1. vihk

E. MALTENEK JA M. KESKÜLA

# FÜÜSIKA

## ÕPIRAAMAT KESKKOOLILE

TEINE ÜMBERTÖÖTATUD
JA TÄIENDATUD TRÜKK

## ESIMENE KÖIDE

SISSEJUHATUS, MEKAANIKA JA SOOJUS

1924
TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS

E. MALTENEK JA M. KESKÜLA

# FÜÜSIKA

## ÕPIRAAMAT KESKKOOLILE

TEINE ÜMBERTÖÖTATUD
JA TÄIENDATUD TRÜKK

## ESIMENE KÖIDE

SISSEJUHATUS, MEKAANIKA JA SOOJUS



1924
TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS

Tallinna Eesti Kirjastus-Ühisuse trükikoda, Pikk tän. 2.

# Teise trüki eessõna.

Ainult paariks aastaks jatkunud esimese trüki hea menu ergutas mind käesoleva õpiraamatu põhjalikule ümbertöötamisele. Esimese trüki puhul ilmunud ainus arvustus andis kahjuks vähe asjalikku; ta vast ainult pööras tähelepanu tõeolule, et mõned osad olid väljendatud liig „vesiselt“. Asjalikumad olid need märkused ja soovid, mis avaldati autoritele isiklikult; ka need käisid peaasjalikult väljendusviisi ja keele kohta. Ümbertöötamisel muutus sellepärast ainult raamatu väline külg, kuna sisuliselt tulid juure ainult mõningad väiksed osad (gaaside kineetiline teooria, Doppleri printsiip j.n.e.).

Kirjeldustel katsusin käia otsekohesemat, lühemat teed; võimaluse järele kärpisin kõrvalise tähtsusega kohti. Et hoiduda keele raskepärasuse eest, mis tundus juba esimesel trükil, tuli kohati ohverdada üleliigset täpsust; „üleliigset“ nimelt selles mõttes, et õpiraamatul ei või olla ka sisuliselt seda täpsust, mida nõutakse näiteks teaduslikult töölt. Hoolimata kärpimisest ei lühendunud ka teine trükk konspektiks. Meie oludes peab olema võimalus raamatu järele õppida, mitte ainult korrata!

Oskussõnades on mõned väiksemad muudatused J. Lang'i ja O. Sulla sõnastiku sihis. Seda nõudis keele ühtlustamise tarvidus. Siiski, üksikud tähtsamad sõnad erinevad nimetatud sõnastikust (jõud, heli, õõtse j.n.e.), sest nende muutmine ei näinud olevat küllalt põhjendatud.

Induktiivse metoodi läbiviimiseks tuli kohati muuta ka aine järjekorda. Et aga ilmaaegu mitte raskendada mõlema trüki õpiraamatute paralleel-tarvitamist, jäeti üldine järjekord võimaluse järele endiseks. Ka üksikute jagude ümberpaigutamine näis olevat otstarbetu, olgugi et meie üldine füüsikaõppekava nõuab teist järjekorda: Peale mekaanika esimest (külgjoonega märgitud) kursust võib teadagi ka praeguse raamatu abil õpetada näiteks „elektrit“ enne „valgust“ j.n.e. Seni kuni meil puudub füüsika üksikasjaline õppekava, ei ole võimalik täpselt määrata ka mõlema kursuse vahet. Kuna praeguse konspektiivse õppekava järele näib kuuluvat teise kursusse peaasjalikult puht-teoreetiline osa, siis suurendasin esimese kursuse ulatust teise kursuse kulul; võimalik, et õpetajal tuleb teda veelgi suurendada, mis aga ei tohiks sünnitada suuremaid raskusi.

Tallinn, jaanuar 1924.

E. Maltenek.

# Esimese trüki eessõna.

Juba mõne aasta eest kavatsesid autorid kokku seada füüsika õpiraamatu, mida ajakohases keskkoolis õppevahendina võiks tarvitada. Füüsika oskussõnade loomise ja ühtlustamise algul, sel ajal kui veel keskkooli kindel programm puudus, olid silmnähtavad need raskused, millest nimetatud kavatsuse teostamisel pidi üle saama. Kui autorid siiski otsustasid tööle asuda ja raamatu välja anda, siis sündis see peaasjalikult sellepärast, et tarvidus seesuguse õpiraamatu järele suur oli ja et neil lootus oli puuduste ja vigade kõrvaldamisega käesolevat raamatut ajajooksul keskkooli nõuetele vastavaks õpiraamatuks arendada.

Võiks ehk arvata, et mõne hea võõrakeelse õpiraamatu tõlkimine otstarbekohasem oleks olnud kui uue raamatu kirjutamine. Kuid tarvis on ainult tutvuneda näiteks kas või saksakeelsete nii rohkearvuliste füüsika õpiraamatute sisuga, et selgusele jõuda, kui mitmet viisi võib käsitada ühte ja sama ainet ja kuidas nii ühel kui teisel neist raamatutest on omad varjuküljed. Pealegi tuleb arvesse võtta, et keele iseäralduste, eriti aga meie tehniliste mõistete väljendamiseks veel liig lühikest aega areneda võinud keele raskepärasuse tõttu võõrakeelse raamatu head küljed — nagu avalduste selgus, piltlikkus, lühisus — tõlkes kergesti oleksid võinud kaduma minna, nii et tõlge ehk orginaali poleks mitte väärinud. Sellepärast olid autorid arvamisel, et otstarbekohasem on aineid vabalt, meie keelepäraselt ja oma parema arusaamise järele käsitleda.

Õpiraamatu ainete valimisel ja osalt ka järjestamisel on aluseks võetud võõrakeelsed, peaasjalikult sellekohased saksakeelsed õpiraamatud ja viimaste sisu füüsika uuemate saavutustega sel määral täiendatud kui see keskkooli kursuses on mõeldav. Praeguse keskkooli jaoks on raamatu sisu ehk liig laialdane. Kuid peaks arvama, et keskkooli uus ajakohane füüsika programm mitte kitsam ei võiks olla kui vastavate Saksamaa koolide oma; sarnasel korral peaks käesolev õpiraamat meie keskkooli tulevasele programmile vastama.

Koolides, kus füüsika õpetamine kahes astmes sünnib, on keskkooli esimene kursus teisest kursusest musta joonega teksti kõrval eraldatud. Esimese astme jaoks moodustavad sarnaselt märgitud kohad nagu iseseisva õpiraamatu. Seesugusel jaotusel on see paremus, et teise astme õpilasel alati silma ees on esimesel astmel läbivõetud ained, mis hõlbustab tarviliku kordamise ja ülevaate. Pealegi tuleb üks seesugune raamat väiksem ja odavam kui kaks eriraamatut mõlema astme jaoks. Kuid raamat on tarvitatav ka neis keskkoolides, kus füüsikat alles ühes ainsamas astmes õpetatakse. Sel juhusel tuleks alguses läbi võtta sissejuhatuse ja mekaanika esimene kursus, siis järgmised osad täielikult ning lõpuks mekaanika teine kursus.

Olles arvamisel, et füüsika õpetus keskkoolis mitte ainult üksteisest rippumata seaduste ja katsete kirjeldamine ei tohiks olla, on käesolevas raamatus, iseäranis elektri- ja valgusõpetuses, katsutud anda ülevaatlikku pilti neist ettekujutustest, millel põhjenevad ajakohased teooriad ja mis sideme loovad muidu nii eraldi seisvate üksikute nähtuste vahel. Kuigi võimalik ei peaks olema nimetatud teoreetilist osa klassis läbi võtta, pakuks ta enam arenenud ja huvitatud õpilasele võimaluse sügavamale sisse tungida käsitletud ainesse ja annaks talle vähemalt üldpildi sellest, millega ta ülikoolis ehk üksikasjalisemalt tutvunema saab.

Et mitte raskendada ülevaatlikkust, on nimetatud teoreetilised osad, matemaatilised tõestused, näited jne. väiksema kirjaga trükitud; siia on ka mahutatud rida ülesandeid ühes lahendustega. Olgugi, et nad kaunis palju ruumi võtavad, olid autorid siiski arvamisel, et nad koolides, iseäranis aga iseõppijatele, küllalt kasulikud võiksid olla, näidates praktikast võetud nähtustel füüsika seaduste ja tähtsamate põhiformulite tarvitamist.

Oskussõnade tarvitamises on põhimõttelikult püütud kinni pidada J. Lang'i ja O. Sulla „Füüsika sõnastikust", kohati pidid aga autorid temast lahku minema; nii on tarvitatud sõnu jõud (pro tung), heli (pro hääl), õõtse (pro võnk) j. t.

Raamatu ilmumine, mis juba kevadeks 1921 oli kavatsetud, pidi raskete trükiolude pärast viibima; samal põhjusel, ühtlasi aga ka ostu kergendamiseks ilmub õpiraamat kolmes köites.

E. Maltenek.

Tallinn, 1921. M. Kesküla.

# Esimene jagu.

# Sissejuhatus.

## § 1. Füüsiline keha; mateeria; välis- ja siseilm.

1) Raudlatt, vihmapiisk, õhumull on k e h a d; raud, vesi, õhk on nende kehade a i n e d. Kõiki aineid nimetatakse ühiselt m a t e e r i a k s. Neid kehi, mis seisavad koos mateeriast, hüütakse a i n e l i s t e k s ehk f ü ü s i l i s t e k s k e h a d e k s; vastandiks viimastele on geomeetrilised ja teised mõeldavad kehad, mis ei sisalda mateeriat.

Keha üksikute osade aine võib olla üle kogu keha kas ühesugune või mitmesugune. Näiteks on vihmapiisa väiksematel kui osadel ikka üks ja sama aine — vesi, kuna savitükikeses on ühe osakese aineks liiv (räni), teise omaks — savi j. n. e. Kui keha väiksemate kui osakeste aine on igal pool üks ja sama, siis öeldakse, et keha aine on ü h t l a n e ehk h o m o g e e n; vastasel korral, et aine on m i t t e ü h t l a n e ehk h e t r o g e e n.

2) Füüsilised kehad moodustavad nähtava välisilma ehk looduse. Viimasest eraldi on olemas meie siseilm — mõtted ja tunded, mida inimene otsekohe ei saa vaadelda. Välis- ja siseilma vahemeheks on meie meeleorgaanid. Silma, kõrva, nina kaudu saame igast füüsilisest kehast mingi s u b j e k t i i v s e t u n d e; viimaste võrdlemisega, nende iseäralduste ja sarnaduste meelespidamisega loome oma siseilmas iga keha jaoks kindla ettekujutuse. Lapseeast peale oleme harjunud neid ettekujutusi kandma üle otse nende kehade peale, mis olid vastavate subjektiivsete tunnete tekitajaks. Selle tõttu näeme a s j u, tunneme nende lõhna, kuuleme heli j. n. e., ilma et meil selle juures tuleks meelegi, et meil ei ole nende asjade enestega mingit otsekohest ühendust ning et meie võime neid näha ja kuulda ainult niisugustena, missugustena meeleorgaanid neid kujutavad meile. Välisilmast võime tunda üldse ainult seda, mille jaoks on meie siseilmas vastav ettekujutus, s. t. subjektiivne tunne. Selle põhjal l o e t a k s e f ü ü s i l i s t e k s k e h a d e k s k õ i k i n e i d a s j u, m i s m e e l t e k a u d u v õ i v a d m e i s t e k i t a d a s u b j e k t i i v s e i d t u n d e i d.

Võib juhtuda, et tekivad subjektiivsed tunded, ilma et välisilmas oleks selleks põhjust: Silma vigastumise, järsu surve ehk tõuke juures näeme vahest heledat valgust, kuigi ümbrus on üsna pime; inimene, kellel on lõigatud ära käsi, jalg ehk mingi teine liige, võib tunda selles liikmes valu, olgugi et liiget ei ole olemaski. Seesugused nähtused tõstavad küsimuse, kas lugu ei ole ka kõigi teiste tunnetega samasugune, s. t. kas on välisilm meist eraldi üldse olemas?

Välisilma tõelise olemasolu kohta annab parema tunnistuse muu seas see asjaolu, et mitu inimest saab ühest ja samast asjast korraga ühesuguseid tundeid: pikseraksatusel näevad näiteks kõik inimesed esiteks välku ning kuulevad siis mürinat. Et inimesed ise on väga mitmesugused, siis sunnib see nähtus oletama, et välgu nägemiseks ja mürina kuulmiseks pidi olema üks üldine põhjus, mis ei olene inimeste omadustest, s. t. mis asub välisilmas.

Kuigi välisilm on tõeliselt olemas, ei ole meil mingit tõestust selleks, et asjad ise on just niisugused, nagu me neid näeme ja kuuleme. Kogemused näitavad, et inimesed ei saa näiteks punasest valgusest ühesuguseid tundeid: on olemas värvipimedaid, kes ei saa teha vahet punase ja sinise vahel; need peavad nägema punast ja sinist teisiti kui harilik inimene. Arvatavasti ei ole ühesugused ka need tunded, mida harilikud inimesed saavad näiteks lumevälja vaatamisel. Miks nad kõik nimetavad aga siis lund valgeks? Nad teevad seda ühesuguse kasvatuse tõttu: Kui laps näeb esimest korda lund, siis ütleb ema, et see on valge. Iga kord, kui välisasjad äratavad lapses samasugust värvitunnet, nimetab ta neid ka edespidi valgeks. Olgugi, et ühe ja sama ema lapsed saavad lumeväljast ehk isesuguseid tundeid, nad nimetavad nimelt ühise kasvatuse mõjul lume värvi ühe ja sama nimega. Nii on see siis ainult kasvatuse ja tiheda läbikäimise mõju, et inimesed nimetavad ühte asja ühe ja sama nimega.

§ 2. **Loodusteadused, keemia ja füüsika.** Looduses on kehi, mis avaldavad elu nähtusi (loomad ja taimed); need elavad ehk orgaanilised kehad moodustavad elava looduse. Kõik teised kehad, näiteks kivid, metallid j. n. e., on eluta ehk anorgaanilised; nemad moodustavad eluta looduse.

Nii elavas kui eluta looduses muudavad kehad alatasa oma asukohta ja olekut; neid muudatusi hüütakse loodusnähtusteks. Looduse kirjeldamine ja tema nähtuste tundmaõppimine on loodusteaduse ülesanne.

Loodusteadus erineb mitmeks eriteaduseks: elavat loodust käsitavad zooloogia, botaanika, füsioloogia j. n. e.; eluta loodust — füüsika, keemia, mineraloogia, geoloogia, astronoomia j. n. e. Astronoomia uurib taevakehi ja nende liikumist; geoloogia — mineraalide tekkimislugu, nende lademete iseäraldust ja leiduvust; mineraloogia — mitmest ainest kokkuseatud mineraalide koosseisu. Keemia valda kuuluvad kõik need nähtused, mille juures keha aine moondub üheks ehk mitmeks uueks aineks. Füüsika ülesanne on tundma õppida eluta looduse neid nähtusi, mille juures keha aine jääb muutmatuks. Elava looduse omadustest ja nähtustest käsitab füüsika ainult neid, mis on ühised kõigil kehil (näiteks kaaluvus, ulatavus).

Keemisel aurub vesi, külmetamisel hangub ta jääks; mõlemal juhusel muudab keha ainult oma välist kuju ehk, nagu öeldakse — oma olekut, kuna tema aine jääb endiseks (sest ka jää ja auru aine on ikkagi vesi). Puu ehk paberi põlemisel aga muutub mitte ainult keha kuju, vaid ka tema aine; sest põlemise produktidel — tuhal ja suitsul on sootumaks uus aine. Sellepärast kuulub vee keemine ja hangumine füüsika piirkonda, põlemine aga keemia omasse.

Traadi kaudu telegrafeerimisel, kivitüki purunemisel j. n. e. ei muutu traadi ja kivi aine: need on füüsika alla kuuluvad nähtused. Raudtraadi roostetamisel aga moondub traadi raud roosteks; lubjakivi põletamisel laguneb kivi kaheks uueks aineks — kaltsiumiks ja hapnikuks; viimased nähtused kuuluvad seege keemia piirkonda.

Füüsika ja keemia on teine-teisega väga lähedas ühenduses; sagedasti ulatab üks nendest teise piirkonda, nii et on raske öelda, kus lõpeb ühe ülesanne ja algab teise oma.

§ 3. **Füüsika käsitusviis ja abinõud.** 1) Füüsika töötab kahe tähtsa abinõuga: vaatluse ja katsega. Vaatluse all mõistetakse loodusnähtuste täpset jälgimist, mille otstarbeks on nähtuse igakülgne tundmaõppimine. Looduses sünnib nähtus tihtipeale aga nii kiirelt ja sedavõrd keerulistes oludes, et lihtsa vaatlemisega on võimatu teda lähemalt tundma õppida. Sel puhul tekitatakse nähtus kunstlikul teel ja soodsamates oludes, nii et näiteks nähtuse käik on aeglasem, tema olenevus teistest nähtustest on selgem j. n. e. Seesugust nähtuste kunstlikku sünnitamist nimetatakse katseks.

Vaatlemisel näeme näiteks, et päiksepaistel seisvast veenõust aurub vesi aegamööda ära; sellejuures ei jõua me aga selgusele, kas on aurumise põhjuseks päiksekiirtes peituv soojus või valgus, kas oleneb aurumise kiirus õhuõhust, veenõu kujust j. n. e. Samasugust aurumist võime aga katse teel sünnitada, nimelt veenõu lihtsa soendamisega; võime ette võtta seda soendamist näiteks õhupumba kupli all, kus õhu hõredust võime soovi järele muuta j. n. e. Alles seesugused katsed näitavad, mis on aurumise otsekoheseks põhjuseks ning milkombel ta oleneb teistest nähtustest.

2) Vaatlus ja katse näitavad, et loodusnähtused on omavahel seotud. Nii sünnitavad näiteks päiksekiired soojust; viimase ilmumisega hakkab auruma vesi; selle tagajärjel tõuseb aur õhku j. n. e. Selles nähtustereas on päiksekiired soojuse põhjuseks, soojus aurumise omaks j. n. e. Tegevust, millega katsutakse jõuda selgusele, kuidas vaadeldav nähtus oleneb tema põhjusest ning missuguses vahekorras on ta teiste, juba tuntud nähtustega, hüütakse juurdluseks. Kui on võimalik leida mõõtmise teel täpset vahekorda nähtuse ja tema põhjuse vahel, siis avaldatakse seda loodusseaduse näol.

Kui traadi ehk kumminööri otsa riputada koorem, siis venib traat pikemaks. Katse näitab, et traadi pikenemine oleneb koorma kaalust. Kui mõõta iga koormale vastavat pikenemist, siis selgub, et pikenemine on seda suurem, mida raskem koorem. Siin võib avaldada mõõtmiste resultaati seadusega: „pikenemine on proportsionaalne koormaga.“

3) Oleme ühe nähtuse seaduse õppinud tundma, s. t. oleme leidnud kuidas ta sünnib, siis tekib küsimus, mispärast ta sünnib nimelt nii. Selle küsimise peale vastust otsides läheme käsitletud nähtuse juurest teise, tema põhjuse juure, viimase juurest kolmanda juure j. n. e., kuni me lõpuks jõuame ühe nähtuseni, mille põhjust me ei tunne. Näiteks, vilja jahvatamine on võimalik selle tõttu, et veskikivid tiirlevad;

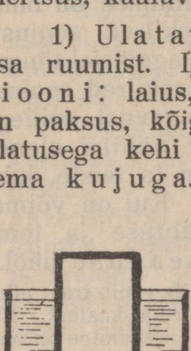
nende tiirlemise põhjuseks on vesiratta tiirlemine; viimane tiirleb vee langemise tagajärjel. Mille tagajärjel aga sünnib vee langemine? Selle küsimuse peale ei mõista me vastata; me võime ainult öelda, et peale vee langevad kõik teised kehad ning et me nimetame langemise põhjust raskuseks. Nüüd algavad arvamised ja oletused. Me oletame, et raskus on keha ja maakera vastastikune külgetõmbumine; et maakera ja keha vahel valitseb külgetõmbejõud, mis nagu välja venitatud vedru püüab neid lähendada teine-teisele. Selle oletusega sarnastame keha raskust meile mujalt tuntud *jõudude* nähtusega. Niisugust sarnastamist hüütakse nähtuse *seletamiseks*; kõiki neid oletusi aga, mis võimaldavad nähtuste seletamist, nimetatakse *hüpoteesideks*. Hulga nähtuste seletust ühise hüpoteesi põhjal nimetatakse *teooriaks*.

Et hüpoteesid on oletused, siis ei tohi neid käsitada kui vääramata tõsiasju. Teatud hüpoteesi olemasolu on õigustatud ja kasulik ainult seni, kuni ta suudab ilma vastoluta ära seletada võimalikult suure hulga nähtusi ja kuni temast tehtud järeldused tõestuvad katsetel. Hüpoteesi väärtus on seda suurem, mida rohkem iseseisvaid nähtusi ta seob. Need nähtused, mis teatud hüpoteesiga ei ole enam kokkukõlas ehk mida see hüpotees üldse ei suuda seletada, sunnivad meid seda hüpoteesi muutma ehk koguni sootumaks kõrvale heitma.

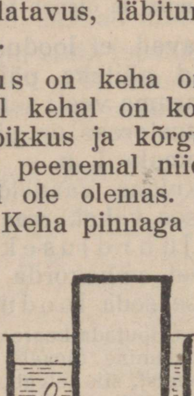
§ 4. **Kehade üldomadused.** Kehade üldistest omadustest on tähtsamad: ulatavus, läbitungimatus, jagatavus, poorsus, inertsus, kaaluvus.

1) *Ulatavus* on keha omadus võtta oma alla teatud osa ruumist. Igal kehal on kolm peaulatust ehk *dimensiooni*: laius, pikkus ja kõrgus. Ka kõige õhemal paberil on paksus, kõige peenemal niidil — jämedus; kahe ja ühe ulatusega kehi ei ole olemas. Keha ulatused on määratud tema *kujuga*. Keha pinnaga piiratud ruumi suurust hüütakse keha *ruumalaks* ehk *voluumiks*. On keha ruumala nii väike, et teda tegelikult arvesse ei tarvitse võtta, siis nimetatakse seesugust keha vahest ka *aineliseks punktiks*.

2) Surume kummuli-pöördud teeklaasi vette, siis hoidub õhk klaasi all ning vesi ei pääse klaasi (joon. 1). Vajutame klaasi aga veenõu põhja heidetud



Joon. 1.



Joon. 2.

kõva keha üle, siis tungib see klaasi sisse, kuna õhk rõhutakse sealt mullidena välja (joon. 2). Sellest näeme, et õhk ei lase vett sinna, kus ta ise asub (klaasi alla), ning et kõva keha tõrjub õhu sealt välja, kuhu ta ise sisse tungib. Samal kombel tõrjub puu sisse tungiv raudnael puu aine oma kohalt kõrvale, tõrjub tuppa astuv inimene toast nii palju õhku välja, kui palju teda mahub inimese keha ruumalasse j. n. e. Ühes ja samas ruumiosas ei saa korraga mitu keha viibida; seda omadust hüütakse kehade läbitungimatuseks.

3) Klaasi võime lüüa kildudeks, kriiditüki peeneks pulbriks hõõruda, rauda viilipuruks viilida j. n. e. Kehade omadust jaguneda väiksemateks osadeks hüütakse jagatavuseks.

Eriti väikesteks osakesteks jaguneb aine, kui teda vedelikus sulatada: terake fuksiini värvib hulga vett punaseks; et väiksemas kui veepiisas veel fuksiiniosakesi peab leiduma, siis võib enesele ette kujutada, kui väiksed on need osakesed. Ka keha lõhna põhjuseks on üliväiksed aineosakesed, mis tulevad õhu kaudu ninna.

4) Kui pikipuust valmistatud silindrikese otsad katta tihedate metallkaantega, mille läbi viivad torukesed *A* ja *B* (joon. 3), ning kui ühest otsast silindrisse puhuda õhku, siis tõusevad vette kastetud teise otsa juures õhumullikesed üles. See näitab, et ülemise kaane alla puhutud õhk läheb piki läbi puu vette. Puu sees peavad järjelikult olema õõnsused. Samal kombel nagu vesi läbi puu, nii imbub õhk, vesi, õli j. n. e. ka läbi naha ja mitme teise aine. Keha aine ei täida kunagi kogu seda ruumi, mida keha võtab oma alla, vaid iga keha sees on kohti, kus aine puudub. Neid õõnsusi hüütakse poorideks, keha omadust eneses sisaldada poore aga poorsuseks.

Joon. 3.

§ 5. **Aggregaat-olekud.** Kehade juures võib panna tähele kolmesugust olekut: kõva, vedelat ja gaasilist. Selle järele jaotatakse kõik kehad kolme liiki: kõvadeks kehadeks, vedelikkudeks ja gaasideks. Keha kuuluvus ühte või teise liiki oleneb takistuse suurusest, mida keha avaldab ruumala ja kuju muutmisel:

1) **Kõvad kehad avaldavad suurt takistust nii ruumala kui kuju muutmise vastu.** Puu, kivi, raua ja teiste sarnaste kehade üksikud osakesed on seotud üksteisega nii tugevasti, et nende lahutamine ja paigaltnihutamine nõuab suuremat jõudu. Selle tõttu on kõvadel kehadel kindel ruumala ja kuju.

2) **Vedelikud avaldavad suurt takistust ruumala muutmise ja väikest takistust kuju muutmise vastu.** Vee, õli, piima j. n. e. üksikud osakesed on üksteise suhtes küll kergelt liikuvad, kuid nad hoiduvad üks-teisest alati ühesugusel kaugusel. Osakeste paigaltnihkumisel muutub ainult keha kuju, kuid hoidub alles tema ruumala. Vedelik võtab sellepärast alati selle nõu kuju, millesse teda pannakse: vedelikkudel on kindel ruumala ja muutlik kuju.

3) **Gaasid ei avalda takistust ei ruumala ega kuju muutmise vastu.** Õhu, auru j. n e. osakesed ei ole üksteisega üldse seotud; nad avaldavad koguni tungi üksteisest kaugeneda ja võimalikult suurt ruumi täita. Gaasidel enestel ei ole seega ei kindlat ruumala ega kuju; nad omandavad alati oma nõu ruumala ja kuju.

Kirjeldatud olekuid, mis on tingitud keha osakestevahelise side iseloomust, nimetatakse kehade agregaat-olekuteks.

Looduses leidub kehi, mille olek ei kuulu ei ühe ega teise ülevalnimetatud rühma alla. Näiteks avaldab „kõva keha“ tina väga mõõdukat takistust kuju muutmise vastu; mõnesuguste vaikude, nagu Kanadabalsami kohta on raske öelda, kas ta on kõva või vedel. Kõvasti tihendatud gaasid moodustavad vaheastme vedelate ja gaasiliste kehade vahel.

§ 6. **Füüsilised suurused; mõõtmine.** 1) Kõiki neid omadusi, mille kohta võib öelda, et nad on suuremad ja väiksemad, nimetatakse füüsilisteks suurusteks. Et keha pikkus, kaal, kiirus on kord suurem, kord väiksem, siis on need omadused füüsilised suurused. Keha värvi ja lõhna kohta aga ei saa öelda, et nad on ühe keha juures suuremad, teise juures väiksemad; värv ja lõhn ei kuulu sellepärast füüsiliste suuruste hulka.

2) Füüsilisi suurusi võib mõõta. Mõõtmisel võrreldakse mõõdetavat suurust mingi teise samasuguse, kuid tuntud suurusega; viimast suurust hüütakse mõõtüksuseks. Pikkuse mõõtmisel võrdleme näiteks keha pikkust tollipulga ehk meetri pikkusega; on keha pikkus $n$ meetrit, siis ei tähenda see muud, kui et keha on $n$ korda pikem mõõtüksusena tarvitatud meetrist. Missugust suurust me ka ei mõõdaks, ikka saame mõõtmise tagajärjena arvu, mis näitab, mitu korda mõõdetav suurus on suurem mõõtüksusest. Seda arvu hüütakse füüsilise suuruse väärtuseks ehk mõõtarvuks. Mõõtmise resultaadi avaldamisel kirjutatakse mõõtarvu taha selle üksuse nimetus, mida tarvitati mõõtmisel. Kui keha kaal on näiteks „5 kilogrammi“, siis näitab mõõtarv 5, et keha on 5 korda raskem kui tarvitatud mõõtüksus; nimetus „kilogramm“ aga ütleb, et üksusena oli tarvitatud nimelt kilogramm.

Et võime üldse võrrelda ainult ühetaolisi asju, siis tohime tarvitada mõõtüksuseks ainult seesugust suurust, mis kuulub sama liiki kui mõõdetav suuruski: Pikkust võib mõõta ainult pikkusega, ruumi — ruumiga, kaalu — kaaluga j. n. e.

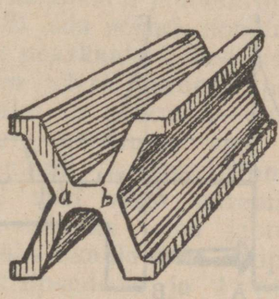
3) Mõningad suurused tuletuvad teistest, otsekohe mõõdetavatest suurustest: Ühtlasel liikumisel leiame näiteks keha kiiruse, kui jagame tee pikkuse — ütleme 15 *m* — liikumiseks kuluva ajaga — näiteks 5 *sec*; kiiruse mõõtarv oleks seega 15 : 5 = 3; kiirusüksuse nimetuse aga peame alles tuletama. Maxwelli järele võib käsitleda nimetusi samal kombel kui algebralisi märke; kiirusüksuse nimetus tuletub nii siis pikkus- ja aegüksuse nimetustest (*m* ja *sec*), kui viimaseid käsitleda samal kombel kui nende mõõtarvegi, s. t. kui jagada nimetus „meeter“ nimetusega „sekund“; kiirusüksuse nimetus on seega $^{m}/_{sec}$ = „meetrit sekundis“.

Teatavasti leidub kiirenduse mõõtarv, kui jagada kiiruse mõõtarv aja mõõtarvuga. Vastavalt leidub kiirendusüksuse nimetus, kui $^{m}/_{sec}$ jagada *sec*'iga, s. t. kiirendusüksuse nimetus on $^{m}/_{sec} : sec = {}^{m}/_{sec^2}$. Samal kombel leidub erikaalu nimetus $\frac{\text{kaal}}{\text{ruumala}} = \frac{\text{tonn}}{\text{kubikmeeter}} = \frac{t}{m^3}$; kuna $tonn = 1000\ kg = 1000000\ g$. ning $m^3 = 1000000\ cm^3$, siis on $\frac{t}{m^3} = \frac{1000000\ g}{1000000\ cm^3} = \frac{g}{cm^3}$; nimetused $^{t}/_{m^3}$ ja $^{g}/_{cm^3}$ on seega üheväärised.

Mõõduriistade ja meeleorgaanide puudulikkuse tõttu on mõõtmine alati enam-vähem ligikaudne. Kui üht ja sama suurust mõõta mitu korda, siis saame üksteisest vähe lahkuminevad mõõtarvud. Et mõõtmisel võime eksida ühepalju nii ühele kui teisele poole, siis seisab tõele kõige lähemal kõigi mõõtarvude aritmeetiline keskarv.

Mõõtmise täpsust iseloomustab mitte vea enda suurus, n. n. absoluutne viga, vaid vea ja mõõdetava suuruse suhe, n. n. relatiivne viga. Kui näiteks 1 meetrilise pikkuse mõõtmisel on tehtud viga 1 *mm*, siis on relatiivne viga ($^{1}/_{1000}$) võrdlemisi suur; päikse kauguse (150000000 *km*) mõõtmisel tehtud viga 1500 *km* on aga relatiivselt koguni tähtsuseta ($^{1}/_{100000}$). Relatiivset viga avaldatakse harilikult protsentides. Eelmistes näidetes on ta 0,1% ja 0,001%. Viimane mõõtmine on järjelikult 100 korda täpsem kui esimene.

§ 7. **Pikkuste mõõtmine.** 1) 1799 a. otsustas Pariisi akadeemia luua pikkusüksus, mis oleneks ainult maakera ulatustest, ning mida võiks uuendada täpselt, kui algüksus peaks minema kaotsi. Seesuguseks üksuseks valiti üks kümnemiljondik ($^{1}/_{10000000}$) osa maakera veerandmeridiaanist ning nimetati seda meetriks (lühendatult *m*). Barcelona ja Dunkirchen'i vahel korraldatud meridiaanipikkuse mõõtmistest leiti veerandmeridiaani pikkus ning valmistati plaa-



Joon. 4.

tinvarb (joon. 4), mis võrdus selle pikkuse $^1/_{10000000}$ osaga. Seda varba hoitakse alal Pariisi rahvusvahelises kaalude ja mõõtude büroos ning teda hüütakse normaalmeetriks. Tema järele on valmistatud suuremale osale kultuurriikidest plaatin-iriidiumist koopiad, mille abil kogu ilma meetrid tehakse täpilt ühepikkused.

Kuigi hiljem selgus, et mõõtmisvigade tõttu Pariisi normaalmeeter on saanud pisut väiksem kui $^1/_{10000000}$ osa veerandmeridiaanist (nimelt $^1/_{10000856}$), ei hakatud viga parandama, vaid lepiti rahvusvaheliselt kokku, ka edaspidi pidada meetriks ülevalnimetatud Pariisi normaalmeetrit.

Võrdlemisi vanemate pikkusüksustega on meetril see paremus, et tema ise ja ta osad jagunevad ainult kümneks; suurem üksus on ikka 10 korda suurem järgmisest väiksemast üksusest. Seesugusel jagamisel kujuneb n. n. detsimaalne mõõdusüsteem, mida hüütakse tihti ka meeter-süsteemiks. Meetrist väiksemaid üksusi tähendatakse sõnadega „detsi“, „senti“ ja „milli“; suuremaid aga sõnadega „deka“, „hekto“ ja „kilo“. Nii on pikkusüksused:

1 meeter = 10 detsimeetrit = 100 sentimeetrit = 1000 millimeetrit.

Lühendatult kirjutatakse:

$$1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 1000\ mm.$$

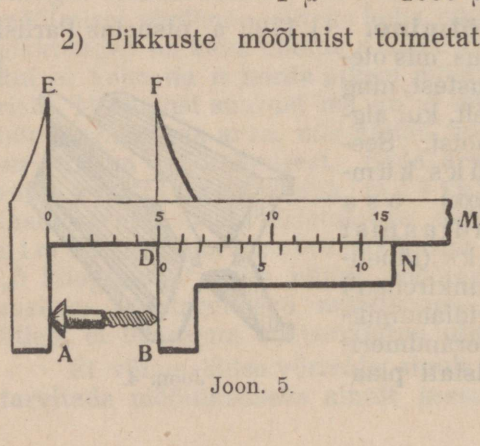
Suurematest üksustest tarvitatakse harilikult ainult kilomeetrit *(km)*:

$$1\ km = 1000\ m$$

Üsna väikeste pikkuste jaoks tarvitatakse veel üksusi „mikroon“ $(\mu)$, mis on meetrist miljon korda väiksem ning „milli-mikroon“ $(\mu\mu)$, mis on mikroonist 1000 korda väiksem:

$$\begin{aligned} 1\ m &= 1000000\ \mu \\ 1\ mm &= 1000\ \mu \\ 1\ \mu &= 1000\ \mu\mu \end{aligned}$$

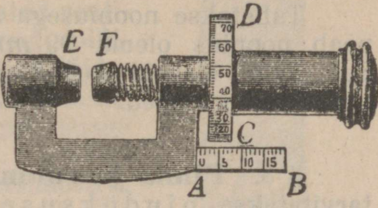
2) Pikkuste mõõtmist toimetatakse harilikult millimeetriteks jagatud tollipulga ehk mõõdulindiga. Väikseid asju mõõdetakse täpsemalt n. n. varbsirkliga (joon. 5). Viimast moodustab skaalaga varustatud joonlaud *(M)*, mille otsa on kinnitatud põikliist ehk „jalg“ *A*. Teine samasugune jalg *(B)* asub lühikese abiliistu *ND* otsas, mida




Joon. 5.

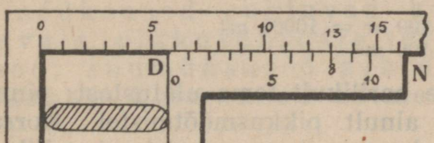
võib lükata piki ülemist skaalat edasi-tagasi. Mõõtmisel asetatakse keha mõlema jalakese vahele ning loetakse ülemiselt skaalalt jalgade vahe suurus millimeetrites, mis võrdubki keha pikkusega. Mõlema jalakese külge kinnitatud teravikkude $E$ ja $F$ abil võib sama riistaga mõõta kaugust ühel tasapinnal seisva kahe punkti vahel.

Üsna väikeste pikkuste täpsel mõõtmisel tarvitatakse mikromeeterkruvi ehk m i k r o m e e t r i t (joon. 6). Mõõdetav keha paigutatakse kruvi otsa $F$ ja tema raamile kinnitatud astme $E$ vahele. Kruvil on seesugune lõige, et ta tõuseb iga täistiiru juures parajasti 1 *mm* võrra. Pöördakse kruvi ainult tiiru mingi osa võrra, siis tõuseb tema ots millimeetri vastava osa võrra. Tiiru osa suurus loetakse kruvi külge kinnitatud rattakeselt $CD$, mille ringjoon on jagatud 100 jakku; täistiirude ehk täismillimeetrite arv aga loetakse pikkusskaalalt $AB$.

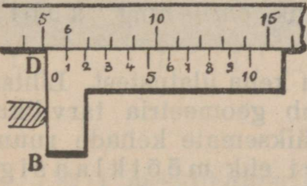



Joon. 6.

3) Millimeeterskaala näitab keha pikkust ainult täismillimeetrites. Kui varbsirkli (joon. 7) ülemine skaala on jagatud millimeetriteks, siis leiame näiteks, et keha pikkus ($AB$) on suurem kui 5 ning vähem kui 6 *mm*. Millimeetri murdosa võiksime ainult hinnata silma järele; mõõta võib seda osa n. n. n o o n i u s e abil. Viimast moodustab millimeeterskaala all edasi - tagasi lükatav liistuke $ND$, millel 9 *mm* pikkune vahe on jagatud 10-sse jakku (v. joon. 5). Nooniuse skaalal võrdub seega iga jaotus $^9/_{10}$ millimeetriga. Lükkame nooniuse 0-punkti (serva $DB$) joonistusel 5 kujutatud seisust pisut paremale poole, nii et nooniuse jaotuskriips **1** seisaks peaskaala 6 jaotuskriipsu kohal (joon. 8), siis seisab nooniuse 0-punkt ($DB$) peaskaala 5-dast kriipsust **0,1** *mm* võrra paremal pool (sest peaskaalal on pikkus 5—6 üks täismillimeeter, nooniusel aga on pikkus 1—0 ainult $^9/_{10}$ *mm*). Nihutame nooniuse veel vähe paremale poole, nii et näiteks tema jaotuskriips **2** seisaks skaala 7-da kriipsu all, siis on kriipsude 6 ja 1 vahe endise järele 0,1 *mm* kriipsude 5 ja 0 vahe aga järjelikult




Joon. 7.




Joon. 8.

0,1 + 0,1 = **0,2** *mm*. Asub nooniuse **3**-as kriips skaala 8-da kriipsu vastu, siis seisab. *BD* peaskaala 5-dast kriipsust 3 x 0,1 = **0,3** *mm* paremal pool j. n e. Juhtub mõõtmisel, et näiteks **8**-as nooniuskriips seisab peaskaala mistahes (13-da) kriipsu kohal, siis tähendab see, et jalakese *DB* serv seisab **0,8** *mm* peaskaala 5-ast kriipsust paremal pool (joon. 7), s. t. et keha pikkus on 5,8 *mm*. Kümnendikmillimeetrite arvu näitab nii siis selle nooniuskriipsu number, mis kohtub kõigeparemini peaskaala mistahes jaotuskriipsuga.

Tahetakse nooniusega mõõta ka sajandikmillimeetrid, siis peab noonius olema 99 *mm* pikk ning jagunema 100 jakku. Sel puhul oleksid nooniuse jaotused 0,01 *mm* lühemad kui peaskaala jaotused.

§ 8. **Pinna ja ruumi mõõtmine.** 1) Meetersüsteemis tarvitatakse pindüksusena kvadraati, mille külg võrdub meetersüsteemi mingi pikkusüksusega. Pindüksused on nii siis: kvadraatmeeter (lühendatult *kvm* ehk $m^2$), kvadraatdetsimeeter (*kvdm* ehk $dm^2$), kvadraatsentimeeter (*kvcm* ehk $cm^2$) ja kvadraatmillimeeter (*kvmm* ehk $mm^2$).

Suuremate üksustena tarvitatakse veel „hektar" ja „ar"; esimene on kvadraat, mille külg on 100 *m*, teine on kvadraat, mille külg 10 *m*.

$$1 \text{ hektar} = 100 \text{ ar} = 10000 \ m^2$$
$$1 \text{ ar} = 100 \ m^2$$

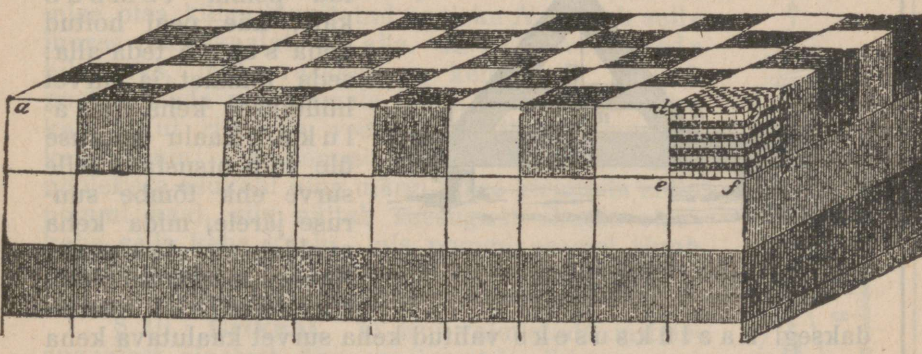
Keha pind arvestatakse harilikult tema ulatustest; pinna mõõtmine põhjeneb nii siis ainult pikkusmõõtmistel. Korrapäraste figuuride pinna jaoks annab geomeetria tarvilikud formulid. Mittekorrapäraste figuuride pinna suurus leidub kõige lihtsamini, kui kogu pind jagada korrapärasteks figuurideks (kolmnurkadeks, paralleelogrammideks) ning kui viimaste pinnad summeerida.

2) Ruumi mõõtmisel tarvitatakse üksusena kubikut, mille serv võrdub meetersüsteemi mingi üksusega. Ruumüksused on: kubikmeeter (lühendatult *kbm* ehk $m^3$), kubikdetsimeeter (*kbdm* ehk $dm^3$), mida hüütakse ka liitriks (*l*), kubiksentimeeter (*kbcm* ehk $cm^3$) ning kubikmillimeeter (*kbmm* ehk $mm^3$).

Ka ruumi suurust võib arvestada keha ulatustest. Lihtsakujuliste kehade ruumala jaoks annab geomeetria tarvilikud formulid. Mittekorrapärase kujuga väiksemate kehade ruumala mõõdetakse tihti n. n. mensuuri ehk mõõtklaasiga (joon. 9). See on silindernõu, mille seinale märgitud mahutavusskaala; viimase jaotuskriipsud näitavad, mitu ruumüksust (näiteks vett) mahub klaasi kuni vastava kriipsuni. Klaas täidetakse vedelikuga (milles keha ei sula) kuni mingi kriipsuni ning loetakse skaalalt selle vedeliku ruumala. Siis heidetakse keha vedelikku ning loetakse skaalalt see ruum, mida täidab vedelik ja keha koos. Mõlema ruumala vahe võrdubki keha otsitud ruumalaga.

Joon. 9.

3) Pikkus-, pind- ja ruumüksuste vahekorda selgitab ülevaatlikult joonistus 10, millel loomulikus suuruses kujutatud detsimeeter (suure kubiku serv) on jagatud sentimeetriteks ning üks viimastest veel millimeetriteks. Kogu suur kubik (millest näidatud ainult ülemine osa) kujutab kubikdetsimeetrit (liitrit); paremal pool nurgas seisev väike kubik on kubiksentimeeter. Kubiku ülemine pind kujutab kvadraatdetsimeetrit, väiksemad ruudud kvadraatsentimeetrid. Me näeme, et kuna 1 *dm* sisaldab 10 *cm*, on ühes *kvdm*-s $10 \times 10 = 100$ *kvcm* ning ühes *kbdm*-s $10 \times 10 \times 10 = 1000$ *kbcm*. Samasugune on sentimeeter ja millimeeterüksuste suhe (v. millimeetriteks jagatud kubik). Kuna 100 ja 1000 on kümne teine ja kolmas aste ($10^2$ ja $10^3$), siis selgub sellest, et pindüksused suhtuvad kui vastavate pikkusüksuste teised astmed; ruumüksused suhtuvad aga kui pikkusüksuste kolmandad astmed.




Joon. 10.

Et $1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 1000\ mm$, siis on

$1\ m^2 = 10^2\ dm^2 = 100^2\ cm^2 = 1000^2\ mm^2$, ehk

$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ \mathrm{mm}^2$;

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$.

Samal kombel on

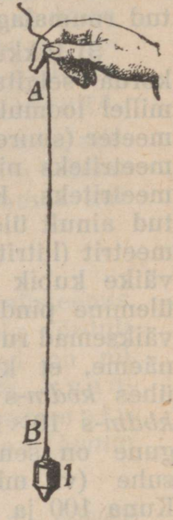
$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3 = 1000^3\ mm^3$, ehk

$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3$;

1 liiter $= 1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000000\ mm^3$,

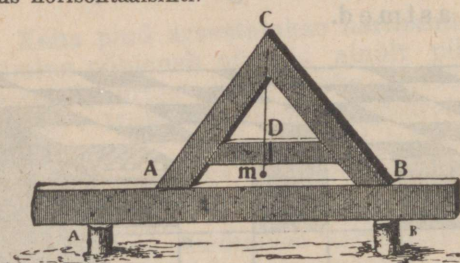
$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$.

§ 9. **Raskus ja kaalumine.** 1) Hoiame nööri otsa seotud keha nööri pidi käes (joon. 11), siis tunneme, et käsi tõmbub nööri sihis alla. Laseme nööri otsa lahti, siis langeb keha vertikaal- ehk loodsihis maha. Et keha läheneb langemisel maakerale, siis oletatakse, et tema tõmbub maakera külge. Keha omadust maakera külge tõmbuda hüütakse kaaluvuseks; seda põhjust aga, mis sunnib keha maakerale lähenema, nimetatakse raskuseks.



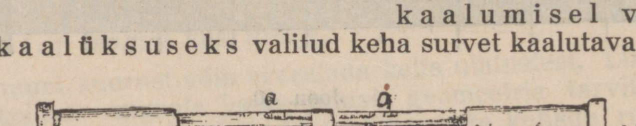
Joon. 11.

Raskuse mõjumissiht (loodsiht), mida igapäevases elus tihti on tarvis täpipealselt tunda, leitakse n. n. loodi abil (joon. 11); viimast moodustab niidi otsa seotud väike ja raske metallpommike. Loodsihiga perpendikulaarse horisontaalsihi määramiseks tarvitatakse loodlauda ja vesiloodi (vaaderpass). Esimene on sarikkolmnurk (joon. 12, mille tippu *(C)* on kinnitatud lühike lood *m*; asub viimane kriipsul *D*, siis seisab baas *AB* horisontaalsihis. Vesiloodi (joon. 13) moodustab üles vähe kõveraks painutatud kinnine klaastoru, mis täidetud vedelikuga sedavõrd, et torus hoidub ainult väike õhumullike *ab*. Seisab viimane toru kõigekõrgemas kohas (keskkohas), siis näitab toru alus horisontaalsihti.



Joon. 12.

2) Nööri otsa seotud pomm tõmbab kätt; käe peal hoitud keha surub teda alla; seda tõmmet ja survet hüütakse keha kaaluks. Kaalu suuruse üle võib otsustada selle surve ehk tõmbe suuruse järele, mida keha avaldab oma aluse peale. Kaalu mõõtmisel ehk kaalumisel võrreldaksegi kaalühikuseks valitud keha survet kaalutava keha omaga.



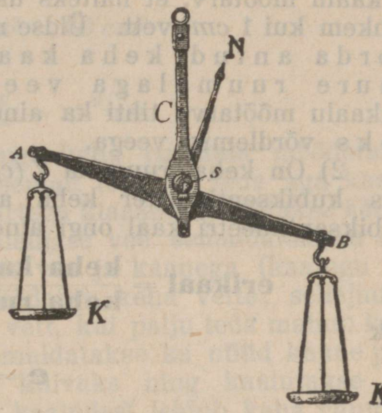
Joon. 13.

Meetersüsteemi kaaluksuseks on ühe kubiksentimeetri puhta vee kaal $+4°$ C juures. Seda üksust hüütakse grammiks (lühendatult *g*). Meetersüsteemi üldise jaotusviisi järele on teisteks kaalüksusteks:

kilogramm (*kg*) = 1 $dm^3$ = 1 liitri puhtavee kaal = 1000 *g*
milligramm (*mg*) = 1 $mm^3$ = „ „ = 1/1000 *g*.

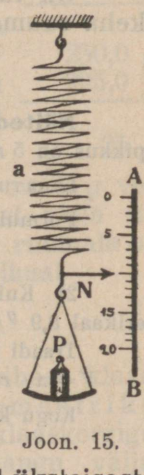
Suurema üksusena on tehnikas tarvitusel üksus tonn (*t*), mis võrdub 1 $m^3$ puhtavee kaaluga, s. t. 1000 kilogrammiga.

3) Kaalumise hõlbustamiseks tarvitatakse kaalüksustena metallist kaalupomme; need on metallkehad, mille kaal võrdub täpselt 1 $cm^3$, 1 $mm^3$ j.n.e. puhtavee kaaluga. Seesuguste pommidega (vihidega) kaalutakse keha näiteks tuntud kangkaaludel (joon. 14). Ühe vaekausi peale pannakse kaalutav keha, teise peale laotakse niipalju kaalupomme, et kaalu nool (*N*) seaduks vertikaalseisu. Sel juhusel võrdub keha kaal pommide kaaluga.



Joon. 14.

Vedrukaalu (joon. 15) peaosa on terasest spiraalvedru *a*, mille otsa riputatakse kaalutav asi. Keha raskuse tõttu venib vedru pikemaks; tema alumise otsa külge kinnitatud nooleke *N* libiseb selle juures piki skaalat *AB* alla. Et vedru venib seda pikemaks, mida raskem on keha, siis nihkub nooleke seda madalamale, mida suurem on keha kaal. Kui riputada vedru otsa järjest suurem kaalupomm, iga pommi ajal skaalale märkida noolekese asukoht ning märgi juure kirjutada selle pommi kaal, siis näitab seesugune skaala otsekohe selle keha kaalu, mis pommi asemel ripub vedru otsas.



Joon. 15.

§ 10. **Erikaal.** 1) Kui valmistada mitmesugustest ainetest ühe sentimeetri pikkuste servadega kubikud, siis näitab kaalumine, et näiteks raua kubik kaalub 7,2 *g*, hõbeda oma 10,5 *g*, korgi oma aga kõigest 0,24 *g*. Need arvud erinevad üksteisest ainult sellepärast, et kubikutel on mitmesugune aine. Nad iseloomustavad sellepärast aine kaaluvust ning hüütakse neid ainete erikaaluks. Erikaalu all mõistetakse nii siis ühes ruumüksuses sisalduva ainehulga kaalu. Erikaalu avaldatakse kas grammides kubiksentimeetri kohta, kilogrammides kubikdetsimeetri või tonnides kubikmeetri kohta. Erikaalu mõõtarv jääb kõigil neil juhustel ühesuuruseks, sest kui näiteks

1 $cm^3$ tina kaalub 11, 3 $g$, siis
1 $dm^3$ „ „ $1000 \times 11{,}3\ g = 11{,}3\ kg$ ning
1 $m^3$ „ „ $1000 \times 11{,}3\ kg = 11{,}3\ t$.

Et kubiksentimeeter vett kaalub parajasti 1 $g$, siis ütleb erikaalu mõõtarv, et näiteks üks $cm^3$ rauda kaalub 7,2 korda rohkem kui 1 $cm^3$ vett. Üldse näitab erikaalu mõõtarv, mitu korda antud keha kaalub rohkem kui samasuure ruumalaga veehulk. Sellepärast hüütakse erikaalu mõõtarvu tihti ka aine relatiivseks tiheduseks võrdlemisi veega.

2) On kehal ruumala $V\ (cm^3)$ ning kaal $G\ (g,)$ siis kaalub üks kubiksentimeeter keha ainest $G:V$ grammi. Kuna ühe kubiksentimeetri kaal ongi aine erikaal ($e$), siis on

$$\textbf{erikaal} = \frac{\textbf{keha kaal}}{\textbf{keha ruumala}}$$

ehk

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{V}} \qquad (1)$$

Kui on tuntud aine erikaal ning tema ruumala, siis leidub sellest keha kogukaal

$$G = e.V. \qquad (1a)$$

On tuntud erikaal ja keha kogukaal, siis leidub sellest keha ruumala

$$V = \frac{G}{e} \qquad (1b)$$

**Näited:** 1) Kuiva kuusepuu erikaal $e = 0{,}45\ {}^{kg}/_{dm^3}$; kuuselaua pikkus on 5 $m$, laius 25 $cm$ ning paksus 15 $mm$. Kui palju kaalub see laud?

Laua ruumala $V = 500\ cm \times 25\ cm \times 1{,}5\ cm = 18750\ cm^3 = 18{,}75\ dm^3$.

Formuli (1a) järele on siis kaal:

$$G = eV = 0{,}45\ {}^{kg}/_{dm^3} \times 18{,}75\ dm^3 = 8{,}438\ kg.$$

2) Kui palju kaalub 1 $m$ vasktraati, mille läbimõõt on 1 $mm$ ning erikaal 8,9 ${}^{g}/_{cm^3}$?

Traadi ruumala

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot l = 3{,}14 \times (0{,}5\ mm)^2 \times 1000\ mm = 785\ mm^3 = 0{,}785\ cm^3;$$

Kogu kaal on siis

$$G = e \cdot V = 8{,}9\ {}^{g}/_{cm^3} \times 0{,}785\ cm^3 = 7 \text{ grammi.}$$

3) Petrooleumi erikaal on $e = 0{,}83\ {}^{kg}/_{dm^3}$; kui suur on vaadi mahutavus (sisemine ruumala), kui temasse mahub 25 $kg$ petrooleumi?

Ruumala on

$$V = {}^{G}/_{e} = 25\ kg : 0{,}83\ {}^{kg}/_{dm^3} = 30{,}15\ dm^3 = 30{,}15 \text{ liitr.}$$

4) Kui suur on 1251 grammi hõbeda ruumala?

Et $G = 1251$ g ning $e = 10{,}5\,{}^{g}/_{cm^3}$, siis on

$$V = {}^{G}/_{e} = 1251\,g : 10{,}15\,{}^{g}/_{cm^3} = 120\,cm^3.$$

§ 11. **Erikaalu määramine.** 1) Korrapärase kujuga keha erikaal leidub tema kogukaalust *(G)* ning arvestamise teel leitud ruumalast *(V)*. On näiteks puuprisma kaal $G = 66$ grammi, tema pikkus 100 *mm*, laius 30 *mm* ning paksus 20 *mm*, siis on prisma ruumala

$$V = 100.30.20 = 60000\,mm^3 = 60\,cm^3$$

Erikaal on sel puhul

$$e = \frac{G}{V} = \frac{66\,g}{60\,cm^3} = 1{,}1\,{}^{g}/_{cm^3}.$$

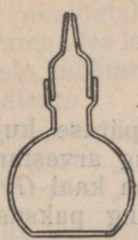
2) Mittekorrapärase kujuga keha ruumala mõõdetakse mensuuri abil (§ 8₂). Täpsemalt tehakse seda aga kaalumise teel: Siledakslihvitud äärtega klaasnõu täidetakse ääreni veega; pannakse klaasplaat üleliigse vee eemaldamiseks nõu peale ning kaalutakse nõu ühes vee ja kaanega (kaalugu see 212,5 *g*). Siis langetatakse mõõdetav keha vette; sellejuures voolab üle nõu ääre nii palju vett, kui palju teda mahub keha ruumalasse. Üleliigne vesi eemaldatakse ka nüüd kaane pealepanemisega, pühitakse nõu kuivaks ning kaalutakse ära (olgu see kaal 225 *g*). Nendest kaaludest leidub keha ruumala järgmiselt:

| | |
|---|---|
| Kaalugu keha ise . . . . . . . . . . . | 37,5 *g* |
| Nõu ühes veega kaalub . . . . . . . . . | 212,5 *g* |
| Veega täidetud nõu ja eraldi asuv keha kaaluvad siis kokku . . . . . . . | 250,0 *g* |
| Asub keha nõus, siis kaalub kõik kokku | 225,0 *g* |
| Keha vetteheitmisel pidi nõust välja voolama veehulk, mille kaal on . . . | 25 *g* |

Et ühe grammi vee ruumala on 1 $cm^3$, siis on 25 *g* vee ruumala 25 $cm^3$. Vetteheitmisel tõrjus keha nõust välja nii siis 25 $cm^3$ vett; sellest järgneb, et ka keha enese ruumala on 25 $cm^3$. Kuna kaal oli 37,5 *g*, siis leidub keha erikaal

$$e = \frac{37{,}5\,g}{25\,cm^3} = 1{,}5\,{}^{g}/_{cm^3}.$$

3) Vedelikkude erikaal leitakse sellekohase klaaspudelikese abil (joon. 16), mida hüütakse püknomeetriks. Pudel täidetakse ääreni veega ja sulutakse klaaskorgiga, mille läbi puuritud peenike auk. Läbi korgiaugu väljasurutud vesi pühitakse ära ning kaalutakse pudel ühes veega (kaal olgu näiteks 96,62 *g*). Nüüd täidetakse pudel selle vedelikuga (näit. elavhõbedaga), mille erikaalu soovitakse leida, ning kaalutakse uuesti (olgu see kaal näiteks 980,60 *g*).



Joon. 16.

On ka tühja püknomeetri kaal (näit. 26,24 *g*) tuntud, siis leidub vedeliku (elavhõbeda) erikaal järgmiselt:

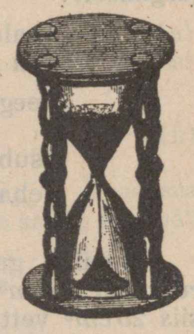
Püknomeetrisse mahtuva elavhõbeda kaal on 980,6 — 26,24 = 954,36 *g*.

Püknomeetrisse mahtuva puhta vee kaal on 96,62 — 26,24 = 70,38 *g*.

Ühe grammi vee ruumala on 1 $cm^3$; 70,38 *g* oma aga on järjelikult 70,38 $cm^3$. Et püknomeetri mahutavus on mõlema vedeliku puhul ühe suurune, siis peab ka 954,36 *g* elavhõbeda ruumala olema 70,38 $cm^3$. Sellest järgneb elavhõbeda erikaal

$$e = \frac{G}{V} = \frac{954{,}36\,g}{70{,}38\,cm^3} = 13{,}56\ {}^{g}/_{cm^3}.$$

§ 12. **Aeg.** Aja suuruse üle otsustatakse selle järele, kui palju temast kulub mingi tuntud nähtuse jaoks. K a h t a j a v ä l d e t n i m e t a t a k s e v õ r d s e k s, k u i m õ l e m a s v õ i b k o r d u d a ü k s j a s a m a n ä h t u s. Kordub nähtus 2 korda järjestikku, siis kulub selleks ka 2 korda rohkem aega. L i i v a k e l l a s näiteks jookseb liiv teatava kindla aja vältel ülemisest nõust alumisse (joon. 17); kella ümberpöörmise järele jookseb liiv täpilt sama aja jooksul endisse nõusse tagasi. Et nõu tühjaksjooksmiseks kulub alati ü h e p a l j u aega, siis võib selle ajaga võrrelda ja mõõta teisi ajavälteid.



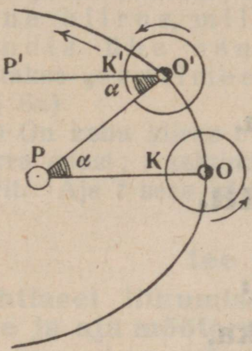
Joon. 17.

Taskukellas tiirlevad rattakesed vedru jõul. Rattakese pöördumiseks ühe hamba võrra kulub ikka üks ja sama ajavälde; ratta pöördumiseks iga terve tiiru võrra kulub teatav suurem ajavälde jne. Selle tõttu pöördub ka kella näitaja ikka ühesuuruste ajavältede jooksul ühe jaotuse võrra edasi.

2) Ühesuguselt korduv nähtus on meil maakera tiirlemine oma telje ümber. Seda asjaolu kasutatakse aegüksuse kindlaksmääramiseks. Aegüksuseks loetakse p ä e v a, s. t. ajajärku kahe järjelise keskpäeva vahel. Päev jaguneb 24 t u n n i k s, tund 60 m i n u t i k s, minut — 60 s e k u n d i k s. Teaduses tarvitatakse aegüksusena ainult sekundit (lühend. *sec*).

3) Ajaväldet, milles maakera teeb ühe täistiiru ümber oma telje, nimetatakse t ä h e p ä e v a k s. Sellest lahkuminev on p ä i k s e p ä e v, s. o. aeg päikse kahe järjelise kulminatsiooni vahel, kusjuures kulminatsiooni all mõistetakse päikse läbiminekut läbi vaatluskoha meridiaanpinna. Kui maakera ei tiirleks ümber päikse, siis oleks päiksepäev see aeg, mis maakeral kulub ühe täistiiru tegemiseks. Teatavasti aga liigub

maakera ellipsit mööda ümber päikse. Selle aja jooksul, kui maakera pöördub 360° võrra oma telje ümber, liigub tema sentrum punktist $O$ punkti $O'$ (joon. 18); vaatleja $K$ pöördub selle aja jooksul seisu $K'$. Punktis $K$ nägi vaatleja päikest $P$ vertikaaljoonel $KO$; 360-kraadilise pöördumise järele läheb sama vertikaaljoon sihis $P'K'O'$, millest päiksesiht ($O'P$) on nurga $\alpha = P'O'P$ võrra ees. Selleks, et päike asenduks läbi $K'$ tõmmatud vertikaaljoonele $K'O'$ (kulmineeruks), peab maakera pöörduma nii siis veel $\alpha$ kraadi võrra edasi. Et päiksepäev on nimelt see aeg, mis möödub kahe järjelise kulminatsiooni vahel, siis pöördub maakera päiksepäeva jooksul $360 + \alpha$ kraadi võrra. Nurk $\alpha$ võrdub nurgaga $OPO'$; viimane oleneb maakera teepikkusest $OO'$. See pikkus aga muutub aasta jooksul, sest et maakera viibib kord lähemal, kord kaugemal päiksest. Järjelikult ei ole päiksepäev kogu aasta ühepikkune ning ei kõlba ta sellepärast täpseks aegüksuseks. Sel põhjusel lepiti kokku võtta ajamõõtmise aluseks päiksepäeva *keskmine* suurus aasta jooksul ning nimetada seda *kodanlise aja päevaks*. Üks 86400-dik osa sellest päevast ongi *sekund*.




Joon. 18.

Astronoomid arvavad aega *tähepäeva* järele. Viimase all tuleb mõista ajavahet mingi kinnistähe kahe järjelise kulminatsiooni vahel. See päev jääb alati ühepikkuseks, sest kui joonistusel 18 võtta päikse $P$ asemel mingi kinnistäht, siis on kaugus $OP$ nii suur, et maakera edasiliikumist $OO'$ ei tule võtta arvessegi ning et nurk $\alpha = OPO'$ jääb nulliks. Tähepäeva jooksul pöördub maakera seega täpilt 360° võrra. Kodanlise aja päev võrdub 1,00274 tähepäevaga; ühes tähepäevas on seega 86164 sekundit

# Teine jagu.

# Mekaanika.

## I. Peatükk:

## Üldmekaanika.

§ 1. **Liikumine.** 1) *Liikumisel* muudab keha oma asukohta teiste kehade vastu; paigalseisul ehk *tasakaaluolekul* jääb keha asukoht teiste kehade suhtes muutumatuks. *Mekaanika* ongi füüsika see osa, mis kirjeldab kehade liikumist ja tasakaalu.

Istub reisija sõitvas rongis, siis seisab ta vaguni põrandal paigal, liigub aga ühes rongiga maapinda mööda edasi. Järjelikult võib üks ja sama tegevus — rongis istumine — ühes mõttes olla paigalseismine, teises aga liikumine. Peatab rong jaamas, siis seisab sama reisija ka maapinnal paigal; et aga maakera ise liigub edasi, siis liigub ka reisija ühes maakeraga ikkagi veel. Maakera liigub ümber päikse: päike ise liigub ilmaruumis teatud kinnistähtede poole; et ka viimased võivad veel liikuda, siis ei tunne me ühtki keha, mis seisaks absoluutselt paigal ning mille suhtes võiks kirjeldada vaadeldava keha *absoluutset liikumist*.

Kogu ilmas võib nii siis näha ja kirjeldada ainult ühe keha liikumist teise keha *suhtes*; öeldakse, et on olemas ainult *suhteline* ehk *relatiivne liikumine*.

Me oleme harjunud pidama maakera pinda paigalseisvaks. Sellepärast käsitleme maapealsete kehade liikumist alati nii, *kui seisaks maapind ühe koha peal paigal*.

2) Sõidab saan lund mööda, siis jätab ta enese järele jälje. See jälg näitab kõiki neid kohte, mille läbi saan liikus; ta on nii siis kõigi nende punktide ühendusjoon, mis olid saani ajutised asukohad. Liikuva keha järjestikuste asukohtade ühendusjoont hüütakse *liikumisteeks*. Selle järele, kas liikumistee on sirg- või kõverjooneline, jagunevad liikumised ise *sirg-* ja *kõverjoonelisteks*.

§ 2. **Ühtlane sirgjooneline liikumine; kiirus.** Kui keha käib võrdsetes ajavältedes ühepikkused teeosad, siis on liikumine *ühtlane*; vastasel korral on ta *mitteühtlane*.

Ühtlase liikumise kiiruseks loetakse aegüksuses käidava tee pikkust. Kiirusüksuseks valitakse see kiirus, millega keha jõuab igas aegüksuses ühe pikkusüksuse võrra edasi. Harilikult tarvitatakse aeg- ja pikkusüksuseks sekundit ja sentimeetrit; sellepärast on kiirusüksus seesugune kiirus, millega keha jõuab edasi igas sekundis ühe sentimeetri võrra. Seda üksust nimetatakse „sentimeeter sekundis“ $= cm/sec$. (Võrdle ka I, § 63.)

