O. Kool

Analüütilise geomeetria põhijooni ja ülesandeid

Gümnaasiumi
humanitaarharu kursus

Autori kirjastus, Tartus
1928

O. Kool

Analüütilise geomeetria põhijooni ja ülesandeid

Gümnaasiumi
humanitaarharu kursus

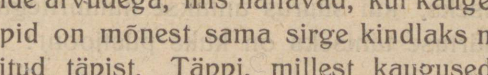
Autori kirjastus, Tartus
1928

Trükitud Ed. Bergmann'i trükikojas, Tartus.

Koordinaatidest.

1. Analüütilise geomeetria mõiste. Analüütiline geomeetria õpetab, kuidas käsitella geomeetrilisi kujundeid algebra abil. Sealjuures kasutatakse **koordinaatide meetodit.** Koordinaatide meetodi võttis geomeetrias esimesena tarvitusele prantsuse matemaatik-filosoof Descartes (lugeda: dekart) ehk Cartesius (1596—1650). Sellepärast loetakse teda analüütilise geomeetria põhjendajaks.

2. Kahe täpi kaugus üksteisest sirgjoonel. Loomulik on tähistada sirgjoone (joon. 1)



Joon. 1.

täppe nende arvudega, mis näitavad, kui kaugel vaadeldavad täpid on mõnest sama sirge kindlaks määratud, välja valitud täpist. Täppi, millest kaugused mõõdetakse, nim. **alguseks** ehk **nulltäpiks.** Tema märgiks on täht O (ladina keeles: origo — algus). Kui lugeda kaugused algusest paremale poole positiivseiks ja pahemale poole negatiivseiks ning tarvitada ikka sama mõõtühikust, siis omame **laused:**

1. Igale täpile vastab ainult üks arv, nimelt see arv, mille saame, kui täpi kauguse algusest ära mõõdame.

2. Igale arvule vastab ainult üks täpp, nimelt see täpp, milleni jõuame, kui algusest läheme nii kaugele, kui mitu üht või ühe osa on arvus.

Arve, mis tähendavad täppide kaugusi algusest, nim. **abstsissideks** ja märgitakse ära tähega x. Igal täpil on oma abstsiss. On täppidel A ja B abstsissid $x_1 = +3$ ning $x_2 = -2$, siis kirjutatakse: A(+3), B(—2).

Lause. Et saada kahe punkti kaugust üksteisest ehk lõigu pikkust märgiga, lahutatakse lõigu lõpu abstsissist tema alguse abstsiss:

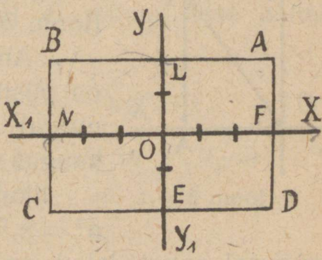
$$AB = x_2 - x_1 = -2 - (+3) = -5,$$
$$BA = x_1 - x_2 = +3 - (-2) = +5.$$

Märkus 1. Selles raamatus tuleb arvu all mõista alati reaalarvu.

Märkus 2. Abstsiss x on algebraline arv, temas sisaldub absoluutne väärtus ja märk. Sarnases mõttes tarvitatakse ka teisi tähti anal. geomeetrias. Märk saab ilmseks, kui suurus antakse numbritega. Absoluutse väärtuse tähiseks on kaks püstjoont: $| \ |$.

3. Koordinaatide teljed koosnevad kahest lõpmata pikast ristjoonest XX_1 — **abstsiss-** ehk **X-telg** ja YY_1 — **ordinaat-** ehk **Y-telg,** mis lõikuvad **koordinaatide alguses** O ja jagavad tasapinna neljaks nurgaks ehk veerandiks (joon. 2): esimene veerand XOY, teine YOX_1 jne. Abstsisstelje lõikude märkide kohta on maksev nr. 2 antud reegel, kuna ordinaattelje lõigud algusest ülespoole on positiivsed, vastassihis võetult aga negatiivsed.

4. Tasapinna täpi määramine. Tasapinna täpp, näiteks A (joon. 2), on täiesti määratud, kui on teada tema kaugused telgedest, s. o. **koordinaadid: abstsiss** AL ehk OF ja **ordinaat** AF ehk OL; nende suuruste tähisteks on vastavalt kaks arvu x ja y. Vaadeldakse täppi P tema koordinaatide kaudu, siis kirjutatakse: P(x, y). Joon. 2 järgi on: A(+3; +2), B(—3; +2), C(—3; —2), D(+3; —2), O(0; 0), N(—3; 0) jne.

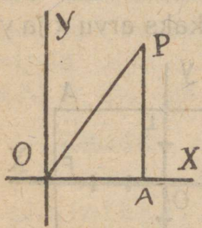


Joon. 2.

Nii näeme, et tasapinna igale täpile vastab kaks arvu — koordinaadid. Ümberpöördult: igale kahele arvule võime leida tasapinnal vastava täpi. Arvudele —3 ja +2 vastab näiteks täpp B, mille leiame, kui X-teljel võtame algusest 3 mõõtüksust pahemale poole ja Y-teljel 2 mõõtüksust üles ja saadud täppidesse N ja L tõmbame telgedele perpendikulaarid NB ja LB; nende lõiketäpi B koordinaadid on —3 ja +2.

5. Jooned tasapinnal. Peale täppide võivad tasapinnal esineda jooned. Ka neid on võimalik vaadelda üksikute täppide koordinaatide kaudu, sest jooned on täppide kogud. Sagedamalt avaldatakse aga jooned analüütilises geomeetrias võrranditega ja otsustatakse nende omaduste järgi joonte omaduste üle. Kuidas see võimalik on, selgub allpool.

Kui analüütilises geomeetrias räägitakse antud punktist, siis mõeldakse sellega, et tema koordinaadid on antud. Leida mõni pikkus või muu suurus tähendab avaldada see pikkus või suurus antud koordinaatide kaudu.



Joon. 3.

6. Ülesanne 1. Leida punkti $P(x_1, y_1)$ kaugus algusest (joon. 3).

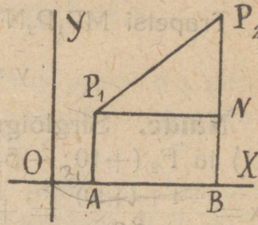
Antud punkti P koordinaadid on püstkolmnurga (täisnurkse kolmnurga) AOP kaatetid, kuna otsitav kaugus $OP = d$ on hüpotenuus, järelikult $OP^2 = OA^2 + PA^2$ ehk $d^2 = x_1^2 + y_1^2$ ja $d = \pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Kaugusel antud juhul on peamiselt tähtis tema absoluutne väärtus, seepärast radikaali ees sihimärke alati arvesse ei võeta.

Näide. Punkti $(-3; +4)$ kaugus algusest: $d = \sqrt{(-3)^2 + (+4)^2} = 5$. Teha joonis!

Märkus. Näiteile ja ülesandeile, kus aga iganes võimalik, tuleb teha joonised ja võrrelda graafilisi lahendusi algebralistega.

7. Ülesanne 2. Leida kahe punkti kaugus üksteisest tasapinnal.

Ehitame antud punktide $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$ koordinaadid (joon. 4) ja tõmbame $P_1N \parallel OX$. Püstkolmnurgast P_1NP_2 avaldame otsitava kauguse $P_1P_2 = d$ Pythagorase teoreemi põhjal: $P_1P_2^2 = P_1N^2 + P_2N^2$. Et aga $P_1N = AB = OB - OA = x_2 - x_1$ ja $P_2N = P_2B - NB = P_2B - P_1A = y_2 - y_1$, siis $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ja



Joon. 4.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

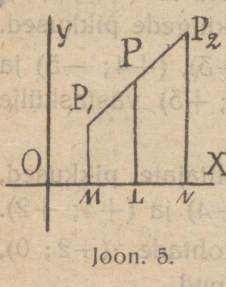
Aluse märgi vahetamisel ei muutu teise astme märk ega suurus, nii et ka

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Näide. Punktide F_1 $(+3; -4)$ ja F_2 $(-5; +2)$ kaugus: $d = \sqrt{(+3+5)^2 + (-4-2)^2} = 10$.

8. Ülesanne 3. Leida sirglõigu keskkoht.

Olgu antud (joon. 5) sirglõigu otsatäpid P_1 (x_1, y_1) ja P_2 (x_2, y_2). Otsitav on keskkoht P (x, y). Tõmbame täppidest P_1, P_2 ja P ristjooned X-teljele. Et tingimuse järgi $P_1P = PP_2$, siis ka $ML = LN$. Joonisest on näha, et $OL = OM + LM$, $OL = ON - LN$ ehk $x = x_1 + LM$, $x = x_2 - LN$. Liidame kaks viimast võrdust, saame: $2x = x_1 + x_2$ ja



Joon. 5.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Trapetsi MP_1P_2N keskjoon $PL = \frac{P_1M + P_2N}{2}$ ehk $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Näide. Sirglõigul, mis ühendab täpid $F_1 (-4; -11)$ ja $F_2 (+10; -5\frac{1}{2})$, on keskkoha koordinaadid:

$$x = \frac{-4 + (+10)}{2} = +3,\quad y = \frac{-11 + (-5^1/_2)}{2} = -8\tfrac{1}{4}.$$

9. Ülesandeid. 1. Kui kaugel on täpid A (—5) ja B (—12) üksteisest?

