Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Sander Tamm

Adamsi tüüpi meetodid Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande numbriliseks lahendamiseks

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad:
Kaido Lätt
Mikk Vikerpuur

Tartu 2020

Adamsi tüüpi meetodid Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande numbriliseks lahendamiseks

Bakalaureuse töö
Sander Tamm

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös tutvustatakse Riemann-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaatori ning Caputo diferentsiaaloperaatori mõisteid. Lisaks tuuakse välja mõned nende kasulikud omadused ning leitakse paari üldtuntud funktsiooni murrulised tuletised. Käsitletakse erinevaid Adamsi tüüpi meetodeid Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande numbriliseks lahendamiseks ja lisaks meetodite kirjeldustele rakendatakse neid kahes näiteülesandes.
CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.
Märksõnad. Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaator, Caputo diferentsiaaloperaator, Cauchy ülesanne, Adamsi tüüpi meetodid.

Adams-type methods for numerically solving initial value problems with a Caputo fractional derivative

Bachelor's thesis
Sander Tamm

Abstract. The objective of this Bachelor's thesis is to give an overview of Riemann-Liouville and Caputo fractional differentiation operators and to present some of their useful properties. The thesis describes several Adams-type methods for numerically solving initial value problems with a Caputo fractional derivative. Some numerical examples are also given.
CERCS research specialisation: P130 Functions, diferential equations.
Key words. Riemann-Liouville fractional differentiation operator, Caputo fractional differentiation operator, Initial value problem, Adams-type methods.

Sisukord

Sissejuhatus

Kirjanduses mainiti murrulist järku tuletise mõistet juba 17. sajandi lõpus.

Mitmed tuntud matemaatikud (nt Riemann, Liouville jt) on andnud oma panuse murrulise tuletisega seotud teooria arengusse.

Pikka aega oli tegemist valdkonnaga, millest huvitusid enamasti ainult matemaatikud, kuid viimase paarikümne aasta jooksul on murrulised tuletised leidnud laialdast kasutust ka väljaspool matemaatikat.

Käesolevas bakalaureusetöös tuuakse Riemann-Liouville'i ja Caputo murrulise tuletise definitsioonid ja kirjeldatakse mõningaid nende omadusi. Lisaks sellele konstrueeritakse mõned numbrilised meetodid Caputo murrulist tuletist sisaldava Cauchy ülesande ligikaudseks lahendamiseks. Saadud numbrilisi skeeme illustreeritakse mitme erineva näitega.

Töö on jaotatud neljaks peatükiks. Esimeses peatükis on välja toodud definitsioonid ja omadused, mida kasutatakse järgnevates peatükkides.

Teises peatükis defineeritakse Riemann-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaatorid ning Caputo diferentsiaaloperaator. Lisaks tuuakse välja mõned nende operaatorite kasulikud omadused ning esitatakse mõned näited murrulise diferentsiaaloperaatori kasutamise kohta.

Kolmandas peatükis kirjeldatakse Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesannet ning esitatakse sellega samaväärne Volterra integraalvõrrand. Saadud integraalvõrrandi ligikaudseks lahendamiseks tuletatakse kolm Adamsi tüüpi numbrilist skeemi: Adams-Bashforth, Adams-Bashforth-Moulton ning Dengi modifikatsioon.

Viimases peatükis rakendatakse eelnevalt kirjeldatud numbrilisi skeeme kolme erineva Caputo murrulist tuletist sisaldava Cauchy ülesande ligikaudseks lahendamiseks ning võrreldakse arvutuslikult saadud veahinnangute suhteid teoreetiliste tulemustega.

Töö teoreetiline osa põhineb peamiselt raamatutel [1] ja [3].

1 Vajalikud mõisted ja tulemused

Selles peatükis on välja toodud definitsioonid ja omadused, mida kasutatakse järgnevates peatükkides. Peatükk tugineb raamatutel [3], [5] ja [6].

1.1 Diferentsiaal- ja integraaloperaatorid

Olgu $n \in \{0, 1, \dots\}$. Siin ja edaspidi tähistame lõigus $[0, b]$ n-korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka $C^n[0, b]$ abil, kusjuures $C^0[0, b] := C[0, b]$. Olgu D operaator, mis viib lõigus $[0, b]$ diferentseeruva funktsiooni tema tuletiseks, ehk

$$(Df)(x) := f'(x), \quad x \in [0, b].$$

Olgu J operaator, mis viib lõigus $[0, b]$ integreeruva funktsiooni f funktsiooniks Jf, mis on kujul

$$(Jf)(x) := \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Kasutame sümboleid D^n ja J^n, kus $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, et tähistada vastavalt operaatorite D ja J n-järku iteratsioone, ehk $D^1 := D$, $J^1 := J$ ja $D^n := DD^{n-1}$, $J^n := JJ^{n-1}$, kui $n \geq 2$. Kui $n = 0$, siis defineerime $D^0 := I$ ja $J^0 := I$, kus I on ühikoperaator.

Teoreem 1 (Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem)**.** *[5, lk 367] Olgu funktsioon $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ pidev ja funktsioon $F : [0, b] \to \mathbb{R}$ defineeritud järgmiselt:*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Siis funktsioon F on diferentseeruv ja $F' = f$.

Viimasest teoreemist järeldub vahetult järgnev tulemus.

Lause 1. *Olgu funktsioon $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ pidev, siis*

$$DJf = f.$$

Lausest 1 järeldub, et pideva funktsiooni f korral

$$D^n J^n f = f, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Tõestame väite (1) matemaatilise induktsiooni abil. Baas kehtib lause 1 põhjal. Oletame, et väide (1) kehtib $n = k \in \mathbb{N}$ korral ehk $D^k J^k f = f$. Näitame, et väide (1) kehtib $n = k + 1$ korral, ehk $D^{k+1} J^{k+1} f = f$. Paneme tähele, et

$$D^{k+1} J^{k+1} f = DD^k J^k Jf.$$

Tähistame $Jf := f_1$, siis induktsiooni eelduse ning lause 1 tõttu saame

$$DD^k J^k Jf = DD^k J^k f_1 = Df_1 = DJf = f.$$

Järelikult oleme näidanud, et väide (1) kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Lemma 1. *Olgu f lõigus $[0, b]$ integreeruv funktsioon, siis*

$$(J^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad 0 \le x \le b, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Tõestus. Tõestame lemma matemaatilise induktsiooni abil. Olgu f lõigus $[0, b]$ integreeruv funktsioon.
Kui $n = 1$, siis

$$\frac{1}{(1-1)!} \int_0^x (x-t)^{1-1} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt = (Jf)(x), \quad 0 \le x \le b.$$

Järelikult (2) kehtib $n = 1$ korral.
Oletame, et võrdus (2) kehtib $n = k$ korral, ehk

$$(J^k f)(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} f(t)dt, \quad x \in [0, b].$$

Peame näitama, et võrdus (2) kehtib $n = k + 1$ korral. Kuna $J^n := JJ^{n-1}$, kui $n \ge 2$, siis induktsiooni eelduse abil saame, et

$$\begin{aligned}(J^{k+1} f)(x) = (JJ^k f)(x) &= \int_0^x \left(\frac{1}{(k-1)!} \int_0^s (s-t)^{k-1} f(t)dt \right) ds \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \left(\int_0^s (s-t)^{k-1} f(t)dt \right) ds \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \left(\int_t^x (s-t)^{k-1} ds \right) f(t)dt, \quad 0 \le x \le b.\end{aligned}$$

Viimane võrdus kehtib, kuna me muutsime integreerimisjärjekorda.

Leiame integraali $\int_t^x (s-t)^{k-1} ds$:

$$\int_t^x (s-t)^{k-1} ds = \left. \frac{(s-t)^k}{k} \right|_t^x = \frac{(x-t)^k}{k}, \quad 0 \le x \le b.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \left(\int_t^x (s-t)^{k-1} ds \right) f(t)dt &= \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{k} \int_0^x (x-t)^k f(t)dt \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k f(t)dt, \quad 0 \le x \le b\end{aligned}$$

ehk

$$(J^{k+1}f)(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f(t)dt, \quad 0 \le x \le b.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et võrdus (2) kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

□

Lemma 2. *Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ sellised, et $m > n$ ja olgu funktsioon $f \in C^n[0,b]$. Siis*

$$D^n f = D^m J^{m-n} f.$$

Tõestus. Eeldame, et $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ ja olgu funktsioon $f \in C^n[0,b]$. Seose (1) põhjal kehtib

$$f = D^{m-n}J^{m-n}f, \quad f \in C^n[0,b].$$

Rakendades võrduse mõlemale poole operaatorit D^n, saame

$$D^n f = D^n D^{m-n} J^{m-n} f, \quad f \in C^n[0,b].$$

Paneme tähele, et

$$D^n D^{m-n} = \underbrace{D \dots D}_{n}\underbrace{D \dots D}_{m-n} = \underbrace{D \dots D}_{n+m-n} = D^m.$$

Seega kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$D^n f = D^n D^{m-n} J^{m-n} f = D^m J^{m-n} f, \quad f \in C^n[0,b].$$

□

1.2 Gammafunktsioon

Definitsioon 1. Funktsiooni $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x \in (0,\infty),$$

nimetatakse *gammafunktsiooniks*.