2) On keha kiirus $c$ üksust, siis liigub ta igas sekundis $c$ $cm$ võrra edasi; $t$ sekundi jooksul käib ta järjelikult $c.\ t$ sentimeetrit. Aja $t$ sees käidud tee $s$ on seega

$$s = c.\ t \qquad (2)$$

ehk **tee = kiirus × aeg,**

s. t. **ühtlasel liikumisel käidud tee mõõtarv võrdub kiiruse ja aja mõõtarvude korrutisega.** Lühendatult öeldakse ka, „tee võrdub kiiruse ja aja korrutisega.“

Formulist (2) leidub keha kiirus, kui tnntud tee ja aeg:

$$c = \frac{s}{t} \qquad (2a)$$

s. t. **kiiruse mõõtarv võrdub tee mõõtarvuga jagatud aja mõõtarvuga,** ehk „kiirus on tee ja aja suhe“.

Kui on tuntud tee ja kiirus, siis leidub formulist (2) selleks teeks kuluv aeg

$$t = \frac{s}{c} \qquad (2b)$$

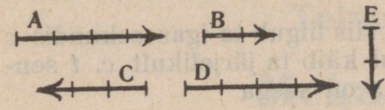
3) Kiiruse mõõtmisel tarvitatakse ka veel teisi üksusi. Kõigi nende suurus oleneb valitud pikkus- ja aegüksuse suurusest. Nii on üksus „meeter sekundis“ $(m/sec)$ sada korda suurem kui „sentimeeter sekundis“ ($1\ m = 100\ cm$); „kilomeeter tunnis“ on $100000 : 3600 = 28$ korda suurem kui $cm/sec$, sest et $1\ km = 100000\ cm$ ja 1 tund $= 3600\ sec$.

Allpool järgnevad mõned tähelepanemisväärt kiirused:

| | | |
|---|---|---|
| Hea jalakäija | 1,6 | $m/sec.$ |
| Hobune sammu käies | 1,1 | „ |
| Traavel | 12 | „ |
| Kaubarong | 12 | „ |
| Kiirrong | 20 | „ |
| Pääsuke | 35 | „ |
| Harilik tuul | 3 — 10 | „ |
| Torm | 30 — 50 | „ |
| Väiksekaliibrilise suurtüki kuul | 600 — 700 | „ |
| Heli õhus | 331 | „ |
| Valgus | 300000000 | „ |

4) Peale kiiruse suuruse iseloomustab liikumist ka veel tema siht. Viimane määratakse sellega, et kiirusele enesele antakse teatav siht ning oletatakse, et liikumine sün-

nib alati kiiruse enese sihis. Sel puhul saab kiirus suuruseks, mis avaldub mitte ainult arvuliselt, vaid ka sihiliselt. Neid suurusi nimetatakse vektoriaalsuurusteks ehk lühidalt vektoriteks. Kujutatakse neid noolega, mille siht näitab vektori sihti ning mille pikkus on proportsionaalne vektori mõõtarvuga. Näiteks kujutavad nooled *A* ja *B* (joon. 20) kahe keha kiirusi, millel on ühine siht, kuid millest üks liigub 2 korda kiiremini kui teine (*A* on 2 korda pikem kui *B*); nooled *C* ja *D* kujutaved kiirusi, mis vastupidi on sihitud ning millest ühel on 3 kiirusüksust, teisel — neli; kiirus *E* on samasuur kui *B* kuid tema siht lõikub *B* omaga 90° all.




Joon. 20.

Kuna mõiste „kiirus“ tuletub kahest mõistest „tee“ ja „aeg“, siis tekivad tema äramääramisel teatud raskused, mille tõttu harilikult lepitakse umbkaudse või puuduliku definitsiooniga. Harilik definitsioon „kiirus on tee ja aja mõõtarvude suhe“ ei ole õige, sest kiirus ei ole mitte nimeta arv. Selle § algul antud definitsioon „aegüksuses käidud teed nimetatakse kiiruseks“ on küll lihtne, kuid loogiliselt puudulik, kuna siin sarnastatakse kaht isesugust mõistet „tee“ ja „kiirus“.

Füüsikas laiendatakse niisuguste raskuste kõrvaldamiseks matemaatilise „suhte“ mõistet: viimase moodustamisel kirjutatakse mõõtarvude järele ka nende nimetused, nii et mõiste „suhe“ alla kuuluvad mitte ainult mõõtarvud ise, vaid ka nende nimetused. Sel kombel moodustatud suhet hüütakse „füüsiliseks suhteks“. Nimelt selles laiendatud mõttes tulebki mõista sõna „suhe“ tähendust lauses: „kiirus on tee ja aja suhe“ $\left(s\ cm : t\ sec = {}^{s}/_{t}\ {}^{cm}/_{sec}\right)$.

**Näited:** 1) Mitu kilomeetrit sõidab raudteerong tunnis, kui tema kiirus on 12 ${}^{m}/_{sec}$?

Et tunnis on 3600 *sec* siis on formuli (2) järele tee pikkus:

$$s = c\,.\,t = 12\ {}^{m}/_{sec}\,.\,3600\ sec = 43200\ m = 43{,}2\ km.$$

Me võiksime järjelikult ka öelda, et rongi kiiru on 43,2 kilomeetrit tunnis $\left({}^{km}/_{h}\right)$.

2) Valguse kiirus on 300 000 000 ${}^{m}/_{sec}$ ja maakera kaugus päiksest on 20 000 000 ponikoormat (1 penikoorm = 7500 *m*). Kui palju aega tarvitab valguskiir selle tee ärakäimiseks?

$$t = \frac{s}{c} = \frac{20\,000\,000\,.\,7500}{300\,000\,000} = 500\ \frac{m\,.\,sec}{m} = 500\ sec = 8^{1}/_{3}\ min.$$

3) Hoogratas, mille läbimõõt $d = 3\,m$, teeb minutis 80 tiiru. Missuguse kiirusega liigub hoogratta perimeetril asuv punkt?

Ühe tiiru juures on punkti tee $\pi d = 3{,}14\,.\,3{,}0 = 9{,}42\ m$; 80 tiiru järgi on ärakäidud tee $s = 80\,.\,9{,}42 = 753{,}6\ m$ ja kiirus $c$ on

$$c = \frac{s}{t} = \frac{754{,}4\ m}{60\ sec} = 12{,}56\ \frac{m}{sec}.$$

§ 3. **Inertsus ja jõud.** 1) Viskame sileda kera liivasele maanteele, siis veereb ta sirgjooneliselt edasi; sellejuures väheneb kiirus järk-järgult ning peagi jääb kera seisma. Kui sama kera visata siledale marmorpõrandale, siis veereb ta ka sirgjooneliselt, kuid kiirus väheneb nüüd palju aeglasemalt ning kera veereb palju kaugemale. Libedal jääpinnal kahaneb kera kiirus veelgi aeglasemalt jne. Et seesugustel katsetel vahetub ainult see alus, millel kera veereb, siis peab oletama, et kiiruse kahanemise põhjuseks on ainult hõõrumine aluse ja kera vahel. Kui leiduks alus, mis üldse ei hõõruks, siis peaks tema peale visatud kera veerema ilma kiiruse kahanemiseta (s. t. ühtlaselt) kuni lõpmatuseni. Analoogilisi nähtusi võib panna tähele ka kõigi teiste liikumiste juures: Ikka on see kas hõõrumine, õhutakistus või mingi muu väline põhjus, mis muudab (aeglastab) liikumist. Ilma väliste põhjusteta peaks keha kiirus jääma nii sihis kui suuruses muutumatuks.

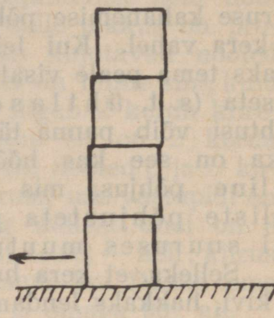
Selleks, et kera hakkaks veerema, peame teda tõukama; et kivi, hakkaks lendama, peame teda viskama. Keha hakkab liikuma alles siis, kni mingi väline põhjus (tõuge, viske) paneb tema liikuma. Ilma seesuguse põhjuseta jääks keha alaliselt seisma. Kõigest sellest järgneb, et ükski keha ei alga ega muuda (lõpeta) oma liikumist ilma välise põhjuseta, vaid kehad püüavad hoida alal oma esialgset olekut (liikumist ja paigalseisu). Kehade seesugust omadust hüütakse inertsuseks; neid põhjusi aga, mis muudavad keha olekut, hüütakse jõududeks. Ülemalnimetatud seadust, mis tuntud nimetuse all „inertsuse seadus“ ehk „Newtoni I seadus“, võib nii siis väljendada järgmiselt: **Seni kuni jõud ei mõju keha peale, seisab keha paigal või ta jatkab ühtlast sirgjoonelist liikumist** (Newton, 1687).

Liikuvate kehade inertsus avaldub väga mitmekesiselt: Järsku kinnipeetud vankris kalduvad sõitjad ettepoole, sest et nende ülemised kehaosad jatkavad inertsi tõttu oma liikumist ka siis veel, kui jalad ühes vankriga juba seisavad paigal. Ühtlaselt sõitvas vankris võib samal kombel pilduda palli kui seisvaski, sest inertsuse tõttu liigub pall ka tõusu ja langemise ajal ühes vankriga edasi; tänavalt vaatlejale näib pall ülestõusvat ja mahalangevat kaldu; vankrisistujate nähes aga sünnib see vertikaalselt. Kirvest võib kinnitada seega varre otsa, et vart lüüakse kõvasti vastu kivi: vastu kivi põrkumisel jääb vars järsku seisma, kuna kirves ise liigub inertsi mõjul edasi, sügavamale varre otsa.

2) Tahame näiteks kelku panna jääväljal kiirelt liikuma, siis peame teda teatava aja jooksul tõukama. Tõuke ajal kasvab kelgu kiirus järjest suuremaks; laseme kelgu aga lahti, siis ei tõuse tema kiirus enam, vaid ta libiseb (vähemalt esialgul) ühtlase kiirusega iseendast edasi. Sarnased nähtused õpetavad, et **keha kiirus muutub** (kasvab ehk kahaneb) **ainult sel ajal, kui tema peale mõjub jõud** (tõuge). Jõu mõjumisel on liikumine nii siis mitteühtlane, ilma jõuta on liikumine ühtlane.

3) Kui sambakslaotud lastemängu ehituskubikuid pikkamisi tõugata näiteks joonlauaga (joon. 21), siis liigub kogu

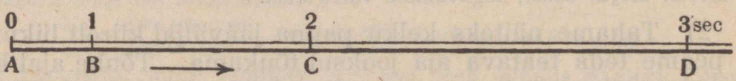
sammas edasi. Anname aga alumise kubiku pihta järsu hoobi, siis paiskub ta üksi minema, kuna teised kubikud jäävad sambana seisma. See katse näitab, et aeglaselt mõjuv jõud paneb liikuma kogu keha (samba), kuna väga lühikest aega mõjuv jõud (löök) paneb liikuma ainult keha selle osa, mille peale jõud otsekohe mõjub: Liikumise tekitamisel peab jõud ületama keha püüet jääda oma kohale (inertsust); mõjub jõud liig järsult (löök), siis võib juhtuda, et see osa kehast, mille peale jõud otse mõjub, hakkab liikuma juba siis, kui keha teiste osade inertsus veel pole ületatud; viimased ei hakkagi siis enam liikuma, vaid keha esimene osa (alumine kubik) eraldub teistest. Samal põhjusel lendab näiteks püssikuul läbi avatud ukse, ilma et uks hakkaks liikuma, kuna ta muidu liigub kõige nõrgemal kui tõukel. Minnes läbi klaasakna teeb kuul klaasi sisse ainult väikse augu, kuna harilikul löögil purustub kogu aknaruut.



Joon. 21.

§ 4. **Mitteühtlane liikumine; keskmine ja tõeline kiirus.** Mitteühtlasel liikumisel käib keha igas sekundis isesuuruse teepikkuse; temal on sellepärast igas sekundis isesugune kiirus. Järjelikult kaotab § 2 nimetatud kiiruse mõiste siin oma tähenduse: Mitteühtlasel liikumisel võib rääkida ainult sellest kiirusest, mis on kehal teatavas kindlas kohas ehk teataval silmapilgul.

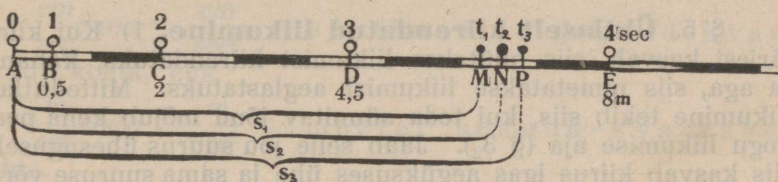
Tõukab vedur vagunit, siis kiireneb vaguni liikumine kogu tõuke ajal. Oli esimeses sekundis käidud teepikkus näiteks *AB* (joon. 22), siis on järgnevates sekundites käidud teepikkused *BC*, *CD* jne. Teadagi on vaguni kiirus punktis




Joon. 22.

*D* suurem kui punktis *C*, seal on ta suurem kui punktis *B* jne. Kui vedur järsku peatub punktis *B* (s. t. esimese sekundi lõpul), siis veereb vagun edasi ainult oma hooga, s. t. ühtlase kiirusega. Sel puhul liigub vagun ka punkti *B* taga sama kiirusega, mis tal oli sel silmapilgul, kui ta läks parajasti läbi punkti *B*. Mõõdame vaguni ühtlast kiirust punkti *B* taga, siis saamegi järjelikult ka selle kiiruse, millega mitteühtlaselt liikuv vagun läheb läbi punkti $B$. Kui vedur peatub alles punktis $C$, siis leiame hooga edasiliikuva vaguni kiirusest ka selle kiiruse, millega mitteühtlaselt liikuv vagun läheb läbi $C$ j. n. e. Mitteühtlase liikumise juures tähendab **„tõeline kiirus antud teepunktis“** seda kiirust, millega keha liiguks ühtlaselt edasi, kui tema peale mõjuv jõud kõrvalduks selles teepunktis.

2) Kui mitteühtlaselt liikuv keha tarvitab pikkuse $AE = 8\ m$ (joon. 23) ärakäimiseks näiteks 4 sekundit, siis võime alati leida seesuguse teise keha, mis sama 4 sekundi jooksul




Joon. 23.

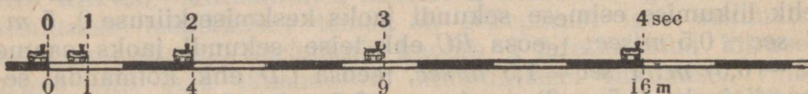
käiks ära sama teepikkuse $AE$ ühtlasel liikumisel. Selle ühtlaselt liikuva teise keha kiirus ($8/4 = 2\ m/sec$) kujutab mitteühtlaselt liikuva esimese keha **keskmist kiirust** teepikkusel $AE$ (ehk ajavältel 0 kuni 4 sekundit). Ka keskmine kiirus ei ole mitteühtlasel liikumisel konstant, vaid ta oleneb valitud tee pikkusest ning kohast. Näiteks saame teeosa $AB$ ehk liikumise esimese sekundi jaoks keskmise kiiruse $0,5\ m : 1\ sec = 0,5\ m/sec$; teeosa $BC$ ehk teise sekundi jaoks saame $(2 - 0,5)\ m : 1\ sec = 1,5\ m/sec$, teeosa $CD$ ehk kolmanda sekundi jaoks $(4,5 - 2)\ m : 1\ sec = 2,5\ m/sec$ j. n. e. Keskmine kiirus leidub selkombel kui tahes väikse teeosa jaoks; näiteks teel $MN = s_2 - s_1$, kus keha liigub ajavälte $t_1$ ja $t_2$ vahel, oleks keskmine kiirus

$$c = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Kuna mitteühtlase liikumise kiirus muutub isegi üksiku sekundi jooksul, siis on keskmine kiirus sekundi esimesel poolel sootumaks teine kui sekundi teisel poolel, sekundi esimesel veerandil teine kui järgmisel veerandil j. n. e. Kuid sekundi esimese ning teise sajandiku jaoks leitud keskmised kiirused lähevad teine-teisest palju vähem lahku kui sekundi esimese ning teise poole jaoks leitud kiirused. Üksteisele järgnevates ajaväldetes mõõdetud keskmised kiirused on nii siis seda sarnasemad, mida lühemad on need ajavälted. Seisavad punktid $M$, $N$ ja $P$ (joon. 23) nii ligistikku, et tee $MN$ ning $NP$ ärakäimiseks kulub lõpmatu lühike ajavälde $(t_2 - t_1)$ ning $(t_3 - t_2)$, siis on nende ajaväldete keskmised kiirused niivõrd sarnased, et neid võib pidada ühesuurusteks. Sel puhul aga võrdub ka see tõeline kiirus, millega keha läheb läbi punkti $N$ (silmapilgul $t_2$), nii ühe kui teisega nendest keskmistest kiirustest. Mida lühemaks teeme teeosa $MN$ (ehk $NP$), s. t. mida väiksema valime ajavälte $t_2 - t_1$, seda sarnasem on selle ajavälte keskmine kiirus silmapilgu $t_2$ tõelise kiirusega. **Ajavälte $t_2 - t_1$ vähenemisel kuni lõpmatu lühikese silmapilguni, läheneb keskmine kiirus piirarvule, mis võrdub mitteühtlase liikumise tõelise kiirusega vaadeldud silmapilgul $t_2$.**

§ 5. **Ühtlaselt kiirendatud liikumine.** 1) Kui kiirus järjest kasvab, siis hüütakse liikumist kiirendatuks, kahaneb ta aga, siis nimetatakse liikumist aeglastatuks. Mitteühtlane liikumine tekib siis, kui teda sünnitav jõud mõjub keha peale kogu liikumise aja (§ $3_2$). Jääb selle jõu suurus ühesuguseks, siis kasvab kiirus igas aegüksuses ühe ja sama suuruse võrra. Sel puhul hüütakse liikumist ühtlaselt kiirendatuks, vastasel korral aga — mitteühtlaselt kiirendatuks.

Ühtlaselt kiirendatud on näiteks raudteerongi liikumine, mis sõidab jaamast välja ning mille vedur tõmbab rongi kogu aja ühetugevalt. Seisaksime rongi platvormil ning tõmbaksime iga sekundi lõpul roopale märgi, siis saaksime joonistusel




Joon. 24.

24 näidatud skaala. Me leiame, et esimese sekundi jooksul sõidetud tee on näiteks 1 *m*, teise jooksul — 3 *m*, kolmanda jooksul — 5 *m*, j. n. e.; sekundis käidud tee pikkus kasvab nii siis igas sekundis ühe ja sama suuruse — 2 meetri võrra. Nagu lähem juurdlus näitab, peab sel puhul ka rongi tõeline kiirus pnnktides 1,2,3,4 j. n e. järjest 2 $^m/_{sec}$ kasvama. Paneksime vedu ril auru näiteks punktis 3 (kolmanda sekundi lõpul) kinni, siis liiguks rong ühtlaselt edasi ning me leiaksime, et selle liikumise kiirus on 6 $^m/_{sec} = 3 \times 2$ $^m/_{sec}$, s. t. tõepoolest nii suur, kui ta peaks olema kiiruse kasvamisel 2 $^m/_{sec}$ võrra igas sekundis.

Kiiruse suurenemist ühe aegüksuse vältel nimetatakse **kiirenduseks.** Ühtlaselt kiirendatud liikumisel on kiirendus nii siis konstant, mitteühtlaselt kiirendatud liikumisel aga on ta muutuv.

2) Olgu ühtlaselt kiirendatud liikumise kiirused silmapilkudel $t_1$ ja $t_2$ vastavalt $v_1$ ja $v_2$. Kiirus kasvab siis ajavältel $t_2 - t_1$ suuruse $v_2 - v_1$ võrra. Järjelikult on kiiruse suurenemine ü h e s aegüksuses ehk

$$\text{kiirendus } p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

s. t. **kiirendus on teatud ajavältel kujuneva kiirusetõusu ning selle ajavälte suhe.**

Et kiiruse nimetus on $cm/sec$ ehk $m/sec$, aja nimetus aga on *sec*, siis on kiirenduse n i m e t u s ehk see üksus, millega kiirendust tuleb mõõta (I, § 63 järele):

$$\frac{cm}{sec} : sec = \frac{cm}{sec^2} =$$ s e n t i m e e t e r s e k u n d - k v a d r a a d i kohta, ehk

$$\frac{m}{sec} : sec = \frac{m}{sec^2} =$$ m e e t e r s e k u n d - k v a d r a a d i kohta.

Kasvab kiirus igas sekundis $p$ võrra, siis kasvab ta $t$ sekundi lõpuks suuruseni $t \times p$. $t$ sekundit peale liikumise algust on seega n. n. l õ p p k i i r u s

$$\mathbf{v = p.\,t.} \tag{3}$$

3) Hakkab paigalseisev keha liikuma ühtlaselt kiirendatult, siis kasvab tema kiirus $t$ sekundi jooksul nullist kuni lõppkiiruseni $v = pt$. Võib tõestada, et see keha käib $t$ sekundi jooksul samapika tee kui mingu ü h t l a s e l t liikuv kehagi, mille kiirus võrdub esimese keha alg- ja lõppkiiruse aritmeetilise keskarvuga $c = \frac{o + v}{2} = \frac{pt}{2}$; ühtlasel liikumisel aga on $t$ sekundis käidav tee (formul 2):

$$s = ct = {}^1/_2\, pt.\, t = {}^1/_2\, pt^2$$

järjelikult on ka ühtlaselt kiirendatud liikumise tee sama

$$\mathbf{s = {}^1/_2\, p\, t^2} \tag{4}$$

Täpsemalt tuletub see tähtis formul järgmiselt: Jagame ühe sekundi $n$ lõpmatuväikseteks ajaväldeteks $\tau$, nii et $\tau = 1/n\ sec$; kui ühtlaselt kiirendatud liikumise kiirendus on $p$, siis suureneb kiirus igas seesuguses lühikeses ajavältes suuruse $\tau p = p/n = w$ võrra (formul 3). Kui $n$ valida küllalt suur, siis on $\tau$ nii väike, et võib oletada ilma tuntava veata, et kiirus üldse ei muutu tema vältel, vaid et keha liigub iga seesuguse ajavältekese jooksul ü h t l a s e l t. Sellel oletusel tuleb pidada suurust $w$ keha kiiruseks esimeses ajavältes $\tau$ (sest kiirus on esimese $\tau$ l õ p u l $w$); ühtlasel liikumisel aga oleks siis esimeses ajavältes $\tau$ käidud tee $w\tau$ (formul 2). Teises ajavältes $\tau$ oleks keha kiirus samal oletusel $2w$, sest et kiirus peab iga $\tau$ jooksul kasvama $w$ võrra; käidud tee oleks teise $\tau$ sees sellepärast $2\,w\tau$, kolmanda $\tau$ sees — $3\,w\tau$ j. n. e. Kogu liikumisaeg $t$ sekundit sisaldab $nt$ seesuguseid ajavälteid $\tau$; viimase $\tau$ sees (enne liikumise lõppu) oleks käidud tee järjelikult $nt.\ w\tau$. Ajavältel $t$ ärakäidud tee kogupikkus $s$ võrdub kõigi nende $nt$ teeosade summaga, s. t.

$$s = w\tau + 2w\tau + 3w\tau + \ldots + nt.\ w\tau$$

ehk

$$s = w\tau\,(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots nt).$$

Klambrites on aritmeetiline progressioon, mille liigete summa on $\left(\frac{1+nt}{2}\right) nt$

seega on

$$s = w\tau\left(\frac{1+nt}{2}\right).\ nt = w\tau.\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}+t\right).\ nt.$$

Et $\tau = 1/n$ ning $wn = p$, siis järgneb sellest

$$s = \frac{wn}{2}.\left(\frac{1}{n}+t\right).t = \frac{p}{2}.\left(\frac{1}{n}+t\right).t$$

Teeme $n$ lõpmatu suureks, siis saab $1/n = \tau$ lõpmatu väikseks. Küllalt suure $n$ puhul on $1/n$ järjelikult null. Sel puhul saamegi viimasest võrrandist:

$$s = 1/2\, pt^2$$

4) Võrranditest (3) ja (4) tuletuvad kõik need suurused, mis määravad ära ühtlaselt kiirendatud liikumise: Võrrand (4) annab

$$t = \sqrt{\frac{2s}{p}} \qquad (5)$$

$$p = \frac{2s}{t^2} \qquad (6)$$

Formuli (5) abil saame (3)-est:

$$v = \sqrt{2ps} \qquad (7)$$

$$s = \frac{v^2}{2p} \qquad (8)$$

**Näited:** 1. Paigalseisev vedur hakkab liikuma kiirendusega $p = 0{,}20\ m/sec^2$.

a) Missuguse kiirusega liigub ta peale 1,5 minutilist sõitu?

Formulist (3) järgneb

$$v = pt = 0{,}20\ \frac{m}{sec^2}\ .\ 1{,}5\ .\ 60\ sec = 18\ \frac{m}{sec} = 64{,}8\ \frac{km}{tn}.$$

b) Kui kaugele jõuab ta selle aja jooksul?

Formulist (4) saame:

$$s = 1/2\ pt^2 = 1/2\ 0{,}20\ \frac{m}{sec^2}.\,(1{,}5\ .\ 60\ sec)^2 = 1/2\ .\ 0{,}20\ \frac{m}{sec^2}.\ 8100\ sec^2 = 810\ m$$

2. Kelk hakkab ühtlaselt kallakult alla libisema ja omandab 150 $m$ lõpul kiiruse 6 $m/sec$.

a) Kui suur on kelgu kiirendus?

Formulist (8) saame:

$$p = \frac{v^2}{2s} = \frac{(6\,m/sec)^2}{2\,.\,150\,m} = \frac{36\ m^2/sec^2}{300\ m} = 0{,}12\ m/sec^2;$$

b) Kui palju aega tarvitab kelk 150 *m* võrra allaliugumiseks?

Formul (3) annab:

$$t = \frac{v}{p} = \frac{6\ m/sec}{0{,}12\ m/sec^2} = 50\ sec.$$

ehk formul (5)

$$t = \sqrt{\frac{2\,s}{p}} = \sqrt{\frac{2\,.\,160\ m}{0{,}12\ m/sec^2}} = \sqrt{2500\ sec^2} = 50\ sec.$$

2) Suurtüki torust, mille pikkus 1,5 *m*, lendab kuul välja kiirusega 600 *m/sec*. Katsed näitavad, et peale püssirohu süütumist on kuuli liikumine torus ühtlaselt kiirendatud.

a) Missuguse ~~kiirusega~~ kiirendusega liigub kuul torus?

Formulist (4) leiame:

$$p = \frac{v^2}{2s} = \frac{(600\ m\,/\,sec)^2}{2.1{,}5\ m} = \frac{360.000\ m^2\,/\,sec^2}{3\ m} = 120000\ m\,/\,sec^2.$$

b) Kui kaua liigub kuul torus?

Formulist (3) leiame:

$$t = \frac{v}{p} = \frac{600\ m\,/\,sec}{120000\ m\,/\,sec^2} = 0{,}003\ sec. = 0{,}005\ sec.$$

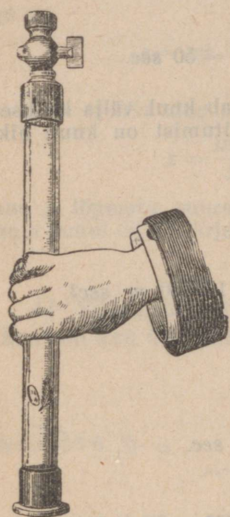
§ 6. **Mitteühtlaselt kiirendatud liikumisel** ei kasva kiirus igas sekundis ühevõrra; sellepärast muutub kiirenduse suurus kogu liikumise aeg. Samuti kui muutuva kiiruse puhul (§ $4_2$), nii ka muutuva kiirenduse jaoks võib tarvitada mõisteid „keskmine ja tõeline kiirendus“. Kasvab kiirus näiteks ajavältel $t_1$ kuni $t_2$, mistahes seaduse järele suurusest $v_1$ kuni $v_2$, siis on selle ajavälte keskmine kiirendus

$$p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

sest iga teine keha, mis liiguks ühtlaselt kiirendatult sama kiirendusega *p*, käiks ajavältel $t_2 - t_1$ sama pika tee.

Üksteisele järgnevate ajaväldete $(t_2 - t_1)$ ja $(t_3 - t_2)$ jaoks leitud keskmised kiirendused (joon. 23) erinevad üksteisest seda vähem, mida lühemad on need ajavälted (§ $4_2$). Valime ajavälted lõpmatu lühikesed, siis on nende keskmiste kiirenduste vahe nii väike, et neid võib pidada ühesuuruseks. Sel puhul võrdub keskmine kiirendus selle „tõelise kiirendusega“, millega keha liigub silmapilgul $t_2$. Silmapilgul $t_2$ (ehk selles punktis, kus keha viibib sel silmapilgul) võrdub keha tõeline kiirendus nii siis selle piirarvuga, millele läheneb keskmine kiirendus, kui ajavälde $t_2 - t_1$ läheneb nullile.

§ 7. **Kehade langemine; õhutakistus.** 1) Teatavasti langeb kerge udusulg palju aeglasemalt kui raske kivike. Kuni Galilei ajani (1564—1642) oldi arvamisel, et rasked kehad langevad üldse kiiremini kui kerged. Galilei aga tõestas, et kehade mitmesugune langemiskiirus on tingitud ainult sellest takistusest, mida õhk avaldab langeva keha peale: Kui näiteks paberleht lõigata pooleks, üks pool pigistada kägaraks kokku, teine pool aga jätta sirgeks, siis langeb kägaras pool kiiremini kui sirge, olgugi et mõlemad on üheraskused; papist ring jõuab serviti varemalt maha kui lapiti j. n. e. See näitab, et ühe ja sama keha juures oleneb langemiskiirus keha kujust, ruumalast, seisust j. n. e. Nimelt need aga määravadki õhutakistuse suuruse. Õhutakistus on näiteks seda suurem, mida suurem on vastu liikumist seisev kehapind. Udusulel on see pind palju suurem kui samaraskel metallteral; sellepärast takistub udusule langemine rohkem kui metallterakese oma.



Joon. 26.

Paneme udusule ning metalltüki pika klaastoru sisse (joon. 26) ning pumpame torust õhu välja, siis näeme, näiteks toru järsul ümberpöörmisel, et mõlemad kehad langevad ühel ajal toru põhja. Seesugustest katsetest selgub, et **õhuta ruumis langevad kõik kehad ühetaoliselt.**

Et raskete ja väikepinnaliste kehade juures (metallkera, kivi) on õhutakistus õige väike, siis langevad kõik seesugused kehad õhus peaaegu samal kombel kui õhuta ruumiski. Väiksed, rasked kehad langevad ka õhus ühesuguse kiirendusega.

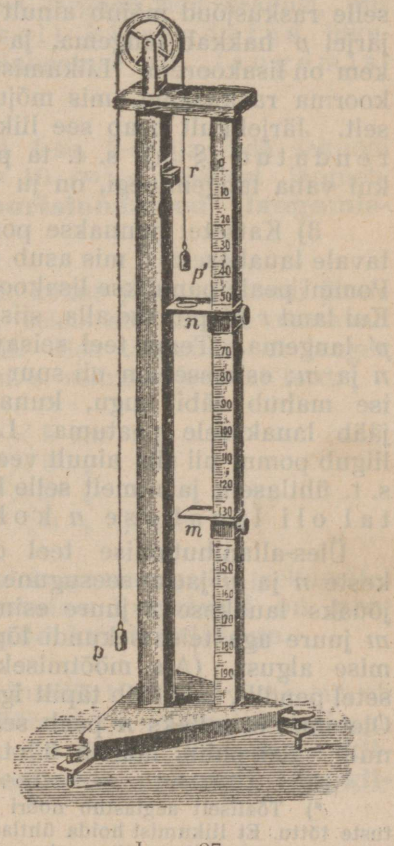
2) Õhutakistuse põhjuseks on õhuosakeste inertsus ning osalt ka nende hõõrumine: Langev keha peab tõukama kõrvale need õhuosakesed, mis seisavad tema teel. Jääväljal seisva kelgu tõukamisel aga tundub nagu tõukaks kelk omakord meid tagasi; kelgu inertsus avaldub nii siis jõuna, mis on sihitud meie enese liikumise (tõuke) vastu. Samal kombel ka õhuosakeste inertsus avaldub jõuna, mis on sihitud vastu langeva keha liikumist ning mis aeglastab liikumist. Jookseme suure kiirusega vastu paigalseisvat kelku, siis tundub põrge (takistus) seda tugevamana, mida suurem oli meie kiirus. Samuti ka õhutakistusel: mida kiiremini langeb keha, seda suuremaks kasvab õhutakistus. Newton leidis, et **õhutakistus on proportsionaalne keha kiiruse kvadraa-**

**diga.** Kiirusel 2 *m/sec* on õhutakistus nii siis mitte ainult 2, vaid 4 korda suurem kui kiirusel 1 *m/sec.*

Et keha hakkab liikuma seda kiiremini, mida sügavamale ta langeb, siis kasvab õhutakistus keha langemisel järjest suuremaks. Lõpuks tuleb seesugune silmapilk, kus õhutakistus saab saamasuureks kui keha raskusjõud; siis tasakaalustuvad mõlemad ning keha langeb edasi ühtlaselt. Õhus langeva keha kiirendus peab nii siis järk-järgult kahanema kuni nullini; langemine õhus on järjelikult mitteühtlaselt kiirendatud liikumine.

Eiffeli tornis korraldatud katsed näitavad, et plaadisarnaste kehade langemisel muutub liikumine ühtlaseks peale selle, kui keha on langenud umbes 60—100 *m* võrra. Teisekujuliste kehade juures on see arv teistsugune.

§ 8. **Vaba langemise seadused.** 1) Vabaks hüütakse seda langemist, millel ainuüksi keha raskusjõud tekitab liikumist. Et keha langeks vabalt, ei tohi tema saada langemise algul tõuget, ega tohi ta peale mõ uda langemise ajal takistusi. Kuna väikepinnaliste raskete kehade juures on õhutakistus tähtsuseta (§ 7), siis võib pidada vabaks näiteks käest ilma tõuketa lahtilastud metallkera langemist.



Joon. 27.

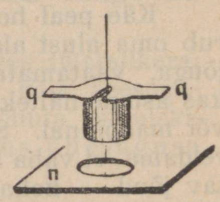
Käe peal hoitud keha surub oma alust alati ühesuuruse jõuga, vaatamata selle peale, kas asume näiteks maja katusel või maapinnal. Sellest peab järeldama, et vaba langemist tekitav jõud — keha raskusjõud — jääb samasuureks ka siis, kui see keha on parajasti langemas. Jääb aga liikumist tekitav jõud ühesuuruseks, siis kujuneb ühtlaselt kiirendatud liikumine (§ 51). Seesugune peabki olema järjelikult ka vaba langemine.

2) Harilikkudel oludel sünnib keha langemine nii kiirelt et seda liikumist on raske jälgida. Langemisseaduste tundmaõppimiseks sünnitatakse sellepärast kunstlikult aeglasem liikumine, mis on oma iseloomu poo-

lest aga samasugune kui vaba langeminegi. Harilikult tarvitatakse selleks tema leidja järele nimetatud Atwodi langemismasinat (joon. 27): Viimast moodustab umbes 2 meetri pikkune sammas, mille otsa on kinnitatud võimalikult väikse hõõrumisega tiirlev rattake. Üle ratta on tõmmatud kerge ja painduv siidnöör; selle mõlemas otsas ripub raskem metallpomm (*p* ja *p'*). Et pommid on üheraskused, siis tõmbavad nad nööri mõlemat otsa ühetugevalt alla; seega mõjuvad need tõmbed ühetugevuselt teine-teise vastu ning nad ei avalda nööri peale mingit nähtavat mõju: nöör seisab paigal, nagu ei oleks pomme olemaski. Anname ühele pommile väikse tõuke — näiteks ülevalt alla, siis hakkab see pomm langema, teine aga vastavalt tõusma. See liikumine peab olema ühtlane, sest peale silmapilkse tõuke ei mõju kehade peale enam ühtki jõudu, mis võiks muuta liikumist.*)

Paneme paigalseisva pommi *p'* peale mingi lisakoorma; selle raskusjõud mõjub ainult nööri ühe otsa peale, mille tagajärjel *p'* hakkab langema, ja nimelt seda kiiremini, mida raskem on lisakoorem. Liikumise tekitajaks on nüüd ainult lisakoorma raskusjõud, mis mõjub kogu liikumisaeg ühetugevuselt. Järjelikult peab see liikumine olema ühtlaselt kiirendatud (§ 51), s. t. ta peab alluma samadele seadustele kui vaba langeminegi, on ju viimane ka ühtlaselt kiirendatud.

3) Katsetel pannakse pomm *p'* sharniiri ümber allaklapitavale lauakesele *r*, mis asub sentimeeterskaala o-punkti kohal. Pommi peale pannakse lisakoormaks piklik plaadike *q* (joon. 28). Kui laud *r* klapitakse alla, siis hakkab pomm *p'* langema. Tema teel seisavad 2 lauakest *n* ja *m*; esimesel on nii suur auk, et pomm ise mahub läbi augu, kuna lisakoorem *q* jääb lauakesele peatuma. Lauakese *n* all liigub pomm nii siis ainult veel inertsi mõjul, s. t. ühtlaselt, ja nimelt selle kiirusega, mis tal oli lauakese *n* kohal (§ 41).



Joon. 28.

Üles-allanihutamise teel otsitakse lauakeste *n* ja *m* jaoks seesugune koht, et pomm jõuaks lauakese *n* juure esimese, lauakese *m* juure aga teise sekundi lõpul peale liikumise algust. (Aja mõõtmiseks tarvitatakse seesugustel katsetel pendlit, mis lööb täpilt iga sekundi järele kellakest vastu). Oletame, et selleks *n* peab seisma 5 *cm* ning *m* 15 *cm* allpool nulli. Sel puhul langeb ühtlaselt liikuv pomm teises se-

*) Tõeliselt aeglastub nööri ja pommide liikumine hõõrumistakistuste tõttu. Et liikumist hoida ühtlasena, pannakse allaliikuva pommi peale väike metallsheibike, mille raskus nii on valitud, et ta ei suuda tõmmata paigalseisvat pommi liikuma, vaid et ta ainult kaalub üles kõik hõõrumistakistused. Selle sheibiga jääb nimetatud liikumine tõepoolest ühtlaseks.

kundis 15 — 5 = 10 *cm*, s. t. tema kiirus on 10 *cm/sec*. Samasuur peab olema kiirendatud liikumise tõeline kiirus esimese sekundi lõpul (lauakese *n* kohal). Nüüd nihutame lauakesed niipalju allapoole, et pomm jõuaks *n* juure 2-se ning *m* juure 3-da sekundi lõpul; katse näitab et lauakesed peavad selleks seisma 20 ning 40 *cm* allpool nulli. Järjelikult on pommil teise sekundi lõpul tõeline kiirus 20 *cm/sec* (sest 3-das sekundis käidud tee on 20 *cm*). Kui tahame, et pomm jõuaks *n* kohale 3-da ning *m* kohale 4-da sekundi lõpul, siis peavad lauakesed seisma 45 ning 75 *cm* allpool nulli; järjelikult omandab pomm 3-da sekundi lõpuks kiiruse 30 *cm/sec* (75 — 45 = 30 *cm*) jne. Kiirendatud liikumisel on pommi kiirused 1-se, 2-se ja 3-da sekundi lõpul nii siis 10, 20 ja 30 *cm/sec*, s. t. **langemisel kasvab kiirus igas sekundis ühe ja sama suuruse** (10 *cm/sec*) **võrra.**

4) Ülevalkirjeldatud katsetest järgneb rida seadusi, mis on maksvad igasuguse ühtlaselt kiirendatud liikumise jaoks, ning mis tuntud erinimetuse all „langemisseadused“.

a) Katsel olid lõppkiirused 1-se, 2-se ja 3-da sekundi lõpul vastavalt 10, $2 \times 10$, $3 \times 10$ *cm/sec*. Sellest järgneb, et **lõppkiirused on proportsionaalsed langemisaegadega.**

b) Jõudis pomm ühe, kahe, kolme j. n. e. sekundi järele esimese lauakese *n* kohale, siis seisis see lauake vastavalt 5, 20, 45 j. n. e. *cm* allpool nulli. See tähendab, et langev pomm käib ühe, kahe, kolme j. n. e. sekundi jooksul teed

$$
\begin{array}{lcl}
5\ cm & = & 1 \times 5\ cm \\
20\ „ & = & 2^2 \times 5\ „ \\
45\ „ & = & 3^2 \times 5\ „ \\
80\ „ & = & 4^2 \times 5\ „ \quad \text{j. n. e.}
\end{array}
$$

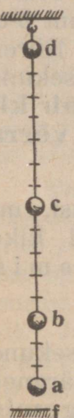
Et 1, $2^2$, $3^2$, $4^2$ j. n. e. on langemisaegade (sekundite) kvadraadid, siis selgub, et **langemise koguteed on proportsionaalsed langemisaegade kvadraatidega.**

c) Et kiirus kasvab igas sekundis 10 *cm/sec* võrra, siis oli kirjeldatud katsel kiirenduse mõõtarv 10. Samal katsel aga oli ka esimese sekundi lõppkiirus 10 *cm/sec*. Tähendab: **kiirendus võrdub arvuliselt esimese sekundi lõppkiirusega.**

d) Selgus (p. 3), et kiirendusel 10 langeb keha esimese sekundi jooksul 5 *cm* võrra. Sellest järgneb, et **esimese**

**sekundi langemistee võrdub arvuliselt poole kiirendusega.**

e) Langemistee oli esimese sekundi jaoks 5 *cm*, teise jaoks 20 — 5 = 15 *cm*, kolmanda jaoks 45 — 20 = 25 *cm* j. n. e.; samal ajal oli kiirendus 10. Sellest järgneb, et **ühe sekundi langemistee kasvab iga sekundi järele kiirenduse mõõtarvu võrra.**



Joon. 29.

5) Harilikul vabal langemisel on kiirused teadagi palju suuremad kui eelmisel katsel. Kuid, nagu juba tähendatud, allub ka see langemine ülevalleitud seadustele.

Katseliselt võib seda tõestada järgmiselt: Vabalt allarippuva pika nööri külge (joon. 29) seotakse 4 metallkera sel kombel, et nende kaugused oleksid põrandalt näiteks $af = 20$ *cm*, $bf = 2^2.20 = 80$ *cm*. $cf = 3^2.20 = 180$ *cm*, $df = 4^2.20 = 320$ *cm*. Kui seesuguse nööri ülemine ots lasta lahti, siis kuuleme, et kerad langevad põrandale järgemööda, ja nimelt ühesuguste ajaväldete järele. Viimane kera (*d*) tarvitab nii siis põrandani jõudmiseks 4 korda rohkem aega kui esimene kera (*a*); ühtlasi on tema langemistee (*df*) $4^2$ korda suurem kui esimese kera oma (*af*). Seega sünnib vaba langemine tõepoolest seaduse (*b*) järele.

Seaduste (*a*) kuni (*e*) abil leidub täitsa vabalt langeva keha kiirendus: Langetame näiteks väikse raske metallkera (mille juures õhutakistuse mõju on tähtsuseta) järjest ikka kõrgemalt alla ning otsime sel teel niisuguse kõrguse, kust kera jõuab parajasti ühe sekundi jooksul alla. Katse näitab, et see kõrgus on alati umbes 5 *m*. Et esimese sekundi langemistee võrdub kiirenduse mõõtarvu poolega (seadus *d*), siis peab kiirendus olema 10, s. t. **vabal langemisel kasvab kõigi kehade kiirus igas sekundis umbes 10 m/sec.**

Täpsemad mõõtmised näitavad, et meie juures on see kiirusetõus 9,81 *m/sec*. Seda arvu — vaba langemise kiirendust — kujutatakse alati tähega *g*; tema suurus ei ole kogu maapinnal ühesugune, vaid ta on kohati suurem, kohati väiksem. 9,81 on ta keskmisel geograafilisel laiusel ($45^0$ all).

Loeme vabalt langeva keha kiirenduseks ümarikult 10, siis järgneb seadusest (*d*), et esimese sekundi langemistee on 5 *m*; järgnevates sekundites aga langeb keha seaduse (e) põhjal:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1-se | sekundi | välte | 5 m | = **1** . 5 |
| 2-se | „ | „ | 5 + 10 m | = **3** . 5 |
| 3-da | „ | „ | 15 + 10 m | = **5** . 5 |
| 4-da | „ | „ | 25 + 10 m | = **7** . 5 |
| 5-da | „ | „ | 35 + 10 m | = **9** . 5 j. n. e. |

Sellest saame eelmistele seadustele lisaks: Üks-teisele järgnevate sekundite langemisteed on proportsionaalsed järjekordsete paarita arvudega.

6) Et vaba langemine sünnib alati ühtlaselt kiirendatult, siis allub ta formulitele (3) kuni (8). Langemise puhul pannakse nendesse formulitesse $p$ asemele langemiskiirendus $g$ ning teepikkuse $(s)$ asemele langemiskõrgus $h$:

$$v = gt \quad (9) \qquad h = 1/2\, gt^2 \quad (10)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (11) \qquad h = \frac{v^2}{2g} \quad (12)$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (13) \qquad g = \frac{2h}{t^2} \quad (14)$$

**Näited:** 1) Kui õhutakistust ei võeta arvesse ning kui $g = 10$ $(m/sec^2)$, kui suur on siis keha lõppkiirus 8 sekundilise langemise järele?

Seaduse (a) järele on lõppkiirus 8 korda suurem kui esimese sekundi lõpul. Viimane kiirus aga on 10 $m/sec$ (seadus *c*); järjelikult on 8-da sekundi lõppkiirus

$$v = 8 \times 10 \frac{m}{sec} = 80 \frac{m}{sec}.$$

2) Kui suur on langemistee 8-mas sekundis?

§ $8_5$ nimetatud seaduse järele on 8-ma sekundi langemistee nii mitu korda suurem esimese sekundi omast (5 $m$), kui mitu korda 8-mas paarita arv on suurem esimesest (1). See arv aga on 15. Seega on 8-ma sekundi langemistee

$$h_8 = 15 \times 5\, m = 75\, m.$$

3) Kui pikk on kogu langemistee?

Seadus (*b*) järele on kogutee $8^2$ korda suurem esimese sekundi langemisteest (5 $m$), s. t.

$$h = 8^2 . 5\, m = 320\, m.$$

4) Tõstekorv langeb vabalt 400 $m$ sügavusse shahti.

a) missuguse kiirusega jõuab ta põhja, kui $g = 9{,}81$ $m/sec^2$ ja kui õhutakistust mitte arvesse võtta?

Formulist (13) leiame

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \frac{m}{sec^2} \,.\, 400\ m} = 88{,}6 \frac{m}{sec.}$$

b) Kui kaua kestab langemine?

Formul (11) annab:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 400\ m}{9{,}81\ \ m/sec^2}} = 9{,}03\ sec.$$

Võib tarvitada ka formulit (9), millest järgneb

$$t = \frac{v}{g} = \frac{88{,}6 \quad m/sec}{9{,}81 \quad m/sec^2} = 9{,}03 \; sec.$$

5) Vabalt langev kivi jõuab puurkaevu veepinnani 3,5 sekundi jooksul.

a) Kui sügaval on puurkaevu veepind?

Formulist (10) leiame

$$h = {}^1/_2\, gt^2 = {}^1/_2 \,.\, 9{,}81 \,\frac{m}{sec^2}\,.\,(3{,}5 \; sec)^2 = 60{,}085 \; m$$

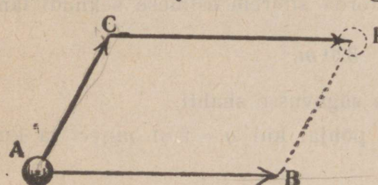
b) Missuguse kiirusega jõuab kivi veepinnale?

Formul (9) annab

$$v = gt = 9{,}81 \,\frac{m}{sec^2}\,.\, 3{,}5 \, sec = 34{,}3 \frac{m}{sec}.$$

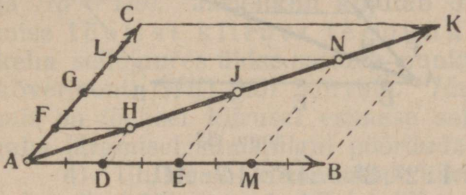
§ 9. **Liikumiste olenematuse printsiip.** Kui reisija tahaks visata sõitvas vagunis märki, siis trehvaks ta vaguni seina samaheasti kui paigalseisvas vaguniski; rahulikult edasisõitval laeval võib mängida koguni piljardit, ilma et laeva edasiliikumine kuidagiviisi segaks palli veeremist: Tõugatud palli ja visatud kivi liikumine ei olene nii siis sellest, kas seisab või liigub see alus, millel sünnitatakse ja vaadeltakse keha liikumist. Newton leidis, et asjaolu on samasugune kõigil liikumistel: **Üks liikumine** (näit. laeva edasiliikumine) **ei sega teist** (palli veeremist) **vaid liikumised sünnivad alati teine-teisest olenemata.** See seadus on tuntud „liikumiste olenematuse printsiibi“ ehk „Newtoni II põhiseaduse“ nimetuse all (I seadus v. § 31).

Tõukame paigalseisva laeva lael asuvat kera *A* selkombel, et ta jõuaks näiteks ühe sekundi jooksul punkti *C* (joon. 31). Sinna seismajäänud kera liigub laeva sõitmahakkamisel sihis *CK* ühes laevaga edasi ning jõuab ühe sekundi jooksul punkti *K*. Liikumine *AC* ei olene sellest, kas sõidab laev või seisab ta paigal; sellepärast ei muutu midagi, kui mõlemad liikumised sünnivad ühel ajal: Tõukaksime kera edasisõitva laeva lael samal kombel kui esiti, siis jõuaks ta ühe sekundi järele maapinna suhtes ikkagi samasse punkti *K*. Liikumiste olenematuse printsiibist järgneb nii siis seadus: Kui keha võtab ühel ajal osa kahest liikumisest (*AC* ja *AB*), siis jõuab ta samasse punkti, kuhu ta jõuaks sel juhusel, kui need liikumised sünniksid üks-teise järele.



Joon. 31.

§ 10. **Liikumiste, kiiruste ja kiirenduste liitmine.** 1) Liikugu jõel asuv purjepaat $A$ ainult veevoolu mõjul näiteks 4 sekundi jooksul pikkuse $AB$ võrra piki jõge edasl (joon. 32). Kui paat asuks seisvas vees, siis tõukaks tuul teda sama aja jooksul tee $AC$ võrra kõrvale.



Joon. 32.

Mõjub tuul ja vool ühel ajal, siis jõuab paat 4 sekundi järele samasse punkti, kuhu ta jõuaks siis, kui mõlemad liikumised sünniksid üksteise järele, s. t. kui paat liiguks esiteks tee $AC$ ning siis tee $CK$ (mis võrdne ja paralleelne $AB$-ga). Nelinurk $ACKB$ kujutab parallelogrammi, mille külgedeks on liidetavad liikumised $AB$ ja $AC$ — n. n. komponentliikumised. Sellest järgnebki n. n. liikumiste paralleelogrammi seadus: **Kui keha võtab ühelajal osa kahest komponentliikumisest, siis jõuab ta punkti, mis asub komponentteedele** *(AB* **ja** *AC)* **konstrueeritud paralleelogrammi neljandal tipul** *(K).*

Sama seaduse järele leidub keha asukoht ka igal teisel silmapilgul. On komponentliikumised ühtlased, siis jõuab keha näiteks 2-se sekundi lõpul paralleelogrammi $AGJE$ tippu $J$, esimese sekundi lõpul — paralleelogrammi $AFHD$ tippu $H$ jne. Punktid $A, H, J, K,$ määravad keha tõelise ehk resultant-tee. Järjelikult leidub kogu resultanttee sama paralleelogrammi seaduse abil (teede paralleelogramm).

2) Resultanttee kuju oleneb komponentliikumiste iseloomust. Resultanttee on sirgjooneline ainult siis, kui mõlemad komponentliikumised on kas ühtlased ehk ühtlaselt kiirendatud (aeglastatud).

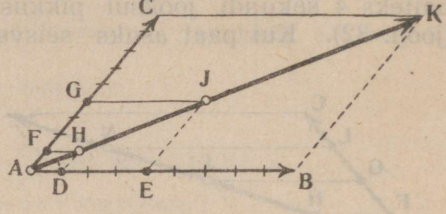
Tõestus a) Ühtlastel liikumistel on ühe, kahe, kolme j. n. e. sekundi liikumisteede suhe (joon. 32):

$$AD : AE : AM : AB = 1 : 2 : 3 : 4 = AF : AG : AL : AC,$$

paralleelogrammide tipud $H, J, N, K$ peavad seisma sirgjoonel $AK$ sest et

$$AF : AG : AL : AC = FH : GJ : LN : CK$$

Peale selle järgneb kolmnurkadest, et ühe sekundi resultantteed $AH$, $HJ$, $JN$ ja $NK$ on võrdsed s. t. et ühtlaste komponentliikumiste resultantliikumine on ühtlane ja sirgjooneline; resultantteeks on teeparalleelogrammi diagonaal.



Joon. 33.

b) Ühtlaselt kiirendatud liikumiste puhul (joon. 33) on esimese, teise ja kolmanda sekundi lõpuni käidud teede suhe (seadus b, § 84):

$$AD : AE : AB = 1 : 2^2 : 3^2 = AF : AG : AC,$$

millest järgneb, et

$$AF : AG : AC = FH : GJ : CK$$

s. t. punktid $A$, $H$, $J$, ja $K$ asuvad ühel sirgjoonel.

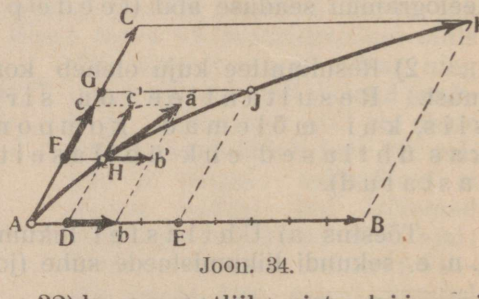
Pealegi on:

$$AH : AJ : AK = AF : AG : AC = 1 : 2^2 : 3^2$$

mis näitab, et resultantliikumine $AK$ on ühtlaselt kiirendatud: Ühtlaselt kiirendatud liikumiste resultantliikumine on ka ühtlaselt kiirendatud ning sirgjooneline; tema teeks on teedeparalleelogrammi diagonaal.

c) On üks komponentliikumine ühtlane, teine aga ühtlaselt kiirendatud ehk mingi teistsugune mitteühtlane liikumine, siis on resultantliikumine kõverjooneline. Ka sel juhusel leiduvad resultanttee üksikud punktid paralleelogrammi seaduse järele.

On $AB$ näiteks ühtlaselt kiirendatud ning $AC$ ühtlane liikumine (joon. 34), siis leiame resultanttee punktid $H$, $J$, $K$, kui ühe, kahe, kolme jne. sekundi komponentteede ($AD$, $AE$ ja $AB$) peale ehitame paralleelogrammid. Konstruktsioon näitab, et komponenttee on sel puhul kõverjoon $AK$.



Joon. 34.

3) Sirgjoonelisel ühtlasel liikumisel kujutavad 1 *sec* jooksul käidud teed $AF$ ja $AD$ (joon. 32) komponentliikumiste kiirusi. Samal ajal käidud resultanttee $AH$ aga kujutab resultantliikumise kiirust. **Resultantkiiruse määrab järjelikult komponentkiirustele** *(AE* **ja** *AD)* **konstrueeritud paralleelogrammi diagonaal** *(AH)*; (kiiruste paralleelogramm).

See seadus on maksev ka mitteühtlaste liikumiste puhul: kujutavad vektorid $Fc$ ja $Db$ keha tõelist kiirust punktides

*F* ja *D* ehk esimese sekundi lõpul (joon. 34), siis tähendab see, et keha jõuaks järgmise sekundi jooksul *Fc* ja *Db* võrra edasi, kui jõudude mõju kõrvalduks punktides *F* ja *D* (§ $4_1$). Resultantliikumisel peab keha jõudma sama sekundi jooksul *Ha* võrra edasi (teede paralleelogramm *Hb'ac'*, kus $Hc' = Fc$ ja $Hb' = Db$). Järjelikult kujutab diagonaal *Ha* resultantliikumise t õ e l i s t k i i r u s t t e e p u n k t i s *H*. Teadagi ei pruugi keha sellejuures üldse sattuda punkti *a*, vaid ta võib pöörduda kõverjoont *(HK)* pidi kõrvale. *Ha* näitab ainult seda sihti, mis on tõelisel kiirusel esimese sekundi lõpul ning mis võib juba järgmisel silmapilgul pöörduda uute seisu.

4) Ühtlaselt kiirendatud liikumisel võrduvad esimeses sekundis käidud teed *AD* ja *AF* (joon. 33) poole kiirendusega (seadus d, § $8_4$). Järjelikult kujutavad *AD* ja *AF* k o m p o n e n t k i i r e n d u s i, *AH* aga — r e s u l t a n t k i i r e n d u s t. Samuti kui kiiruste puhul, nii võib ka kiirenduste jaoks tõestada, et nad liituvad kõigil juhustel paralleelogrammi seaduse järele: **Kehale antud kahe komponentkiirenduse tagajärjel tekkiva resultantkiirenduse määrab paralleelogrammi diagonaal, mis konstrueeritud komponentkiirendustele.**

5) Sünnivad mõlemad komponentliikumised ühes ja samas sihis, siis saab paralleelogrammi nurk *BAC* nulliks ning diagonaal *AK* võrdub komponentteede (kiiruste, kiirenduste) summaga: **Võtab keha ühel ajal osa kahest liikumisest, mis on ühtepidi sihitud, siis võrdub resultanttee (kiirus kiirendus) komponentteede (kiiruste, kiirenduste) summaga** (võrdle ka joon. 44).

Sünnivad aga mõlemad liikumised o t s e v a s t u p i d i s e s sihis, siis on nurk $BAC = 180°$ ning diagonaal võrdub komponentteede vahega: **Otse vastupidi sihitud liikumiste resultanttee (kiirus, kiirendus) võrdub komponentteede (kiiruste, kiirenduste) vahega** (võrdle ka joon. 45).

## § 11. Teede, kiiruste ja kiirenduste lahutamine.

Iga sirgjoont võib pidada mingi paralleelogrammi diagonaaliks; seesuguse diagonaali peale aga võib konstrueerida mistaheskujuline paralleelogramm. Kujutab sirgjoon (diagonaal) antud liikumise teed (kiirust, kiirendust), siis kujutaksid temale konstrueeritud paralleelogrammi küljed kahte komponentteed (kiirust, kiirendust) millest võiks seista koos antud liikumine. Paralleelogrammi seaduse abil võib nii siis l a h u t a d a iga liikumist kaheks komponentliikumiseks. Et ühe diagonaali peale võib konstrueerida lõpmatu palju paralleelegramme, siis on lahutamisülesanne ühemõtteliselt lahendatav ainult sel juhusel, kui peale antud liikumise (diagonaali) veel on tuntud mõned lisatingimused, näiteks ühe komponenttee siht ja suurus, mõlemate suurus või mõlemate siht.

Olgu purjepaadi näitel (joon. 32) antud suuruseks paadi tõeline kiirus $AK$; peale selle olgu tuntud tuule ning voolu sihid ($AC$ ja $AB$). Tõmbame punktist $K$ paralleeljooned nendele sihtidele, siis saame parallelogrammi, mille külgede $AB$ ja $AC$ pikkus määrab voolu ning tuulega tekkivate kiiruste suurused.

## § 12. **Vertikaalselt allavisatud keha liikumine; algkiirusega algav ühtlaselt kiirendatud liikumine.**

1) Viskame kivi vertikaalselt alla, siis anname talle sellega juba algusest peale teatava algkiiruse $c$, millega ta liiguks ühtlaselt edasi, kui ei oleks teisi jõude, mis muudavad seda liikumist. Praegusel juhusel on seesuguseks jõuks kivi raskus, mis tõmbab teda liikumise ajal ühetugevuselt alla ning mis järjest kiirendab visatud kivi algliikumist. Üksi raskusjõu mõjul tekkiks ühtlaselt kiirendatud liikumine, millel oleks kiirendus $g$; üksi viske tõttu tekib ühtlane liikumine, mille kiirus $c$. Et liikumised ei olene teineteisest, siis võrdub keha tõeline kiirus komponentkiiruste summaga (§ 10₅). Aja $t$ lõpul (peale liikumise algust) oleks ühtlaselt kiirendatud liikumise (vaba langemise) kiirus $v = gt$ (formul 9): samal silmapilgul on ühtlase liikumise kiirus endiselt $c$; $t$ *sec* lõpul on kehal seega tõeline kiirus

$$v = c + gt \tag{15}$$

Ka esimese $t$ sekundi jooksul käidud tee võrdub vastavate komponentteede summaga. Vaba langemise komponenttee on $\frac{1}{2} gt^2$ (formul 4); ühtlase liikumise oma on $ct$ (formul 2); järjelikult on resultanttee

$$s = ct + \frac{1}{2} gt^2 \tag{16}$$

2) Ülevalkirjeldatud liikumine ei teki mitte ainult visatud keha langemisel vaid ta kujutab ühtlaselt kiirendatud liikumise kõigeüldsemat juhust. Veereb rong näiteks tasasel teel ainult oma hoo tõttu ühtlase kiirusega $c$ siis hakkab see liikumine ühtlaselt kiirenema, kui vedur hakkab rongi ühetugevuselt tõmbama: kujuneb ühtlaselt kiirendatud liikumine, millel oli algkiirus $c$. On veduri tõmbega tekkiv kiirendus $p$, siis kasvab kogukiirus $t$ sekundi lõpuks suuruseni

$$v = c + pt \tag{17}$$

ning esimese $t$ sekundi jooksul (peale auru pealelaskmist) käidud teepikkus on samuti kui viske juures

$$s = ct + \frac{1}{2} pt^2 \tag{18}$$

Viimased 2 võrrandit määravad igasuguse ühtlaselt kiirendatud liikumise. Kui $c = o$, siis tuletuvad neist formulid (3) ja (4).

3) Võrrandist (17) leiame $t = \frac{v-c}{p}$; kui see väärtus panna võrrandisse (18), siis saame

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \tag{19}$$

Jagame võrrandi (18) mõlemad pooled $\frac{p}{2}$-ga ning lisame mõlema poole juure $\frac{c^2}{p^2}$, siis saame

$$t^2 + 2\frac{c}{p}t + \frac{c^2}{p^2} = \frac{c^2}{p^2} + \frac{2s}{p}$$

$$\left(t + \frac{c}{p}\right)^2 = \frac{c^2 + 2ps}{p^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{c^2 + 2ps}{p^2}} - \frac{c}{p} = \frac{\sqrt{c^2 + 2ps} - c}{p} \tag{20}$$

paneme selle väärtuse $t$ asemele võrrandisse (17):

$$v = \sqrt{c^2 + 2ps} \tag{21}$$

Võrrandist (18) leiame veel, et

$$c = \frac{s}{t} - \frac{1}{2}pt \tag{22}$$

Need formulid seovad suurusi $s$, $t$, $v$ ja $c$.

**Näited:** Jõel ujuv laev kandub veevooluga ühtlase kiirusega 2 *m/sec* edasi. Kui masin tööle pannakse, siis tõuseb kiirus igas sekundis 20 *cm/sec*.

a) Kui palju aega kulub laeval 150 *m* sõitmiseks peale masina töölehakkamist?

Et $p = 0{,}2\ m/sec^2$, $c = 2\ m/sec$ ja $s = 150\ m$, siis annab formul (20)

$$t = \frac{\sqrt{2^2\ m^2/sec^2 + 2 \,.\, 0{,}2\ m/sec^2 \,.\, 150\ m} - 2\ m/sec}{0{,}2\ m/sec^2} = \frac{7{,}5\ m/sec}{0{,}2\ m/sec^2} = 37{,}5\ sec.$$

b) Kui suur on kiirus 150 *m* lõpul?

Formuli (21) järele on

$$v = \sqrt{2^2\ m^2/sec^2 + 2 \,.\, 0{,}2\ m/sec^2 \cdot 150\ m} = 8\ m/sec.$$

c) Kui suur peaks olema voolu kiirus $c$ selleks, et laev jõuaks 1 minuti jooksul peale masina käimapanemist 500 *m* võrra edasi?

Formuli (22) järele on

$$c = \frac{500}{60}\frac{m}{sec} - \frac{0{,}2}{2}\frac{m}{sec^2} \,.\, 60\ sec = 2{,}33\ \frac{m}{sec}.$$

§ 13. **Vertikaalselt ülesvisatud keha liikumine; ühtlaselt aeglastatud liikumine.** 1) Viskel anname kehale vertikaalse algkiiruse $c$, millega ta liiguks ühtlaselt üles. Et aga raskusjõud tõmbab keha alla, siis kujuneb viimase mõjul otse vastupidine komponentliikumine, mis on ühtlaselt kiirendatud. See teine liikumine vähendab esimese kiirust igas sesundis kiirenduse $g$ võrra. Aja $t$ jooksul kahaneb kiirus $c$ nii siis $gt$ võrra, s. t. $t$ sekundi järele on lõppkiirus.

$$v = c - gt \tag{23}$$

Et kiirus kahaneb igas sekundis ühevõrra, siis on see liikumine ühtlaselt aeglastatud.

Keha resultanttee võrdub komponentteede vahega: $t$ sekundi jooksul jõuaks ühtlaselt liikuv keha $ct$ võrra üles; samal ajal langeks ta kiirenduse $g$ mõjul $1/2\, gt^2$ võrra alla; tõeliselt tõuseb keha siis kõrguseni

$$h = ct - 1/2\, gt^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{24}$$

Tahame teada, kui kaua tõuseb keha, siis peame võrrandis (23) tegema $v = o$, sest et keha hakkab langema tagasi parajasti sel silmapilgul, kui tema kiirus saab nulliks. Tõusuaja $T$ kohta leiame siis formulist (23):

$$c - gT = o,$$

millest järgneb, et

$$\text{tõusuaeg } T = \frac{c}{g} \tag{25}$$

Et teada, kui kõrgele keha tõuseb, peame panema võrrandisse (24) $t$ asemele tõusuaja $T = c/g$. Siis leidub viskekõrgus $H$ võrrandist

$$h = H = cT - 1/2\, gT^2 = c.\frac{c}{g} - 1/2\, g.\frac{c^2}{g^2}$$

ehk

$$\text{viskekõrgus } H = \frac{c^2}{2g} \tag{26}$$

Hakkab keha samalt kõrguselt $H$ vabalt langema, siis määrab formul (11) tema langemisaja:

$$T' = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2.\frac{c^2}{2g} : g} = \frac{c}{g}$$

Võrdlemine formuliga (25) näitab, et langemisaeg $T'$ võrdub tõusuajaga $T$, s. t. ülesvisatud kehal kulub tõusuks samapalju aega kui langemisekski.

