikud suurused, mis ei ole korreleeritud, on *mittekorreleeritud*. Võib öelda ka nii, et kui juhuslike suuruste kovariatsioon on null, siis on need juhuslikud suurused mittekorreleeritud.

On selge, et kovariatsioon on seda suurem, mida suurem on mõlema juhusliku suuruse hajuvus, st mida suuremad on nende hälbed keskväärtuse suhtes (x_i-EX) ja (y_j-EY). Kuid kovariatsiooni suurus sõltub ka sellest, kas need hälbed on põhiliselt *sama- või vastasmärgilised*. Kovariatsioon on suur siis, kui X ja Y omandavad suhteliselt suuri (või vastavalt väikesi) väärtusi *samade* katsetulemuste (elementaarsündmuste) ω_i korral. See tähistab teatud mõttes *samasuunalist muutumist*. Väike (negatiivne) on kovariatsioon siis, kui hälbed on enamasti vastasmärgilised, st kui juhuslike suuruste X ja Y puhul vastavad ühe suuruse suurtele väärtustele teise väikesed väärtused ja vastupidi.

Kui juhuslike suuruste X ja Y kovariatsioon on positiivne, siis öeldakse, et nad on *positiivselt korreleeritud*, ja kui negatiivne, siis *negatiivselt korreleeritud*.

Näide 6.1. Vaatame juhuslikku vektorit (X,Y), mille jaotus on antud järgmise tabeliga.

X\Y	−1	0	1	p_X
−1	0,25	0	0,25	0,5
1	0	0,5	0	0,5
p_Y	0,25	0,5	0,25	1

Tabel 6.1.

Lihtne arvutus näitab, et $EX=0$, $EY=0$ ja järelikult $cov(X,Y) = 0,25\cdot(-1)\ (-1)+0,25\cdot(-1)\ 1 = 0$, sest kõik teised liidetavad sisaldavad tegurit null. Järelikult on juhuslikud suurused X ja Y mittekorreleeritud. Samal ajal ei ole tegemist sõltumatute juhuslike suurustega, sest tingimus (5.5) ei ole kõigi i ja j väärtuste korral täidetud. Piisab, kui me kontrollime seda juhul $i = 1$, $j = 1$ ja näeme, et $p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \neq 0,25$.

Näide 6.2. Vaatleme kahe täringu viskamisel defineeritud juhuslikke suurusi X ja Z, mille ühisjaotust esitab tabel 5.3. Arvutame kovariatsiooni $cov(X,Z)$. Selleks võtame näitest 4.1 $EX = 3,5$ ja arvutame $EZ = 2 \cdot 3,5 = 7$

Järgmiseks sammuks on üsna töömahukas korrutiste summa arvutamine. Selle juures arvestame lihtsustusena, et iga elementaarsündmuse tõenäosus on $0,028 = \frac{1}{36}$ ja korrutame iga $X - EX$ väärtuse kõigi $Z - EZ$ väärtustega.

$$cov(X,Z) = \frac{1}{36} \cdot [-2,5 \cdot (-5-4-3-2-1) - 1,5 \cdot (-4-3-2-1+1) -$$
$$-0,5 \cdot (-3-2-1+1+2) + 0,5 \cdot (-2-1+1+2+3) + 1,5 \cdot (-1+1+2+3+4) +$$
$$+2,5 \cdot (1+2+3+4+5) = \frac{105}{36} = 2,917$$

Seega saime tulemuseks, et $cov(X,Z) = 2,917$

6.2. Korrelatsioonikordaja

Kovariatsioon iseloomustab küll mõnevõrra juhuslike suuruste omavahelist seost, kuid tema puuduseks on sõltuvus nende kummagi hajuvusest (dispersioonist). Sellest puudusest vabanemiseks defineeritakse juhuslike suuruste *korrelatsioonikordaja*.

DEFINITSIOON 6.3. Kahemõõtmelise juhusliku vektori (X,Y) korrelatsioonikordajaks $r(X,Y)$ nimetatakse selle vektori kovariatsiooni suhet tema komponentide standardhälvete korrutisse,

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}. \tag{6.5}$$

Korrelatsioonikordaja jaoks kasutatakse tähise $r(X,Y)$ kõrval ka tähistust r_{XY}. Kasutusel on ka sümbol ρ (kreeka täht "roo"), mida me käesolevas raamatus ei pruugi.

Võib öelda ka nii, et korrelatsioonikordaja on *normeeritud juhuslike suuruste kovariatsioon*. Korrelatsioonikordajal on omadused, mis tulenevad vahetult kovariatsiooni omadustest.

KORRELATSIOONIKORDAJA 1. OMADUS (NORMEERITUS).

$$r(X,X) = 1;\ r(-X,X) = -1.$$

See omadus tuleneb vahetult kovariatsiooni 1. ja 3. omadusest.

KORRELATSIOONIKORDAJA 2. OMADUS (SÕLTUMATUS).

Kui juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud, siis $r(X,Y) = 0$.

Et korrelatsioonikordaja on võrdeline kovariatsiooniga (võrdetegur on positiivne), siis kehtivad korrelatsioonikordaja puhul samad seosed korrelatsioonikordaja märgi ja juhuslike suuruste muutumise suuna kohta, mis me tuletasime eelmises punktis.

KUI JUHUSLIKUD SUURUSED MUUTUVAD ÜLDISELT SAMASUUNALISELT, SIIS ON $r(X,Y)$ POSITIIVNE, KUI AGA MUUTUMINE ON PIGEM VASTASSUUNALINE, SIIS ON $r(X,Y)$ NEGATIIVNE.

Meenutame, et samasuunalise muutumise puhul suureneb ühe juhusliku suuruse suurenedes *keskmiselt* ka teine. Vastassuunalise muutumise puhul ühe juhusliku suuruse suurenedes üldiselt teine väheneb (ja vastupidi).

Korrelatiivne sõltuvus on *vastastikune.*

Korrelatsioonikordaja arvutusvalem on diskreetsete juhuslike suuruste X ja Y jaoks järgmine:

$$r(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} p_{ij}\cdot(x_i-EX)(y_j-EY)}{\sqrt{DX\ DY}}, \tag{6.6}$$

kus

$$EX = \sum_{i=1}^{k} p_{i\cdot}\ x_i,\ EY = \sum_{j=1}^{h} p_{\cdot j}\cdot y_j$$

ja

$$DX = \sum_{i=1}^{k} p_{i\cdot}(x_i-EX)^2,\ DY = \sum_{j=1}^{h} p_{\cdot j}(y_j-EY)^2$$

Korrelatsioonikordaja omaduste uurimist jätkame punktis 6.5.

Näide 6.3. Jätkame näidet 6.2, arvutades korrelatsioonikordaja $r(X,Z)$ ühe täringu visketulemuse ja kahe täringu visketulemuste summa vahel. Selleks on meil tarvis kasutada näites 6.2 arvutatud kovariatsiooni väärtust 2,917 ja ka kummagi juhusliku suuruse dispersiooni, mis on vastavalt 2,917 (vt näide 4.4) ja 5,833. Viimase suuruse arvutamiseks saame kasutada dispersiooni 5. omadust, vt valem (5.11). Arvutame nüüd korrelatsioonikordaja

$$r(X,Z) = \frac{cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DZ}} = \frac{2,197}{\sqrt{2,917\ 5,833}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Seega näeme, et juhuslikud suurused X ja Y on *positiivselt korreleeritud*, ühe suuruse suurenedes suureneb enamasti ka teine (mis ongi nende juhuslike suuruste sisu arvestades täiesti ootuspärane).

6.3. Summa dispersiooni avaldis üldkujul

Eelmises paragrahvis (punktis 5.9) tõestasime dispersiooni aditiivsuse omaduse eeldusel, et liidetavad juhuslikud suurused on sõltumatud. Käesolevas punktis tuletame üldise valemi juhuslike suuruste summa dispersiooni jaoks.

DISPERSIOONI 6. OMADUS. Juhuslike suuruste summa dispersioon võrdub liidetavate juhuslike suuruste dispersioonide ja kahekordse kovariatsiooni summaga,

$$D(X+Y) = DX+DY+2cov(X,Y). \tag{6.7}$$

TÕESTUS. Kirjutame dispersiooni avaldise keskväärtuste kaudu ja kasutame selle teisendamisel keskväärtuse aditiivsuse ja lineaarsuse omadusi ning kovariatsiooni definitsiooni:

$$D(X+Y) = E[(X-EX)+(Y-EY)]^2 = E(X-EX)^2+2E(X-EX)(Y-EY)+E(Y-EY)^2.$$

Soovitav tulemus ongi käes

✦

Paragrahvis 5.9 tuletatud dispersiooni aditiivsuse omadus (juhuslike suuruste sõltumatuse eeldusel) tuleneb kovariatsiooni teise omaduse põhjal erijuhuna valemist (6.7).

✧

6.4. Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi võrratus

Kovariatsiooni ja dispersioonide vahekorda iseloomustab võrratus, mida on Eesti kõrgkoolides peamiselt *Cauchy-Bunjakovski võrratuseks* nimetatud, kuid mida tihti ka *Schwarzi nimega seotakse*:

$$[cov(X,Y)]^2 \leq DX\ DY \tag{6.8}$$

TÕESTUS. Olgu X ja Y kaks mittekõdunud juhuslikku suurust, st nende dispersioonid erinevad nullist,

$$DX = \sigma_x^2 \neq 0,\ DY = \sigma_y^2 \neq 0.$$

Defineerime juhusliku suuruse $Z = \sigma_x\ Y - \sigma_y\ X$, kus σ_x ja σ_y tähistavad juhuslike suuruste standardhälbeid. Arvutame juhusliku suuruse Z dispersiooni, rakendades selleks eelmises punktis tõestatud summa dispersiooni valemit ja disperiooni ruuthomogeensuse omadust, samuti ka kovariatsiooni lineaarsust mõlema argumendi suhtes.

Kasutades dispersiooni mittenegatiivsust, saame avaldise:

$$DZ = \sigma_x^2 DY + \sigma_y^2 DX - 2\sigma_x \sigma_y cov(X,Y) \geq 0.$$

Viime kovariatsiooniga liikme teisele poole võrratusmärki ja koondame sarnased liikmed, arvestades tähistusi $DX = \sigma_x^2$, $DY = \sigma_y^2$:

$$2\sigma_x^2 \sigma_y^2 \geq 2\sigma_x \sigma_y cov(X,Y)$$

Jagame saadud avaldise mõlemad pooled kahekordse standardhälvete korrutisega $2\sigma_x\sigma_y$. Et see suurus on eelduse kohaselt alati positiivne, jääb võrratusmärk samasuunaliseks:

$$\sigma_x \sigma_y \geq cov(X,Y).$$

Saadud võrratus säilib ka võrratuse mõlema poole ruutu tõstmisel, mis annabki võrratuse (6.8).

✦

Näide 6.4. Illustreerime Cauchy-Bunjakovski võrratust näites 5.3 defineeritud juhuslike suuruste abil. Võttes aluseks juhuslikud suurused X ja Z, saame*

$DX = 2{,}917$, $DZ = 5{,}833$, $DX\ DZ = 17{,}014$

ja $cov(X,Z) = 2{,}917$, $[cov(X,Z)]^2 = 8{,}507$

Et $17{,}014 > 8{,}507$, siis on tulemus Cauchy-Bunjakovski võrratusega kooskõlas.

Võttes vaadeldavaks juhuslike suuruste paariks X ja Y, mis on sõltumatud ja mille omavaheline kovariatsioon on seetõttu 0, saame samuti kooskõla Cauchy-Bunjakovski võrratusega:

$2{,}917\ 2{,}917 > 0$

6.5. Korrelatsioonikordaja omadused

Cauchy-Bunjakovski võrratuse abil saame põhjalikumalt uurida korrelatsioonikordaja omadusi. Kui jagada võrratuse (6.8) mõlemad pooled dispersioonide korrutisega, saame järeldada

---

* Arvutused on tehtud lähtesuurustega, vältides vahetulemuste ümardamisvigade edasikandumist

KORRELATSIOONIKORDAJA 3. (NORMEERITUSE) OMADUSE.

Korrelatsioonikordaja absoluutväärtus ei ole suurem kui 1.

Seega näeme, et korrelatsioonikordaja muutub üldiselt lõigul $[-1,1]$, kusjuures korrelatsioonikordaja esimesest omadusest järeldub, et väärtuse -1 või 1 omandab korrelatsioonikordaja siis, kui $Y=-X$ või vastavalt $Y=X$ Need aga pole ainsad võimalused.

KORRELATSIOONIKORDAJA 4. (LINEAARSE SÕLTUVUSE) OMADUS.

Kui juhuslik suurus Y on juhusliku suuruse X lineaarfunktsioon, $Y=a+bX$, siis on X ja Y korrelatsioonikordaja absoluutväärtuselt võrdne ühega, kusjuures tema märk võrdub kordaja b märgiga.

$$r(X,a+bX) = \operatorname{sgn}(b).$$

Siin tähistab sümbol $\operatorname{sgn}(z)$ nn märgifunktsiooni, mis omandab väärtuse 1 või -1 vastavalt sellele, kas argument z on positiivne või negatiivne.

Korrelatsioonikordaja neljas omadus järeldub vahetult kovariatsiooni kolmandast omadusest.

✧

Kovariatsiooni lineaarsuse omadusest tuleneb ka sellega samaväärne korrelatsioonikordaja omadus.

KORRELATSIOONIKORDAJA 5. OMADUS (INVARIANTSUS LINEAARTEISENDUSE SUHTES).

$$r(a+bX,c+dY) = \operatorname{sgn}(bd)\ r(X,Y).$$

Selle omaduse tõestus järeldub vahetult kovariatsiooni lineaarsuse ja standardhälbe absoluutse homogeensuse omadusest.

✧

Paneme tähele, et korrelatsioonikordaja puhul on lineaarne teisendus erilise tähendusega – kui üks juhuslik suurus on teisest saadud lineaarteisenduse teel, siis on nende vaheline korrelatsioon maksimaalse tugevusega (korrelatsioonikordaja omandab absoluutväärtuselt maksimaalse suuruse). Selletõttu nimetataksegi korrelatsioonikordajat tihti *lineaarseks korrelatsioonikordajaks*. Seega,

KORRELATSIOONIKORDAJA MÕÕDAB JUHUSLIKE SUURUSTE VAHELISE LINEAARSE SEOSE TUGEVUST

Püüame seda omadust intuitiivselt interpreteerida, kasutamata rangeid matemaatilisi arutlusi.

Viimati esitatud korrelatsioonikordaja omadus tähendab seda, et mida *lähedasem* on juhuslike suuruste X ja Y vaheline sõltuvus lineaarsele (funktsionaalsele) sõltuvusele $Y=a+bX$, seda suurem (absoluutväärtuse poolest) on korrelatsioonikordaja. Oma maksimaalväärtuse saavutab korrelatsioonikordaja (omaduste 3 ja 5 põhjal) täpse lineaarse sõltuvuse korral.

Näide 6.5. Arvutame kahe täringu visketulemuste korrelatsioonikordaja tabeli 5.6. põhjal.

Selleks tuleb meil kõigepealt leida kummagi tunnuse keskväärtused ja standardhälbed.

Näidete 4.1 ja 4.7 põhjal on $EX = EY = 3{,}5$ ja $S(X) = S(Y) = 1{,}708$.

Et leida tunnuste kovariatsiooni, kasutame tabelit 5.6.

$$cov(X,Y) = \frac{1}{36}\cdot[-2{,}5(-2{,}5-1{,}5-0{,}5+0{,}5+1{,}5+2{,}5)-$$

$$-1{,}5(-2{,}5-\ldots+2{,}5)\ldots+2{,}5(-2{,}5-\ldots+2{,}5)\,] = 0.$$

Järelikult on ka korrelatsioonikordaja null ning täringuvisete tulemused on mittekorreleeritud. Tulemus on igati ootuspärane.

II SÕLTUMATUTE KATSETE JADAD

7. SÕLTUMATUTE KATSETE JADA

7.1. Sõltumatud katsed

Tõenäosusteoorias ei paku tavaliselt huvi niivõrd üksikkatse tulemuse analüüsimine, kuivõrd juhuslike katsete kordamisel tekkinud katsejadadega seotud nähtused. Niisuguste nähtuste kirjeldamisele ja uurimisele ongi pühendatud käesolev peatükk.

Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

DEFINITSIOON 7.1. Kui katset korratakse nii, et katsetingimused ja elementaarsündmused (ruum Ω) jäävad muutumatuks (st, on kõigi katsete korral ühesugused), siis nimetatakse korduvaid katseid *sõltumatuteks*.

Vaatleme kaht sõltumatut katset ja tähistame nende katsete tulemused sümbolitega ω_i^1 $i = 1, \ldots, n$ ning ω_j^2, $j = 1, \ldots, n$. Elementaarsündmuste ruumi jaoks kasutame mõlemal katsel sama tähist Ω Paneme tähele, et vaadeldes neid katseid üheskoos, saame defineerida uue elementaarsündmuste ruumi, milles elementaarsündmusteks on kõik esialgsete elementaarsündmuste kombinatsioonid (ω_i^1, ω_j^2). Selliseid elementaarsündmusi on n^2 tükki ja nad on kõik võrdtõenäosed, sest eelduse kohaselt on elementaarsündmused ω_i võrdtõenäosed ning katsed sõltumatud. Tekkinud uut elementaarsündmuste ruumi tähistatakse sümboliga Ω^2 Ruumis Ω^2 on määratud kõik sündmused, mis on määratud ruumis Ω (esimesel ja teisel katsel), kuid lisaks sellele veel rida teisigi sündmusi.

Näide 7.1. Olgu katseks täringuvise. On selge, et see katse on korratav, ning kaks järjestikust täringuviset on sõltumatud. Katsetulemuse "esimesel viskel saadi 6 silma" jaoks on soodsad kõik elementaarsündmused (ω_6^1, ω_j^2), kus j on suvaline indeks, st, pole tähtis, missugune tulemus saadi teisel viskel. Samuti saame kuus elementaarsündmust, mis on soodsad sündmusele "teisel viskel saadi 6 silma

Seevastu aga sündmuse jaoks "vähemalt ühel viskel saadi 6 silma" on soodsaid elementaarsündmusi 11, need on (ω_6^1, ω_1^2), (ω_6^1, ω_2^2), (ω_6^1, ω_3^2), (ω_6^1, ω_4^2), (ω_6^1, ω_5^2), (ω_6^1, ω_6^2), (ω_1^1, ω_6^2), (ω_2^1, ω_6^2), (ω_3^1, ω_6^2), (ω_4^1, ω_6^2), (ω_5^1, ω_6^2). Sündmuse jaoks "mõlemal viskel saadi 6 silma" on aga ainult üks elementaarsündmus (ω_6^1, ω_6^2) soodus.

Näide 7.2. Vaatleme kuulikese võtmist urnist, kus on viis valget ja kuus musta kuuli (vt joonis 2.2). Kui võetud kuul peale värvi kindlakstegemist urni tagasi pannakse (ja kuulid segatakse), siis on *katsed sõltumatud*, vastasel korral aga mitte, sest *elementaarsündmuste ruum* muutus.

7.2. Sõltumatute katsete jada abil määratud elementaarsündmuste ruum

Et defineerida sündmusi korduvate katsete abil, on tarvis kõigepealt määratleda selleks vajalikud põhimõisted – *elementaarsündmused ja elementaarsündmuste ruum.*

DEFINITSIOON 7.2. Olgu määratud katse, mille tulemuste hulk moodustab elementaarsündmuste ruumi $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ Korratagu seda katset suvaline arv kordi eeldusel, et kõik katsed on sõltumatud (st katsetingimused ja elementaarsündmused jäävad muutumatuiks). Nii saadud katsete jada nimetatakse *sõltumatute katsete jadaks.*

Sõltumatute katsete (lõpliku või lõpmatu) jada kohta kasutatakse ka nimetust *katseseeria.*

Vaadeldes tekkinud katseseeriat kui *katset*, näeme, et meil tekkis uus elementaarsündmuste ruum, kus elementaarsündmusteks on esialgsete elementaarsündmuste *jadad* $\{\omega_{i_1}^1, \ldots, \omega_{i_m}^m\}$ Selline jada tekib, kui esimese katse tulemuseks on elementaarsündmus ω_{i_1}, teise katse tulemuseks ω_{i_2} jne, ning m-nda katse tulemuseks on ω_{i_m} On lihtne näha, et erinevaid elementaarsündmuste jadasid on kokku n^m tükki, sest esimese katse võimalikke tulemusi on n, teisel katsel võib esimese katse iga tulemusega kombineeruda suvaline teise katse tulemus, mida on jälle n, jne.

Tähistame sellisel viisil defineeritud elementaarsündmuste ruumi sümboliga Ω^m Esialgset elementaarsündmuste ruumi Ω nimetame elementaarsündmuste ruumi Ω^m *komponentruumiks.*

On selge, et kui esialgses elementaarsündmuste ruumis Ω on kõik elementaarsündmused võrdtõenäosed, siis säilib sama omadus ka ruumi Ω^m puhul, kusjuures iga elementaarsündmuse tõenäosus on siin $\frac{1}{n^m}$.

7.3. Sündmused ja tõenäosused sõltumatute katsete korral

Et selgitada, kuidas on omavahel seotud sündmused ja nende tõenäosused ruumides Ω ja Ω^m vaatleme lihtsaimat erijuhtu $m = 2$. Seega on meil määratud elementaarsündmuste ruum

$$\Omega^2 = \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), \ldots, (\omega_n, \omega_n)\},$$

mille komponentruumiks on Ω.

Tutvume uue elementaarsündmuste ruumi olulisemate omadustega.

ELEMENTAARSÜNDMUSTE RUUMI Ω^2 OMADUSED.

1^0 Igale sündmusele, mis on defineeritud ruumis Ω (esimesel või teisel katsel), vastab üheselt määratud sündmus ruumis Ω^2 Lihtsuse mõttes me edaspidi ei erista neid sündmusi, vaid ütleme, et ruumis Ω defineeritud sündmus on ühtlasi ka sündmus ruumis Ω^2

2^0 Igal sündmusel, mis on defineeritud niihästi ruumis Ω^2 kui ka selle komponentruumis Ω_j $(j=1,2)$, on mõlemas ruumis sama tõenäosus.

Tõestame viimase omaduse. Olgu sündmus A defineeritud esimesel katsel ja olgu tema jaoks soodsad elementaarsündmused $\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_q}$ elementaarsündmuste ruumist Ω (esimesel katsel). Tähendab, tema tõenäosus on $P(A)=\frac{q}{n}$ Siis on selle sündmuse jaoks soodsad kõik sellised elementaarsündmused

$$(\omega_{i_1},\omega_1),\ldots,(\omega_{i_1},\omega_n),\ldots,(\omega_{i_q},\omega_1),\ldots,(\omega_{i_q},\omega_n)$$

ruumist Ω^2, kus iga sündmuse A jaoks soodsa elementaarsündmusega esimesel katsel kombineerub suvaline teise katse tulemus (elementaarsündmus). On lihtne näha, et sel juhul on sündmuse A tõenäosus $P(A)=\frac{nq}{n^2}=\frac{q}{n}$

✧

Loomulikult ei saa viimast omadust laiendada juhule, kui ruumis Ω^2 sündmus defineeritakse erinevalt, näiteks kui huvitutakse sündmusest, et "sündmus A esineb kas esimesel või teisel katsel"

SÕLTUMATUTE KATSETE PÕHJAL DEFINEERITUD SÜNDMUSTE SÕLTUMATUSE OMADUS. Sõltumatute katsete kaudu defineeritud sündmused on sõltumatud.