2. Mitmendas nurgas asetseb punkt (—3; —6)?

3. Missugusel teljel on täpp (+8; 0)?

4. Leida täpi (+12; —5) kaugus koordinaatide algusest.

5. Kui kaugel on täpid (—1; +2) ja (+8; —3) üksteisest?

6. Sirglõigu otsatäpid on (—9; —5) ja (+6; +7). Leida keskkoht.

7. Kui kaugel on täpp (—1; +3) täppide (—3; +4) ja (+2; +2) ühenduslõigu keskkohast?

8. Kolmnurga tippudeks on täpid A (+2; +3), B (+4; —5) ja C (—3; —6). Leida külgede pikkused.

9. Kolmnurga tipud on (+6; +3), (+4; —5) ja (+2; +3). Kui kaugel on tipp (+6; +3) vastaskülje keskkohast?

10. Leida kolmnurga küljepoolitajate pikkused, kui tippudeks on täpid (0; 0), (+2; —4) ja (+4; +2).

11. Kolmnurga külgede keskkohtade (+2; 0), (+3; —1) ja (+1; +2) järgi leida tipud.

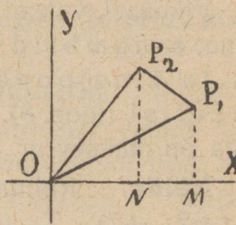
Kolmnurga pindala.

10. Ülesanne 1. Leida kolmnurga pindala, kui üks tipp asetseb alguses ja teised kaks on ka teada.

Vaatleme kolmnurka OP_1P_2 (joon. 6), kus antud tipud P_1 (x_1, y_1) ja P_2 (x_2, y_2). Tõmbame P_2N ja P_1M risti X-teljele. Tähendagu Q otsitavat pindala, s. o. $\triangle OP_1P_2 = Q = \triangle ONP_2 +$ trapets $NMP_1P_2 - \triangle OMP_1$ ehk $Q = \frac{ON \cdot P_2N}{2} + \frac{(P_1M + P_2N) \cdot MN}{2} - \frac{OM \cdot P_1M}{2}$. Et viimases võrduses $MN = OM - ON = = x_1 - x_2$, aga teised sirglõigud on täppide P_1 ja P_2 koordinaadid, siis

$$Q = \frac{x_2y_2}{2} + \frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{2} - \frac{x_1y_1}{2}$$

ehk $Q = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2}$.



Joon. 6.

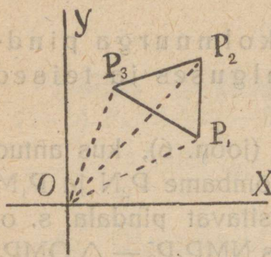
See valem annab kolmnurga pindala positiivse või negatiivse selle järele, kas jääb kolmnurk pahemale või paremale poole, kui tipust P_1 liikuda mööda serva P_1P_2 tippu P_2. Kui vahetuvad täpid P_1 ja P_2, siis vahetub ka kolmnurga pindala märk, kuid ei muutu tema absoluutne väärtus.

Näide. Kolmnurga üks tipp asetseb alguspunktis, kaks teist on A $(+2\frac{1}{2}; -5)$ ja B $(-10; -1\frac{3}{4})$. Leida pindala.

$$Q = \left| \frac{+2\frac{1}{2}(-1\frac{3}{4}) - (-5)(-10)}{2} \right| = 27\tfrac{3}{16}.$$

11. Ülesanne 2. Kolmnurga tippude järgi leida tema pindala (üldjuht).

Olgu antud täpid P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2) ja P_3 (x_3, y_3) (joon. 7). Ühendame nad üksteisega ja algusega. Otsitav pindala $\triangle P_1P_2P_3 = Q = \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_2P_3 - \triangle OP_1P_3$; nr. 10 leitud valemi järele saame:

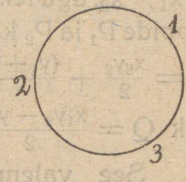


Joon. 7.

$$Q = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2} + \frac{x_2y_3 - y_2x_3}{2} - \frac{x_3y_1 - y_3x_1}{2}$$

ehk $Q = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$.

Viimase valemi meelespidamiseks tuleb tähele panna, et n u m b r i d t ä h t e d e j u u r e s j a r i n g j o o n e l j ä r g n e v a d ü h t e v i i s i (joon. 8). Pindala märgi kohta on maksev nr. 10 antud seadus.



Joon. 8.

Näide. Kolmnurga tipud on T_1 $(+2; +7)$, T_2 $(-5; -3)$ ja T_3 $(+2; -3)$. Leida pindala.

$$Q = \left|\frac{1}{2}[2(-3+3) - 5(-3-7) + 2(+7+3)]\right| = 35.$$

12. Ülesandeid. 12. Leida kolmnurga pindala, kui tipud on: $(+2; +1)$, $(+3; -2)$ ja $(-4; -1)$.

13. Leida kolmnurga pindala, kui tipud on $(0; 0)$, $(+3; +8)$, $(+7; -10)$.

14. Leida viisnurga pindala, kui tipud on $(-12; -3)$, $(-5; +2)$, $(+4; +3)$, $(+9; -4)$ ja $(+3; -10)$.

Funktsioonidest.

13. Konstandid ja muutujad. Suurust, mille väärtus on mõnes ülesandes alati ühesugune, nim. **jäävaks suuruseks** ehk **konstandiks**. Suurust, millel võib mitu isesugust väärtust olla, nim. **muutuvaks suuruseks** ehk **muutujaks.** Antud ringis näiteks on diameeter ja ringjoone pikkus jäävad suurused, kuna kõõlu pikkus, sektori ja segmendi pindalad on muutujad. Kõigil ringidel on ringjoone ja diameetri suhe jääv $= \pi$.

Konstante märgitakse harilikult tähestiku esimeste tähtedega: a, b, c jne., muutujaid viimastega: x, y, z jne.

Kui punkti võime vaadelda liikuvana, siis nim. teda **jooksvaks** ja tema koordinaate **jooksvaiks.**

14. Argument ja funktsioon. Muutuvad kaks suurust nii, et ühe igale väärtusele vastab teise kindel väärtus või mitu kindlat väärtust, siis need suurused on f u n k t s i o n a a l s e l t seotud. Suurust, mille väärtusi — harilikult teatavates piirides — meelevaldselt valitakse, nim. **argumendiks** ehk **rippumatuks muutujaks.** Suurust, mille väärtused olenevad argumendi väärtusist, nim. **funktsiooniks** ehk **rippuvaks muutujaks.**

Suuruste funktsionaalset olenevust on paljudel juhtudel võimalik avaldada v õ r r a n d i g a. Sealjuures valitakse argumendiks enamasti x ja funktsiooniks y. Võrrandiga $y = 2^x$ näiteks avaldub astme (y) olenevus astendajast (x) antud alusel (2). Saab argument selles võrrandis väärtused: $+1$; $+2$ jne., siis f. väärtused on: $+2$; $+4$ jne. Võrrandiga avalduvad f. omadused algebraliselt. Igas võrrandis võime vaadelda üht tundmatut teise funktsioonina.

15. Funktsiooni graafiline kuju. Kõvera võrrand. Funktsiooni graafiliseks kujuks on joon — sirge või kõver. Seda joont, nagu pärast näeme, on võimalik ehitada funktsiooni omaduste järgi. Ümberpöördud ülesanne on ka võimalik: graafilise kuju järgi koostada võrrand.

Kuid ei ole tarvis f. omadusi sugugi teada, graafilise kuju võib siiski leida, ehitades tema üksikute täppide kaudu. Võtame näite.

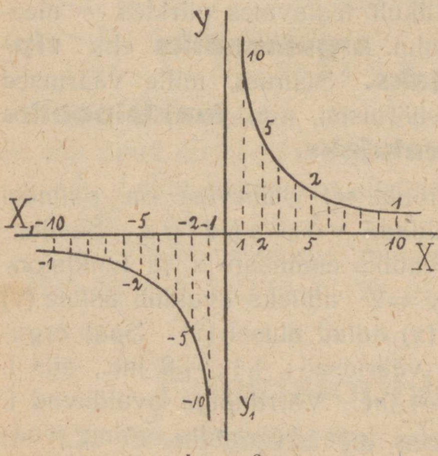
Anname argumendile x võrrandis

$$xy = 10 \text{ ehk } y = \frac{10}{x}$$

väärtusi, arvutame vastavad funktsiooni väärtused ja koostame tabeli:

$$x = -10;\ -9;\ \ldots +0{,}01;\ +0{,}1;\ +1;\ +2;\ \ldots$$
$$y = -1;\ -1\tfrac{1}{9};\ \ldots +1000;\ +100;\ +10;\ +5;\ \ldots$$

Vaatleme saadud arvude paare koordinaatidena, leiame neile vastavad täpid, mille ühendame joonega (joon. 9). See joon ongi otsitav graafiline kuju. Kui juhtub, et kahe täpi vahel ei ole küllalt selge, kuhu joon tõmmata, siis ehitatakse sinna vahemikku täppe, kuni joone käik saab nähtavaks. Saa-



Joon. 9

dud kõvera täppidel ja antud võrrandi juurtel on side: kõvera täppide koordinaadid rahuldavad võrrandit. Võrrandit, mida rahuldavad kõvera täppide koordinaadid, nim. kõvera võrrandiks.

Võrrandite graafilisel lahendamisel leitakse vastavate joonte lõiketäppide koordinaadid, mis ongi juured.

