Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Laura Kaldjärv

Südamlikud integraalvõrrandid

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Urve Kangro, PhD

Tartu 2019

Südamlikud integraalvõrrandid

Bakalaureusetöö
Laura Kaldjärv

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse südamlikke integraaloperaatoreid, vastavaid integraalvõrrandeid ning nende lahendamist ligikaudselt polünoomide ja astmeridade abil. Töö üks põhieesmärkidest on kirjeldada südamlike integraaloperaatorite spektrit. Töös tuuakse ka mõned näited südamlikest integraaloperaatoritest ja nende spektrist. Töö põhineb Gennadi Vainikko artiklil "Cordial Volterra Integral Equations 1".
CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: integraalvõrrandid, integraaloperaatorid, omaväärtused, Banachi algebrad.

Cordial Volterra Integral Equations

Bachelor's thesis
Laura Kaldjärv

Abstract. This Bachelor's thesis focuses on the cordial Volterra integral operators, corresponding integral equations and polynomial approximation of the solution. Also we study solving those equations via power series. One of the main purposes of the thesis is to describe the spectrum of cordial Volterra integral operators. The subject is illustrated by some examples of those operators and their spectrum. The thesis is based on the article "Cordial Volterra Integral Equations 1"by Gennadi Vainikko.
CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
Key words: integral equations, integral operators, eigenvalues, Banach algebras.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse lähemalt südamlikke integraaloperaatoreid, nende spektrit ja südamlikke integraalvõrrandeid. See südamlikke integraaloperaatoreid käsitlev töö on enamjaolt referatiivne ning põhineb Gennadi Vainikko 2009. aastal avaldatud artiklil "Cordial Volterra Integral Equations 1" [1]. Paragrahv 3 põhineb enamjaolt Walter Rudini teosel "Functional Analysis" [2]. Antud töö eesmärgiks on anda selgitusi Gennadi Vainikko artiklile ja lihtsustada seeläbi lugeja artiklist arusaamist.

Töö koosneb kaheksast osast. Esimeses osas esitatakse südamliku integraaloperaatori V_φ mõiste ja tuuakse paar näidet tuumadest, mis genereerivad südamliku integraaloperaatori. Antakse ka südamlike integraalvõrrandite lahendi leidmise skeem.

Teises osas koostatakse Banachi algebra, mis oleks isomeetriliselt isomorfne südamlike integraaloperaatorite Banachi algebraga. Samuti laiendatakse mõlemad Banachi algebrad ühikelemendiga Banachi algebrateks.

Töö kolmandas osas vaadeldakse multiplikatiivseid lineaarfunktsionaale ja nende omadusi, mille abil on võimalik südamliku integraaloperaatori spektrile anda mugav kuju. Tuuakse ka välja, et spekter koosneb südamliku integraaloperaatori omaväärtustest.

Neljandas osas näidatakse, et südamliku integraaloperaatori V_φ spekter ruumis $\mathscr{L}(C[0,T])$ on samaväärne eespool loodud ühikelemendiga Banachi algebra elemendi spektriga.

Viiendas osas vaadeldakse südamliku integraaloperaatori V_φ spektrit ruumis $\mathscr{L}(C^m[0,T])$ ning näidatakse, et kui võrrandi $\mu v = V_{\varphi_m} v + f^{(m)}$ lahendiks on $v \in C[0,T]$, siis võrrandil $\mu u = V_\varphi u + f$ leidub ühene lahend $u \in C^m[0,T]$, nii et $u^{(m)} = v$.

Kuuendas osas vaadeldakse uuesti esimeses osas sisse toodud näiteid ning leitakse nende südamlike integraaloperaatorite omaväärtused ning spektrid.

Töö seitsmendas osas vaadeldakse südamliku integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist polünoomide abil ning näidatakse lahendi leidmise meetod.

Kaheksandas osas tõestatakse teoreem, mis ütleb, et kui funktsiooni f on võimalik arendada astmereaks, siis südamlikul integraalvõrrandil $\mu u = V_\varphi u + f$ on ruumis $C^\infty[0,T]$ üks lahend ning antakse selle lahendi kuju.

Gennadi Vainikko artiklil "Cordial Volterra Integral Equations 1" on ilmunud ka järg "Cordial Volterra Integral Equations 2"[3], kus vaadeldakse südamlikke integraalvõrrandeid üldisemal kujul.

1 Südamlikud integraaloperaatorid ja -võrrandid

Antud peatükk põhineb peamiselt allikal [1], Definitsioonid $2-6$ on allikast [2]. Selleks, et edaspidises töös saaksime uurida südamlikke integraalvõrrandeid, toome esmalt sisse järgmise mõiste.

Definitsioon 1. *Me nimetame Volterra integraaloperaatorit $V_\varphi : C[0,T] \to C[0,T]$ kujul*

$$(V_\varphi u)(t) = \int_0^t t^{-1}\varphi(s/t)u(s)ds, \quad 0 \le t \le T, \quad T \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L^1(0,1) \quad (1)$$

südamlikuks ja funktsiooni φ tema südamikuks.

Kasutades muutujavahetust $x = s/t, \quad dx = t^{-1}ds$, saame südamliku integraaloperaatori esitada ka kujul

$$(V_\varphi u)(t) = \int_0^1 \varphi(x)u(xt)dx. \quad (2)$$

Järgmise teoreemiga näitame, et integraaloperaator V_φ on korrektselt defineeritud.

Teoreem 1. *Olgu $\varphi \in L^1(0,1)$. Südamlik integraaloperaator V_φ, st operaator kujul (1), on kujutis ruumist $C[0,T]$ ruumi $C[0,T]$ ning on tõkestatud hulgal $C[0,T]$,*

$$\left\|V_\varphi\right\|_{C[0,T]\to C[0,T]} = \|\varphi\|_1 \quad (3)$$

$$\left\|\lambda I - V_\varphi\right\|_{C[0,T]\to C[0,T]} = |\lambda| + \|\varphi\|_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Tõestus. Võtame funktsiooni $u \in C[0,T]$ ja vaatleme selle pidevuse moodulit

$$\omega(\delta; u) = \sup\{\left|u(t_1) - u(t_2)\right| : 0 \le t_1, t_2 \le T, |t_1 - t_2| \le \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Kasutades (1) ja u pidevuse moodulit, saame

$$\omega(\delta; V_\varphi u) = \sup\left\{\left|(V_\varphi u)(t_1) - (V_\varphi u)(t_2)\right| : 0 \le t_1, t_2 \le T, |t_1 - t_2| \le \delta\right\}$$

$$= \sup\left\{\left|\int_0^1 \varphi(x)[u(t_1x) - u(t_2x)]dx\right| : 0 \le t_1, t_2 \le T, 0 \le x \le 1, |t_1 - t_2| \le \delta\right\}$$

$$\le \int_0^1 \left|\varphi(x)\right| dx \sup\{\left|u(t_1x) - u(t_2x)\right| : 0 \le t_1, t_2 \le T, 0 \le x \le 1, |t_1 - t_2| \le \delta\}$$

$$\le \|\varphi\|_1 \, \omega(\delta; u) \to 0, \quad \text{kui} \quad \delta \to 0.$$

Seega V_φ kujutab pidevad funktsioonid pidevateks.
Tõestamaks (3) näitame esmalt ühtpidi võrratuse. Selleks on meil vaja normi $\|u\|_\infty$, mis on defineeritud järgmiselt

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{C[0,T]} = \max_{0\le t\le T}\left|u(t)\right|.$$

Seega

$$\begin{aligned}
\left\|V_\varphi\right\|_{C[0,T]\to C[0,T]} &= \sup_{\|u\|_\infty=1}\left\|V_\varphi u\right\|_\infty \\
&= \sup_{\|u\|_\infty=1}\max_{0\le t\le T}\left|(V_\varphi u)(t)\right| \\
&= \sup_{\|u\|_\infty=1}\max_{0\le t\le T}\left|\int_0^1 \varphi(s)u(st)ds\right| \\
&\le \sup_{\|u\|_\infty=1}\int_0^1\left|\varphi(s)\right|\max_{0\le t\le T}\left|u(st)\right|ds \\
&\le \int_0^1\left|\varphi(s)\right|ds = \|\varphi\|_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda I - V_\varphi\right\|_{C[0,T]\to C[0,T]} &\le \|\lambda I\|_{C[0,T]\to C[0,T]} + \left\|V_\varphi\right\|_{C[0,T]\to C[0,T]} \\
&\le \sup_{\|u\|_\infty=1}\|\lambda u\|_\infty + \|\varphi\|_1 \\
&\le |\lambda| + \|\varphi\|_1
\end{aligned}$$

Tõestamaks (3) ja (4) peame näitama veel vastupidised võrratused. Lähendame φ polünoomide φ_n abil nii, et $\|\varphi-\varphi_n\|_1 \le \dfrac{1}{n}$ ja Re φ_n ja Im φ_n ei ole korraga võrdsed nulliga. Võtame

$$u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\left|\varphi_n(t)\right|}{\varphi_n(t)}, & \text{kui } 0 \le t \le \min\{1,T\} \\ \dfrac{\left|\varphi_n(1)\right|}{\varphi_n(1)}, & \text{kui } \min\{1,T\} \le t \le T \end{cases}$$

Ilmselt $u_n \in C[0,T]$ ja

$$\|u_n\|_\infty = \max_{0\le t\le T}\left|u_n(t)\right| = \max_{0\le t\le T}\left|\frac{\left|\varphi_n(t)\right|}{\varphi_n(t)}\right| = \max_{0\le t\le T} 1 = 1.$$

Saame, et kui $n \to \infty$, siis

$$\begin{aligned}(V_\varphi u_n)(1) &= (V_\varphi u_n - V_{\varphi_n} u_n)(1) + \int_0^1 \varphi_n(s) u_n(s) ds \\ &= \int_0^1 (\varphi - \varphi_n)(x) u_n(x) dx + \int_0^1 \varphi_n(s) \frac{\left|\varphi_n(s)\right|}{\varphi_n(s)} ds \to \int_0^1 \left|\varphi(s)\right| ds = \|\varphi\|_1\end{aligned}$$

ja seega $\left\|V_\varphi\right\|_{C[0,T]\to C[0,T]} \geq \|\varphi\|_1$. Seega on tõestatud (3).

Kui $\lambda = 0$, siis (4) langeb kokku (3). Olgu $\lambda \neq 0$ ja $T \geq 1$. Olgu jälle $u_n(t) = \dfrac{\left|\varphi_n(t)\right|}{\varphi_n(t)}$, kui $0 \leq t \leq 1 - \dfrac{1}{n}$, kuid nüüd $u_n(t) = \dfrac{|\lambda|}{\lambda}$, kui $1 \leq t \leq T$ ja defineerime $u_n(t)$ vahemikus $1 - \dfrac{1}{n} < t < 1$ nii, et kehtiks ikka $u_n \in C[0,T]$, $\|u_n\|_\infty = 1$. Siis

$$\begin{aligned}\lambda u_n(1) + (V_\varphi u_n)(1) &= |\lambda| + (V_\varphi u_n - V_{\varphi_n} u_n)(1) + \int_0^1 \varphi_n(s) u_n(s) ds \\ &\to |\lambda| + \int_0^1 \left|\varphi(s)\right| ds = |\lambda| + \|\varphi\|_1, \text{ kui } n \to \infty.\end{aligned}$$

Järelikult $\left\|\lambda I - V_\varphi\right\|_{C[0,T]\to C[0,T]} \geq |\lambda| + \|\varphi\|_1$ ja seega on tõestatud ka (4). $\square$

Definitsioon 2. *Tähistagu $BC(0,T]$ intervallil $(0,T]$ tõkestatud pidevate funktsioonide ruumi, mis on varustatud supreemumnormiga, st*

$$\|x\| = \sup_{0<t\leq T} \left|x(t)\right|.$$

Lause 1. *Südamlik integraaloperaator V_φ kujul (1) võib ka tegutseda ruumis $BC(0,T]$, $V_\varphi : BC(0,T] \to BC(0,T]$ on tõkestatud operaator.*