See järeldus tuleneb vahetult sõltumatute katsete abil defineeritud elementaarsündmuste määrangust: kui A ja B on defineeritud sõltumatute katsete kaudu, siis kehtib alati võrdus

$$P(A\cap B)=P(A)\ P(B).$$

Kõik käesolevas punktis kahe sõltumatu katse jaoks tuletatud mõisted ja omadused on vahetult üldistatavad ka m sõltumatu katse juhule, kus m on suvaline naturaalarv

ELEMENTAARSÜNDMUSTE RUUMI Ω^m OMADUSED. Olgu Ω^m korduvate katsete jadaga määratud elementaarsündmuste ruum ning Ω mingi tema komponentruum. Olgu sündmus A määratud elementaarsündmuste ruumis Ω. Siis

1^0 sündmus A on määratud ka ruumis Ω^m;

2^0 sündmuse A tõenäosus on mõlemas ruumis võrdne;

3^0 sõltumatutel katsetel defineeritud sündmused on sõltumatud.

Märgime, et esimese omadusega vastupidine omadus ei kehti üldjuhul: sündmused, mis on määratud elementaarsündmuste ruumis Ω^m, ei ole alati sündmused selle ruumi komponentruumides. Loomulikult ei ole siis mõtet ka rääkida nende sündmuste tõenäosusest komponentruumides.

Kuigi me defineerisime sõltumatute katsete jada teatava konkreetse katsete arvu m jaoks, ei sõltu see definitsioon mingil määral arvust m, vaid jääb jõusse ka katsete arvu suurendamisel mingi uue arvuni. Seega võib see katsete jada olla *kuitahes pikk*. See mõttekäik viib lõpliku elementaarsündmuste ruumi teatava üldistuse – loenduva elementaarsündmuste ruumini. Käesolevas paragrahvis loobume me *elementaarsündmuste hulga lõplikkuse nõudest*, asendades selle *elementaarsündmuste hulga loenduvuse nõudega*, mis tähendab sisuliselt seda, et elementaarsündmuste hulka võib järjest suurendada, lisanduvaid elementaarsündmusi järjest *nummerdades*, nii et igale elementaarsündmusele *saab seada vastavusse naturaalarvu*.

Näide 7.3. Vaatleme ruumina Ω mündiviske tulemuste ruumi, mis koosneb kahest elementaarsündmusest K ja V Kolmeviskelise katseseeria tulemused moodustavad ruumi Ω^3, mis sisaldab elementaarsündmusi (K,K,K), (K,K,V), (K,V,K), $(K,V\ V)$, (V,K,K), (V,K,V), $(V\ V,K)$ ja (V,V,V). Iga elementaarsündmuse, so kolmeviskelise katseseeria üksiktulemuse tõenäosus on $\frac{1}{8}$.

Näide 7.4. Vaatleme sündmust A – esimese viske tulemusena saadi vapp. See sündmus on defineeritud ruumis Ω, kus sündmuse A tõenäosus on $\frac{1}{2}$. Sündmus A on defineeritud samuti ka ruumis Ω^3. Viimases ruumis on sündmuse A jaoks soodsad elementaarsündmused (V,K,K) (V,K,V), (V,V,K), (V,V,V). Seega on ka selles ruumis tema tõenäosus $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Näide 7.5. Sündmuse B "kolme mündiviske tulemusena saadi täpselt üks kord kirjapool" saame aga defineerida ainult ruumis Ω^3 kuid mitte tema komponentruumides. Selle sündmuse jaoks on soodsad elementaarsündmused (K,V,V), (V,K,V), (V,V,K), ning järelikult $P(B)=\frac{3}{8}$.

7.4. Tõenäosuse järgi koondumine

Sõltumatute katsete jada pikkus ei ole tõkestatud, st et iga jada puhul on võimalik teha veel üks sõltumatu katse.

Vaatleme sõltumatute katsete jada ja selle tulemuste abil defineeritud elementaarsündmuste ruumi. Olgu selles elementaarsündmuste ruumis defineeritud juhuslike suuruste jada $\{X_i\}=X_1,X_2,\dots$ ja juhuslik suurus X.

DEFINITSIOON 7.3. Kui iga positiivse arvupaari ε ja η korral leidub arv N nii, et kehtib võrratus

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) < \eta \tag{7.1}$$

kui $n > N$ siis me ütleme, et *juhuslike suuruste jada* $\{X_i\}$ *koondub tõenäosuse järgi juhuslikuks suuruseks* X.

Sama väite võib sõnastada ka järgmiselt. Juhuslike suuruste jada $\{X_i\}$ koondub tõenäosuse järgi juhuslikuks suuruseks X, kui iga ε korral kehtib alljärgnev seos

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0\text{, kui } n \to \infty. \tag{7.1'}$$

Tõenäosuse järgi koondumise tähiseks on $\xrightarrow{p}$, seega saab valemi (7.1′) esitada lihtsalt

$$X_n \xrightarrow{p} X. \tag{7.1''}$$

DEFINITSIOON 7.4. Kui jada $\{X_i\}$ koondub tõenäosuse järgi juhuslikuks suuruseks X, siis nimetatakse juhuslikku suurust X jada $\{X_i\}$ *piirväärtuseks tõenäosuse järgi koondumise mõttes*.

Tõenäosuse järgi koondumist on väheviljakas defineerida tõenäosusruumis Ω, kus elementaarsündmuste arv on lõplik, sest selles ruumis rahuldab teatavast ε väärtusest alates tingimust

$$P(A) < \varepsilon$$

ainult võimatu sündmus $\varnothing$ Sellepärast saab mittetriviaalseid tõenäosuse järgi koonduvaid piirprotsesse defineerida vaid sellises tõenäosusruumis, kus elementaarsündmuste arv on lõpmatu.

Võrreldes koonduvust tõenäosuse järgi matemaatilises analüüsis tuntud determineeritud (mittejuhuslike) jadade koonduvusega, paneme tähele olulist erinevust. Piirprotsess matemaatilises analüüsis on defineeritud nii, et alates mingist n väärtusest on *kindlasti* täidetud võrratus

$$|x_n - x| < \varepsilon \tag{7.2}$$

Tõenäosuse järgi koondumisel on see võrratus (alates mingist n väärtusest) täidetud vaid teatava (küllalt suure) tõenäosusega. Seega, iga n väärtuse korral säilib (vähemalt põhimõtteline) võimalus selleks, et võrratus (7.2) ei ole täidetud.

Praktikas on veelgi märgatavam tõenäosuse järgi koondumise see iseärasus, et jada *jääkliige* $|X_n - X|$ ei lähene nullile monotoonselt kahanedes, vaid tavaliselt vahelduvad jääkliikme kasvamis- ja kahanemisperioodid ebakorrapäraselt, vt joonis 7.1.

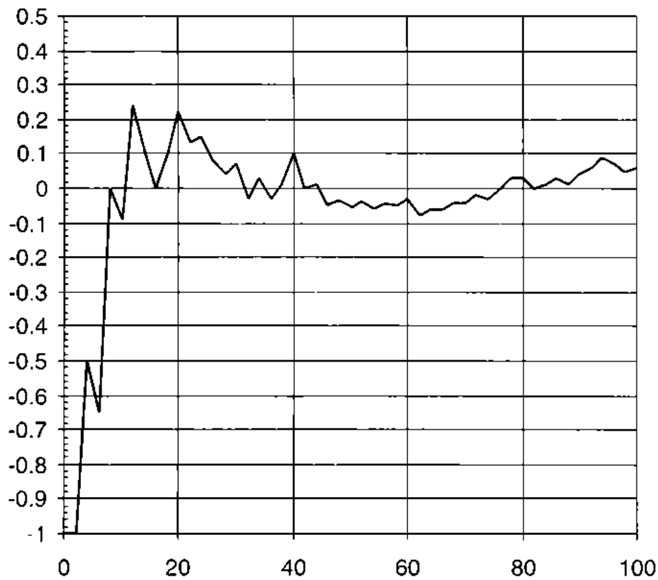
Näide 7.6. Vaatleme mündivisete seeriat. Huvitagu meid sündmus A_i "i-st viskest koosnevas seerias langeb kogu aeg peale vapipool" Niisuguse sündmuse jaoks on igas elementaarsündmuste ruumis Ω^m kõigest üks elementaarsündmus soodne, see on

$$\underbrace{\{V, V, \ldots, V\}}_{m \text{ korda}}.$$

Defineerime X_i kui juhusliku suuruse, mis omandab väärtuse 1, kui sündmus A_i toimub, ja 0, kui see ei toimu, $i = 1, 2, \ldots$ Niisuguste juhuslike suuruste jada $\{X_i\}$ koondub tõenäosuse järgi konstandiks $X = 0$, sest kehtib võrdus

$$P(X_i = 1) = 2^{-i}$$

Samal ajal on kogu aeg olemas võimalus, et realiseerub katsetulemus $V, V, \ldots, V$, kuid selle katsetulemuse tõenäosus on m-katselise seeria puhul 2^{-m} mis m lähenemisel lõpmatusele läheneb kiiresti nullile.



Joonis 7.1.
Jääkliikme lähenemine nullile tõenäosuse järgi koondumise korral.

8. KORDUVATE KATSETE ABIL DEFINEERITUD JAOTUSSEADUSED

8.1. Binoomjaotus

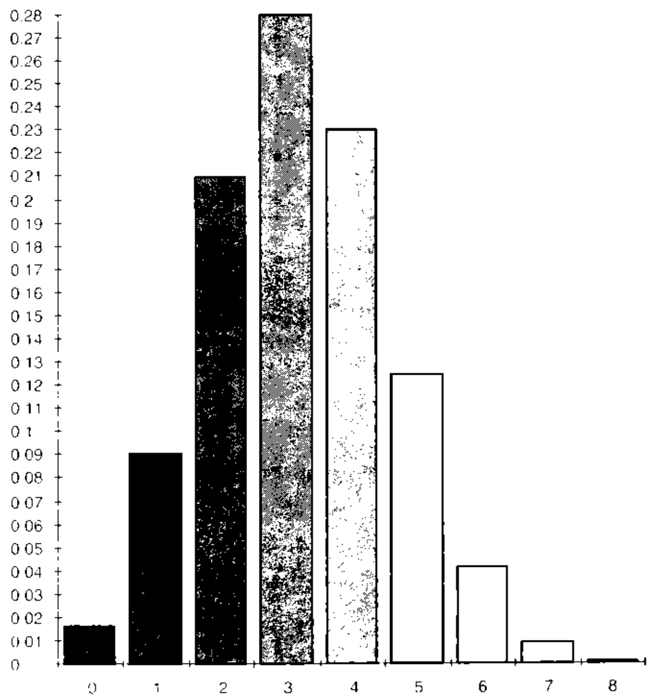
Alustame praktikas väga sageli kasutatava jaotusega, mis iseloomustab teatava sündmuse esinemissageduse jaotust *fikseeritud pikkusega sõltumatute katsete* jada puhul.

Vaatleme elementaarsündmuste ruumi Ω ja sündmust A, $P(A) = p$, mille toimumist iseloomustab *Bernoulli jaotusega* $\mathcal{B}(p)$ juhuslik suurus X_A, vt punkt 4.10. Oletame, et katset on korratud m korda, kusjuures tingimused on jäänud samaks (sõltumatud katsed). Küsitakse – mitu korda esines selle katseseeria korral sündmus A? Loomulikult sõltub vastus juhusest, see on *juhuslik suurus*, mille jaotus kannab nime *binoomjaotus*.

DEFINITSIOON 8.1. Sündmuse A esinemiste arv m sõltumatust katsest koosnevas katseseerias on juhuslik suurus X, mille jaotust nimetatakse *binoomjaotuseks parameetritega* p (juhusliku sündmuse A tõenäosus) ja m (katseseeria pikkus).

Binoomjaotuse tähiseks on $\mathcal{B}(m,p)$, kus parameeter p tähistab sündmuse A tõenäosust $(0<p<1)$ ja parameeter m (suvaline naturaalarv) – katseseeria pikkust. Olgu märgitud, et küllaltki levinud on binoomjaotuse teise parameetri tähisena ka täht n.

Seega kirjeldab *binoomjaotuse seadus* kaheparameetrilise jaotuste pere, vt joonis 8.1. Tõsiasja, et juhuslik suurus X on binoomjaotusega (parameetritega m ja p), märgitakse traditsiooniliselt $X \sim \mathcal{B}(m,p)$.



Joonis 8.1.
Binoomjaotuse tõenäosusfunktsioon.

Binoomjaotuse jaoks kasutatakse vahel ka nimetust *binomiaaljaotus*.

Vastavalt definitsioonile avaldub binoomjaotusega juhuslik suurus X sõltumatute Bernoulli jaotusega juhuslike suuruste X_i (sündmus A toimus i-ndal katsel) summana,

$$X = X_1 + \ldots + X_m. \tag{8.1}$$

Siit näeme ka, et ühesuguse tähistuse kasutamine binoomjaotuse ja Bernoulli jaotuse puhul on sisuliselt õigustatud, sest Bernoulli jaotus kuulub binoomjaotusete perre erijuhul $m = 1$.

Tuletame binoomjaotuse tõenäosusfunktsiooni. Selleks leiame kõigepealt juhusliku suuruse X võimalike väärtuste hulga, st selgitame, mitu korda saab sündmus A esineda m katsest koosneva seeria korral. Ilmselt on see väärtuste hulk $0, 1, \ldots, m$.

Leiame nüüd ka tõenäosusfunktsiooni $P(X=k)$. Mingi konkreetse katsetulemuse $A, A, \overline{A}, \ldots, \overline{A}$ tõenäosus, kus A esineb k korda ja $\overline{A}$ toimub $m-k$ korda, on definitsiooni kohaselt $p^k(1-p)^{m-k}$ Selle väite õigsuses veendumiseks meenutame, et katsed on sõltumatud ning sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosuse arvutamiseks saab kasutada tõenäosuste korrutamise lauset, vt punkt 2.2.

Nüüd on tarvis veel teada, mitu sellist katsetulemust (elementaarsündmust), mille puhul A esineb k korda, üldse leidub. Et katseid on m, siis on soodsate elementaarsündmuste arv võrdne *kombinatsioonide arvuga m elemendist k kaupa*,

$$C_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{m\cdot(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\ 2\ldots k},$$

kus $k! = 1\ 2\ldots k$

Parempoolse avaldise kehtivuses on lihtne veenduda, kui faktoriaalid lahti kirjutada ja murd taandada liikmetega, mis sisalduvad faktoriaalis $(m-k)!$

Et kõigi elementaarsündmuste tõenäosus on ühesugune, siis on tõenäosuste liitmise lause kohaselt õige võrdus

$$P(X=k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \tag{8.2}$$

Jääb vaid üle kontrollida, kas saadud funktsioon on tõenäosusfunktsioon, st kas on täidetud tingimus

$$\sum_{k=0}^{m} P(X=k) = 1.$$

Kasutades leitud tõenäosusfunktsiooni avaldist ja üldtuntud *binoomvalemit*

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k},$$

saame

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k p^k (1-p)^{m-k} = [p+(1-p)]^m = 1.$$

$\diamond$

Märgime, et seos binoomvalemiga ongi andnud binoomjaotusele tema nime.

8.2. Binoomjaotuse arvkarakteristikud

Binoomjaotuse keskväärtuse EX arvutamisel saame kasutada binoomjaotusega juhusliku suuruse avaldist Bernoulli jaotusega juhuslike suuruste summana ja summa keskväärtuse avaldist, mille kohaselt

$$EX = \sum_{i=1}^{m} EX_i = mp. \tag{8.3}$$

Sama mõttekäiku saame kasutada ka dispersiooni arvutamisel, kusjuures peame silmas ka seda, et liidetavad X_i on sõltumatud. Saame

$$DX = \sum_{i=1}^{m} DX_i = mp(1-p). \tag{8.4}$$

Siit järeldub ühtlasi, et $S(X) = \sqrt{mp(1-p)}$

Näide 8.1. Kaks võrdse tugevusega maletajat A ja B mängivad malet, kusjuures arvesse läheb 6 resultatiivset (ühe mängija võiduga lõppenud) partiid. Leida tõenäosus, et tulemus osutub viigiliseks. Vastavalt eeldusele on kummagi mängija võidu tõenäosus $p = 0,5$ Tähistagu X esimese mängija võitude arvu. Viigilise tulemuse annab $X = 3$. Selle sündmuse tõenäosus on $C_6^3 \cdot 0,5^6 = 20 \cdot 0,015625 = 0,3125$.

8.3. Geomeetriline jaotus

Binoomjaotuse puhul on katsete arv sõltumatute katsete jadas määratud jaotusparameetriga m. Tutvume järgmiseks niisuguse jaotusega, mille puhul vajalik katsete arv ei ole jaotusparameetriga üheselt määratud.

Olgu antud tõenäosusruum Ω ja määratud selles sündmus A. Oletame, et katset korratakse seni, kuni esineb sündmus A, kusjuures katsed on sõltumatud. Defineerime järgmisel viisil juhusliku suuruse.

DEFINITSIOON 8.2. Olgu määratud sõltumatute katsete jada, kusjuures katse tulemuseks võib olla sündmus A. *Geomeetrilise jaotusega* juhusliku suuruse X väärtuseks on selle katse number, mille tulemusena A esines esmakordselt.

On lihtne näha, et X on sõltumatute sündmuste jadade abil defineeritud elementaarsündmuste ruumis elementaarsündmuse naturaalarvuline funktsioon, seega diskreetne juhuslik suurus. Kuid geomeetrilise jaotusega juhusliku suuruse väärtuste hulk ei ole lõplik. Selle juhusliku suuruse X väärtuste hulgaks on kõigi naturaalarvude hulk.

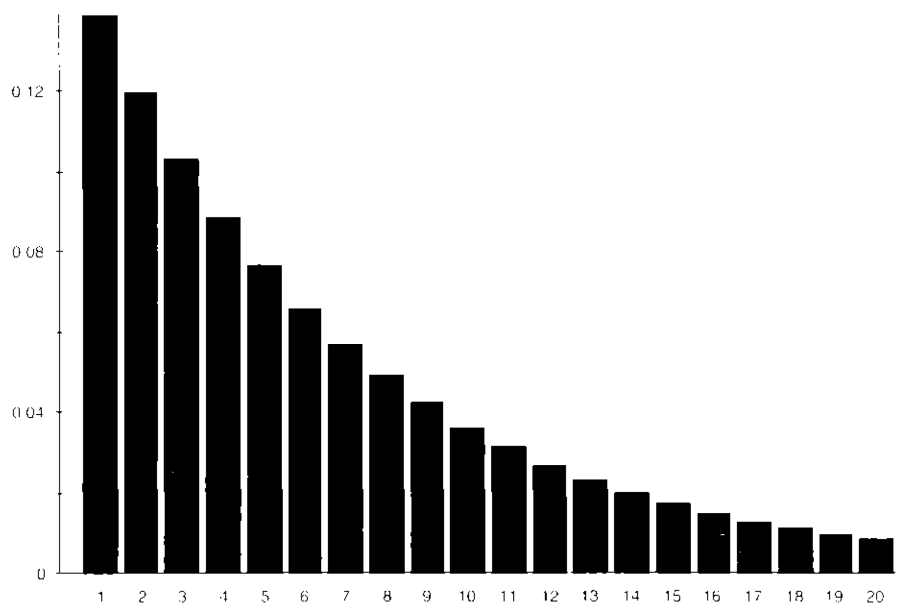
Leiame juhusliku suuruse X tõenäosusfunktsiooni:

$$P(X=k) = p\cdot(1-p)^{k-1}\ ,\ k=1,2,\dots \tag{8.5}$$

Et kehtib võrdus

$$\sum_{k=1}^{\infty} p\cdot(1-p)^{k-1} = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} = 1,$$

siis on funktsioon (8.5) ilmselt tõenäosusfunktsioon. Näeme, et valemiga (8.5) määratud tõenäosused $p_k = P(X=k)$ moodustavad (kahaneva) geomeetrilise progressiooni, vt joonis 8.2. Siit tuleneb ka jaotuse nimetus.



Joonis 8.2.
Geomeetrilise jaotuse tõenäosusfunktsioon.

Geomeetrilise jaotuse parameeter on sündmuse A tõenäosus p, $0<p<1$. Geomeetriline jaotusseadus moodustab üheparameetrilise jaotuste pere $\mathcal{G}(p)$.

Näide 8.2. Täringumängu alustamiseks peab mängija saama kuus silma. Kui suur on tõenäosus, et mängija saab mängu alustada kuuendal katsel? Mängu alustamishetk on ilmselt geomeetrilise jaotusega, kusjuures parameeter $p=\frac{1}{6}$. Otsitav tõenäosus on siis $P(X=6)=\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}=0{,}067$.

8.4. Poissoni jaotus

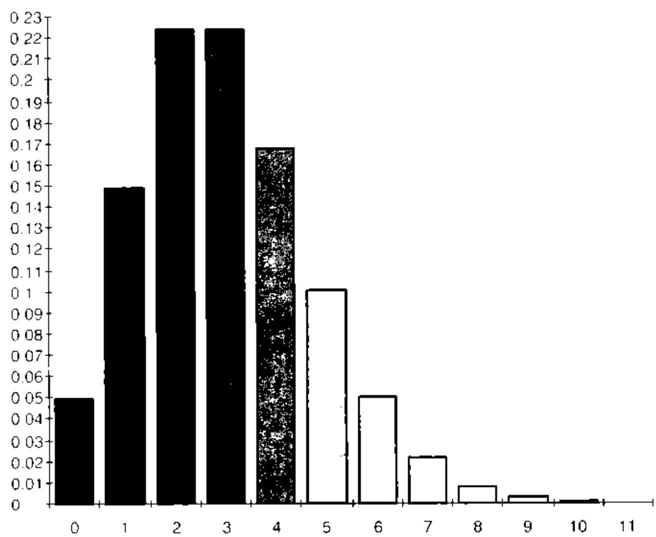
Järgmise, praktikas väga sageli kasutatava jaotuse defineerimisel lähtume tema tõenäosusfunktsioonist. Defineerime Poissoni jaotusega juhusliku suuruse X tema tõenäosusfunktsiooni abil järgmiselt:

DEFINITSIOON 8.3. Kui juhuslik suurus X omandab väärtuse k tõenäosusega

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,\dots, \tag{8.6}$$

kus e on naturaallogaritmide alus, $e=2{,}718$ ja λ mingi positiivne arv, siis me ütleme, et X on Poissoni jaotusega parameetriga λ.

Joonisel 8.3 on esitatud Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioon.



Joonis 8.3.
Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioon.

Kontrollime, kas esitatud definitsioon on korrektne, st kas valemiga (8.6) defineeritud tõenäosuste summa võrdub ühega. Et Poissoni jaotusega juhusliku suuruse väärtuseks võib olla suvaline mittenegatiivne täisarv, siis tuleb meil arvutada alljärgnev lõpmatu summa

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

Viimases võrduses kasutame eksponentfunktsiooni üldtuntud reaksarendust

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Poissoni jaotuse tähistuseks on $\mathcal{P}(\lambda)$ (vahel ka $\mathcal{Po}(\lambda)$), kus λ on selle jaotuse ainus parameeter. Teeme nüüd selgeks parameetri λ tähenduse. Selleks arvutame jaotuse keskväärtuse:

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Seega veendusime, et λ on Poissoni jaotuse keskväärtus,

$$EX=\lambda, \tag{8.7}$$

ehk *Poissoni jaotuse parameetriks λ on jaotuse keskväärtus.*

Arvutame ka Poissoni jaotusega juhusliku suuruse dispersiooni, kasutades selleks dispersiooni avaldist teise momendi kaudu, vt valem (5.10), $DX=E(X^2)-(EX)^2$ Arvutame Poissoni jaotuse teise momendi:

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\;k^2=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\;[k(k-1)+k].$$

Nurksulgude avamise järel saame teisest liidetavast definitsiooni kohaselt keskväärtuse. Esimene liidetav omandab siis, kui k võrdub nulli ja ühega, väärtuse 0, seega võime summeerimist alustada k väärtusest 2. Saame seega:

$$E(X^2)-\lambda=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\lambda^2\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k'}}{k'!}=\lambda^2,$$

kus on kasutatud tähistust $k'=k-2$ ja taandatud teguriga $k(k-1)$. Viimane võrdus tuleneb sellest, et tõenäosusfunktsiooni väärtused on summeeritud üle kogu juhusliku suuruse väärtuste hulga. Kokkuvõttes saame:

$$DX=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda, \tag{8.8}$$

see tähendab, et ka Poissoni jaotuse dispersioon võrdub parameetriga λ. Seega jõudsime Poissoni jaotusele iseloomuliku omaduseni, mida sageli tema praktilisel kasutamisel rakendatakse.

