

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Janika Allingu

**AEG LAOSTUMISENI RASKETE SABADEGA KAHJUJAOTUSTE
KORRAL**

Magistritöö

Juhendaja: Ants Kaasik, PhD

Tartu 2014

AEG LAOSTUMISENI RASKETE SABADEGA KAHJUJAOTUSTE KORRAL

Käesoleva magistritöö eesmärk on uurida kas hüpotees „raskema kahjujaotuse saba korral on ka aeg laostumiseni jääva aja jaotuse saba raskem“ on tõene. Eesmärk on seega kirjeldada ja uurida aega laostumiseni keskendudes seejuures raskete sabadega kahjujaotustele. Sageli eeldatakse, et kahjud pärinevad tõenäosusjaotustest, mis omavad kuitahes kõrget järku momente, kuid praktikas seda tüüpiliselt ette ei tule.

Magistritöö eesmärgi saavutamiseks ja aeg laostumiseni jaotuse uurimiseks on tutvustatud Cramer-Lundbergi mudelit, vaadeldud laostumise hinnanguid kergete ja raskete sabadega kahjujaotuste korral. Lähemalt tutvustatakse kolme raske sabaga jaotust: Pareto, Weibulli ja Lognormaalset jaotust. Samuti on uuritud kahjujaotuste saba raskuse mõju laostumistõenäosusele. Töö teises pooles on kasutatud simulatsioone hüpoteesi tõestamiseks.

Märksõnad: *Riskiteooria, tõenäosusjaotused, Monte Carlo meetodid*

TIME TO RUIN WITH HEAVY-TAILED CLAIMS

The purpose of the present master's thesis is to investigate whether the hypothesis „the tail of the time to ruin distribution gets heavier when the tail of the claims size distribution does“ is true. The goal of the thesis is thus to describe and study time to ruin with heavy-tailed claims. Often it is assumed that the claims come from a probability distribution that has moments of any order which is typically violated in practice.

In order to achieve the goal and study time to ruin the Cramer-Lundberg model and difference in ruin probability estimation for light and heavy-tailed claims are described. The heavy-tailed distributions Pareto, Weibull and Lognormal are introduced with the formal definition as well. Implications of the tail weight of the claims for ruin probabilities are considered. In the second half of thesis the simulations are used in order to prove the stated hypothesis.

Keywords: *Ruin theory, probability distributions, Monte Carlo methods*

SISUKORD

SISSEJUHATUS	5
1. AEG LAOSTUMISENI UURIMISE AJALOOST	7
2. KLASSIKALINE RISKIPROTSSESS JA LAOSTUMISTÕENÄOSUSTE ESITAMISVIIS	8
2.1. Klassikaline riskiprotsess.....	8
2.2. Laostumistõenäosus lõpmatu ja lõpliku ajahorisondi korral	9
2.3. Laostumistõenäosuse esitamisviis rekordite abil	10
3. KERGETE JA RASKETE SABADEGA JAOTUSTE LIIGITAMINE	12
3.2. Raskete sabadega jaotused.....	13
3.3. Saba raskuse määramine andmete põhjal	14
3.3.1. Näide saba raskuse määramise kohta	17
4. LAOSTUMINE KERGETE JA RASKETE SABADE KORRAL	18
4.1. Laostumine kergete sabade korral	18
4.2. Laostumine raskete sabade korral	19
4.3. Monte-Carlo hinnang laostumistõenäosusele	19
4.4. Näiteid rasketest jaotuste sabadest.....	20
5. ALGORITMID RAKENDUSTE JAOKS	22
5.1. Algoritm lõpmatu ajaga laostumistõenäosuse simuleerimiseks	22
5.2. Algoritm lõpliku ajaga laostumistõenäosuse simuleerimiseks	23
6. RAKENDUSED	24
6.1. Saba raskuse hindamine simulatsiooni abil	24
6.2. Algandmete valik laostumistõenäosuste simuleerimiseks	25
6.3. Simulatsioonid	26
6.3.1. Lõpmatu ja lõpliku ajaga laostumistõenäosuse genereerimine	26
6.3.2. Aeg laostumiseni sabade genereerimine	27
6.3.3. Aeg laostumiseni sabade võrdlus erinevate jaotuste korral	32
7. TULEMUSTE KOKKUVÕTE	38
KASUTATUD KIRJANDUSE LOETELU	39
LISA 1 Algoritmi väljund lõpliku ajaga laostumistõenäosuse leidmiseks.....	40
LISA 2 Algoritmi väljund lõpmatu ajaga laostumistõenäosuse leidmiseks	44
LISA 3 Laostumistõenäosuste hinnangud $\Psi(u,t)$	47
LISA 4 Aeg laostumiseni hinnangud.....	51

LISA 5 Aeg laostumiseni saba raskuste võrdlused 53

SISSEJUHATUS

Kindlustusfirmades toimuvad kindlustuskahjud juhuslikel aegadel ja on juhusliku suurusega. Ettevõtted peavad hindama tulevikus aset leidvaid juhuslikke kahjusid võimalikult efektiivselt, et varuda selleks ajaks piisavalt vahendeid, hoidmaks ära pankrotti (laostumist). Aeg laostumiseni on ajaperiood sellise kahjuni, mille korral kindlustusettevõtja on võimetu seda välja maksma kannatanu(te)le. Selle uurimine on huvitav ja tänapäeval aktuaalne teema ning uued tulemused selles valdkonnas on rakendatavad paljudes kindlustuskompaniides.

Kindlustusportfelli kuuluvad erinevat liiki kahjud ja seega pole mõistlik eeldada, et nad on kõik ühest ja samast jaotusest. Väga suur osa kahjunõuetest kuuluvad raskete sabadega klassi ning neid on võimalik saba raskuse tõttu eristada. Antud magistritöös vaadeldakse kolme erinevat raske sabaga kahjujaotust: Pareto, Lognormaalset ja Weibulli jaotust.

Huvipakkuvaks jaotusfunktsiooni osaks on jaotuse parempoolne ots, mis määrab ära saba raskuse. Töö eesmärgiks on hinnata aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni saba raskust erinevate kahjujaotuste korral. Soovitakse teada, et kas raskema kahjujaotuse saba korral on ka laostumiseni jääva aja jaotuse saba raskem.

Magistritöö on jagatud seitsmesse erinevasse osasse. Esimeses peatükis tutvustatakse aeg laostumiseni ajalugu. Teises peatükis vaadeldakse klassikalist riskiprotsessi ja defineeritakse laostumistõenäosuse ja aeg laostumiseni mõisted. Samuti tutvustatakse ühte viisi laostumistõenäosuse esitamiseks. Kolmandas peatükis antakse definitsioonid kergete ja raskete sabade võrdlemiseks ning tuuakse näiteid raskete sabade kohta. Samuti pakutakse välja mõned ideed eristamiseks raskeid sabasid kergetest sabadest. Kirjeldatakse lähemalt ka antud töös kasutatavaid raskeid sabasid ning võrreldakse neid omavahel. Neljandas peatükis vaadeldakse laostumist kergete ja raskete sabade korral eraldi. Viiendas peatükis tutvustatakse simuleerimisel kasutatavaid algoritme nii lõpliku kui ka lõpmatu ajahetke jaoks. Kuuendas peatükis antakse ülevaade simuleerimisprotsessist, mis sisaldab alglähendite valikut, meetodi tutvustust ja graafikuid tulemustest. Seitsmes peatükk sisaldab kokkuvõtet simuleerimisprotsessist.

Aeg laostumiseni jaotuse saba erinevaid raskusi arvesse võttes suudab kindlustusfirma erinevate kahjujaotuste korral oma varanduslikku seisut paremini hinnata ja kindlustusmaksleid efektiivsemalt planeerida.

Simuleerimiseks on kasutatud statistikapaketi R ning graafikud on tehtud Microsoft Excelis.

Autor on väga tänulik juhendajale paljude mõtete, suunamiste ja parandusettepanekute eest. Samuti tänab autor oma perekonda toetuse eest võimaldades leida aega lõputöö kirjutamise jaoks.

1. AEG LAOSTUMISENI UURIMISE AJALOOST

Viimastel aastakümnetel on paljud uuringud seotud aeg laostumiseni uurimisega. Osad nendest põhinevad klassikalisel riskimudelil.

Lin ja Willmot (1999 ja 2000) arendasid edasi Gerber'i ja Shiu (1998) ideid. Nad pakkusid välja meetodeid, mille abil oli võimalik leida rekursiivselt täpseid tulemusi aeg laostumiseni momentidele tingimusel, et täpsed lahendused eksisteerivad lõpliku laostumistõenäosuse korral [1].

Cheng et al (2000) avastas diskreetse aja riskimudeli ja leidis väljundeid aeg kahjuni momentidele selle mudeli jaoks [1].

Egidio dos Reis (2000) pakkus välja idee, mis näitas kuidas leida aeg laostumiseni momente diskreetse aja riskimudeli jaoks ning tõi välja ka selle, kuidas eelnevat kasutades saab lähendada aeg laostumiseni momente klassikalises riskimudelis [1].

Cardoso ja Egidio do Reis (2002) näitasid, kuidas esitada aeg laostumiseni tihedust [1].

David C. M. Dickson ja Howard R. Waters leidsid nii lõpliku kui ka lõpmatu ajahorisondi korral aeg laostumiseni tõenäosusi oma artiklis (2002). Nad konstrueerisid numbriliselt aeg laostumiseni tingliku jaotuse ja kasutasid seda viimast konstrueerimist loomaks aeg laostumiseni tihedusfunktsiooni. Samuti näitasid nad oma artiklis, et Lin ja Willmoti (2000) ideed saab kasutada ka siis, kui analüütiline lahend laostumise tõenäosusele ei eksisteeri [1].

Autor tõdeb, et eelnevad uurimused teemal aeg laostumiseni ajaloost on olnud väga momentide kesksed. Antud magistr töö ei keskendu jaotuse momentidele. Autor kasutab oma töö praktilises pooles simulatsioone, mis on seotud aeg laostumiseni tihedusfunktsiooni genereerimisega klassikalises riskiprotsessis.

2. KLASSIKALINE RISKIPROTSESS JA LAOSTUMISTÕENÄOSUSTE ESITAMISVIIS

2.1. Klassikaline riskiprotsess

Klassikalises riskiteoorias on Cramer-Lundbergi mudel (CLM) kõige kasutatavam mudel hindamaks kindlustusfirma varanduslikku seisu, kus klassikaline riskiprotsess $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, kui juhuslik protsess, on antud järgmisel kujul:

$$U(t) = u + ct - S(t), S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0, \quad (2.1)$$

antud mudel näitab ajal t kindlustusfirma varanduslikku seisu, kus

t – aeg, positiivne suurus,

u – algkapital, konstante positiivne suurus,

c – kindlustuspreemia ehk ajaühikus laekuv preemiate maht, konstantne, eeldatakse, et kindlustuspreemia on võrdne 1 ühes ajaühikus.

$S(t)$ – kahjunõuete summa, mis on sõltuv ajast t .

$N(t)$ – loendav protsess, mis näitab kahjunõuete arvu etteantud vahemikus $[0, t]$. Antud magistritöös on eeldatud, et loendav protsess on Poissoni protsess, parameetriga λ .

X_i – i -nda kahjunõude suurus. Eeldame, et X_1, X_2, \dots on omavahel sõltumatud ning sama jaotusega juhuslikud suurused jaotusfunktsiooniga

$$F: F_x = P\{X_i \leq x\}, i = 1, 2, \dots$$

Klassikalise riskimudeli definitsioon ja selgitused on pärit allikast [2].

On võimalik defineerida niiõelda „uus ajaarvestus“ t , muutes $t \rightarrow t/c$ ehk sätitakse uus ajaarvestus nii, et preemia määr c on ühes ajaühikus võrdne ühega. Selle uue protsessi jaoks muutub ka $\lambda \rightarrow \lambda/c$, seejuures laostumistõenäosus lõpmatu ajahorisondi korral (lähemalt tuleb juttu sellest järgmises peatükis 2.2) $\Psi(u) = P(T < \infty)$ jääb samaks ja seetõttu saamegi märkida, et $c = 1$ [3].

Et vältida olukorda kus $\Psi(u) = 1$, on vajalik eeldada, et $E[S(t)] < t$ [3].

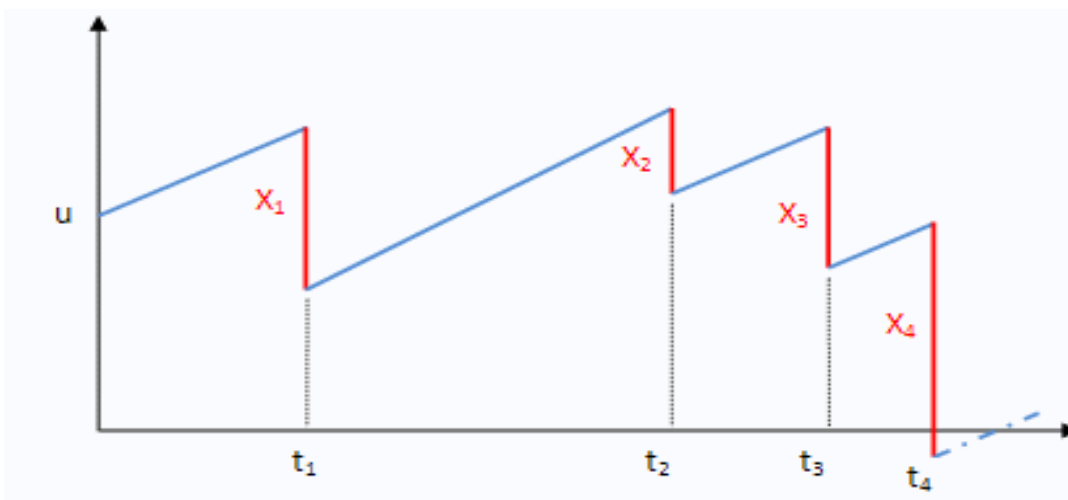
Tähistame suhtelise turvalisa ehk roo järgmiselt:

$$\rho = \lambda EX,$$

mis näitab, et keskmiselt saabub igas ajaühikus λ kahjut ja kahjude keskmine suurus on EX . Ning siis kehtib ka [1]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} X_i = \rho.$$

Allolev joonis võtab kokku peatüki 2.1 ja näitlikustab Cramer-Lundbergi riskiprotsessi.



Joonis 2.1. Klassikaline riskiprotsess, horisontaalteljel on kujutatud aeg t ja vertikaalteljel riskiprotsess $U(t)$ [4]

2.2. Laostumistõenäosus lõpmatu ja lõpliku ajahorisoni korral

Olulisem huvipakkuv teema klassikalise riskiprotsessi juures on laostumistõenäosuse leidmine, mis saadakse kahjunõuete integreeritud saba jaotuse abil. Kindlustusselts kogub raha poliiside müügist ja kulutab seda kahjude katmiseks. Laostumine toimub, kui kahjud ületavad poliiside müügist saadud raha. Aega laostumishetkeni tähistatakse tähisega T , siis [5]

$$T = \begin{cases} \inf\{t: U(t) < 0\} \\ \infty, \text{ kui } U(t) \geq 0 \end{cases} \quad \text{iga } t > 0 \text{ korral.}$$

Laostumistõenäosust tähistatakse lõpmatu ajahorisondi korral järgmiselt [5]:

$$\Psi(u) = P(T < \infty). \quad (2.2)$$

See tähendab, et kindlustuskompanii koos määratud algkapitaliga u võib minna pankrotti mingil ajal $t > 0$.

