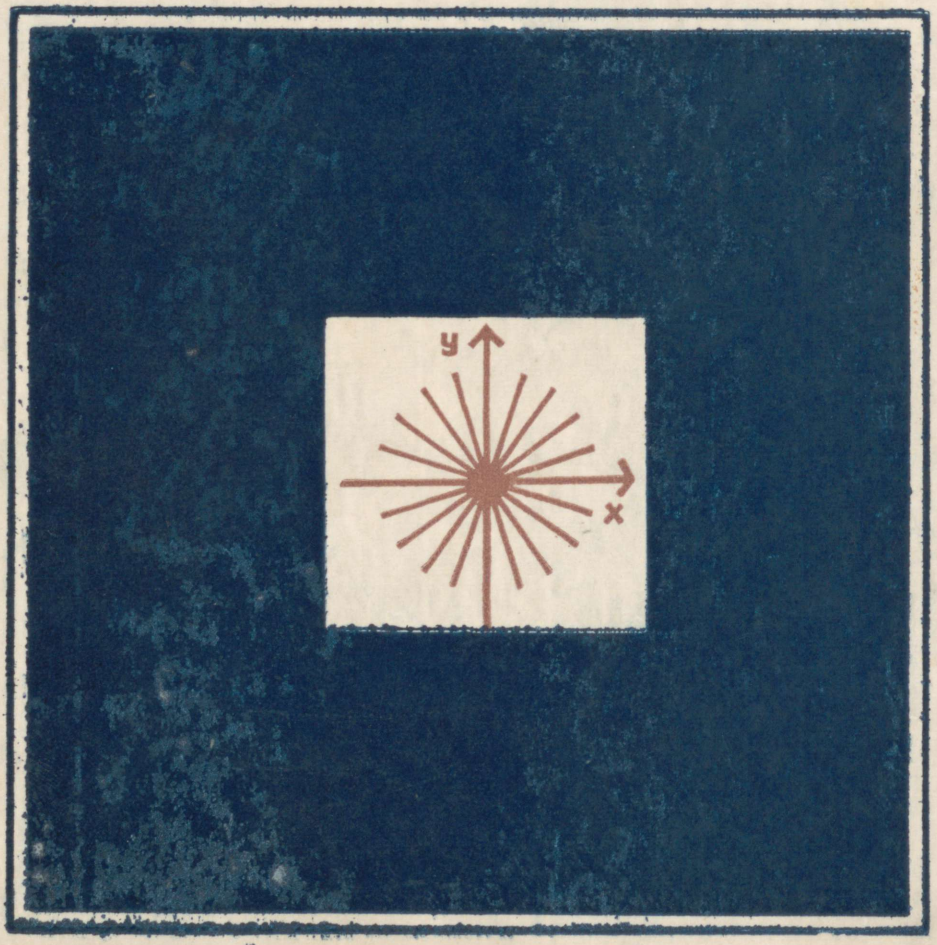
O. PRINITS

TÄIENDAVAID PEATÜKKE MATEMAATIKAST MATEMAATIKA-KLASSIDELE



A - 29619

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

O. PRINITS

TÄIENDAVAID PEATÜKKE MATEMAATIKAST MATEMAATIKA-KLASSIDELE

KIRJASTUS «VALGUS» · TALLINN 1969

51
P77

Kunstiliselt kujundanud J. Arrak

2
TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU
229437

1. KOORDINAATIDE MEETOD.

Meetodit, mis võimaldab arvude abil määrata punkti asukohta tasapinnal, nimetatakse **koordinaatide meetodiks.** Tunneme koordinaatide meetodit, mis tugineb ristuvatele koordinaattelgedele. Punkti asukohta määravaid arve nimetatakse sel juhul **ristkoordinaatideks** või analüütilise geomeetria looja, prantsuse matemaatiku ja filosoofi René Descartes'i [loe: dekaart] nime järgi **Descartes'i koordinaatideks.**

Koordinaatide meetodi põhiülesanneteks on:

1) *leida antud punkti koordinaadid,*
2) *antud koordinaatide järgi määrata punkti asukoht.*

Koordinaatide meetod on aga rakendatav veel paljude teiste ülesannete lahendamiseks, näiteks kahe punkti vahelise kauguse määramine nende punktide koordinaatide kaudu, lõiku antud suhtes jaotava punkti leidmine (s. t. selle punkti koordinaatide kindlaksmääramine), kolmnurga pindala leidmine tema tippude koordinaatide abil jne. Tutvumegi nimetatud ülesannete lahendustega.

1.1. KAHE PUNKTI VAHELINE KAUGUS.

Ülesanne. On antud kaks punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ (joon. 1). Leida nende punktide vaheline kaugus.

Lahendus. Antud punktide vahelise kauguse ruudu saame avaldada Pythagorase teoreemi põhjal kolmnurgast ABC:

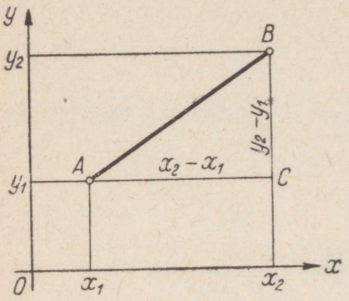
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Siit saamegi antud ülesande lahenduse **kahe punkti vahelise kauguse valemina**:

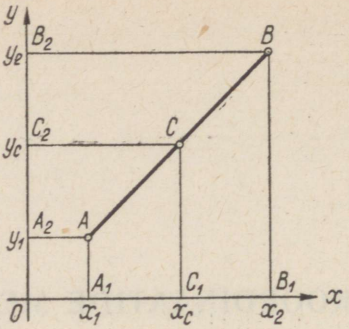
$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

Märkus. Et lõigu pikkus on alati positiivne arv, siis jäetakse ruutjuure sümboli ette märgid $\pm$ panemata.

Näide. Leida punktide $A(-4; -5)$ ja $B(2; 3)$ vaheline kaugus.



Joon. 1.



Joon. 2.

Kasutades leitud valemit saame, et

$$d = \sqrt{[2-(-4)]^2 + [3-(-5)]^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

Punktide A ja B vaheline kaugus on 10 pikkusühikut.

1. 2. LÕIGU JAOTAMINE ANTUD SUHTES.

Ülesanne. On antud punktid $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ (joon. 2). Leida nende punktide vahelisel lõigul punkt, mis jaotab antud lõigu suhtes $m : n$.

Lahendus. Olgu otsitavaks punktiks $C(x_c; y_c)$.

Siis

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

Et nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad nurga haaradel võrdelised lõigud, siis ka

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{m}{n}.$$

Et $A_1C_1 = x_c - x_1$ ja $C_1B_1 = x_2 - x_c$, siis

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{m}{n},$$

millest

$$x_c = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}.$$

Samuti veendume, et

$$y_c = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

Seega on otsitavaks punktiks

$$C\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n};\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right).$$

Näide. Leida punkt C, mis jaotab punktide $A(1;\ 2)$ ja $B(-1;\ 4)$ vahelise lõigu suhtes $1:2$.

Kasutades leitud valemeid võime kirjutada, et

$$x_c=\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 1}{1+2}=\frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad y_c=\frac{1\cdot 4+2\cdot 2}{1+2}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

Seega on otsitavaks punktiks $C(\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{3})$.

1.3. LÕIGU KESKPUNKTI KOORDINAADID.

Kui lõigu jaotamise ülesandes võtta $m=n=1$, siis on punkt C lõigu AB keskpunktiks ja tema koordinaadid avalduvad järgmiselt:

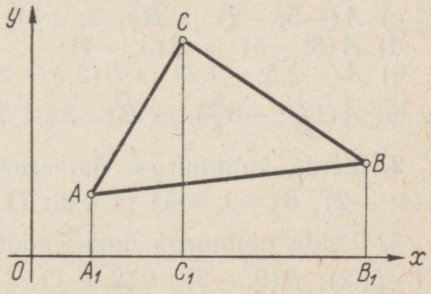
$$x_c=\frac{x_2+x_1}{2} \quad \text{ja} \quad y_c=\frac{y_2+y_1}{2}.$$

Seega,
lõigu keskpunkti koordinaadid on tema otspunktide vastavate koordinaatide aritmeetilised keskmised.

1.4. KOLMNURGA PINDALA.

Ülesanne. On antud kolmnurk tippudega punktides $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ ja $C(x_3;\ y_3)$ (joon. 3). Leida selle kolmnurga pindala.

Lahendus. Avaldame antud kolmnurga pindala trapetsite AA_1C_1C, CC_1B_1B ja AA_1B_1B pindalade kaudu. Tähistades kolmnurga pindala tähega S ja trapetsite pindalad vastavalt sümbolitega S_1, S_2, S_3, siis, nagu näeme jooniselt 3,



Joon. 3.

$S = S_1 + S_2 - S_3$.

Avaldame nüüd nende trapetsite pindalad koordinaatides:

$$S_1 = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) = \frac{1}{2}(y_1x_3 - y_1x_1 + y_3x_3 - y_3x_1),$$

$$S_2 = \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_3) = \frac{1}{2}(y_3x_2 - y_3x_3 + y_2x_2 - y_2x_3),$$

$$S_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(y_1x_2 - y_1x_1 + y_2x_2 - y_2x_1).$$

Ja siit avaldame pindala S, võttes esmalt kokku need liikmed, mis sisaldavad koordinaati x_1, siis need, mis sisaldavad koordinaati x_2, ja lõpuks need, mis sisaldavad koordinaati x_3:

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Pindala arvuline väärtus tuleb saadud valemi põhjal negatiivne, kui kolmnurga tipud järjestuvad kellaosuti liikumise suunas. Et pindala mõõtarv on alati positiivne, siis pannakse saadud avaldis absoluutväärtuse märkide vahele. Niisiis

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|.}$$

Näide. Leida kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud on $A(1; 1)$; $B(2; 8)$ ja $C(4; 6)$.

$$S = \frac{1}{2}|1(8 - 6) + 2(6 - 1) + 4(1 - 8)| = \frac{1}{2}|2 + 10 - 28| = 8.$$

Kolmnurga pindala on 8 ruutühikut.

Ülesandeid.

1. Leida punktide A ja B vaheline kaugus, kui

a) $A(4; 2)$ ja $B(6; 10)$;
b) $A(-2; 4)$ ja $B(-5; 8)$;
c) $A(-5; -2)$ ja $B(-2; -5)$;
d) $A(8; -5)$ ja $B(3; -4)$;
e) $A(-3{,}5; -1{,}3)$ ja $B(2{,}7; -3{,}8)$;
f) $A(1\frac{3}{4}; -3\frac{5}{6})$ ja $B(-3\frac{3}{8}; 2\frac{7}{12})$.

2. Leida kolmnurga ümbermõõt, kui kolmnurga tipud on $A(4; -2)$, $B(-3; -4)$ ja $C(0; 7)$.

3. Leida nelinurga ümbermõõt, kui nelinurga tipud on $A(-5; 2)$; $B(0; -3)$; $C(2; -1)$; $D(1; 4)$.

4. Jagada lõik AB osadeks, mis suhtuvad nagu 4 : 3, kui $A(-2; 5)$ ja $B(12; 7)$.

5. Leida lõigu AB keskpunkt, kui $A(-6; 3)$ ja $B(-5; 2)$.

6. Leida kolmnurga ABC külgede keskpunktide koordinaadid, kui $A(-4; -5)$, $B(2; -6)$ ja $C(-1; 5)$.

7. Leida kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt M, kui $A(2; -1)$, $B(4; 3)$ ja $C(-2; 1)$.

8. Leida kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti koordinaadid, kui $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ ja $C(x_3; y_3)$.

9. Leida kolmnurga ABC mediaanide pikkused ja mediaanide lõikepunkt, kui $A(1; -1)$, $B(6; 4)$ ja $C(2; 6)$.

10. Leida kolmnurga ABC pindala, kui $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ ja $C(2; 6)$.

11. Kasutades kolmnurga pindala valemit, teha kindlaks, kas punktid $A(1; 1)$, $B(-1; 7)$ ja $C(0; 4)$ asetsevad ühel ja samal sirgel või mitte.

12. Kas punktid $A(1; 2)$, $B(2; 3)$ ja $C(3; 4)$ asetsevad ühel ja samal sirgel?

13. Leida kolme punkti ühel sirgel asetsemise tingimus, kui üks punktidest on koordinaatide alguspunkt.

14. Leida nelinurga $ABCD$ pindala, kui $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ ja $D(5; -2)$.

15. Leida kolmnurga ABC tipust A tõmmatud sisenurga poolitaja pikkus, kui $A(5; -1)$, $B(-1; 7)$ ja $C(1; 2)$.

16. Kolmnurga tipud on $A(4; -2)$, $B(-1; -5)$, $C(0; 2)$. Leida selle kolmnurga ümbermõõt, pindala, mediaanide lõikepunkt ja tipust B tõmmatud sisenurga poolitaja pikkus.

2. SIRGE VÕRRAND.

2.1. SIRGE VÕRRANDI ERIKUJUSID.

IX klassi matemaatika põhikursuses on esitatud mitu oma kujult erinevat sirge võrrandit.

1) Kui sirge lõikab koordinaattelgi punktides $A(p; 0)$ ja $B(0; q)$ (joon. 4), siis on sirge võrrandiks

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

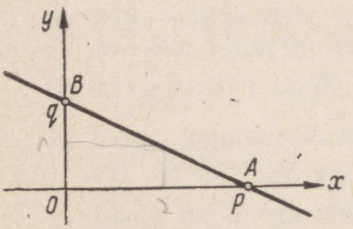
mida nimetatakse **sirge võrrandiks telglõikudes.**

2) Kui koordinaattelgedega mitteparalleelsest sirgest on antud tema kaks punkti: $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ (joon. 5), siis on sirge võrrandiks

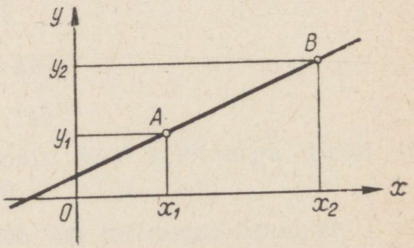
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

mida nimetatakse **kahe punktiga määratud sirge võrrandiks.**

3) Kui sirgest on antud tõusunurk α tema tangensi kaudu ($\tan \alpha = a$) ja punkt $P(0; b)$, kus sirge lõikab ordinaattelge, s. t. on antud algordinaat b (joon. 6), siis on sirge võrrandiks



Joon. 4.

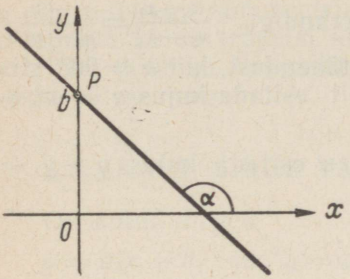


Joon. 5.

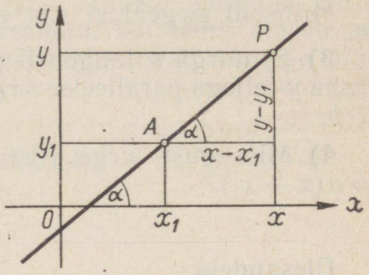
$$y = ax + b,$$

mida nimetatakse **tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrandiks.**

4) Tuletame nüüd sirge võrrandi juhul, kui on antud tema üks punkt $A(x_1; y_1)$ ja tõusunurk α. Jooniselt 7 näeme, et kui $P(x; y)$ on sirge mistahes punkt, siis



Joon. 6.



Joon. 7.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan \alpha$$

ehk, tähistades nagu varemgi $\tan \alpha = a$, saame **punkti ja tõusuga määratud sirge võrrandiks**

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

2.2. SIRGE VÕRRANDI UURIMINE.

1) Võrrandis $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ esinevad murrud. Neil puudub mõte, kui nimetaja on null. Seega peavad kehtima tingimused $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Kuidas asetseb sirge koordinaatteljestikus, kui punktide $A(p; 0)$ ja $B(0; q)$ koordinaatidest:

1) $p = 0$ ja $q \neq 0$,
2) $p \neq 0$ ja $q = 0$,
3) $p = 0$ ja $q = 0$?

Seega, kui sirge läbib koordinaatide alguspunkti, siis ei saa tema võrrandit esitada kujus $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

2) Võrrandi $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ kehtimiseks peavad olema täidetud tingimused $x_2 \neq x_1$ ja $y_2 \neq y_1$. Miks?

Kuidas asetseb sirge koordinaatteljestikus, kui tema punktide $A(x_1; y_1)$ *ja* $B(x_2; y_2)$ koordinaatide vahel kehtivad seosed:

1) $x_1 = x_2$; $y_1 \neq y_2$,
2) $x_1 \neq x_2$; $y_1 = y_2$,
3) $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$?

Milliseid sirgeid ei saa esitada võrrandiga $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$?

3) Et nurga α tangensil pole arvu tähendust, kui $\alpha = 90°$, siis ei saa y-teljega paralleelse sirge võrrandit esitada kujus $y = ax + b$.

4) Missuguse sirge võrrandit ei saa esitada kujus $y - y_1 = a(x - x_1)$?

Ülesandeid.

1. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkte A ja B, kui
a) $A(2; 0)$ ja $B(0; 3)$;
b) $A(3; 0)$ ja $B(0; -2)$;
c) $A(-2; 1)$ ja $B(-1; 2)$;
d) $A(0; 3)$ ja $B(2; 0)$;
e) $A(-3; -1)$ ja $B(-5; -3)$.

2. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti P ja mille tõusunurk on φ, kui
a) $P(1; 0)$ ja $\varphi = 120°$;
b) $P(-2; -2)$ ja $\varphi = 60°$;
c) $P(0; -2)$ ja $\varphi = 135°$;
d) $P(0; 7)$ ja $\varphi = 45°$.

3. Esitada ülesannetes 1 ja 2 saadud võrrandid kujul $Ax + By + C = 0$.

4. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkte
a) $A(2; 0)$ ja $B(0; -1)$;
b) $A(2; 1)$ ja $B(1; -1)$;
c) $A(2; 1)$ ja $B(-1; 1)$;
d) $A(2; -1)$ ja $B(2; 2)$.

5. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti A ja mille tõusunurk on α:
a) $A(4; -2)$, $\alpha = 24°$;
b) $A(-1; 3)$, $\alpha = 156°$;
c) $A(0; 2)$, $\alpha = 66°$;
d) $A(-3; 0)$ $\alpha = 130°$.

6. Leida kolmnurga ABC külgede keskpunkte ühendavate sirgete võrrandid, kui $A(5; -2)$, $B(-4; -3)$ ja $C(-1; 2)$.

7. Leida kolmnurga ABC mediaanide võrrandid, kui $A(3; 3)$, $B(-1; -4)$ ja $C(-4; 4)$.

8. Ruudu diagonaalid asetsevad koordinaattelgedel. Leida ruudu külgede võrrandid, kui

a) diagonaali pikkus on 6;

b) külje pikkus on 6.

9. y-teljega sümmeetrilise võrdhaarse trapetsi kesklõik ühtib x-teljega. Leida trapetsi külgede võrrandid, kui tema alused on x-teljest 2 ühiku kaugusel ja haarad moodustavad alumise alusega 45°-se nurga.

2.3. KAHE SIRGE VAHELINE NURK.

On antud sirged

$$y = a_1x + b_1 \quad \text{ja} \quad y = a_2x + b_2,$$

kus $a_1 = \tan\alpha_1$ ja $a_2 = \tan\alpha_2$ (joon. 8, a).

Teame, et kolmnurga välisnurk on võrdne temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga, s. t.

$$\alpha_1 = \gamma + \alpha_2$$

ehk

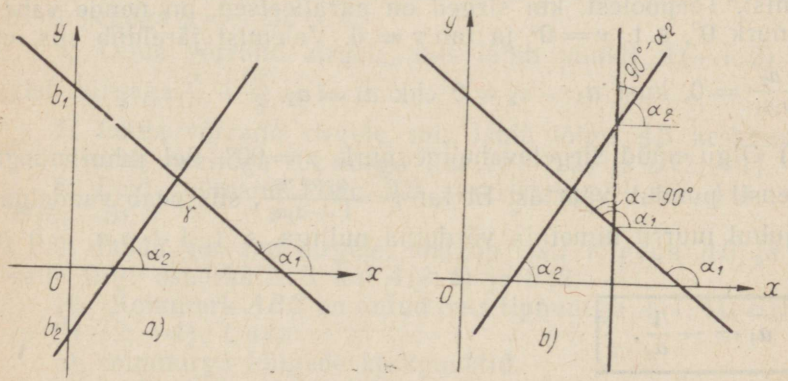
$$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$$

ja siit

$$\tan\gamma = \tan(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Kasutades nüüd kahe nurga vahe tangensi valemit, võime kirjutada, et

$$\tan\gamma = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}.$$



Joon. 8.

Et aga $\tan \alpha_1 = a_1$ ja $\tan \alpha_2 = a_2$, siis

$$\tan \gamma = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}.$$

Seega on sirgete võrrandites esineva tundmatu x kordajate abil võimalik leida nende sirgete vahelise nurga tangensit ja tabeleid kasutades selle kaudu ka sirgetevahelist nurka.

Näide. On antud sirged $y = 2x - 3$ ja $y = -x + 1$. Leida nende sirgete vaheline nurk.

Valemi põhjal

$$\tan \gamma = \frac{2 - (-1)}{1 + 2(-1)} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Kuna teravnurga tangens on positiivne ja nürinurga tangens negatiivne, siis saadud tulemus ütleb, et oleme leidnud nende sirgete vahelise nürinurga tangensi. Tabelite abil leiame, et

$\gamma = 108°26'$.

Kui suur on nende sirgete vaheline teravnurk?

Juhul, kui üks sirgetest on risti x-teljega, pole leitud valem sirgetevahelise nurga tangensi arvutamiseks rakendatav. Miks?

Kuidas leida sel juhul sirgetevahelist nurka (vt. joonist 8, b)?

2.4. SIRGETE PARALLEELSUS JA RISTSEIS.

1) Teame juba, et kui sirged $y = a_1 x + b_1$ ja $y = a_2 x + b_2$ on paralleelsed, siis

$$\boxed{a_1 = a_2.}$$

See tulemus järeldub ka kahe sirge vahelise nurga tangensi valemist. Tõepoolest, kui sirged on paralleelsed, on nende vaheline nurk 0°, s. t. $\gamma = 0°$ ja $\tan \gamma = 0$. Valemist järeldub siis, et

$\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} = 0$, kust $a_1 - a_2 = 0$ ehk $a_1 = a_2$.

2) Olgu nüüd sirgetevaheline nurk $\gamma = 90°$. Sel juhul nurga tangensil puudub väärtus. Et $\tan \gamma = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$, siis peab vaadeldaval juhul murru nimetaja võrduma nulliga, s. t. $1 + a_1 a_2 = 0$ ja siit

$$\boxed{a_1 = -\frac{1}{a_2},}$$

mis ongi **sirgete ristumise tunnus.**

Näide. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(3, -2)$ ja on risti sirgega $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Leiame otsitava sirge tõusu. Et antud sirge tõus $a_1 = \frac{1}{2}$, siis otsitava sirge tõus $a_2 = -\frac{1}{a_1} = -2$. Nüüd teame otsitavast sirgest üht punkti ja tõusu. Tema võrrand on seega

$$y + 2 = -2(x - 3)$$

ehk

$$y = -2x + 4.$$

Mis järeldub sellest, et antud sirge ja leitud sirge võrrandis algordinaadid on võrdsed?

Ülesandeid.

1. Leida nurk sirgete vahel, kui sirgete võrrandid on
   a) $y = 3x - 1$ ja $y = 2x + 3$;
   b) $y = -4x + 6$ ja $y = -x - 1$;
   c) $y = -2x - 1$ ja $y = 3x$;
   d) $y = 3$ ja $y = 3x + 1$;
   e) $x = -2$ ja $y = -2x + 3$;
   f) $y = 0$ ja $x = 0$.
2. Kolmnurga tipud on $A(-4; 0)$, $B(1; 3)$ ja $C(3; -1)$. Leida kolmnurga külgede võrrandid ja kolmnurga nurgad.
3. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $P(2; -3)$ ning on paralleelne sirgega $y = \frac{1}{2}x - 1$.
4. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(-4; -3)$ ja on paralleelne sirgega $y - 4 = 2(x + 3)$.
5. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $P(1; -2)$ ning on risti sirgega $y = -3x + 4$.
6. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(-1; 2)$ ja on risti sirgega $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.
7. Leida võrrand sirgele, mis läbib lõigu AB keskpunkti ja moodustab x-teljega 70° nurga, kui $A(-1; 3)$ ja $B(2; -1)$.
8. Leida võrrand lõigu AB keskristsirgele, kui $A(4; -3)$ ja $B(0; -5)$.
9. Leida võrrand sirgele, mis on risti lõiguga AB ja jagab selle lõigu osadeks 2 : 3, kui $A(3; 4)$ ja $B(2; -1)$.
10. Kolmnurk ABC on antud oma tippudega $A(1; 4)$, $B(5; -2)$ ja $C(-2; -4)$. Leida
    a) kolmnurga külgede keskpunktid,
    b) mediaanide võrrandid,
    c) mediaanide lõikepunkt,

d) külgede võrrandid,
e) kõrguste võrrandid,
f) kolmnurga nurgad,
g) külgede pikkused,
h) kolmnurga pindala.

11. Rööpküliku kolm tippu on $A(-3; 3)$, $B(0; 1)$ ja $C(3; 3)$. Leida neljanda tipu D koordinaadid.

12. Rööpküliku kolm tippu on $A(-2; 3)$, $B(-4; -4)$ ja $D(2; 5)$. Leida rööpküliku diagonaalide võrrandid ja rööpküliku nurgad.

13. Ruudu vastastipud on $A(-2; 3)$ ja $C(0; -1)$. Leida ruudu külgede ja diagonaalide võrrandid ning tippude B ja D koordinaadid.

14. Kolmnurga tipud on $A(3; -5)$, $B(-1; -1)$, $C(0; 6)$. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkt, raadius ja ringjoone pikkus.

15. Kas sirgete hulgas, mis on antud võrranditega:

a) $3x - 2y + 7 = 0$;
b) $6x - 4y - 9 = 0$;
c) $6x + 4y - 5 = 0$;
d) $2x + 3y - 6 = 0$;
e) $-x - y + 8 = 0$;
f) $x + y - 12 = 0$

leidub paralleelseid või ristuvaid sirgeid?

3. DETERMINANDID.

3. 1. KAHEREALINE DETERMINANT.

Olgu ülesandeks leida sirgete $a_1x + b_1y = c_1$ ja $a_2x + b_2y = c_2$ lõikepunkt. Selleks peame lahendama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Korrutame esimest võrrandit b_2-ga ja teist $(-b_1)$-ga, saame

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases}$$

Liites nüüd võrrandite vastavad pooled, koonduvad tundmatut y sisaldavad liikmed ja me saame

$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$,

millest

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Korrutades esimest võrrandit $(-a_2)$-ga ja teist a_1-ga, jõuame pärast võrrandite liitmist lahendini

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Näeme, et neis lahendeis nii lugejas kui ka nimetajas esineb kahest tegurist koosnevate korrutiste vahe.

Vahesid kujus $ad - bc$ nimetatakse **kaherealisteks determinantideks** ja tähistatakse

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Arve a, b, c ja d nimetatakse selle determinandi **elementideks.** Näiteks kirjutatakse:

$$2 \cdot 3 - (-4) \cdot 7 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$b_2c_1 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Et aga $b_2c_1 - b_1c_2 = c_1b_2 - c_2b_1$, siis

$$b_2c_1 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Seega esituvad antud võrrandisüsteemi lahendid determinantide kaudu järgmiselt:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Nimetajas oleva determinandi, nn. **süsteemi determinandi** elementideks on süsteemi tundmatute kordajad, lugejas olevate determinantide elemendid on aga saadud süsteemi determinandist vastava tundmatu kordajate asendamisel vabaliikmetega.

Näide. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -5x + 2y = 1. \end{cases}$$

Avaldame tundmatud determinantide jagatistena

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}.$$

Siit saame, et

$$x = \frac{8+3}{4-15} = \frac{11}{-11} = -1,$$

$$y = \frac{2+20}{4-15} = \frac{22}{-11} = -2.$$

Seega on antud võrrandisüsteemi lahendiks $x = -1$, $y = -2$. Kontrollige leitud tulemust!

3. 2. KAHEREALISE DETERMINANDI OMADUSED.

Determinandis üksteise kõrval asetsevad elemendid moodustavad determinandi rea ja üksteise all asetsevad elemendid determinandi veeru.

Vaatleme determinanti $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Temal on kaks rida a_1b_1 ja a_2b_2 ning kaks veergu a_1a_2 ja b_1b_2.

1) Teame, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Vahetame selles determinandis read ja veerud, s. t. vaatame determinanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

mis vastavalt determinandi definitsioonile on võrdne avaldisega

$a_1b_2 - a_2b_1$.

Seega,

determinandi väärtus ei muutu, kui tema read ja veerud vahetada.

2) Vaatleme nüüd niisugust kaherealist determinanti, mille saame, kui antud determinandis vahetada read:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2.$$

Näeme, et tulemus erineb eelmisest märgi poolest, s. t.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Seega,

ridade vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.

Samale tulemusele jõuame ka veergude vahetamisel. Miks?

3) Olgu nüüd determinandil mõlemad read võrdsed:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

Seega,

kui determinandi read (veerud) on võrdsed, siis on determinant võrdne nulliga.

4) Korrutame determinandi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ üht rida mingi konstandiga:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - ka_2b_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Seega,

korrutades determinandi üht rida (veergu) mingi konstandiga, korrutub determinant selle konstandiga.

Siit järeldub, et

determinant võrdub nulliga, kui tema ridade (veergude) vastavad elemendid on võrdelised.

Tõepoolest,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

5) Olgu determinandi ühe rea elementideks summad.

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + c_1) b_2 - (a_2 + c_2) b_1 =$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (c_1 b_2 - c_2 b_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Seega,

kui antud determinandi ühe rea (veeru) elemendid on kahe liidetava summad, siis võrdub see determinant kahe determinandi summaga, kus ühes determinandis on vastava rea (veeru) elementideks esimesed liidetavad ja teises determinandis teised liidetavad; teise rea (veeru) elemendid on mõlemas liidetavas samad, mis antud determinandi vastavas reas (veerus).

3. 3. LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI UURIMINE DETERMINANTIDE ABIL.

On antud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Ülesandeks on selgitada võrrandisüsteemi võrrandite kordajate kaudu, kas süsteemil on lahend olemas või mitte.

Avaldame tundmatud determinantide abil:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ja } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

1) Et antud võrrandisüsteemil oleks parajasti üks lahend, peab $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, s. t. $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ehk $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ ehk $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Kui oletada aga, et $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, s. t. $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, siis $\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_2}{b_2}$.

Niisiis,

selleks et võrrandisüsteemil oleks ühene lahend, ei tohi tundmatute kordajad olla võrdelised.

Sirged $a_1 x + b_1 y = c_1$ ja $a_2 x + b_2 y = c_2$ sel juhul lõikuvad.

2) Olgu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ja } \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Siis on

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ ja } \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

ehk

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Seega ka

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ ehk } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Niisiis, kui $x = \frac{0}{0}$, siis ka $y = \frac{0}{0}$, s. t. kui võrrandisüsteemi üks lahendeist pole määratud, siis pole ka teine lahend määratud.

Olgu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, siis $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ ja $c_1 = kc_2$.

Võrrandi $a_1x + b_1y = c$ võime kirjutada nüüd kujus

$$ka_2x + kb_2y = kc_2,$$

millel on samad lahendid mis võrrandil

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Seega vaadeldaval juhul rahuldavad süsteemi mõlemat võrrandit ühed ja samad arvupaarid, s. t. et süsteemil on lõpmata palju lahendeid.

Sirged $a_1x + b_1y = c_1$ ja $a_2x + b_2y = c_2$ ühtivad.

3) Olgu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ja } \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = u \neq 0.$$

Siis on

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ ja } \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Seega

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ ehk } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = v \neq 0.$$

Nüüd on $x = \frac{u}{0}$ ja $y = \frac{v}{0}$. Seega võrrandisüsteemil lahend puudub.

Võrrandeile vastavad sirged on paralleelsed.

3. 4. KOLMEREALINE DETERMINANT.

On antud kolm sirget oma võrranditega:

$a_1x + b_1y = c_1,$
$a_2x + b_2y = c_2,$
$a_3x + b_3y = c_3.$

Meid huvitab, missugust tingimust rahuldavad võrrandites esinevad tundmatute kordajad ja vabaliikmed siis, kui kõik kolm sirget lõikuvad ühes punktis.

Oletame, et need kolm sirget lõikuvad ühes punktis. Siis lõikuvad selles punktis ka mistahes kaks sirget antud kolmest sirgest. Leiamegi kahe võrrandi abil lõikepunkti koordinaadid. Süsteemist

$$\begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

saame, et

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \text{ ja } y = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}.$$

Kuna eeldasime, et lõikepunkt on olemas, siis on

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Et ka kolmas sirge läbib sama punkti, siis peavad leitud lahendid esimest võrrandit rahuldama, s. t.

$$a_1 \frac{\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} + b_1 \frac{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = c_1.$$

Korrutades võrrandit determinandiga $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, saame

$$a_1 \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ja siit

$$a_1(b_3c_2 - b_2c_3) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = 0.$$

Avades sulud, korrutades võrrandit (—1)-ga ja korrastades liikmeid, saame

$$a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = 0.$$

Saadud võrduse vasakul pool esinevat avaldist nimetatakse **kolmerealiseks determinandiks** ja kirjutatakse lühemalt tabelina püstkriipsude vahel

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Arve a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 nimetatakse selle kolmerealise **determinandi elementideks.**

Seega

kolm sirget

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ a_3x + b_2y &= c_3 \end{aligned}$$

lõikuvad ühes punktis, kui nende võrrandeis esinevate tundmatute kordajaist ja vabaliikmeist moodustatud kolmerealine determinant on null:

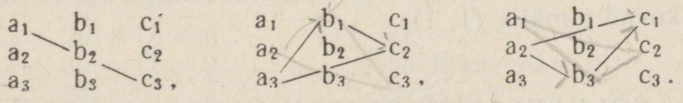
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 5. KOLMEREALISE DETERMINANDI ARVUTAMINE.

Teame, et

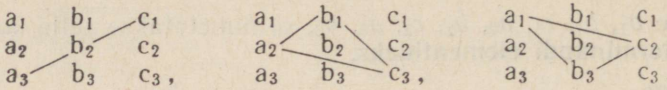
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Nimetades diagonaali vasakult ülalt paremale alla peadiagonaaliks, näeme, et esimeseks positiivseks liikmeks vaadeldavas kolmerealises determinandis on peadiagonaali elementide korrutis. Teised positiivsed liikmed saadakse, kui võtta peadiagonaaliga paralleelsel sirgel asetsevate elementide korrutis ja korrutada see vastastipu elemendiga. Positiivsete liikmete leidmist selgitab järgmine skeem:



Nimetades diagonaali vasakult alt paremale üles kõrvaldiagonaaliks, näeme, et esimeseks negatiivseks liikmeks on kõrvaldiagonaali elementide korrutis. Teised negatiivsed liikmed saadakse, kui võtta kõrvaldiagonaaliga paralleelsel sirgel asetsevate

elementide korrutis ja korrutada see vastastipu elemendiga. Negatiivsete elementide leidmist selgitab järgmine skeem:



Näide 1.

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 4\cdot(-1) + 5\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot(-2)\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot 5\cdot(-1) - (-2)\cdot 2\cdot(-2) = 8 + 30 - 6 - 36 + 5 - 8 = -7.$$

Näide 2. Kas sirged $2x + 3y = 5$, $3x - 2y = 1$, $-x + 4y = 3$ lõikuvad kõik ühes ja samas punktis?

Ülesande lahendamiseks tuleb kontrollida, kas tundmatute kordajaist ja vabaliikmeist moodustatud kolmerealine determinant on null.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 3 + 60 - 10 - 8 - 27 = 0.$$

Antud sirged lõikuvad kõik ühes punktis. Leiame ka lõikepunkti koordinaadid. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1. \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10 - 3}{-4 - 9} = \frac{-13}{-13} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 15}{-13} = \frac{-13}{-13} = 1.$$

Kui kolmandas võrrandis tundmatud x ja y asendada arvuga 1, näeme, et ka see võrdus on rahuldatud. Seega antud kolm sirget lõikuvad punktis (1; 1).

3. 6. KOLMEREALISE DETERMINANDI OMADUSED.

Kolmerealise determinandi juures kehtivad kõik samad omadused, mis kahereal ise determinandi juureski.

Vaatleme näiteks determinanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Asendades selles determinandis read veergudega, saame

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Seega kehtib võrdus

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Sõnastage tõestatud determinantide omadus!

Näidake, et kolmerealiste determinantide juures kehtivad ka teised kaherealiste determinantide juures tundma õpitud omadused.

Ülesandeid.

1. Leida järgmiste determinantide arendis.

a) $\begin{vmatrix} a & a-c \\ b & b+c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a^2-ab+b^2 & a-b \\ a^2+ab+b^2 & a+b \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \tan\alpha & 1 \\ -1 & \tan\alpha \end{vmatrix}$

2. Leida järgmiste determinantide väärtus.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

3. Esitada järgmiste determinantide arendis.

a) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ b & 0 & a \\ b & b & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

4. Leida sirgete lõikepunkt.

a) $8x - 3y - 1 = 0$
$4x + y - 13 = 0$

b) $5x - 2y + 13 = 0$
$x + 3y - 11 = 0$

c) $y = -2x$
$y = 3x - 4$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

e) $3x - 2y = 1$
$-6x + 4y - 2 = 0$

f) $x + 3y = 2$
$\frac{x}{3} + y + 1 = 0.$

5. Kolmnurga külgede võrrandid on $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$ ja $3x + y + 5 = 0$. Leida tippude koordinaadid.

6. Kolmnurga külgede võrrandid on $18x + 6y = 17$, $14x - 7y = -15$ ja $5x + 10y = 9$. Leida kolmnurga tippude koordinaadid ja nurkade suurused.

7. Nelinurga tipud on $A(-9; 0)$, $B(-3; 6)$, $C(3; 4)$ ja $D(6; -3)$. Leida selle nelinurga diagonaalide lõikepunkt.

8. Kas järgmised sirged lõikuvad kõik ühes punktis?

a) $x + 3y - 1 = 0$, $5x + y - 10 = 0$, $3x - 5y - 8 = 0$

b) $5x - 3y - 15 = 0$, $3x + y + 5 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$

c) $x - y + 7 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $3x - y - 1 = 0$

9. Missugust tingimust peavad rahuldama kordajad a ja b, et sirged $ax + by + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ ja $x - 1 = 0$ lõikuksid ühes punktis?

10. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(2; -1)$ ning sirgete $7x - y + 3 = 0$ ja $3x + 5y - 4 = 0$ lõikepunkti.

11. Leida võrrand sirgele, mis läbib koordinaatide alguspunkti ning sirgete $2x - 5y - 1 = 0$ ja $x + 4y - 7 = 0$ lõikepunkti.

12. Kolmnurga külgede võrrandid on $2x - y + 3 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$ ja $3x - 2y + 6 = 0$. Leida kolmnurga kõrguste lõikepunkt.

13. Uurida järgmisi võrrandisüsteeme.

a) $\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ 8x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ y + 2x - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x - y = -1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$

3.7. KOLMEST VÕRRANDIST KOOSNEVA KOLME TUNDMATUGA LINEAARVÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE.

On antud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Eeldame, et see süsteem on lahenduv, s. t. et saame leida arvud, mis asetatuna x, y ja z asemele rahuldavad neid võrrandeid.

Oletame, et ühe tundmatu, näiteks z väärtust me juba teame. Sel juhul on kõigi võrrandite vasaku poole viimane liige tuntud liige, mille kanname võrduse paremale poolele. Saame süsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z \\ a_3x + b_3y = d_3 - c_3z. \end{cases}$$

Tähistades

$d_1 - c_1 z = k_1$, $d_2 - c_2 z = k_2$ ja $d_3 - c_3 z = k_3$,

saame antud võrrandisüsteemi esitada kujus

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = k_1 \\ a_2 x + b_2 y = k_2 \\ a_3 x + b_3 y = k_3. \end{cases}$$

Seega oleme antud ülesande taandanud kolme sirge ühes punktis lõikumise ülesandele. Nagu teame, on sellel ülesandel lahend olemas, kui

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Et antud võrrandisüsteem on lahenduv, siis peab see tingimus kehtima. Asendades selles determinandis k_1, k_2 ja k_3 vastavate avaldistega, saame

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & b_2 & d_2 - c_2 z \\ a_3 & b_3 & d_3 - c_3 z \end{vmatrix} = 0.$$

Võrrandi vasaku poole saame esitada kahe determinandi vahena:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 z \\ a_2 & b_2 & c_2 z \\ a_3 & b_3 & c_3 z \end{vmatrix} = 0.$$

Kui teises determinandis toome kolmanda veeru elementide ühise teguri z determinandi ette, siis saame võrrandi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

millest saame tundmatu z avaldada niisuguste kolmerealiste determinantide jagatisena, mille elementideks on antud võrrandisüsteemi kordajad ja vabaliikmed:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Kui algul oletada, et teame kas tundmatu x või y väärtust, saame analoogilist mõttekäiku korrates avaldada x ja y võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete kaudu:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \text{ja} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Kõigi tundmatute avaldistes on nimetajaks tundmatute kordajaist moodustatud nn. **süsteemi determinant.** Et murrul oleks kindel väärtus, peab tema nimetaja olema nullist erinev. Seega,

kolmest võrrandist koosneval kolme tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemil

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

on ühene lahend, kui süsteemi determinant pole 0, s. t. kui

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Lugejas olevad determinandid saame süsteemi determinandist, kui leitava tundmatu kordajad asendada vastavate vabaliikmetega. Nii on tundmatu x leidmisel a_1, a_2 ja a_3 asendatud d_1, d_2 ja d_3-ga, tundmatu y leidmisel b_1, b_2 ja b_3 asendatud d_1, d_2 ja d_3-ga ning tundmatu z leidmisel c_1, c_2 ja c_3 asendatud d_1, d_2 ja d_3-ga.

Tähistades süsteemi determinandi tähega D ja tundmatute lugejas olevad determinandid vastavalt sümbolitega D_x, D_y ja D_z, võime kirjutada, et

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{ja} \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

Näide. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -1 \\ 3x - y - 5z = 4 \\ x - 2y - 3z = 5. \end{cases}$$

Arvutame algul süsteemi determinandi D ja seejärel tundmatute determinandid D_x, D_y ja D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 15 - 24 + 4 - 20 + 27 = -22.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 75 - 32 + 20 + 10 + 36 = -44.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 5 + 60 - 16 + 50 - 9 = 66.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 12 + 6 - 1 + 16 - 45 = -22.$$

Seega on süsteemi lahendiks

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-44}{-22} = 2 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{66}{-22} = -3 \\ z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{-22}{-22} = 1. \end{cases}$$

Ülesandeid.

1. Lahendada võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$

2. Lahendada võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0 \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc \end{cases}$

4. TEIST JÄRKU JOONED.

Et leida joone võrrandit, peame teadma joone kui teatud kindla omadusega punktide hulga definitsiooni.

Defineerige koordinaatteljega paralleelne sirge, koordinaattelgede vahelise nurga poolitaja ja ringjoon! Missugused on nimetatud joonte võrrandid?

Koordinaattelgede vahelise nurga poolitaja võrrandis $y = x$ on tundmatud esimeses astmes. Ringjoone võrrandis $x^2 + y^2 = r^2$ on tundmatud teises astmes. Vastavalt sellele nimetatakse koordinaattelgede vahelise nurga poolitajat **esimest järku jooneks**, ringjoont aga **teist järku jooneks.** Esimest järku jooneks on iga sirge, olgu ta koordinaattelgede vahelise nurga poolitaja või asetsegu ta telgede suhtes mingis teises asendis, sest tema võrrandis on alati tundmatud esimeses astmes. Nimetage mõned sirge võrrandid!

Oleme tuttavad ruutfunktiooniga $y = ax^2 + bx + c$. See võrdus on ka tema graafiku — **parabooli** võrrandiks. Siin esineb x teises astmes, seega parabool on teist järku joon.

Pöördvõrdelise sõltuvuse $y = \frac{k}{x}$ graafikuks on **hüperbool.** Teisendades selle võrduse kujule $xy = k$, näeme, et seal esineb tundmatute korrutis, s. t. liige, milles tundmatute astendajate summa on 2. Seetõttu nimetatakse ka hüperbooli teist järku jooneks.

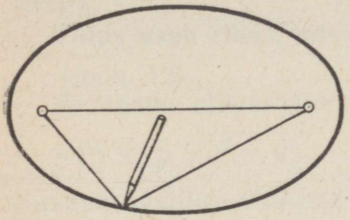
Teist järku joonte hulka kuulub ka **ellips.**

Järgnevalt tuletame ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrandi, tuginedes nende joonte definitsioonile, ja uurime neid jooni leitud võrrandite abil.

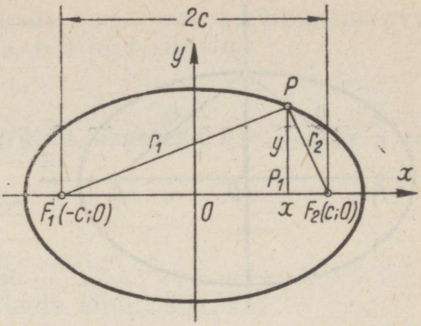
4. 1. ELLIPS.

Ellipsiks nimetatakse tasapinnal paiknevate punktide hulka, kus iga punkti kauguste summa kahest antud punktist, nn. fookustest on jääv suurus.

Kinnitades paberi kahe rõhknaelaga laua külge ning pannes ühe kinnise niidi rõhknaelte taha, saame pliiatsiga seda niiti pingul hoides kergesti joonestada ellipsi, nii nagu näidatud joonisel 9.



Joon. 9.



Joon. 10.

1. ELLIPSI VÕRRAND.

Ellipsi võrrandi tuletamiseks valime koordinaatteljestiku nii, et x-telg läbiks antud fookusi ja y-telg oleks fookustele sümmeetriateljeks (joon. 10).

Tähistame ellipsi fookused F_1 ja F_2-ga ning fookustevahelise kauguse $2c$-ga, siis on fookuste koordinaadid

$F_1(-c; 0)$ ja $F_2(c; 0)$.

Ellipsi mistahes punktiks olgu $P(x; y)$. Et saada ellipsi võrrandit, peame tema mistahes punkti koordinaadid seostama joont määravate suurustega. Nendeks on fookuste koordinaadid, mis on määratud arvuga c, ja mistahes punktist fookusteni võetud kauguste r_1 ja r_2 summa. See summa on definitsiooni põhjal konstant, mida tähistame $2a$-ga, s. t.