POISSONI JAOTUSE OMADUS. Poissoni jaotuse *keskväärtus ja dispersioon on võrdsed.*

Tähendab, väikese keskväärtuse puhul on ka hajuvus väike, keskväärtuse suurenedes suureneb ka hajuvus. Kuigi Poissoni jaotuse parameeter λ võib olla kuitahes suur reaalarv, kasutatakse seda jaotust praktikas siiski enamasti suhteliselt väikeste λ väärtuste korral. Siit tuleneb ka Poissoni jaotuse pisut arhailine nimetus "väikeste arvude seadus". Poissoni jaotust kasutatakse muuhulgas ka harva esinevate sündmuste modelleerimiseks.

Näide 8.3. Olgu tainasse, millest valmistatakse 100 kuklit, pandud 300 rosinat. Rosinate arvu juhuslikult võetud saiakuklis modelleerib Poissoni jaotus, mille parameetri λ leiame lihtsa arvutusega – keskmiselt on saiakuklis $300:100 = 3$ rosinat. Näiteks tõenäosuse, et saias ei ole ühtegi rosinat, leiame valemist $P(X=0) = e^{-3}\,\frac{3^0}{0!} = e^{-3} = 0{,}050$.

8.5. Poissoni piirteoreem

Üks olulisi (kuid mitte ainus) Poissoni jaotuse rakendusalasid on tema kasutamine *binoomjaotusega juhuslike suuruste lähendamiseks*. Sellele annab aluse nn *Poissoni piirteoreem*, mis väidab, et teatavatel tingimustel läheneb binoomjaotusega juhuslike suuruste jada katsete arvu n kasvamisel Poissoni jaotusega juhuslikule suurusele. Esitame kõigepealt selle teoreemi klassikalise sõnastuse ja seejärel ka tõestuse.

POISSONI PIIRTEOREEM.

Olgu määratud korduvate katsete jada ja selles sündmuste jada $A_1, A_2, \ldots$, $P(A_i) = p_i$, $i = 1,2,\ldots$. Kui katsete arv $n \to \infty$ ja tõenäosus p_n muutub nii, et

$$np_n \to \lambda,$$

siis koondub binoomjaotuse tõenäosus $P(X=k)$ iga fikseeritud k korral alljärgnevaks piirväärtuseks:

$$P(X=k \mid X \sim \mathcal{B}(n,p_n)) \to e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \tag{8.9}$$

TÕESTUS. Paneme tähele, et valemis (8.9) on vasakul binoomjaotuse tõenäosusfunktsioon, paremal – Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioon.

Avaldame tõenäosuse $P(X=k)$, kus $X \sim \mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = p^k(1-p)^{n-k}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(np)^k}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right](1-p)^{n-k}$$

Vaatleme nüüd, millised on saadud korrutise tegurite piirväärtused:

$$\lim_{n\to\infty}(np)^k = \lambda^k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$$

iga fikseeritud k korral,

$$\lim_{n\to\infty}(1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}(1-p)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Kasutame veel tõsiasja, et lõpliku hulga tegurite korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega (tingimusel, et need kõik eksisteerivad ja on lõplikud), ning sellega ongi valem (8.9) tõestatud.

✦

Tõestatud valemist on võimalik tuletada ka järeldus, et tingimusel

$$\lim_{n \to \infty} np = \lambda$$

koondub binoomjaotusega juhuslike suuruste X_n jada Poissoni jaotusega juhuslikuks suuruseks X. Paneme siinjuures tähele seda, et binoomjaotuse väärtuste hulk on tõkestatud arvuga n, kuid Poissoni jaotusega juhuslikul suurusel võib esineda kuitahes suuri (naturaalarvulisi) väärtusi.

Valemiga (8.9) tõestasime, et lõpliku hulga väärtuste $0, 1, \ldots, m$ puhul lähenevad kahe jaotuse tõenäosusfunktsioonid üksteisele.

Selleks, et korrektselt tõestada binoomjaotusega juhuslike suuruste jada koondumine Poissoni jaotusega juhuslikuks suuruseks, oleks tarvis veel näidata, et n suurenedes ja korrutise np lähenedes konstandile λ läheneb sündmuse $(X>m)$ tõenäosus küllalt suure m korral nullile niihästi siis, kui X on binoom- kui ka siis, kui ta on Poissoni jaotusega. Nimetatud asjaolu on intuitiivselt usutav, kuid selle korrektne tõestamine nõuab veidi tehnilist tööd, mille esitamiseks on käesoleva raamatu ruum liiga piiratud.

Näide 8.4. Lennufirma andmetel on keskmiselt 200 reisija hulgas üks reisija imikuga. Lennukis on 160 reisijakohta ning kaks spetsiaalaset imikule. Oletades (lihtsuse mõttes), et kõik reisijakohad on alati täidetud, küsitakse, kui suur on tõenäosus selleks, et imikukohtadest tuleb puudus.

Ülesande täpne lahendus on esitatav binoomjaotuse abil – tõenäosus p selleks, et reisijal on kaasas imik, on $\frac{1}{200}$, katsete arvuks m on lennukisse sisenevate reisijate arv, mis on 160, ning ülesande lahendamiseks tuleb leida $P(X>2)$, so tõenäosus, et imikuga reisijaid siseneb lennukisse rohkem kui 2. Muidugi on lihtsam leida vastandsündmuse tõenäosus $P(X \leq 2)$. Et p ja ka pm on väikesed ja m küllalt suur, on võimalik kasutada binoomjaotuse asemel Poissoni jaotust (mis on üldiselt arvutuslikult lihtsam). Saame:

$$P(X=0) = e^{-\lambda} = 0,44933;$$

$$P(X=1) = \lambda \cdot e^{-\lambda} = 0,35946;$$

$$P(X=2) = 0,5 \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} = 0,14379.$$

Otsitava sündmuse tõenäosuse leiame nüüd lihtsalt vahena

$$1-(0,44933+0,35946+0,14379) = 1-0,95258 = 0,04742$$

Niisiis on tõenäosus selleks, et imikuasemetest puudus tuleb, väiksem kui 0,05.

9. SUURTE ARVUDE SEADUS JA STATISTILINE TÕENÄOSUS

9.1. Sündmuse sagedus ja suhteline sagedus sõltumatute sündmuste jadas

Sõna "sagedus" on igapäevaelust hästi tuttav, ning vastav tõenäosusteooria mõiste on oma olemuselt tavaelu mõistele üpris lähedane – sündmuse sagedus saadakse, loendades selle *esinemiskordade arvu* katseseerias.

Olgu määratud katse, mille tulemused moodustavad elementaarsündmuste ruumi Ω, ning sündmus A selles ruumis. Vaatleme n sõltumatust katsest koosnevat jada ja sellega määratud elementaarsündmuste ruumi Ω^n Määrame sündmuse A sageduse S_n katsete jadas, $S_n = X_A^{(1)} + \ldots + X_A^{(n)}$. Nagu veendusime punktis 8.1, on S_n binoomjaotusega $\mathcal{B}(P(A), n)$ juhuslik suurus.

DEFINITSIOON 9.1. Nimetame *sündmuse A sageduseks juhusliku suuruse S_n väärtust, st sündmuse A esinemiste arvu n katsest koosneva katseseeria korral.*

Loomulikult sõltub S_n väärtus oluliselt konkreetsest katseseeriast (juhusest), kuid samuti ka katseseeria pikkusest n. Et saada näitaja, mis katseseeria pikkusest ei sõltu, on kasutusele võetud *suhtelise sageduse* mõiste.

DEFINITSIOON 9.2. Nimetame *sündmuse A suhteliseks sageduseks* selle sündmuse sageduse S_n ja katseseeria pikkuse n suhet $\frac{S_n}{n}$

Ka suhteline sagedus on juhuslik suurus. Suhtelist sagedust võime käsitleda kui juhuslike suuruste jada $\{X_A^{(i)}\}$ aritmeetilist keskmist, vt punkt 5.11.

9.2. Suurte arvude seadus

Kasutades eelmises punktis kasutusele võetud *sageduse* mõistet jõuame käesolevas punktis tõenäosusteooria seisukohalt keskse tähtsusega tulemuseni – see on

SUURTE ARVUDE SEADUS.

Olgu määratud katse, elementaarsündmuste ruum Ω ja selles sündmus A. Eeldame, et sündmuse A tõenäosus on teada, $P(A) = p$ Olgu sündmuse A suhteline sagedus n katsest koosneva jada korral $\frac{S_n}{n}$ Siis koondub sündmuse A suhteline sagedus katseseeria lõpmatul pikendamisel tõenäosuse järgi selle sündmuse tõenäosuseks p, vt valem (7.1),

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p. \qquad (9.1)$$

TÕESTUS. Kasutame suurte arvude seaduse tõestamiseks tõenäosuse järgi koonduvuse definitsiooni, vt punkt 7.4. On tarvis näidata, et iga arvupaari ε, η korral leidub arv N nii, et kui $n>N$, siis kehtib võrratus

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)<\eta. \tag{9.2}$$

Fikseerime mingil viisil positiivsed arvud ε ja η ning näitame, et alati leidub selline N, et tingimus (9.2) oleks täidetud. Selleks arvestame, et tõenäosus p on juhusliku suuruse $\frac{S_n}{n}$ keskväärtus. Juhusliku suuruse erinevus tema keskväärtusest on aga piiratud Tšebõševi võrratusega

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

Juhusliku suuruse $\frac{S_n}{n}$ dispersiooni saame hinnata, kasutades punkti 5.11 tulemusi,

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{p(1-p)}{n}\leq\frac{0,25}{n}$$

Järelikult on jada koonduvuse tõestamiseks vaja leida selline n väärtus, et kehtiks võrratus

$$\frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}<\eta$$

st, et katseseeria pikkus n peab olema suurem kui $\frac{0,25}{\varepsilon^2\cdot\eta}$ Et niisugust n väärtust on jadas alati võimalik leida, siis on sellega suurte arvude seadus tõestatud.

✦

Näide 9.1. Olgu sündmuse A tõenäosus p. Meid huvitab, kui pika katseseeria peaksime tegema selleks, et tõenäosusega 0,95 ei erineks katsetulemuse suhteline sagedus tema tõenäosusest rohkem kui 0,01 võrra. Kasutame Tšebõševi võrratust samal viisil nagu suurte arvude seaduse tõestamisel ning anname konstantidele järgmised väärtused

$$\varepsilon=0,01,\ \eta=0,05$$

Saame n väärtuseks $n=\frac{0,25}{0,01^2\cdot 0,05}=50000.$

9.3. Suhtelise sageduse kasutamine tõenäosuse hinnanguna

Klassikalise tõenäosuse rakendamisel on põhiprobleemiks see, et võrdlemisi harva on uuritavad sündmused defineeritud võrdtõenäoste elementaarsündmuste lõplikus ruumis Ω. Kahjuks ei ole klassikalise tõenäosuse määratlemiseks teisi võimalusi.

Palju ei aita siin ka üldisema elementaarsündmuste ruumi määratlemine, sest keerukama struktuuriga elementaarsündmuste ruumis *ei ole olemas üldisi eeskirju sündmuse tõenäosuse määramiseks.*

Paljude praktilist huvi pakkuvate olukordade puhul ei ole katsetulemuste võrdtõenäosuse nõue täidetud ja seega puudub võimalus sündmuse tõenäosuse teoreetiliseks arvutamiseks. Siis jääb üle võimalus *hinnata* sündmuste tõenäosusi. Selle jaoks annab soodsa aluse suurte arvude seadus, mille kohaselt sündmuse *suhteline sagedus* saab pika katsejada puhul enamasti (suure tõenäosusega) küllalt lähedaseks sündmuse tegelikule tõenäosusele.

Kui sündmuse tegelik tõenäosus ei ole teada (näiteks, kui ta ei avaldu võrdtõenäoste elementaarsündmuste kaudu), kuid on võimalik korraldada suvalise pikkusega katsete jada, mille tulemusena see sündmus võib esineda, siis on mõeldav *võtta tõenäosusena kasutusele vastav suhteline sagedus.*

Et niisugune arutelu oleks korrektne, selleks tuleb

1^0 otsustada, missuguste sündmuste jaoks üldse saab suhteliste sageduste abil tõenäosusi määrata,

2^0 teha kindlaks, kas nendele sündmustele sellisel viisil omistatud tõenäosustel (suhtelistel sagedustel) on üldiselt samad omadused, mis klassikalistel tõenäosustel, ning kui mitte, siis millised on erinevused.

Kui õnnestub leida niisugune sündmuste hulk, mille puhul suhteliste sageduste puhul säilivad kõik tõenäosuse põhilised omadused, siis kehtivad nende sündmuste ja nende suhteliste sageduste korral ka kõik seni tuletatud klassikalise tõenäosuse omadused.

9.4. Statistiline tõenäosus

Käesolevas punktis defineerimegi *statistilise tõenäosuse* suhtelise sageduse kaudu.

Olgu määratud katse ja selle tulemustest moodustatud elementaarsündmuste ruum Ω, kusjuures me ei tarvitse eeldada elementaarsündmuste ω_i võrdtõenäosust. Eeldame, et seda katset on võimalik kuitahes palju kordi korrata (tekitada suvalise pikkusega sõltumatute katsete jada).

DEFINITSIOON 9.3. Loeme *sündmuseks* iga sellist katse tulemust (elementaarsündmuste hulga Ω alamhulka), mille kohta peale katse teostumist on võimalik öelda, kas ta toimus või mitte.

DEFINITSIOON 9.4. Eeldame, et on tehtud katseseeria pikkusega n. Siis loeme iga sündmuse A *statistiliseks tõenäosuseks* $P(A)$ selle sündmuse suhtelist sagedust vaadeldavas katseseerias $\frac{S_n}{n}$.

Statistilise ja klassikalise tõenäosuse vahel on võimalik luua formaalne seos järgmisel viisil.

Kui me loeme üksikkatseid elementaarsündmusteks, siis moodustub n-katselisest katseseeriast lõplik elementaarsündmuste süsteem. Loeme selles elementaarsündmused võrdtõenäosteks, st omistame igale elementaarsündmusele tõenäosuse $\frac{1}{n}$ Mingi sündmuse jaoks *soodsaks* loeme need elementaarsündmused (katsed), mille korral see sündmus toimus. Selle tulemusena saame kõigi antud katse tulemuste abil defineeritud sündmuste puhul kasutada klassikalise tõenäosuse definitsiooni, mis selles interpretatsioonis ühtib statistilise tõenäosuse definitsiooniga. Siit järeldub kõigi klassikalise tõenäosuse jaoks kindlaks tehtud omaduste säilimine statistilise tõenäosuse puhul, kui eeldada, et katseseeria pikkus on fikseeritud.

Hoolimata leitud formaalsest vastavusest on statistilisel tõenäosusel siiski mõningaid eripärasid klassikalise tõenäosusega võrreldes.

STATISTILISE TÕENÄOSUSE OMADUSED.

Statistiline tõenäosus on *juhuslik* (juhusliku suuruse $\frac{S_n}{n}$ väärtus). Sellest tulenevad tema järgmised omadused.

1^0 Katseseeria muutmisel (pikendamisel kasvõi üheainsa katse võrra) muutuvad kõik selle katseseeria tulemusena määratud sündmuste tõenäosused.

2^0 Uue, eelmisega sama pika katseseeria tulemusena saadud tõenäosused erinevad üldiselt eelmise katseseeria tulemusena saadud tõenäosustest.

Seega tuleb arvestada, et statistilised tõenäosused on *juhuslikud suurused,* mille väärtus sõltub konkreetsest katseseeriast.

Matemaatilises statistikas nimetatakse sündmuse statistilist tõenäosust *tõenäosuse hinnanguks.* Hinnangute omaduste, sealhulgas ka täpsuse analüüsimisega tegeleb matemaatilise statistika iseseisev haru – *hinnangute teooria.* Et käesolev lühikursus hinnangute teooria probleemidesse süveneda ei võimalda, siis piirdume üksnes statistilise tõenäosuse mõningate olulisemate omaduste kindlakstegemisega.

Hoolimata statistilise tõenäosuse juhuslikkusest on ta praktilises kasutuses väga levinud.

Seda kasutama julgustab suurte arvude seadus, mis kinnitab, et pikkade katseseeriate puhul ei erine suhtelised sagedused tõenäosuse õigest (mitte teadaolevast) väärtusest tõenäoselt kuigi palju. Samast tulemusest järeldub, et mitme erineva katseseeria põhjal arvutatud statistilised tõenäosused ei tohiks (tõenäoselt) omavahel palju erineda.

Seda arvestades püütakse tõenäosuse hindamisel kasutada võimalikult pikki katseseeriaid, et saada hästi täpseid tõenäosuse hinnanguid.

9.5. Sündmuse tõenäosus ja tema esinemise võimalikkus

Klassikalise tõenäosuse puhul on võimatu sündmuse definitsioon lihtne – kui mingi sündmuse jaoks ei ole ükski elementaarsündmus soodne, siis see sündmus ei saa toimuda, järelikult on võimatu. Statistilise tõenäosuse puhul on olukord teisiti. Sellest, et sündmus mingi katseseeria jooksul ei ole esinenud, ei järeldu sugugi see, et see sündmus oleks võimatu. Vastupidi, see sündmus võib esineda juba järgmisel katsel.

Seega ei järeldu statistilise tõenäosuse korral sellest, et sündmuse tõenäosus on null, sugugi see, et sündmus on võimatu. Küll aga on õige vastupidine seos – võimatu sündmuse statistiline tõenäosus on alati null.

Samasugune on olukord ka kindla sündmusega. Kindla sündmuse statistiline tõenäosus on alati üks, kuid sellest, et mingi sündmuse statistiline tõenäosus on üks, ei järeldu veel, et see sündmus on kindel.

Suurte arvude seadusest järeldub ka see, miks üldse on kasulik teada sündmuste tõenäosusi. Praktilises elus tähendab see, et teades sündmuse tõenäosust, on võimalik teatud mõttes *ennustada sündmuse toimumist või mittetoimumist*. Sündmuse kohta, mille tõenäosus on väike (näiteks loteriil peavõidu saamine) võib teha üpris realistliku prognoosi – see ei toimu (antud katse tulemusena).

Olukord muutub, kui tehakse pikk katseseeria – paljukordse katsetamise (pika katseaja) tulemusena võivad toimuda ka sündmused, mille tõenäosus üksikkatse korral on kaduvväike – seda olukorda tuleb arvestada mitmesuguste katastroofide uurimisel ja vältimisel.

Pika katseseeria puhul saab hinnata huvipakkuva sündmuse *esinemise sagedust, kasutades tema teadaolevat tõenäosust*. Näiteks, kui on teada loteriivõidu tõenäosus, võib arvutada välja, kui mitu piletit tuleks osta, et võitmise tõenäosus oleks suurem kui mittevõitmise tõenäosus.

9.6. Empiiriline jaotus

Olgu määratud katse ja selle tulemuste kaudu elementaarsündmuste ruum Ω. Vaatleme selles elementaarsündmuste ruumis defineeritud juhuslikku suurust X. Meenutame, et X on elementaarsündmuse funktsioon ja igale elementaarsündmusele ω vastab juhusliku suuruse väärtus $x = X(\omega)$.

Juhusliku suuruse X abil on lihtne defineerida *sündmusi* kujul $(X \in A)$, kus A on juhusliku suuruse X võimalike väärtuste hulga R_X mingi alamhulk.

Määrame mingil suvalisel viisil hulga R_X *lõpliku liigenduse* ühisosata klassideks, näiteks $(-\infty, a_0]$, $(a_0, a_1], \ldots, (a_k, \infty)$. On selge, et sel juhul sündmused $A_0 = (X \le a_0)$, $A_i = X \in (a_{i-1}, a_i] = (a_{i-1} < X \le a_i)$, $(i = 1, \ldots, k)$ ja $A_{k+1} = (X > a_k)$ moodustavad sündmuste täissüsteemi (vt punkt 1.6). See tähendab, et alati, kui teostatakse katse ja esineb üks elementaarsündmustest ω, toimub ka üks sündmustest A_i, $i = 0, 1, \ldots, k+1$. Erijuhul, kui juhuslik suurus X on diskreetne ning omab väärtusi $x_0, x_1, \ldots, x_k$, võib sündmuse defineerida kujul $(X = x_i)$ või $(X = i)$.

Lihtsuse mõttes tähistame edaspidi erinevate sündmuste arvu tähega k ja sündmusi sümbolitega $A_1, \ldots, A_k$. Eeldame, et katse on korratav suvaline arv kordi. Teostame n katset ja registreerime, mitu korda toimus iga sündmus A_i, $i = 1, \ldots, k$. Igale sündmusele A_i saame määrata niihästi sageduse n_i kui ka suhtelise sageduse $f_i = \frac{n_i}{n}$

Paneme tähele, et kuna sündmused $A_1, \ldots, A_k$ moodustavad täissüsteemi, siis kehtib võrdus

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1,$$

kus f_i tähistab sündmuse A_i suhtelist sagedust ehk *statistilist tõenäosust.*

Järelikult defineerivad sündmuste A_i statistilised tõenäosused *tõenäosusfunktsiooni*, mis omakorda määrab üheselt teatava *jaotuse*. Seda jaotust nimetame *juhusliku suuruse X empiiriliseks jaotuseks.*

DEFINITSIOON 9.5. Olgu X juhuslik suurus ja $A_1, \ldots, A_k$ juhusliku suuruse X abil defineeritud sündmuste $A_i = (X \in R_i)$ lõplik täissüsteem. Eeldame, et sündmustele A_i on mingi katseseeria põhjal omistatud statistilised tõenäosused f_i. Siis need tõenäosused määravad tõenäosusfunktsiooni

$$P(X \in R_i) = f_i, \; i = 1, \ldots, k \tag{9.3}$$

kaudu *jaotuse*, mida nimetatakse *juhusliku suuruse X empiiriliseks jaotuseks.*

Definitsioonist järeldub, et

JUHUSLIKU SUURUSE EMPIIRILINE JAOTUS ON JUHUSLIK, ta sõltub konkreetsest katseseeriast.

9.7. Empiirilise jaotuse kasutamine

Hoolimata sellest, et empiiriline jaotus on juhuslik, kasutatakse empiirilist jaotust rakendustes väga sagedasti.

Eeldame, et juhusliku suuruse X jaotus on teada. Sel juhul on teoreetiliselt võimalik määrata ka kõigi sündmuste A_i tõenäosused $P(A_i)$. Neid tõenäosusi nimetatakse sündmuste A_i *teoreetilisteks tõenäosusteks.*

Vastavalt suurte arvude seadusele toimub katseseeria pikenemisel iga sündmuse A_i statistilise tõenäosuse f_i lähenemine selle sündmuse (teoreetilisele) tõenäosusele $P(A_i)$:

$$f_i \xrightarrow{P} P(A_i),\ i = 1, \ldots, k.$$

Siit järeldub

EMPIIRILISE JAOTUSE PÕHIOMADUS. Katseseeria pikenemisel läheneb juhusliku suuruse empiiriline jaotus selle juhusliku suuruse teoreetilisele jaotusele (tõenäosuse järgi koondumise mõttes).