Laostumistõenäosust tähistatakse lõpliku ajahorisondi korral järgmiselt [5]:

$$\Psi(u, t) = P(T \leq t). \quad (2.3)$$

Toome sisse sellise juhusliku suuruse T_c , mis tähistab aega laostumishetkeni T , tingimusel, et $T < \infty$ ja annab meile laostumistõenäosuse kitsamal tõenäosusruumil. Seda aega laostumishetkeni saame väljendada jaotusfunktsiooniga, tingimusel, et laostumine toimub [5]:

$$P(T_c \leq t) = P(T \leq t | T < \infty) = \Psi(u, t) / \Psi(u), \text{ iga } t > 0. \quad (2.4)$$

Loomulik on nõuda, et $\Psi(u) < 1$. Mida väiksem on $\Psi(u)$, seda suurem on tõenäosus, et laostumist ei toimu. Kui $\Psi(u) = 1$, siis tähendab see seda, et laostumine toimub tõenäosusega 1 (peaaegu kindlasti). Kindlustusfirmade jaoks on oluline hoida $\Psi(u)$ tõenäosust võimalikult madalal tasemel. Seda saab omakorda teha reguleerides kindlustusmaksete hindu või laenates mingil ajal omale raha juurde aga ka kasumit mitte väljastades.

2.3. Laostumistõenäosuse esitamise viisi rekordite abil

Tähistame kahjumiprotsessi järgmiselt: $\{L(t)\}_{t \geq 0}$, kus L on maksimaalne kahjum:

$$L = \sup_t L(t), \text{ ning } L(t) = S(t) - ct, t \geq 0 \text{ nii, et } U(t) = u - L(t).$$

Nüüd saame näidata, et L on seotud $\Psi(u)$ järgmiselt [2]:

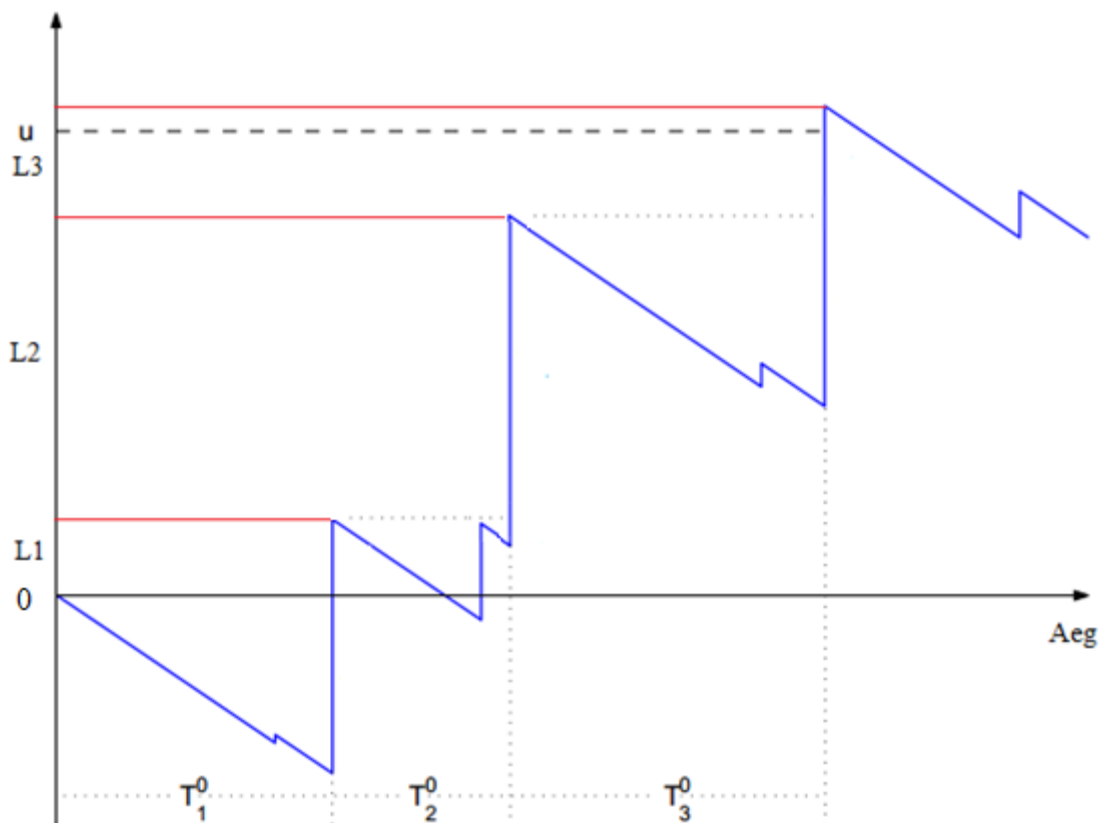
$$P(L \leq u) = P(L(t) \leq u, \forall t > 0) = P(U(t) \geq 0 \forall t > 0) = 1 - \Psi(u).$$

Maksimaalne kahjum on suurem nullist ainult siis, kui protsess $U(t)$ kukub allapoole algkapitali u määra ja selle tõenäosus on $\psi(0)$. Oletame et selline sündmus leiab aset ja protsess $U(t)$ kukub tasemele $u - l_1$. Siis kahjumi protsess $L(t)$ saavutab sellel ajahetkel rekordi kõrgusega l_1 . Tõenäosus, et see kahjumi protsess saavutab eelmisest kõrgemal uue

rekordi, on jällegi $\psi(0)$, sest kõik mis on nõutud, et see sündmus juhtuks on vaid see, et protsess $U(t)$ kukuks allapoole taset $u - l_1$ mingil ajahetkel tulevikus. Antud juhul kehtib fakt, et Poissoni liitprotsess on statsionaarne ja sõltumatute juurdekasvudega. Kui kukumine allapoole taset $u - l_1$ on suurusega l_2 , siis kahjumi protsessi uus rekordikõrgus on $l_1 + l_2$. Jätkates arutlust samamoodi edasi näeme, et tõenäosus n rekordite arvu kohta on esitatav kujul:

$$\psi(0)^n(1 - \psi(0)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ja see on geomeetrilise jaotuse tõenäosusfunktsioon. Lisaks, maksimaalne kahjum on lihtsalt rekordite summa ning sellepärast saame tähistada L kui geomeetrilise liitjaotuse juhusliku suuruse: $L = \sum_{i=1}^N L_i$, kus N on rekordi kõrguste arv tõenäosusruumil $\psi(0)^n(1 - \psi(0))$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ning L_i tähistatakse kahjumi protsessi rekordi i -ndat kasvu [2] (joonis 2.2).



Joonis 2.2. Laostumistõenäosuse esitamise viis rekordite abil [6]

3. KERGETE JA RASKETE SABADEGA JAOTUSTE LIIGITAMINE

Kindlustuskahjude jaotuste sabasid saab liigitada kahte rühma: kergete sabadega jaotuste klassi ja raskete sabadega jaotuste klassi.

Osa kahjujaotusi on just väga suurte väärtuste esinemissageduste poolest eksponentsiaaljaotusest erinevad – tegelikul jaotusel on raskemad sabad. Magistritöö raames on huvipakkuvaks valdkonnaks just raskete sabadega kahjujaotustega tegelemine.

Definitsioon 1: Olgu kaks jaotust tihedusfunktsioonidega vastavalt $f_1(x)$ ja $f_2(x)$, kusjuures

$$\exists K \in R: \forall x > K f_1(x) > 0, f_2(x) > 0.$$

Kui $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$, siis öeldakse, et tihedusfunktsioonile $f_1(x)$ vastav jaotus on raskema (parempoolse) sabaga kui tihedusfunktsioonile $f_2(x)$ vastav jaotus [7].

Definitsioon 2 : Öeldakse, et juhuslik suurus X on raske sabaga kui ei leidu sellist $t^* > 0$, et X momente genereeriv funktsioon $M(t)$ oleks lõplik ümbruses $(-t^*, t^*)$, so

$$\exists t^* > 0: \forall t \in (-t^*, t^*) M(t) = E(e^{tX}) < \infty.$$

Kui juhuslik suurus ei ole kerge sabaga siis öeldakse, et ta on raske sabaga [7].

Definitsioonist 2 saame järeldada, et kerge sabaga jaotusel on olemas kuitahes kõrget järku momendid, samas kui raske sabaga jaotustel ei pruugi eksisteerida isegi lõplikku keskvaartust. Magistritöös valitakse sellised raske sabaga jaotused, millel eksisteerib vähemalt esimene moment.

On selge, et saba kergus/raskus on tegelikult jaotusepõhine omadus (kui kaks juhuslikku suurus on sama jaotusega siis on nad mõlemad kas kerge või raske sabaga juhuslikud suurused), ent sellest hoolimata räägime sageli kas kerge või raske sabaga juhuslikust suurusest [7].

3.2. Raskete sabadega jaotused

Järgmisena annab autor mõningate tähistuste selgitused, mis on vajalikud allolevate definitsioonide paremaks mõistmiseks:

- Eeldatakse, et $X_i: X_1, X_2, \dots$ on omavahel sõltumatud ning sama jaotusega juhuslikud suurused jaotusfunktsiooniga $F: F(x) = P\{X_i \leq t\}, t = 1, 2, \dots$;
- Märgitakse, et jaotusfunktsiooni täiendfunktsioon on $\bar{F}(x)$, kus $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$;
- Märgitakse, et jaotusfunktsioonide summa on tähistatud F^{*n} , kus F^{*n} tähistab n -kordset konvolutsiooni jaotusest F .

Definitsioon 3: Kui kõigi $y \geq 0$ kehtib, et

$$\bar{F}(x + y) \sim \bar{F}(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

siis ütleme, et jaotusfunktsioon F kuulub pika-sabaga jaotuste klassi ja märgime, et $F \in L$. Teistpidi me saame öelda, et X on pika-sabaga juhuslik suurus [3].

X jaotusfunktsiooni F kuulumist klassi L näitab, et X on raske sabaga juhuslik suurus, sest pika-sabaga jaotused kuuluvad raskete sabadega jaotuste klassi.

Definitsioon 4: Kui kõigi $n \geq 2$ kehtib, et

$$\overline{F^{n*}}(x) \sim n \bar{F}(x)$$

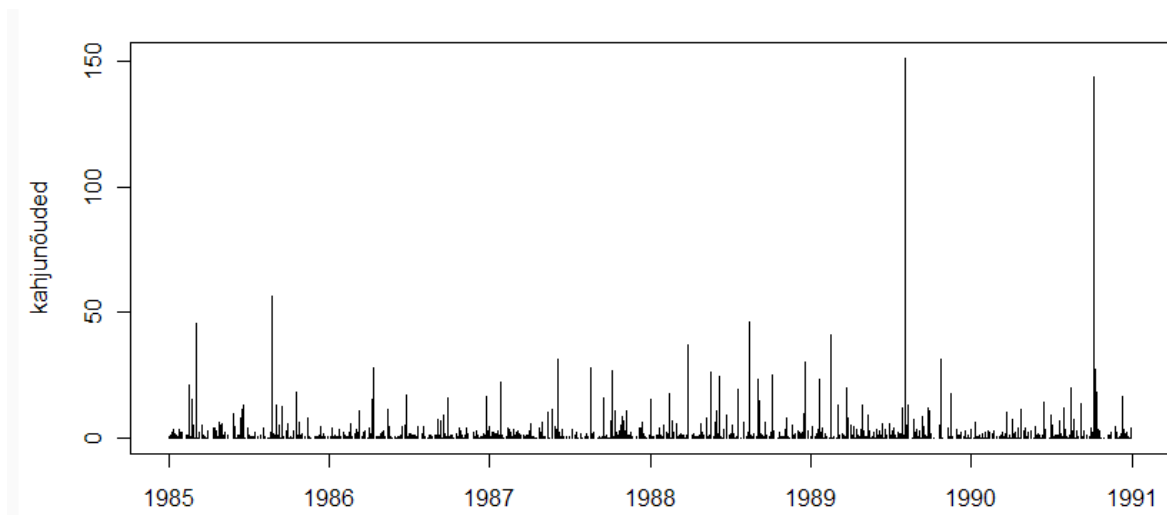
siis öeldakse, et F kuulub subeksponentsiaalsete jaotuste klassi ja märgime seda kui $F \in S$. Teistpidi võidakse öelda, et X on alam-eksponentsiaalsesse klassi kuuluv juhuslik suurus [3].

$F \in S$ ütleb, et $F \in L$. Sest alam eksponentsiaalsete klassi kuuluvad jaotused on pika-sabaga jaotuste alamklass. On teada, et L on raske sabadega jaotuste alamklass ja S on L alamklass. Seega hästi tuntud põhilised raske-sabaga jaotused kuuluvad samuti alam-eksponentsiaalsesse klassi. Ehk kehtib $F \in L \in S$. Klassi S kuuluvad näiteks Pareto, Weibull'i, Log-Normaalse, Burr'i, Log-Gamma ja Benktander'i jaotused [3].

3.3. Saba raskuse määramine andmete põhjal

Toome siinkohal ära mõned näited, kuidas saaks lugeja hinnata saba raskust jaotustel, täpsemalt analüüsida kas tegemist oleks kergema või pigem raskema sabaga. Lähtume eelkõige praktikas ettetulevatest lihtsamatest viisidest, mida oleks lugejal hea kasutada, kui tekib soov määrata jaotuse saba raskust. Vahel võib tulla ette ka olukord, kus jaotuse saba liiki on väga raske kui mitte võimatu määrata, siis tuleks lähtuda antud kontekstist ja proovida erinevaid viise saba hindamisel.

Üks võimalik variant oleks lihtsalt andmetele otsa vaatamine. Teades, et raskete sabade realiseerimiseks on ülejäänuid kordades ületatavad väärtused. Antud ideed ilmestab hästi allolev joonis [7].



Joonis 3.1. Kahjusuuruse andmed perioodist 1985-1990 [7]

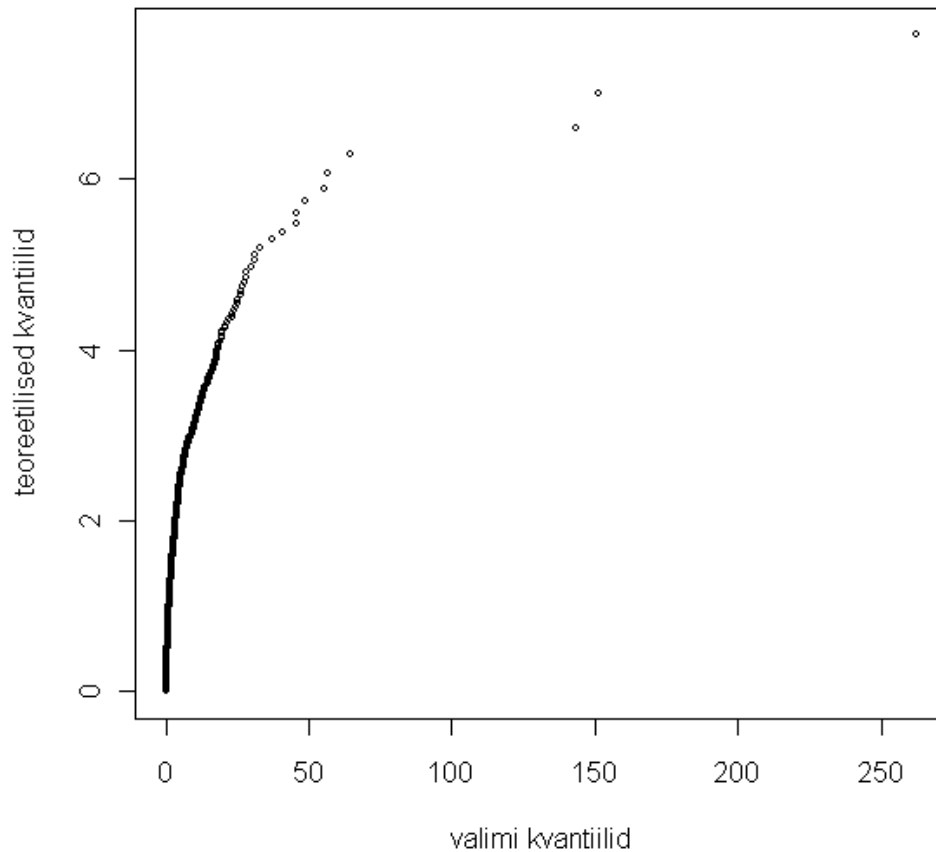
Jooniselt 3.1 näeme, et antud valimis esinevad pärast aastat 1989 eelnevaid väärtusi kordades ületavad väärtused, mis võivad viidata valimi raske sabaga jaotusele.

