

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ

ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

799

KONSTRUKTSIOONIDE

ОПТИМААЛНЕ ПРОЕКТЕЕРИМИНЕ

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHK 799 ВЫПУСК ОСНОВАН В 1893.г

KONSTRUKTSIOONIDE
ОПТИМААЛНЕ ПРОЕКТЕЕРИМИНЕ
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ
КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1988

Redaktsioonikolleegium: Ü.Lepik (esimees), M.Heinloo,
J.Lellep (vastutav toimetaja), G.Olenev.

Редакционная коллегия: Д.Лепик (председатель), М.Хейн-
лоо, Я.Леллеп (ответственный редактор), Г.Оленев.

Arh.
Tartu Riiklikooli
Raamatukogu
9774

Ученые записки Тартуского государственного университета.

Выпуск 799.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ.

Труды по математике и механике.

На русском языке.

Резюме на английском языке.

Тартуский государственный университет.

ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Оликооля, 18.

Ответственный редактор Я. Леллеп.

Подписано к печати 25.01.1988.

МВ 00249

Формат 60х90/16.

Бумага писчая.

Машинопись. Ротапринт.

Учетно-издательских листов 8,44. Печатных листов 10,0.

Тираж 500.

Заказ № 17.

Цена I руб. 70 коп.

Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.

2 - 2

К 300-ЛЕТИЮ ВЫХОДА ТРАКТАТА И.НЬЮТОНА
"МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ"

Ю.Лепик, Д.Лумисте

Тартуский государственный университет

К началу 80-х годов XVII столетия Исаак Ньютон являлся уже широко известным ученым, который имел ряд блестящих открытий в механике, физике и астрономии. Вследствие скромности Ньютона большинство этих работ были не опубликованы. Выдающийся английский астроном Эдмунд Галлей (E.Halley) убеждал Ньютона издать его основные результаты. После некоторого раздумья Ньютон согласился и после двухлетней напряжённой работы представил Лондонскому королевскому обществу свой трактат "Математические начала естествознания" ("Philosophiæ naturalis principia mathematica"). Трактат был напечатан в 1687 году. При жизни Ньютона он переиздавался ещё два раза - в 1713 и 1725 годах.

Содержание трактата Ньютона можно разделить на две неравные по объёму части. Первая часть состоит из предисловия и двух разделов под названием "Определения" и "Аксиомы или законы движения". Здесь Ньютон даёт понятия массы тела, абсолютного времени и пространства, а также формулирует основные законы механики (законы Ньютона).

Вторая часть разбита Ньютоном на три "книги". Две первые из них носят одинаковое название - "О движении", а третья - "О системе мира". Основной вклад этих книг - закон всемирного тяготения, на основе которого Ньютон вывел дедуктивно как закон свободного падения тел на Землю, так и законы Кеплера о движениях планет, ранее установленные из наблюдений. Кроме того, здесь решены задачи практического характера: о движении тел в сопротивляющейся среде, ряд проблем гидродинамики, баллистики, теории света и звука. Для решения конкретных задач механики и физики пришлось развивать и математический аппарат - это привело к созданию дифференциального и интегрального исчисления.

Трактат Ньютона "Математические начала естествознания" является до сих пор основанием классической механики, теоретической астрономии и физики. Лагранж назвал этот труд

"величайшим произведением человеческого ума".

Но трактат Ньютона имеет и некоторые недостатки. Изложение материала несколько архаично, в дифференциальном и интегральном исчислении он избегал использования алгебраической символики и применял для этого более сложный аппарат теории конических сечений и теории пропорций.

Все это сделало трактат Ньютона трудночитаемым и было причиной того, что этот трактат долгое время не был признан и понят, особенно на континенте. Если в Англии преподавание ньютоновских взглядов началось в Оксфорде в 1694 г. (см. [1], с. 251), то на континенте в механике господствовали взгляды Декарта и созданный Лейбницем более удачный аппарат дифференциального и интегрального исчисления, базирующийся на теории бесконечно малых. Исследователь истории учения Ньютона, профессор в Кембридже У.У.Р. Бол (см. [2]), указывает в своей книге [3], с. 337: "Хотя почти все компетентные критики признавали законность следствий, все же прошло некоторое время, прежде чем это учение оказало влияние на бытовавшую тогда в образованных кругах систему мировоззрения. Я склонен утверждать (но в этой части мнения весьма расходятся), что спустя десять лет после выхода это учение стало в Англии общепризнанным как правильное объяснение законов Вселенной; на континенте оно было принято спустя двадцать лет, исключая Францию, где гипотезы Декарта оттеснили его, пока в 1733 г. Вольтер не взял теорию Ньютона под свою защиту". Первое издание трактата Ньютона на европейском континенте (перевод на французский язык с предисловием Вольтера) было осуществлено лишь в 1759 году, т.е. через 72 года после его первого издания в Англии.

В свете сказанного интересно отметить тот факт, что преподавание по "Началам" И. Ньютона началось в Тартуском университете уже в конце XVII столетия. Когда основанный в 1632 году университет возобновил после некоторого перерыва свою деятельность в 1690 году под названием "Academia Gustava-Carolina" (см. [4]), то королевское назначение на место профессора математики получил швед по национальности С. Димберг, до этого экстраординарный профессор в университете Турку (Åbo). Свен Димберг (Sven Dimberg, 1661 - 1731), сын пастора из Свинерсберга, воспитанника Тартуского университета, получил университетское образование в Упсальском

университете в 1685 г., а затем был направлен в заграничную поездку с целью подготовиться к преподавательской деятельности. Точный маршрут молодого С. Димберга неизвестен, но мы можем утверждать, что в Англии он побывал (об этом см. [5], [6]). Это было время выхода "Начал" И. Ньютона. Как мы дальше увидим, эта книга была известна Димбергу, и вполне вероятно, что он приобрёл её во время этой поездки в Англию. Относительно использования им этой книги в преподавании в Турку, где он работал с 1688 года, ничего неизвестно. Но получив место ординарного профессора в Тарту (известного тогда на Западе под названием *Dorpat*), С. Димберг скоро объявил лекции по этому трактату. В программе на 1690/91 уч. г. (фотокопия опубликована в [7] между с. 136 и 137) указывается: «Свен Димберг, профессор математики, прежде всего изложит в общем порядке „Избранные Начала“ как по Евклиду, так, и не недавно созданному методу, а также анализ, и дополнительно объяснит Оптику и Механику ...». Если здесь можно ещё сомневаться, имеется ли под «недавно созданным методом» в виду метод «Начал» И. Ньютона, то в следующих известных нам программах уже прямо указывается на И. Ньютона. В 1980 году проф. Х. Пийримяэ, работая в шведских архивах, нашёл в библиотеке Упсальского университета (под шифром: Univ. progr. Ryssland) ранее неизвестную программу на 1694/95 уч. г. (фотокопия выдержки из неё опубликована в [5]), содержащую следующие строки: «Свен Димберг, профессор математики, завершив изложение анализа так называемых Замечательных начал, которыми он занимался время от времени, приступит к объяснению Астрономических гипотез И. Ньютона, которые он восхвалял в прошедшем году. Едва ли следует жалеть полезные часы, выделенные на анализ и коники, для сих астрофильных занятий. К этому он добавил бы обещанную в прошлом году теорию замкнутых коник ...» Слово «коники» означает здесь конические сечения, теория которых является одним из основных математических методов в трактате И. Ньютона, как было выше указано. Заметим, что Димберга не следует упрекать за применение слова «гипотезы», так как знаменитая фраза Ньютона: «Гипотезы я не выдумываю» появилась лишь во втором издании его «Начал», в последнем общем объяснении.

О программе на 1696/97 уч. г., экземпляр которой находился до второй мировой войны в Риге, но был вывезен нем-

нами вместе со всем фондом, в книге Г.Ф.Рауха [8] имеется следующее упоминание: „Именно Димберг привёз учение Ньютона в Тарту; 1695 - 1696 гг. он читает математику по „Contemplationes Neutorianae“ (программа лекций 1696 г.; он объявил это продолжением лекций, начатых в предыдущем году)“.