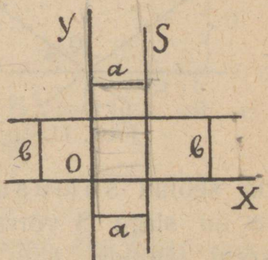
Üldsuse mõttes nim. anal. geomeetrias tihti sirget ka kõveraks.

Sirgjoonte võrrandid.

16. Telgedega rööbikud sirged. Võtame sirge S, mis rööbik Y-teljega (joon. 10). Kõigil tema täppidel on võrdsed abstsissid, kuna ordinaat igal täpil on isesuurune. Tähendab, abstsiss on siin jääv suurus, ordinaat aga muutuja. Kui kirjutame, et abstsiss x on jääv:

$$x = a,$$

siis avaldame sirge S jääva omaduse, mis kõigi tema täppide kohta maksev, seepärast on see võrrand sirge S võrrand.



Joon. 10.

Samuti võib otsustada, et võrrand

$$y = b,$$

kus b jääv suurus, vastab sirgele, mis asetseb b kaugusel X-teljest ja on temaga paralleelne.

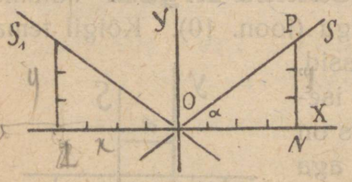
Y-telje täppidel on abstsissid nullid, X-telje täppidel on aga ordinaadid nullid, nii et nende telgede võrrandid on vastavalt

$$x = 0 \text{ ja } y = 0.$$

Näiteid. 1. Sirged: $y = 4$, $y = -9$, $3y = 7$ ehk $y = 2\frac{1}{3}$ on paralleelsed X-teljega. Nende ehitamiseks võtame Y-teljel algusest $+4$, -9, $+2\frac{1}{3}$ mõõtühsust ja tõmbame läbi saadud täppide paralleeljooned X-teljele.

2. Sirged: $x = -2$, $x = 5$, $6x = -5$ ehk $x = -\frac{5}{6}$ on paralleelsed Y-teljega. Ehitatakse neid sarnaselt eelmistega.

17. Algusest läbimineva sirge võrrand. Sirge S (joon. 11) asend on täiesti määratud, kui on teada nurk $SOX = \alpha$, mille moodustab see sirge X-telje positiivse sihiga. Võtame sirgel S jooksva täpi $P(x, y)$ ja ehitame tema koordinaadid: $ON = x$ ja $PN = y$.



Joon. 11.

Püstkolmnurgast PON leiame: $y = x \operatorname{tg} \alpha$ (1). Sirge teiste täppide koordinaadid on seotud s a m a s u g u s e v õ r r a n d i g a, järelikult ta on sirge S võrrand: temaga avaldub selle sirge kõigi täppide jääv omadus. Oletades, et $\operatorname{tg} \alpha = k$, saame (1) järgi

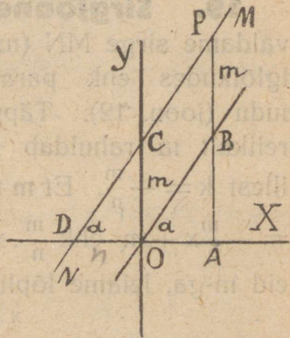
$$y = kx.$$

Juhul, kui sirge moodustab X-telje positiivse sihiga nürinurga (NOS_1), oleks k negatiivne, kuid võrrandi kuju jääks endiseks: $y = kx$.

On $\alpha = 0^0$, siis $k = 0$, järelikult $y = 0$. See on aga X-telje võrrand, nagu peab olema, sest kui $\alpha = 0^0$, ühtub sirge X-teljega.

Näide. Sirge $y = \frac{3}{4}x$ (S) moodustab X-telje positiivse sihiga teravnurga, aga sirge $y = -\frac{3}{4}x$ (S_1) nürinurga. Mõlemad lähevad läbi alguse.

18. Sirge, mis ei lähe läbi alguse. Vaatleme sirget MN (joon. 12). Ta ei lähe läbi alguse ja ei ole ka paralleelne kummagi teljega. Selle sirge asend on täiesti määratud, kui teada on kaks suurust: sirge kaldenurk $MDA = \alpha$ abstsisstelje suhtes ning sirge ja Y-telje lõikepunkti C kaugus $OC = m$ algusest.



Joon. 12.

Võtame sirgel MN jooksva täpi P ja ehitame tema koordinaadid $OA = x$ ja $PA = y$. Läbi alguse tõmbame abisirge $OB \parallel MN$. Joonisest on näha, et $y = BA + m$. Aga püstkolmnurga OBA kaatet $BA = x \operatorname{tg} \alpha$, nii et otsitav võrrand on $y = x \operatorname{tg} \alpha + m$ ehk

$$y = kx + m,$$

kus $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Jäävaid suurusi, mis sirge asendi ära määravad, nim. **parameetriteks.** Leitud võrrandis on parameetriteks k — **nurkkoeffitsient** ehk **tõus** ja m — **algusordinaat.** Parameetreid võib kasutada sirge joonestamiseks. Selleks tuleb alguse juure ehitada k-le vastav nurk, mõõta Y-teljel algusordinaat ja läbi saadud täpi tõmmata nurga haarale, mis ei ühtu X-teljega, rööbik sirge.

Kui võrrandis $y = kx + m$ parameeter $m = 0$, siis

$y = kx$, ja sirge läheb läbi alguse. Kui $k = 0$, siis $y = m$, ja sirge on rööbik X-teljega.

On kahe sirge võrrandid $y = kx + m$ ja $y = k_1x + m_1$ ning $k = k_1$, siis ka $\alpha = \alpha_1$. Järelikult sirged on rööbikud, sest X-telje juures moodustuvad võrdsed vastavad nurgad. Näiteks: $y = 3x - 7$ ja $y = 3x + 4$.

19. Sirgjoone võrrand telglõikudes. Avaldame sirge MN (nr. 18) võrrandi $y = kx + m$ (1) telglõikudes ehk parameetrite $OD = n$ ja $OC = m$ kaudu (joon. 12). Täpp $D\,(n, o)$ asetseb antud sirgel, järelikult ta rahuldab tema võrrandit: $0 = k \cdot n + m$, millest $k = -\frac{m}{n}$. Et m teada, siis võrrandist (1) saame: $y = -\frac{m}{n}x + m$ ehk $\frac{m}{n} \cdot x + y = m$; jagades kõiki liikmeid m-ga, leiame lõplikult

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{m} = 1.$$

Näide. $3x + 2y = 6$. Jagades 6-ga, saame: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Sirge *joonestamiseks* on see kuju iseäranis kohane. Võtame telgedel algusest vastavalt $+2$ ja $+3$ mõõtüksust ja läbi leitud täppide tõmbame sirge. Antud võrrand peab vastama saadud sirgele. Järelkatseks proovida, kas sirge täppide koordinaadid rahuldavad võrrandit.

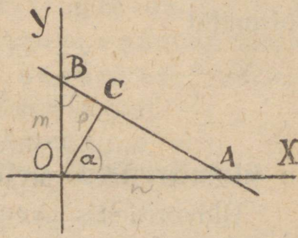
20. Sirge normaalvõrrand. Sirge *asendi määramiseks* võib tarvitada parameetritena kaht järgmist suurust: 1) algusest sirgele tõmmatud ristjoont $OC = p$ (joon. 13) ja 2) nurka $AOC = \alpha$, mille moodustab see ristjoon X-telje positiivse sihiga.

Olgu OA $=$ n ja OB $=$ m, siis sirge AB võrrand on nr. 19 järgi $\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=1$ (1). Püstkolmnurkadest AOC ja BOC, kus $\angle CBO = \angle COA$, saame: $n=\frac{p}{cs\,\alpha}$ ja $m=\frac{p}{sn\,\alpha}$, järelikult võrrand (1) omandab kuju

$$\frac{x\,cs\,\alpha}{p}+\frac{y\,sn\,\alpha}{p}=1, \text{ s. o.}$$

$$x\,cs\,\alpha + y\,sn\,\alpha = p$$

ehk $x\,cs\,\alpha + y\,sn\,\alpha - p = 0$.



Joon. 13.

See ongi sirge AB **normaalvõrrand.** Temas loetakse p o l u l i s e l t p o s i t i i v s e k s suuruseks, nii et $-$ p on o l u l i s e l t n e g a t i i v n e suurus.

21. Sirge üldvõrrand. Eespool nägime, et sirge võrrand on üldiselt esimese astme võrrand kahe tundmatuga. Ümberpöördult on ka õige: esimese astme võrrand kahe tundmatuga

$$Ax + By + C = 0$$

vastab alati sirgjoonele, seepärast nim. teda ka **lineaarvõrrandiks** (ladina keeles: linearis — jooneline). Tõenduseks muudame antud võrrandi kuju, kuni ta saab samaseks näiteks võrrandiga $y = kx + m$. Kõiki liikmeid võime jagada B-ga, võrrandi juured seejuures ei muutu: $\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$ ehk $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (1). Et tangens võtab kõik reaalväärtused, kui nurk muutub 0^0 kuni 180^0, siis leidub niisugune nurk α, et $tg\,\alpha = -\frac{A}{B}$, s. o. $-\frac{A}{B} = k$. Ka m võib iga reaalväärtus olla, nii et $-\frac{C}{B}=m$. Järelikult võrrand (1) saab kuju $y=kx+m$. Võrrandit

$$Ax+By+C=0$$

kutsutakse sirge **üldvõrrandiks.** Varem leitud võrrandid

$$y=kx+m,$$

$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=1,$$

$$x\,cs\,\alpha+y\,sn\,\alpha-p=0$$

on **üldvõrrandi erikujud.**

Üldvõrrandis $Ax+By+C=0$ on kolm liiget, mõned neist võivad hävida, kui vastavad koeffitsiendid on nullid. Olgu:

1. $C=0$: sirge läheb läbi alguse, sest võrrandit rahuldab siis täpp (0; 0).