Teoreem 2. *Kui $x > 0$, siis $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Tõestus. Olgu $x > 0$. Definitsiooni 1 kohaselt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{x+1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^x e^{-t}dt.$$

Integraali $\int_0^b t^x e^{-t} dt$ leiame ositi integreerides. Võtame $u = t^x$ ja $dv = e^{-t}dt$, siis $du = xt^{x-1}dt$ ja $v = -e^{-t}$. Järelikult

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^x e^{-t} dt &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-b^x e^{-b} - 0^x e^0 + \int_0^b x t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{b\to\infty} -b^x e^{-b} + x \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} -b^x e^{-b} + x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Kuna $-b^x e^{-b} \to 0$, kui $b \to \infty$, siis saamegi, et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

□

Järeldus 1. *Kui n on naturaalarv, siis*

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \tag{3}$$

kus $0! := 1$.

Tõestus. Tõestame väite (3) matemaatilise induktsiooni abil.
Kui $n = 1$, siis definitsiooni 1 kohaselt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t}) + e^0 = 1 = 0! = (1-1)!.$$

Järelikult väide (3) kehtib $n = 1$ korral. Oletame, et väide (3) kehtib $n = k \in \mathbb{N}$ korral, ehk $\Gamma(k) = (k-1)!$. Näitame, et väide (3) kehtib ka $n = k+1$ korral. Kasutades teoreemi 2 ja matemaatilise induktsiooni eeldust saame, et

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!,$$

ehk

$$\Gamma(k+1) = k!.$$

Järelikult (3) kehtib $n = k+1$ korral. □

Järgnevates peatükkides on mõnikord kasulik vaadelda gammafunktsiooni negatiivsetest suurustest. Märgime, et teoreemi 2 abil saame $x \in (-1, 0)$ korral defineerida

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad x \in (-1, 0).$$

Sarnaselt jätkates saame gammafunktsiooni laiendada kõikidele negatiivsetele reaalarvudele, mis ei ole täisarvud.

Teoreem 3. *[6, lk 249] Olgu* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. *Siis*

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Sellest järeldub, et $x \in \mathbb{R}_+$ *korral*

$$\int_0^x t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}dt = x^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

2 Caputo diferentsiaaloperaator

Selles peatükis käsitleme Riemann-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaatoreid ning Caputo diferentsiaaloperaatorit. Lisaks on välja toodud mõned nende kasulikud omadused ning esitatud mõned näited nende kasutamise kohta. Peatükk tugineb raamatule [3].

2.1 Riemann-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaator

Definitsioon 2. Olgu α positiivne reaalarv. Operaatorit J^{α}_{R-L} , mis on defineeritud seosega

$$(J^{\alpha}_{R-L}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad 0 \le x \le b,\ f \in C[0,b],$$

nimetatakse *α-järku Riemann-Liouville'i murruliseks integraaloperaatoriks.* Defineerime $J^{0}_{R-L} := I$, kus I on ühikoperaator. Järelduse 1 ja lemma 1 põhjal näeme, et $\alpha \in \mathbb{N}$ korral $J^{\alpha}_{R-L} = J^{\alpha}$.

Riemann-Liouville'i integraaloperaatori jaoks kehtib järgnev nn. poolrühma omadus.

Teoreem 4. *[3, lk 14] Olgu $\alpha, \beta \ge 0$ ja $f \in C[0,b]$, siis*

$$J^{\alpha}_{R-L}J^{\beta}_{R-L}f = J^{\alpha+\beta}_{R-L}f.$$

Definitsioon 3. Olgu α positiivne reaalarv ja $m = \lceil\alpha\rceil$, ehk $m \in \mathbb{N}$ on selline, et $m \in [\alpha, \alpha+1)$. Operaatorit D^{α}_{R-L}, mis on defineeritud võrdusega

$$D^{\alpha}_{R-L}f := D^m J^{m-\alpha}_{R-L}f, \text{ kui } J^{m-\alpha}_{R-L}f \in C^m[0,b],$$

nimetatakse *α-järku Riemann–Liouville'i murruliseks diferentsiaaloperaatoriks*. Defineerime $D^{0}_{R-L} := I$, kus I on ühikoperaator.

Lemmast 2 järeldub, et kui $\alpha \in \mathbb{N}$, siis $D^{\alpha}_{R-L} = D^{\alpha}$. Tõepoolest, sellisel juhul $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ja

$$D^{\alpha}_{R-L}f = D^m J^{m-\alpha}_{R-L}f = D^m J^{0}_{R-L}f = D^m If = D^m f = D^{\alpha}f, \quad f \in C^m[0,b].$$

Järelikult Riemann-Liouville'i murruline tuletis on võrdne klassikalise tuletisega, kui α on naturaalarv.

Lause 2. *Olgu $\alpha \ge 0$. Siis iga $f \in C[0,b]$ korral*

$$(D^{\alpha}_{R-L}J^{\alpha}_{R-L}f)(x) = f(x), \quad 0 \le x \le b.$$

Tõestus. Kui $\alpha = 0$, on võrdus triviaalne, sest $D^0_{R-L} = I$ ja $J^0_{R-L} = I$.
Olgu $\alpha > 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$, siis definitsiooni 3 kohaselt

$$(D^\alpha_{R-L} J^\alpha_{R-L} f)(x) = (D^m J^{m-\alpha}_{R-L} J^\alpha_{R-L} f)(x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Kasutades teoreemi 4 ja seost (1) (kuna $m \in \mathbb{N}$), saame, et

$$(D^m J^{m-\alpha}_{R-L} J^\alpha_{R-L} f)(x) = (D^m J^m_{R-L} f)(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Järelikult oleme näidanud, et iga $f \in C[0, b]$ ja $0 \leq x \leq b$ korral

$$(D^\alpha_{R-L} J^\alpha_{R-L} f)(x) = (D^m J^m_{R-L} f)(x) = f(x).$$

□

Näide 1. Vaatleme funktsiooni $f(x) = c$, kus $c \in \mathbb{R}$, $x \in [0, b]$. Olgu $\alpha \geq 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$. Leiame funktsiooni f Riemann-Liouville'i α-järku murrulise tuletise.
Kui $\alpha = m$, siis

$$(D^\alpha_{R-L} f)(x) = D^m c = 0, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Kui $\alpha \neq m$ (st. $\alpha < m$), siis

$$\begin{aligned}
(D^\alpha_{R-L} f)(x) = (D^m J^{m-\alpha}_{R-L} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} c\, dt\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(-\frac{c}{m-\alpha}(x-t)^{m-\alpha}\right)\Bigg|_0^x\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{cx^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)}\right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)} D^m(x^{m-\alpha}), \quad 0 \leq x \leq b. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Märgime, et

$$\begin{aligned}
D^m(x^{m-\alpha}) &= (m-\alpha) D^{m-1}(x^{m-\alpha-1}) \\
&= \dots = (m-\alpha)(m-\alpha-1)\dots(m-\alpha-(m-1))x^{-\alpha}, \quad 0 \leq x \leq b.
\end{aligned}$$

Kirjutame lahti $\Gamma(m-\alpha)$ teoreemi 2 abil:

$$\begin{aligned}
\Gamma(m-\alpha) &= (m-\alpha-1)\Gamma(m-\alpha-1) \\
&= \dots = (m-\alpha-1)(m-\alpha-2)\dots(m-\alpha-(m-1))\Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Kui me asendame suurused $D^m(x^{m-\alpha})$ ja $\Gamma(m-\alpha)$ tagasi seosesse (4) ning teeme taandamised, siis

$$(D^\alpha_{R-L} f)(x) = \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)} D^m(x^{m-\alpha}) = \frac{cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Järelikult konstantse funktsiooni $f(x) = c$ α-järku Riemann-Liouville'i tuletis on 0 parajasti siis, kui $\alpha \in \mathbb{N}$ või $c = 0$.