Возможные сомнения относительно того, воспользовался ли Димберг именно книгой И.Ньютона 1687 года, рассеивает полностью найденная проф. Х.Пийримяэ программа на 1697/98 г. Отдельные пункты этой программы почти дословно совпадают с заглавиями соответствующих частей этой книги: „Свен Димберг, профессор математики, открыто и в общем порядке пойдёт дальше в анализе математических начал естествознания Ньютона, включит также определения и аксиомы, изложенные в предыдущем году, и затем - важные теоремы статики и учения о рычаге, выводимые путём следствий; автор объявляет, что изучаться будут также общие леммы о методе первых и последних отношений и, разумеется, те предложения, которые имеются в учении о центростремительных силах; учение о движении тел по окружности и по эксцентрическим коническим сечениям; и из остальной части этих Начал объяснит систему мира из третьей книги.“

Для сравнения приводим первый абзац оглавления „Начал“ И.Ньютона:

	стр.
„Определения	I
Аксиомы или законы движения	13
ПЕРВАЯ КНИГА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ	
I часть. О методе первых и последних отношений	28
II часть. Об открытии центростремительных сил	38
III часть. О движении тел по эксцентрическим коническим сечениям	54
.....	”

В предисловии к ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ О СИСТЕМЕ МИРА, к которой Димберг предполагал перейти после изложения этого материала, Ньютон объясняет общую композицию своего произведения и роль в ней первых двух книг: „Я вообще не настаиваю, чтобы каждый должен обязательно изучить каждое предложение в этих книгах, потому что их там так много, что

это требовало бы очень много времени даже от математически хорошо подготовленного читателя. Достаточно, если ознакомиться тщательно с определениями, с законами движения и с тремя первыми частями из первой книги, после чего можно перейти к книге о системе мира." Мы можем констатировать, что именно так Димберг и поступил, и это ещё раз свидетельствует, что он тщательно изучил этот замечательный трактат И.Ньютона.

Таким образом, лекции по „Началам" Ньютона проводились в Тартуском университете по крайней мере с 1693 года, а возможно ещё раньше, причем к 1698 году предполагалось дойти до объяснения движения небесных тел по закону гравитации. Не все объявленные лекции состоялись; об этом см. [5] и [6]. Не несомненно одно: молодой Свен Димберг был одним из первых учёных на европейском континенте, который сумел достойно оценить ценность „Начал" Ньютона и приобщить к ним и своих слушателей в Тартуском университете. Можно лишь сожалеть, что исторические события - Северная война, почти 100-летний перерыв в деятельности Тартуского университета и др. не дали Димбергу возможности дальнейшей профессорской деятельности в Тарту. Не удалось ему устроиться и в других университетах (об этом см. [5] и [6]). Его фамилию можно в наши годы найти только в изложениях истории Тартуского университета (см. [4] и указанную там литературу) и истории шведской науки [9], в которых он упоминается как ранний пропагандист учения Ньютона. В связи с празднованием 300 - летия выхода основного трактата Ньютона яркая, но эпизодическая деятельность Димберга в этом деле в Тарту заслуживает особого внимания.

Литература

1. Дорфман Я.Г., Всемирная история с древнейших времён до конца XVIII века. М., 1974.
2. Ball W.W.R., Essay on the Genesis, Contents and History of Newtons Principia. London, 1893.
3. Ball W.W.R., A short account of the History of Mathematics. London, 1922.
4. Tartu ülikooli ajalugu. I. 1632 - 1798. Tallinn, "Valgus", 1982.
5. Lumiste Ü., Piirimäe H., Sven Dimberg - Newtoni õpetuse varane propageerija Tartu ülikoolis 1690. aastail. Tartu ülikooli ajaloo küsimusi. XI. Tartu, 1981, 26 - 53.
6. Лумисте Ü., Пийримяэ Х., Шведский учёный Свен Димберг - ранний пропагандист учения Ньютона в Тартуском университете. Скандинавский сборник. XXVII. Тарту, 1982, 164 - 181.
7. Bergman J., Universitet i Dorpat under svenska tiden. Uppsala o. Stockholm, 1932.
8. Rauch G.v., Die Universität Dorpat und das Eindringen der frühen Aufklärung in Livland 1690 - 1710. Essen, 1943.
9. Lindroth S., Svensk lärdomshistoria. Stormaktstiden. Stockholm, 1975.

АНАЛИЗ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ БАЛОК,
ПОТЕРЯВШИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Ю. Лепик

Тартуский государственный университет

Анализ послекритической стадии тонкостенных конструкций, потерявших устойчивость за пределом упругости, связан с большими затруднениями математического характера, вследствие чего имеется небольшое число работ, посвященных этой задаче.

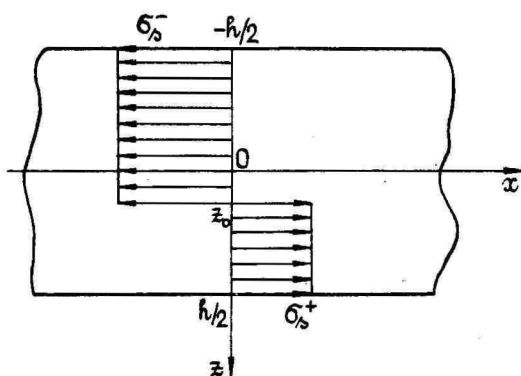
На основании имеющихся работ можно сделать следующие выводы о поведении пластических конструкций в послекритической стадии. После потери устойчивости в конструкции возникает зона разгрузки. Уже при небольших прогибах внутри этой зоны появляется зона вторичных пластических деформаций, которая развивается очень быстро и распространяется на большую часть зоны разгрузки. Таким образом, с развитием прогибов между зонами пластических и вторичных пластических деформаций остается лишь узкая зона упругой разгрузки. Все это приводит к мысли решать такие задачи при помощи модели жесткопластического тела. Эта идея в случае сжатых балок реализуется в данной статье.

В § 1 работы рассматривается сжатая балка из идеально-пластического материала, пределы текучести материала при растяжении и сжатии считаются различными. Получены зависимости нагрузка-прогиб для разных видах закреплений.

С целью оценивать влияние упрочнения в § 2 исследуется балка из линейно упрочняющегося жесткопластического материала (ограничивается лишь случаем балок со свободно опертыми концами). Полученные численные результаты представлены в виде графиков.

§ 1. Балка из идеально-пластического материала

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения с высотой h и шириной B . Пределы текучести материала при растяжении и сжатии обозначим символами σ_s^+ , σ_s^- . Распределение нормального напряжения σ вдоль высоты балки имеет указанный на фиг. 1 вид (при $x = x_0$ возникает пластический шарнир).



Фиг. I

Продольная сила N_0^* и изгибающий момент M_0^* в предельном состоянии согласно фиг. I определяется из формул

$$\begin{aligned} N_0^* &= 0,5 B h (\sigma_s^+ - \sigma_s^-) - B z_0 (\sigma_s^+ + \sigma_s^-), \\ M_0^* &= 0,5 B (\sigma_s^+ + \sigma_s^-) \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right). \end{aligned} \quad (I)$$

Исключая из этих соотношений координату z_0 и переходя к безразмерным величинам

$$N_0 = \frac{2N_0^*}{B h (\sigma_s^+ + \sigma_s^-)}, \quad M_0 = \frac{8M_0^*}{B h^2 (\sigma_s^+ + \sigma_s^-)}, \quad \beta = \frac{2\sigma_s^-}{\sigma_s^+ + \sigma_s^-}, \quad (2)$$

можем представить уравнение кривой текучести в форме

$$M_0 = \beta(2 - \beta) + 2(1 - \beta)N_0 - N_0^2. \quad (3)$$

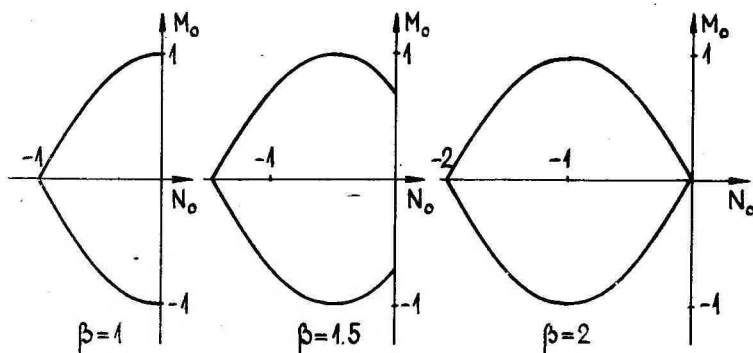
При выводе (3) мы допустили, что зона растяжения возникает у края $z = h/2$. Тем же способом можно исследовать и случай, когда зона растяжения возникает вблизи края $z = -h/2$. Нетрудно проверить, что в таком случае формула (3) остается применимой, если заменять там $M_0 \rightarrow -M_0$.

Для реальных материалов $0 \leq \sigma_s^+ \leq \sigma_s^-$, следовательно, коэффициент β изменяется в пределах

$1 \leq \beta \leq 2$. Значение $\beta = 1$ соответствует случаю

одинаковых пределов текучести при растяжении и сжатии; при $\beta = 2$ имеем $\sigma_0^+ = 0$ (т.е. материал не может принимать растягивающие напряжения).

