

277461

Sisse antud

2.02.1938.

U. Rõõps

Kattumismuutlikkude dünaamika.

H. Keres.

Tartus, 1938.

26. aprillil 1946. a. TRÜ
Õpet. Nõukogu poolt ümber-
kinnitatud füüsika-matema-
tikateaduste kandidaadiks.
15. okt. 1946. a. J. Maaroo.
TRÜ Teadusl. sekretär

Sisu.

	lk.
<u>I.</u> <u>Sissejuhatus.</u>	1
<u>II.</u> <u>Dünaamiline süsteem.</u>	
§.1. Pöörlev gaaskera.	5
§.2. Dünaamiline süsteem.	12
§.3. Kineetiline energia.	16
§.4. Potentsiaalne energia.	20
§.5. Kineetiline potentsiaal.	25
<u>III.</u> <u>Likumise diferentsiaalvõrrandid</u> <u>ja nende integratsioon.</u>	
§.6. Modifitseeritud kineetiline potentsiaal.	27
§.7. Likumise diferentsiaalvõrrandid.	31
§.8. Likumise diferentsiaalvõrrandite inte- gratsioon.	34
<u>IV.</u> <u>Süsteemi liikumised.</u>	
§.9. Likumise diferentsiaalvõrrandite la- hendite lühike diskussioon.	41
§.10. Võnkeamplituudide ja -perioodide suuruslikud vahekorrad.	44
§.11. Orbüt.	52

§. 12. Mõned perioodilised muutused kattumis-
muutliku teoreetilise valguskõvera mi-
nimumi aegades.

lx.

58

v. Lõppkokkuvõtt.

65

Kirjanduse loetelu.

1. J. Jeans. Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Cambridge 1919.
2. J. Jeans. Astronomy and Cosmogony, Cambridge 1928.
3. K. Walter. Die Bewegungsverhältnisse in sehr engen Doppelsternsystemen, Veröff. der Univ.-Sternw. Königsberg, Heft 3, 1933.
4. K. Walter. Untersuchungen über Bedeckungsveränderliche, Veröff. der Univ.-Sternw. Königsberg, Heft 2, 1931.
5. H. Klauder. Über den inneren Aufbau von Bedeckungsveränderliche, Astronomische Nachrichten Nr. 6097, Bd. 255, p. 1.
6. H. Klauder. Zur Theorie rotierender Sterne, Astronomische Nachrichten Nr. 5982-83, Bd. 250, p. 89.

7. J. Ellsworth. *Recherches sur les étoiles doubles à éclipse. Publ. de l'Observ. de Lyon, Tome II, sér. I, Fasc. I.*
8. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge, 1904.*
9. H. C. Plummer. *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, Cambridge, 1918.*
10. J. Stein. *Die veränderlichen Sterne, Bd. II. Freiburg, 1924.*

Märkus: tekstis esinevad, nurgelistes sulgudes [] olevad arvud tähendavad teoste järjekorra numbroid eelpooltoodud kirjanduse loetelus.

I. Sissejuhatus.

Taeva mehaanika klassilisi probleeme on kahe keha probleem: kaks masspunkti, mis mõjutavad üksteist Newtoni gravitatsiooni seaduse järgi, liiguvad välisjõududest vabas ruumis; misugune on nende liikumine? Küsimus on lihtsaimaid taeva mehaanikas ja tema lahendus leidub juba Newtoni enese töis. Planeetide ja kaksiktähtede liikumise uurimisel leidis probleem pädamise rakenduse, kuna siin on masside omavahelised kaugused nii suured, et masside eneste dimensioonid osutuvad kadurväikesiks võrreldes omavaheliste kaugustega, ja on tegemist tõesti praktiliselt masspunktide liikumisega.

Muutlikkude tähtede hulgas on liik tähti, nn. kattumismuutlikud, mida nende valguskõvera iseloomulise kuju tõttu peetakse kaksiktähtedeks. Nende komponendid asuvad üksteisele väga ligidal ja teede tasapinnad on peaaegu rööbikud vaatesuunaga, nii et komponentide samaaegsel sattumisel vaatesuunale tekivad varjutuse nähtused, mis tingivad tähe kogu heleduses perioodilisi muutusi. Nisuguste kaksiktähtede liiku-

mise uurimiseks ei kõlba enam kahe keha probleemi lahendid nende esialgses kujus, sest nüüd on masside eneste dimensioonid juba võrreldavad nende omavaheliste kaugustega. Probleemi tuleb laiendada. Käesoleva töö ülesandeks ongi uurida nüisuguse üldistatud kahe keha probleemi lahendust ühel erijuhul, mis sobib eriti kattumismuutlikkude liikumise kirjeldamiseks.

Massideks on mitteühtlase struktuuriga gaaskerad, mis vastastikuse külgetõmbe jõu mõjul deformunud ja mis pöörlevad ümber oma telje sama keskmise perioodiga, millega nad türlevad üksteise ümber peaaegu ringilisel teel. Nüisuguse dünaamilise süsteemi liikumine on määratav, kui on arvatatud süsteemi kineetiline ja potentsiaalne energia. Väimate arvutamisel tekivad aga raskused. Gaasilised kehad ei pöörle nii, nagu kõvad kehad, vaid siin on massi eri osadel ka erinevad nurkkiirused. See nurkkiiruste jaotus pöörlevas gaaskeras ei ole üldiselt teada, mistõttu ka süsteemi kineetiline energia jääb teataval määral tundmatuks. Pääle selle ei ole teada tiheduse jaotus kerades ega kerade deformunud kuju, ja selle pärast jäävad tundmatuks nii kineetilise kui potentsiaalse energia avaldises esinevad kerade inertsimomendid. Et vähendada probleemi komplikatsioonitaset, on oletatud masside liikumine ühtlaselt pöörlevas gaaskeras statsionaarseks, kiiruste ja tiheduste jaotused sümmeetriliseks kerade keskpunktide suhtes, kerade deformatsioonid väikesiks.

Nimetatud eeldusel on loodud kunstlik kaksiktähe mudel, võiks öelda dünaamiline mudel, sest süsteemi iseloomustajaks on peamiselt tema dünaamilised omadused. Astrofüüsiku seisukohalt lähtudes peab nentima, et püstitatud mudel võib eksisteeruda ainult siis, kui tema komponentides valitseb täielik mehaaniline ja kiirguslik tasakaal, mis omakord nõuab tähe energia allikate teatud kindlat paigutust tähe sees ([6] p. 102-104). Ei vasta energia allikate jaotus neile nõudeile, kaob tasakaal tähe sees, tekivad konvektsioonvoolud gaasis. ([6] p. 104-107). Püs muudugi hiljem arendatud lihtis teooria ei ole enam kehtiv, liikumise diferentsiaalvõrrandid muutuksid hoopis komplitseeritumaks ja nende integratsioon kvadratuurides võimatuks. Seega järgnev uurimus haarab ainult neid kaksiktähti, mille komponendid on täielikus tasakaalu olekus. Pääle selle komponentide omavahelise kaugus ei või olla väga väike, vaid peab ulatuma vähemalt 3-4 kordse üksiku komponendi diameetrini, et komponentide deformatsioonid saaksid küllalt väikesed.

Nüüsguse kunstliku kaksiktähe mudeli dünamika uurimine ongi käesoleva kirjutise sisuks. Püstitades Lagrange'i diferentsiaalvõrrandid ja integreerides neid, selgub, et süsteemi liikumisi kirjeldavad küllaldase täpsusega väikese amplituudiga sünnusvõnkumised. Mitmed nähted kaksiktähtede heleduste ja perioodide muutusis lasuvad end interpreteerida nende väikeste sünnusvõnkumiste tulemusina.

Idee käsitleda kattumismuutlikkude dünaamikat erijuhuna üldistatud kahe keha probleemist, on pärit Kurt Walter'ilt. Tema lahendas küsimuse eeldusel, et komponendid on kolmeteljesed ellipsoidid, mis pöörlevad ümber oma telgede nii kui kõvad kehad, asetades lõpuks pöörõhu komponentide tiheduse kontsentratsioonini määramisele [3]. Tulemused andsid tiheduse kontsentratsiooniks hoopis vähemaid väärtusi, kui võis oodata seni õigeks peetud teooriate järgi. Sel põhjusel H. Klauder võttis revideerimisele Walteri lähtepunktid ja leidis, et see teooria võib olla kehtiv ainult tähtpaaride kohta, mille komponendid on tardunud, kõvad kehad, mitte gaasilised, ja sellepärast ei või Walteri tulemusile anda ka otsustavat tähendust praegu kehtivate teooriate kohta. ([5] p. 7.).

Järgnevas töös on laiendatud Walteri eeldusi ja küsimus lahendatud meetoditega, mis erinevad Walteri omist. Oleks jällegi liig öelda, et saavutatud tulemused on ainuõiged, sest neis on arvestamata gaasi konvektsioonvoolud ja turbulents, mis küll ei tarvitse tingimata esineda igas roteerivas tähes, kuid süüski võivad esineda ja muuta pildi hoopis teiseks. Aga osa kattumismuutlikkude kohta on saadused kindlasti rakendatavad, ja siin nad aitavad paremini seletada vaadeldud fenomeene.

II. Dúnaamiline süsteem.

§.1. Pöörlev gaaskera.

Vaatleme gaaskera, mille tihedus on ainult tema raadiuse funktsioon ja mille massikeset ühtib sellelõttu tema keskpunktiga. Pöörõlgu see kera õmber kera masskeset läbiva telje, s.o. õmber mõne oma diameetri, välisõõududest vabas ruumis. Kui sellel keral on tavaline tähtede temperatuur, siis toimul vahetpidamatu kürgava energia transport kera seesmusest pinna poole. Kürgav energia E on aga inertne, tal on oma mass

$$M = \kappa \cdot \frac{E}{c^2},$$

kus c on valguse kürgus, κ õhikuist sõltuv konstant. Sellepärast peab energia hoovuse juures ilmema nähteid, mis on analoogilised gaasi konveksioonvooludele sentrist pinna poole. ([2] p. 266.).

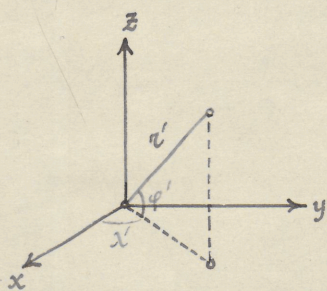
Pöörõleva kera suhtes liõgub kürgav energia temperatuuri gradiendi suunas, s.o. mõõda sirget, mis läbib pöõrdetelje; järelikult ruumis on kürgamise tee kõver, painutatud kera pöõrõlemise suunas. Kuna kürgav energia on inertne, siis peab selleks tee kõ-

verdamiseks kuluma energiat, ja see energia võetakse kera kineetilise energia tagavaradest. Tõepoolest, kui masselement kera seesmuses kiirgab välja energia hulga m , mis hakkab rändama tähe pinna poole, siis jõuab ta kõigepäält naabermass-elementini, kus ta absorbeeritakse. Et ei tekiks energia neelu (kiirguslik tasakaal!), siis peab see naabermasselement emiteerima just samasuure energia hulga m , mille ta äsja absorbeeris. Nüüsi toimub energia hulga m liikumine kera pinna poole, lakamatute absorptsioonide ja reemissioonide tulemusena. Pinna lähedal on aga üksikute mass-elementide ruumisküürused suuremad kui kera seesmuses, sellepärast ajavahemikus absorptsioonist kuni reemissioonini üksik masselement kannab pinna lähedal energia hulka m rohkem edasi ristsihis temperatuuri gradiendile, energia voolamise tee ruumis on pinna lähedal suurema kõverusega. Sellest järgneb, et tähe pinna lähedasmad kihid kaotavad enam oma liikumise energiast ajaühikus kui seesmised osad, nurkküürus pinna lähedal kahaneb kiiremini kui tähe sees. Tekib ebahühtlane nurkküüruste jaotus pöörlevas tähes, seda kontrastsemalt, mida suurem on tiheduse kontsentratsioon.

Kui meie kera koosneb reaalsest gaasist, siis ilmneb kiirguse kõrval veel teine tegur, mis mõjutab nurkküüruste jaotust kera: see on sitkus. Sitkus on tähtedes kaht liiki: tavaline materiaalne sitkus ja kiirguslik sitkus ([2] p. 262). On ju kiirguse energia impulsi kandjaks tähe sees, ta omab massi, tal

peab olema ka oma sitkus. Mõlemat liiki sitkused mõjuvad aga ühtevüsi: nad kahandavad nurkküüruste vahesid pöörlevas gaaskeras (kui nüisugused on olemas) ja püüavad sarnastada pöörlemist kõva keha pöörlemisele ([2] p. 261).

Need kaks tegurit, energia kiirgus ja sitkus, on põhjapanevad nurkküüruste jaotusele pöörlevas gaaskeras. Küllalt pika aja järgi kujuneb välja tasakaaluseis: nurkküüruste vahe suurenemine, mis tekib energia hoovusest, on sama suur, kui nurkküüruste vahe kahanemine, mis tekib sitkuse toimel. Gaasi liikumine saab statsionaarseks. Nüisuguses staadiumis eeldame olevat oma gaaskera.



Joon. 1.

Olgu z -teljeks kera pöördetelg, x -teljeks mõni pöördetelje ristjoon läbi masskeskme, ruumis muutumatu sihiga. r', φ', λ' olgu punkti ruumilised polaarkoordinaadid (joon. 1). Kui kera pöörlemine on ühtlane ja statsionaarne, siis võime

nurkküürust lugeda järgmiseks funktsiooniks polaarkoordinaatidest:

$$\omega = \omega_0(r', \varphi').$$

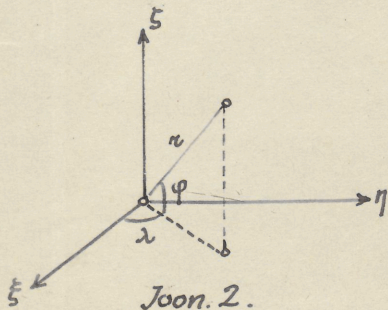
Pannes selle võrduse paremale poole r', φ' asemele mõne masselemendi koordinaadid r'_0, φ'_0 , siis võrduse vasak pool annab masselemendi nurkküüruse. Nagu näha üksiku masselemendi nurkküürus ei muutu koordinaadi λ' -ga, ega ka ajaga, kui oletada, et r'_0, φ'_0 ei muutu ajaga. Nüisugusel korral iga mass-element liigub konstantse nurkküürusega mööda ringi,

mille tasapind on risti pöördeteljega.

Olgu nüüd kera ühtlane pöörlemine häiritatud mõnest välisest põhjusest nii, et nurkkiiruse funktsioon saaks kuju

$$\omega = \omega_1(r', \varphi') + \omega_2(t), \quad (1)$$

kus $\omega_2(t)$ on mõni perioodiline funktsioon, mille amplituud on väike võrreldes $|\omega_1|$ -ga. Laseme xyz -teljestiku pöörelda ümber z -telje nurkkiirusega $\omega_1(r', \varphi')$, siis gaasiosake, mille koordinaadiks on r', φ' , võnguks selles ühtlaselt pöörlevas teljestikus ümber mõne tasakaaluseisu seaduse $\omega = \omega_2(t)$ järgi. Nagu valemist (1) näha, on see võnkumise seadus kõigile gaasiosakestele üks ja seesama. Paragrahvi alul mainitud põhjusil peaks ka siin ilmnenema ω_2 kasvamine tähe sisemusse; ent kuna ω_2 amplituud on väike, ja periood ei kühni ajavahemikesse, mis võrreldavad tähe elueaga, siis ei saa erivused ω_2 jaotuses pääseda mõjule sel määral, et nad ulatuksid ω_2 enese suurusejärguni.



Valime $\xi\eta z$ -teljestiku nii, et z -telg ühtiks z -teljega, $\xi\eta$ -tasapind $\xi\eta$ -tasapinnaga. See teljestik pöörelgu ümber z -telje nurkkiirusega $\omega_1(r'_0, 0) + \omega_2(t)$, kus r'_0 on kera ekvatoriaalraadius; seega kera ekvatoriaalil asuvad masselemendid seisavad $\xi\eta z$ -telgede suhtes paigal. Selles teljestikus on nurkkiiruste jaotus järgmine:

$$\bar{\omega} = \omega_1(r', \varphi') - \omega_1(r'_0, 0).$$

Olgu r, φ, λ punkti ruumilised polaarkoordinaadid $\xi\eta\zeta$ -telgede suhtes. (joon. 2.), siis kehtivad järgmised kaks võrdust:

$$r = r', \quad \varphi = \varphi',$$

nii et saame relativse nurkküüuste jaotuse $\xi\eta\zeta$ -telgedes:

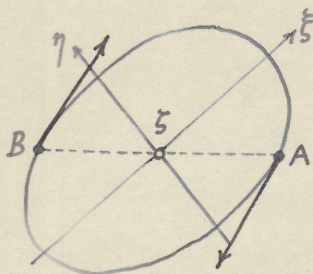
$$\bar{\omega} = \omega, (r, \varphi) - \omega, (r', 0).$$

Kuna $\omega, (r', 0)$ on konstant, siis selgub, et $\xi\eta\zeta$ -teljestikus iga masselement liigub jälle konstantse nurkküüusega mööda ringi, mille tasapind on risti ζ -teljega.