Tõestus. Näitame, et operaator V_φ viib intervallis $(0,T]$ pidevad funktsioonid pidevateks. Fikseerime $t_0 \in (0,T]$. Saame võtta $\delta_0 < t_0$, nii et $\int_0^{\delta_0} \left|\varphi(x)\right| dx$

oleks piisavalt väike, $t > \dfrac{\delta_0}{2}$ ning vaatleme

$$
\begin{aligned}
&\big|(V_\varphi u)(t_0) - (V_\varphi u)(t)\big| = \left|\int_0^1 \varphi(x)\,\big(u(t_0x) - u(tx)\big)\,dx\right| \\
&\leq \int_0^1 \big|\varphi(x)\big|\big|u(t_0x) - u(tx)\big|\,dx \\
&= \int_0^{\delta_0} \big|\varphi(x)\big|\big|u(t_0x) - u(tx)\big|\,dx + \int_{\delta_0}^1 \big|\varphi(x)\big|\big|u(t_0x) - u(tx)\big|\,dx \\
&\leq 2M \int_0^{\delta_0} \big|\varphi(x)\big|\,dx + \int_{\delta_0}^1 \big|\varphi(x)\big|\,dx \sup\{\big|u(t_0x) - u(tx)\big| : \delta_0 \leq x \leq 1\}
\end{aligned}
$$

Kuna $u \in BC(0,T]$, siis on u tõkestatud ja leidub selline $M > 0$, et $\big|u(t)\big| \leq M$, $\forall t \in (0,T]$. Kuna u on pidev $[\delta_0, 1]$, siis on ka ühtlaselt pidev, seega supreemum läheneb nullile, kui t on t_0 piisavalt lähedal. Kuna φ on integreeruv, siis $\delta_0 \to 0$ korral läheneb ka viimane summa nullile. Järelikult $V : BC(0,T] \to BC(0,T]$ kujutab kõik pidevad funktsioonid pidevateks. $\square$

Olgu meil Volterra integraaloperaator $(Vu)(t) = \displaystyle\int_0^t K(t,s)u(s)ds$. Vaatleme näitena mõnda sellise integraaloperaatori tuuma $K(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, mis genereerib südamliku integraaloperaatori V_φ.

Näide 1. Olgu tuumaks $K(t,s) = t^{-\beta}s^{\beta-1}$, $\beta > 0$. Sel juhul integraaloperaator on kujul

$$
\begin{aligned}
(V_\varphi u)(t) &= \int_0^t t^{-\beta}s^{\beta-1}u(s)ds = \int_0^t t^{-1}t^{-\beta+1}s^{\beta-1}u(s)ds \\
&= \int_0^t t^{-1}\left(s/t\right)^{\beta-1}u(s)ds,
\end{aligned}
$$

kus südamikuks on funktsioon $\varphi(s) = s^{\beta-1}$.

Näide 2. Olgu tuumaks $K(t,s) = t^{\alpha-1}(t-s)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Siis integraaloperaator on kujul

$$
\begin{aligned}
(V_\varphi u)(t) &= \int_0^t t^{\alpha-1}(t-s)^{-\alpha}u(s)ds = \int_0^t t^{\alpha-1}t^{-\alpha}(1-s/t)^{-\alpha}u(s)ds \\
&= \int_0^t t^{-1}(1-s/t)^{-\alpha}u(s)ds,
\end{aligned}
$$

kus südamikuks on funktsioon $\varphi(s) = (1-s)^{-\alpha}$.

Näide 3. Olgu tuumaks $K(t,s) = (t^\gamma - s^\gamma)^{-1/\gamma}$, $0 < \gamma < \infty$. Sel juhul integraaloperaator on kujul

$$\begin{aligned}(V_\varphi u)(t) &= \int_0^t (t^\gamma - s^\gamma)^{-1/\gamma} u(s)ds = \int_0^t t^{-\gamma/\gamma}(1-(s/t)^\gamma)^{-1/\gamma} u(s)ds \\ &= \int_0^t t^{-1}(1-(s/t)^\gamma)^{-1/\gamma} u(s)ds,\end{aligned}$$

kus südamikuks on funktsioon $\varphi(s) = (1-s^\gamma)^{-1/\gamma}$.

Vaatleme nüüd südamlikke integraalvõrrandeid, st integraalvõrrandeid kujul

$$\mu u = V_\varphi u + f, \quad \mu \neq 0, \quad \varphi \in L^1(0,1), \tag{5}$$

kus $V_\varphi u$ on südamlik integraaloperaator ning $f \in C^m[0,T]$, $m \geq 0$. Otsime integraalvõrrandi (5) lahendit $u \in C^m[0,T]$. Antud integraalvõrrandile (5) saame anda kuju

$$(\mu I - V_\varphi)u = f, \quad \mu \neq 0, \quad \varphi \in L^1(0,1). \tag{6}$$

Näeme, et kui leiduks $(\mu I - V_\varphi)^{-1}$, siis võrrandi (5) lahendi saaksime avaldada kujul

$$u = (\mu I - V_\varphi)^{-1} f. \tag{7}$$

Seda, milliste $\mu \in \mathbb{C}$ korral operaatoril $\mu I - V_\varphi$ leidub pöördoperaator, saame teada, uurides integraaloperaatori V_φ spektrit. Toome esmalt sisse spektri mõiste.

Definitsioon 3. *Olgu X ja Y topoloogilised vektorruumid. $\mathcal{B}(X,Y)$ tähistab kõigi tõkestatud lineaarsete kujutuste $T: X \to Y$ kogumit. $\mathcal{B}(X,X)$ võime tähistada kujul $\mathcal{B}(X)$.*

Definitsioon 4. *Operaator $A \in \mathcal{B}(X)$ on pööratav, kui leidub $S \in \mathcal{B}(X)$ nii, et*

$$SA = I = AS,$$

kus $I \in \mathcal{B}(X)$ tähistab ühikoperaatorit. Sel juhul kirjutame $S = A^{-1}$.

Definitsioon 5. *Operaatori $A \in \mathcal{B}(X)$ spektriks $\sigma(A)$ nimetatakse selliste skalaaride $\lambda \in \mathbb{C}$ hulka, mille korral operaator $A - \lambda I$ ei ole pööratav.*

Seega peame uurima lähemalt integraaloperaatori V_φ spektrit $\sigma(V_\varphi)$, sest kui $\mu \notin \sigma(V_\varphi)$, siis leidub operaatoril $\mu I - V_\varphi$ pöördoperaator ja integraalvõrrandi (5) lahend u on leitav võrdusega (7).

Definitsioon 6. *Olgu $A \in \mathcal{B}(X)$ operaator ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Kui $A - \lambda I$ ei ole injektiivne, siis öeldakse, et λ on A omaväärtus. Elementi $x \in X$ nimetatakse A omavektoriks(omafunktsiooniks), kui x rahuldab võrrandit*

$$Ax = \lambda x.$$

Märkus 1. Paneme tähele, et kui $\lambda \in \mathbb{C}$ on operaatori A omaväärtus, siis $A - \lambda I$ pole injektiivne, millest saame, et operaator $A - \lambda I$ ei ole pööratav. Seetõttu operaatori A spekter sisaldab alati kõiki A omaväärtusi. Vastupidine väide ei ole enamasti tõene.

2 Isomeetriliselt isomorfsed Banachi algebrad

Järgnev põhineb allikal [1]. Selgub, et südamlike integraaloperaatorite klass moodustab kommutatiivse Banachi algebra, korrutamisena sellel algebral vaatame operaatorite kompositsiooni.

Definitsioon 7. *Kompleksne algebra on vektorruum A üle kompleksarvude hulga $\mathbb{C}$, kus korrutamine on defineeritud nii, et kehtib*

1. $x(yz) = (xy)z$,
2. $(x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz$,
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

iga $x, y, z \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ korral.

Kui A on lisaks Banachi ruum, kus korrutise norm rahuldab võrratust

4. $\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad (x \in A, y \in A)$

siis kutsutakse ruumi A Banachi algebraks.

Eelmises peatükis tõime välja, et võrrandi (5) lahendi leidmiseks peame lähemalt uurima operaatori V_φ spektrit. Selleks koostame esmalt Banachi algebra, mille spektrit on lihtsam uurida. Järgmise teoreemi abil tekitame kommutatiivse Banachi algebra, mis oleks isomeetriliselt isomorfne meie südamlike integraaloperaatorite Banachi algebraga.

Definitsioon 8. *Olgu X ja Y Banachi algebrad. Lineaarset sürjektsiooni $A : X \to Y$ nimetatakse isomeetriliseks isomorfismiks, kui*

$$A(xy) = A(x)A(y) \quad \textit{iga } x, y \in X \textit{ korral}$$

ja

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

Kui leidub isomeetriline isomorfism $A : X \to Y$, siis öeldakse, et Banachi algebrad X ja Y on isomeetriliselt isomorfsed.

Teoreem 2. *Olgu $\varphi, \psi \in L^1(0,1)$. Siis $V_\varphi V_\psi = V_{\varphi\star\psi}$, kus $\varphi \star \psi \in L^1(0,1)$ on defineeritud*

$$(\varphi \star \psi)(s) = \int_s^1 t^{-1}\varphi(t)\psi(s/t)dt, \quad 0 < s < 1. \tag{8}$$

Kehtivad

$$\varphi \star \psi = \psi \star \varphi \tag{9}$$

$$\|\varphi \star \psi\|_1 \le \|\varphi\|_1 \|\psi\|_1 \tag{10}$$

Tõestus. Arvestades (1) saame

$$\begin{aligned}
(V_\varphi V_\psi u)(t) &= \int_0^t t^{-1}\varphi(s/t)(V_\psi u)(s)ds \\
&= \int_0^t t^{-1}\varphi(s/t)\left(\int_0^s s^{-1}\psi(s'/s)u(s')ds'\right)ds \\
&= \int_0^t t^{-1}\left(\int_{s'}^t s^{-1}\varphi(s/t)\psi(s'/s)ds\right)u(s')ds'.
\end{aligned}$$

Viimasel sammul vahetasime integreerimise järjekorra, mida me saime teha, sest mõlemad integraalid koonduvad absoluutselt.
Tähistame

$$\beta(t, s') := \int_{s'}^t s^{-1}\varphi(s/t)\psi(s'/s)ds.$$

Nüüd $c > 0$ korral kehtib

$$\begin{aligned}
\beta(ct, cs') &= \int_{cs'}^{ct} s^{-1}\varphi(s/ct)\psi(cs'/s)ds \\
&= \int_{s'}^t \tau^{-1}\varphi(\tau)\psi(s'/\tau)d\tau = \beta(t, s'),
\end{aligned}$$

kus kasutasime muutujavahetust $s = c\tau, ds = cd\tau$. Seega näitasime, et $\beta(t, s')$ sõltub tegelikult suhtest s'/t, mistõttu $\beta(t, s') = \beta(1, s'/t) =: \gamma(s'/t)$.
Nüüd kuna

$$(\varphi \star \psi)(s') = \int_{s'}^1 s^{-1}\varphi(s)\psi(s'/s)ds = \beta(1, s') = \gamma(s'),$$

siis

$$(V_\varphi V_\psi u)(t) = \int_0^t t^{-1}\gamma(s'/t)u(s')ds' = (V_\gamma u)(t) = (V_{\varphi\star\psi}u)(t).$$

Järgmiseks näitame, et kehtib (9). Selleks kasutame muutujavahetust $x = s/t, dx = -st^{-2}dt$.

$$\begin{aligned}(\varphi\star\psi)(s) &= \int_s^1 t^{-1}\varphi(t)\psi(s/t)dt \\ &= -\int_1^s x^{-1}\varphi(s/x)\psi(x)dx \\ &= \int_s^1 x^{-1}\varphi(s/x)\psi(x)dx = (\psi\star\varphi)(s).\end{aligned}$$

Näidata on veel jäänud võrratus (10). Norm $\|\varphi\|_1$ on defineeritud järgmiselt

$$\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 \left|\varphi(s)\right| ds.$$

Paneme esmalt tähele, et

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\varphi\star\psi)(s)ds &= \int_0^1 \left(\int_s^1 t^{-1}\varphi(t)\psi(s/t)dt\right) ds \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t \psi(s/t)ds\right) t^{-1}\varphi(t)dt \\ &= \int_0^1 \left(t\int_0^1 \psi(x)dx\right) t^{-1}\varphi(t)dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi(x)dx\right) \varphi(t)dt \\ &= \int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^1 \psi(x)dx,\end{aligned}$$

kus kasutasime muutujavahetust $x = s/t, dx = t^{-1}ds$.
Kuna

$$\left|\int_s^1 t^{-1}\varphi(t)\psi(s/t)dt\right| \le \int_s^1 t^{-1}\left|\varphi(t)\right|\left|\psi(s/t)\right| dt$$

ehk $\big|(\varphi \star \psi)(s)\big| \le (|\varphi| \star |\psi|)(s)$, siis

$$\begin{aligned}\|\varphi \star \psi\|_1 &= \int_0^1 \big|(\varphi \star \psi)(s)\big|\, ds \le \int_0^1 (|\varphi| \star |\psi|)(s) ds \\ &= \int_0^1 \big|\varphi(s)\big|\, ds \int_0^1 \big|\psi(s)\big|\, ds = \|\varphi\|_1 \|\psi\|_1 ,\end{aligned}$$

mis tõestab (10). Nüüd võrratuse (10) põhjal $\|\varphi \star \psi\|_1 \le \|\varphi\|_1 \|\psi\|_1 < \infty$, seega $\varphi \star \psi \in L^1(0,1)$. □

Ruum $L^1(0,1)$ on koos korrutisoperaatoriga (8) on Banachi ruum. Võrdus (9) annab meile, et ruum on kommutatiivne ja võrratus (10), et kehtib korrutise normi võrratus, seega ruum $L^1(0,1)$ koos korrutisoperaatoriga (8) on kommutatiivne Banachi algebra.