Teiseks võimalikuks viisiks on kasutada saba raskuse kindlaks tegemisel kvantiil-kvantiil graafikut. Graafikul kujutatakse valimi järkstatistikuid (ehk valimi kvantiilid) ja eksponentjaotuse H kvantiilid. Selleks kantakse graafikule punktid:

$$\{X_{(i)}, H^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kus H^{-1} on eksponentjaotuse jaotusfunktsiooni pöördfunktsioon. Loomulikult võib H rollis kasutada ka mingi muu pideva jaotuse jaotusfunktsiooni. Kuid kuna eksponentjaotus jääb täpselt piiri peale kergete ja raskete sabade vahele, siis on seda jaotust hea kasutada

võrdlemiseks. Valimimaksimum moodustab punkti koos $n/(n + 1)$ –kvantiiliga. Kui nüüd joonisel 3.2 all vasakul nurgas ja üleval paremas nurgas asuvad punktid ühendada sirgjoonega, siis viitavad sellest joonest ülespoole jäävad punktid, et valim pärineb raskema sabaga jaotusest kui eksponentjaotus [7].

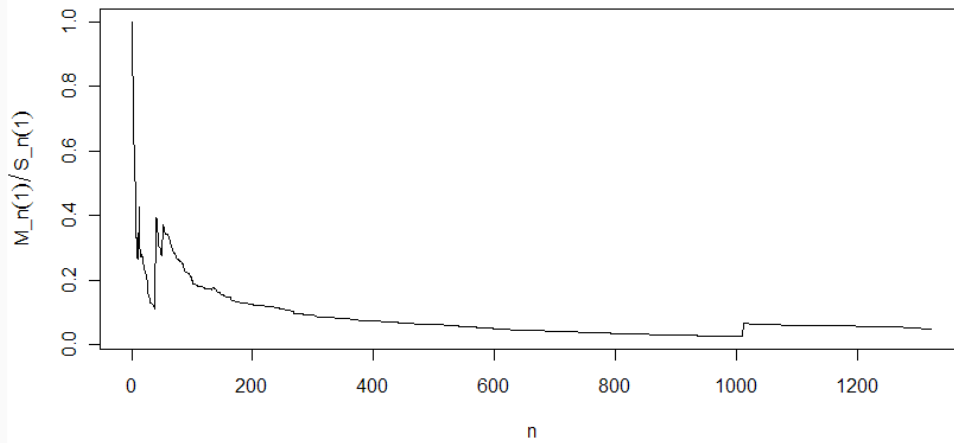


Joonis 3.2. Kvantiil-kvantiil graafik kahjusuuruste kohta [7]

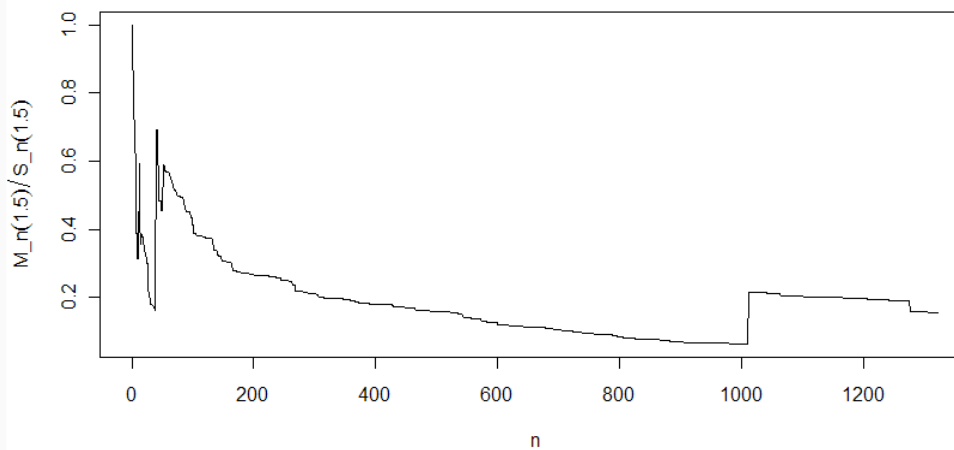
Kolmas kasulik meetod on ka valimi maksimumi ja summa suhte analüüs. Vaatleme ainult positiivseid juhuslikke suurusi ja tähistame:

$$S_n(p) = X_1^p + X_2^p + \dots + X_n^p, M_n(p) = \max\{X_1^p, X_2^p, \dots, X_n^p\}, \text{ kus } p > 0.$$

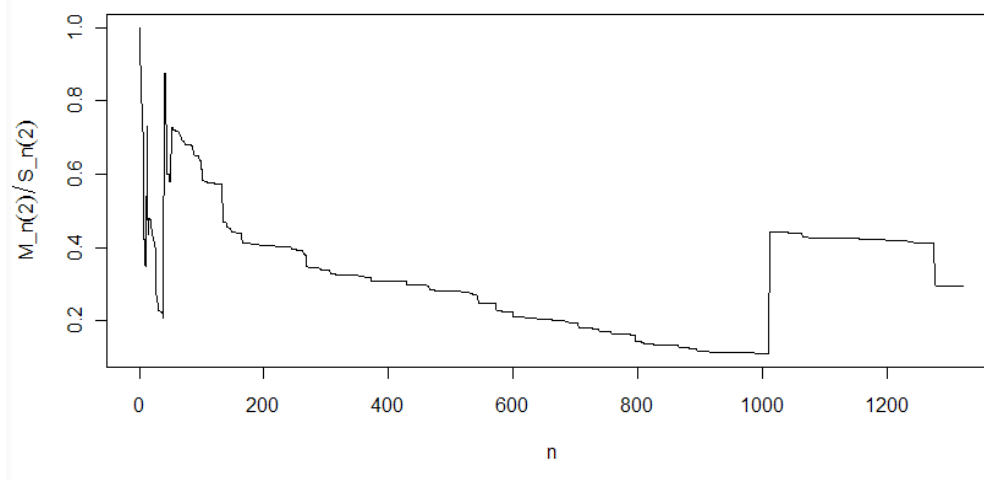
Siis suhe $R_n(p) = M_n(p)/S_n(p)$ koondub nulli (peaaegu kindlasti) parajasti siis, kui jaotuse p -s moment on lõplik. Seega kujutame suhet $R_n(p)$ erinevate väärtuste korral ja hindame, kas suhe koondub valimi kasvades nulli. Kui $R_n(p)$ väärtus erineb suure n korral märgatavalt nullist, siis on see vihje sellest, et selle jaotuse p -s moment ei eksisteeri (ja seega on tegu raske sabaga jaotusega). Järgnevad joonised ilmestavad hästi suhet $R_n(p)$ erinevate momentide korral [7].



Joonis 3.3. Valimi maksimumi ja summa suhe, $p = 1$ [7]



Joonis 3.4. Valimi maksimumi ja summa suhe, $p = 1,5$ [7]



Joonis 3.5. Valimi maksimumi ja summa suhe, $p = 2$ [7]

Joonised 3.3 - 3.5 väljendavad ühe ja sama valimi maksimumi ja summa suhet. Antud valimil ei tundu joonistest lähtuvalt olla lõplikku p-momenti, kuna kahel viimasel joonisel suhe ei koonu nulli. Samas kui joonisel 3.3 võiks arvata, et antud suhe võiks koonduda nulli.

3.3.1. Näide saba raskuse määramise kohta

Näide 1: Ühes kindlustusfirmas vaadeldi 40-vaatlusega tuleõnnetusi (üldjuhul Pareto jaotus iseloomustab hästi tuleõnnetusi) ning analüüsist selgus, et kvantiil-kvantiil graafikuga vaatlemisel on jaotusel kergem saba kui eksponentjaotusel. Kas võib suure tõenäosusega väita, et valim on pärit kerge sabaga jaotusest?

Näite analüüs 1: Antud ülesande korral on suureks puuduseks valimi suurus – kõigest 40 vaatlust, mida on kindlasti liiga vähe, et uskuda valimi päritolu kerge sabaga jaotuste klassist. Samuti tasub alati ettevaatlik olla, võimalusel valimit suurendada ja proovida läbi ka teisi hindamisviise. Raske sabaga andmed on enamasti hästi ära tuntavad just pikema aegsete aegridade korral. Tuleõnnetused on enamasti raske sabaga, kuid see väide ei puugi ka alati kehtida.

4. LAOSTUMINE KERGETE JA RASKETE SABADE KORRAL

4.1. Laostumine kergete sabade korral

Pollaczeck-Khinchine valem laostumistõenäosusele lõpmatu ajahetke jaoks [6]:

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \overline{F^{n*}}(u).$$

Pollaczeck-Khinchine valemi kasutamine analüütilise lahendi leidmiseks on enamasti võimatu, sest raske on hinnata n -kordset konvolutsiooni. Eksisteerivad vaid vähesed juhud, mille korral on võimalik teha täpseid arvutusi laostumistõenäosuse kohta – näiteks kui kahjud on antud eksponentjaotusega. Siiski, sellest hoolimata on Pollaczeck-Khinchine valemit kasutatud kergete sabade korral, et anda asümptootilist lahendit $\psi(u)$ jaoks. Niinimetatud Cramer-Lundbergi hinnang kergete sabade juhuslike suuruste jaoks on tuletatud just sellest [6].

Definitsioon 5: (Lundbergi eksponent). Olgu F jaotusfunktsioon selline, et tema integreeritud saba jaotus F_I on Laplace-Stieltjes teisendus, mis on defineeritud kui [6]

$$LF_I^*(\theta) := \mu F^{-1} \int_0^{\infty} e^{\theta t} \bar{F}(t) dt < \infty.$$

Lundbergi eksponent γ on defineeritud kui väärtus θ , mis lahendab järgmist võrdust

$$LF_I^*(\theta) = c/\rho.$$

Järgmine väide 1 pärineb klassikalisest riskiteooriast [6]:

Väide 1: (Cramer-Lundbergi teoreem). Loo Cramer-Lundbergi mudeli. Kui Lundbergi eksponent eksisteerib, siis kehtivad:

- Allolevat võrratust tuntakse kui Lundbergi võrratust:

$$\psi(u) \leq e^{-\gamma u}.$$

- Veel enam, viimast tulemust saab täpsustada järgmise asümptootilise lähendiga, teatakse ka kui Crameri lähendit:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-\gamma u}} = C < \infty,$$

kus konstandi C väärtus on antud järgmiselt:

$$C := \frac{1 - \rho}{\gamma \lambda \int_0^\infty t e^{\gamma t} F_1(t) dt}.$$

4.2. Laostumine raskete sabade korral

Kõige realistlikumad mudelid kahjukindlustuses on need, mis sisaldavad raske sabaga juhuslike suurusi. Peatükis 3.2 näidati raskete sabadega juhuslikele suurustele seatud tingimusi, täpsemalt momentide kohta seatud tingimust, kus raske sabaga juhuslikul suurusel ei pruugi esineda isegi lõplikku keskväärtust. Ning seetõttu pole Cramer-Lundbergi hinnang kasutatav raske sabaga jaotuste korral. Nende puhul saab kasutada Pollaczcek-Khinchine valemi teisendust, millest tuletatakse asümptootiline lahend alamklassi S jaoks, sest S klassi liikmeid saab esitada n -kordse konvolutsiooniga [6].

Väide 2: Olgu F jaotusfunktsioon, vastav integreeritud saba jaotus $F_1 \in S$, kus S on subeksponentsiaalsete jaotuste klass. Siis saab näidata, et [6]:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_1}(u)} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

See tulemus on kirja pandud Embrechts'i ja Veraverbeke poolt aastal 1982. Kuid 2001 Mikosch ja Nagaev näitasid, et selle koondumine on väga aeglane. Seega Monte-Carlo meetod on siin kasulik töövahend [6].

4.3. Monte-Carlo hinnang laostumistõenäosusele

Kergeste sabade korral on juba pikemat aega teada, kuidas simuleerida efektiivselt $\psi(u)$ ja $\psi(u, t)$. Põhiline on olulise valimi meetod (Asmussen, 2000), kus algoritmis kasutatakse suurte hälvete ideed (Siegmond, 1976; Bucklew jt., 1990; Anantharam, 1989) [6].

Raskete sabade korral on peaaegu kõik algoritmid olnud siiani seotud vaid lõpmatu ajahorisondi ja Cramer-Lundbergiga. Mitmetes hiljutistes artiklites on avaldatud efektiivseid simulatsioonialgoritme $\psi(u)$ jaoks, näiteks Asmussen jt. (2000), Juneja ja Shahabuddin (2002), Asmussen ja Kroese (2006), Dupuis jt. (2006). Kõik need toetuvad Pollaczcek-Khinchine valemile. Blanchet ja Glynn (2008) pakkusid välja efektiivse algoritmi subeksponentsiaalsete klassi jaotuste jaoks [6].

Esimene laostumistõenäosuse efektiivseks simuleerimiseks mõeldud algoritm 1 (vt peatükk 5.2 ja lisa 1) lõpliku aja korral on välja pakkunud Boots ja Shahabuddin (2001) [6].

4.4. Näiteid rasketest jaotuste sabadest

Autor vaatab oma töös lähemalt Pareto, Weibulli ja Lognormaalset jaotust:

1. Pareto jaotusel on saba: $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$, kus $\alpha > 0$ ja omab lõplikku keskväärtust kui $\alpha = 1$.
2. Weibulli jaotusel on saba: $\bar{F}(x) = e^{-x^\beta}$, kus $0 < \beta < 1$. On võimalik luua jaotus, kus $\beta \geq 1$ aga siis antud jaotus pole enam raske sabaga.
3. Lognormaalsel jaotusel on saba: $\bar{F}(x) = \bar{\Phi}\left(\frac{\log x}{\sigma}\right)$, kus parameeter $\sigma > 0$ ja $\Phi(x)$ on standardse normaalse juhusliku suuruse kumulatiivne jaotusfunktsioon [3].

Eelnevad kolm jaotust iseloomustavad hästi klassi S kontraste. Kõige raskema sabaga nendest kolmest on Pareto jaotus ja kõige kergemaga Weibull. Erinevusi on teisigi, nimelt kui võrrelda Pareto ja Weibulli jaotusi, siis Pareto jaotusel parameetriga α ei esine rohkem momente kui α , ehk momendid on parameetrist α sõltuvad. Ehk täpsemalt öeldes kui $\alpha = 1$, siis Pareto jaotusel on olemas ainult lõplik keskväärtus (esimene moment), kui $\alpha = 2$, siis on Pareto jaotusel olemas ainult kaks esimest momenti (lõplik keskväärtus ja dispersioon) ning kõrgemaid momente ei esine. Samas kui Weibulli jaotusel momentide esinemine ei sõltu parameetrist β . Lognormaalne jaotus paigutub oma saba raskuse poolest nende kahe jaotuse, Weibulli ja Pareto, vahele [3].

Järgmine väide 1 ja selle tõestus pärineb allikast [3], mis iseloomustab hästi eelneva kolme jaotuse omavahelisi suhteid.