Nimetatud mõttekäik on rakendatav ka siis, kui teoreetiline jaotus ei ole teada. Sel juhul saab vaadeldava juhusliku suuruse jaotusena kasutada *empiirilist jaotust.* Olgu märgitud, et rõhuv enamus jaotusi, mida kasutatakse rakendusstatistikas niihästi teoreetiliste arutluste juures kui ka praktilistes arvutustes, ongi nimelt empiirilised jaotused.

9.8. Empiirilise jaotuse omadused

Empiirilise jaotuse omadused tulenevad statistilise tõenäosuse vastavatest omadustest.

1⁰ Katseseeria muutmisel (isegi üheainsa katse lisamisel või ära jätmisel) empiiriline jaotus muutub.

2⁰ Katseseeria kordamisel (isegi sama katsete arvu korral) empiiriline jaotus üldiselt muutub.

3⁰ Kui katseseeria on fikseeritud (olgu tema pikkus n), siis on empiirilisel jaotusel kõik diskreetse jaotuse omadused.

Empiirilise jaotuse esitamisel lähtutakse tavaliselt järgmisest formalisatsioonist, mis on lähedane punktis 9.4 esitatud mõttekäigule. Juhusliku suuruse X i-nda katse tulemusena saadud väärtust tähistatakse sümboliga x_i, st $X(\omega_i) = x_i$. Iga katse tulemusena saadud väärtuste tõenäosused loetakse võrdseks arvuga $\frac{1}{n}$, kus n on katseseeria pikkus.

On lihtne näha, et toodud formalisatsioon ühtib sellega, mida kasutasime statistilise tõenäosuse defineerimisel, lugedes sündmusele A_i soodsaiks need katsetulemused (elementaarsündmused ω_j), mille korral $X(\omega_j) \in A_i$.

Juhuslikule suurusele, mille jaotus ei ole teada, saab leida empiirilise jaotuse näol jaotuse *hinnangu.* Selle abil on võimalik leida tinglikke jaotusi, mitme tunnuse ühisjaotusi jt jaotust iseloomustavaid näitajaid, sh igasuguseid tabeleid, graafikuid, tulp- ja sektordiagramme jmt.

9.9. Empiirilise jaotuse arvkarakteristikud

Empiirilise jaotuse põhjal on arvkarakteristikuid lihtne arvutada. Empiirilise jaotuse põhjal arvutatud arvkarakteristikuid nimetatakse ka *empiirilisteks karakteristikuteks*, need on vastavate teoreetiliste karakteristikute *hinnangud*. Kuna empiiriline jaotus koondub tõenäosuse järgi teoreetiliseks jaotuseks, siis peab sama asjaolu paika ka jaotuse igasuguste funktsioonide, sh ka arvkarakteristikute puhul.

1. **EMPIIRILINE KESKMINE**, mille tavaliseks tähiseks on $\bar{x}$ arvutatakse seosest:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{9.4}$$

2. **EMPIIRILINE DISPERSIOON**, mida tähistatakse tavaliselt sümboliga s^2, arvutatakse kõige sagedamini valemist:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{9.5}$$

Viimane valem vajab kommenteerimist. Vahetult empiirilisest jaotusest tuleneb empiirilise dispersiooni jaoks hoopis teine valem

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{9.5'}$$

Matemaatilises statistikas aga tõestatakse, et viimati saadud valemiga arvutatud dispersiooni *hinnang* sisaldab teatavat süstemaatilist viga, ta *alahindab* tegelikku dispersiooni. Viimane asjaolu on ka intuitiivselt arusaadav, selle põhjuseks on see, et hälbed, mida valemeis (9.5) ja (9.5') kasutatakse, ei ole arvutatud tõelise keskmise suhtes, vaid selle hinnangu $\bar{x}$ suhtes, ja sõltuvad seega juhusest.

Valemis (9.5') sisalduvat süstemaatilist viga ehk *nihet* saab parandada, muutes tegurit, millega summa on korrutatud, suuremaks. Nii ongi esimesena esitatud empiirilise dipersiooni valem (9.5) ***dispersiooni nihketa hinnanguks***. Suurte valimite korral (näiteks, kui n on suurem kui 100), on praktiliselt ükskõik, kumba empiirilise dispersiooni avaldist kasutada.

3. **EMPIIRILINE STANDARDHÄLVE.** Ruutjuurt empiirilisest dispersioonist nimetatakse empiiriliseks standardhälbeks, viimase tähiseks on vastavalt kasutatavale dispersiooni avaldisele kas s või $\bar{\sigma}$.

4. **EMPIIRILINE KORRELATSIOONIKORDAJA.** Empiirilise korrelatsioonikordaja tähiseks on kas r või ka $\bar{r}$, kusjuures sageli lisatakse juhuslike suuruste tähised argumentidena või indeksitena, $\bar{r}(X,Y)$, $\bar{r}_{X,Y}$ või $\bar{r}_{12}$. Empiiriline korrelatsioonikordaja $\bar{r}$ avaldub valemiga

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} \tag{9.6}$$

Olgu märgitud, et empiiriliste karakteristikute kui jaotusparameetri hinnangute kõrval kasutatakse praktikas tihti ka teisi hinnanguid. Nägimegi, et dispersiooni hindamisel on mitu võimalust. Ometi ei teki sellest tavaliselt erilist segadust, sest *kui mingi parameetri mitu erinevat hinnangut koonduvad tõenäosuse järgi selle parameetri tegelikuks väärtuseks*, siis osutub, et pika katseseeria puhul on kõik hinnangud ka omavahel üsna lähedased.

Näide 9.2. Vaatleme kaht suurust — algkoolilapse vanust (v) ja seda, mitu klassi ta on lõpetanud (n). Iga üksiku lapse puhul on need näitajad determineeritud, kuid kui lapse valik on juhuslik, siis on ka nende näitajate väärtused juhuslikud, ning neid iseloomustab nende ühisjaotus. Jaotus sõltub muidugi oluliselt sellest, kelle hulgas tehakse valik. Oletame, et me teeme valiku eesti väikekoolide õpilaste seas, kusjuures on tagatud valiku juhuslikkus. Vanust mõõdetakse lihtsuse mõttes täisaastates. Katseseeria pikkus ehk valitud laste arv olgu $n = 1080$. Vaatlustulemused moodustavad järgmise *sagedustabeli*:

har \ van	6	7	8	9	10	11	12	13	Σ
0	30	150	100	18	2	0	0	0	300
1	0	35	170	115	23	7	0	0	350
2	0	0	5	142	148	30	3	2	330
3	0	0	0	4	36	35	16	9	100
Σ	30	185	275	279	209	72	19	11	1080

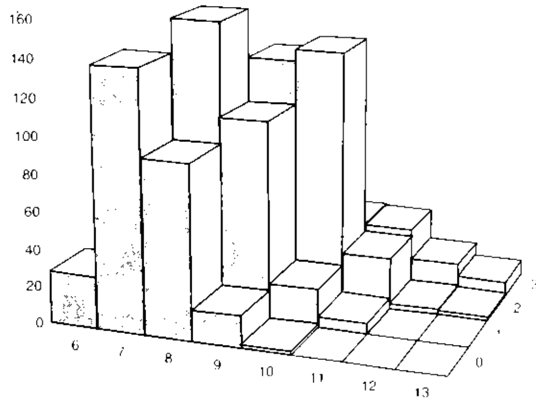
Tabel 9.1.
Koolilaste vanuse ja hariduse sagedustabel.

Näide 9.3. Tabeli 9.1 põhjal saame lihtsalt leida kahe juhusliku suuruse (rakendusstatistikas öeldakse ka *tunnuse*) ühise empiirilise jaotuse, arvutades iga sündmuse jaoks selle suhtelise sageduse ehk statistilise tõenäosuse. See tabel on samasuguse kujuga nn risttabel (vt punkt 5.3) nagu sagedustabelgi.

har \ van	6	7	8	9	10	11	12	13	P_{har}
0	0,028	0,139	0,093	0,017	0,002	0	0	0	0,278
1	0	0,032	0,157	0,107	0,021	0,006	0	0	0,324
2	0	0	0,005	0,131	0,137	0,028	0,003	0,002	0,306
3	0	0	0	0,004	0,033	0,032	0,015	0,008	0,093
P_{van}	0,028	0,171	0,255	0,258	0,194	0,067	0,018	0,010	1

Tabel 9.2.
Koolilaste vanuse ja hariduse empiiriline jaotustabel.

Näeme, et tabelis on fikseeritud 28 sündmust, näiteks — laps on 9-aastane ja on lõpetanud 2 klassi. Mõnede sündmuste tõenäosused on nullid (näiteks sündmus, et laps on 7-aastane ja on lõpetanud 3 klassi), kuid need ei ole põhimõtteliselt võimatud, vaid üksnes nii harva esinevad, et katseseerias ei tulnud neid kordagi esile. Sellist empiirilist jaotustabelit illustreerib *ruumiline tulpdiagramm*, vt joonis 9.1.



Joonis 9.1.
Ruumiline tulpdiagramm.

Näide 9.4. Empiirilise jaotustabeli (või ka sagedustabeli) põhjal on lihtne leida vaadeldavate juhuslike suuruste (tunnuste) empiirilisi jaotusi (nn marginaaljaotusi). Need saadakse empiirilisest jaotustabelist rea- ja veerusummadena (vt tabel 5.1) ja tihti paiknevad nad empiirilise jaotustabeli viimases reas ja veerus, vt tabel 9.2.

Esitame tabeli 9.3. juhusliku suuruse "vanus" jaotusega.

vanus	6	7	8	9	10	11	12	13
tõenäosus	0,028	0,171	0,255	0,258	0,194	0,067	0,018	0,010

Tabel 9.3.
Vanuse empiiriline jaotus.

Sagedustabelist saab marginaaljaotused leida järgmiselt:

1^0 Kui tabelis puudub reasummade veerg (paikneb tavaliselt viimase veeruna) ja veerusummade rida (tabeli viimane rida), siis tuleb need leida, kasutades valemeid (5.2) ja (5.2').

2^0 Esimese tunnuse (mille väärtused paiknevad *päisveerus* ja määravad tabeli read) empiirilise jaotuse saame, jagades viimase (summade) veeru elemendid $n_{i.}$ valimi mahuga n.

3^0 Teise tunnuse (mille väärtused paiknevad *päisreas* ja määravad tabeli veerud) empiirilise jaotuse saame, jagades viimase (summade) rea elemendid $n_{.j}$ valimi mahuga n.

Näide 9.5. Sagedus- või empiirilise jaotustabeli abil saame leida ka kummagi tunnuse tinglikud jaotused, kui tingimus on teise tunnuse abil määratud (vt punkt 5.4). Leiame näiteks teise klassi õpilaste (st ühe klassi lõpetanute) vanusejaotuse, vt tabel 9.4.

vanus	6	7	8	9	10	11	12	13
tõenäosus	0	0,100	0,486	0,329	0,066	0,020	0	0

Tabel 9.4.
Teise klassi õpilaste vanuse empiiriline jaotus.

Näide 9.6. Esitame veel ka teise tunnuse tingliku jaotuse, kus tingimuse määrame võrratusega: leiame vähemalt 10-aastaste õpilaste jaotuse lõpetatud klasside arvu järgi.

haridus	0	1	2	3
tõenäosus	0,006	0,096	0,588	0,309

Tabel 9.5.
Vähemalt 10-aastaste õpilaste empiiriline jaotus lõpetatud klasside järgi.

Näeme, kuidas ühe juhusliku suuruse väärtuse fikseerimise tulemusena teise juhusliku suuruse hajuvus väheneb ja selle väärtused kontsentreeruvad tabeli vähestesse klassidesse. Öeldakse ka – vastava juhusliku suuruse *ennustustäpsus* paraneb.

Kui meid huvitab, kui suur on tõenäosus, et juhuslikult valitud algkoolilaps on 8-aastane, siis näeme tabelist 9.3, et see tõenäosus on 0,255. Kui meil aga on teada, et tegemist on teise klassi õpilasega, siis saame arvutada *tingliku tõenäosuse*, et ühe klassi juba lõpetanud õpilane on 8-aastane, ning see on 0,486.

Näide 9.7. Leitud empiirilise jaotuse alusel on lihtne leida ka uuritavate tunnuste jaotuskarakteristikuid. Leiame algkoolilaste vanuse empiirilise keskmise, see on 8,74. Samal viisil leiame, et vanuse empiiriline dispersioon on 1,905 ja standardhälve 1,380. Samuti saame leida, mitu klassi on keskmiselt algkoolilaps lõpetanud, see arv on tunnuse "haridus", mille sisuks on lõpetatud klasside arv, empiiriline keskmine 1,213.

Näide 9.8. Leiame veel karakteristikud, mis iseloomustavad vaadeldavate tunnuste omavahelist sõltuvust. Tunnuste empiirilise kovariatsiooni väärtus on 1,064. Leiame ka empiirilise korrelatsioonikordaja,

$$\bar{r} = \frac{1,06380}{1,3035 \cdot 0,9535} = 0,808$$

Näeme, et ootuspäraselt on nende tunnuste omavaheline sõltuvus positiivne ja üsna tugev.

III PIDEV TÕENÄOSUSRUUM

10. GEOMEETRILINE TÕENÄOSUS

10.1. Elementaarsündmused – punktid tasandil

Käesolevas peatükis tutvume märksa üldisema tõenäosusteooria põhimõistete süsteemiga kui eelnevates peatükkides – me nimelt loobume eeldusest, et vaadeldav elementaarsündmuste hulk on *loenduv*. Et vajaliku aparatuuri puudumine ei võimalda seda teooria osa süstemaatiliselt käsitleda, piirdume üksnes valitud tulemustega, mis on hädavajalikud selleks, et mõista teiste valdkondade (sh matemaatilise statistika) olulisi tõsiasju. Kahjuks ei ole selles kursuse osas võimalik enamust tõestusi esitada rangelt, ning sel juhul piirdutakse üksnes intuitsioonil ja analoogial tuginevate aruteludega.

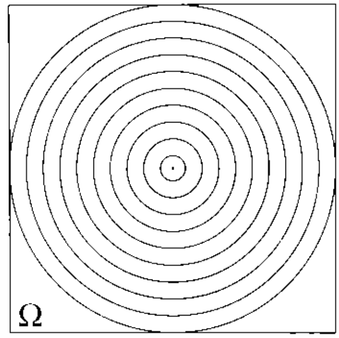
Vaatleme katset, milleks on juhusliku punkti valik mingil tasandilisel kujundil (märklaual). Arusaadavalt on katsetulemuste ehk elementaarsündmuste hulk võrdne kõigi selle kujundi punktide hulgaga – järelikult on see lõpmata suur, *mitteloenduv* hulk.

Meenutame, et ei leidu reeglit, mille kohaselt tasandi või ka lõigu kõik punktid saaks nummerdada – st, need on *mitteloenduvad* hulgad. Sündmused on meil seni defineeritud kui elementaarsündmuste hulgad. Tekib küsimus, kas ka sellise elementaarsündmuste ruumi puhul peaks *iga elementaarsündmuste hulk* olema sündmus. Osutub, et vastus on eitav. Mingi tasandilise kujundi kõikvõimalike punktikombinatsioonide hulk on niivõrd suur ja keerukas, et seda ei ole otstarbekas kasutada. Sündmusteks loetakse ainult teatav nö *mõistlike omadustega hulk* elementaarsündmuste hulki.

Näide 10.1. Olgu tegemist ruudukujulise märklauaga, millel paikneb kümme kontsentrilist ringi, vt joonis 10.1. Märkilaskmisel vastab iga ringi või ringidevahelise rõnga tabamisele teatava punktide arvu saamine. Loeme *sündmuseks* H_1 kõige sisemise ringi tabamise, $H_2,\dots,H_{10}$ olgu vastavate rõngaste ja H_{11} – väljaspool välimist rõngast asuva märklaua osa tabamine. Sellega oleme määratlenud üheteistkümnest sündmusest koosneva sündmuste täissüsteemi.

Meenutades, et ka sündmuste summa on sündmus, saame nimetatud sündmuste mitmesuguste kombinatsioonidena kirjeldada kokku 2^{11} sündmust, sealhulgas võimatu sündmuse $\varnothing$ ja kindla sündmuse Ω.

Sündmuste hulka aga ei kuulu näiteks märklaua ülemise poole tabamine"või "vasakpoolse alumise nurga tabamine" sest need ei avaldu elementaarsündmustena fikseeritud ringide (tabamise) kaudu. See sündmuste hulk on lõplik, hoolimata sellest, et elementaarsündmuste ruum, mida selle defineerimiseks kasutati, on lõpmatu.



Joonis 10.1.

Edaspidi vaatleme elementaarsündmuste ruumina Ω mingit tasandilist pinnatükki Ω ja loeme elementaarsündmusteks kõiki selle pinnatüki punkte. Püüame määrata sündmused nii, et säiliksid võimalikult kõik need sündmuste omadused, vahekorrad ja tehted, mis me tuletasime esimeses paragrahvis, kus käsitlesime lõplikku elementaarsündmuste ruumi.

Loeme sündmusteks kõik *kujundid*, st niisugused punktihulgad tasandil, mille pindala on põhimõtteliselt võimalik määrata (pindala on olemas). See, et pindala täpne arvutamine on raske või isegi võimatu, pole siinkohas oluline.

Et sündmuste summa on sündmus, võivad sündmused koosneda ka mitmest "tükist". Et sündmuste vahe on sündmus, võivad sündmusteks olla ka "aukudega" kujundid, vt joonis 10.2.

Sündmuste hulka on otstarbekas lugeda ka teatavaid *sündmuste lõpmatuid summasid.*

Katseks on, samuti nagu varemgi, elementaarsündmuse (punkti) juhuslik valimine. Peale katset loetakse toimunuiks kõik need sündmused, milles valitud elementaarsündmus sisaldub, ja mittetoimunuiks need sündmused, mis seda elementaarsündmust ei sisalda.

Joonis 10.2.
Sündmused tasandilises elementaarsündmuste ruumis.

10.2. Geomeetriline tõenäosus tasandil

Kui tasandilises elementaarsündmuste ruumis on sündmused määratud, tekib uus probleem – kuidas määrata nendele tõenäosusi. Ühe, vaieldamatult lihtsaima võimaluse pakub *geomeetriline tõenäosus*.

Määrame elementaarsündmustele tõenäosuse, jälgides teatava määrani nende võrdvõimalikkuse printsiipi. Et elementaarsündmusi on lõpmata palju ja nende summa tõenäosus peab võrduma ühega (kindla sündmuse tõenäosus), siis peab paratamatult olema *iga elementaarsündmuse tõenäosus võrdne nulliga*. Võrdvõimalikkus realiseeritakse *geomeetrilise tõenäosuse* puhul nõudena, et *sündmuse tõenäosus olgu võrdeline tema pindalaga.*

DEFINITSIOON 10.1. Vaatleme elementaarsündmuste ruumina (kindla sündmusena) mingit lõplikku tasandilist piirkonda Ω ja katsena juhusliku punkti valikut (tabamist) selles piirkonnas. Olgu sündmus A mingi kujund (so osapiirkond) selles piirkonnas. Siis võrdub sündmuse A *geomeetriline tõenäosus* $P(A)$ kujundi A pindala $S(A)$ ja kogu piirkonna Ω pindala $S(\Omega)$ suhtega

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} \tag{10.1}$$

Kuivõrd käesoleval juhul on elementaarsündmuste ruumiks Ω tasandiline piirkond, siis kõneldakse *geomeetrilisest tõenäosusest tasandil.* Seni, kuni me ei ole muid geomeetrilise tõenäosuse variante defineerinud, mõistame geomeetrilist tõenäosust tasandilisena ka ilma seda spetsiaalselt rõhutamata.

Näide 10.2. Arvutame näites 10.1 esitatud sündmuste geomeetrilised tõenäosused, arvestades, et kõigi rõngaste laiused on võrdsed ja moodustavad $\frac{1}{20}$ ruudukujulise märklaua küljepikkusest (välimine ring puutub märklaua serva). Nende sündmuste tõenäosusi on elementaargeomeetria abil lihtne leida:

$$P(H_i) = \frac{\pi \cdot (2i-1)}{400},\ i = 1,\ldots,10,\ P(H_{11}) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

10.3. Tasandilise geomeetrilise tõenäosuse omadused

Teeme nüüd kindlaks, millises ulatuses kehtivad geomeetrilise tõenäosuse puhul klassikalise ja statistilise tõenäosuse omadused.

Vaatleme punktis 10.1 defineeritud sündmusi ja omistame kõigile sündmustele geomeetrilise tõenäosuse. Lugedes tasandil paiknevaid punkte ja jooni nullpindalaga kujunditeks, saame nende sündmuste tõenäosuseks *nulli*, kuid need sündmused ei ole võimatud. Samuti võime ruumist Ω lõpliku arvu punkte või jooni välja lõigata. Saadav sündmus ei ole enam kindel, kuid tema tõenäosus on definitsiooni kohaselt *üks*.

Kaunis lihtne on tõestada, kasutades sündmuse määrangut punktihulgana, et teised klassikalise tõenäosuse omadused (järeldussuhetest tulenevad võrratused tõenäosuste vahel, liitmislause erijuhul ja üldjuhul jne) jäävad jõusse ka geomeetrilise tõenäosuse puhul. Seega saame kokkuvõttes

(TASANDILISE) GEOMEETRILISE TÕENÄOSUSE OMADUSED.

1^0 Kui sündmus A on punkt, joon, lõplik või loenduv punktide või joonte hulk, siis on selle sündmuse geomeetriline tõenäosus (tasandil) võrdne *nulliga*.

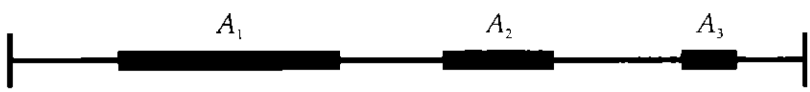
2^0 Kui sündmus A erineb kindlast sündmusest lõpliku või loenduva hulga punktide või joonte võrra, siis on selle sündmuse geomeetriline tõenäosus (tasandil) võrdne *ühega*.

3^0 Sellest, et sündmuse A geomeetriline tõenäosus on *null*, ei järeldu, et see sündmus oleks võimatu, ning sellest, et sündmuse geomeetriline tõenäosus on *üks*, ei järeldu, et see sündmus oleks kindel.

4^0 Tasandilise geomeetrilise tõenäosuse puhul kehtivad kõik teised klassikalise tõenäosuse omadused.

10.4. Geomeetriline tõenäosus lõigul.

Geomeetrilise tõenäosuse saab defineerida ka lõigul. Katseks on siis ühe punkti valimine (tabamine) teataval lõigul $[a,b]$, mida me nimetame *elementaarsündmuste ruumiks* Ω. Kõik selle lõigu punktid ω on elementaarsündmused. Kindel sündmus on selle lõigu $[a,b]$ tabamine. Igale sellel lõigul paiknevale lõigule, poollõigule ja vahemikule seatakse vastavusse *sündmus*, mida lihtsuse mõttes tähistatakse sama sümboliga kui vaadeldavat punktihulka lõigul.



Joonis 10.3.
Sündmused lõigul.

Arusaadavalt on ka kõik sündmuste (st lõikude, vahemike, poollõikude) *ülimalt loenduvad summad* sündmused. On lihtne tõestada, et niisuguste summade kaudu avalduvad ka sündmuste vahed ja korrutised.