Langemisel kõrguselt $H$ jõuab keha maapinnale lõppkiirusega $v = \sqrt{2\, gH}$ (formul 13). Et praegusel juhusel on $H = c^2/2g$ (formul 26), siis on sellel lõppkiirusel väärtus:

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{c^2}{2g}} = c$$

s. t. **keha jõuab tagasi maapinnale sama kiirusega, millega teda visati üles; tõusmiseks ja langemiseks kulub ühepalju aega.**

2) Ka ühtlaselt aeglastatud liikumine tekib mitte ainult viskel, vaid kõigil neil juhustel, kus vastu keha liikumissihti hakkab mõjuma mingi konstant jõud, mis takistab liikumist. Näiteks on raudteerongi liikumine ühtlaselt aeglastatud, kui sõitev rong pidurdab: alguses ühtlaselt edasiliikuva rongi kiiruse ($c$) vastu mõjub pidurite konstant takistus (jõud), mis vähendab sõidukiirust igas sekundis ühe ja sama suuruse $p$ (= aeglastus) võrra. Aja $t$ jooksul kahaneb kiirus siis $pt$ võrra, nii et lõppkiirus on

$$v = c - pt \tag{27}$$

Nagu viskel, nii ka rongil on $t$ sekundi vältel käidud tee:

$$s = ct - {}^1\!/_2\, pt^2 \tag{28}$$

Need 2 formulit on ühtlaselt aeglastatud liikumise võrrandid; võrreldes neid võrranditega (17) ja (18) selgub, et mõlemad erinevad ainult $p$ ees seisvas märgis: aeglastuse peale võib nii siis vaadata kui negatiivse kiirenduse peale. Seades formulites (19) kuni (22) $p$ asemele $-p$, saame ühtlaselt aeglastatud liikumise formulid:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2p} \;\;. \;.\; . \;(29); \qquad t = \frac{\sqrt{2ps - c^2} + c}{p} \;\;. \;. \;(30)$$

$$v = \sqrt{c^2 - 2ps} \;\;. \;. \;(31); \qquad c = \frac{s}{t} + {}^1\!/_2\, pt \;\;. \;. \;. \;. \;(32)$$

**Näited:** 1) Kiirusega $c = 18$ *m/sec* liikuv raudteerong tuleb auru kinnipidamise ja pidurdamisega 25 *sec* jooksul seisma panna.

a) Missuguse aeglastusega liigub rong?

Formul (27) annab

$$p = \frac{c - v}{t} = \frac{18\ m/sec - 0}{25\ sec} = 0{,}72\ m/cec^2$$

Et 25 *sec* pärast olla null, peab rongi kiirus vähenema igas sekundis 0,72 *m* võrra.

b) Kui pika tee käib rong kuni seismajäämiseni?

Kui formulis (29) võtta $v = o$, siis saame

$$s = \frac{c^2}{2p} = \frac{(18\ m/sec)^2}{2\,.\,0{,}72\ m/sec^2} = 225\ m.$$

2) Suurtükist vertikaalselt üleslastud kuuli algkiirus on 450 *m/sec*.

a) Missuguse kõrguseni tõuseb kuul (õhutakistust arvesse võtmata)?

Formulist (26) leiame

$$H = \frac{c^2}{2g} = \frac{450^2\ m^2/sec^2}{2\ .\ 9{,}81\ m/sec^2} = 10321{,}1\ m.$$

b) Kui kaua kestab kuuli tõusmine?

Formul (25) annab

$$T = \frac{c}{g} = \frac{450\ m/sec}{9{,}81\ m/sec^2} = 45{,}9\ sec.$$

c) Kui kõrgele jõuab kuul *20* sec vältel?

Formuli (24) järgi on

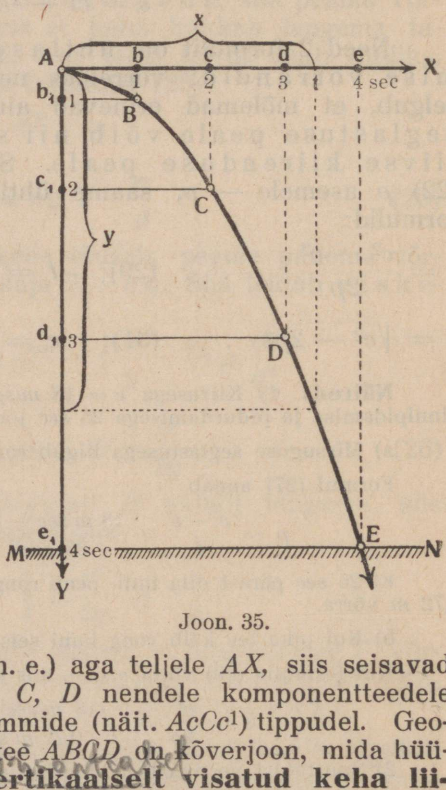
$$h = ct - \tfrac{1}{2}gt^2 = 450\ m/sec\ .\ 20\ sec - \tfrac{1}{2}\ .\ 9{,}81\ m/sec^2\ .\ 20^2\ sec^2 =$$
$$= 20\ sec\ (450\ m/sec - \tfrac{1}{2}\ .\ 9{,}81\ m/sec^2\ .\ 20\ sec) = 7198\ m.$$

d) Missugune kiirus on kuulil 10 *sec* lõpul?

Formulist (23) leiame

$$v = c - gt = 450\ m/sec - 9{,}81\ m/sec^2\ .\ 10\ sec = 351{,}9\ m/sec.$$

§ 14. **Horisontaalselt visatud keha liikumine.** 1) Viske hooga liiguks keha horisontaalsihis *AX* (joon. 35) ühtlase kiirusega ning jõuaks ühe sekundi jooksul näiteks punkti *b*. Et keha peab aga ühtlasi ka langema, siis leiame tema tõelise asukoha 1-se sekundi lõpul, kui punkti *b* jõudnud keha laseme ühe sekundi jooksul vabalt langeda (liikumiste olenematuse seadus, § 9). Esimese sekundi langemistee *bB* (= umbes 5 *m*) alumine tipp seisabki järjelikult keha tõelisel liikumisteel *(AB)*. Teise sekundi lõpul leidub keha asukoht *(C)*, kui punkti *c* jõudnud keha lasta langeda 2 sekundit, s. t. kui teha *cC* võrdseks kahe sekundi langemisteega (= $2^2$ . 5 *m*) j. n. e. Kanname 1-he, 2-he, 3-me j. n. e. sekundi langemisteed ($Ab_1$, $Ac_1$, $Ad_1$) vertikaalteljele *AY*, samade aegade horisontaalteed (*Ab*, *Ac*, *Ad* j. n. e.) aga teljele *AX*, siis seisavad keha tõelised asukohad *B*, *C*, *D* nendele komponentteedele konstrueeritud paralleelogrammide (näit. $AcCc^1$) tippudel. Geomeetria õpetab, et resultanttee *ABCD* on kõverjoon, mida hüütakse paraaboliks. **Vertikaalselt visatud keha liigub paraabolit mööda.**



Joon. 35.

Horisontaalsihis jõuab visatud keha $t$ sekundi jooksul kauguseni

$$x = ct$$

kus $c$ on viskel omandatud algkiirus.

Vertikaalsihis langeb keha sama $t$ sekundi jooksul formul (10) järele

$$y = \frac{1}{2} gt^2$$

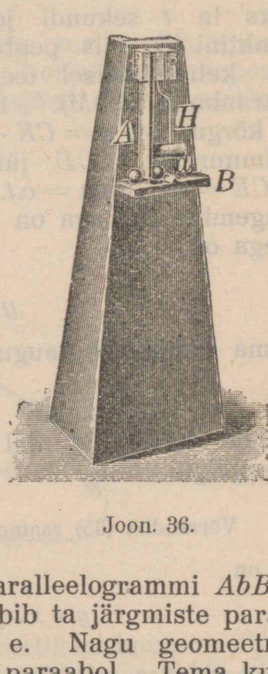
Esimesest võrrandist leiame: $t = x/c$, paneme selle teise võrrandisse, siis saame

$$x^2 = 2 \cdot \frac{c^2}{g} \cdot y \tag{33}$$

n. n. langemis-paraaboli võrrandi, millest leidub iga $x$-le vastav $y$.

2) Joonistusel 35 kujutab $E$ visatud keha asukohta 4-da sekundi lõpul, $e_1$ aga vabalt langeva keha asukohta samal silmapilgul. Et $E$ ja $e_1$ seisavad ühel horisontaaljoonel, siis näitab see, et **ühe ja sama aja vältel langeb keha horisontaalsel viskel samapalju kui vabal langemiselgi.** Asuksid $E$ ja $e_1$ näiteks põranda *(MN)* kõrgusel, siis jõuaks visatud ja langev keha ühel ajal põrandale.

Katseliselt tõestatakse seda seadust järgmiselt: Lauakesel *B* (joon. 36) seisab kaks klaaskuuli. Parempoolse kuuli all on auk, mille läbi kuul ei saa aga langeda, sest et vedru *A* hoiab teda augu äärel. Kui tõmmata haamer *H* kõrvale ning lasta teda põrkuda vastu vedrut *A*, siis paiskub pahempoolne kuul horisontaalsihis eemale, kuna parempoolne kuul langeb läbi augu vabalt alla: Me kuuleme, et visatud ja langev kuul jõuavad ühel ajal põrandale.

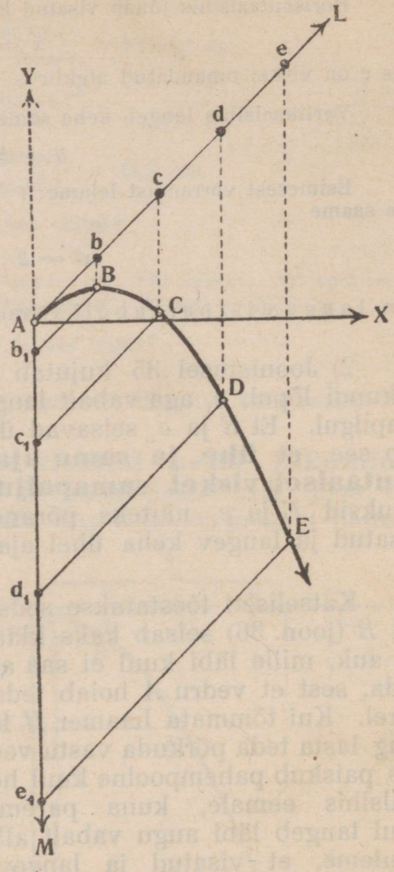


Joon. 36.

§ 15. **Kaldu ülesvisatud keha liikumine.** 1) Kaldsihis *AL* (joon. 37) visatud keha peaks selles sihis liikuma ühtlaselt. Et ta aga samal ajal peab vertikaalsihis *(AM)* langema, siis kujuneb resultantliikumine, mille tee leidub komponentteedele konstrueeritud parallelogrammidega: Esimese sekundi lõpul asuks keha ainult viske tagajärjel punktis *b*, ainult vabal langemisel aga punktis $b_1$; tõeliselt viibib keha siis paralleelogrammi $AbBb_1$ tipul *B*. Järgmiste sekundite lõpul viibib ta järgmiste parallelogrammide tippudel *C, D, E* j. n. e. Nagu geomeetria õpetab, on ka see kõverjooneline tee paraabol. Tema kuju oleneb viske- ehk tõusunurga *(LAX)* suurusest.

Ka vesi peab langema sama seaduse järele kui iga teinegi kaaluv keha; sellepärast kujutab kaldu ülesjuhitud veejuga ülevalkirjeldatud visketeed (joon. 38). Katse näitab, et veejuga tõuseb kõigekõrgemale, kui tema juhitakse otse üles; ta paiskub aga kõigekaugemale, kui tõusunurk on 45°. Sellest järeldame, et **visatud keha tõusukõrgus on kõige suurem, kui tõusunurk on 90°** (vertikaalviske); **viskekaugus aga on kõige suurem, kui tõusunurk on 45°.**

2) Sihis $AL$ visatud keha (joon. 39) jõuaks $t$ sekundi järele punkti $C$, mille kaugus on $AC = c.t.$ Punktist $C$ langeks ta $t$ sekundi jooksul punktini $D$, mis peab asuma keha tõelisel teejoonel (paraabolil $ADM$). Punkti $D$ kõrgus on $y = CE - CD$; kolmnurgast $ACE$ järgneb, et $CE = AC \,.\, sin\alpha = c.t. \, sin\alpha$; langemine $CD$ aga on $\frac{1}{2}gt^2$; seega on



Joon. 37.

$$y = ct \,.\, sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \tag{34}$$

Sama punkti $D$ kaugus vertikaaljoonest $AY$ on $AE = x$, kus

$$x = ct \,.\, cos\alpha \tag{35}$$

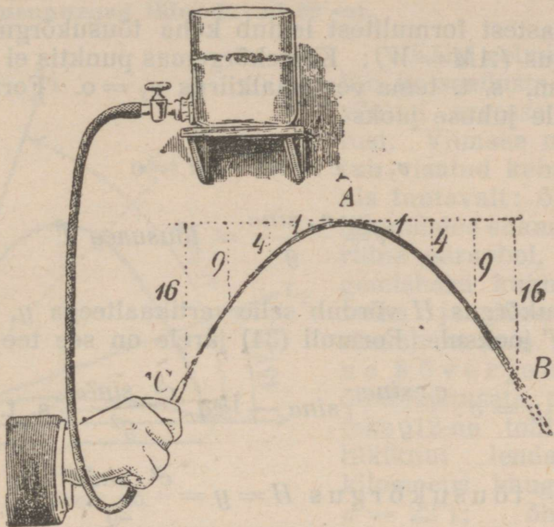
Nende formulite abil võib leida keha asukohta mistahes silmapilgul.

Võrrandist (35) saame: $t = \frac{x}{c \,.\, cos\alpha}$; paneme selle võrrandisse (34), siis on

$$y = x \,.\, tg\alpha - \frac{gx^2}{2c^2 \,.\, cos^2\alpha} \tag{36}$$

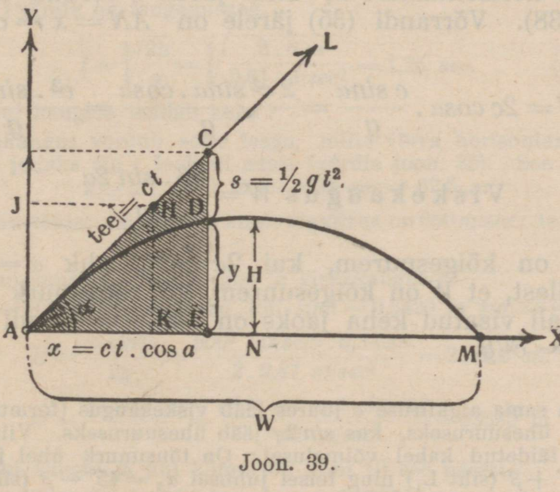
see on visketee (paraaboli) võrrand, mis seob igale teepunktile vastavad $x$ ja $y$.

3) Sihis $AL$ (joon. 39) antud alg-kiirus $c$ lahutub vertikaalseks ja horisontaalseks komponentkiiruseks. Kujutab vek-




Joon. 38.

tor $AH$ kiirust $c$ (joon. 39), siis on tema vertikaal-komponent $AJ = HK = AH \, . \, sin\alpha = c \, . \, sin\alpha$ ning horisontaal-komponent $AK = AH \, . \, cos\alpha = c \, . \, cos\alpha$. Kuna raskusjõud mõjub vertikaal-




Joon. 39.

selt alla, siis vähendab ta ainult vertikaal-komponenti, ja nimelt igas sekundis $g$ võrra; horisontaal-kiiruse peale aga ei avalda ta mingit mõju. Aja $t$ järele peale visket on järjelikult

$$\left.\begin{array}{l}\text{vertikaalkiirus } v_y = c \,.\, sin\alpha - gt \\ \text{horisontaalkiirus } v_x = c \,.\, cos\alpha\end{array}\right\} \quad (37)$$

Viimastest formulitest leidub keha tõusukõrgus *(H)* ning viskekaugus *(AM = W)*: Kõigekõrgemas punktis ei tõuse keha üldse enam, s. t. tema vertikaalkiirus $v_y = o$. Formulist (37) saame selle juhuse jaoks

$$v_y = c \,.\, sin\alpha - gt = o$$

$$t = \frac{c \,.\, sin\alpha}{g} = \text{tõusuaeg } T \qquad (38)$$

Tõusukõrgus $H$ võrdub selle vertikaalteega $y$, mille keha käib aja $T$ jooksul. Formuli (34) järele on see tee

$$y = c \,.\, \frac{c \,.\, sin\alpha}{g} \,.\, sin\alpha - {}^1/_2 g \,.\, \frac{c^2 \,.\, sin^2\alpha}{g^2}, \text{ s. t.}$$

$$\text{tõusukõrgus } H = y = \frac{c^2 \,.\, sin^2\alpha}{2g} \qquad (39)$$

$H$ on kõigesuurem, kui $\alpha = 90°$, sest et $sin\ 90 = 1$; sel puhul järgneb eelmisest formulist: $H = c^2/2g$, s. t. juba tuntud formul (26).

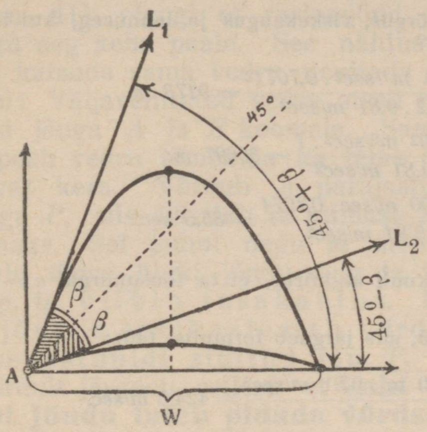
Viskekaugus $AM = 2AN$, sest paraabol on sümmeetriline. $AN$ on see horisontaaltee $x$, mille jaoks $t$ võrdub tõusuajaga $T$ (formul 38). Võrrandi (35) järele on $AN = x = c \,.\, T \,.\, cos\alpha$. s. t.

$$2AN = 2c\,cos\alpha \,.\, \frac{c\,sin\alpha}{g} = \frac{2\,c^2\,sin\alpha \,.\, cos\alpha}{g} = \frac{c^2 \,.\, sin\,2\alpha}{g}$$

$$\text{Viskekaugus } W = \frac{c^2 \,.\, sin\,2\alpha}{g} \qquad (40)$$

Et $sin\ 2\alpha$ on kõigesuurem, kui $2\alpha = 90°$ ehk $\alpha = 45°$, siis järgneb sellest, et $W$ on kõigesuurem, kui tõusunurk $\alpha$ on 45°. 45 kraadi all visatud keha jaoks on $sin\,2\alpha = 1$, nii et viskekaugus $W = c^2/g$.

Ühe ja sama algkiiruse $c$ juures jääb viskekaugus (formul 40) kõigil neil juhustel ühesuuruseks, kus $sin\,2\alpha$ jääb ühesuuruseks. Viimane tingimus aga on täidetud kahel võimalusel: On tõusunurk ühel juhusel näiteks $\alpha_1 = 45° + \beta$ (siht $L_1$) ning teisel juhusel $\alpha_2 = 45° - \beta$ (siht $L_2$, joon. 40), siis on $sin\ 2\alpha_1 = sin2\,(45° + \beta) = sin\,(90 + 2\beta) = cos\,2\beta$ ning $sin\,2\alpha_2 = sin2\,(45° - \beta) = sin\,(90° - 2\beta) = cos\,2\beta$; sel juhusel on järjelikult $sin\,2\alpha_1 = sin\,2\alpha_2$, mille tõttu ka viskekaugus peab olema mõlema tõusunurga juures ühesuurune. (Teadagi on viske **kõrgus** esimesel juhusel suurem kui teisel, v. joon. 40). Nurkade $\alpha_1$ ja $\alpha_2$ summa on 90° [sest $(45° + \beta) + (45° - \beta) = 90°$] s. t. need nurgad täienduvad 90°-ni. Sellest järgneb, et **ühe ja sama algkiiruse juures on viskekaugused võrdsed, kui tõusunurgad täienduvad 90°-ni.**




Joon. 40.

Kõigi eelmiste formulite ja seaduste juures ei võetud arvesse õhutakistust. Viimase mõjul muutub visatud keha tee kaunis tuntavalt: õhus ei ole liikumistee enam sümmeetriline paraabol, vaid langemisharu kujuneb järsumaks ja lühemaks kui tõusuharu (n. n. ballistne kõverjoon). Ilma õhutakistuseta peaks näiteks 12-ne tollilise suurtükikuul lendama 46,7 kilomeetri kauguseni (kui $\alpha = 22°$); õhutakistuse tõttu aga kahaneb viskekaugus kuni 20,5 kilomeetrini.

**Näited.** 1) Kaheksa meetri kõrgusel üle maapinna visatakse keha horisontaalse algkiirusega $c = 50$ *m/sec.*

a) Kui kaua kestaks selle keha liikumine, kui õhutakistust ei võeta arvesse?

Liikumine kestab samakaua kui 8 m kõrgune vaba langemine (§ 14). Formuli (11) järele on langemisaeg.

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 8\, m}{9{,}81\ m/sec^2}} = 1{,}25\ sec.$$

b) Kui kaugele lendab keha?

Viskekaugus võrdub selle teega, mille võrra horisontaal-kiirusega $c$ liikuv keha jõuaks aja t jooksul edasi (võrdle joon. 35). See tee on

$$s = c \,.\, t = 50\ m/sec \,.\, 1{,}25\ sec = 62{,}5\ m.$$

2) Suurtükist väljalastud kuuli algkiirus on 600 *m/sec*; tema tõusunurk on $\alpha = 20°$.

a) Kui suur on tõusukõrgus ja viskekaugus?

Formulid (39, 40) annavad, kui $sin\alpha = 0{,}3420$ ja $sin\ 2\alpha = 0{,}6428$:

$$H = \frac{c^2 sin^2\alpha}{2g} = \frac{600^2\ m^2/sec^2 \,.\, 0{,}3420^2}{2 \,.\, 9{,}81\ m/sec^2} = 2135{,}6\ m.$$

$$W = \frac{c^2\ sin\ 2\alpha}{g} = \frac{600^2\ m^2/sec^2 \,.\, 0{,}6428}{9{,}81\ m/sec^2} = 23589\ m.$$

b) Kui kaugel ja kui kõrgel on kuul 10 sec pärast?

Võrranditest (35 ja 34), kus $cos\alpha = 0{,}9397$, saame:

$$w = x = ct \,.\, cos\alpha = 600\ m/sec \,.\, 10\ sec \,.\, 0{,}9397 = 5638{,}2\ m.$$

$$h = y = ct \,.\, sin\alpha - {}^1\!/_2 gt^2 = 600\ m/sec \,.\, 10\ sec \,.\, 0{,}3420 -$$

$$- {}^1\!/_2 \,.\, 10^2\ sec^2 \,.\, 9{,}81\ m/sec^2 = 1561{,}5\ m.$$

c) Kui suur on kogu lennuaeg 2T?
Formulist (38) järgneb:

$$2T = \frac{2c \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 600\ m/sec \cdot 0{,}3420}{9{,}81\ m/sec^2} = 41{,}8\ sec.$$

d) Kui suur oleks tõusukõrgus, viskekaugus ja lennuaeg, kui tõusunurk $\alpha = 45^0$ ($\sin 45^0 = 0{,}7071$)?

$$H = \frac{c^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} = \frac{600^2\ m^2/sec^2 \cdot 0{,}7071^2}{2 \cdot 9{,}81\ m/sec^2} = 9173\ m.$$

$$W = \frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{600^2\ m^2/sec^2 \cdot 1}{9{,}81\ m/sec^2} = 36697\ m.$$

$$2T = \frac{2c \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 600\ m/sec \cdot 0{,}7071}{9{,}81\ m/sec^2} = 85{,}5\ sec.$$

4) Kui suur peaks olema kuuli algkiirus, et ta tõusunurgal $\alpha = 15°$ lendaks 10000 $m$ kõrguseni?

Kuna $\sin 2\alpha = \sin 30° = 0{,}5$, siis järgneb formulist (40):

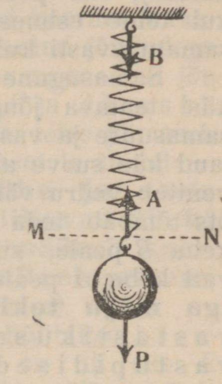
$$c = \sqrt{\frac{Wg}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{10000\ m \cdot 9.81\ m/sec^2}{0{,}5}} = 424{,}5\ m/sec.$$

§ 16. **Jõudude graafiline kujutamine; rakenduspunkt.** 1) Jõuks nimetasime seda põhjust, mis muudab keha liikumist (§ 3). Kuna liikumise muutumine avaldub kiiruse muutumises (§ 2), siis tuleb pidada jõududeks kõiki neid põhjusi, mis muudavad kiiruse suurust või sihti. Kogemused näitavad, et jõu sünnitatud kiirusel on alati jõu enese siht: piljardipall veereb näiteks alati selles sihis, milles teda tõugatakse. Järjelikult võib jõudu kujutada vektoriga (noolega), millel on tekkiva kiiruse siht (võrdle § $2_4$). Et jõud võib mõjuda keha mitmesuguste osade peale, siis tuleb näidata igakord eriti, nimelt missuguse punkti peale ta mõjub. Selleks valitakse jõuvektori alguseks alati keha see punkt, mille peale jõud otsekohe mõjub. Seda punkti hüütakse jõu rakenduspunktiks. Mõningatel juhustel on jõu rakenduspunkt otsekohe nähtav: Kui tõmmata keha näiteks nööripidi, siis on jõu rakenduspunkt seal, kus nöör on seotud keha külge. Teistel juhustel, nagu näiteks raskusjõu puhul, ei ole rakenduspunkti asukoht otsekohe nähtav.

Veab vedur rongi, siis on tema tõmbejõud rakendatud rongi eesotsas; tõukab ta aga rongi tagant, siis on jõud rakendatud rongi tagatipus; keskel seisva veduri jõud on rakendatud rongi keskkohas j. n. e. Sirgel raudteel asuvad kõik need punktid ühel sirgjoonel, nimelt tõmbejõu mõjumissihil. Et rongi liikumine ei olene veduri asukohast, siis järgneb sellest, et **liikumine ei muutu, kui nihutada jõu rakenduspunkti edasi või tagasi piki jõu mõjumissihti.**

## § 17. Tasakaal; jõudude staatiline mõõtmine.

1) Mitte alati ei hakka keha jõu mõjumisel liikuma: Näiteks spiraalvedru ehk kumminööri otsa riputatud keha venitab vedru ainult välja ning jääb siis ühe koha peale seisma (joon. 41), olgugi et raskusjõud $P$ mõjub kogu aeg keha peale. See nähtus seletub, kui katsuda sama vedru venitada välja käsitsi: Väljavenitatud vedru otsad tõmbavad käsi jõuga $A$ ja $B$ koomale. Sama jõuga $A$ peab vedru tõmbama ka tema otsas rippuvat kera. Võrdub $A$ parajasti raskusjõuga $P$, siis hävitab ta viimase mõju sootumaks. Sel puhul nagu ei mõjuks kera peale üldse ühtki jõudu ning ta jääb paigale, ta viibib tasakaalus. Öeldakse, et jõud $A$ tasakaalustab võrdse ning otsevastupidi sihitud jõu $P$. Ümberpöördult järgneb sellest, et **kaht vastupidist jõudu tuleb pidada võrdseks, kui keha viibib nende koosmõjul tasakaalus.**



Joon. 41.

2) Nagu juba nimetatud (I, § 9₃) kasvab vedru tõmbejõud $A$ seda suuremaks, mida pikemaks venitatakse vedru. Tõmmatakse vedru ots ikka ühe ja sama sügavuseni ($MN$) alla, siis jääb $A$ ikka ühesuuruseks. Samasuureks jääb jõud $A$ ka sel puhul, kui võtta kera sootumaks ära ning kui tõmmata vedru otsa näiteks käega alla kuni $MN$. Viimasel juhusel tasakaalustab $A$ käe tõmbejõudu, samuti kui ta tasakaalustab eelmisel juhusel kera raskusjõudu $P$. Käe tõmbejõud võrdub järjelikult kera raskusjõuga. Suudame tõmmata vedru otsa sama madalale, kui seda teeb näiteks 5-kilogrammiline kaalupomm, siis võrdub käe tõmbejõud 5 kilogrammi raskusjõuga: Kilogrammi ja grammi raskusjõudu võib tarvitada jõudüksusena. Mõõdetaval jõul lastakse mõjuda näiteks vedrukaalu konksu peale; tõmbab jõud kaalu noolekese kuni $n$ kilogrammi jaotuskriipsuni, siis võrdub ta $n$ kilogrammi raskusjõuga. Jõudude mõõtmiseks tarvitatavat vedrukaalu hüütakse ka dünamomeetriks.

Teadagi võib samal kombel mõõta jõude ka iga teise kaalu abil: Näiteks harilikul kangkaalul tasakaalustab mõõdetav jõud mingi keha (kaalupommi) raskusjõudu. Mõõtmine sünnib siin alati antud jõu tasakaalustamise teel; sellepärast hüütakse seesugust mõõtmist jõu staatiliseks mõõtmiseks *).

§ 18. **Mõju ja vastumõju.** Korkalustele kinnitatud magnet ja raudnael ujuvad veepinnal teine-teisele vastu; nad

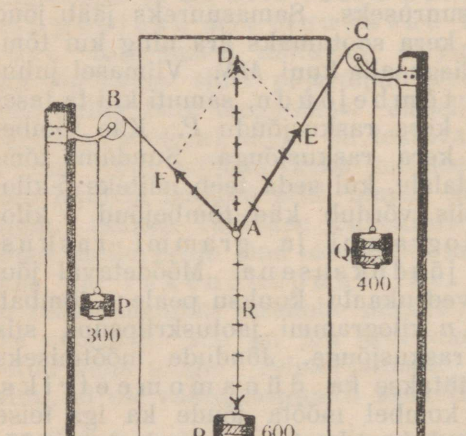
*) „Staatika“ tähendab „tasakaaluõpetus“.

jäävad seisma alles siis, kui nende korkalused on põrkunud kokku. Kehade vastastikune lähenemine näitab, et mitte ainult magnet tõmbab rauda, vaid ka raud tõmbab magnetit. Need 2 külgetõmbejõudu suruvad seismajäänud kehade korkalused üks-teist vastu. Kuna alused seisavad paigal (tasakaalus), siis peab esimene alus suruma teist samatugevasti kui teine esimest (§ 17). Järjelikult tõmbab raud magnetit samatugevasti kui magnet rauda.

Samasugune on asjaolu ka teistel nähtustel: Surub näiteks käsi teatava jõuga lauda, siis peab laud omakorda suruma samasuure ja vastupidi sihitud jõuga kätt, sest muidu vajuks laud käe surve all madalamale. Vedru otsas rippuv koorem venitab vedru välja parajasti niisuure jõuga, kuisuurega vedru ots tõmbab teda üles (joon. 41). Üldse, kui keha *A* mõjub keha *B* peale, siis mõjub keha *B* vastupidises sihis samatugevalt keha *A* peale. Viimast mõju hüütakse v a s t u m õ j u k s: **Iga mõju tekitab võrdse vastumõju,** s. t. k e h a d e v a s t a s t i k u s e d m õ j u d o n a l a t i v õ r d s e d j a v a s t u p i d i s e d. Seda seadust nimetatakse m õ j u j a v a s t u m õ j u s e a d u s e k s; ka tuntakse teda nimetuse all „N a w t o n i III s e a d u s“ (1687).

## § 19. Ühes punktis mõjuvate jõudude liitmine.

1) Tõmbame üle rullide *B* ja *C* (joon. 42) niidi ning riputame selle otsa koormad $P = 300\,g$ ja $Q = 400\,g$. Punktis *A* seome esimese niidi külge põikniidi ning riputame selle otsa koorma $R = 600\,g$. Niit tõmbub nende koormate mõjul teatavasse seisu ning hoidub siis tasakaalus. Nüüd asetame niitide taha tahvli ning joonistame sellele niitide sihid. Need sihid kujutavad jõudude sihte, mis mõjuvad sidepunkti *A* peale; koorem *P* tõmbab seda punkti niidi *BA* kaudu jõuga 300 grammi (sest tõmbumine peab olema kogu niidi PBA pikkusel sama suur kui niidi otsas *P*); koorem *Q* tõmbab sama punkti jõuga 400 *g* sihis *AC* ning koorem *R* jõuga 600 *g* vertikaalsihis alla. Joonistame nende jõudude vektorid nii et 1 *cm* vektori pikkusest




Joon. 42.

tähendaks näiteks 100 $g$, siis on $AF = 3\ cm$ jõu $P$ vektor ning $AE = 4\ cm$ jõu $Q$ vektor. Kui $AF$ ja $AE$ peale ehitada paralleelogramm, siis näeme, et selle diagonaal $AD$ seisab jõu $R$ mõjumissihil. Mõõtmisel leiame, et diagonaali $AD$ pikkus on parajasti 6 $cm$. Vaatame ka $AD$ kui jõuvektori peale, siis kujutab ta seega 600-grammilist jõudu, mis on sihitud vertikaalselt üles. See jõud tasakaalustaks üksi koorma $R$ raskusjõu (§ $17_1$); tõeliselt aga tasakaalustub $R$ antud jõududega $P$ ja $Q$. Järjelikult on $P$ ja $Q$ koosmõju samasugune kui jõu $AD$ mõju üksinda, s. t. $AD$ võib täita $AF$ ja $AE$ aset. Üldse nimetatakse jõudu, mis võib täita mitme teise jõu aset, resultantjõuks; neid jõude aga, mille aset ta täidab — komponentjõududeks. Tähendab: **ühe ja sama punkti peale mõjuvad komponentjõud liituvad üheks resultantjõuks, mille suuruse ja sihi määrab komponentjõududele konstrueeritud paralleelogrammi diagonaal** (jõudude paralleelogramm).

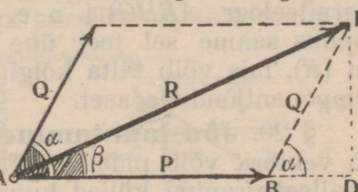
Seda jõudu, mis tasakaalustab mitu teist, hüütakse tasakaalustavaks jõuks. Eelmisel katsel on nii siis $R$ kahe jõu $P$ ja $Q$ tasakaalustav jõud. Kuna $R$ ja $AD$ on võrdsed ning vastupidi sihitud, siis järgneb katsest, et tasakaalustav ja resultantjõud on võrdsed ning otsevastupidi sihitud.

Kui silmas pidada, et jõud on proportsionaalne kiirendusega (v. § 23), siis tuletub jõudude paralleelogramm ka otse kiirenduste paralleelogrammist.

Arvestamisel leidub resultantjõud $R$ (joon. 43) tuntud koosinuslause põhjal kolmnurgast $AKB$:

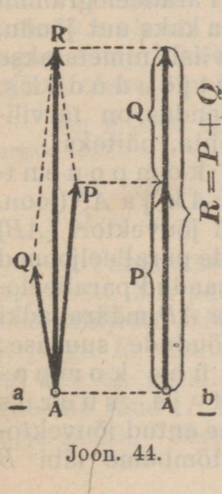
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ.\ \cos\alpha}; \quad (41)$$

kusjuures $P$ ja $R$-vaheline nurk $\beta$ on määratud formuliga:



Joon. 43.

$$tg\beta = \frac{KD}{AD} = \frac{Q.\ \sin\alpha}{P + Q.\ \cos\alpha} \quad (42)$$



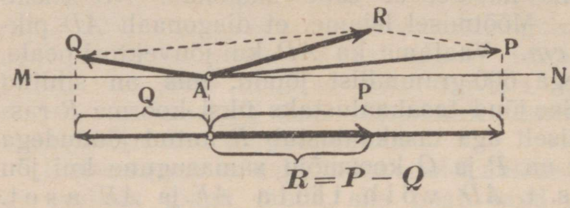
Joon. 44.

2) Läheneb komponentjõudude vaheline nurk ($PAQ$, joon. 44a) nullile, siis läheneb paralleelogrammi diagonaal $R$ komponentide $P$ ja $Q$ summale. On see nurk 0, s. t. kui $P$ ja $Q$ mõjuvad ühes sihis, siis võrdub $R$ nende summaga (joon. 44b). **Ühes ja samas sihis mõjuvate komponentjõudude resultantjõud mõjub samas sihis ning võrdub komponentjõudude summaga.**

Katsel võib seda tõestada vedrukaalu abil. Riputame vedruotsa esiteks 2 pommi $P = 2$ ja $Q = 3\ kg$, ning siis ühe pommi $R = 5\ kg$:

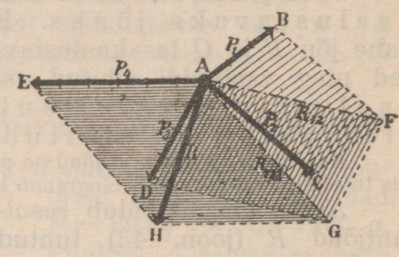
Kaal näitab mõlemal juhusel üht ja sama jõudu. Siin mõjuvad pommide raskusjõud ühel ja sama vertikaalsihil ning ühtlasi on ka $R = P + Q$.

3) Läheneb komponentjõudude vaheline nurk 180-ne kraadile (joon. 45), siis lähenevad komponentjõud $P$ ja $Q$ sirgjoonele $MN$. Asuvad nad otse sellel sirgjoonel ($\measuredangle PAQ = 180°$), siis mõjuvad nad otse teine-teise vastu. Resultantjõud $R$ pöördub sel puhul suurema jõu ($P$) sihti; oma suuruse poolest võrdub ta siis vektorite $AP$ ja $RP$ ($= Q$) vahega, s. t. $R = P - Q$: **Otsevastupidiste jõudude resultantjõud võrdub komponentjõudude vahega ning mõjub suurema jõu sihis.**



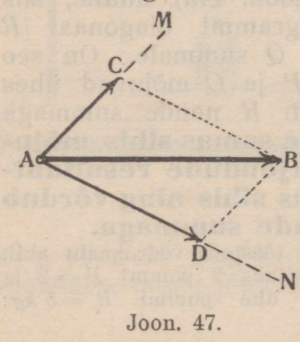

Joon. 45.

4) Mõjub ühe punkti $A$ peale palju jõude $P_1$, $P_2$, $P_3$ j. n. e. (joon. 46), siis liidetakse esiteks 2 mistahes jõudu (näit. $P_1$ ja $P_2$) hariliku paralleelogrammiseaduse järele (paralleelogramm $ABFC$); nende resultantjõud $R_{12}$ liidetakse siis kolmanda jõuga $P_3$ (paralleelogr. $ADGF$); leitud uus resultantjõud $R_{123}$ liidetakse $P_4$-ga (paralleelogr. $AEHG$) j. n. e. Lõpuks saame sel teel ühe jõu ($R$), mis võib täita kõigi komponentjõudude aset.




Joon. 46.

§ 20. **Jõu lahutamine komponentjõududeks.** Antud jõu vektorit võib pidada paralleelogrammi diagonaaliks. Selle paralleelogrammi küljed kujutavad siis kahte jõudu, mille koosmõju on samasugune kui antud jõu oma. Paralleelogrammi seaduse abil võib nii siis tuntud jõu jaoks leida kaks uut jõudu, mis võivad täita esimese aset. Seda teguviisi nimetatakse antud jõu l a h u t a m i s e k s k o m p o n e n t j õ u d u d e k s. Et lahutamisülesandel oleks ühemõtteline lahendus, on tarvilikud mõningad andmed komponentjõudude kohta, näiteks:

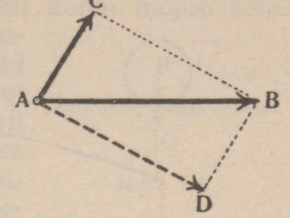



Joon. 47.

a) o n t u n t u d k o m p o n e n t j õ u d u d e s i h i d $AM$ j a $AN$ (joon. 47): tõmbame antud jõuvektori ($AB$) otsast $B$ antud sihtide paralleeljooned $BC$ ja $BD$. Sel teel saadud paralleelogrammi küljed $AC$ ja $AD$ määravadki otsitud komponentjõudude suuruse;

b) o n t u n t u d ü h e k o m p o n e n t j õ u $AC$ siht j a s u u r u s (joon. 48): ühendame antud jõuvektorite otsad $C$ ja $B$; tõmbame läbi $B$

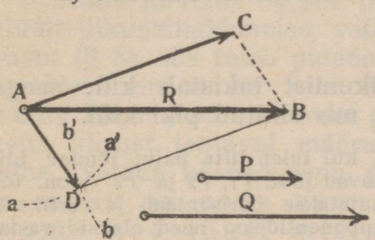
paralleeljoone $AC$-ga ning läbi $A$ paralleeljoone $CB$-ga. Parallelogrammi teine külg $AD$ määrab teise komponentjõu sihi ja suuruse.



Joon. 48.

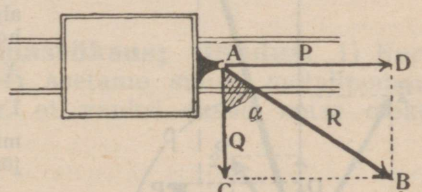
c) on tuntud komponentjõudude $P$ ja $Q$ suurus (joon 49): antud jõu $R$ otsadest $A$ ja $B$ tõmbame raadiustega $P$ ja $Q$ ringkaared aa′ ja bb′; viimaste lõikepunkti $D$ ühendame $A$ ja $B$-ga ning täiendame leitud kolmnurga paralleeljoonte $AC$ ja $CB$-ga paralleelogrammiks. Siis kujutab $AC = Q$ ühe komponentjõu sihti ning $AD = P$ teise oma.

2) Jõudude lahutamise tarvidust selgitagu mõned näited:



Joon. 49.

a) Roobastel veerevat vagunit veetakse köit $AB$ pidi, kusjuures vedaja kõnnib roopa kõrval (joon. 50). Vedaja tõmbab vagunit sihis AB tuntud jõuga R. Tahetakse leida selle jõu ($P$) suurust, millega vagun liiguks sama kiirelt, kui teda tõmmatakse paralleelselt roobastega. Lahutame $R$ nii, et ühe komponentjõu ($P$) siht oleks paralleelne, teise oma ($Q$) perpendikulaarne roobastega. Komponentjõud $Q$ ei mõju liikumise peale, sest et roobastel seisev vagun ei saa tema sihis liikuda. Seega paneb vaguni liikuma üksi jõud $P$. Käiks vedaja roobaste keskel, siis liiguks vagun sama kiirelt, kui tõmbejõud oleks ainult $P$, mis väiksem kui $R$.

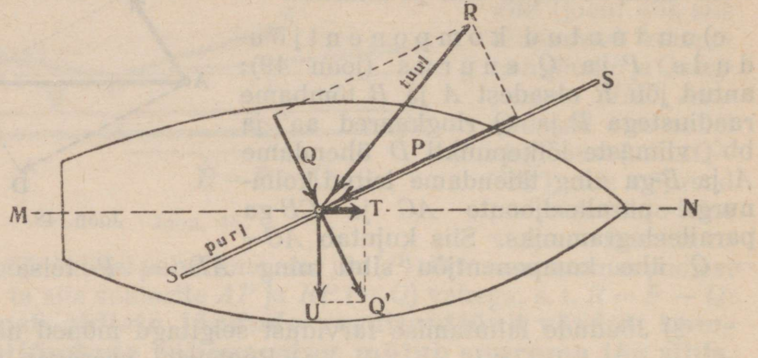


Joon. 50

Kui $R = 75$ *kg* ja nurk $\alpha = 60°$, siis leidub $P$ ja $Q$ suurus kolmnurgast $ABC$:

$$P = CB = AB \sin\alpha = R \sin 60° = 75.0{,}866 = 64{,}95\ kg$$
$$Q = AC = AB \cos\alpha = R \cos 60° = 75.0{,}5 = 37{,}5\ kg.$$

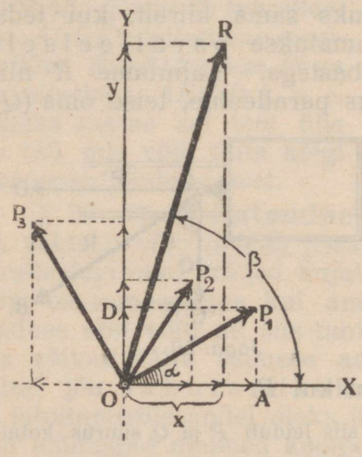
b) Tahetakse teada, kui suur on see jõud, mis veab purjepaati, kui paat sõidab terava nurga all vastu tuult: Olgu paadi kiiljoon $MN$, tema puri $SS$ (joon. 51); tuul tõugaku purjet jõuga $R$. Lahutame $R$ komponentjõududeks $P$ ja $Q$, miljest üks on paralleelne, teine perpendikulaarne purjega. Paralleelne jõud $P$ läheb kaotsi, sest ta ainult libiseb mööda purje pinda. Perpendikulaarne jõud $Q$ aga lahutub omakord kaheks komponentjõuks $U$ ja $T$ ($Q' = Q$), millest üks on perpendikulaarne, teine paralleelne kiiljoonega $MN$. Jõud $U$ tõm-




Joon. 51.

bab paati küljeti, missugust liikumist takistab kiil; seega v e a b paati edasi ainult jõud $T$, mis sihitud piki kiili.

3) Lahutamist tarvitatakse ka siis, kui tuleb liita palju jõude: Liidetavad jõud $P_1$, $P_2$ ja $P_3$ (joon. 52) lahutatakse horisontaal- ja vertikaalkomponentideks: need oleksid vastavalt $P. \cos\alpha$ ja $P. \sin\alpha$ (näiteks $OA$ ja $OD$); kõik esimesed mõjuvad telje $OX$ sihis, teised — telje $OY$ sihis; nii ühed kui teised summeeruvad algebraliselt ühiseks vertikaal- ning horisontaalresultandiks:




Joon. 52.

$$X = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + jne.$$

$$Y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + jne.,$$

mis omakord liituvad üheks resultantjõuks $R$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

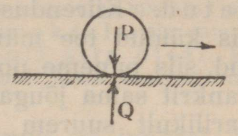
viimase sihi määrab tema ja horisontaaljoone vaheline nurk $\beta$, sest

$$tg\beta = \frac{Y}{X}:$$

On $R = 0$, siis ei olegi resultantjõudu, mis tähendab et kõik antud jõud tasakaalustuvad.

§ 21. **Mass ja inertsus.** Keha m a s s i all mõistetakse seda mateeriahulka, millest keha seisab koos. On kaks keha ühest ja samast ainest, siis suuremas kehas peab olema teadagi rohkem mateeriat kui väiksemas: ü h e s u g u s e a i n e p u h u l o n s u u r e m a l k e h a l j ä r j e l i k u l t k a s u u r e m m a s s.

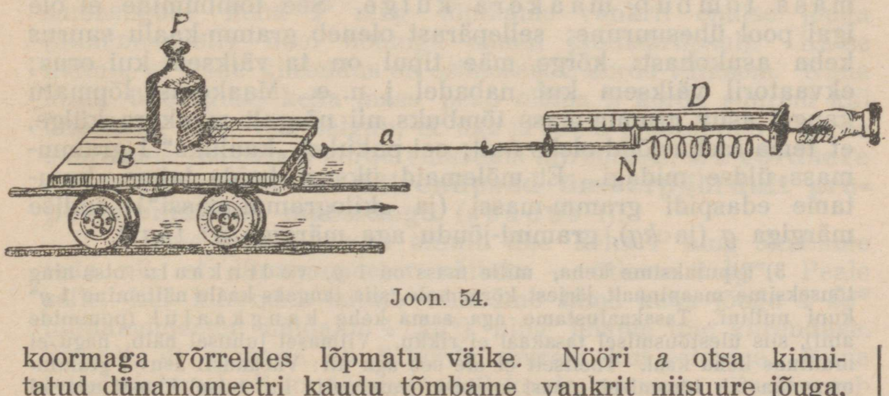
Kui siledal alusel tõugata veerema ühest ja samast ainest valmistatud keri, siis tundub, et suuremat kera tuleb tõugata tugevamini kui väiksemat. Kaal ei või olla selle vahe põhjuseks, sest raskusjõud $P$ läheb vertikaalselt läbi sama punkti, millel toetub kera (joon. 53); tugipunkti kohal mõjub sellepärast kera raskusjõud alla, aluse vastusurve $(Q)$ aga üles; need võrdsed jõud tasakaalustuvad, mille tõttu kera kaal ei saa avaldada veeremise peale mingit mõju. Küllalt siledal alusel ei või ka hõõrumine tekitada kirjeldatud vahet. Sellepärast võib ainult oletada, et suuremal kehal on ka suurem püüd hoida alal oma paigalolekut (§ $3_1$), s. t. suurema massiga kehal on ka suurem inertsus: **Kaht massi loetakse võrdseks, kui nende inertsus on ühesuurune.**



Joon. 53.

Kuna inertsus on see takistus, mida keha avaldab mitte ainult liikumahakkamise, vaid üldse liikumise iga muutumise vastu (§ 3), siis tuleb pidada inertsust seda suuremaks, mida „raskem“ on muuta keha kiirust. Mida „raskem“ aga on muuta kiirust, seda suurem peab olema see jõud, millega saab keha kiirust teataval määral muuta. Kuna kiiruse muutumine avaldub kiirendusena, siis järgneb sellest, et inertsus ja mass on seda suuremad, mida suurem peab olema see jõud, mis suudab anda kehale teatava kiirenduse. **Suudab üks ja sama jõud anda kahele kehale ühe ja sama kiirenduse, siis on nende kehade massid ühesuurused.**

§ 22. **Mass ja kaal; massüksus; tihedus.** 1) Kergele vankrikesele $B$ (joon. 54) asetame suure metallpommi $P$, mille mass olgu nii suur, et vankri enese mass oleks



Joon. 54.

koormaga võrreldes lõpmatu väike. Nööri $a$ otsa kinnitatud dünamomeetri kaudu tõmbame vankrit niisuure jõuga, et nool $N$ hoiduks teatud jaotuskriipsul. Vanker hakkab selle jõu mõjul liikuma, kuid dünamomeetrit võib tõmmata ikka sedavõrd edasi, et nool $N$ jääks endisele kohale. Niisugusel puhul on vankri, ehk õieti tema koorma $P$ peale mõjuv jõud konstant; liikumine peab olema seega ühtlaselt kiirendatud. Kiirenduse suuruse leiame, kui näiteks igas sekundis käidud tee märgime roobastele (§ $5_1$). On kiirendus leitud, siis paneme pommi $P$ asemele näiteks kivi ning tõmbame vankrit sama jõuga kui esimesel juhuselgi. Uus kiirendus on harilikult suurem või väiksem; valime aga järjest suurema kivi, siis leiame lõpuks seesuguse, mille kiirendus on samasuur kui esimesel juhusel. Kui dünamomeeter näitas kogu aeg üht ja sama tõmbejõudu, siis pidi nüüd üks ja sama jõud andma kivile ja pommile ühesuuruse kiirenduse. Järjelikult on selle kivi ja metallpommi mass ühesuurune (§ 21).

Sel katsel võrdlesime kehade masse, ilma et oleksime tähele pannud nende kaalu. Paneme aga ülevalnimetatud kivi ja metallpommi kaaludele, siis leiame, et ka nende kaal on ühesuurune: **Võrdsete massidega kehadel on võrdsed kaalud,** ehk **mass on proportsionaalne kaaluga.**

2) Massüksuseks tarvitatakse 1 $cm^3$ puhtavee massi $+ 4^\circ$ C juures; eelmise järele on kehal seega mass „üks", kui tema inertsus võrdub ühe $cm^3$ vee inertsusega. Et see veehulk kaalub 1 gramm, siis võib massüksuseks olla ka iga teise keha mass, mille kaal on 1 $g$. Seda üksust hüütakse gramm-massiks.

Kuna senini tarvitasime grammi ainult jõud- ehk kaalüksusena, siis tuleb nüüd teha kindel vahe „gramm-massi" ja „gramm-kaalu" vahel: Gramm-mass, kui teatud **mateeriahulk,** on ja jääb igal pool ühesuuruseks seni kuni me temalt ei võta midagi ära ega temale pane midagi juure; gramm-kaal on ainult see **jõud,** millega 1 gramm-mass tõmbub maakera külge. See tõmbumine ei ole igal pool ühesuurune; sellepärast oleneb gramm-kaalu suurus keha asukohast: kõrge mäe tipul on ta väiksem kui orus; ekvaatoril väiksem kui nabadel j. n. e. Maakerast lõpmatu kaugel asuv gramm-mass tõmbuks nii nõrgalt maakera külge, et tema raskusjõud oleks null; sel puhul ei „kaaluks" 1 gramm-mass üldse midagi. Et mõlemaid üksusi hoida lahus, kujutame edaspidi gramm-massi (ja „kilogramm-massi") endise märgiga $g$ (ja $kg$), grammi-jõudu aga märgiga $g^*$ ($kg^*$).

3) Riputaksime keha, mille mass on 1 $g$, vedrukaalu otsa ning tõuseksime maapinnalt järjest kõrgemale, siis langeks kaalu näitamine 1 $g^*$ kuni nullini. Tasakaalustame aga sama keha kangkaalul (pommide abil), siis ülestõusmisel tasakaal ei rikku. Viimasel juhusel näib, nagu ei muutuks keha kaal. Tõeliselt ei ole see aga nii: Vaekausil asuv 1 gramm-mass kaotab tõusmisel omast kaalust sama palju kui teisel kausil asuvad pommidki; ainult selle tõttu ei märka me siin raskusjõu kahanemist.

Ostame all orus 2 toopi tangu ning kaalume seda tanguhulka kang- ja vedrukaaludel, siis näitavad teadagi mõlemad 1 $kg$. Viime tangud aga kõrge mäe harjale ja kaalume neid samade kaaludega, siis näitab kangkaal endiselt 1 *kg*, vedrukaal aga ainult — ütleme 0,9 *kg*. Et vedrukaal näitab seda jõudu, millega tangud tõmbuvad maakera külge, siis tähendab see, et tangude kaal on mäeotsas väiksem. Nende mass aga peab olema igal pool ühesuurune, jääb ju näiteks terade hulk ja nendes sisalduv aine üheks ja samaks. Nagu nägime, näitab nimelt kangkaal seda suurust, mis ei muutu: Kangkaaluga võrdleme nii siis õieti kehade masse, vedrukaaluga — nende kaale. Ainult ühes ja samas maakohas näitavad mõlemad kaalud ühepalju.

Mass on proportsionaalne kaaluga ainult sel juhusel, kui võrreldakse kehade kaalu ühes ja samas maakohas. On lepitud kokku pidada gramm-kaaluks nimelt seda raskusjõudu, millega tõmbub maakera külge 1 $cm^3$ puhast vett, mis seisab 45-dal laiuskraadil ning merepinna kõrgusel. Mõistame 1 *g** all ikka ainult seda jõudu, siis tähendabki see, et võrdleme kõigi kehade kaale ühesugustel tingimustel. Sel puhul jääb masside ja kaalude proportsionaalsus alati jõusse.

4) Keha ruumüksuse massi nimetatakse tema aine tiheduseks, analoogiliselt nagu ruumüksuse kaalu hüütakse erikaaluks (I, § 10). Kuna kaal ise ei ole maakeral konstant, siis ei ole seda ka erikaal. Tihedus aga, kui teatud mass, jääb igal pool ühesuuruseks. 45-dal laiuskraadil ning merepinna kõrgusel on tihedusel ja erikaalul ühesuurune mõõtarv (sest et seal 1 g-mass võrdub 1 g-kaaluga); teistes kohtades võivad need arvud minna lahku. Et 1 $cm^3$ veehulga mass on parajasti 1 gramm-mass, siis näitab tiheduse mõõtarv ka, mitu korda on antud keha mass suurem kui sama ruumalaga veehulga mass.

§ 23. **Mass, kiirendus ja jõud.** 1) Tõmbame vankrit (joon. 54) tuntud jõuga ning leiame selle kiirenduse (§ 51), millega hakkab liikuma vankril asuv keha *P*. Peale selle kui kiirendus leitud, asetame vankrile veel teise, samasuguse keha *P* ning tõmbame vankrit endise jõuga (dünamomeetri nool hoidugu samal jaotuskriipsul). Katse näitab, et teine kiirendus on esimesest 2 korda väiksem. Kuna kahe ühesuguse keha mass peab olema 2 korda suurem kui ühe keha oma, siis selgub, et üks ja sama jõud annab 2 korda suuremale massile 2 korda väiksema kiirenduse, s. t. **võrdsete jõudude mõjul on kiirendused ümberpöördult proportsionaalsed massidega** (seadus I).

Jätame vankrikesele ainult ühe keha *P* ning tõmbame teda nii, et dünamomeeter näitaks — ütleme 2 *kg**. Peale selle, kui kiirendus leitud, tõmbame sama keha jõuga 4 *kg** (dünamomeeter näidaku 4 *kg**) ning leiame uue kiirenduse. Selgub, et viimane on 2 korda suurem kui esimene. Kuna teisel juhusel oli ka tõmbejõud 2 korda suurem, siis järgneb sellest: **Võrdsete masside juures on kiirendused proportsionaalsed jõududega** (seadus II).

Paneme vankrikesele 2 keha $P$, ning tõmbame jõuga 4 $kg^*$, siis jääb kiirendus samasuureks kui ühe keha puhul, mida tõmmati kahe kilogrammilise jõuga: Kasvab mass samapalju korda kui jõud, siis ei muutu kiirendus; teiste sõnadega: **Võrdsete kiirenduste puhul on massid proportsionaalsed jõududega** (seadus III).

2) Täpsemalt tõestuvad need 3 seadust Atwodi masinal:

I seadus: Me leidsime (§ $8_2$,) et teatud lisakoorma $q$ raskusjõu mõjul said pommid $p$ ja $p'$ kiirenduse 10 $cm/sec^2$. Riputame nööri kummagi otsa veel teise samasuure pommi, siis kasvab liikuva süsteemi mass 2 korda suuremaks (lisakoorma $q$ mass on nii väike, et teda ei tule võtta arvesse). Kui lisakoorem jätta endiseks, siis mõjub selle suurema massi peale endine jõud $q$: Selgub, et nüüd on kiirendus aga ainult 5 $cm/sec^2$, s. t. 2 korda väiksem kui esimesel juhusel.

II seadus: Jätame nööri kummalegi otsale ainult ühe pommi, kuid lisakoormaks võtame 2 korda raskema plaadikese, mille raskusjõud on 2 korda suurem kui esimese oma. Selgub, et kiirendus on nüüd 20 $cm/sec^2$, s. t. 2 korda suurem kui esimese plaadikese puhul. Seega kasvab kiirendus proportsionaalselt jõuga.

III seadus: Seome niidi kummagi otsa külge 2 pommi ning paneme lisakoormaks plaadikese 2 $g$, siis leiame kiirenduse 10 $cm/sec^2$, mis on samasuur kui ühe pommi ja lisakoorma $g$ juures. Kiirendus ei muutu nii siis, kui mass kasvab samapalju korda kui jõudki.

§ 24. **Jõu dünaamiline mõõtmine. Absoluutne mõõdusüsteem.** 1) Dünaamiliseks hüütakse jõu seda mõju, mis avaldub keha liikumismuutumisena ehk kiirendusena. Kuna kiirenduste kaudu võib võrrelda jõudude suurust (§ $23_1$, seadus II), siis hüütakse ka seda võrdlemis- ehk mõõtmisviisi dünaamiliseks.

Dünaamilisel mõõtmisel on jõuduksuseks see jõud, mis annab ühele gramm-massile ühe kiirendusüksuse (1 $cm/sec^2$). Seda üksust hüütakse düün'iks.

Kui 1 düün annab 1 grammile kiirenduse 1 $cm/sec^2$,
siis $M$ „ „ $M$ „ „ 1 „ (sead. III, § 23)
$M.p$ „ „ $M$ „ „ $p$ „ (sead. II „ ).
Saab $M$ grammi kiirenduse $p$ $cm/sec^2$, siis mõjub tema peale jõud, mille suurus düünides on seega:

$$P = M.p, \text{ s. t.} \tag{43}$$

**jõud = mass × kiirendus.**

See tähtis formul ongi eelmises § nimetatud seaduste matemaatiline avaldus. On keha mass ja tema peale mõjuv jõud tuntud, siis leidub kiirendus

$$p = \frac{P}{M} \tag{44}$$

On aga jõud ja kiirendus tuntud, siis leidub keha m a s s

$$M = \frac{P}{p} \tag{45}$$

A e g l a s t a t u d liikumisel on kiirendusel $p$ (aeglastus) negatiivne märk (§ $13_2$). Seda kiirendust tekitaval jõul (= t a k i s t u s e l, § $7_2$) on formuli (43) järele siis sama negatiivne märk. Viimane aga näitab ainult, et takistusjõud mõjub v a s t u liikumissihti. Formuli (43) abil leidub nii siis ka t a k i s t u s e suurus, kui aeglastus ja keha mass on tuntud.

2) Kuna staatilise jõudüksuse (*kg**, § $17_2$) suurus ei ole kogu maapinnal ühesuurune (§ $22_3$), siis tarvitatakse teaduslikkudel mõõtmistel veel ainult dünaamilist üksust d ü ü n; viimane on nimelt igal pool ühesuurune, sest ta võrdub massi ja kiirenduse korrutisega (formul 43), mille kummagi suurus e i o l e n e sellest, kus teda mõõdetakse.

Nimi „düün" on antud sellele jõudüksusele ainult tingimisi; tema tõeline „n i m e t u s" tuletub mass- ja kiirendusüksuse nimetustest (I, § 6): Kuna

jõudüksus (düün) = massüksus × kiirendusüksus,

siis on

$$\text{d ü ü n i nimetus} = g \times cm/sec^2 = \frac{g \cdot cm}{sec^2} \tag{46}$$

Dünaamiline jõudüksus tuletub nii siis üksustest g r a m m - m a s s, s e n t i m e e t e r ja s e k u n d; neid üksusi hüütakse sellepärast p õ h i ü k s u s t e k s. Kuna viimaste suurus ei olene sellest, kus neid mõõdetakse, siis nimetatakse neil põhiüksustel kujunevat mõõdusüsteemi a b s o l u u t s e k s. Et eraldada absoluutse mõõdusüsteemi põhiüksusi teistest üksustest, kujutatakse neid harilikult suurte tähtedega: $1\,g = G$; $1\,cm = C$ ja $1\,sec = S$. Seda süsteemi hüütakse tema põhiüksuste järele ka veel „s e n t i m e e t e r - g r a m m - s e k u n d" ehk *CGS*- s ü s t e e m i k s.

CGS-süsteemi tuletatud üksused on:

p i n d ü k s u s: 1 kv. sentimeeter $= 1\,C^2$
r u u m ü k s u s: 1 kub-sentimeeter $= 1\,C^3$
k i i r u s ü k s u s: 1 sentim. sekundis $= 1\,C/S = 1\,CS^{-1}$
k i i r e n d u s ü k s u s: 1 sentim. sekund - kvadraadi kohta $= 1\,C/S^2 = 1\,CS^{-2}$

j õ u d ü k s u s: 1 düün $= g \cdot \dfrac{cm}{sec^2} = GCS^{-2}$

*CGS*-süsteemis tuleb mõõta ka kaalu d ü ü n i d e s, on ju kaal ka jõud. Kui pidada silmas, et raskusjõud $Q$ (= kaal) annab igale kehale näiteks vabal langemisel kiirenduse $g = 981 cm/sec^2$, siis on kaal formuli (43) järele

$$Q = M \, . \, g \qquad (43\text{ a})$$

Mõõdetakse keha mass $M$ grammides ja kiirendus $cm/sec^2$-des, siis leidubki sellest kaal d ü ü n i d e s.

Vabal langemisel omandab 1 gramm-mass kiirenduse $g = 981 \; cm/sec^2$; selle kiirenduse tekitab massi enese raskusjõud $= 1 \; g^*$. Kuna 1 düün annaks gramm-massile ainul kiirenduse 1, siis peab 1 gramm-jõud olema düünist suurem niimitu korda, kuimitu korda on kiirendus 981 suurem kui 1, s. t.

$$\boldsymbol{1 \; g^* = 981 \; düüni} \qquad (47)$$

ning

$$1 \; düün = 1{,}02 \; mg^*$$

Düün on seega väga väike jõud: ta võrdub umbes $^1/_{1000}$-ga sellest jõust, millega 1 gramm-mass rõhub oma aluse peale.

3) Ainult tehnikas tarvitatakse veel n. n. p r a k t i l i s t m õ õ d u s ü s t e e m i, mille põhiüksusteks on kilogrammjõud ($kg^*$), meeter ($m$) ja sekund ($sec$). Jõudüksus kuulub selles süsteemis nii siis põhiüksuste hulka, massüksus aga t u l e t u b esimestest.

Formuli (45) järele peab selleks massüksuseks olema niisugune mass, millele jõud 1 $kg^*$ annab kiirenduse 1 $m/sec^2$, s. t.

$$\text{prakt. süst. massüksus} = \frac{kg^*}{kiirendus} = kg^* : \frac{m}{sec^2} = \frac{kg^* \, . \, sec^2}{m}$$

Kui pidada silmas, et 1 $kg^* = 1000 \; g^*$ ja 1 $m = 100 \; cm$, siis on

$$\frac{kg^* \, . \, scc^2}{m} = 10 \; \frac{g^* \, . \, sec^2}{cm}$$

**Näited:** 1) Miks langevad antud maakohas kõik kehad ühetaoliselt?

Formul (43 a) järele on langemiskiirendus

$$g = \frac{Q}{M}$$

Kuna kaal $(Q)$ on proportsionaalne keha massiga $M$ (§ $22_1$), siis jääb suhe $Q/M = g$ kõigi kehade jaoks ühesuuruseks.