Võrduse $V_\varphi V_\psi = V_{\varphi \star \psi}$ ja (3) põhjal on algebra $(L^1(0,1), \star)$ isomeetriliselt isomorfne kommutatiivse südamlike integraaloperaatorite Banachi algebraga. Need algebrad ei sisalda ühikelementi. Tõesti, kui mingi $\psi \in L^1(0,1)$ oleks ühikelement, st $\psi \star \varphi = \varphi$, siis $\varphi \equiv 1$ korral (8) põhjal saame, et $\int_s^1 t^{-1}\psi(t)dt = 1$, $0 < s < 1$ ning diferentseerimise tulemusena saame $\psi \equiv 0$, mis on vastuolus ühikelemendi omadustega. Kuna $(L^1(0,1), \star)$ ei sisalda ühikelementi, siis ka isomeetriliselt isomorfses Banachi algebras ei ole ühikelementi.

Laiendame meie Banachi algebrad ühikelemendiga Banachi algebrateks. Tähistame tähega $\mathcal{B}$ laiendatud kommutatiivse Banachi algebra, mis koosneb operaatoritest kujul $\lambda I + V_\varphi$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in L^1(0,1)$ ja on operaatori normiga (4). Veelgi, tähistame tähega $\mathcal{A}$ laiendatud kommutatiivset Banachi algebra, mis koosneb elementidest $\lambda e + \varphi$, kus $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in L^1(0,1)$ ja e on lisatud ühikelement. Tehted ruumis $\mathcal{A}$ defineerime järgmiselt

$$(\lambda e + \varphi) + (\mu e + \psi) = (\lambda + \mu)e + (\varphi + \psi),$$

$$\mu(\lambda e + \varphi) = (\mu\lambda)e + \mu\varphi,$$

$$(\lambda e + \varphi) \star (\mu e + \psi) = (\lambda\mu)e + (\lambda\psi + \mu\varphi + \varphi \star \psi),$$

ja jäljendades (4) defineerime normi $\|\lambda e + \varphi\|_{\mathcal{A}} = |\lambda| + \|\varphi\|_1$. Seega $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on ikka isomeetriliselt isomorfsed.

Ruumide $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kontekstis vaatleme veel mõnesid ühikelemendiga kommutatiivse Banachi algebra mõisteid.

Definitsioon 9. *Element* $\lambda e + \varphi \in \mathcal{A}$ *on pööratav hulgas* $\mathcal{A}$*, kui eksisteerib element* $\mu e + \psi \in \mathcal{A}$ *nii, et* $(\lambda e + \varphi) \star (\mu e + \psi) = e$.

Definitsioon 10. *Elemendi* $\varphi \in L^1(0,1)$ *spekter* $\sigma_{\mathcal{A}}(\varphi)$ *on hulk kompleksta- sandil, defineeritud kui*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - \varphi \text{ ei ole pööratav hulgas } \mathcal{A}\}.$$

Sarnaselt defineerime

$$\sigma_{\mathcal{B}}(V_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - V_\varphi \text{ ei ole pööratav hulgas } \mathcal{B}\},$$

kus vaatleme operaatorit V_φ *ruumis* $C[0,T]$ *või* $BC(0,T]$.

Kuna ruumid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on isomeetriliselt isomorfsed, siis ka

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\varphi) = \sigma_{\mathcal{B}}(V_\varphi). \tag{11}$$

3 Multiplikatiivsed lineaarfunktsionaalid

Antud peatükk põhineb peamiselt allikal [2]. Ruumide $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ spektrite paremaks kirjeldamiseks toome sisse järgmise hulga. Olgu $\mathscr{M}_{\mathcal{A}}$ hulk, mis sisaldab kõiki nullist erinevaid multiplikatiivseid lineaarfunktsionaale hulgal $\mathcal{A}$.

Definitsioon 11. *[1] Lineaarfunktsionaal M hulgal $\mathcal{A}$ on multiplikatiivne ehk M on hulga $\mathcal{A}$ kompleksne homomorfism, kui*

$$M((\lambda e+\varphi)\star(\mu e+\psi)) = M(\lambda e+\varphi)M(\mu e+\psi), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \varphi,\psi \in L^1(0,1). \tag{12}$$

Paneme tähele, et $M \in \mathscr{M}_{\mathcal{A}}$ korral

$$M(e) = M(e \star e) = M(e)M(e),$$

mistõttu $M(e) = 1$. Samuti, kui $x \in \mathcal{A}$ on pööratav, siis

$$M(x)M(x^{-1}) = M(xx^{-1}) = M(e) = 1,$$

mistõttu $M(x) \neq 0$. Seda, et multiplikatiivne lineaarfunktsionaal on alati pidev, näitame järgmise teoreemi abil.

Teoreem 3. *Olgu $\mathcal{A}$ Banachi algebra, $x \in \mathcal{A}$, $\|x\| < 1$. Siis*

(a) $e - x$ on pööratav,

(b) $\left|M(x)\right| < 1$ iga multiplikatiivse lineaarse funktsionaali korral hulgal $\mathcal{A}$.

Tõestus. (a) Kuna $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ ja $\|x\| < 1$, siis

$$s_n = e + x + x^2 + ... + x^n$$

on Cauchy jada hulgal $\mathcal{A}$. Tõesti $n > m$ korral

$$\begin{aligned}\|s_n - s_m\| &= \left\|x^n + x^{n-1} + ... + x^{m+1}\right\| \leq \|x^n\| + \left\|x^{n-1}\right\| + ... + \left\|x^{m+1}\right\| \\ &\leq \|x\|^n + \|x\|^{n-1} + ... + \|x\|^{m+1} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Kuna $\mathcal{A}$ on täielik, siis eksisteerib $s \in \mathcal{A}$ nii, et $s_n \to s$. Kuna $x^n \to 0$ ja

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n,$$

siis korrutise pidevusest saame, et s on elemendi $e - x$ pöördelement.

(b) Nüüd olgu $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1$. Teoreemi (a) osa põhjal on $e - \lambda^{-1}x$ pööratav. Kuna $M(e) = 1$, siis

$$1 - \lambda^{-1}M(x) = M(e) - \lambda^{-1}M(x) = M(e - \lambda^{-1}x) \neq 0.$$

Seega $M(x) \neq \lambda$, mistõttu $\big|M(x)\big| < 1$.

$\square$

Näitame, et multiplikatiivne lineaarne funktsionaal M on pidev. Funktsioon M on tõkestatud eelneva teoreemi (b) osa põhjal. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Võtame $\delta = \dfrac{\varepsilon}{N}$. Siis $\|x - y\| < \delta$ korral

$$\big|M(x) - M(y)\big| = \big|M(x - y)\big| \leq N\|x - y\| < N\delta = N\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon,$$

seega M on pidev. Lisaks saame multiplikatiivsuse tingimusega samaväärse tingimuse:

$$M(\varphi \star \psi) = M(\varphi)M(\psi), \quad \varphi, \psi \in L^1(0,1) \tag{13}$$

Sõnastame teoreemi, mille abil saame spektrit $\sigma_{\mathcal{A}}(\varphi)$ kirjeldada multiplikatiivsete lineaarsete funktsionaalide kaudu. Selleks on meil esmalt vaja tutvuda hulga ideaali mõiste ja omadustega.

Definitsioon 12. *Kommutatiivse komplekse algebra A ideaaliks nimetatakse alamhulka J, kui*

(a) J on vektorruumi A alamruum;

(b) $xy \in J$, kui $x \in A$ ja $y \in J$.

Kui $J \neq A$, siis öeldakse, et J on pärisideaal. Maksimaalne ideaal on pärisideaal, mis ei sisaldu üheski suuremas pärisideaalis.

Teoreem 4. *Olgu A kommutatiivne kompleksne algebra.*

(a) Ruumi A ükski pärisideaal ei sisalda A pööratavaid elemente.

(b) Kui J on kommutatiivse Banachi algebra A ideaal, siis $\overline{J}$ on A ideaal.

Tõestus. (a) Olgu J ruumi A pärisideaal. Oletame, et element $x \in J$ on pööratav hulgas A. Ideaali definitsiooni kohaselt, kuna $x \in J$ ja $x^{-1} \in A$, siis $x^{-1}x = e \in J$. Nüüd suvalise $y \in A$ korral ideaali definitsiooni kohaselt $y = ye \in J$, mistõttu saame, et $J = A$, mis on aga vastuolus sellega, et J on ruumi A pärisideaal.

(b) Olgu J ruumi A ideaal. Teame, et alamruumi sulund on ka alamruum. Oletame, et $x \in \overline{J}$ ja $y \in A$, seega näitamaks, et $\overline{J}$ on ideaal, peame näitama, et $yx \in \overline{J}$. Kuna $x \in \overline{J}$, siis leidub jada $x_n \in J$, nii, et $x_n \to x$. Seega ka korrutise pidevuse tõttu $yx_n \to yx$. Kuna J on ideaal, siis $yx_n \in J$. Kuna leidub jada Y elementidest, mis koondub elemendiks yx, siis $yx \in \overline{J}$. Seega $\overline{J}$ on ideaal.

□

Teoreem 5. *(a) Kui A on ühikelemendiga kommutatiivne kompleksne algebra, siis A iga pärisideaal on A maksimaalse ideaali alamhulk.*

(b) Kui A on kommutatiivne Banachi algebra, siis A iga maksimaalne ideaal on kinnine.

Tõestus. (a) Olgu J algebra A pärisideaal ning olgu $\mathscr{P}$ kõigi A pärisideaalide hulk, mis sisaldavad ideaali J. Koostame hulgas $\mathscr{P}$ osalise järjestuse hulkade sisalduvuse suhtes. Olgu $\mathscr{J}$ maksimaalne täielikult järjestatud $\mathscr{P}$ alamkogum ning olgu M hulga $\mathscr{J}$ kõigi elementide ühend. Kuna M on täielikult järjestatud ideaalide hulk, siis M on ise ka ideaal. Ilmselt $J \subset M$ ja $M \neq A$, sest mitte ükski $\mathscr{P}$ element ei sisalda A ühikelementi. Kuna hulk $\mathscr{J}$ oli maksimaalne, siis M on A maksimaalne ideaal.