DEFINITSIOON 10.2. Olgu sündmus A mingi lõik, vahemik või lõikude ja vahemike ülimalt loenduv summa lõigul Ω, mida loeme elementaarsündmuste ruumiks. Sündmuse A geomeetriliseks tõenäosuseks (lõigul) nimetatakse siis sellele sündmusele vastava lõigu pikkuse (lõikude/vahemike summaarse pikkuse) $l(A)$ ja kindla sündmuse Ω pikkuse $l(\Omega)$ suhet:

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}.$$

Üsna lihtne on kontrollida kõigi oluliste sündmustevaheliste seoste ja geomeetrilise tõenäosuse omaduste säilimist esitatud definitsiooni korral.

GEOMEETRILISE TÕENÄOSUSE OMADUSED (LÕIGUL).

1^0 Kui sündmuseks on punkt või ülimalt loenduv punktide hulk, siis on selle sündmuse geomeetriline tõenäosus (lõigul) *null*.

2^0 Kui sündmus A erineb kindlast sündmusest Ω ülimalt loenduva hulga punktide poolest, siis on selle sündmuse geomeetriline tõenäosus (lõigul) *üks*.

3^0 Sellest, et sündmuse geomeetriline tõenäosus (lõigul) on *null*, ei järeldu, et see sündmus on võimatu, ning sellest, et sündmuse geomeetriline tõenäosus (lõigul) on *üks*, ei järeldu, et see sündmus on kindel.

4^0 Kõik teised klassikalise tõenäosuse omadused, mis on tõestatud I peatükis, kehtivad geomeetrilise tõenäosuse puhul (lõigul).

Paneme tähele, et kuna iga punkti tõenäosus on *null*, siis on samade otspunktidega lõigu ja vahemiku geomeetrilised tõenäosused võrdsed.

Geomeetrilist tõenäosust lõigul on sobiv kasutada mitme ajaga seotud sündmuse modelleerimiseks.

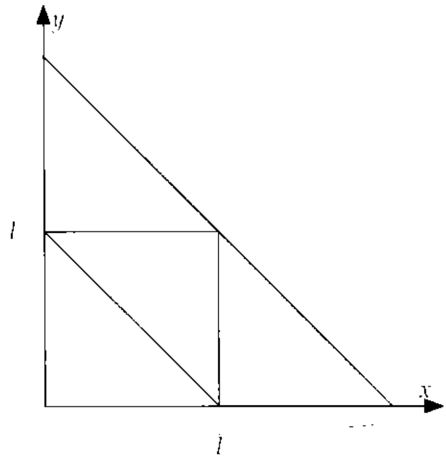
Näide 10.3. Reisija sattus juhuslikul ajahetkel bussipeatusesse, kus bussid liikusid 15-minutiliste vahedega. Reisija otsustas oodata 5 minutit, ja kui selle aja jooksul buss ei tule, võtta takso. Kui suur on tõenäosus, et reisija jätkas sõitu bussiga?

Reisija tabas juhuslikku ajahetke bussidevahelisel 15-minutilisel ajavahemikul $[a,b]$. Et ta otsustas oodata 5 minutit, siis on sündmuse "buss saabub ooteajal" jaoks soodsad need tema saabumishetked, mis satuvad lõigule bussidevahelise ajavahemiku lõpuosas. Selle soodsa lõigu pikkus on 5 minutit, ning otsitav tõenäosus on $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

Näide 10.4. Latt pikkusega l murti kahest juhuslikust kohast katki. Leida tõenäosus, et tekkinud latitükkidest saab moodustada kolmnurga.

Eeldame, et mõlema murdepunkti paiknemist latil saame kirjeldada geomeetrilise tõenäosuse abil. Vastaku esimese tüki pikkusele x punkt x-teljel ja teise tüki pikkusele y punkt y-teljel. Järelejäänud tüki pikkus on siis $l-x-y$, mis arusaadavalt peab olema positiivne. Seega moodustab katsetulemuste hulga Ω kolmnurk, mille pindala on $\frac{l^2}{2}$. Seda kolmnurka piiravad x-telg, y-telg ja sirge $x+y=l$, vt joonis 10.4. Soodsad elementaarsündmused on punktid, mille puhul küljepikkused x, y ja $l-x-y$ rahuldavad kolmnurga võrratusi, $x<\frac{l}{2}$, $y<\frac{l}{2}$ ja $\frac{l}{2}<x+y<l$. Niisugused

punktid moodustavad elementaarsündmuste ruumis Ω viirutatud kolmnurga, mille pindala on ilmselt $\frac{l^2}{8}$, seega on otsitav tõenäosus 0,25.



Joonis 10.4.
Lati murdmise ülesanne.

11. PIDEV JUHUSLIK SUURUS

11.1. Juhusliku suuruse defineerimine mitteloenduval elementaarsündmuste ruumil

Käesolevas punktis üldistame esimeses peatükis defineeritud juhusliku suuruse mõiste, võttes selle aluseks lõpmatu, mitteloenduva elementaarsündmuste ruumi Ω.

Olgu märgitud, et saadav üldistus ei piirdu ainult pidevate juhuslike suurustega. Lähemalt tutvume me siiski vaid pidevate juhuslike suuruste kui kõige olulisematega.

Vaatleme *bussi ooteaega* näitest 10.3. Paneme tähele järgmist.

1^0 Tegemist on *elementaarsündmuse funktsiooniga*: iga erineva hetke (elementaarsündmuse) tabamisele busside vahelisel ajaperioodil vastab erinev ooteaja pikkus (väärtus).

2^0 Ooteaja pikkuseks võib olla suvaline ajavahemik 0 ja 15 minuti vahel.

Saame siit idee *juhusliku suuruse* mõiste üldistamiseks. Lõpliku ja loenduva elementaarsündmuste ruumi korral on paratamatult ka juhusliku suuruse väärtuste hulk vastavalt kas lõplik (mitte suurem kui elementaarsündmuste arv!) või loenduv. Ainult mitteloenduva elementaarsündmuste ruumi abil on võimalik defineerida juhuslikku suurust, mille väärtuste hulgaks on lõik, poollõik või vahemik arvsirgel või terve arvsirge. Taoliste juhuslike suuruste hulka kuuluvad praktikas väga olulised *pidevad juhuslikud suurused.*

Kahjuks pole aga otstarbekas mitteloenduva elementaarsündmuste ruumi Ω korral defineerida juhuslikku suurust kui *suvalist* elmentaarsündmuse funktsiooni. Osutub, et nii üldine definitsioon haaraks ka väga keerulise struktuuriga funktsioone, mida edaspidi ei õnnestuks praktiliselt kasutada. On ju juhusliku suuruse defineerimise puhul tarvis näha ette selle juhusliku suuruse abil defineeritud sündmuste tõenäosuste arvutamise võimalikkust, ning see esitab kasutatavatele funktsioonidele teatavad kitsendused (need funktsioonid peavad olema *mõõtuvad*). Olgu siiski märgitud, et see kitsendus on pigem teoreetilise kui praktilise iseloomuga – tavaelus kasutatavad funktsioonid rahuldavad neid kitsendusi, kontranäite konstrueerimine nõuab tõhusaid matemaatilisi eelteadmisi.

Esitame esialgu juhusliku suuruse definitsiooni teatava reservatsiooniga.

DEFINITSIOON 11.1. Eeldame, et meil on määratud elementaarsündmuste ruum Ω. Juhuslik suurus X on elementaarsündmuse reaalarvuline funktsioon, mis rahuldab teatavaid täiendavaid "mõistlikke" tingimusi.

Näide 11.1. Olgu elementaarsündmuste ruumiks lõik $[0, 15]$ ja juhusliku suuruse X väärtuseks juhuslikult valitud reaalarv sellel lõigul. Sel juhul võime juhuslikku suurust X interpreteerida kui bussi ootamise aega näite 10.3 andmetel.

11.2. Juhusliku suuruse abil määratavad sündmused

Juhusliku suuruse X abil määratavate sündmustega tutvusime juba punktis 3.3, kus nägime, et niisuguste sündmuste üldine kuju on $(X \in R)$, kus R on mingi reaalarvuline piirkond. Selliste sündmuste kirjeldamine ja nende tõenäosuste määramine on suhteliselt lihtne siis, kui juhuslikul suurusel X on ainult lõplik või ka loenduv hulk väärtusi, kuid muutub keerukamaks siis, kui juhusliku suuruse väärtuste hulk on mitteloenduv.

Sel juhul on otstarbekas defineerida üks teatud mõttes *standardne juhusliku suuruse abil määratud sündmuste klass*, ning edaspidi vaadelda ainult neid sündmusi, mida selle klassi abil õnnestub defineerida. Niisuguseks standardseks sündmuste klassiks võetakse sündmused

$$(X<x) = (X \in (-\infty, x)), \tag{11.1}$$

kus X on juhuslik suurus ja x suvaline reaalarv. Avaldame näitena mõned sageli kasutatavad sündmused:

$$(X \in [a,b)) = (X<b) \setminus (X<a),$$

$$(X \geq b) = \Omega \setminus (X<b).$$

Esitatud sündmuste klassi kasutame järgmises punktis juhusliku suuruse *jaotusfunktsiooni* defineerimisel.

11.3. Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon

Teatavasti iseloomustab juhuslikku suurust tema *väärtuste hulga* kõrval ka tema *jaotus*, mis näitab kõigi selle juhusliku suuruse abil määratud sündmuste tõenäosusi. Diskreetse juhusliku suuruse puhul esitab jaotust tõenäosusfunktsioon, mille abil on kõigi sündmuste tõenäosused lihtsalt arvutatavad. Tõenäosusfunktsioonil ei ole aga mõtet siis, kui juhusliku suuruse väärtuste hulgaks on lõik arvsirgel, sest sel juhul on paratamatult kõigi (vähemalt *peaaegu kõigi*) punktide tõenäosused võrdsed nulliga.

Defineerime nüüd üldisema juhuslike suuruste klassi jaoks sobiva jaotuse esituse – *jaotusfunktsiooni*.

DEFINITSIOON 11.2. Juhusliku suuruse X jaotusfunktsiooniks $F_X(x)$ nimetatakse reaalarvulise argumendi x funktsiooni, mis on määratud eeskirjaga

$$F_X(x) = P(X<x). \tag{11.2}$$

Seega määrab jaotusfunktsioon kõigi eelmises punktis defineeritud sündmuste (11.1) tõenäosused. Jaotusfunktsiooni tähises $F_X(x)$ kasutatakse juhuslikku suurust identifitseerivat allindeksit X, mille jätame ära siis, kui sellest ei teki arusaamatusi.

Jaotusfunktsioon (vt joonis 11.1) on jaotuse üks tähtsamaid *esitusi*. Tema puhul on oluline see, et ta on määratud *kõigi juhuslike suuruste* jaoks.

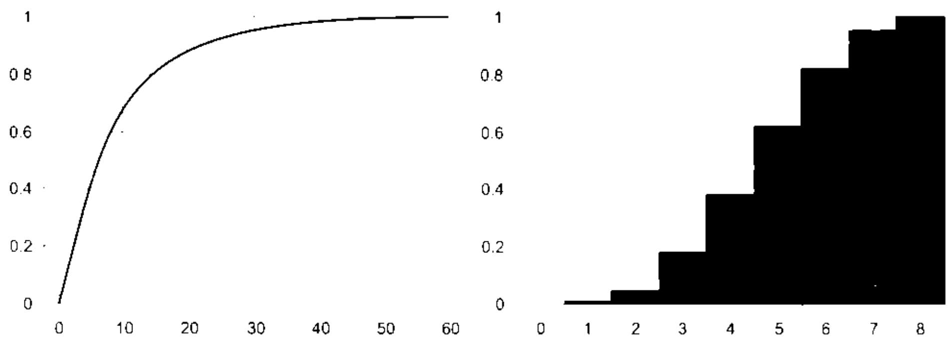
Seega võiksime täiendada definitsiooni 11.1 nõudega, et juhuslikul suurusel peab eksisteerima jaotusfunktsioon, ehk, et kõik juhusliku suuruse abil määratud sündmused $(X<x)$ on ühtlasi sündmused elementaarsündmuste ruumis Ω.

Nagu märgitud, on jaotusfunktsioon määratud ka diskreetse juhusliku suuruse X korral, sel juhul

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \tag{11.3.}$$

kus $p_i = P(X = x_i)$.

Paragrahvis 3, kus me diskreetse juhusliku suuruse jaotust käsitlesime, ei pööranud me sellele funktsioonile aja säästmise mõttes tähelepanu, sest diskreetse juhusliku suuruse puhul lisab jaotusfunktsioon tõenäosusfunktsiooniga võrreldes võrdlemisi vähe teavet.



Joonis 11.1.
Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon.
Vasakul pidev, paremal diskreetne jaotus.

11.4. Jaotusfunktsiooni omadused

Käesolevas punktis tuletame jaotusfunktsiooni olulisemad omadused.

JAOTUSFUNKTSIOONI 1. (MONOTOONSUSE) OMADUS. Jaotusfunktsioon on mittekahanev. Tõepoolest, kui $x<y$, siis hulkade $[a,x)$ ja $[a,y)$ vahel on sisaldussuhe

$$[a,x) \subset [a,y),$$

millest tuleneb sündmuste järeldussuhe $(X<x) \Rightarrow (X<y)$ ja siit ka võrratus tõenäosuste vahel

$$P(X<x) \le P(X<y).$$

✧

JAOTUSFUNKTSIOONI 2. (PIIRVÄÄRTUSE) OMADUS. Jaotusfunktsioonil eksisteerivad piirväärtused.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ ja } \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Tõepoolest, kui väärtuste hulga parempoolne otspunkt x läheneb miinus lõpmatusele, siis läheneb väärtuste hulk ise tühjale hulgale ning juhusliku suuruse sattumine sellesse läheneb võimatule sündmusele. Kui aga lõigu otspunkt saab kuitahes suureks, siis kaetakse varem või hiljem selle lõiguga juhusliku suuruse kõik väärtused, ning järelikult juhusliku suuruse sattumine sellesse lõiku läheneb kindlale sündmusele.

◇

JAOTUSFUNKTSIOONI 3. (PIDEVUSE) OMADUS. Jaotusfunktsioon on vasakult pidev. See omadus tuleneb jaotusfunktsiooni definitsioonist ning kehtib niihästi pidevate juhuslike suuruste puhul (nende korral on jaotusfunktsioon pidev, st pidev nii vasakult kui paremalt) ning samuti ka diskreetse juhusliku suuruse korral. Siis on jaotusfunktsioon treppfunktsiooni kujuline (katkevus on parempoolne). Jaotusfunktsiooni vasakpoolset pidevust me ei tõesta.

Iga funktsioon, mis rahuldab tingimusi $1^0 - 3^0$, on mingi juhusliku suuruse jaotusfunktsioon.

11.5. Pidev juhuslik suurus

Varem olime me tuttavad vaid diskreetse juhusliku suurusega. Teine praktikas väga oluline juhuslike suuruste klass on *pidevad* juhuslikud suurused. Asume järgnevas neid uurima ja selleks alustame pideva juhusliku suuruse defineerimisega.

Oluline on meeles pidada, et sellega juhuslike suuruste hulk ei piirdu. On olemas juhuslikke suurusi, mis on osaliselt pidevad, osaliselt diskreetsed, kuid ka selliseid, mis põhimõtteliselt ei ole ei pidevad ega diskreetsed (isegi mitte oma väärtuspiirkonna osades).

DEFINITSIOON 11.3. Juhuslikku suurust X ja selle jaotust nimetatakse *pidevaks*, kui selle jaotusfunktsioon $F_X(x)$ on *diferentseeruv*.

Diferentseeruv funktsioon on kindlasti pidev, kuid vastupidine ei ole õige – funktsioon võib olla pidev, kuid tal ei ole lõplikku tuletist, st ta ei ole diferentseeruv. Meie jätame niisugused juhud vaatluse alt kõrvale.

Diferentseeruvuse nõue on vajalik selleks, et defineerida pideva juhusliku suuruse jaoks veel üks jaotuse esitus – *tihedusfunktsioon*.

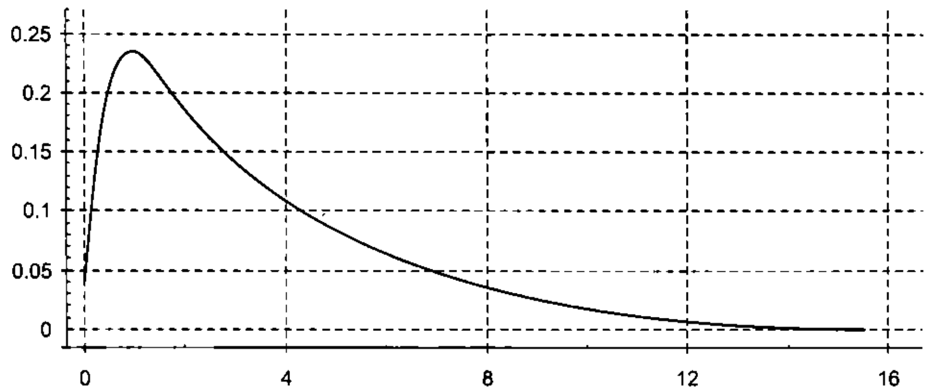
11.6. Tihedusfunktsioon

Lisaks jaotusfunktsioonile on pideval juhuslikul suurusel veel teinegi esitus – see on juhusliku suuruse X *tihedusfunktsioon* $f_X(x)$ ehk *tõenäosuse tihedus*, vt joonis 11.2.

DEFINITSIOON 11.4. Pideva juhusliku suuruse X *tihedusfunktsiooniks* $f_X(x)$ nimetatakse selle juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni tuletist

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x). \tag{11.4}$$

Siin x tähistab argumenti, st juhusliku suuruse X väärtust. Kui pole karta segadust, jäetakse tihedusfunktsiooni tähises allindeks X ära.



Joonis 11.2.
Pideva juhusliku suuruse tihedusfunktsioon.

TIHEDUSFUNKTSIOONI OMADUSED tulenevad vahetult tema definitsioonist ja jaotusfunktsiooni omadustest:

1^0 Tihedusfunktsioon on alati mittenegatiivne. Tõepoolest, mittekahaneva funktsiooni tuletis on mittenegatiivne.

◇

2^0 Jaotusfunktsioon avaldub tihedusfunktsiooni integraalina,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt. \tag{11.5}$$

See omadus tuleneb tihedusfunktsiooni definitsioonist ja Newton-Leibnizi valemist. Jaotusfunktsiooni teisest omadusest järeldub, et liidetava konstandi väärtus on null.

◇

3^0 Tihedusfunktsiooni integraal üle juhusliku suuruse väärtuste piirkonna võrdub ühega. See omadus järeldub jaotusfunktsiooni teisest omadusest,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1. \tag{11.6}$$

◇

Iga funktsioon $f(x)$, mis rahuldab ülaltoodud tingimusi, on mingi jaotuse tihedusfunktsioon.

11.7. Juhusliku suuruse abil määratud sündmuste tõenäosused

Vaatame, kuidas kasutada juhusliku suuruse jaotust esitavaid funktsioone selle suuruse kaudu määratud sündmuse tõenäosuse arvutamisel.

I. JAOTUSFUNKTSIOONI KASUTAMINE TÕENÄOSUSE ARVUTAMISEL

1^0 **TÕENÄOSUS, ET JUHUSLIKU SUURUSE VÄÄRTUS SATUB ANTUD POOLLÕIKU.** Olgu $[a,b)$ suvaline poollõik juhusliku suuruse X väärtuste hulgas. Siis kehtib võrdus:

$$P(X\in [a,b)) = F_X(b)-F_X(a). \tag{11.7}$$

Pideva juhusliku suuruse korral on sama suured ka järgmised tõenäosused:

$$P(X\in [a,b]) = P(X\in [a,b)) = P(X\in (a,b]) = P(X\in (a,b)). \tag{11.7'}$$

Tõepoolest, poollõigu $[a,b)$ puhul järeldub võrdus (11.7) vahetult jaotusfunktsiooni definitsioonist; võrdused (11.7′) tulenevad tõsiasjast, et pideva juhusliku suuruse puhul on iga punkti tõenäosus null.

✧

2^0 **JAOTUSE "SABADE" TÕENÄOSUSED.** Jaotuse P_X "sabadeks" nimetatakse matemaatilises statistikas sündmusi $(X>b)$ ja $(X<a)$, kusjuures võrratused võivad ka mitteranged olla. Eriti pakuvad need sündmused huvi väikese a ja suure b väärtuse korral. Vasakpoolse "saba" $(X<a)$ tõenäosus tuleneb vahetult jaotusfunktsiooni definitsioonist, parempoolse leidmiseks tuleb kasutada ka vastandsündmuse tõenäosuse avaldist. Üldjuhul kehtib võrdus

$$P(X\geq b) = 1-F_X(b)\ , \tag{11.8}$$

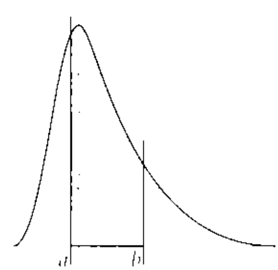
kuid pideva juhusliku suuruse korral võib mitterange võrratuse asendada rangega, sest punkti tõenäosus on null.

✧

II. TIHEDUSFUNKTSIOONI KASUTAMINE TÕENÄOSUSE ARVUTAMISEL

Pideva juhusliku suuruse korral saab samad tõenäosused lihtsalt avaldada ka tihedusfunktsiooni abil. Mõlema, praktiliselt üksteist dubleeriva reegli esitamise mõte seisneb selles, et mõnel juhul (mõne jaotuse puhul) on lihtsam rakendada üht, mõnel juhul teist reeglit.

1^0 **TÕENÄOSUS, ET JUHUSLIKU SUURUSE VÄÄRTUS SATUB ANTUD LÕIKU.** Tõenäosus, et pideva juhusliku suuruse väärtus satub antud lõiku, võrdub tihedusfunktsiooni integraaliga üle selle piirkonna, vt joonis 11.3.



Joonis 11.3.
Tõenäosus, et X väärtus kuulub lõiku $[a, b]$.

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx \tag{11.9}$$

See tulemus järeldub vahetult Newton-Leibnizi valemist ja tihedusfunktsiooni definitsioonist.

◇

Kuna pideva juhusliku suuruse puhul on punkti tõenäosus null, tulenevad leitud valemist ka valemid juhusliku suuruse väärtuse poollõiku ja vahemikku sattumise tõenäosuse arvutamiseks:

$$P(X \in (a,b)) = P(X \in (a,b]) = P(X \in [a,b)) = \int_a^b f_X(x)\,dx \tag{11.9'}$$

◇

2^0 **JAOTUSE "SABADE" TÕENÄOSUSED** avalduvad tihedusfunktsiooni omaduse 2^0 kohaselt, vt valem (11.5)

$$P(X<a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx, \tag{11.10}$$

$$P(X>b) = P(X \ge b) = \int_{b}^{\infty} f_X(x)\,dx. \tag{11.11}$$

◇

Paneme tähele tihedusfunktsiooni teatavat sarnasust diskreetse juhusliku suuruse tõenäosusfunktsiooniga, kusjuures tõenäosusfunktsioon on defineeritud *ainult diskreetsete* ja tihedusfunktsioon *ainult pidevate* jaotuste puhul.

11.8. Juhuslik vektor

Kasutades juhusliku suuruse üldisemat definitsiooni, laiendame ka paragrahvis 5 esitatud juhusliku vektori definitsiooni.

DEFINITSIOON 11.5. Kui elementaarsündmuste ruumis Ω on defineeritud mitu juhuslikku suurust $X_1, X_2, \ldots, X_m$, siis moodustavad nad *juhusliku vektori.* Juhuslikku vektorit iseloomustab selle vektori jaotus (komponentide ühisjaotus).