2) Keha kaal on 0,02 $kg = 20 \; g$.

a) Kui suur jõud annab talle kiirenduse 6 $CS^{-2}$?

Formulis (43) on mass $M = 20 \, G$, kiirendus $p = 6CS^{-2}$; seega on

$$P = 20G \, . \, 6CS^{-} = 120GCS^{-2} = 120 \text{ düüni,}$$

sest et (46) järele on 1 düün $= 1GCS^{-2}$.

b) Kui suur on 15 $sec$ jooksul käidud tee?

$$s = \frac{1}{2} pt^2 = \frac{6CS^{-2} \, . \, 15^2 \; S^2}{2} = 675 \; C \text{ (sentimeetrit).}$$

c) Kui suure kiirenduse saab sama keha 200 düüni mõjul?

$$p=\frac{P}{M}=\frac{200\ GCS^{-2}}{20\ G}=10\ CS^{-2}=(10\ cm/sec^2).$$

3) Jõud 7200 düüni annab kehale kiirenduse 60 $cm/sec^2$.

a) Kui suur on keha mass?

$$M=\frac{P}{p}=\frac{7200\ CGS^{-2}}{60\ CS^{-2}}=120\ G\ \text{(grammi)}.$$

b) Kui suur on selle keha kaal $45^0$ laiuskraadil? Formuli (43-a) järele on kaal $Q=M\times g=120\ G\,.\,981\ CS^{-2}=117720\ CGS^{-2}$ (düüni).

4) Jõud 2 $kg^*$ annab kehale kiirenduse 50 $cm/sec^2$.

Kui suur on keha mass praktilise mõõdusüsteemi üksustes? Formulis (45) tuleb teha $P=2\ kg^*$ ning $p=50\ cm/sec^2=0{,}5\ m/sec^2$; mass

$$M=\frac{P}{p}=\frac{2\ kg^*}{0{,}5\ m/sec^2}=\frac{4\ kg^*.sec^2}{m}$$

Praktilises mõõdusüsteemis on massüksuse nimetus $\frac{kg^*\ sec^2}{m}$

b) Kui suur on selle keha kaal?

Formuli (43-a) järele on

$$\text{kaal}=M\times g=4\frac{kg^*.\ sec^2}{m}\ 9{,}81\frac{m}{sec^2}=39{,}24\ kg^*.$$

5) Kuu pinnal langevad kehad kiirendusega 1,65 $m/sec^2$.

Kui suur on selle keha mass, mille raskus on seal vedrukaalu järele 6,6 $kg^*$?

Raskusjõud on 6,6 $kg^*=6600\ g^*=6600.981$ düüni; tema kiirendus on 1,65 $m/sec^2=165\ cm/sec^2$. Formuli (43-a) järele on

$$M=\frac{6600\,.\,981\,.\,GCS^{-2}}{165\ CS^{-2}}=39240\ G=39{,}24\ kg,$$

s. t. kuu peal on kehade kaal ligi 6 korda väiksem kui nende mass.

§ 25. **Mekaaniline töö.** 1) Harilikus elus teeme vahet kehaliku ja vaimlise töö vahel. Füüsika käsitab ainult kehalikku ehk mekaanilist tööd. Inimene kulutab igal tööl oma musklijõudu; selle tagajärjel tekib temas väsimustunne: Mida suurem töö on tehtud, seda suurem on väsimus. Sellepärast võiksime nimetada tööks seda põhjust, mis tekitab inimeses väsimust; võiksime mõõta töö suurust väsimustunde suurusega. Kuid väsimustunne on nagu iga teinegi tunne sagedasti ekslik. Sellepärast ei kõlba ta töö täpseks mõõtmiseks.

Töötamisel võib panna tähele, et töö juures peab alati mõjuma mingi jõud: Saani vedamisel mõjub näiteks hobuse tõmbejõud, mis ületab tee hõõrumist; kivi ülestõstmisel mõjub käe musklijõud, mis tasakaalustab keha raskusjõudu j. n. e. Siiski ei määra mõjuva jõu suurus üksi veel töö suurust: On hobune rakendatud näiteks liig raske koorma ette, siis ta ei suuda liigutada koormat paigalt ning ta ei tee ka mingit kasulikku tööd; olgugi et hobune tõmbab ehk paigalseisvat koormat tugevamini kui sõitvat, teeb ta tööd ainult viimasel juhusel. Sellest järeldame, et töö juures peab olema tingimata ka *liikumine*. Tõepoolest määravadki *jõud* ja *liikumistee tehtava töö suuruse*:

Tõstab üks tööline näiteks 10 *kg*, teine aga 20 *kg* ühe ja sama kõrguseni, siis teeb teine 2 korda suurema töö kui esimene. Ühtlasi peab teine tööline tarvitama ka 2 korda suuremat jõudu, sest 20 *kg* tõstmisel peab tõstejõud olema 2 korda suurem kui 10 *kg* tõstmisel. *Järjelikult on töö proportsionaalne töötava jõuga.* Tõstab aga esimene tööline 10 *kg* *kahe* meetri kõrgusele, teine sama 10 *kg* ainult *ühe* meetri kõrgusele, siis teeb esimene 2 korda suurema töö kui teine. Et ka esimese tõste- ehk liikumistee (2 *m*) on 2 korda suurem kui teise oma, siis *peab töö olema proportsionaalne selle tee pikkusega, millel mõjub jõud.*

Nagu tõstmisel, nii on see ka igal teisel tööl: Veab hobune näiteks rege, siis on tehtav töö seda suurem, mida raskem on koorem ning mida kaugemale teda veetakse, s. t. mida suurem on tarvilik tõmbejõud ning mida pikem veotee. Ka läbi seina (puu) lendav püssikuul teeb tööd, sest ta puurib puu sisse augu; läbi seina minekul peab kuul suruma seina puud; ta peab mõjuma puu peale seda suurema survejõuga, mida kõvem on puu; surve mõjub kogu selle tee pikkusel, millel kuul liigub puus. Töö aga on seda suurem, mida kõvem on puu ning mida sügavam auk, s. t. mida suurem on jõud ning pikem tema mõjumistee. **Üldse on töö alati proportsionaalne nii töötava jõuga kui tema teega.**

*Tööühikuks* on see töö, mida teeb 1 jõudühik ühel pikkusühikul. Valime jõudühikuks *kg*-jõu ning pikkusühikuks meetri, siis saame n. n. *praktilise mõõdusüsteemi tööühiku*, mida *hüütakse meeter-kilogrammiks* (mkg).

Tõstame 1 *kg* ühe mtr. kõrgusele, siis on jõud 1 ning töö 1 mkg.
„ $P$ „ „ „ „ „ „ „ $P$ „ „ $P$ „
„ $P$ „ $s$ „ „ „ „ „ $P$ „ „ $Ps$ „

s. t. **töö = jõud × tee.**

$$\mathbf{A = P.\, s} \tag{48}$$

Et jõud võiks üldse töötada, selleks peab ta suutma keha tõmmata liikuma, s. t. töötav jõud ei või olla väiksem kui ületatav takistus (näit. saani hõõrumine). On jõud suurem kui takistus, siis tasakaalustab takistus temast ainult ühe osa; ainult see osa, mis *võrdub* takistusega, teebki tööd; teine osa jõust kiirendab ainult liikumist. Nii tuleb siis formulis (48) mõista $P$ all seda jõudu, mis parajasti võrdub takistusega. Sellepärast ütleb see formul ka, et *töö võrdub takistuse ning selle tee korrutisega, millel ületatakse takistust.*

2) *CGS*-süsteemis tuleb valida tööüksuseks see töö, mida teeb jõud 1 düün teepikkusel 1 *cm*. Seda tööd nimetatakse düün-sentimeetriks ehk erg'iks:

1 *erg* = 1 düün-sentimeeter.

See üksus on väike; ta võrdub näiteks selle tööga, mida teeb ämblik, kui ta tõuseb oma niiti pidi 1 *cm* võrra kõrgemale (sest ämbliku kaal on umbes 1 *mg** $\cong$ 1 düün). Sellepärast tarvitatakse ka suuremat üksust

$$1\ joule = 10000000\ ergi = 10^7\ ergi \qquad (49)$$

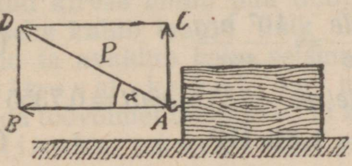
Et 1 *kg** = 1000 · 981 düüni ning 1 *m* = 100 *cm*, siis on

$$1\ mkg = 981000 \cdot 100\ \text{düün-sentim.} = 9{,}81 \cdot 10^7\ ergi,$$

ehk

$$1\ mkg = 9{,}81\ jouli \qquad (50)$$

3) Kui jõu ja tee siht ei lange ühte, siis tuleb jõud lahutada komponentideks *AB* ja *AC* (joon. 55), millest üks on paralleelne, teine aga perpendikulaarne liikumissihiga. Komponentjõud *AC* tõmbab keha ainult põigiti. Et keha liigub aga tõeliselt ainult sihis *AB*, siis on jõu *AC* mõju sarnane hobuse tõmbejõuga, mis ei suuda tõmmata koormat edasi.



Joon. 55.

Seega ei tee jõud *AC* mingit tööd ning töö suuruse määrab üksi liikumise sihis mõjuv komponentjõud *AB*. Et viimase suurus on $P \cdot \cos\alpha$, siis on töö

$$A = P\cos\alpha \cdot s$$

ehk

$$A = P \cdot s\cos\alpha \qquad (51)$$

Suurus $s \cdot \cos\alpha$ kujutab jõu sihile *(AD)* projekteeritud teed; nii võrdub siis töö ka terve jõu *(P)* ning tema sihile projekteeritud tee korrutisega.

§ 26. **Võimsus.** Üht ja sama tööd võib lõpetada lühema või pikema aja vältel. Töötegija on seda väärtuslikum ehk võimsam, mida kiiremini ta töötab, s. t. mida lühema aja jooksul ta suudab lõpetada antud töö. Võimsuseks nimetatakse aegüksuses tehtavat tööd. Tehakse *t sec* jooksul töö *A*, siis on võimsus

$$W = \frac{töö}{aeg} = \frac{A}{t} \qquad (52)$$

Praktilises mõõdusüsteemis on võimsusüksuseks seesugune võimsus, millel tehakse 1 *sec* vältel töö 1 *mkg*. Seda üksust nimetatakse „meeterkilogramm sekundis" *(mkg/sec)*. Suurema üksusena on üldisel tarvitusel n. n. hobujõud *(HP = Horse power)*, mis on eelmisest 75 korda suurem, s. t.

$$1\ HP = 75\ mkg/sec \qquad (53)$$

See üksus võrdub ligikaudu hobuse keskmise võimsusega 8—10 tunnilise tööpäeva puhul. Suudab töötegija ühes sekundis tõsta 75 kilogrammi ühe meetri võrra, siis on tema võimsus 1 *HP*.

Inimese võimsus oleneb tööaja pikkusest: Pikaajalisel tööl võib lugeda inimese keskmiseks võimsuseks 1/10 *HP;* see ei tähenda muud, kui et pikemal töötamisel inimene suudab tõsta igas sekundis 7,5 *kg* ühe meetri võrra (= 7,5 *mkg* tööd teha). Selle põhjal võib näiteks arvata välja, missuguse aja jooksul suudab 90 *kg* raskune inimene ronida 2000 *m* kõrguse mäe otsa: Tõusmise töö on 2000 *m* × 90 *kg* = 180000 *mkg*, sest nagu edaspidi selgub, ei olene töö sellest, kas tõustakse üles vertikaalselt või kaldu. Kuna inimene suudab teha igas sekundis keskmiselt 7,5 *mkg*, siis kulub tal kogu selle töö tegemiseks 180000 *mkg* : 7,5 *mkg/sec* = 24000 *sec* = 6 2/3 tundi. Ühes tunnis võib inimene tõusta nii siis keskmiselt 300 *m*.

Absoluutses mõõdusüsteemis on võimsusüksusteks 1 ergsekundis ning 1 joule-sekundis. Viimast võimsust hüütakse *watt*'iks *(w)*; 1000 watti on 1 kilowatt *(kw)*

$$1 \; watt = 1 \; \frac{joule}{sec} = \frac{10^7 \; erg}{sec} \tag{54}$$

$$1 \; HP = 75 \; mkg/sec = 75 \cdot 9{,}81 \; joule/sec = 735{,}5 \; watt = 0{,}7355 \; kw$$

$$\mathbf{1 \; kilowatt = 1{,}36 \; HP} \tag{55}$$

**Näited:** 1) Vankri vedamine nõuab tõmbejõudu 50 *kg*.

a) Kui suur töö kulub 100 *m* pikkuseks veoks?

Formuli (48) järele on töö

$$A = P \cdot s = 50 \; kg \cdot 300 \; m = 15000 \; mkg$$

b) Kui suur on võimus, kui 100 m käiakse 4 min, (= 240 *sec*) jooksul?

Formulist (52) leiame

$$W = \frac{A}{t} = \frac{15000 \; mkg}{240 \; sec} = \frac{62{,}5}{75} \; HP = 0{,}837 \; HP.$$

2) Aurumasinaga töötav krana (tõstemasin) peab tõstma koorma 4 tonni (= 4000 *kg*) kolme meetri kõrgusele. Aurumasina võimsus on 40 HP; kui palju aega kulub nimetatud tõstmiseks?

Formulite (52) ja (53) põhjal on

$$W = 40 \cdot 75 mkg/sec = 3000 mkg/sec = A/t = P \cdot s/t$$

Kuna on $P = 4000$ *kg* ning $s = h = 3$ *m*, siis on

$$t = \frac{P \cdot s}{W} = \frac{4000 \; kg \cdot 3m}{3000 \; mkg} = 4 \; sec.$$

3) Auru-pump peab igas minutis pumpama 360 liitrit vedelikku 50 *m* kõrgusele üles. Vedeliku erikaal on 1,15. Kui suur peab olema aurumasina võimsus?

360 liitrit kaalub 360 · 1,15 *kg* = 414 *kg*. Pump peab ühes minutis tõstma 414 *kg* 50 *m* võrra, s. t. ta peab tegema ühes minutis töö $A = 414 \; kg \cdot 50 \; m = 20700 \; mkg$. Formuli (52) järele on selle juures võimsus

$$W = \frac{A}{t} = \frac{20700 \; mkg}{60 \; sec} = 345 \frac{mkg}{sec} = \frac{345}{75} \; HP = 4{,}6 \; HP.$$

§ 27. **Energia; hoog.** 1) Kui hobune künnab põldu, siis teeb ta tööd. Selle töö silmnähtavaks tagajärjeks on ülesküntud vaod: Nende vagude tegemiseks ongi kulunud kogu töö. Langeb 2 *kg* raskune kivi 50 *m* kõrguselt, siis teeb tema raskusjõud ka tööd, sest see jõud mõjub kivi peale 50 *m* pikkusel langemisteel samal kombel, nagu hobuse jõud mõjus adra peale vao pikkusel. Kuna hobuse töö annab silmnähtava tagajärje, ei ole kivi langemisel märgata seesugust tagajärge. Selle asemel aga saab langev kivi suure kiiruse, kuna ader jääb töö lõpul seisma. Vahe seisabki selles, et hobuse töö on kulutatud mulla takistuse ületamiseks, raskusjõu töö aga ei olegi veel kulutatud, vaid ta on alles, ja nimelt kivis eneses selle kiiruse näol, mille ta omandas raskusjõu mõjul. Selle kiirusega võib nüüd kivi ise teha tööd: Näiteks lööb langev rammipakk vaia või palgi teatud sügavuseni maa sisse; langev vesi paneb käima veski ratta; puud vastu paisatud kirves lõhub puu (töö) jne. Nii siis: keha liikumapanemiseks kulub teatud hulk tööd; see töö ei lähe aga kaotsi, vaid ta avaldub keha seismajäämisel või kiiruse vähenemisel. Liikuval kehal on seega teatud töövõime. Seda töövõimet hüütakse liikumise energiaks, kineetiliseks energiaks ehk keha hooks.

Hoog on seda suurem, mida suurem on kiirus: Mida kiiremini liigub kirves, seda sügavamale tungib ta puusse, seda suuremat tööd teeb tema; käega visatud kuul ei jäta seinale märkigi, kiire püssikuul aga puurib seinasse augu. Ühesuguse kiiruse juures on suure massi hoog tugevam kui väikse massi oma: Suur rammipakk lööb vaia sügavamale kui väike; raske kirves tungib sügavamale puu sisse kui kerge jne.

2) Kahekilogrammilise kivi tõstmiseks 50 *m* kõrgusele kulub töö 2 *m* $\times$ 50 *kg* $=$ 100 *mkg*. See töö hoidub tõstetud kivis: niipea kui kivi saab langeda, teeb tema raskusjõud sama töö 2 *m* $\times$ 50 *kg* $=$ 100 *mkg*, mille kulul omandatud kiirusega maapinnale jõudev keha võib teha omakord tööd. Sellest järgneb, et ülestõstmisel omandab iga keha töövõime, mis on seda suurem, mida kõrgemale tõsteti keha.

Analoogiline on nähtus vedru pingutamisel või üleskeeramisel: Näiteks kellavedru keeramiseks kulutame teatud hulga tööd; selle tööga nihutame vedru aineosakesed algseisust vähe kõrvale; uue asetuse tõttu omandavad vedruosakesed aga teatud töövõime, mis avaldub näiteks kellavärgi liikumapanemises, pingulitõmmatud vibupüssi noole eemalepaiskumises j. n. e.

Töövõimet, mida omandab keha oma asukoha muutumisel või aineosakeste ümberasetusel, nimetatakse keha asetus-energiaks ehk potentsiaalseks energiaks. Hoog ja potentsiaalne energia kokku määravadki kehas peituva mekaanilise energia kogusuuruse.

3) Kõrguselt $h$ langev keha jõudku kiirusega $c$ maapinnale (joon. 56). On maa pind pehme, näiteks sitke savi, siis tungib keha oma hoo tõttu teatava sügavuseni $s$ maa sisse. Teel $s$ mõjub vastu keha liikumist maa takistus $P$, mille ületamiseks keha peab tegema töö $P \cdot s$. Oletame et $P$ on ühesuurune kogu teel $s$, siis liigub keha maa sees ühtlaselt aeglastatult. Et lõppkiirus (punktis $C$) on null, siis annab formul (29) selle liikumise jaoks

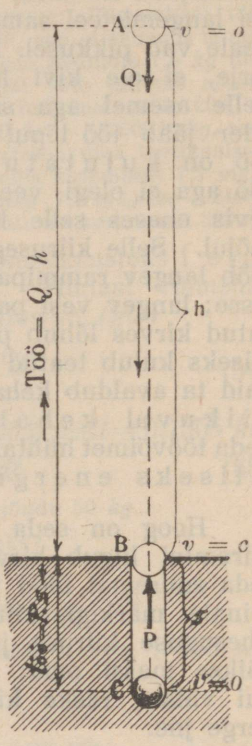
$$s = \frac{c^2}{2p}$$

paneme aeglastuse $p$ asemele tema väärtuse $p = \frac{P}{m}$ (formul 44), siis saame

$$s = \frac{mc^2}{2P}$$

ehk $$\mathbf{P \cdot s = {}^1/_2 mc^2} \qquad (56)$$

$P \cdot s$ oli see töö, mida keha teeb teel $s$; selleks tööks kulutab keha kogu oma hoo, sest lõpupunktis ($C$) on tema kiirus ja hoog null. Kiirusega $c$ liikuv keha suudab teha nii siis parajasti $^1/_2 mc^2$ suuruse töö; järjelikult ongi $^1/_2 mc^2$ selle keha töövõime ehk hoog. Sellest selgub, et




Joon. 56.

**hoog = pool massi × kiiruse kvadraat.**

Tööd ja hoogu mõõdetakse ühe ja sama üksusega.

4) $Q$-kilogrammilise keha tõstmiseks kõrgusele $h$ kulutame töö $Qh$ (kus Q on keha raskusjõud = mass × langemiskiirendus, formul 43a). See töö hoidub punkti $A$ tõstetud keha potentsiaalse energiana (joon. 56). Langemisel omandab keha selle energia kulul lõppkiiruse $c$, mille suurus on formuli (13) järele

$$c = \sqrt{2\,gh}$$

Sellest leiame, et

$$2\,gh = c^2$$

Kui panna kiirenduse $g$ asemele tema väärtus $g = Q/m$ (formul 43a), siis saame

$$Q \cdot h = {}^1\!/_2 mc^2 \qquad (57)$$

Võrrandi pahem pool kujutab tõstmiseks kulutatud tööd, parem pool aga hoogu, mis sünnib selle töö kulul. Võrrandite (56) ja (57) võrdlemisel selgub, et

$$P \cdot s = {}^1\!/_2 mc^2 = Q \cdot h \qquad (58)$$

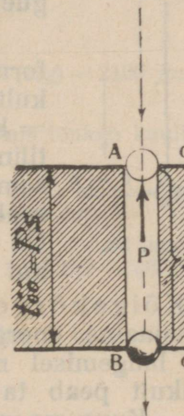
s. t. **teatud hooga ($^1\!/_2$mc$^2$) liikuv keha suudab teha parajasti niipalju tööd (P . s), kuipalju tööd (Q . h) kulutati selle hoo tekitamiseks.**

5) Võib juhtuda, et keha läheb ainult läbi $s$ *cm* pakusse kihi (näiteks püssikuul läbi laua), ning et ta liigub selle kihi taga veel kiirusega $v_2$ edasi (joon. 57). Takistuse $P$ mõjul kahaneb kiirus teel $s$ suurusest $v_1$ suuruseni $v_2$ s. t. liikumine on seal aeglastatud. Formuli (29) järele on

$$s = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2p};$$

paneme aeglastuse $p$ asemele tema väärtuse $p = P/m$ (formul 44), siis saame:

$$P \,.\, s = {}^1\!/_2 mv_1^2 - {}^1\!/_2 mv_2^2 \qquad (59)$$



Joon. 57.

${}^1\!/_2 mv_1^2$ kujutab kihi juure tuleva keha hoogu (punktis $A$), ${}^1\!/_2 mv_2{}^2$ aga läbi kihi läinud keha hoogu (punktis $B$); seega kujutab vahe ${}^1\!/_2 mv_1^2 - {}^1\!/_2 mv_2^2$ h o o  k a h a n e m i s t teel $s$. Samas võrrandis kujutab $P \,.\, s$ seda tööd, mis keha teeb läbi kihi $s$ minekul. Võrrand (59) ütleb seega, et **keha tehtud töö võrdub tema hoo kahanemisega.**

Tahaksime keha hoogu t õ s t a, siis peaksime teda tõukama näiteks teepikkusel $s$ (joon. 57) mingi jõuga $P$. Sel tõukamisel k u l u t a m e töö $P.\, s$; nimelt selle kulutatud töö tõttu kasvabki keha kiirus siis suurusest $v_1$ suuruseni $v_2$. Et liikumine teel $s$ on k i i r e n d a t u d, siis annab formul (19):

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2p}$$

millest formuli (44) abil järgneb:

$$P \,.\, s = {}^1\!/_2 mv_2^2 - {}^1\!/_2 mv_1^2$$

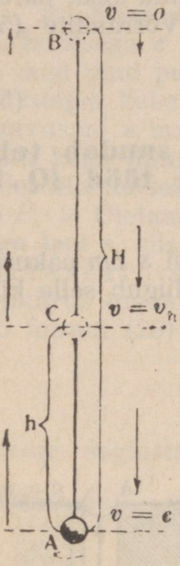
s. t. **kulutatud töö võrdub keha hoo suurenemisega.**

6) Keha potentsiaalset energiat võib mõõta tööga, mis kulub selleks, et kehale anda seda energiat (võrdle p. 4). Viibib näiteks vabalt langev keha teataval silmapilgul kõrgusel $h$, siis on tema potentsiaalne energia sel silmapilgul $Q \cdot h$, sest kõrgusele $h$ tõstmiseks kulub parajasti niipalju tööd ($Q$ on keha kaal); on keha kiirus samal silmapilgul $v_h$, siis on tema

kineetiline energia (hoog) $E_k = {}^1/_2 mv^2$

potentsiaalne energia $E_p = Q.h$

k o g u e n e r g i a $E = Q.h + {}^1/_2 mv^2$ (60)



Joon. 58.

Vaatleme vertikaalselt ülesvisatud keha energiate muutumist: V i s k e a l g u l ($A$, joon. 58) antakse kehale algkiirus $c$ ning hoog ${}^1/_2 mc^2 = E_k$; sel silmapilgul asub keha veel maapinnal, nii et tema potentsiaalne energia $E_p = O$; koguenergia on aga $E = E_k + E_p = {}^1/_2 mc^2$.

K õ r g u s e l $C$ on $E_p = Q.h$ ja $E_k = {}^1/_2 mv_h^2$; formuli (31) järele on $v_h^2 = c^2 - 2gh$; järjelikult on $E_k = {}^1/_2 mc^2 - mgh$. Kuna $mg = Q =$ $=$ keha kaal, siis on $E_k = {}^1/_2 mc^2 - Qh$. Kineetiline energia on punktis $C$ kahanenud nii siis samapalju, kuipalju potentsiaalne energia on seal kasvanud. Koguenergia on seega $E = Qh + {}^1/_2 mc^2 - Qh = {}^1/_2 mc^2$, s. t. s a m a s u u r kui punktis $A$.

K õ i g e k õ r g e m a s p u n k t i s $B$ on $v = o$ ning $E_k = o$; potentsiaalne energia on seal $E_p = QH$; seega on $E = QH$. Keha langemisel moondub kogu potensiaalne energia hooks; järjelikult peab ta võrduma maapinnani tagasilangenud keha hooga. Kuna maapinnal on langeva kehe kiirus sama $c$ (§ $13_1$), siis on tema hoog sama ${}^1/_2 mc^2$; seega on $Q \cdot h = {}^1/_2 mc^2 =$ $=$ koguenergia punktis $B$. K e h a k o g u e n e r g i a h o i d u b j ä r j e l i k u l t l i i k u m i s e a j a l ü h e s u u r u s e n a; **Potentsiaalne energia kasvab alati niipalju, kuipalju kineetiline energia kahaneb ja ümberpöördult.**

Leitud seadus on ainulte erijuhus n. n. e n e r g i a a l a l h o i d u v u s e üldisest seadusest, mille järele ü k s k i e n e r g i a e i v õ i i i a l g i h ä v i n e d a, vaid ta võib ainult m o o n d u d a teistsuguseks energiaks (näit. potentsiaalne energia kineetiliseks ja ümberpöördult).

**Näited:** 1) 981 kilogrammiline vanker veereb kiirusega $c = 1{,}25\ m/sec$. Kui suur on vankri hoog?

Mass $M = 981\ kg$;

$$\text{Hoog } A = {}^1/_2 Mv^2 = {}^1/_2 \cdot 981\ kg \cdot (1{,}25\ m/sec)^2 = 767\ \frac{kg \cdot m^2}{sec^2} =$$

$$= 767 \cdot \frac{1000\ g \cdot (100\ cm)^2}{sec^2} = 767 \cdot 10^7 \frac{g \cdot cm^2}{sec^2}$$

Kuna düün $= g \,.\, cm/sec^2$ (formul 46), siis on $g \,.\, cm^2/sec^2 = düün \times cm = erg$, s. t.

$$A = 767 \,.\, 10^7 \; ergi = 767 \; jouli = 767/9{,}81 \; mkg \text{ (form. 50).}$$
$$A = 78{,}1 \; mkg.$$

b) Kui kaugele liigub vanker ainult oma hooga, kui hõõrumist võib kujutada 40 kilogrammilise jõuga, mis mõjub vastu liikumist?

Liikugu vanker $x$ meetrit; sellel teel kulub hõõrumise ületamiseks töö

$$40 \; kg \times \mathbf{x} \; m.$$

Et see töö peab tulema hoolt $A = 78{,}1 \; mkg$, siis on $40 \; kg \,.\, x \; m = 78{,}1 \; mkg$, s. t.

$$x = \frac{78{,}1 \; mkg}{40 \; kg} = 1{,}95 \; m.$$

2) Püssikuul, mille kaal on 12 $g$, lahkub 0,8 $m$ pikkusest püssirauast kiirusega 60000 $CS^{-1}$ ($= 600 \; m/sec$),

a) Kui suur on kuuli hoog?

Formul (56) annab:

$$A = \frac{Mv^2}{2} = \frac{12 \; G \,.\, 60000^2 \; C^2S^{-2}}{2} = 2160 \,.\, 10^7 \; C^2GS^{-2} \text{ (erg)} = 2160 \; joule.$$

b) Kui suur on püssirohu gaasi surve $P$, mis tõukab kuuli püssirauast välja?

Kuuli hoog võrdub gaasi surve tööga $P \,.\, s$, kus $s$ on see tee, mille pikkusel surve mõjub, s. t. püssiraua pikkus $0.8m = 80 \; cm$.

$$A = P \,.\, s; \text{ ja } P = \frac{A}{s} = \frac{2160 \,.\, 10^7 \; C^2GS^{-2}}{80 \; C} = 27 \,.\, 10^7 \; CGS^{-2} \text{ (düüni).}$$

c) Kui suur on kuuli kiirendus ja kui kaua liigub ta püssirauas?

Formulist (8) saame

$$p = \frac{v^2}{2s} = \frac{(60000 \; CS^{-1})^2}{2 \,.\, 80 \; C} = 22{,}5 \,.\, 10^6 \; CS^{-2}$$

Formuli (3) järele on

$$t = \frac{v}{p} = \frac{60000 \; CS^{-1}}{22500000 \; CS^{-2}} = 0{,}0027 \; S.$$

d) Kui suur on püssirohu plahvatuse võimsus?

Formul (52) annab

$$W = \frac{A}{t} = \frac{2160 \,.\, 10^7 \; G^2GS^{-2}}{0{,}0027 \; S} = 8 \,.\, 10^{12} \; C^2GS^{-3} \text{ (erg-sekundis)} =$$

$$8 \,.\, 10^5 \text{ watt} = 800 \text{ kilowatt} = 1088 \; HP.$$

3) Palgi maasse-rannamisel lastakse tema peale langeda 120 $kg$ raskune koorem 8 $m$ kõrguselt. Iga hoobi juures läheb palk 0,5$m$ võrra maa sisse. Kui suur on maapinna takistus?

Tähendame otsitud takistuse (jõu) tähega x ($kg$), siis teeb palk igal hoobil töö

$$A = 0{,}5m \,.\, \mathbf{x} \; kg = 0{,}5\mathbf{x} \; mkg.$$

Selle tööga peab võrduma langeva koorma hoog; viimane on $A = \frac{1}{2} Mv^2$; et langemine on ühtlaselt kiirendatud, siis annab formul (13) lõppkiiruse $v = \sqrt{2gh}$; kui see väärtus panna eelmisse formulisse, on

$$A = \frac{1}{2} M . 2 gh = Mg . h$$

Kuna $M . g$ on koorma kaal (formul 43-a), mis praegusel juhusel võrdub 120 *kg*-ga, siis on

$$A = 120\ kg . 8\ m = 960\ mkg$$

Sellest järgneb:

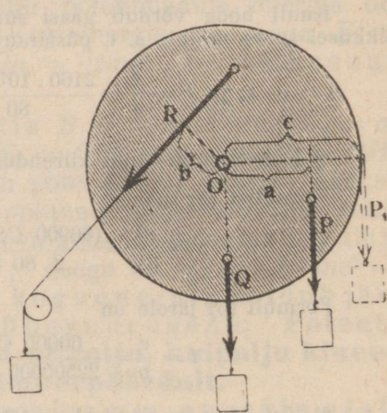
$$0{,}5\mathbf{x}\ mkg = 960\ mkg.$$

$$\mathbf{x} = \frac{960\ mkg}{0{,}5 m} = 1920\ kg.$$

## Peatükk II:

# Kôva keha tasakaal. Masinad.

§ 28. **Pöördemoment.** 1) Asetame keha teraviku otsa, siis toetub ta ainult ü h e s punktis; kinnitame õhukese ketta peenele võllile, siis võib pidada võlli lihtsaks sirgjooneks, keha kinnituskohta aga üheksainsaks punktiks. Kõigil neil juhustel võib keha pöörduda oma tugipunkti ümber; seda punkti hüütakse sellepärast ka p ö ö r d e p u n k t i k s. Ketta (joon. 59) ääre külge riputatud koorma $P$ raskusjõud pöörab ketast seni kuni koorem asub seisu $Q$, millejuures tema raskusjõud läheb otse läbi tugipunkti $O$. Katsume takistada ketta pöördumist näiteks käega, siis tunneme, et pöördumine ei sünni alati ühetugevuselt: seisul $P_1$ pöörab üks ja sama jõud (koorem) tugevamini kui seisul $P$; seisul $Q$ aga ei pööra ta ketast üldse. Pööramise tugevuse määrab järjelikult mitte ainult jõu suurus, vaid ka tema mõjumise viis: Kui




Joon. 59.

tugipunktist $O$ langetada perpendiklid ($a$, $b$, $c$,) jõudude sihtidele, siis selgub, et $P_1$ siht seisab pöördepunktist $O$ kaugemal kui $P$ oma; jõu $Q$ siht aga läheb otse läbi $O$, mis tähendab, et tema sihi kaugus on null. Nagu täpsem katse näitab, sünnib pöördumine nimelt proportsionaalselt jõu kaugusega pöördepunktist; seda kaugust nimetatakse j õ u õ l a k s ehk p ö ö r d e õ l a k s ($a$, $b$ ja $c$). Et jõud pöörab teadagi seda tugevamini, mida suurem ta on, siis on pöördumise tugevus ehk n. n. p ö ö r d e m o m e n t (s t a a t i l i n e m o m e n t) proportsionaalne nii jõu tugevuse kui tema õla pikkusega; ta võrdub seega mõlema suuruse korrutisega:

$$\textbf{pöördemoment} = \textbf{jõud} \times \textbf{pöördeõlg}$$

$$\mathfrak{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a} \qquad (61)$$

Jõud määrab ära igakülgselt lihtsa edasiliikumise, pöördemoment aga kehade pöördumise. Seega etendab pöördemoment sama osa pöördumisel, missugust etendab lihtne jõud edasiliikumisel.

Kui leida seesugune jõud $S$, mis õlaga $k = 1$ *cm* pöörab samatugevasti kui jõud $P$ õla $a$ puhul, siis on mõlemate pöördemomendid ühesuurused, s. t.

$$P.a = S.k = S.1 = S$$

Antud jõu $P$ pöördemoment võrdub arvuliselt nii siis selle jõu ($S$) suurusega, mis pöörab õlaga 1 *cm* sama tugevasti kui antud pöördemomentki.

On õlg null (jõud $Q$), siis on ka pöördemoment 0 ning keha ei pöördu üldse, vaid ta asub tasakaalus. Sel juhusel läheb jõu siht läbi pöördepunkti ning jõud ise tasakaalustub toe (võlli $O$) vastumõjuga (§ 18): **On jõud sihitud läbi pöördepunkti, siis asub keha tasakaalus**; ümberpöördult: **asub keha tasakaalus, siis peab jõud olema sihitud läbi pöördepunkti.**

2) Kuna pöördemomendi suurus oleneb ainult jõu ja tema õla suurusest, siis ei mõju jõu siht pöördumise tugevuse peale: juhime näiteks koorma tõmbejõu $R$ (joon. 59) rulli abil kald-sihti, siis on selle jõu pöördemoment $R.b$; kuigi teine jõud P mõjub vertikaalsihis, pöörab tema ikkagi sama tugevasti, kui aga mõlemate momendid on ühesuurused, s. t. kui $R.b = P.a$. Et jõud $R$ pöörab keha ühele, jõud $P$ aga teisele poole, siis loetakse nende momentide sihte vastupidiseks. On lepitud kokku pidada positiivseks (+) seda momenti, mis pöörab keha päri kellanäitajat, negatiivseks (—) aga seda, mis pöörab keha vastu kellanäitajat. Jõu $P$ moment on seega $+P.a$, jõu $R$ oma aga $-R.b$.

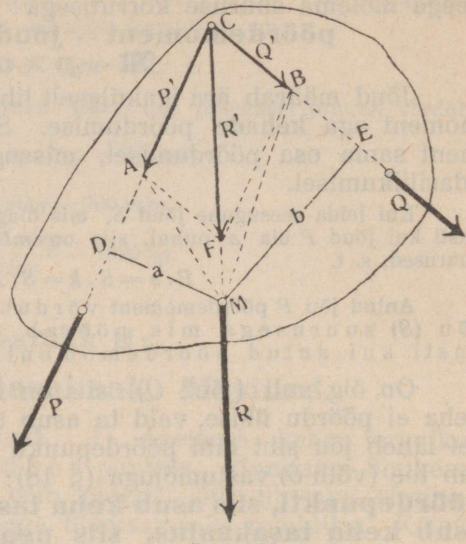
Ketta pöördumisel võib olla üldse ainult 2 sihti; sellepärast on mitme pöördemomendi koosmõju sarnane ühel sirgjoonel mõjuvate jõudude koosmõjuga, võib ju ka neil jõududel olla ainult 2 sihti. Pöördemomendid liituvad järjelikult samal kombel kui nimetatud jõudki; s. t. **pöördemomendid liituvad lihtsa algebralise summeerimise teel.** Jõu $P$ ja $R$ koosmõjul on resulteeriv moment seega

$$\mathfrak{M} = P.a - R.b.$$

On resulteeriv moment null, siis ei või keha üldse pöörduda, s. t. ta peab viibima tasakaalus.

§ 29. **Keha kahe punkti peale mõjuvate jõudude liitmine.** Mõjugu keha peale 2 jõudu $P$ ja $Q$ (joon. 60), mis asuvad ühel tasapinnal. Kanname jõudude rakenduspunktid piki nende mõjumissihte kuni lõikepunktini $C$ (§ 16).

Nüüd mõjuvad antud jõud $P'$ ja $Q'$ ühes punktis $C$. Paralleelogrammi seaduse järele liituvad nad sellepärast üheks resultantjõuks $R'$ Viimase rakenduspunktiks võib valida keha mistahes punkti $M$, mis asub $R'$ mõjumissihil. Kuna $R'$ täidab $P'$ ja $Q'$ aset, siis ongi $R$ antud jõudude $P$ ja $Q$ resultantjõud.



Joon. 60.

Võib kujutada enesele ette, et läbi $M$ on tõmmatud joonistuspinnaga perpendikulaarne telg, mille ümber keha võib vabalt pöörduda. Kuna resultantjõud $R$ läheb otse läbi selle telje, siis tema ei saa pöörda keha. Järjelikult ei või keha pöörduda ka nende jõudude $P$ ja $Q$ mõjul, mille aset täidab $R$. Sellepärast peab $P$ ja $Q$ pöördemoment punkti $M$ suhtes olema null. Kuna pöördeõladeks on punktist $M$ langetatud perpendikulaarjooned $a$ ja $b$, siis on jõu $P$ pöördemoment $-Pa$ ning jõu $Q$ oma $+Qb$. Kui mõlemate summa on null, siis on nad arvuliselt ühesuurused, s. t.

$$Pa = Qb \tag{62}$$

s. t. **resultantjõu rakenduspunkt peab asuma nii, et komponentjõudude pöördemomendid selle punkti suhtes oleksid võrdsed.**

Kuna jõudu ($R$) võib ümber paigutada tema mõjumissihis, siis peab nimetatud tingimus olema täidetud kõigi nende punktide jaoks, mis asuvad sirgjoonel $CM$.

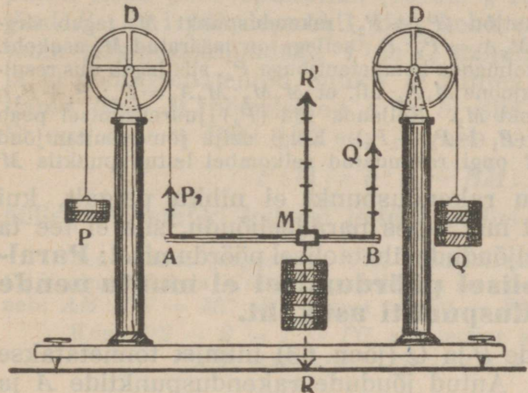
Võrrand (62) tuletub ka otse joonistusest 60: Kolmnurgad $ACF$ ja $BCF$ on võrdpindsed (sest $AC = BF$; $BC = AF$ ning $CF = CF$); ühise baasi $CF$ tõttu on neil ka võrdsed kõrgused. Samad kõrgused on ka kolmnurkadel $CAM$ ja $CBM$, millel samuti ühine baas $CM$; järjelikult on ka need kolmnurgad võrdpindsed. Võtame $CAM$ baasiks $CA$ ning $CBM$ baasiks $CB$, siis on esimese kolmnurga pind $\frac{1}{2}CA.DM = \frac{1}{2}P.a$ ning teise oma $\frac{1}{2}CB.ME = \frac{1}{2}Q.b$. Nende pindade võrdsusest järgneb, et

$$P.a = Q.b$$

## § 30. Ühtepidi sihitud paralleeljõudude liitmine.

1) Joonistusel 61 kujutatud aparaadil tõmbavad niitide otsa seotud koormad $P$ ja $Q$ varva $AB$ otse vertikaalselt üles;

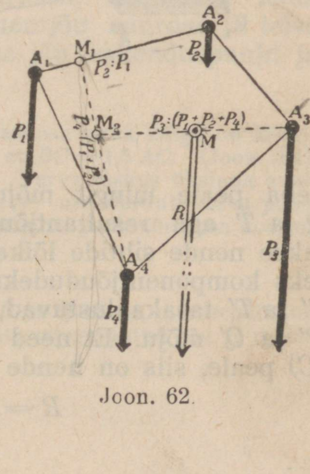
seega on niitide tõmbejõud $P'$ ja $Q'$ paralleelsed. Nende jõudude tasakaalustamiseks riputame varva külge koorma $R$, mille suuruse ja riputamispunkti ($M$) valime nii, et varb hoiduks tasakaalus. Katse näitab, et varb on tasakaalus ainult sel juhusel, kui koorem $R = P + Q$ ning kui $M$ on valitud nii, et $BM : AM = P : Q$. On näiteks $P = 2$ *kg* ja $Q = 4$ *kg*, siis on $P : Q = 1/2$; sel puhul leiame katsel, et ka $BM : MA = 1/2$, s. t. et koorem peab rippuma varva esimesel kolmandikul otsast $B$. Tasakaalustav jõud $R$ peab võrduma $Q'$ ja $P'$ resultantjõuga $R'$ ($19_1$). Järjelikult on ka $R' = P' + Q'$ ning $BM : MA = P' : Q'$. Nii siis: **Resultantjõud peab võrduma komponentjõudude summaga; ta peab olema nendega paralleelne ja samapidi sihitud. Tema rakenduspunkt jagab komponentjõudude rakenduspunktide ühendusjoone ümberpöördud proportsioonis komponentjõudude suurustega.** Resultantjõud asub järjelikult alati suurema jõu läheduses. Võrdsete komponentjõudude resultantjõud seisab sümmeetriliselt esimeste vahel.



Joon. 61.

Tasakaalus viibivat varba $AB$ (joon. 61) võib pöörda kuitahes kaldu, ilma et tasakaal rikkuks; tingimuseks on sellejuures ainult, et kõik kolm jõudu jääks omavahel paralleelseks. Jõud jäävad aga paralleelseteks ka siis, kui nad kõik ise pöörduvad ühe ja sama nurga võrra. Sellest selgub, et resultantjõu rakenduspunkt jääb kõigi paralleeljõudude ühetaolisel pöördumisel endisse kohta.

2) Mõjub keha peale mitu paralleeljõudu $P_1$, $P_2$, $P_3$ ja $P_4$ (joon. 62), siis liituvad nad paarikaupa eelmise seaduse järele üheks resultantjõuks $R$, mille suurus võrdub kõigi kom-



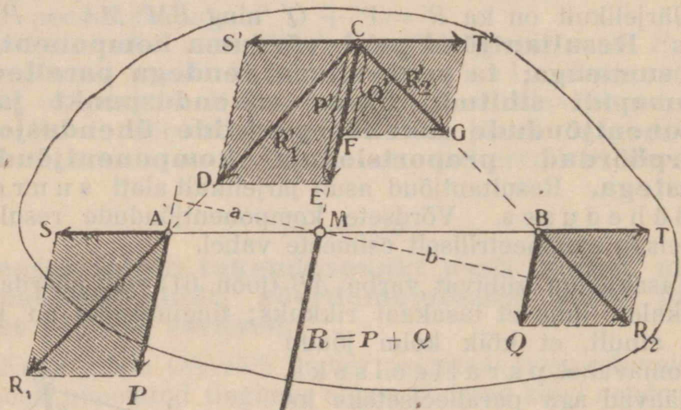
Joon. 62.

petentjõudude summaga ning mille rakenduspunkt *(M)* asub antud jõu dude vahel. Viimast punkti hüütakse ka paralleeljõudude keskpunktiks; tema asukoht leidub lihtsal geomeetrilisel konstruktsioonil.

Jõu $P_1$ ja $P_2$ resultantjõu $(P_1+P_2)$ rakenduspunkt $M_1$ jagab sirgjoone $A_1A_2$ nii, et $A_1M_1 : M_1A_2 = P_2 : P_1$; sellega on määratud $M_1$ asukoht. Liidame selle resultantjõu kolmanda kompetentjõuga $P_4$, siis jagab uus resultantjõud $(P_1+P_2+P_4)$ sirgjoone $M_1A_4$ nii, et $M_1M_2 : M_2A_4 = P_4 : (P_1+P_2)$; sellest leidub rakenduspunkt $M_2$. Neljanda jõu $(P_3)$ juureliitmisel peab olema $M_2M : MA_3 = P_3 : (P_1+P_2+P_4)$. Kõigi nelja jõu resultantjõud $(P_1+P_2+P_3+P_4) = R$ ongi rakendatud selkombel leitud punktis $M$.

Kuna resultantjõu rakenduspunkt ei nihku paigalt, kui ühevõrra pöörda kaht mis tahes paralleeljõudu, siis ei tee ta seda ka kõigi paralleeljõudude ühetaolisel pöördumisel: **Paralleeljõudude ühetaolisel pöördumisel ei muutu nende resultantjõu rakenduspunkti asukoht.**

3) Paralleeljõudude $P$ ja $Q$ (joon. 63) liitmist toimetatakse graafiliselt järgmiselt: Antud jõudude rakenduspunktide $A$ ja $B$ külge rakendatakse 2 abijõudu $S$ ja $T$, mis mõjuvad sihis $AB$ teine-teise vastu. Need jõud tasakaalustuvad ning ei avalda




Joon. 63.

keha peale mingit mõju. $P$ ja $S$ liituvad resultantjõuks $R_1$, $Q$ ja $T$ aga resultantjõuks $R_2$. Resultantjõud $R_1$ ja $R_2$ kantakse nende sihtide lõikepunkti $C$; seal lahutatakse nad endisteks komponentjõududeks ($S'$, $P'$ ning $T'$, $O'$). Komponentjõud $S'$ ja $T'$ tasakaalustuvad, mille tõttu jääb järele ainult jõudude $P'$ ja $Q'$ mõju. Et need jõud mõjuvad ühes sihis ja ühe punkti *(C)* peale, siis on nende resultantjõud

$$R = P' + Q = P + Q.$$

Jõud $R$ võib täita kõigi antud jõudude aset; seega ongi tema $P$ ja $Q$ resultantjõud. Tema rakenduspunktiks võib valida näiteks sirgjoonel $AB$ asuv punkt $M$. Kui teha see punkt keha pöördepunktiks (võrdle § 29), siis läheb resultantjõud $R$ läbi pöördepunkti ning keha ei pöördu ei $R$ enese ega tema komponentjõudude $P$ ja $Q$ mõjul. Järjelikult peavad $P$ ja $Q$ pöördemomendid punkti $M$ suhtes olema võrdsed. Tõmbame läbi $M$ pöördeõlad $a$ ja $b$, siis peab olema $Pa = Qb$. Et aga $b : a = BM : AM$, siis järgneb sellest:

$$P : Q = b : a = BM : AM,$$

millega tõestubki katsest leitud seadus (p. 1).

See seadus järgneb ka otse joonistusest 63: Kolmnurgad $CDE$ ja $CAM$ ning $CGF$ ja $CBM$ on paarikaupa sarnased. Esimesest paarist järgneb: $AM : DE = MC : EC$, teisest paarist — $BM : GP = MC : FC$.

Kuna $DE = S = T = FG$, siis leiame sellest, et

$$AM : BM = FC : EC = Q' : P' = Q : P.$$

## § 31. Antud jõu lahutamine kaheks paralleeljõuks.

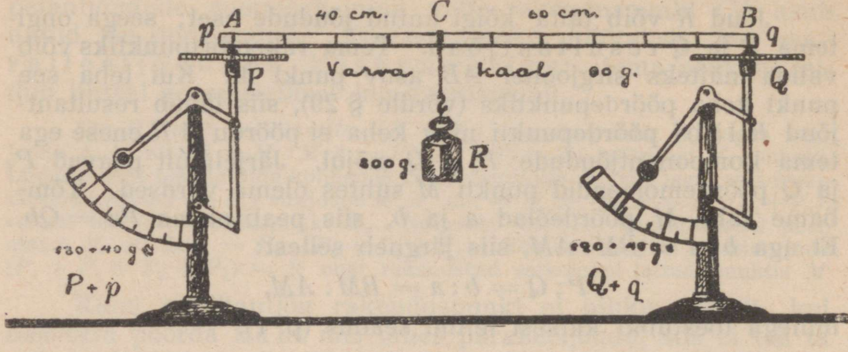
1) Kuna 2 paralleeljõudu summeeruvad ühiseks resultantjõuks, siis võib pidada iga antud jõudu seesuguseks resultantjõuks ning võib leida need komponentjõud, millest antud jõud võiks seista koos. Sel teel lahutame antud jõu kaheks uueks jõuks, mis võivat täita esimese aset. Jõu lahutamisel tuleb ainult pidada silmas, et komponentjõudude summa peab võrduma antud jõuga ning et nende rakenduspunktide kaugused antud jõust peavad olema ümberpöördult proportsionaalsed komponentjõudude suurustega. Et antud jõudu võib lahutada väga mitmel viisil, siis on lahutamisülesandel ühemõtteline lahendus ainult sel puhul, kui on tuntud mõningad kitsendavad tingimused. On näiteks tuntud otsitavate komponentjõudude rakenduspunktid, siis võime leida nende suurused; on aga antud komponentjõudude suurused, siis võime leida nende rakenduspunktid; ühe komponentjõu suuruse ja teise rakenduspunkti põhjal leidub esimese jõu rakenduspunkt ja teise suurus j. n. e.

**Näide:** Kahes punktis toetatud 80 $g$ raskuse varva külge on kinnitatud punktis $C$ kaalupomm $R = 300\,g$, nii et $BC = 1{,}5\,AC$. (Joon. 64). Kui suur on surve mõlema tugipunkti peale? Varva raskus üksinda avaldab kummagi tugipunkti peale ühesuuruse surve, mis võrdub varva poole kaaluga $p = 40$ $g$. Koorma $R$ survete $P$ ja $Q$ summa peab võrduma koorma kaaluga $R$:

$$P + Q = R.$$

Peale selle peavad otsitavad komponentjõud $P$ ja $Q$ olema ümberpöördult proportsionaalsed nende rakenduspunktide kaugustega antud jõu $R$ rakenduspunktist, s. t.

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}$$




Joon. 64.

Et aga $BC = 1{,}5\ AC$ ja $R = 300\ g$, siis on

$$\frac{P}{Q} = \frac{1{,}5AC}{AC} = 1{,}5; \text{ ehk } P = 1{,}5\,Q$$

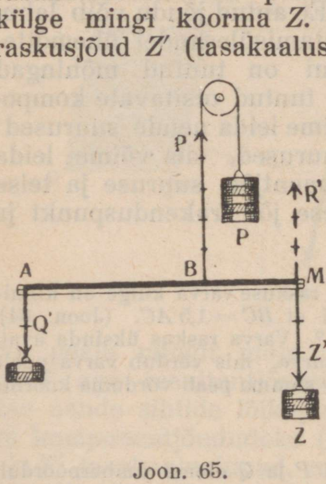
$$R = Q + 1{,}5Q = 300\ g;\quad Q = 120\ g$$

$$\text{ja } P = 1{,}5Q = 180\ g.$$

Ühes varva enese kaaluga on surve punkti $A$ peale $P + p = 180\,g + 40\,g$ ning punkti $B$ peale $Q + q = 120\,g + 40\,g$. On tugipunktideks ($A$ ja $B$) näiteks kaks kirjakaalu, siis näitavad need tõepoolest 220 ja 160 grammi.

## § 32. Kahe vastupidisihitud paralleeljõu liitmine. Jõupaar.

1) Joonistusel 65 kujutatud varba $AM$ tõmbab koorem $Q$ jõuga $Q'$ alla, koorem $P$ aga jõuga $P'$ otse üles. $P'$ ja $Q'$ on paralleelsed ning otse vastupidi sihitud. Nende tasakaalustamiseks peame riputama varva teise otsa ($M$) külge mingi koorma $Z$. Tasakaalu puhul peab selle koorma raskusjõud $Z'$ (tasakaalustav jõud) võrduma $Q'$ ja $P'$ resultantjõuga $R'$ nii et koorma $Z$ suurus määrabki otsitud resultantjõu $R'$ suuruse. On katsel näiteks $Q = 2\ kg$, $P = 5\ kg$ ning $AB = 6$ cm, siis leiame, et tasakaaluks peab olema $Z = 3\ kg$ $(= 5 - 2)$ ning $MB = 4\ cm$. Resultantjõu rakenduspunkti kaugused $MB$ ja $MA$ suhtuvad nii siis kui $4 : (4 + 6) = 2 : 5$; antud jõud aga suhtuvad samuti kui $Q : P = 2 : 5$. Teistsugustel andmetel peab $Z$ ja $MB$ olema teistsugune, kuid alati leiame, et tasakaal on võimalik ainult siis, kui on




Joon. 65.

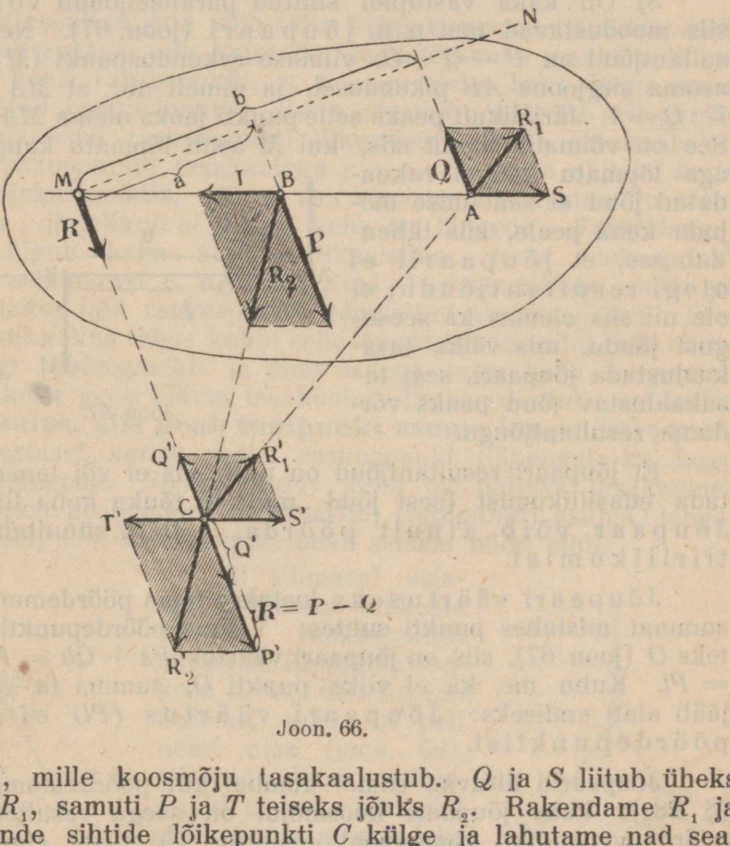
$$Z = P - Q, \text{ ehk } \mathbf{R'} = \mathbf{P'} - \mathbf{Q'}$$

ning kui

$$MB : MA = Q : P, \text{ ehk } \mathbf{MB} : \mathbf{MA} = \mathbf{Q'} : \mathbf{P'}$$

Sellest järgneb: **Kahe vastupidi sihitud paralleeljõu resultantjõud võrdub komponentjõudude vahega ning mõjub suurema komponendi (P′) sihis. Tema rakenduspunkt asub komponentjõudude rakenduspunktide ühendusjoone pikendusel, ja nimelt suurema komponentjõu (P′) taga. Resultantjõu rakenduspunkti kaugused komponentjõudude rakenduspunktidest on ümberpöördult proportsionaalsed komponentjõudude suurustega.**

2) Graafiliselt liidetakse vastupidi sihitud paralleeljõude järgmiselt: Antud jõudude $Q$ ja $P$ rakenduspunktide $A$ ja $B$ (joon. 66) külge rakendatakse üksteise vastu sihitud abijõud



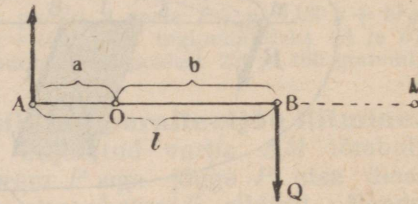

Joon. 66.

$S$ ja $T$, mille koosmõju tasakaalustub. $Q$ ja $S$ liitub üheks jõuks $R_1$, samuti $P$ ja $T$ teiseks jõuks $R_2$. Rakendame $R_1$ ja $R_2$ nende sihtide lõikepunkti $C$ külge ja lahutame nad seal esialgseteks komponentjõududeks $Q'$, $S'$ ning $P'$, $T'$. Jõud $S'$ ja $T'$ tasakaalustuvad ka seal, nii et järele jääb ainult $Q'$ ja $P'$. Viimased mõjuvad ühe punkti peale otse vastupidistes sihtides; nende resultantjõud on $R = P' - Q'$, mis on ühtlasi ka antud jõudude $P$ ja $Q$ resultantjõuks. Jõu $R$ võime viia sihis $CM$

üles kuni antud jõudude rakenduspunktide ühendusjooneni $AB$ (punkti $M$). Teeme rakenduspunkti $M$ keha tugipunktiks, siis ei poördu keha jõu $R$ mõjul (§ $28_1$); et aga $R$ täidab $P$ ja $Q$ aset, siis ei pöördu keha ka antud jõudude koosmõjul, s. t. $P$ ja $Q$ pöördemomendid punkti $M$ suhtes peavad olema võrdsed: Langetame punktist $M$ perpendikulaarjoone ($MN$) antud jõudude sihtidele, siis on pöördeõlgadeks $a$ ja $b$ ning pöördemomentideks $Pa$ ja $Ob$. Et $Pa = Qb$, siis on $b : a = P : Q$. Kuna aga $b : a = MA : MB$, siis järgnebki sellest eelpool nimetatud seadus:

$$MA : MB = P : Q.$$

3) On kaks vastupidi sihitud paralleeljõudu võrdsed siis moodustavad nad n. n. jõupaari (joon. 67). Nende resultantjõud on $P - Q = O$; viimase rakenduspunkt ($M$) peaks asuma sirgjoone $AB$ pikendusel, ja nimelt nii, et $MA : MB = P : Q = 1$. Järjelikult peaks selle punkti jaoks olema $MA = MB$. See on võimalik ainult siis, kui $M$ asub lõpmatu kaugel. Et aga lõpmatu kaugel rakendatud jõud ei saa üldse mõjuda keha peale, siis tähendab see, et jõupaaril ei olegi resultantjõudu; ei ole nii siis olemas ka seesugust jõudu, mis võiks tasakaalustada jõupaari, sest tasakaalustav jõud peaks võrduma resultantjõuga.



Joon. 67.

Et jõupaari resultantjõud on null, siis ei või tema sünnitada edasiliikumist (sest jõud „null“ ei tõuka keha liikuma). Jõupaar võib ainult pöörda, s. t. ta süunitab ainult tiirliikumist.

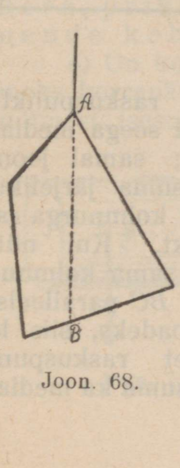
Jõupaari väärtuseks loetakse tema pöördemomentide summat mistahes punkti suhtes: Valime pöördepunktiks näiteks $O$ (joon. 67), siis on jõupaari väärtus $Pa + Qb = P(a + b) = Pl$. Kuhu me ka ei viiks punkti $O$, summa $(a + b) = l$ jääb alati endiseks: Jõupaari väärtus ($Pl$) ei olene pöördepunktist.

Jõupaarid liituvad samal kombel kui pöördemomendidki (§ $28_2$); kahe jõupaari koosmõjul on seega resulteerivaks pöördemomendiks komponentjõupaaride väärtuste algebraline summa. Keha viibib tasakaalus, kui resulteeriva jõupaari väärtus on null; antud jõupaar tasakaalustub järjelikult teise samasuure kuid vastupidi sihitud jõupaariga.

§ 33. **Keha raskuspunkt.** 1) Keha iga osakese peale mõjub vertikaalne raskusjõud; et keha seisab koos määramatu hulgast osakestest, siis mõjub kogu keha peale lõpmatu hulk väga väikesi paralleeljõude, mis teda tõmbavad maakera külge. Need jõud liituvad üheks resultantjõuks (§ $30_2$), mis võrdub kogu keha raskusega. Selle resultantjõu rakenduspunkti nimetatakse keha *raskuspunktiks*.

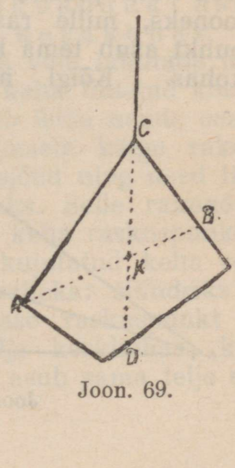
Keha pöördumisel ei muutu tema osakeste vastastikune seis ega nende raskusjõud. Et viimased jäävad ikka vertikaalseks (s. t. vastastikku paralleelseks), siis ei muutu keha pöördumisel nende jõudude resultantjõud (keha kaal) ega tema rakenduspunkt (§ $30_2$): **Raskuspunkt jääb keha igal seisul ühte ja samasse kohta.**

Et resultantjõud võib täita kõigi komponentjõudude aset, siis võib enesele ette kujutada, nagu tõmbuks maakera külge ainult keha raskuspunkt, s. t. nagu oleks keha kogu mass koondatud raskuspunktis. Keha edasiliikumist võib sellepärast kujutada tema raskuspunkti liikumisega, keha tasakaalu — tema raskuspunkti tasakaaluga j. n. e. Toetame näiteks keha tema raskuspunktis, siis ei saa viimane toe vastumõju tõttu langeda; järjelikult ei saa ka keha ise langeda. Vabal langemisel liigub keha alati vertikaalsihis; tema raskuspunkt liigub sellepärast n. n. *langemisjoont* mööda, mille all mõistetakse läbi raskuspunkti tõmmatud vertikaaljoont Toetame keha kus tahes kohal selle langemisjoone sihil, siis takistab tugi raskuspunkti ja ühes sellega kogu keha langemist, nii et keha peab jääma tasakaalu. Ümberpöördult: **on keha tasakaalus, siis peab tugipunkt asuma langemisjoonel,** sest vastasel korral saaks raskuspunkt (tähendab ka kogu keha) langeda. Nööril rippuv keha on näiteks tasakaalus; sellepärast peab nööri kinnituskoht (tugipunkt) asuma, langemisjoonel, s. t. raskuspunkt peab seisma nööri sihil.



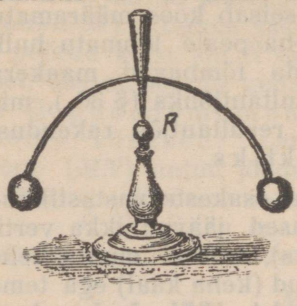
Joon. 68.

2) Viimasel asjaolul põhjeneb õhukeste kehade raskuspunkti leidmine: Riputame õhukese keha, näiteks paberlehe, nurka *A* pidi nööri otsa (joon. 68), siis peab tema raskuspunkt asuma nööri sihil *AB*; riputame sama lehe üles nurka *C* pidi (joon. 69), siis peab raskuspunkt seisma sihil *CD*. Järjelikult asub raskuspunkt *AB* ja *CD* lõike-



Joon. 69.

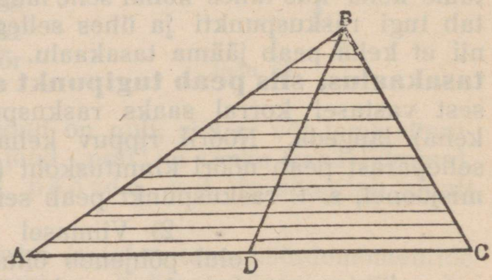
punktis *K*. Torkame läbi *K* mingi telje (näiteks nõela), siis toetub raskuspunkt vastu nõela paberlehe igal seisul ning leht ei saa selle tõttu ei liikuda ega pöörduda. Võib juhtuda, et raskuspuntk asub väljaspool keha: näiteks on joonistusel 70 kujutatud looga raskuspunktiks teraviku tipp K, mis seisab looga otsadele kinnitatud kerade vahel. Toetub look selles punktis, siis hoidub ta tasakaalus.



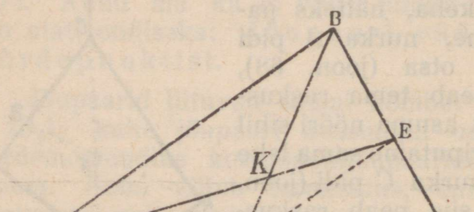
Joon. 70.

§ 34. **Kehade raskuspunkti määramine.** 1) Ühtlaste kehade raskuspunkti asukoht oleneb nende kujust. Katse näitab, et peene, sirge traadi raskuspunkt asub tema keskkohas; traadist painutatud ringi, polügooni ja teiste geomeetriliste kujude raskuspunkt seisab nende geomeetrilises keskpunktis j. n. e. Et peenet traati võib pidada lihtsaks geomeetriliseks jooneks, siis öeldakse ka, et sirgjoone, ringjoone, polügooni j.n.e. raskuspunkt asub nende kujude geomeetrilises keskkohas.