(b) Olgu N ruumi A maksimaalne ideaal. Kuna N eelmise teoreemi põhjal ei sisalda A pööratavaid elemente ja pööratavate elementide hulk on lahtine, siis ei sisalda ka $\overline{N}$ pööratavaid elemente. Seega on eelmise teoreemi põhjal $\overline{N}$ ruumi A pärisideaal. Pidades silmas N maksimaalsust, saame seega, et $N = \overline{N}$. □

Definitsioon 13. *([4]) Olgu X ja Y Banachi algebrad ning $S : X \to Y$ lineaarne operaator. Operaatori S tuumaks ehk nullruumiks nimetatakse hulka*

$$S^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : Sx = 0\}.$$

Operaatori S tuuma tähistatakse $KerS$.

Teoreem 6. *Olgu A kommutatiivne Banachi algebra ja $\mathscr{M}_A$ hulga A kompleksete homomorfismide hulk.*

(a) Iga hulga A maksimaalne ideaal on mingi $M \in \mathscr{M}_A$ tuum.

(b) Element $x \in A$ on pööratav parajasti siis, kui $M(x) \neq 0$ iga $M \in \mathscr{M}_A$ korral.

(c) $\lambda \in \sigma(x)$ parajasti siis, kui $M(x) = \lambda$ mingi $M(x) \in \mathscr{M}_A$ korral.

Enne teoreemi (6) tõestamist toome ära tõestamisel vaja mineva Gelfand-Mazuri teoreemi, mille tõestuse leiab allikast [2].

Teoreem 7. *Kui A on Banachi algebra, kus iga nullist erinev element on pööratav, siis A on isomeetriliselt isomorfne komplekstasandiga.*

Nüüd saame tõestada teoreemi 6.

Tõestus. (a) Olgu N ruumi A maksimaalne ideaal. Siis N on kinnine eelmise teoreemi põhjal ja A/N on seega Banachi algebra. Valime $x \in A$, $x \notin N$ ja

$$J = \{ax + y : a \in A, y \in N\}.$$

Siis J on A ideaal, sest kui võtame suvalised $ax + y \in J$ ja $z \in A$, siis saame

$$z(ax + y) = (za)x + zy,$$

kus $za \in A$ ja $zy \in N$, seega $z(ax + y) \in J$. Ühtlasi on J suurem kui N, sest $x \in J$ (Võttes $a = e$ ja $y = 0$.). Seega $J = A$, sest N oli maksimaalne ideaal, mistõttu ka mingi $a \in A$, $y \in N$ korral $ax + y = e$. Kui $\pi : A \to A/N$ on faktorkujutus, siis kehtib $\pi(a)\pi(x) = \pi(e)$. Banachi algebra A/N iga nullist erinev element $\pi(x)$ on seega pööratav ruumis A/N. Gelfand-Mazuri teoreemi põhjal leidub isomorfism $j : A/N \to \mathbb{C}$. Olgu $M = j \circ \pi$. Siis $M \in \mathscr{M}_A$ ja N on M tuum.

(b) Kui x on pööratav hulgal A ja $M \in \mathscr{M}_A$, siis

$$M(x)M(x^{-1}) = M(xx^{-1}) = M(e) = 1,$$

nii et $M(x) \neq 0$. Kui x ei ole pööratav, siis hulk $\{ax : a \in A\}$ ei sisalda elementi e, seega on pärisideaal. Teoreemi 5 (a) osa põhjal on hulk $\{ax : a \in A\}$ algebra A maksimaalse ideaali alamhulk ning on seetõttu teoreemi (a) osa põhjal mingi $M \in \mathscr{M}_A$ tuuma alamhulk, st $M(a)M(x) = M(ax) = 0\ \forall a \in A$, seega $M(x) = 0$.

(c) Teoreemi osa (b) kohaselt $\lambda \in \sigma(x)$, st $\lambda e - x$ ei ole pööratav hulgas A parajasti siis, kui mingi $M \in \mathscr{M}_A$ korral $M(\lambda e - x) = 0$ ehk $M(x) = \lambda$.

□

Kuna soovime leida paremat kuju spektritele $\sigma_{\mathcal{A}}$ ja $\sigma_{\mathcal{B}}$, siis teoreemi 6 (c) osa põhjal on meie eesmärgiks leida kõik lineaarsed pidevad funktsionaalid M ruumil $L^1(0,1)$, mis rahuldavad tingimust (13), st meie $\mathcal{A}$ jaoks

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\varphi) = \{M(\varphi) : M \in \mathscr{M}_{\mathcal{A}}\}. \tag{14}$$

Sellele probleemile annab lahenduse järgmine lemma.

Teoreem 8. *([1]) Nullist erinev lineaarne pidev funktsionaal M ruumil $(L^1(0,1), \star)$ rahuldab multiplikatiivsuse tingimust (13) parajasti siis, kui M on kujul*

$$M(\varphi) = M_\lambda(\varphi) = \hat{\varphi}(\lambda) = \int_0^1 \varphi(s)s^\lambda ds, \tag{15}$$

kus $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

Tõestus. (i) Esmalt eeldame, et nullist erinev lineaarne pidev funktsionaal M rahuldab multiplikatiivsuse tingimust (13). Näitame, et funktsionaal M on kujul (15). Igal lineaarsel pideval funktsionaalil ruumil $L^1(0,1)$ on kuju

$$M(\varphi) = M_\omega(\varphi) = \int_0^1 \omega(t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in L^1(0,1), \quad \omega \in L^\infty(0,1).$$

Multiplikatiivsus (13) annab $\omega \in L^\infty(0,1)$ jaoks lisatingimuse

$$\int_0^1 \omega(\tau)(\varphi \star \psi)(\tau)d\tau = \int_0^1 \omega(t)\varphi(t)dt \int_0^1 \omega(s)\psi(s)ds, \quad \varphi, \psi \in L^1(0,1). \tag{16}$$

Kirjutades seose (8) abil lahti, saame

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega(\tau)(\varphi \star \psi)(\tau)d\tau &= \int_0^1 \omega(\tau)\left(\int_\tau^1 s^{-1}\varphi(s)\psi(\tau s^{-1})ds\right)d\tau \\ &= \int_0^1 \varphi(s)\left(\int_0^s s^{-1}\omega(\tau)\psi(\tau s^{-1})d\tau\right)ds \\ &= \int_0^1 \varphi(s)\left(\int_0^1 \omega(ts)\psi(t)dt\right)ds,\end{aligned}$$

kus viimasel sammul tegime muutujavahetuse $t = \tau s^{-1}$, $dt = s^{-1}d\tau$. Tingimusest (16) tuleneb, et suvalise $\varphi \in L^1(0,1)$ korral

$$\int_0^1 \varphi(s)\left(\int_0^1 \omega(ts)\psi(t)dt\right)ds = \int_0^1 \omega(s)\varphi(s)ds\int_0^1 \omega(t)\psi(t)dt$$

ehk suvalise $\varphi \in L^1(0,1)$ korral

$$\int_0^1 \varphi(s)\left(\int_0^1 \psi(t)\omega(ts)dt - \omega(s)\int_0^1 \omega(t)\psi(t)dt\right)ds = 0,$$

mistõttu järelikult peab sulgudes olev funktsioon olema võrdne nulliga iga $\psi \in L^1(0,1)$ korral:

$$\int_0^1 \psi(t)(\omega(ts) - \omega(s)\omega(t))dt = 0.$$

Jälle peab sulgudes olev funktsioon seega olema võrdne nulliga. Järelikult tingimus (16) on samaväärne võrdusega

$$\omega(ts) = \omega(t)\omega(s) \text{ peaaegu iga } t, s \in (0,1) \text{ korral.} \tag{17}$$

Ilmselt sobivad võrduse (17) lahenditeks $\omega \equiv 0$ ja $\omega(t) = \omega_\lambda(t) = t^\lambda$; tingimus $\omega \in L^\infty(0,1)$ tõttu seatakse $\lambda \in \mathbb{C}$ nõue $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

(ii) Järgmiseks näitame, et võrrandil (17) ei leidu teisi lahendeid $\omega \in L^\infty(0,1)$. Selleks näitame esmalt, et kui ω on lahend võrrandile (17), siis $\omega \equiv 0$ või $\displaystyle\int_0^t \omega(\tau)d\tau \neq 0$, $t \in (0,1]$. Olgu $\omega \in L^1(0,1)$ integreeruv lahend võrrandile (17). Väidame, et kui $t \in (0,1)$ korral kehtib $\int_0^t \omega(\tau)d\tau = 0$, siis $t' \in [0,t]$ korral $\int_0^{t'} \omega(\tau)d\tau = 0$ ja seega $\omega(t') = 0$, kui $t' \in [0,t]$. Tõesti, eelnev tuleneb võrdustest:

$$s^{-1}\int_0^{st} \omega(\tau)d\tau = \int_0^t \omega(\tau's)d\tau' = \int_0^t \omega(\tau')d\tau'\omega(s) = 0, \quad s \in (0,1],$$

kus kasutasime muutujavahetust $\tau' = \tau s^{-1}$, $d\tau' = s^{-1}d\tau$ esimese võrduse korral ja (17) teise võrduse juures. Kolmanda võrduse saamiseks kasutasime eeldust, et $t \in (0,1)$ korral $\int_0^t \omega(\tau)d\tau = 0$. Eelmise väite tõttu leidub suurim arv $t_0 \in [0,1]$ nii et $\omega(t) = 0$ iga $t \in [0, t_0]$ korral. Juhul $t_0 < 1$, siis $t_0 < t \leq 1$ jaoks $\int_0^t \omega(\tau)d\tau \neq 0$. Väidame nüüd, et ainult väärtused $t_0 = 0$ ja $t_0 = 1$ on realiseeritavad. Tõepoolest (17) põhjal, kui võtta $t = s$, siis $\omega(t)^2 = \omega(t^2)$, mistõttu, kui $t^2 \leq t_0$ ehk $t \leq t_0^{\frac{1}{2}}$, siis on $\omega(t) = 0$, mis on aga vastuolus t_0 definitsiooniga, kui $t_0 \in (0,1)$. Seega, kas $t_0 = 0$, sel juhul $\int_0^t \omega(\tau)d\tau \neq 0$, kui $t \in (0,1]$, või $t_0 = 1$, sel juhul $\omega \equiv 0$, mis langeb kokku võrrandi (17) juba leitud lahendiga.

(iii) Nüüd näitame, et kui ω korral $\int_0^t \omega(\tau)d\tau \neq 0$, $t \in (0,1]$, siis $\omega = t^\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, mis langevad kokku punktis (i) juba leitud lahenditega. Seega võrrandil (17) ei ole teisi lahendeid. Olgu ω mittetriviaalne integreeruv võrrandi (17) lahend. Punkti (ii) põhjal saame, et $\int_0^t \omega(\tau)d\tau \neq 0$, kui $t \in (0,1]$. Seega nüüd kasutades muutujavahetust $x = t's$, $dx = sdt'$ ja võrdust (17) saame

$$s^{-1} \int_0^{ts} \omega(x)dx = \int_0^t \omega(t's)dt' = \int_0^t \omega(t')dt'\omega(s)$$

ja muutujavahetust $x = ts'$, $dx = tds'$

$$t^{-1} \int_0^{ts} \omega(x)dx = \int_0^s \omega(ts')dt' = \int_0^s \omega(s')ds'\omega(t).$$

Ühendades need kaks võrdust saame

$$s\omega(s) \int_0^t \omega(t')dt' = t\omega(t) \int_0^s \omega(s')ds',$$

ehk

$$\frac{t\omega(t)}{\int_0^t w(t')dt'} = \frac{s\omega(s)}{\int_0^s \omega(s')ds'} =: \lambda + 1.$$

Seoste koostamisel võtsime arvesse, et esimene suhe ei sõltu suurusest s ja teine suhe ei sõltu suurusest t, seega mõlemad suhted on võrdsed konstandiga, mille tähistasime $\lambda + 1$. Seega $t\omega(t) = (\lambda+1)\int_0^t \omega(t')dt'$. Kuna selle võrduse parem pool on diferentseeruv, siis on ka vasak ning saame diferentseerida t järgi:

$$\begin{aligned} t\omega'(t) + \omega(t) &= (\lambda + 1)\omega(t) \\ t\omega'(t) &= \lambda\omega(t) \\ \ln\big|\omega(t)\big| &= \lambda \ln|t| + C \\ \omega(t) &= \mu t^{\lambda} \end{aligned}$$

kus võtsime $\mu = \pm e^C$. Kuna ω on eelduse põhjal võrrandi (17) lahend, saame $\mu(ts)^\lambda = \mu^2 t^\lambda s^\lambda$, mistõttu $\mu = 1$. Oleme saanud, et kõik mittetriviaalsed lahendid funktsionaalvõrrandile (17) on kujul $\omega(t) = t^\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda > -1$, aga lahendid, mis kuuluvad ruumi $L^\infty(0,1)$ on antud $\omega(t) = t^\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ ja rohkem mittetriviaalsed lahendeid ei leidu ruumis $L^\infty(0,1)$. Seega nullist erinevad lineaarsed pidevad funktsionaalid M, mis rahuldavad multiplikatiivsuse tingimust, avalduvad kujul $M(\varphi) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(s)s^\lambda ds$.