2. $B=0$: sirge on paralleelne Y-teljega, sest võrrandist saame siis $x=-\frac{C}{A}$.

3. $A=0$: sirge on paralleelne X-teljega, sest võrrandist saame igal x-si väärtusel $y=-\frac{C}{B}$.

4. $B=0$ ja $C=0$: siis võrrand omab kuju $Ax=0$ ehk $x=0$, s. o. sirge ühtub Y-teljega.

5. $A=0$, $C=0$: $By=0$ ehk $y=0$, s. o. sirge ühtub X-teljega.

6. $A=0$, $B=0$: võrrand ei sisalda tundmatuid ja on vasturääkiv.

22. Sirge üldvõrrandi normimine. Sama sirge võrrandid erinevad üksteisest, kui parameetriteks valida isesugused suurused. Kuid meie nägime normaalvõrrandi leidmisel, et ühed parameetrid avalduvad teiste kaudu. Ka üldvõrrandi koeffitsiendid ja normaalvõrrandi parameetrid olenevad üksteisest. Leiame sideme nende vahel, kasutades niinimetatud **määramatute koeffitsientide võtet,** mis põhjeneb printsiibil: Kui kaks hulkliiget on samased meelevaldsetel tundmatute väärtustel, siis peavad tundmatute ühesuguste astmete koeffitsiendid võrdsed olema.

On mõni sirge antud võrranditega

$$Ax + By + C = 0$$

ja

$$x \operatorname{cs} \alpha + y \operatorname{sn} \alpha - p = 0,$$

siis peab olema tegur, millega korrutatult üks võrrand saab teisega samaseks. Olgu niisuguseks teguriks **(normija tegur),** mis muudab üldvõrrandi normaalseks, N, s. o.

$$N \, . \, Ax + N \, . \, By + N \, . \, C \equiv x \operatorname{cs} \alpha + y \operatorname{sn} \alpha - p.$$

Sellest samasusest saame:

$$N \, . \, A = \operatorname{cs} \alpha \, (1), \quad N \, . \, B = \operatorname{sn} \alpha \, (2), \quad N \, . \, C = -p.$$

Ruudime ja liidame võrdused (1) ja (2):

$$N^2 . \, A^2 + N^2 . \, B^2 = \operatorname{cs}^2 \alpha + \operatorname{sn}^2 \alpha = 1,$$

millest

$$N^2 (A^2 + B^2) = 1$$

ja

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Kui selle avaldisega korrutame sirge üldvõrrandit, saame normaalvõrrandi, sealjuures tuleb radikaali ees valida märk vastupidine vabaliikmele.

Näide. Võrrandit $3x - 4y + 15 = 0$ korrutame avaldisega $\frac{1}{-\sqrt{(+3)^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{5}$, saame normaalkuju $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0.$

23. Ülesandeid. 15. Ehitada sirgjooned: $x = 6$, $3y = 7$, $2x = -5$.

16. Ehitada sirgjooned: $y = -4x$, $y = \frac{1}{2}x$, $-3x + 5y = 0$.

17. Ehitada sirged: $y = 2x + 3$, $y = -x + 1$, $y = -5x + 7$.

18. Leida sirgete $x + 3y = 3$, $7x - 2y = 10$, $4x + 5y = 20$ võrrandid telglõikudes.

19. Joonestada sirged $3x - 5y = 15$, $2x + 9y = -18$, $7x + 8y = 2$.

20. Leida võrrandist $11x + 8y = 14$ parameetrid k ja m.

21. Leida sirgete $3x - 5y - 8 = 0$, $x - 6y = -1$, $2x + 2y = -5$ normaalvõrrandid.

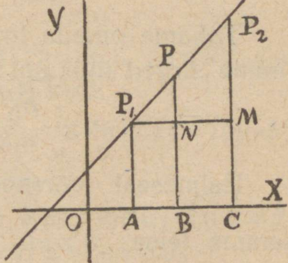
Põhiülesandeid sirgjoontest

24. Ülesanne 1. L e i d a s i r g e v õ r r a n d, k u i k a k s t e m a t ä p p i o n t e a d a.

Olgu antud täpid $(+3; +1)$ ja $(-2; +9)$. Asetame nende koordinaadid valemisse $y = kx + m$ ning määrame saadud võrranditest parameetrid k ja m: $1 = k \cdot 3 + m$, $9 = k \cdot -2 + m$, s. o. $k = -\frac{8}{5}$ ning $m = \frac{29}{5}$. Otsitav võrrand on $y = -\frac{8}{5}x + \frac{29}{5}$ ehk $8x + 5y = 29$.

Tuletame kahest täpist määratud sirge võrrandi üldisel kujul — geomeetriliselt ja algebraliselt.

Geomeetriline viis. Määraku täpid $P_1 (x_1, y_1)$ ja $P_2 (x_2, y_2)$ ära sirge (joon. 14). Ehitame nende ja ka sirgel jooksva täpi P (x, y) koordinaadid ning tõmbame $P_1M \parallel OX$. Et $\triangle P_1MP_2 \infty \triangle P_1NP$, siis $\frac{PN}{P_2M} = \frac{P_1N}{P_1M}$ (1). Aga $PN = PB - NB = PB - P_1A = y - y_1$, $P_2M = P_2C - MC = P_2C - P_1A = y_2 - y_1$, $P_1N = AB = OB - OA = x - x_1$ ning $P_1M = AC = OC - OA = x_2 - x_1$. Jär. võrdusest (1) omame otsitava võrrandi:



Joon. 14.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Näide. Läbi täppide (—5; +2) ja (+8; —7) läseb sirge $\frac{y-2}{-7-2} = \frac{x+5}{8+5}$ ehk $9x + 13y + 19 = 0$.

Algebraline viis. Rahuldagu täpid P_1 (x_1, y_1) ja P_2 (x_2, y_2) võrrandit $y = kx + m$:

$$y_1 = kx_1 + m, \quad y_2 = kx_2 + m.$$

Lahutades leiame, et

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

millest järgneb jagamise teel

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Märkus. Võrrandit $y - y_1 = k(x - x_1)$ rahuldab üks täpp P_1 (x_1, y_1), sellepärast on ta läbi ühe täpi minevate sirgete võrrand.

25. Ülesanne 2. Leida kahe sirge

$$3x + 5y = 43$$
$$6x - 7y = 1$$

lõiketäpi koordinaadid.

Lõiketäpp asetseb mõlemal sirgel, tema koordinaadid rahuldavad antud võrrandeid, nad on nende **juured.** Lahendades leiame:

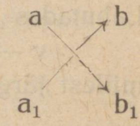
$$x = +6, \; y = +5.$$

Tahame omada lõiketäpi koordinaatide valemeid, võtame sirged üldkujul:

$$ax + by = c,$$
$$a_1x + b_1y = c_1.$$

Esimesest võrrandist leiame: $y = \dfrac{c - ax}{b}$ (1), asetame teise: $a_1x + b_1 . \dfrac{c - ax}{b} = c_1$, s. o. $x = \dfrac{c_1b - cb_1}{a_1b - ab_1} = \dfrac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$. (1) põhjal saame nüüd: $y = \dfrac{c - a . \dfrac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}}{b} = \dfrac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$, s. o. $x = \dfrac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$, $y = \dfrac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$.

Siit näeme, et kahe sirge lõiketäpi koordinaadid on üldjuhul murrud, mille *lugeja* saame nende ühisest *nimetajast*, asetades *koeffitsiendid* vastavalt *vabaliikmetega*; ühisnimetaja koostub ristamisi korrutatud koeffitsientide vahest, kusjuures *korrutis alt üles* on *miinusega*.



Näide. Sirgete $2x - 3y = -2$ ja $3x + 7y = 43$ ühistäpi koordinaadid on: $x = \dfrac{-2 . 7 - 43 . (-3)}{2 . 7 - 3 . (-3)} = +5$, $y = \dfrac{2 . 43 - 3 . (-2)}{2 . 7 - 3 . (-3)} = +4$.

26. Üldvõrranditega antud sirgete rööpseis. Rööbikute sirgete ühistäpp on lõpmatuses, jär. tema koordinaadid on lõpmata suured. Murd (vt. avaldised x ja y nr. 25) muutub lõpmatuseks, kui nimetaja on null, s. o. tingimusel

$$ab_1 - a_1b = 0$$

on sirged rööbikud. Ehk teisiti:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1},$$

s. o. rööpsirgete võrrandites on tundmatute koeffitsiendid võrdelised.

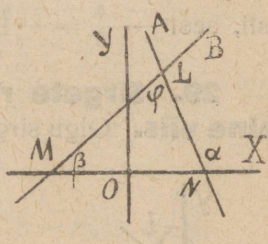
Näide. Sirged $2x + 5y - 7 = 0$ ja $6x + 15y + 11 = 0$ on rööbikud, sest $\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$.

Kui koeffitsiendid ja ka vabaliikmed on võrdelised, siis sirged ühtuvad.

Näide. Sirged $2x + 3y = 5$ ja $4x + 6y = 10$ ühtuvad, sest $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2$. Jagada teist võrrandit kahega!

27. Ülesanne 3. Leida nurk kahe sirge vahel.