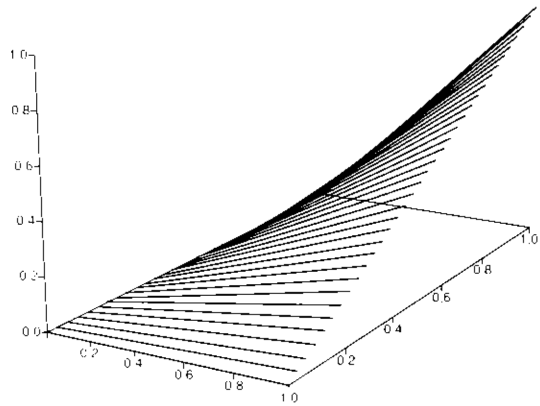
Tuletame vektori jaotuse olulisemad esitused kahemõõtmelise juhu jaoks. Iga juhuslikku vektorit (X,Y) iseloomustab tema *jaotusfunktsioon*

$$F_{XY}(x,y) = P(X<x, Y<y), \tag{11.12}$$

kus reaalarvulised argumendid x ja y on vastavalt juhuslike suuruste X ja Y väärtused, vt joonis 11.4.

Kui juhusliku vektori mõlemad komponendid on pidevad juhuslikud suurused, siis on sellel juhuslikul vektoril olemas tihedusfunktsioon $f_{XY}(x,y)$, mis leitakse jaotusfunktsiooni diferentseerimisel,

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y). \tag{11.13}$$



Joonis 11.4.
Pideva juhusliku vektori jaotusfunktsioon.

PIDEVA JUHUSLIKU VEKTORI PIDEV REAALARVULINE FUNKTSIOON ON PIDEV JUHUSLIK SUURUS. See järeldub pideva juhusliku suuruse definitsioonist.

Üldiselt on võimalik avaldada pideva vektori jaotuse kaudu selle vektori funktsiooni jaotus, vt punkt 5.7, kuid sellel me käesolevas raamatus ei peatu. Küll aga esitame juhusliku vektori komponentide sõltumatuse tingimused.

JUHUSLIKU VEKTORI SÕLTUMATUSE TINGIMUS ÜLDJUHUL. Tarvilik ja piisav tingimus juhusliku vektori komponentide *sõltumatuseks* on see, et vektori jaotusfunktsioon võrdub komponentide jaotusfunktsioonide korrutisega,

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

PIDEVA JUHUSLIKU VEKTORI SÕLTUMATUSE TINGIMUS. Pideva juhusliku vektori korral on komponentide sõltumatuseks tarvilik ja piisav, et vektori ühine tihedusfunktsioon võrdub komponentide tihedusfunktsioonide korrutisega,

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y). \tag{11.14}$$

11.9. Pideva juhusliku suuruse keskväärtus

Defineerime nüüd pideva juhusliku suuruse arvkarakteristikud, alustades keskväärtusega. Olgu märgitud, et kuigi põhimõtteliselt on võimalik esitada ühised avaldised *suvaliste juhuslike suuruste* arvkarakteristikute arvutamiseks, on need kasutamiseks liialt tülikad, ja seetõttu piirdume käesolevas ainult *pidevate juhuslike suuruste* korral kehtivate avaldistega.

DEFINITSIOON 11.6. Olgu X pidev juhuslik suurus, mille tihedusfunktsioon on $f_X(x)$. Siis defineeritakse juhusliku suuruse keskväärtus EX valemiga

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx. \tag{11.15}$$

Kui juhusliku suuruse väärtuste hulgaks on lõik $[a,b]$, siis toimub integreerimine rajades a-st kuni b-ni.

Olgu märgitud, et põhimõtteliselt on võimalik ka olukord, et keskväärtust määrav integraal ei koondu, sel juhul juhuslikul suurusel keskväärtus puudub. Keskväärtus võib puududa ka diskreetsel, loenduva ja tõkestamata väärtuste hulgaga juhuslikul suurusel. Tõkestatud väärtuste hulgaga juhuslikul suurusel on keskväärtus alati olemas. Jaotused, millel keskväärtus puudub, jätame edaspidises käsitluses kõrvale.

Integraali omadustest järelduvad

PIDEVA JUHUSLIKU SUURUSE KESKVÄÄRTUSE OMADUSED. Kasutades integraali omadusi ja punktis 11.8 kasutusele võetud pideva juhusliku vektori ning suuruse funktsiooni mõistet ja selle jaotust, saame tuletada pideva juhusliku suuruse keskväärtuse omadused sarnaselt sellele, kuidas need tuletati diskreetse juhusliku suuruse jaoks. Näeme, et pideva juhusliku suuruse puhul säilivad kõik diskreetse juhusliku suuruse keskväärtuse jaoks tõestatud omadused (vt punktid 4.1 ja 5.9).

1^0 $\min X < EX < \max X$,

2^0 $E(cX) = cEX$

3^0 $E(X+a) = EX+a$,

4^0 $E(X+Y) = EX+EY$,

5^0 $E(X\ Y) = EX\ EY$ kui X ja Y on sõltumatud.

✧

11.10. Pideva juhusliku suuruse dispersioon

Laiendame pideva juhusliku suuruse jaoks ka *dispersiooni ja standardhälbe* mõisted.

Pideva juhusliku suuruse X dispersioon defineeritakse, samuti kui diskreetse juhusliku suuruse dispersioon (vt valem (4.3)), valemiga

$$DX = E(X-EX)^2$$

Pideva juhusliku suuruse dispersiooni arvutusvalem tuleneb keskväärtuse arvutusvalemist:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-EX)^2 f_X(x)\,dx. \tag{11.16}$$

Samuti kui keskväärtus, nii võib ka dispersioon pideval, tõkestamata väärtushulgaga juhuslikul suurusel puududa. Keskväärtuse olemasolu on dispersiooni ja momentide eksisteerimiseks tarvilik, ent mitte piisav tingimus. Käesolevas kursuses me eeldame, et juhuslikul suurusel on olemas niihästi keskväärtus kui ka dispersioon.

Pideva juhusliku suuruse korral säilivad diskreetse juhusliku suuruse dispersiooni olulised omadused, mis on tuletatud punktides 4.2, 5.9 ja 6.3. Need on lihtsalt üldistatavad, kui kasutada keskväärtuse (integraali) vastavaid omadusi.

PIDEVA JUHUSLIKU SUURUSE DISPERSIOONI OMADUSED.

1^0 $DX \geq 0$,

2^0 $D(cX) = c^2DX$,

3^0 $D(X+a) = DX$,

4^0 $D(bX) = b^2DX$,

5^0 $D(X+Y) = DX+DY$ kui X ja Y on sõltumatud.

Märgime, et üldisemate juhuslike suuruste puhul ei kehti diskreetse juhusliku suuruse dispersiooni esimese omaduse järeldus, mille kohaselt nulldispersioon on ainult konstandil. On võimalik defineerida ka selliseid juhuslikke suurusi, mis ei ole konstantsed, kuid mille dispersioon on null. Käesolevast kursusest jäävad need välja.

Pideva juhusliku suuruse standardhälve on, nagu diskreetsegi juhusliku suuruse standardhälve, ruutjuur tema dispersioonist. Pideva juhusliku suuruse standardhälve säilitab automaatselt ka punktis 4.3 tuletatud diskreetse juhusliku suuruse standardhälbe omadused.

11.11. Pideva juhusliku suuruse ja vektori momendid

Järgnevas üldistame pideva juhusliku suuruse jaoks *momendid*.

Pideva juhusliku suuruse momendid on defineeritud, samuti kui diskreetselgi juhul, keskväärtusena juhusliku suuruse astmest, vt valem (4.10),

$$\mu_m = E(X^m).$$

Pideva juhusliku suuruse momentide jaoks saame tuletada arvutusvalemi, kasutades selleks juhusliku suuruse pideva funktsiooni keskväärtuse avaldist. Käesolevas raamatus esitame siiski vaid lõppresultaadi:

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f_X(x)\,dx. \tag{11.17}$$

Märgime, et tõkestamata väärtuste hulgaga juhuslikul suurusel võivad momendid (alates mingist m väärtusest) ka puududa.

Kahe juhusliku suuruse ühisjaotuse abil defineeritakse juhusliku vektori *segamomendid*. Nende esindajatest on meile tuttav *kovariatsioon*, mis avaldub kui antud juhuslikele suurustele X ja Y vastavate *tsentreeritud juhuslike suuruste teist järku segamoment* ehk teist järku tsentraalne segamoment,

$$cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY),$$

vt valem (6.1). Pideva juhusliku vektori kovariatsiooni arvutusvalem on alljärgnev:

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)(y-EY)f_{XY}(x,y)\,dx\,dy, \tag{11.18}$$

kus $f_{XY}(x,y)$ tähistab vektori (X,Y) tihedusfunktsiooni.

Pideva juhusliku vektori kovariatsioon säilitab kõik diskreetse juhusliku suuruse kovariatsiooni omadused, vt punkt 6.1. Tuleb aga märkida, et tõkestamata väärtuste hulgaga juhuslikul vektoril ei tarvitse kovariatsiooni eksisteerida. Selle eksisteerimiseks on (Cauchy-Bunjakovski võrratuse tõttu) piisav, kui mõlemal juhuslikul suurusel X ja Y on olemas dispersioon.

Kovariatsiooni kaudu defineeritakse ka pideva juhusliku vektori jaoks *korrelatsioonikordaja,*

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\ DY}}$$

Ka korrelatsioonikordaja säilitab üldjuhul kõik omadused, mis me tuletasime punktides 6.2 ja 6.5.

Samuti nagu diskreetse juhusliku suuruse puhul (vt valem (5.10)), on ka pideva juhusliku suuruse dispersiooni võimalik arvutada teist järku momendi kaudu,

$$DX = \mu_2 - \mu^2$$

kus μ tähistab keskväärtust. Selle valemi kasutamine lihtsustab sageli dispersiooni arvutamist.

11.12. Pideva juhusliku suuruse kvantiilid

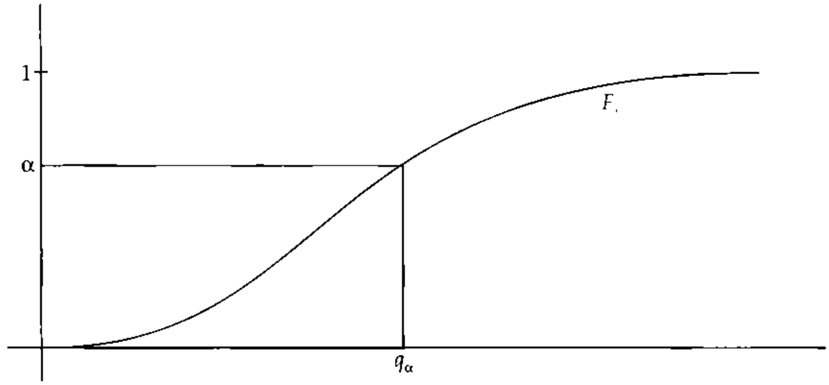
Defineerime käesolevas punktis rea uusi juhusliku suuruse arvkarakteristikuid, nimelt *kvantiilid*. Märgime, et need eksisteerivad põhimõtteliselt ka diskreetse juhusliku suuruse jaoks, kuid sel juhul on nende defineerimine pisut komplitseeritum ja nad ei ole alati üheselt määratud.

Pideva juhusliku suuruse X korral on tema jaotusfunktsioon $F_X(x)$ pidev ja monotoonselt mittekahanev. Oletame lihtsuse mõttes, et *jaotusfunktsioon on kogu ulatuses kasvav*, st et juhusliku suuruse väärtuste piirkond on *sidus*, selle sees ei ole nulltihedusega piirkondi. Sel juhul saame iga etteantud tõenäosuse α jaoks leida juhusliku suuruse X sellise väärtuse $x = q_\alpha$, et juhuslik suurus X on sellest väärtusest väiksem tõenäosusega α, vt joonis 11.5.

DEFINITSIOON 11.7. Niisugust juhusliku suuruse väärtust q_α, mille korral kehtib võrdus

$$P(X<q_\alpha) = \alpha, \text{ kus } 0<\alpha<1,$$

nimetatakse selle juhusliku suuruse jaotuse *α-kvantiiliks*.



Joonis 11.5.
Juhusliku suuruse kvantiili määramine.

Kvantiil q_α leitakse võrrandi $F_X(x) = \alpha$ lahendamise tulemusena, st, ta on jaotusfunktsiooni pöördfunktsiooni väärtus

$$q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha).$$

On selge, et pideval juhuslikul suurusel eksisteerivad kõik kvantiilid. Mõned nende seast leiavad juhusliku suuruse arvkarakteristikutena üsna tihedat kasutamist ning on seetõttu saanud eraldi nimed. Tutvume nendega.

KVANTIILIDE KAUDU MÄÄRATUD ARVKARAKTERISTIKUD.

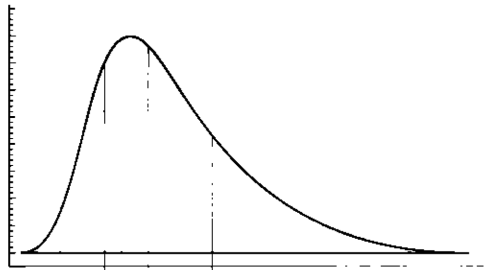
1^0 **MEDIAAN.** 0,5-kvantiili nimetatakse *mediaaniks*.

2^0 **KVARTIILID.** 0,25-kvantiili ja 0,75-kvantiili nimetatakse vastavalt *alumiseks* ja *ülemiseks kvartiiliks*, vt joonis 11.6.

3^0 **DETSIILID.** Kümnendik-kvantiile, st $\frac{i}{10}$-kvantiile, nimetatakse *detsiilideks*.

4^0 **PROTSENTIILID.** Sajandik-kvantiile nimetatakse *protsentiilideks* (või ka sentiilideks).

Lisaks kvantiilidele kasutatakse praktiliste ülesannete lahendamisel (eriti rakendusstatistikas) tihti ka *täiendkvantiile.*



Joonis 11.6.
Mediaan ja kvartiilid.

DEFINITSIOON 11.8. Niisugust juhusliku suuruse väärtust $\bar{q}_\alpha$, mille korral kehtib võrdus

$$P(X \geq \bar{q}_\alpha) = \alpha,$$

nimetatakse selle juhusliku suuruse jaotuse α-*täiendkvantiiliks.*

Kvantiilide ja täiendkvantiilide definitsioonist järelduvad nende olulisemad omadused.

1. KVANTIILIDE MONOTOONSUSE OMADUS.

$$\text{Kui } \alpha < \beta \text{ siis } q_\alpha < q_\beta$$

2.. TÄIENDKVANTIILI AVALDIS KVANTIILI KAUDU.

$$\bar{q}_\alpha = q_{1-\alpha}. \tag{11.18}$$

Kõige sagedamini kasutatav kvantiil on *mediaan*. Mediaan on niisugune juhusliku suuruse väärtus, millest juhuslik suurus on ühesuguse tõenäosusega suurem ja väiksem. Seega iseloomustab mediaan juhusliku suuruse väärtuste hulka ja on üks selle juhusliku suuruse nn *asendikarakteristikuid*. Sümmeetrilise jaotuse puhul langevad juhusliku suuruse mediaan ja keskväärtus ühte.

Tihti kasutatakse juhusliku suuruse hajuvuse iseloomustamiseks *kvartiile*. Väikese hajuvusega juhuslikul suurusel, mille väärtused suure tõenäosusega on kontsentreerunud keskmise (mediaani) lähedusse, paiknevad kvartiilid lähestikku, nende vahe on väike. Suure hajuvusega juhusliku suuruse puhul on aga kvartiilide vahe enamasti suur.

12. ÜHTLANE JAOTUS

12.1. Ühtlane jaotus lõigul $[a,b]$

Samuti nagu diskreetsete jaotuste puhul, nii on ka pidevate jaotuste korral defineeritud teatavad *jaotusseadused* ehk *parameetrilised jaotuste pered*. Lihtsaim nende perede hulgast on *ühtlane jaotus lõigul*, kus parameetriteks on lõigu otspunktid.

Asume nüüd tutvuma *ühtlase jaotusega lõigul*, mis on olemuslikult seotud *geomeetrilise tõenäosusega lõigul*.

Et seda seost tunnetada, pöördume tagasi bussi ootamise ülesande juurde, vt näide 10.3. Olgu bussi liiklusintervalli pikkus b. Oletame, et reisija sattus bussipeatusesse juhuslikul hetkel. Tähistame tähega X tema jaoks vajaliku ooteaja, st ajavahemiku reisija bussipeatusesse saabumisest kuni bussi saabumiseni. Vastavalt definitsioonile on X juhuslik suurus. Olgu x mingi antud mittenegatiivne arv Korrates näites 10.3 toodud arutelu leiame *tõenäosuse, et reisijal ei olnud vaja bussi oodata kauem kui* x (minutit). Kehtib seos:

$$P(X<x) = \begin{cases} \frac{x}{b} \quad \text{kui } x<b, \\ 1\ , \text{ kui } x \geq b. \end{cases}$$

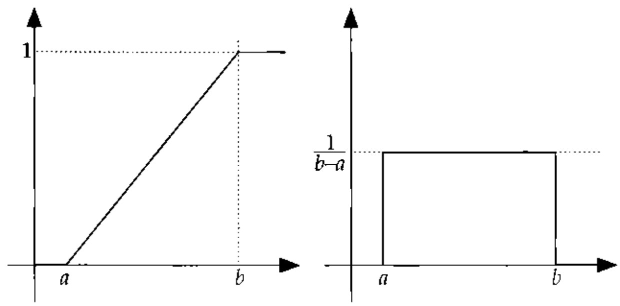
Oluline eeldus selle ülesande lahendamisel on see, et *tõenäosus bussi saabumiseks teatava ajavahemiku jooksul sõltub võrdeliselt selle ajavahemiku pikkusest* (loomulikult kuni tõenäosuse väärtuseni üks). Selle printsiibi alusel defineeritaksegi jaotusfunktsiooni kaudu *ühtlane jaotus lõigul* $[a,b]$, kus loomulikult $a<b$.

DEFINITSIOON 12.1. Juhusliku suuruse X jaotust nimetatakse *ühtlaseks* lõigul $[a,b]$, kui tema jaotusfunktsioon on võrdeline lõigu pikkusega $x-a$ iga argumendi x, $a<x<b$ korral,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{kui } x<a, \\ \frac{x-a}{b-a} \quad \text{kui } a \leq x \leq b, \\ 1\ , \text{ kui } x>b. \end{cases} \tag{12.1}$$

Ühtlase jaotuse tähiseks on $\mathcal{U}[a,b]$, kus parameetriteks a ja b on suvalised reaalarvud, $a<b$.

Ühtlase jaotuse jaotus- ja tihedusfunktsioon on esitatud joonisel 12.1. Tõsiasja, et juhuslik suurus X on ühtlase jaotusega parameetritega a ja b, tähistatakse sümboliga $X \sim \mathcal{U}[a,b]$.



Joonis 12.1.
Ühtlase jaotuse jaotus- ja tihedusfunktsioon.

Kõige sagedamini kasutatakse ühtlast jaotust $\mathcal{U}[0,1]$. Selle puhul on jaotusfunktsiooni avaldis eriti lihtne:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ kui } x<0, \\ x, \text{ kui } 0\le x\le 1, \\ 1, \text{ kui } x>1. \end{cases} \tag{12.1'}$$

12.2. Ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon

Ühtlase jaotuse jaotusfunktsioon on lineaarfunktsioon, seega diferentseeruv, ning järelikult on ühtlane jaotus *pidev*.

Leiame ühtlase jaotuse *tihedusfunktsiooni* $f_X(x)$ jaotusfunktsiooni tuletisena. Piirkonnas $x \in [a,b]$ saame

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a}.$$

Et konstandi tuletis on 0, siis saame kokkuvõttes

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ kui } x<a, \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ kui } a\le x\le b, \\ 0, \text{ kui } x>b. \end{cases} \tag{12.2}$$

Seega on *ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon konstantne* kogu selle juhusliku suuruse väärtuste piirkonnas.

✧

Sageli kasutatakse seda ühtlase jaotuse omadust tema defineerimiseks, sel korral saadakse järgmine, definitsiooniga 12.1 samaväärne, kuid mõnevõrra "läbipaistvam" määratlus.

DEFINITSIOON 12.1'. Juhusliku suuruse X jaotust nimetatakse *ühtlaseks* lõigul $[a,b]$, kui tema tihedusfunktsioon on sellel lõigul konstantne ja väljaspool seda lõiku võrdne nulliga.

Jooniselt 12.1 on näha, et tihedusfunktsiooni graafik on ristkülikukujuline. Et selle ristküliku pindala on tihedusfunktsiooni kolmanda omaduse põhjal võrdne ühega, siis peab tema kõrgus olema $\frac{1}{b-a}$, nagu on näha ka valemist (12.2).

Siit järeldub ka alljärgnev arvutuseeskiri:

ÜHTLASE JAOTUSEGA JUHUSLIKU SUURUSE ABIL MÄÄRATUD SÜNDMUSE TÕENÄOSUSE LEIDMINE. Tõenäosus selleks, et ühtlase jaotusega juhusliku suuruse X väärtus satuks lõiku $[c,d]$, $a \le c < d \le b$ (või samade otspunktidega poollõiku või vahemikku) võrdub järgmise avaldisega

$$P(X \in [c,d]) = \frac{d-c}{b-a}. \tag{12.3}$$

✧

ÜHTLASE JAOTUSEGA JUHUSLIKU SUURUSE LINEAARTEISENDUSE OMADUS. Ühtlase jaotusega $\mathcal{U}[a,b]$ juhusliku suuruse X *lineaarsel teisendamisel* saame juhusliku suuruse $Y = c + dX$, mis on samuti *ühtlase jaotusega*, $Y \sim \mathcal{U}[c+ad, c+bd]$.

12.3. Ühtlase jaotuse keskväärtus

Alustame ühtlase jaotuse arvkarakteristikute leidmist traditsiooniliselt keskväärtusega.

Keskväärtuse valemi (11.15) põhjal saame ühtlase jaotuse keskväärtuse avaldise:

$$EX = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b^2-a^2)}{2} = \frac{a+b}{2} \tag{12.4}$$

Seega näeme, et lõigul $[a,b]$ *ühtlase jaotuse keskväärtuseks on selle lõigu keskpunkt.* Tulemus on igati ootuspärane.

Näide 12.1. Leiame keskmise bussiooteaja näitest 11.1. Kasutades viimati tuletatud valemit näeme, et see on $\frac{15}{2} = 7{,}5$ minutit.

12.4. Ühtlase jaotuse dispersioon, standardhälve ja kvantiilid

Kasutades valemit (11.16) ja juba leitud ühtlase jaotuse keskväärtuse avaldist leiame lõigul $[a,b]$ ühtlase jaotusega juhusliku suuruse dispersiooni avaldise.

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

✧

Seega näeme, et

LÕIGUL $[a,b]$ ÜHTLASE JAOTUSE DISPERSIOON ON

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{12.5}$$

Samast valemist tuleneb ka ühtlase jaotuse standardhälbe avaldis:

LÕIGUL $[a,b]$ ÜHTLASE JAOTUSE STANDARDHÄLVE ON

$$S(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Eriti lihtne on leida ühtlase jaotuse kvantiile.

LÕIGUL $[a,b]$ ÜHTLASE JAOTUSE α -KVANTIIL q_α avaldub valemiga

$$q_\alpha = a + \alpha \cdot (b-a). \tag{12.6}$$

Näide 12.2. Leiame näidetes 10.3 ja 11.1 vaadeldud bussi ooteaja dispersiooni, arvestades, et bussi liikumisintervall on 15 minutit. Kasutades eeltuletatud valemit näeme, et $DX = \frac{15^2}{12} = 18,75$, standardhälve on 4,33.