2) Üsna õhukest keha (paberleht) võib pidada geomeetriliseks pinnaks. Selles mõttes räägitakse pinna raskuspunktist. Näiteks leitakse tasase kolmnurga raskuspunkt järgmiselt: kogu kolmnurga pind jagatakse baasiga *AC* paralleelseteks kitsasteks ribadeks (joon. 71). Üht seesugust riba võib pidada sirgjooneks, mille raskuspunkt asub tema keskkohas. Kõigi nende ribade raskuspunktid seisavad seega mediaanil *BD*; samal joonel peab asuma järjelikult ka kogu kolmnurga raskuspunkt. Kui nüüd jagada sama kolmnurk baasiga *BC* paralleelseteks ribadeks, siis leidub, et raskuspunkt peab asuma ka mediaa-



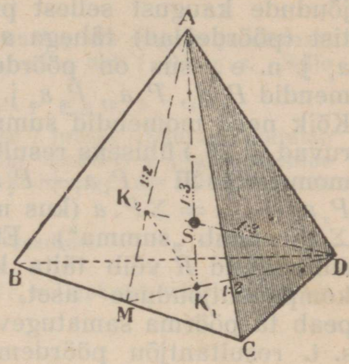
Joon. 71.



Joon. 72.

nil $AE$ (joon. 72). Järjelikult asub kolmnurga raskuspunkt tema mediaanide lõikepunktis $K$. Kuna $AD = DC$ ja $BE = EC$, siis on $AB = 2DE$. Kolmnurkade sarnadusest järgneb: $BK : KD = AB : DE = 2 : 1$, s. t., et $KD = {}^1/_3 BD$. *Kolmnurga raskuspunkt seisab mediaani esimesel kolmandikul (baasilt arvatud).*

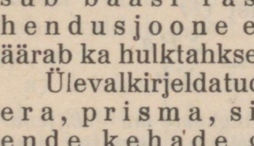
3) Eelmise põhjal leidub ka kolmtahkse *püramiidi* raskuspunkt. Selleks kujutame enesele ette, et kogu püramiid on jagatud baasiga $BDC$ paralleelseteks lehesarnasteks kolmnurkadeks (joon. 73). Esimese kolmnurga $BDC$ raskuspunkt $K_1$ seisab mediaanil $DM$; kõigi järgnevate kolmnurkade raskuspunktid peavad seisma sirgjoonel $AK_1$; samal joonel peab asuma ka kogu püramiidi raskuspunkt. Nüüd kujutame ette, et püramiid on jagatud tahuga $ABC$ paralleelseteks kolmnurkadeks. Kõigi nende kolmnurkade raskuspunktid peavad seisma sirgjoonel $DK_2$, kus $K_2$ on tahu $ABC$ raskuspunkt, mis asub mediaanil $AM$. Püramiidi raskuspunkt on seega $AK_1$ ja $DK_2$ lõikepunktis $S$; (mõlemad sirgjooned asuvad tasapinnal $AMD$). Et $MK_2 = {}^1/_3 AM$ ja $MK_1 = {}^1/_3 MD$, siis on $K_1 K_2$ paralleelne servaga $AD$ ning $K_1 K_2 = {}^1/_3 AD$. Kolmnurkade $ASD$ ja $K_1 SK_2$ sarnadusest järgneb: $AS : SK_1 = AD : K_1 K_2 = 3 : 1$, ehk $AS = 3\, SK_1$ ning $SK_1 = {}^1/_4 AK_1$. *Püramiidi raskuspunkt asub baasi raskuspunkti ja püramiidi tipu ühendusjoone esimesel veerandil.* Sama seadus määrab ka hulktahkse püramiidi ning *koonuse* raskuspunkti.



Joon. 73.

Ülevalkirjeldatud kombel on kerge tõestada, et *ühtlase kera, prisma, silindri j. n. e. raskuspunkt asub nende kehade geomeetrilises keskkohas.*

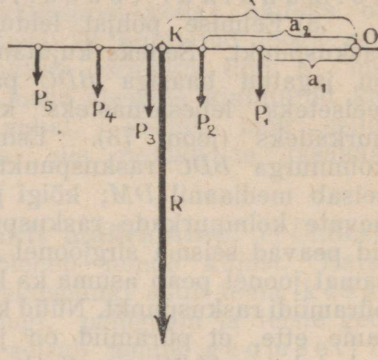
4) On kehal seesugune kuju, et teda võib lahutada mitmeks korrapärase kujuga kehaks või on keha liidetud kokku mitmest isesuguse ainega osast, siis tuleb leida nende osade raskuspunktid, viimaste külge rakendada nende raskusjõud ning need liita üheks resultantjõuks. Selle rakenduspunkt ongi kogu keha raskuspunkt.



Joon. 74.

Joonistusel 74 kujutatud keha võib näiteks lahutada kaheks: silindriks ja koonuseks. Esimese raskuspunkt $S_1$ seisab silindri telje keskkohas; koonuse raskuspunkt asub sama telje esimesel veerandil (baasilt arvatud). On $C$ ja $K$ nende osade kaal, siis leidub resultantjõu rakenduspunkt $S$ proportsioonist $S_1S : SS_2 = K : C$.

5) Keerulisema kujuga kehade raskuspunkti võib leida n. n. momentide seadusega: on $P_1$, $P_2$, $P_3$ j. n. e. keha üksikute osade raskusjõud (joon. 75), siis peavad need jõud keha pöörma mingi vabalt valitud punkti $O$ ümber; kujutame jõudude kaugust sellest punktist (pöördeõlad) tähega $a_1$ $a_2$ $a_3$ j. n. e, siis on pöördemomendid $P_1a_1$, $P_2a_2$, $P_3a_3$ j. n. e. Kõik need momendid summeeruvad (§ $28_2$) ühiseks resultantmomendiks $\mathfrak{M} = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + \ldots = \Sigma P.a$ (kus märk $\Sigma$ tähendab „summa"). Et resultantjõud $R$ võib täita kõigi komponentjõudude aset, siis peab ta pöörma samatugevasti kui kõik komponentjõud kokku, s. t. resultantjõu pöördemoment R . x peab võrduma komponentjõudude pöördemomentide summaga; kui silmas pidada, et $R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = \Sigma P$, siis on

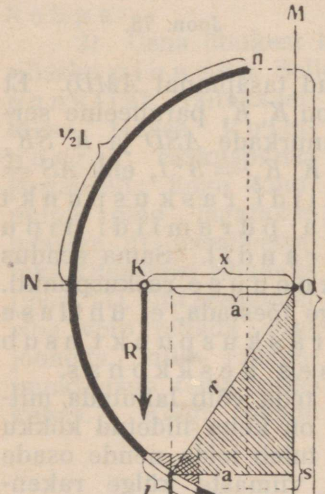


Joon. 75.

$$x . \Sigma P = \Sigma P . a,$$

millest leidub resultantjõu rakenduspunkti (= kogu keha raskuspunkti) kaugus $(x)$ vabalt valitud pöördepunktist $O$:

$$x . = \frac{\Sigma Pa}{\Sigma P} \tag{63}$$



Joon. 76.

**Näide.** Ringkaare $mn = L$ (joon. 76) raskuspunkt leidub eelmise seaduse põhjal järgmiselt: Diameeter $NO$ jagab kogu kaare sümmeetriliselt pooleks; sellepärast peab otsitud raskuspunkt $(K)$ seisma sellel sümmeetriijoonel. Jagame kogu kaare lõpmatu väikesteks osadeks, millest igalühel olgu pikkus $l$. Osakest $l$ võib pidada sirgjooneks, sellepärast on tema raskusjõud $(P)$ rakendatud $l$ keskkohas. Valime pöördepunktiks kaare sentrumi $O$, siis pöörab jõud $P$ momendiga $P.a$, kus $a$ on osakese $l$ kaugus $(ls)$ diameetrist $OM$. Kui leida kõigi osakeste $l$ pöördemomendid punkti $O$ suhtes, siis võrdub nende summa resultantjõud $R$ pöördemomendiga R . x, (kus $x$ tähendab $R$ kaugust punktist $O$):

$$R . x = \Sigma P . a$$

Kuna raskusjõud on proportsionaalne kaare pikkusega, siis on $P:R=l:L$, sest $R$ võrdub kogu kaare kaaluga. Sellest järgneb, et $P.L=R.l$, ehk $P=\frac{R}{L}.l$. Seades eelmisse võrrandisse $P$ asemele see väärtus, saame

$$R.x=P_1.a_1+P_2.a_2+P_3.a_3+\ldots=\frac{R}{L}.l_1a_1+\frac{R}{L}.l_2a_2+\ldots=$$

$$\frac{R}{L}(l_1a_1+l_2a_2+\ldots)=\frac{R}{L}.\Sigma l.a$$

ehk

$$L.x=\Sigma l.a$$

Kuna kaareosakest $l$ võib pidada sirgjooneks, siis järgneb joonistusel äramärgitud kolmnurkade sarnadusest, et $r:a=l:s$. ehk $l.a=r.s$. Selle abil annab viimne võrrand:

$$L.x=\Sigma l.a=\Sigma r.s=r.\Sigma s$$

sest raadius $r$ jääb ühesuuruseks iga osakese $l$ juures. Suurus $s$ kujutab osakese $l$ projektsiooni diameetrile $OM$; kõigi osakeste $l$ projektsioonide summa võrdub aga kogu kaare $mn$ projektsiooniga $S$, sellepärast on $r\Sigma s=r.S=L.x$, ning

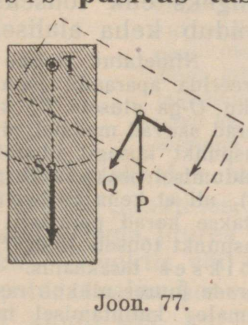
$$x=r.\frac{S}{L}=\frac{\text{pingjoon}}{\text{kaar}}\times\text{raadius.}$$

P o o l r i n g i jaoks on $L=\pi r$ ja $S=2r$, sellepärast seisab poolringi raskuspunkt $(K)$ ringi sentrumist kaugusel

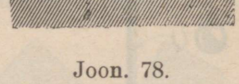
$$x=\frac{2r}{\pi}$$

§ 35. **Kehade tasakaal.** 1) Ü h e s p u n k t i s toetatud keha võib viibida tasakaalus, kui tugipunkt seisab langemisjoonel (§ 33). Mõjuvad peale raskusjõu veel teised jõud, siis o n k e h a t a s a k a a l u s, k u i t u g i p u n k t a s u b r e s u l t a n t j õ u s i h i l. Toetatud keha võib kas tasakaalus püsida või oma tasakaalu kaotada: tema tasakaal võib olla kas p ü s i v või p ü s i m a t u. Selleks et teada, missuguses tasakaalus keha viibib igal üksikul juhusel, kujutatakse enesele ette, et keha kaldub pisut oma tugipunkti ümber: Kogemused näitavad, et

a) k e h a v i i b i b **püsivas tasakaalus,** k u i t e m a r a s k u s p u n k t t õ u s e b keha väiksemal kui kaldumisel. Nõelal rippuv paberleht (joon. 77) viibib näiteks p ü s i v a s tasakaalus, sest lehe pöördumisel ümber nõela $T$ peab tema raskuspunkt $S$ t õ u s m a. Kõrvalpöördud lehte tõmbab raskusjõu komponent $Q$ tagasi algseisu, mille mõjul leht tuleb iseenesest tagasi tasakaalu. Õõnsal alusel seisev kera (joon. 78) veereb peale tõuget ta-



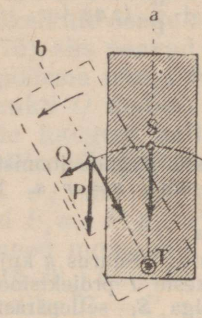
Joon. 77.



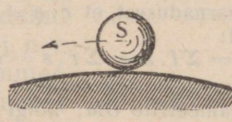
Joon. 78.

gasi oma algseisu: ka tema raskuspunkt peab igasugusel liikumisel tõusma.

b) Keha viibib **püsimatu tasakaalus,** kui kaldumisel tema raskuspunkt langeb. Tasakaaluseisust *a* (joon. 79) kõrvalepöördumisel langeb paberlehe raskuspunk *S;* raskusjõu komponent *Q* tõmbab lehte (b) veel edasi, mille tõttu leht pöördub ümber *T* ning asendub uude, püsivamasse seisu. Kumeral alusel seisev kera (joon. 80), teravale otsale püstiseatud muna j. n. e. pöördub väiksemal kui kaldumisel ning ei tule enam oma algseisu tagasi.

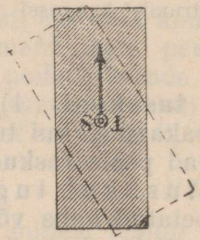



Joon. 79.



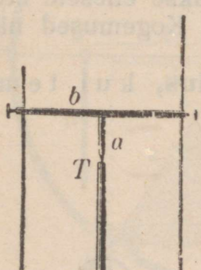

Joon. 80.

c) Keha viibib **ükskõikses tasakaalus,** kui tema raskuspunkt ei tõuse ega lange keha kaldumisel. Raskuspunktis *(S)* eneses toetatud paberlehe (joon. 81) juures jääb raskuspunkt lehe pöördumisel ühe koha peale seisma (ta ei tõuse ega lange); horisontaalpinnal pöörduva (veereva) kera raskuspunkt liigub edasi horisontaalsihis, ilma et ta langeks ehk tõuseks. Mõlemal juhusel hoidub keha alaliselt tasakaalus.



Joon. 81.


Joon. 82.

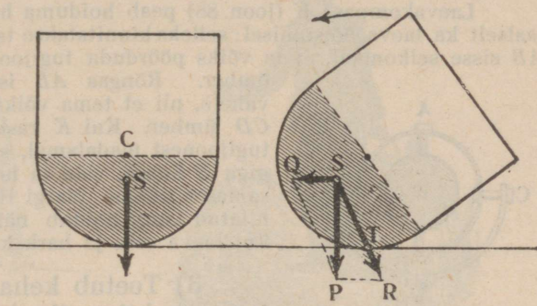



Joon. 83.

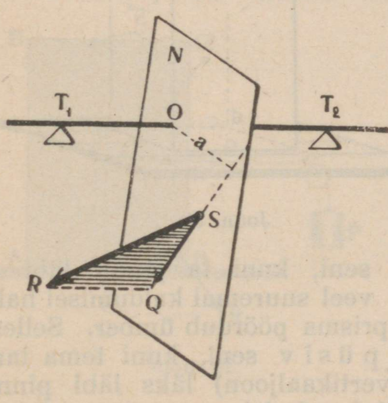
Nimetatud kolme tasakaalu võib demonstreerida aparaadil joon 83: varb *b* toetub teraviku *O*-ga alusele *T*; kui varva otsas rippuvad kerad asuvad madalal, siis seisab liitkeha *QbP* raskuspunkt kusagil allpool tugipunkti *T*; selle keha kaldumisel peaks raskuspunkt tousma (vaata joon. 77), nii et keha asub püsivas tasakaalus. Tõstetakse kerad parajasti nii kõrgele, et keha raskuspunkt tõuseb kuni *T*-ni, siis asub keha ükskõikses tasakaalus. Veel kõrgemale tõstetud kerade juures nihkub raskuspunkt punktist *T* kõrgemale; kallutamisel hakkab keha raskuspunkt nüüd langema: keha on püsimatu tasakaalus.

Joonistus 84 seletab niisuguste mänguasjade (nukkude) tasakaalu, mis iseenesest tõusevad püsti: Raske poolkera raskuspunkt $S$ seisab allpool kera sentrumi $C$; ta jääb viimasest madalamale ka siis, kui poolkera peale kinnitada mingi kerge keha (pappnukk). Kallutatakse seesugune keha küljeli, siis tõmbab raskusjõu komponent $Q$ keha tagasi püsti (teine komponent R tasakaalustub tugipunkti $T$ vastumõjuga).

2) Toetub keha kahes punktis, siis hüütakse tugipunktide ühendusjoont tugijooneks. Tasakaalu puhul ei tohi keha selle tugijoone ümber pöörduda. Võib tõestada, et **keha viibib tasakaalus, kui resultantjõud on sihitud läbi tugijoone.** Järjelikult võib keha oma raskusjõu mõjul seista tasakaalus ainult siis, kui langemisjoon läheb läbi tugijoone.



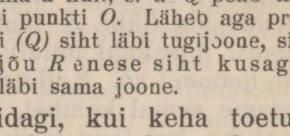
Joon. 84.



Joon. 85.

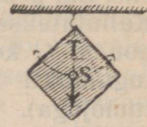
Tõestus: Kui resultantjõud $R$ (joon. 85) ei lähe läbi tugijoone $T_1T_2$, siis võib tõmmata läbi resultantjõu rakenduspunkti $S$ tasapind $N$, mis oleks perpendikulaarne tugijoonega ning mis lõikaks viimast mingis punktis $O$. Resultantjõu $R$ projektsioon $(Q)$ sellele pinnale asub punkti $O$-ga ühel tasapinnal; $Q$ pöörab keha punkti $O$ suhtes momendiga $Qa$. Et tasapind $N$ on perpendikulaarne tugijoonega, siis pöörab $Q$ kogu keha ka telje $T_1T_2$ suhtes. Seda pöördumist ei ole, s. t. keha viibida tasakaalus sel juhusel, kui moment $Qa$ on null; selleks aga peab olema $a$ null, s. t. $Q$ peab minema läbi punkti $O$. Läheb aga projektsiooni $(Q)$ siht läbi tugijoone, siis peab ka jõu $R$ enese siht kusagil minema läbi sama joone.

Teadagi ei muutu tasakaalus midagi, kui keha toetub peale 2 punkti veel teistes punktides, mis asuvad samal tugijoonel: serviti toetatud prisma juures on näiteks ükskõik, kas toetub serv ainult kahes punktis või kogu oma pikkusel; tasakaalus hoidub ta igal juhusel ainult siis, kui langemisjoon läheb läbi tugijoone $T$ (joon. 86, kus tugijoon on kujutatud perpendikulaarselt joonistuspinnaga).



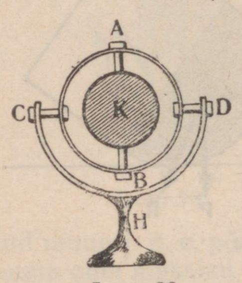
Joon. 86.

Ka toetusel kahes punktis võib keha tasakaal olla kas **p ü s i v**, **p ü s i m a t u** või **ü k s k õ i k n e** selle järele kas pöördumisel **t õ u s e b** keha raskuspunkt (joon. 87, serviti ülesriputatud prisma), kas **l a n g e b** ta (joon. 86) või jääb samasse kõrgusesse (teljel asuv ratas).



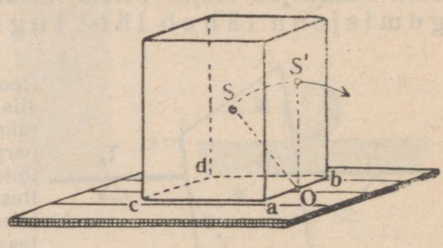
Joon. 87.

Laevakompass *K* (joon. 88) peab hoiduma horisontaalselt ka laeva õõtsumisel; selleks kinnitatakse ta rõnga *AB* sisse selkomkel, et ta võiks pöörduda tugijoone *AB* ümber. Rõngas *AB* ise kinnitatakse hargi *H* vahele, nii et tema võiks pöörduda oma tugijoone *CD* ümber. Kui *K* raskuspunkt asub mõlemast tugijoonest madalamal, siis ei pöördu kompas hargiga *H* kaasa, vaid ta hoidub liikumatult ühes ja samases seisus. Hargi H kaudu seina külge kinnitatud lamp hoidub näiteks ka siis vertikaalselt, kui laeva sein ja hark kaldub.



Joon. 88.

3) Toetub keha **k o l m e s** ehk rohkem punktis, siis hüütakse tugipunktide ühendusjoontega piiratud pinda **t u g i p i n n a k s**. Asetame näiteks prisma neli nurka *a, b, c* ja *d* (joon. 89) teravikkudele, siis toetub prisma samal kombel, kui seisaks tema baas otse aluslaual; **t u g i p i n n a k s** loetakse sellepärast mõlemal juhusel nelinurka *abdc*.

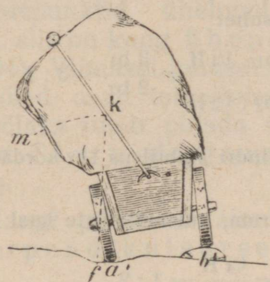


Joon. 89.

Hakkame prismat kallutama ümber üht tugijoont (näiteks *ab*), siis pöördub tema raskuspunkt *S* ümber punkti *O*. Selle juures **t õ u s e b** raskuspunkt seni, kuni ta jõuab läbi *O* tõmmatud vertikaaljoonele *OS'*; veel suuremal kaldumisel hakkab raskuspunkt langema ning prisma pöördub ümber. Sellest järgneb, et keha tasakaal oli **p ü s i v** seni, kuni tema langemisjoon (läbi *S* tõmmatud vertikaaljoon) läks läbi pinna *abdc;* tasakaal muutus püsimatuks, kui langemisjoon nihkus tugijooneni *ab*. Kallutame keha teise tugijoone *ac* ümber, siis leiame samal kombel, et keha püsiv tasakaal muutub püsimatuks, kui langemisjoon nihkub tugijooneni *ac* j. n. e. Sellest järgneb üldine seadus: **keha viibib püsivas tasakaalus, kui langemisjoon läheb läbi tugipinna.**

Vanker (joon. 90) peab näiteks kalduma ümber, kui tema langemisjoon *(kf)* läheb väljaspool rattaid, sest vankri tugipinnaks tuleb pidada ratastega piiratud nelinurka. Rasket koormat kandev inimene (joon. 91) peab painutama keha ja sirutama välja vaba käe selleks, et mitte kukkuda ümber:

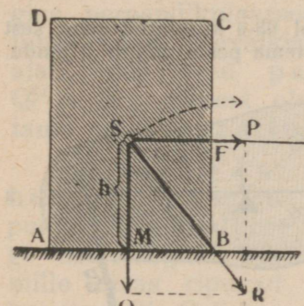
nimelt sel teel nihutabki ta oma raskuspunkti niivõrd pahemale poole, et langemisjoon läheb läbi selle tugipinna mida piiravad tema jalad.




Joon. 90.

Joon. 91.

4) Samal kombel võib tõestada, et keha asub mistahes jõudude mõjul püsivas tasakaalus, kui resultantjõud läheb läbi tugipinna. Horisontaalsel alusel seisva prisma $ABCD$ (joon. 92) kallutamisel, näiteks, peab kallutav jõud $P$ olema nii tugev, et ta modustaks prisma raskusega $Q$ niisuguse resultantjõud $R$, mis läheks vähemalt läbi tugipinna piirjoone $B$, sest alles siis muutuks prisma tasakaal püsimatuks ning ta võiks hakata ümberkalduma. Seesuguse jõu tugevust võib pidada keha püsivuse ehk stabiilsuse mõõduks: Mida suurema tõmbejõu juures keha jääb püsivasse tasakaalu, seda suurem on tema stabiilsus. On tõmbejõud $P$ sihitud otse läbi keha raskuspunkti $S$, siis järgneb nelinurkade $SPRQ$ ja $SFBM$ sarnadusest: $P : Q = BM : SM$. Nimetame raskuspunkti kõrgust $SM$ tähega $h$ ning baasi poolt laiust $MB$ tähega $b$, siis järgneb sellest




Joon. 92.

$$P = Q\frac{b}{h}$$

seega kaldub keha ümber, kui $P$ on suurem kui $Q^b/_h$: Keha stabiilsus on seda suurem, mida suurem on keha tugipind ($b$) ja kaal ($Q$) ning mida madalamal asub tema raskuspunkt.

**Näide:** Silindril ja koonusel on ühesuurused baasid ($b = 1/4 \pi d^2$), kõrgused (H) ja erikaalud q.

a) Missuguse keha stabiilsus on suurem ja mitu korda?

Silindri kaal on $Q_1 = 1/4\, \pi\, d^2 . H . q$; tema raskuspunkti kõrgus $h_1 = 1/2\, H$;

koonuse „ „ $Q_2 = 1/4\, \pi\, d^2 . \frac{H}{3} . q$; „ „ „ $h_2 = 1/4\, H$

Eelmise § järele on stabiilsuste (P) suhe:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{Q_1 . b_1 . h_2}{Q_2 . b_2 . h_1} = \frac{1/4\, \pi\, d^2 Hq . b_1 . 1/4\, H}{1/4\, \pi\, d^2 \frac{H}{3} q . b_2 . 1/2\, H} = \frac{3\, b_1}{2\, b_2} = 3 : 2$$

sest et baasid $b_1 = b_2$. Järjelikult on silindri stabiilsus $1^1/_2$ korda suurem koonuse omast.

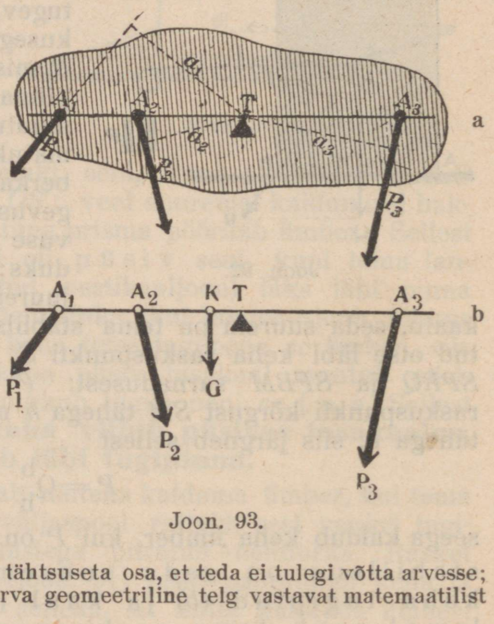
b) Missuguse keha stabiilsus on suurem, kui mõlemate kaal on ühesuurune?

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{Q_1 . b_1 . h_2}{Q_2 . b_2 . h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1/4\, H}{1/2\, H} = 1 : 2$$

sest $Q_1 = Q_2$ ja $b_1 = b_2$. Silindri stabiilsus on kaks korda väiksem koonuse stabiilsusest.

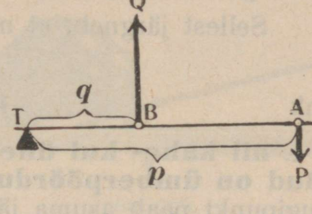
§ 36. **Kang.** 1) K a n g i k s nimetatakse varba ehk üldse mistaheskujulist keha, mis võib pöörduda ühe tugipunkti ümber, ning mille peale mõjub vähemalt 2 jõudu.

Näiteks tuleb pidada kangiks joonistusel 93-a kujutatud keha, sest see keha võib pöörduda punkti *T* ümber ning tema peale mõjub 3 jõudu. Rakendame need 3 jõudu läbi *T* tõmmatud sirgjoonele, siis pöörduks sirgjoon $A_1 A_3$ (joon. 93-b) sama seaduse järele kui antud kehagi. Selle asemel, et jälgida k e h a tasakaalu, võib nii siis jälgida s i r g j o o n e $A_1\, A_3$ oma. Peaks keha enese kaal (*G*) avaldama tuntavat mõju, siis võib ka teda võtta arvesse sellega, et keha raskuspunkti külge rakendame tema vertikaalse raskusjõu *G*. Jõud $P_1, P_2, P_3$ ja *G* mõjuvad siis sirgjoone $A_1\, A_3$ peale täpilt samal kombel, kui antud jõud $P_1$, $P_2$ ja $P_3$ mõjuvad keha (joon. 93-a) enese peale. Seda kaaluta sirgjoont, mis võib täita antud kangi (keha) aset, nimetatakse ka m a t e m a a t i l i s e k s k a n g i k s. Kergete varvakujuliste kangide juures etendab kaal harilikult nii tähtsuseta osa, et teda ei tulegi võtta arvesse; sel juhusel kujutab lihtsalt varva geomeetriline telg vastavat matemaatilist kangi.



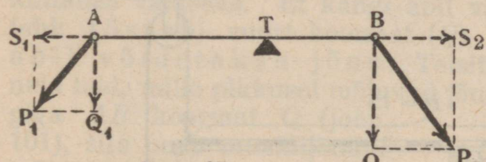

Joon. 93.

Kõige kangide juures hüütakse jõu rakenduspunkti kaugust tugipunktiks **k a n g i  õ l a k s** ($A_1T$, $A_2T$, joon. 93-b). Asuvad jõudude rakenduspunktid kahelpool tugipunkti ($T$), siis nimetatakse kangi **k a h e p o o l s e k s** (joon. 93-b); seisavad aga kõik rakenduspunktid ühelpool tugipunkti, siis on kang **ü h e p o o l n e** (joon. 94). Viimasel juhusel asuvad kangi õlad osalt teine-teise peal; jõu $P$ õlaks tuleb pidada näiteks kaugust $TA = p$, jõu $Q$ omaks aga $TB = q$.



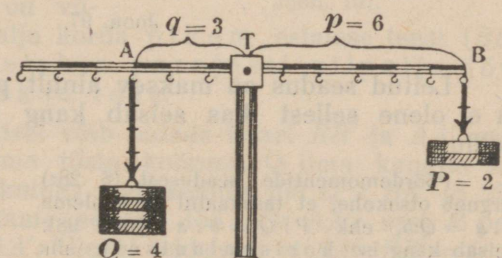
Joon. 94.

Kangi pööravad ainult jõudude need komponendid, mis on **p e r p e n d i k u l a a r s e d  k a n g i  õ l a g a**: kaldu mõjuvad jõud $P_1$ ja $P_2$ (joon. 95) lahutuvad komponentideks $Q$ ja $S$; komponendid $S$ on sihitud **p i k i** kangi; nende mõju hävineb tugipunkti vastumõjul; sellepärast võivad pöörda ainult kangiga perpendikulaarsed komponendid Q. Olgu jõududel mistahes sihid, ülevalkirjeldatud kombel võime lahutamise teel alati leida need **p a r a l l e e l s e d** komponentjõud (näiteks $Q_1$ ja $Q_2$), millest oleneb kangi tasakaal. Sellepärast käsitame ainult **p a r a l l e e l j õ u d u d e g a** sirgkangi tasakaalu.



Joon. 95.

2) Lihtsam **k a h e p o o l n e  k a n g** on punktis $T$ toetatud kerge varb $AB$ (joon. 96), mille otsas ripuvad koormad $P$ ja $Q$. Sama varb kujutab **ü h e p o o l s e t  k a n g i**, kui tema üks **o t s** toetub ning kui üks koorem ($P$) mõjub üle rulli (joon. 97). Mõlemal juhusel on kõik jõud vertikaalsed, s.t. **p a r a l l e e l s e d** teine-teisega. Tasakaalu tingimuste leidmiseks muudame järk-järgult koormate suurust ning nende ülesriputamis-kohte seni, kuni kang hoidub tasakaalus. Katsest selgub, et tasakaalu puhul peavad näiteks



Joon. 96.

koormad $P = 2$ ja $Q = 4$ (kg) rippuma nii, et olg $p = 6$ ja $q = 3$ (pikkusüksust)
" $P = 1$ " $Q = 3$ " " " " " $p = 12$ " $q = 4$ "

seega on

| | | | |
|---|---|---|---|
| koormate suhted | $P:Q = 2:4 = \mathbf{1:2}$ | ning | $\mathbf{1:3}$ |
| õlgade | „ $p:q = 6:3 = \mathbf{2:1}$ | „ | $12:4 = \mathbf{3:1}$ |

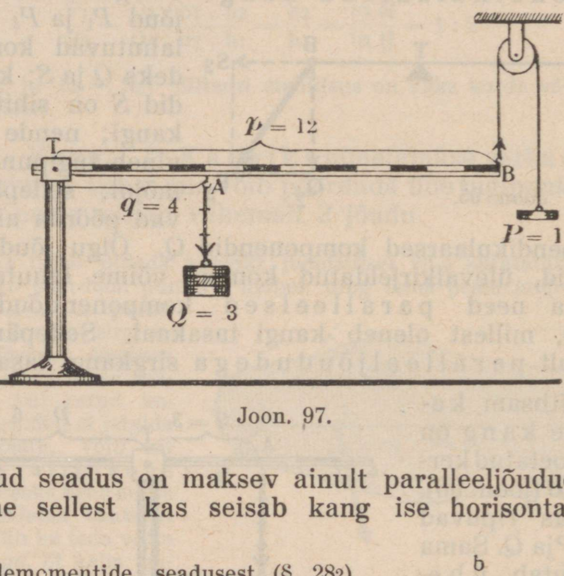
Sellest järgneb, et mõlemal juhusel on

$$P : Q = q : p$$

ehk

$$\mathbf{P \cdot p = Q \cdot q} \tag{64}$$

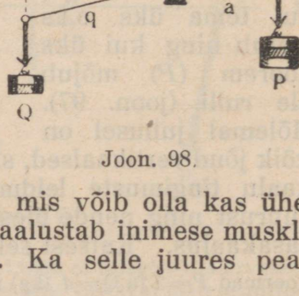
s. t. **nii kahe- kui ühepoolne kang on tasakaalus, kui jõud on ümberpöördult proportsionaalsed õlgadega.** Tugipunkt peab asuma järjelikult samas kohas, kus jõudude $P$ ja $Q$ resultantjõu rakenduspunktki (§ 30). Joonistustest 96 ja 97 on näha, et üks jõud pöörab kangi sellejuures ikka ühtepidi, teine aga otse vastupidi.




Joon. 97.

Leitud seadus on maksev ainult paralleeljõudude puhul; ta ei olene sellest kas seisab kang ise horisontaalselt või kaldu.

Pöördemcmentide seadusest (§ $28_2$) järgneb otsekohe, et tasakaalul peab olema $P.a = Q:b$, ehk $P:Q = b:a$ (joon. 98). Seisab kang ise horisontaalselt, siis on kangiõlad $p$ ja $q$ ühtlasi ka jõudude pöördeõlgadeks ($a$ ja $b$). Kaldu seisva kangi juures aga on $b:a = q:p$ (v. joonistus). Sellepärast järgneb ülevalleitut tasakaaluseadus igal juhusel otse pöördemomentide seadusest.



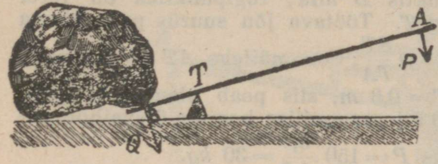

Joon. 98.

3) Hariliku tõstekangi abil, mis võib olla kas ühe- või kahepoolne (joon. 99 ja 100), tasakaalustab inimese musklijõud $P$ koorma (kivi) raskusjõudu $Q$. Ka selle juures peab olema

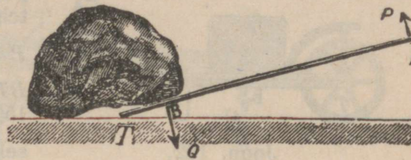
$$P : Q = BT : TA,$$

millest järgneb, et koorma tasakaalustamiseks tarvilik jõud $P$ on

$$P = Q \cdot \frac{BT}{TA}$$

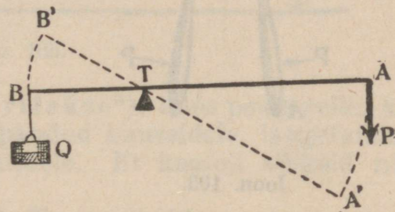



Joon. 99.




Joon. 100.

Mida lähemale tugipunktile $T$ nihutame punkti $B$, seda lühemaks saab õlg $BT$, seda väiksem võib järjelikult olla jõud $P$: Koorma tõstmiseks tarviliku jõu $P$ suurus oleneb nii siis ainult tugipunkti asukohast ning võib teha teda järjelikult kuitahes väikseks. Et kangi abil väike jõud ($P$) tasakaalustab (ehk *tõstab*) suurt koormat ($Q$), siis öeldakse, et *kangi abil võidetakse jõus*. Teisiti aga on lugu, kui võrrelda neid teid, mille pikkusel mõjuvad jõud ja koorem: Tõstame kangiga $AB$ koormat $Q$ (joon. 101), siis peab musklijõud $P$ mõjuma teepikkusel $AA'$, kuna koorem $Q$ tõuseb samal ajal ainult tee $BB'$. Kuna $AA' : BB' = AT : BT$, ning $AT : BT = Q : P$, siis järgneb sellest $AA' : BB' = Q : P$. On koorem näiteks 3 korda suurem tõstejõust, siis on viimase tee ($AA'$) samapalju korda *pikem* esimese teest ($BB'$): *Kangi abil võidetakse parajasti niipalju jõus, kuipalju kaotatakse tees.*




Joon. 101.

Väiksel pöördumisel võib pidada kaart $BB'$ ja $AA'$ vertikaaljooneks. Tahaksime tõsta koormat $Q$ ilma kangita kõrguse $BB'$ võrra, siis kuluks meil selleks töö $Q \times BB'$ (§ $25_1$). Kangi abil aga kulutame selleks töö $P \times AA'$, sest $P$ peab mõjuma teepikkusel $AA'$. Üleval leidsime, et $AA' : BB' = Q : P$; sellest järgneb, et

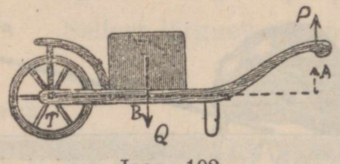
$$Q \times BB' = P \times AA'$$

s. t. *kangiga kulutame tõstmisel täpilt samapalju tööd kui ilma kangitagi*: **Kangi abil ei võideta ega kaotata töös.**

Nagu edaspidi näeme, alluvad samale seadusele kõik need abinõud (masinad), mille kaudu töötava jõu mõju kantakse üle teiste kehade peale. Seda üldist seadust hüütakse *töö alalhoiduvuse seaduseks*.

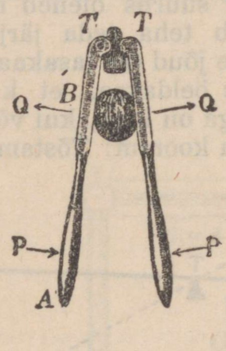
4) Igapäevases elus tarvitatakse kangi väga tihti; selleks mõned näited:

K ä r u (joon. 102) on ühepoolne kang: Töötav musklijõud $P$ mõjub punktis $A$ üles; koorma raskusjõud $Q$ mõjub punktis $B$ alla; tugipunktiks on ratta telg $T$. Töötava jõu suurus peab olema $P = Q\frac{BT}{TA}$; on näiteks $AT = 1{,}5\ m$ ja $BT = 0{,}3\ m$, siis peab olema tõstejõud 150 kilogrammilise koorma ülevalhoidmiseks $P = 150 \cdot \frac{0{,}3}{1{,}5} = 30\ kg$.

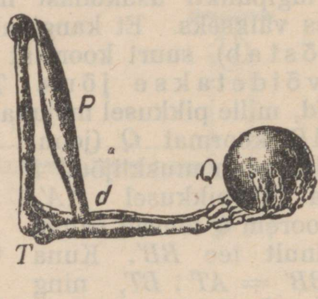


Joon. 102.

P ä h k l a t a n g i d (joon. 103) on kahe ühepoolse kangi ühendus. Käe surve $P$ kandub pähkla peale survena $Q$. Ei suuda pähkla kõvadus tasakaalustada seda survet, siis pigistub pähkel puruks.



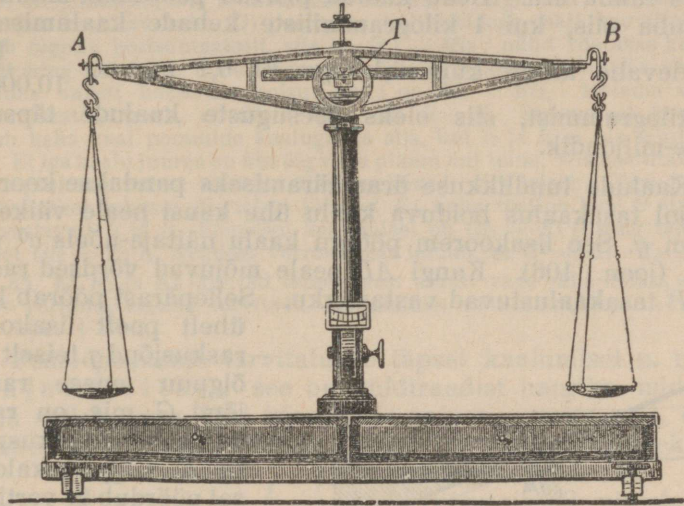
Joon. 103.



Joon. 104.

Ka i n i m e s e k ä s i v a r s (joon. 104) on ühepoolne kang, mille tugipunktiks on küünarnukk $T$. Punktis $d$ tõmbab muskel $P$ seda kangi üles; käeshoitud koorem $Q$ aga rõhub teda alla. Siin on töötava jõu ($P$) õlg lühem kui koorma $Q$ oma.

§ 37. K a n g k a a l u d. 1) Kaalude tähtsam osa on kahepoolne kang, n. n. kaalude õ l g p u u $AB$ (joon. 105), millele antakse paindumise ärahoidmiseks kolmnurkse raami sarnane kuju. Selle kangi keskkohta on kinnitatud prismasarnane risttelg ($T$); prisma terav serv toetub kaalude jala külge kinnitatud aluse peale. Telg ja tema tugialus on kõvast ainest (teras, ahaat j. n. e.), nii et telje tera ei nürine ning et kogu kang toetub ainult kitsal terajoonel. Selle tõttu võib kang pöörduda väga väikse hõõrumisega. Õlgpuu kummagi otsa peale on kinnitatud 2 teravservalist prismat; nende ülespöördud terade peale toetuvad v a e k a u s s i d e riputus-konksud. Õlgpuu keskkohast tuleb allasihitud näitaja nõel, mis hoidub kangi horisontaalseisul otse vertikaalselt alla; kangi kaldumisel liigub nõela ots skaalat mööda; viimaselt võib lugeda ära kangi kaldumise suurust. Kaitseks tolmu ja õhuvoolu eest seisavad peened kaalud harilikult klaaskasti all. Et ära hoida teljeterade ilmaaegset nürinemist, tõstetakse õlgpuu (ja kausside riputamiskonksud) sellekohase kangsüsteemi abil tugi-




Joon. 105.

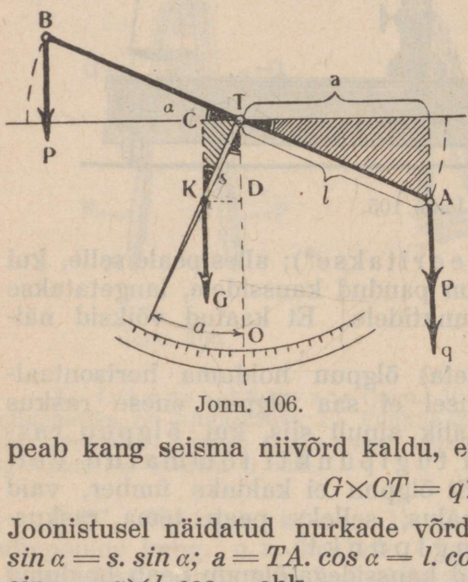
punktilt üles (kaal „arreteeritakse“); alles peale selle, kui kaalutav keha ja pommid on pandud kaussidele, langetatakse õlgpuu ja vaekausid tugipunktidele. Et kaalud võiksid näidata õieti, selleks peab

a) vaba (ilma kaussideta) õlgpuu hoiduma horisontaalseisus. Niisugusel tingimusel ei saa õlgpuu enese raskus pöörda kangi; see on võimalik ainult siis, kui õlgpuu raskuspunkt seisab läbi tugipunkti tõmmatud vertikaaljoonel (§ $36_2$). Et õlgpuu ei kalduks ümber, vaid hoiduks püsivas tasakaalus, selleks peab tema raskuspunkt asuma allpool tugipunkti.

b) Võrdselt koormatud kaussidega õlgpuu peab hoiduma horisontaalselt. Kui kausi $A$ peale pandud pomm $P$ ning kausil $B$ seisev koorem $Q$ hoiavad õlgpuu horisontaalselt, siis peab ta jääma horisontaalseks, kui $Q$ asetatakse kaussi $A$ ning $P$ kaussi $B$. Tasakaaluks peab olema esimesel juhusel $P \times AT = Q \times BT$ (§ $36_2$) ning teisel juhusel $Q \times AT = P \times BP$; korrutades esimese võrrandi teisega saame $PQ \times AT^2 = QP \times BT^2$; kuna koormad olid mõlemal juhusel ühed ja samad, siis on $PQ = QP$; järjelikult peab olema $AT = BT$; Võrdsete koormate juures seisab õlgpuu horisontaalselt, kui kangi mõlemad õlad on võrdsed. Teadagi peavad olema selle juures ka kausid üheraskused.

2) Head kaalud peavad olema tundlikud: Mida suurem on tundlikkus, seda väiksema koormatevahe (ülekoorma) mõjul pöördub kang kaldu, seda väiksemat koormatevahet võib nii siis tunda ära. Head kaalud peavad pöörduma kaldu näiteks juba siis, kui 1 kilogrammiliste kehade kaalumisel on kaaludevahe ainult kuni 0,1 *mg*. Et 0,1 *mg* on $\frac{1}{10.000.000}$ osa kilogrammist, siis oleks seesuguste kaalude täpsus 1 kümne-miljondik.

Kaalude tundlikkuse äramääramiseks pandakse koormate *P* mõjul tasakaalus hoiduva kaalu ühe kausi peale väike lisakoorem *q*. See lisakoorem pöörgu kaalu näitaja-nõela $\alpha^0$ võrra kaldu (joon. 106). Kangi *AB* peale mõjuvad võrdsed raskusjõud *P* tasakaalustuvad vastastikku. Sellepärast pöörab kangi ühelt poolt lisakoorma raskusjõud *q*, teiselt poolt õlgpuu enese raskusjõud *G*, mis on rakendatud tema raskuspunktis *K*. Õlgpuu kaldumisel pöördub *K* vertikaaljoonest *TO* järjest kaugemale; sellejuures kasvab raskusjõu *G* pöördeõlg *(CT)* ja tema pöördemoment $G \times CT$; samal ajal aga lüheneb koorma *q* pöördeõlg *(a)* ning kahaneb tema pöördemoment *qa*. Tasakaalul peab kang seisma niivõrd kaldu, et oleks



Jonn. 106.

$$G \times CT = q \times a,$$

Joonistusel näidatud nurkade võrdsusest järgneb, et $CT = TK$. $\sin\alpha = s.\sin\alpha$; $a = TA.\cos\alpha = l.\cos\alpha$; selle abil saame $G \times s.\sin\alpha = q \times l.\cos\alpha$, ehk

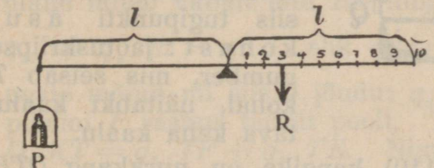
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = q\,\frac{l}{Gs}$$

s. t. antud lisakoorma *q* mõjul on kangi kaldumine ($tg\,\alpha$) seda suurem, mida pikem on *l* ning mida väiksemad on *G* ja *s*: Kaalud on seda tundlikumad, mida pikem on kangi õlg, mida kergem on õlgpuu ning mida lähemal seisab tugipunktile õlgpuu raskuspunkt. Kaalude tundlikkuse suurendamiseks tehakse sellepärast õlgpuu võimalikult kerge (raamisarnane) ning paigutatakse tema raskuspunkt võimalikult lähedale tugipunktile. Raskuspunkti üles-alla nihutamiseks on õlgpuul tugipunkti kohal kruvi; selle raske mutri allakruvimisel asetub kogu õlgpuu raskuspunkt vähe madalamale.

3) Kui ei ole kindlasti teada, kas on õlgpuu mõlemad õlad ($l_1$ ja $l_2$) täpselt ühepikkused, siis toimetatakse kaalumist järgmiselt: Esiteks tasakaalustatakse kaalutav keha ($G$) peente metalltükkidega, näit. haavlitega ($M$); hoidub õlgpuu horisontaalselt, siis on $Gl_1 = Ml_2$; nüüd võetakse keha vaekausilt ning pannakse tema asemele niipalju kaalupomme ($K$), et õlgpuu asenduks uuesti horisontaalseisu; nüüd on $Kl_1 = Ml_2$. Mõlema võrrandi võrdlemisest järgneb, et $Gl_1 = Kl_1$, ehk $G = K$. Seesugusel kaalumisel võrdub keha kaal pommide kaaluga ka siis, kui $l_1$ ja $l_2$ ei ole võrdsed.

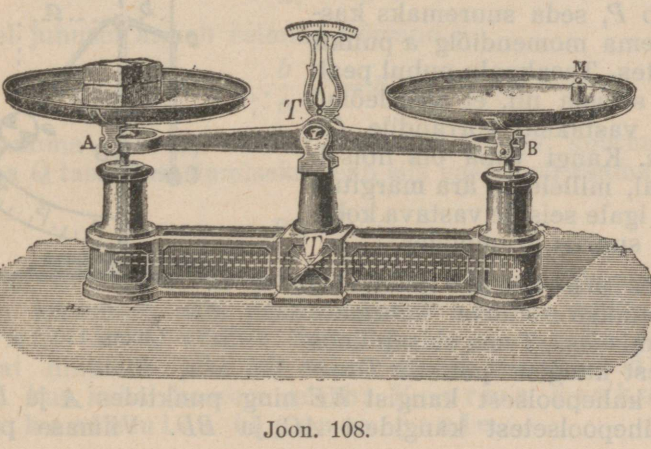
Et iga kaalu juures on üks õlg vähe pikem kul teine, siis kaalutakse keha väga täpsel mõõtmisel esiteks ühel vaekausil, siis teisel. Olgu pommide kaal esimesel juhusel $K_1$, teisel juhusel $K_2$; keha tõeline kaal $G$ ning kangi õlad vastavalt $l_1$ ja $l_2$. Esimesel kaalumisel on $Gl_1 = K_1\, l_2$ ning teisel kaalumisel $Gl_2 = K_2\, l_1$. Nendest võrranditest leidub, et $G^2 = K_1 \,.\, K_2$. ehk $G = \sqrt{K_1 \,.\, K_2}$. Et $K_1$ ja $K_2$ lähevad teineteisest ainult väga vähe lahku, siis võib viimse võrrandi asemel tarvitada ka kaalude a r i t m e e t i l i s t k e s k a r v u $G = {}^1\!/_2\,(K_1 + K_2)$.

Peale pommide tarvitatakse täpsel kaalumisel n. n. r a t s u t a j a t (r e i t e r); see on kuldtraadist hargike mida võib panna sellekohase, läbi klaasseina mineva varva abil, õlgpuu mistahes koha peale. Kangi õlg ise on jagatud kümneks ühepikkuseks osaks. Seisab ratsutaja $R$ näiteks 3-da jaotuskriipsu peal (joon. 107), siis on tasakaalu puhul $Pl = R \,.\, {}^3\!/_{10}\, l$. Võrdub $R$ kaal näiteks ühe milligrammiga (${}^1\!/_{1000}\, g$), siis on $P = 0{,}3\, mg$: ratsutaja all seisev j a o t u s n u m b e r näitab sel puhul kaalutava keha ($P$) raskust k ü m n e n d i k - m i l l i g r a m m i d e s.



Joon. 107.

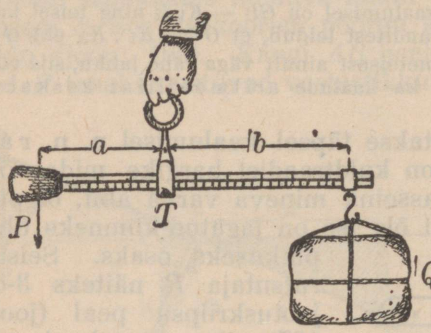
4) Igapäevases elus antakse kaaludele väga mitmekesine kuju.



Joon. 108.

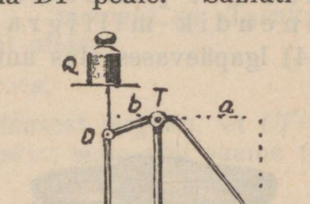
L a u a k a a l u (joon. 108) vaekausid on kinnitatud vertikaaltugede $AA'$ ja $BB'$ otsa; viimased on sharniiridega ühendatud kahe kangi $AB$ ja $A'\,B'$ otsadega. Et kangide tugipunktid ($T$ ja $T'$) seisavad ühel vertikaaljoonel, siis hoiduvad ka toed $AA'$ ja $BB'$ alati vertikaalselt; sellepärast seisavad tugede otsa kinnitatud vaekausid alati horisontaalselt. Et kaussidel seisvate koormate raskusjõud mõjuvad ainult varbade $AA'$ ja $BB'$ kaudu kangide peale, siis ei olene kaalumise täpsus sellest, kas asub koorem kausi keskkohas või äärel.

M a r g a p u u (joon. 109) on kahepoolne kang, mille tugipunkti $T$ võib nihutada piki kangi edasi-tagasi. Kangi jämeda otsa raskusjõud $P$ ja kaalutava keha kaal $Q$ on tasakaalus, kui $P : Q = b : a$. Et $P$ jääb alati ühesuuruseks, siis muutub kaalumisel ainult $a$ ja $b$. Koorma kaal oleneb nii siis tugipunkti a s u k o h a s t : jaotuskriipsu number, mis seisab $T$ kohal, näitabki kaalutava keha kaalu.



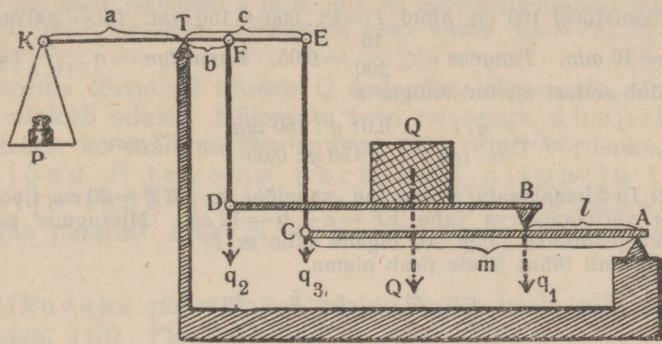

Joon. 109.

K i r j a k a a l u (joon. 110) kangiks on nurkkang $DTP$, mille tugipunkt $T$. Varb $CD$ hoidub sharniiride abil alati vertikaalselt; sellepärast mõjub vaekausile asetatud koorma $Q$ raskusjõud vertikaalsihis kangiõla $DT$ peale. Samuti vertikaalsihis mõjub kangi teise otsa konstant koorem $P$. Mida suurem on $Q$, seda kõrgemale tõuseb $P$, seda suuremaks kasvab tema momendiõlg $a$ punkti $T$ suhtes. Tasakaalu puhul peab kang seisma nii, et pöördeõlad $a$ ja $b$ vastaksid võrrandile $Qb = Pa$. Kangi vaba ots libiseb skaalal, millele on ära märgitud kangi igale seisule vastava koorma $Q$ suurus grammides.




Joon. 110.

D e t s i m a a l k a a l u (joon. 111) tarvitatakse suurte koormate kaalumiseks. Tema seisab koos kolmest kangist: punktis $T$ toetatud kahepoolsest kangist $KE$ ning punktides $A$ ja $B$ toetatud ühepoolsetest kangidest $AC$ ja $BD$. Viimase peale on kinnitatud laud, millel seisab kaalutav koorem $Q$. Koorma $Q$ raskusjõud avaldub kangi $BD$ otsade survetena $q_1$ ja $q_2$ ($Q$ lahutamine kaheks paralleeljõuks $q_1 + q_2$); jõud $q_2$ tõmbab




Joon. 111.

$BD$-ga ühendatud varba $FD$ vertikaalselt alla; surve $q_1$ mõju kandub kangi $AC$ kaudu teise vertikaalvarva $EC$ peale. Viimane läheb vabalt läbi $BD$ ning tõmbub alla niisuure jõuga $q_3$, et $q_3 . m = q_1 . l$, ehk $q_3 = q_1 . \frac{l}{m}$. Ülemise kangi $KE$ peale mõjub nii siis 3 jõudu: $q_3$ ja $q_2$ ühelt poolt ning kaalupommi $P$ raskus teiselt poolt. Tasakaalu puhul peab olema: $Q . KT = q_2 . TF + q_3 . TE$. Nimetame õlad $KT = a$, $TF = b$ ning $TE = c$, siis on

$$P . a = q_2 . b + q_3 . c = q_2 b + \left(q_1 . \frac{l}{m}\right) . c.$$

Detsimaalkaalu juures valitakse alati õlad nii, et oleks

$$\frac{l}{m} = \frac{b}{c} \tag{65 a}$$

sest sel juhusel annab eelmine võrrand

$$P . a = q_2 . b + q_1 . \frac{b}{c} . c = b . (q_1 + q_2) = b . Q,$$

sest summa $q_1 + q_2$ võrdub alati kaalutava koormaga $Q$. Koorma $Q$ tasakaalustamiseks peab siis vaekausil asuma pomm

$$P = \frac{b}{a} . Q \tag{65 b}$$

Kui tahetakse, et pomm oleks näiteks kümme korda kergem koormast, siis peab olema $b/a = 1/10$, sest siis on $P = 1/10\, Q$. Et $Q$ võrdub summaga $(q_1 + q_2)$ ka siis, kui koormat nihutada piki $BD$ edasi, siis ei olene leitud formul sellest, kus kohal koorem seisab: K o o r m a a s u k o h t e i m õ j u k a a l u m i s e t ä p s u s e p e a l e.

**Näited:** 1) Kaalu õlgpuu kaalub 150 $g$; tema pikkus on 300 $mm$; 200 millimeetrilise näitaja-nõela ots kaldub 0,01 $g$ lisakoorma mõjul 10 $mm$ võrra algseisust kõrvale. Kui kaugel seisab õlgpuu raskuspunkt tugipunktist?

Joonistusel 106 on nüüd $l = {}^1/_2 \,.\, 300 = 150\,mm$, $TO = 200\,mm$ ning kaar $\alpha = 10\,mm$. $Tangens\ \alpha \cong \frac{10}{200} = 0{,}05$. Kuna $tg\alpha = q \,.\, \frac{1}{G\,.\,s}$ (§ 37 2), siis leidub sellest otsitud kaugus $s$:

$$s = \frac{q\,.\,l}{G\,.\,tg\alpha} = \frac{0{,}01\,g\,.\,150\,mm}{150\,g\,.\,0{,}05} = 0{,}2\,mm$$

2) Detsimaalkaalu juures on kangiõlg $a = KT = 30\,cm$ (joon. 111); mõlema vertikaalvarva vahe $EF = c - b = 12\,cm$. Missugune peab siis olema kõigealumise kangi $AC$ õlgade suhe $m:l$?

Formuli (65a) järele peab olema

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{l}, \text{ ehk } \frac{c-b}{b} = \frac{m-l}{l}$$

Pealegi on iga detsimaalkaalu juures:

$$b/a = {}^1/_{10}; \text{ ehk } b = {}^1/_{10}\,a.$$

Sellest leiame, et

$$\frac{m-l}{l} = \frac{c-b}{b} = \frac{10\,(c-b)}{a} = \frac{10\,.\,12\,cm}{30\,cm} = 4:1.$$

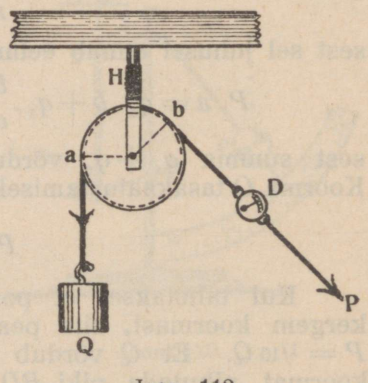
$$\frac{m}{l} = \frac{4+1}{1} = 5:1$$

Õlgade $c$ ja $b$ pikkus leidub võrranditest

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{l} = 5 \text{ ning } c - b = 12\,cm.$$

$$b = 3\,cm;\ c = 15\,cm.$$

§ 38. **Plokk** on tõste- ehk tõmbeköie juhtimiseks tarvitatav rull või ketas. Ta võib vabalt tiirelda teljel, mille otsad on kinnitatud kahvlisarnase hargi $H$ külge (joon. 112); köis ehk kett jookseb ketta ringjoone sisse lõigatud rennikeses. Tõstetav ehk tõmmatav koorem $Q$ on seotud köie ühe otsa külge; köie teist otsa tõmbab töötav jõud $P$.



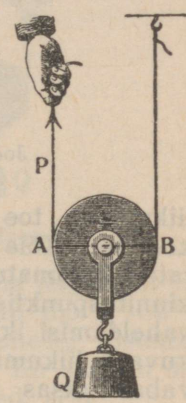
Joon. 112.

On ploki hark kinnitatud liikumata toe (näit. lae) külge, siis nimetatakse plokki **l i i k u m a t u k s** (joon. 112). Seome köie vaba otsa külge dünamomeetri $D$ ning tõmbame köit tema kaudu, siis näitab dünamomeeter, et koorma $Q$ tasakaalustamiseks kulub ikka ühesuurune jõud $P$, vaatamata selle peale, mis sihis see jõud mõjub: **Liikumatu plokk on tasakaalus, kui jõud võrdub koormaga.**

See järgneb ka otse pöördemomentide seadusest (§ $28_2$): pöördeõlgadeks on need raadiused *a* ja *b*, mis on perpendikulaarsed mõjuvate jõudude *Q* ja *P* sihtidega. Tasakaalul peab olema $Qa = Pb$; et $a = b$, siis on $Q = P$.

Koorma tõstmisel tõuseb *Q* sedavõrd kõrgemale, kuivõrd jõud *P* nihkub edasi. Mõlemate teed on seega ühepikkused. Kuna ka mõlema jõu suurus jääb alati võrdseks, siis peab jõud *P* tegema parajasti niipalju tööd, kuipalju tööd kulub koorma *Q* otsekoheseks (s. t. ilma plokita) tõstmiseks (töö alalhoiduvuse seadus, § $36_3$).

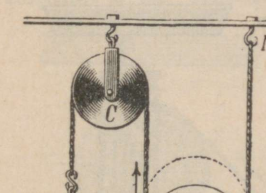
Liikuvaks nimetatakse plokki, mille hark võib liikuda edasi (joon. 113). Plokk ise hoidub köiel, mille üks ots on liikumatult kinnitatud näit. lae külge ning mille teist otsa tõmbab üles jõud *P*. Tõstetav koorem *Q* ripub ploki hargi küljes. Köie vaba otsa võib tõmmata ka üle teise, liikumatu ploki *C* (joon. 114); sel puhul etendab koorma *P* raskusjõud punkti *A* peale mõjuva töötava jõu osa.



Joon. 113.

On köied paralleelsed, siis moodustavad raadiused *AO* ja *OB* (joon. 114) ühe sirgjoone. Punktis *A* mõjub selle sirgjoone peale jõud *P*; punktis *O* koorma *Q* allasihitud raskusjõud, kuna punkt *B* peab seisma paigal, sest ta on toetatud. Sirgjoon *AB* kujutab nii siis ühepoolset kangi, mille tasakaalul peab olema $P \cdot AB = Q \cdot OB$. Et raadiused *AO* ja *OB* on võrdsed, siis järgneb sellest, et $P \cdot 2BO = Q \cdot BO$, ehk

$$P = \tfrac{1}{2}Q$$



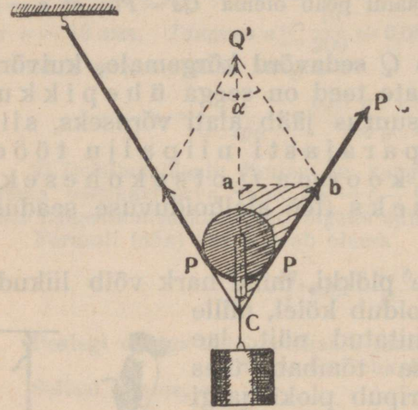
Joon. 114.

**paralleelsete köitega tõmmatav plokk on tasakaalus, kui töötav jõud võrdub poole koormaga.**

Koorma tõusmisel kõrguse *h* võrra peab *P* käima teeosa $2h$; selle juures teeb töötav jõud töö $P \times 2h$. Koorma otsekoheseks tõstmiseks peaksime kulutama töö $Q \times h$. Kuna $Q = 2P$, siis võrdub see töö jõu *Q* tehtud tööga ($Q \times h = 2P \times h = P \times 2h$): Ka liikuva ploki juures ei võideta töös.

Mõjub jõud $P$ kaldsihis (joon. 114-a), siis tõmbub plokk vähe kõrvale, nii et mõlemad köied hoiduvad sümmeetriliselt kaldu. Võrdsete tõmbejõudude $P$ resultantjõud $Q'$ peab tasakaalu puhul võrduma koorma $Q$ raskusjõuga. Kolmnurgast $abC$ järgneb, et $aC = bC \,.\, cos\ \alpha/2$, ehk $^1/_2Q' = P \,.\, cos\ \alpha/2$. Tõmbejõud peab seega võrduma

$$P = \frac{Q}{2\,cos\ \alpha/2}$$



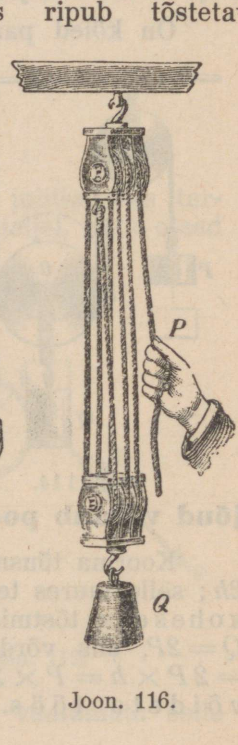

Joon. 114-a.

2) P o l ü s p a s t i k s nimetatakse mitme ploki süsteemi, mille abil väikse jõuga võib tõsta suuri koormaid. Harilikul polüspastil on 2 harki, mille kummagi vahele on kinnitatud mitu plokki. Plokid võivad seista hargi vahel kas üksteise all (joon. 115) või kõrvuti (joon. 116). Ülemine hark on kinnitatud liikumatu toe külge, teise hargi otsas ripub tõstetav koorem. Köie ots on kinnitatud liikumatu hargi külge; kinnituspunktist läheb köis vaheldamisi ikka üle ühe liikuva ja liikumatu ploki; köie vabas otsas mõjub töötav jõud $P$. Nagu joonistusel 115 näha, ripub alumine hark ühes koormaga kuuekordsel köiel; iga üksik köieharu kannab järjelikult $^1/_6$ koormast. Kuna töötava jõu $P$ tõmme on kogu köie pikkusel ühe suurune, siis peab $P$ võrduma üksiku köie tõmbumisega, s. t. $P = {}^1/_6Q$. On plokkide arv $n$, siis on ka köie kandvate harude arv $n$, ning tõmbejõud järjelikult

$$P = \frac{Q}{n}$$

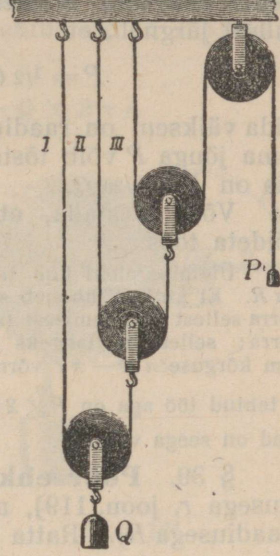
Selleks, et $Q$ tõuseks kõrguse $h$ võrra, peab köie vaba ots


Joon. 115.