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Jooniselt 10 näeme, et $r_1 = F_1P$ ja $r_2 = PF_2$. Kahe punkti vahelise kauguse valemi põhjal

$$r_1 = \sqrt{y^2 + (x + c)^2} \quad \text{ja} \quad r_2 = \sqrt{y^2 + (c - x)^2}.$$

Asetades need tulemused võrdusesse $r_1 + r_2 = 2a$, saame ellipsi võrrandiks

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} + \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a.$$

Seda võrrandit lihtsustatakse järgmiselt:

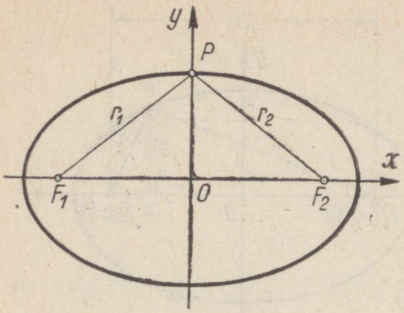
$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (c - x)^2};$$

$$y^2 + (x + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + y^2 + (c - x)^2;$$

$$4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 + (c - x)^2 - (x + c)^2;$$

$$4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 - 4cx;$$

$$[a\sqrt{y^2 + (c - x^2)}]^2 = (a^2 - cx)^2;$$



Joon. 11.

$$a^2[y^2 + (c - x)^2] = (a^2 - cx)^2;$$

$$a^2y^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Selgitage, missuguseid teisendusi on ellipsi võrrandi lihtsustamise käigus tehtud!

Uurime nimetajat $a^2 - c^2$. Kui ellipsi mistahes punkt asetseb y-teljel, siis on tema kaugus fookustest võrdne a-ga (joon. 11), sest siis on $r_1 = r_2$. Kolmnurgast POF_2 või POF_1 näeme, et

$$a^2 - c^2 = PO^2.$$

Tähistame ellipsi selle punkti ordinaati, mis asetseb y-teljel ülalpool x-telge, tähega b. Siis $PO = b$ ja seega

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Saadud tulemus võimaldab ellipsi võrrandit esitada kujus

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Järgnevalt tutvume, kuidas saadud võrrandist välja lugeda ellipsi omadusi.

2. ELLIPSI UURIMINE TEMA VÕRRANDI ABIL.

1) Kui ellipsi võrrandis x asendada $(-x)$-ga, siis võrrand ei muutu. Samuti mitte siis, kui y asendada $(-y)$-ga. Tähendab, **ellips on sümmeetriline nii y- kui ka x-telje suhtes.**

Kuidas tunneme punktide koordinaatide järgi ära punktide sümmeetrilisuse x-telje või y-telje suhtes?

2) Avaldame ellipsi võrrandist y:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Saadud avaldise väärtusi saab leida ainult siis, kui juuritav avaldis $a^2 - x^2$ on mittenegatiivne, s. t. ainult siis, kui

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

Seega,

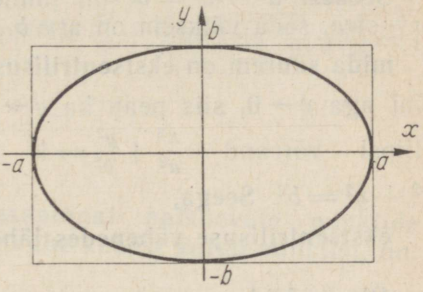
ellips asub ribas, mis on piiratud sirgetega $x = -a$ ja $x = a$ (joon. 12).

Avaldame ellipsi võrrandist x:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Saadud avaldise väärtusi saab leida ainult siis, kui

$$-b \leqslant y \leqslant b.$$



Joon. 12.

Seega,

ellips asub ribas, mis on piiratud sirgetega $y = -b$ ja $y = b$ (joon. 12).

Leitud omadustest järeldub, et

ellips asub ristkülikus, mis on piiratud sirgetega $x = -a$, $x = a$, $y = -b$ ja $y = b$ (joon. 12).

3) Teame juba, et punktiks, kus ellips lõikab y-telge ülalpool x-telge, on $(0; b)$. Et ellips on sümmeetriline x-telje suhtes, siis lõikab ellips y-telge allpool x-telge punktis $(0; -b)$.

Ellipsi ja x-telje lõikepunktides on $y = 0$. Ellipsi võrrandist leiame siis, et

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

ja siit

$$x^2 = a^2,$$

millest

$$x_1 = -a;\ x_2 = a.$$

Niisiis on ellipsi punktideks x-teljel $(-a; 0)$ ja $(a; 0)$.

Ellipsi poolt x-teljest eraldatud lõiku nimetatakse ellipsi **suureks teljeks** ja y-teljest eraldatud lõiku ellipsi **väikeseks teljeks.** Suure telje pikkus on $2a$ ja väikese telje pikkus $2b$.

4) Tuginedes suuruse y avaldisele, näeme, et ellipsi punktide ordinaatlõigud pikenevad y-teljele lähenedes, s. t. juhul, kui x läheneb nullile. Seega,

mida lähemale alguspunktile, seda enam läheneb ellipsi punkti ordinaat ($\pm$ b)-le.

5) Arvude c ja a suhet nimetatakse ellipsi **ekstsentrilisuseks,** mida tähistatakse tähega e, s. t.

$$\boxed{e = \frac{c}{a}.}$$

Et $c < a$, siis $e < 1$.

Seosest $a^2 - c^2 = b^2$ on ilmne, et mida vähem erineb arv c arvust a, seda väiksem on arv b. Seega,

mida suurem on ekstsentrilisus, seda lamedam on ellips.

Kui aga $e \to 0$, siis peab ka $c \to 0$ ja järelikult $a \to b$. Sel juhul ellipsi võrrand $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ läheneb ringjoone võrrandile $x^2 + y^2 = b^2$. Seega,

ekstsentrilisuse vähenedes läheneb ellips ringjoonele.

Ülesandeid.

1. Avaldada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunktiks on punkt $C(a; b)$ ja raadius on r.

2. Avaldada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunktiks on punkt $C(3; 4)$ ja raadius on 6.

3. Avaldada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunktiks on punkt $C(-2; -1)$ ja ringjoone pikkus on 16π.

4. Avaldada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunktiks on punkt $C(-4; 3)$ ja ringi pindala on 25π.

5. Leida ringjoone keskpunkt ja raadius, kui ringjoone võrrand on

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 6 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$;
d) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

6. Leida võrrand ellipsile, mille suur telg on 10 ja fookustevaheline kaugus 8.

7. Leida võrrand ellipsile, mille väike telg on 8 ja fookustevaheline kaugus on 6.

8. Leida ellipsi $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ekstsentrilisus ja fookuste koordinaadid.

9. Leida ellipsi võrrand, kui fookusteks on punktid $F_1(-3; 0)$ ja $F_2(3; 0)$ ning ellipsi iga punkti kauguste summa fookusteni on 12.

10. Leida ellipsi võrrand, kui suur telg on 18 ja väike pooltelg on 8.

11. Leida võrrand ellipsile, mille suure ja väikese telje otspunktide vaheline kaugus on 5 ja pooltelgede summa on 7.

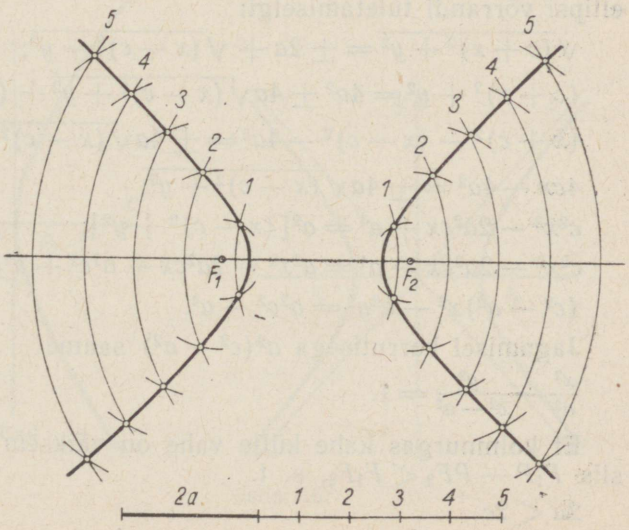
12. Maa tiirleb ümber Päikese mööda ellipsit, mille ühes fookuses asub Päike. Maa väikseim kaugus Päikesest on ligikaudu 147,5 miljonit kilomeetrit ja suurim kaugus ligikaudu 152,5 miljonit kilomeetrit. Leida selle ellipsi suur telg ja ekstsentrilisus.

13. Missugused sirged on ellipsitele $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ja $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ sümmeetriatelgedeks?

4. 2. HÜPERBOOL.

Hüperbooliks nimetatakse tasapinnal paiknevate punktide hulka, kus iga punkti kauguste vahe kahest antud punktist, nn. fookusest on jääv suurus.

Kasutades seda definitsiooni võime konstrueerida kuitahes palju hüperbooli punkte, kui ette on antud fookused F_1 ja F_2 ning hüperbooli mistahes punktist fookusteni võetud kauguste r_1 ja r_2 vahe, mis on antud hüperbooli jaoks jääv suurus. Tähistame selle vahe nagu ellipsi puhulgi $2a$-ga. Hüperbooli konstrueerimine selgub jooniselt 13.



Joon. 13.

1. HÜPERBOOLI VÕRRAND.

Hüperbooli võrrandi tuletamiseks võtame koordinaatteljestiku nii, et x-telg läbib fookusi ja y-telg on fookustele sümmeetriateljeks (joon. 14).

Hüperbooli võrrandi tuletamiseks avaldame kahe punkti vahelise kauguse valemi abil r_1 ja r_2:

$r_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$ ja $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

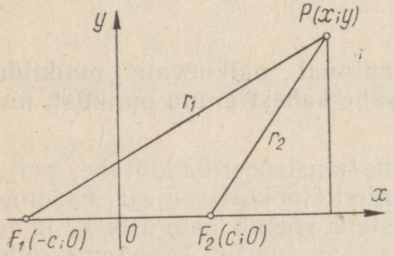
Hüperbooli definitsiooni kohaselt on kas $r_1 - r_2 = 2a$ või $r_2 - r_1 = 2a$.

Need võrdused saab kokku võtta üheks võrduseks

$r_1 - r_2 = \pm 2a$.

Asendades nüüd r_1 ja r_2 vastavate avaldistega, saame

$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$.



Joon. 14.

Edasi lihtsustame saadud võrrandit nii, nagu seda tegime ellipsi võrrandi tuletamiselgi:

$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;

$(c+x)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$;

$(x+c)^2 - (x-c)^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;

$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$;

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$;

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$.

Jagamisel korrutisega $a^2(c^2 - a^2)$ saame

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Et kolmnurgas kahe külje vahe on väiksem kui kolmas külg, siis $F_1P - PF_2 < F_1F_2$, s. t.

$2a < 2c$

ehk

$c > a$.

Siis ka $c^2 > a^2$ ja $c^2 - a^2 > 0$.

Tähistame $c^2 - a^2$ kui positiivse arvu b^2-ga. Hüperbooli võrrand omandab siis kuju

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

2. HÜPERBOOLI UURIMINE TEMA VÕRRANDI JÄRGI.

1) Ellipsi võrrandi uurimise eeskujul näidake, et

hüperbool on sümmeetriline nii x- kui ka y-telje suhtes.

2) Avaldame hüperbooli võrrandist y:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

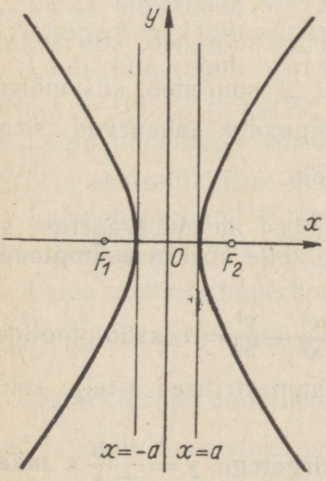
Saadud avaldise väärtusi saab leida, kui $x^2 - a^2 \geqslant 0$, ehk, teisiti, kui kas $x \geqslant a$ või $x \leqslant -a$.

Seega,

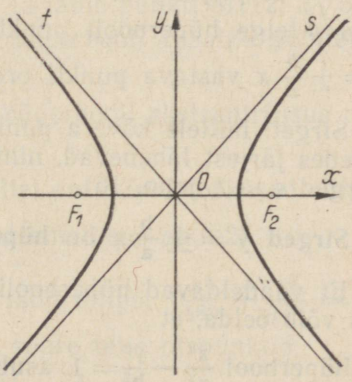
hüperboolil ei asetse ükski punkt ribas, mis on piiratud sirgetega x = −a ja x = a (joon. 15).

Avaldame hüperbooli võrrandist x:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}.$$



Joon. 15.



Joon. 16.

Saadud avaldise väärtusi saab leida y iga väärtuse korral. Seega,

hüperbooli punktide ordinaatideks on kõik reaalarvud.

3) Leiame punktid, kus hüperbool lõikab x-telge. Et nendes punktides $y = 0$, siis $\frac{x^2}{a^2} = 1$ ehk $x^2 = a^2$, millest $x_1 = -a$; $x_2 = a$.

Seega lõikab hüperbool x-telge punktides $(-a; 0)$ ja $(a; 0)$. Neid punkte nimetatakse hüperbooli **haripunktideks** (joon. 15). Haripunktide vahelist lõiku nimetatakse hüperbooli **reaalteljeks.** Selle pikkus on $2a$.

Kui $x = 0$, siis taandub hüperbooli võrrand kujule $\frac{y^2}{b^2} = -1$ ehk $y^2 = -b^2$. Saadud võrrandil pole reaalseid lahendeid.

y-teljel võetud punktide $(0; b)$ ning $(0; -b)$ vahelist lõiku nimetatakse hüperbooli **mittereaalseks teljeks** ehk **imaginaarteljeks.**

4) Tuginedes avaldisele $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ näeme, et

mida suurem on hüperbooli punkti abstsissi absoluutväärtus, seda suurem on ka tema ordinaadi absoluutväärtus.

Seega,

hüperbool on lahtine kõverjoon.

5) Avaldame hüperbooli võrrandist y:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

ehk

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

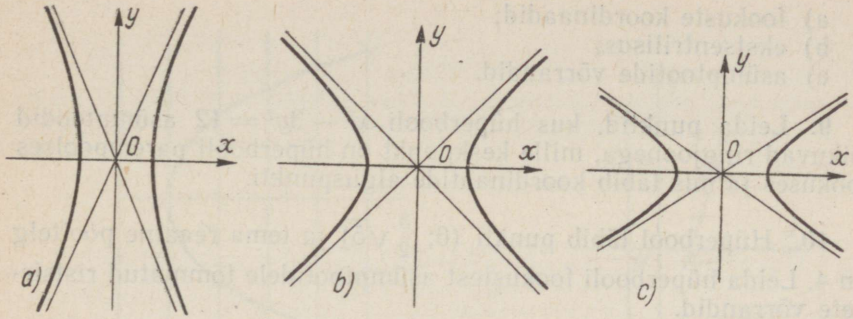
Kui nüüd abstsissi x absoluutväärtus suureneb, siis avaldise $\frac{a^2}{x^2}$ väärtus järjest väheneb. Seega, kui $|x|$ suureneb, siis mõlemal pool y-telge hüperbooli punktide ordinaadid lähenevad sirgete $y = \pm \frac{b}{a} x$ vastava punkti ordinaatidele.

Sirget, millele kõvera punktid abstsissi absoluutväärtuse suurenedes järjest lähenevad, nimetatakse selle kõvera **asümptoodiks** (sirged s ja t, joon. 16).

Sirged $y = \pm \frac{b}{a} x$ on hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ asümptootideks.

Et vaadeldavad hüperboolid on sümmeetrilised x-telje suhtes, siis võib öelda, et

hüperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ asub neis sirgetega $y = \pm \frac{b}{a} x$ määratud tippnurkades, milles asub x-telg.



Joon. 17.

6) Hüperbooli ekstsentrilisus $e = \frac{c}{a} > 1$, sest $c > a$. Seosest $c^2 - a^2 = b^2$ järeldub, et mida ligemal on fookus haripunktile, seda väiksem on b ja seda väiksem on ka suhe $\frac{b}{a}$. Mida väiksem on hüperbooli asümptoodi tõusu absoluutväärtus, seda väiksem on nurk asümptootide vahel (joon. 17). Seega,

mida väiksem on suhe $\frac{b}{a}$, seda teravam on hüperbool.

Ülesandeid.

1. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli reaaltelje pikkus on 8 ja fookustevaheline kaugus 10.

2. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli reaalne pooltelg on 3 ja hüperbool läbib punkti $(9; -4)$.

3. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookusteks on punktid $F_1(-10; 0)$ ja $F_2(10; 0)$ ning ta läbib punkti $M(12; 3\sqrt{5})$.

4. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli reaalne pooltelg on $2\sqrt{5}$ ja ekstsentrilisus $\sqrt{1{,}2}$.

5. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli ekstsentrilisus on 2 ja ta läbib punkti $(2; \sqrt{3})$.

6. Leida võrrand hüperboolile, millel on ühised fookused ellipsiga $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ ja kui hüperbooli ekstsentrilisus on 1,25.

7. Leida võrrand hüperboolile, mis läbib ellipsi $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ fookusi ja mille fookusteks on ellipsi suure telje otspunktid.

8. On antud hüperbooli võrrand: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Leida

a) fookuste koordinaadid;
b) ekstsentrilisus;
c) asümptootide võrrandid.

9. Leida punktid, kus hüperbooli $x^2 - 3y^2 = 12$ asümptoodid lõikuvad ringjoonega, mille keskpunkt on hüperbooli parempoolses fookuses ja mis läbib koordinaatide alguspunkti.

10. Hüperbool läbib punkti $(6; \frac{3}{2}\sqrt{5})$ ja tema reaalne pooltelg on 4. Leida hüperbooli fookustest asümptootidele tõmmatud ristsirgete võrrandid.

11. Leida võrrandid sirgetele, mis läbivad punkti $(2; -5)$ ja mis on paralleelsed hüperbooli $x^2 - 4y^2 = 4$ asümptootidega.

12. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ lõikepunktid järgmiste sirgetega:

a) $x = 5y$;
b) $2x + y - 18 = 0$;
c) $x - y + 5 = 0$;
d) $\sqrt{10}x - 5y + 15 = 0$.

13. Selgitada,
a) kuidas muutub hüperbooli kuju, kui $a \to b$;
b) missugused sirged on sümmeetriatelgedeks hüperboolidele $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ ja $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

14. Esitada joone $x^2 - y^2 = 0$ graafik.

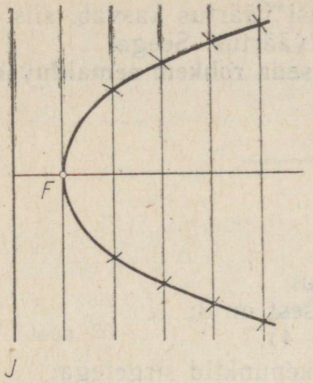
4.3. PARABOOL

Paraboliks nimetatakse tasapinnal paiknevate punktide hulka, kus iga punkti kaugused antud sirgest, nn. juhtjoonest ja antud punktist, nn. fookusest on võrdsed.

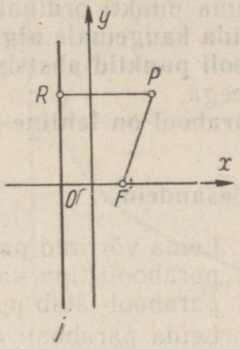
Parabooli konstrueerimine punktide järgi on näidatud joonisel 18.

1. PARABOOLI VÕRRAND.

Parabooli võrrandi tuletamiseks valime koordinaatteljestiku nii, et x-telg läbiks fookust F ja oleks risti juhtjoonega j. Juhtjoone ja fookuse vahelise x-telje lõigu jagame pooleks ja läbi selle poolituspunkti võtame y-telje paralleelselt juhtjoonega (joon. 19).



Joon. 18.



Joon. 19.

Olgu fookuse kaugus juhtjoonest p, siis on fookuse koordinaadid $(\frac{p}{2}; 0)$. Parabooli mistahes punkti $P(x; y)$ kaugused juhtjoonest j ja fookusest F peavad olema võrdsed, s. t.

$PR = PF$.

Avaldame selle võrduse koordinaatides

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

See ongi parabooli võrrand, mida lihtsustades saame:

$$\left(\frac{p}{2} + x\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$\frac{p^2}{4} + px + x^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

ja lõplikult

$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

2. PARABOOLI UURIMINE TEMA VÕRRANDI JÄRGI.

1) Näidake, et

parabool $y^2 = 2px$ on sümmeetriline x-telje suhtes.

2) Parabooli võrrandist $y^2 = 2px$ järeldub, et

parabool asub y-teljest paremal.

Tõepoolest, et korrutis $2px$ oleks positiivne (y^2 on positiivne), peavad p ja x olema samamärgilised. Et p kui kaugus on positiivne, siis peab ka x olema positiivne.

Kas x võib omada väärtust 0?

3) Kui parabooli punkti abstsissi väärtus kasvab, siis kasvab ka sama punkti ordinaadi absoluutväärtus. Seega,

mida kaugemale alguspunktist, seda rohkem eemalduvad parabooli punktid abstsissteljest.

Seega,

parabool on lahtine kõverjoon.

Ülesandeid.

1. Leida võrrand paraboolile, kui
a) parabooli tipu kaugus fookusest on 3;
b) parabool läbib punkti $M(1; -4)$.

2. Leida parabooli $y^2 = 18x$ lõikepunktid sirgetega:
a) $6x + y - 6 = 0$; c) $4x - y + 5 = 0$; e) $x + 2 = 0$;
b) $9x - 2y + 2 = 0$; d) $y - 3 = 0$; f) $y = 0$.

3. Leida parabooli $y^2 = 12x$ ja ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ lõikepunktid.

4. Leida võrrand sirgele, mis läbib parabooli $y^2 = 18x$ ja ringjoone $(x + 6)^2 + y^2 = 100$ lõikepunkte.

5. Leida võrrand paraboolile, mille fookuseks on punkt $F(-2; 0)$ ja juhtjooneks sirge $x = 2$.

6. Leida parabooli $y = 0{,}25x^2$ fookus ja juhtjoone võrrand.

7. Prožektori peegli ristlõige on parabool. Leida fookuse asukoht, kui peegli diameeter on 60 cm ja sügavus 30 cm.

8. Läbi parabooli $y^2 = 4x$ fookuse on kujutatud sirge, mille tõusunurk on 60°. Leida selle sirge võrrand ja parabooliga sellest sirgest eraldatud lõigu pikkus.

9. Purskkaevust purskav vesi voolab niisuguse parabooli kaart mööda, mille fookuse ja juhtjoone vaheline kaugus on 0,1 m. Leida, kui kõrgele purskab vesi, kui ta langeb basseini 2 m kaugusel purskekohast.

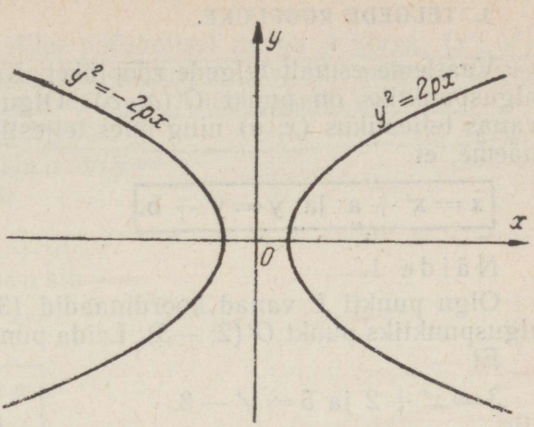
10. Silla kaar on parabooli kujuline. Leida selle parabooli võrrand, kui kaare otspunktide vaheline kaugus on 24 m ja kaare kõrgus 6 m.

11. Selgitada, kuidas sõltub parabooli $y^2 = 2px$ kuju parameetrist p.

4.4. PEEGELDUS.

Teatavasti nimetatakse antud kujundi peegelduseks temaga sümmeetrilist kujundit etteantud sirge suhtes.

Teame, et y-teljega sümmeetriliste kujundite vastavate punktide koordinaadid erinevad ainult abstsissi märgi poolest ja x-tel-



Joon. 20.

jega sümmeetriliste kujundite vastavate punktide koordinaadid ainult ordinaadi märgi poolest.

Seame ülesandeks leida parabooliga $y^2 = 2px$ y-telje suhtes sümmeetrilise parabooli (vt. joon. 20) võrrandi. See tähendab, et parabooli võrrandis tuleb x asendada $(-x)$-ga. Saame

$y^2 = -2px$.

Selles võrrandis on $p > 0$ ja $x < 0$. Miks?

Ülesandeid.

1. Leida sirgega $y = 2x - 3$ y-telje suhtes sümmeetrilise sirge võrrand.

2. Leida sirgega $y = -3x + 1$ x-telje suhtes sümmeetrilise sirge võrrand.

3. Leida ringjoonega $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ x-telje suhtes sümmeetrilise ringjoone võrrand.

4. Leida ringjoonega $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ y-telje suhtes sümmeetrilise ringjoone võrrand.

5. Leida parabooliga $y^2 = 4x$ y-telje suhtes sümmeetrilise parabooli võrrand.

4.5. TELGEDE RÖÖPLÜKE JA PÖÖRE.

Nii ellipsi, hüperbooli kui ka parabooli võrrandi tuletamiseks valisime sobivalt koordinaatteljestiku. Missugused on nende joonte võrrandid aga siis, kui valida koordinaatteljestik kuidagi teisiti? Selle küsimuse selgitamiseks oletame esialgu, et joon paikneb teljestikus nii, nagu see eespool oli ette nähtud, ja muudame nüüd teljestiku asendit kas rööplükke või pööramise teel.

1. TELGEDE RÖÖPLÜKE.

Vaatleme esmalt telgede rööplüket. Koordinaatteljestiku uueks alguspunktiks on punkt $O'(a;\ b)$. Olgu punkti P koordinaadid vanas teljestikus $(x;\ y)$ ning uues teljestikus $(x';\ y')$. Jooniselt 21 näeme, et

$$\boxed{x = x' + a \text{ ja } y = y' + b.}$$

Näide 1.

Olgu punkti P vanad koordinaadid (3; 5) ning uue teljestiku alguspunktiks punkt $O'(2; -3)$. Leida punkti P uued koordinaadid.

Et

$$3 = x' + 2 \text{ ja } 5 = y' - 3,$$

siis

$$x' = 1 \text{ ja } y' = 8.$$

Näide 2.

Olgu punkti A vanad koordinaadid $(-4;\ 6)$ ja uued $(2;\ -3)$. Leida uue teljestiku alguspunkt.

Et

$$-4 = 2 + a \text{ ja } 6 = -3 + b,$$

siis

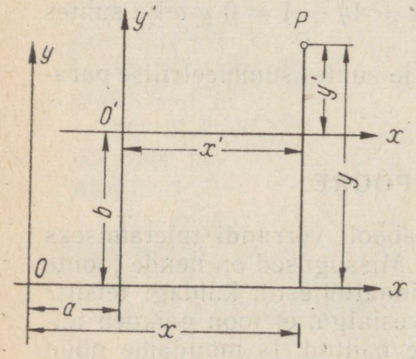
$$a = -6 \text{ ja } b = 9.$$

Seega on uue teljestiku alguspunkt $O'(-6;\ 9)$.

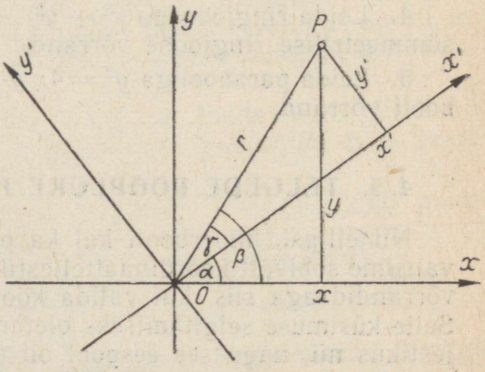
2. TELGEDE PÖÖRE.

Vaatleme nüüd, kuidas muutuvad punkti koordinaadid teljestiku pööramise tagajärjel (joon. 22).

Olgu punkti P koordinaadid vanas teljestikus $(x;\ y)$ ja uues,



Joon. 21.



Joon. 22.

mis saadakse vana teljestiku pööramisel nurga α võrra, $(x'; y')$. Punkti P kaugus koordinaatide alguspunktist on mõlema teljestiku suhtes sama ja tähistatud r-ga. Nüüd saame, et

$$x = r\cos\beta = r\cos(\alpha+\gamma) =$$
$$= r\cos\alpha\cos\gamma - r\sin\alpha\sin\gamma =$$
$$= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

ja

$$y = r\sin\beta = r\sin(\alpha+\gamma) =$$
$$= r\sin\alpha\cos\gamma + r\cos\alpha\sin\gamma =$$
$$= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Seega,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}}$$

Näide.

Olgu punkti P vanad koordinaadid $(2; -5)$. Telgi pööratakse 45° võrra. Leida punkti P uued koordinaadid.

Et $\alpha = 45°$, siis

$$\begin{aligned} 2 &= x'\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ +\quad -5 &= x'\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline -3 &= x'\cdot\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$x' = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ja

$$7 = -y'\cdot\sqrt{2},$$

$$y' = -\frac{7}{\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Seega, punkti P uued koordinaadid on $P\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. VÕRDHAARNE HÜPERBOOL.

Hüperbooli võrrandiks saime $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Juhul kui $a = b$, nimetatakse hüperbooli **võrdhaarseks** (vt. joon. 17, b). Seega on võrdhaarse hüperbooli võrrand

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2.}$$

Asümptootideks on siin ristuvad sirged $y = \pm x$, seetõttu nimetatakse võrdhaarset hüperbooli ka **risthüperblooliks.**

Esitame võrdhaarse hüperbooli võrrandi kujus

$$(x-y)(x+y)=a^2$$

ja vaatame, missuguseks teiseneb võrdhaarse hüperbooli võrrand pärast telgede pööramist 135° võrra (joon. 23). Tähistame hüperbooli mistahes punkti uued koordinaadid sümbolitega x' ja y'. Seega

$$x=-x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y=x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et $x-y=-x'\sqrt{2}$ ja $x+y=-y'\sqrt{2}$, siis asendades need avaldised antud võrrandisse, saame

$$2x'y'=a^2$$

ja siit

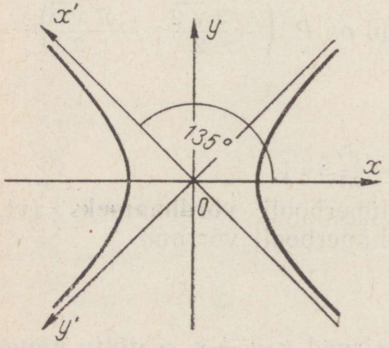
$$y'=\frac{a^2}{2x'}.$$

Tähistades $\frac{a^2}{2}=k$, saame

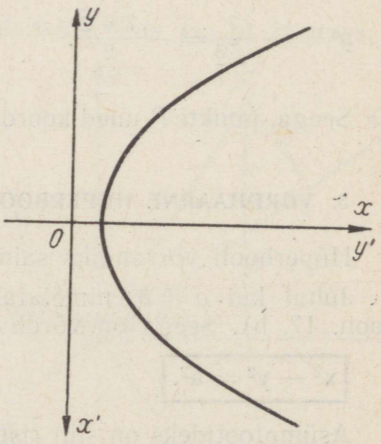
$$y'=\frac{k}{x'},$$

mis on tuntud kui *pöördvõrdelise sõltuvuse* valem.

Siin on $k>0$. Kui suure nurga võrra tuleb pöörata teljestikku, et saada pöördvõrdelise sõltuvuse valemit negatiivse teguriga?



Joon. 23.



Joon. 24.

Parabooli võrrandiks telgede etteantud asendi korral (lk. 39) saime $y^2 = 2px$.

Pöörame telgi $-90°$ võrra (joon. 24). Siis

$x = x' \cdot 0 - y'(-1) = y'$,

$y = x'(-1) + y' \cdot 0 = -x'$.

Parabooli võrrandiks selles uues koordinaatide süsteemis saame

$x'^2 = 2py'$.

Tähistades veel $2p = \frac{1}{k}$, saame võrrandi esitada kujus

$y' = kx'^2$.

Loeme nüüd selle telgede uue asendi algasendiks ja vaatame, kuidas muutub parabooli võrrand edasi, kui teostada telgede rööplüke, nii et uueks alguspunktiks saab punkt $O'(m; n)$. Olgu sel korral mistahes punkti P uuteks koordinaatideks x'' ja y''.

Teame, et

$x' = m + x''$ ja $y' = n + y''$.

Asetades need avaldised võrdusesse $y' = kx'^2$, saame

$y'' + n = k(x'' + m)^2$,

millest

$y'' = k(x'' + m)^2 - n$

ehk

$y'' = kx''^2 + 2kmx'' + km^2 - n$.

Tähistades siin $k = a$, $2km = b$ ja $km^2 - n = c$, saame parabooli võrrandiks

$y'' = ax''^2 + bx'' + c$.

Ülesandeid.

1. Koordinaattelgede rööplükkega nihkus koordinaatide alguspunkt punkti $O'(-2; 1)$. Leida punktide $O(0; 0)$; $A(3; 5)$; $B(-2; 0)$ uued koordinaadid.

2. Missugusesse punkti tuleb nihutada koordinaatide alguspunkt, et lihtsustuksid järgmised võrrandid?

a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ c) $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

b) $\frac{(x-1)^2}{4} + (y+3)^2 = 1$ d) $(y+2)^2 = 4(x-3)$

Missuguste joonte võrrandid need on?

3. Leida rööplüke, mille rakendamisel teljestikule lihtsustuvad võrrandid:

a) $xy - 2x = 6$; c) $y = (x - 2)^2 + 3$;
b) $xy - 2x - y + 8 = 0$; d) $y = (x + 2)^2 - 3$.

4. Ristküliku tipud on $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(5; 3)$, $D(0; 3)$. Leida selle ristküliku tippude koordinaadid pärast teljestiku pööramist 135° võrra.

5. Missuguse kuju omandab võrrand $xy = -4$ pärast teljestiku pööramist $-45°$ võrra?

6. Kui suure nurga võrra tuleb pöörata telgi, et võrrandites a) $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$ ja b) $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0$ ei esineks liiget, mis sisaldab korrutist xy?

Kordamisülesandeid.

1. Punkt B on x-telje suhtes sümmeetriline punktiga $A(-5; 3)$. Leida
a) punkti B koordinaadid,
b) lõigu AB pikkus,
c) kolmnurga OAB pindala (O on koordinaatide alguspunkt).

2. Punkt R on sümmeetriline punktiga P sirge $x = -2$ suhtes. Teades, et $P(-5; -3)$ leida
a) punkti R koordinaadid,
b) lõigu PR pikkus,
c) kolmnurga OPR pindala (vt. ül. 1, c).

3. Kolmnurga tipud on $A(-6; -4)$, $B(2; 8)$ ja $C(-10; 0)$. Näidata, et kolmnurk on võrdhaarne.

4. Kolmnurga tipud on $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ ja $C(-1; 4)$. Leida kolmnurga külgede võrrandid ja näidata, et kolmnurk on täisnurkne.

5. Missugune peab olema kordaja m väärtus, et punkt $(-3; 5)$ asetseks sirgel $y = mx - 7$?

6. Missugused peavad olema kordaja m ja vabaliige b, et sirge $y = mx + b$ läbiks punkte $(6; 2)$ ja $(5; 1)$.

7. Missugune peab olema kordaja a sirge võrrandis $ax + 3y + 1 = 0$, et sellele sirge tõus oleks 0,8?

8. On antud punktid $A(3; -1)$ ja $B(-2; 1)$. Leida nende punktide sümmeetriatelje võrrand.

9. Kolmnurga külgede võrrandid on $x - 2y + 6 = 0$, $8x + y + 14 = 0$ ja $10x - 3y - 8 = 0$. Leida
a) kolmnurga tipud,
b) kolmnurga pindala,
c) kolmnurga nurgad,
d) ümberringjoone võrrand.

10. Kolmnurga tipud on $A(2; 3)$, $B(-1; 2)$ ja $C(3; -1)$. Leida

a) kolmnurga külgede võrrandid,
b) kolmnurga mediaanide lõikepunkt,
c) kolmnurga nurgad,
d) kolmnurga ümberringjoone võrrand.

11. Leida, missugune sirgetest $x - y + 3 = 0$, $x - y + 4 = 0$ ja $x - y + 5 = 0$ on ringjoone $x^2 + y^2 = 8$ puutujaks. Missugune neist sirgetest lõikab ringjoont ja kui pikk on tekkiv kõõl? Missugusel antud sirgetest puuduvad ühised punktid ringjoonega?

12. Näidata, et sirge $3x + 4y = -32$ on ringjoone $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$ puutujaks ja leida puutepunkti koordinaadid.

13. Lihtsustada järgmisi võrrandeid, pöörates koordinaattelgi 45° võrra.

a) $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 32$
b) $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8 = 0$

14. Leida punkti $A(0; 1)$ uued koordinaadid, kui uute telgede võrrandid on $3x - 4y + 6 = 0$ ja $4x + 3y - 17 = 0$.

15. Leida nurk hüperbooli $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ asümptootide vahel.

16. Leida hüperbooli võrrand, kui fookustevaheline kaugus on 10 ja asümptoodid on $y = \pm \frac{1}{2} x$.

17. Leida parabooli võrrand, kui parabool on sümmeetriline x-telje suhtes, läbib punkti $(2; -4)$ ja haripunkt on koordinaatide alguses.

18. Leida parabooli võrrand, kui parabool on sümmeetriline y-telje suhtes, läbib punkti $(-4; -2)$ ja haripunkt on koordinaatide alguses.

19. Ellips puudutab abstsisstelge punktis $(8; 0)$ ja ordinaattelge punktis $(0; -5)$. Leida ellipsi võrrand, kui ta sümmeetriateljed on paralleelsed koordinaattelgedega.

20. Leida ellipsi ekstsentrilisus, kui fookustevaheline kaugus on näha väiksema pooltelje otspunktist täisnurga all.

21. Leida x võrrandeist.

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$

5. LIITFUNKTSIOON.

5. 1. LIITFUNKTSIOONI MÕISTE.

Näide 1. On antud funktsioon $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$. Tähistame selle funktsiooni juurealuse avaldise tähega u. Siis

$$u = x^2 - 2x + 3$$

ja

$$y = \sqrt{u}.$$

Siin y sõltub muutuvast suurusest u, mis omakorda on x funktsioon.

Seega muutuva suuruse u sissetoomise tulemusena sõltub funktsioon y argumendist x muutuva suuruse u vahendusel.

Näide 2. On antud funktsioon $y = \sin \sqrt{x}$. Tähistame siin

$$z = \sqrt{x},$$

siis

$$y = \sin z.$$

Siin y sõltub suurusest z, mis omakorda on x funktsioon.

Seega sõltub funktsioon y argumendist x muutuva suuruse z vahendusel.

Näide 3. Olgu antud funktsioon $y = f[\varphi(x)]$. Tähistame siin

$$v = \varphi(x),$$

siis

$$y = f(v).$$

Seega sõltub funktsioon y argumendist x muutuva suuruse v vahendusel.

Niisiis funktsioonid

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3},\ \sin \sqrt{x} \text{ ja } f[\varphi(x)]$$

sõltuvad argumendist x mingi funktsiooni nn. **vahendaja muutuja** kaudu. Selliseid funktsioone nimetatakse **liitfunktsioonideks.**

5. 2. LIITFUNKTSIOONI TULETIS.

Olgu antud funktsioon $y = f(v)$, kus $v = \varphi(x)$. Muutugu argument x suuruse Δx võrra, siis muutub vahendav muutuja v suuruse Δv võrra ja funktsioon y suuruse Δy võrra.

Eeldame, et saab leida piirväärtused

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \varphi'(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta v} = f'(v).$$

Sellest järeldub, et

1°. $\Delta x \neq 0$ ja $\Delta v \neq 0$ ning

2°. kui $\Delta x \to 0$, siis ka $\Delta v \to 0$, ja kui $\Delta v \to 0$, siis ka $\Delta x \to 0$.

Seetõttu võib teises piirväärtuses $\Delta v \to 0$ asemel kirjutada $\Delta x \to 0$. Niisiis loeme kehtivaks järgmised võrdused:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \varphi'(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta v} = f'(v).$$

Korrutades nende võrduste vastavad pooled, saame

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta v} = \varphi'(x) f'(v)$$

ehk kasutades korrutise piirväärtuse kohta kehtivat lauset,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v} \right] = \varphi'(x) f'(v).$$

Et $\Delta v \neq 0$, siis võime nurksulgudes taandada ja saame

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(v) \varphi'(x)$$

ehk

$$y' = f'(v) \varphi'(x).$$

Tähistades $f'(v) = y'_v$ ja $\varphi'(x) = v'_x$, saame

$$\boxed{y' = y'_v v'_x}.$$

Niisiis,

liitfunktsiooni tuletis on võrdne tuletisega vahendaja muutuja järgi korrutatud vahendaja muutuja tuletisega argumendi järgi.

Näide 1. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, s. t. $y = \sqrt{u}$, kus $u = x^2 - 2x + 3$.

Siin

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{ja} \quad u'_x = 2x - 2.$$

Asendades u vastava avaldisega, saame liitfunktsiooni tuletise eeskirja põhjal

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+3}} \cdot (2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}.$$

Näide 2. $y = (3-2x)^5$, s. t. $y = u^5$, kus $u = 3-2x$.

Et $y'_u = 5u^4$ ja $u'_x = -2$, siis

$y' = 5(3-2x)^4 \cdot (-2) = -10(3-2x)^4$.

Ülesandeid.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised.

1. $y = (2x-1)^3$
2. $y = \sin 4x$
3. $y = \sqrt{x^3+3x}$
4. $y = (3x-2)^{-5}$
5. $y = \tan 3x$
6. $y = \sqrt{1+2\cos x}$
7. $y = \sin^4 x$
8. $y = \sqrt{x} \cdot \cos^2 x$
9. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
10. $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
11. $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$
12. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$
13. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$
14. $y = \tan^3 x + 3\tan x + 3x$
15. $y = \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}$.

6. NATURAALLOGARITMID.

6.1. ORGAANILISE KASVAMISE SEADUS.

1) Olgu puu pikkus aasta algul s cm. Kasvagu puu iga aastaga $p\%$ võrra oma pikkusest aasta algul. Siis on puu pikkuseks

teise aasta algul $s\left(1+\frac{p}{100}\right)$ cm,

kolmanda aasta algul $s\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ cm,

. . . . . .,

$n+1$ aasta algul $s\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ cm.

2) Kui huvitume puu kasvamisest iga kuu järel, siis loeme, et puu kasvab ühe kuu jooksul $\frac{p}{12}\%$ võrra oma pikkusest kuu algul. Sel juhul on puu pikkuseks

teise kuu algul $s\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)$ cm,

kolmanda kuu algul $s\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^2$ cm,

. . . . . .,

kaheteistkümnenda kuu algul $s\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{11}$ cm,

järgmise aasta algul $s\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}$ cm,

. . . . . .,

$n+1$ aasta algul $s\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12n}$ cm.

3) Kui huvitume puu kasvamisest iga päeva järel, siis loeme, et puu kasvab ühe ööpäeva jooksub $\frac{p}{365}\%$ võrra oma pikkusest selle ööpäeva algul. Siis on puu pikkuseks

TARTU ÜLIKOOLI

teise ööpäeva algul $s\left(1+\frac{p}{365\cdot 100}\right)$,

kolmanda ööpäeva algul $s\left(1+\frac{p}{365\cdot 100}\right)^2$,

. . . . . .,

järgmise aasta algul $s\left(1+\frac{p}{365\cdot 100}\right)^{365}$,

. . . . . .,

$n+1$ aasta algul $s\left(1+\frac{p}{365\cdot 100}\right)^{365n}$.

4) Huvitume nüüd puu kasvamisest ajavahemikkude järel, mis moodustavad $\frac{1}{k}$ aasta pikkusest. Sel korral loeme, et puu kasvab $\frac{p}{k}$ % võrra oma pikkusest ajavahemiku algul. Puu pikkuseks $n+1$ aasta algul saame

$$s\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{kn}.$$

5) Kui nüüd eeldada, et puu kasvab kogu aeg pidevalt, siis sellekohase seaduse üleskirjutamiseks tuleb vaadelda piirprotsessi, kus ajavahemik, mille järel fikseerime puu pikkuse, läheneb nullile, s. t. kus $\frac{1}{k}\to 0$, s. t. aga, et $k\to\infty$. Seega puu pideva kasvu seaduseks saame

$$\lim_{k\to\infty} s\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{kn}.$$

Tähistades $\frac{p}{k\cdot 100}=\frac{1}{m}$ ja $\frac{p}{100}=q$, saame et $\frac{q}{k}=\frac{1}{m}$ ja siit $k=mq$. Et q on lõplik arv, siis kui $k\to\infty$, peab ka $m\to\infty$.

Teostades nüüd puu pideva kasvu seaduse avaldises vastavad ümbertähistamised, saame

$$\lim_{m\to\infty}\left[s\left(1+\frac{1}{m}\right)^{nmq}\right]$$

ehk

$$s\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{nq}.$$

Analoogilist mõttekäiku on võimalik rakendada paljudele pidevalt muutuvatele loodusnähtustele, nagu õhurõhu muutumine kaugenemisel Maast, aatomi lagunemine aja jooksul, kontsentratsiooni muutumine lahuses reaktsiooni mõjul jne.

Kõik need nähtused alluvad analoogilisele pideva muutumise seadusele, mida nimetatakse **orgaanilise kasvamise seaduseks.**

6. 2. ARV e.

Orgaanilise kasvamise seadus sisaldab piirväärtust $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. On võimalik tõestada, et arvude jadal, mille saame, andes avaldises $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ suurusele m-le järjest väärtusi 1, 2, 3, 4, ..., s. t.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \left(\frac{5}{4}\right)^4,\ \left(\frac{6}{5}\right)^5,\ \ldots,\ \left(\frac{m+1}{m}\right)^m,\ \ldots,$$

on olemas piirväärtus. Seda piirväärtust tähistatakse tähega e, seega

$$\boxed{e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.}$$

Saab näidata,[1] et arv e on irratsionaalarv ja et $e\approx 2{,}718$.

6. 3. NATURAALLOGARITMID.

Matemaatikas, eriti integraal- ja diferentsiaalarvutuses kasutatakse sageli logaritme, mille aluseks on arv e. Neid logaritme nimetatakse **loomulikeks logaritmideks** ehk **naturaallogaritmideks.** Sagedase kasutamise tõttu on nende logaritmide tähistamiseks võetud kasutusele eritähis: ln. Nii kirjutatakse $\log_e x$ asemel $\ln x$.

6. 4. NATURAALLOGARITMIDE AVALDAMINE KÜMNENDLOGARITMIDE KAUDU.

Leiame kümnendlogaritmide ja naturaallogaritmide vahelise seose.

On antud arvu N kümnendlogaritm ja naturaallogaritm: $\log N$ ja $\ln N$. Vastavalt logaritmi definitsioonile võime kirjutada, et

$N=10^{\log N}$ ja $N=e^{\ln N}$.

Seega

$10^{\log N}=e^{\ln N}$.

Võtame selle võrduse mõlemast poolest kümnendlogaritmi:

$\log N \log 10=\ln N \log e$.

Et $\log 10=1$, siis

$\log N=\ln N \log e$.

---

[1] Vt. näiteks G. Rägo «Kõrgem matemaatika I», Tln., 1962, lk. 629—631.

Tabeleist leiame, et $\log e = \log 2{,}718 = 0{,}4343$. Seega

$$\boxed{\log N = 0{,}4343 \ln N.}$$

Et

$$\frac{1}{0{,}4343} = 2{,}303,$$

siis

$$\boxed{\ln N = 2{,}303 \log N.}$$

Leiame nüüd naturaallogaritmide ja alusel a olevate logaritmide vahelise seose. On antud $\log_a N$ ja $\ln N$, s. t.