Moodustagu sirged AN ja BM (joon. 15), mille võrrandid $y = kx + m$ ja $y = k_1x + m_1$, X-telje positiivse sihiga nurgad α ning β. Otsitav on $\angle MLN = \varphi$. Et α on kolmnurga MLN välisnurk, β ja φ aga sisenurgad, siis $\alpha = \beta + \varphi$ ning $\varphi = \alpha - \beta$. Jär.



Joon. 15.

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \text{ ehk}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k - k_1}{1 + kk_1},$$

sest $\operatorname{tg}\alpha = k$ ja $\operatorname{tg}\beta = k_1$.

Näide. Leida nurk sirgete $y = 13x - 5$ ja $y = 4x + 1$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{13-4}{1+13.4} = \frac{9}{53} = 0{,}1698;\quad \varphi = 9^0\,38'.$$

28. Ordinaadi suhtes lahendatud võrranditega antud sirgete rist- ja rööpseis. Et sirged oleksid risti, peab $\varphi = 90^0$ (vt. nr. 27), nii et $\operatorname{tg}\varphi = \infty$. Selleks peab aga murru $\frac{k-k_1}{1+kk_1}$ nimetaja null olema:

$$1 + kk_1 = 0 \text{ ehk } k_1 = -\frac{1}{k},$$

s. o. ristsirgete võrrandite nurkkoeffitsiendid on vastasmärgilised pöördsuurused.

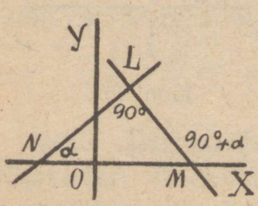
On sirged rööbikud, siis nurk $\varphi = 0^0$, järelikult $\operatorname{tg}\varphi = 0$. See on võimalik, kui murru $\frac{k-k_1}{1+kk_1}$ lugeja on null:

$$k - k_1 = 0 \text{ ehk } k = k_1,$$

s. o. rööpsirgete nurkkoeffitsiendid on võrdsed (vt. nr. 18).

Näide. Sirged $y = \frac{3}{4}x - 10$ ja $y = -\frac{4}{3}x$ on risti, sest $-\frac{4}{3} = -1 : \frac{3}{4}$.

29. Sirgete ristseisu tunnuse leidmise teine viis. Olgu sirgete NL ja ML (joon. 16) võrrandid $y = kx + m$ ning $y = k_1x + m_1$; $\angle ONL = \alpha$ ja $\angle MLN = 90^0$. Jär. $\angle XML = 90^0 + \alpha$ ja $k = \operatorname{tg}\alpha$ ning $k_1 = \operatorname{tg}(90^0 + \alpha)$. Korrutame nurkkoeffitsiendid: $kk_1 = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = -1$, s. o. $kk_1 = -1$ ja $k_1 = -\frac{1}{k}$.



Joon. 16.

30. Ülesanne 4. Missugune sirge läheb läbi antud täpi ja on rööbik antud sirgega?

Olgu antud täpp $(+3; +4)$ ja sirge $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

1. lahendusviis. Otsitav sirge läheb läbi täpi $(+3; +4)$, sellepärast $y - 4 = k(x - 3)$ (vt. nr. 24, märkus); et ta aga rööbik sirgega $y = -\frac{2}{3}x + 1$, siis $y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 3)$, s. o. $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

2. lahendusviis. Olgu otsitaval võrrandil kuju $y = kx + m$. Teda rahuldab täpp $(+3; +4)$: $4 = k \cdot 3 + m$; rööpseisu tingimusel $k = -\frac{2}{3}$, nii et $4 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + m$, millest $m = 6$, s. o. $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

31. Ülesanne 5. Leida täpi kaugus sirgest.

Vaatleme täppi $(-8; +3)$ ja sirget $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

1. Leiame sirge, mis läheb läbi täpi $(-8; +3)$ ja on risti antud sirgega: $y - 3 = k(x + 8)$ (vt. nr. 24, märkus); ristseisu tingimusel: $k = -1 : -\frac{3}{4} = \frac{4}{3}$, s. o. $y - 3 = \frac{4}{3}(x + 8)$, millest $y = \frac{4}{3}x + 13\frac{2}{3}$.

2. Sirgete $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ja $y = \frac{4}{3}x + 13\frac{2}{3}$ lõiketäpp: $(-5\frac{3}{25}; +6\frac{21}{25})$.

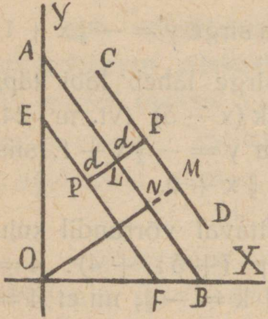
3. Otsitav kaugus:

$$d = \sqrt{(-8 + 5\tfrac{3}{25})^2 + (+3 - 6\tfrac{21}{25})^2} = 4\tfrac{4}{5}.$$

32. Ülesanne 6. Leida täpi kaugus sirgest sirge normaalvõrrandi abil.

Vaatleme sirge AB (joon. 17) normaalvõrrandit $x\,\mathrm{cs}\,\alpha + y\,\mathrm{sn}\,\alpha - p = 0$ ja täppi $P\,(x_0, y_0)$. Kauguse

PL = d (PL $\perp$ AB) leidmiseks tõmbame abisirge CD $\|$ AB; tema normaalvõrrandi saame, kui AB võrrandisse paneme p = ON asemele p + d = OM:



Joon. 17.

$$x cs\alpha + y sn\alpha - (p + d) = 0.$$

Et aga punkt P (x_0, y_0) asetseb abisirgel, siis x_0 ja y_0 rahuldavad tema võrrandit:

$$x_0 \, cs\alpha + y_0 \, sn\alpha - (p + d) = 0,$$

millest $d = x_0 \, cs\alpha + y_0 \, sn\alpha - p.$

Juhul, kui täpp P on algusega ühelpool sirget AB, oleks temast läbimineva abisirge EF (EF $\|$ AB) võrrand

$$x cs\alpha + y \, sn\alpha - (p - d) = 0$$

ja kaugus $d = -(x_0 \, cs\alpha + y_0 \, sn\alpha - p)$.

Nii näeme, et mõnesuguse täpi (x_0, y_0) kaugus sirgest $x cs\alpha + y \, sn\alpha - p = o$ avaldub valemiga

$$d = \pm (x_0 \, cs\alpha + y_0 \, sn\alpha - p),$$

milles sihimärgid näitavad, kas algus ja täpp (x_0, y_0) asetsevad kahel- või ühelpool sirget.

Reegel. Täpi kauguse sirgest saame, kui sirge normaalvõrrandisse asetame täpi koordinaadid.

Näiteid. 1. Leida alguse kaugus sirgest $3x + 4y + 20 = 0$.

Sirge normaalvõrrand: $\frac{3x + 4y + 20}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$ ehk $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 4 = 0$. Kaugus: $d = \left| -\frac{3}{5} \cdot 0 - \frac{4}{5} \cdot 0 - 4 \right| = 4.$

2. Leida punkti $(+2; +3)$ kaugus sirgest $2x +$ $+ y - 4 = 0$.

Sirge normaalvõrrand: $\frac{2x + y - 4}{+\sqrt{5}} = 0$. Kaugus: $d =$ $= \left| \frac{2 \cdot 2 + 3 - 4}{+\sqrt{5}} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

33. Ülesandeid. 22. Sirgel on antud kaks täppi $(-1; +3)$ ja $(-4; -5)$. Leida võrrand.

23. Kolmnurga tippudeks on täpid $(+2; +3)$, $(+4; -5)$ ja $(-3; -6)$. Koostada külgede võrrandid.

24. Kolmnurga tipud on $(+2; +1)$, $(0; +7)$ ja $(-4; -1)$. Leida küljepoolitajate võrrandid ja lõiketäpp.

25. Leida kolmnurga pindala ja külgede pikkused külgede võrrandite järgi: $3x = 1 - 2y$, $x = 3y -$ $- 7$ ja $y = 4x - 5$.

26 Kolmnurk on moodustatud sirgest $2x + 3y +$ $+ 5 = 0$ ja telgedest. Leida pindala.

27. Leida nurk sirgete $4x - 3y = 5$ ja $3x - 8y =$ $= 2$ vahel.

28. Leida kolmnurga nurgad külgede võrrandite järgi: $x + y = 1$, $x + 4 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$.

29. Leida kolmnurga tipud ja nurgad, kui külgede võrrandid on: $x - y = 3$, $x - 3y = 4$, $4x + 2y + 3 = 0$.

30. Leida täpi $(+1; -4)$ kaugus sirgest $3x -$ $- 7y + 12 = 0$.

31. Kolmnurga tipud on $(+2; +1)$, $(+3; -2)$ ja $(-4; -1)$. Leida kõrguste võrrandid.

32. Kolmnurga külgede võrrandite $x+y=3$, $x=0$ ja $y=-2x+1$ järgi leida kõrguste võrrandid.

33. Tõendada, et kolmnurga küljepoolitajad lõikuvad ühes punktis.

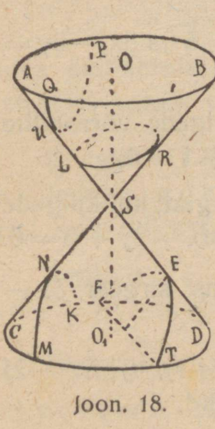
34. Tõendada, et kolmnurga külgede keskristjooned lõikuvad ühes punktis.