Näide 12.3. Leiame eelmistes näidetes vaadeldud bussi ooteaja mediaani ja kvartiilid. Lahendades vastavalt võrrandid $F(x) = 0,5$, $F(x) = 0,25$, $F(x) = 0,75$ ning arvestades, et käesoleval juhul $F(x) = \frac{x}{15}$, saame mediaani väärtuseks $15 \cdot 0,5 = 7,5$, ning kvartiilid on vastavalt 3,75 ja 11,25.

12.5. Ühtlase jaotusega juhuslik vektor

Kui juhuslikud suurused X ja Y on määratud samal elementaarsündmuste ruumil ning on ühtlase jaotusega, siis moodustavad nad üheskoos *ühtlase jaotusega juhusliku vektori*. Tutvume põgusalt sõltumatute komponentidega ühtlase vektoriga.

DEFINITSIOON 12.2. Olgu juhuslikud suurused $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, $Y \sim \mathcal{U}(c,d)$ sõltumatud. Siis on juhuslik vektor (X,Y) ühtlase jaotusega ristkülikus $[a,b] \times [c,d]$.

Seda tõsiasja tähistatakse sümboliga $(X,Y) \sim \mathcal{U}([a,b] \times [c,d])$. Ka kahemõõtmelise ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon on kogu oma määramispiirkonnas konstantne:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & \text{kui } a<x<b,\ c<y<d, \\ 0 \text{ muudel juhtudel.} & \end{cases} \tag{12.7}$$

Niisugune kahemõõtmeline ühtlane jaotus on seotud geomeetrilise tõenäosusega tasandil – iga ristkülikusse $[a,b]\times[c,d]$ kuuluva kujundi A puhul on tõenäosus, et juhusliku vektori (X,Y) väärtus satub sellesse piirkonda, võrdne selle kujundi geomeetrilise tõenäosusega eeldusel $\Omega=[a,b]\times[c,d]$.

12.6. Juhuslike arvude jada ja generaator

Mitmesugustes inimtegevuse valdkondades osutub tarvilikuks mitte üksnes juhuslike nähtuste analüüsimine ja juhuslikkusega seotud seaduspärasuste avastamine, vaid ka *juhuslikkuse tekitamine*.

See on üsna lihtne katsete korral, millel on suhteliselt väike arv katsetulemusi. Niisuguste "juhuslikkuse generaatoritena" on ammu tuntud mündi- ja täringuvise ning mitmesugused teised hasartmängudes ja loteriides kasutatavad eeskirjad ja mehhanismid. Märksa keerukam on lugu siis, kui soovitakse genereerida *pideva juhusliku suuruse väärtusi*. Niisuguste ülesannete lahendamiseks on välja töötatud *juhuslike arvude generaatorid*, millega me alljärgnevas põgusalt tutvume.

DEFINITSIOON 12.3. Jaotusega P juhuslike arvude jadaks nimetatakse lõpmatut reaalarvude jada, millel on järgmised omadused:

1^0 kõik sellesse jadasse kuuluvad arvud kuuluvad jaotusega P juhusliku suuruse väärtuste hulka;

2^0 jada liikmed on omavahel sõltumatud;

3^0 jada iga lõpliku pikkusega n osajada määrab empiirilise jaotuse P_n, mis on antud jaotusele P küllalt lähedane.

Praktikas kasutatakse juhuslike arvudena nn *pseudojuhuslikke arve*, mis on leitud mingi mittejuhusliku eeskirjaga, kuid mis rahuldavad küllalt hästi tingimusi 1^0–3^0 Lihtsuse mõttes nimetatakse tavaliselt neidki arve *juhuslikeks*, nii teeme meiegi.

Juhuslikul arvul on mõtet ainult jadas. Mehhanismi või algoritmi, mille abil juhuslikke arve tekitatakse (arvutatakse), nimetatakse *juhuslike arvude generaatoriks*. Juhuslike arvude generaatorid on igatüübilistes arvutites (sh ka taskuarvutites) küllaltki levinud ning nende kasutamine on lihtne. Väikeste ülesannete lahendamisel saab kasutada *juhuslike arvude tabeleid*, mida võib vaadelda kui juhuslike arvude jada teatavat lõplikku osajada.

12.7. Ühtlase jaotusega juhuslikud arvud

Kõige sagedamini tekitavad generaatorid lõigul $[0,1]$ ühtlase jaotusega juhuslikke arve, kusjuures iseloomulik on see, et need arvud väljastatakse paljude kümnendkohtadega. Tihti tähistatakse ühtlase jaotusega $\mathcal{U}(0,1)$ juhuslikke arve sümboliga α, lisades juurde indeksi i, mis näitab selle arvu järjekorranumbrit jadas.

Ühtlase jaotusega juhuslikke arve saab *teisendada* ka mingi muu jaotusega juhuslikeks arvudeks. Selleks on olemas universaalsed teisenduseeskirjad, millel peatuda ei võimalda käesoleva raamatu lühidus. Küll aga toome näiteid, milles demonstreerime, kuidas leida

1^0 antud parameetritega a, b ühtlase jaotusega $\mathcal{U}(a,b)$ juhuslikke arve;
2^0 diskreetse ühtlase jaotusega $\mathcal{U}_d(k)$ juhuslikke arve.

Näide 12.4. Seame enesele eesmärgiks modelleerida bussi ootamist, st "teha katseid" bussi ootamise ülesande illustreerimiseks, kasutades katsetulemuste tekitamiseks juhuslikke arve, mis illustreeriksid bussireisijate ooteaegu.

Et bussi ooteaeg on ühtlase jaotusega $\mathcal{U}(0,15)$, siis tuleb meil kõigepealt genereerida juhuslikud arvud α_i jaotusega $\mathcal{U}(0,1)$ ja seejärel teha lineaarteisendus $x_i = a + (b-a)\alpha_i$ Käesolevas ülesandes leiame $x_i = 15\alpha_i$, mis ongi i-nda saabunud reisija ooteaeg.

Näide 12.5. Olgu tarvis leida eeskiri, kuidas valida juhulikult üks õpilane antud klassi 25 õpilase seast. Üks võimalus selle ülesande lahendamiseks on – genereerida üks arv y ühtlase diskreetse jaotusega $\mathcal{U}_d(25)$ ja lugeda selle väärtus valitava õpilase järjekorra numbriks.

Juhusliku arvu y saamiseks toimime järgmiselt. Genereerime juhusliku arvu α lõigul $[0,1]$, korrutame selle 25-ga ja võtame täisosa. Et me selle tulemusena saame diskreetse ühtlase jaotuse väärtustega $0, 1, \ldots, 24$, siis tuleb tulemusele veel liita üks. Seega oleks valitava õpilase järjekorranumbriks klassi nimistus arv $[25\alpha] + 1$.

13. Normaaljaotus

13.1. Normaaljaotuse definitsioon

Normaaljaotus on mitmel põhjusel nii tõenäosusteoorias kui ka matemaatilises statistikas kõige sagedamini rakendatav jaotus. Peale selle on tal erakordselt suur tähtsus kõigis statistika rakendusvaldkondades. Käesolevas paragrahvis tutvume normaaljaotuse määratluse ja mõningate olulisemate omadustega.

Kahjuks peame vajaliku aparatuuri (jaotuse esitus karakteristlike funktsioonide kaudu) puudumise tõttu esitama suure osa tulemustest tõestusteta.

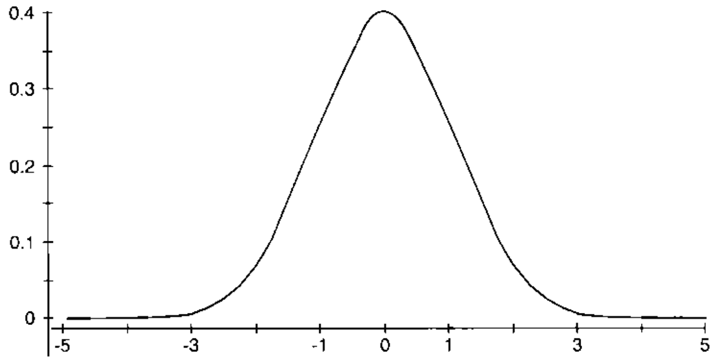
Normaaljaotuse defineerime tema tihedusfunktsiooni kaudu.

DEFINITSIOON 13.1. *Normaaljaotusega juhuslikuks suuruseks* nimetatakse juhuslikku suurust, mille tihedusfunktsioon on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{13.1}$$

kus parameetrid μ ja σ võivad omandada vastavalt suvalisi reaalarvulisi ja mittenegatiivseid reaalarvulisi väärtusi $(-\infty<\mu<\infty, \sigma>0)$.

Normaaljaotuse sümboliks on $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$. Seda, et juhuslik suurus X on normaaljaotusega, tähistatakse avaldisega $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ Valemiga (13.1) esitatud tihedusfunktsiooni tähistame edaspidi sümboliga $f(x\,|\,\mu,\sigma)$ või ka $f_{\mu,\sigma}(x)$. Joonisel 13.1 on esitatud normaaljaotuse tihedusfunktsiooni graafik.



Joonis 13.1.
Normaaljaotuse tihedusfunktsioon.

13.2. Normaaljaotuse omadused

Vahetult normaaljaotuse tihedusfunktsiooni definitsioonist järelduvad mõningad normaaljaotuse olulised omadused.

NORMAALJAOTUSE 1. OMADUS. Normaaljaotus on *pidev* jaotus, mille väärtuste hulgaks on kõigi reaalarvude hulk.

Tõepoolest, kuna jaotus on defineeritud tihedusfunktsiooni kaudu, peab ta olema pidev Valemist (13.1) järeldub ka, et iga argumendi x väärtuse jaoks saab tihedusfunktsiooni väärtuse arvutada, ja see on *rangelt positiivne*. Iseküsimus on see, et absoluutväärtuselt suurte x väärtuste puhul on $f(x)$ väärtus väga lähedane nullile.

✧

NORMAALJAOTUSE 2. OMADUS. Normaaljaotus on sümmeetriline punkti μ suhtes.

Käsitledes normaaljaotuse omadusi, on kasulik meenutada mõningaid omadusi, mis tulenevad vastavatest *pidevate jaotuste omadustest*, vt punkt 11.6.

NORMAALJAOTUSE 3. OMADUS. Normaaljaotuse tihedusfunktsiooni integraal üle kogu määramispiirkonna võrdub ühega,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1. \tag{13.2}$$

NORMAALJAOTUSE 4. OMADUS. Normaaljaotuse tihedusfunktsioon läheneb asümptootiliselt nullile argumendi absoluutväärtuse kasvades,

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

13.3. Normaaljaotuse keskväärtus

Normaaljaotuse arvkarakteristikute leidmist alustame, leides kõigepealt normaaljaotuse keskväärtuse.

Keskväärtuse arvutamiseks kasutame paragrahvis 11 esitatud valemit (11.15)

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x\,dx,$$

kus tihedusfunktsiooniks $f(x)$ võtame $f(x\,|\,\mu,\sigma)$. Rakendame argumendile x lineaarteisendust, $t = x-\mu$. Sel juhul saame $x = t+\mu$ ja $dx = dt$, lõpmatud integreerimisrajad ei muutu ning integraal teiseneb kujule

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} (t+\mu)\,dt.$$

Paneme tähele, et teguri $(t+\mu)$ kordajaks integraali märgi all on normaaljaotuse tihedusfunktsioon $f(t\,|\,0,\sigma)$. Integraali aditiivsuse omaduse kohaselt saame selle integraali kirjutada summana:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\,|\,0,\sigma)\,t\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu f(t\,|\,0,\sigma)\,dt.$$

Esimese liidetava puhul on tegemist paaritu funktsiooni (päratu) integraaliga sümmeetrilistes rajades, mis võrdub nulliga, sest vastav integraal koondub (koonduvuse tõestust me ei esita).

Teise liidetava puhul on tarvis vaid konstant μ integraali ette võtta. Seejärel saame integraali tihedusfunktsioonist, mis teatavasti võrdub ühega. Niisiis, kokkuvõttes saame:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,|\,\mu,\sigma)\,x\,dx = \mu. \qquad (13.3)$$

◇

Jõudsime olulise normaaljaotuse omaduseni:

NORMAALJAOTUSE PARAMEETRIKS μ ON KESKVÄÄRTUS.

13.4. Normaaljaotuse dispersioon

Normaaljaotuse dispersiooni arvutamise lihtsustamiseks arvestame, et dispersioon on nihke suhtes invariantne ning leiame *tsentreeritud* normaaljaotuse dispersiooni. Kasutame selleks eelmises punktis leitud tulemust, mille kohaselt $f(x\,|\,0,\sigma)$ on tsentreeritud normaaljaotuse tihedusfunktsioon, sest parameeter μ on selles võetud võrdseks nulliga. Arvutame valemi (11.16) abil

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,|\,0,\sigma)x^2dx.$$

Teeme lineaarteisenduse $t = \frac{x}{\sigma}$, siis $x = \sigma t$, $dx = \sigma dt$ ja integraali märgi alla tekib tihedusfunktsioon $f(t\,|\,0,1)$, vt valem (13.5) järgmises punktis. Paneme tähele, et teisendamise käigus taandub ka konstant $\frac{1}{\sigma}$ integraali märgi eest. Selle tulemusena saame me suvalise *parameetriga* σ *normaaljaotuse dispersiooni* avaldada, kasutades tihedusfunktsiooni $f(t\,|\,0,1)$,

$$DX = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t\,|\,0,1)t^2dt.$$

Leiame nüüd viimase integraali, kasutades selleks nn *ositi integreerimise valemit* $\int u dv = uv - \int v du$. Meil on tarvis leida integraal $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}dt$. Tähistame $t = u$, $e^{\frac{-t^2}{2}}tdt = dv$. Siis $v = -e^{\frac{-t^2}{2}}$, $du = dt$ ja me saame

$$DX = \sigma^2 \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(te^{\frac{-t^2}{2}} \right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t\,|\,0,1)dt \right\} = \sigma^2 \tag{13.4}$$

Selle tõestamine, et esimene avaldis on võrdne nulliga, taandub selle avaldise piirväärtuste avaldamisele juhtudel $t \to -\infty$, $t \to \infty$. On lihtne näidata, et need mõlemad piirväärtused võrduvad nulliga ja siis on ka vastav avaldis võrdne nulliga. Teise integraali võrdumine ühega on ilmne.

✧

Arvestades veel tõsiasja, et ruutjuur dispersioonist on standardhälve, saame leitud tulemuse sõnastada alljärgnevalt.

NORMAALJAOTUSE TEISEKS PARAMEETRIKS ON STANDARDHÄLVE σ.

Mõnikord nimetatakse normaaljaotuse teiseks parameetriks ka dispersiooni σ^2. Arusaadavalt on siin vahe vaid kokkuleppes, mitte põhimõttes, sest σ ja σ^2 on üksüheses vastavuses.

13.5. Standardiseeritud normaaljaotus

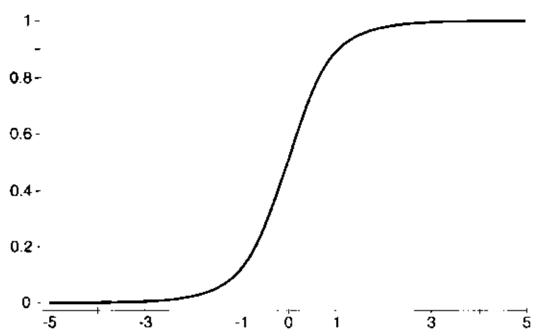
Normaaljaotuse pere esindajana kasutatakse tavaliselt *standardiseeritud normaaljaotust*, st normaaljaotust parameetritega $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$. Standardiseeritud normaaljaotuse *tihedusfunktsiooni* avaldis on

$$f(x\,|\,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-t^2}{2}} \tag{13.5}$$

ja *jaotusfunktsiooni avaldis*

$$F(x\,|\,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt. \tag{13.6}$$

Olgu märgitud, et standardiseeritud normaaljaotuse jaotus- ja tihedusfunktsiooni traditsioonilised tähised on vastavalt $\Phi(x)$ ja $\phi(x)$. Normaaljaotuse jaotusfunktsiooni graafik on esitatud joonisel 13.2.



Joonis 13.2.
Normaaljaotuse jaotusfunktsioon.

Et normaaljaotuse tihedusfunktsiooni arvutamine on päris tülikas ja jaotusfunktsioon ei ole üldse elementaarfunktsioonides avalduv, siis on nende funktsioonide väärtused praktiliseks kasutamiseks tabuleeritud. Standardiseeritud normaaljaotusega juhusliku suuruse X_0 jaotusfunktsiooni $\Phi(x)$ abil on lihtne leida iga teise normaaljaotusega juhusliku suuruse X jaotusfunktsiooni $F(x)$, kasutades punktis 4.4 tuletatud seoseid

$$X_0 = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ ja } X = \sigma X_0 + \mu, \tag{13.7}$$

kus μ ja σ on juhusliku suuruse X keskväärtus ja standardhälve. Siit tuleneb, et

$$F(x) = P(X<x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{13.8}$$

Sarnaselt saame tuletada ka vastassuunalise teisenduse valemi:

$$\Phi(x) = F(\sigma x + \mu). \tag{13.9}$$

13.6. Normaaljaotusega juhusliku suuruse lineaarteisendus

Valem (13.7) näitab tegelikult seda, et

RAKENDADES NORMAALJAOTUSEGA JUHUSLIKULE SUURUSELE LINEAARTEISENDUST, SAAME NORMAALJAOTUSEGA JUHUSLIKU SUURUSE.

Olgu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Defineerime $Y = a + bX$, kus a ja b on suvalised reaalarvud (lihtsuse mõttes eeldame, et $b > 0$). Siis järeldub valemist (13.7), et juhusliku suuruse Y jaotusfunktsioon avaldub X jaotusfunktsiooni kaudu,

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-a}{b}\right). \tag{13.10}$$

Analoogiline seos on leitav ka tihedusfunktsioonide vahel, kuid me esitame selle siin tõestuseta

$$f_Y(x) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{x-a}{b}\right). \tag{13.11}$$

Arvestades keskväärtuse lineaarsuse ja dispersiooni ruuthomogeensuse omadust, saame leida ka juhusliku suuruse Y keskväärtuse ja dispersiooni:

$$EY = a + bEX, \quad DY = b^2 DX$$

ning võime kirjutada $Y \sim \mathcal{N}(a + b\mu, b\sigma)$.

13.7. Normaaljaotusega juhusliku suuruse abil defineeritud sündmuse tõenäosuse leidmine tabeli abil

Normaaljaotuse kohta on koostatud mitmesuguseid tabeleid, kusjuures valdavalt kasutatakse *standardiseeritud normaaljaotust* $\mathcal{N}(0,1)$. Nende tabelite seast on levinuimad *jaotusfunktsiooni* ja *tihedusfunktsiooni* tabelid.

Jaotusfunktsiooni tabel on kasutatav peamiselt kahel eesmärgil:

1^0 sündmuse tõenäosuse leidmiseks,

2^0 kvantiili leidmiseks.

Jaotusfunktsiooni tabel koosneb sisuliselt ainult kahest veerust – neist esimene sisaldab juhusliku suuruse väärtusi x ja teine vastavaid jaotusfunktsiooni väärtusi $\Phi(x)$. Ruumi ökonoomsema kasutamise huvides on tabel tihti esitatud ristkülikukujulisena, kus veeru päis määrab argumendi x viimase kümnendkoha.

Juhusliku suuruse abil määratud sündmuse tõenäosuse arvutamiseks kasutame jaotusfunktsiooni definitsiooni ja valemeid (11.7) ning (11.8), tehes vajaduse korral lineaarteisendusi.

1^0 Olgu juhuslik suurus $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, ning olgu tarvis leida sündmuse $(a < X < b)$ tõenäosus. Siis saame

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \tag{13.12}$$

2^0 Olgu juhuslik suurus $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ ning tuleb leida arvud q_α ja $\bar{q}_\alpha$ nii, et

$$P(X<q_\alpha) = \alpha \text{ ja } P(X>\bar{q}_\alpha) = \alpha,$$

kus α on suvaline etteantud tõenäosus, st reaalarv 0 ja 1 vahel. Otsitavad arvud q_α ja $\bar{q}_\alpha$ on normaaljaotuse $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ α-kvantiil ja α-täiendkvantiil.

Kõigepealt leiame standardiseeritud normaaljaotuse α-kvantiili z_α samast normaaljaotuse jaotusfunktsiooni tabelist, vahetades vaid veerud: argumendiks α võtame jaotusfunktsiooni väärtuse $\Phi(x)$ (kasutades vajadusel ümardamist) ja otsitavaks α-kvantiiliks z_α on siis vastav juhusliku suuruse väärtus. Täiendkvantiili leidmiseks kasutame kvantiili ja täiendkvantiili vahelist seost, mille kohaselt $z_\alpha = \bar{z}_{1-\alpha}$.

Leidmaks standardiseeritud normaaljaotuse kvantiilide z_α ja $\bar{z}_{1-\alpha}$ põhjal normaaljaotuse $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ vastavaid kvantiile q_α ja $\bar{q}_{1-\alpha}$, tuleb veel teha lineaarteisendused

$$q_\alpha = a + b \cdot z_\alpha, \; \bar{q}_{1-\alpha} = a + b \cdot \bar{z}_{1-\alpha} \tag{13.13}$$

◇

Näide 13.1. Olgu teada, et eesti rahvusest noorte neidude keskmine kasv on 165 cm ja kasvu standardhälve 7,5 cm. Eeldame, et kasv on normaaljaotusega.

Olgu tarvis lahendada järgmised ülesanded:

1^0 Leida tõenäosus, et neiu kasv on suurem kui 175 cm.
2^0 Leida jaotuse kvartiilide vahe, st see piirkond (keskväärtuse ümber), kuhu neiu kasv langeb tõenäosusega 0,5.

Esimese ülesande lahendamiseks tuleb meil leida tõenäosus $P(X>175) = P\left(X_0 > \frac{175-165}{7,5}\right) = 1 - \Phi(1,33) = 1 - 0,9082 = 0,092$. Seega on tõenäosus selleks, et neiu pikkus on suurem kui 175 cm, võrdne 0,09.

Teise ülesande lahendamisel leiame $z_{0,25} = -0,675$, $z_{0,75} = 0,675$ ja teeme lineaarteisendused (vt valem (13.13)) $q_{0,25} = 165 - 0,675 \cdot 7,5 = 159,94$, $q_{0,75} = 165 + 0,675 \cdot 7,5 = 170,06$. Siit järeldub, et kvartiilide vaheline piirkond, millesse neiu kasv satub tõenäosusega 0,5, paikneb vahemikus 159,9 kuni 170,1 cm. Seega võime (väikese ümardamisega) kinnitada, et keskmiselt pooled neiud on 160 – 170 cm pikkused.

13.8. Klassikaline piirteoreem

Märkisime käesoleva paragrahvi alguses, et normaaljaotus sobib väga paljude reaalelu nähtuste modelleerimiseks. Püüame käesolevas punktis leida vähemalt ühe põhjuse, miks see jaotus on nii universaalne. Selleks põhjuseks on asjaolu, et normaaljaotus on teatava piirprotsessi *piirjaotuseks.*

Tutvustame kõigepealt veel üht juhuslike suuruste koonduvuse mõistet – jaotuse järgi koonduvust.

DEFINITSIOON 13.2. Me ütleme, et juhuslike suuruste jada $\{X_i\}$ koondub *jaotuse järgi* juhuslikuks suuruseks X, kui jada $F_{X_i}(x)$ koondub arvuks $F_X(x)$ kõigi selliste x väärtuste korral, kus funktsioon $F_X(x)$ on pidev; siin tähistavad F_{X_i} ja F_X vastavalt juhuslike suuruste X_i ja X jaotusfunktsioone.