$N = a^{\log_a N}$ ja $N = e^{\ln N}$.

Siit

$a^{\log_a N} = e^{\ln N}$.

Võtame võrduse mõlemast poolest naturaallogaritmi

$\log_a N \ln a = \ln N \ln e$.

Siit

$$\boxed{\ln N = \log_a N \ln a}$$

ehk

$$\boxed{\log_a N = \frac{1}{\ln a} \ln N.}$$

6. 5. NATURAALLOGARITMFUNKTSIOONI TULETIS.

On antud funktsioon

$y = \ln x$.

Kui argument muutub Δx võrra, siis funktsioon muutub Δy võrra, s. t.

$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$.

Siit

$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$

ehk

$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}$.

Moodustame suhte

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Enne piirväärtuse leidmist korrutame ja jagame võrduse paremat poolt argumendiga x $(x > 0)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right).$$

Tähistame siin $\frac{x}{\Delta x} = m$. Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis $m \to \infty$.

Tuletise leidmiseks võtame leitud suhtest piirväärtuse juhul, kui $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{x}m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right] = \frac{1}{x}\lim_{m\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Varem tundma õpitud summa, korrutise ja jagatise piirväärtuse teoreemide juurde kuulub veel järgmine:

$$\lim_{x\to b}[\log_a f(x)] = \log_a[\lim_{x\to b} f(x)],$$

s. t. et

piirväärtuse leidmise ja logaritmimise järjekord on vahetatavad.

Rakendades siin seda lauset, saame

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right].$$

Teame juba, et $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$ ja et $\ln e = 1$, siis

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Seega, kui $y = \ln x$, siis $y' = \frac{1}{x}$.

Olgu $x < 0$, siis $-x > 0$. Sel juhul on funktsiooni $y = \ln(-x)$ tuletiseks $y' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

Niisiis,

$$\boxed{\text{kui } y = \ln x, \text{ siis } y' = \frac{1}{x}}$$

ja

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

6. 6. KÜMNENDLOGARITMFUNKTSIOONI TULETIS.

Eespool leidsime, et

$$\log x = 0{,}4343 \ln x.$$

Seega

$$(\log x)' = 0{,}4343 (\ln x)'$$

ja siit

$$(\log x)' = \frac{0{,}4343}{x}.$$

Niisiis,

$$\boxed{\text{kui } y = \log x, \text{ siis } y' = \frac{0{,}4343}{x}.}$$

6. 7. LOGARITMFUNKTSIOONI $y = \log_a x$ TULETIS.

Et $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$,

siis

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

ja seega

$$\boxed{\text{kui } y = \log_a x, \text{ siis } y' = \frac{1}{x \ln a}.}$$

Ülesandeid.

1. Näidake, et $\frac{1}{x \ln 10} = \frac{0{,}4343}{x}$.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised.

2. $y = 1 + \ln x$
3. $y = 3x - \log x$
4. $y = 5x^2 - \log_2 x$
5. $y = \ln x + \log x + \log_5 x$

7. PÖÖRDFUNKTSIOONI TULETIS.

7.1. PÖÖRDFUNKTSIOONI TULETISE LEIDMISE EESKIRI.

On antud funktsioon $y = f(x)$. Avaldades sellest võrdusest argumendi x, saame pöördfunktsiooni $x = g(y)$. Asetades saadud avaldise lähtefunktsiooni avaldisse x asemele, saame samasuse

$$y = f[g(y)].$$

Nii saame vaadelda funktsiooni y liitfunktsioonina, kus vahendavaks muutujaks on x ja argumendiks y. Rakendades nüüd liitfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja, mida me juba teame, saame

$$y'_y = y'_x x'_y.$$

Et $y'_y = 1$, siis

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}.}$$

Viimase võrduse kehtimiseks on vajalik, et $y'_x \neq 0$. See tingimus on täidetud, kui funktsioon $y = f(x)$ on **monotoonne**, s. t. kogu oma ulatuses kas kasvav või kahanev.

7.2. EKSPONENTFUNKTSIOONI TULETIS.

1. FUNKTSIOONI $y = e^x$ TULETIS.

On antud funktsioon $y = \ln x$. Tema pöördfunktsioon on $x = e^y$. Et logaritmfunktsioon, mille alus on suurem kui 1, on kogu ulatuses kasvav, siis võime pöördfunktsiooni tuletise leida, kui kasutame eelmises paragrahvis saadud valemit:

$$(e^y)'_y = \frac{1}{(\ln x)'_x} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y.$$

Seega,

$$(e^y)' = e^y.$$

Vahetades funktsiooni ja argumendi tähised, saame, et

kui $y = e^x$, siis $y' = e^x$.

2. FUNKTSIOONI $y = a^x$ TULETIS.

On antud funktsioon $y = \log_a x$. Tema pöördfunktsioon on $x = a^y$. Teame, et kui $a > 1$, siis logaritmfunktsioon on kogu ulatuses kasvav, ja kui $0 < a < 1$, siis on logaritmfunktsioon kogu ulatuses kahanev. Seega võime rakendada pöördfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja. Saame

$$(a^y)'_y = \frac{1}{(\log_a x)'_x} = x \ln a = a^y \ln a.$$

Vahetades funktsiooni ja argumendi tähised, saame, et

kui $y = a^x$, siis $y' = a^x \ln a$.

7.3. ARKUSFUNKTSIOONI TULETISED.

1) Leida $\cos(\arcsin x)$.
Tähistame $\arcsin x = z$, siis $x = \sin z$ ja
$\cos(\arcsin x) = \cos z$.

Et $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$, siis

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

2) Leida $\cos^2(\arctan x)$.
Tähistame $\arctan x = u$, siis $x = \tan u$ ja
$\cos^2(\arctan x) = \cos^2 u$.

Et $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 u}}{\cos u}$, siis

$$x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 u}}{\cos u},$$

millest

$$x^2 \cos^2 u = 1 - \cos^2 u$$

ja siit

$$\cos^2 u = \frac{1}{1 + x^2}$$

ehk

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

3) Funktsioon $y = \sin x$ on vahemikus $-\frac{\pi}{2}$ kuni $\frac{\pi}{2}$ monotoonselt kasvav. Tema pöördfunktsiooniks selles vahemikus on $x = \arcsin y$.

Pöördfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja kohaselt

$$(\arcsin y)'_y = \frac{1}{(\sin x)'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Vahetades funktsiooni ja argumendi tähised, saame, et

kui $y = \arcsin x$, siis $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) Eelnevale tuginedes näidake, et

kui $y = \arccos x$, siis $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5) Funktsioon $y = \tan x$ on vahemikus $-\frac{\pi}{2}$ kuni $\frac{\pi}{2}$ kasvav. Tema pöördfunktsiooniks samas vahemikus on $x = \arctan y$.

Pöördfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja kohaselt

$$(\arctan y)'_y = \frac{1}{(\tan x)'_x} = \cos^2 x = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Vahetades argumendi ja funktsiooni tähise, saame, et

kui $y = \arctan x$, siis $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Ülesandeid.

1. Leida sin (arccos x).
2. Leida tan (arcsin x).

Leida järgmiste funktsioonide tuletised.

3. $y = \sqrt{2}\,e^x$
4. $y = a^x + e^x$
5. $y = \arcsin x + \arccos x$
6. $y = \ln(1-2x)$
7. $y = e^{-x}$
8. $y = \ln(1+x)$
9. $y = e^{-x^2+3x-2}$
10. $y = 10^{2x-5}$
11. $y = 2^{3x}$
12. $y = 3^{\sin x}$
13. $y = \sin 2^x$
14. $y = \arcsin x^2$
15. $y = (\arcsin x)^2$
16. $y = \arccos \frac{2}{x}$
17. $y = \arctan(x-1)$
18. $y = \ln \sin x$
19. $y = \ln \cos x$
20. $y = \cos(\ln x)$
21. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$
22. $y = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$
23. $y = \arcsin(\sqrt{x^2+1}-1)$

8. INTEGREERIMISVÕTTEID.

8. 1. PÕHILISTE INTEGRAALIDE TABEL.

1.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$(n \neq -1)$
2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$(x \neq 0)$
3.	$\int e^x dx = e^x + C$	
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$(a > 0,\ a \neq 1)$
5.	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	
6.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	
8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	
9.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$	

8. 2. MÄÄRAMATA INTEGRAALI OMADUSI.

1. INTEGRAAL DIFERENTSIAALIST.

Teame, et

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, kus $F'(x) = f(x)$.

Seega

$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$

Et $F'(x)dx = dF(x)$, siis

$\int dF(x) = F(x) + C.$

Saadud tulemuse sõnastame järgmiselt:

määramata integraal funktsiooni diferentsiaalist on võrdne selle funktsiooniga või erineb temast suvalise konstandi võrra.

2. DIFERENTSIAAL INTEGRAALIST.

Olgu antud, et

$\int f(x)dx = F(x) + C$, kus $F'(x) = f(x)$.

Võtame nüüd võrduse mõlemast poolest diferentsiaali. Saame

$d\int f(x)dx = d[F(x) + C]$

ja et

$d[F(x) + C] = [F(x) + C]'dx = F'(x)dx = f(x)dx,$

siis

$d\int f(x)dx = f(x)dx,$

s. t. et

diferentsiaal integraalist on võrdne integreeritava avaldisega.

3. KONSTANTSE TEGURI TOOMINE INTEGRAALIMÄRGI ETTE.

Väidame, et

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

Olgu $\int f(x)dx = F(x) + C$, s. t. et $F'(x) = f(x)$. Siis on

$k\int f(x)dx = k[F(x) + C] = kF(x) + kC.$

Et korrutises kC on üks tegureist suvaline konstant, siis on ka korrutis suvaline konstant. Tähistame selle C_1-ga, s. t. et

$kC = C_1$

ja seega

$k\int f(x)dx = kF(x) + C_1.$

Et $[kF(x) + C_1]' = kF'(x) = kf(x)$, siis

$\int kf(x)dx = kF(x) + C_1.$

Seega

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

Selle omaduse sõnastame järgmiselt:

konstantse teguri võib tuua integraalimärgi ette.

4. SUMMA INTEGREERIMINE.

Väidame, et

$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Olgu $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, kus $F'(x) = f(x)$

ja $\int g(x)dx = G(x) + C_2$, kus $G'(x) = g(x)$.
Liites nende võrduste vastavad pooled, saame
$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2$.
Et summas $C_1 + C_2$ on mõlemad liidetavad suvalised konstandid, siis on see summa ise ka suvaline konstant. Tähistame selle C_3-ga, s. t.

$$C_1 + C_2 = C_3.$$

Seega
$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C_3$.
Et $[F(x) + G(x) + C_3]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, siis

$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C_3$$

ja seega

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Selle omaduse sõnastame järgmiselt:

summa integreerimiseks võime integreerida iga liidetava eraldi ja tulemused liita.

8. 3. MÄÄRAMATA INTEGRAALI LAHENDAMINE.

1) $\int (x^3 - 2x^2 + 7x - 4)dx = \int x^3\,dx - \int 2x^2\,dx + \int 7x\,dx -$
$- \int 4dx = \int x^3\,dx - 2\int x^2\,dx + 7\int x\,dx - 4\int dx = \frac{x^4}{4} + C_1 -$
$-2 \cdot \frac{x^3}{3} + C_2 + 7 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 - 4x + C_4.$

Et $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ on suvaline konstant, siis tähistame selle summa C-ga. Saame, et

$$\int (x^3 - 2x^2 + 7x - 4)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 4x + C.$$

Missuguseid määramata integraali omadusi on selle ülesande lahendamisel kasutatud?

2) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx =$
$= \int \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int x^2\,dx - 2\int dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx =$
$= \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C.$

3) Kui integreeritav avaldis on murd, mille lugeja erineb nimetajast konstantse liidetava võrra, siis on otstarbekohane lugejaga liita ja lahutada seesama konstant. Integreerimisel rakendatakse summa integreerimise omadust.

$$\int \frac{x\,dx}{x+4} = \int \frac{x+4-4}{x+4}\,dx = \int \left(\frac{x+4}{x+4} - \frac{4}{x+4}\right) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{4}{x+4}\right) dx = x - 4 \ln|x+4| + C.$$

4) Trigonomeetrilistest funktsioonidest koosnevate avaldiste integreerimisel on mõnikord otstarbekohane rakendada trigonomeetriliste funktsioonide vahelisi põhiseoseid.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \tan x - \cot x + C.$$

Paljude integraalide lahendamisel on võimalik integreeritavat funktsiooni hoolikalt jälgides kohe vastus välja kirjutada. Järgnevalt ongi mõned sellekohased näited esitatud.

5) $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C,$

sest $\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right)' = \frac{1}{3} \cos 3x \cdot 3 = \cos 3x.$

6) $\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C,$

sest $\left(\frac{1}{2} \ln|2x-1|\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \frac{1}{2x-1}.$

7) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C,$

sest $\left(\frac{1}{3} \ln|x^3+1|\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3+1} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{x^3+1}.$

8) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C,$

sest $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

9) $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C,$

sest $\left(\frac{1}{4} \sin^4 x\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4 \sin^3 x \cos x = \sin^3 x \cos x.$

Ülesandeid.

1. $\int \sqrt{x}\,dx$
2. $\int \frac{dx}{x^2}$
3. $\int (1-2u)\,du$
4. $\int (2x^7 - 3x^5 + 4x^3 - x)\,dx$
5. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$
6. $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3}\,dx$
7. $\int \frac{2-x+x^2}{3x}\,dx$
8. $\int \frac{x^2+7x+12}{x+4}\,dx$
9. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$
10. $\int \frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1}\,du$
11. $\int \frac{x^2+2}{1+x^2}\,dx$
12. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$
13. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx$
14. $\int \tan^2 x\,dx$
15. $\int \cot^2 x\,dx$
16. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$
17. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$
18. $\int \sin(2x-3)\,dx$
19. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$
20. $\int (e^x+1)^3\,dx$
21. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$
23. $\int \tan x\,dx$
24. $\int \cot x\,dx$
25. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{\sqrt{3x^2-5x+6}}$
26. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$
27. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$
28. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$
29. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$
30. $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx$

8.4. KORRUTISE DIFERENTSIAAL.

Olgu antud funktsioonid $u = u(x)$ ja $v = v(x)$. Moodustame nende korrutise $u(x)v(x)$ ja leiame selle diferentsiaali.

Teatavasti on funktsiooni diferentsiaal võrdne funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutisega, s. t.

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Seega

$$d[u(x)v(x)] = [u(x)v(x)]'\,dx =$$
$$= [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,dx = v(x)[u'(x)\,dx] +$$
$$+ u(x)[v'(x)\,dx] = v(x)du(x) + u(x)dv(x).$$

Teades, et u ja v on x funktsioonid, kirjutame lühemalt

$$\boxed{d(uv) = udv + vdu.}$$

8. 5. OSITI INTEGREERIMINE.

Integreerimisel kasutatakse mitmeid võtteid, mis võimaldavad kergemini algfunktsiooni kindlaks määrata. Üheks nendest on ositi integreerimise võte, milleni jõutakse, lähtudes korrutise diferentsiaali valemist

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Avaldame siit udv:

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Integreerides selle võrduse mõlemaid pooli, saame

$$\int udv = \int [d(uv) - vdu].$$

Siit

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Et funktsiooni diferentsiaali integreerimisel saame tulemuseks kas sama funktsiooni või temast suvalise konstantse liidetava võrra erineva funktsiooni, siis

$$\int d(uv) = uv + C_1$$

ja

$$\int udv = uv - \int vdu + C_1.$$

Määramata konstant C_1 jäetakse aga kirjutamata, sest võrdus sisaldab määramata integraale, mis omakorda sisaldavad suvalisi konstantseid liidetavaid.

Seega

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu\ .}$$

Saadud valemit nimetatakse **ositi integreerimise valemiks.** Toome mõned näited.

Näide 1.

$\int x \sin x\,dx.$

Valime $u = x$ ja $dv = \sin x\,dx$. Funktsiooni v leidmiseks tuleb integreerida tema diferentsiaali dv avaldist

$$\int dv = \int \sin x\,dx,$$

millest

$$v = -\cos x + C_1.$$

Et funktsiooniks v sobib leitud avaldis iga C_1 korral, siis valitakse lihtsuse mõttes $C_1 = 0$. Seega

$$v = -\cos x$$

ja et $du = dx$, siis

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx =$$
$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Näide 2.

$$\int x^2 e^x dx.$$

Olgu

$$u = x^2 \quad \text{ja} \quad dv = e^x dx,$$

siis

$$du = 2x\, dx \quad \text{ja} \quad v = e^x$$

ja seega

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x\, dx.$$

Viimast integraali peame omakorda lahendama ositi integreerimise võtet kasutades. Olgu

$$u = x \quad \text{ja} \quad dv = e^x\, dx,$$

siis

$$du = dx \quad \text{ja} \quad v = e^x$$

ja seega

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C_1.$$

Nüüd saame avaldada antud integraali

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2x e^x + 2e^x + C,$$

kus $C = -2C_1$.

Näide 3.

$$\int \ln x\, dx.$$

Olgu

$$u = \ln x \quad \text{ja} \quad dv = dx,$$

siis

$$du = \frac{dx}{x} \quad \text{ja} \quad v = x.$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

Ositi integreerimise võtet kasutatakse peamiselt niisuguste integraalide integreerimisel, kus integreeritavaks avaldiseks on: $x^n e^n$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$, $x^n \ln x$ või mõne trigonomeetrilise funktsiooni pöördfunktsioon. Neil juhtudel valitakse $u = x^n$ või võetakse u võrdseks trigonomeetrilise funktsiooni pöördfunktsiooniga.

Ülesandeid.

1. $\int x \cos x\, dx$
2. $\int x e^x\, dx$
3. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$
4. $\int \operatorname{arctan} x\, dx$
5. $\int \arccos x\, dx$
6. $\int x^2 \cos x\, dx$
7. $\int x^2 e^{-x}\, dx$
8. $\int x \ln^2 x\, dx$
9. $\int e^x \cos x\, dx$
10. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

8.6. LIITFUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL.

Olgu

$y = f(v)$ ja $v = \varphi(x)$, s. t.
$y = f[\varphi(x)]$.

Leiame liitfunktsiooni diferentsiaali

$$dy = \{f[\varphi(x)]\}' dx.$$

Rakendades liitfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja (vt. lk. 49), saame

$$dy = y'_v v'_x dx.$$

Et $v'_x dx = dv$, siis

$$dy = y'_v dv.$$

Seega,

diferentsiaali kuju on liitfunktsiooni jaoks samasugune kui argumendist otse sõltuva funktsiooni puhul.

8.7. ASENDUSVÕTE.

Sageli lihtsustub integreerimine, kui
a) integreerimismuutuja asendada sobiva funktsiooniga või
b) integreeritav avaldis või osa temast asendada uue muutujaga.

Asendada tuleb ka esialgse integreerimismuutuja diferentsiaal, et oleks võimalik integreerida uue muutuja järgi. Seetõttu tuleb ka juhul b) avaldada esialgne integreerimismuutuja uue muutuja kaudu.

Lõppvastus esitatakse esialgse integreerimismuutuja funktsioonina. Selleks asendatakse saadud tulemuses uus integreerimismuutuja esialgse kaudu.

Toome mõned näited asendusvõtte kasutamise kohta. Esimeste näidetena vaatleme selliseid integraale, mille integreerimisega tulime eespool toime asendusvõtet kasutamata.

Näide 1.

$\int \cos 2x\, dx.$

Teeme asenduse $x = \frac{u}{2}$. Siit $dx = \frac{1}{2} du$. Seega

$$\int \cos 2x\, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \sin u + C.$$

Tulemuse avaldame nüüd esialgse integreerimismuutuja x kaudu. Et $u = 2x$, siis

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Näide 2.

$\int \frac{dx}{2x-3}$.

Tähistame $2x - 3 = z$. Siit $x = \frac{z+3}{2}$ ja $dx = \frac{1}{2} dz$. Seega

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln z + C = \ln \sqrt{z} + C.$$

Et $z = 2x - 3$, siis

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \ln \sqrt{2x-3} + C.$$

Näide 3.

$\int \frac{2x\, dx}{x^2+1}$.

Tähistame $u = x^2 + 1$. Siin on otstarbekohasem avaldada du aga mitte dx, sest $du = 2x dx$, s. o. aga parajasti integreeritava avaldise lugeja. Seega

$$\int \frac{2x\, dx}{x^2+1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln (x^2+1) + C.$$

Näide 4.

$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Tähistame $u = x^2 - 1$, sest siis $du = 2x\, dx$ ja $\frac{du}{2} = x\, dx$. Seega

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2-1} + C.$$

Näide 5.

$\int \sqrt{3x-4}\,dx$.

Teeme asenduse $3x-4=t^2$. Siit $x=\frac{t^2+4}{3}$ ja $dx=\frac{2}{3}t\,dt$. Seega

$$\int \sqrt{3x-4}\,dx=\int t\cdot\frac{2}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\int t^2\,dt=\frac{2}{9}t^3+C.$$

Et $t=(3x-4)^{\frac{1}{2}}$, siis

$$\int \sqrt{3x-4}\,dx=\frac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(3x-4)\sqrt{3x-4}+C.$$

Näide 6.

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Teeme asenduse $x=a\sin t$, siis $dx=a\cos t\,dt$. Seega

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{a^2}{2}t+$$
$$+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Kui $x=a\sin t$, siis $\sin t=\frac{x}{a}$ ja $t=\arcsin\frac{x}{a}$. Edasi on

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=$$
$$=2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Niisiis,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Ülesandeid.

1. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (Asendus: $a^2-x^2=t$.)
2. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ (Asendus: $\cos x=z$.)
3. $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ (Asendus: $x=r\sin t$.)

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$ (Asendus: $x+1=t$.)

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (Asendus: $x=\frac{1}{z}$.)

6. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$

9. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$

8.8. MÄÄRATUD INTEGRAALIDE ARVUTAMINE.

1. MÄÄRATUD INTEGRAALI ARVUTAMINE VASTAVA MÄÄRAMATA INTEGRAALI KAUDU.

Määratud integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ arvutamiseks leiame algul vastava määramata integraali

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

ja sellest lähtudes määratud integraali väärtuse, kasutades **Newton-Leibnizi valemit:**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).}$$

Näide 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t+1)\,dt.$$

Vastava määramata integraali

$$\int \sin(2t+1)\,dt$$

integreerimiseks kasutame asendusvõtet.

Tähistame $2t+1=z$. Siit $t=\frac{z-1}{2}$ ja $dt=\frac{1}{2}dz$.

Seega

$$\int \sin(2t+1)\,dt = \int \sin z \cdot \frac{1}{2}\,dz = -\frac{1}{2}\cos z + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2t+1) + C.$$

Määratud integraali väärtuse leiame nüüd Newton-Leibnizi valemi abil:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t+1)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(2t+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}[\cos(\pi+1) -$$

$$-\cos 1] = -\frac{1}{2}[-\cos 1 - \cos 1] = \cos 1 = 0{,}5394.$$

Näide 2.

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Vastav määramata integraal on:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Teeme asenduse $x = 2\sin t$, siis $dx = 2\cos t\,dt$ ja

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t\,dt = 2t + \sin 2t + C.$$

Et $x = 2\sin t$, siis $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Seega

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} +$$

$$+ \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

Ja nüüd arvutame määratud integraali väärtuse

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left[2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = 2\arcsin\frac{1}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{4-1} - \arcsin\frac{0}{2} - \frac{0}{2}\cdot\sqrt{4-0} = 2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Näide 3.

$$\int_0^1 x \arctan x\,dx.$$

Vastava määramata integraali lahendame ositi integreerimise võttega.

$$\int x \arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx,$$

$u = \arctan x$, $dv = x\,dx$,

$du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Lahendame nüüd integraali

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x - \arctan x + C.$$

Ja seega

$$\int x \arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x - C.$$

Määratud integraali väärtuseks saame nüüd:

$$\int_0^1 x \arctan x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Ülesandeid.

1. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$

2. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u\, du$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

5. $\int_1^2 \ln x\, dx$

6. $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$

2. MÄÄRATUD INTEGRAALIDE ARVUTAMINE ASENDUSVÕTTEGA.

Määramata integraali lahendamisel asendusvõttega tuleb integreerimise lihtsustamiseks sisse toodud muutuja lõpptulemuse saamiseks asendada esialgse muutuja kaudu. Määratud integraalide arvutamisel võime selle sammu ära jätta, kui uue muutuja sissetoomisel arvestada, kuidas selle tagajärjel muutuvad integreerimise rajad.

Näide 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t+1)\, dt.$$

Meid huvitab integreerimise tulemus, kui t muutub 0-st $\frac{\pi}{2}$-ni. Kui nüüd teeme asenduse $2t+1=z$, siis peame selgitama, missugused z väärtused vastavad t väärtustele 0 ja $\frac{\pi}{2}$.

Kui $t=0$, siis $z=2\cdot 0+1=1$.

Kui $t=\frac{\pi}{2}$, siis $z=2\cdot\frac{\pi}{2}+1=\pi+1$.

Nüüd võime kirjutada (vt. näide 1, lk. 70), et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t+1)\, dt = \int_1^{\pi+1} \sin z\cdot\frac{1}{2}\, dz = -\frac{1}{2}\cos z \Big|_1^{\pi+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos(\pi+1)-\cos 1] = -\frac{1}{2}[-\cos 1-\cos 1] =$$

$$= \cos 1 = 0{,}5394.$$

Näide 2.

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx.$$

Teeme siin asenduse $x = 2 \sin t$ ja leiame siis x väärtusele 0 ja 1 vastavad t väärtused:

võrrandi $0 = 2 \sin t$ lahendiks on $t = 0$;

võrrandi $1 = 2 \sin t$ lahendiks on $t = \frac{\pi}{6}$.

Seega (vt. näide 2, lk. 71)

$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t\, dt = \ldots =$$

$$= [2t + \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ülesandeid.

1. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + x}$

2. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{1 + \sqrt{x}}$

3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\, dx$

4. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\, dx$

5. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}$

6. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

3. MÄÄRATUD INTEGRAALIDE ARVUTAMINE OSITI INTEGREERIMISE TEEL.

Ositi integreerimise valemi saime integreerides võrdust

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Et avaldised on võrdsed, siis on võrdsed ka võrduse pooltest võetud samade rajadega määratud integraalid, s. t.

$$\int_a^b u\, dv = \int_a^b [d(uv) - v\,du].$$

Siit

$$\int_a^b u\,dv = uv \Big|_0^b - \int_a^b v\,du.$$

Seda tulemust kasutataksegi määratud integraalide arvutamisel.

Näide.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\,dx =$$

$u = x,\ du = dx,\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x},\quad v = -\cot x,$

$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Ülesandeid.

1. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

2. $\int_1^2 x\ln x\,dx$

3. $\int_1^3 \ln x\,dx$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

6. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx.$

9. POLÜNOOMID.

9. 1. TÄISARVUDE RING.

Oletame, et meie käsutuses on kõik täisarvud ehk nn. **täisarvude hulk**

$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Täisarvusid liites või korrutades saame alati täisarvu. Seepärast öeldaksegi, et

täisarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes.

Sealjuures kehtivad *liitmise ja korrutamise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadused.* Samuti kehtib *distributiivsuse seadus.*

Ka liitmise pöördtehe (lahutamine) on täisarvude hulgas alati teostatav. Seega

täisarvude hulk on kinnine ka lahutamise suhtes.

Korrutamise pöördtehe (jagamine) pole siin aga alati teostatav.

Tähistades kõigi täisarvude hulga tähega T ja tõsiasja, et arv a kuulub täisarvude hulka, sümboliga

$a \in T$,

võime täisarvude kohta käivad omadused kokku võtta järgmiselt.

Kui $a \in T$, $b \in T$ ja $c \in T$, siis ka $a + b \in T$ ja $ab \in T$, kusjuures kehtivad järgmised omadused:

1°. $a + b = b + a$ (liitmise kommutatiivsus);

2°. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (liitmise assotsiatiivsus);

3°. Ikka leidub niisugune arv $c \in T$, mis rahuldab võrrandit $a + x = b$, s. t. $x = c$; $(a - b \in T)$;

4°. $ab = ba$ (korrutamise kommutatiivsus);

5°. $a(bc) = (ab)c$ (korrutamise assotsiatiivsus);

6°. $(a + b)c = ac + bc$ (distributiivsus).

Niisugust arvuhulka, kus on defineeritud liitmise ja korrutamise tehe eespool toodud omadustega, nimetatakse **ringiks.**

Seega,

täisarvude hulk on ring.

Et liitmise ja korrutamise tehe koos loetletud omadustega on kehtivad samuti ratsionaalarvude ja reaalarvude hulgas, siis ka

ratsionaalarvude hulk on ring

ja

reaalarvude hulk on ring.

9.2. JAGAMINE TÄISARVUDE RINGIS.

Kahe täisarvu jagatiseks täisarvude ringis võib olla täisarv, nagu näiteks

$24 : 6 = 4$ või $(-48) : 6 = -8$

või tekib jagamisel jääk, nagu näiteks

$25 : 6 = 4$, jääk 1 või $(-50) : 6 = -8$, jääk (-2).

Viimased ülesanded on esitatavad ka järgmises kujus:

$25 = 6 \cdot 4 + 1$ või $-50 = 6 \cdot (-8) + (-2)$.

Üldiselt, kui $a \in T$ ja $b \in T$, siis leiduvad $q \in T$ ja $r \in T$, nii et

$$a = bq + r.$$

Kui $r = 0$, siis ütleme, et täisarvude ringis arv a jagub arvuga b ja jagatiseks on q.

Kui $r \neq 0$, siis ütleme, et täisarvude ringis arv a ei jagu arvuga b ja jagamisel jääb jääk r.

9.3. POLÜNOOMI MÕISTE.

Polünoomiks *nimetatakse funktsiooni*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kus reaalarvud $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ *on* **polünoomi kordajad** *ja* x **argument.**

Polünoomide näiteid:

$\sqrt{2}x + 1;$

$6x^5 - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{7} - 5;$

$7x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$

Argumendi suurimat astendajat nimetatakse **polünoomi astmeks.** Toodud näidetes on esimene polünoom 1. astme polünoom, teine 5. astme polünoom ja kolmas 6. astme polünoom.

Et konstanti võib vaadelda kui polünoomi $f(x)$, milles kõik x astmete kordajad on võrdsed nulliga, s. t. et

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_0,$$

kus $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_2 = a_1 = 0$. Et $a_0 = a_0 x^0$, siis nimetatakse konstanti ka nullastme polünoomiks.

9.4. POLÜNOOMIDE RING.

Tähistame kõigi polünoomide hulka tähega P.

Olgu antud, et $f(x) \in P$, $g(x) \in P$ ja $h(x) \in P$, kus näiteks

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$,

$g(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$

ja

$h(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$.

Leiame kahe esimese polünoomi summa

$f(x) + g(x) = b_4x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$.

Et polünoomide kordajad on reaalarvud, siis kehtib polünoomi kordajate liitmisel kommutatiivsuse seadus. Sellest järeldub, et

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$,

sest *kaks polünoomi on võrdsed, kui nad on teisendatavad täpselt ühesugusele kujule.* Seega,

polünoomide liitmine on kommutatiivne.

Liites $f(x)$ ja $g(x)$ summaga $h(x)$, saame

$[f(x) + g(x)] + h(x) = b_4x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + [(a_2 + b_2) + c_2]x^2 + [(a_1 + b_1) + c_1]x + (a_0 + b_0) + c_0$.

Et polünoomi kordajate juures kehtib liitmise assotsiatiivsuse seadus, siis järeldub sellest, et

$[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$,

s. t. et

polünoomide liitmine on assotsiatiivne.

On antud võrrand

$h(x) + y(x) = g(x)$,

kus $h(x)$ ja $g(x)$ on antud polünoomid ja $y(x)$ on tundmatu funktsioon.

Asendades $h(x)$ ja $g(x)$ vastavate avaldistega, saame

$c_2x^2 + c_1x + c_0 + y(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

Sellest võrdusest saame avaldada otsitava $y(x)$:

$y(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + (b_2 - c_2)x^2 + (b_1 - c_1)x + b_0 - c_0$.

On ilmne, et $y(x) \in P$.

Polünoomide hulgas on võrrand $h(x) + y(x) = g(x)$ alati lahenduv.

Näidake antud polünoomide $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$ abil, et

a) $f(x)h(x) = h(x)f(x)$,

b) $[f(x)h(x)]g(x) = f(x)[h(x)g(x)]$,
c) $[f(x) + g(x)]h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$,

s. t. et

polünoomide korrutamine on kommutatiivne,
polünoomide korrutamine on assotsiatiivne,
polünoomide hulgas kehtib korrutamise distributiivsus liitmise suhtes.

Kõigi vaadeldud omaduste kehtivusest järeldub aga, et **polünoomide hulk on ring.**

9. 5. POLÜNOOMIDE JAGAMINE.

Olgu $f(x) \in P$ ja $g(x) \in P$. Meid huvitab jagatis $\frac{f(x)}{g(x)}$, kus $g(x) \neq 0$.

Selgitame näidete varal, et nii nagu täisarvude ringis on ka polünoomide ringis kaks võimalust, kas

a) *jagatiseks on polünoom* või
b) *jagamisel tekib jääk.*

Näide 1.

$$\begin{array}{r|l}
12x^5 - 17x^4 + 16x^3 - 11x^2 + 5x - 2 & 4x^2 - 3x + 2 \\
\underline{12x^5 - 9x^4 + 6x^3} & \overline{3x^3 - 2x^2 + x - 1} \\
-8x^4 + 10x^3 - 11x^2 & \\
\underline{-8x^4 + 6x^3 - 4x^2} & \\
4x^3 - 7x^2 + 5x & \\
\underline{4x^3 - 3x^2 + 2x} & \\
-4x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-4x^2 + 3x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Näide 2.

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2 & x^2 - x + 1 \\
\underline{4x^4 - 4x^3 + 4x^2} & \overline{4x^2 + 2x - 1} \\
2x^3 - 3x^2 - 3x & \\
\underline{2x^3 - 2x^2 + 2x} & \\
-x^2 - 5x + 2 & \\
\underline{-x^2 + x - 1} & \\
-6x + 3 \text{ (jääk)} &
\end{array}$$

Siin kehtivad analoogilised seosed täisarvude hulgas kehtivatele võrdustele:

$$12x^5 - 17x^4 + 16x^3 - 11x^2 + 5x - 2 =$$
$$= (3x^3 - 2x^2 + x - 1)(4x^2 - 3x + 2),$$
$$4x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2 = (4x^2 + 2x - 1)(x^2 - x + 1) +$$
$$+ (-6x + 3).$$

Kontrollige nende võrduste kehtivust!

Üldiselt, kui $f(x) \in P$ ja $g(x) \in P$, siis leiduvad $p(x) \in P$ ja $r(x) \in P$, nii et

$$f(x) = g(x)p(x) + r(x).$$

Kui $r(x) = 0$, siis $f(x)$ jagub polünoomide ringis $g(x)$-ga ja jagatiseks on $p(x)$.

Kui $r(x) \neq 0$, siis $f(x)$ ei jagu polünoomide ringis $g(x)$-ga.

Toodud näidete juures ilmneb veel, et

a) *polünoome saame jagada ainult siis, kui jagatav on kõrgema astme polünoom kui jagaja* ja

b) *jääk $r(x)$ on madalama astme polünoom kui jagaja.*

9. 6. BEZOUT' TEOREEM.

Teame, et

$$f(x) = g(x)p(x) + r(x).$$

Olgu jagaja

$$g(x) = x - a.$$

Sel juhul jääk $r(x)$, mis peab olema jagajast $g(x)$ madalama astme polünoom, saab olla vaid konstant, s. t.

$$r(x) = r$$

ja seega vaadeldaval juhul

$$f(x) = (x - a)p(x) + r.$$

Et see võrdus kehtib argumendi x iga väärtuse korral, siis peab ta kehtima ka juhul, kui $x = a$, s. t.

$$f(a) = (a - a)p(x) + r$$

ja siit

$$f(a) = r.$$

Seega,

polünoomi f(x) jagamisel esimese astme polünoomiga x — a saame jäägiks f(a).

See lause kannab selle valemi tuletanud prantsuse matemaatiku *E. Bezout'* (1730—1783) nime järgi **Bezout' teoreemi** nimetust.

Näiteks leiame jäägi, mis tekib polünoomi $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ jagamisel esimese astme polünoomiga $g(x) = (x - 4)$:

$$f(4) = 3 \cdot 4^4 - 4 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 - 4 + 5 =$$

$$= 768 - 256 + 32 - 4 + 5 = 545.$$

Kontrollime seda tulemust ka otsese jagamise teel.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 5 & x - 4 \\
\underline{-\,3x^4 - 12x^3} & \\
8x^3 + 2x^2 & 3x^3 + 8x^2 + 34x + 135 \\
\underline{-\,8x^3 - 32x^2} & \\
34x^2 - x & \\
\underline{-\,34x^2 - 136x} & \\
135x + 5 & \\
\underline{-\,135x - 540} & \\
545 &
\end{array}
$$

Näeme, et jäägiks saime mõlemal juhul 545.

9.7. HORNERI SKEEM.

Bezout' valemi rakendamisel tuleb leida polünoomi väärtus tundmatu etteantud väärtuse korral. Selle ülesande lahendamiseks on väga sobiv kasutada arvutamise skeemi, mis on tuntud **Horneri skeemi** nime all.

Selgitame Horneri skeemi ehitust kolmanda astme polünoomi juures:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Selle polünoomi võime üles kirjutada teisiti

$$f(x) = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0.$$

Sellest kujust saame üles ehitada järgmise skeemi:

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & a_3x & (a_3x + a_2)x & [(a_3x + a_2)x + a_1]x \\
\hline
x & a_3 & a_3x + a_2 & (a_3x + a_2)x + a_1 & [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0 = f(x).
\end{array}
$$

Näide. Leiame Horneri skeemi abil polünoomi $3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ väärtuse, kui $x = 4$.

	3	−4	2	−1	5
		12	32	136	540
4	3	8	34	135	545

Eespool teostasime antud polünoomide jagamise ja saime jagatiseks $3x^3 + 8x^2 + 34x + 135$. Nagu näeme, on jagatise kordajad ka Horneri skeemiga antud. Põhjenda, miks see nii on!

9. 8. RATSIONAALARVUDE KORPUS.

Võttes täisarvudele lisaks kõik täisarvude jagatised $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, s. t. ka juhud, kus $a = bq + r$ ja sealjuures $r \neq 0$, saame uue arvuhulga, mida nimetatakse **ratsionaalarvude hulgaks.** Tähistame kõigi ratsionaalarvude hulga tähega R.

Teame juba, et ratsionaalarvude hulk on ring (vt. lk. 77). Lisaks ringi omadustele 1° kuni 6° kehtib aga ratsionaalarvude hulgas veel järgmine omadus:

7.° Kui α $(\neq 0) \in R$ ja $\beta \in R$, siis leidub ikka niisugune $x \in R$, mis rahuldab võrrandit $\alpha x = \beta$.

Niisugust arvuhulka, kus on defineeritud liitmise ja korrutamise tehe ja kehtivad nimetatud 7 omadust, nimetatakse **korpuseks.**

Seega,

ratsionaalarvude hulk on korpus.

Et nimetatud 7 omadust kehtivad ka reaalarvude hulgas, siis ka

reaalarvude hulk on korpus.

Täisarvude ringis kehtinud võrduse $a = bq + r$ saame ratsionaalarvude korpuses üles kirjutada järgmiselt:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

9. 9. POLÜNOOMIDE JAGATISTE KORPUS.

Kui polünoomide hulka laiendame, võttes sinna juurde kõik polünoomide jagatised $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$, s. t. ka juhud, kus $f(x) = g(x)p(x) + r(x)$ ja sealjuures $r(x) \neq 0$, saame nn. **polünoomide jagatiste hulga.** Kui $f(x)$ jagub $g(x)$-ga või kui $g(x) = 1$, siis esitab jagatis $\frac{f(x)}{g(x)}$ polünoomi.

Selles polünoomide jagatiste hulgas kehtivad korpuse 7 omadust ja seega

polünoomide jagatiste hulk on korpus.

Põhjenda seda lähemalt!

Polünoomide ringis kehtinud võrduse

$$f(x) = g(x)p(x) + r(x)$$

saame polünoomide jagatiste korpuses esitada kujus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

kus $r(x)$ on madalama astme polünoom kui $g(x)$.

Ülesandeid.

1. Korrutage järgmised polünoomid.

a) $(y^2 + 2y + 1)(y + 1)$
b) $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$
c) $(m^2 + n^2 - mn)(m^2 + mn + n^2)$
d) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - x + 2)$

2. Jagage.

a) $(5a^3b + 2a^2b^2) : (-ab)$
b) $(16x^4y^3 - 24x^2y^3) : (8x^2y^2)$
c) $(x^{2m} - x^{3m}) : x^{2m}$
d) $(x^c - x^{c+1}) : x^c$
e) $(y^{n+1} - 2y^{n-1} + y^2) : y^2$

3. Jagage järgmised hulkliikmed.

a) $(a^2 + 6a^2 + 9) : (a + 3)$
b) $(c^2 - 8c + 9) : (c - 4)$
c) $(x^2 - 17x + 60) : (x - 12)$
d) $(9t^2 - 16) : (3t - 4)$
e) $(m^2n^2 - 10mn + 24) : (mn - 6)$
f) $(x^2y^2 - xy - 6) : (xy + 2)$
g) $(x^2 - 13x^3 + 42) : (x^3 - 7)$
h) $(x^8 - 3x^4 - 21) : (x^4 + 3)$
i) $(c^3 - 27) : (c - 3)$
j) $(h^3 - 64) : (h + 4)$
k) $(x^4 + x^2y^2 + y^4) : (x^2 + xy + y^2)$

4. Jagage järgmised hulkliikmed.

a) $(x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$
b) $(2x^3 + x^4 - 6x^2 + 11x - 10) : (x^2 - x + 2)$
c) $(x^{2n} + 5x^n - 24) : (x^n + 8)$
d) $(x^{2n} - x^n - 6) : (x^n + 2)$

5. Jagage, kasutades Horneri skeemi.

a) $(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) : (x - 1)$
b) $(2x^3 + 3x^2 - 4x - 5) : (x + 1)$
c) $(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 6) : (x - 2)$
d) $(2x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x - 6) : (x + 2)$
e) $(x^5 - 8x^3 + 24x^2 + 12x + 40) : (x + 4)$
f) $(2y^4 - 13y^3 + 16y^2 - 3y - 10) : (y - 5)$

6. On antud polünoom $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$. Leida Horneri skeemi abil $f(2)$, $f(1)$ ja $f(-2)$.

7. On antud polünoom $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x - 8$. Leida Horneri skeemi abil $f(2)$, $f(1)$, $f(-1)$ ja $f(0)$.

8. Kas paarisarvude hulk on ring?

9. Kas paaritute arvude hulk on ring?

10. Kas positiivsete ratsionaalarvude hulk on ring?

11. Kas paarisarvude hulk on korpus?

12. Näita, et kujul $a + b\sqrt{2}$ (a ja b on ratsionaalarvud) esituvate reaalarvude hulk on korpus.

10. RATSIONAALFUNKTSIOONIDE INTEGREERIMINE.

10. 1. RATSIONAALFUNKTSIOONI MÕISTE.

Polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ jagatist $\frac{f(x)}{g(x)}$, kus $g(x) \neq 0$, nimetatakse **ratsionaalfunktsiooniks.**

Teame juba, et juhul, kui $f(x)$ on kõrgema astme polünoom kui $g(x)$, siis

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

kus $r(x)$ on madalama astme polünoom kui $g(x)$. Näiteks

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 5}{x^2 - x + 1} = (x + 4) + \frac{x + 1}{x^2 - x - 1}.$$

Juhul, kui $g(x)$ on lineaarfunktsioon (esimese astme polünoom), on $r(x)$ konstant. Kui aga $f(x)$ jagub $g(x)$-ga, siis $r(x) = 0$.

Juhul, kui $f(x)$ ja $g(x)$ on sama astme polünoomid, on $p(x)$ konstant.

Näiteks

$$\frac{2x^2 + 5}{x^2 - x + 2} = 2 + \frac{2x + 1}{x^2 - x + 2}$$

või

$$\frac{4x + 1}{2x - 5} = 2 + \frac{11}{2x - 5}.$$

Meil on ülesandeks tutvuda ratsionaalfunktsioonide integreerimisega. Juhul, kui lugejaks on kõrgema astme polünoom kui nimetajaks, siis, nagu nägime, saame teda esitada ühe polünoomi ja niisuguse ratsionaalfunktsiooni summana, mille lugejaks on madalama astme polünoom kui nimetajaks.

Polünoomi integreerimine taandub astmefunktsioonide integreerimisele

$$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,$$

kus $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Näide.

$$\int (5x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 5)\,dx = 5\int x^4\,dx + 2\int x^3\,dx - \\ - \int x^2\,dx + 7\int x\,dx - 5\int dx = \\ = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x + C.$$

Tutvume nüüd niisuguste ratsionaalfunktsioonide integreerimisega, kus lugeja on madalama astme polünoom kui nimetaja. Siinjuures piirdume funktsioonidega, mille nimetajaks on lineaar-, ruut- või kuupfunktsioon. Viimasel kahel juhul kasutatakse integreerimise lihtsustamiseks antud murdude esitamist nn. **osamurdude** summana. Seepärast tutvumegi esmalt ratsionaalfunktsioonide osamurdudeks lahutamisega.

10. 2. OSAMURDUDEKS LAHUTAMINE.

1. MURRU NIMETAJA ON LAHUTATAV LINEAARSETEKS TEGURITEKS.

1) Vaatleme murdu, mille lugejaks on konstant ja nimetajaks ruutkolmliige, mis on lahutatav lineaarseiks tegureiks.

Näide.

$$\frac{2}{x^2 + 3x - 4} = \frac{2}{(x-1)(x+4)}.$$

Niisuguste murdude integreerimisel leitakse need lihtsaimate nimetajatega murrud, mille liitmisel saadakse antud murd. Vaadeldava näite juures on ilmne, et nende murdude nimetajateks on $x - 1$ ja $x + 4$. Seega võib oletada, et

$$\frac{2}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4},$$

kus A ja B on konstandid, mis tuleb määrata.

Miks A ja B on konstandid?

Murde $\frac{A}{x-1}$ ja $\frac{B}{x+4}$ nimetataksegi antud murru $\frac{2}{x^2+3x-4}$ o s a m u r d u d e k s. Nende osamurdude lugejad on aga esialgu määramata ja need tuleb määrata.

Liites võrduse paremal poolel olevad murrud, saame

$$\frac{2}{(x-1)(x+4)} = \frac{(A+B)x+4A-B}{(x-1)(x+4)}.$$

Et siin on võrdsete nimetajatega murrud võrdsed, siis peavad järelikult ka lugejad olema võrdsed, s. t. peab kehtima võrdus

$$2 = (A+B)x + 4A - B.$$

Et polünoomide võrdsuse korral on tundmatu kõigi astmete kordajad võrdsed, siis tulevad A ja B nii määrata, et oleksid rahuldatud tingimused:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A-B=2. \end{cases}$$

Lahendades selle süsteemi, saame et

$$\begin{cases} A=\frac{2}{5} \\ B=-\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Niisiis,

$$\frac{2}{(x-1)(x+4)} = \frac{2}{5(x-1)} + \frac{-2}{5(x+4)}.$$

2) Vaatleme murdu, mille lugejaks on lineaarfunktsioon ja nimetajaks tegureiks lahutatav ruutfunktsioon. Sel juhul toimub osamurdudeks lahutamine analoogiliselt eelmise juhuga.