Кривая текучести для трех значений β представлена на фиг. 2.



Фиг. 2

Имея в виду, что в дальнейшем исследуются сжатые балки, эти диаграммы мы составили только для значений $N_0 < 0$.

Рассмотрим теперь балку длиной ℓ под действием продольной сжимающей силы P^* . Выберем координатную ось x вдоль оси балки, начало координат поместим в левом конце балки. Если сила P^* достигает критической, начинается продольный изгиб балки. Для того, чтобы балка находилась и в послекритической стадии в равновесии, надо с увеличением прогибов уменьшить силу P^* . Другими словами, если через f^* обозначить максимальный по длине балки прогиб, то нам следует найти зависимость $\varphi(f^*, P^*) = 0$.

Ограничимся случаем «среднего прогиба», когда прогибы являются соизмеримыми с высотой балки. В случае жесткопластического материалов отдельных сечениях балки возникают пластические шарниры, а отрезки балки между ними остаются жесткими. Обозначим координаты двух соседних шарниров через x_i^* и x_{i+1}^* (в совокупность точек x_i^* включаем и координаты концевых сечений $x^*=0$ и $x^*=\ell$). Из условия равновесия элемента балки вытекает уравнения

$$N^* = -P^*, \quad M^*(x^*) = M^*(x_i^*) + P^*[\omega^*(x^*) - \omega^*(x_i^*)] \quad \text{для } x^* \in [x_i^*, x_{i+1}^*].$$

Здесь N^* , M^* — продольная сила и изгибающий момент, ω^* — прогиб.

Переходя к безразмерным величинам

$$x = \frac{x^*}{l}, \quad P = \frac{2P^*}{Bk(\delta_s^+ + \delta_s^-)}, \quad M = \frac{8M^*}{Bk^2(\delta_s^+ + \delta_s^-)}, \quad \omega = \frac{\omega^*}{h},$$

можем эти уравнения представить в форме

$$N_0 = -P, \quad M(x) = M(x_i) + 4P[\omega(x) - \omega(x_i)] \quad \text{для } x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (4)$$

В шарнирных сечениях имеем $M(x_i) = \pm M_0$, кроме того, должно быть выполнено уравнение (3). Для получения действительного решения следует проверить, выполнено ли $|M(x)| < M_0$ для $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ при заданном $N_0 = -P$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

I. Если концы балки $x = 0$ и $x = l$ свободно оперты, то пластический шарнир возникает в центре $\bar{x} = 0,5$, и мы имеем

$M(0,5) = M_0$. Так как $x_i = 0$, $\omega(x_i) = 0$, $M(x_i) = 0$, то из уравнений (4) находим при $x = 0,5$, что $M_0 = 4Pf$, где $f = \omega(0,5)$. Подставляя этот результат в уравнение (3) и учитывая, что $N_0 = -P$, получим

$$f = \frac{1}{4} \left[\frac{\beta(2-\beta)}{P} + 2(\beta-1) - P \right]. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (5) остается в силе и в случае консольной балки с заделанным концом $x = 0$.

Если концы балки $x = 0$ и $x = l$ заделаны, то в этих сечениях возникает отрицательные предельные моменты $M(0) = -M_0$,

$M(l) = -M_0$, а в середине балки имеет место пластический шарнир и $M(0,5) = M_0$.

На основании уравнений (4) имеем

$$M_0 = -M_0 + 4Pf$$

и с учетом кривой текучести (3) находим

$$f = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta(2-\beta)}{P} + 2(\beta-1) - P \right]. \quad (6)$$

Следовательно, при одинаковых значениях P прогибы жестко заделанной балки в два раза больше, чем у свободно опертой балки (это означает, что с развитием прогибов в случае балки с заделанными концами нагрузка P уменьшается более медленно, чем при свободно опертых балках).

Критическую нагрузку находим из условия $f \rightarrow 0$; выясняется, что во всех трех задачах $P_{кр} = \beta$. Это и понятно, так как в случае материала без упрочнения критическая нагрузка совпадает с предельной.

Из формул (5) и (6) вытекает ещё, что при $f \rightarrow \infty$ имеем $P \rightarrow 0$, т.е. не существует нижней критической нагрузки. На первый взгляд, можно полагать, что это обстоятельство обусловлено тем, что мы пренебрегали упрочнением материала. Этот вопрос мы исследуем более подробно в следующем параграфе.

§2. Учет упрочнения материала

Рассмотрим линейно упрочняющееся жесткопластическое тело с идеальным эффектом Баушингера. Для простоты считаем, что пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы. В таком случае связь между напряжением σ и деформацией ϵ следующая:

$$\sigma = \pm \sigma_0 + E' \epsilon, \quad (7)$$

где E' - касательный модуль.

На основании гипотезы Бернулли имеем

$$\epsilon = \epsilon_0 + z\kappa = \epsilon_0 - z \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}}$$

В нейтральном слое $z = z_0$ имеем $\epsilon = 0$ и, следовательно,

$$\epsilon = - (z - z_0) \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}}$$

С учетом этого зависимость (7) приобретает вид

$$\sigma = \sigma_0 \operatorname{sgn}(z - z_0) - E'(z - z_0) \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}} \quad (8)$$

Вычислим продольную силу N^* и изгибающий момент M^* :

$$N^* = B \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s dz = -2B\sigma_s z_0 + E' B h z_0 \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}},$$

$$M^* = B \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s z dz = B\sigma_s \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right) - \frac{1}{12} E' B h^3 \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}}.$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$N = \frac{N^*}{\sigma_s B h}, \quad M = \frac{4M^*}{\sigma_s B h^2}, \quad \alpha = \frac{2x^*}{l},$$

$$w = \frac{w^*}{h}, \quad \eta = \frac{2z_0}{h}, \quad \gamma = \frac{4E' h^2}{\sigma_s l^2} \quad (9)$$

и найдем

$$N = -\eta + \frac{1}{2} \gamma \eta w'',$$

$$M = 1 - \eta^2 - \frac{1}{3} \gamma w'' \quad (10)$$

Учитывая, что
(10) получим

$$N = -P = -P^*/\sigma_s B h, \quad \text{из системы}$$

$$\eta = \frac{P}{1 - 0,5 \gamma w''} \quad (11)$$

В дальнейшем ограничимся лишь случаем свободно опертой балки, тогда имеем $M^*(x^*) = P^* w^*(x^*)$ или в безразмерных величинах

$$M(x) = 4P w(x) \quad (12)$$

Ввиду симметрии можно рассматривать лишь одну половину балки; начало координат поместим в центре балки.

Более подробный анализ показывает, что в случае упрочнения материала пластические шарниры не возникают в отдель-

ных сечениях балки, а пластически деформируется некоторая конечная область $x \in [0, \xi)$. Остальная часть балки $x \in (\xi, 1]$ остается жесткой. В пластической области должны быть выполнены уравнения (I0) - (I2), в жесткой области - только уравнение (I2). Так как при $x \in (\xi, 1]$ балка сохраняет свою прямолинейную форму, то зависимости $w(x)$ и $M(x)$ в этой области являются линейными функциями.

Для пластической области из (I0) - (I2) вытекает, что

$$4Pw = 1 - \frac{P^2}{(0,5\gamma w'' - 1)^2} - \frac{\gamma}{3} w'' \quad (I3)$$

Для решения этого дифференциального уравнения введем параметр $\psi = w''$. Кроме того, обозначим $\varphi = -w'$, тогда

$$\psi = w'' = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dw}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dw} = \varphi \frac{d\varphi}{dw} \quad (I4)$$

Пусть $w(0) = f$, $w(\xi) = f_1$. Так как мы имеем $\psi = w'' = 0$ в жесткой области $x \in (\xi, 1]$, то естественно полагать, что $\psi(\xi-) = 0$. Отсюда мы получим для пластической области следующие краевые условия:

$$\psi = \psi_0 < 0, \quad \varphi = 0, \quad w = f \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (I5)$$

$$\psi = 0, \quad \varphi = \frac{f_1}{1-\xi}, \quad w = f_1 \quad \text{при} \quad x = \xi.$$

Переходим теперь к интегрированию уравнения (I3), которое можно переписать в форме

$$4Pw = 1 - \frac{P^2}{(0,5\gamma\psi - 1)^2} - \frac{\gamma}{3}\psi \quad (I6)$$

Из (I4) следует, что $\varphi d\varphi = \psi dw$, где дифференциал можно выразить через ψ из уравнения (I6) в виде

$$4Pdw = \gamma \left[\frac{P^2}{(0,5\gamma\psi-1)^3} - \frac{1}{3} \right] d\psi. \quad (17)$$