Kujutleme nüüd, et ξ -teljel, konstantsel kaugusel kera masskeskmest, asub masspunkt väljaspool kera; või et ξ -telje ümber, sümmeetriliselt viimasele, asub mõni mass, mis ei puuduta kera ja mille masskeskme kaugus kera masskeskmest on konstantne. Siis välispotentsiaal ei ole enam null, nagu eeldatud varemalt, vaid $\xi\eta\zeta$ -teljestikus on tekkinud ajaliselt muutumatu välisjõudude väli. Meie pöörlevas keras masside liikumine ei või jääda enam endiseks. Kera venib üldiselt välja häirija massi suunas ja omandab kolmeteljese ellipsoidi taolise või vähemalt moonutatud ellipsoidi taolise kuju ([1] Ch. III. p. 46., Ch. VII. p. 162-187). Selletõttu $\xi\eta\zeta$ -teljestikus üksikute mass-elementide teed ei ole enam ringid, vaid mingisugused ellipsitaolised kõverad, mis ei tarvitse olla tasapinnalised. Ainult järgmist sümmeetria nõuet võime pidada ligikaudu täidetuks: iga üksiku masselementi orbüt on sümmeetriline $\xi\xi$ - ja $\eta\eta$ -tasapindade suhtes.

Oli eeldatud, et gaasi liikumine $\xi\eta\zeta$ -teljestikus on statsionaarne. Statsionaarse liikumise korral aga voolujooned ja gaasiosakeste trajektorid langevad kokku, olles ajaliselt muutumatud. Süt järgneb veel masselementide orbiitide teine omadus: nad ei muuda ajaga oma kuju ega asendit $\xi\eta\zeta$ -teljestikus.

Ülalnimetatud orbiidid ei ole mitte mingid



Joon. 3.

fiktüüsed kõverad ruumis, millest igaühel liigub ainus gaasiosake, vaid ühel orbiidil liigub lõpmata palju gaasiosakesi, moodustades kinnise voolutoru pideva voolamisega. Õeldame, et igas niisuguses voolutorus kii-

ruste absoluutsuurused on sümmeetriliselt paigutatud ζ -telje suhtes. Kui näiteks joonisel 3. on kujutatud ühe voolutoru ristprojektsioon $\xi\eta$ -tasapinnale, siis punktides A ja B on kiiruste absoluutsuurused võrdsed.

Olgu punktide A ja B koordinaadid (ξ_A, η_A, ζ_A) resp. (ξ_B, η_B, ζ_B) , ja kiiruste komponendid neis punktides (u_A, v_A, w_A) resp. (u_B, v_B, w_B) . Arvestades orbüdi sümmeetrilisust ζ -telje suhtes, maksavad seosed

$$\xi_B = -\xi_A, \quad \eta_B = -\eta_A, \quad \zeta_B = \zeta_A, \quad (2)$$

kuna eeldus kiiruste absoluutsuuruste sümmeetrilise paigutuse kohta lubab püstitada veel kolm võrdsust:

$$u_B = -u_A, \quad v_B = -v_A, \quad w_B = w_A. \quad (3)$$

Jooniselt 2. nähtub, et seosed ruumiliste polaarkoordinaatide ja Cartesiuse koordinaatide vahel on järgmised:

$$\kappa = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \lambda = \arctan \frac{\eta}{\xi}.$$

Süt järgneb:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa} &= \frac{\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \cdot \frac{\zeta(\xi^2 + \eta^2) - \zeta(\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta})}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}, \\ \dot{\lambda} &= \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \frac{\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}}{\xi^2}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Neist valemest saab arvutada $\dot{\kappa}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\lambda}$ punktis A ja B, s.o. suurused $\dot{\kappa}_A, \dot{\varphi}_A, \dot{\lambda}_A; \dot{\kappa}_B, \dot{\varphi}_B, \dot{\lambda}_B$. Arvestades aga võrdusi (2) ja (3), saame seosed

$$\dot{\kappa}_A = \dot{\kappa}_B, \quad \dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_B, \quad \dot{\lambda}_A = \dot{\lambda}_B.$$

Me ütleme, et funktsioonid $\dot{\kappa}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\lambda}$ on sümmeetrilised ξ -telje suhtes. Lükumise statsionaarsuse tõttu $\dot{\kappa}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\lambda}$ ei sisalda aega eksplitsiitselt.

Funktsioon $\dot{\lambda}$, mida võime kirjutada kujus

$$\dot{\lambda} = \omega_3(\kappa, \varphi, \lambda) - \omega_1(\kappa', 0),$$

annab üksikute masselementide ümber pöördetelje pöörlemise nurkkiiruse $\xi\eta\zeta$ -teljestikus. Et nüüd enam κ, φ , ei ole konstantsed ühe masselemendi jaoks, siis ka nurkkiirus ei ole konstantne. Ruumis paigalseisvas xyz -teljestikus on nurkkiiruse funktsioonil kuju

$$\omega = \omega_3(\kappa, \varphi, \lambda) + \omega_2(t). \quad (5)$$

Erilises seisukorras on kera ekvaatoril asuvad mass-elementid; nende pöörlemise nurkkiirusel on endiselt kuju

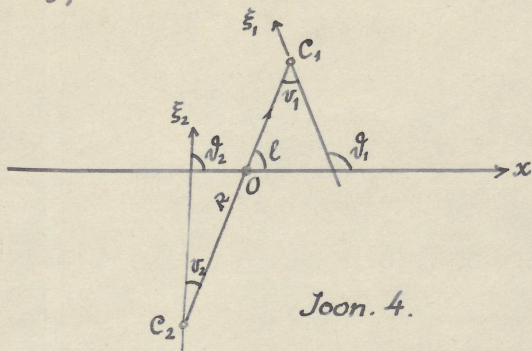
$$\omega = \omega_0 + \omega_2(t), \quad (6)$$

kus ω_0 on konstant. Nad püsivad $\xi\eta\zeta$ -teljestikus paigal.

§. 2. Džnaamiline süsteem.

Välisjõududest vabas ruumis asugu kaks gaaskera, mis türlivad üksteise ümber tasapinnalisil, peaaegu ringilisil teil ja pöörlevad ühtlasi ümber oma masskeset läbiva, tee tasapinnale ristioleva telje nii, et pöörlemise ja türlmise keskmised perioodid oleks võrdsed. Masskeskmete omavaheline kaugus R ja kerade raadiused olgu võrreldavad pikkused. Nüsusugusel korral kerad deformuvad vastastikuse külgetõmbe mõjul ja venivad välja üksteise suunas, nagu kirjeldatud §. 1.-es. Deformunud kerad lähendavad kaks kolmeteljelist ellipsoidi, mille lähimad teljed on risti tee tasapinnaga. Eeldame, et kummagi komponendi tihedus on sümmeetriline teda lähendava ellipsoidi peatasapindade suhtes, siis võime ellipsoidi telgi lugeda ka komponendi pea-inertsii-ellipsoidi telgedeks. Kõneldes komponentide liikumisest mõtleme neid lähendavate ellipsoidide liikumist. Nii tuleb mõista komponendi pöörlemisperioodi all ajavahemikku, mille vältel komponendi lähendusellipsoid pöörduv ümber oma lähima telje 2π võrra. Süsteemis olgu lubatud valad libratsioonid tee tasapinnas. See tähendab seda, et komponendid ei tarvitse pöörelda ühtlase nurkkiirusega, vaid et sellel nurkkiirusel on kuju (6) lk. 11, mille tõttu, koos türlmise tee väikese erivusega ringilisest kujust, komponentide pea-inertsiiellipsoidide pikimad teljed ei asu täpselt masskeskmeid ühendaval sirgel,

vaid moodustavad viimasega väikesed nurkad v_1 ja v_2 , mis varieeruvad mõne kraadi piirides.



Joon. 4.

Olgu joonisel 4 punkt O kerade süsteemi masskeske, kerade eneste masskeskmed olgu C_1 ja C_2 , nii et lõik $\overline{C_2C_1} = R$.

Algusega O -s asugu ruumis mittepöörlev teljestik xyz nii, et z -telg oleks risti tee tasapinnaga. Algustega C_1 ja C_2 asugu veel ξ, η, ζ - resp. ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestikud, millede ξ_1 - ja ξ_2 -teljed oleks risti tee tasapinnaga ja sama positiivse suunaga, mis z -telg, kuna ξ_1 - ja ξ_2 -teljed langens kokku komponendi C_1 resp. C_2 peainertsiaalipsoidi pikima teljega. Olgu:

ϑ_1, ϑ_2 nurkad ξ_1 -, ξ_2 -telje ja x -telje vahel,
 l nurk x -telje ja R vahel,

v_1, v_2 nurkad ξ_1 -, ξ_2 -telje ja R vahel, definiitud võrrandeiga

$$v_1 = \vartheta_1 - l, \quad v_2 = \vartheta_2 - l, \quad (7)$$

R_1, R_2 komponentide masskeskmete C_1 ja C_2 kaugused O -st, lõigud $\overline{OC_1}$ ja $\overline{C_2O}$,

m_1, m_2 komponentide massid,

ρ_1, ρ_2 komponentide tihedused, mis olgu ξ, η, ζ - resp. ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestikus ajaliselt muutumatud antud punktis.

Vaatleme nüüd ligemalt kera C_1 . Tä on pöörlev gaaskera, samasuguse seesmise struktuuriga nagu §.1-es kirjeldatud mudel. ξ, η, ζ -teljestik pöörleb ümber ξ_1 -telje nurkküürusega, millel on kuju (6) lk.11. Tääle

selle on selle teljestiku asetuse komponendi C_1 suhtes samasugune, nagu $\xi\eta\zeta$ -teljestiku asend $\S.1$ mudeli suhtes. Järelikult võime kõik $\S.1$ -es räägitud lugeda kehtivaks ka komponendi C_1 kohta, kui ainult välistingimused vastavad $\S.1$ -es püstitatud nõudeile.

Komponenti C_1 häirib mass m_2 , mille asend ξ, η, ζ -teljestikus ei ole päris muutumatu, tingitud sellest, et pikkus R ja nurgad v_1, v_2 on muutlikud. Selle tagajärjel ξ, η, ζ -teljestikus massist m_2 tekita tud jõuvali ei ole antud punktis ajaliselt muutumatu, komponendis C_1 gaasi liikumine ei või olla stationaarne. Aga paneme tähele, et massi m_2 asendit muutjad suurused on kõik väikesed, siis selgub, et need asendimuutused võivad tekitada komponendi C_1 deformatsiooni väikesi muutusi. Eeldades nüüd R olevat nii suure, et kogu deformatsioon on väike, järgneb eelpoolöeldust, et massi m_2 asendimuutused kutsuvad komponendis C_1 esile mõjusid, mis on kõrgemat järku väikesed ja võivad jääda tähelepanemata. Järelikult võime komponenti C_2 lugeda ξ, η, ζ -teljestikus paigalseisvaks ühes keskmises asendis, mis on selline, et mass m_2 asuks sümmeetriliselt ξ -telje suhtes, ja gaasi liikumine komponendis C_1 on meile rüüldaldase täpsusega ikka endine. Nüüd on häirija mass aga vastab $\S.1$. nõudeile, komponent C_1 kujutab tõepoolest $\S.1$ -es kirjeldatud mudelit.

Sama, mis maksab komponendi C_1 kohta, maksab ka komponendi C_2 kohta. Ka tema kujutab $\S.1$. mudelit.

Nüüd oleme õppinud tundma dünaamilise süsteemi ehitust, jääb üle vaadata, millised on tema

koordinaadid. Dünaamilise süsteemi koordinaadid on arvud, mis määravad antud momendil üheselt süsteemi partiklite konfiguratsiooni. Meie süsteemis on üksiku gaasiosakese asupaik määratud tema kolme Cartesiuse koordinaadiga x, y, z , seega oleks süsteemil koordinaate kolmekordne gaasiosakeste arv. Kuid need koordinaadid ei ole kõik üksteisest sõltumatud. Vaatame kera C_1 mõnda masselementi dm_1 . Tema asend ξ, η, ζ -teljestikus on määratud polaar-koordinaadega $r_1(t), \varphi_1(t), \lambda_1(t)$. Eeldame süsteemi ehituse olevat meile tuntud, s.o. nurkküüruste jaotusfunktsioon ja masselementide trajektorid komponendis C_1 on teada. Seega tunneme gaasi liikumist komponendis C_1 , aja funktsioonid $r_1(t), \varphi_1(t), \lambda_1(t)$ on tuntud iga masselementi jaoks, nü et viimase asend ξ, η, ζ -teljestikus sõltub ainult parameetrist t . Aga ξ, η, ζ -teljestiku enese asend xyz -teljestiku suhtes on määratud suurusiga R_1, v_1, l_1 , järelikult masselementi dm_1 asend xyz -teljestikus on määratud parameetreiga R_1, v_1, l, t . Kui dm_2 tähendab mõnda masselementi komponendist C_2 , siis analoogiliste kaalutluste põhjal tema asend xyz -teljestikus on määratud parameetreiga R_2, v_2, l, t . Nüüd on aga 5 arvu R_1, R_2, v_1, v_2, l tõesti nüisugused, mis määravad antud momendil t üheselt süsteemi partiklite konfiguratsiooni, sest parameeter t üksi määrab juba masselementide konfiguratsioonid ξ, η, ζ - ja ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestikes, kuna R_1, R_2, v_1, v_2, l omakord määravad nende konfiguratsioonide asendid xyz -teljestiku suhtes. Järelikult R_1, R_2, v_1, v_2, l on meie dünaamilise süsteemi

koordinaadid. Neist üksteisest sõltumatud on ainult neli, sest R_1 ja R_2 vahel valitseb tuntud seos

$$R_1 m_1 = R_2 m_2 \quad (8)$$

§.3. Kineetiline energia.

Süsteemi kineetiline energia on avaldis

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m_1)} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm_1 + \frac{1}{2} \int_{(m_2)} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm_2 \quad (9)$$

See tuleb ilmutada süsteemi koordinaatide kaudu. Arvutame esmalt integraali

$$\int_{(m_1)} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm_1$$

Joon. 2 lk. 9 järgi on

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos \varphi_1 \cos \lambda_1, \\ \eta_1 &= r_1 \cos \varphi_1 \sin \lambda_1, \\ \zeta_1 &= r_1 \sin \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ξ, η, ζ -teljestiku alguse C_1 koordinaadid xyz -süsteemis on (vt. joon. 4 lk. 13)

$$x_{c_1} = R_1 \cos l, \quad y_{c_1} = R_1 \sin l, \quad z_{c_1} = 0,$$

ja pääle selle ξ, η, ζ -teljestik on xyz -teljestiku suhtes pööratud nurga ϑ_1 võrra. Seega on masselemendi dm_1 koordinaadid xyz -süsteemis järgmised:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_1 \cos \varphi_1 \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) + R_1 \cos l, \\ y &= r_1 \cos \varphi_1 \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) + R_1 \sin l, \\ z &= r_1 \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Need võrrandid kujutavad seoseid x, y, z ja süsteemi koordinaatide vahel.

Diferentsime võrrandite (1) mõlemaid pooli:

$$\dot{x} = \dot{r}_1 \cos \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) - r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) - \\ - r_1 (\dot{\lambda}_1 + \dot{\vartheta}_1) \cos \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) + R_1 \dot{\rho} \cos l - R_1 \dot{\rho} \sin l,$$

$$\dot{y} = \dot{r}_1 \cos \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) - r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) + \\ + r_1 (\dot{\lambda}_1 + \dot{\vartheta}_1) \cos \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) + R_1 \dot{\rho} \sin l + R_1 \dot{\rho} \cos l,$$

$$\dot{z} = \dot{r}_1 \sin \varphi + r_1 \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Süst järgneb

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{R}_1^2 + R_1^2 \dot{\rho}^2 + r_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 \cos^2 \varphi - 2 \dot{R}_1 \dot{\vartheta}_1 r_1 \cos \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) + \\ + 2 R_1 \dot{\rho} \dot{\vartheta}_1 r_1 \cos \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) + \dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\varphi}^2 + r_1^2 \dot{\lambda}_1^2 \cos^2 \varphi + \\ + 2 r_1^2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\lambda}_1 \cos^2 \varphi + 2 \dot{R}_1 \dot{r}_1 \cos \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) - \\ - 2 \dot{R}_1 r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) - 2 \dot{R}_1 r_1 \dot{\lambda}_1 \cos \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) + \\ + 2 R_1 \dot{\rho} \dot{r}_1 \cos \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) - 2 R_1 \dot{\rho} r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) + \\ + 2 R_1 \dot{\rho} r_1 \dot{\lambda}_1 \cos \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1).$$

Seda avaldist tuleb integreerida massi m_1 piires. Saame üksikute integraalide summa, mille liikmed võtame eraldi vaatluse alla.