N ä i d e.

$$\frac{3x-2}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2},$$

$$\frac{3x-2}{(x+5)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+5B}{(x+5)(x-2)},$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A+5B=-2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\frac{17}{7} \\ B=\frac{4}{7}. \end{cases}$$

Seega,

$$\frac{3x-2}{(x+5)(x-2)} = \frac{17}{7(x+5)} + \frac{4}{7(x-2)}.$$

3) Vaatleme niisugust ratsionaalfunktsiooni, mille lugeja on konstant ja nimetajaks on kuupfunktsioon, mis tegureiks lahutatuna sisaldab kahekordset tegurit $(x-a)(x-b)^2$, $a \neq b$.

Et integreerimisel saab konstantse teguri viia alati integraali märgi ette, siis tutvume ratsionaalfunktsiooni

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2}$$

osamurdudeks lahutamisega. Osamurdude nimetajateks võivad olla $x-a$, $x-b$ ja $(x-b)^2$. Ülesandeks on määrata konstandid A, B ja C nii, et kehtiks võrdus

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}.$$

Viime võrduse paremal pool murrud ühisele nimetajale, saame

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2}=$$

$$=\frac{Ax^2-2Abx+Ab^2+Bx^2-Bax-Bbx+Bab+Cx-Ca}{(x-a)(x-b)^2}$$

ehk

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2Ab-Ba-Bb+C)x+Bab+Ab^2-Ca}{(x-a)(x-b)^2}.$$

Et siin murdude lugejad peavad olema võrdsed (miks?), siis polünoomide võrdsuse tingimusest järelduvad B ja C määramiseks seosed

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2Ab-Ba-Bb+C=0 \\ Bab+Ab^2-Ca=1 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2bA-(a+b)B+C=0 \\ b^2A+abB-aC=1. \end{cases}$$

Selle süsteemi determinant on

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2b & -(a+b) & 1 \\ b^2 & ab & -a \end{vmatrix}=a(a+b)+b^2-ab-2ab=$$

$$=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.$$

Et $a\neq b$, siis $D\neq 0$ ja konstantide A, B ja C määramiseks saadud süsteem on lahenduv. Tundmatute avaldamiseks leiame lugejad D_A, D_B ja D_C.

$$D_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(a+b) & 1 \\ 1 & ab & -a \end{vmatrix} = 1,$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2b & 0 & 1 \\ b^2 & 1 & -a \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2b & -(a+b) & 0 \\ b^2 & ab & 1 \end{vmatrix} = -(a+b)+2b.$$

Seega,

$$A = \frac{D_A}{D} = \frac{1}{(a-b)^2}; \quad B = \frac{D_B}{D} = -\frac{1}{(a-b)^2} \text{ ja}$$

$$C = \frac{D_C}{D} = \frac{-(a+b)+2b}{(a-b)^2} = -\frac{1}{a-b}$$

ja antud murd lahutub osamurdudeks järgmiselt:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2(x-a)} - \frac{1}{(a-b)^2(x-b)} - \frac{1}{(a-b)(x-b)^2}$$

4) Analoogiliselt lahendame ülesande, kui lugejaks on lineaar- või ruutfunktsioon ja nimetajaks kuupfunktsioon, mis tegureiks lahutatuna sisaldab kahekordset tegurit.

Näide. Lahutada osamurdudeks murd $\frac{x^2-4x-1}{(x-1)(x+2)^2}$.

$$\frac{x^2-4x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

ja siit

$$\frac{x^2-4x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{Ax^2+4Ax+4A+Bx^2+Bx-2B+Cx-C}{(x-1)(x+2)^2}$$

ehk

$$\frac{x^2-4x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{(A+B)x^2+(4A+B+C)x+4A-2B-C}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Seega saame A, B ja C määramiseks süsteemi

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 4A + B + C = -4 \\ 4A - 2B - C = -1, \end{cases}$$

mille lahendame determinantide abil:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$D_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -33.$$

Seega $A = -\frac{4}{9}$, $B = \frac{13}{9}$ ja $C = -\frac{33}{9}$ ning

$$\frac{x^2-4x-1}{(x-1)(x+2)^2} = -\frac{4}{9(x-1)} + \frac{13}{9(x+2)} - \frac{33}{9(x+2)^2}.$$

Märkus. Võib arvata, et selle murru lugejaks, mille nimetaja on $(x-b)^2$, võiks olla ka $Cx+D$. See pole aga võimalik. Tõepoolest, sel juhul saaksime lugejatesse kokku 4 määramata kordajat, kuid antud murru lugeja võib olla ülimalt teise astme polünoom (lugejas on madalama astme polünoom kui nimetajas), s. t. et meil on võimalik tundmatute määramiseks polünoomide võrdsuse tingimust kasutades moodustada ainult kolm võrrandit (võrdsustades ruutliikmete kordajad, lineaarliikmete kordajad ja vabaliikmed). Sellest ei piisa nelja tundmatu leidmiseks. Niisiis peavad vaadeldaval juhul kõigi murdude lugejad olema konstandid.

2. MURRU NIMETAJA EI OLE LAHUTATAV AINULT LINEAARSETEKS TEGURITEKS.

1) Vaatleme ratsionaalset funktsiooni, mille nimetajaks on kuupfunktsioon, mis avaldub kujus $(x-a)(x^2+bx+c)$, kus ruutkolmliige pole tegureiks lahutatav. Kui lugejaks on konstant, siis võime jällegi piirduda juhuga, kus lugejaks on 1. Seega on ülesandeks lahutada osamurdudeks murd $\frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)}$.

Seame ülesandeks leida osamurrud kujus $\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$. Niisiis, oletades, et kehtib võrdus

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c},$$

püüame määrata konstandid A, B ja C. Viies võrduse paremal pool murrud ühisele nimetajale, saame

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{Ax^2+Abx+Ac+Bx^2-Bax+Cx-Ca}{(x-a)(x^2+bx+c)}$$

ehk

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{(A+B)x^2+(Ab-Ba+C)x-Ac-Ca}{(x-a)(x^2+bx+c)}.$$

Konstantide A, B ja C määramiseks saame siit süsteemi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ bA-aB+C=0 \\ cA-aC=1, \end{cases}$$

mille determinant on:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \\ c & 0 & -a \end{vmatrix} = a^2+c+ab.$$

Kui $D \neq 0$, siis on saadud süsteemist A, B ja C määratavad.

$$D_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = 1,$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & -a \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ b & -a & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a-b.$$

Niisiis, eeldades, et $a^2+c+ab \neq 0$, saame, et

$$A = \frac{D_A}{D} = \frac{1}{a^2+c+ab}, \quad B = \frac{D_B}{D} = \frac{-1}{a^2+c+ab} \text{ ja}$$

$$C = \frac{D_C}{D} = -\frac{a+b}{a^2+c+ab}$$

ning

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{1}{(a^2+c+ab)(x-a)} - \frac{x+a+b}{(a^2+c+ab)(x^2+bx+c)}.$$

2) Juhul, kui lugejaks on lineaar- või ruutfunktsioon ja nimetajaks kuupfunktsioon $(x-a)(x^2+bx+c)$, toimub ülesande lahendamine analoogiliselt eelmisega.

Näide. Lahutada osamurdudeks murd $\frac{2x^2-1}{(2x-1)(3x^2-x+1)}$.

Lähtume seosest

$$\frac{2x^2-1}{(2x-1)(3x^2-x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{3x^2-x+1}.$$

Siit

$$\frac{2x^2-1}{(2x-1)(3x^2-x+1)} = \frac{3Ax^2-Ax+A+2Bx^2+2Cx-Bx-C}{(2x-1)(3x^2-x+1)}$$

ehk

$$\frac{2x^2-1}{(2x-1)(3x^2-x+1)} = \frac{(3A+2B)x^2+(-A-B+2C)x+A-C}{(2x-1)(3x^2-x+1)}.$$

A, B ja C määramiseks saame süsteemi:

$$\begin{cases} 3A+2B=2 \\ -A-B+2C=0 \\ A-C=-1. \end{cases}$$

Selle süsteemi determinant on:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

Edasi leiame D_A, D_B ja D_C.

$$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

Niisiis, $A=-\frac{2}{5}$, $B=\frac{8}{5}$ ja $C=\frac{3}{5}$ ning

$$\frac{2x^2-1}{(2x-1)(3x^2-x+1)} = \frac{2}{5(2x-1)} + \frac{8x+3}{5(3x^2-x+1)}.$$

Ülesandeid.

1. Lahutada osamurdudeks.

a) $\frac{1}{(x+3)x}$ d) $\frac{1}{x^2-x-6}$

b) $\frac{1}{(x+5)(x-2)}$

c) $\frac{1}{(x+1)(x-4)(x+3)}$

e) $\frac{1}{x^2+4x+3}$

f) $\frac{1}{(x^2-5x+6)(x-1)}$

2. Lahutada osamurdudeks.

a) $\frac{x-1}{(2x-1)(3x-2)}$

b) $\frac{1-x}{(-3x+1)(x-2)}$

c) $\frac{2x+7}{(2-3x)(4-x)(x+1)}$

d) $\frac{x-3}{2x^2+3x+2}$

e) $\frac{x-3}{2x^2+3x+2}$

f) $\frac{1-4x+x^2}{(8x^2-18x+9)(x-2)}$

3. Lahutada osamurdudeks.

a) $\frac{5}{(x+3)(x-2)^2}$

b) $\frac{2x-3}{(x+2)^2(x+1)}$

c) $\frac{2-3x+x^2}{(2x-1)(x-3)^2}$

d) $\frac{3}{x^2-3x^2-10x}$

e) $\frac{-3-2x}{x^3-2x^2-3x}$

f) $\frac{2x^2-3x+2}{2x^3+2x^2-4x}$

4. Lahutada osamurdudeks.

a) $\frac{-2}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

b) $\frac{3x-1}{(x-1)(x^2-x+6)}$

c) $\frac{x^2+x+1}{(3x-2)(3x^2-x+1)}$

d) $\frac{2-x^2}{(3-2x)(2x^2-2x+5)}$

10. 3. RATSIONAALFUNKTSIOONIDE INTEGREERIMINE.

Ratsionaalfunktsioonide integreerimisel kasutatakse osamurdudeks lahutamise võtet. Juhul, kui lugejaks oleva polünoomi aste on suurem või võrdne nimetajaks oleva polünoomi astmega, siis jagatakse eelnevalt lugeja nimetajaga.

Seega tuleb meil integreerida osamurdudeks lahutamisel saadavaid avaldisi. Eelmises paragrahvis nägime, et sellisteks avaldisteks on:

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^2}, \quad \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}.$$

Neist kahe esimese avaldise integreerimine on meile juba tuttav:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

ja

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \int (x-a)^{-2}\,dx = -\frac{1}{x-a} + C.$$

Ka kolmanda integraali lahendamisega tuleme toime juhul, kui lugejaks on nimetaja tuletis.

Olgu $(ax^2+bx+c)' = Bx + C$, siis

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Lähemalt vajab käsitlemist aga kolmanda avaldise integreerimine, kui lugejaks pole nimetaja tuletis. Esitame selle integraali summana:

$$\int \frac{(Bx+C)\,dx}{ax^2+bx+c} = B\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} + C\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

1. INTEGRAAL $\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c}$.

Integraali $\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c}$ integreerimiseks teisendame avaldist nii, et saame lugejaks nimetaja tuletise.

$$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\int \frac{2axdx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Esimene saadud integraalidest avaldub nimetaja naturaallogaritmina, s. t.

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Teise integraali integreerimist vaatleme eraldi.

2. INTEGRAAL $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Eraldame nimetajas täisruudu:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Osamurdudeks lahutamisel saime murru $\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ juhul, kui nimetaja ax^2+bx+c pole tegureiks lahutatav. Seega juhul, kui $b^2-4ac<0$. Siis aga $\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$.

Kui nüüd teha asendus $x+\frac{b}{2a}=z$, siis $dx=dz$ ja tähistades veel $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=k^2$ saame, et

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \int \frac{dz}{z^2+k^2}.$$

Et integreeritava avaldise nimetajas on ruutude summa, siis avaldub algfunktsioon arkustangensi kaudu.

$$\int \frac{dz}{z^2+k^2} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dz}{\left(\frac{z}{k}\right)^2+1} = \frac{1}{k}\arctan\frac{z}{k}+C.$$

3. INTEGRAAL $\int \frac{dz}{z^2-k^2}$.

Vaatleme lisaks veel integraali, milleni jõuame juhu 2) juurest, kui eeldada, et $b^2-4ac>0$.

$$\int \frac{dz}{z^2-k^2} = \int \frac{dz}{(z-k)(z+k)}.$$

Selle integraali lahendame osamurdudeks lahutamise võtte abil:

$$\frac{1}{(z-k)(z+k)} = \frac{A}{z-k}+\frac{B}{z+k} = \frac{Az+Ak+Bz-Bk}{(z-k)(z+k)}.$$

Siit

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ak - Bk = 1, \end{cases}$$

millest $2Ak = 1$, $A = \frac{1}{2k}$, $B = -\frac{1}{2k}$.

Seega,

$$\frac{1}{(z-k)(z+k)} = \frac{1}{2k(z-k)} - \frac{1}{2k(z+k)}.$$

Niisiis,

$$\int \frac{dz}{z^2-k^2} = \frac{1}{2k}\int \frac{dz}{z-k} - \frac{1}{2k}\int \frac{dz}{z+k} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z-k| - \frac{1}{2}\ln|z+k| + \ln C = \frac{1}{2}\ln C\left|\frac{z-k}{z+k}\right| =$$

$$= \ln C\sqrt{\frac{z-k}{z+k}}.$$

4. Näiteid.

1) $\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C.$

2) $\int \frac{dx}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{2(2x-1)} + C.$

3) $\int \frac{x\,dx}{2x^2-4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4x-4+4}{2x^2-4x+1}dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x-4}{2x^2-4x+1}dx + \int \frac{dx}{2x^2-4x+1}.$$

Lahendame saadud integraalid eraldi:

$$\int \frac{4x-4}{2x^2-4x+1}dx = \ln|2x^2-4x+1| + C_1,$$

$$\int \frac{dx}{2x^2-4x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+1+\frac{1}{2}-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2-\frac{1}{2}}.$$

Tähistades $x-1=z$, tuleb osamurdudeks lahutada avaldis $\frac{1}{z^2-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{z^2-\frac{1}{2}}=\frac{A}{z-\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{B}{z+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{Az+\frac{A}{\sqrt{2}}+Bz-\frac{B}{\sqrt{2}}}{z^2-\frac{1}{2}}.$$

Seega

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{A}{\sqrt{2}}-\frac{B}{\sqrt{2}}=1, \end{cases}$$

millest

$$\frac{2A}{\sqrt{2}}=1,\ A=\frac{\sqrt{2}}{2},\ B=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Niisiis,

$$\frac{1}{z^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}-\frac{\sqrt{2}}{2\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Seega,

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2-\frac{1}{2}}=\int\frac{dz}{z^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dz}{z-\frac{1}{\sqrt{2}}}-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dz}{z+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|+C_2=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{z-\frac{1}{\sqrt{2}}}{z+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+C_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{z\sqrt{2}-1}{z\sqrt{2}+1}\right|+C_2=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(x-1)\sqrt{2}-1}{(x-1)\sqrt{2}+1}\right|+C_2.$$

Antud ülesande vastuseks saame:

$$\int\frac{xdx}{2x^2-4x+1}=\frac{1}{4}\ln|2x^2-4x+1|+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{(x-1)\sqrt{2}-1}{(x-1)\sqrt{2}+1}\right|+C.$$

Selle ülesande võib lahendada ka nii, et lahutame integreeritava murru osamurdudeks.

Ülesandeid.

1. $\int \frac{dx}{x-7}$
2. $\int \frac{dx}{3-x}$
3. $\int \frac{dx}{1+3x}$
4. $\int \frac{dx}{1-4x}$
5. $\int \frac{dx}{(x+3)^2}$
6. $\int \frac{dx}{(x-5)^3}$
7. $\int \frac{dx}{(2x+1)^4}$
8. $\int \frac{dx}{(2x+1)^4}$
9. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$
10. $\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}$
11. $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx$
12. $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx$
13. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx$
14. $\int \frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}dx$
15. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$
16. $\int \frac{dx}{1+x^3}$
17. $\int \frac{dx}{x^3-1}$
18. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$
19. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$
20. $\int \frac{x^3dx}{x+1}$
21. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$
22. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$
23. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$
24. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x-2)^2}dx$
25. $\int \frac{x^5-2x^4+3}{x^3-3x^2-10x}dx$
26. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x}dx$
27. $\int \frac{x^6+x^5-x^4-x^3+4x}{(x^2-1)(x+1)}dx$
28. $\int \frac{x^4-x^2+2x}{x^2-1}dx$

KORDAMISÜLESANDEID.

1. Leida järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $y = x^3(x^2-1)^2$

b) $y = x\ln x - x$

c) $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

e) $y = e^x (\sin x - \cos x)$

f) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

g) $y = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

h) $y = e^{-x}$

i) $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$

j) $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

k) $y = \arcsin \frac{1}{x}$

l) $y = (\arccos x)^2$

m) $y = \arctan \frac{x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$.

2. Leida valem summa $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ arvutamiseks, kui

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

3. Teades, et $y = e^x \sin x$ ja $z = e^x \cos x$, näidata, et $y'' = 2z$ ja $z'' = -2y$.

4. Näidata, et funktsioon $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, kus C_1 ja C_2 on konstandid, rahuldab võrrandit $y'' + 3y' + 2y = 0$.

5. Näidata, et funktsioon $y = e^{-x} \cos x$ rahuldab võrrandit $y'' + 4y = 0$.

6. Leida järgmised integraalid:

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

b) $\int (3 - x^2)^3\, dx$

c) $\int \frac{x^2}{1 - x^2}\, dx$

d) $\int (2^x + 3^x)\, dx$

e) $\int (\sin 5x - \sin 5a)\, dx$

f) $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

g) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

h) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$

i) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

k) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\, dx$

l) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

m) $\int xe^{-x}\, dx$

n) $\int x^2 \sin 2x\, dx$

o) $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$

p) $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$

q) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx$

r) $\int \frac{xdx}{x^2-3x+2}$

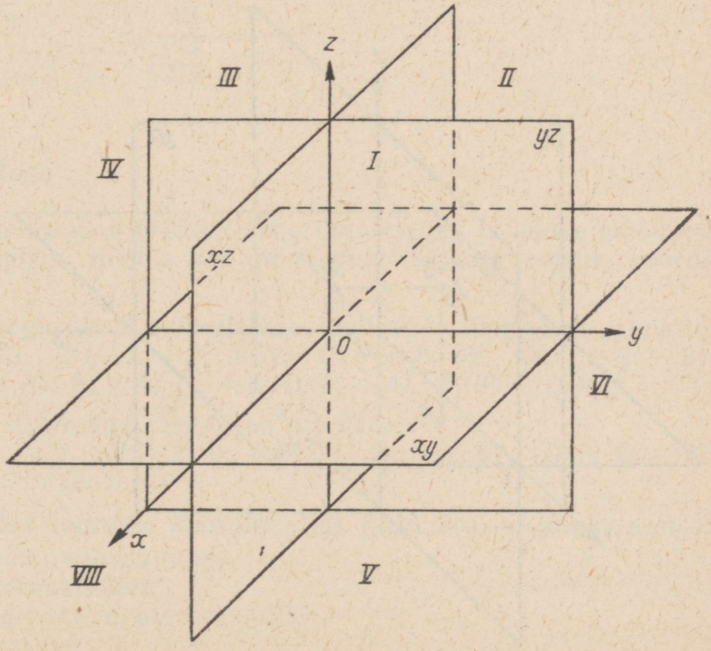
s) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\, dx$

11. VEKTORID.

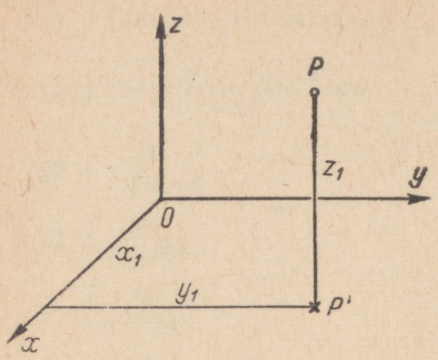
11.1. PUNKTI ASUKOHA MÄÄRAMINE RUUMIS.

Punkti asukoha määramiseks ruumis valime kolm ühes punktis lõikuvat ja üksteisega ristuvat telge (joon. 25). Nimetame neid *x*-, *y*- ja *z*-teljeks. Teljed määravad paariti *xy*-, *xz*- ja *yz*-tasapinna. Need kolm tasapinda jaotavad ruumi kaheksaks osaks, nn. **oktandiks.**

Olgu ruumipunkti P normaalprojektsiooniks xy-tasapinnal punkt P' (joon. 26). Selle punkti P' asukoht xy-tasapinnal on



Joon. 25.

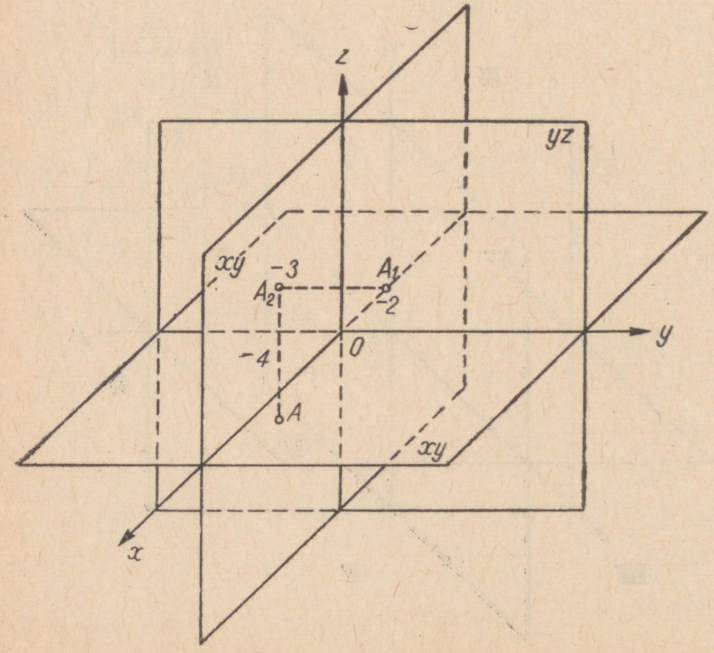


Joon. 26.

määratud kahe arvuga x_1 ja y_1. Ruumipunkti P asukoha määramiseks peame teadma veel punkti P kaugust xy-tasapinnast z_1. Viimase võtame märgiga «+», kui punkt on ülalpool xy-tasapinda (z-telje positiivsel pool), ja märgiga «—», kui punkt on allpool xy-tasapinda (z-telje negatiivsel pool). Seega,

punkti asukohta ruumis saab määrata kolme arvuga.

Neid arve nimetatakse **punkti koordinaatideks.** Koordinaadid kirjutatakse nii nagu tasapinnalisel juhulgi punkti tähise järele sulgudesse. Olgu näiteks antud punkt $A(-2; -3; -4)$. Selle punkti asukoha leiame ruumis järgmiselt (joonis 27).



Joon. 27.

Arv —2 näitab, et tuleb punktist O mööda x-telge liikuda 2 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas. Jõuame punkti A_1.

Arv —3 näitab, et punktist A_1 tuleb edasi liikuda paraleelselt y-teljega 3 ühiku võrra y-telje negatiivses suunas. Jõuame punkti A_2, mis ongi otsitava punkti normaalprojektsioon xy-tasapinnal.

Arv —4 näitab, et punktist A_2 tuleb edasi liikuda paralleelselt z-teljega 4 ühiku võrra z-telje negatiivses suunas. Jõuame punkti A.

Kirjeldage samal viisil punktide $B(-2; 3; 1)$ ja $C(3; -4; -2)$ asukoha leidmist!

x-, y- ja z-telge nimetatakse ka **koordinaattelgedeks** ning xy-, xz- ja yz-tasapindu **koordinaattasapindadeks.** Koordinaattelgede lõikepunkti nimetatakse **alguspunktiks**, mida tähistatakse tavaliselt tähega O.

Järgnevas tabelis on näidatud, missuguste märkidega on punkti koordinaadid üksikutes oktantides (vt. joon. 25).

x	y	z	oktant
+	+	+	I
—	+	+	II
—	—	+	III
+	—	+	IV
+	+	—	V
—	+	—	VI
—	—	—	VII
+	—	—	VIII

Ülesandeid.

1. Määrake toas (klassis) koordinaatteljed ja leidke mõõtmise teel elektripirni, lilleõie või mõne muu väikese eseme koordinaadid.

2. Missugustesse oktantidesse kuuluvad järgmised punktid: $A(2; -4; 3)$, $B(-1; -2; -5)$, $C(-8; 8; 8)$, $D(7; -2; -3)$, $E(-5; -4; 3)$, $F(1; 5; 7)$, $G(-6; 5; -4)$, $H(9; 7; 5)$?

3. Kus asetsevad järgmised punktid:
$A(0; 1; -7)$, $B(-2; 0; 4)$, $C(-5; -4; 0)$, $D(0; 0; -2)$, $E(0; -5; 0)$, $F(8; 0; 0)$?

4. Kuidas tunneme koordinaatide järgi ära, et punkt asetseb
a) koordinaattasapinnal;
b) koordinaatteljel;
c) koordinaatide alguspunktis?

11.2. SKALAARSED JA VEKTORIAALSED SUURUSED.

Matemaatika rakendamisel loodusteadustes (füüsikas, astronoomias jne.) puutume kokku kaht liiki suurustega. Ühed neist, näiteks 1 temperatuur, 2 pikkus, 3 kaal, 4 aeg, on täielikult määratud oma mõõtarvuga. Nii on temperatuur täielikult määratud kraadide arvuga, pikkus sentimeetrite või mõne teise pikkusühikute arvuga jne.

Suurusi, mis on täielikult määratud oma mõõtarvuga, nimetatakse skalaarseteks suurusteks.

Skalaarseid suurusi saab kujutada arvteljel ehk, nagu öeldakse, *skaalal.*

Teised suurused, näiteks 1 käidud tee, 2 kiirus, 3 jõud, vajavad täielikuks määramiseks peale mõõtarvu veel suuna äranäitamist. Nii pole keha poolt läbitud tee täielikult määratud näiteks 10 meetriga, sest peab olema veel teada, missuguses suunas toimub see liikumine. Samuti ei ole kehale mõjuv jõud täielikult määratud näiteks 10 kilogrammiga, vaid peab olema teada ka jõu mõjumise suund.

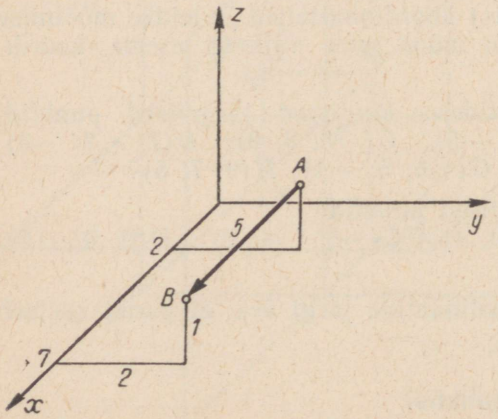
Suurusi, mille täielikuks määramiseks on peale mõõtarvu tarvis teada ka suunda, nimetatakse vektoriaalseteks suurusteks.

Vektoriaalsete suuruste kujutamiseks kasutatakse suunatud lõike, nn. **vektoreid.**

11.3. VEKTORI MÕISTE.

Liigume punktist $A(2; 2; 1)$ sirgjooneliselt punkti $B(7; 2; 1)$ (joon. 28). Seda nihet kirjeldab **suunatud sirglõik** ehk **vektor,** mida tähistatakse lühidalt sümboliga

$$\vec{AB},$$



Joon. 28.

kusjuures punkti A nimetatakse **vektori alguspunktiks** ja punkti B **vektori lõpp-punktiks.**

Seda nihet lähemalt vaadeldes selgub, et

a) *liikumine toimus mööda etteantud sihti* (mööda x-teljega paralleelset sirget);

b) *liikumine toimus etteantud suunas* (x-telje positiivses suunas) ja

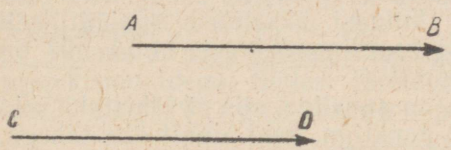
c) *liikumisel läbiti etteantud tee pikkus* (5 ühikut).

Niisiis,

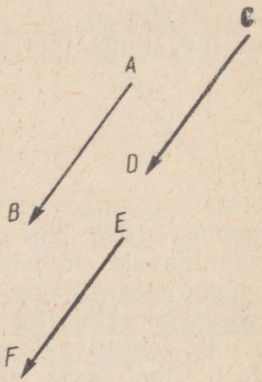
vektor on määratud, kui teame tema sihti, suunda ja pikkust.

11.4. VEKTORITE VÕRDSUS.

Vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ joonisel 29 on samasihilised, samasuunalised ja võrdsete pikkustega. Jättes tähele panemata vektorite $\overrightarrow{AB}$



Joon. 29.



Joon. 30.

ja $\overrightarrow{CD}$ rakenduspunktid võime öelda, et nad mõlemad kujutavad endast üht ja sama nihet. Ühe ja sama nihke vektoreid loetaksegi võrdseteks. Nii on joonisel 30 vektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ võrdsed.

Seega,

vektorid on võrdsed, kui nad on samasihilised, samasuunalised ja võrdsete pikkustega.

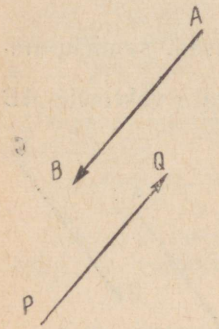
Vektorite võrdsust tähistatakse võrdsusmärgi abil. Niisiis, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Joonisel 31 esitatud vektorid AB ja QP on samasihilised ja võrdsete pikkustega, kuid vastassuunalised. Niisuguseid vektoreid nimetatakse **vastandvektoreiks.**

Vektoriga $\overrightarrow{AB}$ vastassuunalist vektorit tähistatakse $-\overrightarrow{AB}$, seega

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB}.$$

Vektor on täielikult määratud oma sihi, suuna ja pikkusega. Vektori alguspunkti valik on aga täiesti suvaline. Seega ülesandel «leida vektor» on lõpmata palju lahendeid. Niisuguse ülesande



Joon. 31.

geomeetrilise lahendusena esitatakse tavaliselt kõigi ülesannet rahuldavate võrdsete vektorite hulgast üksainus. Analüütiliselt lahendades leitakse aga vektori koordinaadid (vt. 11.6.) mis on võrdsetel vektoritel ühesugused.

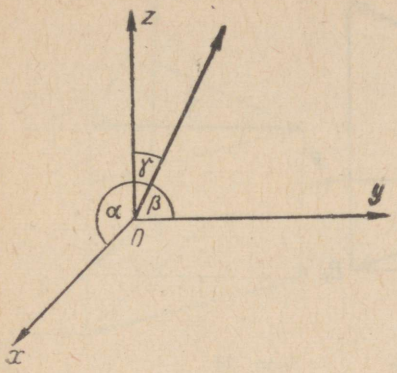
Et vektori alguspunkti valik on suvaline, siis ei tähistata vektorit sageli tema algus- ja lõpp-punktiga, vaid ainult ühe tähega, näiteks $\vec{a}$.

11. 5. VEKTORI SIHINURGAD.

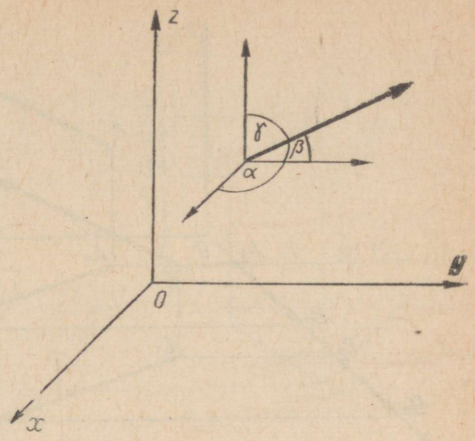
Vektori sihi määravad vektori ja koordinaattelgede vahelised nurgad, nn. **vektori sihinurgad.**

Et vektori alguspunkti võime valida suvaliselt, siis võtame selleks koordinaatide alguspunkti. Sel juhul on vektori sihinurki joonisel võimalik kohe kujutada (joon. 32). Kui vektori alguspunkt on aga valitud mujal, tuleb vektori sihinurkade kujutamiseks tema alguspunkti joonestada uus teljestik, mille teljed on paralleelsed ja samasuunalised antud telgedega (paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed, joon. 33).

Vektori määramiseks peame teadma tema sihinurki (need määravad tema sihi ja suuna) ja vektori pikkust. Sageli kasu-



Joon. 32.



Joon. 33.

tatakse aga vektori määramiseks mitte nurki, vaid reaalarve, nn. **vektori koordinaate**, mis määravad nii vektori sihi, suuna kui ka suuruse.

11. 6. VEKTORI KOORDINAADID

1) Vaatleme kaht võrdset vektorit $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ (joon. 34), mille otspunktide koordinaadid on antud: $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $B(b_1;\ b_2;\ b_3)$, $C(c_1;\ c_2;\ c_3)$ ja $D(d_1;\ d_2;\ d_3)$.

Teame, et paralleelsed sirglõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega. Sellest järeldub aga, et võrdsete paralleelsete sirglõikude paralleelprojektsioonid on võrdsed. Projekteerides võrdsed vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ xy-tasapinnale, saame seal võrdsed vektorid

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}.$$

Neid omakorda x-teljele projekteerides saame x-teljel võrdsed vektorid

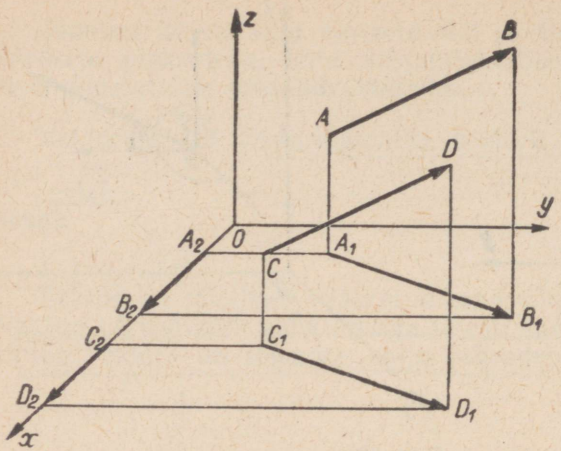
$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{C_2D_2}.$$

Niisiis,

võrdsete vektorite projektsioonid koordinaattelgedel on võrdsed.

Samuti vastupidi,

kui vektorite projektsioonid koordinaattelgedel on võrdsed, siis on ka vektorid võrdsed.



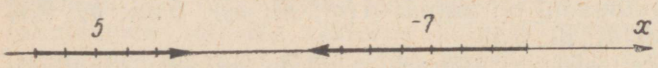
Joon. 34.

Põhjendage seda väidet!

Seega,

vektor on täielikult määratud oma projektsioonidega koordinaattelgedel.

2) Kui on teada, et vektor asetseb koordinaatteljel, siis on sellega vektori siht määratud. Tema suuna saame aga määrata sel teel, et võtame tema pikkuse märgiga «+», kui vektori suund ühtib koordinaattelje suunaga, ja märgiga «—», kui vektori suund on vastupidine koordinaattelje suunale (joon. 35).



Joon. 35.

Seega,

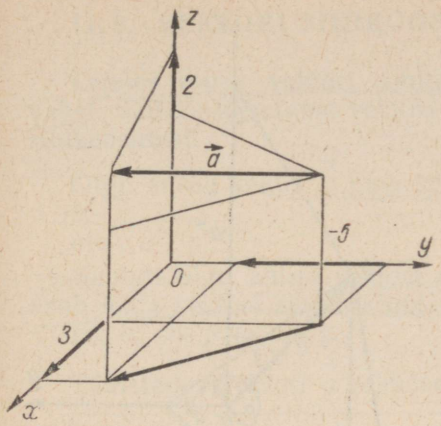
koordinaatteljel asetsev vektor on täielikult määratud reaalarvuga.

Et vektor on täielikult määratud oma projektsioonidega koordinaattelgedel, mis avalduvad reaalarvudena, siis

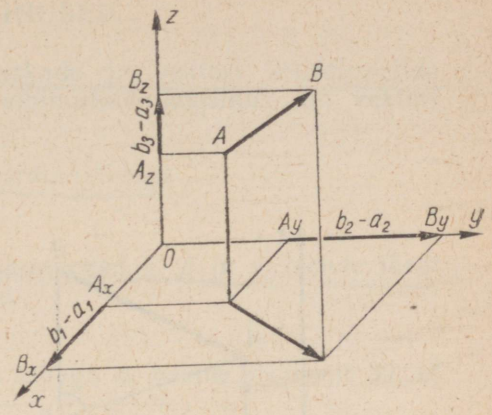
vektor on täielikult määratud kolme reaalarvuga, nn. vektori koordinaatidega.

Olgu vektori a projektsioonid koordinaattelgedel 3, —5 ja 2 (joon. 36). Need arvud on vektori $\vec{a}$ koordinaadid. Seda tähistame järgmiselt:

$\vec{a}\{3; -5; 2\}$.



Joon. 36.



Joon. 37.

Olgu vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ antud oma koordinaatidega $\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$, $\vec{b}\{b'; b''; b'''\}$ ning olgu teada, et $\vec{a} = \vec{b}$, siis punktis 1) tõestatu põhjal

$a' = b'$, $a'' = b''$ ja $a''' = b'''$,

s. t.

võrdsete vektorite vastavad koordinaadid on võrdsed.

Kui vektor $\overrightarrow{AB}$ on antud oma otspunktidega $A(a_1; a_2; a_3)$ ja $B(b_1; b_2; b_3)$ (joon. 37), siis avalduvad tema koordinaadid lõpppunkti ja alguspunkti koordinaatide vahedena

$$\overrightarrow{AB}\{b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ b_3 - a_3\}.$$

11. 7. KAHE PUNKTI VAHELINE KAUGUS.

Olgu antud punktid $A(a_1; a_2; a_3)$ ja $B(b_1; b_2; b_3)$ (joon. 38). Kolmnurgast $A_1A_2B_2$ saame, et

$A_1B_2^2 = A_1A_2^2 + A_2B_2^2$.

Et $A_1A_2 = b_1 - a_1$ ja $A_2B_2 = b_2 - a_2$, siis

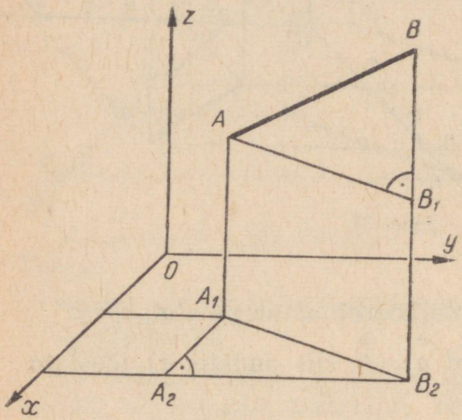
$A_1B_2^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$.

Kolmnurgast ABB_1 saame, et

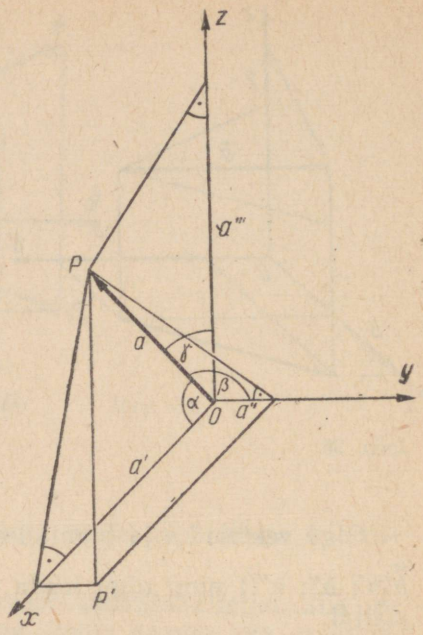
$AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2$.

Et $AB_1 = A_1B_2$, siis $AB_1^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$ ja et $BB_1 = b_3 - a_3$, siis

$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$



Joon. 38.



Joon. 39.

ehk

$$\boxed{AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.}$$

Vaatleme nüüd vektorit $\vec{AB}$. Selle pikkus on võrdne lõigu AB pikkusega.

Et vektori koordinaadid on võrdsed tema lõpp-punkti ja alguspunkti koordinaatide vahega, siis võib leitud valemit nimetada ka vektori pikkuse leidmise valemiks.

Tähistades vektorit $\vec{AB}$ lühidalt $\vec{a}$ ja tema koordinaate samuti lühidalt a', a'', a''', siis saame vektori pikkuse valemiks

$$\boxed{a = \sqrt{a'^2 + a''^2 + a'''^2},}$$

kus a on vektori $\vec{a}$ pikkus ning $a' = b_1 - a_1$, $a'' = b_2 - a_2$ ja $a''' = b_3 - a_3$.

11. 8. VEKTORI SIHIKOOSINUSED.

Leiame seose vektori sihinurkade ja vektori koordinaatide vahel. Selleks kasutame vektori sihinurkade koosinusi, nn. **vektori sihikoosinusi.**

Olgu antud vektor $\vec{a}$ oma koordinaatidega

$\vec{a}\{a', a'', a'''\}$.

Samuti olgu antud vektori sihinurgad α, β ja γ. Nende järgi saab leida vektori sihikoosinused

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$.

Tähistades vektori $\vec{a}$ pikkuse tähega a, näeme jooniselt 39, et

$$\cos\alpha = \frac{a'}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a''}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a'''}{a}$$

ehk siit

$$a' = a\cos\alpha, \quad a'' = a\cos\beta, \quad a''' = a\cos\gamma.$$

Avaldades vektori koordinaadid sihikoosinuste kaudu, saame, et

$$a^2 = a^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\beta + a^2\cos^2\gamma$$

ja siit

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

s. t.

vektori sihikoosinuste ruutude summa on 1.

Ülesandeid.

1. On antud püramiidi tipud $A(-2;\ 3;\ 1)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(3;\ -3;\ -1)$, $D(-4;\ -1;\ 2)$. Leida vektorite $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{BD}$, $\vec{CA}$, $\vec{CB}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ ja $\vec{DC}$ koordinaadid.

2. Missugune seos on vektori ja tema vastandvektori koordinaatide vahel? Tooge näiteid eelmisest ülesandest.

3. On antud vektorid $\vec{AB}\{2;\ 3;\ -1\}$, $\vec{AC}\{5;\ -2;\ 3\}$, $\vec{AD}\{-1;\ 3;\ -5\}$, $\vec{AE}\{-3;\ -4;\ -2\}$, $\vec{AF}\{0;\ 2;\ -3\}$, $\vec{AG}\{-4;\ 0;\ 2\}$, $\vec{AH}\{3;\ -2;\ 0\}$. Leida punktide B, C, D, E, F, G ja H koordinaadid, kui $A(2;\ -5;\ 3)$.

4. On antud vektorid $\vec{BA}\{0; 0; -1\}$, $\vec{CA}\{0; 5; 0\}$, $\vec{DA}\{6; 0; 0\}$, $\vec{EA}\{-1; -4; -3\}$, $\vec{FA}\{2; 4; -3\}$, $\vec{GA}\{-4; 6; -2\}$. Leida punktide B, C, D, E, F ja G koordinaadid, kui $A(-5; 0; 2)$.

5. On antud kolmnurga tipud $A(4; 1; 3)$, $B(-2; -3; -4)$ ja $C(-3; 2; 5)$. Leida selle kolmnurga ümbermõõt.

6. Leida ülesandes 1 antud püramiidi servade pikkused.

7. On antud trapetsi tipud $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$. Leida tema ümbermõõt ja diagonaalide pikkused.

8. Tõestada, et nelinurk tippudega $A(2; 1; -4)$, $B(1; 3; 5)$, $C(7; 2; 3)$, $D(8; 0; -6)$ on rööpkülik. Leida tema külgede pikkused.

9. On antud rööpküliku kolm tippu $A(1; 1; 4)$, $B(2; 3; -1)$, $C(-2; 2; 0)$. Leida neljas tipp D.

Juhis. Võrdsetel vektoritel on võrdsed koordinaadid.

10. Leida y-teljel punkt, mis on võrdsel kaugusel punktidest $A(1; -3; 7)$ ja $B(5; 7; -5)$.

11. Leida z-teljel punkt, mis on võrdsel kaugusel punktidest $A(4; -1; 2)$ ja $B(0; 2; -1)$.

12. Leida vektori $\vec{AB}$ sihikoosinused, kui $A(1; 0; -1)$ ja $B(3; 1; -3)$.

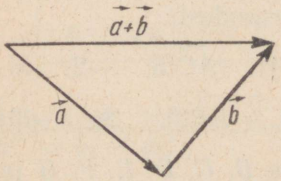
13. Kas leidub sihti, mis moodustab koordinaattelgedega nurgad

a) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 60°$;
b) $\alpha = 90°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 60°$.

14. Vektori $\vec{a}$ sihinurgad on võrdsed. Leida nende suurus.

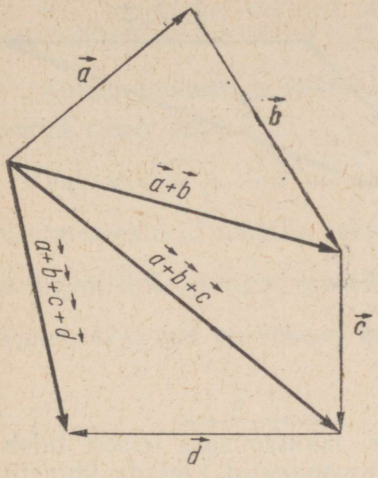
11.9. VEKTORITE LIITMINE.

Kahe vektori summaks nimetatakse vektorit, mille alguspunktiks on esimese vektori alguspunkt ja lõpp-punktiks teise vektori lõpp-punkt, eeldusel, et teise vektori alguspunkt on viidud esimese vektori lõpp-punkti (joon. 40).

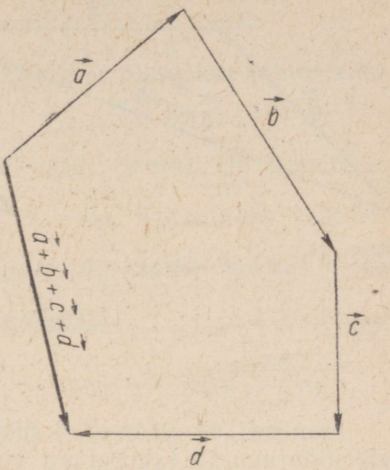


Joon. 40.

Joon. 41.



Joon. 42.



Joon. 43.

Juhul, kui liidetakse kaks vastandvektorit, langeb teise vektori lõpp-punkt esimese vektori alguspunkti (joon. 41). Summaks on sel juhul nn. **nullvektor.**

Mida võime öelda nullvektori sihi, suuna ja suuruse kohta?

Kui tuleb liita enam kui kaks vektorit, siis liidame algul kaks vektorit, nende summaga kolmanda vektori jne. (joon. 42).