Näide 2. Olgu $\alpha \geq 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$. Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^k$, kus $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ning $x \in [0, b]$. Leiame funktsiooni f Riemann-Liouville'i α-järku murrulise tuletise.
Kui $\alpha = m$, siis

$$(D^{\alpha}_{R-L} f)(x) = D^m x^k = 0, \quad 0 \leq x \leq b,$$

sest $k < m$.
Kui $\alpha \neq m$ ($\alpha < m$), siis $0 \leq x \leq b$ korral

$$(D^{\alpha}_{R-L} f)(x) = (D^m J^{m-\alpha}_{R-L} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^k \, dt\right).$$

Teoreemist 3 järeldub, et

$$\int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^k \, dt = x^{k+m-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(k+1+m-\alpha)}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Järelikult oleme saanud, et

$$\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{R-L} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} x^{k+m-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(k+1+m-\alpha)}\right) \\
&= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m x^{k+m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}, \quad 0 \leq x \leq b.
\end{aligned}$$

2.2 Caputo diferentsiaaloperaator

Olgu m naturaalarv ning $f \in C^m[0, b]$. Funktsiooni f m-järku Taylori polünoom punktis 0 on defineeritud järgmiselt:

$$(T_m f)(u) = \sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!} f^{(k)}(0), \quad u \in [0, b].$$

Definitsioon 4. Olgu α positiivne reaalarv, $m = \lceil \alpha \rceil$ ja funktsioon $f \in C^{m-1}[0, b]$ selline, et $J^{m-\alpha}_{R-L}(f - T_{m-1} f) \in C^m[0, b]$. Defineerime funktsiooni $D^{\alpha}_{Cap} f$ järgmiselt:

$$D^{\alpha}_{Cap} f := D^{\alpha}_{R-L}(f - T_{m-1} f) = D^m J^{m-\alpha}_{R-L}(f - T_{m-1} f).$$

Operaatorit D^{α}_{Cap} nimetatakse *Caputo α-järku diferentsiaaloperaatoriks.*

Võtame definitsioonis 4 $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{Cap} f &= D^m J^{m-\alpha}_{R-L}(f - T_{m-1}f) = D^m J^{m-m}_{R-L} f - D^m J^{m-m}_{R-L} T_{m-1} f = \\ &= D^m f - D^m T_{m-1} f = D^m f. \end{aligned}$$

Viimane võrdus kehtib, kuna $T_{m-1}f$ on $m-1$-järku polünoom, mistõttu $D^m T_{m-1} f = 0$. Järelikult Caputo tuletis ja klassikaline tuletis langevad kokku, kui α on naturaalarv. Defineerime $D^0_{Cap} f := I$, kus I on ühikoperaator.

Lause 3. *Olgu $\alpha \geq 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$. Eeldame, et funktsioon $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ on selline, et $D^{\alpha}_{Cap} f$ ja $D^{\alpha}_{R-L} f$ leiduvad. Siis*

$$(D^{\alpha}_{Cap} f)(x) = (D^{\alpha}_{R-L} f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{k-\alpha}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Tõestus. Olgu $\alpha \geq 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$ ning funktsioon $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ selline, et $D^{\alpha}_{Cap} f$ ja $D^{\alpha}_{R-L} f$ leiduvad. Siis definitsiooni 4 kohaselt

$$\begin{aligned} (D^{\alpha}_{Cap} f)(x) =& (D^{\alpha}_{R-L}(f - T_{m-1}f))(x) = (D^{\alpha}_{R-L} f)(x) - (D^{\alpha}_{R-L} T_{m-1} f)(x) \\ =& (D^{\alpha}_{R-L} f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} D^{\alpha}_{R-L}(x^k), \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et näite 2 põhjal

$$D^{\alpha}_{R-L}(x^k) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha} = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\begin{aligned} (D^{\alpha}_{Cap} f)(x) &= (D^{\alpha}_{R-L} f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha} \\ &= (D^{\alpha}_{R-L} f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}, \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

□

Lausest 3 järeldub vahetult järgmine tulemus, mis näitab, millal Riemann-Liouville'i ja Caputo murrulised diferentsiaaloperaatorid kokku langevad.

Lause 4. *Olgu $\alpha \geq 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$. Eeldame, et funktsioon $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ on selline, et $D^{\alpha}_{Cap} f$ ja $D^{\alpha}_{R-L} f$ leiduvad. Siis*

$$D^{\alpha}_{R-L} f = D^{\alpha}_{Cap} f$$

parajasti siis, kui

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Teoreem 5. *Kui funktsioon $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja $\alpha \geq 0$, siis*

$$D^{\alpha}_{Cap} J^{\alpha}_{R-L} f = f, \tag{5}$$

Tõestus. Tähistame $\phi = J^{\alpha}_{R-L} f$. Paneme tähele, et $k = 0, 1, \ldots, m-1$ korral teoreemist 4 ja lausest 2 järeldub, et

$$\phi^{(k)}(x) = (D^k J^{\alpha}_{R-L} f)(x) = (D^k J^k J^{\alpha-k}_{R-L} f)(x) = (J^{\alpha-k}_{R-L} f)(x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Seega

$$\begin{aligned}\phi^{(k)}(0) &= (J^{\alpha-k}_{R-L} f)(0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^0 (x-t)^{\alpha-k-1} f(t)dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.\end{aligned}$$

Lausest 4 ja lausest 2 järeldub, et

$$D^{\alpha}_{Cap} J^{\alpha}_{R-L} f = D^{\alpha}_{Cap} \phi = D^{\alpha}_{R-L} \phi = D^{\alpha}_{R-L} J^{\alpha}_{R-L} f = f.$$

□

Näide 3. Vaatleme funktsiooni $f(x) = c$, kus $c \in \mathbb{R}$, $x \in [0,b]$. Olgu $\alpha \geq 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$. Leiame funktsiooni f Caputo α-järku murrulise tuletise.
Kui $\alpha = m$, siis

$$(D^{\alpha}_{Cap} f)(x) = D^m c = 0, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Kui $\alpha \neq m$, ehk $\alpha < m$, siis definitsiooni 4 kohaselt

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{Cap} f)(x) &= (D^{\alpha}_{R-L}(f - T_{m-1} f))(x) \\ &= (D^m J^{m-\alpha}_{R-L}(f - T_0 f))(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int_0^x \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} (x-t)^{m-\alpha-1}(c-c)dt \\ &= 0, \quad 0 \leq x \leq b.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et Caputo murruline tuletis konstantsest funktsioonist on alati võrdne nulliga.

Näide 4. Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^3$, kus $x \in [0,b]$. Olgu $\alpha = \frac{1}{2}$ ja seega $m = \lceil \alpha \rceil = 1$. Leiame funktsioonist f Caputo α-järku murrulise tuletise. Defintisiooni 4 kohaselt

$$(D^{1/2}_{Cap} f)(x) = (D^{1/2}_{R-L}(f - T_{m-1} f))(x) = (D^{1/2}_{R-L}(f - T_0 f))(x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Paneme tähele, et

$$(f - T_0 f)(x) = f(x) - \frac{x^0}{0!} f(0) = f(x) - f(0) = f(x), \quad 0 \le x \le b,$$

sest $f(0) = 0^3 = 0$. Järelikult

$$\begin{aligned}
(D_{Cap}^{1/2} f)(x) &= (D_{R-L}^{1/2} f)(x) = (D^1 J_{R-L}^{1/2} f)(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(1-1/2)}\int_0^x (x-t)^{1/2-1} f(t)dt\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-t)^{-1/2} t^3 dt\right), \quad 0 \le x \le b.
\end{aligned}$$

Teoreemist 3 järeldub, et

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} t^3 dt = x^{4+\frac{1}{2}-1} \frac{\Gamma(4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(4+1/2)}, \quad 0 \le x \le b.$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\begin{aligned}
(D_{Cap}^{1/2} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-t)^{-1/2} t^3 dt\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(1/2)} x^{7/2} \frac{\Gamma(4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(9/2)}\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)\frac{6x^{7/2}}{\Gamma(9/2)} = \frac{21x^{5/2}}{\Gamma(9/2)}, \quad 0 \le x \le b.
\end{aligned}$$

3 Murrulise tuletisega Cauchy ülesande ligikaudne lahendamine

Selles peatükis kirjeldame Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesannet ning käsitleme erinevaid meetodeid selle ligikaudseks lahendamiseks. Põhiliselt tugineb peatükk raamatule [1].

3.1 Ülesande püstitus

Olgu $\alpha > 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$. Vaatleme Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{Cap} y(x) = f(x, y(x)), \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{6}$$

kus otsitavaks on funktsioon $y = y(x), x \in [0, b]$, f on ette antud pidev funktsioon ja $y_0^{(k)} \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, m-1$. Kirjandusest (vt näiteks [1] või [3]) on teada, et pideva funktsiooni f korral on algtingimustega ülesanne (6) samaväärne Volterra integraalvõrrandiga

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} x^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt, \quad x \in [0, b]. \tag{7}$$

See tähendab, et pideva funktsiooni f korral iga Cauchy ülesande (6) lahend on Volterra integraalvõrrandi (7) lahend ja vastupidi.

Näide 5. Praktilistes ülesannetes on Caputo murrulise tuletise järk enamasti ühest väiksem s.t. kehtib $0 < \alpha < 1$. Sellisel juhul $m = \lceil \alpha \rceil = 1$ ning Cauchy ülesanne (6) on kujul

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{Cap} y(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [0, b], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{8}$$

kus $y_0 \in \mathbb{R}$ ning f on ette antud pidev funktsioon. Ülesanne (8) on samaväärne Volterra integraalvõrrandiga

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt, \quad x \in [0, b].$$

Järgnevates punktides tuletame kolm numbrilist meetodit Cauchy ülesande (6) ligikaudse lahendi leidmiseks. Selleks konstrueerime mõned Adams-tüüpi diferentsskeemid Volterra integraalvõrrandile (7), vaadeldes lähemalt Adams-Bashforthi, Adams-Bashforth-Moultoni ja Dengi modifikatsiooni. Diferentsmeetodi eesmärk on anda täpse lahendi y ligikaudsed väärtused $y_k \approx y(x_k)$ etteantud sõlmpunktides x_k. Edaspidise arvutuskäigu lihtsustamiseks eeldame, et

$$x_k = \frac{k}{N}b \quad (k = 0, 1, \ldots, N),$$

kui N on ette antud sõlmpunktide arv. Osalõikude pikkust tähistame sümboliga h, st. $h = b/N$.