1). Definime uue teljestiku x_1, x_2, x_3 , mille algus on C_1 , x_3 -telg ühtiv z_1 -teljega, ja mis on pööratud ümber x_3 -telje ξ, η, ζ -teljestiku suhtes nurga v_1 võrra. Selles teljestikus on punkti $(r_1, \varphi_1, \lambda_1)$ koordinaadid:

$$x_1 = r_1 \cos \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1),$$

$$x_2 = r_1 \cos \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1),$$

$$x_3 = r_1 \sin \varphi.$$

Kuna C_1 on massi m_1 massikesk, mille koordinaadid x_1, x_2, x_3 -teljestikus on $(0, 0, 0)$, siis järgneb, et

$$\int 2 R_1 \dot{\rho} \dot{\vartheta}_1 r_1 \cos \varphi \cos(\lambda_1 + \vartheta_1) dm_1 = 2 R_1 \dot{\rho} \dot{\vartheta}_1 \int x_1 dm_1 = 0,$$

$$\int 2 \dot{R}_1 \dot{\vartheta}_1 r_1 \cos \varphi \sin(\lambda_1 + \vartheta_1) dm_1 = 2 \dot{R}_1 \dot{\vartheta}_1 \int x_2 dm_1 = 0.$$

2). Defüinime fiktiivse massi, mille diferentsiaal on

$$dM = \frac{r_1}{r_1} dm_1.$$

Massi M ruumiline asetus ühtil täpsalt m , ruumilise paigutusega, ainult tema tihedus on igas punktis $\frac{r_1}{r_1}$ korda suurem massi m , tihedusest vastavas punktis.

Nagu lk. 11. selgus, oli funktsioon r_1 sümmeetriline ξ_1 -telje suhtes, järelikult on seda ka funktsioon $\frac{r_1}{r_1}$, ja ka massi M tihedus, kuna lk. 12 eelduse kohaselt massi m tihedus on sümmeetriline ξ_1 -telje suhtes.

Sellest järgneb, et massi M massikesk asub ξ_1 - ehk x_3 -teljel, ja et sellepärast on $\int x_1 dM = 0$, $\int x_2 dM = 0$. Nüüd aga saame:

$$\int 2R, r_1, \cos\varphi, \cos(\lambda_1 + \nu_1) dm_1 = 2R, \int \frac{r_1}{r_1} x_1 dm_1 = 2R, \int x_1 dM = 0,$$

$$\int 2R, r_1, \cos\varphi, \sin(\lambda_1 + \nu_1) dm_1 = 2R, \int \frac{r_1}{r_1} x_2 dm_1 = 2R, \int x_2 dM = 0.$$

3). Defüinime uue fiktiivse massi, mille diferentsiaal on

$$dM' = \lambda_1 dm_1.$$

Analoogilisil kaalutlusil neile, mis toimetatud massi M juures, selgub, et massi M' tihedus on samuti sümmeetriline ξ_1 - ehk x_3 -telje suhtes. Siit järgneb:

$$\int 2R, r_1, \lambda_1, \cos\varphi, \cos(\lambda_1 + \nu_1) dm_1 = 2R, \int x_1 dM' = 0,$$

$$\int 2R, r_1, \lambda_1, \cos\varphi, \sin(\lambda_1 + \nu_1) dm_1 = 2R, \int x_2 dM' = 0.$$

4). Defüinime veel kolmanda fiktiivse massi, mille diferentsiaal oleks

$$dM'' = \varphi_1 \tan\varphi_1 dm_1.$$

Et punktis, mis on sümmeetrilised ξ_1 -telje suhtes, on φ_1 üks ja seesama, siis on massi M'' tihedus sümmeetriline ξ_1 -telje suhtes. Sellest järgneb:

$$\int 2R_1 \dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos(\lambda_1 + \nu_1) dm_1 = 2R_1 \int \dot{\varphi}_1 \tan \varphi_1 \cdot x_1 dm_1 = \\ = 2R_1 \int x_1 dM'' = 0,$$

$$\int 2R_1 \dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin(\lambda_1 + \nu_1) dm_1 = 2R_1 \dot{\ell} \int \dot{\varphi}_1 \tan \varphi_1 x_2 dm_1 = \\ = 2R_1 \dot{\ell} \int x_2 dM'' = 0.$$

5).

$\int r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 dm_1 = \dot{\varphi}_1^2 \int r_1^2 \cos^2 \varphi_1 dm_1 = C_1 \dot{\varphi}_1^2$,
kus C_1 on massi m_1 inertsimoment ξ_1 -telje suhtes. Graa-
si liikumise statsionaarsuse ja tiheduse ajalise konstant-
suse tõttu mass m_1 ei muuda oma väliskuju ega mas-
side seesmist paigutust ajajooksul, millest järgneb, et
 C_1 on konstantne suurus.

6).

$$\int 2r_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\lambda}_1 \cos^2 \varphi_1 dm_1 = 2\dot{\varphi}_1 \int r_1^2 \dot{\lambda}_1 \cos^2 \varphi_1 dm_1 = 2\alpha_1 \dot{\varphi}_1.$$

Lk. 11. järgi $\dot{\lambda}_1$ ei sisalda aega eksplitsiitselt, vaid on
 $\dot{\lambda}_1 = \omega_3(r_1, \varphi_1, \lambda_1) - \omega_1(r_1', 0)$. Siit järgneb, et α_1 on kons-
tant.

7).

$$\int (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + r_1^2 \dot{\lambda}_1^2 \cos^2 \varphi_1) dm_1 = \alpha_1.$$

Ka α_1 on konstant, sest funktsioonid $r_1, \varphi_1, \lambda_1$ ei si-
salda aega eksplitsiitselt, vaid on funktsioonid ainult
 $\lambda_1, \varphi_1, r_1$ -st.

Nii oleme leidnud, et

$$\int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm_1 = m_1 (\dot{R}_1^2 + R_1^2 \dot{\ell}^2) + \dot{\varphi}_1^2 C_1 + 2\alpha_1 \dot{\varphi}_1 + \alpha_1. \quad (12)$$

Analoogiliselt saame teise komponendi jaoks

$$\int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm_2 = m_2 (\dot{R}_2^2 + R_2^2 \dot{\ell}^2) + \dot{\varphi}_2^2 C_2 + 2\alpha_2 \dot{\varphi}_2 + \alpha_2. \quad (13)$$

Seostest

$$R_1 m_1 = R_2 m_2, \quad R_1 + R_2 = R$$

järgneb:

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad R_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \quad (14)$$

Paneme need väärtused avaldisis (12) ja (13) R_1 ja R_2 ase-
mele ja moodustame siis (12) ja (13) paremate poolte
poolsumma, siis saame süsteemi kineetilise energia aval-
dise:

$$T = \frac{1}{2} \theta (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varrho}^2) + \frac{1}{2} C_1 (\dot{\ell} + \dot{v}_1)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{\ell} + \dot{v}_2)^2 + \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \quad (15)$$

$$+ \alpha_1 (\dot{\ell} + \dot{v}_1) + \alpha_2 (\dot{\ell} + \dot{v}_2) + \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2),$$

kus

$$\theta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (16)$$

Siin on kasutatud veel lk. 13 võrr. (7) järgnevaid
seoseid: $\dot{v}_1 = v_1 + \dot{\ell}$, $\dot{v}_2 = v_2 + \dot{\ell}$.

Nagu näeme, on kineetilise energia avaldis po-
liinoom süsteemi koordinaadest R, v_1, v_2, ℓ ja nende
tuletisist, konstantsete kordajatega.

§.4. Potentsiaalne energia.

Süsteemi potentsiaalse energia all mõistame dopelt-in-
tegraali

$$U = - \kappa^2 \iint \frac{dm_1 dm_2}{e}, \quad (17)$$

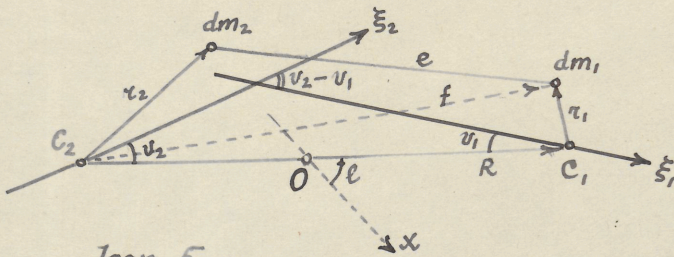
kus on:

κ^2 gravitatsiooni konstant,

e massdiferentsiaalide omavaheline kaugus.

Arendame U ritta masselementide dm_1 ja dm_2 Cartesiuse

koordinaatide $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ astmete järgi.



Joon. 5.

Kujutagu joonis 5. pind komponentide sentrite C_1 ja C_2 liikumise tee tasapinda, kuhu on joonistatud teljed x, ξ_1 ja ξ_2 . Nurk ξ_1 - ja ξ_2 -telje vahel on

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = (\vartheta_2 - \ell) - (\vartheta_1 - \ell) = v_2 - v_1.$$

Lähtume ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestikust. Siin olgu punkti C_1 koordinaadid $\xi_2^0, \eta_2^0, \zeta_2^0$, massdiferentsiaali dm_2 koordinaadid ξ_2, η_2, ζ_2 . Kui massdiferentsiaali dm_1 koordinaadid ξ_1, η_1, ζ_1 -teljestikus on ξ_1, η_1, ζ_1 , siis on tema koordinaadid ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestikus

$$\left. \begin{aligned} \xi_2' &= \xi_1 \cos(v_2 - v_1) + \eta_1 \sin(v_2 - v_1) + \xi_2^0, \\ \eta_2' &= -\xi_1 \sin(v_2 - v_1) + \eta_1 \cos(v_2 - v_1) + \eta_2^0, \\ \zeta_2' &= \zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Nüüd saame massdiferentsiaalide dm_1 ja dm_2 omavahelise kauguse ruudu jaoks avaldise:

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= (\xi_2' - \xi_2^0)^2 + (\eta_2' - \eta_2^0)^2 + (\zeta_2' - \zeta_2^0)^2 = \\ &= [\xi_1 \cos(v_2 - v_1) + \eta_1 \sin(v_2 - v_1) + \xi_2^0 - \xi_2^0]^2 + \\ &+ [-\xi_1 \sin(v_2 - v_1) + \eta_1 \cos(v_2 - v_1) + \eta_2^0 - \eta_2^0]^2 + (\zeta_1 - \zeta_2^0)^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Arendame funktsiooni

$$\frac{1}{e} = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$$

ritta $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ astmete järgi. Sellel real on tuntud kuju:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{e} &= f(0, \dots, 0) + \left[\xi_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right)_0 + \eta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta_1} \right)_0 + \dots + \zeta_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_2} \right)_0 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} \right)_0 + 2 \xi_1 \eta_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \right)_0 + \dots + \zeta_2^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_2^2} \right)_0 \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Pürdume liigetega kuni teise järguni, sellepärast arvutame ka osatuletised ainult teise järguni.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} [(e^2)^{-\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{2}(e^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (e^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} = \frac{3}{4}(e^2)^{-\frac{5}{2}} \left[\frac{\partial(e^2)}{\partial \xi_1} \right]^2 - \frac{1}{2}(e^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2(e^2)}{\partial \xi_1^2}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} = \frac{3}{4}(e^2)^{-\frac{5}{2}} \frac{\partial(e^2)}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial(e^2)}{\partial \eta_1} - \frac{1}{2}(e^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2(e^2)}{\partial \xi_1 \partial \eta_1},$$

Osatuletised e^2 -st saame kergesti avaldisest (19).

Võtame nüüd võrdusis (21) $\xi_1=0, \eta_1=0, \dots, \zeta_2=0$, et saada rea (20) kordajaid.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} \right)_0 = \frac{3}{R^5} \left[\overset{\circ}{\xi}_2 \cos(v_2 - v_1) - \overset{\circ}{\eta}_2 \sin(v_2 - v_1) \right]^2 - \frac{1}{R^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2} \right)_0 = \frac{3}{R^5} \left[\overset{\circ}{\xi}_2 \sin(v_2 - v_1) + \overset{\circ}{\eta}_2 \cos(v_2 - v_1) \right]^2 - \frac{1}{R^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} \right)_0 = -\frac{1}{R^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} \right)_0 = \frac{3 \overset{\circ}{\xi}_2^2}{R^5} - \frac{1}{R^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_2^2} \right)_0 = \frac{3 \overset{\circ}{\eta}_2^2}{R^5} - \frac{1}{R^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_2^2} \right)_0 = -\frac{1}{R^3}.$$

Süin on kasutatud seost

$$\left(\frac{1}{e} \right)_0 = f(0, \dots, 0) = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{\xi}_2^2 + \overset{\circ}{\eta}_2^2}} = \frac{1}{R}.$$

vektori $\vec{R} = \vec{c}_2 \vec{c}_1$ komponendid ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestikus on $\xi_2^0, \eta_2^0, 0$; t ahime selle vektori komponente ξ_1, η_1, ζ_1 -teljestikus $\xi_1^0, \eta_1^0, 0$, siis on kehtivad seosed:

$$\begin{aligned}\xi_1^0 &= \xi_2^0 \cos(\nu_2 - \nu_1) - \eta_2^0 \sin(\nu_2 - \nu_1), \\ \eta_1^0 &= \xi_2^0 \sin(\nu_2 - \nu_1) + \eta_2^0 \cos(\nu_2 - \nu_1).\end{aligned}$$

Sellest selgub, et

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}\right)_0 = \frac{3 \xi_1^{02}}{R^5} - \frac{1}{R^3}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2}\right)_0 = \frac{3 \eta_1^{02}}{R^5} - \frac{1}{R^3}.$$

Edasi paistab joonis 5-st:

$$\begin{aligned}\frac{\xi_1^{02}}{R^2} &= \cos^2(\hat{\xi}_1, \hat{R}) = \cos^2 \nu_1, & \frac{\eta_1^{02}}{R^2} &= \cos^2(\hat{\eta}_1, \hat{R}) = \sin^2 \nu_1, \\ \frac{\xi_2^{02}}{R^2} &= \cos^2 \nu_2, & \frac{\eta_2^{02}}{R^2} &= \sin^2 \nu_2.\end{aligned}$$

Nii saame lõplikult:

$$\left. \begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}\right)_0 &= \frac{1}{R^3} (3 \cos^2 \nu_1 - 1), & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2}\right)_0 &= \frac{1}{R^3} (3 \sin^2 \nu_1 - 1), \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2}\right)_0 &= \frac{1}{R^3} (3 \cos^2 \nu_2 - 1), & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_2^2}\right)_0 &= \frac{1}{R^3} (3 \sin^2 \nu_2 - 1), \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}\right)_0 &= -\frac{1}{R^3}, & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2}\right)_0 &= -\frac{1}{R^3}.\end{aligned}\right\} \dots (22)$$

Asetame n uud rea (20) dopelt-integraali (17) alla $\frac{1}{2}$ asemele, siis saame v orduse paremal dopelt-integraalide summa. Sellepärast, et ξ_1, η_1, ζ_1 -teljestik asub algusega komponendi C_1 masskeskmes ja ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestik algusega komponendi C_2 masskeskmes, on nullid järgmised integraalid (kokku 15 t urki):

$$\iint \xi_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right)_0 dm_1 dm_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right)_0 \int dm_2 \int \xi_1 dm_1 = 0, \dots$$

$$\iint \xi_1 \xi_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_0 dm_1 dm_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_0 \int \xi_1 dm_1 \int \xi_2 dm_2 = 0, \dots$$

Ja sellepärast, et ξ, η, ζ - ja ξ_2, η_2, ζ_2 -teljestikud on kokkulangevad komponentide pea-inertsiaallipsoidide telgedega, on nullid veel järgmised dopelt-integraalid (kokku 6 tükki):

$$\iint \xi, \eta, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi, \partial \eta} \right)_0 dm_1, dm_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi, \partial \eta} \right)_0 \int dm_2 \cdot \int \xi, \eta, dm_1 = 0, \dots$$

Üle jääb:

$$\begin{aligned} U &= -\kappa^2 \iint \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{2R^3} \left[\xi_1^2 (3\cos^2 v_1 - 1) + \eta_1^2 (3\sin^2 v_1 - 1) - \zeta_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi_2^2 (3\cos^2 v_2 - 1) + \eta_2^2 (3\sin^2 v_2 - 1) - \zeta_2^2 \right] \right\} dm_1, dm_2 \\ &= -\kappa^2 \iint \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{2R^3} \left[(\eta_1^2 + \zeta_1^2) - 2(\zeta_1^2 + \xi_1^2) + (\eta_1^2 + \xi_1^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3((\xi_1^2 + \zeta_1^2) - (\eta_1^2 + \zeta_1^2)) \cos^2 v_1 + (\eta_2^2 + \zeta_2^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(\zeta_2^2 + \xi_2^2) + (\eta_2^2 + \xi_2^2) + 3((\xi_2^2 + \zeta_2^2) - (\eta_2^2 + \zeta_2^2)) \cos^2 v_2 \right] \right\} dm_1, dm_2 \end{aligned}$$

Tähime komponentide inertsimomendid järgmiselt:

$$\int (\eta_1^2 + \zeta_1^2) dm_1 = A_1, \quad \int (\zeta_1^2 + \xi_1^2) dm_1 = B_1, \quad \int (\eta_1^2 + \xi_1^2) dm_1 = C_1,$$

$$\int (\eta_2^2 + \zeta_2^2) dm_2 = A_2, \quad \int (\zeta_2^2 + \xi_2^2) dm_2 = B_2, \quad \int (\xi_2^2 + \eta_2^2) dm_2 = C_2,$$

süs saame

$$U = -\kappa^2 \frac{m_1 m_2}{R} - \frac{\kappa^2}{2R^3} \left\{ \left[A_1 - 2B_1 + C_1 + 3(B_1 - A_1) \cos^2 v_1 \right] m_2 + \right. \\ \left. + \left[A_2 - 2B_2 + C_2 + 3(B_2 - A_2) \cos^2 v_2 \right] m_1 \right\} \quad (23)$$

See on soovitud arendus potentsiaalse energia funktsioonile. Tema tuletamisel oleme jätnud kahe silma vahel ridade koonduvuse küsimused. Oleme integreerinud rida (20) lükmeti, vaatamata ligemalt, kas see on lubatud. Need koonduvuse uuringud võiks meid aga liiga laiali. Püüdume oma toimingute õigustuseks märkmeaga,

et Plummer'i ~~lühend~~ järgi ([9] p. 293) rida (23) tõepoolest aproksimeerib süsteemi potentsiaalset energiat, ja on koonduv. Ta koondub seda paremini, mida suurem on R , sest siis komponentide väliskujud liiguvad keradele ja potentsiaalne energia arenduse (23) esimesele liikmele.