(iv) Näitame viimaks, et kehtib ka vastupidine järeldus. Eeldame, et nullist erinev lineaarne pidev funktsionaal M ruumil $(L^1(0,1), \star)$ on kujul $M(\varphi) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(s)s^\lambda ds$.

Näitame, et funktsionaal M rahuldab multiplikatiivsuse tingimust.

$$\begin{aligned} M(\varphi \star \psi) &= \int_0^1 (\varphi \star \psi)(s)s^\lambda ds \\ &= \int_0^1 s^\lambda \int_s^1 t^{-1}\varphi(t)\psi(s/t)dtds \\ &= \int_0^1 t^{-1}\varphi(t) \int_0^t s^\lambda \psi(s/t)dsdt \\ &= \int_0^1 \varphi(t) \int_0^1 x^\lambda t^\lambda \psi(x)dxdt \\ &= \int_0^1 \varphi(t)t^\lambda dt \int_0^1 x^\lambda \psi(x)dx = M(\varphi)M(\psi), \end{aligned}$$

kus kolmandal võrdusel vahetasime integreerimise järjekorda ja neljandal tegime muutujavahetuse $x = s/t$, $dx = t^{-1}ds$. □

4 Spekter $\sigma_0(V_\varphi)$

Antud peatükk põhineb allikal [1]. Teoreemi 8 ja (14) abil on võimalik meil nüüd anda spektrile $\sigma_{\mathcal{A}}(\varphi)$ parem kuju.

Teoreem 9. *Olgu* $\varphi \in L^1(0,1)$. *Siis*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\varphi) = \{0\} \cup \{\hat{\varphi}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\}. \tag{18}$$

Tõestus. Teoreemi väide on otsene järeldus valemist (14) ja Teoreemist 8. Vaatleme eraldi arvu 0 hulgas (18), mis on sellise multiplikatiivsee funktsionaali M väärtus, mis $\varphi \in L^1(0,1)$ korral rahuldab $M(\varphi) = 0$, kuid pole võrdne nulliga ruumis $\mathcal{A}$. Tõesti on antud funktsioon multiplikatiivne

$$\begin{aligned} M((\lambda e + \varphi) \star (\mu e + \psi)) &= M((\lambda\mu)e + (\lambda\psi + \mu\varphi + \varphi \star \psi)) \\ &= \lambda\mu = M(\lambda e + \varphi) M(\mu e + \psi). \end{aligned}$$

□

Märkus 2. Märkuses 1 tõime välja, et operaatori spekter sisaldab alati kõiki antud operaatori omaväärtusi. Leidsime, et

$$\sigma_{\mathcal{B}}(V_\varphi) = \sigma_{\mathcal{A}}(\varphi) = \{0\} \cup \{\hat{\varphi}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\}.$$

Siit saame, et operaatori V_φ omaväärtused võiksid esituda kujul

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_0^1 \varphi(s) s^\lambda ds.$$

Paneme tähele, et vastavad omafunktsioonid on kujul $u_\lambda(t) = t^\lambda$. Tõesti

$$(V_\varphi u_\lambda)(t) = \int_0^1 \varphi(x)(tx)^\lambda dx = t^\lambda \int_0^\varphi (x) s^\lambda dx = u_\lambda(t)\hat{\varphi}(\lambda),$$

seega integraaloperaatori V_φ omaväärtused on kujul

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_0^1 \varphi(s) s^\lambda ds \tag{19}$$

ja neile vastavad omafunktsioonid on $u_\lambda(t) = t^\lambda$.

Märkus 3. Seoses valemiga (19) paneme tähele, et $0 < t \leq T$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ korral $t^\lambda = t^{\operatorname{Re}\lambda} e^{i \operatorname{Im}\lambda \log t}$, järelikult $u_\lambda \in C[0,T]$. Kuid $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ korral $u_\lambda \in BC(0,T] \setminus C[0,T]$.

Märkus 4. Paneme tähele, et funktsioon $\hat{\varphi}(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ on pidev. Fikseerime $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Olgu (λ_n) jada, $\operatorname{Re}\lambda_n \geq 0$, mis koondub elemendiks λ, st $\lambda_n \to \lambda$. Siis ka $\varphi(s)s^{\lambda_n} \to \varphi(s)s^\lambda$ peaaegu kõikjal vahemikus $(0,1)$. Paneme tähele, et $\left|\varphi(s)s^{\lambda_n}\right| \leq \left|\varphi(s)\right|$, sest $\operatorname{Re}\lambda_n \geq 0$ ja $0 \leq s \leq 1$. Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemi kohaselt

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(\lambda_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi(s)s^{\lambda_n} ds = \int_0^1 \varphi(s)s^\lambda ds = \hat{\varphi}(\lambda).$$

Seega funktsioon $\hat{\varphi}(\lambda)$ on pooltasandil $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ pidev.

Vaatleme spektri standardset definitsiooni

$$\begin{aligned} \sigma_0(V_\varphi) &:= \sigma_{\mathscr{L}(C[0,T])}(V_\varphi) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - V_\varphi \text{ ei ole pööratav ruumis } \mathscr{L}(C[0,T])\}, \\ \sigma_{\mathscr{L}(BC(0,T])}(V_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - V_\varphi \text{ ei ole pööratav ruumis } \mathscr{L}(BC(0,T])\}, \end{aligned}$$

kus vaatleme V_φ kui operaatorit ruumil $C[0,T]$ või $BC(0,T]$ ja $\mathscr{L}(X)$ on (mittekommutatiivne) Banachi algebra, mis koosneb kõikidest lineaarsetest pidevatest operaatoritest Banachi ruumil X. Need kaks definitsiooni on erinevad $\sigma_{\mathscr{B}}(V_\varphi)$ definitsioonist, kuid tuleb välja, et vaadeldavad kolm definitsiooni annavad komplekstasandil sama hulga. Seda näitame järgmise teoreemiga.

Teoreem 10. *Olgu $\varphi \in L^1(0,1)$, siis operaatori V_φ korral kehtib*

$$\begin{aligned} \sigma_0(V_\varphi) &= \sigma_{\mathscr{L}(BC(0,T])}(V_\varphi) = \sigma_{\mathscr{B}}(V_\varphi) = \sigma_{\mathscr{A}}(\varphi) \\ &= \{0\} \cup \{\hat{\varphi}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Tõestus. Varasemalt tõestatud võrduste (11) ja (18) põhjal on meil kaks viimast võrdust näidatud.
Peame näitama veel, et kehtivad võrdused $\sigma_0(V_\varphi) = \sigma_{\mathscr{B}}(V_\varphi)$ ja $\sigma_{\mathscr{L}(BC(0,T])}(V_\varphi) = \sigma_{\mathscr{B}}(V_\varphi)$. Kui operaator $\mu I - V_\varphi$ ei ole pööratav ruumis $\mathscr{L}(C[0,T])$ (või ruumis $\mathscr{L}(BC(0,T])$), siis ei ole see operaator pööratav ka ruumis $\mathscr{B}$. Seega $\sigma_0(V_\varphi) \subset \sigma_{\mathscr{B}}(V_\varphi)$ ja $\sigma_{\mathscr{L}(BC(0,T])} V_\varphi \subset \sigma_{\mathscr{B}}(V_\varphi)$.
Vastupidi, olgu $\mu \in \sigma_{\mathscr{B}}(V_\varphi) = \sigma_{\mathscr{A}}(\varphi)$, siis (18) põhjal saame, et $\mu = \hat{\varphi}(\lambda)$

mingi $\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda \geq 0$ korral. Seega juhul $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $u_\lambda = t^\lambda \in C[0,T]$ on Märkuse 2 põhjal operaatori V_φ omafunktsioon, mis vastab omaväärtusele μ. Märkuse 1 põhjal sisalduvad kõik V_φ omaväärtused operaatori V_φ spektris, seega $\mu \in \sigma_0(V_\varphi)$.
Juhul $\mu = \hat{\varphi}(\lambda)$, kus $\operatorname{Re} \lambda = 0$, saame sama tulemuse, kui võtame $\lambda + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$. Paneme tähele, et $\hat{\varphi}(\lambda)$ on pidev funktsioon pooltasandil $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ja tuletame meelde, et spekter on kinnine. $\square$

Märkus 5. Tuleb välja, et südamlik integraaloperaator V_φ ruumil $C[0,1]$ ei ole kompaktne, sest tema spekter $\sigma_0(V_\varphi)$ ei ole loenduv. Samas aga analüütiliste funktsioonide ruumis on operaator V_φ kompaktne, sellest saab lähemalt lugeda allikast [5].

5 Spekter $\sigma_m(V_\varphi)$

Spektrit $\sigma_m(V_\varphi)$ vaadeldakse allikas [1]. Südamliku integraaloperaatori definitsiooni (1) kohaselt $\varphi \in L^1(0,1)$, $u \in C^m[0,T]$ korral kehtib ka, et $V_\varphi u \in C^m[0,T]$ ja

$$\begin{aligned}(V_\varphi u)^{(m)}(t) &= \int_0^1 \varphi(x)[u(tx)]^{(m)}dx \\ &= \int_0^1 \varphi(x)x^m u^{(m)}(tx)dx \\ &= (V_{\varphi_m}u^{(m)})(t), \quad 0 \le t \le T, \end{aligned} \tag{21}$$

kus tähistasime $\varphi_m \in L^1(0,1)$ järgmiselt

$$\varphi_m(x) := \varphi(x)x^m, \quad 0 < x < 1. \tag{22}$$

Järelikult $V_\varphi : C^m[0,T] \to C^m[0,T]$ on lineaarne tõkestatud operaator. Edasi uurime selle operaatori spektrit ruumil $\mathscr{L}(C^m[0,T])$

$$\sigma_m(V_\varphi) := \sigma_{\mathscr{L}(C^m[0,T])}(V_\varphi).$$

Kui $u \in C^m[0,T]$ on võrrandi $\mu u = V_\varphi u + f$ lahend, kus $f \in C^m[0,T]$, siis diferentseerides mõlemat võrrandi poolt m korda, saame

$$\mu u^{(m)} = (V_\varphi u)^{(m)} + f^{(m)}.$$

Kasutades seost (21) on tulemuseks

$$\mu u^{(m)} = V_{\varphi_m} u^{(m)} + f^{(m)}.$$

Ilmselt on $v = u^{(m)} \in C[0,T]$ lahend võrrandile

$$\mu v = V_{\varphi_m} v + f^{(m)}.$$

Vastupidise tulemuse sõnastame järgmise teoreemina.