Väide 1: Olgu meil kolm saba jaotust antud järgmisel kujul:

$$\bar{F}_1(x) = (1+x)^{-\alpha}, \bar{F}_2(x) = e^{-x^\beta} \text{ ja } \bar{F}_3(x) = \bar{\Phi}\left(\frac{\log x}{\sigma}\right),$$

kus $x > 0$, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\sigma > 0$ siis kehtivad järgmised seosed:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_1(x)}{\bar{F}_3(x)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_2(x)}{\bar{F}_3(x)} = 0.$$

Tõestus 1: Kasutame l'Hospitali reeglit ja seega saame sabade jaotuste esimesest seosest kirjutada välja [3]:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(x)}{\overline{F}_3(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^{-\alpha}}{\overline{\Phi}\left(\frac{\log x}{\sigma}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha \sigma \sqrt{2\pi} x e^{\frac{(\log x)^2}{2\sigma^2}}}{(1+x)^{\alpha+1}} = \infty.$$

Ja teisest seosest saame:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_2(x)}{\overline{F}_3(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^\beta}}{\overline{\Phi}\left(\frac{\log x}{\sigma}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \beta \sigma \sqrt{2\pi} x^\beta e^{(-x^\beta + \frac{(\log x)^2}{2\sigma^2})} = 0.$$

Autor ei analüüsi eelnevaid jaotusi rohkemate parameetritega, näiteks ka asukoha ja skaala parameetrit, kuna need ei muudaks saba käitumist „raskuse” poolest, mis on just meid huvitav teema simulatsioonides [3].

5. ALGORITMID RAKENDUSTE JAOKS

Algoritm lõpmatu ajaga laostumistõenäosuse simuleerimiseks on pärit allikast [3] ning selles kasutatakse supreemumi kahjumi protsessi, laostumistõenäosuse esitusviisi, mis on edasi antud rekordite abil (antud magistritöö peatükk 2.3). Algoritm lõpliku ajaga laostumistõenäosuse leidmiseks on pärit allikast [8].

Mõlema algoritmi dispersiooni vähendamise põhiidee on jätta genereerimata suurim kahju ning leida kalkulasioonide abil hinnang sellele suurima kahju suurusele, mis viib laostumiseni, ning siis leida selle kahju suuruse esinemise tõenäosus.

5.1. Algoritm lõpmatu ajaga laostumistõenäosuse simuleerimiseks

Allolevat algoritmi tuntakse kui AK algoritmi (Asmussen ja Kroese poolt loodud), kus käsitletakse Pollaczec-Khinchine'i valemist lähtuvat [3].

1. Fikseerime integreeritud saba jaotuse F_I , turvalisa roo ja algkapitali u .
2. Simuleerime N^* nii, et $P(N^* = n) = \rho (1 + \rho)^{-n}$, $n \in \{1, 2, \dots\}$.
 - 2.1. Kui $N^* = 1$, siis väljastada $Y = (1 + \rho)^{-1} \bar{F}_I(u)$, muul juhul simuleerida valim $N^* - 1$ kui sõltumatud juhuslikud suurused jaotusest F_I .
 - 2.2. Arvutada valimi maksimaalne väärtus M ja summa S .
 - 2.3. Leida $Y = N^*(1 + \rho)^{-1} \bar{F}_I(\max\{M, u - S\})$.
3. Korda eelmist sammu $t_1 - 1$ korda ning
 - 3.1. hinnata optimaalset konstanti c , kui c on defineeritud valimist suurusega t_1 kasutades EN^* ja $Var(N^*)$ täpset väärtust ja märkida seda kui \hat{c} .

$$c = -[E(Y N^*) - EY E N^*] / Var(N^*)$$

Siin kasutasime kontrollmuutujana N^* , et vähendada dispersiooni.

4. Simuleerime N^* nii, et $P(N^* = n) = \rho (1 + \rho)^{-n}$, $n \in \{1, 2, \dots\}$ (Nagu punktis 2 eelnevalt).
 - 4.1. Kui $N^* = 1$, siis $Y = (1 + \rho)^{-1} \bar{F}_I(u) - \hat{c}(\rho)^{-1}$, muul juhul simuleerida $N^* - 1$, kui sõltumatud juhuslikud suurused jaotusest F_I .
 - 4.2. Arvutada valimi maksimaalne väärtus M ja summa S .
 - 4.3. Leida $Y = N^*(1 + \rho)^{-1} \bar{F}_I(\max\{M, u - S\}) + \hat{c}(N^* - (1 + \rho)^{-1})$.

5. Kordame eelmist sammu $t_2 - 1$ korda ning hindame $\Psi(u)$ kui Y keskmist väärtust üle valimi suurusega t_2 .

Algoritm on lisatud magistritöö osasse Lisa 2.

5.2. Algoritm lõpliku ajaga laostumistõenäosuse simuleerimiseks

1. Simuleerida kahjude arv Poissoni protsessiga $\{N(s)\}_{s \leq t}$, selleks genereerida $N(t) = N_t$ kui Poissoni (λt) ja võttes arvesse, et $N_t \geq 1$ ning kahjude ajad $T_1 < T_2 < \dots < T_{N_t}$ on $(0, t)$ -ühtlase jaotusega.

2. Kui $N_t = 1$, siis simuleerida vajalik lävend suurimale kahjule nii, et $W = \max\{u + T_{N_t}\}$.

3. Simuleerida suurima kahju järjekorranumber J kui diskreetne juhuslik suurus üle hulga $\{1, \dots, N_t\}$ ja kahjud ise jaotusest F , nii et: $Claims_i, i \neq J$.

4. Leiame vajaliku lävendi suurimale kahjule järgnevatel juhtudel:

4.1. Suurim kahju on esimene: $J = 1$.

4.2. Suurim kahju on viimane: $J = N_t$ (kui laostumine on juba toimunud, siis on vaja vaid suurim kahju ületada).

4.3. Suurim kahju pole esimene ega viimane.

5. Tagastame tulemuse:

$$\hat{\psi}(u, t) = N_t \bar{F}(W).$$

Siin algoritmis kasutasime kontrollmuutujana J , et vähendada dispersiooni.

Algoritm on lisatud magistritöö osasse Lisa 1.

6. RAKENDUSED

6.1. Saba raskuse hindamine simulatsiooni abil

Püüame kontrollida püstitatud hüpoteesi: mida raskemaks läheb kahjunõude jaotus, seda raskemaks läheb ka aeg laostumiseni T_c jaotus.

Selleks, et võrrelda, millisel juhul aeg kahjuni jaotus on raskeim, simuleerime kõigepealt aeg kahjuni jaotusfunktsiooni erinevatel ajahetkedel:

$$T_{c_{-}K_n} = \frac{\psi(u,100)}{\psi(u)}, \frac{\psi(u,1000)}{\psi(u)}, \dots, \frac{\psi(u,t)}{\psi(u)}, t \in [100, 1000, 10000, 100000].$$

Tulemuseks saame aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni väärtuste jada erinevate argumentide korral. Olgu meil kolm erinevat kahjujaotust, mille korral aeg laostumiseni jaotuste sabade raskusi soovime hinnata:

K_1 - Pareto aeg laostumiseni jaotuse saba;

K_2 - Lognormaalse aeg laostumiseni jaotuse saba;

K_3 - Weibulli aeg laostumiseni jaotuse saba.

Nüüd hindame saadud jadaliikmete suhteid:

$$s_1 = \frac{T_{c_{-}K_1}}{T_{c_{-}K_2}}, s_2 = \frac{T_{c_{-}K_1}}{T_{c_{-}K_3}}, s_3 = \frac{T_{c_{-}K_2}}{T_{c_{-}K_3}}$$

ja märgime, et suhe S_n , $n = [1, 2, 3]$ koondub alati ühte (kui $t \rightarrow \infty$).

Koondumine üheks saab toimuda kahel juhul: suunaga ülalt või alt. Olgu meil kaks jaotusfunktsiooni, $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ nii, et jaotusfunktsiooni $F_2(x)$ saba parempoolse otsa väärtused x_i on suuremad kui $F_1(x)$ saba otsa väärtused. Soovime hinnata nende kahe jaotusfunktsiooni saba raskuste suhet, siis

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-F_1(t)}{1-F_2(t)} \rightarrow 1$, sest $\frac{1-F_1(t)}{1-F_2(t)} < \frac{1-F_2(t)}{1-F_1(t)}$ ja seega koondumine toimub altpoolt, kuna mingist hetkest alates $\frac{1-F_1(t)}{1-F_2(t)}$ on väiksem kui 1.

Koondumine suunaga altpoolt üheks näitab, et lugeja on raskema sabaga kui murru nimetaja ning koondumine suunaga ülalt poolt näitab, et lugeja on kergema sabaga kui murru nimetaja.

6.2. Algandmete valik laostumistõenäosuste simuleerimiseks

Fikseerime jaotused (Pareto, Weibulli ja Log-Normaalse), kasutatakse nende jaotusfunktsioone ja täiendfunktsioone.

Suhteline turvalisa, roo (ρ), hoitakse konstantsena (kui sama jaotus), esimesel juhul $\rho = 1/2$ ja teisel juhul valitakse $\rho = 3/4$. Soovime teada, kas erinev roo väärtus võib muuta aeg laostumiseni saba raskuse käitumise seaduspära.

Algkapital u on selline täisarv, mille korral lõpmatu ajaga laostumistõenäosus oleks lähim arvule 10^{-5} .

Lõpmatu ajaga laostumistõenäosuse hinnang genereeritakse vägagi täpselt (ja me saame seda kasutada kui täpset tulemust). Lõpliku ajaga laostumistõenäosusele leitakse aga 95% usalduspiirid. Täielikult täpsete tulemuste saamine on piiratud simuleerimise ajaga (näiteks Lognormaalse kahjujaotuse korral $T = 100000$ laostumistõenäosuse simuleerimiseks kulus aega natukene üle nelja tunni, korduste arv oli 1 miljon). Kuna antud töös soovime vaadata jaotuste sabade suhteid, mitte simuleerida võimalikult täpseid lõpliku ajahorisondiga laostumistõenäosuste, siis saadud täpsusega simulatsioonid on meile piisavad hindamaks esitatud hüpoteesi.

Kahjude keskvärtus hoitakse samuti konstantsena (kui erinev jaotus). Ühel juhul valitakse keskvärtuseks 2 ja teisel juhul 3.

Fikseeritakse ära jaotuse parameetrid, need leitakse vastavate momentide valemitest (momentide valemid on pärit allikast [9]), võrdsustades EY keskvärtustega 2 ja teisel juhul 3 ning $n = 1$ kuna esimene moment on keskvärtus.

Pareto jaoks:

$$EY^n = \frac{\beta^n n!}{\prod_{i=1}^n (\alpha - i)}, \alpha > n.$$

Weibulli jaoks:

$$EY^n = \lambda^n \Gamma\left(\frac{1+n}{\alpha}\right).$$

Lognormaalse jaoks:

$$EY^n = e^{n\mu + \frac{1}{2}n^2\sigma^2}.$$

Korduste arvuks lõpmatu ajahorisondiga algoritmi korral määrame Pareto jaotuse jaoks 200000, lognormaalse jaotuse jaoks aga 1000000, ning Weibulli jaotuse jaoks suurendame valimi korduste arvu 4000000, mis tagab piisavalt täpse simulatsiooni tulemuse, kuna lõpmatu ajaga algoritm töötab ebatäpsemalt just kergemate sabade korral.

6.3. Simulatsioonid

6.3.1. Lõpmatu ja lõpliku ajaga laostumistõenäosuse genereerimine

Leitakse algoritmi (vt lisa 2) abil kõigepealt hinnangud laostumistõenäosusele lõpmatul ajahorisondil erinevate jaotuste parameetrite korral. Tabelis 6.1 on näidatud tulemused $\rho = 1/2$ korral ja tabelis 6.2 kui $\rho = 3/4$.

Tabel 6.1. Laostumistõenäosuse hinnangud $\Psi(u)$ erinevate jaotuste ja parameetrite korral

Kahjude jaotus	Jaotuse parameeter	$\Psi(u), \rho = 1/2$		
		algkapital u	keskmine	standardhälve
Pareto	3/2	9,9950e09	1,0003e-05	2,2271e-08
	4/3	9,9850e14	1,0005e-05	3,5209e-08
Weibulli	1/2	227	1,0029e-05	1,2099e-04
	0,41565	745	1,0010e-05	3,1269e-05
Lognormaalse	$\sqrt{2\log(2)}$	407	1,0077e-05	4,1237e-06
	$\sqrt{2\log(3)}$	3165	1,0004e-05	1,3281e-06

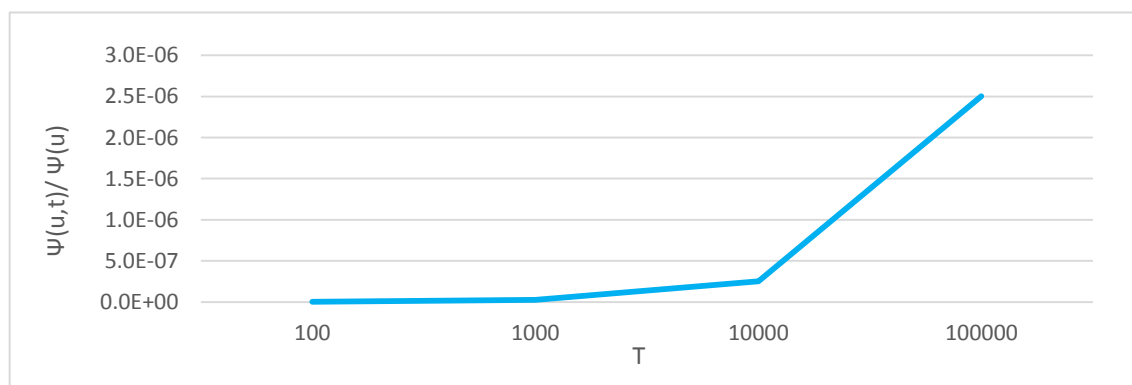
Tabel 6.2. Laostumistõenäosuse hinnangud $\Psi(u)$ erinevate jaotuste ja parameetrite korral

Kahjude jaotus	Jaotuse parameeter	$\Psi(u), \rho = 3/4$		
		algkapital u	keskmine	standardhälve
Pareto	3/2	8,9900e10	1,0006e-05	4,2629e-08
	4/3	2,6990e16	1,0001e-05	1,8805e-08
Weibulli	1/2	339	1,0067e-05	0,0008
	0,41565	1012	1,0081e-05	0,0003
Lognormaalse	$\sqrt{2\log(2)}$	562	1,003093e-05	7,366839e-06
	$\sqrt{2\log(3)}$	4600	1,006989e-05	2,292818e-06

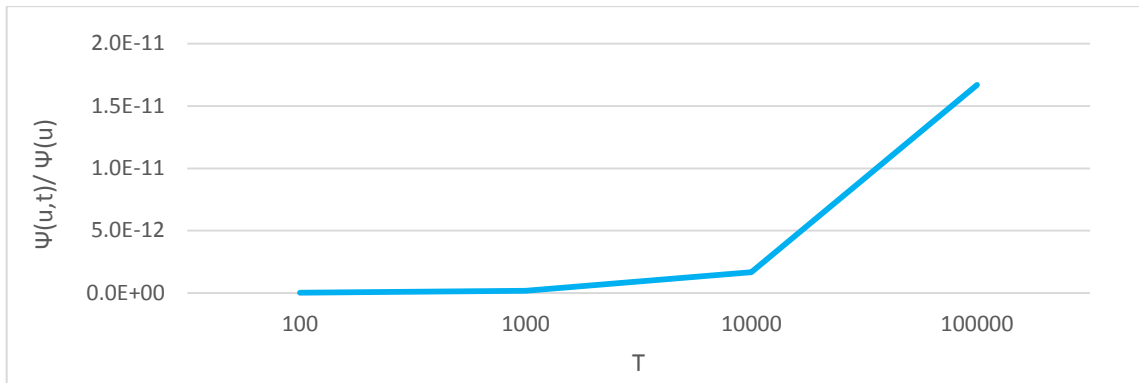
Nüüd leiame algoritmi (vt lisa 1) abil hinnangu keskmisele laostumistõenäosusele erinevate ajaühikute, parameetrite ja ρ korral. Tulemused on toodud ära tabelites 1 – 12 (vt lisa 3) erinevate kahjujaotuste kaupa.