Joon. 116.

käima $n$ korda pikema tee. Jõud $P$ teeb sellejuures töö $P \times nh$. Koorma otsekoheseks tõstmiseks kulub töö $Q \times h = nP \times \times h = P \times nh$. Järjelikult võrdub ka polüspasti juures kulutatud töö selle tööga, mis kulub koorma otsekoheseks tõstmiseks.



Joon. 117.

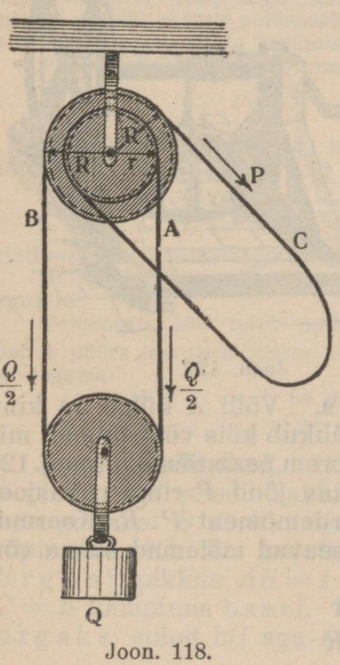
Potents-polüspast (joon. 117) seisab koos ühest liikumatust ja mitmest (n) liikuvast plokist. Köies I on tõmme $1/2Q$; köies II on tõmme $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}Q) = \frac{1}{2^2}Q$, köies III on ta $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}Q = \frac{1}{2^3}Q$ j. n. e. Seega on tõmme $n$-dame ploki järele $\frac{1}{2^n}Q$. Viimasega peab võrduma tõmbejõud $P$, s. t.

$$P = \frac{1}{2^n} Q$$

(Sellest ha nimetus „potentspolüspast").

Selleks, et koorem $Q$ tõuseks kõrguse $h$ võrra, peab esimene köis I lühenema $2h$, teine $2 \cdot (2h) = 2^2 h$, kolmas $2^3 h$, viimne köis aga $2^n h$. Jõud $P$ peab käima järjelikult tee $2^n h$, milleks kulub töö $P \times 2^n h$. Koorma $Q$ otsekohesel tõstmisel kulub töö $Q \times h$. Ka siin on mõlemad tööd võrdsed, sest

$$Q \times h = 2^n \, P \times h = P \times 2^n h.$$



Joon. 118.

Differentsiaal-polüspastil (joon. 118) ripub koorem $Q$ üheainsa liikuva ploki hargi küljes; ülemise hargi vahel on 2 teine-teisega ühendatud ketast (plokki), mille raadiustest $R$ on suurem kui $r$. Otsata kett või köis läheb töötava jõu $P$ juurest üle suurema ploki ($R$) alla koorma juure, tuleb sealt üles väiksema ploki ($r$) peale ning ümber viimase tagasi $P$ juure. Et kett ei libiseks, on plokid harilikult varustatud hammastega, mis haarduvad keti lülidesse.

Koorem $Q$ kandub kahel ketiharul $A$ ja $B$; nendes on seega tõmme $Q/2$. Ülemised plokid pöörduvad kettide $A$ ja C tõmbel momendiga $Q/2 . r + PR$ ühele poole, keti $B$ tõmbel aga pöördemomendiga $Q/2 . R$ teisele poole. Tasakaalu puhul peavad olema mõlemad momendid võrdsed, s. t. $\frac{1}{2} Qr + PR = \frac{1}{2} QR$, millest järgneb, et

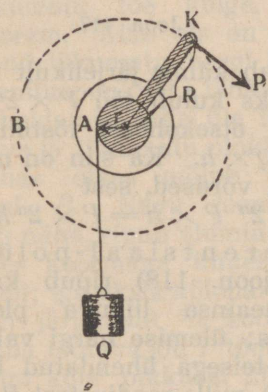
$$P = \frac{1}{2} Q \frac{R - r}{R} = \frac{1}{2} Q \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Mida väiksem on raadiuste vahe (differents) $R - r$, seda väiksema jõuga $P$ võib tõsta antud koormat. On näiteks $r/R = 9/10$, siis on $P = 1/20\ Q$.

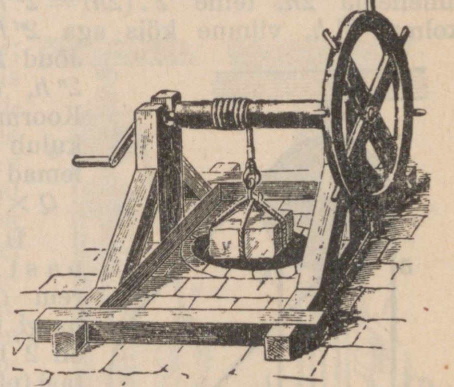
Võib tõestada, et ka differentsiaal-polüspasti juures ei võideta töös.

Ülemise ploki ühe täistiiru juures peab töötav jõud $P$ käima tee $2\pi R$. Et kett $B$ lüheneb sellejuures, siis peaks koorem $Q$ tõusma poole võrra sellest lühenemisest (s. t. $\pi R$): kett $A$ aga pikeneb samal ajal $2\pi r$ võrra; selletõttu langeks koorem $\pi r$ võrra; tõeliselt tõuseb siis koorem kõrguse $\pi R - \pi r$ võrra. Koorma tõstmise töö on $Q \times \pi\ (R - r)$; jõu $P$ tehtud töö aga on $P \times 2\pi R. = \frac{1}{2} Q \frac{R - r}{R} \times 2\pi R = Q\pi . (R - r)$; mõlemad on seega võrdsed.

§ 39. **Pöör ehk vinn** on otsades toetatud võll $A$ (raadiusega $r$, joon. 119), mida võib pöörda suurema ratta $B$ abil (raadiusega $R$). Ratta aset võib ka täita üksainus kodar $K$,




Joon. 119.



Joon. 120.

midahüütakse sel puhul v ä n d a k s. Võlli $A$ külge on kinnitatud tõsteköie ots; pöördumisel mähkub köis võlli ümber, mille tõttu köie teise otsa külge seotud koorem peab tõusma (joon. 120). Vända ehk ratta peale mõjub töötav jõud $P$ ringi riivasjoone sihis; sellepärast on selle jõu pöördemoment $P . R$. Koorma $Q$ pöördemoment on $Q . r$. Tasakaalul peavad mõlemad olema võrdsed, s. t. $P . R = Q . r$, ehk

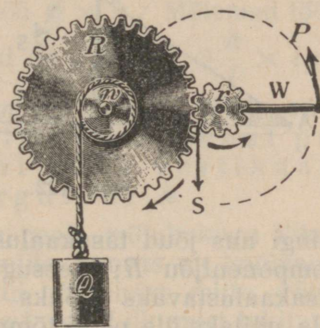
$$P = Q \frac{r}{R}$$

Mida pikem on vänt ($R$) ning mida peenem on võll ($r$) seda väiksem jõud $P$ tõstab antud koormat.

Ühe täistiiru juures peab jõud $P$ käima terve ringjoone $2\pi R$; köis lüheneb ning koorem $Q$ tõuseb sellejuures $2\pi r$. Koorma tõstmise töö on $Q \times 2\pi r$; jõu $P$ tehtud töö on $P \times 2\pi R$. Mõlemad tööd on võrdsed, sest

$$P \times 2\pi R = Q . \frac{r}{R} \times 2\pi R = Q \times 2\pi r.$$

Tihti ühendatakse 2 ehk rohkem pööra hammasrataste abil (joon. 121). Esimest pööra aetakse vändast jõuga $P$; see jõud kandub väikse hammasratta hammaste peale jõuna $S$, mille suurus leidub võrrandist $S . r = P W$ (kus $r$ on väikse hammasratta raadius, $W$ aga vända pikkus). Jõud $S$ tõukab teist pööra raadiusel $R$ (= suure hammasratta raadius); koorma $Q$ tasakaalul peab olema $S . R = Q . w$ (kus $w$ on pööra võlli raadius). Jagades eelmine võrrand viimasega saame $r_1 : R = PW : Qw$, millest järgneb:



Joon. 121.

$$\frac{P}{Q} = \frac{r . w}{W . R}; \text{ ehk } P = Q . \frac{r}{R} . \frac{w}{W}$$

**Näited:** 1) Harilikul polüspastil (joon. 115) on kummagi hargi vahel 3 plokki. Köie vaba ots on mähitud pööra (joon. 120) võlli ümber, mille raadius on 20 *cm* ning mille vända pikkus on 60 *cm*. Mitu töölist peavad väntama, selleks et tõsta polüspasti hargi otsas rippuvat koormat $Q = 2160\,kg$? Iga tööline pöörab vänta keskmise jõuga 40 *kg*.

Polüspasti köit tuleb tõmmata jõuga

$$P_1 = \frac{Q}{6} = \frac{2160}{6}\,kg = 360\,kg.$$

Et pööra võllile mähitud köis tõmbuks jõuga $P_1$, selleks peab pööra vända peale mõjuma jõud $P_2$ (§ 39), mille suurus on

$$P_2 = P_1 . \frac{r}{R} = 360\,kg . \frac{20}{60} = 120\,kg.$$

Järjelikult peab töötama pööra vända juures $120 : 40 = 3$ töölist.

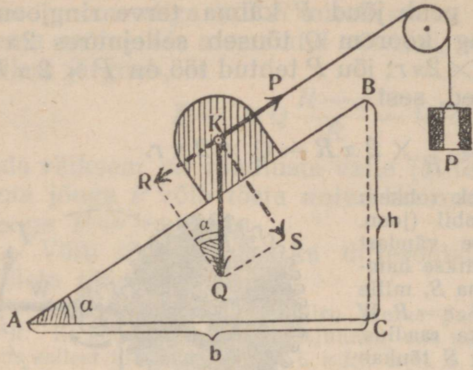
2) Mitu tiiru peab tegema pöör, selleks et koorem tõuseks 11 *m* kõrgusele?

Polüsposti köit tuleb mähkida ära $6 \times 11 = 66$ meetrit. Et köis lüheneb pööra iga tiiru juures $2\pi r = 2\pi . 20\,cm \cong 126\,cm$ võrra, siis peab pöör tegema

$$\frac{66\,m}{1{,}26\,m} \backsim 52{,}5 \text{ tiiru.}$$

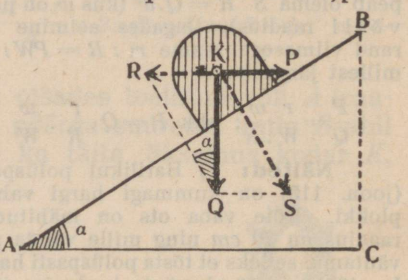
§ 40. **Kaldpind.** 1) Füüsikas nimetatakse kaldpinnaks iga pinda, mis seisab kaldu. Langetame seesuguse pinna mistahes punktist $B$ vertikaaljoone $BC$ (joon. 122) kuni horisontaalpinnani $AC$, siis kujutab kõrgus $BC = h$ kaldpinna kõrgust, pikkus $AB = l$ kaldpinna pikkust ning kaugus $AC = b$ kaldpinna baasi. Nurka $\alpha = BAC$ hüütakse kaldenurgaks, suhet $h/l$ aga tõusuks; (on näiteks raudtee tõus

1 : 1000, siis tähendab see et tee tõuseb iga 1000 meetri pikkusel ($l$) ühe meetri ($h$) võrra kõrgemale).



Joon. 122.

Kaldpinnal asuv keha $K$ libiseb mööda pinda alla, sest raskusjõu $Q$ see komponent $R$, mis on paralleelne kaldpinnaga, tõmbab keha liikuma. Teine komponent $S$ on perpentikulaarne kaldpinnaga: see jõud surub keha ainult vastu kaldpinda ja tasakaalustub viimase vastumõjuga. Et keha jääks kaldpinnale seisma, peab mingi uus jõud tasakaalustama komponentjõu $R$; seesuguseks tasakaalustavaks jõuks võib olla näiteks üle ploki tõmmatud nööri tõmbejõud $P$, mis tasakaalu puhul peab võrduma jõuga $R$ ning otse viimase vastu mõjuma. Kolmnurkade $RKQ$ ja $ABC$ sarnadusest järgneb, et $R : Q = h : l$ ning $S : Q = b : l$. Sellest leiame, et



Joon. 123.

$$\text{t a s a k a a l u s t a v \ j õ u d} \quad P = R = Q \,.\, \frac{h}{l} \tag{66}$$

$$\text{s u r v e} \quad S = Q \,.\, \frac{b}{l} \tag{67}$$

S e a d u s I: **Kaldpinnal seisab keha tasakaalus, kui kaldpinnaga paralleelne jõud $P$ ning keha kaal $Q$ suhtuvad nagu kaldpinna kõrgus ($h$) ja pikkus ($l$).**

Olgu tasakaalustaval jõul üldse mistahes siht, ikka peab ta võrduma keha raskuse selle komponendiga, mis mõjub jõule otse vastu. On $P$ näiteks paralleelne baasiga $AC$ (joon. 123), siis lahutub raskus $Q$ komponentideks $R$ ja $S$, millest esimene on paralleelne baasiga, teine aga perpendikulaarne kaldpinnaga. Et liikumist võib tekitada ainult komponent $R$, siis peab jõud $P$ tasakaalustama nimelt teda, s. t. $P = R$. Kolmnurkadest $RKQ$ ja $ABC$ järgneb, et

$$P = R = Q \,.\, tg\alpha = Q \,.\, \frac{h}{b} \tag{68}$$

$$S = \frac{Q}{cos\alpha} = Q \,.\, \frac{l}{b} \tag{69}$$

2) Kui hõõrumist ei oleks, siis hakkaks kaldpinnal tasakaalustatud keha (joon. 122) väiksema kui tõuke mõjul ühtlaselt edasi liikuma, sest sel puhul ei oleks ühtki jõudu, mis muudaks kehale antud liikumist. Tõukaksime keha ülespoole, siis hakkaks ta liikuma kaldpinda mööda üles, s. t. ta tõuseks teepikkusel $AB$ kõrguse $h$ võrra. Kogu sellel tõusul tasakaalustab jõud $P$ keha raskuse komponenti $R$, s. t. jõud $P$ mõjub keha peale teepikkusel $AB = l$, millejuures ta teeb töö $P \times l$. Keha otsekoheseks tõstmiseks kõrguseni $h$ (vertikaaljoont $CB$ mööda) kulub töö $Q \times h$. Mõlemad tööd on võrdsed, sest formuli (66) põhjal on $P \times l = Q \frac{h}{l} \times l = = Q \times h$. Järjelikult ei võideta kaldpinna abil töös, vaid keha ülestõmbamiseks kulub kaldpinnal parajasti samapalju tööd kui keha vertikaalseks tõstmiseks sama kõrguseni $h$.

3) Kaldpinnalt allalibiseva keha peale mõjub kogu liikumise aeg raskusjõu komponent $R$, mille suurus on konstant. Sellepärast on keha libisemine — kui hõõrumist mitte võtta arvesse — ühtlaselt kiirendatud. Liikumist tekitava jõu $R$ suurus leidub kolmnurgast $KRQ$ (joon. 122):

$$R = Q \sin\alpha.$$

Kui keha mass on $M = Q : g$ (formul 45-a, kus $g$ tähendab vaba langemise kiirendust), siis on formuli (44) järele kaldpinnal libiseva keha kiirendus

$$p = \frac{R}{M} \quad \frac{Q \sin\alpha}{Q/g} = g \, . \sin\alpha \tag{70}$$

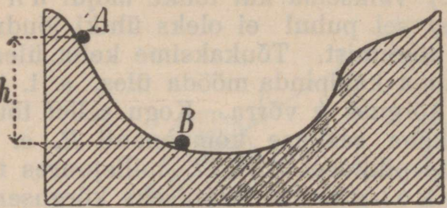
kuna $\sin\alpha$ on alati väiksem ühest, siis on $p$ alati väiksem kui $g$. Kaldpinnal oleneb keha kiirendus nii siis ainult kaldenurgast $\alpha$; sellepärast on ühel ja samal kaldpinnal kõigil kehadel ühesuurune kiirendus.

Kiirendusel $p$ omandab keha teepikkusel $AB = l$ lõppkiiruse $v = \sqrt{2pl} = \sqrt{2\,gl \, . \sin\alpha}$ (formul 7). Joonistusest 122 selgub, et $l \, . \sin\alpha = AB \, . \sin\alpha = BC = h$; seega on kehal kaldpinna lõpul (punktis $A$) kiirus

$$v = \sqrt{2\,gl \, . \sin\alpha} = \sqrt{2gh} \tag{71}$$

Võrreldes seda kõrguselt $h$ vabalt langeva keha lõppkiirusega (formul 13), selgub et mõlemad on võrdsed: **Mistahes kaldpinnalt allalibiseva keha lõppkiirus võrdub samalt kõrguselt langeva vaba keha lõppkiirusega.**

Lõppkiirus ei olene ei keha kaalust ega kaldpinna kujust, vaid ainult keha lähtekoha kõrgusest $h$ (formulis 71 muutub ainult; suurus $h$). Sellepärast jääb viimne seadus jõusse ka siis, kui kaldpind on kõverpinnaline (joon. 124): Olgu kaldpind kuitahes õõnes või kumer, kui keha libiseb aga kõrguse $h$ võrra madalamale, siis on tal alati üks ja sama lõppkiirus $v = \sqrt{2gh}$.




Joon. 124.

Kaldpinnalt $AB$ (joon, 122) allalibisemiseks kulub kehal formuli (5) järele aeg

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{p}} = \sqrt{\frac{2l}{g \, . \, sin\alpha}} = \sqrt{2l : g\,\frac{h}{l}} = l\sqrt{\frac{2}{gh}} \qquad (72)$$

sest $sin\alpha = h : l$. Vabaks langemiseks samalt kõrguselt $h$ kulub kehal formuli (11) järele aeg

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = h\sqrt{\frac{2}{gh}}$$

mõlema aja võrdlemine näitab, et

$$t_1 : t_2 = l : h$$

s. t. **kaldpinnalt libisemiseks ning vabaks langemiseks kuluvad ajad suhtuvad kui kaldpinna pikkus ja tema kõrgus.**

**Näited:** 1) Raudtee tõus on 1 : 50. Mitu hobust kulub sellel teel 9 $t$ raskuse vaguni edasivedamiseks, kui hõõrumist mitte võtta arvesse ja kui pidada ühe hobuse tõmdejõuks 45 kg?

Tee on kaldpind, mille pikkuseks on $l = 50$ $m$ ja kõrguseks $h = 1\,m$ (joon. 122). Hobused tõmbavad paralleelselt kaldpinnaga. Kui hõõrumist ei ole, siis peab hobuste tõmbejõud $P$ tasakaalustama vaguni raskuskomponendi $R$, s. t.

$$P = Q\,h/l = 9000\ kg.\ 1\ m/50\ m = 180\ kg.$$

Hobuste arv on seega

$$\frac{180\ kg.}{45\ kg.} = 4.$$

2) Vankri peale veeretatakse 150 $kg$ raskune vaat kaldu seisvat planku (purret) mööda. Vankri kõrgus on 1 $m$, plangu pikkus on 3 $m$ Kui tugevasti tuleb tõmmata plangul seisvat vaati?

Plank on kaldpind, mille kõrgus $h = 1$ $m$ ja pikkus $l = 3$ $m$. Formuli (66) järele peab tõmbejõud olema vähemalt

$$P = Q\,h/l = 150\ kg.\quad 1\ m/3\ m = 50\ kg.$$

3) 9 $m$ pikkuse ja 3 $m$ kõrguse kaldpinna tipul asub keha, mille kaal on 150 $kg$.

a) Kui suur peab olema kaldpinnaga paralleelne jõud, mis tasakaalustaks keha?

$$P = Q\,h/l = 150\ kg\ 3\ m/9\ m = 50\ kg.$$

b) Kui suur on ülestõmbamisel tehtav töö?

$$A = P\,.\,l = 50\ kg\,.\,9\ m. = 450\ mkg;\ \text{ehk}$$

$$A = Q\,.\,h = 150\ kg\,.\,3m = 450\ mkg.$$

c) Missuguse kiirendusega liiguks keha kaldpinnal ja missuguse kiirusega jõuaks ta alla?

Formulis (70) on

$$p = g\,.\,sin\,\alpha = 9{,}81\,{}^{m}/_{sec^2}\,.\,{}^{3m}/_{9m} = 3{,}27\,{}^{m}/_{sec^2};$$

Formul (71) annab

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,{}^{m}/_{sec^2} \cdot 3m} = 7{,}67\,{}^{m}/_{sec}.$$

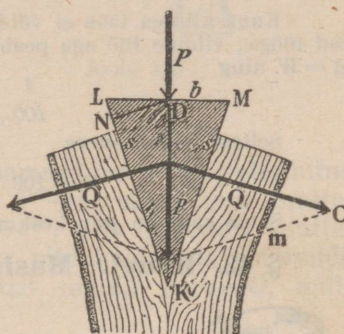
d) Kui kaua kestab liikumine kaldpinnal ja kui kaua vabal langemisel? Formulist (72) saame:

$$t_1 = l\sqrt{\frac{2}{gh}} = 9\,m\sqrt{\frac{2}{9{,}81\,{}^{m}/_{sec^2} \cdot 3\,m}} = 2{,}35\,sec.$$

Formulist (13) leiame

$$t_2 = h\sqrt{\frac{2}{gh}} = 3\,m\sqrt{\frac{2}{9{,}81\,{}^{m}/_{sec^2} \cdot 3\,m}} = 0{,}78\,sec.$$

§ 41. **Kiil** on kõvast ainest kolmtahkne prisma (joon. 125), mida tarvitatakse kehade lõhkumiseks mitmesuguste riistade näol; kiiluks tuleb pidada näiteks kirvest, noatera, höövlirauda, ka saehammast jne. Läbilõikes on kiilul harilikult sarikkolmnurga *LMK* kuju. Baasi $LM = b$ nimetatakse kiilu s i l m a k s, külgpindade lõikeserva *(K)* aga kiilu t e r a k s. Silma peale mõjuv jõud *P* lahutub kaheks komponentjõuks *Q*, mis on perpendikulaarsed kiilu külgedega. Need komponendid *Q* avalduvadki selle survena, mis ajab keha lõhki. Surve suurus leidub kolmnurkade *PQm* ning *LMK* sarnadusest:




Joon. 125.

$$P : Q = LM : LK = b : s$$

$$Q = P \cdot \frac{s}{b} \quad — \quad — \quad — \quad — \qquad (73)$$

Suhe $\frac{s}{b} = \frac{\text{külgpinna pikkus}}{\text{silma laius}}$ kujutab kiilu t e r a v u s t, sest kiil on seda „teravam" (õhem), mida suurem on see arv. Leitud formul ütleb sellepärast, et **surve *Q* on proportsionaalne kiilu teravusega ($^{s}/_{b}$).** Terav nuga lõikabki sellepärast hästi, et tema suure teravuse ($^{s}/_{b}$) tõttu annab juba väike töötav jõud *P* väga suure surve *Q*, mis tõrjub lõigatava aine tera teelt kõrvale.

Tungib kiil kogu oma pikkuse *KD* võrra lõhutava aine sisse, siis peab töötav jõud *P* mõjuma teepikkusel *DK*, s. t. ta peab tegema töö $P \times DK$. Samal ajal nihkub aine mõlemal pool kiilu kauguse *DN* võrra kõrvale; järjelikult mõjub surve *Q* teepikkusel $2DN$ s. t. kiil ise teeb töö $Q \times 2ND$. Täisnurksete kolmnurkade *LDK* ja *DNK* sarnadusest leidub, et $DN : DK = LD : LK = {}^{1}/_{2}b : s$, ehk $DN = DK \cdot \frac{b}{2s}$. Sellest selgub, et kiilu töö on

$$Q \times 2ND = Q \times 2DK \cdot \frac{b}{2s} = Q \cdot \frac{b}{s} \times DK = P \times DK,$$

s. t. k i i l t e e b i s e t ä p i l t s a m a p a l j u t ö ö d, k u i j õ u d P k i i l u s u r u m i s e l: **Ka kiilu abil ei võideta töös.**

**Näited:** 1) Kiilusarnase kirve silma laius $b = 3\ cm$, tera pikkus $s = 15\ cm$ (joon. 125). Kui see kirves lüüa hooga $W = 10\ mkg$ puu sisse, tungib ta 5 *cm* sügavuseni.

Kui suur on puu keskmine takistus (vastusurve $Q$) kirve sissetungimisel?

Kirve tungides 5 *cm* sügavuseni on $KD = 5\ cm$ (joon. 125); seega leidub surve mõjumistee $ND$ kolmnurkadest $NDK$ ja $LKD$:

$$ND : DK = LD : LK = {}^1\!/\!_2 b : s$$

$$ND = DK \cdot \frac{b}{2s} = 5\ cm \cdot \frac{3\ \mathrm{cm}}{2.15\ \mathrm{cm}} = 0{,}5\ cm.$$

Et $Q$ mõjub mõlemalpool kiilu ühepikkusel teel $ND$, siis teeb surve $Q$ töö

$$A = Q \cdot 2\,ND = Q\,\mathrm{kg} \cdot 2 \cdot 0{,}5\ cm = Q\ cm\ kg = \frac{1}{100}\ Q\ mkg.$$

Kuna kiiluga töös ei võideta, siis peab see töö võrduma jõu $P$ tehtud tööga; viimne töö aga peab võrduma kirve hooga $W = 10\ mkg$; s. t. $A = W$ ning

$$\frac{1}{100}\ Q\ mkg = 10\ mkg.$$

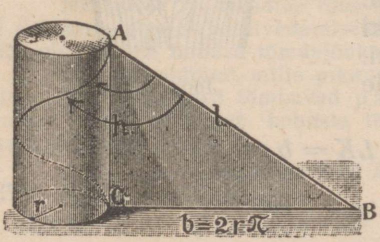
Sellest leidub surve

$$Q = 100 \cdot \frac{10\ \mathrm{mkg.}}{1\ \mathrm{m}} = 1000\ kg.$$

Sama suur on puu keskmine vastusurve.

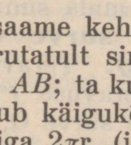
## § 42. Kruvi. Masinad.

1) Keerame täisnurkse kolmnurga $ABC$ (joon. 126) ümber silindri, siis moodustab kolmnurga hüpotenuus silindri pinnal n. n. k r u v i j o o n e. Üht täiskeerdu nimetatakse k r u v i k ä i g u k s; kahe käigu kaugust (piki silindrit mõõdetud) hüütakse k ä i g u k õ r g u s e k s. Kinnitame kruvijoone kohta silindri pinnale mingisuguse etteseisva riba, siis saame keha, mida nimetatakse k r u v i k s (joon. 128). Väljasirutatult sirgub see etteseisev riba kolmnurga hüpotenuusiks $AB$; ta kujutaks sel kujul k a l d p i n d a, mille kõrgus $h$ võrdub käigukõrgusega ning mille baas $b$ võrdub kruvi perimeetriga $2\pi r$. (joon. 126). Nimetatud riba peale asetatud keha liigub nii siis kruvijoonel sama seaduse järele kui kaldpinnal $AB$.

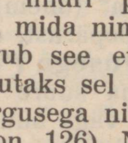



Joon. 126.

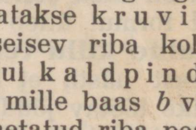
Selle järele, kas on kruvijoone etteseisval osal, n. n. k r u v i l õ i k e l kolmnurkne või nelinurkne läbilõige, kujuneb kas teravlõikega kruvi (joon. 127) või nürilõikega kruvi (joon. 128).



Joon. 127.

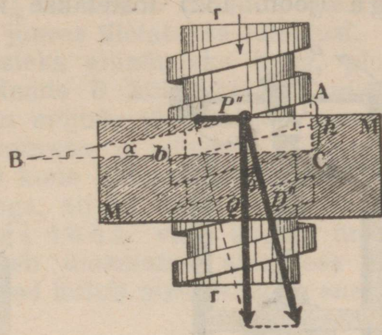


Joon. 128.




Joon. 129.

Kruvilõikel liigub n. n. mutter (joon. 129); see on lühem õõnessilinder, mille õõnsa pinna sisse on lõigatud kruvijoonele vastav soon. Mutri keeramisel libiseb see soon kruvilõikel samal kombel üles või alla, kui ta libiseks piki vastavat kaldpinda $AB$ (joon. 130). Kui hõõrumist ei oleks, siis ei püsiks mutter üldse vertikaalselt hoitud kruvil, vaid ta libiseks oma raskusjõu $Q$ mõjul kaldpinnalt $AB$ alla. Seda liikumist tekitab baasiga paralleelne komponentjõud $P''$, mille suurus on formuli (68) järele



Joon. 130.

$$P'' = Q \,.\, tg\alpha$$

Seda jõudu võib tasakaalustada samasuure vastupidisihitud jõuga $P$; võrdub see jõud parajasti $P''$-ga, siis seisab mutter tasakaalus; on ta aga suurem kui $P''$, siis pöördub mutter vastupidises sihis, s. t. ta tõuseb piki kaldpinda (kruvilõiget) üles. Sel juhusel tõstab mutrit nimelt surve $Q$, mille määrab eelmine formul

$$Q = \frac{P}{tg\alpha} \tag{74}$$

kus $P$ all tuleb mõista seda jõudu, millega pöördakse mutrit tangensiaalsihis, s. t. paralleelselt baasiga $BC$ (töötav jõud). Nagu joonistusel (130) näha, on $tg\alpha = AC : BC = h : b$; kuna aga baas $b = 2\pi r$, siis on $tg\alpha = h : 2\pi r$, ning

$$Q = P\frac{2\pi r}{h} \tag{75}$$

Seisab mutri peal mingi koorem, siis võib surve $Q$ tasakaalustada seda koormat ja teda koguni tõsta. Tasakaalu puhul peab koorma raskus võrduma survega $Q$; selleks tuleb mutrit pöörda kruvijoone kohal jõuga

$$P = Q \,.\, \frac{h}{2\pi r} \tag{76}$$

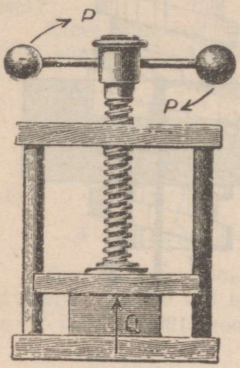
millest järgneb, et

$$P : Q = h : 2\pi r$$

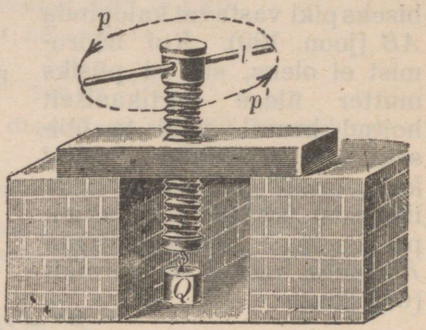
s. t. **tasakaalul peavad jõud ($P$) ja koorem ($Q$) suhtuma kui kruvi käigukõrgus ($h$) ja tema perimeeter ($2\pi r$).**

2) Teadagi on see ükskõik, kas pöördakse mutrit paigalseisva kruvi peal või pöördakse kruvi paigalseisvas mutris; surve $Q$ jääb mõlemal juhusel ühesuuruseks. Kruvipressil

(joon. 131) seisab näiteks mutter paigal; pööramisel rõhub kruvi ots jõuga $Q$ kokkupressitava keha peale. *Tõstekruviga* (joon. 132) tõstetakse kruvi otsas rippuvaid raskeid




Joon. 131.




Joon. 132.

koormaid j. n. e. Ka neil juhustel on *kruvi pinnal* mõjuv pöördejõud $P$ määratud ülevalnimetatud seadusega. Et hõlpsam oleks pöörda, on seesuguste masinate kruvid varustatud väntade ehk kangidega. Vända otsas võib pöördejõud $P_1$ olla teadagi vastavalt *väiksem* kui kruvi pinnal.

On kangi pikkus $R$ ning kruvi raadius $r$, siis mõjub vända jõud $P_1$ kaugusel $R$ ning otse kruvi pinnal rakendatud jõud $P$ kaugusel $r$ kruvi teljest; pöördemomentide seaduse järele on

$$P \cdot r = P_1 \cdot R$$

Kui panna P asemele tema väärtus formulist (76), siis leidub kangi pööramiseks tarvilik jõud

$$P_1 = P \cdot \frac{r}{R} = Q \frac{h}{2\pi r} \cdot \frac{r}{R} = Q \frac{h}{2\pi R} \qquad (77)$$

ehk

$$P_1 : Q = h : 2\pi R$$

s. t. *jõud ja koorem peavad suhtuma kui kruvi käigukõrgus* $(h)$ *ja jõu ringi perimeeter* $(2\pi R)$. Et kruvi ja mutri vahel on hõõrumine kaunis suur, siis peab olema jõud $P$ (ja $P_1$) harilikult märksa suurem kui see, mis leidub tasakaaluseadusest.

3) *Töö alalhoiduvuse seadus kruvi juures:* Ühe täistiiru ajal käib pöörav jõud tee $2\pi r$ (kruvi pinnal arvatud); selle juures teeb ta töö $P \times 2\pi r$. Formuli (76) põhjal võrdub see töö

$$P \times 2\pi r = Q \cdot \frac{h}{2\pi r} \times 2\pi r = Q \times h$$

s. t. selle tööga, mis kulub koorma $Q$ *otsekoheseks* tõstmiseks kõrgusele $h$. Ühe täistiiruga aga tõstabki kruvi koormat $Q$ ainult ühe käigukõrguse ($h$) võrra.

4) M a s i n a t e k s hüütakse üldse kõiki neid abinõusid, millega võib kanda meie tarvitusel olevat energiat (näiteks musklite, auru, elektri energiat) üle nende kehade peale, mille kallal „töötatakse“, s. t. mille juures ületatakse takistusi.

Nagu nägime on seesugusteks abinõudeks kang, plokk, pöör, kaldpind, kiil ja kruvi. Nende 6 kõigelihtsama masina (l i h t m a s i n a) abil võib lasta mõjuda töötaval jõul soovitud kehade peale otstarbekohase suuruse ja sihiga. Kõik teised masinad on ainult nimetatud kuue lihtmasina mitmesugused ühendused. Nagu lihtmasinatega, nii ka kõigi teiste m a s i n a t e g a e i v õ i d e t a i i a l g i t ö ö s, vaid koguni ümberpöördult: hõõrumise tõttu läheb masinates alati osa tööd kaotsi, nii et masinaga töötamisel kulub pisut rohkem energiat kui otsekohesel töötamisel.

**Näited:** 1) Kruvi käigukõrgus on $h = 1 cm$. Kui suure jõuga tuleb pöörda kruvi pea külge kinnitatud 1 meetri pikkuse kangi otsa selleks, et tõsta koormat $Q = 1000\ kg$?

Kruvi pinnal peab mõjuma pöördejõud

$$P = Q.\frac{h}{2\pi r} = 1000\ kg\,\frac{0{,}01\ m}{2\pi r} \qquad \text{(form. 76)}$$

Kangi otsas aga peab mõjuma $r/R$ korda väiksem jõud $P_1$ (kus $r$ on kruvi raadius, $R = 1\ m$ = kangi pikkus):

$$P_1 = \frac{r}{R}P = 1000\ kg.\frac{0{,}01\ m}{2\pi r} \times \frac{r}{R} = 1000\ kg.\frac{0{,}01\ m}{2\pi.\ 1m} = 1{,}59\ kg.$$

2) Kruvipressi juures on 24 $cm$ pikkuse kruvi peal 80 käiku; kruvi pea perimeeter on 60 $mm$. Kui suure jõuga pressib kruvi ots, kui kruvipead pöördakse 5 $kg$-lise tangensiaalse jõuga?

Formulis (77) on nüüd jõuringi perimeeter $2\pi R = 60\ mm. = 0{,}06\ m.$

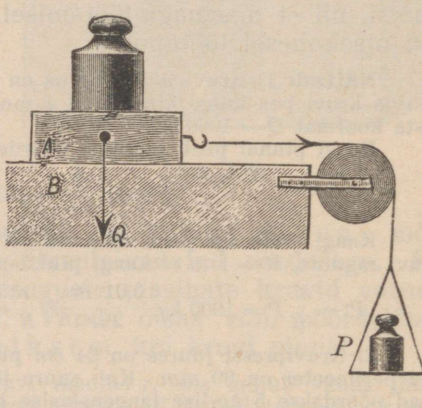
Käigukõrgus on $h = \frac{24\ cm}{80} = 0{,}3\ cm = 0{,}003\ m.$ Seega on surve

$$Q = P.\frac{2\pi R}{h} = 5\ kg.\ \frac{0{,}06\ m}{0{,}003\ m} = 100\ kg.$$

§ 43. **Hõõrumine.** 1) Hõõrumine tekib ühe keha liikumisel vastu teist keha. Tema põhjuseks on üks-teist puudutavate pindade karedus. Ka pealtnäha siledal kehapinnal on väiksed konarused, mis haarduvad keha libisemisel teise keha konarustesse. Et keha võiks liikuda edasi, peavad konarused kas murduma maha, painduma kõrvale või peab liikumapandud keha nendest tõstuma üle. Sellega aga t a k i s t u b liikumine ning keha liigub seda aeglasemalt, mida suurem on hõõrumine.

Me teema vahet l i b i s e m i s - h õ õ r u m i s e ja v e e r e m i s - h õ õ r u m i s e vahel. Esimene sünnib näiteks saani libisemisel lume pinnal ning pussi tiirlemisel vankri teljel, üldse siis, kui kokkupuutuvad pinnad nihkuvad edasi üksteisega paralleelselt. Veeremis-hõõrumine tekib kera, ratta ja rulli veeremisel mingit pinda mööda. Veeremis-hõõrumine on libisemis-hõõrumisest v ä i k s e m, sest veerev keha tõstub hõlpsasti üle konaruste, ilma et viimased murduksid või painduksid. Sellepärast tarvitatakse juhustel, kus see võimalik, libisemise asemel veeremist: Suuri kiva tõmmatakse edasi rullide peal; raskusi veetakse vankril j. n. e.

2) Kinnitame ree külge dünamomeetri ning tõmbame selle kaudu ree liikuma ühtlase kiirusega, siis näitab dünamomeeter kogu liikumise aeg umbes ühesuurust tõmbejõudu. See jõud ei või avaldada liikumise enese peale mingit mõju, sest ühtlase lilkumise alalhoidmiseks pole jõudu üldse tarvis; järjelikult peab see jõud tasakaalustuma mingi teise samasuuruse kuid vastupidise jõuga. Seesuguseks jõuks on praegusel juhusel reejalaste hõõrumine. Selle põhjal võib kujutada hõõrumist vastu liikumist mõjuva jõuna, mille suurus võrdub hõõrumise ületamiseks tarviliku tõmbejõu suurusega. Katsetel mõõdetakse hõõrumise suurust harilikult selle koorma $P$ raskusjõuga, mille mõjul keha $A$ hakkab liikuma ühtlase kiirusega kehal B (joon. 133), sest sel juhusel peab hõõrumine võrduma koorma $P$ tõmbejõuga. Seesugused katsed näitavad (Coulomb, 1736 — 1806), et kõvemate kehade juures oleneb hõõrumise (jõu $P$) suurus ainult hõõruvate kehade ainest, nende pinna siledusest ning perpendikulaarselt pinnaga mõjuva surve $Q$ suurusest; ta ei olene ei hõõruvate pindade suurusest ega liikumise kiirusest.



Joon. 133.

Kui hõõruvate kehade omadusi iseloomustada tähega $\mu$=hõõrumiskoeffitsient, siis võib avaldata hõõrumise suurust $P$ formuliga

$$\mathbf{P} = \mu \mathbf{Q} \tag{78}$$

**hõõrumine = hõõrumiskoeffitsient × surve.**

Täpsemad katsed näitavad, et hõõrumine oleneb teataval määral ka kiirusest: ta on näiteks liikumise algul alati suurem kui ühtlasel edasiliikumisel. Hõõrumine oleneb väga palju keha kõvadusest: ta on seda suurem, mida pehmem on keha. Soenemine suurendab hõõrumist; määrimine teeb pinnad libedamaks ja vähendab sellega hõõrumist.

3) Väga hõlpsal kombel leidub hõõrumise suurus kaldpinna abil (joon. 122): Keha asetatakse näiteks laua $AB$ peale, mille otsa tõstetakse seni kuni keha hakkab libisema lauda pidi alla; seda kaldenurka $\alpha$, mille juures algab libisemine,

hüütakse h õ õ r u m i s n u r g a k s. Libisemise algul peab raskuse komponent $R$ parajasti võrduma hõõrumisega $P$; kolmnurkadest $RQK$ ja $ABC$ aga leidub, et $R:S=h:b=tg\alpha$, ehk

$$R=P=S.tg\alpha \tag{79}$$

Võrreldes seda formuliga (78) selgub, et

$\mu = tg\alpha =$ hõõrumiskoeffitsient.

Ühtlasel liikumisel on hõõrumiskoeffitsiendil umbes järgmine väärtus:

| | | | |
|---|---|---|---|
| P u u p u u d | vastu, | määrimata | $\mu=0{,}34$ |
| " " | " | rasvaga määrit. | $\mu=0{,}07$ |
| Metall metalli | " | määrimata | $\mu=0{,}42$ |
| " " | " | õliga määritud | $\mu=0{,}07$ |
| Raud jääd | " | | $\mu=0{,}025$ |

Maakeral on võimalik igasugune liikumine ainult hõõrumise ja ümbruskonna takistuse tõttu. Ei oleks hõõrumist, siis ei oleks võimalik näiteks käia ja sõita, ei oleks võimalik panna rattaid rihma abil tiirlema siduda asju nööriga kokku, ega neid kinnitada naelte ja kruvidega üksteise külge. Kord liikumatõugatud keha ei jääks ilma hõõrumiseta ja ümbruskonna takistuseta enne seisma, kuni ta põrkuks vastu teist keha j. n. e.

**Näited:** 1) Missugune tõus peab olema jääteel, selleks et uisujooksja libiseks temalt parajasti ü h t l a s e kiirusega alla?

Eelmise järele peab tõus olema seesugune. et oleks

$$\mu = tg\alpha = 0{,}025$$

Valime kaldpinna baasiks $b=100\ m$, siis on kõrgus $h=b.tg\alpha=100\ m.\ 0{,}025=2{,}5\ m$. Järjelikult on tõus 2,5 : 100.

2) Kui järsuks võib teha liivahunnikut, kui on teada, et hõõrumiskoeffitsient liiv/liiv on umbes 0,84?

Liiv jääb peatuma hunniku kallakule, kui viimase kaldenurk ei ole suurem sellest nurgast, mille tangens on 0,84 (v. § 43₃). Sellest järgneb, et hunniku külje kõigesuurem kaldenurk on määratud formuliga

$$tg\alpha = 0{,}84$$
$$\alpha = 40\,°.$$

3) Kui suure jõuga peab hobune tõmbama jääpinnal libisevat rege, kui regi ja koorem kaaluvad kokku 1000 $kg$?

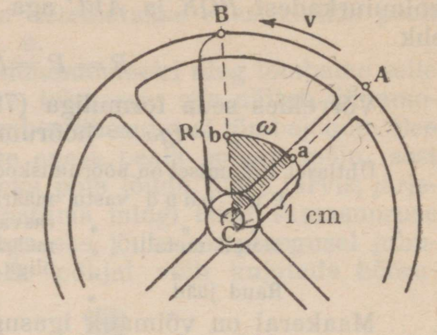
Tõmbejõud peab võrduma hõõrumisega. Kuna reejalaste hõõrumisel vastu jääd on $\mu$ umbes 0,025, siis on

$$P=\mu.Q=0{,}025\,.\,1000\ kg=25\ kg.$$

## Peatükk III.

# Tiirlemine ja ôôtsumine.

§ 44. **Kõva keha tiirlemine; nurkkiirus; inertsuse moment.** 1) Tiirlemisel liiguvad keha üksikud osakesed ringjooni mööda; ainult ühel teataval sirgjoonel asuvad osakesed ei võta liikumisest üldse osa, vaid seisavad ühe koha peal paigal, Seda sirgjoont hüütakse t i i r l e m i s t e l j e k s; tema läheb perpendikulaarselt läbi kõigi nende ringide sentrumite, mida mööda keha teised osakesed tiirlevad. Näiteks on ratta (joon. 134) tiirlemisteljeks võlli geomeetriline telg $C$, sest kõik teised osad tiirlevad ümber selle telje ning kõigi teeringide pinnad on perpendikulaarsed teljega $C$.



Joon. 134.

2) Kujutame enesele ette, et tiirlemisteljel $C$ seisab vaatleja, kes tahab pidada silmas kõiki neid kehaosakesi, mis asuvad raadiusel $CA$ (joon. 134). Ühe sekundi jooksul pöörduvad need osakesed seisu $CB$; vaatleja peab siis sama aja jooksul pöörduma nurga $\omega$ võrra. Olgugi, et kaugemalseisev osake $A$ käib pikema tee $(AB)$, lähemalseisev osake $(a)$ lühema $(ab)$, vaatleja pöördumisnurk on mõlema osakese jaoks üks ja sama. Nurka, mille võrra peab pöörduma teljel seisev vaatleja ühe sekundi jooksul selleks, et pidada silmas tiirleva keha mistahes punkti, hüütakse tiirlemise nurkkiiruseks $\omega$. Teda mõõdetakse kaare $ab$ pikkusega, mille raadius võrdub ühe pikkusühikuga $(Ca = 1\ cm)$: Nurkkiirus võrdub raadiuse „üks" otsaga tõmmatud kaarega, kui pöördumisaeg on 1 sekund.

Keha osakeste lineaarkiirus, s. t. see, millega nad liiguvad ringjoonel, on iga osakese juures isesuurune. Osakese $A$ lineaarkiirus on näiteks sekundis käidud tee $AB = v$, osakese $a$ oma aga on $ab$; joonistusest selgub, et $AB = ab \times R$. Kuna kaar $ab$ on ühtlasi ka nurkkiiruse mõõduks $(ab = \omega)$, siis järgneb sellest:

$$\mathbf{v} = \omega \, . \, \mathbf{R} \tag{80}$$

**lineaarkiirus = nurkkiirus × raadius.**

3) Tiirlemist nimetatakse ühtlaseks, kui nurkkiirus jääb kogu tiirlemise aeg ühesuuruseks; sel puhul liigub ka iga osake ühtlase kiirusega oma ringjoonel. Tiirlemine on ühtlaselt kiirendatud (aeglastatud), kui nurkkiirus kasvab (kahaneb) igas sekundis ühe ja sama suuruse võrra; ka osakese $(A)$ edasiliikumine on sel puhul ühtlaselt kiirendatud (aeglastatud).

Sai nimetatud (§ 28) et pöördumisel etendab pöördemoment sama osa, kui jõud harilikul edasiliikumisel. Võib tõestada, et ka tiirlemine on ühtlaselt kiirendatud, kui pöördemoment mõjub kogu aeg ühetugevuselt; tiirlemine muutub ühtlaseks, kui pöördemoment sootumaks kaob ja kui keha tiirleb veel ainult oma hooga (võrdle § $3_1$ ja $5_1$ ).

Tiirlemise hoog leidub keha üksikute osakeste hoogude summana. On nurkkiirus $\omega$, siis on tiirlemisteljest kaugusel $r_1$ seisva osakese $m_1$ kiirus $v_1 = r_1\,\omega$; selle osakese hoog on $1/2 m_1\, v_1^2 = 1/2 m_1\, r_1^2 \,.\, \omega^2$. On järgmiste osakeste $m_2$ , $m_3$ . . . . tiirlemisraadiused vastavalt $r_2$ , $r_3$ . . . , siis on nende hoogude summa

$$1/2 m_1\, r_1^2 \,.\, \omega^2 + 1/2 m_2\, r_2^2 \omega^2 + 1/2 m_3 \,.\, r_3^2 \,.\, \omega^2 + \;.\;.\;.\;.\;. =$$

$$1/2 \omega^2\, (m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2 + m_3\, r_3^2 + \;.\;.\;.\;.\;.) = 1/2\, \omega^2\; \Sigma\, mr^2.$$

See summa peabki võrduma kogu tiirlemishooga $W$, s. t.

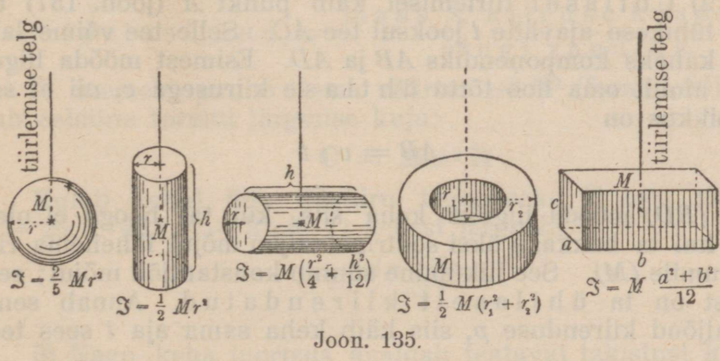
$$W = 1/2\, \omega^2\, \Sigma\, mr^2 = 1/2 \omega^2 \,.\, \mathbf{J} \tag{81}$$

kus
$$\mathbf{J} = \Sigma\, mr^2 \tag{82}$$

Summat $\Sigma\, mr^2$ nimetatakse keha **inertsuse momendiks**; tema ei olene kiirusest, vaid ainult keha osakeste arvust, suurusest ja vastastikusest seisust. Ta on seda suurem, mida suurem on kogu keha mass, ning mida kaugemal seisavad massi osakesed tiirlemisteljest (mida suuremad on $r$). Et ühes inertsuse momendiga kasvab tiirlemishoog, siis antakse kehale neil juhustel, kus hoog peab olema suur (hoogratas), seesugune kuju, et tema raskemad osad seisaksid tiirlemisteljest võimalikult kaugel (näiteks ratta perimeetril).

Kui võrrelda edasiliikuva keha hoogu (formul 56) tiirleva keha omaga (formul 81), siis selgub, et viimane formul tuletub esimesest, kui panna kiiruse $v$ asemele nurkkiirus $\omega$ ning M asemele $\Sigma\, mr^2$. Sellest võib järeldada, et tiirlemisel etendab inertsusemoment ja nurkkiirus (=kiirendus) sama osa kui mass ja lineaarkiirus (=kiirendus) harilikul liikumisel. Paneme hariliku edasiliikumise jaoks leitud formulitesse massi, jõu ja kiiruse asemele inertsusemomendi, pöördemomendi ja nurkkiiruse, siis kujunevad järjelikult tiirlemise formulid. Formulist (44) leidub näiteks, et nurkkiirendus on proportsionnaalne pöördemomendiga ning ümberpöördult proportsionaalne inertsusemomendiga. Inertsusemomenti võib nii siis mõõta samal teel kui massigi (formul 45), nimelt tuntud pöördemomendi tekitatud nurkkiirenduse kaudu.

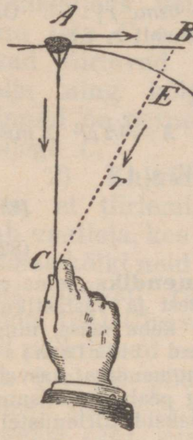
Tuleb pidada silmas, ei inertsusemomendil on iga telje suhtes ise väärtus; sellepärast võib rääkida ainult keha inertsusemomendist antud




Joon. 135.

telje suhtes. Geomeetriliselt korrapäraste kehade jaoks võib leida inertsusemomendi suurust ka arvestamise teel: Kui joonistusel 135 kujutatud kehade mass on $M$, siis näitab arvestus, et nende kehade inertsusemomente $J$ võib kujutada kehade all seisvate formulitega.

§ 45. **Ühtlane ringliikumine ehk tiirlemine.** 1) Kui tiirutada kivi nööri otsas, siis tõmbub nöör pingule; nööri teist otsa hoidev käsi tunneb, et kivil on tung ringi sentrumist kaugeneda. On nöör nõrk, siis võib ta katkeda. Sel puhul näeme, et samal silmapilgul kivi hakkab liikuma *sirgjooneliselt*, ja nimelt ringi riivasjoone $AB$ (joon. 136) sihis. Nimetatud sirgjooneline liikumine sünnib ainult inertsi tõttu; ta peab olema järjelikult *ühtlane*. Seda kiirust, millega keha liigub sirgjooneliselt edasi, kui ta vabaneb antud punktis $A$ (näiteks nööri katkemisel) kõigist jõududest, hüütakse ringliikumise *tõeliseks kiiruseks teepunktis* $A$.



Joon. 136.

Samuti nagu punktis A, nii on tõelisel kiirusel ka igas teises punktis vastava *riivasjoone siht*. Seega peab tõelise kiiruse siht alatasa muutuma. Et kiiruse muutumine võib sündida ainult jõu mõjul, siis peab *ka ühtlaselt tiirleva keha peale alaliselt mõjuma mingi jõud*. Seda jõudu hüütakse *sentripetaaljõuks*. Kivi tiirutamisel on näiteks sentripetaaljõuks pingutatud nööri tõmbejõud, mis tõmbab kivi igal silmapilgul sentrumi $C$ poole. Üldse nimetatakse neid jõude, mis kogu aeg on sihitud ühte ja samasse punkti (sentrummi $C$), *sentraaljõududeks*; nende mõjul tekkivaid kõverjoonelisi liikumisi hüütakse *sentraalliikumisteks*; viimaste hulka kuulubki ka tiirlemine.

2) *Ühtlasel* tiirlemisel käib punkt $A$ (joon. 137) teatava lühikese ajavälte $t$ jooksul tee $AC$. Selle tee võime lahutada kaheks komponendiks $AB$ ja $AD$. Esimest mööda liiguks keha ainult oma hoo tõttu *ühtlase* kiirusega $v$, nii et selle tee pikkus on

$$AB = v \,.\, t \qquad \text{(a)}$$

Teist $(BD)$ mööda liiguks keha siis, kui tal hoogu ei oleks, vaid kui ta hakkaks üksi sentripetaaljõu mõjul lähenema ringi sentrumile $(M)$. See liikumine sünnib konstantjõu mõjul; sellepärast on ta *ühtlaselt kiirendatud*. Annab sentripetaaljõud kiirenduse $p$, siis käib keha sama aja $t$ sees tee

$$AD = {}^1/_2 pt^2 \qquad \text{(b)}$$

Aja $t$ lüheduse tõttu võib pidada kaart $AC$ sirgjooneks. Geomeetria tuntud seaduse põhjal järgneb kolmnurgast $CAE$:

$$AD : AC = AC : AE$$

$$AD = \frac{AC^2}{AE} = \frac{AC^2}{2R}$$

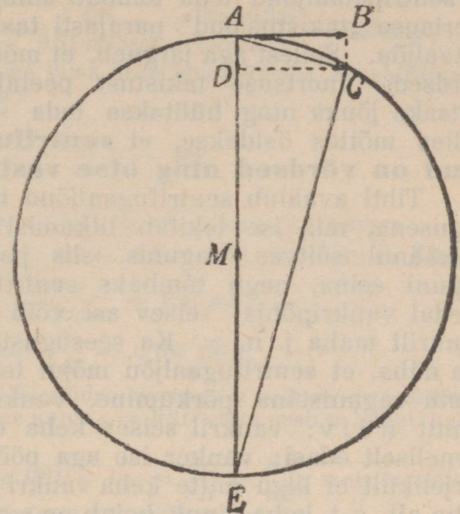
Punktide $A$ ja $C$ läheduse tõttu võib pidada $AC = AB$; siis saame eelmisest

$$AD = \frac{AB^2}{2R} \quad \text{(c)}$$

Võrrandite *(b)* ja *(c)* võrdlemisel leidub *(a)* abil:

$$^1/_2 pt^2 = \frac{v^2 \cdot t^2}{2R}$$

ehk:




Joon. 137.

s e n t r i p e t a a l k i i r e n d u s $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{R}}$ (83)

Nagu sentripetaaljõud ise, nii on ka tema kiirendus $p$ alati sihitud ringi sentrumi.

On tiirleval kehal mass $M$, siis võib sentripetaaljõud $C$ anda sellele kehale nimetatud kiirenduse $p$ ainult siis, kui jõu suurus on $C = Mp$ (formul 43). Eelmise formuli abil leiame sellest, et

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{Mv}^2}{\mathbf{R}} \quad (84)$$

s e n t r i p e t a a l j õ u d = $\dfrac{\text{m a s s} \times \text{k i i r u s e k v a d r a a t}}{\text{r i n g i r a a d i u s.}}$

Kui $v^2$ asemele panna tema väärtus $\omega^2 R^2$ (formul 80), siis saab eelmine formul järgmise kuju:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\omega^2\mathbf{R}. \quad (85)$$

Kulub kehal ühe täistiiru tegemiseks $T$ sec., siis on $vT = 2\pi R$, ehk $v = 2\pi R : T$; sellest järgneb, et

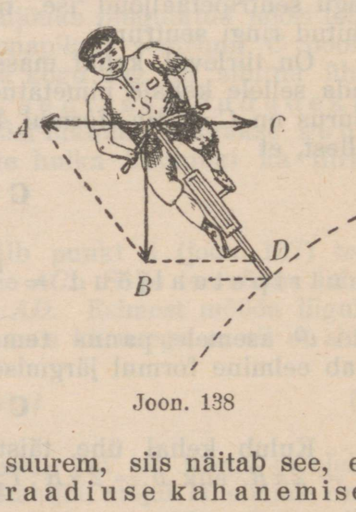
$$C = \frac{4\pi^2 RM}{T^2} \quad (86)$$

3) Nagu keha inertsus avaldab teatavat takistust kiiruse s u u r u s e muutmisel (§ 72), nii teeb ta seda ka kiiruse s i h i muutmisel. Seda takistust ehk vastumõju võib enesele ette kujutada uue j õ u n a, mis on sihitud otse mõjuva (sentripetaal-) jõu vastu.

Et tiirlev keha (joon. 136) ei lähene ringi sentrumile, olgugi et sentripetaaljõud teda tõmbab sinna, siis peab oletama, et inertsuse „takistusjõud“ parajasti tasakaalustab kogu sentripetaaljõu. Sellest aga järgneb, et mõlemad jõud peavad olema võrdsed. Inertsuse takistust peetakse ainult hõlbu pärast lihtsaks jõuks ning hüütakse teda sentrifugaaljõuks. Selles mõttes öeldakse, et **sentrifugaal- ja sentripetaaljõud on võrdsed ning otse vastupidi sihitud.**

Tihti avaldub sentrifugaaljõud tõelise jõuna, s. t. seesugusena, mis ise tekitab liikumist: seisame näiteks järsul teekäänul sõitvas vagunis, siis paiskub meie keha vastu vaguni seina, nagu tõmbaks sentrifugaaljõud teda liikuma; siledal vankripõhjal seisev asi võib järsul teekäänul lennata vankrilt maha j. n. e. Ka seesugustel juhustel ei ole raske ära näha, et sentrifugaaljõu mõjul tekkiv uus liikumine (keha vastu vaguniseina põrkumine, vankrilt mahapaiskumine) on ainult näiv: vankril seisev keha tahab ainult liikuda sirgjooneliselt edasi; vanker ise aga pöördub sirgjoonelt kõrvale. Järjelikult ei liigu mitte keha vankri pealt, vaid vanker liigub keha alt, s. t. keha ainult hoiab oma algliikumist alal, vanker aga muudab oma liikumist. Et liikumise alalhoidmiseks ei ole mingit jõudu tarvis, siis ei ole ka siin „sentrifugaaljõud“ harilik jõud; ta on järjelikult igal juhusel ainult liikumist alalhoidev inertsus.

Ringteel liikuva rattasõitja (joon. 138) peale mõjub sentrifugaaljõud *SC*, mis on sihitud piki tee raadiust ning mis tahab sõitjat kallutada paremale poole ümber. Et seda ära hoida, kallutab sõitja end ise pahemale poole: siis lahutub tema raskusjõud *SB* kaheks komponendiks *AS* ja *DS*, millest esimene tasakaalustab sentrifugaaljõu, teine aga hävineb tugipunkti *D* vastumõjul. Mida järsum on käänak ning mida kiirem sõit, seda enam kaldu hoidub sõitja. Et suuremal kaldumisel on ka komponent *AS* suurem, siis näitab see, et kiiruse tõusul ja tiirlemisraadiuse kahanemisel kasvab sentrifugaaljõud.



Joon. 138

**Näited:** 1) Ühe kilogrammi raskust keha tiirutatakse nööri otsas, mille pikkus on 0,5 *m*, nii et ta teeb igas sekundis 2 tiiru. Kui suur on sentripetaaljõud *C*?

Formuli (43a) järele on keha mass

$$M = \frac{Q}{g}$$

kus $Q = 1\ kg$ ning $g = 9{,}81\ m/sec^2$. Aeg $T = \frac{1}{2}\ sec$, raadius $R = 0{,}5\ m$
Seega on sentripetaaljõud

$$C = \frac{4\pi^2 RM}{T^2} = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{QR}{T^2} = \frac{4\pi^2}{9{,}81\ m/sec^2} \cdot \frac{1 kg \,.\, 0{,}5 m}{(1/2)^2 sec^2} = 8{,}054\ kg.$$

2) Mitu tiiru peaks tegema sama keha igas sekundis, et sentrifugaaljõud võrduks keha raskusjõuga?

Formuli (84) järele on

$$C = \frac{M \cdot v^2}{R} = Q = Mg$$

Sellest järgneb, et

$$v^2 = Rg \text{ ja } v = \sqrt{Rg} = \sqrt{9{,}81\ m/sec^2 \cdot 0{,}5 m} = 2{,}212\ m/sec.$$

Ühel tiirul on tee $2\pi R = 2 \cdot 0{,}5\ m \cdot 3{,}14 = 3{,}14\ m$; selleks kuulub aeg

$$T = \frac{3{,}14\ m}{2{,}212\ m/sec.} = 1{,}41\ sec.$$

Järjelikult teeb keha 1 sekundis $\frac{1}{1{,}41} = 0{,}704$ tiiru.

3) Jalgrattasõitja (joon. 138) sõidab kiirusega $v = 20\ m/sec$ teekäänul, mille raadius on $50\ m$. Kui suure nurga $\alpha = BSD$ võrra peab ta küljeti kallutuma, et jääda tasakaalu?

Joonistusest selgub, et $tg\ BSD = tg\alpha = \frac{BD}{SB} = \frac{SA}{SB}$; sentrifugaaljõud $SC$ peab võrduma raskusjõu horisontaalkomponendiga $SA$, s. t. $SA = SC = \frac{Mv^2}{R}$. Raskusjõnd $SB = P = M \cdot g$; tähendab

$$tg\alpha = \frac{SA}{SB} = \frac{Mv^2}{R} : Mg = \frac{v^2}{Rg} = \frac{(20\ m/sec)}{50\ m \cdot 9{,}81\ m/sec^2} = 0{,}815$$

ja nurk $\alpha$ on umbes 39.

4) Kui kiirelt tuleks visata horisontaal-sihis mingit keha selleks, et ta üldse ei langeks maa pinnale, vaid et ta hakkaks ümber maakera tiirlema. (Oletusel et õhutakistus on lõpmatu väike)?

Viske algkiirus peaks olema nii suur, et ümber maakera tiirlema hakkava keha sentrifugaaljõud $C$ oleks sama suur kui maakera külgetõmbejõudki (= keha kaal $Q$). Nii on siis

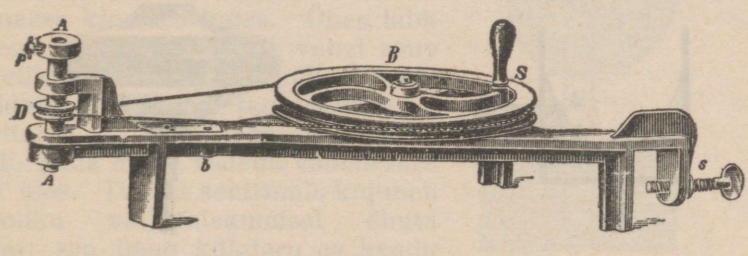
$$C = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{R} = Q, \text{ ehk } v = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81\ m/sec^2 \cdot 6370000\ m} = 7905\ m/sec,$$

sest maakera raadius on umbes $R = 6370000\ m$.

Nii kiirelt visatud keha jookseks ümber maakera aja sees

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 6370000\ m}{7905\ m/sec} = 5063\ sec \doteq 1 \text{ tund } 24\ min\ 32\ sec.$$

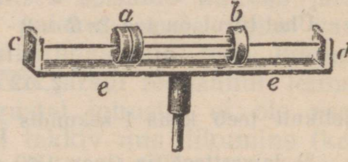
**§ 46. Sentrifugaalmasin; sentrifugaaljõu praktiline kasutamine.** 1) Sentrifugaalmasinat (joon. 139)




Joon. 139.

tarvitatakse kiirelt tiirlevate kehade omaduste tundmaõppimiseks ning eelmises § nimetatud seaduste katseliseks tõestamiseks. Keha, mida tahetakse panna tiirlema, kinnitatakse väikse ratta (*D*) võlli otsa *A*. Suure rihmaratta tiirutamisel hakkab väike ratas ning tema võllile kinnitatud keha väga kiirelt tiirlema.

Katsed: a) Joonistusel 140 kujutatud raamikese tiirlemisel paiskuvad traadil *cd* seisvad kehad *a* ja *b* harilikult kas ühele ehk teisele poole raami ääre, sest sentrifugaaljõud tõmbab neid võimalikult kaugele tiirlemisteljest. On kehad teineteisega näiteks niidi abil ühendatud, siis võib anda neile seesugune seis, et nad jäävad ka tiirlemisel oma koha peale seisma. Sel puhub peavad *a* ja *b* sentrifugaaljõud vastamisi tasakaalustuma. Katse näitab, et see sünnib neil juhustel, s. t. **sentrifugaaljõud on võrdsed siis, kui kehade massid** ($m_1$ ja $m_2$) **on umberpöördult proportsionaalsed tiirlemisraadiustega** ($r_1$ ja $r_2$).



Joon. 140.