3.2 Adams-Moultoni tüüpi meetod murruliste diferentsiaalvõrrandite jaoks

Käsitleme esmalt Adams-Moultoni (AM) tüüpi meetodit Caputo murrulist tuletist sisaldava Cauchy ülesande (6) numbriliseks lahendamiseks. Ülesande (6) algtingimustest saame, et $y_0 = y(x_0) = y_0^{(0)}$. Lähendite $y_k \approx y(x_k)$, $k = 1, \ldots, N$, leidmise eeskirja konstrueerime võrduse (vt (7))

$$y(x_k) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y_0^{(j)}}{j!} x_k^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \tag{9}$$

põhjal. Tähistame $g(t) = f(t, y(t))$, $t \in [0, b]$. Asendame integraali $\int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} g(t) dt$ trapetsvalemil baseeruva lähendi abil:

$$\int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} g(t) dt \approx \int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} \tilde{g}_k(t) dt,$$

kus $\tilde{g}_k$ on igal osalõigul $[x_j, x_{j+1}]$ kujul

$$\tilde{g}_k(t) = g(x_j) + (t - x_j) \frac{g(x_{j+1}) - g(x_j)}{h}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \ldots, k-1.$$

Integraali aditiivsuse tõttu saame kirjutada

$$\int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} \tilde{g}_k(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_k - t)^{\alpha-1} \tilde{g}_k(t) dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_k - t)^{\alpha-1} \left(g(x_j) + (t - x_j) \frac{g(x_{j+1}) - g(x_j)}{h} \right) dt$$

$$= g(x_0) \int_{x_0}^{x_1} (x_k - t)^{\alpha-1} dt + (g(x_1) - g(x_0)) \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_0)}{h} dt$$

$$+ g(x_1) \int_{x_1}^{x_2} (x_k - t)^{\alpha-1} dt + (g(x_2) - g(x_1)) \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_1)}{h} dt + \cdots +$$

$$+ g(x_{k-2}) \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} (x_k - t)^{\alpha-1} dt + (g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})) \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_{k-2})}{h} dt$$

$$+ g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} dt + (g(x_k) - g(x_{k-1})) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_{k-1})}{h} dt.$$

Kui me viimases summas võtame kokku suuruseid $g(x_0), g(x_1), \dots g(x_k)$ sisaldavad liidetavad, siis

$$\int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} \tilde{g}_k(t) = g(x_0) \left(\int_{x_0}^{x_1} (x_k - t)^{\alpha-1} dt - \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_0)}{h} dt \right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \left(g(x_j) \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_k - t)^{\alpha-1} dt - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_j)}{h} dt \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_{j-1})}{h} dt \right) \right) + g(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_{k-1})}{h} dt.$$

Leiame suurustega $g(x_0), g(x_k)$ ja $g(x_j), j = 1, 2, \dots k-1$, seotud integraalid eraldi. Integraalide leidmisel paneme tähele, et $x_j = jh$, kui $j = 0, 1, \dots k$. Alustame suuruse $g(x_0)$ kordajast:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1}(x_k-t)^{\alpha-1}dt-\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_k-t)^{\alpha-1}(t-x_0)}{h}dt\\
&=\int_0^h(kh-t)^{\alpha-1}dt-\int_0^h\frac{(kh-t)^{\alpha-1}t}{h}dt\\
&=-\frac{(kh-t)^{\alpha}}{\alpha}\bigg|_0^h+\frac{(kh-t)^{\alpha}\left(\alpha t+kh\right)}{\alpha\left(\alpha+1\right)h}\bigg|_0^h\\
&=\frac{k^{\alpha}h^{\alpha}-(k-1)^{\alpha}h^{\alpha}}{\alpha}+\frac{(k-1)^{\alpha}h^{\alpha}(\alpha+k)}{\alpha(\alpha+1)}-\frac{k^{\alpha+1}h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}\\
&=h^{\alpha}\left(\frac{k^{\alpha}(\alpha+1-k)+(k-1)^{\alpha}(\alpha+k-\alpha-1)}{\alpha(\alpha+1)}\right)\\
&=\frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}\left((k-1)^{\alpha+1}-k^{\alpha}(k-\alpha-1)\right).
\end{aligned}$$

Suuruste $g(x_j), j=1,2,\ldots,k-1$, kordajad on võimalik leida sarnasel viisil:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_j}^{x_{j+1}}(x_k-t)^{\alpha-1}dt-\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{(x_k-t)^{\alpha-1}(t-x_j)}{h}dt\\
&\quad+\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{(x_k-t)^{\alpha-1}(t-x_{j-1})}{h}dt\\
&=-\frac{(kh-t)^{\alpha}}{\alpha}\bigg|_{jh}^{(j+1)h}+\frac{(kh-t)^{\alpha}\left(\alpha t+\left(-\alpha-1\right)jh+kh\right)}{\alpha\left(\alpha+1\right)h}\bigg|_{jh}^{(j+1)h}\\
&\quad-\frac{(kh-t)^{\alpha}\left(\alpha t+\left(-\alpha-1\right)(j-1)h+kh\right)}{\alpha\left(\alpha+1\right)h}\bigg|_{(j-1)h}^{jh}\\
&=h^{\alpha}\left(\frac{(k-j)^{\alpha}(j-k+j-k)}{\alpha(\alpha+1)}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{(k-j-1)^{\alpha}(-1-j+k)}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(k-j+1)^{\alpha}\left(-j+1+k\right)}{\alpha\left(\alpha+1\right)}\right)\\
&=h^{\alpha}\left(\frac{(k-j)^{\alpha}(2j-2k)+(k-j-1)^{\alpha+1}+(k-j+1)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right)\\
&=\frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}\left((k-j-1)^{\alpha+1}+(k-j+1)^{\alpha+1}-2(k-j)^{\alpha+1}\right).
\end{aligned}$$

Viimasena leiame $g(x_k)$ kordaja:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x_k - t)^{\alpha-1}(t - x_{k-1})}{h} dt \\
&\quad = \int_{(k-1)h}^{kh} \frac{(kh - t)^{\alpha-1}(t - (k-1)h)}{h} dt \\
&\quad = - \frac{(kh - t)^{\alpha} \left(\alpha t + (-\alpha - 1)(k-1)h + kh\right)}{\alpha(\alpha+1)h} \bigg|_{(k-1)h}^{kh} \\
&\quad = h^{\alpha} \left(\frac{\alpha k - \alpha - \alpha k - k + \alpha + 1 + k}{\alpha(\alpha+1)} \right) = \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_k} &(x_k - t)^{\alpha-1} \tilde{g}_k(t) dt = g(x_0) \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)} \big((k-1)^{\alpha+1} - k^{\alpha}(k - \alpha - 1)\big) \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} g(x_j) \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)} \big((k-j-1)^{\alpha+1} + (k-j+1)^{\alpha+1} - 2(k-j)^{\alpha+1}\big) \\
&+ g(x_k) \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et teoreemist 2 järeldub

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} \tilde{g}_k(t) dt = h^{\alpha} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} g(x_j),$$

kus kordajad $a_{j,k}$ on defineeritud seosega

$$a_{j,k} = \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \times \begin{cases} (k-1)^{1+\alpha} - (k-\alpha-1)k^{\alpha}, & \text{kui } j = 0, \\ (k-j+1)^{1+\alpha} + (k-j-1)^{1+\alpha} & \\ \qquad\qquad -2(k-j)^{1+\alpha}, & \text{kui } 1 \leq j \leq k-1, \\ 1, & \text{kui } j = k. \end{cases} \tag{10}$$

Lähendi y_k leidmiseks saame Adams-Moultoni tüüpi eeskirja

$$y_k = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y_0^{(j)}}{j!} x_k^j + h^{\alpha} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} f(x_j, y_j), \quad k = 1, \dots, N, \tag{11}$$

kus kordajad $a_{j,k}$ on defineeritud seosega (10). Tegemist on ilmutamata kujul võrrandiga tundmatu y_k suhtes, mille lahendi olemasolu ja ühesuse kohta kehtib järgnev teoreem.

Teoreem 6. *[1, lk 58] Olgu Cauchy ülesandes (6) funktsioon f pidev ja eeldame, et f rahuldab Lipschitzi tingimust oma teise argumendi suhtes, s.t. leidub konstant $L > 0$ nii, et iga $(x, y_1), (x, y_2)$ korral $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$.*
Olgu $h < \left(\frac{\Gamma(2+\alpha)}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, siis võrrandil (11) on täpselt üks lahend y_k iga $k = 1, 2, \ldots, N$ korral.

Näeme, et võrrandil (11) leidub ühene lahend küllaltki üldistel tingimustel. Samas, kuna üldjuhul on tegemist mittelineaarse võrrandiga, siis ei ole täpse lahendi otsene leidmine tavaliselt võimalik ja peame piirduma ligikaudsete vahenditega. Üks ligikaudne lahendusviis on järgnev nii-öelda prognoosi-korrektsiooni skeem.