Интегрирование уравнения $\varphi d\varphi = \psi dw$ с учетом условия $\varphi = 0$ при $\psi = \psi_0$ даст

$$\varphi^2 = \frac{\gamma}{12P} (\psi_0^2 - \psi^2) + \frac{P}{\gamma} \left[\frac{\gamma\psi_0 - 1}{(0,5\gamma\psi_0 - 1)^2} - \frac{\gamma\psi - 1}{(0,5\gamma\psi - 1)^2} \right]. \quad (18)$$

Из соотношений (16) - (18) находим, принимая $x = \xi$, что

$$4Pf = 1 - \frac{P^2}{(0,5\gamma\psi_0 - 1)^2} - \frac{\gamma\psi_0}{3}, \quad 4Pf_1 = 1 - P^2, \quad (19)$$

$$\left(\frac{f_1}{1 - \xi} \right)^2 = \frac{\gamma}{12P} \psi_0^2 + \frac{P}{\gamma} \left[1 + \frac{\gamma\psi_0 - 1}{(0,5\gamma\psi_0 - 1)^2} \right]. \quad (20)$$

Так как $\varphi = -dw/dx$, то имеем ещё

$$\xi = - \int_{\psi=\psi_0}^{\psi=0} \frac{dw}{\varphi} = \int_{\psi_0}^0 G(\psi, \psi_0) d\psi, \quad (21)$$

где функция $G(\psi, \psi_0)$ определена из формул (17) - (18). Так как $\varphi = 0$ при $\psi = \psi_0$, то интеграл (21) является несобственным. Его можно вычислить следующим образом. Зададим некоторое малое число $\varepsilon > 0$ и разделим интеграл на две части

$$\int_{\psi_0}^0 G(\psi, \psi_0) d\psi = \int_{\psi_0}^{\psi_0 + \varepsilon} G(\psi, \psi_0) d\psi + \int_{\psi_0 + \varepsilon}^0 G(\psi, \psi_0) d\psi. \quad (22)$$

Для вычисления первого интеграла у функции $G(\psi, \psi_0)$ выделим особенность $(\psi - \psi_0)^{-1/2}$, а остальную часть разложим в ряд по степеням $\psi - \psi_0$; принимая из этого ряда лишь один член, получаем

$$G(\psi, \psi_0) \approx \frac{1}{2\sqrt{\psi - \psi_0}} \sqrt{-\frac{\gamma}{2\psi_0} \left[\frac{1}{3P} - \frac{P}{(0,5\gamma\psi_0 - 1)^3} \right]}$$

Путем интегрирования по ψ находим

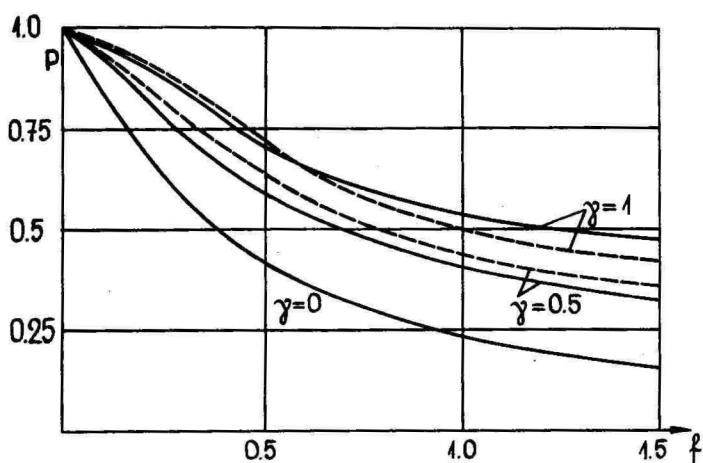
$$\int_{\psi_0}^{\psi_0 + \varepsilon} G(\psi, \psi_0) d\psi = -\sqrt{\frac{\gamma \varepsilon}{2\psi_0} \left[\frac{P}{(0,5\gamma\psi_0 - 1)^3} - \frac{1}{3P} \right]} \quad (23)$$

Второй интеграл в равенстве (22) вычисляем численно.

Выбор величины ε зависит от величины γ , но проведенные вычисления показали, что достаточной точности можно достигнуть, принимая $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$ или $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$.

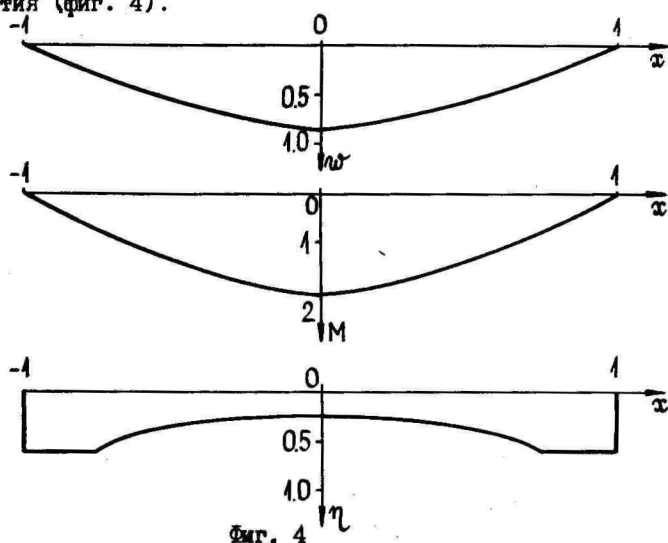
Алгоритм проведения вычислений следующий. Будем считать параметр γ и безразмерную нагрузку P заданными. Задаем для ψ_0 некоторое пробное значение; из формул (18) - (19) определяем функции $\varphi(\psi)$ и $d\omega$. Затем вычисляем несобственный интеграл (21) и, таким образом, находим границу пластической области ξ . Ту же величину определяем и по формулам (19) - (20). Найденные два значения для ξ в общем случае не совпадают, и нам приходится несколько изменять значение ψ_0 с целью добиться совпадения обоих значений для ξ . Если эта задача решена, то вычисляем прогибы по формуле (16). Изменяя параметр P , можем построить для заданного γ кривую $f = f(P)$.

Конкретные вычисления были проведены для $\gamma = 0,5$ и $\gamma = 1,0$. Результаты представлены на фиг. 3 (сплошные линии).



Фиг. 3

На той же фигуре представлена и кривая $f = f(P)$ для неупрочняющегося материала ($\gamma = 0$). Для случая $P = 0,6$; $\gamma = 1$ были построены ещё кривые $w = w(x)$, $M = M(x)$, $\eta = \eta(x)$, характеризующие форму прогибов, распределение момента и линию раздела зон растяжения и сжатия (фиг. 4).



Фиг. 4

Пластическая область в случае данного примера распространяется до $\xi = 0,77$.

Исследование закритической стадии упругопластических пластин проводилось и в работе [1]. Во втором пункте этой статьи рассматривается цилиндрический изгиб прямоугольной пластины со свободно опертыми краями; задача решается методом Галеркина, причем прогиб задается в форме

$w = f \sin \left[\frac{\pi}{2} (1 - x) \right]$. Упрочнение считается линейным, ограничиваемся идеальным эффектом Баушингера. Эта задача весьма близка к рассмотренной выше задаче. Поэтому представляет интерес сравнить выводы работы [1] с нашими результатами.

В работе [1] был применен параметр $\mu = e_s l^2 / h^2$, где e_s - интенсивность деформаций на пределе текучести. Так как $e_s = \sigma_s / E$, то на основании формул (9) имеем

$$\gamma = 4 \frac{E'}{E} \frac{1}{\mu}$$

Следуя работе [1], выбираем $E'/E = 0,05$; следовательно, значениям $\mu = 0,2$ и $\mu = 0,4$ соответствуют значения $\gamma = 1$ и $\gamma = 0,5$. Зависимости $f = f(P)$, найденные в [1], отмечены на фиг. 3 пунктирными линиями.

Как видно, они мало отличаются от кривых, найденных в данной работе. Отсюда можно сделать вывод, что влияние упругих деформаций в действительности несущественно и мы можем (по крайней мере в случае данной задачи) получить вполне приемлемые результаты на основании концепции жесткопластического материала.

Литература

1. Лепик Ю.Р., Сакков Э.Э., Исследование закритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости. Механика полимеров, 1986, №5, 881 - 886.

**Analysis of the postcritical stage
of rigid-plastic beams**

U. Lepik

Summary

Analysis of the postcritical stage of structures in case of which the bifurcation has taken place beyond the limit of elasticity is mathematically very complicated and therefore only few papers about this problem are available. It has been shown that already in the case of relatively small deflections in the structure regims of secondary plastic deformation appear increasing rapidly with deflections. Due to this effect the primary and secondary plastic deformations quite soon begin to dominate in the structure and there remains only a narrow zone of elastic unloading between them. This circumstance provokes the idea of neglecting the elastic deformations altogether and solving the problems in question with the aid of the hypothesis of a rigid-plastic body. Such an analysis has been carried out in the present paper.