35. Tõendada, et kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.

36. Kolmnurga tippude $(+5; +3)$, $(-1; -7)$ ja $(+2; -8)$ järgi leida kõrguste pikkused.

Koonuslõiked.

34. Nelja järgmist kõverat — **ringjoont, ellipsit, hüperbooli** ja **parabooli** kutsutakse **koonuslõigeteks,** sest neid võib saada, kui koonus läbi lõigata tasapindadega, mis ei lähe läbi tema tipu (joon. 18).



Joon. 18.

Tasapind, mis perpendikulaarne koonuse teljega, lõikab tema pinda mööda ringjoont: AB. On tasapind aga paralleelne ühe moodustajaga, saame lõikejoonena parabooli: FET. Ellipsi saame, kui tasapind, olles kaldu telje OO_1 suhtes, lõikab ühe osakoonuse kõiki moodustajaid. Joonisel LR. Läheb tasapind aga läbi mõlema osakoonuse, siis lõikejoon on hüperbool. Tema osad: MNK ja QUP.

Ringjoon.

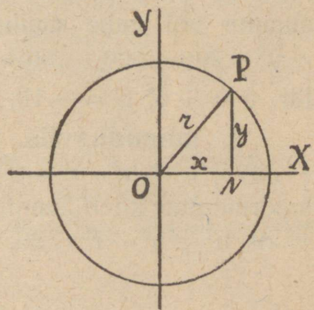
35. Ringjoone definitsioon ja võrrand.

Ringjoon on kõver, mille täpid on ühekaugusel keskkohast. Tema võrrandi leidmisel vaatleme kaht juhtu.

1. Keskkoht on alguses. Võtame ringjoonel (joon. 19) jooksva täpi P (x, y) ja ehitame tema koordinaadid. Püstkolmnurgast OPN saame Pythagorase teoreemi põhjal:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

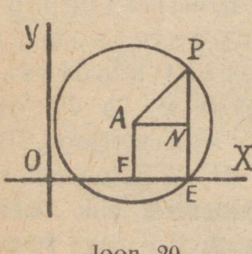
mis ongi otsitav võrrand.



Joon. 19.

Näide. Ringjoonel $x^2 + y^2 = 25$ on keskkoht alguses ja raadius $= \sqrt{25} = 5$.

2. Keskkoht on väljaspool algust (joon. 20). Olgu keskkoht A (a, b) ja raadius r. Ehitame jooksva täpi P (x, y) koordinaadid ja tõmbame AN || OX. Püstkolmnurgast APN saame: $AN^2 + PN^2 = AP^2$ (1). Et aga $AN = FE = OE - OF = x - a$, $PN = PE - NE = PE - AF = y - b$ ja $AP = r$, siis võrdusest (1) järgneb;



Joon. 20.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

mis ongi otsitav võrrand. Peale sulgude avamist saame temast $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$.

Näiteid. 1. Ringjoone raadius $=r$, kesktäpp on $(+3;\ -5)$. Võrrand on: $(x-3)^2+(y+5)^2=16$ ehk $x^2+y^2-6x+10y+18=0$.

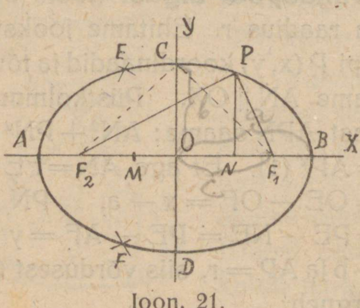
2. Ringjoone võrrandi $x^2+y^2-16x+20y+20=0$ järele leida kesktäpp ja raadius.

1. lahendusviis. Esimeste liikmete ruutude ja liikmete kahekordsete korrutiste abil otsime liikmete summa või vahe ruudud üles: $x^2-16x+64-64+$ $+y^2+20y+100-100+20=0$, $(x-8)^2+(y+10)^2=144$. Jär. $a=+8$, $b=-10$, $r=\sqrt{144}=12$.

2. lahendusviis. Samasusest x^2+y^2-2ax- $-2by+a^2+b^2-r^2=x^2+y^2-16x+20y+20$ omame määramatute koeffitsientide võttel: $-2a=-16$, $-2b=$ $=20$, $a^2+b^2-r^2=20$, s. o. $a=+8$, $b=-10$, $r=12$.

Ellips.

36. Definitsioon. Fookused. Teljed.



Joon. 21.

Ellips on kõverjoon, mille täppide kauguste summa kahest kindlast täpist F_1 ja F_2 on jääv suurus (joon. 21).

F_1 ja F_2 on ellipsi **fookused** ehk **tulitäpid**, F_1F_2 aga **foo-**

kuste kaugus; lõigud AB ja CD on **teljed,** esimene **suur,** teine **väike.** Olgu $F_1F_2 = 2c$, $AB = 2a$ ja $CD = 2b$. Asetsegu ellipsi teljed koordinaatide telgedel, nii et algus O jagab nad osadeks $OA = OB = a$ — **suur pooltelg,** $OC = OD = b$ — **väike pooltelg,** ka $OF_1 = OF_2 = c$.

Ellipsi igal täpil on maksev võrdus $PF_1 + PF_2 = 2a$. Tõepoolest, arvestades lõikude absoluutsete väärtustega, võime kirjutada: $BF_1 = OB - OF_1 = a - c$ ja $AF_2 = OA - OF_2 = a - c$. Kaks suurust, mis võrduvad sama kolmandaga, on isekeskis võrdsed, s. o. $BF_1 = AF_2$. Ellipsi definitsiooni põhjal saame: $PF_1 + PF_2 = BF_1 + BF_2 = AF_2 + BF_2 = 2a$, kus BF_1 asemele on pandud temaga võrdne AF_2.

Et suurused a, b ja c on seotud võrdusega $a^2 - c^2 = b^2$, see tõendub kergesti, sest kujund COF_1 on püstkolmnurk, mille kaatetid on tuntud lõigud ja hüpotenuus $CF_1 = CF_2 = a$.

37. Ellipsi võrrand. Vaatleme ellipsi (joon. 21) jooksvat täppi P(x, y). Ehitame tema koordinaadid. Püstkolmnurkadest PF_1N ja PF_2N, kus $F_1N = OF_1 - ON = c - x$, $F_2N = OF_2 + ON = c + x$ ja $PN = y$, saame:

$$PF_1 = \sqrt{F_1N^2 + PN^2} = \sqrt{(c-x)^2 + y^2},$$

$$PF_2 = \sqrt{F_2N^2 + PN^2} = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}.$$

Järelikult

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

See ongi ellipsi võrrand; talle võib anda teise kuju. Kaotame juuremärgid ära ja lihtsustame:

$$[\sqrt{(c-x)^2+y^2}]^2 = [2a - \sqrt{(c+x)^2+y^2}]^2,$$

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c+x)^2+y^2} + c^2 + $$
$$+ 2cx + x^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(c+x)^2+y^2} = 4a^2 + 4cx,$$

$$a\sqrt{(c+x)^2+y^2} = a^2 + cx;$$

ruudime uuesti ja korraldame liikmeid:

$$a^2(c^2+2cx+x^2+y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2),$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

sest $a^2 - c^2 = b^2$. Jagame a^2b^2-ga, saame:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

See on ellipsi **kanooniline võrrand.**

Näide. Ellipsi väike telg on 8 ja fookuste kaugus 6. Leida võrrand.

$$b = \frac{8}{2} = 4,\ c = \frac{6}{2} = 3,\ a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 25,$$

järelikult $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

38. Ekstsentrisus. Ellipsi ekstsentrisuseks nim. fookuste kauguse ja suure telje suhet: $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Alati $e < 1$, sest $c < a$.

Näide. $e = \frac{4}{5}$, suur telg $= 20$. Leida ellipsi võrrand.

$e = \frac{2c}{20} = \frac{4}{5}$, millest $c = 8$; $b^2 = a^2 - c^2 = 10^2 - 8^2 = 36$.

Järelikult: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Märkus. Mida vähem on fookuste kaugus võrreldes suure teljega, seda vähem on ellipsi ekstsentrisus. Langevad fookused ühte, siis $e = 0$, ja ellips kaotab ovaalse kuju, ta muutub ringjooneks. Seepärast meie võime vaadelda ringjoont ellipsi erijuhuna, kus $e = 0$.

39. Ellipsi joonestamise viise. 1. Kinnitame nööri otsad fookustesse, hoiame tema pliiatsiga sirge ja veame ümber täppide F_1 ja F_2. Pliiatsi ots joonestab siis ellipsi (joon. 21).

2. Sirglõigul F_1F_2 (joon. 21) võtame täpi M. Fookustest tõmbame raadiustega MA ja MB kaared, need kaared lõikuvad neljas täpis (joonisel ainult kaks: F ning E), mis asetsevad ellipsil, sest $MA + MB = 2a$. Muudame M kohta ja ehitame uued täpid, kuni saame neid nii palju, et võime ellipsi joonestada.

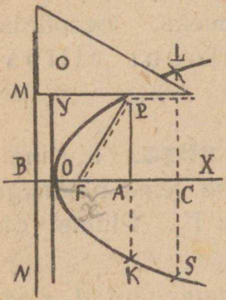
Parabool.

40. Definitsioon. Juhtjoon. Fookus. Ekstsentrisus. Parabool on kõverjoon, mille täppide kaugused antud sirgest MN ja täpist F, mis ei asetse sel sirgel, on võrdsed. Sirget MN kutsutakse **juhtjooneks**, aga täppi F **fookuseks** (joon. 22).