Jooniselt 42 selgub, et rohkem kui kahe vektori liitmiseks pole vaja välja joonestada vahepealseid summavektoreid, vaid rakendada järgmine vektor eelmise vektori lõpp-punkti. Nii tekib vektoritest murdjoon, milles esimese vektori alguspunkti viimase vektori lõpp-punktiga ühendav vektor ongi kõigi nende vektorite summaks (joon. 43).

11. 10. VEKTORITE LAHUTAMINE.

Lahutamine on arvude vallas defineeritud liitmise pöördtehtena, s.t. et summa ja ühe liidetava abil leitakse teine liidetav. Näiteks, kui on teada, et

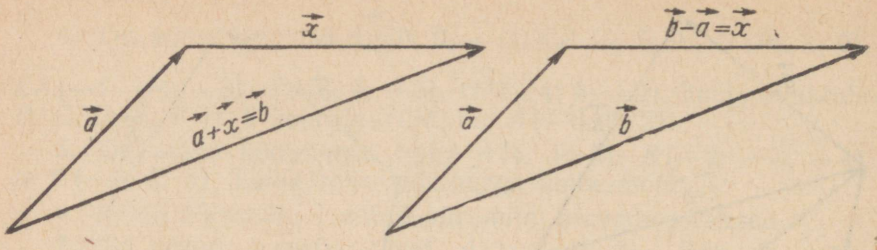
$$2 + x = 6,$$

siis

$$x = 6 - 2 = 4.$$

Sedasama defineerimisviisi kasutatakse ka vektorite puhul. Kui on teada, et

$$\vec{a} + \vec{x} = \vec{b},$$



Joon. 44.

siis

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Jooniselt 44 näeme, et ühe vektori lahutamiseks teisest tuleb vähendatava ja lahutatava vektori alguspunktid asetada ühte ja samasse punkti. Vektorite vahe alguspunktiks on siis lahutatava vektori lõpp-punkt ja lõpp-punktiks vähendatava vektori lõpp-punkt.

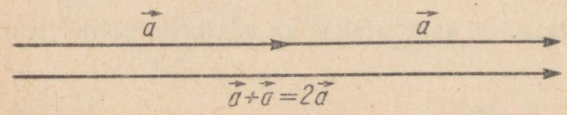
Olgu ülesandeks lahutada vektorist $\vec{a}$ seesama vektor $\vec{a}$. Sel juhul, asetades vektorite alguspunktid samasse punkti, ühtivad ka vektorite lõpp-punktid. Vektorite vaheks on sel juhul nullvektor.

11. 11. VEKTORI KORRUTAMINE ARVUGA.

Olgu tarvis liita kaks võrdset vektorit, s. t. leida summa $\vec{a} + \vec{a}$. Rakendades vektorite liitmise geomeetrilist tõlgendust (joon. 45), saame vektori, mis on vektoriga $\vec{a}$ samasihiline, samasuunaline ja mille pikkus on antud vektori pikkusest 2 korda suurem. Tähistame selle vektori sümboliga $2\vec{a}$.

Ei ole nüüd raske ette kujutada, mida mõista vektori korrutamise all positiivse täisarvuga 3. Selleks korrutiseks on antud vektoriga samasihiline ja samasuunaline vektor, mille pikkus on antud vektori pikkusest 3 korda suurem.

Kuidas joonestada vektoreid $4\vec{a}$, $5\vec{a}$, $10\vec{a}$, kui vektor $\vec{a}$ on antud?

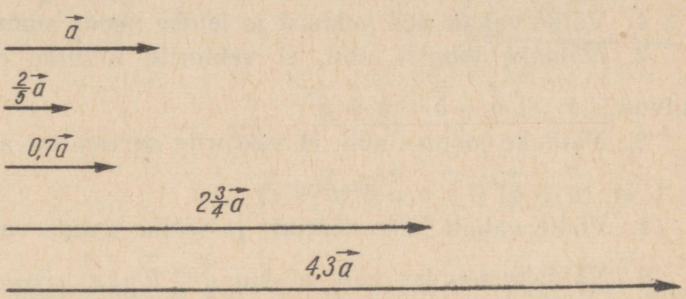


Joon. 45.

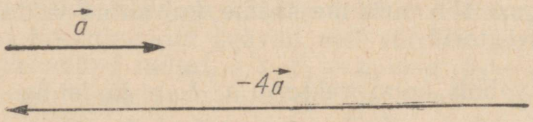
Kui korrutame vektorit positiivse murruga, siis saame jällegi vektori, mis erineb antud vektorist ainult pikkuse poolest.

Kuidas joonestada vektoreid $\frac{2}{5}\vec{a}$, $0{,}7\vec{a}$, $2\frac{3}{4}\vec{a}$, $4{,}3\vec{a}$, kui vektor $\vec{a}$ on antud (joon. 46)?

Vektorid $\vec{a}$ ja $-\vec{a}$ on vastandvektorid. Samuti on teineteise vastandvektorid näiteks vektorid $3\vec{a}$ ja $-3\vec{a}$. Korrutades vektorit $\vec{a}$ negatiivse arvuga, näiteks arvuga -4, saame vektori $-4\vec{a}$ (joon. 47), mis on vektori $4\vec{a}$ vastandvektor.



Joon. 46.



Joon. 47.

Missuguse vektori saame antud vektori korrutamisel arvuga -1?

Kuidas joonestada vektoreid $-3\vec{a}$, $-4{,}5\vec{a}$, $-2\frac{2}{3}\vec{a}$, kui vektor $\vec{a}$ on antud?

Vektorit, mis oma sihilt ja suunalt ühtib vektoriga $\vec{a}$, kuid mille pikkuseks on 1, nimetatakse vektori $\vec{a}$ suunaliseks **ühikvektoriks**. Tähistame selle vektori sümboliga $\vec{e}$. Et vektori $\vec{a}$ pik-

kust tähistatakse sümboliga $|\vec{a}|$ või ka lihtsalt tähega a, s. t. $|\vec{a}| = a$, siis

$$\vec{a} = a\vec{e}.$$

Näiteks, kui vektori $\vec{a}$ pikkus on 2,5 ühikut, siis võime kirjutada, et

$$\vec{a} = 2{,}5\vec{e}.$$

Ülesandeid.

1. Võtke vabalt neli vektorit ja leidke nende summa.

2. Näidake joonise abil, et vektorite liitmine on kommutatiivne, s. t., et $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

3. Näidake joonise abil, et vektorite summa on assotsiatiivne, s. t. et $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

4. Võtke vabalt kaks vektorit ja leidke nende vahe.

5. Näidake joonise abil, et kui $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, siis $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ ja $\vec{a} - \vec{c} = \vec{b}$.

6. Näidake joonise abil, et $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

7. Missuguse tulemuse me saame, kui antud vektoriga liidame tema vastandvektori?

8. Võtke vabalt kolm vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja leidke joonise abil $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b} + c$; $\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$.

9. Võtke vektor $\vec{a}$ vabalt ja joonestage vektorid $3\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{3}{5}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $-2{,}4\vec{a}$, $-4\frac{3}{4}\vec{a}$.

10. Võtke vabalt kaks vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning leidke joonise abil vektorid $2\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{a} - 2\vec{b}$; $-3{,}2\vec{a} + 2{,}6\vec{b}$; $-\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

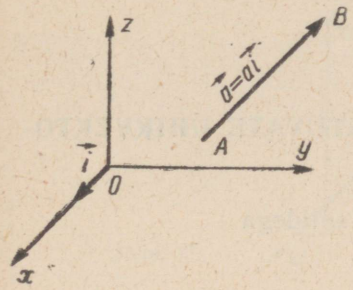
11. Näidake, et kehtib võrdus

a) $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$;

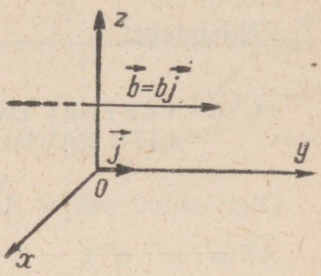
b) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

11. 12. KOORDINAATTELGEDE SIHILISED VEKTORID.

Tähistame x-, y- ja z-telje suunalised ühikvektorid vastavalt $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$. Nüüd on võimalik iga x-teljega paralleelset vektorit, samuti nagu x-teljel asetsevat vektoritki, esitada $\vec{i}$ ja mingi reaalarvu



Joon. 48.



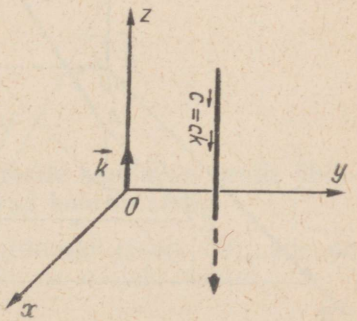
Joon. 49.

korrutisena. Olgu vektor $\vec{a}$ paralleelne x-teljega (joon. 48), siis

$$\vec{a} = a\vec{i}.$$

Selle vektori otspunktide $A(a_1; a_2; a_3)$ ja $B(b_1; b_2; b_3)$ esimeste koordinaatide vahe on võrdne vektori pikkusega. Et teised ja kolmandad koordinaadid peavad neil võrdsed olema, siis seetõttu on nende vahed nullid, s. t. $b_1 - a_1 = a$; $b_2 - a_2 = 0$; $b_3 - a_3 = 0$. Seega vaadeldava x-teljega paralleelse vektori koordinaadid on:

$$\vec{a}\{a; 0; 0\}.$$



Joon. 50.

Kui vektor $\vec{b}$ on y-teljega paralleelne (joon. 49), siis $\vec{b} = b\vec{j}$ ja tema koordinaadid on:

$\vec{b}\{0;\ b;\ 0\}$.

Kui vektor $\vec{c}$ on z-teljega paralleelne (joon. 50), siis $\vec{c} = c\vec{k}$ ja tema koordinaadid on:

$\vec{c}\{0;\ 0;\ c\}$.

Põhjendage!

11. 13. VEKTORI ESITAMINE RISTUVATE ÜHIKVEKTORITE KAUDU.

Olgu antud vektor $\vec{AB}$ oma koordinaatidega

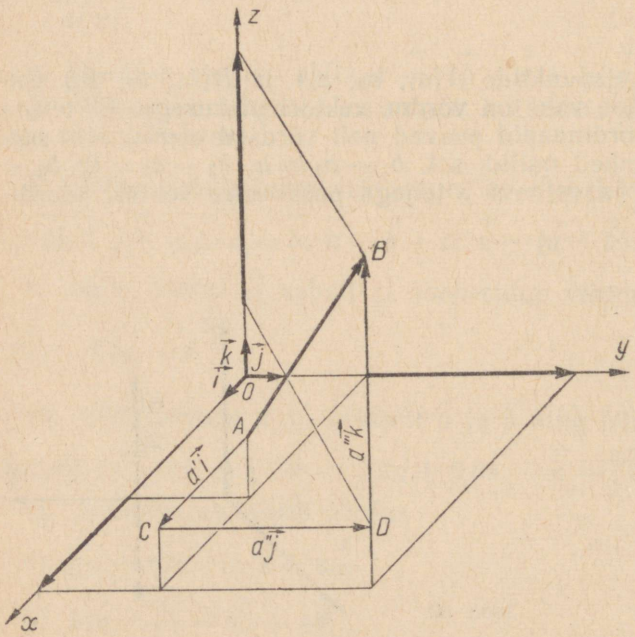
$\vec{AB}\{a';\ a'';\ a'''\}$

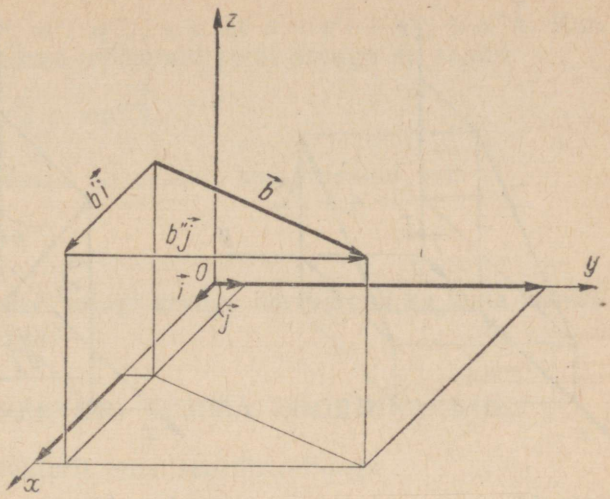
ning ristuvad ühikvektorid $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$.

Jooniselt 51 näeme, et

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}.$$

Joon. 51.





Joon. 52.

Et vektor $\vec{AC}$ on võrdne vektori $\vec{AB}$ projektsiooniga x-teljel ja et ta on x-telje sihiline, siis on teda võimalik esitada vektori $\vec{i}$ kaudu:

$$\vec{AC} = a'\vec{i}.$$

Et vektor $\vec{CD}$ on võrdne vektori $\vec{AB}$ projektsiooniga y-teljel ja et ta on y-telje sihiline, siis

$$\vec{CD} = a''\vec{j}.$$

Samuti selgitame, et

$$\vec{DB} = a'''\vec{k}.$$

Seega

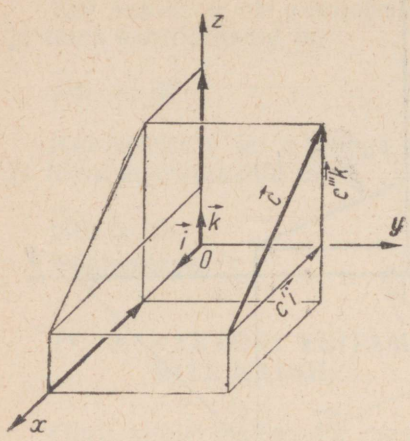
$$\vec{AB} = a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k},$$

s. t. et

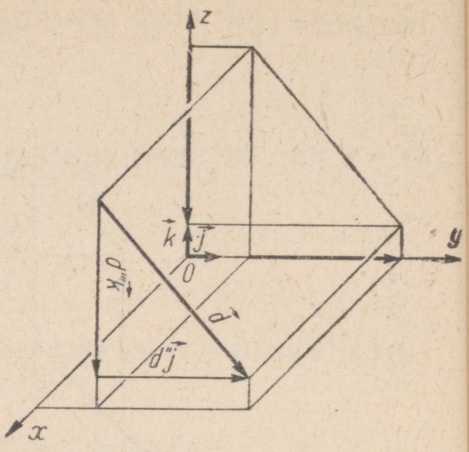
vektori esitamisel ristuvate ühikvektorite kaudu on nende ühikvektorite kordajateks vektori vastavad koordinaadid.

Kui vektor on paralleelne xy-tasapinnaga (joon. 52), siis on selle vektori kolmas koordinaat null. Nii on näiteks vektor

$$\vec{b} = b'\vec{i} + b''\vec{j}$$



Joon. 53.



Joon. 54.

paralleelne xy-tasapinnaga. Vektor

$$\vec{c} = c'\vec{i} + c'''\vec{k}$$ (joon. 53)

on aga paralleelne xz-tasapinnaga (miks?) ja vektor

$$\vec{d} = d''\vec{j} + d'''\vec{k}$$ (joon. 54)

yz-tasapinnaga (miks?).

Et võrdsete vektorite koordinaadid on võrdsed, siis on võrdsete vektorite esitused ristuvate ühikvektorite $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ kaudu täpselt ühesugused. Olgu

$$\vec{a} = \vec{b}$$

ja

$$\vec{a}\{a'; a''; a'''\} \text{ ning } \vec{b}\{b'; b''; b'''\},$$

siis, nagu teame, on

$$a' = b',\ a'' = b'',\ a''' = b'''$$

ja seega

$$a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k} = b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}.$$

Vastupidi, kui kahe vektori esitused ristuvate ühikvektorite kaudu on võrdsed, siis sellest järeldub, et vastavate ühikvektorite kordajad kui võrdsete vektorite koordinaadid peavad olema võrdsed.

Olgu antud $\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$, s. t. et $\vec{a} = a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k}$. Korrutades viimase võrduse mõlemaid pooli arvuga m, saame

$$m\vec{a} = ma'\vec{i} + ma''\vec{j} + ma'''\vec{k}.$$

Et $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ kordajad on vektori koordinaadid, siis

$$m\vec{a}\{ma'; ma''; ma'''\},$$

s. t. et

vektori korrutamisel mingi arvuga korrutuvad ka tema koordinaadid sama arvuga.

11. 14. KAHE VEKTORI SUMMA KOORDINAADID.

Olgu antud 2 vektorit oma koordinaatidega

$\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$ ja $\vec{b}\{b'; b''; b'''\}$.

Teades vektori koordinaate, saame teda esitada ristuvate ühikvektorite kaudu. Nii on

$$\vec{a} = a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k}$$

ja

$$\vec{b} = b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}.$$

Liidame nüüd võrduste vastavad pooled, saame

$$\vec{a} + \vec{b} = (a' + b')\vec{i} + (a'' + b'')\vec{j} + (a''' + b''')\vec{k}.$$

Et ristuvate ühikvektorite kordajad on vektori koordinaadid, siis

$$(\vec{a} + \vec{b})\{a' + b'; a'' + b''; a''' + b'''\}.$$

Seega,

vektorite liitmisel liituvad ka nende vastavad koordinaadid.

Ülesandeid.

1. On antud vektorid oma koordinaatidega

$\vec{a}\{3; 4; 5\}$; $\vec{b}\{-2; -4; -3\}$; $\vec{c}\{6; 15; -3\}$.

a) Esitage need vektorid ristuvate ühikvektorite kaudu.

b) Esitage vektorite $3\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $\frac{1}{3}\vec{c}$ koordinaadid.

2. On antud vektorid

$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{d} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$;
$\vec{e} = -2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{f} = 5\vec{j}$; $\vec{g} = -2\vec{k}$; $\vec{h} = -10\vec{i}$.

a) Esitage nende vektorite koordinaadid.

b) Esitage vektorite $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{d}$, $3\vec{e} + 2\vec{f}$ ja $5\vec{g} - 2\vec{h}$ koordinaadid.

3. **Vektorit, mille alguspunkt on koordinaatide alguspunktis, nimetatakse tema lõpp-punkti kohavektoriks.** Kuidas on seotud kohavektori koordinaadid tema lõpp-punkti koordinaatidega?

4. Kohavektori lõpp-punktiks on $A(4; -5; 1)$, $B(-2; 4; 0)$, $C(-3; 0; 0)$. Avaldage nende kohavektorite koordinaadid.

5. Leida järgmiste kohavektorite lõpp-punkti koordinaadid:

$\vec{OA}\{-1; 6; 2\}$; $\vec{OB}\{3; -5; 4\}$; $\vec{OC}\{0; 0; -1\}$.

6. Esitage eelmises ülesandes toodud kohavektorid ristuvate ühikvektorite kaudu.

7. Leida vektorite $\vec{a}\{4; -2; 1\}$ ja $\vec{b}\{12; -12; 12\}$ summa koordinaadid.

8. Leida vektorite $\vec{c}\{2{,}3; 0{,}4; -1{,}6\}$ ja $\vec{d}\{12{,}9; -4{,}1; 0\}$ summa koordinaadid.

9. Leida vektorite $\vec{e}\{-5\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}; \frac{16}{5}\}$ ja $\vec{f}\{-3\frac{1}{3}; -2\frac{1}{6}; 5\frac{3}{10}\}$ summa koordinaadid.

10. Leida vektorite $\vec{a}\{-5{,}3; -0{,}2; 3{,}3\}$ ja $\vec{b}\{2{,}6; 0{,}2; -1{,}3\}$ vahe koordinaadid.

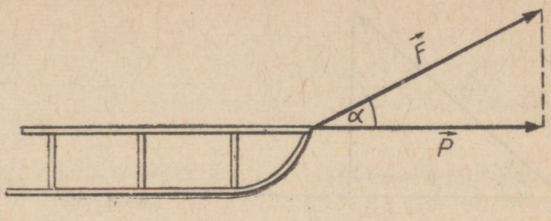
11. Leida vektorite $\vec{c}\{0{,}03; -1{,}7; 0{,}82\}$ ja $\vec{d}\{0{,}17; -0{,}5; -0{,}2\}$ vahe koordinaadid.

12. Leida vektorite $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = -5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ summa ja vahe.

13. Leida vektorite $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} + \frac{5}{6}\vec{k}$, $b = \frac{5}{12}\vec{i} - \frac{6}{25}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ ja $\vec{c} = \frac{5}{6}\vec{i} + \frac{13}{10}\vec{j} - 3\frac{1}{3}\vec{k}$ summa.

11. 15. KAHE VEKTORI SKALAARKORRUTIS

Keha nihutamiseks sirgjoonelise teelõigu s võrra peab sellele kehale mõjuma jõud F. Nagu füüsikast teada, on keha nihutamise juures tehtav töö hulk võrdne jõu suuruse ja teepikkuse korrutisega, s. t. kui töö hulka tähistada A-ga, siis



Joon. 55.

$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$.

Näiteks, kui kehale mõjub 10 kG jõud liikumise suunas, siis 3 meetri läbimisel on tehtud $3 \cdot 10 = 30$ kGm tööd. Kui aga jõud $\vec{F}$ pole teega $\vec{s}$ samasuunaline, vaid moodustab temaga mingi nurga (joon. 55), siis teeb tööd ainult tee suunas mõjuv komponent $\vec{P}$. Et $|\vec{P}| = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha$, siis sel juhul

$A = |\vec{P}| \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$.

Näiteks kui kehale mõjuv 10 kG suurune jõud moodustab liikumise suunaga nurga 60°, siis 3 m läbimisel on tehtud tööd $10 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 15$ kGm.

Töö arvutamine on üks näide vektorite korrutamisest, sest nii jõud kui ka nihe on vektoriaalsed suurused. Et siin korrutiseks on skalaar, siis nimetatakse seda korrutist ka antud vektorite **skalaarkorrutiseks.**

Defineerime vaadeldud näite põhjal kahe vektori skalaarkorrutise.

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutiseks nimetatakse nende vektorite pikkuste ja vektorite vahelise nurga koosinuse korrutist,

s. t.

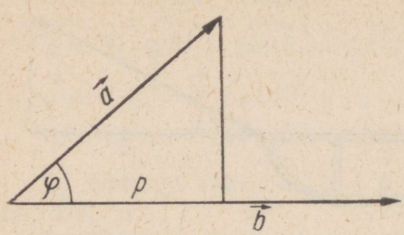
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi.$$

Kui $\varphi = 0°$, siis $\cos \varphi = 1$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$.

Kui $\varphi = 180°$, siis $\cos \varphi = -1$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$.

Kui $\varphi = 90°$, siis $\cos \varphi = 0$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Selgitame, missugune geomeetriline tähendus on vektorite skalaarkorrutisel. Jooniselt 56 näeme, et $a \cos \varphi = p$, s. o. vektori $\vec{a}$ projektsioon vektoril $\vec{b}$.



Joon. 56.

Seega,
kahe vektori skalaarkorrutis on ühe vektori pikkuse korrutis teise vektori projektsiooniga esimese vektori sihil.

11. 16. SKALAARKORRUTISE OMADUSED.

Arvude korrutamisel kehtivad järgmised seadused:
a) *vahetatavuse ehk kommutatiivsuse seadus*
$ab = ba$;
b) *ühenduvuse ehk assotsiatiivsuse seadus*
$a(bc) = (ab)c$;
c) *jaotuvuse ehk distributiivsuse seadus*
$a(b + c) = ab + ac$.
Need seadused kehtivad ka vektorite skalaarkorrutise korral.

1. KOMMUTATIIVSUSE SEADUS.

Teame, et
$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$.
Seetõttu ei arvestata kahe vektori skalaarkorrutise leidmisel vektoritevahelise nurga suunda ja me võime kirjutada, et kui

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi,$$

siis

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = ba \cos \varphi = ab \cos \varphi,$$

sest reaalarvude hulgas kehtib korrutamise kommutatiivsuse seadus.
Niisiis,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2. ASSOTSIATIIVSUSE SEADUS.

Et skalaarkorrutis hõlmab ainult kaht vektorit, siis ühenduvuse seadust kontrollime mingi konstandi ja vektori korrutise suhtes

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Definitsiooni põhjal

$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = a(\lambda b) \cos \varphi$

ja

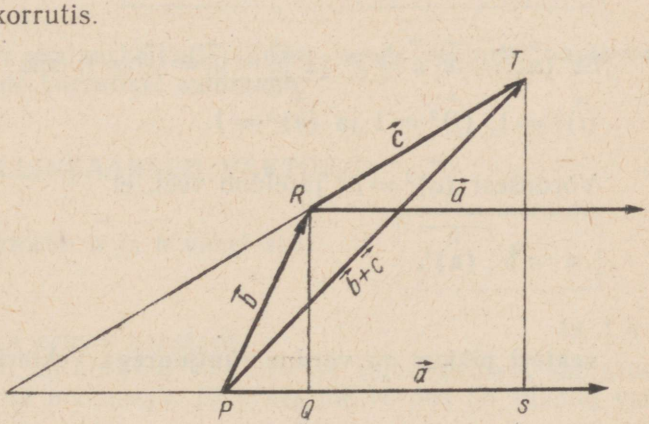
$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\lambda a) b \cos \varphi.$

Et reaalarvude hulgas kehtib korrutamise assotsiatiivsuse seadus, siis $a(\lambda b) = (\lambda a) b$. Seega on võrduse paremad pooled võrdsed, järelikult on võrdsed ka vasakud pooled, nii et

$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b}$, m.o.t.t.

3. DISTRIBUTIIVSUSE SEADUS.

Jaotuvuse seaduse kehtivuse tõestamisel tugineme joonisele 57. Tuleb tõestada, et $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ehk teisiti, tuleb näidata, et vektori $\vec{b} + \vec{c}$ projektsiooni ($\vec{a}$ sihil) ja vektori $\vec{a}$ pikkuse korrutis on võrdne vektori $\vec{b}$ projektsiooni ($\vec{a}$ sihil) ja vektori $\vec{a}$ pikkuse korrutisega pluss vektori $\vec{c}$ projektsiooni ($\vec{a}$ sihil) ja vektori $\vec{a}$ pikkuse korrutis.



Joon. 57.

Jooniselt näeme, et

vektori $\vec{b} + \vec{c}$ projektsiooniks vektori $\vec{a}$ sihil on PS,

vektori $\vec{b}$ projektsiooniks vektori $\vec{a}$ sihil on PQ,

vektori $\vec{c}$ projektsiooniks vektori $\vec{a}$ sihil on RS'.

Tõestada tuleb, et
$PS \cdot a = PQ \cdot a + RS' \cdot a$.
Jooniselt näeme, et $RS' = QS$ ja $PQ + QS = PS$ ehk $PS = PQ + RS'$ ja siit $PS \cdot a = PQ \cdot a + RS' \cdot a$.
Seega kehtib valem

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

11. 17. RISTUVATE ÜHIKVEKTORITE SKALAARKORRUTISED. SKALAARRUUT.

Teame, et $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$.
Seega,

$$\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = 0, \quad \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0 \text{ ja } \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0.$$

Skalaarkorrutise kommutatiivsuse tõttu ka

$$\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = 0, \quad \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = 0 \quad \text{ja} \quad \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = 0.$$

Et $(\vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ ja $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, siis
$(\vec{i})^2 = 1$, $(\vec{j})^2 = 1$ ja $(\vec{k})^2 = 1$.

Võrdusest $(\vec{a})^2 = a^2$ järeldub veel, et

$$\mathbf{a} = \sqrt{(\vec{\mathbf{a}})^2},$$

s. t. et
vektori pikkus on võrdne ruutjuurega vektori skalaarruudust.

11. 18. SKALAARKORRUTISE AVALDAMINE VEKTORI KOORDINAATIDES.

Olgu antud vektorid

$\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$ ja $\vec{b}\{b'; b''; b'''\}$.
Seega,
$\vec{a} = a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k}$ ja $\vec{b} = b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}$.

Avaldame nüüd antud vektorite skalaarkorrutise $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Edasiste teisendamiste juures kasutame nii skalaarkorrutise kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse kui ka distributiivsuse omadust.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}) = \vec{a} \cdot b'\vec{i} + \vec{a} \cdot b''\vec{j} + \vec{a} \cdot b'''\vec{k} =$$
$$= (a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k}) \cdot b'\vec{i} + (a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k}) \cdot b''\vec{j} +$$
$$+ (a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k}) \cdot b'''\vec{k} =$$
$$= a'\vec{i} \cdot b'\vec{i} + a''\vec{j} \cdot b'\vec{i} + a'''\vec{k} \cdot b'\vec{i} + a'\vec{i} \cdot b''\vec{j} + a''\vec{j} \cdot b''\vec{j} +$$
$$+ a'''\vec{k} \cdot b''\vec{j} + a'\vec{i} \cdot b'''\vec{k} + a''\vec{j} \cdot b'''\vec{k} + a'''\vec{k} \cdot b'''\vec{k} =$$
$$= a'b'(\vec{i})^2 + a''b'\vec{j} \cdot \vec{i} + a'''b'\vec{k} \cdot \vec{i} + a'b''\vec{i} \cdot \vec{j} + a''b''(\vec{j})^2 +$$
$$+ a'''b''\vec{k} \cdot \vec{j} + a'b'''\vec{i} \cdot \vec{k} + a''b'''\vec{j} \cdot \vec{k} + a'''b'''(\vec{k})^2 =$$
$$= a'b' + a''b'' + a'''b'''.$$

Seega

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a'b' + a''b'' + a'''b'''$$

ehk sõnades

kahe vektori skalaarkorrutis võrdub nende vektorite vastavate koordinaatide korrutiste summaga.

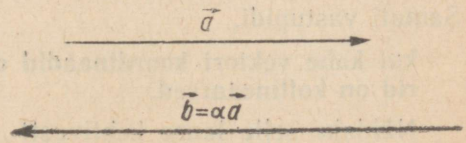
11. 19. KOLLINEAARSED VEKTORID.

Kehtigu vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahel seos

$$\vec{b} = \alpha\vec{a},$$

kus α on nullist erinev konstant.

Kui vektorid on võrdsed, siis nad on samasihilised, samasuunalised ja võrdse pikkusega. Et praegune võrdus on saadud vektori $\vec{a}$ korrutamisel konstandiga, siis vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kohta võime öelda, et nad on samasihilised, suuna ja suuruse poolest võivad nad aga olla erinevad (joon. 58).



Joon. 58.

Missuguste α väärtuste korral on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ samasuunalised? vastassuunalised?

Missuguste α väärtuste korral on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ võrdse pikkusega?

Samasihilisi vektoreid nimetatakse kollineaarseteks.

Seega võrdus

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}$$

on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **kollineaarsuse tunnuseks.**

Kollineaarsete vektorite tähistamiseks kasutatakse paralleelsuse sümbolit

$$\vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Olgu nüüd kollineaarsed vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ antud oma koordinaatidega

$$\vec{a}\{a'; a''; a'''\} \text{ ja } \vec{b}\{b'; b''; b'''\},$$

siis

$$\vec{a} = a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k} \text{ ja } \vec{b} = b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}.$$

Et $\vec{a} \parallel \vec{b}$, s. t. et $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, siis

$$b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k} = \alpha a'\vec{i} + \alpha a''\vec{j} + \alpha a'''\vec{k}$$

ja et võrdsete vektorite koordinaadid on võrdsed, siis

$$b' = \alpha a'; \quad b'' = \alpha a''; \quad b''' = \alpha a'''$$

ehk

$$\frac{b'}{a'} = \alpha; \quad \frac{b''}{a''} = \alpha; \quad \frac{b'''}{a'''} = \alpha.$$

Siit järeldub, et

$$\boxed{\frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} = \frac{b''}{a'''}.}$$

Seega,

kollineaarsete vektorite koordinaadid on võrdelised.

Samuti vastupidi,

kui kahe vektori koordinaadid on võrdelised, siis need vektorid on kollineaarsed.

Näidake selle lause kehtivust!

Ülesandeid.

1. Missugused järgmistest vektoripaaridest esitavad kollineaarseid vektoreid?

1) $\vec{a}\{2;\ 4;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ 2;\ -\frac{1}{2}\}$

2) $\vec{c}\{-4;\ 0;\ 2\}$, $\vec{d}\{-2;\ 0;\ 1\}$

3) $\vec{e}\{\frac{3}{2};\ -\frac{4}{7};\ 0{,}1\}$, $\vec{f}\{\frac{3}{4};\ -\frac{2}{7};\ 0{,}05\}$

4) $\vec{g}\{-3{,}6;\ -4{,}2;\ \frac{3}{8}\}$, $\vec{h}\{1{,}2;\ 1{,}4;\ -\frac{1}{8}\}$

2. Leidke antud vektoriga kollineaarne vektor, kui antud vektoriks on:

a) $3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$,

b) $-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{5}{6}\vec{j} - 1\frac{5}{12}\vec{k}$,

c) $4\vec{j} - \vec{k}$,

d) $-2{,}5\vec{k} + 0{,}15\vec{i}$,

e) $a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k}$.

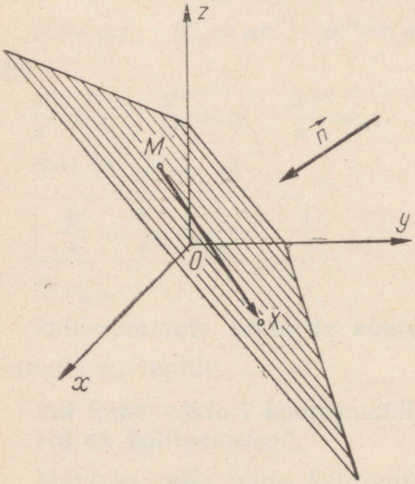
12. TASAPINNA VÕRRAND.

12. 1. TASAPINNA VÕRRANDI MÕISTE.

Olgu ruumis antud koordinaatteljestik. Ülesandeks on leida võrrand tasapinnale α (joon. 59), kui on antud selle tasapinna punkt $M(m_1; m_2; m_3)$ ja tasapinnaga α risti vektor $\vec{n}\{n'; n''; n'''\}$.

Punkti M ja vektoriga $\vec{n}$ on tasapind α täielikult määratud. Tõepoolest, läbi punkti M risti antud vektoriga $\vec{n}$ saab kujutada ainult ühe tasapinna.

Et leida tasapinna α võrrandit, võtame sellel tasapinnal veel ühe suvalise punkti $X(x; y; z)$ ja leiame seose punkti X koordinaatide ning tasapinda α määravate suuruste punkti M ja vektori



Joon. 59.

$\vec{n}$ koordinaatide vahel. Vektor $\vec{n}$ on tasapinnaga α ristuv vektor. Seetõttu peab ta risti olema tasapinnal α asetseva vektoriga $\overrightarrow{MX}$, lühidalt

$$\overrightarrow{MX} \perp \vec{n}.$$

Avaldades vektorite $\overrightarrow{MX}$ ja $\vec{n}$ skalaarkorrutise, saame

$$\overrightarrow{MX} \cdot \vec{n} = 0.$$

Esitame vektori $\overrightarrow{MX}$ tema koordinaatide kaudu

$$\overrightarrow{MX}\{x - m_1;\ y - m_2;\ z - m_3\}.$$

Viimase võrduse saame nüüd esitada kujul

$$(x - m_1)n' + (y - m_2)n'' + (z - m_3)n''' = 0.$$

Avades sulud ja muutes liikmete järjekorra, saame

$$n'x + n''y + n'''z + (-m_1n' - m_2n'' - m_3n''') = 0.$$

Saadud võrrand seob tasapinna α mistahes punkti X koordinaate seda tasapinda määravate suuruste koordinaatidega, s. t. tasapinna punkti M ja tasapinnaga ristuva vektori, nn. **normaalvektori** $\vec{n}$ koordinaatidega. Seepärast nimetataksegi saadud võrrandit **tasapinna α võrrandiks.**

Näeme, et tasapinna võrrand on lineaarne kolme tundmatuga võrrand, kus tundmatute kordajateks on tasapinnaga ristuva vektori koordinaadid.

Tähistades

$$n' = a_1,\ n'' = a_2,\ n''' = a_3 \text{ ja } -m_1n' - m_2n'' - m_3n''' = a_4,$$

saame tasapinna võrrandi esitada kujus

$$\boxed{a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0.}$$

Näide. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $M(-2;\ -1;\ 3)$ ja on risti vektoriga $\vec{n}\{3;\ -2;\ 1\}$.

Tähistades tasapinna mistahes punkti X koordinaadid tähtedega x, y ja z, võime otsitava võrrandi üles kirjutada järgmiselt:

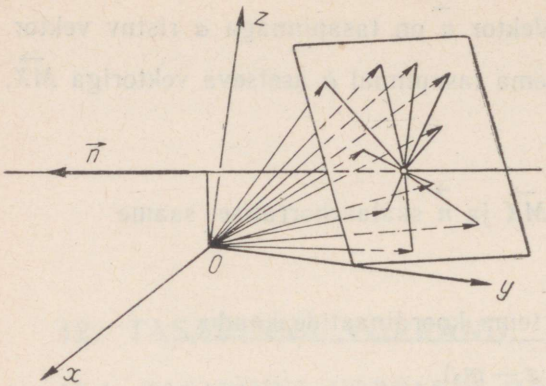
$$3x - 2y + z + (6 - 2 - 3) = 0$$

ehk

$$3x - 2y + z + 1 = 0.$$

Näitame nüüd, et iga võrrand kujul $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ on tasapinna võrrand.

Summat $a_1x + a_2y + a_3z$ võime vaadelda kui kahe vektori $\vec{n}$



Joon. 60.

ja $\vec{x}$ skalaarkorrutist, kus $\vec{n}\{a_1; a_2; a_3\}$ ja $\vec{x}\{x; y; z\}$. Vektorit $\vec{x}$ võime vaadelda kui muutuvat kohavektorit. Et vektorite $\vec{n}$ ja $\vec{x}$ skalaarkorrutis on konstantne $(a_1x + a_2y + a_3z = -a_4)$, siis peab muutuva kohavektori projektsioon $\vec{n}$ sihil olema konstant. Seega peavad muutuva kohavektori lõpp-punktid asetsema ühes ja samas tasapinnas (joon. 60) ehk teisiti, võrrandit $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ rahuldavad punktid $(x; y; z)$ on kõik ühe tasapinna punktid. Seega,

võrrand $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ on tasapinna võrrand.

12. 2. KAHE TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

Selgitame nüüd, kuidas tasapinna võrranditest välja lugeda tasapindade 1paralleelsust, 2ühtivust, 3ristuvust või 4lõikuvust.

Oletame, et on antud kaks tasapinda oma võrranditega:

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \qquad (\alpha)$$
$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \qquad (\beta)$$

Teame, et tasapind α on risti vektoriga $\vec{n}\{a_1; a_2; a_3\}$ ja tasapind β risti vektoriga $\vec{m}\{b_1; b_2; b_3\}$.

1. TASAPINDADE PARALLEELSUS.

Kui $\alpha \parallel \beta$, siis ka $\vec{n} \parallel \vec{m}$. Kui aga vektorid on kollineaarsed, siis nende koordinaadid on võrdelised, s. t.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Kui nüüd osutub, et ka vabaliikmete suhe on tundmatute kordajate suhetega võrdne, s.t.

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \lambda$, kusjuures $\lambda \neq 0$ (miks?),

siis järeldub, et

$a_1 = \lambda b_1$; $a_2 = \lambda b_2$; $a_3 = \lambda b_3$; $a_4 = \lambda b_4$.

Asendades tasapinna α võrrandis kordajad nendega võrdsete suurustega, saame

$\lambda b_1 x + \lambda b_2 y + \lambda b_3 z + \lambda b_4 = 0$.

Pärast jagamist λ-ga saame tasapinna β võrrandi

$b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 = 0$.

Seega,

tasapinnad $a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0$ ja $b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 = 0$ **ühtivad**, kui

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4}$$

ja on **paralleelsed**, kui

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{a_4}{b_4}.$$

2. TASAPINDADE LÕIKUMINE.

Olgu lõikuvate tasapindade α ja β vaheline joonnurk Θ ja tasapindadega ristuvate vektorite $\vec{n}$ ja $\vec{m}$ vaheline nurk φ. Et tasapindadevaheliseks nurgaks loetakse nendevahelist teravnurka, siis olenevalt vektorite $\vec{n}$ ja $\vec{m}$ suunast

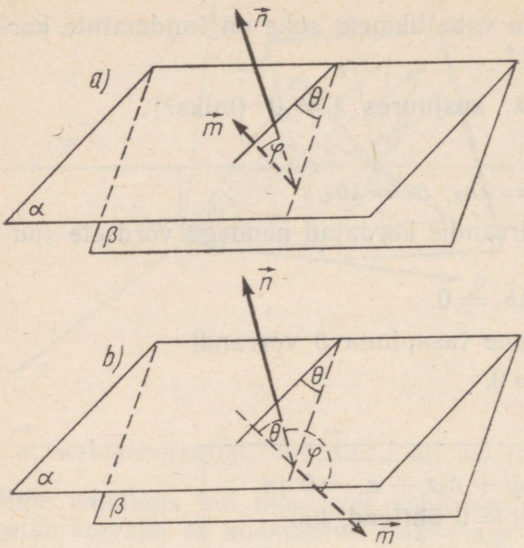
$\varphi = \Theta$ või $\varphi = 180° - \Theta$ (joon. 61).

Teame, et $\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{nm}$.

Kui φ on teravnurk, siis $\cos\varphi = \cos\Theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{nm} > 0$ ja kui φ on nürinurk, siis $\cos\varphi = -\cos\Theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{nm} < 0$.

Seega,

$$\cos\Theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{nm} \right|$$



Joon. 61.

ehk

$$\cos\Theta = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Näide. Leida tasapindade $-x + 2y + 3z - 4 = 0$ ja $3x - 2y + z + 1 = 0$ vaheline nurk.

Lahendus.

$$\cos\Theta = \frac{|(-1)\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{|-4|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7},$$

$\Theta = 73°24'$.

Kui tasapindadevaheline nurk $\varphi = 90°$, s. t. kui tasapinnad on risti, siis $\cos\Theta = 0$ ja seega

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = 0,$$

millest

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Sellele tulemusele jõuaksime ka lähtudes tõsiasjast, et kui $\alpha \perp \beta$, siis ka $\vec{n} \perp \vec{m}$ ehk $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$, millest $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Ülesandeid.

1. Kas tasapind $4x - y + 3z + 1 = 0$ läbib mõnda järgmistest punktidest:
$A(-1; 6; 3)$; $B(3; -2; -5)$; $C(0; 4; 1)$; $D(2; 0; 5)$; $E(2; 7; 0)$; $F(0; 1; 0)$?

2. Kuidas asetseb tasapind koordinaatteljestikus, kui võrrandis puudub vabaliige? liige, mis sisaldab mingit tundmatut? kaks liiget, mis sisaldavad tundmatuid?

3. Määrata järgmiste tasapindade asend koordinaatteljestiku suhtes:

a) $3x + 5z + 1 = 0$,
b) $9y + 2 = 0$,
c) $x + y - 5 = 0$,
d) $2x + 3y - 7z = 0$,
e) $8y - 3z = 0$,
f) $x = 0$.

4. Leida võrrand tasapinnale, mis on paralleelne xz-tasapinnaga ja läbib punkti $A(2; -5; 3)$.

5. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib z-telge ja punkti $P(-3; 1; -2)$.

6. Leida võrrand tasapinnale, mis on paralleelne x-teljega ja läbib punkte $A(4; 0; -2)$ ja $B(5; 1; 7)$.

7. Leida tasapinnaga $2x - y + 2z + 9 = 0$ ristuva sirge sihikoosinused.

8. Leida nurk tasapinna $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ ja yz-tasapinna vahel.

9. On antud punktid $A(1; 3; -2)$ ja $B(7; -4; 4)$. Esitada võrrand tasapinnale, mis läbib punkti B ja on risti lõiguga AB.

10. Leida nurgad järgmiste tasapindade vahel:

a) $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 1 = 0$ ja $x_1 - 4x_2 - x_3 + 9 = 0$,
b) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + 15 = 0$ ja $5x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 3 = 0$,
c) $6x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2 = 0$ ja $9x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 5 = 0$.

11. Punkti $M(-5; 16; 12)$ läbib 2 tasapinda. Üks neist läbib ka x-telge, teine y-telge. Leida nende tasapindade vaheline nurk.

12. Esitada võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $A(-2; 7; 3)$ ja on paralleelne tasapinnaga $x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 1 = 0$.

13. Näidake, et tasapinnad $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$, $3x_1 - 6x_3 + 1 = 0$, $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$ on paarikaupa risti.

12.3. VEKTORKORRUTIS.

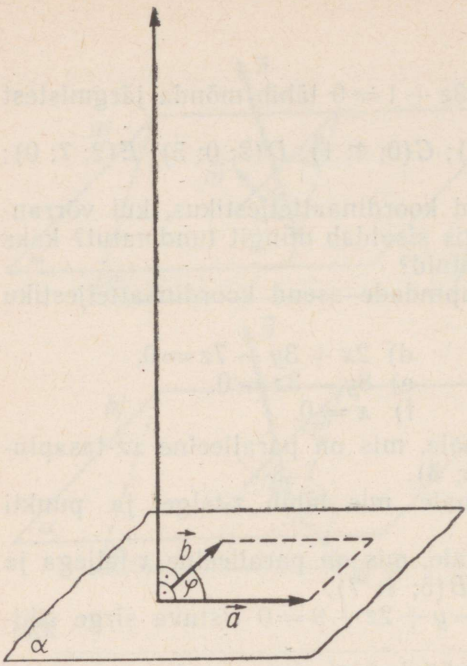
1. VEKTORKORRUTISE DEFINITSIOON.

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Oleme juba tuttavad vektorite korrutisega, nn. **skalaarkorrutisega**, mis avaldub skalaarina:

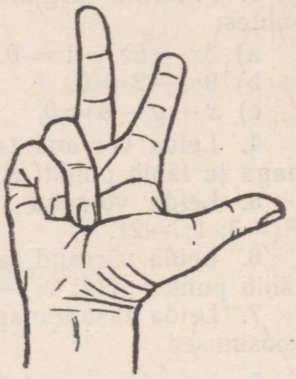
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi,$$

kus φ on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk.

Joon. 62.



Joon. 63.



Olgu vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ viidud ühisesse alguspunkti 0 ja olgu nendevaheline nurk φ (joon. 62). Vaadeldes neid vektoreid rööpküliku külgedena, saame kergesti joonestada vastava rööpküliku. Vaatleme nüüd vektorit, mis on risti selle rööpküliku tasapinnaga α ja mille pikkus on võrdne rööpküliku pindala mõõtarvuga. Selle vektori suuna määrame aga nn. **parema käe reegli** järgi, s. t. asetame parema käe pöidla vektori $\vec{a}$ suunas ja esimese sõrme vektori $\vec{b}$ suunas, siis keskmine sõrm näitab rööpküliku tasapinnaga α ristuva vektori suunda (joon. 63). Sellise vektorina defineeritaksegi vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korrutis kui vektor, nn. **vektorkorrutis.**

Kahe vektori vektorkorrutiseks nimetatakse vektorit, mille 1 siht on risti antud vektorite poolt määratud tasapinnaga, 2 pikkus on võrdne antud vektoritele ehitatud rööpküliku pindalaga ja 3 suund on määratud parema käe reegliga.

Vektorkorrutise tähistamiseks kasutame sümbolit $\times$. Nii tähendab avaldis

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutist.