§.5. Kineetiline potentsiaal.

Kineetiliseks potentsiaaliks nimetame funktsiooni

$$L = T - U.$$

Ta on meile juba tuntud, ilmutatuna süsteemi koordinaatide R, l, v_1, v_2 kaudu. Edaspidiseks uurimiseks on sobiv vahetada süsteemi vanad koordinaadid uutega, mis on defüinitud järgmiste võrranditega:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= q_1, \\ v_2 &= q_2, \\ R &= R_0(1+q_3), \\ l &= p. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

R_0 on esialgu määramatu konstant. Koordinaadid q_1, q_2, q_3 on kõik väiksed, dimensioonitud suurused. Uutes koordinaatides avaldub kineetiline potentsiaal järgmiselt:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \theta [R_0^2 \dot{q}_3^2 + R_0^2 (1+q_3)^2 \dot{p}^2] + \frac{1}{2} C_1 (\dot{p} + \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{p} + \dot{q}_2)^2 + \\ &+ \alpha_1 (\dot{p} + \dot{q}_1) + \alpha_2 (\dot{p} + \dot{q}_2) + \frac{1}{2} (\chi_1 + \chi_2) + \frac{\kappa^2 m_1 m_2}{R_0 (1+q_3)} + \\ &+ \frac{\kappa^2}{2R_0^3 (1+q_3)^3} \left\{ m_2 [(A_1 - 2B_1 + C_1) + 3(B_1 - A_1) \cos^2 q_1] + \right. \\ &\left. + m_1 [(A_2 - 2B_2 + C_2) + 3(B_2 - A_2) \cos^2 q_2] \right\}. \end{aligned} \right\} (25)$$

Näeme, et kineetiline potentsiaal sisaldab ainult koor-
dinaadi p tuletist, mitte teda ennast. Nüisugusi koor-
dinaate nimetame tsüklilisiks (cyclic coordinates,
ignorable coordinates).

Analüütilises mehaanikas nimetame statsionaarseks
liikumiseks (steady motion) nüisugust liikumist, kus
mittetsüklilised koordinaadid on kogu liikumise väl-
tel konstantsed, samuti tsükliliste koordinaatide tule-
tised aja järgi ([8] §.83. p. 189). Meie süsteemi liiku-
mine on statsionaarne, kui on $q_1=0, q_2=0, q_3=0, \dot{p} =$
konst., s.o. kui komponendid liiguvad üksteise ümber
mööda ringe konstantse nurkkiirusega nii, et pea-inert-
siellipsoidide pikimad teljed langeks kokku masskesk-
meid ühendava sirgega. Tõelikult aga süsteem liigub
nii, et q_1, q_2, q_3 on peaaegu nullid, \dot{p} peaaegu konstant.
Nüisugust liikumist nimetame võnkumiseks statsionaar-
se liikumise suhtes (vibrations about steady motion).
Kasutades seda asiolu, võime rakendada liikumise
diferentsiaalvõrrandite püstitamiseks ja integreerimi-
seks väikeste võngete teooriat.

III. Lükumise diferentsiaalvõrrandid ja nende integratsioon.

§.6. Modifitseeritud kineetiline potentsiaal.

Kui süsteemi kineetiline potentsiaal on teada, siis saab püstitada otsekohe lükumise diferentsiaalvõrrandid Lagrange'i kujus:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_r} = 0, \quad (r=1, 2, \dots, \kappa), \quad (27)$$

kus q_1, \dots, q_n on mittetsüklilised, p_1, \dots, p_κ tsüklilised koordinaadid. Tsükliliste koordinaatide definitsiooni tõttu on

$$\frac{\partial L}{\partial p_r} = 0,$$

nii et võrrandid (27) annavad otsekohe κ integraali

$$\frac{\partial L}{\partial p_r} = \beta_r, \quad (r=1, 2, \dots, \kappa) \quad (28)$$

kus $\beta_1, \dots, \beta_\kappa$ on konstandid. Võrrandis (28) ei esi-
ne p_1, \dots, p_κ , sellepärast saab nende abil ilmutada
 $\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_\kappa$ mittetsükliliste koordinaatide ja nende tule-
tiste $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ kaudu. Saame moodustada
uue funktsiooni

$$Q(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = L - \sum_r^k \dot{p}_r \beta_r, \quad (29)$$

mida nimetamegi süsteemi modifitseeritud kineetiliseks potentsiaaliks. Lagrange'i diferentsiaalvõrrandid omandavad nüüd kuju:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial Q}{\partial q_r} = 0, \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

Kui süsteemi liikumine on selline, et kogu liikumise vältel on $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ väikesed (võnkumine stationaarse liikumise suhtes), siis võime Q arendada ritta $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ astmete järgi, piirdudes teist järku liigetega. Nii võime Q -d vaadelda konstantsete kordajatega teist järku polinoomina muutujaist $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$.

Meie süsteemil on ainus tsükliline koordinaat p , seega $\kappa=1$, ja võrrandest (28) saame:

$$\theta R_0^2 (1+q_3)^2 \dot{p} + C_1 (\dot{p} + \dot{q}_1) + C_2 (\dot{p} + \dot{q}_2) + \alpha_1 + \alpha_2 = \beta,$$

kust järgneb:

$$\dot{p} = \frac{\beta - \alpha_1 - \alpha_2 - C_1 \dot{q}_1 - C_2 \dot{q}_2}{\theta R_0^2 (1+q_3)^2 + C_1 + C_2}. \quad (31)$$

Funktsioon Q on järgmine:

$$Q = L - \dot{p}\beta = -\frac{1}{2} \dot{p}^2 [\theta R_0^2 (1+q_3)^2 + C_1 + C_2] + \frac{1}{2} \theta R_0^2 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} C_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{q}_2^2 + \alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) - U$$

Siin on vaja \dot{p} asemele panna tema väärtus (31)-st, seega lõplikult on:

$$Q = -\frac{(\beta - \alpha_1 - \alpha_2 - C_1 \dot{q}_1 - C_2 \dot{q}_2)^2}{2[\theta R_0^2 (1+q_3)^2 + C_1 + C_2]} + \frac{1}{2} \theta R_0^2 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} C_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{q}_2^2 + \alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\kappa^2 m_1 m_2}{R_0 (1+q_3)} + \frac{\kappa^2}{2R_0^3 (1+q_3)^3} \left\{ m_2 [(A_1 - 2B_1 + C_1) + 3(B_1 - A_1) \cos^2 q_1] + m_1 [(A_2 - 2B_2 + C_2) + 3(B_2 - A_2) \cos^2 q_2] \right\} \quad (32)$$

Nüüd arendame Q ritta $q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ astmete järgi.
Seejuures kasutame järgmisi lihtsaid seoseid:

$$\frac{1}{\theta R_0^2(1+q_3)^2+C_1+C_2} = \frac{1}{\theta R_0^2+C_1+C_2} - \frac{2\theta R_0^2}{(\theta R_0^2+C_1+C_2)^2} q_3 - \\ - \theta R_0^2 \frac{-3\theta R_0^2+C_1+C_2}{(\theta R_0^2+C_1+C_2)^3} q_3^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{1+q_3} = 1 - q_3 + q_3^2 - \dots,$$

$$\frac{1}{(1+q_3)^3} = 1 - 3q_3 + 6q_3^2 - \dots$$

Tähime veel

$$\theta R_0^2 + C_1 + C_2 = N, \quad \beta - \alpha_1 - \alpha_2 = \gamma, \quad (33)$$

süs saame:

$$\frac{(\beta - \alpha_1 - \alpha_2 - C_1 \dot{q}_1 - C_2 \dot{q}_2)^2}{\theta R_0^2(1+q_3)^2+C_1+C_2} = \frac{\gamma^2}{N} - \frac{2\theta R_0^2 \gamma^2}{N^2} q_3 - \frac{2\gamma C_1}{N} \dot{q}_1 - \frac{2\gamma C_2}{N} \dot{q}_2 - \\ - \theta R_0^2 \gamma^2 \frac{N - 4\theta R_0^2}{N^3} q_3^2 + \frac{C_1^2}{N} \dot{q}_1^2 + 2 \frac{C_1 C_2}{N} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ + \frac{C_2^2}{N} \dot{q}_2^2 + \frac{4\gamma C_1 \theta R_0^2}{N^2} q_3 \dot{q}_1 + \frac{4\gamma C_2 \theta R_0^2}{N^2} q_3 \dot{q}_2 + \dots$$

Potentsiaalse energia arendus on järgmine:

$$-U = \frac{\kappa^2 m_1 m_2}{R_0} + \frac{\kappa^2}{2R_0^3} [m_2(B_1 + C_1 - 2A_1) + m_1(B_2 + C_2 - 2A_2)] - \\ - \left\{ \frac{\kappa^2 m_1 m_2}{R_0} + \frac{3\kappa^2}{2R_0^3} [m_2(B_1 + C_1 - 2A_1) + m_1(B_2 + C_2 - 2A_2)] \right\} q_3 - \\ - \frac{3\kappa^2 m_2}{2R_0^3} (B_1 - A_1) q_1^2 - \frac{3\kappa^2 m_1}{2R_0^3} (B_2 - A_2) q_2^2 + \left\{ \frac{\kappa^2 m_1 m_2}{R_0} + \right. \\ \left. + \frac{6\kappa^2}{2R_0^3} [m_2(B_1 + C_1 - 2A_1) + m_1(B_2 + C_2 - 2A_2)] \right\} q_3^2 + \dots$$

Tähides:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\kappa^2 m_1 m_2}{R_0} = \delta_1, \quad \frac{\kappa^2}{2R_0^3} [m_2(B_1 + C_1 - 2A_1) + m_1(B_2 + C_2 - 2A_2)] = \delta_2, \\ \frac{3\kappa^2 m_2}{2R_0^3} (B_1 - A_1) = \delta_3, \quad \frac{3\kappa^2 m_1}{2R_0^3} (B_2 - A_2) = \delta_4, \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

saame :

$$-U = (\delta_1 + \delta_2) - (\delta_1 + 3\delta_2)q_3 - \delta_3 q_1^2 - \delta_4 q_2^2 + (\delta_1 + 6\delta_2)q_3^2 + \dots$$

Pannes eelpooltoodud arendused avaldisse (32), omandab Q järgmise kuju:

$$\begin{aligned} Q = & -\frac{\gamma^2}{2N} + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \delta_1 + \delta_2 - \left(\delta_1 + 3\delta_2 - \frac{\theta R_0^2 \gamma^2}{N^2}\right) q_3 + \\ & + \left(\alpha_1 + \frac{\gamma c_1}{N}\right) \dot{q}_1 + \left(\alpha_2 + \frac{\gamma c_2}{N}\right) \dot{q}_2 + \left(\delta_1 + 6\delta_2 + \theta R_0^2 \gamma^2 \frac{N - 4\theta R_0^2}{2N^3}\right) q_3^2 - \\ & - \delta_3 q_1^2 - \delta_4 q_2^2 - \frac{2\gamma c_1 \theta R_0^2}{N^2} q_3 \dot{q}_1 - \frac{2\gamma c_2 \theta R_0^2}{N^2} q_3 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \left(c_1 - \frac{c_1^2}{N}\right) \dot{q}_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(c_2 - \frac{c_2^2}{N}\right) \dot{q}_2^2 - \frac{c_1 c_2}{N} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \theta R_0^2 \dot{q}_3^2. \end{aligned}$$

Kui me nüüd selle funktsiooni asetame diferentsiaalvõrrandisse (30) lk. 28, siis näeme, et järgmised liikmete kompleksid Q -s ei avalda võrrandite (30) kujule mingisugust mõju:

1). $-\frac{\gamma^2}{2N} + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \delta_1 + \delta_2,$

2). $\left(\alpha_1 + \frac{\gamma c_1}{N}\right) \dot{q}_1 + \left(\alpha_2 + \frac{\gamma c_2}{N}\right) \dot{q}_2.$

Me võime nad Q -st ärajätta, ja liikumise diferentsiaalvõrrandid säilitavad täpselt endise kuju.

Definides lk. 25 võrranditega (24) koordinaadid q_1, q_2, q_3, p , jää R_0 määramatuks konstandiks. Selle pärast on võimalik R_0 määrata nüüd nii, et oleks täidetud tingimus:

$$\delta_1 + 3\delta_2 - \frac{\theta R_0^2 \gamma^2}{N^2} = 0, \quad (35)$$

Arvestades äsjamainitud asioludega, võime Q -ks valida järgmise funktsiooni:

$$Q = -\delta_3 q_1^2 - \delta_4 q_2^2 + \left(\delta_1 + 6\delta_2 + \theta R_0^2 \gamma^2 \frac{N - 4\theta R_0^2}{2N^3} \right) q_3^2 - \left. \begin{aligned} & - \frac{2\gamma C_1 \theta R_0^2}{N^2} q_3 \dot{q}_1 - \frac{2\gamma C_2 \theta R_0^2}{N^2} q_3 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{C_1^2}{N} \right) \dot{q}_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(C_2 - \frac{C_2^2}{N} \right) \dot{q}_2^2 - \frac{C_1 C_2}{N} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \theta R_0^2 \dot{q}_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

See on konstantsete kordajatega ruutvorm muutujaist $q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$.

§.7. Liikumise diferentsiaalvõrrandid.

Liikumise diferentsiaalvõrrandite saamiseks tuleb ainult funktsioon Q asetada võrrandisse (30) lk. 28. Integratsiooniks sobiva kuju andmiseks teisendame nad Hamiltoni transformatsiooni abil kanoonilise kujju. Selleks defüinime kõigepääält kolm uut koor- dinaati q_4, q_5, q_6 :

$$q_{r+3} = \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_r}, \quad (r=1,2,3) \quad (37)$$

ja moodustame siis funktsiooni

$$H(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = \sum_1^3 \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - Q = \sum_1^3 q_{r+3} \dot{q}_r - Q.$$

Nüüd on liikumise diferentsiaalvõrrandite (30) kanooniline kujju:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial q_{r+3}}, \quad \dot{q}_{r+3} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r=1, 2, 3) \quad (38)$$

Väljaarvutatult on:

$$\left. \begin{aligned} q_4 &= -\frac{2c_1 r \theta R_0^2}{N^2} q_3 + c_1 \left(1 - \frac{c_1}{N}\right) \dot{q}_1 - \frac{c_1 c_2}{N} \dot{q}_2, \\ q_5 &= -\frac{2r c_2 \theta R_0^2}{N^2} q_3 - \frac{c_1 c_2}{N} \dot{q}_1 + c_2 \left(1 - \frac{c_2}{N}\right) \dot{q}_2, \\ q_6 &= \theta R_0^2 \dot{q}_3, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

kust järgneb:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{2r}{N} q_3 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right) q_4 + \frac{1}{\theta R_0^2} q_5, \\ \dot{q}_2 &= \frac{2r}{N} q_3 + \frac{1}{\theta R_0^2} q_4 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right) q_5, \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{\theta R_0^2} q_6. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Funktsiooni H moodustame võrrandite (39) abil:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{c_1}{N}\right) \dot{q}_1^2 - \frac{c_1 c_2}{N} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} c_2 \left(1 - \frac{c_2}{N}\right) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \theta R_0^2 \dot{q}_3^2 + \\ &+ \delta_3 q_1^2 + \delta_4 q_2^2 - \left(\delta_1 + 6\delta_2 + \theta R_0^2 r^2 \frac{N - 4\theta R_0^2}{2N^3}\right) q_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Sün tulevad $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ asemele panna võrrandite (40) paremad pooled, nü et H oleks konstantsete kordajatega ruutvorm muutujaist $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$.

H -le saab anda kujiv:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{2}{c_1 \left(1 - \frac{c_1}{N}\right)} \left[\frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{c_1}{N}\right) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} \frac{c_1 c_2}{N} \dot{q}_2 \right]^2 + \frac{c_2}{2N} \frac{\theta R_0^2}{1 - \frac{c_1}{N}} \dot{q}_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \theta R_0^2 \dot{q}_3^2 + \delta_3 q_1^2 + \delta_4 q_2^2 - \left(\delta_1 + 6\delta_2 + \theta R_0^2 r^2 \frac{N - 4\theta R_0^2}{2N^3}\right) q_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

s.o. H -d saab teisendada täisruutude summaks. Sün on

$$1 - \frac{c_1}{N} = \frac{\theta R_0^2 + c_2}{N} > 0, \quad \delta_3 = \frac{3\kappa^2 m_2}{2R_0^3} (B_1 - A_1) > 0, \quad \delta_4 > 0.$$

Pääle selle nõuame, et oleks täidetud tingimus:

$$\delta_1 + 6\delta_2 + \theta R_0^2 \gamma^2 \frac{N - 4\theta R_0^2}{2N^3} < 0. \quad (43)$$

Nagu hiljem selgub, on see tingimus täidetud iga stabiilse süsteemi juures. Nüüd aga näeme, et (42) paremal iga täisruudu kordaja on positiivne, seega ruutvorm $H(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ on positiivselt definieetne.