In Section 1, beams of ideal rigid-plastic material are considered. The yield stresses for tension and compression are regarded different. Load-deflection curves for simply supported, clamped and console beams are put together.

In Section 2 simply supported beams of rigid-plastic material with linear strain hardening are examined. Load-deflection curves are shown in Fig. 3. These results are compared with the outcomes of paper [1], where the same problem has been solved for elastic-plastic material (broken lines in Fig. 3). The conclusion is made that at least for the present case the influence of elastic deformations is insignificant.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР К ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Я. Ладлеп, С. Ханнус

Тартуский государственный университет

Задачи определения оптимального расположения дополнительных опор к балкам, пластинам и оболочкам стали весьма актуальными [1, 4-7]. Хотя особое внимание уделено конструкциям, подверженным динамическим воздействиям [4], определенный интерес представляют и задачи оптимизации систем дополнительных опор к оболочкам, которые нагружены квазистатически [4-7]. В случае осесимметричных оболочек эти задачи решены с использованием кусочно линейных аппроксимаций точной поверхности текучести.

В данной работе выводятся необходимые условия оптимальности для жесткопластической цилиндрической оболочки с дополнительными опорами. Предполагается, что материал оболочки подчиняется условию пластичности Мизеса (оно удовлетворяется по толщине оболочки в среднем). Получившаяся система уравнений интегрируется численно.

I. Формулировка задачи

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиуса R и длины $2l$, которая растянута осевой силой N_1 и, кроме того, подвержена воздействию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности P . Правый конец оболочки считаем шарнирно закрепленным, левый - жестко заделанным. Допустим, что в поперечных сечениях $x = S_j$ ($j = 1, \dots, n$) находятся абсолютно жесткие ребра (дополнительные круговые опоры). Требуется найти их оптимальные расположения так, чтобы несущая способность оболочки достигла максимального значения.

Пренебрегая изменениями конфигурации оболочки, запишем уравнение равновесия в виде [2]

$$m'' + \omega(n_2 - p) = 0, \quad (I.1)$$

где штрих обозначает дифференцирование по ξ и

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, & m &= \frac{M}{M_0}, & n_{1,2} &= \frac{N_{1,2}}{N_0}, & (I.2) \\ p &= \frac{PR}{N_0}, & \omega &= \frac{N_0 l^2}{RM_0}, & s_j &= \frac{\xi_j}{l}. \end{aligned}$$

Здесь N_0 и M_0 обозначают предельную силу и предельный момент соответственно.

Материал оболочки считаем жесткопластическим, подчиняющимся условию пластичности

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + \frac{3}{4} m^2 - 1 = 0. \quad (I.3)$$

Это - нелинейная аппроксимация поверхности текучести в случае условия пластичности Мизеса [2, 3].

Из (I.3) находим

$$n_2 = \frac{n_1}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}(m^2 + n_1^2)}. \quad (I.4)$$

Подставляя (I.4) в (I.1), получим систему

$$\begin{aligned} m' &= q, \\ q' &= \omega \left(\rho - \frac{n_1}{2} \right) - \omega \sqrt{1 - \frac{3}{4}(m^2 + n_1^2)}, \end{aligned} \quad (I.5)$$

где q - безразмерная перерезывающая сила.

К уравнениям равновесия следует добавить краевые условия

$$\begin{aligned} m(0) &= \sqrt{\frac{4}{3} - n_1^2}, & m(2) &= 0, \\ m(\delta_j) &= \sqrt{\frac{4}{3} - n_1^2}, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (I.6)$$

2. Необходимые условия оптимальности

Для выведения необходимых условий оптимальности, соответствующих максимуму несущей способности, составим расширенный функционал

$$\begin{aligned} J_* &= -\rho + \sum_{j=0}^n \int_{\delta_j}^{\delta_{j+1}} \left\{ \psi_1(m' - q) + \psi_2 \left(q' - \omega \left(\rho - \frac{n_1}{2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega \sqrt{1 - \frac{3}{4}(m^2 + n_1^2)} \right) \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где обозначается $\delta_0 = 0$, $\delta_{n+1} = 2$.

Вычислим полную вариацию функционала (2.1), задавая вариацию не только фазовым координатам m и q , но также и параметрам δ_j ($j = 1, \dots, n$) и нагрузке ρ . Вариации фазовых координат связаны с приращениями параметров δ_j по формуле (квадратные скобки обозначают конечный разрыв в указанной точке)

$$\begin{aligned} \Delta y(\delta_j \pm) &= \delta y(\delta_j \pm) + y'(\delta_j \pm) \cdot \Delta \delta_j, \\ \Delta \int_0^2 \psi y' d\xi &= - \int_0^2 \psi' \delta y d\xi - \sum_{j=1}^n [\psi(\delta_j) \delta y(\delta_j)], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где δy - слабая, а Δy - полная вариация переменной y . Так как фазовая переменная m непрерывна на отрезке $(0, 2)$, то

$$\Delta m(\Delta_j^-) = \Delta m(\Delta_j^+) = \Delta m(\Delta_j). \quad (2.3)$$

С учетом (1, 5), (2, 2) и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \delta m(\Delta_j \pm) &= \Delta m(\Delta_j) - q(\Delta_j \pm) \Delta \Delta_j, \\ \delta q(\Delta_j \pm) &= \Delta q(\Delta_j \pm) - q'(\Delta_j \pm) \Delta \Delta_j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полная вариация функционала (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta J_* &= -\Delta p + \sum_{j=0}^n \int_{\Delta_j}^{\Delta_{j+1}} \left\{ -\psi_1' \delta m - \psi_1 \delta q - \psi_2' \delta q - \omega \psi_2 \Delta p - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{3}{2} \omega m \psi_2 \delta m}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}(m^2 + n_1^2)}} \right\} d\xi - \sum_{j=1}^n [\psi_1(\Delta_j) \delta m(\Delta_j) + \psi_2(\Delta_j) \delta q(\Delta_j)] - \\ &\quad - \psi_1(0) \delta m(0) + \psi_1(2) \delta m(2) - \psi_2(0) \delta q(0) + \psi_2(2) \delta q(2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Считая вариации $\delta m(\xi)$ и $\delta q(\xi)$ независимыми, получим сопряженную систему

$$\begin{aligned} \psi_1' &= -\frac{3}{4} \omega \frac{m \psi_2}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}(m^2 + n_1^2)}}, \\ \psi_2' &= -\psi_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Учитывая краевые условия (1.6), из (2.5) находим условия трансверсальности

$$\psi_2(0) = \psi_2(2) = 0. \quad (2.7)$$

Подставляя в (2.5) вместо $\delta m(\Delta_j \pm)$ и $\delta q(\Delta_j \pm)$ согласно (2.4) полные вариации (с учетом (1.6) имеем $\Delta m(\Delta_j) = 0$) и считая независимыми вариации $\Delta q(\Delta_j \pm)$, получим

$$\psi_2(\Delta_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Наконец, приравнивая к нулю коэффициенты при Δp и $\Delta \Delta_j$ ($j = 1, \dots, n$) в (2.5), приходим к уравнениям

$$-\omega \int_0^2 \psi_2 d\xi = 1 \quad (2.9)$$

и

$$[\psi_1(\Delta_j) q(\Delta_j)] = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) интерпретируем как условие для нормирования сопряженной системы (2.6) вместе с (2.7) и (2.8), а уравнения (2.10) служат для определения оптимальных значений параметров Δ_j ($j = 1, \dots, n$).

Следует подчеркнуть, что согласно (2.8) сопряженная переменная ψ_2 является непрерывной, но ψ_1 претерпевает разрывы в точках $\xi = \Delta_j$ ($j = 1, \dots, n$). Конечные разрывы имеет и перерезывающая сила q при $\xi = \Delta_j$. Величина скачка определяется в виде

$$[q(\Delta_j)] = R_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

где через R_j обозначены реакции опор в точках Δ_j . Так как реакции R_j ($j = 1, \dots, n$) предварительно неизвестны, то соотношения (2.11) следует рассматривать как уравнения для определения величин R_j ($j = 1, \dots, n$).