6.3.2. Aeg laostumiseni sabade genereerimine

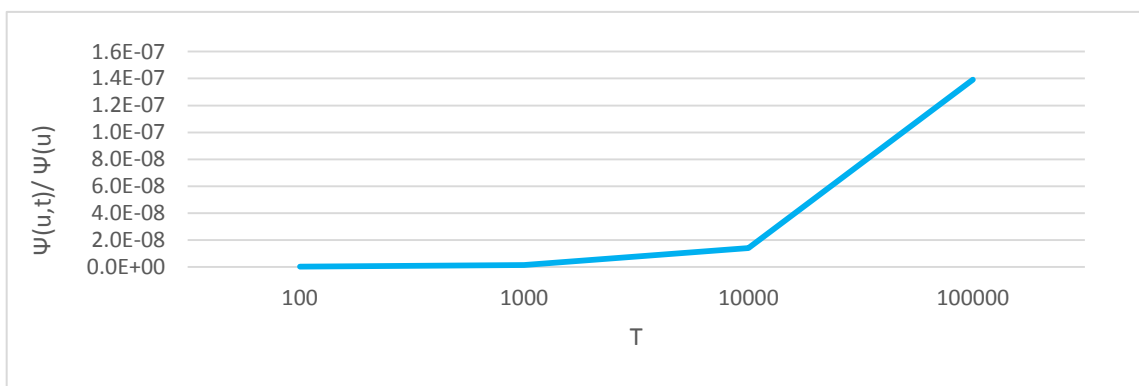
Järgnevad joonised 6.1 – 6.4 ilmestavad tabelis 1 (vt lisa 4) olevaid andmeid Pareto aeg laostumiseni saba kohta.



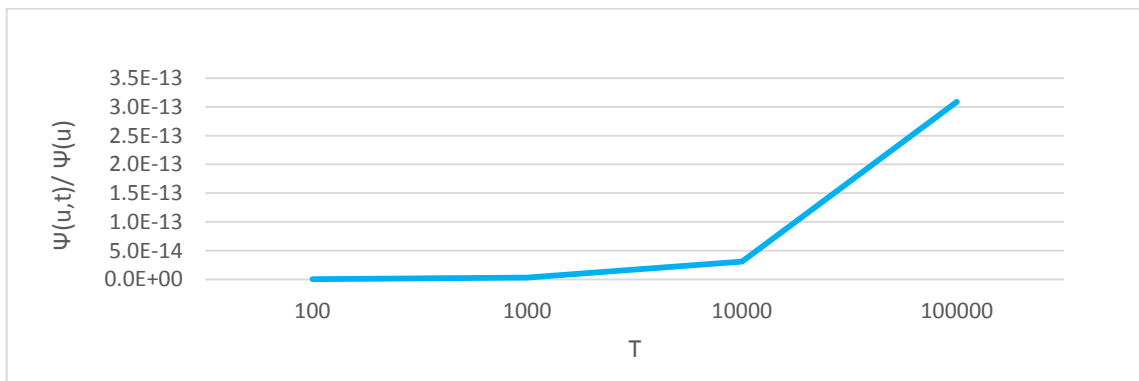
Joonis 6.1. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Pareto kahjujaotuse korral, $\rho = 1/2, a = 3/2$



Joonis 6.2. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Pareto kahjujaotuse korral, $\rho = 1/2, a = 4/3$



Joonis 6.3. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Pareto kahjujaotuse korral, $\rho = 3/4, a = 3/2$



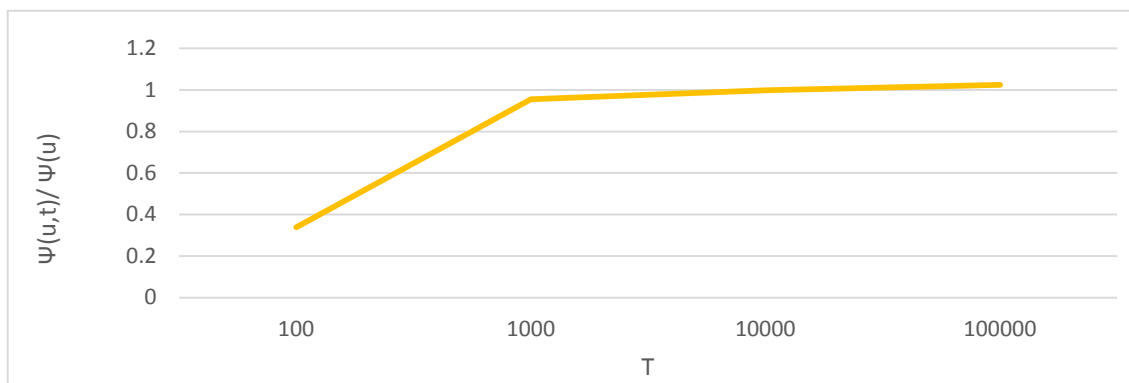
Joonis 6.4. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Pareto kahjujaotuse korral, $\rho = 3/4, a = 4/3$

Järgnevad joonised 6.1 – 6.4 ilmestavad tabelis 1 (vt lisa 4) olevaid andmeid Pareto aeg laostumiseni jaotuse saba kohta.

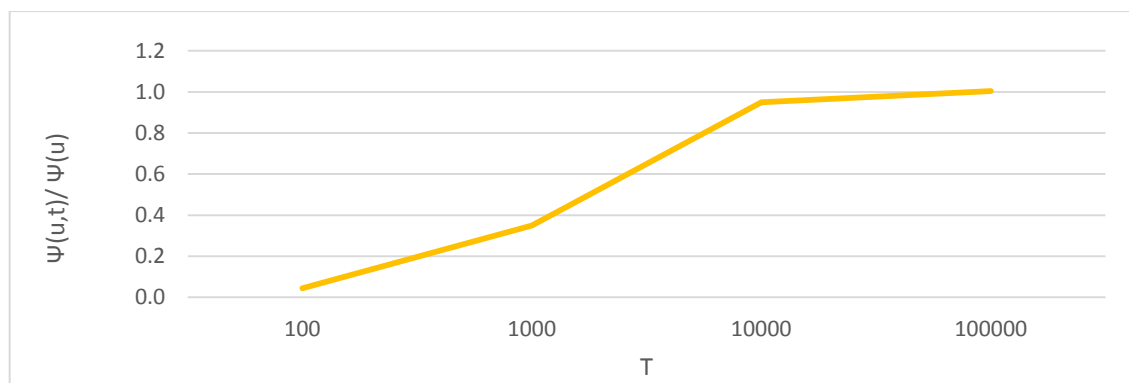
Kahe jaotusfunktsiooni jagamisel koondub nende suhe alati üheks kui $t \rightarrow \infty$. Pareto jaotusel on väga raske saba, kuna saba ei koonu nii kiiresti üheks.

Pareto kahjujaotus parameetriga $a = 4/3$ aeg laostumiseni saba on raskem sest saba parempoolne ots koondub aeglasemalt üheks, kui Pareto parameetriga $a = 3/2$. Roo (ρ) väärtuse muutmisel Pareto parameetriga $a = 4/3$ aeg laostumiseni saba jääb ikkagi raskemaks. Seega ei mõjuta erinev ρ väärtus aeg laostumiseni saba raskuste seaduspära.

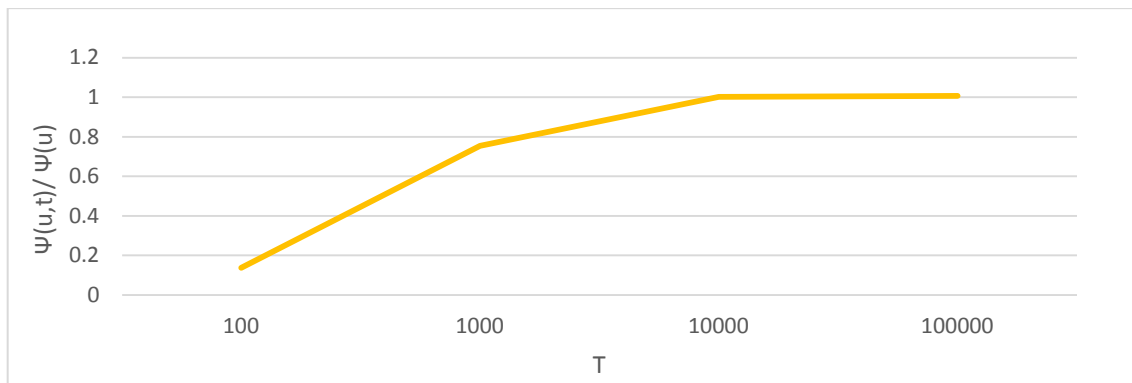
Järgnevad joonised 6.5 – 6.8 ilmestavad tabelis 2 (vt lisa 4) olevaid andmeid Lognormaalse aeg laostumiseni saba kohta.



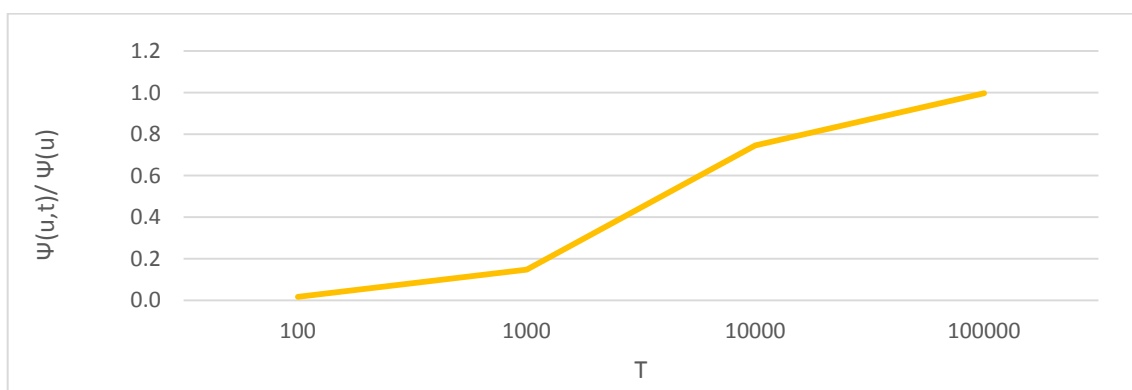
Joonis 6.5. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Lognormaalse kahjujaotuse korral, $\rho = 1/2$, $a = \sqrt{2\log(2)}$



Joonis 6.6. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Lognormaalse kahjujaotuse korral, $\rho = 1/2$, $a = \sqrt{2\log(3)}$



Joonis 6.7. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Lognormaalse kahjujaotuse korral, $\rho = 3/4$, $a = \sqrt{2\log(2)}$

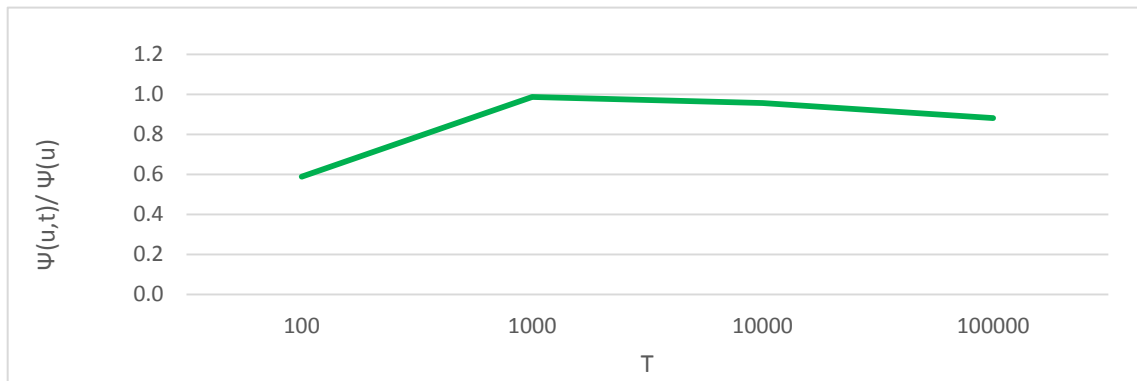


Joonis 6.8. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Lognormaalse kahjujaotuse korral, $\rho = 3/4$, $a = \sqrt{2\log(3)}$

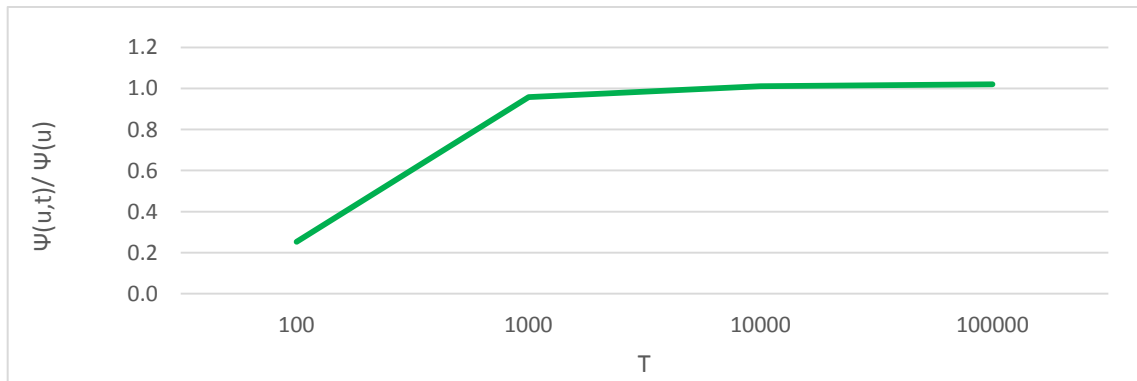
Lognormaalsel jaotusel on kergem aeg laostumiseni saba kui Pareto jaotusel, kuna saba parempoolne ots koondub kiiremini üheks.

Lognormaalse kahjujaotusega parameetriga $a = \sqrt{2\log(3)}$ aeg laostumiseni saba on raskem sest saba parempoolne ots koondub aeglasemini üheks, kui Lognormaalse jaotusega parameetriga $a = \sqrt{2\log(2)}$. Joonistelt 6.6 ja 6.8 on näha, et ühele jõutakse väga lähedale juba ajahetkel $T=1000$ ehk tunduvalt varem kui raskema saba korral. Roo (ρ) väärtuse muutmisel Lognormaalse parameetriga $a = \sqrt{2\log(3)}$ aeg laostumiseni saba jääb ikkagi raskemaks. Seega ei mõjuta erinev ρ väärtus aeg laostumiseni saba raskuste eripära.

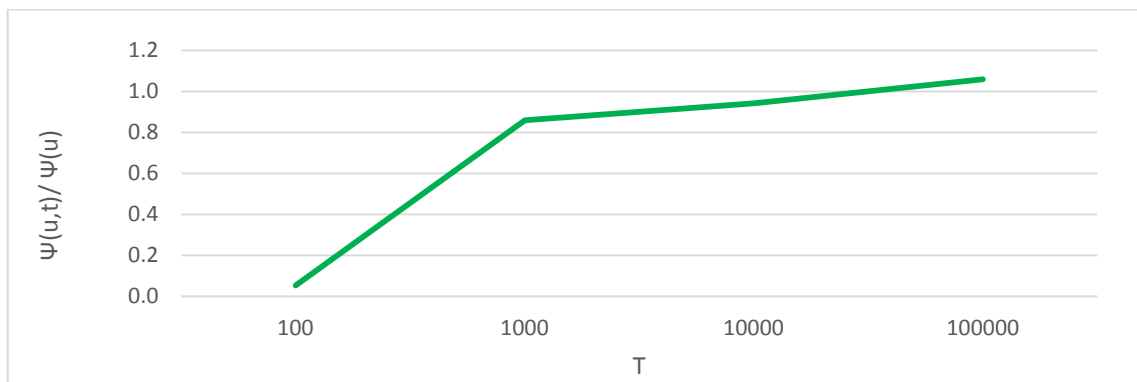
Järgnevad joonised 6.9 – 6.12 ilmestavad tabelis 3 (vt lisa 4) olevaid andmeid Weibulli aeg laostumiseni saba kohta.