Arvestades, et on

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_r} = 0, \quad (r=1,2,6), \quad \frac{\partial q_2}{\partial q_r} = 0, \quad (r=1,2,6)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial q_r} = 0, \quad (r=1,2,3,4,5),$$

saame võrduse (41) paremat poolt asetades võrrandeisse (38):

$$\dot{q}_4 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -2\delta_3 q_1,$$

$$\dot{q}_5 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -2\delta_4 q_2,$$

$$\dot{q}_6 = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = \left(2\delta_1 + 12\delta_2 - \frac{3\gamma^2 \theta R_0^2}{N^2}\right) q_3 - \frac{2\gamma}{N} q_4 - \frac{2\gamma}{N} q_5. \quad (44)$$

Võrrandid (40) ja (44) koos annavadki liikumise diferentsiaalvõrrandid Hamiltoni kujus. Elimineerime neist seosest (35) lk. 31. järgneva võrduse

$$\left(\frac{\gamma}{N}\right)^2 = \frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}$$

abil suhte $\frac{\gamma}{N}$, et vabaneda konstandist γ . Saame liikumise diferentsiaalvõrrandite lõpliku kuju:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_3 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right) q_4 + \frac{1}{\theta R_0^2} q_5, \\
 \dot{q}_2 &= 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_3 + \frac{1}{\theta R_0^2} q_4 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right) q_5, \\
 \dot{q}_3 &= \frac{1}{\theta R_0^2} q_6, \\
 \dot{q}_4 &= -2\delta_3 q_1, \\
 \dot{q}_5 &= -2\delta_4 q_2, \\
 \dot{q}_6 &= -(\delta_1 - 3\delta_2)q_3 - 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_4 - 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_5.
 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

§.8. Liikumise diferentsiaalvõrrandite integratsioon.

Eeldasime, et ruutvorm $H(q_1, \dots, q_6)$ on positiivselt definitne. Nüsusugusel korral saab diferentsiaalvõrrandeid (45) mõnusasti integreerida Weierstrass'i meetodi abil ([8] p. 191-198).

Vaatame lineaarset algebraalist süsteemi muutujaist

q_1, \dots, q_6 :

$$s q_4 + \frac{\partial H}{\partial q_1} = 2\delta_3 q_1 + s q_4 = 0,$$

$$s q_5 + \frac{\partial H}{\partial q_2} = 2\delta_4 q_2 + s q_5 = 0,$$

$$s q_6 + \frac{\partial H}{\partial q_3} = (\delta_1 - 3\delta_2)q_3 + 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_4 + 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_5 + s q_6 = 0,$$

$$-s q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_4} = -s q_1 + 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_3 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right) q_4 + \frac{1}{\theta R_0^2} q_5 = 0,$$

$$-s q_2 + \frac{\partial H}{\partial q_5} = -s q_2 + 2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} q_3 + \frac{1}{\theta R_0^2} q_4 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right) q_5 = 0,$$

$$-sq_3 + \frac{\partial H}{\partial q_6} = -sq_3 + \frac{1}{\theta R_0^2} q_6 = 0,$$

kus s peab olema nn. determineeriva võrrandi

$$f(s) = \begin{vmatrix} 2\delta_3 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 2\delta_4 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 - 3\delta_2 & 2\sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} & 2\sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} & s \\ -s & 0 & 2\sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} & \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2} & \frac{1}{\theta R_0^2} & 0 \\ 0 & -s & 2\sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} & \frac{1}{\theta R_0^2} & \frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & \frac{1}{\theta R_0^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (46)$$

juureks. Edaspidiseks on meil tähtis ainult determineeriva võrrandi, mille kirjutame väljaarendatud kujus:

$$f(s) = s^6 + \left[2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right)\delta_3 + 2\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2}\right)\delta_4 + \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{\theta R_0^2} \right] s^4 +$$

$$+ \left[\frac{2\delta_3}{\theta R_0^2} \left(\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \right) + \frac{2\delta_4}{\theta R_0^2} \left(\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \right) \right. \quad (47)$$

$$+ 4\delta_3\delta_4 \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 \theta R_0^2} + \frac{1}{c_2 \theta R_0^2} \right) \left. \right] s^2 - 4 \frac{\delta_3 \delta_4}{\theta R_0^2} \left[3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1 c_2} \right] = 0$$

Sellepärast, et H on positiivselt defineeritud, on determineeriva võrrandi juured kõik puhtimaginaarsed:

$$\pm is_1, \pm is_2, \pm is_3 \quad (48)$$

Tähime determinandi (46) λ -dale reale μ -dale veerule vastavat aladeterminanti $f(s)_{\lambda\mu}$. Kui is_r on determineeriva võrrandi κ -kordseks juureks, siis on ta $(\kappa-1)$ -kordseks juureks kõigile võrranditele

$$f(s)_{\lambda\mu} = 0, \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n).$$

Süt järgneb, et is_r on funktsioonile

$$F(s)_{\lambda\mu} = \frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} \quad (49)$$

ühikordseks pooluseks. Nüisugusel korral $F(s)_{\lambda\mu}$ resid sellis pooluses (Laurent'i arenduses lükme $\frac{1}{s-is_r}$ kor-
daja) on

$$\frac{f(is_r)_{\lambda\mu}}{f'(is_r)} = (\lambda, \mu)_r + i(\lambda, \mu)'_r \quad (50)$$

On need residid kõik teada, siis saame diferentsiaal-
võrrandite (45) lahendeiks järgmised avaldised:

$$q_\mu = 2 \sum_1^3 \alpha \sum_1^m \rho \left[\overset{\circ}{q}_{3+\alpha} \{ (\alpha, \mu)_\rho \cos s_\rho (t-t_0) - (\alpha, \mu)'_\rho \sin s_\rho (t-t_0) \} \right. \\ \left. - \overset{\circ}{q}_\alpha \{ (3+\alpha, \mu)_\rho \cos s_\rho (t-t_0) - \right. \\ \left. - (3+\alpha, \mu)'_\rho \sin s_\rho (t-t_0) \} \right], \quad (\mu=1, \dots, 6) \quad (51)$$

Sün $\overset{\circ}{q}_1, \dots, \overset{\circ}{q}_6$ tähendavad koordinaatide q_1, \dots, q_6 vää-
tusi momendil t_0 , is_ρ , ($\rho=1, \dots, m$), on üksteisest
erinevad juured sarjas (48).

Determinandil (46) on 36 aladeterminanti, ja need
on järgmised:

$$f(s)_{11} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) s^4 + \left[\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1 \theta R_0^2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta^2 R_0^4} + \right. \\ \left. + 2\delta_4 \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 \theta R_0^2} + \frac{1}{c_2 \theta R_0^2} \right) \right] s^2 + \frac{2\delta_4}{\theta R_0^2} \left[\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1 c_2} - \right. \\ \left. - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right],$$

$$f(s)_{22} = \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) s^4 + \left[\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_2 \theta R_0^2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta^2 R_0^4} + \right. \\ \left. + 2\delta_3 \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 \theta R_0^2} + \frac{1}{c_2 \theta R_0^2} \right) \right] s^2 + \frac{2\delta_3}{\theta R_0^2} \left[\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1 c_2} - \right. \\ \left. - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right],$$

$$f(s)_{33} = \frac{1}{\theta R_0^2} s^4 + \frac{2}{\theta R_0^2} \left[\delta_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + \delta_4 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) \right] s^2 + 4 \frac{\delta_3 \delta_4}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 \theta R_0^2} + \frac{1}{c_2 \theta R_0^2} \right),$$

$$f(s)_{44} = 2\delta_3 s^4 + 2\delta_3 \left[2\delta_4 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{\theta R_0^2} \right] s^2 - 4 \frac{\delta_3 \delta_4}{\theta R_0^2} \left(3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} - \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_2} \right),$$

$$f(s)_{55} = 2\delta_4 s^4 + 2\delta_4 \left[2\delta_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{\theta R_0^2} \right] s^2 - 4 \frac{\delta_3 \delta_4}{\theta R_0^2} \left(3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} - \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1} \right),$$

$$f(s)_{66} = (\delta_1 - 3\delta_2) s^4 - 2 \left[\delta_3 \left(3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} - \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1} \right) + \delta_4 \left(3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} - \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_2} \right) \right] s^2 + 4\delta_3 \delta_4 \left[\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1 c_2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right],$$

$$f(s)_{12} = f(s)_{21} = \frac{1}{\theta R_0^2} s^4 - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta^2 R_0^4} s^2,$$

$$f(s)_{13} = -f(s)_{31} = -\frac{2s}{\theta R_0^2} \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + \frac{2\delta_4}{c_2} \right),$$

$$f(s)_{14} = -f(s)_{41} = s^5 + \left[2\delta_4 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{\theta R_0^2} \right] s^3 + 2 \frac{\delta_4}{\theta R_0^2} \left[\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \right] s,$$

$$f(s)_{15} = -f(s)_{51} = 2 \frac{\delta_4 s}{\theta R_0^2} \left(-s^2 + 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \right),$$

$$f(s)_{16} = f(s)_{61} = -2s^2 \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + 2 \frac{\delta_4}{c_2} \right),$$

$$f(s)_{23} = -f(s)_{32} = -\frac{2s}{\theta R_0^2} \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + 2 \frac{\delta_3}{c_1} \right),$$

$$f(s)_{24} = -f(s)_{42} = 2 \frac{d_3 s}{\theta R_0^2} \left(-s^2 + 3 \frac{d_1 + 5d_2}{\theta R_0^2} \right),$$

$$f(s)_{25} = -f(s)_{52} = s^5 + \left[2d_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + \frac{d_1 - 3d_2}{\theta R_0^2} \right] s^3 + \frac{2d_3}{\theta R_0^2} \left(\frac{d_1 - 3d_2}{c_1} - 3 \frac{d_1 + 5d_2}{\theta R_0^2} \right) s,$$

$$f(s)_{26} = f(s)_{62} = -2s^2 \sqrt{\frac{d_1 + 3d_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + 2 \frac{d_3}{c_1} \right),$$

$$f(s)_{34} = f(s)_{43} = -\frac{4d_3}{\theta R_0^2} \sqrt{\frac{d_1 + 3d_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + 2 \frac{d_4}{c_2} \right),$$

$$f(s)_{35} = f(s)_{53} = -\frac{4d_4}{\theta R_0^2} \sqrt{\frac{d_1 + 3d_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + 2 \frac{d_3}{c_1} \right),$$

$$f(s)_{36} = -f(s)_{63} = s^5 + 2 \left[d_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + d_4 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) \right] s^3 + 4d_3 d_4 \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 \theta R_0^2} + \frac{1}{c_2 \theta R_0^2} \right) s,$$

$$f(s)_{45} = f(s)_{54} = 4 \frac{d_3 d_4}{\theta R_0^2} \left(-s^2 + 3 \frac{d_1 + 5d_2}{\theta R_0^2} \right),$$

$$f(s)_{46} = -f(s)_{64} = -4d_3 s \sqrt{\frac{d_1 + 3d_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + 2 \frac{d_4}{c_2} \right),$$

$$f(s)_{56} = -f(s)_{65} = -4d_4 s \sqrt{\frac{d_1 + 3d_2}{\theta R_0^2}} \left(s^2 + 2 \frac{d_3}{c_1} \right).$$

Nüüd paistavad silma järgmised tõigad:

1). Kõik $f(s)_{\lambda\mu}$ -d, mis on s suhtes paaritu arvulise järuga, on puhtimaginaarsed, kui neisse asendada $\pm is_r$. Paarisarvulise järuga $f(s)_{\lambda\mu}$ -d jäävad pääle niisugust asendust reaalseks.

2). $f'(is_r)$ on puhtimaginaarne.

3). $F(is_r)_{\lambda\mu}$ on puhtimaginaarne või reaalne, vastavalt sellele, kas $F(s)_{\lambda\mu}$ lugeja $f(s)_{\lambda\mu}$ on s suhtes paarisarvulise järuga või vastupidi. Ühegi $F(is_r)_{\lambda\mu}$

reaal- ja imaginaarosad ei ole korraga nullist erinevad.

Tähistusele (50) lk. 36 vastavalt saame võrdused:

$$\left. \begin{aligned}
 (1;1)_r = 0, & \quad (5,5)_r = 0, & \quad (2,6)_r = (6,2)_r = 0, \\
 (2,2)_r = 0, & \quad (6,6)_r = 0, & \quad (3,4)_r = (4,3)_r = 0, \\
 (3,3)_r = 0, & \quad (1,2)_r = (2,1)_r = 0, & \quad (3,5)_r = (5,3)_r = 0, \\
 (4,4)_r = 0, & \quad (1,6)_r = (6,1)_r = 0, & \quad (4,5)_r = (5,4)_r = 0, \\
 \\
 (1,3)'_r = (3,1)'_r = 0, & \quad (2,3)'_r = (3,2)'_r = 0, & \quad (3,6)'_r = (6,3)'_r = 0, \\
 (1,4)'_r = (4,1)'_r = 0, & \quad (2,4)'_r = (4,2)'_r = 0, & \quad (4,6)'_r = (6,4)'_r = 0, \\
 (1,5)'_r = (5,1)'_r = 0, & \quad (2,5)'_r = (5,2)'_r = 0, & \quad (5,6)'_r = (6,5)'_r = 0.
 \end{aligned} \right\} (52)$$

$$(r=1,2,3).$$

Pääle selle järgneb $F(s)_{2\mu}$ -de omavahelisist võrdusist:

$$\left. \begin{aligned}
 (1,2)'_r = (2,1)'_r, & \quad (2,6)'_r = (6,2)'_r, & \quad (3,5)'_r = (5,3)'_r, \\
 (1,6)'_r = (6,1)'_r, & \quad (3,4)'_r = (4,3)'_r, & \quad (4,5)'_r = (5,4)'_r, \\
 \\
 (1,3)_r = -(3,1)_r, & \quad (2,3)_r = -(3,2)_r, & \quad (3,6)_r = -(6,3)_r, \\
 (1,4)_r = -(4,1)_r, & \quad (2,4)_r = -(4,2)_r, & \quad (4,6)_r = -(6,4)_r, \\
 (1,5)_r = -(5,1)_r, & \quad (2,5)_r = -(5,2)_r, & \quad (5,6)_r = -(6,5)_r.
 \end{aligned} \right\} (53)$$

$$(r=1,2,3).$$

Olgu determineeriva võrrandi juured kõik ühekordsed, siis saame avaldis (51) lk. 36 järgi liikumise diferentsiaalvõrrandite üldlahendite süsteemi:

$$\begin{aligned}
 q_1 = & 2 \sum_r^3 \left\{ [\ddot{q}_6(3,1)_r - \dot{q}_1(4,1)_r - \dot{q}_2(5,1)_r] \cos s_r(t-t_0) + \right. \\
 & \left. + [\dot{q}_3(6,1)'_r - \dot{q}_4(1,1)'_r - \dot{q}_5(2,1)'_r] \sin s_r(t-t_0) \right\}, \\
 q_2 = & 2 \sum_r^3 \left\{ [\ddot{q}_6(3,2)_r - \dot{q}_1(4,2)_r - \dot{q}_2(5,2)_r] \cos s_r(t-t_0) + \right. \\
 & \left. + [\dot{q}_3(6,2)'_r - \dot{q}_4(1,2)'_r - \dot{q}_5(2,2)'_r] \sin s_r(t-t_0) \right\},
 \end{aligned}$$

$$q_3 = 2 \sum_r^3 \left\{ \left[\dot{q}_4(1,3)_r + \dot{q}_5(2,3)_r - \dot{q}_3(6,3)_r \right] \cos s_r(t-t_0) + \left[\dot{q}_1(4,3)'_r + \dot{q}_2(5,3)'_r - \dot{q}_6(3,3)'_r \right] \sin s_r(t-t_0) \right\},$$

$$q_4 = 2 \sum_r^3 \left\{ \left[\dot{q}_4(1,4)_r + \dot{q}_5(2,4)_r - \dot{q}_3(6,4)_r \right] \cos s_r(t-t_0) + \left[\dot{q}_1(4,4)'_r + \dot{q}_2(5,4)'_r - \dot{q}_6(3,4)'_r \right] \sin s_r(t-t_0) \right\},$$

$$q_5 = 2 \sum_r^3 \left\{ \left[\dot{q}_4(1,5)_r + \dot{q}_5(2,5)_r - \dot{q}_3(6,5)_r \right] \cos s_r(t-t_0) + \left[\dot{q}_1(4,5)'_r + \dot{q}_2(5,5)'_r - \dot{q}_6(3,5)'_r \right] \sin s_r(t-t_0) \right\},$$

$$q_6 = 2 \sum_r^3 \left\{ \left[\dot{q}_6(3,6)_r - \dot{q}_1(4,6)_r - \dot{q}_2(5,6)_r \right] \cos s_r(t-t_0) + \left[\dot{q}_3(6,6)'_r - \dot{q}_4(1,6)'_r - \dot{q}_5(2,6)'_r \right] \sin s_r(t-t_0) \right\}.$$

IV. Süsteemi liikumised.

§. 9. Liikumise diferentsiaalvõrrandite lahendite lühike diskussioon.