3. Обсуждение результатов

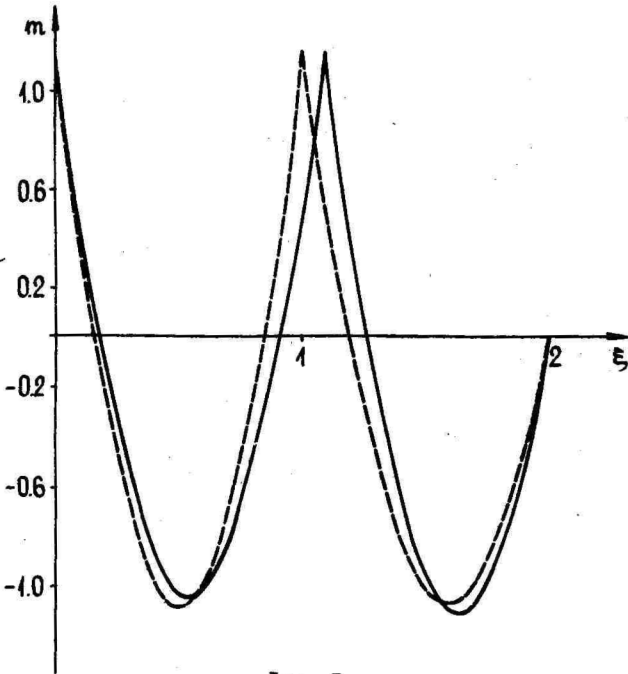
Поставленная задача решена до конца на ЭЕМ. Численная процедура заключается в интегрировании уравнений (1.5) и (2.6) при краевых условиях (1.6) и (2.7), (2.8) соответственно.

Анализ условий (2.6) - (2.10) показывает, что эта система представляет необходимые, но не достаточные условия. В самом деле, уравнения (2.10) можно умножить на любое отличное от нуля число. Это же относится к системе (2.6) и краевым условиям (2.7), (2.8). Поэтому (2.9) является лишь нормирующим условием и не может быть использовано для определения нагрузки p . При численном решении задачи интенсивность нагрузки определяется как максимум значения p , при котором каждая часть оболочки переходит в предельное состояние.

Результаты расчетов при значении параметров $\omega = 8$ и $n_1 = 0,1$ представлены в табл. I и на фиг. I. В табл. I Δ_j^0 - расположения равномерно распределенных опор (они определяются в виде $\Delta_j^0 = 2j/(n+1)$, где $j = 1, \dots, n$); P_1 и P_2 - несущие способности соответственно на отрезках $[0, \Delta_n^0]$ и $[\Delta_n^0, 2]$; Δ_j - оптимальные расположения опор; P - несущая способность оболочки при оптимальном проекте; e - коэффициент эффективности, который показывает во сколько раз несущая способность оболочки при оптимальном проекте превышает несущую способность при равномерно распределенных опорах и вычисляется по формуле $e = P/P_2$.

Таблица I

n	Δ_j^0	P_1	P_2	Δ_j	P	e
1	$j \cdot 1,0$	2,9395	2,2807	$j \cdot 1,0870$	2,6006	1,1408
2	$j \cdot 0,6667$	5,7831	4,3351	$j \cdot 0,7019$	5,2778	1,2175
3	$j \cdot 0,5$	9,8040	7,2627	$j \cdot 0,5193$	9,1332	1,2575



Фиг. I

На фиг. I дано распределение момента при $n = 1$. Сплошная линия соответствует оптимальному проекту, разрывная - оболочке с опорой в середине. Точность удовлетворения крайних условия (I.6), а также максимальная допустимая разность между несущими способностями разных участков оболочки при оптимальном проекте в вычислениях принимались равными 10^{-4} .

Литература

1. Леллеп Я., Параметрическая оптимизация пластических цилиндрических оболочек с учетом геометрической нелинейности. Изв.АН СССР.Мех. тверд. тела, 1985, № I,138-146.
2. Леллеп Я., Ханнус С., Большие прогибы цилиндрической оболочки из жесткопластического материала. Прикл.мех., 1987, № 5, 30-36.
3. Hodge P.G., Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.
4. Lellep J., Lepik Ü., Analytical methods in plastic structural design. Eng. Optimiz., 1984, 7, № 3, 209-239.
5. Rozvany G.I.N., Optimal design of flexural systems. Beams, grillages, plates and shells. Oxford, Pergamon Press, 1976.
6. Rozvany G.I.N., Mróz Z., Analytical methods in structural optimization. Appl. Mech. Rev., 1977, 30, № 11, 1461-1470.
7. Save M., Limit analysis of plates and shells: research over two decades. J.Struct. Mech., 1985, 13, № 3-4, 343-370.

Optimization of the location of additional supports for a plastic cylindrical shell

J.Lellep, S.Hannus

Summary

Circular cylindrical shells clamped at the left hand end and hinged at the right-hand end furnished with a set of additional ring supports have been studied in the present note. The material of the shells is assumed to obey Von Mises yield condition and the associated deformation law. Elastic deformations as well as work-hardening and geometrical changes are neglected in this study. The optimal location of the set of absolutely rigid ring supports is determined so that the load carrying capacity of the shell attains the maximum value.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Я. Леллеп, Ю. Маяк

Тартуский государственный университет

Исследование пластических пластин и оболочек, материал которых подчиняется условию пластичности Мизеса, требует использования эффективных методов решения нелинейных краевых задач. В работах [1, 2, 4] были разработаны некоторые методы для исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек при нелинейной аппроксимации условия пластичности Мизеса. В данной работе представляется методика оптимального проектирования пластической цилиндрической оболочки, материал которой подчиняется условию Мизеса. Предполагается, что оболочка нагружена распределенным внутренним давлением и осевым растяжением, а её концы жестко заделаны. Подставленная задача сводится к нелинейной краевой задаче, которая решается методом типа сопряженных уравнений.

1. Формулировка задачи и основные уравнения

Пусть круговая цилиндрическая оболочка длины $2l$ и радиуса A подвержена действию равномерного внутреннего давления интенсивности P и осевого растяжения N_1 (сила, приходящаяся на единицу длины окружности радиуса A). Допустим, что края оболочки жестко заделаны таким образом, что заделка препятствует поворотам образующих и не позволяет перемещаться в радиальном направлении, но допускает малые перемещения в осевом направлении. Повороты образующих оболочки вокруг конца оболочки возможны только тогда, когда в конце оболочки образуется шарнирная окружность. Такая модель закрепления края оболочки была использована уже в [5] для жестко заделанных оболочек, материал которых подчиняется условию текучести Треска.

Допустим, что стенка оболочки идеально трехслойная. Пусть $h = \text{const}$ — толщина оболочки, а $h = h(x)$ — толщина несущих слоев. Пусть начало координат находится в центре оболочки и толщина является симметричным относительно начала координат. Из-за симметрии в дальнейшем рассматри-

вается правая половина оболочки ($0 \leq x \leq l$).

Требуется найти такое распределение толщин $h(x)$, при которых объем несущих слоев

$$\gamma = \int_0^l h dx \quad (I.1)$$

достигает минимального значения при условии, что удовлетворяются основные уравнения геометрически нелинейной теории пластических цилиндрических оболочек и некоторые дополнительные ограничения. Дополнительными называются здесь все ограничения, которые являются лишними при определении напряженно-деформированного состояния соответствующих оболочек постоянной толщины. В задачах оптимального проектирования оболочечных конструкций предполагается, как правило, что дополнительные ограничения таковы, что существует единственное оптимальное решение поставленной задачи [7]. В данной работе ищется такой проект оболочки, который минимизирует (I.1), и в то же время прогиб в центре оболочки совпадает с прогибом соответствующей оболочки постоянной толщины h_* . Кроме того, требуется, чтобы $h \leq h_0$ (h_0 - заданное число).

Предположим, что материал оболочки - жесткопластический, подчиняющийся условию пластичности Мизеса. Ниже применяется нелинейная аппроксимация точной поверхности текучести

$$n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2 + \frac{3}{4} m^2 - r^2 = 0, \quad (I.2)$$

которая соответствует удовлетворению условия Мизеса в среднем [1 - 3]. Несмотря на свою простоту, аппроксимация (I.2) приводит к сравнительно точным результатам [1, 8]. Здесь и в дальнейшем используются следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= \frac{N_{1,2}}{N_*}, & m &= \frac{M}{M_*}, & r &= \frac{h}{h_*}, & \xi &= \frac{x}{l}, & r_0 &= \frac{h_0}{h_*}, \\ \mu &= \frac{AP}{N_*}, & \omega &= \frac{N_* W}{M_*}, & \omega &= \frac{N_*^2 \ell U}{M_*^2}, & \alpha &= \frac{\ell^2 N_*}{AM_*}, \end{aligned} \quad (I.3)$$

где N_2 - окружное усилие, M - изгибающий момент, U, W - осевое и поперечное перемещения, а $N_* = 2\sigma_0 h_*$, $M_* = \sigma_0 h_* H$.