Vektorkorrutise kui vektori pikkus on määratud rööpküliku pindalaga. Et rööpküliku pindala on võrdne tema kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega, siis

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi.$$

2. VEKTORKORRUTISE OMADUSI.

1°. Tegurite järjekorra muutmisel muutub vektorkorrutise märk vastupidiseks.

Tõepoolest, kui $\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \varphi$, siis $\vec{b} \times \vec{a} = -ba \sin \varphi$ (parema käe reegel).

Seega,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

2°. Vektorkorrutis on assotsiatiivne skalaarse teguri suhtes.

Tõepoolest, kui rööpküliku üht külge suurendada näiteks m korda, siis suureneb ka rööpküliku pindala m korda, s. t.

$$m\vec{a} \times \vec{b} = (ma)b \sin \varphi = m(ab \sin \varphi) = m(\vec{a} \times \vec{b}),$$

samuti

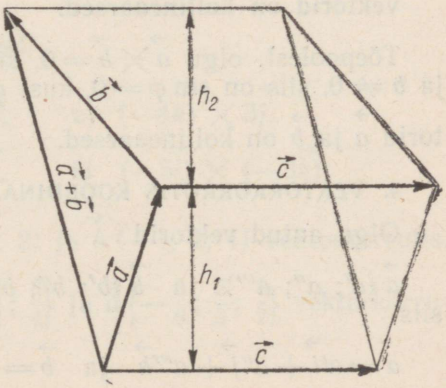
$$\vec{a} \times n\vec{b} = a(nb) \sin \varphi = n(ab \sin \varphi) = n(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Siit järeldub, et

$$m\vec{a} \times n\vec{b} = mn(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3°. Vektorkorrutis on distributiivne.

Selle omaduse tõestamiseks tugineme joonisele 64. Näeme, et vektoritele $\vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{c}$ ehitatud rööpküliku pindala on võrdne vek-



Joon. 64.

toritele $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ ning vektoritele $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ehitatud rööpkülikute pindalade summaga. Parema käe reegli järgi on kõigil vaadeldavatel vektorkorrutistel kui vektoritel üks ja sama suund. Seega kehtib võrdus

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

Distributiivsuse omadus kehtib ka siis, kui liidetavaid vektoreid on rohkem kui kaks. Näiteks

$$(\vec{a}+\vec{m}+\vec{n})\times\vec{d}=\vec{a}\times\vec{d}+\vec{m}\times\vec{d}+\vec{n}\times\vec{d}.$$

Tõestage selle võrduse kehtivus, asendades eelmises võrduses $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}$!

3. RISTUVATE ÜHIKVEKTORITE VEKTORKORRUTISED.

Moodustame nüüd vektorkorrutised ristuvaist ühikvektoreist $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$. Saame

a) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ ja $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$,

b) $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ ja $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$,

c) $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ ja $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

Korrutades kaht kollineaarset vektorit vektoriaalselt, saame alati tulemuseks nullvektori, sest siis on kas $\varphi=0$ või $\varphi=180°$ ja seega $\sin\varphi=0$. Seega

kahe kollineaarse vektori vektorkorrutis on null.

Seega ka

$$\vec{i}\times\vec{i}=0;\quad \vec{j}\times\vec{j}=0;\quad \vec{k}\times\vec{k}=0.$$

Samuti vastupidi,

kui kahe mittenullvektori vektorkorrutis on null, siis need vektorid on kollineaarsed.

Tõepoolest, olgu $\vec{a}\times\vec{b}=0$, siis peab $ab\sin\varphi=0$. Et $a\neq 0$ ja $b\neq 0$, siis on $\sin\varphi=0$, kust $\varphi=0°$ või $\varphi=180°$. Seega vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

4. VEKTORKORRUTIS KOORDINAATIDES.

Olgu antud vektorid

$$\vec{a}\{a';\ a'';\ a'''\}\quad\text{ja}\quad\vec{b}\{b';\ b'';\ b'''\},$$

siis

$$\vec{a}=a'\vec{i}+a''\vec{j}+a'''\vec{k}\quad\text{ja}\quad\vec{b}=b'\vec{i}+b''\vec{j}+b'''\vec{k}.$$

Moodustame nüüd vektorkorrutise ja teisendame seda, tuginedes vektorkorrutise omadustele:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a'\vec{i} + a''\vec{j} + a'''\vec{k}) \times (b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}) =$$
$$= a'\vec{i} \times (b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}) + a''\vec{j} \times (b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}) +$$
$$+ a'''\vec{k} \times (b'\vec{i} + b''\vec{j} + b'''\vec{k}) =$$
$$= a'b'(\vec{i} \times \vec{i}) + a'b''(\vec{i} \times \vec{j}) + a'b'''(\vec{i} \times \vec{k}) +$$
$$+ a''b'(\vec{j} \times \vec{i}) + a''b''(\vec{j} \times \vec{j}) + a''b'''(\vec{j} \times \vec{k}) +$$
$$+ a'''b'(\vec{k} \times \vec{i}) + a'''b''(\vec{k} \times \vec{j}) + a'''b'''(\vec{k} \times \vec{k}) =$$
$$= a'b''\vec{k} - a'b'''\vec{j} - a''b'\vec{k} + a''b'''\vec{i} + a'''b'\vec{j} - a'''b''\vec{i} =$$
$$= (a''b''' - a'''b'')\vec{i} + (a'''b' - a'b''')\vec{j} + (a'b'' - a''b')\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a'' & a''' \\ b'' & b''' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a''' & a' \\ b''' & b' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutise avaldise ristuvate ühikvektorite kaudu saab esitada ka kolmerealise determinandina:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \end{vmatrix}.$$

Kontrollige!

Ülesandeid.

1. Leida järgmised korrutised:

a) $2\vec{i} \times 3\vec{j}$, c) $7\vec{k} \times 6\vec{i}$, e) $(-4\vec{k}) \times 3\vec{j}$,

b) $4\vec{j} \times 5\vec{k}$, d) $8\vec{j} \times 9\vec{i}$, f) $(-5\vec{i}) \times (-3\vec{k})$.

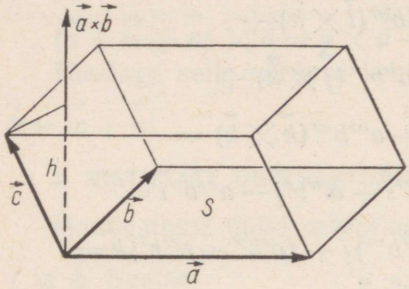
2. Leida vektorite $\vec{a}\{3; -1; 2\}$ ja $\vec{b}\{-1; 2; 1\}$ vektorkorrutis.

3. Leida vektorite $\vec{c}\left\{\frac{3}{5}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right\}$ ja $\vec{d}\left\{-\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$ vektorkorrutis.

12.4. SEGAKORRUTIS.

1. SEGAKORRUTISE MÕISTE.

Olgu antud kolm vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Need vektorid määravad rööptahuka (joon. 65). Selle rööptahuka põhja pindala avaldub vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutise kui vektori pikkusena. Rööptahuka



Joon. 65.

kõrgus h on võrdne vektori $\vec{c}$ projektsiooniga vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ sihil. Seega on vektorite $\vec{a} \times \vec{b}$ ja $\vec{c}$ skalaarkorrutis võrdne rööptahuka ruumalaga. Skalaarkorrutist

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

nimetatakse kolme vektori **segakorrutiseks.**

Segakorrutises tuleb alati enne leida vektorkorrutis ja seejärel skalaarkorrutis.

Kui $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = q$, siis millega võrdub $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$?

2. SEGAKORRUTIS KOORDINAATIDES.

Olgu antud vektorid

$\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$; $\vec{b}\{b'; b''; b'''\}$ ja $\vec{c}\{c'; c''; c'''\}$.

Moodustame esmalt vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutise

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a'' & a''' \\ b'' & b''' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a''' & a' \\ b''' & b' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} \vec{k}$$

ja selle vektori korrutame skalaarselt vektoriga $\vec{c}$, saame

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a'' & a''' \\ b'' & b''' \end{vmatrix} c' + \begin{vmatrix} a''' & a' \\ b''' & b' \end{vmatrix} c'' + \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} c'''.$$

Esitades avaldises esinevad determinandid nende arendiste kaudu, saame

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a''b'''c' - a'''b''c' + a'''b'c'' - a'b'''c'' + \\ + a'b''c''' - a''b'c'''.$$

See avaldis on aga kolmerealise determinandi

$$\begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix}$$

arendis. Kontrollige!

Seega,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix}$$

s. t. et

kolme vektori segakorrutis avaldub kolmerealise determinandina, mille ridade elementideks on vastavate antud vektorite koordinaadid.

12. 5. KOLME VEKTORI KOMPLANAARSUSE TUNNUS.

Kolme vektorit nimetatakse komplanaarseks, kui nad pärast ühise alguspunkti juurde viimist asetsevad ühes ja samas tasapinnas.

Vektorite komplanaarsuse tunnuse leidmisel tugineme segakorrutisele. Et komplanaarsete vektorite poolt moodustatud rööptahuka ruumala on võrdne nulliga, siis

komplanaarsete vektorite segakorrutis on null.

Seega on vektorite $\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$, $\vec{b}\{b'; b''; b'''\}$ ja $\vec{c}\{c'; c''; c'''\}$ komplanaarsuse tingimuseks

$$\begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0.$$

12. 6. ÜLESANDEID TASAPINNA MÄÄRAMISE KOHTA.

1) Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $P(p_1;\ p_2;\ p_3)$ ja on paralleelne mittekollineaarsete vektoritega $\vec{a}\{a';\ a'';\ a'''\}$ ja $\vec{b}\{b';\ b'';\ b'''\}$.

Olgu tasapinna suvaliseks punktiks $X(x;\ y;\ z)$, siis vektorid $\overrightarrow{PX}$, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on komplanaarsed ja seega nende segakorrutis on võrdne nulliga.

Et $\overrightarrow{PX}\{x-p_1;\ y-p_2;\ z-p_3\}$, siis

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \end{vmatrix} = 0,$$

mis ongi otsitavaks võrrandiks.

Näide. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $M(2;\ 0;\ -3)$ ja on paralleelne sirgetega, mis läbivad vastavalt punkte $A(-1;\ 5;\ 2)$ ja $B(2;\ -3;\ 1)$ ning $C(3;\ 6;\ -1)$ ja $D(0;\ 7;\ 2)$.

Et punktidega A ja B on määratud vektor $\overrightarrow{AB}$ ning punktidega C ja D vektor $\overrightarrow{CD}$ ja et mõlemad vektorid on paralleelsed antud tasapinnaga, siis taandubki ülesanne käsitletud juhule.

Et antud vektorid $\overrightarrow{AB}\{3;\ -8;\ -1\}$ ja $\overrightarrow{CD}\{-3;\ 1;\ 3\}$ ja et tasapinna suvalise punktiga X ja antud punktiga M on määratud vektor $\overrightarrow{MX}\{x-2;\ y;\ z+3\}$, siis kolme vektori komplanaarsuse tingimuse põhjal

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+3 \\ 3 & -8 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

millest saame tasapinna võrrandiks

$$-23x-12y-21z-17=0.$$

2) Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkte $M(m_1;\ m_2;\ m_3)$ ja $N(n_1;\ n_2;\ n_3)$ ning on paralleelne vektoriga $\vec{a}\{a';\ a'';\ a'''\}$.

Kui tähistada tasapinna suvaline punkt jälle tähega $X(x;\ y;\ z)$, siis on komplanaarseteks vektoriteks $\overrightarrow{MX}$, $\overrightarrow{MN}$ ja $\vec{a}$.

Et vektorite $\overrightarrow{MX}$ ja $\overrightarrow{MN}$ koordinaadid on avaldatavad otspunktide koordinaatide kaudu

$\overrightarrow{MX}\{x-m_1;\ y-m_2;\ z-m_3\}$ ja $\overrightarrow{MN}\{n_1-m_1;\ n_2-m_2;\ n_3-m_3\}$,

siis saame otsitavaks võrrandiks

$$\begin{vmatrix} x-m_1 & y-m_2 & z-m_3 \\ n_1-m_1 & n_2-m_2 & n_3-m_3 \\ a' & a'' & a''' \end{vmatrix} = 0.$$

N ä i d e. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkte $A(3; 2; 1)$ ja $B(-1; 0; 2)$ ning on paralleelne sirgega, mis läbib punkte $P(-3; -1; 0)$ ja $Q(-3; 1; 1)$.

Tähistame tasapinna suvalise punkti tähega $X(x; y; z)$, siis on komplanaarsed vektorid:

$\overrightarrow{AX}\{x-3; y-2; z-1\}$, $\overrightarrow{AB}\{-4; -2; 1\}$ ja $\overrightarrow{PQ}\{0; 2; 1\}$.

Seega,

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

millest

$$-4x+4y-8z+12=0.$$

3) Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkte $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$ ja $C(c_1; c_2; c_3)$.

Tähistades tasapinna suvalise punkti tähega $X(x; y; z)$, saame kolmeks komplanaarseks vektoriks

$\overrightarrow{AX}\{x-a_1; y-a_2; z-a_3\}$, $\overrightarrow{AB}\{b_1-a_1; b_2-a_2; b_3-a_3\}$ ja $\overrightarrow{AC}\{c_1-a_1; c_2-a_2; c_3-a_3\}$.

Tasapinna võrrand on seega

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ülesandeid.

1. On antud punktid $M_1(0; -1; 3)$ ja $M_2(1; 3; 5)$. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti M_1 ja on risti vektoriga $\overrightarrow{M_1M_2}$.
2. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $M(a; a; 0)$ ja on risti punkti M kohavektoriga.
3. Leida võrrand tasapinnale, mis on paralleelne x-teljega ja mis läbib punkte $A(0; 1; 3)$ ja $B(2; 4; 5)$.
4. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib x-telge ja punkti $P(0; -2; 3)$.
5. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib z-telge ja punkti $Q(2; -4; 3)$.
6. Leida tasapinna $2x+3y+6z-12=0$ normaali sihikoosinused ja sihinurgad.

7. Leida tasapinna $2x - 2y + z - 6 = 0$ normaali sihikoosinused ja sihinurgad.

8. Leida nurk tasapindade $x - 2y + 2z - 8 = 0$ ja $x + z - 6 = 0$ vahel.

9. Leida nurk tasapindade $x + 2z - 6 = 0$ ja $x + 2y - 4 = 0$ vahel.

10. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $A(2; 2; -2)$ ja on paralleelne tasapinnaga $x - 2y - 3z = 0$.

11. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $A(-1; -1; 2)$ ja on risti tasapindadega $x - 2y + z - 4 = 0$ ja $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

12. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $A(0; 0; a)$ ja on risti tasapindadega $x - y - z = 0$ ja $2y = z$.

13. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkte $P(-1; -2; 0)$ ja $Q(1; 1; 2)$ ning on risti tasapinnaga $x + 2y + 2z - 5 = 0$.

14. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkte $A(1; -1; 2)$, $B(2; 1; 2)$ ja $C(1; 1; 4)$.

15. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkte $P(a; 0; 0)$, $Q(0; a; 0)$ ja $R(a; a; a)$.

16. Leida tasapindade $2x - y + 3z - 9 = 0$, $x + 2y + 2z - 3 = 0$ ja $3x + y - 4z + 6 = 0$ lõikepunkt.

13. SIRGE VÕRRANDID.

13. 1. SIRGE KAHE LÕIKUVA TASAPINNA LÕIKEJOONENA.

Olgu antud kaks tasapinda oma võrranditega

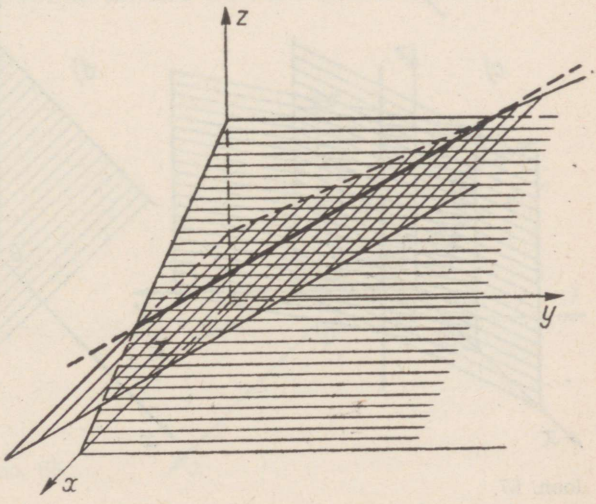
$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ ja $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$.

Eeldame, et neis võrrandeis tundmatute x, y ja z kordajad pole võrdelised. Siis neile vastavad tasapinnad ei ole paralleelsed ega ühtivad ning nad määravad ühe sirge, nende tasapindade lõikesirge. Seega,

kui võrrandisüsteemis

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \end{cases}$$

tundmatute kordajad pole võrdelised, siis need võrrandid on ühe sirge võrranditeks.

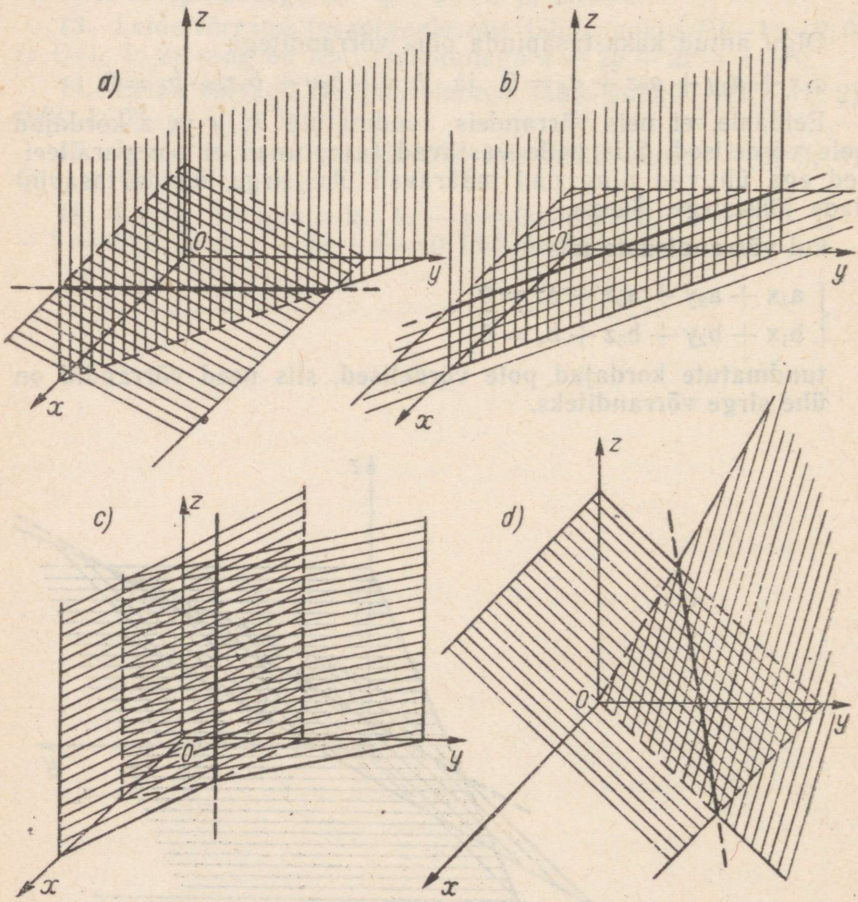


Joon. 66.

Läbi ühe sirge saab ruumis asetada lõpmata palju tasapindu. Seega saab antud sirget määravat kahte tasapinda valida lõpmata mitmel erineval viisil. Sageli võetakse nendeks tasapindadeks koordinaattelgedega paralleelsed tasapinnad, s. o. tasapinnad, mis projekteerivad sirge kahele koordinaattasapinnale (joon. 66), sest siis on tasapindade võrrandid lihtsamad, näiteks

$$\begin{cases} c_1x + c_3z + c_4 = 0 \\ d_2y + d_3z + d_4 = 0. \end{cases}$$

Missuguste koordinaattelgedega on süsteemis toodud võrranditele vastavad tasapinnad paralleelsed?



Joon. 67.

Ülesandeid.

1. Iseloomustage järgmiste sirgete asendit koordinattelgede suhtes.

a) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1x + d_1 = 0 \\ b_2y + d_2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1x_1 + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ b_2y + d_2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1x + c_1z = 0 \\ a_2x + c_2z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y + 2z = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{cases}$

2. Missugune on sirget määravate tasapindade asend joonisel 67? Iseloomustage nende tasapindade võrrandeid.

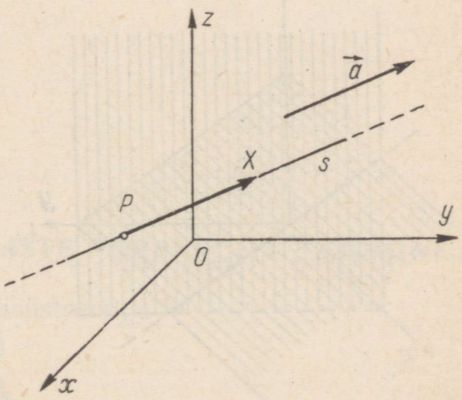
13.2. SIRGE KANOONILISED VÕRRANDID.

Olgu antud sirgel s punkt $P(p_1; p_2; p_3)$ ja sirgega s paralleelne vektor, nn. s i h i v e k t o r $\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$ (joon. 68). Kui tähistame sirge mistahes punkti tähega $X(x; y; z)$, siis vektorid $\overrightarrow{PX}$ ja $\vec{a}$ on kollineaarsed ja seega nende koordinaadid on võrdelised:

$$\frac{x - p_1}{a'} = \frac{y - p_2}{a''} = \frac{z - p_3}{a'''}.$$

Saadud võrrandeid nimetatakse **sirge kanoonilisteks võrranditeks.** Neid võrrandeid võime esitada ka süsteemina

$$\begin{cases} \frac{x_1 - p_1}{a'} = \frac{x_3 - p_3}{a'''} \\ \frac{x_2 - p_2}{a''} = \frac{x_3 - p_3}{a'''} \end{cases}$$



Joon. 68.

ehk

$$\begin{cases} a'''x_1 - a'x_3 + a'p_3 - a'''p_1 = 0 \\ a'''x_2 - a''x_3 + a''p_3 - a'''p_2 = 0. \end{cases}$$

Mitmel viisil saab kanoonilistest võrranditest välja kirjutada süsteemi? Selgub, et sirge kanoonilisteks võrranditeks on mingi koordinaatteljega paralleelsete tasapindade võrrandid.

Olgu sirge sihivektori koordinaatidest üks võrdne nulliga, näiteks $a' = 0$. Vektori projektsioon x-teljele on null. Järelikult on sirge paralleelne yz-tasapinnaga. Kui sirge kanoonilised võrrandid esitada üldise kuju järgi, saame

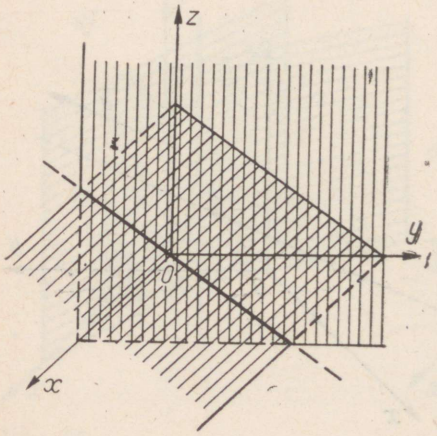
$$\frac{x - p_1}{0} = \frac{y - p_2}{a''} = \frac{z - p_3}{a'''}.$$

Kui nüüd $x - p_1 \neq 0$, siis puudub võrrandi esimesel osal mõte. Seega peab $x - p_1 = 0$, sest $\frac{0}{0}$ on võrdne iga arvuga ja seega ka järgnevate murdudega. Võrrand

$$x - p_1 = 0$$

on yz-tasapinnaga paralleelse tasapinna võrrand. Võrrand $\frac{y - p_2}{a''} = \frac{z - p_3}{a'''}$ on yz-tasapinnaga ristuva tasapinna võrrand. Seega taanduvad vaadeldaval juhul sirge kanoonilised võrrandid ühe koordinaattasapinnaga paralleelse tasapinna võrrandiks ja sama koordinaattasapinnaga ristuva tasapinna võrrandiks (joon. 69).

Missuguste tasapindade võrranditeks taanduvad sirge kanoo-



Joon. 69.

nilised võrrandid siis, kui sirgega paralleelse vektori koordinaatidest kaks on võrdsed nulliga?

Näide. Läbigu sirge punkti $P(-3; 1; 0)$ ja olgu selle sirgega paralleelseks vektoriks $\vec{v}\{0; 1; 0\}$. Siis sirge kanoonilised võrrandid esituvad kujus

$$\frac{x_1+3}{0} = \frac{x_2-1}{1} = \frac{x_3}{0}.$$

Siit järeldub, et sirge on määratud tasapindadega:

$x_1 = -3$

$x_3 = 0$.

Kuidas asetsevad need tasapinnad koordinaattasapindade suhtes?

Ülesandeid.

1. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(1; -1; 1)$ ning on paralleelne vektoriga $\vec{u}\{2; -1; 3\}$.
2. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $B(1; -2; 1)$ ja on ristis tasapinnaga $2x - 3y + z = 0$.
3. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $C(4; 0; -3)$ ja on ristis tasapinnaga $3y - z + 1 = 0$.
4. Kuidas asetsevad koordinaatteljestiku suhtes sirged

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1}$,

b) $\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+2}{1}$,

c) $\frac{x+5}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{0}$,

d) $\frac{z+3}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}$,

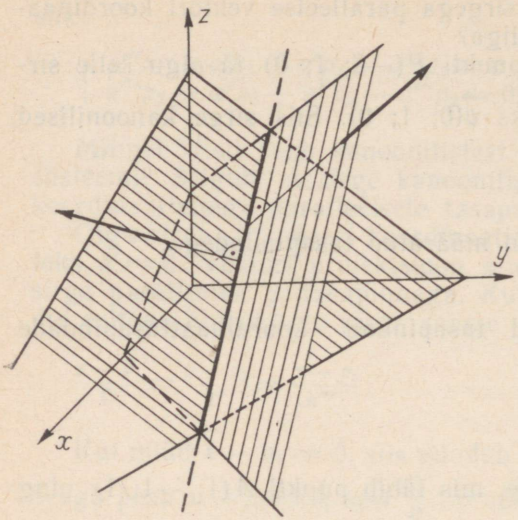
e) $\frac{x}{0} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{0}$,

f) $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{0}$?

13. 3. SIRGE KANOONILISTE VÕRRANDITE LEIDMINE.

Olgu sirge antud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0. \end{cases}$$



Joon. 70.

Et leida selle sirge kanoonilisi võrrandeid, peame teadma tema mingi punkti koordinaate ja temaga paralleelse vektori koordinaate.

Antud võrrandisüsteemis on kolm tundmatut ja kaks võrrandit. Et antud punkt võib asuda sirgel ükskõik kus, siis võime ühe selle punkti koordinaatidest valida vabalt. Olgu näiteks $x = 0$. Antud süsteem taandub siis niisuguseks, millest saab üheselt määrata y ja z:

$$\begin{cases} a_2y + a_3z + a_4 = 0 \\ b_2y + b_3z + b_4 = 0. \end{cases}$$

Siit

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -a_4 & a_3 \\ -b_4 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \quad \text{ja} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -a_4 \\ b_2 & -b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}.$$

Antud punktiks oleme saanud seega

$$P\left(0;\ \frac{\begin{vmatrix} -a_4 & a_3 \\ -b_4 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}};\ \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -a_4 \\ b_2 & -b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}\right).$$

Esialgse süsteemi võrranditele vastavate tasapindadega ristuvateks vektoriteks on $\vec{a}\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ ja $\vec{b}\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$. Need vektorid on risti tasapindade lõikesirgega (joon. 70) ja seega nende vek-

torite vektorkorrutis on antud sirgega paralleelne vektor. Seega vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}\left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

on antud sirgega paralleelne vektor.

Niisiis, sirge võrranditest

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \end{cases}$$

saame selle sirge kanoonilised võrrandid

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2 - \dfrac{\begin{vmatrix} -a_4 & a_3 \\ -b_4 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}}{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{x_3 - \dfrac{\begin{vmatrix} a_2 - a_4 \\ b_2 - b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

N ä i d e. Leida sirge

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z - 11 &= 0 \\ 2x + y - 3z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

kanoonilised võrrandid.

Leiame sirgel punkti, mille kolmas koordinaat on null, s. t. $z = 0$. Siis x ja y määramiseks saame süsteemi

$$\begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Siit

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-1} = -9 \text{ ja } y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-19}{-1} = 19.$$

Seega asetseb sirgel punkt

$P(-9; 19; 0)$.

Sirgega paralleelseks vektoriks on

$$\vec{v}\left\{ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

ehk

$$\vec{v}\{-10; 17; -1\}.$$

Antud sirge kanoonilisteks võrranditeks on seega

$$\frac{x+9}{-10} = \frac{y-19}{17} = \frac{z}{-1}.$$

13. 4. KAHE PUNKTIGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND.

Olgu punktidega $P(p_1; p_2; p_3)$ ja $Q(q_1; q_2; q_3)$ määratud sirge mistahes punktiks $X(x_1; x_2; x_3)$. Siis $\overrightarrow{PX} \parallel \overrightarrow{PQ}$. Et kollineaarsete vektorite koordinaadid on võrdelised, siis

$$\boxed{\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3},}$$

mis ongi **kahe punktiga määratud sirge võrrandiks.**

N ä i d e. Leida punkte $A(1; 0; -1)$ ja $B(-2; 1; 0)$ läbiva sirge kanoonilised võrrandid.

Olgu sirge mistahes punktiks $X(x; y; z)$, siis on kollineaarsed vektorid $\overrightarrow{AX}$ ja $\overrightarrow{AB}$ ja seega otsitavateks võrranditeks on

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

Ülesandeid.

1. Leida sirgete

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

kanoonilised võrrandid.

2. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkte $A(3; -1; 2)$ ja $B(-2; 1; -1)$.

3. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkte $P(0; 2; -1)$ ja $Q(0; 0; -5)$.

4. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $M(2; 1; 1)$ ja on paralleelne tasapindadega $2x - y + 1 = 0$ ja $y - 1 = 0$.

5. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $N(-1; 2; 1)$ ja on paralleelne sirgega

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

6. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $A(2; 2; 1)$ ja on risti sirgega

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

13. 5. KAHE SIRGE VASTASTIKUSED ASENDID.

Olgu antud kaks sirget s ja t oma kanooniliste võrranditega

s: $\frac{x-m_1}{a'}=\frac{y-m_2}{a''}=\frac{z-m_3}{a'''}$,

t: $\frac{x-n_1}{b'}=\frac{y-n_2}{b''}=\frac{z-n_3}{b'''}$.

1. SIRGETE PARALLEELSUS.

Kui $s \parallel t$, siis on nende sirgetega paralleelsed vektorid kollineaarsed, s. t.

$$\boxed{\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''},}$$

mis ongi **sirgete paralleelsuse tunnus.**

2. SIRGETE ÜHTIMINE.

Kui lisaks sirgete paralleelsuse tunnuse kehtivusele punkti $N(n_1; n_2; n_3)$ koordinaadid rahuldavad sirge s võrrandit või punkti $M(m_1; m_2; m_3)$ koordinaadid sirge t võrrandit, siis sirged ühtivad.

Näide. On antud sirged $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ ja $\frac{x+4}{6}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{2}$.

Paralleelsuse tingimus on täidetud, sest $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$. Et teise sirge punkti koordinaadid (—4; 3; —2) rahuldavad esimest võrrandit, siis need sirged ühtivad.

3. SIRGETE RISTSEIS.

Sirged (ka kiivsirged) on risti, kui nendega paralleelsete vektorite sihid moodustavad täisnurga. Sel juhul on aga nende vektorite skalaarkorrutis null, s. t.

$$\boxed{a'b'+a''b''+a'''b'''=0,}$$

mis ongi **sirgete ristseisu tunnuseks.**

Näide. Sirged $\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+2}{1}$ ja $\frac{x+3}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{7}$ on risti, sest

$2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1+1\cdot 7=0$.

Kaks sirget s ja t lõikuvad ruumis, kui nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal ning nad pole paralleelsed. Kui sirgel s asetseb punkt $M(m_1; m_2; m_3)$ ja sirget t punkt $N(n_1; n_2; n_3)$, siis vektor $\overrightarrow{MN}\{n_1 - m_1; n_2 - m_2; n_3 - m_3\}$ peab olema komplanaarne mittekollineaarsete vektoritega $\vec{a}\{a'; a''; a'''\}$ ja $\vec{b}\{b'; b''; b'''\}$, s. t. et

$$\begin{vmatrix} n_1 - m_1 & n_2 - m_2 & n_3 - m_3 \\ a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \end{vmatrix} = 0$$

ja siinjuures vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ koordinaadid ei tohi olla võrdelised.

Kui sirgete lõikumise tingimus kehtib, siis lõikepunkti koordinaatide leidmiseks lahendatakse võrrandisüsteem, mille võrranditeks on mõlema sirge võrranditest neidsamu tundmatuid sisaldavad osad, näiteks

$$\begin{cases} \dfrac{x - m_1}{a'} = \dfrac{z - m_3}{a'''} \\ \dfrac{x - n_1}{b'} = \dfrac{z - n_3}{b'''}. \end{cases}$$

Selle süsteemi lahenditena saadakse otsitava punkti esimene ja kolmas koordinaat. Teise koordinaadi saab seejärel leida juba ükskõik kumma sirge võrrandite abil, näiteks võrrandist

$$\frac{x - m_1}{a'} = \frac{y - m_2}{a''}.$$

N ä i d e. Näidata, et sirged

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-4}{-1} \quad \text{ja} \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z+5}{4}$$

lõikuvad ning leida nende lõikepunkt.

Võrranditest näeme, et sirgetega paralleelsed vektorid pole kollineaarsed:

$$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{4}.$$

Sirgete antud punkte ühendavaks vektoriks on $\{1; 4; 9\}$.

Nüüd kontrollime, kas see vektor ja antud sirgetega paralleelsed vektorid on komplanaarsed. Selleks arvutame determinandi

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 + 81 - 36 + 3 - 48 = 0.$$

Et determinandi väärtus on null, siis vektorid on komplanaarsed. Seega sirged lõikuvad.

Leiame nüüd lõikepunkti. Selleks lahendame algul võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{2} \\ \frac{x+3}{2} = \frac{y+8}{3} \end{cases}.$$

See süsteem on teisendatav kujule

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

ja siit

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-16+21}{-4+9} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{5} = \frac{14-24}{5} = -2.$$

Koordinaadi z avaldame nüüd võrdusest

$$\frac{1+2}{3} = \frac{z-4}{-1},$$

millest $z = 3$.

Seega on antud sirgete lõikepunktiks punkt $P(1; -2; 3)$.

Ülesandeid.

1. Määrata järgmiste sirgete paaride vastastikune asend:

a) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-2}$ ja $\frac{x+1}{-6} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{4}$,

b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$ ja $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{-4}$,

c) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ ja $\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$.

2. Leida järgmiste sirgete lõikepunkt:

a) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{-3}$ ja $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-4}$,

b) $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$ ja $\frac{x+1}{2} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-3}{-2}$.

13. 6. SIRGE JA TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

On antud tasapind α

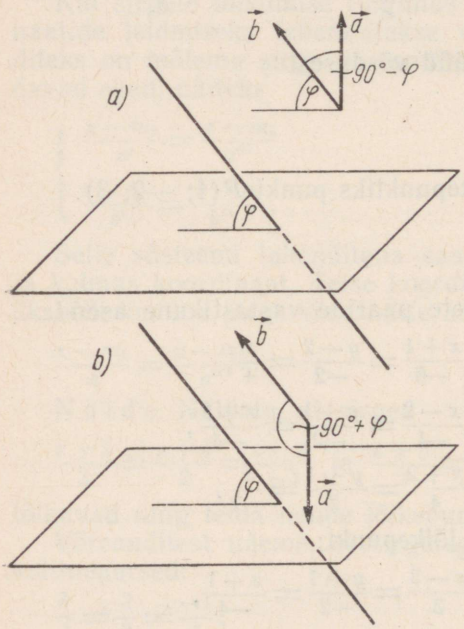
$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$$

ja sirge s

$$\frac{x-m_1}{b'} = \frac{y-m_2}{b''} = \frac{z-m_3}{b'''}.$$

Teame, et vektor $\vec{a}\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ ristub tasapinnaga α ja vektor $\vec{b}\{b';\ b'';\ b'''\}$ on paralleelne sirgega s. Olgu sirge ja tasapinna vaheline nurk φ (φ on alati teravnurk, erandjuhul täisnurk) (joon. 71). Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on siis kas $90° - \varphi$ või $90° + \varphi$. Seega skalaarkorrutise definitsiooni põhjal

$$\text{kas } \cos(90° - \varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} \text{ või } \cos(90° + \varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}.$$



Joon. 71.

Et

$$\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi \text{ ja } \cos(90° + \varphi) = -\sin\varphi \text{ ning et}$$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_1 b' + a_2 b'' + a_3 b'''}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b'^2 + b''^2 + b'''^2}},$$

siis juhul kui $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$ avaldise väärtus tuleb positiivne, on vektorite-

vaheliseks nurgaks $90° - \varphi$, ja kui negatiivne, siis $90° + \varphi$. Et meid huvitab teravnurk φ, siis saame selle valemist

$$\sin\varphi = \frac{|a_1b' + a_2b'' + a_3b'''|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b'^2 + b''^2 + b'''^2}}.$$

Näide 1. Leida nurk sirge $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$ ja tasapinna $x + 3y - 2z - 1 = 0$ vahel.

Olgu otsitavaks nurgaks φ, siis

$$\sin\varphi = \frac{|2 - 9 - 2|}{\sqrt{1+9+4} \cdot \sqrt{4+9+1}} = \frac{9}{14} \approx 0{,}6429,$$

millest

$\varphi \approx 40°$.

Näide 2. Leida nurk sirge

$$\begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

ja tasapinna $x - 3y + z - 5 = 0$ vahel.

Leiame antud sirgega paralleelse vektori $\vec{v}$ koordinaadid:

$$\vec{v}\left\{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}.$$

Siit

$\vec{v}\{2; -1; 1\}$.

Nurga leidmiseks kasutame selle nurga siinuse jaoks leitud valemit

$$\sin\varphi = \frac{1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1+9+1} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{66}} \approx 0{,}7385,$$

$\varphi \approx 47°36'$.

2. SIRGE JA TASAPINNA PARALLEELSUS.

Kui sirge s on paralleelne tasapinnaga α, siis on sirgega paralleelne vektor risti tasapinnaga ristuva vektoriga, s. t. et nende vektorite skalaarkorrutis on siis võrdne nulliga:

$$\boxed{a_1b' + a_2b'' + a_3b''' = 0.}$$

Näide. Leida sirge $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ asend tasapinna $4x + 3y - z + 3 = 0$ suhtes.

Et vektorite $\vec{b}\{2;\ -1;\ 5\}$ ja $\vec{a}\{4;\ 3;\ -1\}$ skalaarkorrutis on $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4 + (-1)\cdot 3 + 5\cdot(-1) = 0$, siis on sirge paralleelne tasapinnaga. Tuleb veel kontrollida, kas sirge ei asetse tasapinnal. Selleks kontrollime, kas sirge punkt $(1;\ -3;\ -2)$ rahuldab tasapinna võrrandit:

$4\cdot 1 + 3\cdot(-3) - (-2) + 3 = 0.$

Et tasapinnaga paralleelse sirge üks punkt asetseb tasapinnal, siis peab antud sirge tervikuna asetsema sellel tasapinnal.

3. SIRGE JA TASAPINNA RISTSEIS.

Kui sirge s on risti tasapinnaga α, siis on sirgega paralleelne vektor kollineaarne tasapinnaga ristuva vektoriga, s. t. et nende vektorite koordinaadid on võrdelised:

$$\frac{a_1}{b'} = \frac{a_2}{b''} = \frac{a_3}{b''}.$$

4. SIRGE JA TASAPINNA LÕIKEPUNKT.

Kui sirge on antud võrranditega

$$\begin{cases} b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0, \end{cases}$$

siis tema lõikepunkti leidmiseks tasapinnaga

$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$

tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0. \end{cases}$$

Missugune tingimus peab olema täidetud, et antud süsteem oleks lahenduv?

Sirge lõikub tasapinnaga, kui selle süsteemi determinant pole null, s. t.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kui sirge on antud oma kanooniliste võrranditega

$$\frac{x - m_1}{b'} = \frac{y - m_2}{b''} = \frac{z - m_3}{b'''},$$

siis koosneb see kahest iseseisvast võrrandist, näiteks

$$\begin{cases} \frac{x-m_1}{b'}=\frac{y-m_2}{b''} \\ \frac{x-m_1}{b'}=\frac{z-m_3}{b'''} \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} b''x-b'y+b'm_2-b''m_1=0 \\ b'''x-b'z+b'm_3-b'''m_1=0. \end{cases}$$

Koos tasapinna võrrandiga $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ saame lõikepunkti määramiseks jälle kolme tundmatuga kolmest võrrandist koosneva lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0 \\ b''x+b'y+b'm_2-b''m_1=0 \\ b'''x-b'z+b'm_3-b'''m_1=0, \end{cases}$$

mille lahendame determinantide abil.

Näide. Leida sirge $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ ja tasapinna $3x+5y-z=0$ lõikepunkt.

Et $\frac{4}{3}\neq\frac{3}{5}\neq\frac{1}{-1}$ ja $3\cdot4+5\cdot3+(-1)\neq0$, siis ei ole sirge tasapinnaga risti ega paralleelne. Lõikepunkti koordinaatide leidmiseks lahendame süsteemi

$$\begin{cases} \frac{x-12}{4}=\frac{z-1}{1} \\ \frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1} \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} x-4z=8 \\ y-3z=6 \\ 3x+5y-z=2. \end{cases}$$

Arvutame esiteks süsteemi determinandi

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}=-1+12+15=26$$

ja seejärel tundmatute väärtused. Et

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}=0,\ D_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \text{ ja}$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}=-52,$$

siis $x=0$; $y=0$ ja $z=-\frac{52}{26}=-2$.

Lõikepunktiks on punkt $P(0;\ 0;\ -2)$.

Ülesandeid.

1. Leida nurk sirge $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ ja tasapinna $x+2y-4z+1=0$ vahel.

2. Leida nurk sirge $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ ja tasapinna $3x-3y+2z-5=0$ vahel.

3. Määrata sirge ja tasapinna vastastikune asend, kui nende võrrandid on:

a) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$ ja $-3x-4y-z+1=0$,

b) $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ ja $-4x+5z+3=0$,

c) $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ ja $-2x-6y+4z+28=0$.

4. Leida sirge $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ ja tasapinna $x+2y-4z+1=0$ lõikepunkt.

5. Leida sirge $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-3}$ ja tasapinna $2x+y-z=0$ lõikepunkt.

Kordamisülesandeid.

1. Leida võrrand sirgele, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja punkti $A(1; 2; 3)$.

2. Leida võrrandid sirgetele, millel asetsevad tetraeedri $ABCD$ servad, kui $A(0; 0; 2)$, $B(4; 0; 5)$, $C(5; 3; 0)$ ja $D(-1; 4; -2)$.

3. Kas punktid $A(3; 0; 1)$, $B(0; 2; 4)$ ja $C(1; -\frac{4}{3}; 3)$ asetsevad ühel ja samal sirgel?

4. Leida sirgete

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2} \text{ ja } \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$$

vaheline nurk.

5. Leida sirgete

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$$

vaheline nurk.

6. Leida võrrand sirgele, mis on paralleelne z-teljega ja läbib punkti $A(3; -1; 2)$.

7. Leida võrrand sirgele, mis on paralleelne sirgega $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{3}$ ja läbib punkti $A(0; 1; -1)$.

8. Leida võrrand sirgele, mis on paralleelne sirgega

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

ja läbib punkti $A(2; -5; 3)$.

9. Leida xz-tasapinnal sirge, mis läbib koordinaatide algus-punkti ja on risti sirgega

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-5}{-1}.$$

10. Kuidas asetsevad teineteise suhtes sirged

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4} \text{ ja } \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}?$$

11. Kuidas asetsevad teineteise suhtes sirged

$$\begin{cases} 4x + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0? \end{cases}$$

12. Leida sirge $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ ja tasapinna $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ lõikepunkt.

13. Leida sirge $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ ja tasapinna $3x - y + 2z - 5 = 0$ lõikepunkt.

14. Missuguse A väärtuse korral on tasapind $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ paralleelne sirgega $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?

15. Leida võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(1; -2; 4)$ ja on risti tasapinnaga $3x - 7y - 5z - 1 = 0$.

16. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib koordinaatide algus-punkti ja on risti sirgega $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-5}$.

17. Leida punkti $A(1; -3; 5)$ normaalprojektsioon tasapinnal $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

18. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti $A(3; 1; -2)$ ja sirget $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

19. Näidata, et sirged

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4} \text{ ja } \frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$$

lõikuvad ning leida nende sirgete poolt määratud tasapinna võrrand.

20. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib paralleelsed sirged

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1} \text{ ja } \frac{x+3}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{1}.$$

21. Leida punkti $P(7; 9; 7)$ kaugus sirgest $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$.

Juhis. Leida võrrand tasapinnale, mis läbib punkti P ja on risti antud sirgega. Seejärel leida tasapinna ja sirge lõikepunkt.

14. DIFERENTSIAALVÕRRANDID.

14. 1. DIFERENTSIAALVÕRRANDI MÕISTE.

Seni lahendatud võrrandid, nagu

$$x^2 - 3x = 4, \quad 2^x = 32, \quad \sin 2x = \frac{1}{2} \text{ jne.}$$

on kõik esitatavad kujul, kus võrduse vasakul poolel on mingi funktsioon ja paremal poolel 0. Näiteks on antud võrrandid esitatavad kujul

$$x^2 - 3x - 4 = 0, \quad 2^x - 32 = 0, \quad \sin 2x - \frac{1}{2} = 0 \text{ jne.}$$

Kõiki neid võrrandeid võime seega tõlgendada ülesandena: leida argumendi väärtused, mille puhul antud funktsiooni väärtus on 0.

Olgu nüüd antud järgmine ülesanne.

Ü l e s a n n e. Eksperimentaalselt on tehtud kindlaks, et aine radioaktiivse lagunemise kiirus on võrdeline lagunemata aine hulgaga. Oletades, et aine alghulk oli M_0, leida sõltuvus lagunemata aine hulga M ja aja t vahel.

Teame, et kiirus avaldub tuletisena. Käesoleval juhul on tegemist aine hulga M radioaktiivse lagunemise kiirusega, s. t. tuletisega $\frac{dM}{dt}$. Ülesande tingimuse kohaselt on see kiirus võrdeline M-ga, s. t.

$$\frac{dM}{dt} = -kM.$$

Võrdetegur võetakse siin negatiivne, sest ajavahemiku suurenedes aine hulk väheneb.

Antud ülesanne taandus seega otsitava funktsiooni $M(t)$ tuletist $M'(t)$ sisaldava võrrandi lahendamisele. Niisugust võrrandit nimetatakse **diferentsiaalvõrrandiks.**

Üldiselt,

diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitava funktsiooni tuletist.