Liikumise diferentsiaalvõrrandite lahendid avaldusid ringi funktsioonides, nad on seega perioodilised. Iga koordinaadi avaldises esines kolm simultaanset sünnusvõnkumist perioodidega

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{s_1}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{s_2}, \quad \tau_3 = \frac{2\pi}{s_3} \quad (54)$$

Koordinaadid q_1 ja q_2 on libratsiooninurgad, nad näitavad erivusi komponentide pea-inertsiaalipsoidide pikimate telgede ja komponentide masskeskmeid ühendava sirge vahel. Nad avaldavad mõju kattumismuutliku valgustatud pinna näivale suurusele, tekitades perioodilisi võnkumisi valgusköveras. Seega on võimalik valgusköverast määrata perioodid τ_1, τ_2, τ_3 ([3] p. 130). Koordinaat q_3 kirjeldab komponentide masskeskmete omavahelise kauguse muutusi ajaga, ta iseloomustab ühe komponendi relatiivset orbüti teise suhtes. Koordinaadid q_4, q_5, q_6 määravad võrrandite (40), lk. 32, abil liikumise käärid q_1, q_2, q_3 .

Kui determineerival võrrandil on kordseid juuri, siis igas koordinaadis simultaansete sünnusvõnkumiste arv kahaneb. On mõeldav kaks juhtu: determineerival võrrandil on 1) kaks kahakordset ja kaks ühekordset juurt, 2) kaks kolmekordset juurt. Mõlemal juhul peab süsteem omama eriomadusi, millised kohe määrame. Tähtne:

$$\left. \begin{aligned} 2\delta_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + 2\delta_4 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{\theta R_0^2} \right) + \frac{\delta_1 - 3\delta_2}{\theta R_0^2} &= u_1, \\ \frac{2\delta_3}{\theta R_0^2} \left(\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \right) + \frac{2\delta_4}{\theta R_0^2} \left(\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \right) + \\ + 4\delta_3\delta_4 \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 \theta R_0^2} + \frac{1}{c_2 \theta R_0^2} \right) &= u_2, \\ 4 \frac{\delta_3\delta_4}{\theta R_0^2} \left[\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1 c_2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right] &= u_3, \\ s^2 &= \lambda, \end{aligned} \right\} (55)$$

siis determineeriv võrrand omandab kuju:

$$\lambda^3 + u_1 \lambda^2 + u_2 \lambda + u_3 = 0. \quad (56)$$

Selle võrrandi kõik kolm juurt on negatiivsed:

$$\lambda_1 = -s_1^2, \quad \lambda_2 = -s_2^2, \quad \lambda_3 = -s_3^2. \quad (57)$$

Kui võrrandil (56) on kordseid juuri, siis tema diskriminant on null, s.o.

$$u_1^2 u_2^2 - 4u_1^3 u_3 - 4u_2^3 + 18u_1 u_2 u_3 - 27u_3^2 = 0. \quad (58)$$

See on kõigi süsteemide ühiseks eriomaduseks, mille koordinaatide avaldisis erinevate perioodidega sünnusfunktsioonide arv on vähem kui 3. Olgu see arv 2, siis on juurte (57) hulgas üks paar omavahel võrdsed, näiteks $\lambda_1 = \lambda_3$. Nisugusel korral λ_1 on juureks ruutvõrrandile

$$3\lambda^2 + 2u_1 \lambda + u_2 = 0, \quad (59)$$

mille vasakuks pooliks on võrrandi (56) vasaku poole tuletis λ järgi. Siit saame

$$\lambda_1 = \frac{-u_1 + \sqrt{u_1^2 - 3u_2}}{3} \quad (60)$$

Teine juur ei kõlba järgmises δ -is selgumisel põhjusil. Tuntud seosest $2\lambda_1 + \lambda_2 = -u_1$, leiame ka teise juure

$$\lambda_2 = \frac{-u_1 - 2\sqrt{u_1^2 - 3u_2}}{3}, \quad (61)$$

kuna seos $\lambda_1^2 \lambda_2 = -u_3$ annab avaldiste (60) ja (61) abil võrduse:

$$-27u_3 = 2u_1^3 - 9u_1u_2 - 2(u_1^2 - 3u_2)^{\frac{3}{2}} \quad (62)$$

See on (58) kõrval veel süsteemi teine eriomadus.

Sünnusvõnkumiste kaks üksteisest erinevat perioodi on:

$$\tau_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{u_1 - \sqrt{u_1^2 - 3u_2}}}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{u_1 + 2\sqrt{u_1^2 - 3u_2}}}$$

Teine mõeldav võimalus on, et võrrandil (56) oleks üks kolmekordne juur λ . Juurte sümmeetrilised funktsioonid esinevad nüüd kujus $3\lambda = -u_1$, $3\lambda^2 = u_2$, $\lambda^3 = -u_3$, kust järgnevad seosed

$$u_1^3 = 27u_3, \quad u_1^2 = 3u_2 \quad (63)$$

Järgnevas δ -is aga selgub, et need seosed ei saa olla maksivad, mistõttu ka determineerival võrrandil ilmasi ei saa olla kaht kolmekordset juurt.

Dünaamilise süsteemi ehituse kirjeldamisel on korraldvalt mainitud, et kõne alla saavad tulla ainult need kaksiksüsteemid, mille komponentide omavaheline kaugus on küllalt suur selleks, et vastastikused deformatsioonid oleks väikesed, seega ka inertsimomentide vahed $B_1 - A_1$, $C_1 - A_1$, $B_2 - A_2$, $C_2 - A_2$ ja suurused $\delta_2, \delta_3, \delta_4$.

Kui see nüi on, siis näitab juba pealiskaudne pilk de-terminerivale võrrandile, et tema juured ei või olla kõik ühesuguse suuruse järguga, järelikult ka mitte kõik võnkeperioodid ja -amplituudid. Püüame selgi-
tada neid suuruse vahetõrki järgmises paragrahvis.

§.10. Võnkeamplituudide ja -perioodide suurustli-
kud vahetõrki.

Vaatleme kera, mille raadius on a ja tihedus ρ . Vi-
masel olgu kuju $\rho = \rho(r)$, kus r on vaadeldava punk-
ti kaugus kera sentrist. Olgu kera ruumala

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

kera mass m . Algusega kera sentris asugu täisnurkne,
keraga liikumatus ühenduses olev $\xi\eta\zeta$ -teljestik, milles
oleks punkti Cartesiuse koordinaadid ξ, η, ζ , ruumili-
sed polaarkoordinaadid aga r, φ, λ . Siis on ruumidi-
ferentsiaal

$$dV = r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\lambda.$$

Nüüd saame kera keskmise tiheduse

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{m}{V} = \frac{1}{V} \int \rho(r) \, dV = \frac{3}{4\pi a^3} \int_0^a \int_0^{2\pi + \frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(r) r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\lambda \\ &= \frac{3}{a^3} \int_0^a r^2 \rho(r) \, dr. \end{aligned}$$

Inertsimomendid koordinaatpindade suhtes on:

$$\begin{aligned} I &= \int \xi^2 \, dm = \int \eta^2 \, dm = \int \zeta^2 \, dm = \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi + \frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \rho(r) \cos\varphi \sin^2\varphi \, dr \, d\varphi \, d\lambda = \frac{4\pi}{3} \int_0^a r^4 \rho(r) \, dr. \end{aligned}$$

Oletame nüüd, et kera mass m jääb endiseks, tiheduse jaotus aga muutuks ühtlaseks, siis on $\rho = \bar{\rho}$. Inertsimomendid koordinaatpindade suhtes on nüüd järgmised:

$$I_{hom} = \frac{ma^2}{5} = \frac{4}{3}\pi a^3 \bar{\rho} \cdot \frac{a^2}{5} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3}{5} a^2 \int_0^a r^2 \rho(r) dr.$$

Süü järgneb:

$$I = \mu I_{hom}, \tag{64}$$

kus on

$$\mu = \frac{5}{3a^2} \cdot \frac{\int_0^a r^4 \rho(r) dr}{\int_0^a r^2 \rho(r) dr} \tag{65}$$

Dimensioonitu arv μ asub rajades

$$0 < \mu < 1.$$

Ta on kera tiheduse kontsentratsiooni mõõduks. Ülemine piir vastab homogeenisele tiheduse jaotusele kera, kuna alumine piir vastab juhule, kus kera mass on tervisti koondunud tema sentrüse.

Seos (64) maksab ilmselt ka süü, kui I ja I_{hom} all mõistame inertsimomente koordinaattelgede või üks-kõik millise diameetri suhtes.

Vaadeldes kera asemel mõnda muud keha, mille tihedus ajaga ei muutu, võime üldiselt lugeda ka süü maksvaks seost (64), ainult μ väärtus ei ole konstantne, vaid sõltub sellest, millise telje suhtelist inertsimomenti vaatleme. Kui aga see keha on selline, mida küllalt hästi lähendab eelpoolmainitud kera, süü lähendab suurus (65) ka küllaldase täpsusega kõiki μ -sid, nüü et võime suurema veata lugeda μ konstandiks. Nüü sugused kehad on meie kaksiksüsteemi mõlemad

komponendid. Sellepärast võime kirjutada eelpoolõeldu põhjal:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \mu_1 A_{1\text{hom}}, & B_1 &= \mu_1 B_{1\text{hom}}, & C_1 &= \mu_1 C_{1\text{hom}}, \\ A_2 &= \mu_2 A_{2\text{hom}}, & B_2 &= \mu_2 B_{2\text{hom}}, & C_2 &= \mu_2 C_{2\text{hom}}. \end{aligned} \right\} (66)$$

Oletame, et kaksiksüsteemi komponendid on täpsalt kolmeteljesed ellipsoidid, mille pooltelgede pikkused on a_1, b_1, c_1 , ja a_2, b_2, c_2 . Tähime ekvaator- ja meridiaanlõigete eksstentrisused järgmiselt:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= 1 - \frac{b_1^2}{a_1^2}, & \varepsilon_1'^2 &= 1 - \frac{c_1^2}{a_1^2}, \\ \varepsilon_2^2 &= 1 - \frac{b_2^2}{a_2^2}, & \varepsilon_2'^2 &= 1 - \frac{c_2^2}{a_2^2}. \end{aligned} \right\} (67)$$

Arvestades seoseid (66), võime inertsimomendid telgede suhtes kirjutada:

$$A_1 = \mu_1 \frac{m_1}{5} (b_1^2 + c_1^2) = \mu_1 \frac{a_1^2 m_1}{5} (2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1'^2),$$

$$B_1 = \mu_1 \frac{m_1}{5} (a_1^2 + c_1^2) = \mu_1 \frac{a_1^2 m_1}{5} (2 - \varepsilon_1'^2),$$

$$C_1 = \mu_1 \frac{m_1}{5} (a_1^2 + b_1^2) = \mu_1 \frac{a_1^2 m_1}{5} (2 - \varepsilon_1^2).$$

Süt järgneb

$$B_1 - A_1 = \mu_1 \frac{a_1^2 m_1}{5} \varepsilon_1^2, \quad C_1 - A_1 = \mu_1 \frac{a_1^2 m_1}{5} \varepsilon_1'^2. \quad (68)$$

Analoogiliselt teise komponendi jaoks:

$$B_2 - A_2 = \mu_2 \frac{a_2^2 m_2}{5} \varepsilon_2^2, \quad C_2 - A_2 = \mu_2 \frac{a_2^2 m_2}{5} \varepsilon_2'^2. \quad (69)$$

Ekstentrisused $\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_2'$ on väikesed dimensioonitud arvud. Kui neist üks esineb kordajana mõne suuruse ees, siis loeme seda suurust teiste samadimensiooniliste suuruste suhtes esimest järku väikseks.

Aga süsteemi ehituse kirjeldamisel mainisime, et komponendid ei ole täpselt kolmeteljesed ellipsoidid, vaid komponente ainult lähendavad ellipsoidid. Sellegipärast võime lugeda kehtivaks seoseid (68) ja (69), ainult suurused

$$\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_2' \quad (70)$$

ei tarvitse tähendada ekstsentrisusi, nad olgu lihtsalt mingisugused väikesed dimensioonitud arvud. Nüüd selgub võrrandeist (34) lk. 30, et $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ on δ_1 suhtes teist järku väikesed.

Olgu ε arv, mis on sama suurusejärguga nagu arvud (70), ta võib olla näiteks aritmeetiline keskmine arvudest (70). Siis võime determineeriva võrrandi kordajate suurusjärgusid iseloomustada järgmiselt: kordajale u_1 (vt. (55) lk. 42) saab anda kuju $\varepsilon^0 u_1$, kordajale u_2 kuju $\varepsilon^2 u_2$, ja kordajale u_3 kuju $\varepsilon^4 u_3$, kus u_1, u_2, u_3 on igaüks oma-dimensiooniliste suuruste hulgas suurusjärguga null. Sellest järgneb, et võrrandi (56), lk. 42, juurist kaks, ütleme λ_2 ja λ_3 , on kolmanda, s.o. λ_1 , suhtes teist järku väikesed, millest omakord järgneb, et s_2 ja s_3 on s_1 suhtes esimest järku väikesed. Neist väga tähtsatest töödest asume tegema järeldusi.

Kõigepäält selgub, et võrrandi (59), lk. 42, juur (60) on väike võrreldes tema teise juurega, ja sellegipärast võib juur (60) ainuüksi võrrandi (56) kahekordseks juureks. Samuti ei või olla kehtivad seosed (63), lk. 43, kuna siis peaks võrrandi (56) kõik kolm juurt olema ühesuguse suurusjärguga.

Vaadeldes perioode (54), lk. 41, näeme, et τ_2 ja τ_3 on τ_1 suhtes esimest järku suured: kaks sünnusvõnkumist on pikaperioodilised võrreldes kolmandaga. Et määrata ka võnkeamplituudide suurusjärke, arvutame juured $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, arvestades suurusjärki teise suurusjärguni. Algebrast tuntud seoste järgi on

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -u_1 \quad (71)$$

ja $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = u_2$. Et aga $\lambda_2\lambda_3$ on neljandat järku väike, siis võime selle liikme ära jätta, nii et

$$\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) = u_2 \quad (72)$$

Võrdusist (71) ja (72) järgneb:

$$\lambda_1 = -u_1 - (\lambda_2 + \lambda_3) = -u_1 - \frac{u_2}{\lambda_1}$$

Arendame paremal teise liikme järgmisse ritta:

$$\frac{u_2}{\lambda_1} = \frac{u_2}{-u_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)} = \frac{u_2}{-u_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{u_1}} = \frac{u_2}{-u_1} \left(1 - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{u_1} + \dots \right)$$

Selles arenduses on kõik liikmed, peale esimese, vähemalt neljandat järku väikesed, seega lähendab $\frac{u_2}{\lambda_1}$ - te küllaldaselt juba arenduse esimene liige. Saame:

$$\lambda_1 = -u_1 + \frac{u_2}{u_1} \quad (73)$$

Seoseist (55), lk. 42, järgneb

$$\frac{u_2}{u_1} = 2\delta_3 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{3}{\theta R_0^2} \right) + 2\delta_4 \left(\frac{1}{c_2} - \frac{3}{\theta R_0^2} \right) \quad (74)$$

Seega võime λ_1 kirjutada ka järgmiselt:

$$\lambda_1 = - \frac{\delta_1 - 3\delta_2 + 8(\delta_3 + \delta_4)}{\theta R_0^2} \quad (75)$$

λ_2 ja λ_3 arvutamiseks kasutame seost $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -u_3$, millest järgneb

$$\lambda_2\lambda_3 = - \frac{u_3}{\lambda_1} \approx + \frac{u_3}{u_1} \quad (76)$$

Pääle selle järgneb (71)-st ja (73)-st :

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -u_1, \lambda_1 = -u_1 - \left(-u_1 + \frac{u_2}{u_1}\right) = -\frac{u_2}{u_1}. \quad (77)$$

Võrdused (76) ja (77) lubavad püstitada λ_2 ja λ_3 jaoks järgmise ruutvõrrandi:

$$\lambda^2 + \frac{u_2}{u_1} \lambda + \frac{u_3}{u_1} = 0,$$

ehk, arvestades jälle seoseid (55), lk. 42 :

$$\lambda^2 + 2 \left[\delta_3 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{3}{\theta R_0^2} \right) + \delta_4 \left(\frac{1}{c_2} - \frac{3}{\theta R_0^2} \right) \right] \lambda + 4 \delta_3 \delta_4 \left[\frac{1}{c_1 c_2} - \frac{3}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right] = 0.$$

Selle võrrandi juured on:

$$\lambda_{2,3} = -\delta_3 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{3}{\theta R_0^2} \right) - \delta_4 \left(\frac{1}{c_2} - \frac{3}{\theta R_0^2} \right) \pm h, \quad (78)$$

kus h tähendab radikaali

$$h = \sqrt{\left(\frac{u_2}{2u_1} \right)^2 - \frac{u_3}{u_1}}.$$

Seega on $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ arvutatud. Asetame nad järjest lk.

36-38 s^2 asemele $f(s)_{\lambda\mu}$ avaldisisse, siis rüümased oman-

davad kuju, kust selgesti paistab nende suurusjärk.