Tõmbame $PM \perp MN$ ja ühendame P ning F. Definitsiooni järgi $PF = PM$.

Parabooli ekstsentrisus $e = \frac{PF}{PM} = 1$.

41. Parabooli võrrand. Valime X-teljeks sirge, mis läheb läbi fookuse ja on risti juhtjoonega, Y-teljeks aga FB keskristjoone. $FB = p$ olgu teada. Ehitame jooksva täpi P koordinaadid OA ja PA. Tingimuse järgi $PF = PM$ (1). Püstkolmnurgast PFA saame:



Joon. 22.

$$PF = \sqrt{FA^2 + PA^2} = \\ = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

sest $FA = OA - OF = x - \frac{p}{2}$ ja $PA = y$.

$$PM = BA = OA + OB = x + \frac{p}{2}.$$

Kui paneme võrdusse (1) vastavad väärtused asemele, saame parabooli võrrandi:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

mis peale ruutimist ja lihtsustamist omab kuju

$$y^2 = 2px.$$

Näide. Paraboolil on antud täpp $(+6; -5)$. Leida võrrand.

$y^2 = 2px$; $(-5)^2 = 2p \cdot 6$, millest $p = \frac{25}{12}$; otsitav võrrand: $y^2 = 2 \cdot \frac{25}{12} x = \frac{25}{6} x$ ehk $y^2 = 4\frac{1}{6} x$.

42. Parabooli joonestamise viise. 1. Kinnitame nööri ühe otsa fookusesse ja teise püstkolmnurgakujulise joonlaua teravnurga tippu. Surume pliiatsiga nööri vastu üht kaatetit, mis olgu pöördud X-telje poole ja mille pikkus võrdugu nööri pikkusega, ja lükkame teist kaatetit mööda juhtjoont edasi. Pliiatsi ots joonestab siis parabooli osa (joon. 22).

2. Tõmbame X-teljele rea ristjooni PK, LS jne. Täpist F ehitame raadiustega AB, CB jne. kaared, mis lõikavad ristjooni. Iga ristjoone ja vastava kaare ühistäpp asetseb paraboolil.

Hüperbool.

43. Definitsioon. Teljed. Ekstsentrisus. Hüperbool on kõverjoon, mille täppide kauguste vahe kahest kindlast täpist F_1 ja F_2 (joon. 23) on jääv suurus. Tema koosneb kahest harust EAF ja PBL, mis kaugenevad lõpmatusse.

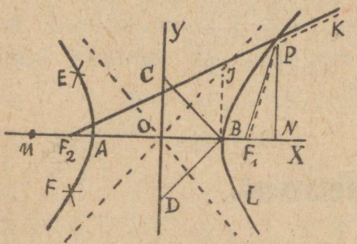
Suure ja väikse telje asemel, võrreldes ellipsiga, on hüperboolil **reaaltelg** $AB = 2a$ ning **imaginaartelg** $CD = 2b$; **fookuste kaugus** $F_1F_2 = 2c$. Täpid C ja D leiame, kui hüpotenuusist $OF_1 = c$ ja kaatetist $OB = a$ ehitame püstkolmnurgad COB ning DOB, s. o. b suurus määratakse ära võrdusega $b^2 = c^2 - a^2$.

Hüperbooli igal täpil on maksev võrdus $PF_2 - PF_1 = 2a$. Tõepoolest, antud definitsiooni järgi võime kirjutada: $PF_2 - PF_1 = BF_2 - BF_1$. Et aga $BF_2 = AF_2 + AB$ ja $BF_1 = AF_2$, siis $PF_2 - PF_1 = AF_2 + AB - AF_2 = AB = 2a$.

Ekstsentrisus: $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ on hüperboolil suurem kui 1, sest kolmnurgas PF_1F_2 on üks külg $F_1F_2 = 2c$

suurem kui kahe teise külje vahe $PF_2 - PF_1 = 2a$. Peale selle on joonisestki näha, et $2c > 2a$.

44. Hüperbooli võrrand. Valime koordinaatide telgedeks sirged, millel asetsevad hüperbooli teljed. Ehitame jooksva täpi P koordinaadid $ON = x$ ja $PN = y$. Avaldame püstkolmnurkade F_2PN ja F_1PN hüpotenuusid: $PF_2 = \sqrt{F_2N^2 + PN^2}$ ja $PF_1 = \sqrt{F_1N^2 + PN^2}$. Järelikult $PF_2 - PF_1 = \sqrt{F_2N^2 + PN^2} - \sqrt{F_1N^2 + PN^2} = 2a$. Et aga $F_2N = ON + OF_2 = x + c$, $F_1N = ON - OF_1 = x - c$ ja $PN = y$, siis



Joon. 23.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

See hüperbooli võrrand lihtsustub sarnaselt ellipsi võrrandiga:

$$[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}]^2 = [2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}]^2,$$
$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

ruutides ja lihtsustades uuesti, saame:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

sest $c^2 - a^2 = b^2$. Jagades a^2b^2-ga, leiame hüperbooli **kanoonilise võrrandi**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Näiteid. 1. Fookuste kauguse $2c = 20$ ja reaaltelje $2a = 10$ järgi leida hüperbooli võrrand ja ekstsentrisus.

$$c = 10, \ a = 5; \ b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 5^2 = 75.$$

$$\text{Jär. } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1 \text{ ja } e = \frac{2c}{2a} = \frac{20}{10} = 2.$$

2. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja telgede $x = 0$ ning $y = 0$ lõiketäpid.

Otsides hüperbooli lõiketäppe ordinaatteljega $x = 0$, peame nende võrrandid koos lahendama. Leiame, et $y = \pm bi$. Ordinaatide imaginaarsus on tunnuseks, et lõiketäppe ei ole. X-telge lõikab hüperbool täppides, mille abstsissid reaalsed: $x = \pm a$. — Siit selgub nimetuste imaginaar- ja reaaltelg mõte

45. Hüperbooli joonestamise viise.

1. Kinnitame nööri KPF_1 otsad fookusesse F_1 ja varva F_2K külge, sealjuures olgu nöör varvast lühem (joon 23). Surume pliiatsiga punktis P nööri vastu varba ja pöörame viimast punkti F_2 ümber. Pliiatsi ots joonestab siis hüperbooli osa. Tõepoolest, PF_2 ja PF_1 lähevad mõlemad nii palju lühemaks või pikemaks, kui palju pliiatsi ots edasi liigub, järelikult nende vahe ei muutu.

2. Raadiustega MB ja MA tõmbame fookustest ringjooned, nende lõiketäpid (joonisel kaks: E ja F) on hüperboolil, sest $MB - MA = 2a$. Muudame M kohta, ehitame uued täpid, kuni neid jatkub hüperbooli joonestamiseks.

46. Hüperbooli asümptoodid. Lahendame võrrandi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ordinaadi suhtes:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Et y oleks reaalne, ei tohi x tema avaldises vähem olla kui a. On aga x võrreldes a-ga õige suur, siis murd $\frac{a^2}{x^2}$ on peaaegu null ja ligikaudu võib võtta

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Neid sirgeid kutsutakse hüperbooli **asümptootideks.** x-si kasvades ligineb hüperbool ikka rohkem ja rohkem asümptootidele ja puutub viimaks neid lõpmatuses. Et see nii on, võib tõendada. Kirjutame selleks ühe asümptoodi kujul

$$Y = \frac{b}{a} X.$$

Ühisel abstsissil $X = x$ erinevad sirge ja hüperbooli ordinaadid suuruse

$$Y - y = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

võrra. Piiris, kui $x = \infty$, muutub see vahe määramatuks: $\infty - \infty$. Korrutades ja jagades aga teda avaldisega $x + \sqrt{x^2 - a^2}$, saame

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Kui nüüd $\lim x = \infty$ (lugeda: liimes x; ladina keeles: limes — piir), siis

$$\lim (Y - y) = \frac{ab}{\infty + \infty} = \frac{ab}{\infty} = 0.$$

Nii kaob ordinaatide vahe lõpmatuses ära, on 0. Sellepärast võib asümptooti lugeda hüperbooli puutujaks lõpmatuses.

Asümptoodi ehitamiseks tõmbame täppi B (joon. 23) abstsissteljele ristjoone, asetame sinna lõigu $BI = b$. Läbi O ja I tõmbame sirge. Samuti ehitatakse ka teine asümptoot.

47. Ülesandeid. 37. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 65$ ja sirge $3x + y = 25$ ühistäpid.

38. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ keskkoht ja raadius.

39. Missugune sirge läheb läbi ringjoonte $x^2 + y^2 = 2y$ ja $x^2 + y^2 = 2x$ lõiketäppide?

40. Ringjoonel on antud kolm täppi $(0; 0)$, $(+1; -2)$ ja $(+2; +1)$. Leida tema võrrand.

41. Ringjoonele $x^2 + y^2 = 25$ tõmmata täppi $(+3; +4)$ puutuja.

42. Ringjoonele $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 225$ on tõmmatud täppi, mille abstsiss $x = +11$, puutuja. Leida puutuja võrrand.