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks on funktsioon. Kui diferentsiaalvõrrand sisaldab otsitava funktsiooni esimest järku tuletist, siis nimetatakse seda võrrandit **esimest järku diferentsiaalvõrrandiks.** Esimest järku diferentsiaalvõrranditeks on näiteks

$$y' + y = x, \quad yy' = x^2 + 3, \quad (1 + x)y' = x.$$

Üldkujus

$$F(x, y, y') = 0.$$

Esimest järku diferentsiaalvõrrandit nimetatakse **mittetäielikuks**, kui selles puudub kas argument, otsitav funktsioon või nad mõlemad. Nii on esimest järku mittetäielikeks diferentsiaalvõrranditeks näiteks $y' - 2x = 0$, $y' = y + 1$, $y' - 2 = 0$.

Üldkujus

$$F_1(x, y') = 0, \quad F_2(y, y') = 0 \text{ ja } F_3(y') = 0.$$

Eespool toodud näidisülesanne taandus esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendamisele.

Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitava funktsiooni kõrgeimat järku tuletiseks teine tuletis, siis nimetatakse seda võrrandit **teist järku diferentsiaalvõrrandiks.**

Teist järku diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$G(x, y, y', y'') = 0.$$

Teist järku mittetäielike diferentsiaalvõrrandite üldkujudeks on

$$G_1(x, y'') = 0, \; G_2(y, y', y'') = 0, \; G_3(y, y'') = 0, \; G_4(y', y'') = 0, \; G_5(y'') = 0.$$

Näiteks on võrrandid

$$y'' + xy' - y = 0, \quad y''y' - x = 0 \text{ ja } 2y'' - 7 = 0$$

teist järku diferentsiaalvõrrandid.

14. 2. DIFERENTSIAALVÕRRANDI LAHENDAMINE.

Ülesande lahendamisel radioaktiivse lagunemise kohta jõudsime võrrandini

$$\frac{dM}{dt} = -kM.$$

Selle võrrandi lahendame järgmiselt:

$$\frac{dM}{M} = -kdt,$$

$$\int \frac{dM}{M} = -\int k dt,$$

$$\ln M = -kt + C_1.$$

M avaldamiseks esitame ka võrrandi paremal poolel olevad liikmed naturaallogaritmi kaudu: $-kt = \ln e^{-kt}$ ja $C_1 = \ln C$. Nüüd saame võrrandi

$$\ln M = \ln e^{-kt} + \ln C.$$

Kasutades korrutise logaritmi omadust lihtsustub võrrand kujule

$$\ln M = \ln Ce^{-kt},$$

millest

$$M = Ce^{-kt}.$$

Toodud näitest selgub, et diferentsiaalvõrrandi lahendamine toimub määramata integraali arvutamise teel. Et määramata integraal sisaldab suvalist konstanti, siis sisaldab ka diferentsiaalvõrrandi lahend suvalist konstanti. See aga tähendab, et diferentsiaalvõrrandil on lõpmata palju lahendeid.

Vaadeldavas ülesandes oli antud aine alghulk M_0, s. t. et aine hulk ajamomendil $t = 0$ oli M_0. Nende andmete põhjal on võimalik määrata võrrandi lahendis esineva konstandi väärtust:

$M_0 = Ce^{-k \cdot 0}$, millest $M_0 = C$.

Seega eraldub antud tingimust arvestades lõpmatu hulga lahendite hulgast välja üksainus funktsioon:

$$M = M_0 e^{-kt}.$$

Kui lahendit $M = Ce^{-kt}$ nimetatakse antud diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks**, siis lahendit $M = M_0 e^{-kt}$ nimetatakse selle diferentsiaalvõrrandi **erilahendiks.**

Missuguse erilahendi saame, teades, et kui $t = \frac{1}{k}$, siis $M = 1$?

14. 3. DIFERENTSIAALVÕRRANDI ÜLDLAHENDI JA ERILAHENDI GEOMEETRILINE TÕLGENDUS.

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Selle võrrandi võime esitada kujul:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

millest

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integreerides viimase võrduse mõlemaid pooli, saame

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

millest

$$\ln y = \ln x + \ln C.$$

Määramata konstandi võtame jällegi naturaallogaritmi kujul, et üldlahendile lihtsamat kuju saada.

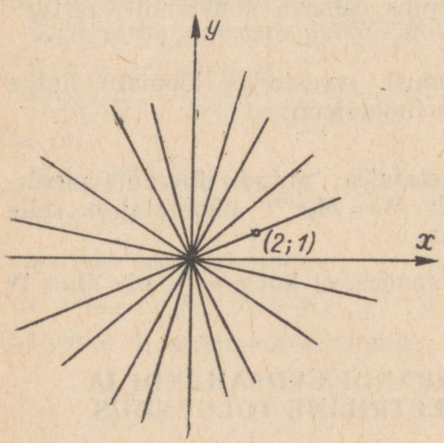
Siit

$$y = Cx,$$

mis on vaadeldava diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

Andes konstandile C erinevaid väärtusi, saame koordinaatide alguspunkti läbivate sirgete võrrandid. Leitud üldlahendit nimetataksegi koordinaatide alguspunkti läbivate sirgete kimbu võrrandiks (joon. 72). Oletame, et meid huvitab antud diferentsiaalvõrrandi see erilahend, millel argumendi väärtusel 2 on väärtus 1. Seda tingimust kirjutatakse üles järgmiselt:

$$y|_{x=2} = 1 \quad \text{või ka} \quad y(2) = 1.$$



Joon. 72.

Geomeetriliseks tõlgenduseks vaadeldavale erilahendile on punkti (2; 1) ja koordinaatide alguspunkti läbiv sirge. Selle sirge võrrandiks on $y = \frac{1}{2}x$. Samale tulemusele jõuame, kui antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendist määrame antud tingimuse põhjal C:

$1 = C \cdot 2$, millest $C = \frac{1}{2}$

ja seega

$$y = \frac{1}{2}x,$$

mis on vaadeldava diferentsiaalvõrrandi erilahendiks.

Eelmises näites on diferentsiaalvõrrandi üldlahendi geomeetriliseks tõlgenduseks eksponentfunktsiooni Ce^{-kt} (k on konstant) graafikute parv.

Ülesandeid.

1. Kontrollida, kas funktsioon $y = cx^3$ on diferentsiaalvõrrandi $3y - xy' = 0$ lahendiks.

2. Kas funktsioon $y = x^2 - 4x$ on diferentsiaalvõrrandi $xdy - ydx = x^2dx$ lahendiks?

3. Kas funktsioon $y = 2e^{-x^2}$ on diferentsiaalvõrrandi $y'x^3 = 2y$ lahendiks?

4. Diferentsiaalvõrrandi üldlahend on $y = \frac{C_1}{x} + C_2x$. Leida erilahend, kui $x = 1$ korral $y(x) = y'(x) = 1$.

5. Diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on $y = C_1x^2 + C_2$. Leida erilahend, kui $x = 1$ korral $y(x) = 0$ ja $y'(x) = 1$.

6. Kas funktsioon $y = 4 - 2\cos x$ on diferentsiaalvõrrandi $y'' \tan x = y' + 1$ lahendiks?

7. Kas funktsioon $y = C_1e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$ on diferentsiaalvõrrandi $y'' - y' = x$ lahendiks?

8. Kas on võimalik määrata arve a ja b nii, et $y = ax + b$ oleks kolmandat järku diferentsiaalvõrrandi $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ lahendiks?

9. Leida arvude a, b ja c niisugused väärtused, et $y = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ oleks diferentsiaalvõrrandi

$$y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$$

lahendiks.

10. Joonestage diferentsiaalvõrrandi nelja erilahendi graafikud, kui diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on $y = Cx - 1$.

14.4. ERALDUVATE MUUTUJATEGA DIFERENTSIAALVÕRRAND.

Eespool vaadeldud näidetes olid diferentsiaalvõrrandid sellised, et nendes osutus võimalikuks ühele poole võrdusmärki kanda kõik argumenti sisaldavad tegurid ja argumendi diferentsiaal ning teisele poole võrdusmärki kõik funktsiooni sisaldavad tegu-

rid ja funktsiooni diferentsiaal. Võrduse mõlema poole integreerimise teel jõudsimegi diferentsiaalvõrrandi üldlahendini. Nimetatud teisendusi võimaldavaid diferentsiaalvõrrandeid nimetatakse **eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandeiks.**

Seega,

eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid on sellised võrrandid, mis on teisendatavad kujule

$$f_1(y)\,dy = f_2(x)\,dx.$$

Vaatleme üksikuid eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandite tüüpe.

1) Kõige lihtsam võrrand on

$$y' = f(x),$$

millest

$$dy = f(x)\,dx.$$

Näide. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y' = \sin x$.

Siit

$$dy = \sin x\,dx$$

ja

$$y = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

ehk

$$y = -\cos x + C.$$

2) Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul

$$y' = g(y).$$

Siit

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

ja

$$\frac{dy}{g(y)} = dx,$$

kus muutujad on eraldatud.

Näide. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y' = y$.

Siit

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Integreerides saame, et

$$\ln y = x + \ln C,$$

millest

$$y = Ce^x.$$

Sellesse tüüpi kuulub ka eespool vaadeldud diferentsiaalvõrrand radioaktiivse lagunemise kohta.

3) Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul

$$v = f(x)g(y).$$

Siit

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

millest

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Viimases võrduses on jällegi muutujad eraldatud.

Näide. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y' = y(x-1)$.

Siit

$$\frac{dy}{y} = (x-1)\,dx.$$

Integreerides saame

$$\ln y = \frac{x^2}{2} - x + \ln C,$$

millest

$$y = C\,e^{\frac{x^2}{2}-x}.$$

Sellesse tüüpi kuulub ka eespool vaadeldud võrrand $y' = \frac{y}{x}$.

4) Kõige sagedamini esineb eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand kujul

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(x)\,dy = 0.$$

Jagades seda võrrandit korrutisega $P(x)N(y)$, saame

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0,$$

millest

$$\frac{N(x)}{P(x)}\,dx = -\frac{Q(y)}{N(y)}\,dy,$$

kus muutujad on eraldatud.

Näide. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0.$$

Siit

$$\frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{y}{y^2+1}\,dy.$$

Integreerides saame

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = -\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Määramata konstandi esitamine kujul $\frac{1}{2}\ln C$ võimaldab üldlahendit lihtsustada kujule

$$(x^2+1)(y^2+1) = C.$$

Sageli jäetaksegi diferentsiaalvõrrandi lahend niisugusele kujule, kus y pole avaldatud. Sel korral ütleme, et diferentsiaalvõrrandi lahend on esitatud **ilmutamata kujul**. Kui tahame otsitavat funktsiooni ilmutatud kujul, tuleb saadud võrrandist avaldada y. Käesoleval juhul saame

$$y = \pm\sqrt{\frac{C}{x^2+1} - 1}.$$

Ülesandeid.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid:

1. $y' = x^2$
2. $y' = y^2$
3. $y' = \frac{x}{y}$
4. $xy' + y = 0$
5. $xyy' = 1 - x^2$
6. $yy' = \frac{1-2x}{y}$
7. $x + xy + y'(y + xy) = 0$
8. $2st^2\,ds = (1+t^2)\,dt$
9. $\sin x \sin y\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$
10. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}y' = 0$
11. $(1+y^2)dx = xy\,dy$, kui $y|_{x=2} = 1$
12. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, kui $y|_{x=e} = 1$
13. Keha, mille temperatuur on 100°, pandi jahtuma tuppa, kus temperatuur on 20°. Mitme minutiga jahtub see keha 25°-ni, kui 60°-ni jahtub ta 10 minutiga? (Newtoni seaduse põhjal on jahtumise kiirus võrdeline temperatuuride vahega.)

14. 5. HOMOGEENNE DIFERENTSIAALVÕRRAND.

Diferentsiaalvõrrandit

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

nimetatakse **homogeenseks**, s. t.

kui otsitava funktsiooni tuletis on avaldatav otsitava funktsiooni ja argumendi jagatise funktsioonina, siis nimetatakse seda diferentsiaalvõrrandit homogeenseks.

Homogeenseid diferentsiaalvõrrandeid saab asendusega $\frac{y}{x} = u$ teisendada eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks.

Tõepoolest, sel korral $y = ux$ ja $y' = u + xu'$. Teinud võrrandis $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ vastavad asendused, saame

$$u + xu' = F(u).$$

Siit

$$xu' = F(u) - u$$

ja

$$\frac{du}{F(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

kus muutujad ongi eraldatud. Selle võrrandi lahendina leitakse u, mis siis asendatakse $\frac{y}{x}$ ga.

N ä i d e. Lahendada võrrand

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Jagades võrrandis esineva murru lugeja ja nimetaja x^2-ga, saame

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

Nagu näeme, on meil tegemist homogeense diferentsiaalvõrrandiga. Tehes eespool näidatud asendused, saame

$$u + xu' = \frac{u - u^2}{1 - 2u}.$$

Siit

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u - u^2}{1 - 2u} - u$$

ehk

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1 - 2u}.$$

Eraldades muutujad jõuame võrrandini

$$\frac{1-2u}{u^2}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Integreerides selle võrduse mõlemad pooled, saame

$$-\frac{1}{u} - 2\ln u = \ln x - \ln C$$

ehk

$$\frac{1}{u} + 2\ln u = \ln C - \ln x.$$

Et $\frac{1}{u} = \ln e^{\frac{1}{u}}$, siis

$$\ln\left(e^{\frac{1}{u}} \cdot u^2\right) = \ln\frac{C}{x},$$

kust

$$e^{\frac{1}{u}} \cdot u^2 = \frac{C}{x}.$$

Asendades nüüd $u = \frac{y}{x}$, saame antud võrrandi üldlahendiks

$$e^{\frac{x}{y}} \cdot y^2 = Cx.$$

Ülesandeid.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid:

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

2. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

3. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

4. $y^2 + x^2y = xyy'$

5. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$

6. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$. Leida lahend, mis rahuldab tingimust $y|_{x=0} = 1$.

7. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2yx-x^2}$. Leida lahend, mis rahuldab tingimust $y(1) = -1$.

14. 6. LINEAARNE DIFERENTSIAALVÕRRAND.

Diferentsiaalvõrrandit, milles otsitav funktsioon ja tema tuletis esinevad ainult esimeses astmes, nimetatakse lineaarseks.

Üldiselt esitatakse lineaarset diferentsiaalvõrrandit kujul

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Ka selle võrrandi lahendamine taandub eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandite lahendamisele. Otsime antud võrrandile lahendit kujul

$y = uv$, kus $u = u(x)$ ja $v = v(x)$.

Ühe neist funktsioonidest valime vabalt. Teine tuleb aga valida nii, et korrutis antud võrrandit rahuldaks.

Leiame nüüd y' ja asendame siis antud võrrandis y ja y' funktsioonide $u(x)$ ja $v(x)$ ning nende tuletiste kaudu. Et

$$y' = u'v + uv',$$

siis tehes vastavad asendused, saame

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

ehk

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x).$$

Et ühe neist funktsioonidest võisime valida vabalt, siis valime v nii, et u kordaja oleks null:

$$v' + p(x)v = 0.$$

See on aga eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

mille lahendina leiame v. Et v oli vabalt valitav funktsioon, siis võetakse selleks saadud diferentsiaalvõrrandi üks erilahendeist.

Antud võrrand lihtsustub niisuguse valiku puhul kujule

$$u'v = q(x),$$

mis on jällegi eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand ja võimaldab avaldada u:

$$du = \frac{q(x)}{v}\,dx.$$

Nagu juba öeldud, saame antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendi leitud funktsioonide u ja v korrutisena, s. t. $y = uv$.

N ä i d e. Lahendada võrrand

$$y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}.$$

Otsime lahendit kujus $y = uv$.

Asendades võrrandis y ja y' muutujate u ja v ning nende tuletiste kaudu, saame

$$u'v + uv' + 2xuv = 2x^2e^{-x^2}$$

ja siit

$$u'v + u[v' + 2xv] = 2x^2e^{-x^2}.$$

v leiame võrrandist:

$$v' + 2xv = 0.$$

Siit

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

ehk

$$\frac{dv}{v} = -2x\,dx,$$

millest

$$\ln v = -x^2 + \ln C$$

ehk

$$v = Ce^{-x^2}.$$

Et huvitume ühest konkreetsest funktsioonist, siis võtame näiteks $C = 1$ ja seega

$$v = e^{-x^2}.$$

u leiame võrrandist

$$u'v = q(x),$$

s. t.

$$ue^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2}$$

ja siit

$$u' = 2x^2$$

ehk

$$du = 2x^2dx,$$

millest

$$u = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi lahendiks

$$y = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)e^{-x^2}.$$

Ülesandeid.

Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid:

1. $y' + \frac{y}{x} = x$
2. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2} = 1$
4. $y' + y = \cos x$
5. $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$. Leida lahend, kui $y(0) = 0$.
6. $xy' + y - e^x = 0$. Leida lahend, kui $y(a) = b$.
7. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$. Leida lahend, kui $y(0) = 1$.

Järgmistes ülesannetes määrake kõigepealt võrrandi tüüp ja siis lahendage:

8. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{2}$
9. $y' = \frac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$
10. $y' = \frac{y+1}{x}$
11. $x^3 y = y(y^2 + x^2)$
12. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$
13. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$
14. $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$. Leida lahend, kui $y|_{x=1} = 1$.
15. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$. Leida lahend, kui $y|_{x=0} = 1$.

14.7. MITTETÄIELIKUD TEIST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID.

Üldine teist järku diferentsiaalvõrrand sisaldab argumenti, otsitavat funktsiooni, tema esimest ja teist tuletist. Üldkujul

$F(x, y, y', y'') = 0$.

Näiteks on teist järku diferentsiaalvõrrandid

$y'' - 5y' + 6y = x^2$ ja $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

Teist järku diferentsiaalvõrrandit nimetatakse **mittetäielikuks**, kui võrrandis puudub kas argument, otsitav funktsioon või tema esimest järku tuletis. Oletades, et võrrandis on otsitava funktsiooni teist järku tuletis avaldatav teiste suuruste kaudu, võtame vaatluse alla järgmised 5 mittetäieliku diferentsiaalvõrrandi tüüpi.

1. $y'' = f_1(x)$, näiteks $y'' = x^2 + \sin x$,
2. $y'' = f_2(y')$, näiteks $y'' = 2y'$,
3. $y'' = f_3(x, y')$, näiteks $y'' = \frac{y'}{4+x}$,
4. $y'' = f_4(y)$, näiteks $y'' = y^{-3}$,
5. $y'' = f_5(y, y')$, näiteks $y'' = yy'$.

Järgnevalt tutvume nende võrrandite lahendamisega.

1. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' = f_1(x)$ LAHENDAMINE.

Teeme asenduse $y' = z$. Siis $y'' = z'$ ja me saame võrrandi

$$z' = f_1(x),$$

mis on esimest järku eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand. Selle lahendiks on

$$z = \int f_1(x)\,dx.$$

Et $z = y'$, siis ka

$$y' = \int f_1(x)\,dx.$$

Olgu funktsiooni $f_1(x)$ algfunktsiooniks $F_1(x)$. Siis

$$y' = F_1(x) + C_1$$

ehk

$$dy = [F_1(x) + C_1]\,dx.$$

Integreerides selle võrduse mõlemad pooled, saame, et

$$y = \int F_1(x)\,dx + C_1x + C_2.$$

Teist järku diferentsiaalvõrrandi lahendamisel tuleb alati kaks korda integreerida. Seetõttu sisaldab teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend kaht suvalist konstanti.

Näide 1. Lahendada võrrand $y'' = x^2 + \sin x$.

Teeme asenduse $y' = z$, siis

$$z' = x^2 + \sin x$$

ja siit

$$z = \frac{x^3}{3} - \cos x + C_1$$

ehk

$$y' = \frac{x^3}{3} - \cos x + C_1,$$

millest integreerimise teel saamegi ülesande lahendi

$$y = \frac{x^4}{12} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

Tulemuse õigsust saame kontrollida, kui leiame saadud funktsiooni teise tuletise.

Näide 2. Vabalt langeva keha kiirendus on g. Leida selle keha liikumise seadus.

Olgu liikumisseaduseks $s = s(t)$, siis

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Asendades $\frac{ds}{dt} = z$, saame võrrandi

$$\frac{dz}{dt} = g,$$

millest

$$z = gt + C_1.$$

Et seega

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1,$$

siis

$$s = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Et teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab kaht suvalist konstanti, siis on erilahendi saamiseks tarvis teada kaht tingimust. Nendeks tingimusteks on tavaliselt funktsiooni ja tema tuletise väärtus argumendi antud väärtuse korral.

Olgu teada, et ajamomendil $t = 0$ on $s = s_0$ ja $\frac{ds}{dt} = v = v_0$, siis

$$s_0 = \frac{g \cdot 0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2, \text{ s. t. } s_0 = C_2$$

ja et $s' = v = gt + C_1$, siis

$$v_0 = g \cdot 0 + C_1, \text{ s. t. } v_0 = C_1.$$

Seega antud tingimuste korral on keha liikumise seaduseks

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Lahendit

$$s = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

nimetatakse diferentsiaalvõrrandi $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ **üldlahendiks** ja lahendit

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$$

tema **erilahendiks.**

Kasutades asendust $y' = z$, saame võrrandi

$$z' = f_2(z),$$

millest

$$\frac{dz}{f_2(z)} = dx$$

ja siit

$$x = \int \frac{dz}{f_2(z)}.$$

Oletame, et funktsiooni $\frac{1}{f_2(z)}$ algfunktsiooniks on $F_2(z)$, siis

$$x = F_2(z) - C_1$$

ehk

$$F_2(z) = x + C_1.$$

Siit saame avaldada z funktsioonina $(x + C_1)$-st

$$z = g_2(x + C_1).$$

Et $z = y'$, siis

$$\frac{dy}{dx} = g_2(x + C_1)$$

ja

$$y = \int g_2(x + C_1)\,dx.$$

Olgu funktsiooni $g_2(x + C_1)$ algfunktsiooniks $G_2(x + C_1)$, siis

$$y = G_2(x + C_1) + C_2.$$

N ä i d e. Lahendada võrrand $y'' = 2\sqrt{y'}$.

Asendades $z = y'$, saame

$$z' = 2\sqrt{z}$$

ja siit

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = dx,$$

millest

$$\sqrt{z} = x + C_1$$

ehk

$$z = (x + C_1)^2.$$

Nüüd lahendame võrrandi

$$y' = (x + C_1)^2,$$

millest

$$y = \frac{(x + C_1)^3}{3} + C_2.$$

3. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' = f_3(x, y')$ LAHENDAMINE.

Asendusega $y' = z$ teiseneb antud võrrand kujule

$$z' = f_3(x, z).$$

Oletame, et see esimest järku diferentsiaalvõrrand on lahenduv ja tema üldlahendiks on

$$z = g_3(x, C_1).$$

Asendades nüüd $z = y'$, saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$dy = g_3(x, C_1)\,dx,$$

millest

$$y = \int g_3(x, C_1)\,dx.$$

Oletades, et funktsiooni $g_3(x, C_1)$ algfunktsiooniks on $G_3(x, C_1)$, saame et

$$y = G_3(x, C_1) + C_2.$$

N ä i d e. Lahendada võrrand $y'' = \frac{y'}{4+x}$.

Asendades $y' = z$, jõuame võrrandini

$$z' = \frac{z}{4+x},$$

millest

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{4+x}$$

ja siit

$$\ln z = \ln(4+x) + \ln C_1$$

ehk

$$z = C_1(4+x).$$

Nüüd lahendame võrrandi

$$y' = C_1(4+x).$$

Et

$$y = \int C_1(4+x)\,dx,$$

siis

$$y = 4C_1x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2$$

ehk

$$y = \frac{C_1x}{2}(8+x) + C_2.$$

4. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' = f_4(y)$ LAHENDAMINE.

Kui kasutame jällegi asendust $y' = z$, siis järeldub sellest, et $y'' = z'$ ehk, teistes sümbolites,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}.$$

Siit saame, kui laiendame võrduse paremat poolt suurusega dy, et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z.$$

Niisiis teiseneb antud võrrand kujule

$$\frac{dz}{dy}z = f_4(y),$$

mis on esimest järku eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand. Lahendades selle võrrandi, saame

$$z\,dz = f_4(y)\,dy$$

ja

$$\frac{z^2}{2} = \int f_4(y)\,dy.$$

Oletades nüüd, et funktsiooni $f_4(y)$ algfunktsiooniks on $F_4(y)$, saame

$$\frac{z^2}{2} = F_4(y) + C$$

ja siit

$$z = \pm\sqrt{2F_4(y) + C_1}, \text{ kus } C_1 = 2C.$$

Edasi peame lahendama võrrandi

$$y' = \pm\sqrt{2F_4(y) + C_1},$$

mis on samuti esimest järku eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand.

Integreerides saame

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2F_4(y) + C_1}} = \pm x$$

ja oletades, et funktsiooni $\frac{1}{\sqrt{2F_4(y) + C_1}}$ algfunktsiooniks on $G_4(y, C_1)$, saame antud võrrandi lahendiks

$$\pm x = G_4(y, C_1) + C_2.$$

N ä i d e 1. Lahendada võrrand $y'' = y^{-3}$.

Asendusega $y' = z$ saame võrrandi teisendada kujule

$$z\frac{dz}{dy} = y^{-3}.$$

Siit

$$z\,dz = y^{-3}dy,$$

$$\frac{z^2}{2} = \frac{y^{-2}}{2} + \frac{C_1}{2},$$

$$z = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}}.$$

Et $z = y'$, siis

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 - y^{-2}}} = \pm\,dx$$

ehk

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\,dx.$$

Lahendame integraali $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}$, asendades $C_1 y^2 - 1 = u$. Siis on $du = 2C_1 y\,dy$ ja järelikult

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \frac{1}{C_1}\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{C_1} + C_2.$$

Seega

$$\frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{C_1} + C_2 = \pm\,x,$$

millest

$$\sqrt{C_1 y^2 - 1} = \pm\,C_1 x - C_1 C_2$$

ja siit

$$C_1 y^2 - 1 = (\pm\,C_1 x - C_1 C_2)^2.$$

N ä i d e 2. Keha liigub sirgjooneliselt kiirendusega, mis on võrdeline läbitud tee pikkusega. Võrdetegur on arvuliselt võrdne keha massiga. Kui pika maa on keha läbinud 10 sekundi jooksul ja kui suur on keha liikumise kiirus 10 sekundi lõpul, kui ajamomendil $t = 0$ on $v_0 = s_0 = 1$?

Newtoni II seaduse põhjal on

$$f = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ülesande tingimuse kohaselt aga

$$f = ms.$$

Seega saame võrrandi

$$s = -\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Asendades $\frac{ds}{dt} = v$, saame võrrandi

$$s = v\frac{dv}{ds},$$

mille lahendiks on

$$\frac{v^2}{2} = \frac{s^2}{2} + \frac{C_1}{2},$$

millest

$$v^2 = s^2 + C_1.$$

Vastavalt algtingimustele on $t = 0$ korral $v_0 = s_0 = 1$ ja seega $1^2 = 1^2 + C_1$, millest $C_1 = 0$.

Lahendatava diferentsiaalvõrrandi erilahendiks on siis

$$v^2 = s^2.$$

Vaatleme ainult juhtu, kus $v > 0$, siis

$$v = s$$

ja et $v = \frac{ds}{dt}$, siis tuleb lahendada diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{ds}{dt} = s.$$

Teeme seda.

$$\ln s = t + C_2,$$
$$s = e^{t+C_2},$$
$$s = e^{C_2}e^t,$$
$$s = C'e^t.$$

Algtingimuste järgi leiame erilahendid

$$1 = C' \cdot e^0,$$
$$C' = 1,$$
$$s = e^t.$$

Nüüd leiame vastused antud ülesandele

$$s|_{t=10} = e^{10} \approx 21930 \text{ (cm)}$$

ja

$$v|_{t=10} = s|_{t=10} \approx 21930 \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right).$$

5. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' = f_5(y, y')$ LAHENDAMINE.

Võrrandi $y'' = f_5(y, y')$ lahendamine toimub analoogiliselt eelmise juhtumiga.

N ä i d e. Lahendada võrrand $y'' = yy'$.

Tähistame $y' = z$, siis $y'' = \frac{dz}{dy} z$ ja me saame võrrandi

$$\frac{dz}{dy} z = yz.$$

Siit

kas $dz = y\,dy$ või $z = 0$,

millest

kas $z = \frac{y^2}{2} + C_1$ või $y' = 0$.

Lahendame võrrandi

$$y' = \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Siit

$$\frac{dy}{\frac{y^2}{2} + C_1} = dx$$

ja et

$$\int \frac{dy}{\frac{y^2}{2} + C_1} = \frac{1}{C_1} \int \frac{dy}{\frac{y^2}{2C_1} + 1} = \frac{\sqrt{2C_1}}{C_1} \arctan \frac{y}{\sqrt{2C_1}} + C_2,$$

siis saame diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$x = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \arctan \frac{y}{\sqrt{2C_1}} + C_2.$$

Võrrandi $y' = 0$ lahendiks on $y = C$.

Ülesandeid.

Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid:

1. $y'' = x + \cos x$
2. $y'' = x^2 + \ln x$
3. $xy'' = 1 + x^2$
4. $xy'' = y'$
5. $y'' = y' + x$
6. $(1 + x)y'' + y' = 0$
7. $y''y' = 1$
8. $y'' + y = 0$
9. $4\sqrt{yy''} = 1$
10. $y'' = 2yy'$
    $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$

Leida järgmiste diferentsiaalvõrrandite erilahendid:

11. $xy'' = 1$, kui $y(1) = 1$ ja $y'(1) = 1$.

12. $y''(x-1) = y'$, kui $y(3) = 3$ ja $y'(3) = 2$.

13. $y^3y'' = -1$, kui $y(1) = 1$ ja $y'(1) = 0$.

14. $y'' = y' + 1$, kui $y(0) = -1$ ja $y'(0) = 2$.

14. 8. LINEAARNE KONSTANTSETE KORDAJATEGA TEIST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRAND.

Lineaarseks konstantsete kordajatega teist järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$y'' + p_1y' + p_2y = f(x),$$

kus p_1 ja p_2 on konstandid.

1. LINEAARSELT SÕLTUMATUD LAHENDID.

Olgu võrrandi

$$y'' + p_1y' + p_2y = f(x)$$

erilahendeiks

$$y = y_1(x) \text{ ja } y = y_2(x),$$

s. t. et

$$y''_1(x) + p_1y'_1(x) + p_2y_1(x) = f(x)$$

ja

$$y''_2(x) + p_1y'_2(x) + p_2y_2(x) = f(x).$$

Kui erilahendite vahel kehtib seos

$$a_1y_1(x) + a_2y_2(x) = 0$$

ainult siis, kui $a_1 = a_2 = 0$, siis öeldakse, et need erilahendid on **lineaarselt sõltumatud**. Sel juhul ei osutu võimalikuks üht erilahendit teise kaudu avaldada. Kui see võrdus kehtiks ka juhul, kui vähemalt üks kordajaist pole null, näiteks kui $a_2 \neq 0$, siis

$$y_2(x) = -\frac{a_1}{a_2}y_1(x),$$

s. t. et siis erilahendid on üksteisest **lineaarselt sõltuvad.**

N ä i d e. Olgu diferentsiaalvõrrandi $y'' + p_1y' + p_2y = f(x)$ erilahendiks

$$y_1 = e^{r_1x} \text{ ja } y_2 = e^{r_2x}, \text{ kus } r_2 \neq r_1.$$

Need erilahendid on lineaarselt sõltumatud. Tõepoolest, kui x iga väärtuse korral kehtiks võrdus

$$a_1e^{r_1x} + a_2e^{r_2x} = 0$$

ja $a_2 \neq 0$, siis peaks

$$-\frac{a_1}{a_2} = e^{(r_2-r_1)x},$$

mis ei saa kehtida, sest võrduse ühel poolel on konstant, teisel poolel aga muutuv suurus.

2. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ ERILAHENDID.

Asendusega $y = e^{rx}$ on diferentsiaalvõrrand

$$y'' + p_1y' + p_2y = 0 \qquad (1)$$

teisendatav kujule

$$e^{rx}(r^2 + p_1r + p_2) = 0.$$

Kontrollige seda, leides y' ja y'' ning asetades need antud võrrandisse!

Et $e^{rx} \neq 0$, siis peab

$$r^2 + p_1r + p_2 = 0.$$

Seda võrrandit nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (1) **karakteristlikuks võrrandiks.**

Karakteristlikul võrrandil kui ruutvõrrandil on kas kaks reaalset ja erinevat või kaks reaalset ja võrdset või kaks imaginaarset lahendit r_1 ja r_2.

Seega on funktsioonid $y = e^{r_1x}$ ja $y = e^{r_2x}$ (kus r_1 ja r_2 on ruutvõrrandi $r^2 + p_1r + p_2 = 0$ lahendid) diferentsiaalvõrrandi $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ erilahendeiks.

3. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ ÜLDLAHEND.

Veendume nüüd, et kui $y = e^{r_1x}$ ja $y = e^{r_2x}$ on antud diferentsiaalvõrrandi erilahendid ($r_1 \neq r_2$), siis rahuldab seda võrrandit ka nendest erilahenditest moodustatud summa

$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$, kus C_1 ja C_2 on mistahes konstandid.

Leiame esmalt y' ja y'' ning asetame siis saadud avaldised võrrandisse (1). Et

$$y' = C_1r_1e^{r_1x} + C_2r_2e^{r_2x}$$

ja

$$y'' = C_1r_1^2e^{r_1x} + C_2r_2^2e^{r_2x},$$

siis

$$y'' + p_1y' + p_2y = C_1r_1^2e^{r_1x} + C_2r_2^2e^{r_2x} +$$
$$+ p_1C_1r_1e^{r_1x} + p_1C_2r_2e^{r_2x} + p_2C_1e^{r_1x} + p_1C_2e^{r_2x} =$$
$$= C_1e^{r_1x}(r_1^2 + p_1r_1 + p_2) + C_2e^{r_2x}(r_2^2 + p_1r_2 + p_2) = 0,$$

sest r_1 ja r_2 on karakteristliku võrrandi lahendid ja seega

$r_1^2 + p_1 r_1 + p_2 = 0$ ja $r_2^2 + p_1 r_2 + p_2 = 0$.

Summa $C_1 y_1 + C_2 y_2$ ongi antud võrrandi $y'' + p_1 y' + p_2 = 0$ üldlahendiks, sest ta rahuldab võrrandit ja sisaldab kaht suvalist konstanti.

Üldlahendi tingimuseks on aga, et erilahendid y_1 ja y_2 peavad olema lineaarselt sõltumatud. Kui oletada, et nad on lineaarselt sõltuvad, s. t. $y_2 = a y_1$, siis

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 y_1 + C_2 a y_1 = (C_1 + C_2 a) y_1 = C y_1$$

ja seega oleks nüüd lahendis ainult üks suvaline konstant.

Niisiis,

diferentsiaalvõrrandi $y'' + p_1 y' + p_2 = 0$ üldlahendiks on $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, kus $y_1 = e^{r_1 x}$ ja $y_2 = e^{r_2 x}$ ($r_1 \neq r_2$) on selle võrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid.

Näide. Leida võrrandi $y'' - 2y' - 8y = 0$ üldlahend.

Lahendame algul karakteristliku võrrandi

$r^2 - 2r - 8 = 0$.

Lahendeiks on $r_1 = -2$ ja $r_2 = 4$.

Seega on antud võrrandi erilahendeiks e^{-2x} ja e^{4x} ning üldlahendiks

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$.

4. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ KARAKTERISTLIKU VÕRRANDI UURIMINE.

Tähistame karakteristliku võrrandi $r^2 + p_1 r + p_2 = 0$ diskriminandi $\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 - p_2$ tähega D, s. t.

$$D = \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 - p_2.$$

1) Olgu $D > 0$, siis on karakteristlikul võrrandil 2 erinevat reaalset lahendit ja diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub kujus $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

2) Olgu $D = 0$, siis on karakteristlikul võrrandil 2 võrdset reaalset lahendit $r_{1,2} = -\frac{p_1}{2}$. Nüüd on aga erilahendid võrdsed $e^{r_1 x} = e^{r_2 x}$ ja seega lineaarselt sõltuvad. Võttes nüüd üheks erilahendiks $e^{-\frac{p_1}{2} x}$, peame leidma veel teise, temast lineaarselt sõltumatu erilahendi. Selleks on $xe^{-\frac{p_1}{2} x}$.

Tõepoolest, leiame funktsiooni $y = xe^{-\frac{p_1}{2}x}$ tuletised:

$$y' = e^{-\frac{p_1}{2}x} - \frac{p_1}{2} xe^{-\frac{p_1}{2}x},$$

$$y'' = -\frac{p_1}{2} e^{-\frac{p_1}{2}x} - \frac{p_1}{2} e^{-\frac{p_1}{2}x} + \frac{p_1^2}{4} xe^{-\frac{p_1}{2}x} =$$

$$= -p_1 e^{-\frac{p_1}{2}x} + \frac{p_1^2}{4} xe^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

Asetame need tuletised võrrandi (1) vasakusse poolde, saame

$$-p_1 e^{-\frac{p_1}{2}x} + \frac{p_1^2}{4} xe^{-\frac{p_1}{2}x} + p_1 e^{-\frac{p_1}{2}x} - \frac{p_1^2}{2} xe^{-\frac{p_1}{2}x} + p_2 xe^{-\frac{p_1}{2}x} =$$

$$= -\frac{p_1^2}{4} xe^{-\frac{p_1}{2}x} + p_2 xe^{-\frac{p_1}{2}x} =$$

$$= -xe^{-\frac{p_1}{2}x}\left(\frac{p_1^2}{4} - p_2\right) = -xe^{-\frac{p_1}{2}x} \cdot D = 0,$$

sest $D = 0$.

Seega rahuldab funktsioon $y = xe^{-\frac{p_1}{2}x}$ antud võrrandit, s. t. on antud võrrandi erilahendiks.

Erilahendid $e^{-\frac{p_1}{2}x}$ ja $xe^{-\frac{p_1}{2}x}$ on lineaarselt sõltumatud, sest avaldis

$$C_1 e^{-\frac{p_1}{2}x} + C_2 xe^{-\frac{p_1}{2}x} = e^{-\frac{p_1}{2}x}(C_1 + C_2 x)$$

saab suuruse x iga väärtuse puhul võrduda nulliga ainult siis, kui $C_1 = C_2 = 0$.

Seega, juhul kui karakteristlikul võrrandil on kaks võrdset reaalset lahendit, avaldub diferentsiaalvõrrandi $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ üldlahend kujul

$$y = C_1 e^{-\frac{p_1}{2}x} + C_2 xe^{-\frac{p_1}{2}x}$$

ehk

$$y = e^{-\frac{p_1}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$

Näide. Leida võrrandi $y'' - 2y' + y = 0$ üldlahend.

Karakteristliku võrrandi $r^2 - 2r + 1 = 0$ lahendeiks on $r_1 = r_2 = 1$ ja seega on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$y = e^{x}(C_1 + C_2 x).$$

3) Olgu $D < 0$, siis on karakteristlikul võrrandil kaks imaginaarset lahendit. Tähistame need

$r_1 = m + ni$ ja $r_2 = m - ni$.

Saab näidata, et sel juhul

$y = C'_1 e^{(m+ni)x} + C'_2 e^{(m-ni)x}$,

kus suvalised konstandid C'_1 ja C'_2 on kaaskompleksarvud.

Kasutame selle üldlahendi avaldise teisendamiseks Euleri poolt tuletatud valemit

$e^{rxi} = \cos rx + i \sin rx$.

Siis

$y = C'_1 e^{mx}(\cos nx + i \sin nx) + C'_2 e^{mx}[\cos(-nx) +$
$+ i \sin(-nx)] = (C'_1 + C'_2) e^{mx} \cos nx +$
$+ i(C'_1 - C'_2) e^{mx} \sin nx$.

Tähistades nüüd

$C'_1 + C'_2 = C_1$ ja $i(C'_1 + C'_2) = C_2$,

saame diferentsiaalvõrrandi $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ üldlahendiks, kui tema karakteristliku võrrandi diskriminant on negatiivne,

$y = e^{mx}(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$.

Saadud lahendis on suvalised kordajad C_1 ja C_2 reaalarvud. Näita seda, teades, et C'_1 ja C'_2 on kaaskompleksarvud!

Näide 1. Lahendada võrrand $y'' - 6y' + 25y = 0$.
Karakteristliku võrrandi $r^2 - 6r + 25 = 0$ lahendeiks on

$r_1 = 3 + 4i$ ja $r_2 = 3 - 4i$.

Seega on üldlahendiks

$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Näide 2. Leida massi m liikumisseadus $y = y(t)$, kui massile on rakendatud kaugusega võrdeliselt kasvav tõmbejõud.

Olgu tõmbejõu suurus $-cy$, kus $y = y(t)$ esitab kaugust tasakaaluasendist ja c on positiivne võrdetegur. (Et tegemist on tõmbejõuga, siis on tema märk alati vastupidine kauguse y märgile.) Newtoni II seaduse põhjal on jõud võrdne massi ja kiirenduse korrutisega ($f = ma$). Kiirendus on aga liikumisseaduse teine tuletis, seega

$my'' = -cy$

ehk

$my'' + cy = 0$.

See on teist järku diferentsiaalvõrrand, mille lahendiks ongi otsitav liikumisseadus.

Selle diferentsiaalvõrrandi karakteristlikuks võrrandiks on

$$mr^2 + c = 0,$$

millest

$$r_1 = +\frac{c}{m}\,i \quad \text{ja} \quad r = -\frac{c}{m}\,i.$$

Seega on diferentsiaalvõrrandi $my'' + cy = 0$ üldlahendiks

$$y = C_1 \cos\frac{c}{m}\,t + C_2 \sin\frac{c}{m}\,t.$$

Olgu liikumise algul, s. t. kui $t = 0$, $y = y_0$ ja $y' = v_0$. Siis

$$y_0 = C_1$$

ja et

$$y' = -C_1\frac{c}{m}\sin\frac{c}{m}\,t + C_2\frac{c}{m}\cos\frac{c}{m}\,t,$$

siis

$$v_0\frac{c}{m} = C_2\frac{c}{m} \quad \text{ja siit} \quad v_0 = C_2.$$

Antud tingimuste korral on liikumisseaduseks

$$y = y_0 \cos\frac{c}{m}\,t + v_0 \sin\frac{c}{m}\,t.$$

Toome nüüd sisse kaks uut suurust a ja ε, mis on suurustega y_0 ja v_0 seotud järgmiselt:

$$a \sin\varepsilon = y_0,$$

$$a \cos\varepsilon = v_0.$$

Siit

$$a^2(\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon) = y_0^2 + v_0^2$$

ja

$$a = \pm\sqrt{y_0^2 + v_0^2}$$

ning

$$\tan\varepsilon = \frac{y_0}{v_0}.$$

Võttes nüüd positiivse väärtuse ja väikseima nurga, mille tangens on $\frac{y_0}{v_0}$, saame liikumisseaduse esitada kujul

$$y = a \sin\varepsilon \cos\frac{c}{m}\,t + a \cos\varepsilon \sin\frac{c}{m}\,t$$

ehk

$$y = a \sin\left(\frac{c}{m}\,t + \varepsilon\right).$$

See on harmoonilise võnkumise seadus.

Ülesandeid.

Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid:

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' = 0$
3. $3y'' - 2y' - 8y = 0$
4. $y'' + 6y' + 13y = 0$
5. $y'' - 9y = 0$
6. $y'' + y = 0$
7. $4y'' - 8y' + 5y = 0$

Leida järgmiste diferentsiaalvõrrandite erilahendid:

8. $y'' - 4y' + 3y = 0$, kui $x = 0$, siis $y = 6$ ja $y' = 10$.
9. $y'' + 4y' + 29y = 0$, kui $x = 0$, siis $y = 0$ ja $y' = -15$.
10. $4y'' + 4y' + y = 0$, kui $x = 0$, siis $y = 2$ ja $y' = 0$.

5. DIFERENTSIAALVÕRRANDI $y'' + p_1y' + p_2y = f(x)$ ÜLDLAHEND.

Olgu diferentsiaalvõrrandi $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ üldlahendiks

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$$

ja diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + p_1y' + p_2y = f(x) \qquad (2)$$

üheks erilahendiks $F(x)$, s. t. et

$$\bar{y}'' + p_1\bar{y}' + p_2\bar{y} = 0$$

ja

$$F''(x) + p_1F'(x) + p_2F(x) = f(x).$$

Liidame nende võrduste vastavad pooled:

$$[\bar{y} + F(x)]'' + p_1[\bar{y} + F(x)]' + p_2[\bar{y} + F(x)] = f(x).$$

Siit järeldub, et diferentsiaalvõrrandi (2) lahendiks on ka

$$y = \bar{y} + F(x)$$

ehk

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + F(x).$$

Et see lahend sisaldab kaht suvalist konstanti, siis on ta ka üldlahendiks. See üldlahend koosneb diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendist ja diferentsiaalvõrrandi (2) ühest erilahendist. Et võrrandi (1) üldlahendit me oskame juba leida, siis tuleb veel selgitada, kuidas leida võrrandi (2) erilahendit. Vaatleme siin üksikuid erijuhte.

1) $f(x) = ae^{mx} \quad (a \neq 0)$.

Sel juhul otsime erilahendit kujul

$$F(x) = Ae^{mx}.$$

Et $F'(x) = mAe^{mx}$ ja $F''(x) = m^2Ae^{mx}$, siis asetades need avaldised võrrandisse (2) saame

$$m^2Ae^{mx} + p_1mAe^{mx} + p_2Ae^{mx} = ae^{mx}$$

ja siit

$$A(m^2 + p_1m + p_2) = a.$$

Kui nüüd $m^2 + p_1m + p_2 \neq 0$, s. t. m ei ole karakteristliku võrrandi lahendiks, siis

$$A = \frac{a}{m^2 + p_1m + p_2}$$

ja

$$F(x) = \frac{ae^{mx}}{m^2 + p_1m + p_2}.$$

Kui aga $m^2 + p_1m + p_2 = 0$, s. t. m on karakteristliku võrrandi lahend, siis peaks ka $a = 0$, mis on vastuolus eeldusega. Seega juhul, kui m on karakteristliku võrrandi lahend, ei saa erilahendit otsida kujul Ae^{mx}, vaid kujul Axe^{mx} (kui m on karakteristliku võrrandi ühekordne lahend) ja kujul Ax^2e^{mx} (kui m on karakteristliku võrrandi kahekordne lahend).

Näide. Lahendada võrrand $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.

Leiame esmalt võrrandile $y'' - 5y' + 6y = 0$ üldlahendi.

Karakteristliku võrrandi $r^2 - 5r + 6 = 0$ lahendeiks on $r_1 = 2$ ja $r_2 = 3$. Seega $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Vaadeldaval juhul on $m = 2$ karakteristliku võrrandi ühekordseks lahendiks ja seetõttu otsime antud võrrandile erilahendit kujul Axe^{2x}.

Et $F(x) = Axe^{2x}$, siis $F'(x) = A(e^{2x} + 2xe^{2x})$ ja $F''(x) = A(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}) = 4A(e^{2x} + xe^{2x})$.

Asetades need tulemused antud võrrandisse, saame

$$4Ae^{2x}(1 + x) - 5Ae^{2x}(1 + 2x) + 6Axe^{2x} = e^{2x},$$

millest

$$4A(1 + x) - 5A(1 + 2x) + 6Ax = 1$$

ja

$$4A - 5A = 1,$$

$$A = -1.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - e^{2x}.$$

2) $f(x) = M \cos ax + N \sin ax \quad (a \neq 0)$.