(a) Leiame esmalt mingi ilmutatud meetodiga otsitava suuruse y_k alglähendi (prediktori), mida tähistame $y_{k,0}$ abil.

(b) Rakendame eeskirja (11), kus võrrandi paremal pool on otsitav suurus y_k asendatud prediktoriga $y_{k,0}$. Tähistame saadud suuruse $y_{k,1}$ abil. Asendades nüüd võrrandi (11) paremal pool oleva otsitava y_k suurusega $y_{k,1}$, saame järjekordse lähendi $y_{k,2}$. Nii jätkates saame iteratiivse skeemi

$$y_{k,\mu} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_k^j}{j!} y_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^\alpha a_{k,k} f(x_k, y_{k,\mu-1}), \;\; \mu = 1, \ldots, l,$$

suuruse $y_k = y_{k,l}$ (korrektori) leidmiseks, kus $l \in \mathbb{N}$ on iteratsioonide arv.

Praktikas tehakse tihti ainult üks iteratiivne samm, s.t. $l = 1$. Järgnevates punktides kirjeldame kahte prognoosi-korrektsiooni skeemi detailsemalt.

3.3 Adams-Bashforthi ja Adams-Bashforth-Moultoni tüüpi meetodid murruliste diferentsiaalvõrrandite jaoks

Konstrueerime ilmutatud Adams-Bashforthi (AB) meetodi Caputo murrulist tuletist sisaldava Cauchy ülesande (6) lahendamiseks. Erinevalt eelmisest punktist kasutame seoses (9) integraali ligikaudseks leidmiseks ristkülikmeetodil baseeruvat lähenemist. Tähistame $g(t) = f(t, y(t)), t \in [0, b]$, siis saame kirjutada

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} g(t) dt \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \left(g(x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_k - t)^{\alpha-1} dt \right).$$

Kuna $x_j = jh, j = 0, 1, \ldots, k$, siis

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_k - t)^{\alpha-1} dt = \left(-\frac{(x_k - t)^\alpha}{\alpha} \right) \Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} &= \frac{(x_k - x_j)^\alpha - (x_k - x_{j+1})^\alpha}{\alpha} \\ &= \frac{(kh - jh)^\alpha - (kh - (j+1)h)^\alpha}{\alpha} \\ &= h^\alpha \frac{(k-j)^\alpha - (k-j-1)^\alpha}{\alpha}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_k} (x_k - t)^{\alpha-1} g(t) dt \approx h^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} g(x_j) b_{j,k},$$

kus

$$b_{j,k} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}((k-j)^\alpha - (k-1-j)^\alpha). \tag{12}$$

Asendades saadud hinnangu seosesse (9), saame nn. Adams-Bashforthi tüüpi eeskirja:

$$y_k = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_k^j}{j!} y_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j),$$

kus $k = 1, 2, \ldots, N$ ja $b_{j,k}$ on antud seosega (12). Tegemist on ilmutatud meetodiga, mille veahinnangu kohta kehtib järgnev tulemus.

Teoreem 7. *[1, lk 60] Kui $D^\alpha_{Cap} y \in C^1[0, b]$, siis Adams-Bashforthi meetodi jaoks kehtib veahinnang*

$$\max_{j=1,2,\ldots,N} |y(x_j) - y_j| \le c\, h,$$

kus c on suurusest N sõltumatu konstant.

Kasutades Adams-Bashforthi ja Adams-Moultoni eeskirju prognoosi-korrektsiooni skeemis, saame nii-nimetatud Adams-Bashforth-Moultoni algoritmi, mida tähistame edaspidi lühendi ABM abil. ABM meetodis leiame lähendi $y_k \approx y(x_k)$ $(k = 1, \ldots, N)$ jaoks esmalt Adams-Bashforthi abil prediktori $y_{k,0}$:

$$y_{k,0} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_k^j}{j!} y_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j).$$

Korrektori määramiseks kasutame Adams-Moultoni meetodit, valides iteratsioonide arvuks $l \in \mathbb{N}$. Seega saame $y_k = y_{k,l}$, kus

$$y_{k,\mu} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_k^j}{j!} y_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^\alpha a_{k,k} f(x_k, y_{k,\mu-1}), \quad \mu = 1, 2, \ldots, l.$$

ABM meetodi veahinnangu jaoks kehtib järgnev tulemus.

Teoreem 8. *[1, lk 61] Kui $D^{\alpha}_{Cap}y \in C^2[0,b]$, siis Adams-Bashforth-Moultoni meetodi jaoks kehtib veahinnang*

$$\max_{j=1,2,\dots,N} |y(x_j) - y_j| \leq c\, h^q,$$

kus $q = \min\{2, 1 + l\alpha\}$ ja c on suurusest N sõltumatu konstant.

3.4 Dengi modifikatsioon murrulise ABM meetodi jaoks

Viimasena vaatleme W. Dengi poolt [2] välja pakutud modifikatsiooni eelmises punktis käsitletud murrulisele ABM meetodile. Sarnaselt murrulisele ABM meetodile on ka Dengi modifikatsioon prognoosi-korrektsiooni tüüpi meetod – Dengi puhul on kasutusel lihtsalt teine prediktor.

Tuletame Dengi modifikatsioonis kasutatava prediktori. Vaatleme Caputo murrulist tuletist sisaldavat Cauchy ülesannet (6). Lähendi y_k leidmiseks konstrueerime eeskirja, mis põhineb võrdusel (9). Esitame võrduses (9) esineva integraali kahe integraali summana:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_k}(x_k-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_{k-1}}(x_k-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt.\end{aligned}$$

Integraali $\int_0^{x_{k-1}}(x_k-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt$ leidmiseks kasutame trapetsvalemil baseeruvat lähenemist (vt. 3.2) ning integraali $\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt$ leidmiseks kasutame ristkülikvalemil baseeruvat lähenemist (vt. 3.3). Saame, et

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_k}(x_k-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \approx h^{\alpha}\sum_{j=0}^{k-2}a_{j,k}f(x_j,y_j) + h^{\alpha}c_k f(x_{k-1},y_{k-1}),$$

kus kordajad $a_{j,k}$ on defineeritud seosega (10) ning kordajad c_k avalduvad järgmiselt

$$c_1 = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-t)^{\alpha-1}dt = -\left.\frac{(x_1-t)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)h^{\alpha}}\right|_{x_0}^{x_1} = \frac{(x_1-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)h^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$$

ning $k \geq 2$ korral

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-t)^{\alpha-1}dt + \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}}(x_k-t)^{\alpha-1}\frac{t-x_{k-2}}{h}dt\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\alpha(k-1)+(-\alpha-1)(k-2)+k}{(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(kh-(k-2)h)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)h^{\alpha+1}}\\
&= \frac{\alpha+1-\alpha k+\alpha+\alpha k+k-2\alpha-2-k}{(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(k-k+2)^{\alpha+1}h^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)h^{\alpha+1}}\\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = \frac{2^{\alpha+1}-1}{\Gamma(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Seega

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}, & \text{kui } k=1,\\ \frac{2^{\alpha+1}-1}{\Gamma(2+\alpha)}, & \text{kui } k \geq 2. \end{cases} \tag{13}$$

Kordajate c_k, $k=1,\dots,N$, leidmisel arvestasime, et $x_j = jh$, kui $j=1,\dots,N$. Lähendi y_k leidmiseks saame järgmise valemi

$$y_k = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{y_0^{(j)}}{j!}x_k^j + h^\alpha\sum_{j=0}^{k-2}a_{j,k}f(x_j,y_j) + h^\alpha c_k f(x_{k-1},y_{k-1}),\ k=1,\dots,N. \tag{14}$$

Paneme tähele, et tegemist on ilmutatud valemiga.

Dengi modifikatsioonis kasutatakse valemit (14) prediktorina prognoosi-korrektsiooni tüüpi meetodis, st Dengi modifikatsiooni algoritm on järgmine:

$$\begin{aligned}
y_{k,0} &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{y_0^{(j)}}{j!}x_k^j + h^\alpha\sum_{j=0}^{k-2}a_{j,k}f(x_j,y_j) + h^\alpha c_k f(x_{k-1},y_{k-1})\\
y_{k,\mu} &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{y_0^{(j)}}{j!}x_k^j + h^\alpha\sum_{j=0}^{k-1}a_{j,k}f(x_j,y_j) + h^\alpha a_{k,k}f(x_k,y_{k,\mu-1}) \quad (\mu=1,2,\dots,l)\\
y_k &= y_{k,l}.
\end{aligned}$$

Kui me võrdleme Dengi modifikatsiooni algoritmi murrulise ABM meetodi algoritmiga, siis me näeme, et üldiselt tuleb Dengi modifikatsiooni rakendamisel teha vähem arvutusi. Erinevus tuleneb sellest, et ABM meetodis on vaja arvutada prediktori ja esimese korrektori summad eraldi, kuna korrektori eeskirjas esinev summa erineb prediktori eeskirja omast. Dengi modifikatsiooni korral on prediktori ja korrektori eeskirjades esinevad summad peaaegu samad: korrektoris tuleb prediktori summale juurde liita vaid $a_{k-1,k}f(x_{k-1},y_{k-1})$. Edasised korrektorid kasutavad mõlemal juhul esimese korrektori summat, seega sealt arvutusi ei lisandu.
Dengi modifikatsiooni vea kohta on teada järgmine tulemus (vt. [1] või [2]).