Teoreem 11. *Olgu $\varphi \in L^1(0,1)$, $f \in C^m[0,T]$, $m \ge 1$ ja $0 \ne \mu \in \mathbb{C}$ rahuldagu $\mu \ne \hat{\varphi}(k)$, kus $k = 0, 1, ..., m-1$. Olgu $v \in C[0,T]$ võrrandi $\mu v = V_{\varphi_m} v + f^{(m)}$ lahend, kus φ_m on defineeritud kui (22). Siis võrrandil $\mu u = V_\varphi u + f$ on ühene lahend $u \in C^m[0,T]$ nii, et $u^{(m)} = v$, kusjuures*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^t (t-s)^{m-1} v(s)ds. \tag{23}$$

Tõestus. (i) Vaatleme esmalt juhtu $m = 1$. Seega eeldame, et $f \in C^1[0,T]$, $\mu \neq \hat{\varphi}(0)$. Olgu $v \in C[0,T]$ võrrandi $\mu v = V_{\varphi_1} v + f'$ lahend. Antud võrrand on seega kujul

$$\mu v(s) = \int_0^1 \varphi(x) x v(sx) dx + f'(s).$$

Integreerime võrduse mõlemaid pooli rajades 0 kuni t

$$\mu \int_0^t v(s) ds = \int_0^1 \varphi(x) x \left(\int_0^t v(sx) ds \right) dx + f(t) - f(0).$$

Kuna muutujavahetuse $s' = sx$, $ds' = x ds$ abil saame $\displaystyle\int_0^t v(sx) ds =$ $\displaystyle x^{-1} \int_0^{tx} v(s') ds'$, siis eelmine võrrand esitub kujul

$$\mu \int_0^t v(s) ds = \int_0^1 \varphi(x) \left(\int_0^{tx} v(s') ds' \right) dx + f(t) - f(0). \tag{24}$$

Konstantse funktsiooni $\omega \equiv \xi \in \mathbb{C}$ korral saame samasuse

$$\mu \omega(t) = \int_0^1 \varphi(x) \omega(tx) dx + \mu \xi - \xi \int_0^1 \varphi(x) dx. \tag{25}$$

Liites võrduste (24) ja (25) vastavad pooled kokku saame samasuse

$$\begin{aligned} \mu(\omega(t) + \int_0^t v(s) ds) = \int_0^1 \varphi(x) \left(\omega(tx) + \int_0^{tx} v(s') ds' \right) dx \\ + f(t) - f(0) + \mu \xi - \xi \int_0^1 \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Tähistame $u(t) := \omega(t) + \int_0^t v(s) ds$, siis näeb eelmine võrdus välja järgmiselt

$$\mu u(t) = \int_0^1 \varphi(x) u(tx) dx + f(t) - f(0) + \xi \left(\mu - \int_0^1 \varphi(x) dx \right).$$

ehk

$$\mu u(t) = (V_\varphi u)(t) + f(t) - f(0) + \xi \left(\mu - \int_0^1 \varphi(x) dx \right).$$

Kuna eeldasime $\int_0^1 \varphi(x)dx = \hat{\varphi}(0) \neq \mu$, siis leidub ühene $\xi \in \mathbb{C}$ nii, et

$$\xi\left(\mu - \int_0^1 \varphi(x)dx\right) = f(0)$$

$$\xi = \frac{f(0)}{\mu - \hat{\varphi}(0)}$$

ja sel juhul asendades ξ funktsiooni u definitsiooni, saame

$$u(t) = \frac{f(0)}{\mu - \hat{\varphi}(0)} + \int_0^t v(s)ds.$$

Näeme ka, et

$$u'(t) = \left(\frac{f(0)}{\mu - \hat{\varphi}(0)} + \int_0^t v(s)ds\right)' = 0 + v(t) = v(t).$$

Saadud $u(t)$ on järelikult ainus võrrandi $\mu u = V_\varphi u + f$ lahend ruumis $C^1[0,T]$, mis rahuldab $u' = v$. Seega oleme lemma väite tõestanud $m = 1$ korral.

(ii) Mistahes $m \in \mathbb{N}$ korral saab lemma väidet näidata rakendades tõestuse osa (i) korduvalt. Olgu $\varphi \in L^1(0,1), f \in C^m[0,T]$ ja $0 \neq \mu$, $\mu \neq \hat{\varphi}(k)$, $k = 1, ..., m-1$. Kehtigu antud lemma väide $k = m-1$ korral. Näitame, et väide kehtib ka $k = m$ korral.
Olgu $v \in C[0,T]$ võrrandi $\mu v = V_{\varphi_m} v + f^{(m)}$ lahend. Seega võrrand on kujul

$$\mu v(s) = \int_0^1 \varphi(x) x^m v(sx)dx + f^{(m)}(s).$$

Integreerime võrduse mõlemaid pooli rajades 0 kuni t

$$\mu \int_0^t v(s)ds = \int_0^1 \varphi(x) x^m \left(\int_0^t v(sx)ds\right) dx + f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0).$$

Kuna muutujavahetuse $s' = sx$, $ds' = xds$ abil saame, et $\int_0^t v(sx)ds = x^{-1} \int_0^{tx} v(s')ds'$, siis eelmine võrrand esitub kujul

$$\mu \int_0^t v(s)ds = \int_0^1 \varphi(x) x^{m-1} \left(\int_0^{tx} v(s')ds'\right) dx + f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0). \quad (26)$$

Konstantse funktsiooni $\omega \equiv \xi \in \mathbb{C}$ korral saame samasuse

$$\mu\omega(t) = \int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}\omega(tx)dx + \mu\xi - \xi\int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}dx \tag{27}$$

Liites võrduste (26) ja (27) vastavad pooled kokku saame samasuse

$$\mu\left(\omega(t) + \int_0^t v(s)ds\right) = \int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}\left(\omega(tx) + \int_0^{tx} v(s')ds'\right)dx$$
$$+ f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0) + \mu\xi - \xi\int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}dx.$$

Tähistame $u(t) := \omega(t) + \int_0^t v(s)ds$, siis näeb eelmine võrdus välja järgmiselt

$$\mu u(t) = \int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}u(tx)dx + f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0) + \xi\left(\mu - \int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}dx\right)$$

ehk

$$\mu u(t) = (V_{\varphi_m}u)(t) + f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0) + \xi\left(\mu - \int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}dx\right).$$

Kuna eeldasime, et $\int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}dx = \hat{\varphi}(m-1) \neq \mu$, siis leidub ühene $\xi \in \mathbb{C}$, nii et

$$\xi\left(\mu - \int_0^1 \varphi(x)x^{m-1}dx\right) = f^{(m-1)}(0)$$

$$\xi = \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)}$$

ja sel juhul asendades ξ funktsiooni u definitsiooni, saame

$$u(t) = \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} + \int_0^t v(s)ds.$$

Näeme, et leitud $u(t)$ on võrrandi

$$\mu u(t) = (V_{\varphi_m}u)(t) + f^{(m-1)}(t) \tag{28}$$

ainus lahend ning $u'(t) = 0 + v(t) = v(t)$.

Induktsiooni eelduse põhjal leidub võrrandil (28) lahend $w(t)$ nii, et $w^{(m-1)} = u$, seega ka $v = u' = (w^{(m-1)})' = w^{(m)}$, ja

$$w(t) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k + \frac{1}{(m-2)!} \int_0^t (t-s)^{m-2} u(s) ds.$$

Nüüd asendades u eelmisesse võrdusesse saame

$$\begin{aligned}
w(t) &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k + \frac{1}{(m-2)!} \int_0^t (t-s)^{m-2} \left(\frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} + \int_0^s v(x) dx \right) ds \\
&= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k + \frac{1}{(m-2)!} \left(\int_0^t (t-s)^{m-2} \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} ds \right. \qquad (29) \\
&\left. + \int_0^t (t-s)^{m-2} \int_0^s v(s') ds' ds \right)
\end{aligned}$$

Vaatleme eraldi mõlemat integraali. Esimese integraali puhul kasutame muutujavahetust $x = t - s$, $dx = -ds$. Teise integraali korral vahetame integreerimise järjekorda ja teeme sama muutujavahetuse.

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{m-2} \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} ds &= \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} \int_0^t (t-s)^{m-2} ds \\
&= \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} \int_0^t x^{m-2} dx \qquad (30) \\
&= \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} \frac{t^{m-1}}{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{m-2} \int_0^s v(s') ds' ds &= \int_0^t v(s') \int_{s'}^t (t-s)^{m-2} ds ds' \\
&= \int_0^t v(s') \int_0^{t-s'} x^{m-2} dx ds' \qquad (31) \\
&= \int_0^t v(s') \frac{(t-s')^{m-1}}{m-1} ds' \\
&= \frac{1}{m-1} \int_0^t v(s)(t-s)^{m-1} ds
\end{aligned}$$

Nüüd asendame võrduses (29) integraalid (30) ja (31).

$$w(t) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k + \frac{1}{(m-2)!} \left(\frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} \frac{t^{m-1}}{m-1} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m-1} \int_0^t v(s)(t-s)^{m-1} ds \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k + \frac{1}{(m-1)!} \frac{f^{(m-1)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}_m(0)} t^{m-1}$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t v(s)(t-s)^{m-1} ds$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(0)}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t v(s)(t-s)^{m-1} ds$$

Sellega oleme lemma väite ära tõestanud. □

Järgmise teoreemi abil uurime spektrit $\sigma_m(V_\varphi)$.

Teoreem 12. *Olgu* $\varphi \in L^1(0,1)$, *siis operaatori* V_φ *jaoks kehtib*

$$\sigma_m(V_\varphi) = \{0\} \cup \{\hat{\varphi}(k) : k = 0, 1, ..., m-1\} \cup \{\hat{\varphi}(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda \geq m\}. \qquad (32)$$

Tõestus. (i) Sisalduvuse

$$\{0\} \cup \{\hat{\varphi}(k) : k = 0, 1, ..., m-1\} \cup \{\hat{\varphi}(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda \geq m\} \subset \sigma_m(V_\varphi)$$

saame omaväärtusi vaadeldes. Konstandid $\hat{\varphi}(k)$, kus $k = 0, ..., m-1$ ja $\hat{\varphi}(\lambda)$, kus Re $> m$, on Märkuse 2 põhjal operaatori V_φ omaväärtused, mis vastavad omafunktsioonidele t^k ja $u_\lambda(t) = t^\lambda = t^{\operatorname{Re} \lambda} e^{i \operatorname{Im} \lambda \log t}$. Need omafunktsioonid kuuluvad ruumi $C^m[0,T]$, mistõttu väärtused $\hat{\varphi}(\lambda)$ kuuluvad spektrisse $\sigma_m(V_\varphi)$ Märkuse 1 põhjal. Elemendid 0 ja $\hat{\varphi}(\lambda)$, kus $\operatorname{Re} \lambda = m$, kuuluvad $\sigma_m(V_\varphi)$ spektri kinnisuse ja funktsiooni $\hat{\varphi}(\lambda)$ pidevuse tõttu.

(ii) Teistpidi sisalduvuse

$$\sigma_m(V_\varphi) \subset \{0\} \cup \{\hat{\varphi}(k) : k = 0, 1, ..., m-1\} \cup \{\hat{\varphi}(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda \geq m\}$$

saamiseks võtame suvalise $\mu \in \mathbb{C}$, nii et $\mu \neq 0$, $\mu \neq \hat{\varphi}(k)$, kus $k = 0, ..., m-1$, ja $\mu \neq \hat{\varphi}(\lambda)$, kus $\operatorname{Re}\lambda \geq m$. Paneme tähele, et $\varphi_m(s)$ definitsiooni (22) kohaselt

$$\hat{\varphi}_m(\lambda) = \int_0^1 \varphi_m(t)t^\lambda dt = \int_0^1 \varphi(t)t^m t^\lambda dt = \hat{\varphi}(m + \lambda).$$

Viimasest tingimusest saame, et $\mu \neq \hat{\varphi}_m(\lambda)$, kui $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Teoreemi 10 põhjal on võrrandil $\mu v = V_{\varphi_m} v + f^{(m)}$, $f \in C^m[0, T]$ ühene lahend $v \in C[0, T]$. Lemmast 11 saame, et võrrandil $\mu u = V_\varphi u + f$, $f \in C^{(m)}[0, T]$ on ühene lahend $u \in C^m[0, T]$, nii et $u^{(m)} = v$. Kuna v oli ainus, siis ka u on ainus lahend ruumis $C^m[0, T]$. Seega eksisteerib pöördoperaator $(\mu I - V_\varphi)^{-1} : C^m[0, T] \to C^m[0, T]$. Kuna operaator $V_\varphi : C^m[0, T] \to C^m[0, T]$ on tõkestatud, siis on ka pöördoperaator tõkestatud Banachi teoreemi põhjal. Järelikult oleme näidanud, et $\mu \notin \sigma_m(V_\varphi)$ ning kehtib vastupidine sisalduvus.