43. Missugune ringjoone $x^2 + y^2 = 144$ puutuja on paralleelne sirgega $3x = 2y$?

44. Võrrandi $3x^2 + 5y^2 = 2$ järele leida ellipsi poolteljed.

45. Leida ellipsi $x^2 + 2y^2 = 5$ ekstsentrisus.

46. Leida sirge $x = -6$ ja ellipsi $5x^2 + 3y^2 = 3$ ühispunktid.

47. Leida hüperbooli $x^2 - 3y^2 = 9$ poolteljed.

48. Paraboolil on antud täpp $(+3; +4)$. Leida võrrand.

49. Leida kõverate $x^2 + y^2 = 5$ ja $xy = 2$ ühistäpid.

50. Missugune sirge läheb läbi parabooli $y^2 = 8x$ täpi, mille ordinaat $= +2$, ja on risti X-teljega?

51. Missugune sirge läheb läbi kõvera $16x^2 + 25y^2 = 400$ täpi, mille abstsiss $x = +3$, paralleelselt sirgega $y = -\frac{3}{5}x - 9$? Tõendada, et otsitav sirge on kõvera puutuja.

52. Leida kõvera $x^2 + y^2 = 9$ puutujad, mis moodustavad sirgega $x = y$ nurgad 45^0.

53. Missugused sirged lähevad läbi hüperbooli $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ fookuste paralleelselt tema asümptootidega?

54. Tõendada, et sirge $x - 4y + 8 = 0$ on parabooli $y^2 = 2x$ puutuja, ja määrata puutetäpp.

55. Täpist $(-3; 0)$ on tõmmatud paraboolile $y^2 = 12x$ puutuja. Koostada tema võrrand.

56. Milline ellipsi $x^2 + 3y^2 = 4$ puutuja läheb läbi täpi $(+5; +3)$?

57. Täpist $(+1; +3)$ on tõmmatud hüperboolile $2x^2 - 3y^2 = 5$ puutuja. Koostada tema võrrand.

58. Leida ellipsi, ringjoone, parabooli ja hüperbooli puutujate võrrandid, kui antud on puutetäpi koordinaadid x_1 ja y_1.

59. Leida parabooli $y^2 = 10x$ puutujad, mis lähevad läbi tema lõiketäppide sirgega $y = 4x - 5$.

60. Ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ täppi $(-3; -4)$ on tõmmatud puutuja. Leida tema võrrand.

Vastused.

1. ± 7. **2.** Kolmandas. **3.** X-teljel. **4.** 13. **5.** $\sqrt{106}$. **6.** $(-1\frac{1}{2}; +1)$. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** $\sqrt{68}$; $\sqrt{106}$; $\sqrt{50}$. **9.** 5. **10.** 5; 5; $\sqrt{10}$. **11.** $(+4; -3)$; $(0; +3)$; $(+2; +1)$. Juhatus. Kolmnurga tippude (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) järgi koostame võrrandid: $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$, $\frac{x_1 + x_3}{2} = 3$, $\frac{x_2 + x_3}{2} = 1$. Neist saame x_1, x_2 ja x_3. Sarnaselt leiduvad y_1, y_2 ja y_3. **12.** 10. **13.** 43. **14.** 156. **18.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$; $\frac{x}{1\frac{3}{7}} + \frac{y}{-5} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$. **20.** Juhatus. Antud võrrandist saame: $y = -\frac{11}{8}x + \frac{7}{4}$, s. o. $k = -\frac{11}{8}$ ja $m = \frac{7}{4}$. **21.** $\frac{3x - 5y - 8}{\sqrt{34}} = 0$; $\frac{x - 6y + 1}{-\sqrt{37}} = 0$; $\frac{2x + 2y + 5}{-\sqrt{8}} = 0$. **22.** $8x - 3y = -17$. **23.** $x - 7y = 39$; $9x - 5y = 3$; $4x + y = 11$. **24.** Lõiketäpp: $(-\frac{2}{3}; +2\frac{1}{3})$. **25.** Pindala $= 5\frac{1}{2}$. **26.** $2\frac{1}{12}$. **27.** $tg\varphi = \frac{23}{36}$. **28.** Üks nurk $= 45^0$. **29.** $(-\frac{1}{2}; +2\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{14}; -1\frac{5}{14})$; $(+\frac{1}{2}; -2\frac{1}{2})$; $tg\varphi_1 = \frac{1}{2}$; $tg\varphi_2 = 7$; $tg\varphi_3 = -3$. **30.** $\frac{43}{\sqrt{58}}$. **31.** $7x - y = 13$; $3x + y = 7$; $x - 3y = -1$. **32.** Küljele $y = -2x + 1$ tõmmatud kõrgus: $y = \frac{1}{2}x + 3$.

33. J u h a t u s. Vaadelda kolme meelevaldset täppi, mis ei asetse ühel sirgel, kui kolmnurga tippe. Leida: 1) küljepoolitajate võrrandid, 2) esimese ja teise küljep. ühistäpp ning 3) teise ja kolmanda küljep. ühistäpp. Need täpid peavad ühtuma. **34.** J u h a t u s. Vt. ü. nr. 33. **35.** J u h a t u s. Vt. ü. nr. 33. **36.** $\frac{36}{\sqrt{130}}$; $\frac{18}{\sqrt{34}}$; $\frac{36}{\sqrt{10}}$. **37.** $(+7; +4)$, $(+8; +1)$. J u h a t u s. Lahendada antud võrrandid. **38.** $(+1; -2)$, $r = 2$. **39.** $y = x$. J u h a t u s. Lahutada antud võrrandid. **40.** $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$. J u h a t u s. Paneme võrrandisse $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ antud täppide koordinaadid x ja y asemele, saame kolm võrrandit, millest leiame a, b ja r. **41.** $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$. J u h a t u s. Puutuja on risti raadiusega tema otsapunktis. **42.** $3x + 4y = 69$ või $3x - 4y = 93$. **43.** $y = 1\frac{1}{2}x \pm 6\sqrt{13}$. J u h a t u s. Leida sirge, mis läheb läbi alguse risti antud sirgega. **44.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{5}}$. **45.** $\sqrt{0{,}5}$. **46.** Ei ole. **47.** 3; $\sqrt{3}$. **48.** $y^2 = 5\frac{1}{3}x$. **49.** $(+2; +1)$, $(+1; +2)$, $(-2; -1)$, $(-1; -2)$. **50.** $x = \frac{1}{2}$. **51.** $3x + 5y = 25$. J u h a t u s. Puutumise tõenduseks võib olla asjaolu, et kõveral ja sirgel on siis ainult üks ühistäpp. **52.** $x = \pm 3$; $y = \pm 3$. **53.** $y = \frac{3}{4}x \pm 3\frac{3}{4}$; $y = -\frac{3}{4}x \pm 3\frac{3}{4}$. **54.** $(+8; +4)$. **55.** L a h e n d u s. Vaadeldav täpp ei asetse paraboolil, sest ta ei rahulda tema võrrandit. Läbi täpi $(-3; 0)$ minevate sirgete võrrand on (vt. nr. 24): $y - 0 = k(x + 3)$ ehk $y = k(x + 3)$, mis koos parabooli võrrandiga annab ühistäpi jaoks: $k^2x^2 - 2(6 - 3k^2)x + 9k^2 = 0$ ehk $x = \frac{6 - 3k^2 \pm \sqrt{36 - 36k^2}}{k^2}$. Puutumise korral on ainult üks ühistäpp, nii et $36 - 36k^2 = 0$, millest $k = \pm 1$. Jär. $y = \pm(x + 3)$, mis ongi otsitav võrrand. **56.** $x - 3y + 4 = 0$;

$23x - 21y = 52$. **57.** $3y - 4x = 5$; $16x + 3y = 25$.

58. Lahendus ellipsile. Vaatleme ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ täppe (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), millest esimene puutetäpp. Lõikajale, kui neist täppidest määratud sirgele (vt. nr. 24), võime kirjutada võrrandi $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ehk $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (1). Täpid rahuldavad ellipsit: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ ja $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$; lahutades saame: $\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0$, millest $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$. Lõikajast saab puutuja, kui $x_2 = x_1$ ja $y_2 = y_1$, nii et siis $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. Võrrand (1) muutub aga siis otsitavaks võrrandiks: $y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$ millele võib anda kuju $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, kui arvestada, et $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. — Ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ puutuja võrrand: $xx_1 + yy_1 = r^2$. Parabooli p. v.: $yy_1 = p(x + x_1)$. Hüperbooli p. v.: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$. **59.** $2y - 2x - 5 = 0$; $8x + 4y + 5 = 0$.

60. $3x + 4y + 25 = 0$.

Lõppsõna.

Selles raamatus sisaldub analüütilise geomeetria alalt õppematerjal, mis on läbi mindud autori korraldatud Matemaatika ja füüsika kursustel. Aluseks on koostamisel olnud Matemaatika Õpetamise Komisjoni toimetusel ilmunud Keskkooli matemaatika õppekava projekt. Oskussõnad on peaaegu kõik võetud Matemaatika sõnastikust (III tr.). Nimetamisväärt erandiks oleks vahest täisnurkne (õigenurkne) kolmnurk, mille asemel on tarvitatud püstkolmnurk. Põhjused on järgmised: 1) Sõna täisnurk on kohasem nurga jaoks, mille suurus 360°, sest täispöördele peaks vastama ka täisnurk. Saksa keeles: Vollwinkel = 360°. 2) Püstkolmnurk on parem kui õige**nurkne** kolm**nurk**. 3) Nimetused — täisnurkne projektsioon, täisnurksed koordinaadid, täisnurkne nelinurk asetatakse ka teistega: püstprojektsioon, püstkoordinaadid, püstkülik.

23. jaanuaril 1928.

O. K.

Sisukord.

Samalt autorilt ilmuvad:

1. **Trigonomeetrilised geomeetria ülesanded lahendustega.**

2. **Stereomeetrilised ülesanded lahendustega ma trigonomeetriata).**

HIND 75 SENTI.