Suurusjärke iseloomustame jälle ε astmetega, andes

$f(s)_{\lambda\mu}$ -le kuju $f_{\lambda\mu} \cdot \varepsilon^n$, kus $f_{\lambda\mu}$ on oma-dimensioonü-

liste hulgas suurusjärguga null. Need ε -i astmed

n on märgitud järgnevas tabelis.

Tabel 1.

λ, μ	$f(is_r)_{\lambda\mu}$ suurusjärk n		λ, μ	$f(is_r)_{\lambda\mu}$ suurusjärk n	
	$r=1$	$r=2,3$		$r=1$	$r=2,3$
1,1	0	2	2,2	0	2
1,2	0	2	2,3	0	3
1,3	0	3	2,4	2	3
1,4	2	3	2,5	2	3
1,5	2	3	2,6	0	4
1,6	0	4	3,3	0	4

λ, μ	$f(is_r)_{\lambda\mu}$ suurusjärk n		λ, μ	$f(is_r)_{\lambda\mu}$ suurusjärk n	
	$r=1$	$r=2,3$		$r=1$	$r=2,3$
3,4	2	4	4,6	2	5
3,5	2	4	5,5	4	4
3,6	0	5	5,6	2	5
4,4	4	4	6,6	0	6
4,5	4	4	$f'(is_r)$	0	3

Arvestades, et $f'(is_r)$ suurusjärk on 0, kui $r=1$, ja 3, kui $r=2,3$, saame vörduse (50), lk. 36, alusel $(\lambda, \mu)_r$ ja $(\lambda, \mu)_r'$ suurusjärgud kergesti tabel 1 andmete põhjal (suurusjärku all mõistame ikka ε astet, defineeritud nii nagu tabelis 1). Et hinnata nüüd lk. 39-40 antud liikumise diferentsiaalvõrrandite lahendeis esinevate sünnufunktsioonide amplituudide suurusjärke, selleks on vaja veel määrata konstantide $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_6$ suurusjärgud. Need suurusjärgud peavad olema samad, millised me diferentsiaalvõrrandite püstitamisel omistasime üldiselt koordinaatele q_1, q_2, q_3 ja nende tuletisile $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$. Et saada sidet tabel 1 andmeiga, kirjutame:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \kappa_1 \cdot \varepsilon^{m_1}, & \dot{q}_2 &= \kappa_2 \cdot \varepsilon^{m_2}, & \dot{q}_3 &= \kappa_3 \cdot \varepsilon^{m_3}, & \dot{q}_4 &= \kappa_4 \cdot \varepsilon^{m_4}, \\ \dot{q}_5 &= \kappa_5 \cdot \varepsilon^{m_5}, & \dot{q}_6 &= \kappa_6 \cdot \varepsilon^{m_6}, \end{aligned} \right\} (79)$$

kus $\kappa_1, \dots, \kappa_6$ on konstandid suurusjärguga null. Paistab olevat loomulik, eeldada kõik koordinaadid $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ olevat ühesuguse suurusjärguga; siis tuleks võtta ka $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m$. Pannes nüüd konstandid (79) koordinaatide q_1, \dots, q_6 avaldisisse lk. 39-40 leiame, et iga võnkeamplituudi suurus-

järk on vähemalt m , väljaarvatud q_1 ja q_2 pika-perioodilised võnkumised, mille amplituudide suurusjärk on $m-1$. Siit järgneb, et q_1 ja q_2 on suured võrreldes ülejäänud koordinaadega.

Vaatlused näitavad, et R kasvades teede erivused ringilsusest kasvavad või jäävad vähemalt endiseks. See tähendab, et R kasvades q_3 kasvab või jääb endiseks. Meie uurimuste kohaselt R kasvades kahaneb ε , s.o. kasvavad erivused suurusjärkudes q_3 ja q_1, q_2 vahel. Sellest kõigest järgneb, et q_1, q_2 suurte R -de puhul on suured võrreldes oma väärtusiga väikeste R -de puhul. Aga Walteri uurimised näitavad, et süsteemides väikeste R -dega erinevad libratsioonid, mille amplituudide suurusjärgud on sellised, nagu eeldatud meie liikumise diferentsiaalvõrrandite püstitamisel. Seega meie uuritavad süsteemid, kus R on suur, peaks omama libratsioonid, mille amplituudide suurusjärgud ületavad lubatud piiri. See ei ole võimalik.

Selle vastolu põhjuseks võib olla ainult konstantide (79) suurusjärkude valik. Tõepoolest, valime

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_6 = m, \quad m_4 = m_5 = m + 1,$$

asetame nüüd konstandid (79) lk. 39-40 koordinaatide q_1, \dots, q_6 avaldisisse, siis saame neist avaldisist kergersti tuletatava lahendite süsteemi

$$q_1 = E_1 \varepsilon^m \sin s_1 (t - t_{11}) + E_2 \varepsilon^m \sin s_2 (t - t_{12}) + E_3 \varepsilon^m \sin s_3 (t - t_{13}),$$

$$q_2 = F_1 \varepsilon^m \sin s_1 (t - t_{21}) + F_2 \varepsilon^m \sin s_2 (t - t_{22}) + F_3 \varepsilon^m \sin s_3 (t - t_{23}),$$

$$q_3 = G_1 \varepsilon^m \cos s_1 (t - t_{31}) + G_2 \varepsilon^{m+1} \cos s_2 (t - t_{32}) + G_3 \varepsilon^{m+1} \cos s_3 (t - t_{33}),$$

$$q_4 = L_1 \varepsilon^{m+2} \cos s_1 (t-t_{41}) + L_2 \varepsilon^{m+1} \cos s_2 (t-t_{42}) + L_3 \varepsilon^{m+1} \cos s_3 (t-t_{43}),$$

$$q_5 = M_1 \varepsilon^{m+2} \cos s_1 (t-t_{51}) + M_2 \varepsilon^{m+1} \cos s_2 (t-t_{52}) + M_3 \varepsilon^{m+1} \cos s_3 (t-t_{53}),$$

$$q_6 = N_1 \varepsilon^m \sin s_1 (t-t_{61}) + N_2 \varepsilon^{m+2} \sin s_2 (t-t_{62}) + N_3 \varepsilon^{m+2} \sin s_3 (t-t_{63}),$$

mis ei ole vastolus vaatlusandmeiga. Konstandid $E_1, E_2, \dots, N_2, N_3$ on kõik suurusjärguga null, kuna ε astmed iseloomustavad võnkeamplituudide suurusjärke.

§. 11. Orbiit.

Vaatleme komponent C_1 orbiiti C_2 suhtes, mille kirjeldajaks on koordinaat q_3 ja tõeline anomaalia p . Tuletame orbiidi võrrandi polaarkoordinaades.

Lk. 51. järgi on esimeseks lähendiks koordinaat q_3 -le avaldis

$$q_3 = G, \varepsilon^m \cos s, (t-t_{31}), \quad (80)$$

või ka, arvestades avaldist lk. 40:

$$q_3 = -2\dot{q}_3(6,3), \cos s, (t-t_0) - 2\dot{q}_6(3,3)', \sin s, (t-t_0). \quad (81)$$

Võttes

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{q}_3(6,3)_1 &= e \cos s, t', \\ 2\dot{q}_6(3,3)'_1 &= e \sin s, t', \\ t_1 &= t_0 + t', \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

saame avaldisest (81):

$$q_3 = -e \cos s_1(t-t_1) \quad (83)$$

Võrdust (81), lk. 28, ritta arendades ja arvestades ainult esimest järku liikmeid, saame p jaoks järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma}{N} - \frac{C_1}{N} \dot{q}_1 - \frac{C_2}{N} \dot{q}_2 - \frac{2\gamma\theta R_0^2}{N^2} q_3 \quad (84)$$

Kuna lk. 40. järgi on

$$\int q_3 dt = 2 \sum_{r=1}^3 \left\{ \frac{1}{s_r} \left[\dot{q}_4(1,3)_r + \dot{q}_5(2,3)_r - \dot{q}_6(6,3)_r \right] \sin s_r(t-t_0) + \right. \\ \left. - \frac{1}{s_r} \left[\dot{q}_1(4,3)_r' + \dot{q}_2(5,3)_r' - \dot{q}_6(3,3)_r' \right] \cos s_r(t-t_0) \right\},$$

vi arvestades tabel 1 andmeid lk. 49-50:

$$\int q_3 dt = -2\dot{q}_3 \frac{(6,3)_1}{s_1} \sin s_1(t-t_0) + 2\dot{q}_6 \frac{(3,3)'_1}{s_1} \cos s_1(t-t_0) + \\ + \frac{2}{s_2} \left[\dot{q}_4(1,3)_2 + \dot{q}_5(2,3)_2 \right] \sin s_2(t-t_0) - \\ - \frac{2}{s_2} \left[\dot{q}_1(4,3)_2' + \dot{q}_2(5,3)_2' - \dot{q}_6(3,3)_2' \right] \cos s_2(t-t_0) + \\ + \frac{2}{s_3} \left[\dot{q}_4(1,3)_3 + \dot{q}_5(2,3)_3 \right] \sin s_3(t-t_0) - \\ - \frac{2}{s_3} \left[\dot{q}_1(4,3)_3' + \dot{q}_2(5,3)_3' - \dot{q}_6(3,3)_3' \right] \cos s_3(t-t_0),$$

millele saab anda kuju:

$$\int q_3 dt = -\frac{e}{s_1} \sin s_1(t-t_1) - \frac{e_1}{s_2} \sin s_2(t-t_2) - \frac{e_2}{s_3} \sin s_3(t-t_3),$$

süs saame p jaoks järgmise arenduse:

$$p = p_0 + \frac{\gamma}{N}(t-t_0) - \frac{C_1}{N} q_1 - \frac{C_2}{N} q_2 + \frac{2\gamma\theta R_0^2}{N^2} \left[\frac{e}{s_1} \sin s_1(t-t_1) + \right. \\ \left. + \frac{e_1}{s_2} \sin s_2(t-t_2) + \frac{e_2}{s_3} \sin s_3(t-t_3) \right] \quad (85)$$

Jättes väikesed perioodilised liikmed ära, on

$$p = p_0 + \frac{\gamma}{N}(t-t_0) \quad (86)$$

Suurus

$$\frac{\mathcal{I}}{N} = \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}} = v \quad (87)$$

on komponendi C_1 keskmine liikumine omal relatiivsel orbiidil C_2 suhtes. Võrduste (34), lk. 30. ja (68), (69), lk. 46, põhjal saame v -le anda kuju:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa^2(m_1 + m_2)}{R_0^3} \left\{ 1 + \frac{3}{10 R_0^2} [\mu_1 a_1^2 (\epsilon_1^2 + \epsilon_1'^2) + \mu_2 a_2^2 (\epsilon_2^2 + \epsilon_2'^2)] \right\}},$$

või rittaarendatult:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa^2(m_1 + m_2)}{R_0^3} \left\{ 1 + \frac{3}{20 R_0^2} [\mu_1 a_1^2 (\epsilon_1^2 + \epsilon_1'^2) + \mu_2 a_2^2 (\epsilon_2^2 + \epsilon_2'^2)] \right\}} \quad (88)$$

Selle avaldise esimene liige on tuttav tavalisest kahe keha probleemist: kui masspunkt massiga m_1 liigub teise masspunkti suhtes, mille mass on m_2 , mööda ringi raadiusega R_0 , siis tema keskmine liikumine on esimene liige arenduses (88).

Võrdusest (86) järgneb

$$t - t_0 = \frac{p - p_0}{v}, \quad t - t_1 = \frac{p - p_1}{v},$$

mis annab koos võrdusega (83):

$$q_3 = -e \cos s, \frac{p - p_1}{v}.$$

Et aga q_3 definitsiooni kohaselt on

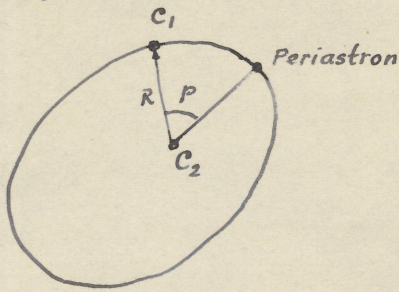
$$R = R_0(1 + q_3) \approx \frac{R_0}{1 - q_3},$$

siis saame

$$R = \frac{R_0}{1 + e \cos \frac{s_1}{v} (p - p_1)}, \quad (89)$$

mis on orbiidi võrrandiks polaarkoordinaades R, p . Võrrandiga (89) kujutatud R avaldises on kaasa arvatud kõik esimest järku väikesed suurused.

Võrrand (89) kujutab ellipsit, mille eksstsentrisus on e . Olgu t_0 moment, mil komponent C_1 on periastron



Joan. 6.

ronis; sel momendil olgu ka $p=0$, s.o. nurka p hakkame lugema apsiüdjoonest. Periastronis on q_3 ekstremaalne, seega $\dot{q}_3=0$, millest tingituna võrdus (40), lk.

32, järgi on ka $q_6=0$, kui $t=t_0$, ehk lihtsamalt $\dot{q}_6=0$. Nüüd ütlevad võrdused (82) lk. 52, et

$$e \sin s_1 t' = 0, \quad t' = 0, \quad t_1 = t_0 \quad (90)$$

Võtame (81)-s $t=t_0$, siis peab kehtima võrdus

$$\dot{q}_3 = -2\dot{q}_3 (6,3)_1,$$

kust järgneb

$$(6,3)_1 = -\frac{1}{2} \quad (91)$$

Võrdused (81) ja (83) annavad nüüd:

$$\dot{q}_3 \cos s_1 (t-t_0) = -e \cos s_1 (t-t_0),$$

ja siit:

$$e = -\dot{q}_3 \quad (92)$$

Et $t_1 = t_0$, siis ka $p_1 = p_0$. Kui võtame arenduses (85) $t=t_0$, saame vasakul null, kust selgub, et p_0 on väike nurk:

$$p_0 = \frac{C_1}{N} \dot{q}_1 + \frac{C_2}{N} \dot{q}_2 - \frac{2\gamma\theta R_0^2}{N^2} \left[\frac{e_1}{s_2} \sin s_2 (t_0 - t_2) + \frac{e_2}{s_3} \sin s_3 (t_0 - t_3) \right].$$

Seega võime (89) asemele kirjutada

$$R = \frac{R_0}{1 + e \cos\left(\frac{s_1}{V} p\right)}, \quad (93)$$

kui arvestada mitte kõrgemat järku väikeste liigetega.

Olgu ellipsi (93) pikema pooltelje pikkus a , siis tuntud avaldisest ellipsi parameetri jaoks $a(1-e^2)$ järgneb:

$$a = \frac{R_0}{1 - q_3^2} \quad (95)$$

Võrrandist (93), mida võib kirjutada järgmiselt:

$$R = R(p),$$

paistab veel, et tee ellipsi apsiidjoon pöörleb ruumis.

$R(p)$ on perioodiline funktsioon, perioodiga

$$P = \frac{2\pi V}{s_1} \quad (96)$$

Kui nüüd komponent C_1 momendil t_0 asub periastronis, siis peab p kasvama P võrra, s.o. raadiusvektor R peab pöörduma nurga P võrra, enne kui komponent C_1 on jälle periastronis. Kui $\frac{V}{s_1} \neq 1$, siis $P \neq 2\pi$, tähendab periastron ei asu enam ruumis sääl, kus ta oli momendil t_0 , vaid ta on nihkunud mõnda uude kohta, apsiidjoon on pöördunud nurga

$$2\pi \left(\frac{V}{s_1} - 1 \right) \quad (97)$$

võrra. Seega suhe $\frac{V}{s_1}$, või ka $\frac{s_1}{V}$ iseloomustab apsiidjoone pöörlemist. On $\frac{s_1}{V} < 1$, siis $P > 2\pi$, periastron nihkub päri tiiirlemist (s.o. liigub komponent C_1 eest ära), kuna $\frac{s_1}{V} > 1$ korral periastron nihkub vastu tiiirlemist. Võrdus (75), lk. 48, järgi on

$$s_1 = \sqrt{\frac{\delta_1 - 3\delta_2 + 8(\delta_3 + \delta_4)}{\theta R_0^2}},$$

ja võrdus (87), lk. 54, järgi on

$$V = \sqrt{\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{\theta R_0^2}}.$$

Süt järgneb:

$$\frac{s_1}{V} = \sqrt{\frac{\delta_1 - 3\delta_2 + 8(\delta_3 + \delta_4)}{\delta_1 + 3\delta_2}} \approx 1 + \frac{4(\delta_3 + \delta_4) - 3\delta_2}{\delta_1} \quad (98)$$

Võrduste (68), (69), lk. 46, ja (34), lk. 30, abil saame suhtele $\frac{\delta_1}{\nu}$ anda ka kuju:

$$\frac{\delta_1}{\nu} = 1 + \frac{3}{10R_0^2} [\mu_1 a_1^2 (3\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1'^2) + \mu_2 a_2^2 (3\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2'^2)] , \quad (99)$$

mis on identne Walteri tulemusiga ([3] p. 125)

Lõpuks vaatleme veel orbüdi stabiilsuse küsimust. Sõna „stabiilsus“ kasutame siin nende liikumise tüüpide iseloomustamiseks, mis jätavad kõik süsteemi osad alatiseks kindlasse lõplikku ruumi ossa. Seega stabiilne orbüit tähendab seda, et temal liigudes keha ei satu kunagi lõpmatusse. Orbüit (93) on ilmselt stabiilne ülaltähendatud mõttes. Piisav tingimus selleks on, et oleks täidetud võrratus (43) lk. 33, millele saab võrduse (35), lk. 31, abil anda kuju

$$\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{\delta_1 + 5\delta_2} > 3 \frac{c_1 + c_2}{\theta R_0^2} \quad (100)$$

Tõesti, kui võrratus (43), ehk võrratus (100) on rahuldatud, siis on ruutvorm $H(q_1, \dots, q_6)$ positiivselt definitne ja selle tõttu liikumise diferentsiaalvõrrandite lahendid avalduvad ringi funktsioonides. Aga võrratus (100) on ka tarvilik tingimus selleks, et orbüit oleks stabiilne. Eeldame, et orbüit on stabiilne, siis determineeriva võrrandi ükski juur ei või olla teistsugune kui puhtimaginaarne, kuna muude liikumise diferentsiaalvõrrandite lahendeks esineks eksponentsiaal-funktsioonid, mille tõttu küllalt pika aja järgi süsteemi koordinaadid saaks suuremaks igast etteantud määrast. On aga determineeriva

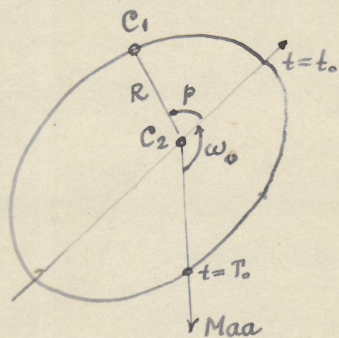
võrrandi juured puhtimaginaarsed, s.o. võrrandi (56), lk. 42, juured negatiivsed reaalarvud, siis peab võrrandi (56) vabalüige olema positiivne, s.o.

$$\frac{\delta_1 - 3\delta_2}{c_1 c_2} - 3 \frac{\delta_1 + 5\delta_2}{\theta R_0^2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) > 0,$$

mis ei ole muud, kui võrratus (100).