Sel juhul otsime erilahendit kujul

$$F(x) = A \cos ax + B \sin ax.$$

Et $F'(x) = -Aa \sin ax + Ba \cos ax$ ja $F''(x) = -Aa^2 \cos ax - Ba^2 \sin ax$, siis asetades need tulemused võrrandisse (2) saame

$-Aa^2 \cos ax - Ba^2 \sin ax + p_1(-Aa \sin ax + Ba \cos ax) + p_2(A \cos ax + B \sin ax) = M \cos ax + N \sin ax$

ehk

$(-Aa^2 + p_1Ba + p_2A) \cos ax + (-Ba^2 - p_1Aa + p_2B) \sin ax = M \cos ax + N \sin ax.$

Et see võrdus on samasus, siis peavad $\sin ax$ ja $\cos ax$ kordajad olema võrdsed, s. t.

$$\begin{cases} -Aa^2 + p_1Ba + p_2A = M \\ -Ba^2 - p_1Aa + p_2B = N \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} (p_2 - a^2)A + p_1aB = M \\ -p_1aA + (p_2 - a^2)B = N. \end{cases}$$

Sellest süsteemist avaldatakse A ja B. Ainus juhtum, mil see süsteem pole lahenduv, on kui $p_2 = a^2$ ja $p_1 = 0$. Sel juhul leitakse erilahend kujul

$F(x) = x(A \cos ax + B \sin ax).$

Näide. Lahendada võrrand $y'' - 5y' + 6y = \cos x$.
Teame, et võrrandi $y'' - 5y' + 6y = 0$ üldlahendiks on
$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Otsime nüüd erilahendit kujul

$F(x) = A \cos ax + B \sin ax.$

A ja B määramiseks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (6 - 1^2)A + (-5) \cdot 1 \cdot B = 1 \\ -(-5) \cdot 1 \cdot A + (6 - 1^2)B = 0 \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} 5A - 5B = 1 \\ 5A + 5B = 0. \end{cases}$$

Siit $A = -B$ ja seega $10A = 1$ ehk $A = \frac{1}{10}$ ja $B = -\frac{1}{10}$.
Antud võrrandi üldlahendiks on seega

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x.$

3) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$

Antud juhtumil otsime erilahendit kujul

$F(x) = Ax^2 + Bx + C.$

Et $F'(x) = 2Ax + B$ ja $F''(x) = 2A$, siis

$2A + p_1(2Ax + B) + p_2(Ax^2 + C) = ax^2 + bx + c$

ehk

$p_2Ax^2 + (2p_1A + p_2B)x + 2A + p_1B + p_2C = ax^2 + bx + c.$

Seega tuleb A, B ja C määramiseks lahendada süsteem:

$p_2A = a$
$2p_1A + p_2B = b$
$2A + p_1B + p_2C = c.$

See süsteem on lahenduv, kui $p_2 \neq 0$. Kui $p_2 = 0$, siis leitakse erilahend kujul

$F(x) = x(Ax^2 + Bx + C).$

Näide. Lahendada võrrand

$y'' - 4y' + 13y = 2x + 1.$

Esmalt leiame võrrandi $y'' - 4y' + 13y = 0$ üldlahendi.
Et karakteristliku võrrandi $r^2 - 4r + 13 = 0$ lahendeiks on

$r_1 = 2 + 3i$ ja $r_2 = 2 - 3i,$

siis saame võrrandi $y'' - 4y' + 13y = 0$ üldlahendiks

$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

Antud võrrandi erilahendit otsime kujul

$F(x) = Ax + B.$

Et $F'(x) = A$ ja $F''(x) = 0,$ siis

$-4A + B(Ax + B) = 2x + 1.$

Siit

$$\begin{cases} 13A = 2 \\ -4A + 13B = 1, \end{cases}$$

millest

$A = \frac{2}{13}$ ja $B = \frac{21}{169}.$

Järelikult $F(x) = \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}$ ja antud võrrandi üldlahend

$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}.$

Ülesandeid.

Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid:

1. $y'' - y = e^{2x}$
2. $y'' + 4y = \sin x$
3. $y'' - 5y' + 6y = x^2$
4. $y'' + 4y = 2x + 3$
5. $y'' + 2y' + 3y = x^2 + 4x - 1$
6. $y'' + 5y' - 3y = 7e^{4x}$
7. $y'' + 6y' - 16y = 3 \sin x$

8. $2y'' + y' - y = 2e^x$
9. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$
10. $y'' + 4y' - 5y = 1$
11. $2y'' + 5y' = 29 \cos x$
12. $y'' + y = \cos x$

Leida järgmiste diferentsiaalvõrrandite erilahendid:

13. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^x$. Kui $x = 0$, siis $y = 3$ ja $y' = 5{,}5$.
14. $y'' - y' = 2(1 - x)$. Kui $x = 0$, siis $y = 1$ ja $y' = 1$.

15. READ.

15. 1. ARVUJADA JA ARVURIDA.

Kui funktsiooni määramispiirkonnaks on naturaalarvude hulk $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, siis selle funktsiooni väärtused esituvad arvujadana $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, kus igale naturaalarvule vastab funktsiooni kindel väärtus.

Olgu antud üks lõpmatu arvujada

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Näiteks

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$$

või

$$-6, -\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{12}{17}, \ldots, \frac{-12}{n^2+1}, \ldots$$

Üksikuid arve arvujadas nimetatakse **jada elementideks.** Nii on a_1 jada esimene element, a_2 teine element jne.

Missugused arvud on 5., 6. ja 7. elemendiks toodud näidisjadades?

Moodustame avaldise

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \ldots$$

ehk summa märgi abil kirjutades

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Seda avaldist nimetame antud arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ **reaks.** Arve $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nimetame selle **rea liikmeteks.**

Ridade uurimisel on suur tähtsus rea liikmetest moodustatud summadel:

$$a_1 + a_2,$$
$$a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Neid summasid nimetatakse antud **rea osasummadeks** ja tähistatakse vastavalt

$$s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots\ .$$

Kui nüüd tähistame veel $a_1 = s_1$, siis saame rea

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nn. **osasummade jada**

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots\ .$$

Kui osutub, et sel osasummade jadal on olemas piirväärtus, s. t. kui

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

siis öeldakse, et antud rida on **koonduv.** Arvu s nimetatakse selle **rea summaks.** Seega

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Näitena vaatleme rida:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\ .$$

Moodustame selle rea osasummad

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2},$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8},$$

. . . . . .

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

. . . . . .

mis moodustavad osasummade jada

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},\ 1\frac{7}{8},\ \ldots,\ 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),\ \ldots\ .$$

Sellel jadal on olemas piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty}\left[2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] = 2.$$

Seega on antud rida koonduv. Arv 2 on selle rea summaks:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Kui rea osasummade jada piirväärtuseks on lõpmatus või kui jada liikmete väärtused kõiguvad (ei lähene ühele kindlale väär-

tusele), siis öeldakse, et osasummade jadal pole piirväärtust ja rida on **hajuv**. Hajuval real puudub summa.

Näiteks on read

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 + \ldots$$

ja

$$a - a + a - a + \ldots$$

hajuvad.

15. 2. KOONDUVATE RIDADE OMADUSI.

1) Olgu antud koonduv rida

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

mille summa on s, s. t. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Moodustame uue rea, mis on saadud antud reast, kui selle liikmeid korrutada ühe ja sama konstandiga c:

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n + \ldots .$$

Tähistame saadud rea n liikme osasumma sümboliga s'_n. Siis

$$s'_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n =$$
$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) =$$
$$= cs_n.$$

Rea koonduvuse küsimuse otsustamiseks leiame

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} (cs_n) = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs.$$

Näeme, et uue rea osasummade jada on koonduv ja uue rea summa on antud rea summa c kordne.

Seega,

kui koonduva rea kõiki liikmeid korrutada ühe ja sama konstandiga, siis korrutub ka rea summa sama konstandiga.

2) Olgu antud kaks koonduvat rida

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

ja

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots .$$

Tähistades esimese rea osasummad sümbolitega s'_1, s'_2 ... ja teise rea osasummad vastavalt sümbolitega s''_1, s''_2, ... ning teades, et antud read koonduvad, kusjuures esimese rea summa on s' ja teise rea summa on s'', võime kirjutada, et

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s' \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} s''_n = s''.$$

Moodustame uue rea, mille liikmeteks on antud ridade vastavate liikmete summad

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots .$$

Avaldame saadud uue rea n liikme summa, s. o.

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) = \\ = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \\ + \ldots + b_n) = s'_n + s''_n.$$

Rea koonduvuse üle otsustamiseks leiame osasummade jada piirväärtuse:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s'_n + s''_n) = \lim_{n\to\infty} s'_n + \lim_{n\to\infty} s''_n = s' + s''.$$

Näeme, et uue rea osasummade jada on koonduv ja tema summa on võrdne antud ridade summade summaga.

Seega,

koonduvate ridade kõigi vastavate liikmete liitmisel liituvad ka nende ridade summad.

3) Olgu rida

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

koonduv ning tema summa s, s. t. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

a) Lisades sellele reale lõpliku summa

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k,$$

saame rea

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Selle rea osasummad

$$s_1', s'_2, s'_3, \ldots, s'_n, \ldots$$

hakkavad $(k+1)$-st osasummast alates erinema antud rea osasummadest

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

lõpliku summa $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ võrra. Selle tagajärjel suureneb siis ka jada piirväärtus sama arvu võrra.

Kui liidetavad arvud $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ei asetse rea alguses, vaid hajutatult antud rea liikmete vahel, siis leidub ikka osasumma, millest alates saadud uue rea osasummad erinevad antud rea osasummadest $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ võrra.

Niisiis,

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} (s_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_k) = s + b_1 + b_2 + \ldots + b_k.$$

b) Kui antud reast jätta ära lõplik arv liikmeid, näiteks

$$a_2 + a_5 + a_8 + a_{16},$$

siis seitsmeteistkümnendast osasummast alates vähenevad kõik

osasummad selle summa võrra. Sel korral väheneb aga ka jada piirväärtus sama summa võrra. Kui tähistada antud reast lõpliku arvu liikmete ärajätmise teel saadud rea osasummad s''_n ja sama rea summa s'', siis

$$s'' = \lim_{n\to\infty} s''_n = s - (a_2 + a_5 + a_8 + a_{16}).$$

Seega,

kui koonduvat rida suurendada (vähendada) mingi lõpliku summa võrra, siis selle rea summa suureneb (väheneb) sama summa võrra.

Ülesandeid.

1. Esitada järgmiste ridade viis esimest liiget.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2)^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

2. Kirjutada antud rea üldliige võimalikult lihtsal kujul.

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots$

b) $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \dots$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots$

d) $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \dots$

3. Leida järgmistes ridades n esimese liikme summa, selgitada rea koonduvus ja leida rea summa.

a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$

b) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots,$

c) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots,$

d) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots\ .$

15. 3. VÕRDLUSTUNNUS.

Ridade uurimisel on tähtsaimaks küsimuseks ridade koonduvuse küsimus, s. t. kas antud real on lõplik summa või mitte. Selle küsimuse lahendamiseks on tuletatud mitmesuguseid tunnuseid. Ka meie tutvume neist mõnega.

1) Vaatleme positiivsete liikmetega rida

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (a_n>0).$

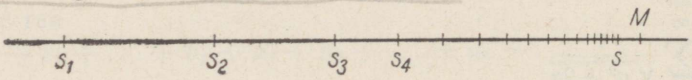
Leides selle rea osasummad, saame jada

$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots\ .$

Et vaadeldav rida on positiivsete liikmetega, siis

$s_1<s_2<s_3<\ldots<s_n<\ldots\ .$

Kui positiivsete ja monotoonselt kasvavate elementidega arvujadal on piirväärtus olemas, siis peab leiduma niisugune positiivne arv, millest kõik jada elemendid jäävad ikka väiksemaks. Joonisel 73 tähendab see, et jada elementidele vastavad punktid järjest lähenevad mingile punktile M, kuid kunagi ei jõua selle punktini ega lähe ka sellest kaugemale.



Joon. 73.

Seega, kui $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, siis $s\leqslant M$.

Samuti vastupidi, kui positiivsete ja monotoonselt kasvavate elementidega arvujada elemendid on kõik väiksemad mingist kindlast etteantud arvust, siis on sellel jadal olemas piirväärtus.

2) Vaatleme nüüd kahte positiivsete liikmetega rida

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$

ja

$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots\ .$

1°. *Kui esimese rea liikmed on väiksemad või võrdsed teise rea vastavaist liikmeist, s. t. kui*

$a_k\leqslant b_k$, *kus* $k=1, 2, \ldots, n, \ldots,$

siis teise rea koonduvusest järeldub esimese rea koonduvus.

Olgu esimese rea osasummad

$s'_1, s'_2, \ldots, s'_n, \ldots$

ja teise rea osasummad

$s''_1, s''_2, \ldots, s''_n, \ldots$.

Et teine rida on koonduv, siis

$$\lim_{n\to\infty} s''_n = s''$$

ja et ridade vastavate liikmete vahel kehtib seos $a_k \leqslant b_k$, siis ka $s'_k \leqslant s''_k$, kus $k = 1, 2, \ldots$.

Teise rea osasummade jadal on olemas piirväärtus ja seega on see jada ülalt tõkestatud, s. t. leidub positiivne arv M, nii et

$$s''_1 < s''_2 < \ldots < s''_n < \ldots < s'' < M.$$

Seda enam on

$$s'_1 < s'_2 < \ldots < s'_n < \ldots < M,$$

s. t. aga, et esimese rea osasummade jada kui monotoonne positiivsete liikmetega jada on ülalt tõkestatud, järelikult peab sellel jadal olema piirväärtus, s. t. et on olemas

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s'.$$

Seega, *positiivsete liikmetega rea koonduvuse üle saab otsustada, kui võrrelda tema liikmeid koonduva positiivsete liikmetega rea vastavate liikmetega.*

N ä i d e. Rida

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \ldots + \frac{\pi}{2^n} + \ldots,$$

kui tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa on koonduv. Selle rea summaks on

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi.$$

Huvitume nüüd rea

$$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{8} + \ldots + \sin\frac{\pi}{2^n} + \ldots$$

koonduvusest.

Et $0 < \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$, siis on selle rea kõik liikmed väiksemad koonduva rea vastavatest liikmetest ja järelikult on ka see rida koonduv.

2°. *Kui esimene rida on hajuv, siis on ka teine rida hajuv,* sest esimese rea hajuvusest järeldub tema osasummade jada ülalt tõkestamatus: $s'_n \to \infty$. Et aga $s''_n \geqslant s'_n$, siis ka $s''_n \to \infty$.

15. 4. REA KOONDUVUSE TARVILIK TINGIMUS.

Selgitame nüüd, kas rea koonduvuse üle on võimalik otsustada tema üldliikme järgi.

Olgu antud koonduv rida

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots,$$

kus a_n on rea üldliige.

Et rida on koonduv, siis $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, samuti aga ka

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-100} = s, \quad \lim_{n\to\infty} s_{n+10} = s, \quad \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$

Et $s_n = s_{n-1} + a_n$ ja seega $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{n-1} + a_n)$, siis

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n,$$

millest

$$s = s + \lim_{n\to\infty} a_n$$

ja siit

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0.}$$

Seega, *eeldades rea koonduvust, saab näidata, et tema üldliikme (n-nda liikme) piirväärtus on null.*

Nüüd kerkib küsimus, kas eeldusel, et üldliikme piirväärtus on null, järeldub, et rida on koonduv.

Et niisugune väide ei pea paika, selgub järgmisest näitest.

Vaatleme nn. **harmoonilist rida**:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Siin ongi täidetud üldliikme nullile lähenemise tingimus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Vaatleme nüüd rida:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\text{2 liidetavat,}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4 liidetavat,}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{8 liidetavat}} + \ldots,$$

mis on saadud harmoonilisest reast, kui seal nimetaja 3 asendada 4-ga, nimetajale 4 järgnevad nimetajad kuni 7-ni 8-ga, nimetajale 8 järgnevad nimetajad kuni 15-ni 16-ga jne. Rühmitame selles

reas võrdsed liikmed. Kõigi nii rühmitatud liidetavate summa on $\frac{1}{2}$. Seega on vaadeldav rida esitatav kujul

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots .$$

See rida on kindlasti hajuv, sest seda summat võime ju esitada kujul

$$1+n\cdot\frac{1}{2}\text{, kus } n\to\infty,$$

siis aga

$$\left(1+n\cdot\frac{1}{2}\right)\to\infty.$$

Võrreldes rea

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

liikmeid harmoonilise rea liikmetega, näeme, et need on kas harmoonilise rea vastavate liikmetega võrdsed või neist väiksemad. Sellest järeldub aga võrdlustunnuste põhjal, et ka harmooniline rida on hajuv.

Niisiis, koonduva rea üldliikme piirväärtus on null, kuid tõsiasjast, et rea üldliikme piirväärtus on null, ei järeldu rea koonduvus. Seetõttu öeldaksegi, et *üldliikme piirväärtuse võrdumine nulliga on rea koonduvuse* **tarvilikuks tingimuseks,** *kuid mitte* **piisavaks tingimuseks.**

Ülesandeid.

1. Kasutades võrdlustunnust, selgitage, missugused järgmistest ridadest on koonduvad.

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots$

b) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\dots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\dots$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\dots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\dots$

d) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\dots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\dots$

e) $1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$

f) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n^2+1}+\dots$

g) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{3n}+\ldots$

h) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

2. Missuguste a väärtuste korral on rida

$$\frac{1}{3+a}+\frac{1}{9+a}+\frac{1}{27+a}+\ldots\ldots$$

kindlasti koonduv?

3. Missugused järgmistest ridadest on hajuvad (pole täidetud koonduvuse tarvilik tingimus)?

a) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\ldots$

b) $\frac{2}{3}+\frac{5}{5}+\frac{8}{7}+\ldots+\frac{3n-1}{2n+1}+\ldots$

c) $-1+1+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{n^2-2}$

15. 5. REA KOONDUVUSE PIISAV TINGIMUS.

Vaatleme rida

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

ja kõrvuti sellega teist rida, mille liikmeteks on antud rea liikmete absoluutväärtused:

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \qquad (2)$$

Eeldame, et rida (2) kui positiivsete liikmetega rida on koonduv ja tema summa on s'.

Olgu rea (2) osasummad $s'_1, s'_2, \ldots$ ja rea (1) osasummad $s_1, s_2, \ldots$. Seega siis

$$s'_n = |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$$

ja

$$s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Viimases summas võib olla osa liidetavaid positiivsed, osa negatiivsed. Tähistame siin positiivsete liikmete summa s_n^+ ja negatiivsete liikmete absoluutväärtuste summa s_n^-, siis

$$s_n = s_n^+ - s_n^-$$

ja

$$s'_n = s_n^+ + s_n^-.$$

Et eelduse järgi rida (2) on koonduv, s. t. $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = s'$, siis $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n^+ + s_n^-) = s'$ ja siit

$$\lim_{n\to\infty} s_n^+ + \lim_{n\to\infty} s_n^- = s'.$$

Kui piirväärtuste summa on lõplik arv, siis peavad ka liidetavad piirväärtused olema lõplikud. Olgu need vastavalt σ_1 ja σ_2.

Et $s_n = s_n^+ - s_n^-$, siis

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_n^+ - s_n^-) = \lim_{n\to\infty} s_n^+ - \lim_{n\to\infty} s_n^- = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Vahe $\sigma_1 - \sigma_2$ on lõplik arv, mille tähistame tähega s, s. t.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = s.$$

Niisiis

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

s. t. et koondub ka antud rida

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Seega,

kui antud rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida koondub, siis koondub ka antud rida.

Leitud tingimus garanteerib antud rea koonduvuse, s. t. on **piisav tingimus**, *kuid rida võib koonduda ka siis, kui see tingimus ei ole täidetud.*

N ä i d e. Saab tõestada, et rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \pm \ldots$$

on koonduv ja tema summaks on ln 2, kuid selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

on harmooniline rida ja see on hajuv.

Seega *rea (2) koondumine on rea (1) koondumiseks piisav, kuid mitte tarvilik tingimus.*

15. 6. D'ALEMBERT'I KOONDUVUSTUNNUS.

Ridade koonduvuse küsimust uurides on mitmed nimekad matemaatikud, nagu *d'Alambert*, *Cauchy* jt. leidnud tunnuseid, mille abil saab suhteliselt kergesti kindlaks teha, kas antud rida on koonduv või mitte.

Tutvume järgnevalt d'Alambert'i koonduvustunnusega.

Olgu antud positiivsete liikmetega rida

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad (a_n > 0).$$

Moodustame selle rea järjestikuste liikmete suhte $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ja leiame selle suhte piirväärtuse, mille tähistame tähega r, s. t.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

1) Vaatleme juhtu, kui

$r < 1$.

Valime arvu q, mis paikneb r ja 1 vahel, s. t. $r < q < 1$.

Et vaadeldava suhte piirväärtus on r, siis teatud n väärtusest N alates saab see suhe väiksemaks kui q, s. t.

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \ldots$$

Siit

$$a_{N+1} < a_N q, \quad a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N qq = a_N q^2.$$

Edasi saame, et

$$a_{N+3} < a_N q^3, \quad a_{N+4} < a_N q^4, \ldots$$

Vaatleme nüüd rida

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \ldots = a_N (q + q^2 + q^3 + \ldots).$$

Et $q < 1$, siis

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \ldots = a_N \frac{q}{1-q}.$$

Et sellel real on summa olemas, siis järelikult on ta koonduv. Et rea

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots$$

kõik liikmed on väiksemad koonduva rea

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \ldots$$

vastavatest liikmetest, siis võrdlustunnuse põhjal on ka see rida koonduv. Liites nüüd summa

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_N$$

koonduva reaga

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots,$$

saame koonduvate ridade 3. omaduse põhjal jälle koonduva rea.

2) Vaatleme juhtu, kus $r > 1$. Valime jällegi arvu q, mis rahuldab tingimusi

$$1 < q < r.$$

Et r on vaadeldava suhte piirväärtus, siis n teatud väärtusest N alates saab see suhe suuremaks kui q, s. t.

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} > q, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > q, \quad \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} > q, \ldots .$$

Neist võrratustest saame, et

$$a_{N+1} > a_N q, \quad a_{N+2} > a_{N+1} q > a_N q^2, \quad a_{N+3} > a_{N+2} q > a_N q^3, \ldots .$$

Rea

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots$$

kõik liikmed on seega suuremad rea

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \dots$$

vastavaist liikmeist.

Et $q > 1$, siis on viimane rida hajuv ja võrdlustunnuse põhjal on hajuv ka rida

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots .$$

Liites selle reaga summa $a_1 + a_2 + \dots + a_N$, jääb rida ikka hajuvaks.

3) Juhul $r = 1$ pole eelmistes punktides kasutatud arutlus rakendatav ja rea koonduvuse küsimus jääb lahtiseks.

Kokkuvõttes,

positiivsete liikmetega rida

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

on koonduv, kui $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$,

on hajuv, kui $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

See lause esitabki **d'Alembert'i koonduvustunnuse.**

Näide 1. Kasutame rea

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

koonduvuse uurimisel d'Alembert'i koonduvustunnust. Siin

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \quad a_n = \frac{n}{2^n} \quad \text{ja} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Seega on vaadeldav rida koonduv.

Näide 2. Rea

$$\frac{1!}{2} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{2^3} + \dots + \frac{n!}{2^n} + \dots$$

koonduvuse küsimuse otsustamiseks leiame piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(n+1) = \infty.$$

Rida on hajuv, sest $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Ülesandeid.

1. Kasutades d'Alembert'i koonduvustunnust, selgitage, missugused järgnevatest ridadest on koonduvad.

a) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

b) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

15. 7. CAUCHY' INTEGRAALTUNNUS.

Olgu antud positiivsete liikmetega rida

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \quad (a_n>0)$,

mille liikmed on vahemikus $1<x<\infty$ monotoonselt kahaneva pideva funktsiooni $f(x)$ väärtused argumendi väärtustel 1, 2, 3, ..., n, ..., s. t.

$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ a_3=f(3),\ \ldots,\ a_n=f(n),\ \ldots$

Olgu funktsiooni $y=f(x)$ graafikuga ning sirgetega $x=1$, $x=n$ ja $y=0$ määratud kõverjoonelise trapetsi pindala I_n. Siis

$$I_n=\int_1^n f(x)\,dx.$$

Lähendame selle kõverjoonelise trapetsi ristkülikute pindaladega nii, nagu näidatud joonisel 74. Ühel juhul on ristkülikute pindalade summaks

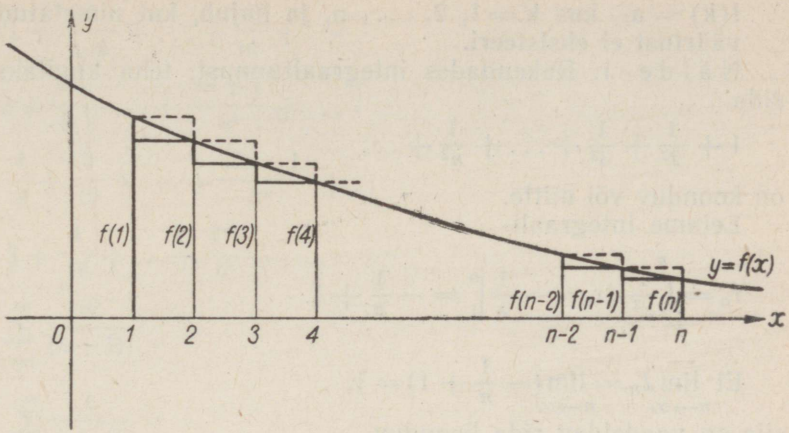
$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)$

ja teisel juhul

$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

Tähistades esimese summa S_1 ja teise summa S_2 ning antud rea osasummad $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, siis

$S_1=s_n-a_n$



Joon. 74.

ja

$$S_2 = s_n - a_1.$$

Jooniselt näeme, et

$$S_2 < I_n < S_1.$$

Seega

$$s_n - a_1 < I_n < s_n - a_n$$

ja siit ühel juhul $s_n < I_n + a_1$ ning teisel juhul $s_n > I_n + a_n$.

1) Olgu $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$. See tähendab, et I on kogu joone $y = f(x)$ alune pindala alates argumendi väärtusest 1. Seega $I_n < I$ ja

$$s_n < I_n + a_1 < I + a_1$$

ehk

$$s_n < I + a_1.$$

Seega on antud rea monotoonselt kasvav osasummade jada $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ ülalt tõkestatud ja tal peab olema piirväärtus:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

See aga tähendab, et antud rida on koonduv.

2) Oletame nüüd, et $n \to \infty$ korral $I_n \to \infty$.

Võrratusest $s_n > I_n + a_n$ järeldub, et vaadeldaval juhul ka $s_n \to \infty$ ja seega antud real puudub summa. Rida on hajuv.

Kokkuvõttes,

positiivsete liikmetega rida

$$\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (a_n > 0)}$$

koondub, kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, kus $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$ ja

$f(k) = a_k$, kus $k = 1, 2, \ldots, n$, ja hajub, kui nimetatud piirväärtust ei eksisteeri.

Näide 1. Rakendades integraaltunnust, teha kindlaks, kas rida

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

on koonduv või mitte.

Leiame integraali

$$I_n = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^n = -\frac{1}{n} + 1.$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{n} + 1) = 1$,

siis on vaadeldav rida koonduv.

Näide 2. Rakendades integraaltunnust, teha kindlaks, kas rida

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

on koonduv või mitte. Leiame integraali

$$I_n = \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^n = \frac{2}{3}(n^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}(n^{\frac{3}{2}} - 1) = \infty$,

siis on vaadeldav rida hajuv.

Ülesandeid.

1. Järgmiste ridade koonduvuse uurimisel kasutada Cauchy integraaltunnust.

a) $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots$

b) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

2. Tehke kindlaks, missugused järgmistest ridadest on koonduvad.

a) $1 + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{2n-1}$

b) $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+$ -

c) $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

d) $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$

e) $2+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$

15.8. VAHELDUVATE MÄRKIDEGA RIDA.

Vahelduvate märkidega reaks nimetatakse rida

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots,$$

kus $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ on kõik positiivsed arvud.

Leibnizi teoreem. *Kui vahelduvate märkidega rea liikmete absoluutväärtused monotoonselt kahanevad, s. t.*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$$

ja on täidetud rea koonduvuse tarvilik tingimus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

siis see rida koondub.

Tõestuseks vaatleme esimese $2m$ liikme summat:

$$s_{2m}=(v_1-v_2)+(v_3-v_4)+\ldots+(v_{2m-1}-v_{2m}).$$

Et kõik sulgavaldised on positiivsed või äärmisel juhul võrdsed nulliga, siis

$$s_{2m} \geqslant 0.$$

Kui nüüd $2m \to \infty$, siis ka s_{2m} suureneb, sest uued sulgavaldised on ikka kas positiivsed või võrdsed nulliga. Summa s_{2m} suurenemine on aga tõkestatud. See selgub, kui vaatleme s_{2m} avaldist teistsuguses grupeeringus:

$$s_{2m}=v_1-(v_2-v_3)-(v_4-v_5)-\ldots-(v_{2m-2}-v_{2m-1})-v_{2m}.$$

Siit ilmneb, et

$s_{2m} \leqslant v_1$.

Järelikult on osasummade jada $s_1, s_2, \ldots s_{2m}, \ldots$ monotoonselt kasvav ja ülalt tõkestatud ning seetõttu peab tal olema piirväärtus, kui $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

Et

$$s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1},$$

siis

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(s_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = s + 0 = s.$$

Seega

$$\lim_{m\to\infty} s_n = s$$ (n iga paaris- või paaritu arvu korral),

s. t. antud vahelduvate märkidega rida koondub.

N ä i d e. On antud rida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

mille liikmete absoluutväärtused on monotoonselt kahanevad

$$1 \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{4} \ldots$$

ja on täidetud rea koonduvuse tarvilik tingimus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Leibnizi teoreemi põhjal on antud rida koonduv.

Ülesanded.

1. Tee kindlaks, kas antud read on koonduvad või mitte.

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$

b) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$

c) $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \ldots$

15. 9. ASTMEREA MÕISTE.

Astmereaks *nimetatakse rida*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

kus $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *on konstandid ja* x *on muutuv suurus.*

Vaatleme astmerida

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots .$$

Olgu $x = \frac{1}{2}$. Siis saame antud astmereast arvurea

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots,$$

mis on koonduv. Miks?

Olgu $x = 1$. Nüüd saame arvurea

$$1 + 1^2 + 1^3 + \ldots + 1^n + \ldots,$$

mis on hajuv. Miks?

Seega astmerida

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

koondub kohal $x = \frac{1}{2}$ ja hajub kohal $x = 1$.

Astmeridade puhul kõneldakse ka koonduvusest vahemikus, kui rida koondub selle vahemiku igas punktis.

Vaatleme astmerida

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

ja positiivsete liikmetega rida

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (2)$$

D'Alembert'i koonduvustunnuse põhjal on rida (2) koonduv, kui

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1.$$

Siit

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1$$

ehk

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Rida (1) on ikka koonduv, kui koondub rida (2). Miks?

D'Alembert'i koonduvustunnuse põhjal on rida (2) hajuv, kui

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| > 1.$$

Siit

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| > 1$$

ehk

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1.$$

Kui rida (2) hajub, siis pole täidetud positiivsete liikmetega rea koonduvuse tarvilik tingimus ja järelikult on

$$\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| \neq 0.$$

Siit järeldub, et ka

$$\lim_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$$

ning seega, kui hajub rida (2), siis hajub ka rida (1).

Seega on astmerida (1) koonduv, kui

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

ja hajuv, kui

$$|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Niisiis astmerida (1) on koonduv vahemikus

$$\left(-\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}; \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\right)$$

ehk vahemikus

$$\left(-\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right).$$

Väljaspool seda vahemikku on rida (1) hajuv. Vahemiku otspunktides, nn. **rajapunktides** võib rida olla kas koonduv või hajuv. See tuleb eraldi selgitada.

N ä i d e 1. Leida rea $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ koonduvusvahemik.

Et $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{1} = 1$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, siis on koonduvusvahemikuks $(-1; 1)$.

Rajapunktides on rida hajuv. Näita seda!

N ä i d e 2. Leida rea $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{1}{n}x^n + \ldots$ koonduvusvahemik.

Et $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ja $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, siis on koonduvusvahemikuks $(-1; 1)$. Rajapunktide kohal saame arvuread

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}(-1)^n + \ldots$$

ja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

millest esimene koondub Leibnizi koonduvustunnuse põhjal ja teine kui harmooniline rida hajub.

Näide 3. Leida rea $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$ koonduvusvahemik.

Et $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ ja $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1$, siis on koonduvusvahemikuks $(-1; 1)$. Rajapunktide kohal saame arvuread

$$1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots$$

ja

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

mis mõlemad koonduvad (vt. näiteid Leibnizi tunnuse ja Cauchy' integraaltunnuse juures).

Ülesandeid.

1. Leida antud rea koonduvusvahemik ja uurida rea koonduvust rajapunktides.

a) $x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$

b) $x + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{27} + \ldots + \frac{x^n}{n^3} + \ldots$

c) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

d) $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

e) $\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$

f) $\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$

15. 10. FUNKTSIOONI ESITAMINE ASTMEREANA.

Olgu antud funktsioon $f(x)$, mis on esitatav astmereana:
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

Kordajate a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... määramiseks kasutatakse järgmist võtet. Esitatud võrdus peab kehtima x iga väärtuse korral, seega ka siis, kui $x=0$. Sel korral $f(0)=a_0$. Seega on a_0 määratud.

Et leida kordajat a_1, selleks avaldame $f'(x)$:
$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$.
Võttes siin $x=0$, saame
$f'(0)=a_1$.
Nüüd avaldame $f''(x)$:
$f''(x)=2a_2+6a_3x+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots$.
Kui siin $x=0$, siis
$f''(0)=2a_0$ ehk $a_2=\frac{f''(0)}{2}=\frac{f''(0)}{2!}$.

Analoogiliselt jätkates leiame, et

$$a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\quad a_4=\frac{f^{IV}(0)}{4!},\quad \ldots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Asetame nüüd leitud kordajad astmeritta. Saame, et

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

N ä i d e 1. Esitada astmereana funktsioon $y=e^x$.
Teame, et $(e^x)'=e^x$ ja seega
$e^x=(e^x)'=(e^x)''=\ldots=(e^x)^{(n)}=\ldots$
ja kui $x=0$, siis $e^0=1$.
Seega
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Leiame saadud astmerea koonduvusvahemiku.

$$\text{Et}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1 \text{ ja } \lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

siis on koonduvusvahemikuks $(-\infty, +\infty)$. Seega saame arvutada e^x väärtusi astmerea abil x iga väärtuse korral kuitahes suure täpsusega.

Olgu $x = 1$, siis

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots .$$

Avaldades faktoriaalide pöördväärtused 4 kohaga pärast koma, saame

$$\frac{1}{2!} = 0{,}5000, \quad \frac{1}{3!} = 0{,}1667, \quad \frac{1}{4!} = 0{,}0417, \quad \frac{1}{5!} = 0{,}0083,$$

$$\frac{1}{6!} = 0{,}0014, \quad \frac{1}{7!} = 0{,}0002, \quad \frac{1}{8!} = 0{,}0000.$$

Ka järgmistel liidetavatel on neli esimest kohta pärast koma nullid. Nii saame

$$e \approx 2 + 0{,}5000 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 + \\ + 0{,}0002 = 2{,}7183.$$

Et kuus liidetavat on arvutatud veaga mitte üle 0,00005, siis ei ületa tulemuse viga $6 \cdot 0{,}00005 = 0{,}0003$ ja seega

$$2{,}7180 < e < 2{,}7186.$$

Siit võime öelda, et e väärtus kolme kohaga pärast koma on $e = 2{,}718$.

Kui soovime saada arvu e suurema täpsusega, peame faktoriaalide pöördväärtused võtma suurema täpsusega. Kasutades arvu e esitust astmereana, võime teda seega avaldada kuitahes suure täpsusega.

N ä i d e 2. Esitada astmereana funktsioon $y = \sin x$.

Et $y(0) = \sin 0 = 0$,
$y'(0) = \cos 0 = 1$,
$y''(0) = -\sin 0 = 0$,
$y'''(0) = -\cos 0 = -1$,
$y^{IV}(0) = \sin 0 = 0$,
jne.,
siis

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Seda esitust astmereana kasutati juba Newtoni ajal siinuste tabelite koostamisel.

Ülesandeid.

1. Näidata, et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots .$$

2. Näidata, et

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots .$$

3. Näidata, et

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right].$$

J u h i s. Avaldage enne $\ln(1+x)$ ja $\ln(1-x)$ ning siis kasutage seost

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x).$$

4. Näidata, et

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots .$$

5. Leida selle astmerea koonduvusvahemik. Kasutades arkustangensfunktsiooni esitust astmereana, avaldada arvureana $\frac{\pi}{4}$.

J u h i s. $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

6. Kasutades funktsioonide esitamist astmereana, näidata, et kehtib valem

$$e^{rxi}=\cos rx+i\sin rx.$$

KORDAMISÜLESANDEID.

1. Tehke kindlaks, missugused järgmistest ridadest on koonduvad.

a) $\frac{2}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\frac{5}{4^2}+\ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots$

d) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot6\cdot9}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot3n}+\ldots$

e) $\frac{1}{10}+\frac{1\cdot2}{10^2}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10^3}+\ldots+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{10^n}+\ldots$

f) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\ldots$

g) $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2-\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots$

h) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

2. Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid.

a) $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0$

b) $y'\tan x=1+y$

c) $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$

d) $xy'+y=e^{-x}$

e) $y''=\frac{1}{y^3}$

f) $2y'y''=1$

g) $y''-5y'+6y=0$

h) $y''+4y'+4y=0$

i) $y''-2y'-3y=2x+1$

j) $y''+6y'+9y=e^{2x}$

KIRJANDUS

Raamatu koostamisel on kasutatud järgmisi õpikuid ja ülesannete kogusid.

1. Kangro, G. Kõrgem algebra. Tln., 1965.
2. Kangro, G. Matemaatiline analüüs I. Tln., 1965.
3. Petersen, I., Roos, H. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu I. Tln., 1962.
4. Petersen, I., Roos, H. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu II. Tln., 1961.
5. Privalov, I. Analüütiline geomeetria. Tartu, 1946.
6. Ratassepp, K., Rägo, G. Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. Tartu-Tallinn, 1938.
7. Rägo, G. Kõrgem matemaatika I. Tln., 1962.
8. Rägo, G. Kõrgem matemaatika II. Tln., 1963.
9. Андронов И. К. Математика для техникумов. М., 1965.
10. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.—L., 1952.
11. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов. М., 1961.
12. Глаголев А. А., Солнцева Г. В. Курс высшей математики. М., 1965.
13. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике I. М.—L., 1949.
14. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.—L., 1956.
15. Дюбюк П. Е., Кручкович Г. И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. М., 1965.
16. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., 1956.
17. Кудрявцев А. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М.—L., 1949.
18. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М., 1953.
19. Потоцкий М. В. Аналитическая геометрия на плоскости. М., 1956.
20. Суворов И. Ф. Курс высшей математики для техникумов. М., 1956.
21. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., 1962.

SISUKORD

1. Koordinaatide meetod
   - 1.1. Kahe punkti vaheline kaugus . . . 3
   - 1.2. Lõigu jaotamine antud suhtes . . . 4
   - 1.3. Lõigu keskpunkti koordinaadid . . . 5
   - 1.4. Kolmnurga pindala . . . 5
   - Ülesandeid . . . 6

2. Sirge võrrand
   - 2.1. Sirge võrrandi erikujusid . . . 8
   - 2.2. Sirge võrrandi uurimine . . . 9
   - Ülesandeid . . . 10
   - 2.3. Kahe sirge vaheline nurk . . . 11
   - 2.4. Sirgete paralleelsus ja ristseis . . . 12
   - Ülesandeid . . . 13

3. Determinandid
   - 3.1. Kaherealine determinant . . . 15
   - 3.2. Kaherealise determinandi omadused . . . 16
   - 3.3. Lineaarse võrrandisüsteemi uurimine determinantide abil . . . 18
   - 3.4. Kolmerealine determinant . . . 20
   - 3.5. Kolmerealise determinandi arvutamine . . . 21
   - 3.6. Kolmerealise determinandi omadused . . . 22
   - Ülesandeid . . . 23
   - 3.7. Kolmest võrrandist koosneva kolme tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine . . . 24
   - Ülesandeid . . . 27

4. Teist järku jooned
   - 4.1. Ellips . . . 28
   - Ülesandeid . . . 32
   - 4.2. Hüperbool . . . 33
   - Ülesandeid . . . 37
   - 4.3. Parabool . . . 38
   - Ülesandeid . . . 40
   - 4.4. Peegeldus . . . 40
   - Ülesandeid . . . 41
   - 4.5. Telgede rööplüke ja pööre . . . 41
   - Ülesandeid . . . 45
   - Kordamisülesandeid . . . 46

5. Liitfunktsioon
   - 5.1. Liitfunktsiooni mõiste . . . 48
   - 5.2. Liitfunktsiooni tuletis . . . 49
   - Ülesandeid . . . 50

6. Naturaallogaritmid
6. 1. Orgaanilise kasvamise seadus 51
6. 2. Arv e 53
6. 3. Naturaallogaritmid 53
6. 4. Naturaallogaritmide avaldamine kümnendlogaritmide kaudu . . 53
6. 5. Naturaallogaritmfunktsiooni tuletis 54
6. 6. Kümnendlogaritmfunktsiooni tuletis 56
6. 7. Logaritmfunktsiooni $y = \log_a x$ tuletis 56
Ülesandeid 56

7. Pöördfunktsiooni tuletis
7. 1. Pöördfunktsiooni tuletise leidmise eeskiri 57
7. 2. Eksponentfunktsiooni tuletis 57
7. 3. Arkusfunktsioonide tuletised 58
Ülesandeid 59

8. Integreerimisvõtteid
8. 1. Põhiliste integraalide tabel 60
8. 2. Määramata integraali omadusi 60
8. 3. Määramata integraali lahendamine 62
Ülesandeid 64
8. 4. Korrutise diferentsiaal 64
8. 5. Ositi integreerimine 65
Ülesandeid 67
8. 6. Liitfunktsiooni diferentsiaal 67
8. 7. Asendusvõte 67
Ülesandeid 69
8. 8. Määratud integraalide arvutamine 70
Ülesandeid 72

9. Polünoomid
9. 1. Täisarvude ring 76
9. 2. Jagamine täisarvude ringis 77
9. 3. Polünoomi mõiste 77
9. 4. Polünoomide ring 78
9. 5. Polünoomide jagamine 79
9. 6. Bezout' teoreem 80
9. 7. Horneri skeem 81
9. 8. Ratsionaalarvude korpus 82
9. 9. Polünoomide jagatiste korpus 82
Ülesandeid 83

10. Ratsionaalfunktsioonide integreerimine
10. 1. Ratsionaalfunktsiooni mõiste 85
10. 2. Osamurdudeks lahutamine 86
Ülesandeid 92
10. 3. Ratsionaalfunktsioonide integreerimine 93
Ülesandeid 98
Kordamisülesandeid 98

11. Vektorid
11. 1. Punkti asukoha määramine ruumis 101
Ülesandeid 103
11. 2. Skalaarsed ja vektoriaalsed suurused 104
11. 3. Vektori mõiste 104
11. 4. Vektorite võrdsus 105
11. 5. Vektori sihinurgad 106
11. 6. Vektori koordinaadid 107
11. 7. Kahe punkti vaheline kaugus 109

11. 8. Vektori sihikoosinused 111
Ülesandeid 111
11. 9. Vektorite liitmine 112
11. 10. Vektorite lahutamine 113
11. 11. Vektori korrutamine arvuga 114
Ülesandeid 116
11. 12. Koordinaattelgede sihilised vektorid 117
11. 13. Vektori esitamine ristuvate ühikvektorite kaudu 118
11. 14. Kahe vektori summa koordinaadid 121
Ülesandeid 121
11. 15. Kahe vektori skalaarkorrutis 122
11. 16. Skalaarkorrutise omadused 124
11. 17. Ristuvate ühikvektorite skalaarkorrutised. Skalaarruut 126
11. 18. Skalaarkorrutise avaldamine vektori koordinaatides 126
11. 19. Kollineaarsed vektorid 127
Ülesandeid 129

12. Tasapinna võrrand

12. 1. Tasapinna võrrandi mõiste 130
12. 2. Kahe tasapinna vastastikused asendid 132
Ülesandeid 135
12. 3. Vektorkorrutis 135
Ülesandeid 139
12. 4. Segakorrutis 140
12. 5. Kolme vektori komplanaarsuse tunnus 141
12. 6. Ülesandeid tasapinna määramise kohta 142
Ülesandeid 143

13. Sirge võrrandid

13. 1. Sirge kahe lõikuva tasapinna lõikejoonena 145
Ülesandeid 147
13. 2. Sirge kanoonilised võrrandid 147
Ülesandeid 149
13. 3. Sirge kanooniliste võrrandite leidmine 149
13. 4. Kahe punktiga määratud sirge võrrand 152
Ülesandeid 152
13. 5. Kahe sirge vastastikused asendid 153
Ülesandeid 155
13. 6. Sirge ja tasapinna vastastikused asendid 155
Ülesandeid 160
Kordamisülesandeid 160

14. Diferentsiaalvõrrandid

14. 1. Diferentsiaalvõrrandi mõiste 163
14. 2. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine 164
14. 3. Diferentsiaalvõrrandi üldlahendi ja erilahendi geomeetriline tõlgendus 165
Ülesandeid 167
14. 4. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand 167
Ülesandeid 170
14. 5. Homogeenne diferentsiaalvõrrand 171
Ülesandeid 172
14. 6. Lineaarne diferentsiaalvõrrand 173
Ülesandeid 175
14. 7. Mittetäielikud teist järku diferentsiaalvõrrandid 175
Ülesandeid 183
14. 8. Lineaarne konstantsete kordajatega teist järku diferentsiaalvõrrand 184
Ülesandeid 193

15. Read
15. 1. Arvujada ja arvurida 195
15. 2. Koonduvate ridade omadusi 197
Ülesandeid 199
15. 3. Võrdlustunnus 200
15. 4. Rea koonduvuse tarvilik tingimus 202
Ülesandeid 203
15. 5. Rea koonduvuse piisav tingimus 204
15. 6. D'Alembert'i koonduvustunnus 205
Ülesandeid 208
15. 7. Cauchy' integraaltunnus 209
Ülesandeid 210
15. 8. Vahelduvate märkidega rida 211
Ülesandeid 212
15. 9. Astmerea mõiste 212
Ülesandeid 215
15. 10. Funktsiooni esitamine astmereana 216
Ülesandeid 217
Kordamisülesandeid 218
Kirjandus 220

Олаф Принитс. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ МАТЕМАТИКИ. На эстонском языке. Художественное оформление Ю. Аррака. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

*

Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Heigo. Tehniline toimetaja L. Krikmann. Korrektorid H. Kull ja A. Kalberg. Laduda antud 17. V 1968. Trükkida antud 24. XII 1968. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 14. Arvestuspoognaid 10,73. Trükiarv 1500. Tell. nr. 3207. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 21 kop.

21. kop.

A
29613
4195675

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00419567 5