Jaotuse järgi koonduvust tähistatakse sümboliga $X_i \xrightarrow{L} X$.

Sõnastame nüüd nn *klassikalise piirteoreemi.*

KLASSIKALINE PIIRTEOREEM (1).

Olgu antud binoomjaotusega juhuslike suuruste jada, $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, kus tõenäosus p on fikseeritud ja $n \to \infty$. Defineerime jada Y_n kui vastavate standardiseeritud juhuslike suuruste jada,

$$Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}. \tag{13.14}$$

Siis *koondub jada* Y_n *jaotuse järgi juhuslikuks suuruseks* Y

$$Y_n \xrightarrow{L} Y \tag{13.15}$$

kus Y *on standardiseeritud normaaljaotusega,* $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Et selle teoreemi tõestus on üsna tehniline, siis me seda ei esita. Küll aga lisame mõned kommentaarid.

Koondumisprotsess (13.15) on seda kiirem, mida lähemal on tõenäosus arvule 0,5. Nullilähedase tõenäosuse korral on koondumine väga aeglane, sama on õige ka siis, kui tõenäosus on lähedane arvule 1.

Sellega seoses on kasulik meenutada Poissoni piirteoreemi (vt punkt 8.5), mis toimib just sel juhul, kui p on väike (läheneb nullile) – siis on binoomjaotusega juhuslike suuruste jada piirjaotuseks Poissoni jaotus.

Meenutame, et binoomjaotusega $\mathcal{B}(n,p)$ juhuslik suurus avaldub *n sõltumatu Bernoulli jaotusega juhusliku suuruse* Z_i *summana,*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Järelikult võime piirteoreemi sõnastada ka järgmiselt:

KLASSIKALINE PIIRTEOREEM (1') Ühesuguse Bernoulli jaotusega sõltumatute juhuslike suuruste standardiseeritud summa koondub liidetavate arvu lõpmatul kasvamisel jaotuse järgi standardiseeritud normaaljaotusega juhuslikuks suuruseks.

Edasi tekib küsimus – kui oluline on siin see, et liidetavad juhuslikud suurused on Bernoulli jaotusega? Osutub, et see ei olegi tähtis. Kehtib ka järgmine, mõnevõrra üldisem

KLASSIKALINE PIIRTEOREEM (2). Olgu X_i sõltumatud, ühesuguse jaotusega juhuslikud suurused, millel eksisteerib keskväärtus μ ja dispersioon σ^2. Siis koondub juhuslike suuruste normeeritud summade jada liidetavate arvu lõpmatul suurenemisel jaotuse järgi standardiseeritud normaaljaotuseks,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\xrightarrow{L}Y,\ Y\sim\mathcal{N}(0,1). \qquad (13.15')$$

Märgime, et ka viimati esitatud klassikalise piirteoreemi eeldused ei ole tarvilikud – normaaljaotusega juhuslikuks suuruseks koondub ka *mõõdukalt erinevate jaotustega* juhuslike suuruste jada.

Viimane piirteoreem annabki teatava selgituse sellele tõsiasjale, et paljud praktikas esinevad suurused on küllalt hästi kirjeldatavad normaaljaotuse abil – nimelt on nende juhuslike suuruste väärtused kujunenud suure hulga suhteliselt sõltumatute ja tihti ka küllaltki ühetaoliste mõjurite tulemusena.

Tüüpiliseks näiteks selle kohta on *mõõtmisvead*, mille käsitlemisel normaaljaotus on end hästi õigustanud. Ka paljusid looduslikke protsesse saab normaaljaotuse abil üsna rahuldavalt kirjeldada – näiteks selle kohta on neidude kasv mida vaatlesime eelmises näites. Hästi saab normaaljaotusega lähendada ka neid juhuslikke suurusi, mis on teoreetiliselt küll binoomjaotusega, kuid katsete arv n on väga suur, mistõttu binoomjaotuse kasutamine on tülikas.

13.9. Normaaljaotusega juhuslik vektor

Suur osa normaaljaotuse huvitavatest omadustest ilmneb just siis, kui me käsitleme üheskoos mitut samas elementaarsündmuste ruumis defineeritud normaaljaotusega juhuslikku suurust. Et neid lähemalt uurida, defineerime *normaaljaotusega juhusliku vektori*, piirdudes siin *kahemõõtmelise juhuga* (X,Y) ja tehes veel lihtsustava eelduse, et mõlemad komponendid on standardiseeritud, $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$.

DEFINITSIOON 13.3. Olgu juhusliku vektori X tihedusfunktsioon

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi(1-r^2)}e^{\frac{-(x^2-2rxy+y^2)}{2(1-r^2)}} \qquad (13.16)$$

kus r on reaalarv, $-1<r<1$. Me ütleme, et juhuslik vektor on siis *kahemõõtmelise normaaljaotusega*.

Selgitame jaotusparameetri r tähenduse. On võimalik näidata, et kehtib võrdus

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\cdot xy\,dxdy = r, \qquad (13.17)$$

kus $f_{XY}(x,y)$ avaldub valemiga (13.16).

Et standardiseeritud juhuslike suuruste kovariatsioon langeb ühte korrelatsioonikordajaga, siis järeldub seosest (13.17), et kahemõõtmelise standardiseeritud normaaljaotuse üheks jaotusparameetriks on *komponentidevaheline korrelatsioonikordaja.*

Üldisem normaaljaotusega juhusliku vektori tihedusfunktsiooni kuju esitatakse selle vektori *kovariatsioonimaatriksi abil.* Toome ära ka selle avaldise kahemõõtmelisel juhul

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|}e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})'}, \qquad (13.16')$$

kus $\vec{x} = (x,y)'$, $\vec{\mu} = (EX,EY)'$ ja

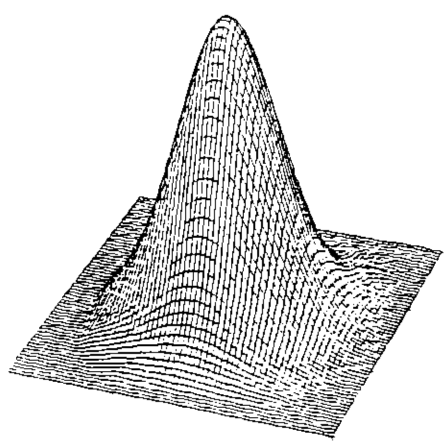
$$\Sigma = \begin{pmatrix} DX & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & DY \end{pmatrix}.$$

Siin A' tähistab maatriksi A transponeerimist, $|A|$ - selle maatriksi determinandi ning A^{-1} – pöördmaatriksi leidmist.

Valem (13.16') on vahetult üldistatav suvalise komponentide arvuga normaaljaotuse juhule.

13.10. Kahemõõtmelise normaaljaotuse omadused

Kahemõõtmelise normaaljaotuse tihedusfunktsiooni graafik on esitatud joonisel 13.3.



Joonis 13.3.
Kahemõõtmelise normaaljaotuse tihedusfunktsioon.

Paneme tähele, et erijuhul, kui korrelatsioonikordaja $r = 0$, muutub tihedusfunktsiooni valemis (13.16) eksponentfunktsiooni argumendis liige $2rxy$ nulliks, mille tulemusena tihedusfunktsioon on teisendatav korrutiseks

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x\,|\,0,1) \cdot f_Y(y\,|\,0,1).$$

Sellest avaldisest aga järeldub (pidevate juhuslike suuruste sõltumatuse tunnuse tõttu, vt valem (11.14)), et X ja Y on sõltumatud.

✧

NORMAALJAOTUSEGA JUHUSLIKU VEKTORI 1. OMADUS. Normaaljaotusega juhusliku vektori puhul järeldub komponentide *mittekorreleeritusest nende sõltumatus.*

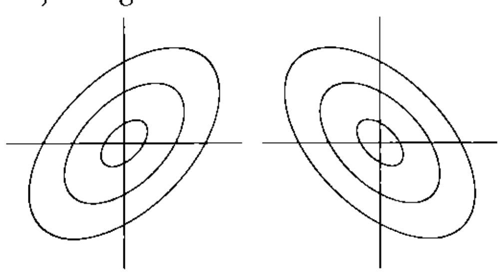
Lisades juurde veel üldkehtiva väite (vt punkt 6.2) – juhuslike suuruste sõltumatusest järeldub nende mittekorreleeritus – saame järelduse

NORMAALJAOTUSE PUHUL ON MITTEKORRELEERITUS JA SÕLTUMATUS SAMAVÄÄRSED.

Teiste jaotuste puhul see omadus üldiselt ei kehti.

Traditsiooniliselt esitatakse kahemõõtmelise jaotuse graafik kolmemõõtmelisena, kus vertikaalteljel on kujutatud tihedusfunktsiooni väärtused, vt joonist 13.3.

Selle tihedusfunktsiooni graafiku lõikamisel $x\backslash y$-tasandiga paralleelsete tasanditega tekivad *ellipsid*, mida nimetatakse *samatiheduse ellipsiteks.* Nende ellipsite kuju on seotud juhuslike suuruste omavahelise korrelatsiooniga. Kui juhuslikud suurused on mittekorreleeritud, siis muutuvad kõik ellipsid ringideks. Mida tugevam on juhuslike suuruste vaheline korrelatsioon, st mida lähemal on korrelatsioonikordaja r absoluutväärtus arvule 1, seda väljaveninum ja kitsam on ellips, vt joonis 13.4. Piiril, kui r saab võrdseks ühega (miinus ühega), langevad X ja Y (või X ja $-Y$) kokku ning kahemõõtmelise vektori jaotus *kõdub juhusliku suuruse jaotuseks.* Ellips taandub sel juhul lõiguks. Ellipsi orientatsioon teljestikus sõltub korrelatsioonikordaja märgist.



Joonis 13.4.
Normaaljaotusega juhusliku vektori samatihedusellipsid.

Teise normaaljaotusega juhusliku vektori omaduse esitame tõestuseta.

NORMAALJAOTUSEGA JUHUSLIKU VEKTORI 2. OMADUS. Normaaljaotusega juhusliku vektori komponentide iga lineaarkombinatsioon

$$Z = aX + bY$$

on normaaljaotusega. Saadud normaaljaotusega juhusliku vektori parameetrid on lihtsalt leitavad, kasutades valemeid (6.3) ja (6.7):

$$EZ = aEX + bEY,$$

$$DZ = a^2DX + b^2DY + 2ab \cdot cov(X, Y). \tag{13.18}$$

Võttes konstantideks $a = 1$, $b = 0$ ja $a = 0$, $b = 1$, saame esitatud omadusest järeldada, et normaaljaotusega juhusliku vektori marginaaljaotused on normaaljaotusega. Vastupidine väide aga üldiselt ei kehti – sellest, et mingi juhusliku vektori komponendid on normaaljaotusega, ei järeldu veel see, et see vektor oleks *mitmemõõtmelise normaaljaotusega*. Põhimõtteliselt on võimalik, et vektori tihedusfunktsioon erineb seosega (13.16) määratust. Siiski ei esine sellist olukorda praktikas eriti tihti.

13.11. Mõõtmisvigade jaotus

Näitena normaaljaotuse rakendamise kohta tutvustame põgusalt *mõõtmisvigade teooriat*, mis on traditsiooniliselt olnud üheks vanimaks normaaljaotuse rakendusvaldkonnaks.

Mõõtmisvigade käsitlemisel lähtutakse järgmistest eeldustest:

1^0 Mõõtmistulemus on normaaljaotusega $\mathcal{N}(a,\sigma)$, kus a on mõõdetava suuruse õige (kuid mõõtjale mitte teada olev) väärtus ja σ — mõõtmistulemuse standardhälve — konstant, mis sõltub mõõtmistingimustest.

2^0 Mõõtmised on põhimõtteliselt korratavad (vastavalt korduvate katsete skeemile), kusjuures üksikmõõtmised on *sõltumatud*.

Siit järeldub, et mõõtmistäpsuse suurendamiseks

TULEB UURITAVAT SUURUST MÕÕTA KORDUVALT NING MÕÕTMISTULEMUSEKS LUGEDA ÜKSIKMÕÕTMISTE ARITMEETILINE KESKMINE.

Arvestades tehtud eeldusi ja punktide 5.11 ja 13.10 tulemusi on ka see aritmeetiline keskmine normaaljaotusega, $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Oletame, et mõõtmistulemused saadakse kaudselt, kusjuures otsitava tulemuse Z leidmiseks kasutatakse lineaarkombinatsiooni $Z = cX + dY$ vahetult mõõdetavatest suurustest X ja Y, mis eelduse kohaselt on normaaljaotusega vastavalt dispersioonidega σ_x^2 ja σ_y^2. Siis saab kaudse mõõtmise täpsust iseloomustava Z dispersiooni σ_z^2 avaldada mõõdetavate suuruste dispersioonide kaudu,

$$\sigma_z^2 = c^2\sigma_x^2 + d^2\sigma_y^2$$

Siinjuures on eeldatud mõõtmistulemuste X ja Y sõltumatust. Kui see eeldus ei ole õigustatud, tuleb kasutada üldkujulist lineaarkombinatsiooni dispersiooni avaldist (13.18).

Erijuhul saame siit mõõtmiste summa ja vahe standardhälbe avaldised:

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2},$$

$$\sigma_{X-Y} = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}.$$

Näide 13.2. Instrumendi mõõtmistäpsus võimaldab teatavat suurust mõõta standardhälbega σ. Nõutav on aga kümme korda väiksem standardhälve. Mitu mõõtmist tuleks selleks korraldada, et saada vajaliku täpsusega tulemust?

Et aritmeetilise keskmise standardhälve on üksikmõõtmise standardhälbest $\sqrt{n}$ korda väiksem, saame otsitava katsete arvu jaoks võrrandi $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,1$, millest järeldub, et katsete arv n peab olema sada.

Näide 13.3. Et teha kindlaks materjali kulu keerulise konfiguratsiooniga anuma jaoks, mõõdeti tema välisruumala V_v (anum üheskoos temas sisalduva ainega) ja siseruumala V_s (anumas sisalduva aine ruumala). Mõlema mõõtmise täpsused on teada, vastavad standardhälbed on σ_v ja σ_s. Nõutakse leida anuma materjali ruumala standardhälve.

Et materjali ruumala V_m arvutatakse mõõtmistulemuste vahena $V_v - V_s$, siis saame standardhälbe jaoks rakendada äsja tuletatud seost: $\sigma_m = \sqrt{\sigma_v^2+\sigma_s^2}$.

13.12. Normaaljaotusega juhuslikud arvud

Tihti on tarvis tekitada normaaljaotusega juhuslikke arve, st saada (kuitahes pikk) jada niisuguseid arve, mis katsetulemustena käsitledes annaksid normaaljaotusele küllalt lähedase empiirilise jaotuse. Arvestades asjaolu, et normaaljaotusega juhusliku suuruse lineaarse teisendamise teel saab tema parameetreid muuta, piisab standardse normaaljaotusega juhuslike arvude genereerimise eeskirjast.

Esitame käesolevas raamatus ühe väga lihtsa eeskirja, mis tugineb klassikalisele piirteoreemile. Nimelt, olgu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ühtlase jaotusega $\mathcal{U}[0,1]$ juhuslikud arvud. Siis $E\alpha_i = \frac{1}{2}$, $D\alpha_i = \frac{1}{12}$ ja nad on sõltumatud. Leiame juhusliku suuruse

$$X = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i - 6.$$

On lihtne kontrollida, et $EX = 0$, $DX = 1$ ja tsentraalse piirteoreemi kohaselt on X jaotus kaunis lähedane normaaljaotusele. Osutub, et paljude praktiliste ülesannete lahendamiseks sobivad sellisel viisil arvutatud normaaljaotusega juhuslikud arvud täielikult.

LISA

Empiiriliste karakteristikute arvutamine sagedustabeli põhjal.

Et empiiriline jaotus on käsiteldav diskreetse jaotusena, mille puhul tõenäosusteks on suhtelised sagedused, siis on empiirilise jaotuse parameetrite arvutamiseks põhimõtteliselt kasutatavad kõik diskreetse jaotuse parameetrite arvutamise valemid. Kui aga on tarvis käsitsi (taskuarvuti abil) leida tabeli abil esitatud tunnuste empiirilisi keskmisi, dispersioone, standardhälbeid, kovariatsioone ja korrelatsiooni kordajaid, siis hõlbustavad sobivalt teisendatud valemid ja korraldatud arvutusskeemid arvutustööd tublisti. Esitame järgnevas need skeemid.

A. Keskmise, dispersiooni ja standardhälbe arvutamine.

Olgu antud juhusliku suuruse X sagedustabel, milles on k erinevat väärtust. Tähistame need $x_1^*, \ldots, x_k^*$, ning olgu j-nda väärtuse esinemissagedus n_j, $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.

Siis on empiirilise keskmise tavaline valem (9.4), milles x_i tähistab i-nda vaatluse tulemust, ümber kirjutatav järgmisel kujul:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot x_j^*. \tag{L.1}$$

Samal viisil saab sageduste abil teisendada dispersiooni valemit:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot x_j^{*2} - n \cdot \bar{x}^2\right). \tag{L.2}$$

Mõlema valemi järgi tehtavad arvutused on sobiv koondada ühisesse tabelisse.

x_j^*	n_j	$n_j \cdot x_j^*$	$n_j \cdot x_j^{*2}$
x_1^*	n_1	$n_1 \cdot x_1^*$	$n_1 \cdot x_1^{*2}$
...	...	...	...
x_k^*	n_k	$n_k \cdot x_k^*$	$n_k \cdot x_k^{*2}$
	n	S_x	S_{x^2}

Tabel L.1.

Tabeli teise veeru summa on valimi maht n, järgmiste veergude summade S_x ja S_{x^2} abil on lihtne arvutada vajalikud statistikud:

$$\bar{x} = \frac{S_x}{n};\ s^2 = \frac{1}{n-1}\left(S_{x^2} - \frac{S_x^2}{n}\right). \qquad \text{(L.3)}$$

Paneme tähele, et kehtib võrdus $n \cdot \bar{x}^2 = \frac{S_x^2}{n}$, kusjuures arvutustäpsuse seisukohast on eelistatuim viimane variant.

Näide L.1. Arvutame näitest 9.2 tunnuse "haridus" keskmise ja dispersiooni. Selleks koostame tabeli L.2, mille esimesed kaks veergu moodustavad uuritava tunnuse sagedustabeli. Järgmistes veergudes paiknevad väärtused arvutatakse esimeste veergude põhjal.

x_j	n_j	$n_j\ x_j$	$n_j\ x_i^2$
0	300	0	0
1	350	350	350
2	330	660	1320
3	100	300	900
	1080	1310	2570

Tabel L.2.

Leiame nüüd uuritava tunnuse keskmise ja dispersiooni valemite (L.3) abil:

$$\bar{x} = \frac{1310}{1080} = 1{,}213\ ,\ s^2 = \frac{1}{1079}\left(2570 - \frac{1310^2}{1080}\right) = \frac{981{,}02}{1079} = 0{,}909.$$

Samal viisil saame arvutada ka tunnuse "vanus" keskmise ja dispersiooni:

y_j^*	n_j	$n_j\ y_j^*$	$n_j \cdot y_j^{*2}$
6	30	180	1080
7	185	1295	9065
8	275	2200	17600
9	279	2511	22599
10	209	2090	20900
11	72	792	8712
12	19	228	2736
13	11	143	1859
	1080	9439	84551

Tabel L.3.

Valemite (L.3) põhjal leiame:

$$\bar{y} = \frac{9439}{1080} = 8{,}74\,;\; s_y^2 = \frac{1}{1079}\left(84551 - \frac{9439^2}{1080}\right) = \frac{2055{,}89}{1079} = 1{,}905.$$

B. Kovariatsiooni ja korrelatsioonikordaja arvutamine

Korrelatsioonikordaja arvutamiseks on samuti otstarbekas põhivalemit pisut teisendada. Kõigepealt teeme teisenduse, mis on sarnane dispersiooni alternatiivse arvutusvalemi (9.5) tuletamisega:

$$\tilde{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}}. \tag{L.4}$$

Olgu lähteandmed antud sagedustabelina, kus X omab k ja Y vastavalt l väärtust ning sündmuse $(X = x_j^*,\, Y = y_g^*)$ sagedus on n_{jg}, kusjuures loomulikult $\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=1}^{l} n_{jg} = n$. Siis on saadud valem esitatav järgmisel kujul, mis on valemist (9.6) küll formaalselt keerukam, kuid tegelikul kasutamisel siiski märksa ökonoomsem, eriti siis, kui n on suur ning k ja l suhteliselt väikesed:

$$\tilde{r} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=1}^{l} n_{jg}\, x_j^*\, y_g^* - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} n_{j\cdot}\cdot x_j^{*2} - n\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\sum_{g=1}^{l} n_{\cdot g}\, y_g^{*2} - n\bar{y}^2}}. \tag{L.5}$$

Viimase valemi kasutamiseks on sobiv risttabelist saadud andmed paigutada alljärgneva tabeli kolme esimesse veergu. Neljas veerg arvutatakse kolme esimese veeru väärtuste korrutisena:

x_j^*	y_g^*	n_{jg}	$n_{jg}\, x_j^*\, y_g^*$
x_1^*	y_1^*	n_{11}	$n_{11}\, x_1^*\, y_1^*$
...	...	...	...
x_k^*	y_l^*	n_{kl}	$n_{kl}\cdot x_k^*\cdot y_l^*$
		n	S_{xy}

Tabel L.4.

Saadud tabelit ja üksiktunnuste parameetrite arvutamise tabeleid 2 ja 3 kasutades saame empiirilise kovariatsiooni cov' jaoks lihtsa avaldise:

$$cov = \frac{1}{n-1}\left(S_{xy} - \frac{S_x\ S_y}{n}\right). \tag{L.6}$$

Et avaldada empiirilist korrelatsioonikordajat, peame kovariatsiooni jagama standardhälvete korrutisega. Et ülearuseid korrutamisi ja jagamisi vältida, kasutame võimalikult palju tabelitest vahetult leitud summasid:

$$\bar{r} = \frac{S_{xy} - \dfrac{S_x\ S_y}{n}}{\sqrt{S_{x^2} - \dfrac{S_x^2}{n}} \cdot \sqrt{S_{y^2} - \dfrac{S_y^2}{n}}}. \tag{L.7}$$

Näide L.2. Arvutame nüüd empiirilise korrelatsioonikordaja samast näitest:

Selleks moodustame järgmise tabeli:

x_j	y_g'	n_{jg}	$n_{jg}\ x_j' \cdot y_g'$
0	6	30	0
0	7	150	0
0	8	100	0
0	9	18	0
0	10	2	0
1	7	35	245
1	8	170	1360
1	9	115	1035
1	10	23	230
1	11	7	77
2	8	5	80
2	9	142	2556
2	10	148	2960
2	11	30	660
2	12	3	72
2	13	2	52
3	9	4	108
3	10	36	1080
3	11	35	1155
3	12	16	576
3	13	9	351
		1080	12597

Tabel L.5.

Saadud andmete põhjal on lihtne leida empiiriline kovariatsioon:

$$cov' = \frac{1}{1079} \cdot \left(12597 - \frac{1310 \cdot 9439}{1080} \right) = \frac{1147,84}{1079} = 1,064.$$

Korrelatsioonikordaja leiame, kasutades valemit (L.7)

$$\tilde{r} = \frac{1147,84}{\sqrt{981,02 \ 2055,89}} = \frac{1147,84}{1420,15} = 0,808$$

SISUKORD

III PIDEV TÕENÄOSUSRUUM

LISA