С учетом (I.3) запишем уравнение равновесия в виде

[1, 2]

$$m' - n_1 w' + \alpha(n_2 - \rho) = 0, \quad (I.4)$$

где штрих обозначает дифференцирование по ξ . Согласно ассоциированному закону деформирования (применяется теория пластичности типа деформации), имеем [1, 2]

$$w' + \frac{1}{2} w'^2 = \alpha w \frac{2n_1 - n_2}{2n_2 - n_1}, \quad (I.5)$$

$$w'' = \frac{3\alpha w m}{2(2n_2 - n_1)}$$

Если ввести новые переменные $m' = q$ и $w' = z$, можно дифференциальные ограничения (I.4), (I.5) записать в канонической форме

$$\begin{aligned} q' &= \frac{3\alpha n_1 w m}{2(2n_2 - n_1)} + \alpha(\rho - n_2), \\ z' &= \frac{3\alpha w m}{2(2n_2 - n_1)}, \\ w' &= -\frac{1}{2} z^2 + \frac{\alpha w (2n_1 - n_2)}{2n_2 - n_1}, \end{aligned} \quad (I.6)$$

$$m' = q,$$

$$w' = z.$$

Беличину n_1 в (I.6) рассмотрим как заданную величину (вместе с α и ρ), но n_2 интерпретируем как решение уравнения (I.2). Для определения функции $w(\xi)$ в (I.2) применяем условия оптимальности, которые будут выведены ниже.

Краевые условия для системы (I.6) задаем в виде

$$q(0) = z(0) = w(0) = 0, \quad w(0) = w_0, \quad (I.7)$$

$$m(1) = \sqrt{\frac{4}{3} w_0^2 - n_1^2}, \quad w(1) = 0,$$

предполагая, что при жесткой заделке образуется пластический шарнир и что $h(l) = h_0$. Краевое значение w_0 интерпретируем как прогиб для оболочки постоянной толщины (оно определяется решением системы (1.2), (1.6) при $\nu = 1$).

2. Необходимые условия оптимальности

Поставленная задача заключается в минимизации функционала (1.1) при дифференциальных ограничениях (1.6) с учетом равенства (1.2) и краевых условий (1.7). Для выведения необходимых условий оптимальности введем множители Лагранжа $\psi_1 - \psi_5$, φ и запишем расширенный функционал в виде [6]

$$\begin{aligned} J_* = \int_0^1 \left\{ \nu + \psi_1(q' - n_1 z' - \alpha(n - n_2)) + \psi_2 \left(z' - \frac{3\alpha w m}{2(2n_2 - n_1)} \right) + \right. \\ \left. + \psi_3 \left(w' + \frac{1}{2} z^2 - \frac{\alpha w (2n_1 - n_2)}{2n_2 - n_1} \right) + \psi_4(m' - q) + \psi_5(w' - z) + \right. \\ \left. + \varphi(n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + \frac{3}{4} m^2 - \nu^2) \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При варьировании функционала (2.1) учитываем то, что фазовые переменные m , q , w , u непрерывны, но z может иметь конечное число точек разрыва. Разрывы возможны в точках, где появляются пластические шарниры (точнее, шарнирные окружности). Кроме фазовой переменной z , могут быть разрывными и управления ν и n_2 .

Предполагая теперь, что все фазовые переменные непрерывны на отрезке $[0, 1]$, и варьируя функционал (2.1) среди гладких кривых, получим условия оптимальности

$$\text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\varphi} \quad (2.2)$$

$$\varphi = - \frac{3\alpha w m \psi_2 + \alpha \psi_1 (2n_2 - n_1)^2}{(2n_2 - n_1)^3}, \quad (2.3)$$

которые действительны при $\nu < \nu_0$. Если $\nu = \nu_0$, то вместо (2.2) имеем $\nu_0 > 1/2\varphi$.

Функции $\psi_1 - \psi_5$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \psi_1' &= -\psi_4, \\ \psi_2' &= -\psi_5 - n_1 \psi_4, \\ \psi_3' &= 0, \\ \psi_4' &= -\frac{3\alpha n_1 \psi_2}{2(2n_2 - n_1)} + \frac{3}{2} m \varphi, \\ \psi_5' &= -\frac{3\alpha m \psi_2}{2(2n_2 - n_1)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

и краевым условиям

$$\psi_4(0) = \psi_1(1) = \psi_2(1) = \psi_3(1) = 0. \quad (2.5)$$

Если системы (1.6) и (2.4) (к этим системам следует добавить соотношения (1.2) и (2.2), (2.3) не имеют решения в классе непрерывных функций, то естественно искать решение среди кусочно непрерывных функций. В этом случае уравнения (2.2) - (2.4) имеют место в подобластях непрерывности, но в точках $x = \beta_i$, где x претерпевают разрывы, имеем

$$\begin{aligned} \psi_2(\beta_i) &= n_1 \psi_1(\beta_i), \\ [\psi(\beta_i) - \psi_1(\beta_i)q'(\beta_i) - \psi_5(\beta_i)z(\beta_i)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где квадратными скобками обозначается конечный разрыв.

Заметим, что из (2.4) и (2.5) следует, что $\psi_3 = 0$. Поэтому третье уравнение в (2.4) в дальнейшем опускается.

3. Численное решение задачи

Системы (1.6) и (2.4) интегрируем методом типа сопряженных уравнений. Обозначая через f_j ($j = 1, \dots, 9$) их правые части, составим т.н. сопряженные уравнения

$$x_i' = -\sum_{j=1}^9 \frac{\partial f_j}{\partial x_i} x_j; \quad i = 1, \dots, 9, \quad (3.1)$$

которые решаем на каждом шаге итерации при следующих краевых условиях:

$$x_j(1) = 1, \quad x_i(1) = 0, \quad i \neq j. \quad (3.2)$$

Здесь $j = 6, 7, 8, 9$.

Для интегрирования уравнений (1.6) и (2.4) исключаем из этих уравнений величину n_2 с помощью соотношений (1.2), (2.2) и (2.3). Задавая отсутствующие в (1.7) и (2.5) краевые значения $m(0)$, $\psi_1(0)$, $\psi_2(0)$, $\psi_5(0)$, интегрируем уравнения (1.6) и (2.4) методом Рунге-Кутты четвертого порядка. На следующих шагах итерации добавим к этим краевым значениям поправки $\delta m(0)$, $\delta \psi_1(0)$, $\delta \psi_2(0)$, $\delta \psi_5(0)$, которые вычислим из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \delta m(1) &= x_6^6 \delta \psi_5(0) + x_6^6(0) \delta m(0) + x_8^6(0) \delta \psi_1(0) + x_9^6(0) \delta \psi_2(0), \\ \delta w(1) &= x_7^7 \delta \psi_5(0) + x_6^7(0) \delta m(0) + x_8^7(0) \delta \psi_1(0) + x_9^7(0) \delta \psi_2(0), \\ \delta \psi_1(1) &= x_8^8(0) \delta \psi_5(0) + x_6^8(0) \delta m(0) + x_8^8(0) \delta \psi_1(0) + x_9^8(0) \delta \psi_2(0), \\ \delta \psi_2(1) &= x_9^9(0) \delta \psi_5(0) + x_6^9(0) \delta m(0) + x_8^9(0) \delta \psi_1(0) + x_9^9(0) \delta \psi_2(0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Левые части равенств (3.3) обозначают разницы между требуемыми и вычисляемыми значениями данных переменных. Величины $x_j^i - x_j^i(0)$ ($j = 6, 7, 8, 9$) получим путем решения уравнений (3.1) при условиях (3.2).

Приведенная процедура повторяется до достижения требуемой точности. В расчетах краевые условия выполнялись до точности 10^{-4} .

При решении задачи оптимизации предполагается, что задан геометрический параметр оболочки α , а также компоненты нагрузки n_1 , p и максимальный прогиб w_0 (все они безразмерные величины). Поскольку за w_0 выбирается прогиб в центре оболочки постоянной толщины, то следует решить систему (1.6) с помощью (1.2), где $\nu = 1$.

Иными словами, определяется напряженно-деформированное состояние жесткопластической цилиндрической оболочки при уме-

ренно больших прогибах. Полученные результаты незначительно отличаются от результатов работы [4], полученных для однородных оболочек.