$\square$

6 Näiteid

Vaatleme uuesti esimeses peatükis välja toodud südamlike integraaloperaatorite näiteid, nende omafunktsioone ning spektrit. Näited pärinevad Gennadi Vainikko artiklist [1].

Südamliku integraaloperaatori V_φ omaväärtused $\hat{\varphi}(\lambda)$ saame leida võrduse $\hat{\varphi}(\lambda) = \int_0^1 \varphi(s) s^\lambda ds$ abil. Peame ka meeles, et $0 \le s \le t \le T$.

Näide 1. Selles näites on integraaloperaatori südamikuks operaator $\varphi(s) = s^{\beta-1}$, $\beta > 0$. $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ korral omafunktsioonile $u(t) = t^\lambda$ vastav omaväärtus on

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_0^1 s^{\beta-1} s^\lambda ds = \int_0^1 s^{\beta+\lambda-1} ds = \left. \frac{s^{\beta+\lambda}}{\beta+\lambda} \right|_0^1 = \frac{1}{\beta+\lambda}$$

Paneme tähele ka, et

$$\|\varphi\|_1 = \int_0^1 \left| s^{\beta-1} \right| ds = \int_0^1 s^{\beta-1} ds = \left. \frac{s^\beta}{\beta} \right|_0^1 = \frac{1}{\beta}.$$

Murdlineaarne funktsioon $\mu = \dfrac{1}{\beta+\lambda}$ viib imaginaartelje üksüheselt ringjooneks $\left|\mu - \dfrac{1}{2\beta}\right| = \dfrac{1}{2\beta}$ ja pooltasandi $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ hulgaks $D_{\frac{1}{\beta}}$, kus

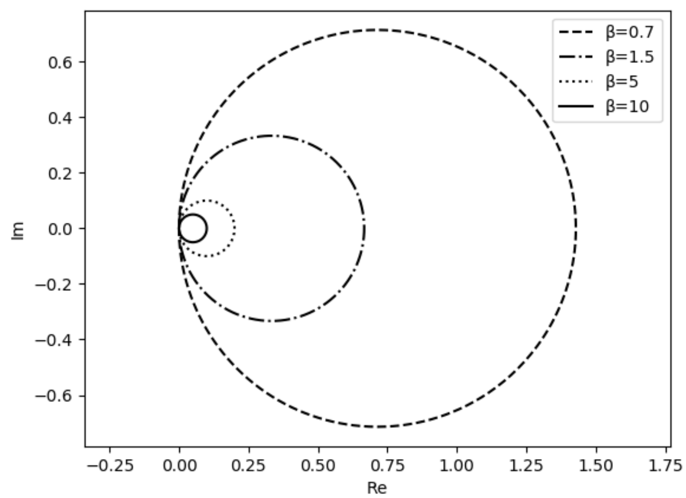
$$D_r := \{\mu \in \mathbb{C} : \left|\mu - \frac{r}{2}\right| \le \frac{r}{2}\}, \quad r > 0,$$

on kinnine ring diameetriga r, mille keskpunkt on reaalteljel punktis $(\frac{r}{2}, 0)$. Seega Teoreemi 20 tulemuse põhjal

$$\sigma_0(V_\varphi) = \sigma_{\mathcal{A}}(\varphi) = D_{\frac{1}{\beta}}.$$

Veelgi enam, funktsioon $\mu = \dfrac{1}{\beta+\lambda}$ viib piirkonna $\operatorname{Re}\lambda \ge m$ ringiks $D_{\frac{1}{\beta+m}}$ ning Teoreemi 12 põhjal

$$\sigma_m(V_\varphi) = \left\{ \frac{1}{\beta+k} : k = 0, 1, ..., m-1 \right\} \cup D_{\frac{1}{\beta+m}}$$



Joonis 1: Kõver $\hat{\varphi}_\beta(i\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$ piirab spektri $\sigma_0(V_{\varphi_\beta})$, kus $\varphi_\beta(s) = s^{\beta-1}$

Lisaks vaatleme Näite 1 ümbersõnastust, kus võtame $\varphi_\beta := \beta s^{\beta-1}$, $\beta > 0$. Siis

$$\|\varphi_\beta\|_1 = \int_0^1 \beta s^{\beta-1} ds = \beta \|\varphi\|_1 = \beta \frac{1}{\beta} = 1,$$

$$\hat{\varphi}_\beta(\lambda) = \int_0^1 \varphi_\beta(s) s^\lambda ds = \beta \int_0^1 \varphi(s) s^\lambda ds = \beta \hat{\varphi}(\lambda) = \frac{\beta}{\beta + \lambda}.$$

Funktsioon φ_β viib pooltasandi $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ ringiks D_1, mistõttu

$$\sigma_0(V_{\varphi_\beta}) = \sigma_{\mathcal{A}}(\varphi_\beta) = D_1.$$

Näide 2. Antud näites on funktsioon $\varphi(s) = (1-s)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ integraaloperaatori V_φ südamikuks. $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ korral omafunktsioonile $u(t) = t^\lambda$ vastav omaväärtus on

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\lambda) &= \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\lambda ds = \int_0^1 (1-s)^{(1-\alpha)-1} s^{(\lambda+1)-1} ds \\ &= B(\lambda+1, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha+\lambda)},\end{aligned}$$

kus kasutasime tuntud beeta- ja gammafunktsiooni seoseid

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}du \tag{33}$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{34}$$

Saadud valemist pole lihtne näha, kus operaatori V_φ spektri punktid võivad asuda. Funktsiooni φ spektri lokaliseerimiseks kasutame Taylori reaks arendamist.

$$(1-s)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, \quad c_0 = 1, \quad c_k = c_{k,\alpha} = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{k!} > 0, k \geq 1,$$

mis koondub kui $0 \leq s < 1$, lisaks

$$\|\varphi_\alpha\|_1 = \int_0^1 \left|(1-s)^{-\alpha}\right| ds = \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} = \frac{1}{1-\alpha},$$

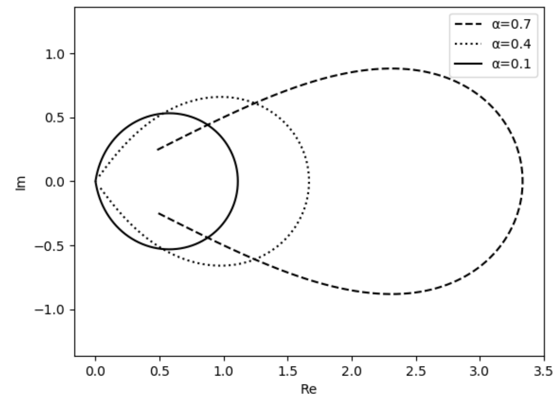
$$\hat{\varphi}_\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1+\lambda} = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)c_k}{k+1} \frac{k+1}{k+1+\lambda}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0.$$

Funktsioonid $\mu = \dfrac{k+1}{k+1+\lambda}$, $k = 0, 1, ...$, viivad pooltasandi $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ ringiks D_1. Kuna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)c_k}{k+1} = 1$ ja selle rea kõik liikmed on positiivsed, siis ka punktid $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)c_k}{k+1} \frac{k+1}{k+1+\lambda}$ on $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ korral ringis D_1 ja $\hat{\varphi}(\lambda)$ asub ringis $D_{\frac{1}{1-\alpha}}$. Järelikult

$$\sigma_0(V_{\varphi_\alpha}) = \sigma_{\mathcal{A}}(\varphi_\alpha) \subset D_{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$\sigma_m(V_{\varphi_\alpha}) \subset \left\{ \frac{\Gamma(1+k)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha+k)} : k = 0, 1, ..., m-1 \right\} \cup D_{r_{m,\alpha}},$$

kus $r_{m,\alpha} = \dfrac{\Gamma(1+m)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha+m)}$.



Joonis 2: Kõver $\hat{\varphi}_\alpha(i\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$ piirab spektri $\sigma_0(V_{\varphi_\alpha})$, kus $\varphi_\alpha(s) = (1-s)^\alpha$

Näide 3. Kolmanda näitena tõime tuuma $K(t,s) = (t^\gamma - s^\gamma)^{-1/\gamma}$, $1 < \gamma < \infty$, mis genereeris südamliku integraaloperaatori V_φ südamikuga $\varphi(s) = (1-s^\gamma)^{-1/\gamma}$. Integraaloperaatori V_φ omafunktsioonile $u(t) = t^\lambda$ vastav omaväärtus on

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\lambda) &= \int_0^1 (1-s^\gamma)^{-1/\gamma} s^\lambda ds \\ &= \frac{1}{\gamma}\int_0^1 (1-x)^{-1/\gamma} x^{\frac{1+\lambda}{\gamma}-1} dx \\ &= \frac{1}{\gamma} B\left(\frac{1+\lambda}{\gamma}, 1-\frac{1}{\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma(1-\frac{1}{\gamma})\Gamma(\frac{1+\lambda}{\gamma})}{\Gamma(1+\frac{\lambda}{\gamma})}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0,\end{aligned}$$

kus tegime muutujavahetuse $x = s^\gamma$, $ds = \frac{1}{\gamma} x^{\frac{1}{\gamma}-1} dx$ ja kasutasime Näites 2 toodud beeta- ja gammafunktsiooni seoseid (33) ja (34). Me saame arendada

$$(1-s^\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s^\gamma)^k,$$

kus $c_k = c_{k,\frac{1}{\gamma}}$ Näitest 2. Siis $0 \leq s < 1$ korral

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_\gamma\right\|_1 &= \int_0^1 (1-s^\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{1+\gamma k} \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma(1-\frac{1}{\gamma})\Gamma(\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(1)} = \frac{\frac{\pi}{\gamma}}{\sin\frac{\pi}{\gamma}} =: r_\gamma,\end{aligned}$$

kus eelviimasel võrdusel kasutasime gammafunktsiooni omadusi

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Nüüd

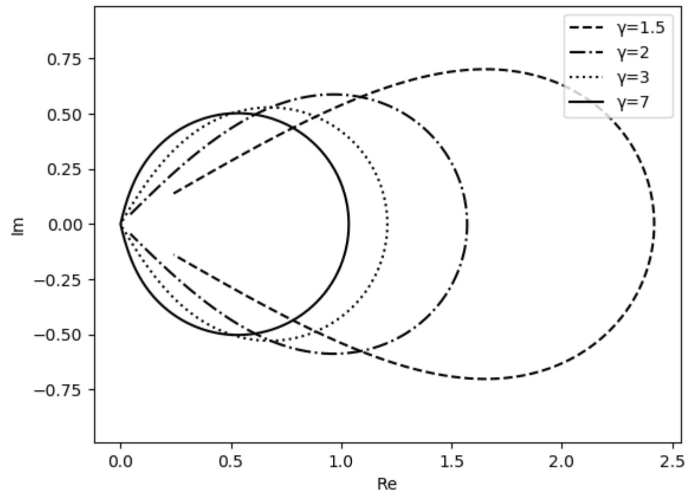
$$\hat{\varphi}_\gamma(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{1+\gamma k+\lambda} = r_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{r_\gamma(1+\gamma k)} \frac{1+\gamma k}{1+\gamma k+\lambda}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0,$$

ja saame, et

$$\sigma_0(V_{\varphi_\gamma}) = \sigma_{\mathcal{A}}(\varphi_\gamma) \subset D_{r_\gamma},$$

$$\sigma_m(V_{\varphi_\gamma}) \subset \left\{ \frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma(1-\frac{1}{\gamma})\Gamma(\frac{1+k}{\gamma})}{\Gamma(1+\frac{k}{\gamma})} : k = 0, 1, ..., m-1 \right\} \cup D_{r_{m,\gamma}},$$

kus $r_{m,\gamma} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\Gamma(1-\frac{1}{\gamma})\Gamma(\frac{1+m}{\gamma})}{\Gamma(1+\frac{m}{\gamma})}$.