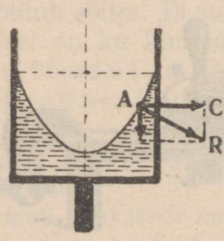
Sel juhusel on $m_1 : m_2 = r_2 : r_1$, ehk $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Sentrifugaaljõud on siis

$$C_1 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T^2} = C_2,$$

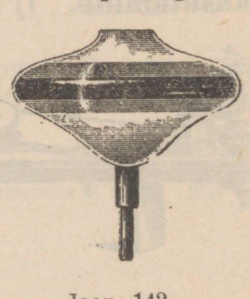
s. t. ta on mõlema keha juures tõepoolest ühesuurune.

Seame kehad **sümmeetriliselt** tiirlemistelje suhtes, siis paiskuvad mõlemad **raskema** keha (*a*) sihis raami ääre. **Ühesugustel tiirlemisraadiustel on suurema massiga kehal ka suurem sentrifugaaljõud.**

b) Kinnitatakse sentrifugaalmasina külge mingi vedelikuga täidetud silindernõu, siis tõuseb vedelik nõu seintel kõrgemale kui keskkohas (joon. 141): Vedelikutilga *A* peale mõjub sentrifugaaljõud *C*, mille survel vedelik tõstubki seina juures kõrgemale. (Raskus- ja sentrifugaaljõu resultant *R* peab olema perpendikulaarne vedeliku vaba pinnaga.)

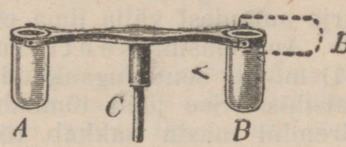


Joon. 141.


Joon. 142.

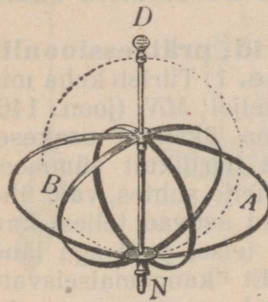
On nõus 2 vedelikku, millest üks raskem kui teine (vesi ja elavhõbe), siis kogub raskem vedelik nõu seina ääre, sest et temal on suurem mass ja suurem sentrifugaaljõud. Kui nõule anda joon. 142 näidatud kuju, siis tõuseb elavhõbe rõngana nõu kõigelaiemasse osasse. Sellel nähtusel põhjeneb koorelahutaja ehk separaatori töötamisviis: Et piim on raskem kui koor, siis kogub piim nõu seina ääre, kuna koor hoidub keskkohas, kust teda sellekohaste abinõudega võib lasta eraldi välja voolata.

c) Sarnane eelmisega on aparaat (joon. 143), mille abil võib selgitada segaseid vedelikke (sentrifuug): Nõud *A* ja *B* pöörduvad tiirlemisel horisontaalseisu; nendes oleva segase vedeliku raskemad osakesed — mingi kõva keha kübemed — paiskuvad nõupõhja, mille tõttu vedelik selgub, kuna kõva keha kübemed hoiduvad nõu põhjas.



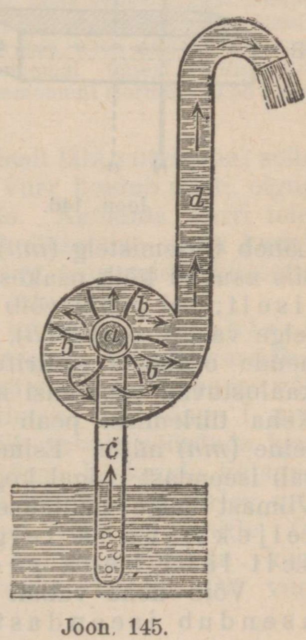
Joon. 143.

d) Vetruvad metallrõngad( joon. 144) painduvad tiirlemisel laperguseks, sest et kõigekaugemal seisvates punktides *A* ja *B* on sentrifugaaljõud kõigesuurem. See katse seletab, miks maakera on vähe lapergune: Et ta oli omal ajal vedelmass, siis võttis ta sentrifugaaljõu mõjul samasuguse kuju kui kirjeldatud rõngadki (rotatsioon-ellipsoiid).



Joon. 144.

2) Praktikas kasutatakse sentrifugaaljõudu väga mitmesuguste masinate juures: Sentrifugaalpumbas (joon. 145) tiirlevad labidad *b* trumlisarnases kinnises keres. Ühes labidatega tiirleb ka nende vahel asuv vedelik; tiirlemisel paiskub viimane labidate otsa kohal tangensiaalsihis püsttorru *d*. Seal tekib selle tõttu rõhk, mille mõjul vedelik voolab toru pidi üles. Trumli sentrumis kujuneb vedeliku väljapaiskumisel õhuta ruum; see imeb külgtoru *ca* kaudu uut vedelikku trumlisse, mis sealt



Joon. 145.

omakord paiskub torru *d* jne. Nii imeb pump *c* kaudu alatasa uut vedelikku ja surub tema toru *d* kaudu soovitava kõrguseni.

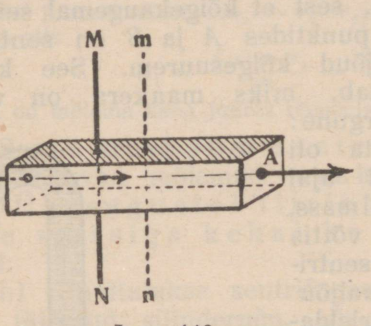
On sama trummel täidetud mingi gaasiga (õhuga), siis liiguvad gaasiosakesed samal kombel kui vedelikuosakesedki: Gaas tungib läbi külgavause *a* trumlisse ning paiskub sealt toru *d* kaudu suurema või väiksema rõhu all välja (sentrifugaalventilaator).

Märja pesu ja teiste kehade kuivatamiseks tarvitatakse sentrifuugi, milles märg keha tiirleb auguliste seintega trumlis: Vesi, kui raskem aine paiskub läbi seinaaukude välja.

Meevurris tiirlevad kärjed, mille juures mesi paiskub kärje aukudest välja ilma et kärg sellejuures vigastuks.

Aurumasina sentrifugaalregulaatori juures (joon. 331) mõjub sentrifugaaljõud raskete kerade *K* peale horisontaalsihis. See jõud tõmbab keri seda kõrgemale laiali, mida kiiremini masin hakkab tiirlema. Keradega ühendatud kangid tõstavad sellejuures auruklappi, nii et viimane sulub auru juurevoolu. Selle tagajärjel aeglastub masina käik, kerad langevad madalamale ning regulaator avab aurutoru uuesti.

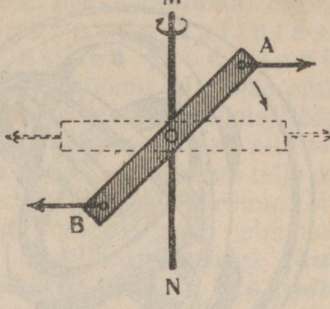
§ 47. **Tiirlemise vaba telg; vurrid; prätsessioonliikumine.** 1) Tiirleb keha mistahes teljel *MN* (joon. 146), siis tema üksikud osakesed ei seisa harilikult sümmeetriliselt telje suhtes, vaid ühel pool nad asuvad teljest kaugemal, teisel pool aga lähemal. Et kaugemalseisvatel osakestel on suurem sentrifugaaljõud (*A*) kui lähemalseisvatel (*B*), siis ei tasakaalustu need jõud, vaid *A* tõmbad kogu keha küljeti edasi.



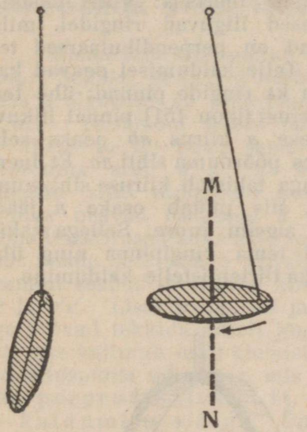
Joon. 146.

Läheb tiirlemistelg (*mn*) aga otse läbi keha raskuspunkti, siis asuvad kõik osakesed mõlemalpool telge sümmeetriliselt; sel puhul võib leida iga osakese (*A*) jaoks teiselpool telge vastav osake (*B*), mis seisab samakaugel kui esimenegi; nende osakeste sentrifugaaljõud on siis võrdsed; nad tasakaalustuvad vastamisi ning ei avalda telje peale mingit mõju. Keha tiirlemisel peab esimene telg (*MN*) järjelikult liikuma, teine (*mn*) mitte. Esimest peaksime hoidma paigal, teine seisab iseendast paigal koguni siis, kui ta oleks täiesti vaba. Viimast telge hüütakse sellepärast tiirlemise vabaks teljeks: Vaba telg peab minema sümmeetriliselt läbi keha raskuspunkti.

Võib keha vabalt pöörduda oma tiirlemisteljel, siis ta asendub iseendast seesugusse seisu, et tiirlem i s t e l g k u j u n e k s v a b a k s. Seisab näiteks prisma $AB$ (joon. 147) tiirlemistelje $MN$ suhtes k a l d u, siis pööravad sentrifugaaljõud teda seni, kuni ta hoidub perpendikulaarselt (sümmeetriliselt) teljega. Riputame metallrõnga või-ketta (joon. 148a) selkombel niidi otsa, et rõngas hoiduks k a l d u, siis näeme, et niidi tiirutamisel rõngas tõuseb h o r i s o n t a a l s e i s u (joon. 148b), nii et tiirlemine sünnib telje $MN$ ümber, mis hoidub täitsa vabalt ühe ja sama koha peal ning mille ümber tiirleb ka niit ise. Niit võiks seista paigal (s. t. olla v a b a k s teljeks) ainult sel juhusel, kui ta läheks läbi rõnga raskuspunkti.



Joon. 147.

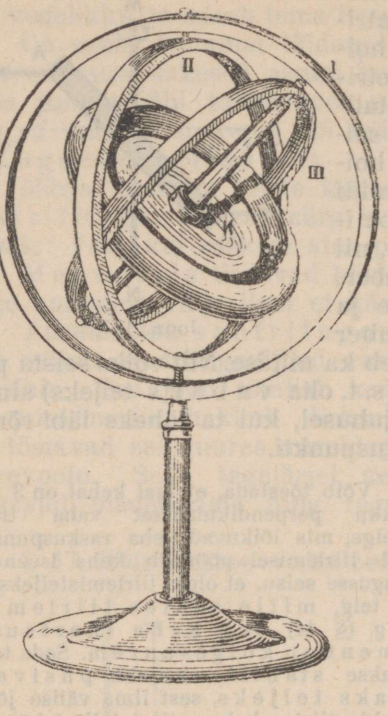


Joon. 148a. Joon. 148b.

Võib tõestada, et igal kehal on 3 vastastikku perpendikulaarset vaba tiirlemistelge, mis lõikuvad keha raskuspunktis. Kiirel tiirlemisel pöördub keha iseendast seesugusse seisu, et oleks tiirlemisteljeks see vaba telg, m i l l e s u h t e s t i i r l e m i s e h o o g (§ 44) e h k k e h a i n e r t s u s e m o m e n t o n k õ i g e s u u r e m. Seda telge hüütakse s t a b i i l s e k s ehk p ü s i v a k s v a b a k s t e l j e k s, sest ilma välise jõuta ei kaldu tiirlev keha sellest teljest kõrvale. Telg $MN$ (joon. 148) on näiteks rõnga stabiilne vaba telg, sest tema suhtes on rõnga mass kõigekaugemal teljest, mille tõttu rõnga inertsusemoment (formul 82) on kõigesuurem.

2) V u r r i telg läheb sümmeetriliselt läbi vurrikeha; sellepärast on ta vaba. Tiirlema pandud vurr hoidub püsti, olgugi et tugipuntiks on ainult telje terav ots. Katsume vurri telge kallutada, siis tunneme, et ta avaldab kallutamise vastu kaunis tuntavat takistust; mida raskem on vurr ning mida kiiremini ta tiirleb, seda suurem on nimetatud takistus.

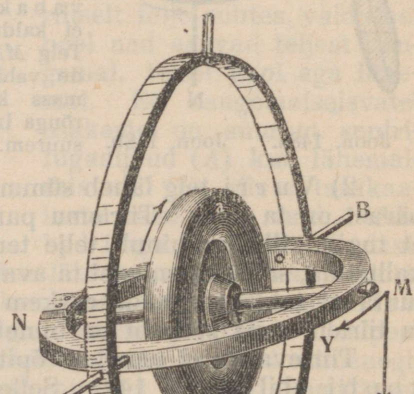
Tiirleva vurri omadusi õpitakse tundma n. n. z h i r o s k o o b i abil (joon. 149). Selles aparaadis toetub vurri telg laagritesse, mis kinnitatud rõnga III külge; see rõngas ise võib pöörduda suurema rõnga II sees, viimane aga rõnga I sees. Selkombel ülesriputatud vurri telg võib vabalt pöörduda igale poole (võrdle § $35_2$, laevakompass). Rõnga III kaudu katsume kallutada vurri telge üles või alla: tunneme et tiirlev vurr takkistab seda liikumist, paigalseisev vurr aga mitte. On vurr pandud tiirlema, siis võib kuitahes pöörda kogu aparaati, ilma et vurri telg pöörduks kaasa: Oli vurri teljel tiirlemise algul näitkee põhja-lõuna siht, siis hoidub ta iseendast samas sihis ka aparaadi pöördumisel ning avaldab koguni takistust igasuguse sihimuutmise vastu. (Takistust ei tundu ainult seesugusel liikumisel, millel vurri telg liigub p a r a l l e e l s e l t endaga). Kõigest sellest näeme, et **kiirelt tiirleva keha vaba telg püüab hoida oma algsihti muutumatult alal.**



Joon. 149.

Ka selle nähtuse põhjuseks on keha inertsus: Vurri üksikud osakesed liiguvad ringidel, mille pinnad on perpendikulaarsed teljega. Telje kaldumisel peavad kalduma ka ringide pinnad; ühe teatava ringi (joon. 151) pinnal liikuva osakese *a* kiirus *ab* peaks selle juures pöörduma sihti *ac*. Et inertsus aga takistab kiiruse sihi muutmist, siis püüab osake *a* jääda oma algsihi juure. Sellega takistubki tema ringipinna ning ühtlasi ka tiirlemistelje kaldumine.

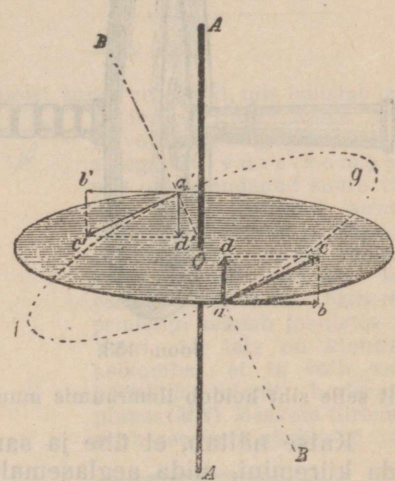
3) Seame vurri telje (joon. 149 ja 150) horisontaalseisu ning anname telje otsa *M* pihta ülevalt alla sihitud hoobi (sihis *Z*): näeme, et telje ots ei kaldu hoobi sihis alla, vaid ta pöördub horisontaalpinnas ettepoole (sihis *Y*): Telg kaldub nii siis mitte jõu *Z* enese sihis, vaid p e r p e n d i k u l a a r s e l t viimasega. Oli hoop küllalt tugev, siis võib vurritelg pöörduda kuni *AB*; sellejuures pöördub vurrikeha tagumine serv punkti *M*, s. t. hoobi mõjumise kohta. Nagu tiirlemissihist näha, liigub see serv ülevalt alla, nii siis otse hoobi *z* sihis. Kui hoobi mõju



Joon. 150.

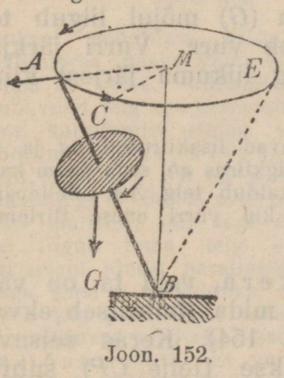
kestaks veel edasi, siis kiirendaks ta ainult vurri tiirlemist, ilma et seisu $AB$ jõudnud telg peaks kalduma. Sellest selgub, et telg püüab nagu vabaneda kallutava jõu mõjust, pöördudes nii, et see jõud ainult kiirendaks tema tiirlemist. Lööme telje otsa pihta alt-üles, siis pöördub teljeots horisontaalpinnas tahapoole; löögi kohale pöördub siis vurrikeha eesserv, mis ise tiirleb alt-üles, s. t. ka löögi sihis. Tõmbame telje otsa sihis $Y$, siis kaldub telje ots vertikaalselt üles j. n. e. Paneme vurri vastupidi tiirlema, siis kaldub telje ots samade löökide mõjul otse vastupidi eelmisele. Nendest katsetest järgneb seadus: **Kallutab mingi jõud tiirleva keha vaba telge, siis pöördub telje ots selle jõu alt perpendikulaarselt kõrvale ja nimelt selkombel, et peale telje pöördumist see jõud võiks ainult kiirendada keha tiirlemist.**

Elementaarselt seletub see nähtus kiiruste parallelogrammi seaduse abil: Selleks, et telg $A$ võiks kalduda sihti $B$ (joon. 151),peab tiirleva osakese $a$ algkiirus $ab$ pöörduma sihti $ac$. Teiselpool seisva osakese $a'$ kiirus ($a'$ $b'$) peab samal ajal pöörduma sihti $a'$ $c'$. Et muuta kiiruste sihti nimetatud kombel, selleks peavad osakesed $a$ ja $a'$ sama lisakiirused $ad$ ja $a'd'$, sest ainult nende abil annab parallelogrammi seadus tarvilikud kiirused $ac$ ja $a'c'$. Lisakiirused $ad$ ja $a'd'$ aga võivad tekkida ainult jõu mõjul, mis kallutab telje ülemist otsa joonistuspinna taha, s t. mis mõjub perpendikulaarselt telje kaldumise sihiga. Ümberpöördult järgnebki sellest, et kallutava jõu mõjul pöördub vurri telg perpendikulaarselt jõu sihiga.



Joon. 151.

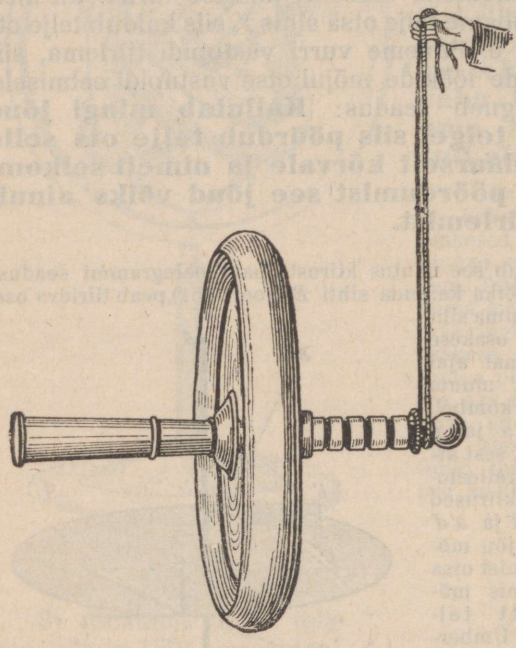
Nagu kiiruste parallelogrammist näha, peab $ad$ olema seda suurem, mida suurem on $ab$: Kallutamiseks kulub seda tugevam jõud, mida kiiremini tiirleb keha.



Joon. 152.

4) Eelmise seadusega seletub järgmine nähtus: Kui tiirleva vurri telge $AB$ (joon. 152) tõmmata kaldu, siis hakkab telg ise tiirlema koonuse $BAE$ pinda mööda. Me võime kallutada vurri telje koguni horisontaalseisuni (võime telje siduda näiteks nööri

otsa, joon. 153); ka siis ei kaldu telg sootumaks alla, vaid ta tiirleb horisontaalpinnas ümber oma tugipunkti. Telje seesugust liikumist hüütakse prätsessioonliikumiseks. Tema tekib kahe teguri mõjul: üks nendest on keha raskusjõud *G*, mis püüab kallutada telge *AB* (joon. 152) tugipunkti *B* ümber, teine on vaba telje tung hoida oma sihti alal. Raskusjõud *G* kallutab telge komponendiga *A* mis mõjub raadiuse *MA* sihis; telg ei kaldu aga selle jõu enese sihis, vaid telje ots liigub perpendikulaarselt jõuga, s. t. sisis *AC*. Järgmises punktis *C* püüab raskusjõud kallutada telge sihis *MC*; selle tõttu liigub telje ots perpendikulaarselt *MC*-ga j. n. e. Et raskusjõud mõjub kogu aeg telje peale, siis peab telje ülemine ots liikuma ringjoonel *ACE*.



Joon. 153.

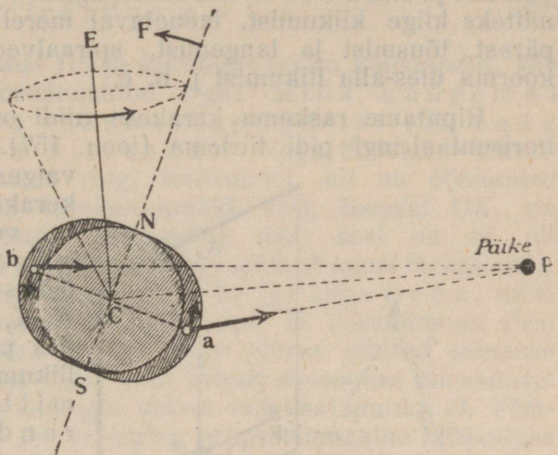
Õieti ei või nii siis rääkida vaba tiirlemistelje sihi alalhoidmisest, vaid ainult prätsessionliikumise telje (*BM*, joon. 152) omast, sest ainult selle siht hoidub ilmaruumis muutumatult alal.

Katse näitab, et ühe ja sama jõu (*G*) mõjul liigub telg seda kiiremini, mida aeglasemalt tiirleb vurr. Vurri järkjärgulisel aeglastumisel hakkab tema telg liikuma järjest kiiremini koonuspinda mööda.

Ühe ja sama kallutava jõu mõjul hoiduvad lisakiirused *ad* ja *a′d′* (joon. 151) ühesuurustena. Mida väiksem on algkiirus *ab*, seda enam kaldu pöördub siis *ac*, s. t. seda kiiremini kaldub telg *AA*. Sellepärast peabki ka prätsessioonliikumine kiirenema, kui vurri enese tiirlemine aeglastub.

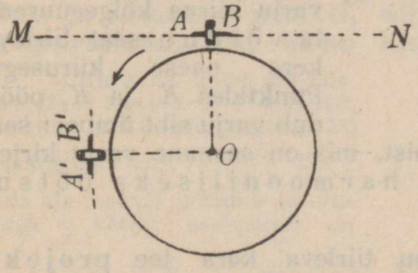
5) Maakera pole korrapärane kera, vaid ta on vähe lapergune; teda võib pidada keraks, mida ümbritseb ekvaatori kohal vöösarnane rõngas (joon. 154). Keras seisavad kõik punktid sümmeetriliselt päikse (telje *CP*) suhtes, nimetatud vöös aga mitte. Selle tõttu tahab punkt *a*, mis tõmbub tugevamini päikse külge kui punkt *b*, pöörduda

ülespoole; päikse külgetõmbumise mõjul tekib nii siis jõud *F*, mis pöörab maatelge *(SN)* sihi *EC* poole. Selle kallutava jõu mõjul kujuneb prätsessioonliikumine, millel maatelg hakkab tiirlema koonuspinda mööda ümber *EC*. Üheks täistiiruks kulub teljel ligi 25800 aastat.



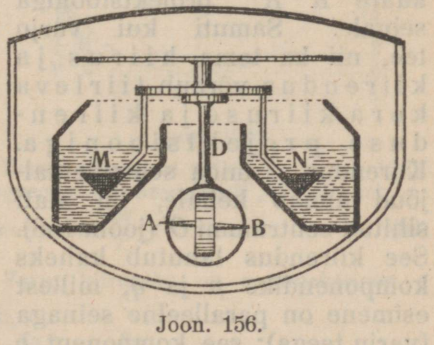

Joon. 154.

6) Igapäevases elus kasutatakse vurri väga mitmeti: Kavatsetakse ehitada näiteks üheroopalist raudteed, mille vagunite ümberkaldumist peab takistama raske vurr, mis tiirleb vagunis. On katsutud vähendada laeva õõtsumist suure vurri abil, mis takistab laeva kaldumist j.n.e. Kõige uuem ja, võib olla, kõige suurema tähtsusega on vurr-kompass, mis on omandanud suure tähtsuse rauast ehitatud laevadel, veealustel paatidel ja kõigil neil juhustel, kus suured rauamassid segavad hariliku kompassi õietinäitamist. Selle riista printsiipi seletab joonistus 155: Vurri *AB* telg on kinnitatud selkombel. et ta võib vabalt pöörduda ainult horisontaalpinnas (*MN*). Maakera tiirlemisel peab see vurr näiteks 6 tunni




Joon. 155.

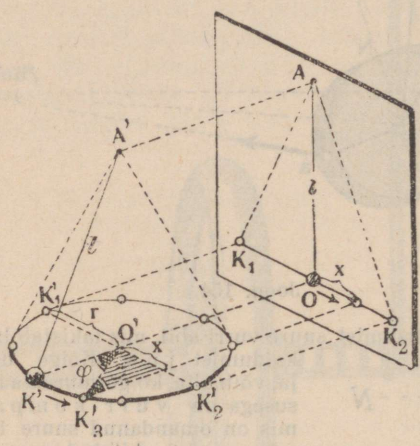
jooksul pöörduma seisu *A'B'*; sellejuures peaks vurri telg kalduma 90° võrra. Kaldumisel pöördub vurri telg aga perpendikulaarselt kallutamise sihiga, s. t. ta pöördub horisontaalpinnal seni, kuni telg *AB* on paralleelne maateljega 0. Selles sihis hoidubki vurr alaliselt, sest maa tiirlemisel liigub tema telg seesugusel seisul ainult paralleelselt endaga, ilma et ta kalduks. On aga vurri telg paralleelne maateljega, siis näitavad vurritelje otsad põhja-lõuna sihti. Et vurri telg *AB* (joon. 156) hoiduks horisontaalpinnal, selleks kinnitatakse ta varva D kaudu elavhõbedas ujuva rõnga *NM* külge, mis jääb alati horisontaalseks.




Joon. 156.

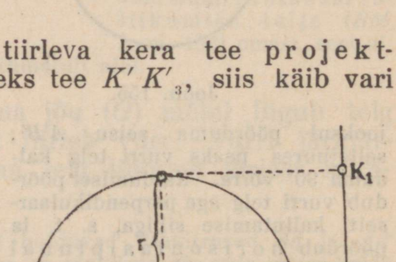
§ 48. **Harmooniline õõtsumine.** 1) Õ õ t s u m i s e k s hüütakse üldse iga liikumist, millel keha liigub korduvalt üht ja sama teed mööda edasi-tagasi. Õõtsumiseks loetakse näiteks kiige kiikumist, laenetaval merel seisva laeva korrapärast tõusmist ja langemist, spiraalvedru otsas rippuva koorma üles-alla liikumist j. n. e.

Riputame raskema kerakese niidi otsa ning tõukame ta horisontaalringi pidi tiirlema (joon. 157). Kui horisontaalne valgusjuga langeb küljeti kerakese peale, siis heidab ta vertikaalsele seinale (ehk ekraanile) varju, mis õ õ t s u b piki sirgjoont $K_1 K_2$ edasi-tagasi. Algades punktist $K_2$ on varju liikumine teeosal $K_2 O$ m i t t e ü h t l a s e l t k i i r e n d a t u d, teeosal $OK_1$ aga samal kombel a e g l a s t a t u d. N. n. t a s a k a a l u p u n k t i s $O$ on varju kiirus kõigesuurem: ta v õ r d u b seal tiirleva kera enese kiirusega. Punktides $K_1$ ja $K_2$ pöördub varju siht ümber: seal on tema kiirus null. Õõtsumist, mis on sarnane varju kirjeldatud liikumisega, hüütakse h a r m o o n i l i s e k s õ õ t s u m i s e k s.



Joon. 157.

2) Varju liikumistee on tiirleva kera tee p r o j e k t s i o o n seinale. Käib kera näiteks tee $K' K'_3$, siis käib vari samal ajal tee $x$, mis võrdub kaare $K' K'_3$ projektsiooniga seinale. Samuti kui varju tee, nii ka tema k i i r u s j a k i i r e n d u s võrdub t i i r l e v a k e r a k i i r u s e j a k i i r e n d u s e p r o j e k t s i o o n i g a. Kiirendus $\gamma$, mida sentripetaaljõud annab kehale, on alati sihitud sentrummi $O'$ (joon. 158). See kiirendus lahutub kaheks komponendiks $p$ ja $q$, millest esimene on paralleelne seinaga (varju teega); see komponent $p$ kujutabki järjelikult varju kiirendust sel silmapilgul, kui vari



Joon. 158.

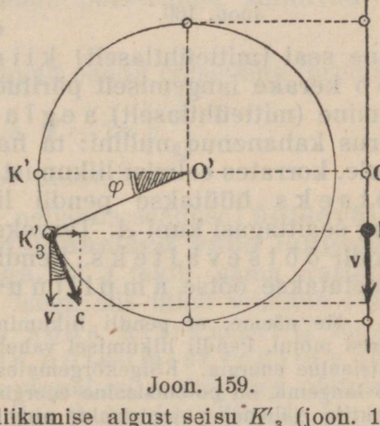
seisab kaugusel $x$ oma tasakaalupunktist $O$. Kolmnurgast $K'_3O'a$ järgneb, et $p : x = \gamma : r$, ehk varju

$$\text{kiirendus } p = \frac{\gamma}{r} . x \qquad (87)$$

Kuna tiirlemise raadius $(r)$ ja kiirendus $(\gamma)$ on konstandid, siis peab olema $p$ proportsionaalne $x$-ga: Mida kaugemal seisab vari oma tasakaalupunktist $(O)$, seda suurem on tema kiirendus. Nagu tiirlemise kiirendus $(\gamma)$ on alati sihitud ringi sentrummi, nii on õõtsumise kiirendus $(p)$ sihitud tasakaalupunkti $(O)$; teeosal $OK_1$ on kiirendusel $p$ järjelikult vastupidine siht: seal on ta nii siis aeglastuseks, mille suuruse määrab sama formul (87).

Nagu vari, nii liiguks teel $K_1K_2$ ka iga teine keha, mille kiirendus muutub samuti kui varju oma. Et kiirendus on alati sihitud tasakaalupunkti $O$, siis peas olema sihitud samasse punkti ka see jõud, mis võiks anda kehale seesuguse kiirenduse: Keha peaks tõmbuma igas seisus tasakaalupunkti $O$. Tõmbava jõu suurus aga peaks olema proportsionaalne kiirenduse suurusega, s. t. ta peaks muutuma formuli (87) järele. Sellest järgneb, et **harmooniline õõtsumine kujuneb sel juhusel, kui keha peale mõjub jõud, mis on alaliselt sihitud ühte ja samasse punkti, ning mille suurus muutub proportsionaalselt keha kaugusega sellest punktist.**

3) Kui kehal kulub ühe täistiiru $(2\pi r)$ tegemiseks $T$ sekundit, siis kulub tal kaare $K'K'_3$ (joon. 158) ärakäimiseks aeg $t = \frac{T}{2\pi r} K'K'_3$. Selle aja jooksul pöördub raadius nurga $\varphi$ võrra; sellepärast on $K'K'_3 = r\varphi$, ning $t = \frac{T}{2\pi r} . r\varphi$, millest järgneb, et aja $t$ jooksul pöördub raadius nurga $\varphi = \frac{2\pi}{T} . t$ võrra. Loeme tiirlemise alguseks $(t = o)$ näiteks punkti $K'$, siis annab see formul iga soovitud silmapilgu $(t)$ jaoks selle nurga suuruse, milleni raadius pöördub nimetatud silmapilguks.



Joon. 159.

Jõudku kera $t$ sekundit peale liikumise algust seisu $K'_3$ (joon. 158); samal silmapilgul seisab tema vari kaugusel $x$. Kolmnurgast $K'_3O'a$ järgneb, e

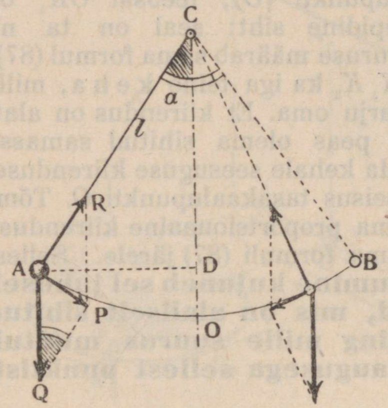
$$x = r . \sin \varphi = r . \sin \frac{2\pi}{T} . t \quad . . . . . . . \quad (88)$$

Kera ringkiirus on $c = \frac{2\pi r}{T}$. Varju kiiruseks on $c$ projektsioon $v$ (joon. 159). Kolmnurgast $K'_3\ cv$ leidub, et

$$v = c . \cos \varphi = \frac{2\pi r}{T} . \cos \frac{2\pi}{T} . t \quad . . . . . . \quad (89)$$

Need 2 formulit määravad harmoonilise õõtsumise tee $(x)$ ja kiiruse $(v)$ igal silmapilgul $(t)$ peale liikumise algust.

§ 49. **Pendel ja tema õõtsumine.** 1) F ü ü s i l i s e k s p e n d l i k s hüütakse üldse iga keha, mis võib pöörduda (õõtsuda) mingi telje ümber edasi-tagasi Harilikult mõistetakse füüsilise pendli all otsapidi ülesriputatud varba või nööri, mille alumises otsas ripub raskem koorem. On see koorem oma ruumala poolest küllalt väike ja on varb (nöör) küllalt kerge, siis võib ette kujutada, et kogu pendli mass on koondatud tema koorma raskuspunkti. Niisugusel puhul saame kaaluta sirgjoone, mis võib pöörduda ühe punkti ümber ning mille otsas ripub raske (s. t. teatava massiga) punkt; seesugust pendlit hüütakse m a t e m a a t i l i s e k s p e n d l i k s. Viimasega on õige sarnane väike metallkerake, mis ripub peene niidi otsas (joon. 160). Niidi pikkust $CA$ hüütakse p e n d l i p i k k u s e k s ($l$); ülesriputamispunkti $C$ läbi sihitud vertikaaljoont nimetatakse pendli t a s a k a a l u s e i s u k s.




Joon. 160.

Tõukame pendli liikuma, siis õ õ t s u b ta piki kaart $AB$ pikemat aega edasi-tagasi. Teeosal $AO$ l a n g e b kerake madalamale, sellepärast on liikumine seal (mitteühtlaselt) k i i r e n d a t u d; teeosal $OB$ t õ u s e b kerake langemiselt päritud hooga, sellepärast on see liikumine (mitteühtlaselt) a e g l a s t a t u d. Punktis $B$ on kera kiirus kahanenud nullini: ta hakkab sealt langema tagasi $O$ poole, korrates eelmist liikumist ümberpöördud sihis. T e r v e k s õ õ t s e k s hüütakse pendli liikumist punktist $A$ punktini $B$ ning sealttagasi kuni $A$. Terveks õõtseks kuluvat aega hüütakse pendli õ õ t s e v ä l t e k s. Pendli äärmiste seisude ulatust $AB$ nimetatakse õõtse a m p l i t u u d i k s.

Me näeme, et pendli liikumine sünnib kahe teguri: raskusjõu ja inertsi mõjul. Pendli liikumisel vahelduvad alatasa tema kineetiline ja potentsiaalne energia. Kõigekõrgemates punktides $A$ ja $B$, kust pendel hakkab langema, on potentsiaalne energia kõigesuurem. Lähenemisel tasakaalupunktile väheneb potentsiaalne ning kasvab kineetiline energia (= hoog). Vertikaalil $CO$ on potentsiaalne energia 0, sest et pendel ei saa langeda veel madalamale, sellevastu on aga tema kineetiline energia seal kõigesuurem. Igas punktis jääb mõlema energia summa konstandiks; ta võib aja jooksul kuluda ainult hõõrumise ja teiste kaotuste tõttu.

2) Punktis $A$ (joon. 160) lahutub pendlikera raskusjõud $Q$ komponentideks $P$ ja $R$. Viimane hävineb niidi vastumõjul; jääb järele ainult $P$, mis mõjub kaare riivasjoone sihis ning mis tõmbab keha kaart $AO$ pidi liikuma. Selle jõu suurus oleneb kerakese asukohast: kolmnurkad $APQ$ ja $ACD$ sarnadu-

sest järgneb, et $P : Q = AD : AC$; kui pendel kaldub omast tasakaaluseisust ainult väikse nurga $\varkappa$ võrra, siis ilma tuntava veata võib pingjoone $AD$ asemele panna kaar $AO$; sel puhul leiame eelmisest proportsioonist, et

$$P = \frac{Q}{l} \cdot AO$$

$Q$ ja $l$ on konstandid; $AO$ kujutab kerakese kaugust ($x$) tema tasakaaluseisust ($O$); järjelikult näitab see formul et liikumist tekitav jõud $P$ on proportsionaalne kerakese kaugusega $x$. Eelmise § põhjal selgub sellest, et ka **pendli liikumine on harmooniline õõtsumine.**

3) Pendli õõtsumise kohta leidis Galilei (1602) järgmised seadused, mida tõestavad katsed:

a) **Pendli õõtsevälde ei olene tema koorma massist ega ainest:** Katse näitab, et kõik ühepikkused pendlid õõtsuvad tõepoolest ühekiiruselt, vaatamata selle peale, kas on nende mass suur või väike.

b) **Õõtsevälde ei olene amplituudi suurusest**, kui kaldumisnurk ($\varkappa$) on väike (mitte üle $5^0$): Kuigi pendli amplituud kahaneb hõõrumise tõttu, võib panna tähele, et õtsevälde jääb kuni lõpuni ühesuuruseks.

c) **Õõtsevälted on proportsionaalsed pendlipikkuste kvadraatjuurtega:** On pendlipikkused näiteks 4, 9, 16 ja 25 *cm*, siis leiame, et nende õõtsevälted suhtuvad kui $2:3:4:5 = \sqrt{4} : \sqrt{9} : \sqrt{16} : \sqrt{25}$.

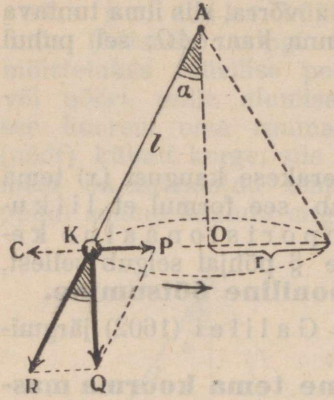
Kõik kolm seadust avalduvad pendli õõtsevälte formuliga:

$$\text{õõtsevälde } \boldsymbol{T} = 2\pi \sqrt{\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{g}}} \qquad (90)$$

kus $g$ tähendab vaba langemise kiirendust.

Sama formul annab veel neljanda seaduse: **õõtsevälted on ümberpöördult proportsionaalsed vaba langemise kiirenduse kvadraatjuurega.** Et $g$ tekib sama raskusjõu mõjul kui pendli õõtsumine isegi, siis ütleb viimane seadus ka, et õõtsumine sünnib seda kiiremini ($T$ on seda väiksem), mida suurem on õõtsumist tekitav jõud (= mida suurem on $g$). Päikse pinnal on raskusjõud näiteks 28 korda suurem, kuu pinnal on ta 6 korda väiksem kui maa peal. Üks ja sama pendel õõtsub sellepärast päikse peal umbes 5 korda kiiremini, kuu peal aga umbes $2^1/_2$ ($= \sqrt{6}$) korda aeglasemalt kui maa pinnal.

Pendli formuli tuletus: Kujutame enesele ette, et seina külge on kinnitatud pendel, mille pikkus $AK_1 = l$ võrdub seina ees tiirleva kerakese $K'$ niidi pikkusega (joon. 157). On see pendel küllalt pikk, siis võib pidada sirgjoont $K_1 K_2$ tema liikumisteeks. Et pendli õõtsumine on harmooniline, siis peab ta liikuma täpilt samuti kui tiirleva kerakese vari. Tema õõtsevälde $T$ võrdub järjelikult varju omaga; see aga võrdub ajaga, mis kerakesel kulub ühe täistiiru tegemiseks. Nii võrdub siis pendli õõtsevälde samapikga niidi otsas tiirleva kerakese (koonus-pendli) täistiiru ajaga (joon. 161).



Joon. 161.

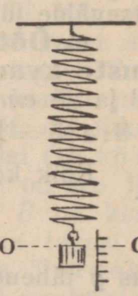
Kerakese $K$ tiirlemisel mõjub sentrifugaaljõud $C=\frac{4\pi_2\, rM}{T_2}$ (formul 86). Et kerake ei kaugene sentrumist O, siis peab sentrifugaal-jõud tasakaalustuma raskuse $Q$ komponendiga $P$, mis on sihitud radiaalselt otse $C$ vastu. Kolmnurkade $KAO$ ja $RKQ$ sarnadusest järgneb, et $P:Q=KO:AO$. Väikse kaldumisnurga $\alpha$ juures võib teha $AO=AK=l$; kui pidada silmas, et $KO=r$ ning $Q=Mg$ (formul 43a), siis järgneb eelmisest proportsioonist:

$$P=Q\cdot\frac{r}{l}=Mg\cdot\frac{r}{l}=C=\frac{4\pi^2 rM}{T^2}$$

Sellest leidubki, et üheks säistiiruks kuluv aeg ning ühtlasi ka pendli õõtsevälde on

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

4) Ka spiraalvedru otsas rippuva koorma üles-alla õõtsumine on harmooniline: Vedru tõmbejõud kasvab nimelt proportsionaalselt tema pikenemisega; on vedru otsas rippuv koorem tasakaalus näiteks seisul $O$ (joon. 162), siis kasvab vedru tõmbejõud koorma langemisel ja nimelt iga millimeetri juures ikka ühe ja sama suuruse võrra; see aga tähendab, et tõmbejõud on proportsionaalne vedruotsa kaugusega tema tasakaaluseisust $O$. Niisuguse jõu mõjul aga tekibki harmooniline õõtsumine (mille tasakaalupunktiks on $O$).



Joon. 162.

Harmoonilisel õõtsumisel leidsime (§ $48_2$), et tasakaalupunktist kaugusel $x$ seisva keha kiirendus on $p=\gamma x:r$ (formul 87). Sentripetaalkiirendus $\gamma$ on formuli (83) järele $\gamma=c^2/r$; järjelikult on

$$p=\frac{c^2}{r^2}\cdot x$$

Korrutame mõlemad pooled õõtsuva keha massiga $M$:

$$Mp=\frac{Mc^2}{r^2}\cdot x$$

siis kujutab pahem pool ($Mp$) õõtsumise tõmbejõudu, mis peab olema proportsionaalne kaugusega $x$. Kaugusel 1 $cm$ tasakaaluseisust ($x=1$) on sellel jõul väärtus

$$\frac{Mc^2}{r^2}\times 1=K$$

$K$ tähendab järjelikult selle jõu (konstant) suurust, millega õõtsuv keha tõmbub oma tasakaaluseisu poole, kui ta viibib ühe sentrimeetri kaugusel viimasest.

$c$ on raadiusega $r$ tiirleva keha kiirus, s. t. $c=\frac{2\pi r}{T}$, kus $T$ on täistiiruks kuluv aeg ehk harmoonilise õõtsumise õõtsevälde. Selle abil saame eelmisest formulist

$$\frac{M}{r^2}\cdot\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}=K$$

ehk

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \qquad (91)$$

Spiraalvedru puhul on $K$ see jõud, millega tõmbub vedru ots üles, kui teda venitada välja 1 *cm* võrra. Teda võib mõõta selle koorma raskusega, mis tuleb riputada vedru otsa selleks, et vedru pikeneks 1 *cm* võrra. $M$ on vedru otsas õõtsuva keha mass. Kui $K$ ja $M$ on tuntud, siis annab leitud formul õõtsevälte $T$. Formul ütleb, et õõtsumine sünnib seda kiiremini ($T$ on seda väiksem), mida suurem on jõud ning mida väiksem mass.

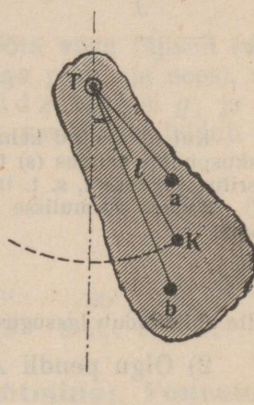
**Näide:** 15 $g$ mõjul tõmbub vedru ots 1 *cm* võrra madalamale. Kui suur on vedru otsa riputatud keha õõtsevälde, kui tema mass on 150 $g$?

Jõud $K$ on $15\,g = 15 \,.\, 981$ *düüni* $\cong 15000$ *düüni*. Seega on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{150}{15000}} = 0{,}628 \text{ sec.}$$

## § 50. Füüsilise pendli õõtsumiskeskpunkt; reversioonpendel.

1) Kui ette kujutada, et õõtsuva keha üksikud osakesed $a$, $b$ j. n. e. võivad iseseisvalt liikuga ja et nad eraldi niitide kaudu on ühendatud keha õõtsumisteljega $T$ (joon. 163), siis õõtsuksid pikema niidiga, s. t. madalamad osakesed teadagi aeglasemalt kui kõrgemad osakesed. Tõeliselt aga on kõik osakesed seotud üks-teisega, nii et nad võivad õõtsuda ainult koos, s. t. ühekiiruselt. Keha ülemised osakesed kiirendavad sellejuures alumiste osakeste õõtsumist, kuna viimased aeglastavad ülemiste osakeste oma. Sarnasel puhul võime leida niisuguse kehaosakese $K$ (joon. 163), mille liikumist kõik ülemised osakesed kiirendavad samapalju kui palju teda aeglastavad alumised osakesed. Kogu keha õõtsumisel liigub see osake järjelikult nii, nagu seisaks ta täiesti iseseisvalt ja lahus teistest osakestest. Tema õõtsevälte määrab matemaatilise pendli jaoks leitud formul (90). Niisugust punkti hüütakse pendli õõtsumiskeskpunktiks; tema kaugust $l$ õõtsumisteljest T nimetatakse füüsilise pendli pikkuseks ehk pendli redutseeritud pikkuseks. Keha õõtsub nii siis samakiirelt kui $l$ pikkune matemaatiline pendelgi.



Joon. 163.

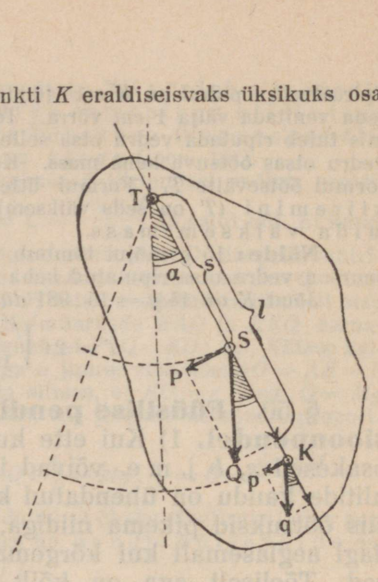
Füüsilist pendlit võib pidada kehaks, mis pöördub tugipunkti $T$ suhtes mitteühtlase nurkkiirusega. Pöördumise nurkkiirendus peab § $44_3$ põhjal igal silmapilgul võrduma suurusega

$$\vartheta = \frac{\text{pöördemoment}}{\text{inertsusmoment}} = \frac{\mathfrak{M}}{J}$$

Olgu keha kogu mass $M$ koondatud tema raskuspunkti $S$, mille kaugus tugipunktist on $TS = s$ (joon. 164). Sel juhusel pöördub keha raskusjõu komponendiga $P = Q \,.\, sin\, \alpha$, mille õlg on $s$. Pöördemoment on $\mathfrak{M} = P \times s = Q \,.\, sin\, \alpha \times s = Mg \,.\, sin\, \alpha \times s$ (formul 43-a). Seega on

$$\vartheta = \frac{Mg \,.\, sin\, \alpha \times s}{J} \tag{a}$$

Kui pidada keha õõtsumiskeskpunkti $K$ eraldiseisvaks üksikuks osakeseks massiga $m$, siis peaks olema pendlil $TK$, mille koormaks on see osakene, igal silmapilgul sama nurkkiirendus $\vartheta$ kui kogu kehalgi, sest tema õõtsub täpilt samuti kui keha ise. Seda osakest pööraks jõud $p = q.\sin\alpha = mg \,.\, \sin\alpha$ (kus $q$ = osakese kaal); pöördemoment on $\mathfrak{M}' = mg \,.\, \sin\alpha \times l$. Et selle osakese mass on koondatud ühteainsasse punkti $K$, siis on tema inertsusmoment tugipunkti $T$ suhtes $J' = ml^2$ (formul 82). Nurkkiirendus on järjelikult



Joon. 164.

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{M}'}{J'} = \frac{mg \,.\, \sin\alpha \times l}{ml^2} = \frac{g \,.\, \sin\alpha}{l}$$

Võrreldes seda võrrandiga ($a$) leiame, et

$$\frac{Mg \,.\, \sin\alpha \times s}{J} = \frac{g \,.\, \sin\alpha}{l}$$

ehk

$$l = \frac{J}{Ms} \tag{92}$$

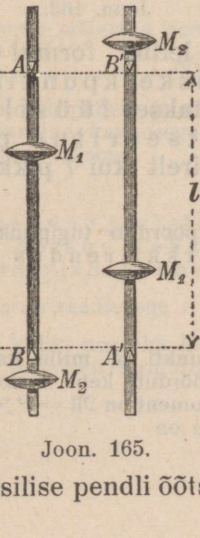
Kui on tuntud keha inertsusmoment ($J$) tugipunkti suhtes ning keha raskuspunkti kaugus ($s$) tugipunktist, siis annab see formul pendli redutseeritud pikkuse $l$, s. t. ta määrab õõtsumiskeskpunkti asukoha.

Seades formulisse (90) $l$ asemele tema väärtus viimsest formulist, saame,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgs}} \tag{93}$$

mille abil leidub igasuguse keha õõtsevälde.

2) Olgu pendli $AB$ (joon. 165) tugipunktiks prisma $A$, tema õõtsumiskeskpunktiks aga prisma $B$. Katse näitab, et **kui pendel pöörda ümber ning teha tema endine õõtsumiskeskpunkt uueks tugipunktiks ($B'$), siis kujuneb endine tugipunkt uueks õõtsumiskeskpunktiks** ($A'$). Et ümberpöörmisel jääb seesuguse pendli redutseeritud pikkus $l = AB = B'A'$ endiseks, siis õõtsub ümberpöördud pendel ($B'A'$) täpilt samuti kui esimenegi. (Peale ümberpöörmist jäävad formulis 90 kõik suurused endisteks, järjelikult jääb ka $T$ endiseks). Niisugust ümberpöördavat pendlit hüütakse ka reversioonpendliks.



Joon. 165.

Nimetatud seaduse põhjal leitakse füüsilise pendli õõtsumiskeskpunkt järgmiselt: Pendli (joon. 165) varva mistahes kohtadele kinnitatakse teljed $A$ ja $B$; pendel riputatakse üles esiteks ühe ning siis teise telje kaudu; koormaid $M_1$ ja $M_2$ nihutatakse piki varba seni edasi-tagasi, kuni pendel teeb mõlemas seisus ühe ja sama aja jooksul ühepalju õõtseid. Koormate seesugusel seisul on kaugus $AB$ pendli r e d u t s e e r i t u d p i k k u s e k s $l$, nii et formul (90) määrab kogu pendli õõtsevälte, kui temas teha $l = AB$.

Reversioonpendliga mõõdetakse raskusjõu kiirendust $g$: On sellel kiirendusel ühes maakohas suurus $g_1$, teises aga $g_2$, siis peavad olema ühe ja sama reversioonpendli õõtsevälted nendes maakohtades vastavalt

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} \quad \text{ning } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}}$$

millest järgneb, et

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \tag{94}$$

Kuna pendli õõtseväldet võib mõõta väga täpselt (võib näiteks lugeda pendli õõtsete arvu väga pika aja sees), siis võib formuli (94) põhjal täpselt v õ r r e l d a suurusi $g_1$ ja $g_2$. Ka raskusjõu kiirenduse a b s o l u u t n e s u u r u s leidub samast formulist, sest

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{95}$$

Mõõtmistest leitakse, et näiteks

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| laiusel $\varphi =$ | 0° | 45° | 60° | 90° |
| on kiirendus $g =$ | 978,1 | 980,6 | 981,9 | 983,1 $cm/sec^2$. |

## § 51. Sekund-pendel ja ajamõõtmine; Foucault'i pendelkatse.

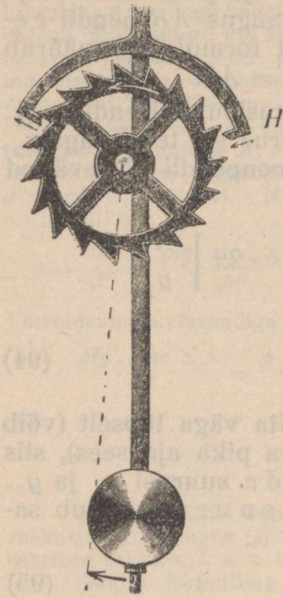
1) Et antud pendli õõtse kestab alati ühekaua, siis on pendel käepärane abinõu aja mõõtmiseks. Tundes raskusjõu kiirenduse $g$ suurust, võib näiteks leida niisuguse pendli pikkus $l$, mis teeb igas sekundis 1 terve õõtse. Kui teha formulis (90) $T = 1$, siis leiame et

$$\text{s e k u n d p e n d l i p i k k u s } \mathbf{L} = \frac{g}{4\pi^2} = \mathbf{24{,}87}\ cm,$$

sest meie laiustes on $g$ ligikaudu 981 $cm/sec^2$. Pendel mis teeb igas sekundis $1/2$ õõtset, peab olema 4 korda pikem, nii siis ligi 1 $m$ pikk.

Tähtsamat osa etendab pendel kella käigu reguleerimisel. Seal tarvitatakse pendli ühevältelisi õõtseid selleks, et hammasratast lasta pöörduda igal õõtsel ü h e hamba võrra: Pendli varb on ühendatud metallhargiga $H$ (joon. 166), mille sissepoole pöördud otsad ulatavad hammasratta hammaste vahele.

Hammasratast pöörab spiraalvedru või ratta võlli ümber mähitud nöör, mille otsas ripub koorem. Seisab pendel paigal, siis hammasratas ei saa pöörduda; pendli õõtsudes aga pääseb igal õõtsel üks hammas hargi otsadest mööda. Selle tagajärjel oleneb kella käigu kiirus pendli õõtsevältest; ta on seda kiirem, mida lühem on pendel. Taskukellade juures etendab pendli osa väike ratas, mis peene spiraalvedru mõjul pöörleb õõtsumissarnaselt edasi-tagasi ümber oma võlli; samasuguse hargiga kui *H* laseb ta ratast pöörduda igal õõtsel ühe hamba võrra.

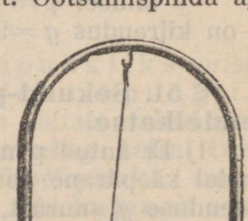


Joon. 166.

Juba Galilei soovitas pendlit kella käigu reguleerimiseks. Eksikombel aga nimetatakse pendelkella ülesleidjana harilikult Huyghens'i.

2) Tõukame pendli näiteks sihis *OW* (joon. 167) õõtsuma. Kui pöörda pendli raami, siis näeme, et see pind, millel liigub pendli niit — n. n. õ õ t s u m i s p i n d ei pöördu raamiga kaasa, vaid pendel õõtsub edasi omas algsihis. Tähendab: **Õõtsuv pendel hoiab oma õõtsumispinda ikka ühes ja samas sihis.** Selle põhjuseks on asjaolu, et õõtsumine sünnib a i n u l t raskusjõu mõjul, mis on sihitud vertikaalselt. Õõtsumispinda aga võiks pöörda ainult horisontaalselt (või kaldu) sihitud jõud. Et seesugust jõudu pole olemas, siis hoidub õõtsumispind pendlikera i n e r t s u s e tõttu iseendast ikka ühes ja samas sihis.

Asetame pendli (joon. 167) näiteks maakera n a b a l e, siis peab alus ühes maapinnaga pöörduma iga 24 tunni jooksul ühe täie ringi võrra. Et pendli õõtsumispind ei pöördu kaasa, siis näib vaatlejale, nagu seisaks alus paigal ja pöörduks õõtsumispind. Õõtsub pendel alguses näiteks sihis *NS*, siis õõtsub ta 6 tunni järele sihis *OW*, 12 tunni järele sihis *SN* j. n. e. Ekvaatoril *QQ* (joon. 168) ei pöördu horisontaalne alus, sest ta seisab seal perpendikulaarselt maa tiirlemisraadiusega *OF*. Seal ei pöördu sellepärast ka pendli õõtsumispind.



Joon. 167.

Ekvaatori ja naba vahel pöördub alus seda kiiremini, mida lähemal ta asub nabale. Võib tõestada, et laiusel $\varphi^\circ$ on pendli õõtsumispinna näiv pöördumine igas tunnis.

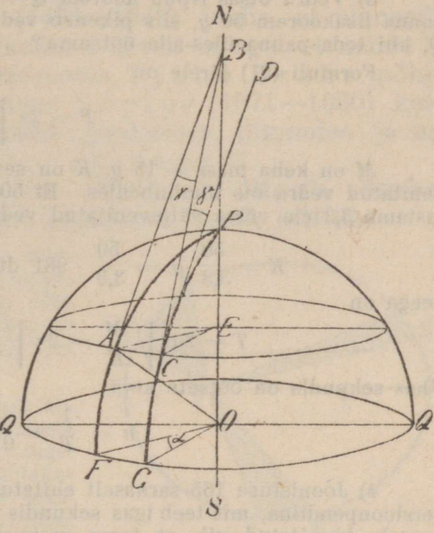
$$\gamma = 15^\circ . \sin \varphi \tag{94}$$

Meie juures on $\varphi \cong 59^\circ\ 30'$, seega on meil $\gamma \cong 13^\circ$.

Õõtsumispinna pöördumisega tõestas Foucault Pariisi Pantheonis (1851), et maakera peab tiirlema. Tema pendel oli 62 $m$ pikk ja ligi 28 $kg$ raske.

Punktis $A$ (joon. 168) õõtsugu pendel meridiaani $FAB$ sihis; selle õõtsumise pinnal asub ka meridiaani riivasjoon $AB$. Aja $t$ järele pöördub maakera nurga $\alpha = FOG$ võrra; meridiaani riivasjoon $AB$ pöördub seisu $CB$. Pendel hoiab oma endise sihi alal ning nihkub sellepärast ilmaruumis paralleelselt endaga puhkti $C$: tema õõtsumissiht $CD$ jääb paralleelseks $AB$-ga. Meridiaani $GCB$ (ja sihi $CB$) suhtes aga on õõtsumispind pöördunud nurga $\gamma$ võrra. Kuna $\gamma = \angle DCB = \angle ABC$, siis leidub kolmnurkadest $ABC$ ja $AEC$, et

$$\angle ABC : \angle AEC = \gamma : \alpha = AE : AB$$



Joon. 168.

Kolmnurgast $AEB$ järgneb aga, et $AE : AB = \sin ABE = \sin AOF = \sin\varphi$, sest et nurk $AOF$ kujutab punkti $A$ laiuskraadi $\varphi$. Järjelikult annab eelmine proportsioon:

$$\gamma = \alpha \cdot \sin\varphi.$$

Maakera pöördub 24 tunni jooksul 360° võrra; ühe tunni sees pöördub ta siis $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ = \alpha$. Seega on õõtsumispinna pöördumine igas tunnis

$$\gamma = 15^\circ . \sin\varphi.$$

**Näited:** 1) Mitu õõtset teeb 10 sekundi jooksul 2,45 $m$ pikkuse niidi otsas rippuv kerake ($g = 9{,}81\ m/sec^2$)?

Formuli (90) järele on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2.45\ m}{9{,}81\ m/sec^2}} = 3{,}14\ sec$$

10 sekundi sees on õõtsete arv:

$$n = \frac{10}{3{,}14} = 3{,}18$$

2) Mitu korda on üks pendel pikem teisest, kui esimene teeb 18, teine aga 36 õõtset minutis?

Õõtsevälted on $T_1 = 60/18$
$T_2 = 60/36$

§ 49³, seadus (*c*) järele suhtuvad pendlipikkuste (*l*) kvadraatjuured kui $T_1 : T_2$; s. t.

$$\sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} = T_1 : T_2 = 60/18 : 60/36 = \frac{36}{18} = 2$$

$$l_1 : l_2 = 4; \; l_1 = 4 l_2$$

s. t. esimene pendel 4 on korda pikem teisest.

3) Vedru otsas ripub koorem $Q = 15$ *g* (joon. 162). Kui koorma peale panna lisakoorem 50 *g*, siis pikeneb vedru 3,3 *cm* võrra. Mitu õõtset teeb *Q*, kui teda panna üles-alla õõtsuma?

Formuli (91) järele on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

*M* on keha mass = 15 *g*. *K* on see jõud, millega 1 *cm* võrra väljavenitatud vedru ots tõmbub üles. Et 50 grammi raskusjõud peab tasakaalustama 3,3 cm võrra väljavenitatud vedru tõmbejõu, siis on

$$K = \frac{50}{3{,}3}\, g = \frac{50}{3{,}3} \cdot 981 \text{ düüni} \cong 15000 \text{ düüni}$$

Seega on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{15}{15000}} = 0{,}2 \text{ sek}$$

Ühes sekundis on õõtsete arv

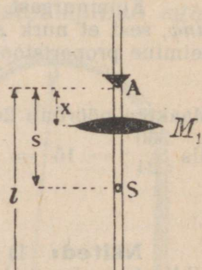
$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2} = 5.$$

4) Joonistuse 165 sarnaselt ehitatud pendlit tahetakse tarvitada reversioonpendlina, mis teeb igas sekundis ühe õõtse. Koorem $M_2 = 100$g on varvale kinnitatud nii, et tema raskuspunkt seisab 5 *cm* allpool telge *B* (joon. 169). Kuhu tuleb kinnitada koorem $M_1 = 200$ *g*, kui varb on ise nii kerge, et tema kaalu ei tule võtta arvesse?

Formulis (93) peab olema $T = 1$ *sec*, s. t.

$$2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgs}} = 1$$

$$4\pi^2 \frac{J}{Mgs} = 1$$




Joon. 169.

Kogu pendli mass on $M = M_1 + M_2 = 300$ *g*; kui võtta $g = 981$ *cm/sec²*, siis saame eelmisest:

$$\frac{J}{s} = \frac{300 \,.\, 981}{4\pi^2} = 7450$$

$$J = 7450 \, s \qquad \text{(a)}$$

Formuli (82) järele on pendli inertsusmoment telje *A* suhtes:

$$J = M_1 x^2 + M_2 (l + 5 \; cm)$$

Sekundpendli puhul peab olema redutseeritud pikkus $AB = l = 24{,}87$ *cm* (§ $51_1$), sellepärast on

$$J = 200 x^2 + 100\,(24{,}87 + 5)^2 = 200\,(x^2 + 445{,}5)$$

Pendli raskuspunkt *S* jagab koormate $M_1$ ja $M_2$ vahet nii, et $M_1 S : M_2 S = 100 : 200$; seega on pikkus $M_1 S = {}^1\!/_3 M_1 M_2$. Raskuspunkti kaugus tugipunktist A on järjelikult:

$$s = x + {}^1\!/_3\,(l + 5 - x) = x + {}^1\!/_3\,(24{,}87 + 5 - x) = 9{,}96 + {}^2\!/_3 x;$$

Kui $J$ ja $s$ asemele panna leitud väärtused, siis annab võrrand (a):

$$200\ (x^2 + 445{,}5) = (9{,}96 + {}^2/_3 x) \cdot 7450$$

millest leidub, et koorma $M_1$ raskuspunkt peab seisma tugipunktist $A$ kaugusel

$$x \cong 2{,}85\ cm.$$

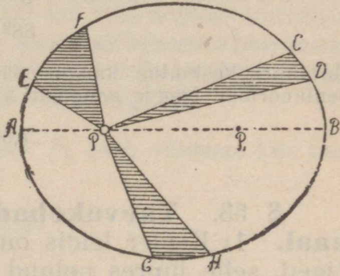
## § 52. Planeetide liikumine.

Juba Kopernikus (1473—1543) leidis, et planeedid tiirlevad ümber päikse; eksikombel arvas ta aga, el nende liikumine on ringjooneline. Astronoom Tycho Brahe põhjalikkude vaatluste põhjal avaldas Kepler (1571—1630) kolm seadust, mis täpselt määravad planeetide liikumise ja mis tuntud nimetuse all „Kepleri seadused".

1) Esimene seadus: **Planeet liigub ümber päikse ellipsil, mille ühes fookuses asub päike.**

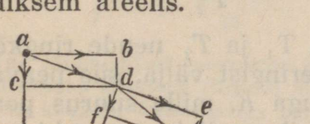
Planeedi tee ehk orbiit on väga sarnane ringjoonega, sest tema ekssentrisiteet ($PP_1$) on väike (joon. 170). Kõige piklikum on Marsi orbiit, kuid ka tema juures moodustab $PP_1$ ainult $1/_{11}$ osa ellipsi suurest teljest $AB$.

Planeedi päiksekaugus on igas kohas isesuurune. Kõige lähemal päiksele seisab planeet punktis $A$, kõige kaugemal punktis $B$; esimest punkti hüütakse periheel'iks, teist afeel'iks. Maakera läheb läbi periheeli detsembri lõpul ning läbi afeeli juuni lõpul.




Joon. 170.

2) Kepleri II seadus: **Planeedi raadius-vektor riivab võrdsetel aegadel võrdseid pinde.** Kulub planeedil näiteks teede $EF$, $CD$ ja $HG$ ärakäimiseks ühepalju aega, siis on sektorid $EFP$, $CDP$ ja $HGP$ võrdpindsed. Kuna võrdpindne sektor on seda laiem, mida lühem ta on, siis järgneb Kepleri II seadusest, et planeet liigub orbiidil seda kiiremini, mida lähemal ta asub päiksele. Seega on maakeral kõige suurem kiirus periheelis ja kõige väiksem afeelis.




Joon. 171.