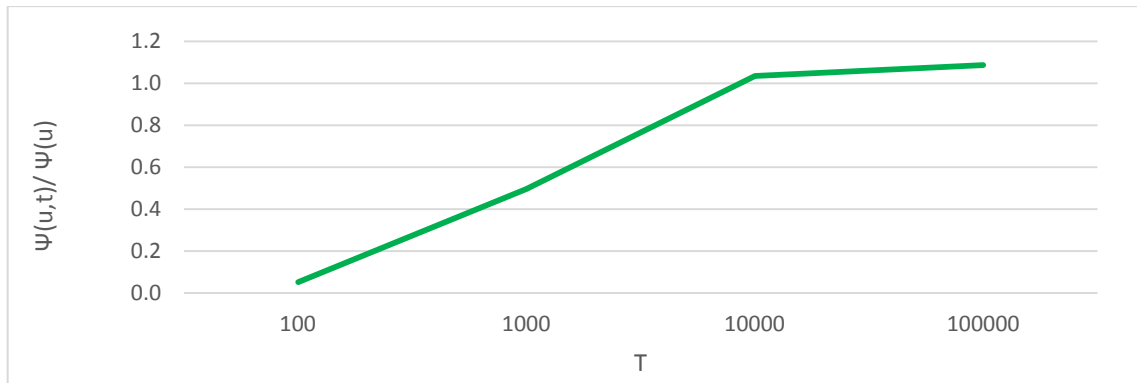
Joonis 6.9. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Weibulli kahjujaotuse korral, $\rho = 1/2, a = 1/2$



Joonis 6.10. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Weibulli kahjujaotuse korral, $\rho = 1/2, a = 0,41565$



Joonis 6.11. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Weibulli kahjujaotuse korral, $\rho = 3/4, a = 1/2$



Joonis 6.12. Aeg laostumiseni jaotusfunktsiooni hinnang Weibulli kahjujaotuse korral, $\rho = 3/4$, $a = 0,41565$

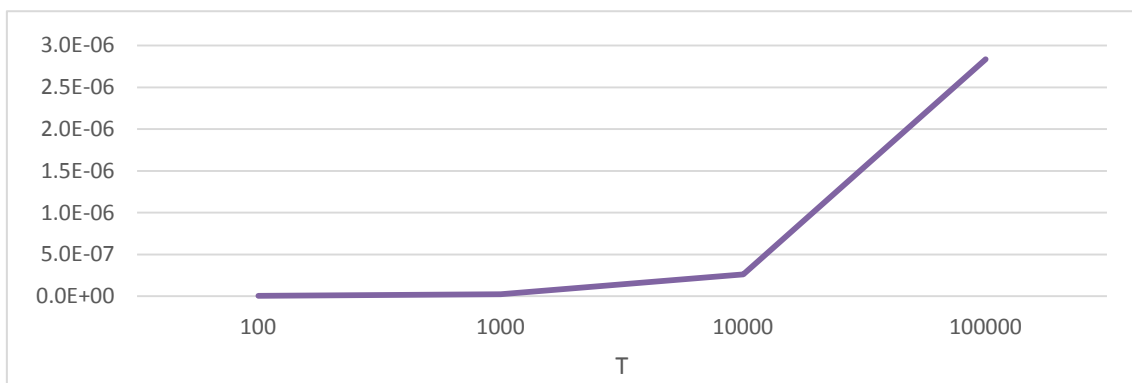
Weibulli jaotusel on kergem aeg laostumiseni saba kui Pareto jaotusel, kuna saba parempoolne ots koondub kiiremini üheks.

Weibulli puhul, kui $\rho = 1/2$, on keerulisem öelda, kumma parameetri korral on aeg laostumiseni saba raskem, sest koondumine üheks toimub peaaegu sama kiiresti. Kui $\rho = 3/4$, siis Weibulli kahjujaotusega parameetriga $a = 1/2$ on aeg laostumiseni saba raskem, sest koondumine üheks toimub aeglasemini, kui parameetri $a = 0,41565$ korral.

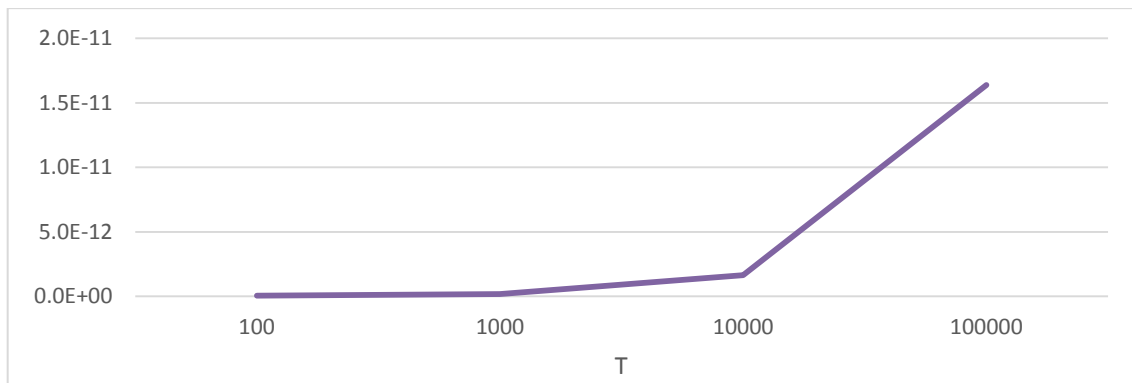
6.3.3. Aeg laostumiseni sabade võrdlus erinevate jaotuste korral

Võrdleme aeg laostumiseni sabade raskusi erinevate kahjujaotuste korral.

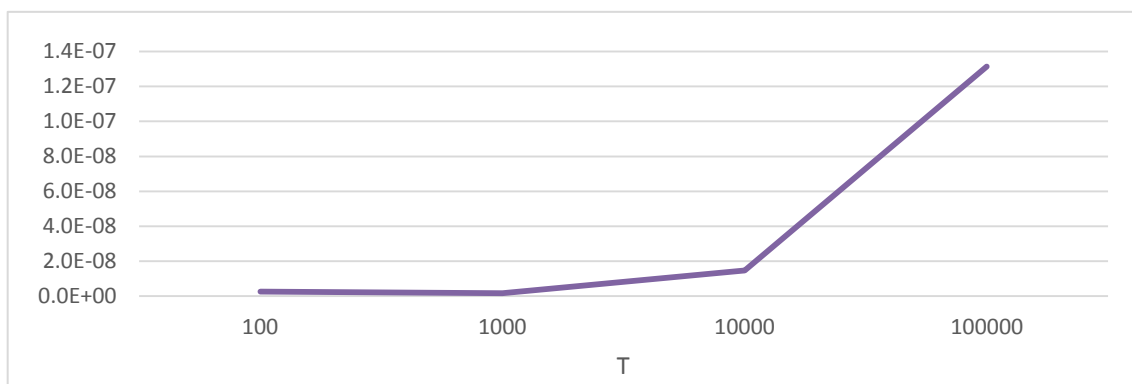
Järgnevad joonised 6.13 – 6.16 ilmestavad tabelis 1 (vt lisa 5) olevaid andmeid Pareto ja Weibulli aeg laostumiseni saba raskuste kohta.



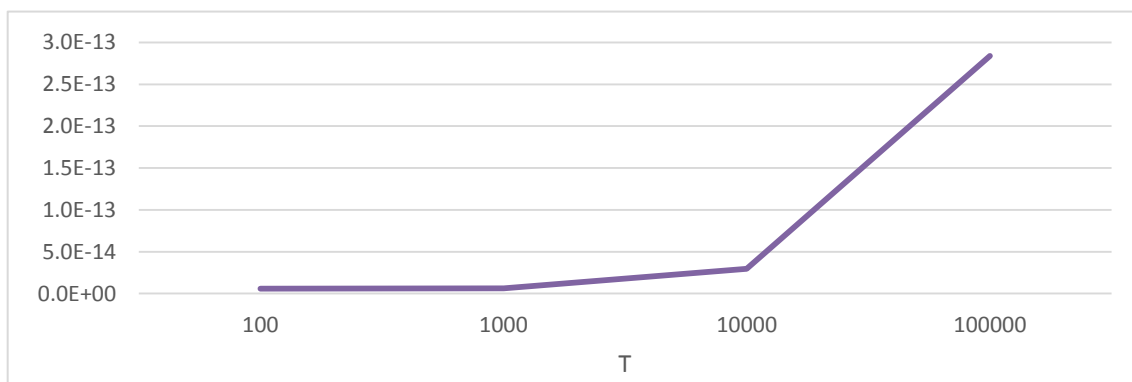
Joonis 6.13. Pareto ja Weibulli aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 1/2$, kahjude keskvärtus 2



Joonis 6.14. Pareto ja Weibulli aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 1/2$, kahjude keskväärtus 3



Joonis 6.15. Pareto ja Weibulli aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 3/4$, kahjude keskväärtus 2

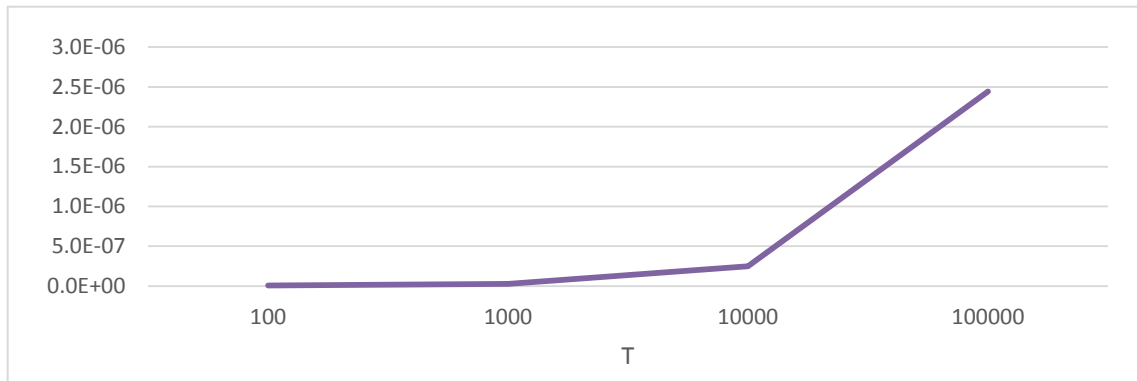


Joonis 6.16. Pareto ja Weibulli aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 3/4$, kahjude keskväärtus 3

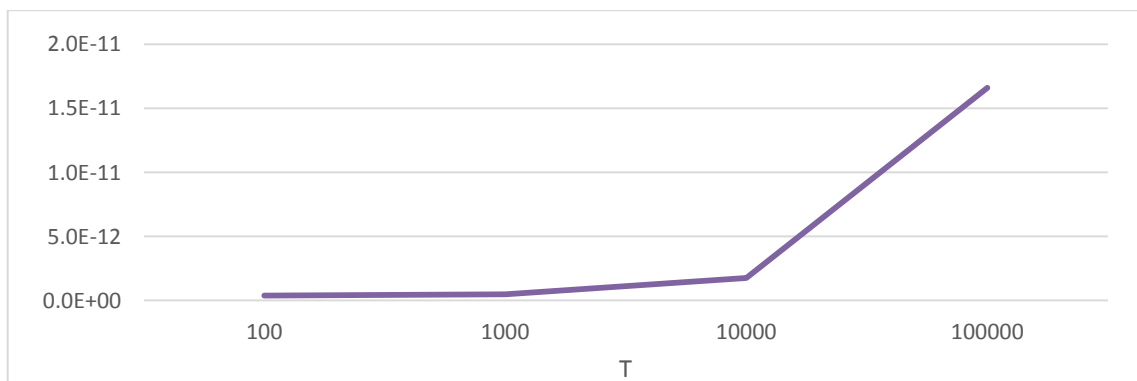
Eelnevatelt joonistelt 6.13 - 6.16 on selgelt näha, et Pareto kahjudega aeg laostumiseni jaotuse saba on raskem kui Weibulli oma. Mõlema ρ väärtuse ja parameetrite a korral

koondub suhe üheks altpoolt, mis näitab, et Pareto aeg laostumiseni jaotuse saba on raskem kui Weibulli oma (vt peatükki 6.1).

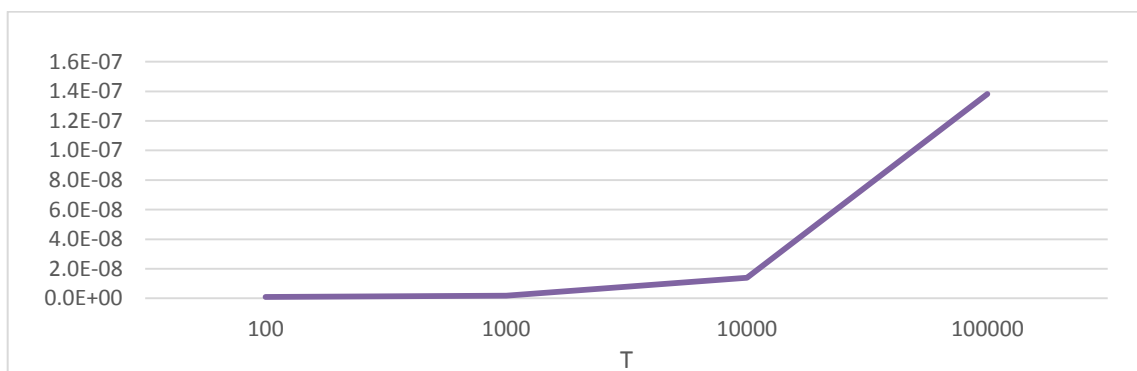
Järgnevad joonised 6.17 – 6.20 ilmestavad tabelis 2 (vt lisa 5) olevaid andmeid Pareto ja Lognormaalse aeg laostumiseni saba raskuste kohta.