Teoreem 9. *[1, lk 63] Kui $D^{\alpha}_{Cap}y \in C^2[0,b]$, siis Dengi modifikatsiooni viga avaldub järgmiselt:*

$$\max_{j=1,\dots,N} |y(x_j) - y_j| \le c\, h^q,$$

kus $q = \min\{2, 1 + (l+1)\alpha\}$ ja c on suurusest N sõltumatu konstant.

Võrreldes murrulise ABM meetodi ja Dengi modifikatsiooni veahinnanguid, näeme, et Dengi algoritm l korrektori sammuga annab sama täpsuse, mis ABM meetod $l+1$ korrektori sammuga.

4 Numbrilised näited

Siin peatükis vaatleme kolme erinevat Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesannet. Lahendame need numbriliselt eelmises peatükis tuletatud Adams-Bashforthi, ABM ning Dengi prognoosi-korrektsiooni meetoditega.
Olgu ülesande täpne lahend $y = y(x), x \in [0,1]$. Vastava meetodiga saadud lähislahendid tähistame $y_k, k = 0, \ldots, N$, nende leidmiseks kasutame lõigul $[0,1]$ moodustatud ühtlaseid võrke kujul

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \frac{1}{N}, \tag{15}$$

kus

$$N = 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots, 8.$$

Iga ühtlase võrgu korral leiame vead

$$e_N := \max_{k=1,2,\ldots,N} |y(x_k) - y_k|$$

ja arvutame veasuhted

$$S_N = \frac{e_{N/2}}{e_N}.$$

Saadud tulemused on esitatud tabelites 1-6. Iga tabeli viimane rida näitab vastava meetodi lähislahendite teoreetilist veahinnangute suhet. Kuna mõlema prognoosi-korrektsiooni meetodi korral piirdume ühe iteratsiooniga, siis on teoreemides 7, 8 ja 9 esitatud hinnangute põhjal alust arvata, et suhted S_N lähenevad AB, ABM ja Dengi modifikatsiooni korral vastavalt suurustele $2, 2^{\min\{2,1+\alpha\}}$ ja $2^{\min\{2,1+2\alpha\}}$. Ülesannete numbrilisel lahendamisel on kasutatud autori poolt Pythoni keskkonnas kirjutatud programme, mis on esitatud töö lisas.

4.1 Näiteülesanne 1

Esimese näitena vaatleme Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}}_{Cap} y(x) = \frac{21x^{5/2}}{\Gamma(9/2)} - y(x) + x^3, \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Näeme, et tegemist on ülesandega kujul (6), kus $\alpha = \frac{1}{2}, m = \lceil \alpha \rceil = 1, y_0 = y(0) = 0$ ja $f(x, y(x)) = \frac{21x^{5/2}}{\Gamma(9/2)} - y(x) + x^3$. Näite 4 põhjal on ülesande (16) täpne lahend $y(x) = x^3$. Leiame lähislahendid $y_k \approx y(x_k)$, kus x_k on defineeritud (15) abil, kasutades eelmises peatükis käsitletud numbrilisi skeeme.

1. Adams-Bashforthi meetod
   Leiame y_k punktis 3.4 tuletatud eeskirja abil:
$$y_k = \frac{x_k^0}{0!} y_0 + h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j) = h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j),$$
   kus $k = 1, 2, \ldots, N$ ja $b_{j,k}$ on defineeritud valemiga (12).

Tabel 1. Ülesande (16) veahinnangud Adams-Bashforthi meetodiga

N	e_N	S_N
4	$6.092 \cdot 10^{-1}$	
8	$3.785 \cdot 10^{-1}$	1.609
16	$2.107 \cdot 10^{-1}$	1.797
32	$1.099 \cdot 10^{-1}$	1.918
64	$5.549 \cdot 10^{-2}$	1.980
128	$2.765 \cdot 10^{-2}$	2.007
256	$1.372 \cdot 10^{-2}$	2.016
		2

2. ABM prognoosi-korrektsiooni meetod
   Lähislahendid $y_k = y_{k,1}$ leiame punktis 3.3 kirjeldatud eeskirja abil:
$$\begin{aligned} y_{k,1} &= \frac{x_k^0}{0!} y_0 + h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}) \\ &= h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}), \end{aligned}$$
   kus
$$y_{k,0} = \frac{x_k^0}{0!} y_0 + h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j) = h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j),$$
   $k = 1, 2, \ldots, N$, $a_{j,k}$ on defineeritud seosega (10) ning $b_{j,k}$ on defineeritud seosega (12).

Tabel 2. Ülesande (16) veahinnangud ABM meetodiga

N	e_N	S_N
4	$1.781 \cdot 10^{-1}$	
8	$8.119 \cdot 10^{-2}$	2.193
16	$3.282 \cdot 10^{-2}$	2.474
32	$1.248 \cdot 10^{-2}$	2.630
64	$4.601 \cdot 10^{-3}$	2.712
128	$1.669 \cdot 10^{-3}$	2.757
256	$5.999 \cdot 10^{-4}$	2.782
		2.828

3. Dengi prognoosi-korrektsiooni meetod
   Lähislahendid $y_k = y_{k,1}$ leiame punktis 3.4 kirjeldatud eeskirja abil:

$$
\begin{aligned}
y_{k,1} &= \frac{x_k^0}{0!} y_0 + h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}) \\
&= h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}),
\end{aligned}
$$

   kus

$$
\begin{aligned}
y_{k,0} &= \frac{x_k^0}{0!} y_0 + h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-2} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} c_k f(x_{k-1}, y_{k-1}) \\
&= h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-2} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} c_k f(x_{k-1}, y_{k-1}),
\end{aligned}
$$

   $k = 1, 2, \ldots, N$, $a_{j,k}$ on defineeritud valemiga (10) ning c_k on defineeritud valemiga (13).

Tabel 3. Ülesande (16) veahinnangud Dengi meetodiga

N	e_N	S_N
4	$1.355 \cdot 10^{-1}$	
8	$4.774 \cdot 10^{-2}$	2.839
16	$1.435 \cdot 10^{-2}$	3.326
32	$3.988 \cdot 10^{-3}$	3.599
64	$1.063 \cdot 10^{-3}$	3.751
128	$2.769 \cdot 10^{-4}$	3.839
256	$7.113 \cdot 10^{-5}$	3.893
		4

Näeme, et näiteülesande 1 korral on saadud arvutuslikud veasuhted kooskõlas teoreetiliste tulemustega.

4.2 Näiteülesanne 2

Vaatleme Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesannet

$$
\begin{cases}
D^{\alpha}_{Cap} y(x) = & \frac{40320}{\Gamma(9-\alpha)} x^{8-\alpha} - 3\frac{\Gamma(5+\alpha/2)}{\Gamma(5-\alpha/2)} x^{4-\alpha/2} + \frac{9}{4}\Gamma(\alpha+1) \\
& + \left(\frac{3}{2} x^{\alpha/2} - x^4\right)^3 - (y(x))^{3/2}, \quad x \in [0,1], \\
y(0) = 0, \\
y'(0) = 0,
\end{cases}
\tag{17}
$$

kus $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \alpha_2 = \frac{3}{2}$. Märgime, et tingimus $y_0' = y'(0) = 0$ on vajalik ainult $\alpha = \alpha_2$ korral. Artikli [4] põhjal on Cauchy ülesande (17) täpne lahend kujul

$$y(x) = x^8 - 3x^{4+\alpha/2} + \frac{9}{4}x^\alpha, \quad x \in [0,1].$$

Leiame α_1 ja α_2 korral vastavate ülesannete lähislahendid $y_k \approx y(x_k)$, kus x_k on defineeritud (15) abil, kasutades eelmises peatükis käsitletud numbrilisi skeeme.

1. Adams-Bashforthi meetod
   Olgu $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}$, siis leiame y_k punktis 3.3 tuletatud eeskirja abil:

   $$y_k = \frac{x_k^0}{0!}y_0 + h^{1/2}\sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j) = h^{1/2}\sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j),$$

   kus $k = 1, 2, \ldots, N$ ja $b_{j,k}$ on defineeritud valemiga (12).
   Olgu $\alpha = \alpha_2 = \frac{3}{2}$, siis leiame y_k punktis 3.3 tuletatud eeskirja abil:

   $$y_k = \frac{x_k^0}{0!}y_0 + \frac{x_k}{1!}y_0' + h^{3/2}\sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j) = h^{3/2}\sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j),$$

   kus $k = 1, 2, \ldots, N$ ja $b_{j,k}$ on defineeritud valemiga (12).