Võib tõestada, et Kepleri II seadus on kõigi sentraalliikumiste ($45_1$) üldine omadus: Olgu $m$ see punkt, millesse on sihitud sentraaljõud; teatava lühikese aja $t$ vältel liiguks keha $a$ selle jõu sihis tee $ac$. Ilma jõuta liiguks keha ainult oma hooga sama aja $t$ sees tee $ab$. Hoo ja sentraaljõu üheaegsel mõjul jõuab keha aja $t$ lõpuks teedeparalleelogrammi neljandasse tippu $d$. Kui kaoks sentraaljõu mõju selles punktis, siis liiguks keha järgneva ajavälte $t$ jooksul sihis $ade$ ühtlaselt edasi kuni punkti $e$ ($ad = de$); sentraaljõud aga tõmbab teda teeosa $df$ võrra sentrumi ($m$) poole; järjelikult jõuab keha teise ajavälte $t$ lõpuks punkti $g$ j. n. e. Kõverjoon adgk kujutabki keha tõelist teed. Kolmnurgad $adm$ ja $dem$ on võrdpindsed ($ad = de$ ja ühine kõrgus $md$). Kuna $eg$ on paralleelne $md$-ga, siis on ka kolmnurgad $dem$ ja $dgm$ võrdpindsed (sest $dm$ on ühine baas ning kõrgus $de = fg$) Järjelikult on $\triangle\, adm = \triangle\, dgm = \triangle\, gkm$ j. n. e. Pikkused $ad$, $dg$, $gk$ j. n. e. on võrdsetes ajavältetes $t$ käidud teed; $dm$, $gm$, $km$ on radiusvektorid; võrdsetel aegadel riivavad viimased nii siis igal sentraalliikumisel võrdseid pinde. Kirjeldatud asjaolust võib järeldada, et ka planeetide liikumine peab olema sentraalliikumine, s. t. et planeedi ja päikse vahel peab valitsema tõmbejõud, mis on alaliselt sihitud päiksesse.

3) Kepleri III seadus: **Kahe planeedi ringkäigu aegade kvadraadid suhtuvad kui nende planeetide keskmiste päiksekauguste kuubid,** s. t.

$$T_1^2 : T_2^2 = R_1^3 : R_2^3 \tag{95}$$

Merkuur käib ümber päikse näiteks 88 päevaga, maakera aga 365 päevaga. Nende ringkäigu aegade kvadraadid suhtuvad kui

$$88^2 : 365^2 \cong 1 : 18$$

Merkuuri keskmine kaugus päiksest on 7500000, maakera oma 20000000 penikoormat. Nende kauguste kuupide suhe on ka

$$7{,}5^3 : 20^3 \cong 1 : 18$$

§ 53. **Taevakehade külgetõmbumine; kehade kaal.** 1) Kepler leidis oma seadused vaatlustest; et nad olid õiged, selle juures polnud kahtlust; kuid mispärast planeedid liiguvad nende seaduste järele, seda ei osanud Kepler seletada. Alles Newton tõestas, et päikse ja planeetide vahel peab valitsema külgetõmbejõud ja et nimelt selle jõu mõjul kujunebki liikumine, mis allub Kepleri seadustele: Kui oletada, et 2 planeeti liiguvad ümber päikse ringjoontel, mille raadiused on $R_1$ ja $R_2$, siis mõjub nende peale sentrifugaaljõud, mille suurus on vastavalt (formul 86):

$$C_1 = \frac{4\pi^2 R_1 M_1}{T_1^2} \text{ ning } C_2 = \frac{4\pi^2 R_2 M_2}{T_2^2}$$

kus $M_1$ ja $M_2$ on planeetide massid, $T_1$ ja $T_2$ nende ringkäikude ajad. Et planeedid ei lenda teeringist välja, siis peavad nad tõmbuma päikse poole mingi jõuga $K$, mille suurus peab võrduma sentrifugaaljõuga $C$. Kahe planeedi juures suhtuvad nii siis need tõmbejõud kui

$$K_1 : K_2 = \frac{R_1 M_1}{T_1^2} : \frac{R_2 M_2}{T_2^2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot \frac{M_1}{M_2}$$

Kepleri III seaduse järele aga on

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3},$$

millest järgneb, et

$$K_1 : K_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{M_1}{M_2} = \frac{M_1}{R_1^2} : \frac{M_2}{R_2^2} \tag{96}$$

s. t. **päike tõmbab planeeti jõuga, mille suurus on päriproportsionaalne planeedi massiga** *(M)* **ning ümberpöördult proportsionaalne planeedi kauguse kvadraadiga** *($R^2$)*.

2) Kuu liigub ümber maakera samade seaduste järele kui maakera ümber päikse. Järjelikult peab ka kuu ja maakera vahel olema tõmbejõud, mille suurus allub ülevalleitud seadusele (formul 96). Newton tõestas, et maa ja kuu vaheline tõmbejõud on sama, mis avaldub maapealsete kehade raskusena. Seega peab ka raskusjõud muutuma (formul 9·) järele, s. t. **raskus on proportsionaalne keha massiga ning ümberpöördult proportsionaalne tema kauguse kvadraadiga maakera sentrumist.**

Maakera ja kuu vaheline tõmbejõud $P_1$ peab võrduma kuu peale mõjuva sentrifugaaljõuga, mille suurus on

$$C = \frac{4\pi^2 RM}{T^2} = P_1$$

Kui kuu ei tiirleks, siis ei oleks ka sentrifugaaljõudu ning kuu peaks tõmbejõu $P_1$ mõjul hakkama „langema“ maakera poole; langemise algul oleks tema kiirendus

$$g = \frac{P_1}{M} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Kuu käib üks kord ümber maakera aja sees $T = 27$ päeva, 7 tundi, 23 min. $= 39343 \times 60$ *sec.* Kuu tiirlemisraadius $R$ on 60 korda suurem maakera raadiusest $r$ ($R = 60r$) Kui silmas pidada, et maakera perimeeter on $2\pi r = 40000000$ *m*, siis leidub, et

$$g_1 = 2\pi \cdot \frac{2\pi r \cdot 60}{T^2} = 2\pi \cdot \frac{40000000 \cdot 60}{39343^2 \cdot 60^2} = 0{,}002706 \ m/sec^2 .$$

Kuu lähenemisel maakerale peab tõmbejõud ning järjelikult ka langemiskiirendus kasvama (formul 96), ja nimelt ümberpöördult proportsionaalselt kuu kauguse kvadraadiga maakera sentrumist. Otse maakera pinnal, s. t. kaugusel $r$ (= maakera raadius) maasentrumist on „langeva“ kuu kiirendus $g_2$ järjelikult nii suur, et oleks

$$g_2 : g_1 = R^2 : r^2$$

ehk

$$g_2 = g_1 \cdot \frac{R^2}{r^2} = g_1 \left(\frac{60\,r}{r}\right)^2 = 3600\, g_1 = 9{,}74 \ m/sec^2 .$$

Langeks maapinna lähedusel asuv kuu harilikku raskusjõu mõjul, siis oleks tal samuti kui igal teiselgi kehal kiirendus $g = 9{,}81 \ m/sec^2$. Mõlemad kiirendused (9, 74 ja 9,81) on niivõrd sarnased, et neid võib pidada ühesuuruseks. Kuu ja maakera vaheline tõmbejõud annaks maapinna lähedal seisvatele kehadele järjelikult samasuure langemiskiirenduse kui raskusjõudki. Sellest aga peab järeldama, et raskusjõud on tõepoolest sama kui see jõud, mis sunnib tiirlema kuud ümber maakera ning maakera ümber päikse.

Viimasest seadusest järgneb:

a) keha kaalub seda vähem, mida kaugemal ta seisab maakera sentrumist. Lihtne arvestus näitab, et 1 kilomeetrilisel vertikaalsel tõusul kaotab iga kilogramm ümber $^1/_3$ grammi omast kaalust.

b) Keha kaal on nabadel suurem kui ekvaatoril, sest maakera on lapergune, nii et nabal seisev keha asub maasentrumile lähemal kui ekvaatoril seisev keha. Sellega seletubkl raskusjõu kiirenduse kasvamine keha ähenemisel nabadele (§ $50_2$).

Peale nimetatud põhjuse on kehadel maanaba kohal ka veel sellepärast suurem kaal, et nende peale mõjub seal väiksem sentrifugaaljõud kui ekvaatoril: Maakera ümber oma telje tiirlemisel kujunev sentrifugaaljõud vähendab kõigi kehade kaalu, sest ta on sihitud otse vastu raskusjõudu; kuna nabal seisva keha tiirlemisraadius on kõige väiksem, siis on ka tema sentrifugaaljõud kõige väiksem, mille tõttu nabal seisev keha kaotab kõige vähem omast kaalust. Mõlemal nimetatud põhjusel on keha kaal ekvaatoril $^1/_{193}$ võrra väiksem kui nabal.

Lihtne arvestus näitab, et kui maakera tiirleks ainult 17 korda kiiremini kui tõeliselt, siis kasvaks sentrifugaaljõud ekvaatoril kuni kehade raskusjõu suuruseni. Sel puhul ei oleks kehadel ekvaatori kohal üldse kaalu, kuna nabadel — kus sentrifugaaljõud on null — jääks kehade kaal endiseks.

c) Maakera sentrumis seisval kehal ei ole üldse kaalu, sest maakera külgetõmbumine avaldub seesuguse keha peale igas sihis ühetugevuselt. Sellest järgneb, et kaal peab kahanema, kui keha (näiteks kaevanduses) langeb maapinna välise kesta alla.

§ 54. **Masside külgetõmbumine; maakera mass ja tihedus; tõusud ja mõõnad.** 1) Mõju ja vastumõju seaduse järele peab päike tõmbama samatugevasti planeeti kui tugevasti planeet tõmbab päikest. Et päike tõmbab planeeti seda tugevamini, mida suurem on planeedi mass $M_1$ (formul 96), siis peab sama seaduse põhjal planeet tõmbama päikest seda tugevamini, mida suurem on päikse mass $M_2$. Planeedi ja päikse vaheline üldine külgetõmbumine on seega proportsionaalne nii planeedi kui päikse massiga, s. t. ta on proportsionaalne nende masside korrutisega ($M_1 . M_2$).

Samasugune on asjaolu maakera ja kuu vahel ning järjelikult ka maakera ja tema pinnal seisva mistahes keha vahe- (raskus): ka keha raskus peab olema järjelikult seda suurem, mida suurem on maakera *mass* ning mida suurem on keha enese oma. Sellest järeldas *Newton*, et külgetõmbumine ongi nimelt *masside* oluline omadus. Ta oletas, et **kaks mistahes massi tõmbuvad alati teine-teise külge jõuga, mille suurus on päriproportsionaalne nende masside korrutisega ning ümberpöördult proportsionaalne masside (raskuspunktide) kauguse kvadraadiga** (formul 96). *Newton* nimetas seda külgetõmbumist *koguilmliseks tõmbumiseks* ehk *gravitatsiooniks*, sest et *kogu ilma* massid tõmbuvad üks-teise külge.

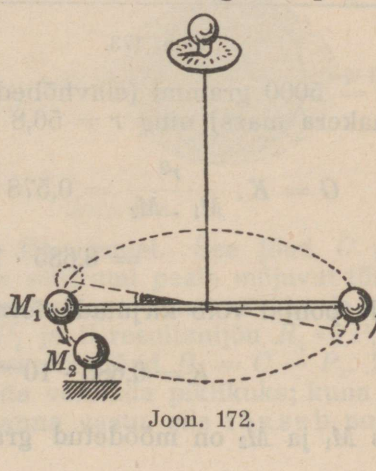
Kaugusel üks sentimeeter tõmmaku 2 keha, mille kummagi mass on 1 gramm, vastamisi külge jõuga $G$ düüni; kaugusel $r$ sentimeetrit tõmbuvad samad massid siis $r^2$ korda väiksema jõuga ($G/r^2$); on aga massid mitte 1 $g$, vaid $M_1$ ja $M_2$ grammi, siis on tõmbumine nimetatud seaduse põhjal $M_1 . M_2$ korda suurem, s. t.

$$\text{külgetõmbumine } \boldsymbol{K} = \boldsymbol{G} \frac{\boldsymbol{M}_1 . \boldsymbol{M}_2}{\boldsymbol{r}^2} \qquad (97)$$

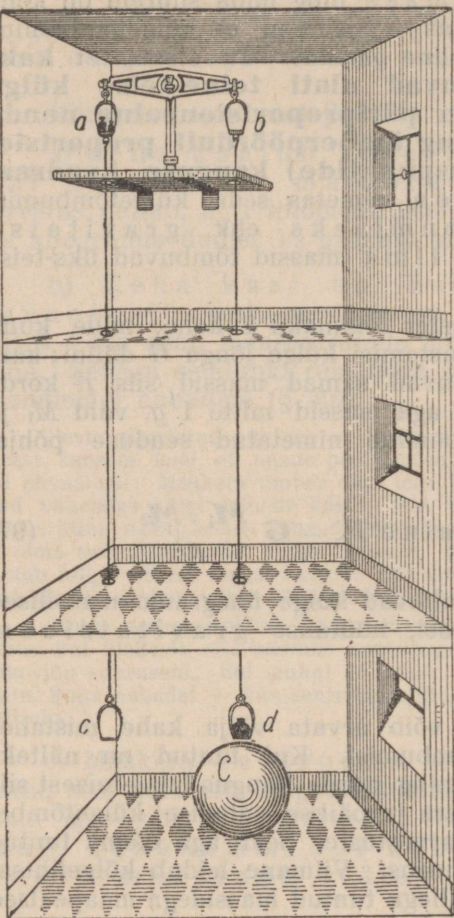
Seda jõudu $G$, millega tõmbuvad külge ühegramm-massilised kehad 1 sentimeetri kaugusel, hüütakse *gravitatsioonkonstandiks*.

2) Leitud formuli abil võib arvata välja kahe mistahes keha vastastikust külgetõmbumist. Kui tuntud on näiteks päikse ja maakera massid ning nende kaugus teine-teisest siis leidub formulist (97) maakera ja päikse vahelise külgetõmbejõu suurus. Seesugustel arvestustel peab aga olema tuntud gravitatsioonkonstandi $G$ suurus. Viimane leidub kõigelihtsamini selle jõu suurusest, millega tuntud massidega maapealsed kehad tõmbuvad teine-teise külge. Et nimetatud jõu mõõtmisega võib pealegi tõestada forl mulit (97), siis on seesugustemõõtmistel suur tähtust.

*Cavendish* tarvitas masside tõmbejõu mõõtmiseks (1798) n. n. *keerdkaalu*; see on peene traadi otsa riputatud kerge pikk varb, mille otste küljes rasked tinakerad $M_1$ (joon. 172). Kui ühe kera lähedale asetada mingi keha ($M_2$), siis pöördub rippuv kera viimase poole. Traadi elastsuse põhjal võib arvata välja pöördumisnurga suurusest kera ja lähendatud keha $M_2$ külgetõmbejõu suurus; selle abil leidub siis formulist (97) gravitatsioonkonstant.



Joon. 172.




Joon. 173.

Jolli tarvitas (1881) masside külgetõmbejõu mõõtmiseks tundlikku kangkaalu, mille üks vaekauss rippus ligi 21 meetri pikkuse traadi otsas (joon. 173). Alumisele vaekausile (*d*) pandi 5 *kg* raskune kerasarnane elavhõbedapudel ning tasakaalustati kaalud ülemise vaekausi (*a*) peale pandud koormaga. Kui vaekausi *d* alla veeretati ligi 5800 *kg* raskune tinakera (*C*), siis hävines tasakaal ning *a* peale tuli panna lisakoorem 0,59 *mg*. Tinakera sentrum seisis sellel katsel 56,8 *cm* kaugusel elavhõbedapudeli sentrumist. Et kera *C* seisab kormast *a* väga kaugel, siis ei mõju tema massi tõmbumine selle koorma peale; küll aga tõmbab *C* tema naabruses seisvat keha *d* ja nimelt jõuga 0,59 milligrammi $= 0{,}59 \times 0{,}981$ düüni $=$ 0,578 düüni. Sellel katsel on järjelikult $K = 0{,}578$ düüni, $M_1 = 5000$ grammi (elavhõbeda mass), $M_2 = 5800000$ grammi (tinakera mass) ning $r = 56{,}8$ *cm*. Formulist (97) järgneb, et

$$G = K \cdot \frac{r^2}{M_1 \cdot M_2} = 0{,}578 \text{ düüni} \times \frac{56{,}8^2}{5000 \cdot 5800000} =$$

$$= 6{,}685 \cdot 10^{-8} \text{ düüni}$$

Selle põhjal võib kirjutada formulit (97):

$$K = 6{,}685 \cdot 10^{-8} \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \text{ düüni} \tag{97a}$$

kus $M_1$ ja $M_2$ on mõõdetud grammides ning $r$ sentimeetrites.

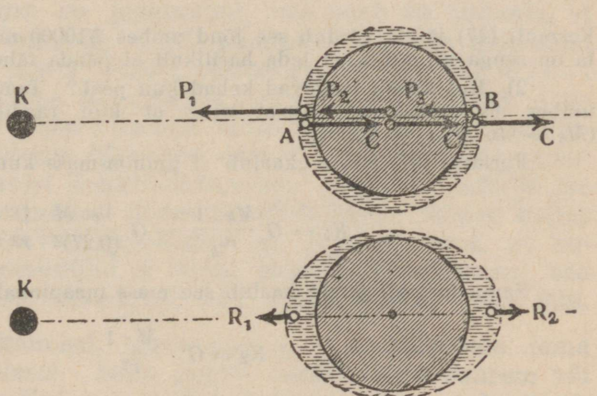
Kirjeldatud kaaludega võis Jolly ka tõestada külgetõmbumise seadust (formulit 97): Elavhõbedapudel seisis esialgul vaekausil $b$ tasakaalus koormaga $a$; siis viidi ta vaekausile $d$, mille juures ta läheneb maakera sentrumile 21 m võrra. Tasakaal hävines ning $a$ peale tuli panna lisakoorem 31,7 *mg*. Sellest järgneb, et 21 meetrilisel maakerale lähenemisel kasvab 5 *kg* elavhõbeda kaal 31,7 milligrammi võrra Nagu arvestus näitab, sünnib siis raskuse muutumine tõepoolest formuli (97) järele.

3) Maapinnal asuv keha, mille mass $M_1 = 1$ gramm, tõmbub maakera sentrumi poole jõuga $K = 1\ g^* = 981$ düüni (formul 47). Et see mass seisab maakera sentrumist kaugusel $r \cong 6370000\ m = 6{,}37 \cdot 10^8\ cm$ ( = maakera raadius), siis peab olema formuli (97a) järele teise tõmbava massi, s. t. maakera enese massi suurus

$$M_2 = \frac{K}{G} \cdot \frac{r^2}{M_1} = \frac{981}{6{,}685 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{(6{,}37 \cdot 10^8)^2}{1} \cong 6 . 10^{27} g = 6 . 10^{24} kg$$

On mass ja ruumala tuntud, siis leidub sellest maakera keskmine tihedus. Eelmistest arvudest selgub, et keskmine tihedus on ligi 5,6. Kuna maakera pealmiste kihtide tihedus on ainult 2—3, siis oletatakse, et maakera keskel leidub rohkesti väga raskeid elemente (plaatina, kuld, hõbe j. n. e.).

4) Tõusud ja mõõnad tekivad selle jõu mõjul, millega maapinna üksikud kohad tõmbuvad kuu ja päikse külge: Maakoht $A$ seisab kuust ($K$) kaugemal kui $B$; sellepärast tõmbub kohta $A$ tugevamini kuu külge kui $B$, s. t. tõmbejõud $P_1 > P_2 > P_3$ (joon. 174). Et nende jõudude mõjul maakera ei lähene kuule, siis peab mõjuma maakera peale mingi vastupidisihitud (sentrifugaal) jõud C, mis takistab lähenemist. See jõud $C$ peab järjelikult tasakaalustama maa sentrumi peale mõjuvat tõmbejõudu $P_2$ s. t. $P_2 = C$. Sel puhul aga annavad ühe ja sama koha $A$ peale mõjuvad jõud $P_1$ ja $C$ resultantjõu $R_1 = P_1 — C$; samuti leidub koha B jaoks resultantjõud $R_2 = C — P_3$. Need resultantjõud tahavad maapinda venitada piklikuks; kuna maa kõva koorik suudab nendele panna vastu, siis tõuseb punkti-



Joon. 174.

des $A$ ja $B$ ainult maapinda ümbritsev veekiht (tõus); vahepealsetest kohtadest voolab vesi selletõttu ära ning seal langeb vee pind (mõõn).

Kuu teeb iga 24 tunni ja 50 minuti jooksul ühe tiiru ümber maakera. Seega pöördub punkt $A$ 6 tunni ja $12^1/_2$ minuti jooksul $90^0$ võrra: On maakohas $A$ praegu tõus, siis kujuneb seal 6 tunni 12 minuti järele mõõn; järgneva samapika ajavälte järele kujuneb seal uus tõus, siis jälle mõõn j. n. e. Lahtises rannas võib ulatada tõus 4—5 meetri kõrguseni; kinnises lahes võib vesi tõusta üle 10 meetri.

Nagu kuu nii võib ka päike sünnitada oma tõmbejõuga tõuse ja mõõnu. Kuigi päikse tõmbumine on palju suurem kuu omast, asub ta niipalju kaugemal viimasest, et punkti $A$ ja $B$ tõmbumise vahe on päikse suhtes väiksem. Sellepärast on ka päikse mõõnad ja tõusud väiksemad kui kuu omad. Et maakera pöördub täpilt 24 tunni jooksul üks kord ümber oma telje, siis korduvad päikse mõõnad ja tõusud täpilt 6 tunni järele. Harilikult ei lange need tõusud nii siis kuu tõusudega ühte. Ainult täis- ja noorkuu ajal sünnivad mõlemad tõusud ühel ajal, mille juures tõus teadagi on vastavalt kõrgem.

**Näited:** 1) Missuguse jõuga tõmbuvad 1 meetri kaugusel seisvad kehad teine-teise külge, kui kummagi mass on 10 kg?

Formulis (97a) on praegusel juhusel $M_1 = M_2 = 10000\ g$, $r = 100\ cm$. Seega on tõmbejõud

$$K = 6{,}685 \cdot 10^{-8} \text{ düüni} \times \frac{10000 \cdot 10000}{100^2} = 6{,}685 \cdot 10^{-4} \text{ düüni.}$$

Formuli (47) järele võrdub see jõud umbes 7/10000 milligrammi raskusega; ta on seega nii väike, et teda harilikult ei panda tähele.

2) Kui kiirelt langevad kehad kuu peal? Teada on, et kuu mass on umbes $^1/_{80}$ maakera massist ning et kuu raadius 0,27 maaraadiust ($M_k = {}^1/_{80}\ M$; $r_k = 0{,}27\ r$).

Formuli (97) järele „kaalub" 1 gramm-mass kuu peal

$$K_1 = G \frac{M_k \cdot 1}{r^2_k} = G \frac{^1/_{80}\, M \cdot 1}{(0{,}27)^2 \cdot r^2}$$

Sama formuli järele kaalub see mass maapinnal

$$K_2 = G \cdot \frac{M \cdot 1}{r^2}$$

Jagame esimese võrrandi teisega:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{^1/_{80} M}{(0{,}27)^2 \cdot r^2} : \frac{M}{r^2} = \frac{1}{80 \cdot (0{,}27)^2} \cong \frac{1}{5{,}9}$$

s. t. kuu peal kaalub 1 gramm-mass 5,9 korda vähem kui maa peal. Et keha saab maapealse raskuse mõjul kiirenduse 9,81 $m/sec^2$, siis peab ta saama järjelikult kuupealse raskusega kiirenduse

$$\frac{9{,}81}{5{,}9} = 1{,}66\ m/sec^2.$$

## Peatükk IV.

# Kôva keha molekulaarmekaanika.

§ 55. **Moleküülid.** 1) Keha jagatavus (I, § $4_3$) on piiratud kõigepealt meie tööriistade puudulikkuse tõttu. Kuid ka sel juhusel, kui abinõud lubaksid jagada keha kuitahes väikesteks osadeks, jõuaksime lõpuks jagatavuse piirini, mille põhjuseks on mateeria ehitusviis ehk struktuur: Oletatakse nimelt, et aine seisab koos üliväikestest osakestest, mida ei saagi mekaanilisel teel enam jagada, kuid millel on ikkagi keha aine kõik omadused. Neid osakesi hüütakse moleküülideks. Moleküülid on nii väiksed, et neid ei saa näha ka kõige parema mikroskoobi all; nende olemas-olu ei saa me sellepärast otsekohe näidata; kuid paljud nähtused näivad tõestavat, et moleküülid on tõeliselt olemas.

Kui tilgutada vette vähe õli, siis tekib vee pinnal üliõhuke õlikiht. Mõõtmised näitavad, et kõige õhemad nendest kihtidest on alla $10^{-7}$ *mm* paksud. Sellest kui ka paljuist teistest mõõtmistest järeldatakse, et moleküüli läbimõõt ei või olla suurem kui $10^{-7}$ *mm*. Kõige parema mikroskoobiga aga võib näha ainult neid kehi, mille suurus ei ole alla $10^{-4}$ *mm* = = 1/10000 *mm*.

Teatavasti iga keha võib muuta oma ruumala suurust: Soenemisel paisub ta, jahtumisel tõmbub ta kokku. Kui oletada, et moleküülid on jagamatud, siis peab ka oletama, et üksiku moleküüli ruumala ei või muutuda. Kehade paisumist võib seletada sel puhul ainult oletusega, et paisumisel kaugenevad keha moleküülid teine-teisest. Aine ei täida järjelikult keha ruumala mitte täiesti, vaid moleküülide vahel peavad olema õõnsused, mis suurenevad keha paisumisel ning vähenevad kokkutõmbumisel. Nagu moleküülid ise nii on ka nende vahelised õõnsused üliväiksed. Mõnes kehas (näiteks klaas) seisavad moleküülid nii tihedalt koos, et koguni teise aine moleküülid ei mahu esimese õõnsustesse; see keha (klaas) ei lase sellepärast teisi aineid (õhku, vett) läbi.

2) Keha lõikamisel, murdmisel j. n. e. lahutame tema moleküüle teine-teisest. Selle juures tundub alati suurem või väiksem takistus. Kui moleküülide lahutamine on takistatud, siis peab neid hoidma koos mingi jõud: Oletatakse, et kõik moleküülid tõmbuvad üks-teise külge. Seda tõmbumist hüütakse kohäsiooniks, kui tahetakse rääkida ühe keha moleküülide vastastikusest külgetõmbumisest; teda hüütakse adhäsiooniks, kui on jutt sellest jõust, millega ühe keha moleküülid tõmbuvad teise omade külge. Keha painutamisel, lõikamisel j. n. e. lahutame või nihutame paigalt ühe keha moleküüle, s. t. me ületame kohäsioonjõudu; lihvitud klaasplaatide kokkukleepumine, liimi puu külge hak-

kamine, metallkehade kokkujootmine j. n. e. aga sünnib selle *adhäsioonjõu* mõjul, millega ühe keha moleküülid (klaasi, liimi, tina) tõmbuvad teise (*klaasi*, *puu*, *metalli*) omade külge.

Moleküülide vahelised jõud ehk n. n. *molekulaarjõud* on seda suuremad, mida lähemal seisavad moleküülid teine-teisele. *Kõvas kehas*, kus moleküülid on tihedalt koos, on kohäsioon sellepärast nii suur, et moleküülide paigaltnihutamine (keha kuju muutmine) nõuab tuntavat jõudu. *Vedelas kehas* seisavad moleküülid teine-teisest vähe kaugemal; seal on kohäsioon nõrgem, nii et moleküülid võivad kergesti liikuda üks-teise suhtes; vedel keha ei avalda sellepärast kuju muutmise vastu takistust. *Gaaside* moleküülid seisavad nii hõredalt, et kohäsioon ei avaldu nende vahel üldse; need moleküülid ei hoidugi sellepärast koos, mille tõttu gaasil ei ole ei kindlat kuju ega ruumala (võrdle I, § 5).

Katsed näitavad, et *molekulaarjõud mõjuvad ainult moleküüli lähemas ümbruses*: Kokkupressitud paberlehed, puulauad j. n. e. ei hakka teine-teise külge nimelt sellepärast, et nende pinna moleküülid ei lähene kokkupressimisel sedavõrd teine-teisele, et adhäsioonjõud võiksid pääseda mõjule.

3) Oletatakse, et *ühes ja samas aines on kõik moleküülid ühesuurused ja üheraskused*. Selle oletuse aluseks on muu seas asjaolu, et ühesugustel kehadel, mis valmistatud ühest ja samast ainest, on alati ühesugused omadused: ühesugused terasvibud painduvad näiteks ühe ja sama jõu mõjul ühetaoliselt kõveraks; ühest ainest valmistatud kehad sulanevad ja auruvad alati ühel ja samal temperatuuril j. n. e. Oleks näiteks terases mitmesuguseid moleküüle, siis võiks vahest juhtuda, et ühes varvas oleks ülekaal ühedel, teises varvas teistel moleküülidel. Sel puhul aga ei võiks olla kõigil varbadel ühesugused omadused.

§ 56. **Aatomid; aatomkaal.** 1) Teatavasti võib vett *lahutada* kas keemilisel ehk mingil teisel *mittemekaanilisel* teel (näit. elektri vooluga). Lahutamisel tekkivatel gaasidel, vesinikul ja hapnikul on täitsa *uus aine*, millel ei ole midagi ühist vee ainega. Kuna ka kõigeväiksema veeosakese — veemoleküüli — aineks on ikkagi vesi, siis peab oletama, et keemilisel teel lahutub ka *veemoleküül* vesiniku ja hapniku osakesteks. Neid osakesi ei saa enam *mingil* teel lahutada, sest vesinik ja hapnik ei lahutu iialgi uuteks aineteks. *Niisuguseid kõigeväiksemaid osakesi, mida ei saa jagada ei mekaanilisel ega keemilisel teel, hüütakse aatomiteks.* Puhas vesi sisaldab nii siis kahesuguseid aatome (vesiniku ja hapniku omi), vesinik ja hapnik aga sisaldab ainult ühesuguseid; vesi on sellepärast **liitkeha**, hapnik ja vesinik aga on lihtkehad ehk **keemilised elemendid**. Ühe elemendi kõik aatomid on ühesugused ja üheraskused *); sellepärast on olemas ainult niipalju isesuguseid aatome, kui palju on olemas lihtkehi ehk keemilisi elemente (nende arv on umbes 100). Kõik teised ained koosnevad nendest aatomitest. Et aatomid võivad rühmuda väga mitmet viisi molekuulideks, siis on isesuguste molekuulide arv lõpmatu suur.

2) Teatavate elementide aatomitel on tung ühineda teiste elementide aatomitega püsivateks rühmadeks — mooleküülideks. Nii ühinevad näiteks vesiniku ja hapniku aatomid tugeva plahvatusega vee molekuulideks. See ühinemistung ehk **keemiline sugulus** on ühede elementide vahel suurem, teiste vahel väiksem; ta on näiteks hapniku ja vesinikuaatomite vahel väiksem kui hapniku ja naatriumiaatomite vahel. Satuvad naatriumi vabad aatomid (puhas naatrium) näiteks veemolekuulide lähedale, siis ühinevad nad veemolekuulis asuvate hapnikuaatomitega uuteks molekuulideks, mille tõttu veemolekuul laguneb ning tema vesinikuaatom vabaned.

Keemia õpetab, et elemendid võivad ühineda ainult kindlas kaalulises vahekorras: Kloori ja vesiniku ühinemisel ei seo näiteks 1 gramm vesinikku iialgi vähem kui 35 *g* kloori; 16 grammi hapnikku võib ühineda mitte vähem kui 201 grammi elavhõbedaga j. n. e. Keemilisel ühinemisel peab sattuma tekkiva uue aine molekuuli vähemalt üks aatom kummagist ühinevast ainest; kloori ja vesiniku ühinemisel tekkivas kloorvesiniku molekuulis peab olema vähemalt üks vesiniku ja üks klooriaatom. Et 35 grammi on see **kõigeväiksem** kloorihulk, mis võib ühineda 1 grammi vesinikuga, siis tuleb oletada, et iga kloorvesiniku molekuul saab ainult **ühe** vesiniku ja **ühe** klooriaatomi. Järjelikult peab olema 35 grammilises kloorihulgas täpilt samapalju klooriaatome, kui palju on 1 grammis vesinikus vesinikuaatome (sest vastasel korral ei jatkuks iga klooriaatomi jaoks üht vesinikuaatomi ning nimetatud ainehulgad ei võiks täieliselt ühineda kloorvesinikuks). Et kloori ning vesiniku aatomid on kõik ühesugused ja üheraskused, siis järgneb eelmisest, et üks **klooriaatom on parajasti 35 korda raskem kui vesinikuaatom**, sest teatav arv klooriaatome kaalub 35 korda rohkem kui sama arv vesinikuaatome.

**Aatomkaaluks** hüütakse seda arvu, mis näitab mitu korda on antud elemendi aatom raskem kui vesiniku (= kõigekergema elemendi) aatom. Et näiteks hapniku aatom on 16 korda vesinikuaatomist raskem, siis on hapniku **aatomkaal** 16.

3) Antud aine ühte molekuuli kuuluvate aatomite kaalude summat hüütakse selle

*) Viimasel ajal (1919) on jõutud selgusele, et mõnes elemendis (näiteks klooris) on ühel osal aatomitest ühesugune, teisel osal teistsugune kaal. Selle peale vaatamata on kõigil aatomitel **ühesugused** keemilised omadused. Neid mitmeraskuseid kuid muidu ühesuguseid aatome hüütakse **isotoopideks**.

aine **molekuulkaaluks**. Molekuulkaal näitab nii siis, mitu korda on aine molekuul raskem vesiniku aatomist. Et näiteks kloorvesiniku molekuulis on üks klooriaatom (35) ja üks vesinikuaatom (1), siis on tema molekuulkaal $35+1=36$. Samuti on elavhõbehapendi molekuulkaal $16+201=217$ i. n. e. Keemiliste elementide kohta on selgusele jõutud, et puhta elavhõbeda, heeliumi, argooni, neooni ja mõne teise elemendi aatomid ei ühine molekuulideks, vaid nad hoiduvad üksikult; ainult nende elementide juures tähendab molekuul sama mis aatomgi (üheatoomsed molekuulid). Suurema osa teiste elementide, nende hulgas ka vesiniku molekuulis aga on ühinenud 2 aatomi; sellepärast võrdub nende elementide molekuulkaal kahekordse aatomkaaluga. Vesiniku molekuulkaal on seega $1+1=2$.

§ 57. **Kõva keha deformatsioon ja elastsus; elastsuse piir; kõvadus.** 1) Kui kumminööri venitada, siis venib ta pikemaks; kui pajuvitsa painutada, siis paindub ta kõveraks. Nii ühel kui teisel juhusel muutub keha kuju mingi välise jõu mõjul: me ütleme, et keha deformeerub. Laseme väljavenitatud või kõverakspainutatud keha lahi, siis tõmbub kumminöör kokku oma endise pikkuseni, pajuvits sirgub endiselt sirgeks. Kehi, mis võtavad peale jõu kadumist oma esialgse kuju, hüütakse elastseteks: kõiki teisi kehi nimetatakse mitteelastseteks. Viimaste hulka kuulub näiteks tinatraat, mis väljavenitamisel ja painutamisel jääb pikemaks ja kõveraks.

Deformeerumisel peavad nihkuma keha molekuulid üksteise suhtes. Elastses kehas on molekuulid seotud nii tugevasti teine-teisega, et molekulaarjõud tõmbab paigaltnihkunud molekuuli tagasi algseisu. Sellepärast võtabki elastne keha peale jõu kadumist oma algkuju. Mitteelastses kehas aga ei suuda molekulaarjõud tõmmata tagasi paigaltnihkunud molekuuli; sellepärast jääb niisuguse keha kuju muudetuks. Esimese keha deformatsioon on ainult ajutine, teise oma jäädav.

2) Liig pikaks venitatud kumminöör katkeb; liig kõveraks painutatud pajuvits jääb kõveraks või murdub katki. Katkemine, murdumine ja kõveraksjäämine on aga jäädav deformatsioon. Sellest järgneb, et ka elastne keha moondub mitteelastseks, kui teda deformeerida üle teatava piiri. Seda piiri, milleni keha jääb elastseks, nimetatakse keha aine elastsuse piiriks.

Aine elastsuse piiri avaldatakse selle kõigesuurema koormaga, mille mõjul kõnesolevast ainest valmistatud ühe kvadraatmillimeetri jämedune traat parajasti hakkab jäädavalt deformeeruma. Kui näiteks 1 $mm^2$ jämeduse vasktraadi otsa riputada järjest suurem koorem, siis selgub, et 11,5 *kg* juures tõmbub traat peale koorma eemaldamist endise pikkuseni kokku (ajutine deformatsioon); 12,5 *kg* juures aga jääb traat ka peale koorma eemaldamist pikemaks (jäädav deformatsioon). Vase jäädav deformatsioou algab nii siis umbes 12 *kg* juures; sellepärast on vase elastsuse piir 12 $kg/mm^2$.

3) Mõned ained venivad juba väikse koorma mõjul jäädavalt pikemaks; neid hüütakse venivaiks (tina, kuld, hõbe) ja plastilisteks (vaha, savi). Teised kehad ei veni ja deformeeru peaaegu sugugi, vaid katkevad ja murduvad juba deformeerumise algul; neid hüütakse hapraiks (klaas, marmor, teras).

Kehade kokkupuutumisel võivad tungida kõvema keha teravad kohad pehmema keha pinna sisse, kuid mitte ümberpöördult: öeldakse kõvem keha kriimustab pehmemat. Keha kõvadust iseloomustab nii siis selle takistuse suurus, mida antud keha avaldab mingi teise, tema pinna sisse tungiva keha vastu. Kõige kõvem keha on teemant: tema kriimustab kõiki teisi kehi, kuna teda ennast ei kriimusta ükski keha.

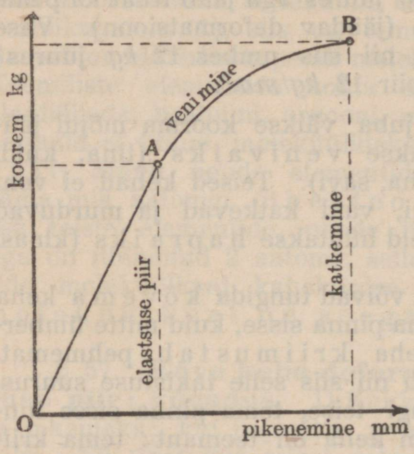
Keha kõvaduse mõõtmiseks tarvitatakse sellekohast kõvadusskaalat. Teda moodustab 10 rittaseatud isesuguse kõvadusega keha, millest järgmine on ikka kõvem eelmisest, nii et järgmine võib küll kriimustada kõiki eelmisi, kuna ükski eelmine ei saa kriimustada järgmist. Kõige pehmema keha kõvadust kujutatakse numbriga 1; kõige kõvema oma numbriga 10. Need kehad on: talk = 1, gips = 2, lubjapagu = = 3, fluorispagu = 4, apatiit = 5, põllupagu = 6, kvarts = 7, topaas = 8, korund = 9 ja teemant = 10.

Tahetakse skaala abil mõõta mingi tundmata keha kõvadust, siis tõmmatakse temaga järgemööda üle skaala kehade pinna. Kriimustab see keha näiteks veel kvartsi (7), kuna ta aga topaasi (8) enam ei kriimusta, siis on tema kõvadus 7—8 ehk 7,5. Klaasi kõvadus on näiteks 6,5; teda lõikavad ainult kehad, mis ei ole kvartsist pehmemad (7); harilikult tarvitatakse klaasi lõikamiseks aga teemantit (10). Et teemanti ei kriimusta ükski teine keha, siis võib teda lihvida ainult peene teemantpulbriga.

§ 58. **Venitamine.** 1) Kui 1 meetri pikkuse ja 1 kvadraatmillimeetri jämeduse terastraadi otsa riputada 1 kilogrammiline koorem, siis võib sellekohaste abinõudega mõõta, et traat pikeneb umbes $1/20$ millimeetrit. Võtame 2 korda pikema traadi, siis on pikenemine $2/20$ *mm*, s. t. ka 2 korda suurem. Mõlemal juhusel on pikenemine $1/20000$ osa traadi algpikkusest. Selle murru nimetajat (20000) hüütakse terase elastsusmooduliks E; elastsusmoodul on järjelikult see arv, millega tuleb jagada 1 kvadraatmillimeetrilise traadi pikkust selleks, et leida selle traadi pikenemist 1 kilogrammilise koorma mõjul.

2) Riputame algusesnimetatud traadi otsa järgemööda 2, 3, 4 j. n. e. kilogrammi, siis leiame, et traadi pikenemine on vastavalt 2, 3, 4 j. n. e. korda suurem kui 1 kilogrammi juures. Umbes 30—32 kilogrammist peale võib panna tähele

et traat ei tõmbu peale koorma eemaldamist enam kokku oma algpikkuseni (elastsuse piir). Koorma edaspidisel suurendamisel kasvab pikenemine kiiremini kui koorem (piirkond *AB*, diagramm 175). Alles 60—70 *kg* juures katkeb traat. Peale elastsuse piiri võib traadi koorem nii siis veel tuntavalt kasvada; ainult venib teras sellejuures samal kombel kui näiteks tinagi, s. t. ta on sel tingimusel mitteelastne. Kirjeldatust selgub nii siis:




Joon. 175.

a) **Kuni elastsuse piirini on pikenemine proportsionaalne koormaga.**

b) **Peale elastsuse piiri kasvab pikenemine kiiremini kui koorem.**

3) Riputame ühe ja sama koorma esiteks 1 $mm^2$ jämeduse, siis järgemööda 2, 3, 4 j. n. e. kvadraatmillimeetri jämeduse terastraadi otsa, siis selgub, et pikenemine on jämedamate traatide juures vastavalt 2, 3, 4 j. n. e. korda väiksem. **Pikenemine on seega ümberpöördult proportsionaalne traadi jämedusega.**

On traadi aine elastsusmoodul *E*, siis pikeneb 1 kvadraatmillimeetri jämedune ja *l* meetri pikkune traat ühe kilogrammi mõjul $\frac{l}{E}$ meetrit (p. l); *P* kilogrammi mõjul pikeneb sama traat *P* korda rohkem $(P.\frac{l}{E})$; on aga traadi jämedus $q$ $mm^2$, siis on pikenemine $q$ korda väiksem, s. t.

$$\text{pikenemine } \lambda = \frac{\mathbf{P.\,l}}{\mathbf{E.\,q}} \tag{98}$$

Sellest formulis leidub

$$E = \frac{P.\,l}{\lambda.\,q}$$

kui teha $q = 1$ $mm^2$ ning $\lambda = l$, siis järgneb sellest, et $E = P$. Järjelikult võrdub elastsusmoodul selle jõuga $(P)$, mille mõjul 1$mm^2$ jämedune traat pikeneb oma algpikkuse võrra $(\lambda = l)$. Selle juures oletatakse et venimine sünnib kogu aeg elastsuse piirides.

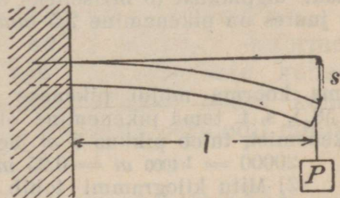
4) Kuna aine ei ole kunagi üsna ühtlane, siis nõutakse tehnikas, et igal kehal oleks teatav vastupidavuse tagavara. Sellepärast ei tohi olla keha koorem suurem, kui umbes $^1/_6$—$^1/_{10}$ sellest koormast, millel ta katkeb (n. n. lubatav koormatus). Katkeb terastraat näiteks 60 $kg/mm^2$ juures, siis on

tema lubatav koormatus kõigest $^1/_6 \cdot 60 = 10\ kg/mm^2$. Harilikult on lubatav koormatus väiksem kui elastsuspiir.

Katkemiskoorem, elastsusmoodul ja elastsuspiir olenevad tuntavalt temperatuurist, sellest, milkombel on keha valmistatud ja veel teistest teguritest. Keskmiselt on neil järgmised väärtused.

| | E | Elast.-piir | Katkemiskoorem |
|---|---|---|---|
| Tammepuu (pikuti) . . . | 1000 | — | 11 kg/mm² |
| Tina . . . . . . . . | 1700 | 0,25 kg/mm² | 2 „ |
| Vask. . . . . . . . | 12000 | 12 „ | 40 „ |
| Raud, teras . . . . . . | 20000 | 30-33 „ | 60-70 „ |
| Nikkelteras . . . . . . | 25000 | kuni 60 „ | kuni 100 „ |

§ 59. **Painutamine ja keerutamine. Hooke seadus.** 1) Varva paindumisel (joon. 176) pikeneb tema pealmine ning lüheneb tema alumine pind. Ainult varva keskkohas leidub n. n. n e k t r a a l k i h t, mis paindumisel ei pikene ega lühene. Et pikenemise (samuti ka lühenemise) suurus oleneb varva aine elastsusmoodulist *(E)*, siis peab viimasest olenema ka p a i n d u m i s e s u u r u s *s*.

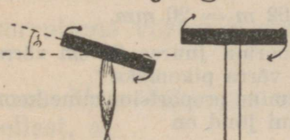


Joon. 176.

On *l* varva pikkus, *h* tema kõrgus ja *b* = laius, siis on

$$\text{paindumine } \mathbf{s} = \frac{4\,\mathbf{P}\,\mathbf{l}^3}{\mathbf{E}.\mathbf{b}\,\mathbf{h}^3} \tag{99}$$

Katsed näitavad, et laud paindub serviti palju vähem kui lapiti: paindumine on seda väiksem, mida k õ r g e m on painduv keha. Igal juhusel aga on **paindumine proportsionaalne painutava jõuga *P*.**


Joon. 177.

Kui traati ehk paela k e e r u t a d a (joon. 177), siis keerduvad piki traati sihitud moleküülidekiud spiraalisarnaselt keerdu. Äärmised kiud peavad sellejuures pikenema; k e e r d u m i s e s u u r u s, s. t. see nurk $\varphi$, mille võrra pöördub traadi ots antud jõu mõjul, oleneb järjelikult traadi elastsusmoodulist, mis määrab pikenemise suuruse. Katsed näitavad, et **keerdumisnurk on alati proportsionaalne pöördemomendiga.**

Sellel seadusel põhjeneb k e e r d k a a l u d e printsiip (§ $54_2$), mida tarvitatakse väga väikeste jõudude mõõtmiseks: Juurdlus näitab nimelt, et keerutatava traadi otsas rippuva koorma raskus (traadi pinge) e i m õ j u üldse keerdumisnurga suuruse peale; viimane on päriproportsionaalne ainult keerutava jõuga ja traadi pikkusega, ta on ümberpöördult proportsionaalne traadi raadiuse neljanda astmega. Kui traat on küllalt peenike, siis keerab juba väga väike jõud teda suure nurga $\varphi$ võrra, mida võib täpilt mõõta. Tundes traadi elastsusmoodulit, tema pikkust ja jämedust, võime keerdumisnurga suuruse põhjal arvata välja pöördemomendi ja pöörava jõu suuruse.

3) Nagu venimisel, paindumisel ja keerdumisel, nii leitakse, et ka igasugusel teisel **deformatsioonil on elastsuse piirides deformeeriva jõu suurus alati proportsionaalne deformatsiooni enese suurusega.** Seda üldist seadust tuntakse nimetuse all Hooke seadus (1679). Tema põhjal ongi näiteks ka vedrukaalu pikenemine proportsionaalne koormaga.

**Näited:** 1) 5 meetri pikkune ja 2 $mm^2$ jämedune raudtraat venib 20 kilogrammilise koorma mõjul 2,5 *mm*. Kui suur on traadi elastsusmoodul $E$?

§ $58_1$ järele on $E$ see arv, millega tuleb jagada 1 $mm^2$ jämeduse traadi algpikkust (5 *m*) selleks et leida tema pikenemist 1 *kg* mõjul. 20 *kg* juures on pikenemine 2,5 *mm*; 1 *kg* juures on ta järjelikult

$$\frac{2.5}{20} = 0{,}125\ mm.$$

Sama koorma mõjul pikeneks 1 $mm^2$ jämedune traat 2 korda rohkem (§ $58_3$), s. t. tema pikenemine oleks $2 \times 0{,}125 = 0{,}25\ mm$. Et saada seda pikenemist, tuleb pikkus 5 *m* jagada arvuga 20000, sest 5 *m*:

$20000 = 1/4000\ m = 0{,}25\ mm$. Seega ongi $E = 20000$.

2) Mitu kilogrammi tohib riputada sama traadi otsa, kui lubatud koormatus võib olla 1/6 katkemiskoormast?

Tabeli järele (§ $58_4$) on raua katkemiskoorem umbes 60 $kg/mm^2$. Järjelikult on lubatav koormatus $1/6 . 60 = 10\ kg/mm^2$. Et traadi jämedus on 2 $mm^2$, siis võib traadi otsas rippuda

$$10\ kg/mm^2 \times 2\ mm^2 = 20\ kg.$$

3) Missuguse koorma juures katkeb 5 $mm^2$ jämedune vasktraat?

Vase katkemiskoorem on tabeli järele umbes 40 $kg/mm^2$. Seega katkeb traat

$$40\ kg/mm^2 \times 5\ mm^2 = 200 \text{ kilogrammi juures.}$$

4) Kui palju pikeneb 10 $mm^2$ jämedune ja 25 *m* pikkune nikkelterastraat koorma juures $P = 200\ kg$?

Tabeli järele on $E = 25000$. Pikenemine on formuli (98) järele:

$$\lambda = \frac{P}{E.\ q} . \ l = \frac{200}{25000 . 10} . \ 25\ m = 0{,}02\ m = 20\ mm.$$

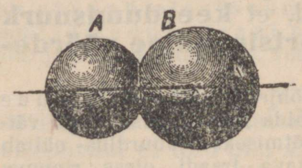
5) Spiraalverdu venib 1 kilogrammilise koorma juures 20 *cm* võrra. Kui suur on see jõud, mis venitab vedru 1 *cm* võrra pikemaks?

Hooke seaduse järele on ka vedru pikenemine proportsionaalne koormaga. Järjelikult pikeneb vedru 1 *cm* võrra, kui jõud on

$$\frac{1\ kg}{20} = 50\ g.$$

## § 60. Põrge. Liikumishulk ja jõuimpulss.

1) Asub keha $A$ teel mingi teine keha $B$, siis põrkuvad kehad kokku. Inertsuse tõttu liigub keha $A$ ka siis veel endises sihis vähe edasi, kui mõlemad kehad on puutunud kokku. Selle tagajärjel tekib kehade vahel lühiajaline rõhumine, mis peab olema ühesuurune ning ühevälteline nii ühe kui teise keha jaoks (mõju ja



Joon. 178.

vastumõju seadus). Selle järele, kas on nimetatud rõhu siht päri või vastu keha liikumist, kiirendab või aeglastab ta keha.

Põrkunud kehad deformeeruvad ülevalnimetatud survel: kerade kumer pind pigistub näiteks lamedaks (joon. 178). Mitteelastsete kehade kuju jääb lõpulikult seesuguseks, nagu ta oli deformatsiooni lõpul; need kehad liiguvad peale põrget üheskoos edasi, sest pole jõudu, mis neid lahutaks. Elastsete kehade kuju aga deformeerub ainult silmapilguks; niipea kui deformeerumine lõppenud, kehaneb surve ning kehad hakkavad võtma tagasi oma algkuju: lamedakspigistunud kerapind hakkab näiteks paisuma kumeraks. Ka paisumisel rõhuvad kerad teine-teist, ja nimelt seni, kuni nende kuju saab endiseks. Paisumisel ilmuva survega aga tõukuvad kerad üks-teisest eemale: elastsed kehad liiguvad sellepärast peale põrget lahus.

Elastsete kehade põrkel on nii siis 2 perioodi: deformeerumisperiood, mis on täiesti sarnane mitteelastsete kehade põrkega, ning deformatsiooni kadumise periood, millel kehad lahutuvad teine-teisest. Nii esimesel kui teisel perioodil muutuvad kehade kiirused.

Et ka elastsed kehad tõepoolest deformeeruvad kokkupõrkel, seda tõestab näiteks asjaolu, et vastu seina visatud märg kummipall jätab seinale suurema märja ringi: Viimane võib kujuneda ainult siis, kui palli kumer pind võtab ringi piirkonnas tasapinnalise kuju, s. t. kui ta deformeerub.

2) Kokkupõrke ajal mõjub kehadevaheline surve väga lühikese aja vältel. Selle surve suuruse ning tema tekitatud liikumismuutumise arvestust hõlbustab järgmine seadus:

Konstant jõu $P$ mõjul omandagu keha aja $t$ jooksul kiiruse

$$v = pt;$$

korrutame võrrandi mõlemad pooled keha massiga $M$:

$$Mv = Mpt;$$

kuna $Mp$ = liikumist tekitav jõud $P$ (formul 43), siis järgneb sellest, et

$$\mathbf{Pt = Mv} \tag{100}$$

Korrutist $P \times t$ = jõud $\times$ mõjumisaeg hüütakse jõuimpulsiks; korrutist $M \times v$ = mass $\times$ lõppkiirus nimetatakse liikumishulgaks. Leitud võrrand ütleb nii siis, et **liikumishulk võrdub jõuimpulsiga.**

Need uued mõisted hõlbustavad kõigi seesuguste liikumiste käsitlemist, mille põhjuseks on silmapilkselt mõjuvad jõud. Eriti käepärased on nad sel juhusel, kui kahe keha vahel mõjub ühesuurune surve ($P$) ühepikkusel ajavältel ($t$), nagu see sünnib näiteks põrkel (p. 1): Kuna $P$ ja $t$ on mõlema keha jaoks üks ja sama, siis mõjub põrkuvate kehade peale üks ja sama jõuimpulss $Pt$; võrrandi (100) põhjal peavad aga siis mõlemad kehad saama ka **ühesuuruse liikumishulga.** Annab üks ja sama jõuimpulss kehadele $M_1$ ja $M_2$ kiirused $v_1$ ja $v_2$, siis on järjelikult

$$M_1 v_1 = M_2 v_2$$

ehk

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M_2}{M_1} \qquad (101)$$

s. t. **ühe ja sama jõuimpulsiga liikumatõugatud kehade kiirused on ümberpöördult proportsionaalsed kehade massidega.**

**Näide:** Suurtükis mõjub plahvatusjõud ühetugevuselt nii kuuli kui suurtüki enese peale. Kui suurtüki tagasiliikumine ei oleks takistatud, siis lööks suurtükk iga paugu juures tagasi ning omandaks selle juures kiiruse $v_2$, nii et

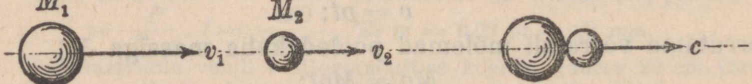
$$\frac{\text{suurtüki kiirus } v_2}{\text{kuuli kiirus } v_1} = \frac{\text{kuuli mass } M_1}{\text{suurtüki mass } M_2}$$

Lendab kuul suurtükist välja kiirusega $v_1 = 500\ m/sec$ ning on tema mass $M_1 = 10\ kg$, suurtüki enese mass aga $M_2 = 2000\ kg$, siis leidub sellest, et suurtükk hakkas liikuma tagasi lõppkiirusega

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{M_1}{M_2} = 500\ m/sec\ \frac{10\ kg}{2000\ kg} = 2{,}5\ m/sec.$$

§ 61. **Kerade sentraalpõrge.** 1) Põrget hüütakse **sentraalseks**, kui põrkuvate kehade $M_1$ ja $M_2$ (joon. 179) raskuspunktid (kerade sentrumid) liiguvad enne põrget ühel ja samal sirgjoonel. Sel puhul on põrke surved sihitud läbi kehade raskuspunktide, mille tõttu kehad tõukuvad ainult edasiliikuma, mitte tiirlema.

On kehad **mitteelastsed,** siis põrkub kiiremini liikuv keha $M_1$ (joon. 179) vastu aeglasemalt liikuvat keha $M_2$ ($v_1 > v_2$)




Joon. 179.

ning mõlemad liiguvad peale põrget kiirusega $c$ **üheskoos** edasi (§ $60_1$). Põrkel kahaneb seega $M_1$ kiirus suuruse $v_1 - c$ võrra ning kasvab $M_2$ kiirus suuruse $c - v_2$ võrra. Kiiruste kahanemist ja kasvamist võib pidada neiks komponent-kiirusteks, mille kehad omandavad põrkel tekkiva surve mõjul. Et need komponent-kiirused tekivad ühe ja sama jõuimpulsi mõjul, siis peab formuli (101) järele olema

$$\frac{v_1 - c}{c - v_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

ehk

$$c = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2} \qquad (102)$$

Sellest järgneb, et $c \cdot (M_1 + M_2) = M_1 v_1 + M_2 v_2$. Kuna $c \cdot (M_1 + M_2)$ kujutab mõlema keha liikumise koguhulka peale põrget, $M_1 v_1 + M_2 v_2$ nende liikumishulkade summat enne põrget, siis järgneb sellest, et kehade koguliikumishulk on peale põrget sama suur kui enne põrget.

Teisiti on asjaolu mitteelastsete kehade hooga ehk liikumisenergiaga: Enne põrget on kehade liikumisenergia

$$\frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2}$$

Peale põrget on ta

$$\frac{(M_1 + M_2) \cdot c^2}{2}$$

Formuli (102) abil leiame, et nende energiate vahe on

$$\left(\frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(M_1 + M_2) \cdot c^2}{2} = \frac{M_1 M_2 (v_1 - v_2)^2}{2 (M_1 + M_2)}$$

mis näitab, et põrkel läheb osa energiat kaduma. Kadunud liikumisenergia moondub põrkel soojuseks, heliks ja teisteks energiateks, nii et see kaotus on ainult näiv.

Liigub üks kera $(M_2)$ vastu teist, siis tuleb formulis (102) võtta $v_2$ negatiivse märgiga $(v_2 < 0)$. Sel puhul on lõpulik kiirus $c$ väiksem kui eelmisel juhusel. Ta muutub nulliks, kui $M_1 v_1 - M_2 v_2 = 0$, ehk kui $M_1 = M_2$ ning $v_1 = v_2$, s. t. kui ühesuurused mitteelastsed kerad liiguvad võrdse kiirusega üks-teise vastu, siis jäävad nad peale põrget seisma.

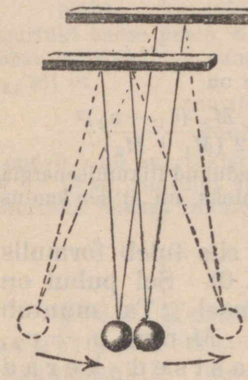
2) **Elastses** kehas on deformatsioon proportsionaalne survega. Niipea kui surve kaob, tõukub deformeeritud koht sama jõuga tagasi, missugusega teda suruti deformeerumisel. Sellepärast peab olema kehadevaheline jõuimpulss deformatsiooni kadumise perioodil sama suur kui deformeerumise enese perioodilgi (§ $60_1$). Deformeerumise perioodil tasandab põrge kehade algkiirusi $v_1$ ja $v_2$ kuni võrdse suuruseni $c$ (formul 102), s. t. ta vähendab $M_1$ kiirust $(v_1 - c)$ võrra ning tõstab $M_2$ kiirust $(c - v_2)$ võrra. Deformatsiooni kadumise perioodil muudab samasuur jõuimpulss neid kiirusi veel samavõrra, s. t. ta vähendab $M_1$ kiirust veel $(v_1 - c)$ võrra ning tõstab $M_2$ kiirust veel $(c - v_2)$ võrra. Lõpulikult kahaneb siis $M_1$ kiirus $2 (v_1 - c)$ ning kasvab $M_2$ kiirus $2 (c - v_2)$ võrra. Peale põrget on seega $M_1$ kiirus $c_1 = v_1 - 2 (v_1 - c) = 2c - v_1$, ning $M_2$ kiirus on $c_2 = v_2 + 2 (c - v_2) = 2c - v_2$. Kui $c$ asemele panna tema väärtus formulist (102), siis saame

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 2c - v_1 = \frac{2M_2 v_2 + (M_1 - M_2). v_1}{M_1 + M_2} \\ c_2 &= 2c - v_2 = \frac{2M_1 v_1 + (M_2 - M_1). v^2}{M_1 + M_2} \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

**Erijuhused:** a) On $M_1 = M_2$, siis leiame sellest formulist, et $c_1 = v_2$ ning $c_2 = v_1$, s. t. ühesuurused elastsed kehad vahetavad kokkupõrkel oma kiirused.

b) On $M_1 = M_2$ ning $v_2 = 0$, siis leidub, et $c_1 = 0$ ning $c_2 = v_1$: põrkub elastne keha vastu samasuurt paigalseisvat keha, siis jääb esimene keha seisma, teine aga hakkab liikuma esimese algkiirusega ($v_1$).

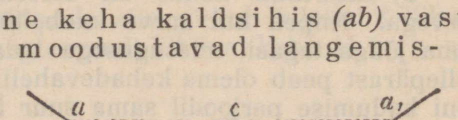
Seda seadust tõestatakse katseliselt niitide otsa riputatud elevandiluust keradega (joon. 180): Kui tõmmata üks kera teatava nurga võrra kaldu, siis langeb ta teist kera vastu ning jääb peale põrget seisma, kuna teine kera lendab sama nurga võrra teisele poole. Viimane asjaolu tõestabki, et teine kera omandab põrkel sama kiiruse, mis oli esimesel põrkumise silmapilgul, sest ilma põrketa oleks ka esimene kera lennanud samakaugele teisele poole.



Joon. 180.

c) On $v_2 = 0$ ning $M_2$ lõpmatu suur, siis võib pidada esimese kera massi nulliks ($M_1 = 0$). Sel juhusel on $c_1 = - M_2 v_1 : M_2 = - v_1$ ning $c_2 = 0 : M_2 = 0$: Põrkub elastne keha vastu lõpmatu suurt paigalseisvat keha (näteks seina), siis jääb suur keha endiselt seisma, kuna väike põrkub oma algkiirusega tagasi.

d) Põrkub elastne keha kaldsihis *(ab)* vastu elastset seina, siis moodustavad langemis- ja põrkumissihid *(ab* ja *ba₁)* seinaga võrdsed nurgad (joon. 181). Langemissihi ja seinanormaali *(bc)* vahelist nurka *abc* hüütakse langemisnurgaks; vastavalt nimetatakse nurka $a_1bc$ peegeldusnurgaks.




Joon. 181.

Nimetatud seadus ütleb nii siis, et **elastsel põrkel võrdub langemisnurk peegeldusnurgaga.** Seda seadust võib tõestada katseliselt vastu seina visatud kummipalliga, piljardi äärt vastu tõugatud piljardkeraga j. n. e.

Teoreetiliselt tõestub ta kiiruste paralleelogrammiga: Langemiskiirus *ab* lahutub komponentideks *cb* ja *db* Komponent *cb*, mis on sihitud perpendikulaarselt vastu seina, pöördub põrkel otse vastupidiseks, ilma et muutuks tema suurus (seadus *c*). Komponendil *db* ei ole mingit takistust;

sellepärast jääb ta ka peale põrget samasihiliseks ja samasuuruseks $(bd_1)$. Tagasipõrkumine sünnib komponentide $bd_1$ ja $bc$ resultantkiirusena $ba_1$. Kuna $ad = a_1 d_1$ ja $bd = bd_1$, siis on $\sphericalangle\, abc = \sphericalangle\, a_1 bc$.

**Täitsa elastsete kehade põrkel ei lähe liikumisenergiat kaduma, vaid kehade hoogude summa on enne ja pärast põrget ühesuurune.**

Kuna kehade liikumishulk ei muutu põrke deformatsiooni-perioodil (v. mitteelastne põrge. p. l), siis ei või ta muutuda ka deformatsiooni kadumise perioodil, sest mõlemad perioodid on sarnased. Järjelikult on $M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$ ehk

$$M_1 (v_1 - c_1) = M_2 (c_2 - v_2)$$

Formulitest (103) saame mahaarvamise teel, et $c_1 - c_2 = v_2 - v_1$, ehk

$$(v_1 + c_1) = (v_2 + c_2)$$

Korrutades need 2 võrrandit teine-teisega saame:

$$M_1 (v_1^2 - c_1^2) = M_2 (c_2^2 - v_2^2)$$

ehk $$\frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2} = \frac{M_1 c_1^2}{2} + \frac{M_2 c_2^2}{2}$$

**Näited:** 1) Püssikuuli kiiruse mõõtmiseks sihitakse kuul nööri otsas rippuva puutüki sisse (ballistne pendel), mille kaal on $M_2 = 15\ kg$. Puutüki õõtsumisamplituudist võib arvata välja, et kuul andis talle algkiiruse $c = 2{,}5\ m/sec$. Missugune oli kuuli kiirus $(x)$ põrke silmapilgul, kui tema mass $M_1 = 30\ g$?

Kuuli tungimine puutüki sisse on mitteelastne põrge. Formulist (102) leidub, et esimese keha (kuuli) kiirus oli:

$$v_1 = x = \frac{c\,(M_1 + M_2) - M_2 v_2}{M_1}$$

Kuna teine keha (puutükk) seisis alguses paigal, siis on $v_2 = 0$, ning

$$x = c\left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) = 2{,}5\ m/sec \times \left(1 + \frac{15\ \text{kg}}{0{,}03\ \text{kg}}\right) \backsimeq 1250\ m/sec.$$

2) Kaks mitteelastset tinakera $M_1 = 10\ kg$ ja $M_2 = 2\ kg$ liiguvad teine-teise vastu kiirusega $v_1 = 5\ m/sec$ ja $v_2 = 11\ m/sec$. Kui suur on kerade kiirus peale põrget?

Formulis (102) tuleb $v_2$ võtta negatiivse märgiga, s. t.

$$c = \frac{10\ kg.\ 5\ m/sec - 2\ kg.\ 11\ m/sec}{10\ kg + 2\ kg} = 2{,}33\ m/sec$$

mõlemad kerad liiguvad peale põrget koos, ja nimelt $v_1$ sihis, sest kiirusel $c$ on sama märk kui $v_1$.

3) Kaks elastset keha, mille massid suhtuvad kui $M_1 : M_2 = 1 : 3$, põrkuvad ühesuuruste kiirustega teine-teise vastu. Missuguste kiirustega liiguvad nad peale põrget?

Formulites (103) on $M_2 = 3M_1$ ning $v_2 = -v_1$, sest et $M_2$ liigub vastu $M_1$. Järjelikult on

$$v_1 = \frac{-2 \,.\, 3M_1 \,.\, v_1 + (M_1 - 3M_1) \,.\, v_1}{M_1 + 3M_1} = -2v_1$$

$$c_2 = \frac{2M_1\, v_1 - (3M_1 - M_1) \,.\, v_1}{M_1 + 3M_1} = 0$$

Väiksem kera $(M_1)$ põrkub nii siis kahekordse algkiirusega $(2v_1)$ tagasi, suurem kera aga jääb seisma $(c_2 = O)$.

---