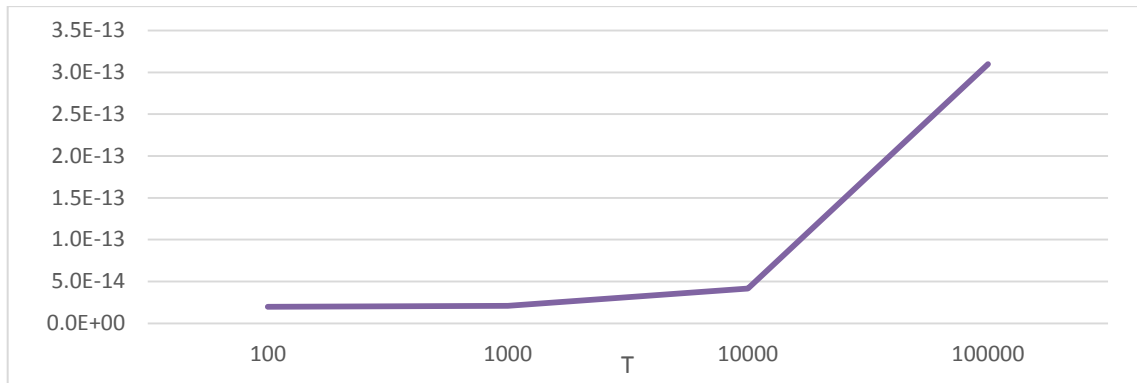
Joonis 6.17. Pareto ja Lognormaalse aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 1/2$, kahjude keskväärts 2



Joonis 6.18. Pareto ja Lognormaalse aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 1/2$, kahjude keskväärts 3



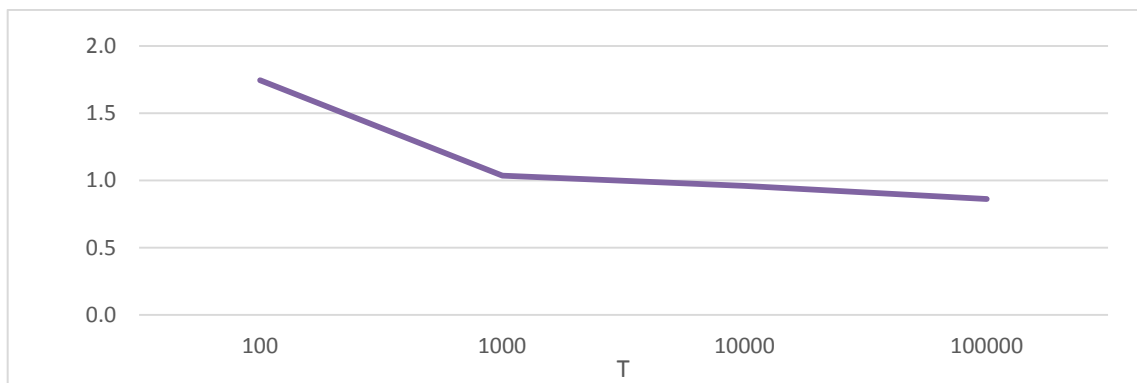
Joonis 6.19. Pareto ja Lognormaalse aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 3/4$, kahjude keskväärts 2



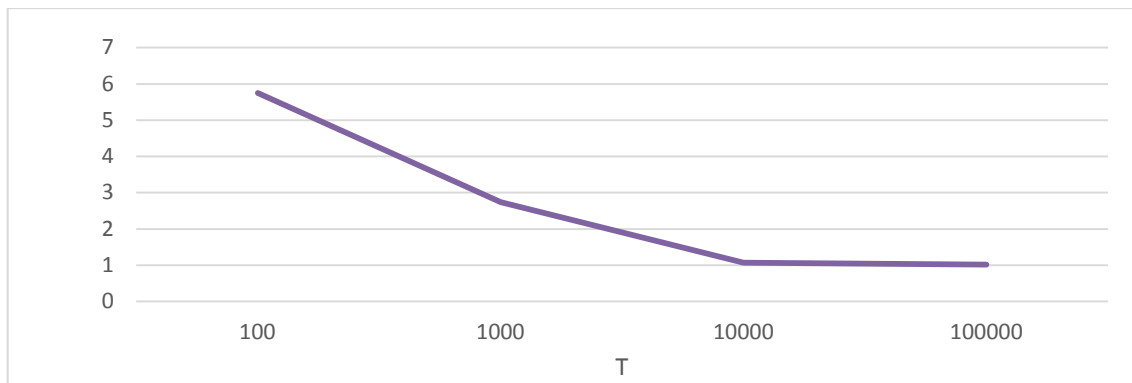
Joonis 6.20. Pareto ja Lognormaalse aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus, $\rho = 3/4$, kahjude keskvärtus 3

Eelnevateelt joonistelt 6.17 - 6.20 on selgelt näha, et Pareto kahjudega aeg laostumiseni saba on raskem kui Lognormaalse oma ja see ei sõltu erinevatest kahjude keskvärtustest ja erinevatest ρ väärtustest. Mõlema ρ väärtuse ja parameetrite a korral koondub suhe üheks altpoolt, mis näitab, et Pareto aeg laostumiseni saba on raskem kui Lognormaalse oma.

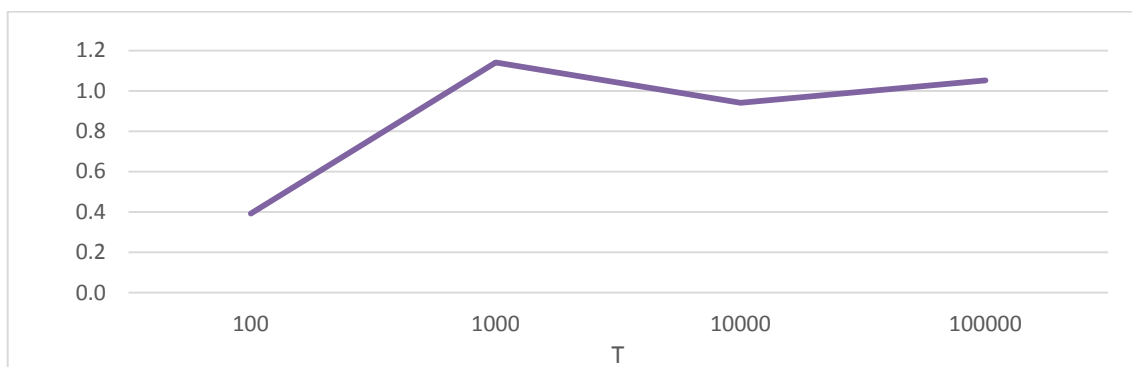
Järgnevad joonised 6.21 – 6.24 ilmestavad tabelis 3 (vt lisa 5) olevaid andmeid Weibulli ja Lognormaalse aeg laostumiseni saba raskuste kohta.



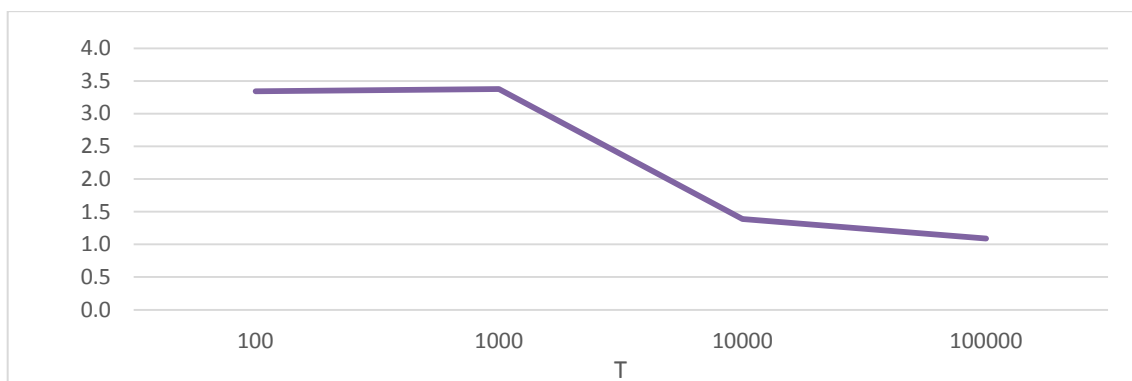
Joonis 6.21. Weibulli ja Lognormaalse aeg laostumiseni sabade raskuste võrdlus, $\rho = 1/2$, kahjude keskvärtus 2



Joonis 6.22. Weibulli ja Lognormaalse aeg laostumiseni sabade raskuste võrdlus, $\rho = 1/2$, kahjude keskväärtus 3



Joonis 6.23. Weibulli ja Lognormaalse aeg laostumiseni sabade raskuste võrdlus, $\rho = 3/4$, kahjude keskväärtus 2

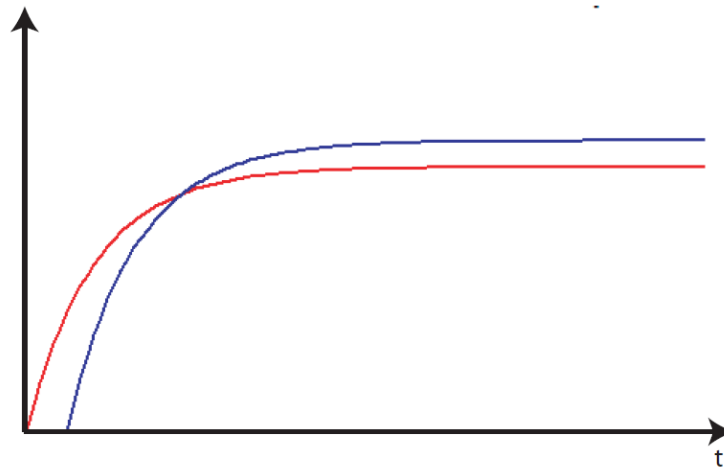


Joonis 6.24. Weibulli ja Lognormaalse aeg laostumiseni sabade raskuste võrdlus, $\rho = 3/4$, kahjude keskväärtus 3

Koondumine üheks toimub jooniste 6.21 - 6.22 ja 6.24 põhjal ülevalt poolt ja selle alusel võib öelda, et Weibulli aeg laostumiseni jaotusel on kergem saba kui Lognormaalsel.

Joonise 6.23 põhjal näib, et koondumine üheks toimub altpoolt. See võib olla tingitud asjaolust, et simuleeritud ajahetkede korral satume juhuslikult piirkonda, kus aeg

laostumiseni jaotusfunktsioonide väärtuste suhe on tõepoolest üle ühe ning hiljem kui see on alla ühe ei võimalda meil seda näha liialt väike simuleerimistäpsus. Kui näiteks kujutada ühel ja samal joonisel Weibulli (tähistatud punase joonega) ja Lognormaalse (tähistatud sinisega joonega) jaotusfunktsioone (mõlemad keskvaartusega 2) siis näeme, et algselt on Weibulli jaotusfunktsioon samuti domineerivaks, ent suurte argumentide korral on olukord vastupidine (joonis 6.25).



Joonis 6.25. Weibulli ja Lognormaalse jaotusfunktsioonide kujutamine kahjude keskmise 2 korral.

KASUTATUD KIRJANDUSE LOETELU

1. Asmussen, S., Albrecher, H. Ruin Probabilities. Second Edition. World Scientific Publishin Co: 2010, 602 pp.
2. Dickson, C. M. D. Insurance Risk and Ruin. Cambridge University Press, 2010, 229 pp.
3. Kaasik, A. Estimating ruin probabilities in the Cramer-Lundberg model with heavy-tailed claims. Doktoritöö. TÜ kirjastus: 2009, 91 lk.
4. Théorie du risque. Kättesaadav:
<http://eric.cabrol.free.fr/dotclear/index.php/2011/01/04/1069-theorie-du-risque>, külastatud 04.05.2014
5. Dickson, C. M. D., Waters. R. H. The distribution of the time to ruin in the classical risk model. Astin Bulletin, 2002, Vol. 32, no 2, 299 – 313 pp.
6. Rojas-Nandayapa, L. Risk Probabilities: Asymptotics and simulation, PhD Dissertation. 2008, 127 pp.
7. Kaasik, A. Jaotused finantsmatemaatikas. Konspekt. Tartu Ülikool.
8. Rojas-Nandayapa, L., Asmussen, S. Efficient simulation of finite horizon problems in queueing and insurance risk. Queueing Systems. Springer: 2007, Vol. 57, 85 – 97 pp.
9. Käärik, M. Kahjukindlustuse konspekt. Tartu Ülikool. Kättesaadav:
<http://www-1.ms.ut.ee/ained/kahjukindlustus/2006/kk2006.pdf>, külastatud 04.05.2014.

LISA 1 Algoritmi väljund lõpliku ajaga laostumistõenäosuse leidmiseks

Algoritmi väljund lõpliku ajaga laostumistõenäosuse simuleerimiseks programmis R.

```
#pareto generaator
pgen_u=function(n,a){
return((1/(runif(n)**(1/a)))-1)
}
#weibulli generaator (a=beeta)
wgen_u=function(n,a){
return((-log(runif(n)))*(1/a))
}
#lognormaalse generaator (a=sigma)
lgen_u=function(n,a){
return(qlnorm(runif(n), meanlog = 0, sdlog = a, lower.tail = TRUE))
}
#####tavalised jaotusfunktsiooni täiendfunktsioonid
#pareto
pkvantiil=function(x,a){
return((1+x)**(-a))
}
#weibull
wkvantiil=function(x,b){
return(exp(-(x**(b))))
}
#lognormal
lkvantiil=function(x,sigma){
return(1-plnorm(x,sdlog=sigma))
}
ptm=proc.time()
asmussen_T2cv=function(roo,dist,a,distmean,kordusi,u,T){      #laostumine      lõpliku
ajahorisondi korral, kontrollmuutujaks J
generaator=eval(as.symbol(paste(as.character(dist),"gen_u",sep="")))
kvantiil=eval(as.symbol(paste(as.character(dist),"kvantiil",sep="")))
test=1000
```

```

testvec=rep(NA,test)
Jvec=rep(NA,test)
for (j in 1:test){
N=rpois(1,roo*T/distmean)#kahjude arv
if (N==1){ #kui ainult üks kahju
W=max(u+runif(1)*T) #vajalik lävend suurimale kahjule
testvec[j]=kvantiil(W,a)
Jvec[j]=1
}else{
J=sample(N,1) #suurima kahju number
Jvec[j]=J
claims=generaator(N-1,a) #kahjud ise (peale suurima)
m=max(claims) #suurim kahju ülejäänute hulgas
times=sort(runif(N)*T) #kahjude ajad
if (J==1){ #kui suurim on esimene
process=times-cumsum(c(0,claims))
W=max(u+min(process),m) #vajalik lävend suurimale kahjule
}else if(J==N){ #kui suurim on viimane
process=times[1:(N-1)]-cumsum(claims)
W=max(((u+min(process))>0)*(u+times[N]-sum(claims)),m) #kui laostumine on juba
toimunud siis on vaja vaid suurim kahju ületada
}else{
process1=times[1:(J-1)]-cumsum(claims[1:(J-1)]) #enne suurimat kahjut
process2=-sum(claims[1:(J-1)])+times[J:N]-cumsum(c(0,claims[J:(N-1)])) #pärast
suurimat kahjut
W=max(((u+min(process1))>0)*(u+min(process2)),m) #kui laostumine on juba toimunud
siis on vaja vaid suurim kahju ületada
}
testvec[j]=N*kvantiil(W,a)
}
}
c=-cov(testvec,Jvec)/var(Jvec)
EJ=(roo*T/distmean+1)/2
tulem=rep(NA,kordusi)

```

```

for (j in 1:kordusi){
N=rpois(1,roo*T/distmean) #kahjude arv
if (N==1){ #kui ainult üks kahju
W=max(u+runif(1)*T) #vajalik lävend suurimale kahjule
tulem[j]=kvantiil(W,a)+c*(1-EJ)
}else{
J=sample(N,1) #suurima kahju number
claims=generaator(N-1,a) #kahjud ise (peale suurima)
m=max(claims) #suurim kahju ülejäänute hulgas
times=sort(runif(N)*T) #kahjude ajad
if (J==1){ #kui suurim on esimene
process=times-cumsum(c(0,claims))
W=max(u+min(process),m) #vajalik lävend suurimale kahjule
}else if(J==N){ #kui suurim on viimane
process=times[1:(N-1)]-cumsum(claims)
W=max(((u+min(process))>0)*(u+times[N]-sum(claims)),m) #kui laostumine on juba
toimunud siis on vaja vaid suurim kahju ületada
}else{
process1=times[1:(J-1)]-cumsum(claims[1:(J-1)]) #enne suurimat kahjut
process2=-sum(claims[1:(J-1)])+times[J:N]-cumsum(c(0,claims[J:(N-1)])) #pärast
suurimat kahjut
W=max(((u+min(process1))>0)*(u+min(process2)),m) #kui laostumine on juba toimunud
siis on vaja vaid suurim kahju ületada
}
tulem[j]=N*kvantiil(W,a)+c*(J-EJ)
}
}
return(tulem)
}
tulemus=asmussen_T2cv(roo=3/4,dist="l",a=sqrt(2*log(2)),distmean=2,kordusi=1000000,
u=562,T=100000)
mean(tulemus)
sd(tulemus)