Tabel 4. Ülesande (17) veahinnangud Adams-Bashforthi meetodiga

	$\alpha = \frac{1}{2}$		$\alpha = \frac{3}{2}$	
N	e_N	S_N	e_N	S_N
4	$4.189 \cdot 10^{-1}$		$6.497 \cdot 10^{-1}$	
8	$2.104 \cdot 10^{-1}$	1.991	$3.330 \cdot 10^{-1}$	1.951
16	$9.900 \cdot 10^{-2}$	2.126	$1.659 \cdot 10^{-1}$	2.007
32	$4.789 \cdot 10^{-2}$	2.067	$8.319 \cdot 10^{-2}$	1.994
64	$2.334 \cdot 10^{-2}$	2.052	$4.151 \cdot 10^{-2}$	2.004
128	$1.147 \cdot 10^{-2}$	2.035	$2.073 \cdot 10^{-2}$	2.003
256	$5.663 \cdot 10^{-3}$	2.025	$1.036 \cdot 10^{-2}$	2.001
		2		2

2. ABM prognoosi-korrektsiooni meetod
   Olgu $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}$, siis lähislahendi $y_k = y_{k,1}$ leiame punktis 3.3 kirjeldatud eeskirja abil:

   $$\begin{aligned} y_{k,1} &= \frac{x_k^0}{0!}y_0 + h^{1/2}\sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2}a_{k,k}f(x_k, y_{k,0}) \\ &= h^{1/2}\sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2}a_{k,k}f(x_k, y_{k,0}), \end{aligned}$$

kus

$$y_{k,0} = \frac{x_k^0}{0!} y_0 + h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j) = h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j),$$

$k = 1, 2, \ldots, N$, $a_{j,k}$ on defineeritud valemiga (10) ja $b_{j,k}$ on defineeritud valemiga (12).
Olgu $\alpha = \alpha_2 = \frac{3}{2}$, siis lähislahendi $y_k = y_{k,1}$ leiame punktis 3.3 kirjeldatud eeskirja abil:

$$\begin{aligned} y_{k,1} &= \frac{x_k^0}{0!} y_0 + \frac{x_k}{1!} y_0' + h^{3/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{3/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}) \\ &= h^{3/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{3/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}), \end{aligned}$$

kus

$$y_{k,0} = \frac{x_k^0}{0!} y_0 + \frac{x_k}{1!} y_0' + h^{3/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j) = h^{3/2} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} f(x_j, y_j),$$

$k = 1, 2, \ldots, N$, $a_{j,k}$ on defineeritud valemiga (10) ja $b_{j,k}$ on defineeritud valemiga (12).

Tabel 5. Ülesande (17) veahinnangud ABM meetodiga

	$\alpha = \frac{1}{2}$		$\alpha = \frac{3}{2}$	
N	e_N	S_N	e_N	S_N
4	$4.267 \cdot 10^{-1}$		$8.473 \cdot 10^{-2}$	
8	$1.308 \cdot 10^{-1}$	3.262	$1.979 \cdot 10^{-2}$	4.283
16	$3.655 \cdot 10^{-2}$	3.579	$4.698 \cdot 10^{-3}$	4.212
32	$1.086 \cdot 10^{-2}$	3.364	$1.127 \cdot 10^{-3}$	4.167
64	$3.396 \cdot 10^{-3}$	3.199	$2.732 \cdot 10^{-4}$	4.126
128	$1.105 \cdot 10^{-3}$	3.074	$6.678 \cdot 10^{-5}$	4.091
256	$3.689 \cdot 10^{-4}$	2.994	$1.642 \cdot 10^{-5}$	4.068
		2.828		4

3. Dengi prognoosi-korrektsiooni meetod
Olgu $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}$, siis lähislahendi $y_k = y_{k,1}$ leiame punktis 3.4 kirjeldatud eeskirja abil:

$$\begin{aligned} y_{k,1} &= \frac{x_k^0}{0!} y_0 + h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}) \\ &= h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}), \end{aligned}$$

kus

$$y_{k,0} = h^{1/2} \sum_{j=0}^{k-2} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{1/2} c_k f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$

$k = 1, 2, \ldots, N$, $a_{j,k}$ on defineeritud valemiga (10) ja c_k on defineeritud valemiga (13).

Olgu $\alpha = \alpha_2 = \frac{3}{2}$, siis lähislahendi $y_k = y_{k,1}$ leiame punktis 3.3 kirjeldatud eeskirja abil:

$$\begin{aligned} y_{k,1} &= \frac{x_k^0}{0!} y_0 + \frac{x_k}{1!} y_0' + h^{3/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{3/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}) \\ &= h^{3/2} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{3/2} a_{k,k} f(x_k, y_{k,0}), \end{aligned}$$

kus

$$y_{k,0} = h^{3/2} \sum_{j=0}^{k-2} a_{j,k} f(x_j, y_j) + h^{3/2} c_k f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$

$k = 1, 2, \ldots, N$, $a_{j,k}$ on defineeritud valemiga (10) ja c_k on defineeritud valemiga (13).

Tabel 6. Ülesande (17) veahinnangud Dengi meetodiga

	$\alpha = \frac{1}{2}$		$\alpha = \frac{3}{2}$	
N	e_N	S_N	e_N	S_N
4	$4.041 \cdot 10^{-1}$		$7.182 \cdot 10^{-2}$	
8	$9.975 \cdot 10^{-2}$	4.051	$1.645 \cdot 10^{-2}$	4.365
16	$2.081 \cdot 10^{-2}$	4.793	$4.042 \cdot 10^{-3}$	4.069
32	$4.672 \cdot 10^{-3}$	4.454	$1.008 \cdot 10^{-3}$	4.011
64	$1.093 \cdot 10^{-3}$	4.276	$2.519 \cdot 10^{-4}$	4.001
128	$2.615 \cdot 10^{-4}$	4.177	$6.298 \cdot 10^{-5}$	4.000
256	$6.350 \cdot 10^{-5}$	4.119	$1.574 \cdot 10^{-5}$	4.000
		4		4

Näeme, et näiteülesande 2 korral on saadud arvutuslikud veasuhted kooskõlas teoreetiliste tulemustega.

Kirjandus

[1] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J Trujillo. *Fractional calculus : models and numerical methods*. New Jersey: World Scientific, 2016.

[2] W. Deng. *Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation*. Journal of Computational Physics 227, 510–1522 (2007).

[3] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[4] K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed. *A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations*. Nonlinear Dynamics 29, 3–22 (2002).

[5] G. Kangro. *Matemaatiline analüüs I*. Tallinn: Valgus, 1982.

[6] G. Kangro. *Matemaatiline analüüs II*. Tallinn: Valgus, 1968.

Lisa

Lisas on toodud peatüki 4 näidete lahendamiseks kasutatud Pythoni programmid.

1. Programm leiab Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi Adams-Bashforthi meetodil.

```
   breakatwhitespace
import numpy as np
from scipy.special import gamma
import decimal

viga = np.zeros(7)
for g in range(2,9): # kordab koodi N = 4, 8, ..., 256
                     # jaoks
    # Parameetrid
    b = 1 # lõigu [0,b] määramine
    N = 2**g # sõlmede arv
    alpha = 3/2 # Caputo tuletise järk
    h = b/N # sammu pikkus
    m = np.ceil(alpha) # väikseim naturaalarv, mis on
                       # alphast suurem
    # Cauchy ülesandes antud tuletised
    ytul0 = np.zeros(int(m))
    ytul0[0] = 0
    ytul0[1] = 0
    # Sõlmedele väärtuste andmine
    x = np.zeros(N+1)
    for i in range(0,N+1):
        x[i] = h*i
    # Lähendite maatriks
    y = np.zeros(N+1)
    y[0] = ytul0[0]

    # Täpse funktsiooni y(x) definitsioon
    def ytäp(x):
        return x**8-3*x**(4+alpha/2)+9/4*x**alpha

    # Cauchy ülesandes antud funktsioon f(x,y)
    def f(x,y):
        return (40320/(gamma(9-alpha))*x**(8-alpha)-
                 3*gamma(5+alpha/2)/gamma(5-alpha/2)*
                 x**(4-alpha/2)+9/4*gamma(alpha+1)+
                 (3/2*x**(alpha/2)-x**4)**3 - y**(3/2))
```

```
# Seoses (12) leitud kordaja b_(j,k)
def b(j,k):
    return (1/(gamma(1+alpha))*((k-j)**alpha-
            (k-1-j)**alpha))

# Meetodi abil lähislahendite leidmine
for k in range(1,N+1):
    sum1 = 0 # Adams-Bashforthi meetodi summa
             # esimene liige
    sum2 = 0 # Adams-Bashforthi meetodi summa
             # teine liige ilma kordajata h**(alpha)
    for i in range(0, int(m)):
        sum1 = (sum1 + ((x[k]**i)/np.math.factorial(i))
        *ytul0[i]) # esimese liikme arvutamine
    for j in range(0, k):
        # teise liikme arvutamine
        sum2 = sum2 + b(j,k)*f(x[j],y[j])
    y[k] = sum1 + (h**alpha)*sum2 # AB meetodil saadud
                                  # lähislahend y_k

# Meetodi tehtud vea arvutamine
def suurimviga(x,y):
    # võtame esialgselt veaks esimeses sõlmes
    # tehtud vea
    viga = np.abs(ytäp(x[0])-y[0])
    # leiame igas punktis tehtud vea,
    # maksimaalseks valime neist suurima
    for i in range(1,N+1):
        viga1 = np.abs(ytäp(x[i])-y[i])
        if viga <= viga1:
            viga = viga1
        else:
            None
    return viga

# Informatsiooni väljastamine
viga[g-2] = suurimviga(x,y)
print("N =", N)
print("Suurim tehtud viga:", round(viga[g-2],10))
if g != 2:
    print("Vigade suhe:",
            round(viga[g-3]/viga[g-2],3))
else:
```

```
None
```