Joonis 3: Kõver $\hat{\varphi}_\gamma(i\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$ piirab spektri $\sigma_0(V_{\varphi_\gamma})$, kus $\varphi_\gamma(s) = (1-s^\gamma)^{-1/\gamma}$

7 Südamliku integraalvõrrandi ligikaudne lahendamine

Lahendamise skeem põhineb allikal [1]. Vaatleme integraalvõrrandeid kujul (5). Esimeses peatükis näitasime, et kui leidub $(\mu I - V_\varphi)^{-1}$, siis lahend u esitub kujul (7) ehk $u = (\mu I - V_\varphi)^{-1} f$. Oletame, et $\mu \neq \sigma_m(V_\varphi)$ ja $f \in C^m[0,T]$, kus $m \geq 0$. Spektri definitsioonist saame, et järelikult leidub tõkestatud pöördoperaator $(\mu I - V_\varphi)^{-1} \in \mathcal{L}(C^m[0,T])$ ja võrrandil (5) on ühene lahend $u \in C^m[0,T]$.

Et polünoomide abil lähendada võrrandi lahendit, siis lähendame funktsiooni f polünoomide $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k t^k$ abil ja defineerime seega $u_n = (\mu I - V_\varphi)^{-1} f_n$. Eeldasime, et $\mu \notin \sigma_m(V_\varphi)$, mistõttu $\mu \neq \hat{\varphi}(k) \in \sigma_m(V_\varphi), \quad k = 0, 1, \ldots$. Seega ka $\mu - \hat{\varphi}(k) \neq 0$ ja saame kirjutada

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\xi_k}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k \tag{35}$$

Siis

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{m,\infty} &= \left\|(\mu I - V_\varphi)^{-1} f - (\mu I - V_\varphi)^{-1} f_n\right\|_{m,\infty} \\ &= \left\|(\mu I - V_\varphi)^{-1}(f - f_n)\right\|_{m,\infty} \\ &\leq \left\|(\mu I - V_\varphi)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(C^m[0,T])} \|f - f_n\|_{m,\infty} \end{aligned} \tag{36}$$

kus $\|u\|_{m,\infty} = \|u\|_{C^m[0,T]} = \sum_{k=0}^{m} \left\|u^{(k)}\right\|_\infty$.
Juhul $m = 0$, kui $\mu \notin \sigma_0(V_\varphi)$, siis

$$\|u - u_n\|_\infty \leq \left\|(\mu I - V_\varphi)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(C[0,T])} \|f - f_n\|_\infty$$

Seega kui $f_n \to f$, siis ka $u_n \to u$. Näeme, et südamlikke integraalvõrrandeid on väga lihtne ligikaudselt lahendada. Probleeme võib esineda mõningatel juhtudel omaväärtuste $\hat{\varphi}(k)$ arvutamisega, kuid näiteks näidetes 1-3 on meil omaväärtustele lihtne kuju olemas.

Probleeme võib esineda ka funktsiooni f lähendamisel polünoomide abil, kui T on suur. Sellisel juhul saame muuta lähendamise protsessi nii, et funktsiooni f lähendatakse polünoomide f_n abil lühikesel intervallil $[0, t_0]$, $t_0 < T$.

Eeldame, et $\mu \notin \sigma_0(V_\varphi)$ ja määrame võrrandi (5) ligikaudse lahendi $u_n = (\mu I - V_\varphi)^{-1} f_n$ intervallil $[0, t_0]$ valemi (35) abil. Lõigus $t_0 \leq t \leq T$ kirjutame võrrandi (5) ümber kujul

$$\mu u(t) = t^{-1} \int_{t_0}^{t} \varphi(s/t) u(s) ds + f(t) + g(t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

kus

$$g(t) = t^{-1} \int_{0}^{t_0} \varphi(s/t) u(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Lähendades viimases integraalis funktsiooni u funktsioonide u_n abil ja tähistades

$$g_n(t) = t^{-1} \int_{0}^{t_0} \varphi(s/t) u_n(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{37}$$

saame me võrrandi

$$\mu u(t) = t^{-1} \int_{t_0}^{t} \varphi(s/t) u(s) ds + f(t) + g_n(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{38}$$

et leida u intervallil $t_0 \leq t \leq T$.

Seega me jagasime võrrandi (5) lahendi leidmise kolmeks probleemiks:

(i) funktsiooni f lähendamine polünoomide f_n abil intervallil $[0, t_0]$ ja u_n kindlaks tegemine (35) lõigul $[0, t_0]$;

(ii) operaatori g_n arvutamine valemi (37) abil lõigul $[t_0, T]$;

(iii) integraalvõrrandi (38) lahendi leidmine lõigul $[t_0, T]$

Integraaloperaator võrrandis (38) on kompaktne ruumis $C[t_0, T]$ (vaata Lemma 1 allpool), seega võrrand (38) on lahendatav standardsetel meetoditel (splainidega kollokatsioonimeetod [6]). Selle meetodi (i)-(iii) viga koosneb vigadest

$$\|u - u_n\|_{\infty,[0,t_0]} \leq \left\|(\mu I - V_\varphi)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(C[0,t_0])} \|f - f_n\|_{\infty,[0,t_0]},$$

$$\|g - g_n\|_{\infty,[t_0,T]} \le c_{t_0} \|u - u_n\|_{\infty,[0,t_0]}$$

ning võrrandi (38) ligikaudsel lahendamisel tehtud veast.

Eelmises teoreemis vajasime võrrandi (38) integraaloperaatori kompaktsust, selle tõestame järgmise lemmaga.

Lemma 1. *Olgu* $\varphi \in L^1(0,1)$ *ja* $t_0 \in (0,T)$. *Siis võrduse*

$$(V_\varphi^{[t_0,T]} u)(t) = t^{-1} \int_{t_0}^{t} \varphi(st^{-1}) u(s) ds, \quad t_0 \le t \le T, \quad u \in L^\infty(t_0,T),$$

abil on defineeritud kompaktne operaator $V_\varphi^{[t_0,T]}$ *ruumist* $L^\infty(t_0,T)$ *ruumi* $C[t_0,T]$.

Tõestus. Kui $\varphi \in C[0,1]$, siis väide on selge. Kui $\varphi \in L^1(0,1)$, siis väide saame tõestada, lähendades funktsiooni φ pidevate funktsioonidega, sest $\left\| V_\varphi^{[t_0,T]} \right\|_{L^\infty(t_0,T) \to C[t_0,T]} \le \|\varphi\|_1$. $\square$

8 Lahendi leidmine astmeridadade abil

Peatükk põhineb allikal [1]. Vaatleme mõnda juhtu, mil südamliku integraalvõrrandi (5) lahend on leitav täpselt. Kõige lihtsam juhtum on, kui vabaliige on lineaarne kombinatsioon $f(t) = \sum_{k=0}^{M} c_k t^{\lambda_k}$, kus $\operatorname{Re}\lambda_k \geq 0$. Tingimusel $\mu \neq \hat{\varphi}(\lambda_k)$, $k = 0, ..., M$, esitub võrrandi (5) lahend kujul

$$u(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(\lambda_k)} t^{\lambda_k}$$

Tõepoolest

$$\begin{aligned}
(V_\varphi u)(t) + f(t) &= \int_0^1 \varphi(x) \sum_{k=0}^{M} \frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(\lambda_k)} (xt)^{\lambda_k} dx + \sum_{k=0}^{M} c_k t^{\lambda_k} \\
&= \sum_{k=0}^{M} \left[\frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(\lambda_k)} t^{\lambda_k} \int_0^1 \varphi(x) x^{\lambda_k} dx \right] + \sum_{k=0}^{M} c_k t^{\lambda_k} \\
&= \sum_{k=0}^{M} \left[\frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(\lambda_k)} t^{\lambda_k} \hat{\varphi}(\lambda_k) \right] + \sum_{k=0}^{M} c_k t^{\lambda_k} \\
&= \sum_{k=0}^{M} \left[\frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(\lambda_k)} t^{\lambda_k} \hat{\varphi}(\lambda_k) + c_k t^{\lambda_k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{M} \frac{\mu c_k t^{\lambda_k}}{\mu - \hat{\varphi}(\lambda_k)} \\
&= \mu \sum_{k=0}^{M} \frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(\lambda_k)} t^{\lambda_k} = \mu u(t)
\end{aligned}$$

Edasi laiendame vaadeldud tähelepanekut juhule, kui funktsiooni f on võimalik arendada astmereaks.

Teoreem 13. *Oletame, et $f \in C^\infty[0, T]$ saab arendada astmereaks*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \tag{39}$$

mis koondub $0 \le t \le T'$ korral, kus $T' > T$. Olgu $\varphi \in L^1(0,1)$, $\mu \neq 0$, $\mu \neq \hat{\varphi}(k)$, kus $k = 0, 1, 2, \ldots$. Siis võrrandil (5) *on ruumis $C^\infty[0,T]$ ainus lahend*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(k)} t^k, \tag{40}$$

kus astmerida koondub ühtlaselt intervallis $0 \le t \le T$.

Enne Teoreemi 13 tõestamist näitame, et kui $\operatorname{Re}\lambda \ge 0, |\lambda| \to \infty$, siis $\hat{\varphi}(\lambda) \to 0$.

Märkus 6. Funktsiooni $\varphi \in L^1(0,1)$ korral $\hat{\varphi}(\lambda)$ on pidev pooltasandil $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ ja

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \ge 0, |\lambda| \to \infty} \left|\hat{\varphi}(\lambda)\right| = 0. \tag{41}$$

Tõesti, piirväärtus (41) kehtib, kui $\varphi(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$, sest

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_0^1 s^{\lambda+k} ds = \frac{s^{\lambda+k+1}}{\lambda+k+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\lambda+k+1} \to 0.$$

Seega (41) kehtib iga polünoomi $\varphi_n \in \mathscr{P}$, $n \in \mathbb{N}$ korral. Nüüd antud $\varphi \in L^1(0,1)$ ja suvalise väikse arvu $\varepsilon > 0$ korral võtame piisavalt suurt järku polünoomid φ_n, nii et $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$ ja võtame siis piisavalt suure c, nii et kui $|\lambda| \ge c$, $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$, siis $\left|\hat{\varphi}(\lambda)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Siis $|\lambda| \ge c$, $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ korral

$$\begin{aligned}\left|\hat{\varphi}(\lambda)\right| &= \left|\int_0^1 [\varphi(t) + \varphi_n(t) - \varphi_n(t)] t^\lambda dt\right| \\ &\le \int_0^1 \left|\varphi - \varphi_n(t)\right| t^{\operatorname{Re}\lambda} dt + \left|\int_0^1 \varphi_n(t) t^\lambda dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tõestus. Astmerea (39) koonduvusraadius $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ on teoreemi eelduse põhjal $R \ge T'$. Kuna $\hat{\varphi}(k) \to 0$, kui $k \to \infty$, siis

$$\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{c_k}{\mu - \hat{\varphi}(k)}\right|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \ge T'.$$

Seega astmerida (40) koondub intervallis $0 \leq t < T'$ ja defineerib funktsiooni $u \in C^{\infty}[0, T]$; koondumine on ühtlane lõigus $[0, T]$. Kuna operaator $\mu I - V_{\varphi}$ on tõkestatud operaator ruumis $C[0, T]$, siis võime selle astmereas (40) viia summa märgi alla ja seega u rahuldab võrrandit (5) intervallis $0 \leq t \leq T$. $\square$

Viited

[1] G. Vainikko, *Cordial Volterra Integral Equations 1*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 30:9-10, 1145-1172, Tartu, 2009.

[2] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New-York, 1991.

[3] Gennadi Vainikko, *Cordial Volterra Integral Equations 2*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 31:2, 191-219, Tartu, 2010.

[4] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[5] Urve Kangro, *Cordial Volterra Integral Equations and Singular Fractional Integro-Differential Equations in Spaces of Analytic Functions*, Mathematical Modelling and Analysis, 22:4, 548-567, Tartu, 2017.

[6] H.Brunner, *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Laura Kaldjärv,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Südamlikud integraalvõrrandid", mille juhendaja on Urve Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Laura Kaldjärv
08.05.2019