```

`proc.time() - ptm`

LISA 2 Algoritmi väljund lõpmatu ajaga laostumistõenäosuse leidmiseks

Algoritmi väljund lõpmatu ajaga laostumistõenäosuse simuleerimiseks programmis R.

```
#int tail pareto generaator (a=alfa originaal jaotusel)
pintgen=function(n,a){
return((1/(runif(n)**(1/(a-1))))-1)
}
#weibulli generaator (a=beeta)
wintgen=function(n,a){
c=gamma(1/a)/a/gamma(1+1/a)
return((qgamma(runif(n)/c,1/a)**(1/a))
}
#lognormaalse generaatori abifunktsioon
piirid=function(u,x,sigma){
if (lintkvantiil(x,sigma)<u) return(c(sqrt(x)*(x>10),x))
else piirid(u,x**2,sigma)
}
#lognormaalse generaator (a=sigma)
lintgen=function(n,a){
arvud=rep(NA,n)
for (i in 1:n){
u=runif(1)
arvud[i]=uniroot(function(x) lintkvantiil(x,a)-u,piirid(u,10,a))$r
}
return(arvud)
}
#lognormaalse generaator 2(a=sigma)
lintgen2=function(n,a){
arvud=rep(20,n)
u=runif(n)
for (i in 1:100){
arvud=pmax(arvud+(lintkvantiil(arvud,a)-u)*exp((a**2)/2)/(1-pnorm(log(arvud)/2)),0)
}
return(arvud)
```

```

}
#int tail pareto jaotusfunktsiooni täiendfunktsioon
pintkvantiil=function(x,a){
return((1+x)**(-a+1))
}
#int tail weibulli jaotusfunktsiooni täiendfunktsioon
wintkvantiil=function(x,b){
1-pgamma(x**b,1/b)*gamma(1/b)/b/gamma(1+1/b)
}
#int tail lognormaalse jaotusfunktsiooni täiendfunktsioon
lintkvantiil=function(x,sigma){
1-x*exp(-sigma**2/2)*(1-pnorm(log(x)/sigma))-pnorm(log(x)/sigma-sigma)
}
#dist ja a on originaal jaotuse kohta käivad
#realiseeritud koos kontrollmuutujatega (hajuvuse vähendamiseks)
asmussen_N=function(roo,dist,a,kordusi,u){
generaator=eval(as.symbol(paste(as.character(dist),"intgen",sep="")))
kvantiil=eval(as.symbol(paste(as.character(dist),"intkvantiil",sep="")))
test=1000
x=rep(NA,test)
y=rgeom(test,1-roo)+1 #N* asmusseni artiklis
for (j in 1:test){
if(y[j]==1) x[j]=roo*kvantiil(u,a)
else{
valim=generaator(y[j]-1,a)
m=max(valim)
s=sum(valim)
x[j]=roo*y[j]*kvantiil(max(m,u-s),a)
}
}
c=-cov(x,y)/var(y)
EN=1/(1-roo)
tulem=rep(NA,kordusi)
n=rgeom(kordusi,1-roo)+1 #N* asmusseni artiklis

```

```

for (i in 1:kordusi){
if(n[i]==1) tulem[i]=roo*kvantiil(u,a)+c*(n[i]-EN)
else{
valim=generaator(n[i]-1,a)
m=max(valim)
s=sum(valim)
tulem[i]=roo*n[i]*kvantiil(max(m,u-s),a)+c*(n[i]-EN)
}
}
#print(roo*kvantiil(u,a)/(1-roo))
#return(1.96*sd(tulem)/mean(tulem)/sqrt(kordusi)) #standardviga
return(sd)
}
t=asmussen_N(roo=3/4,dist="p",a=3,kordusi=200000,u=2.6990e16)
mean(t)
sd(t)

```

LISA 3 Laostumistõenäosuste hinnangud $\Psi(u,t)$

Laostumistõenäosuse hinnangud $\Psi(u, t)$ erinevate jaotuste ja nende parameetrite korral koos usalduspiiridega.

Tabeli pealkirjade selgitus:

- keskmine – lõpliku ajaga simulatsiooni keskmine laostumistõenäosus;
- n – korduste arv.

Juhusliku valimi (suurusega $n =$ korduste arv) standardviga sõltub valimi suurusest (n) ja standardhälbest. Valimi suuruse kasvades standardviga kahaneb. Suuremad valimid annavad täpsemaid hinnanguid. Usalduspiirid on leitud olulisuse nivool $\alpha = 0,05$.

1. Laostumistõenäosuse hinnangud Pareto kahjujaotuse korral (tabelid 1 – 4).

Tabel 1. $\Psi(u, t)$, $n = 200000$, $\rho = 1/2$, $a = 3/2$, kahjude keskmine on 2, kahjud Pareto jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	2,50144e-14	4,739883e-15	1,05987e-17	$\mp 2,077345e-17$
1000	2,50198e-13	1,574357e-14	3,52037e-17	$\mp 6,899924e-17$
10000	2,501708e-12	4,997734e-14	1,117527e-16	$\mp 2,190353e-16$
100000	2,501854e-11	1,579898e-13	3,532759e-16	$\mp 6,924208e-16$

Tabel 2. $\Psi(u, t)$, $n = 200000$, $\rho = 1/2$, $a = 4/3$, kahjude keskmine on 3, kahjud Pareto jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	1,669429e-19	3,777341e-20	8,446391e-23	$\mp 1,655493e-22$
1000	1,669927e-18	1,280909e-19	2,864199e-22	$\mp 5,61383e-22$
10000	1,670137e-17	4,093455e-19	9,153243e-22	$\mp 1,794036e-21$
100000	1,670042e-16	1,292885e-18	2,890979e-21	$\mp 5,666319e-21$

Tabel 3. $\Psi(u, t)$, $n = 200000$, $\rho = 3/4$, $a = 3/2$, kahjude keskmine on 2, kahjud Pareto jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	1,391158e-15	2,188605e-16	4,893869e-19	$\mp 9,591984e-19$
1000	1,391132e-14	7,153475e-16	1,599566e-18	$\mp 3,135149e-18$
10000	1,391254e-13	2,272801e-15	5,082137e-18	$\mp 9,960989e-18$
100000	1,391207e-12	7,204581e-15	1,610993e-17	$\mp 3,157547e-17$

Tabel 4. $\Psi(u, t)$, $n = 200000$, $\rho = 3/4$, $a = 4/3$, kahjude keskmine on 3, kahjud Pareto jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	3,088207e-21	5,856721e-22	1,309603e-24	$\mp 2,566821e-24$
1000	3,088283e-20	1,942619e-21	4,343829e-24	$\mp 8,513905e-24$
10000	3,087894e-19	6,164406e-21	1,378403e-23	$\mp 2,70167e-23$
100000	3,087968e-18	1,95489e-20	4,371266e-23	$\mp 8,567682e-23$

2. Laostumistõenäosuse hinnangud Lognormaalse kahjujaotuse korral (tabelid 5 – 6).

Tabel 5. $\Psi(u, t)$, $n = 200000$, $\rho = 1/2$, $a = \sqrt{(2 \log(2))}$, kahjude keskmine on 2, kahjud Lognormaalse jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	3,40533e-06	1,392248e-06	3,113162e-09	$\mp 6,101797e-09$
1000	9,622459e-06	7,844881e-06	1,754169e-08	$\mp 3,438171e-08$
10000	1,005672e-05	4,39028e-05	9,816965e-08	$\mp 1,924125e-07$
100000	1,032097e-05	0,0001514396	3,386292e-07	$\mp 6,637132e-07$

Tabel 6. $\Psi(u, t)$, $n = 200000$, $\rho = 1/2$, $a = \sqrt{(2 \log(3))}$, kahjude keskmine on 3, kahjud Lognormaalse jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	4,40958e-07	1,096535e-07	2,451928e-10	$\mp 4,805778e-10$
1000	3,498101e-06	6,558009e-07	1,466415e-09	$\mp 2,874174e-09$
10000	9,493671e-06	6,079738e-06	1,359471e-08	$\mp 2,664563e-08$
100000	1,004995e-05	4,119869e-05	9,212307e-08	$\mp 1,805612e-07$

Tabel 7. $\Psi(u, t)$, $n = 1000000$, $\rho = 3/4$, $a = \sqrt{2\log(2)}$, kahjude keskmine on 2, kahjud Lognormaalse jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	1,377645e-06	4,817629e-07	4,817629e-10	\mp 9,442553e-10
1000	7,563177e-06	4,934472e-06	4,934472e-09	\mp 9,671565e-09
10000	1,005095e-05	2,639019e-05	2,639019e-08	\mp 5,172477e-08
100000	1,009904e-05	9,975728e-05	9,975728e-08	\mp 1,955243e-07

Tabel 8. $\Psi(u, t)$, $n = 1000000$, $\rho = 3/4$, $a = \sqrt{2\log(3)}$, kahjude keskmine 3, kahjud Lognormaalse jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	1,590042e-07	3,285646e-08	3,285646e-11	\mp 6,439866e-11
1000	1,478679e-06	2,352686e-07	2,352686e-10	\mp 4,611265e-10
10000	7,505503e-06	2,250449e-06	2,250449e-09	\mp 4,41088e-09
100000	1,003416e-05	2,150381e-05	2,150381e-	\mp 4,214747e-08

3. Laostumistõenäosuse hinnangud Weibulli kahjujaotuse korral (tabelid 9 – 12).

Tabel 9. $\Psi(u, t)$, $n = 1000000$, $\rho = 1/2$, $a = 1/2$, kahjude keskmine on 2, kahjud Weibulli jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	5,916283e-06	2,938917e-05	2,938917e-08	\mp 5,760278e-08
1000	9,906639e-06	0,0001335514	1,335514e-07	\mp 2,617607e-07
10000	9,604291e-06	0,0002888295	2,888295e-07	\mp 5,661057e-07
100000	8,849567e-06	0,0004035892	4,035892e-07	\mp 7,910349e-07

Tabel 10. $\Psi(u, t)$, $n = 1000000$, $\rho = 1/2$, $a = 0.41565$, kahjude keskmine 3, kahjud Weibulli jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	2,536761e-06	2,570229e-06	5,747206e-09	\mp 1,126452e-08
1000	9,589893e-06	2,895985e-05	6,47562e-08	\mp 1,269222e-07
10000	1,012132e-05	8,479947e-05	1,896174e-07	\mp 3,7165e-07
100000	1,020567e-05	0,0003641501	8,142644e-07	\mp 1,595958e-06

Tabel 11. $\Psi(u, t)$, $n = 1000000$, $\rho = 3/4$, $a = 1/2$, kahjude keskmine on 2, kahjud Weibulli jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	5,428462e-07	3,326296e-06	3,326296e-09	$\mp 6,51954e-09$
1000	8,656327e-06	0,0006254787	6,254787e-07	$\mp 1,225938e-06$
10000	9,483682e-06	0,0008264037	8,264037e-07	$\mp 1,619751e-06$
100000	1,065518e-05	0,002642993	2,642993e-06	$\mp 5,180266e-06$

Tabel 12. $\Psi(u, t)$, $n = 1000000$, $\rho = 3/4$, $a = 0.41565$, kahjude keskmine on 3, kahjud Weibulli jaotusega

T	keskmine	standardhälve	standardviga	usalduspiirid
100	5,318943e-07	5,220395e-07	5,220395e-10	$\mp 1,023197e-09$
1000	5,001572e-06	3,231612e-05	3,231612e-08	$\mp 6,333959e-08$
10000	1,04447e-05	0,0003109829	3,109829e-07	$\mp 6,095264e-07$
100000	1,09649e-05	0,0008480704	8,480704e-07	$\mp 1,662218e-06$

LISA 4 Aeg laostumiseni hinnangud

Tabel 1. Aeg laostumiseni simuleeritud saba väärtused Pareto kahjujaotuse erinevate parameetrite korral

T	$\Psi(u, t)/\Psi(u), \rho = 1/2$		$\Psi(u, t)/\Psi(u), \rho = 3/4$	
	Keskmine, $a = 3/2$	Keskmine, $a = 4/3$	Keskmine, $a = 3/2$	Keskmine, $a = 4/3$
100	2,5008073e-09	1,6685947e-14	1,3903919e-10	3,0878334e-16
1000	2,5013472e-08	1,6690925e-13	1,3903659e-09	3,0879094e-15
10000	2,5010752e-07	1,6693023e-12	1,3904878e-08	3,0875204e-14
100000	2,5012212e-06	1,6692074e-11	1,3904409e-07	3,0875944e-13

Tabel 2. Aeg laostumiseni simuleeritud saba väärtused Lognormaalse kahjujaotuse erinevate parameetrite korral

T	$\Psi(u, t)/\Psi(u), \rho = 1/2$		$\Psi(u, t)/\Psi(u), \rho = 3/4$	
	Keskmine, $a = \sqrt{2\log(2)}$	Keskmine, $a = \sqrt{2\log(3)}$	Keskmine, $a = \sqrt{2\log(2)}$	Keskmine, $a = \sqrt{2\log(3)}$
100	3,3792255e-01	4,4076406e-02	0,137339708	1,5790063e-02
1000	9,5486953e-01	3,4965625e-01	0,753985622	1,4684162e-01
10000	9,9796274e-01	9,4894956e-01	1,001995827	7,4534111e-01
100000	1,0241852e+00	1,0045530e+00	1,006789999	9,9645180e-01

Tabel 3. Aeg laostumiseni simuleeritud saba väärtused Weibulli kahjujaotuse erinevate parameetrite korral

T	$\Psi(u, t)/\Psi(u), \text{ roo}=1/2$		$\Psi(u, t)/\Psi(u), \text{ roo}=3/4$	
	Keskmine, $a = 1/2$	Keskmine, $a = 0,41565$	Keskmine, $a = 1/2$	Keskmine, $a = 0,41565$
100	5,8992813e-01	2,5342116e-01	5,3920763e-02	5,2761011e-02
1000	9,8781701e-01	9,5802553e-01	8,5983056e-01	4,9612864e-01
10000	9,5766910e-01	1,0111148e+00	9,4201151e-01	1,0360572e+00
100000	8,8241358e-01	1,0195413e+00	1,0583761e+00	1,0876582e+00

LISA 5 Aeg laostumiseni saba raskuste võrdlused

Tabel 1. Aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus – Pareto ja Weibulli kahjujaotuste korral

T	$\rho = 1/2$		$\rho = 3/4$	
	Keskmine = 2	Keskmine = 3	Keskmine = 2	Keskmine = 3
100	4,2391728e-09	6,5842754e-14	2,5785835e-09	5,8524910e-15
1000	2,5321969e-08	1,7422213e-13	1,6170231e-09	6,2240095e-15
10000	2,6116278e-07	1,6509523e-12	1,4760837e-08	2,9800675e-14
100000	2,8345225e-06	1,6372140e-11	1,3137493e-07	2,8387543e-13

Tabel 2. Aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus – Pareto ja Lognormaalse kahjujaotuste korral

T	$\rho = 1/2$		$\rho = 3/4$	
	Keskmine = 2	Keskmine = 3	Keskmine = 2	Keskmine = 3
100	7,4005340e-09	3,7856868e-13	1,0123743e-09	1,9555548e-14
1000	2,6195696e-08	4,7735238e-13	1,8440218e-09	2,1028842e-14
10000	2,5061810e-07	1,7591055e-12	1,3877182e-08	4,1424260e-14
100000	2,4421572e-06	1,6616419e-11	1,3810634e-07	3,0985888e-13

Tabel 3. Aeg laostumiseni saba raskuste võrdlus – Weibulli ja Lognormaalse kahjujaotuste korral

T	$\rho = 1/2$		$\rho = 3/4$	
	Keskmine = 2	Keskmine = 3	Keskmine = 2	Keskmine = 3
100	1,7457495e+00	5,7495876e+00	3,9260869e-01	3,3414059e+00
1000	1,0345047e+00	2,7399068e+00	1,1403806e+00	3,3786649e+00
10000	9,5962410e-01	1,0655095e+00	9,4013516e-01	1,3900444e+00
100000	8,6157622e-01	1,0149204e+00	1,0512382e+00	1,0915312e+00

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina,

Janika Allingu,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

AEG LAOSTUMISENI RASKETE SABADEGA KAHJUJAOTUSTE KORRAL,

mille juhendaja on

Ants Kaasik,

- 1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
- 1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **19.05.2014**