§.12. Mõned perioodilised muutused kattumismuutliku teoreetilise valguskövera minimumide aegades.

Olgu joonisel 7 kujutatud komponent C_1 orbiit üm-



Joon. 7.

ber C_2 , mille tasapinnas asugu ka Maa. Orbiidi periastroni pikkus, s.o. nurk Maale toova suuna ja ap-siidjoone vahel, olgu ω_0 .

Kui mõlemad komponendid satuvad korraga ühele sirgele Maaga, siis üks kompo-

nent varjutab teist, Maa päält paistab süsteemi koguheledus kahanevana võrreldes tema hariliku heledusega. Tähe valgusköveras (mille punktide abstsissideks on ajad ja sordinaadeks neile aegadele vastavad heledused) tekivad minimumi kohad. Ühe perioodi vältel esineb kaks minimumi, millest üks on

tavaliselt sügavam kui teine ja kannab peaminimumi nime. Peaminimumi ajal on varjutatud see komponent, mille pindheledus on suurem. Olgu meie juhul peaminimumi moment süs, kui komponent C_1 asub M_{aa} ja C_2 vahel. Vaatleme ligemalt, kuidas järgnevad üksteisele peaminimumide momendid.

Lähtume p arendusest (85) lk. 53. Siin esineb kolm üksteisest erineva perioodiga siinusfunktsiooni. Walter näitas, et kui neist perioodidest kaks on pikad võrreldes kolmandaga, siis pikaperioodilised võnkumised ajajooksul kaovad süsteemist nn. libratsioonihöörumise tagajärjel ([4] p. 94-95, [3] p. 124), mis seisneb selles, et gaas oma sitkuse tõttu avaldab teatud pidurdavat mõju libratsioonidele. Järgnevas vaatlemegi lihtsuse mõttes ainult neid süsteeme, kus on säilinud vaid ühe ja sama perioodiga võnkumised.

Arvestades ainult kõige madalama suurusjärguga väikseid liigmeid ja teades, et $\dot{q}_c = 0$, kui t_0 tähendab periastronis viibimise momenti, võime nüüd lk. 39-40 antud lahendite asemele kirjutada:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 2\dot{q}_3^0 (G,1)' \sin s_1(t-t_0), \\ q_2 &= 2\dot{q}_3^0 (G,2)' \sin s_1(t-t_0), \\ q_3 &= \dot{q}_3^0 \cos s_1(t-t_0). \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Paneme need suurused arendusse (85), ja me saame:

$$p = v(t-t_0) + 2e\eta \sin s_1(t-t_0), \quad (102)$$

kus e on orbüidi eksstsentrisus, ja η järgmine konstant:

$$\eta = \frac{1}{N} \left[C_1 (G,1)' + C_2 (G,2)' + \frac{v}{s_1} \theta R_0^2 \right] \quad (103)$$

Definitsiooni (50), lk. 36, ja lk. 36-38 antud avaldiste põh-

jal arvutame $(6,1)'_1$ ja $(6,2)'_2$, kasutades veel lähendit (75), lk. 48: $\lambda_1 = -s_1^2$. Saame:

$$(1,6)'_1 = \frac{v}{s_1} \left[1 + \frac{2\theta R_0^2}{\delta_1} \left(\frac{\delta_3}{c_1} - 3 \frac{\delta_3 + \delta_4}{\theta R_0^2} \right) \right],$$

$$(2,6)'_1 = \frac{v}{s_1} \left[1 + \frac{2\theta R_0^2}{\delta_1} \left(\frac{\delta_4}{c_2} - 3 \frac{\delta_3 + \delta_4}{\theta R_0^2} \right) \right],$$

kus on jälle jäetud ära kõrgemat järku väikesed liikmed.

Nüüd aga on

$$\eta = \frac{v}{s_1} \left[1 + \frac{2(\delta_3 + \delta_4)}{\delta_1} \left(\frac{4\theta R_0^2}{N} - 3 \right) \right]. \quad (104)$$

Võrdusest (98) lk. 56 järgneb

$$\frac{v}{s_1} \approx 1 - \frac{4(\delta_3 + \delta_4) - 3\delta_2}{\delta_1},$$

ja asetades selle avaldis (104), saame lõplikult:

$$\eta = 1 + \frac{2(\delta_3 + \delta_4)}{\delta_1} \left(\frac{4\theta R_0^2}{N} - 5 \right) + \frac{3\delta_2}{\delta_1}. \quad (105)$$

Näeme, et konstant η erineb 1-st vähe, ja kuna e on väike suurus, siis võime (102) asemele kirjutada

$$p = v(t - t_0) + 2e \sin s_1 (t - t_0), \quad (106)$$

arvestamata kõrgemat järku väikseid liikmeid.

(106)-st saame t jaoks järgmise lähendi:

$$t = t_0 + \frac{p}{v} - \frac{2e}{v} \sin \frac{s_1}{v} p. \quad (107)$$

Olgu momendil t_0 periastroni pikkus ω_0 . Apsiidjoone pöörlemise ruumis võime lugeda ühtlaseks, tema pöörlemise nurkküirus v_1 , mis on väike suurus, olgu konstantne. Siis on momendil t periastroni pikkus ω järgmine:

$$\omega = \omega_0 + v_1 (t - t_0). \quad (108)$$

Nagu lk. 56 selgus, pöörduks apsiidjoon nurga

$$2\pi \left(\frac{v}{s_1} - 1 \right)$$

võrra selle aja jooksul, kui p kasvab $2\pi \frac{v}{s_1}$ võrra, s.o. (107) järgi aja $t - t_0 = \frac{2\pi}{s_1}$ jooksul. Süt järgneb:

$$v_1 = \frac{2\pi \left(\frac{v}{s_1} - 1 \right)}{\frac{2\pi}{s_1}} = v - s_1, \quad (109)$$

ja seega on apsiidjoone pöördumisperiood

$$T = \frac{2\pi}{|v - s_1|} \quad (110)$$

Olgu T_0 mõni standard peaminimumi moment, mida nimetame epooigiks, ja millal olgu $\omega = \omega_0$; t_0 olgu T_0 -le vahetult järgnev periastronisoleku moment. (107) järgi on:

$$T_0 = t_0 - \frac{\omega_0}{v} + \frac{2e}{v} \sin \frac{s_1}{v} \omega_0, \quad (111)$$

sest momendil T_0 on ju $p = -\omega_0$, kuna varemtehtud kokkuleppe kohaselt hakkame p -d lugema sellest sirgest ruumis, millega ühtib momendil t_0 apsiidjoon. Nummerdame T_0 -le järgnevad peaminimumi momendid arvudega $1, 2, \dots, n, \dots$, siis n -da peaminimumi ajal on $p = 2\pi n - \omega_0$, ja (107) annab n -da peaminimumi momendiks

$$T_n = t_0 + \frac{2\pi n - \omega_0}{v} - \frac{2e}{v} \sin \frac{s_1}{v} (2\pi n - \omega_0) \quad (112)$$

Koos (111)-ga saame:

$$T_n = T_0 + \frac{2\pi n}{v} - \frac{2e}{v} \left[\sin \frac{s_1}{v} (2\pi n - \omega_0) + \sin \frac{s_1}{v} \omega_0 \right], \quad (113)$$

ehk:

$$T_n = T_0 + \frac{2\pi n}{v} - \frac{4e}{v} \sin \frac{s_1 \pi n}{v} \cos \frac{s_1}{v} (\pi n - \omega_0) \quad (114)$$

Süt paistab, et peaminimumide momendid ei ole üks-teisest eraldatud võrdsete ajavahemikkudega. See eba-

võrdsus on tingitud apsiidjoone pöörlemisest, s.o. ebavõrdsusest $\frac{s_1}{v} \neq 1$.

Kui tähime $t_0 - \frac{\omega_0}{v} = T_0''$ ja keskmise perioodi $P = \frac{2\pi}{v}$, siis saame valemile (112) kujul

$$T_n = T_0'' + Pn + \frac{P}{\pi} e \sin \frac{s_1}{v} (\omega_0 - 2\pi n), \quad (115)$$

milles tunneme ära Tisserand'i valemi ([7] p. 56).

Olgu n -s kõrvalminimum see, mis vahetult järgneb n -dale peaminimumile, siis on n -da kõrvalminimumi momendil T_n' nurk $p = 2\pi n - \omega_0 + \pi = (2n+1)\pi - \omega_0$, ja valem (107) annab:

$$T_n' = t_0 + \frac{(2n+1)\pi - \omega_0}{v} - \frac{2e}{v} \sin \frac{s_1}{v} [(2n+1)\pi - \omega_0], \quad (116)$$

ehk koos (111)-ga:

$$T_n' = T_0 + \frac{(2n+1)\pi}{v} - \frac{4e}{v} \sin \left[\frac{s_1}{2v} (2n+1)\pi \right] \cos \frac{s_1}{v} \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \omega_0 \right]. \quad (117)$$

Ajavahemik, mille jooksul p kasvab 2π võrra, on süsteemi sideeriline türlisperiood P_s . Ta muutub ajaga perioodiliselt. Nummerdame sideerilised perioodid nii, et oleks

$$P_{sn} = T_n - T_{n-1},$$

ehk (112) alusel:

$$P_{sn} = \frac{2\pi}{v} - \frac{4e}{v} \sin \frac{\pi s_1}{v} \cos \frac{s_1}{v} [(2n-1)\pi - \omega_0] \quad (118)$$

Näeme, et ka sideerilise perioodi muutumine on tingitud apsiidjoone pöörlemisest.

Ajavahemik kahe üksteisele järgneva periastronilise oleku momendi vahel on süsteemi anomalistlik periood P_a . Teiste sõnadega: P_a on ajavahemik, mille jooksul p kasvab $2\pi \frac{v}{s_1}$ võrra. Siit järgneb, et keskmise sideerilise

ja anomalistliku perioodi suhe on

$$\frac{P_s}{P_a} = \frac{2\pi}{2\pi \frac{v}{s_1}} = \frac{s_1}{v},$$

kust (109) põhjal saame

$$P_s = P_a \left(1 - \frac{v_1}{v}\right), \quad (119)$$

mis on jälle tuttav valem ([10], p. 231, võrr. 58).

$(n-1)$ -ne kõrvalminimum jagab n -da perioodi kahte ossa, mis ei ole võrdsed. (112) ja (116) põhjal on:

$$\Delta_1 = T_n - T'_{n-1} = \frac{\pi}{v} - \frac{4e}{v} \sin \frac{s_1 \pi}{2v} \cos \frac{s_1}{v} \left[(4n-1) \frac{\pi}{2} - \omega_0 \right],$$

$$\Delta_2 = T'_{n-1} - T_{n-1} = \frac{\pi}{v} - \frac{4e}{v} \sin \frac{s_1 \pi}{2v} \cos \frac{s_1}{v} \left[(4n-3) \frac{\pi}{2} - \omega_0 \right].$$

Süt järgneb:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{8e}{v} \sin^2 \frac{s_1 \pi}{2v} \sin \frac{s_1}{v} \left[(2n-1) \pi - \omega_0 \right] \quad (120)$$

See diferents jääb püsima ka siis, kui periastron ei pöörle, s.o. kui $\frac{s_1}{v} = 1$. Nüisugusel korral sõltub ta ainult tee eksstsentrisusest ja periastroni pikkusest. Avaldisele (120) saab anda teist kuju. Jättes ära kõik väikesed suurused, on (109) põhjal ja (116) põhjal:

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{v} \left[(2n-1) \pi - \omega_0 \right] &= \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \left[(2n-1) \pi - \omega_0 \right] \\ &= (2n-1) \pi - \omega_0 - \frac{v_1}{v} \left[(2n-1) \pi - \omega_0 \right] \\ &= (2n-1) \pi - \omega_0 - v_1 (T'_{n-1} - t_0). \end{aligned}$$

Tähides ω momendil T'_{n-1} tähega ω_1 , saame (108) järgi

$$\frac{s_1}{v} \left[(2n-1) \pi - \omega_0 \right] = (2n-1) \pi - \omega_1 \quad (121)$$

Jääle selle on

$$\sin^2 \frac{s_1 \pi}{2v} \approx 1,$$

nii et asetades (121) avaldisse (120), saame

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{8e}{v} \sin \omega_1 \quad (122)$$

([10] p. 231, võrr. 59).

Kõik selles paragrahvis saadud lihtsad tulemused on õieti erijuhulised tulemused, sest me vaatlesime ju süsteemi, kus pikaperioodilised võnkumised libratsiooni hõõrumise tagajärjel olid kadunud. Üldiselt peaks igas tuletatud avaldises ühe perioodilise liikme asemel esinema kolm, igaüks iseseisuga perioodiga, ja selletõttu tuleks vaatlusandmete põhjal koostatud tabulaarselt antud funktsioonide lähendamisel analüütiliste avaldistega kasutada ka pisut keerukamaid kujusid, kui selles paragrahvis esitatud valemid.

V. Lõppkokkuvõtt.

Selle töö eesmärgiks oli seatud kattumismuutlikkude dünaamiliste küsimuste valgustamine Walter'i poolt püstitatud ideede põhjal. Uurimise objektiks on võetud kaksiktähe mudel, mille koostamisel on püütud arvestada nii palju kui võimalik pöörlevate tähtede teoreetiliselt tuletatud omadusi, pidades ühtlasi silmas, et hiljem püstitatavad liikumise diferentsiaalvõrrandid ei muutuks integratsiooniks liiga keeruliseks. Viimane siht nõudis süsteemi alustamist mõningaile lisatingimusele, millest olulisimad on järgmised kaks: 1) komponentides on masside liikumine telgsümmeetriline ja statsionaarne, 2) komponentide omavaheline kaugus ei ole väga väike.

Näisugusel eeldusel võimaldus liikumise diferentsiaalvõrrandeid taandada kuuest võrrandist koosnevale süsteemile konstantsete kordajatega ja viia süs integratsioon läbi Weierstrassi poolt antud meetodi järgi. Lahendid avaldusid ringi funktsioonides, ja neid tuli tõlgendada, kui süsteemi liikumiste kirjeldajaid. Koordinaadid q_1 ja q_2 olid libratsiooni nurgad, nad tekitasid süsteemi valgusköivas perioodilisi kõikumisi. Koordinaat q_3 iseloo-

mustas ühe komponendi orbiiti teise suhtes, tema toime uurimiseks oli pühendatud terve §. 11. Selgus, et orbiidiks on ellips pöörleva apsüüdjonega. Viimases paragrahvis oli vaadeldud tsüklilist koordinaati p , nimelt tema poolt põhjustatud, Maa poolt kergesti vaadeldavaid ajalisi vahetõrke süsteemi näilise heleduse muutumisel. Siin tundsi ära paljusid juba mujal varem esinenud valemeid kui erijuhte meie üldisemaist avaldisist.

Walter ise rakendas ka omi ideid kattumismuutlikkude dünaamika uurimiseks, olgugi meist erinevas suunas ja vormis, kuid tema tulemuste vastu tõstsid üksikud autorid (H. Klauder j. t) protesti reaalsusele mitteküllaldaselt vastavate kaksiktahe seesmise ehituse kohta tehtud põhieelduste pärast. Käesoleva töö tulemused, milles on arvestatud eelpoolmainitud protesti tekitanud põhjusiga, langevad aga väga paljudes olulistel punktides kokku Walteri omadega, ja siit peab järeldama, et Walteri resultaatele tehtud etteheited ei ole täiel määral õigustatud.