2. Programm leiab Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi ABM meetodil.

```
breakatwhitespace
import numpy as np
from scipy.special import gamma

viga = np.zeros(7)
for g in range(2,9): # kordab koodi N = 4, 8, ..., 256
                     # jaoks
    # Parameetrid
    b = 1 # lõigu [0,b] määramine
    N = 2**g # sõlmede arv
    alpha = 3/2 # Caputo tuletise järk
    h = b/N # sammu pikkus
    m = np.ceil(alpha) # väikseim naturaalarv, mis on
                       # alphast suurem
    # Cauchy ülesandes antud tuletised
    ytul0 = np.zeros(int(m))
    ytul0[0] = 0
    ytul0[1] = 0
    # Sõlmedele väärtuste andmine
    x = np.zeros(N+1)
    for i in range(0,N+1):
        x[i] = h*i
    # Prediktorite maatriks
    y0 = np.zeros(N+1)
    y0[0] = ytul0[0]
    # Lähislahendite maatriks
    y1 = np.zeros(N+1)
    y1[0] = y0[0]

    # Täpse funktsiooni y(x) definitsioon
    def ytäp(x):
        return x**8-3*x**(4+alpha/2)+9/4*x**alpha

    # Cauchy ülesandes antud funktsioon f(x,y)
    def f(x,y):
        return (40320/(gamma(9-alpha))*x**(8-alpha)-
                3*gamma(5+alpha/2)/gamma(5-alpha/2)*
                x**(4-alpha/2)+9/4*gamma(alpha+1)+
                (3/2*x**(alpha/2)-x**4)**3 - y**(3/2))
    # Kordaja a_(j,k) seosest (10)
```

```
def a(j,k):
    if j == 0:
        return (1/gamma(2+alpha)*((k-1)**(1+alpha)-
                (k-alpha-1)*k**alpha))
    elif j >= 1 and (k-1) >= j:
        return (1/gamma(2+alpha)*((k-j+1)**(1+alpha)+
                (k-j-1)**(1+alpha)-2*(k-j)**(1+alpha)))
    elif j == k:
        return 1/gamma(2+alpha)

# Kordaja b_(j,k) seosest (12)
def b(j,k):
    return (1/(gamma(1+alpha))*((k-j)**alpha-
            (k-1-j)**alpha))

# Meetodi abil lähislahendite leidmine
for k in range(1,N+1):
    sum1 = 0 # Adams-Bashforthi meetodi summa
             # esimene liige
    sum2 = 0 # Adams-Bashforthi meetodi summa
             # teine liige ilma kordajata h**(alpha)
    sum3 = 0 # ABM meetodi summa teine liige
             # ilma kordajata h**(alpha)
    for i in range(0, int(m)):
        sum1 = (sum1 + ((x[k]**i)/np.math.factorial(i))
        *ytul0[i]) # AB esimese liikme arvutamine
    for j in range(0, k):
        # AB teise liikme arvutamine
        sum2 = sum2 + b(j,k)*f(x[j],y1[j])
    y0[k] = sum1 + h**alpha*sum2 # prediktori leidmine
    for j in range(k):
        # ABM teise liikme arvutamine
        sum3 = sum3 + a(j,k)*f(x[j],y1[j])
    # ABM meetodil saadud lähislahend y_k
    y1[k] = (sum1 + h**alpha*sum3 +
             h**alpha*a(k,k)*f(x[k],y0[k]))

# Meetodi tehtud vea arvutamine
def suurimviga(x,y):
    # võtame esialgselt veaks esimeses sõlmes
    # tehtud vea
    viga = np.abs(ytäp(x[0])-y[0])
    # leiame igas punktis tehtud vea,
    # maksimaalseks valime neist suurima
```

```
        for i in range(1,N+1):
            viga1 = np.abs(ytäp(x[i])-y[i])
            if viga <= viga1:
                viga = viga1
            else:
                None
        return viga

    # Informatsiooni väljastamine
    viga[g-2] = suurimviga(x,y1)
    print("N =", N)
    print("Suurim tehtud viga:", round(viga[g-2],10))
    if g != 2:
        print("Vigade suhe:",
                round(viga[g-3]/viga[g-2],3))
    else:
        None
```

3. Programm leiab Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi Dengi modifikatsiooniga.

```
  breakatwhitespace
import numpy as np
from scipy.special import gamma
import matplotlib.pyplot as plt


viga = np.zeros(7)
for g in range(2,9): # kordab koodi N = 4, 8, ..., 256
                     # jaoks
    # Parameetrid
    b = 1 # lõigu [0,b] määramine
    N = 2**g # sõlmede arv
    alpha = 3/2 # Caputo tuletise järk
    h = b/N # sammu pikkus
    m = np.ceil(alpha) # väikseim naturaalarv, mis on
                       # alphast suurem
    # Cauchy ülesandes antud tuletised
    ytul0 = np.zeros(int(m))
    ytul0[0] = 0
    ytul0[1] = 0
    # Sõlmedele väärtuste andmine
    x = np.zeros(N+1)
    for i in range(0,N+1):
        x[i] = h*i
```

```
# Prediktorite maatriks
y0 = np.zeros(N+1)
y0[0] = ytul0[0]
# Lähislahendite maatriks
y1 = np.zeros(N+1)
y1[0] = y0[0]

# Täpse funktsiooni y(x) definitsioon
def ytäp(x):
    return x**8-3*x**(4+alpha/2)+9/4*x**alpha

# Cauchy ülesandes antud funktsioon f(x,y)
def f(x,y):
    return (40320/(gamma(9-alpha))*x**(8-alpha)-
              3*gamma(5+alpha/2)/gamma(5-alpha/2)*
              x**(4-alpha/2)+9/4*gamma(alpha+1)+
              (3/2*x**(alpha/2)-x**4)**3 - y**(3/2))

# Kordaja a_(j,k) seosest (10)
def a(j,k):
    if j == 0:
        return (1/gamma(2+alpha)*((k-1)**(1+alpha)-
                 (k-alpha-1)*k**alpha))
    elif j >= 1 and (k-1) >= j:
        return (1/gamma(2+alpha)*((k-j+1)**(1+alpha)+
                 (k-j-1)**(1+alpha)-2*(k-j)**(1+alpha)))
    elif j == k:
        return 1/gamma(2+alpha)

# Kordaja b_(j,k) seosest (12)
def b(j,k):
    return (1/(gamma(1+alpha))*((k-j)**alpha-
              (k-1-j)**alpha))

# Kordaja c_k seosest (13)
def c(k):
    if k == 1:
        return 1/gamma(1+alpha)
    else:
        return (2**(alpha+1)-1)/gamma(2+alpha)

# Meetodi abil lähislahendite leidmine
for k in range(1,N+1):
    sum1 = 0 # lähendi summa esimene liige
```

```
    sum2 = 0 # lähendi summa teine liige
             # ilma kordajata h**(alpha)
    for i in range(int(m)):
        sum1 = (sum1 + ((x[k]**i)/np.math.factorial(i))
                *ytul0[i])
    for j in range(k-1):
        sum2 = sum2 + a(j,k)*f(x[j],y1[j])
    # prediktori leidmine
    y0[k] = (sum1 + h**alpha*sum2 + h**alpha*
             c(k)*f(x[k-1],y1[k-1]))
    # Dengi modifikatsiooniga
    # lähislahendi leidmine
    y1[k] = (sum1 + h**alpha*sum2 + h**alpha*
             a(k-1,k)*f(x[k-1],y1[k-1]) +
             h**alpha*a(k,k)*f(x[k],y0[k]))

# Meetodi tehtud vea arvutamine
def suurimviga(x,y):
    # võtame esialgselt veaks esimeses sõlmes
    # tehtud vea
    viga = np.abs(ytäp(x[0])-y[0])
    # leiame igas punktis tehtud vea,
    # maksimaalseks valime neist suurima
    for i in range(1,N+1):
        viga1 = np.abs(ytäp(x[i])-y[i])
        if viga <= viga1:
            viga = viga1
        else:
            None
    return viga

# Informatsiooni väljastamine
viga[g-2] = suurimviga(x,y1)
print("N =", N)
print("Suurim tehtud viga:", round(viga[g-2],10))
if g != 2:
    print("Vigade suhe:",
          round(viga[g-3]/viga[g-2],3))
else:
    None
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Sander Tamm,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose, Adamsi tüüpi meetodid Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande numbriliseks lahendamiseks, mille juhendajad on Kaido Lätt ja Mikk Vikerpuur, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Sander Tamm
10.06.2020