Используя найденную зависимость $w_0 = w_0(\mu, \nu_1)$, решаем задачу оптимального проектирования пластической цилиндрической оболочки в стадии умеренно больших прогибов. Чтобы оценить экономию найденного проекта, введём коэффициент экономии

$$e = \int_0^1 w d\xi, \quad (3.4)$$

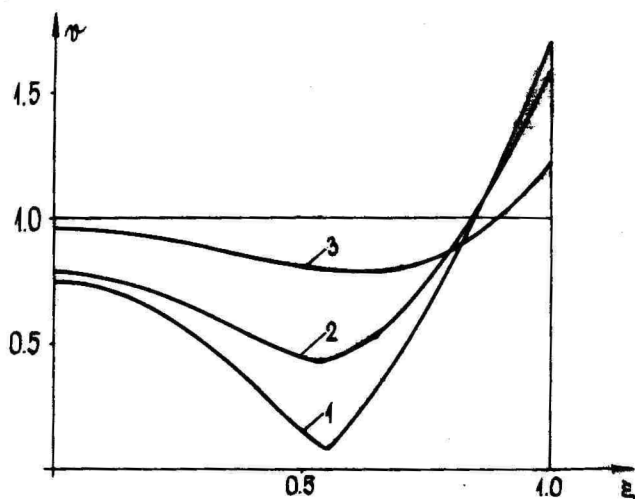
который равняется отношению объемов несущих слоев при переменной и постоянной толщине соответственно. Экономия материала несущих слоев оболочки в процентах от первоначального количества материала выражается в виде $(1 - e) \cdot 100\%$.

Следует подчеркнуть, что при $w_0 = 0$ полученный таким путем проект совпадает с проектом минимального веса при заданной несущей способности.

Результаты расчетов представлены на фиг. 1-3. Кривые соответствуют оболочке, для которой геометрический параметр $\alpha = 2$ и осевое растяжение $\nu_1 = 0,1$. Штриховые линии на фигурах соответствуют оболочке постоянной толщины, а непрерывные линии - оболочке с оптимальной толщиной. Кривые, представленные на фиг. 1-3, имеют единую нумерацию. Значения интенсивности поперечной нагрузки для разных кривых приведены в табл. I. Здесь же указаны значения максимального прогиба и коэффициента экономии.

Таблица I

№	1	2	3
μ	2,939	2,988	3,037
$w(0)$	0,000	0,506	1,018
e	0,623	0,631	0,635



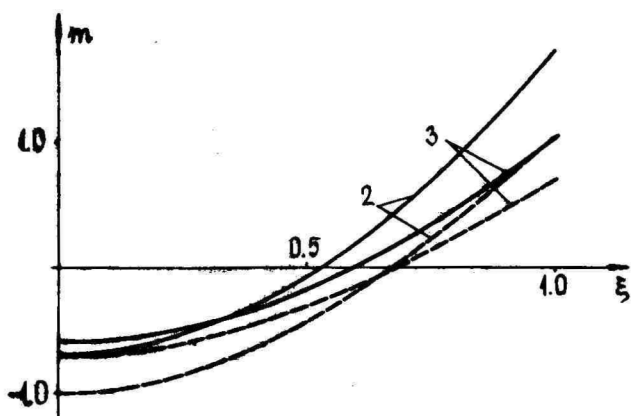
Фиг. I

Расчеты показывают, что распределение оптимальной толщины, а также изгибающий момент сравнительно мало изменяются в диапазоне умеренно больших прогибов в случае шарнирно закрепленных оболочек. Это же можно сказать о распределении изгибающего момента (фиг. 2) и окружного усилия (фиг. 3) при жесткой заделке. Здесь (фиг. I - 3) кривая I соответствует предельному состоянию, а кривая 3 - случаю, когда безразмерный прогиб в центре оболочки больше единицы.

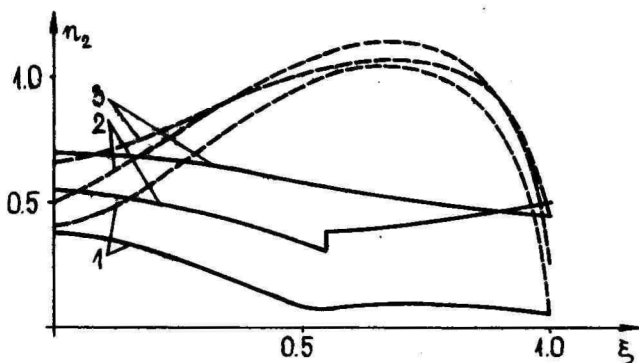
Интересно отметить, что графики изгибающего момента (и прогиба) довольно близки в случаях оболочек постоянной и переменной толщин. Однако графики окружного усилия оболочки постоянной толщины и переменной толщин оказываются весьма различными.

Расчеты, связанные с изучением поведения оптимального проекта при изменении осевого растяжения, показывают, что если ν_1 стремится к предельному значению $2/\sqrt{3}$, оптимальная толщина стремится к единице. В то же время изгибающий момент стремится к нулю, а осевое усилие - к значению $\nu_1/2$.

При определении оптимального проекта оболочки выше указанным методом внешние нагрузки считались заданными.



Фиг. 2



Фиг. 3

Найденный проект является, таким образом, оптимальным для заданных значений P и N_1 . Но этот метод позволяет найти оптимальные проекты и для множества значений внешних нагрузок, т.е. для $P \in [P_0, P_1]$, где P_0 - несущая способность оболочки, а P_1 - заданное число. Для этого следует вычислить оптимальную толщину при каждом $P \in [P_0, P_1]$ и найти максимум по P в каждой точке.

Литература

1. Леллеп Я.А., Ханнус С.Х., Большие прогибы цилиндрической оболочки из жесткопластического материала. Прикл. мех. 1987, №5, 30-36.
2. Леллеп Я., Ханнус С., Большие прогибы жесткопластических замкнутых цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 59-65.
3. Розенблюм В.И., Об условии пластичности для тонкостенных оболочек. Прикл. мат. и мех. 1960, 24, №2, 364-366.
4. Ханнус С., Расчет пластических цилиндрических оболочек при больших прогибах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 39-42.
5. Duszek M., Analiza plastyczna dwuwarstwowych powłok walcowych uwzględniająca wpływ zmiany kształtu. Rozpr. inż., 1967, 15 Nr. 4, 653-663.
6. Lellep J., Parametrical optimization of plastic cylindrical shells in the post-yield range. Int. J. Eng. Sci., 1985, 23, Nr. 12, 1289-1303.
7. Lellep J., Lepik U., Analytical methods in plastic structural design. Eng. Optimiz., 1984, 7, Nr. 3, 209-239.
8. Robinson M., A comparison of yield surfaces for thin shells. Int. J. Mech. Sci., 1971, 13, Nr. 4, 345-354.

Optimization of geometrically non-linear rigid-plastic cylindrical shells

J. Lellep, J. Majak

Summary

A computer-aided optimal design procedure is developed for plastic cylindrical shells. The material of the shells is assumed to obey the Von Mises yield condition and the associated deformation law. Elastic deformations have been neglected but the post-yield point behaviour, e.g. geometrical non-linearity has been taken into account. Employing the variational methods of the optimal control theory the problem has been converted into a non-linear boundary value problem which has been solved numerically.

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛОГИХ

СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Я. Леллеп, Х. Хейн

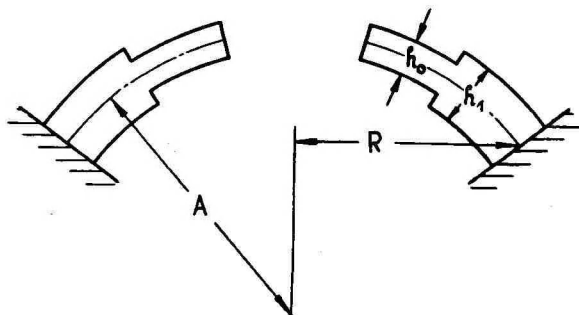
Тартуский государственный университет

В связи с учетом технологических ограничений в оптимальном проектировании конструкций стало актуальным исследование пластин и оболочек кусочно постоянной толщины [7, 9]. В геометрически линейной постановке задачи анализа и оптимизации осесимметричных жесткопластических пластин и оболочек рассматривались в [6, 8, 9]. Большие прогибы пластических пологих сферических оболочек исследовались в [1, 2, 5] при разных предположениях о материале оболочки и об условиях текучести.

В данной работе рассматриваются пластические оболочки кусочно постоянной толщины. Учитываются умеренно большие прогибы и используется метод «ограниченного взаимовлияния напряжений» [4], который заключается в замене точной поверхности текучести двумя шестиугольниками на плоскостях усилий и моментов соответственно.

I. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим пологую сферическую оболочку радиуса A с центральным отверстием радиуса a . Допустим, что по внешнему контуру с радиусом R сферический колпачок жестко защемлен, а внутренний край свободен (фиг. I). Предположим, что оболочка имеет кусочно постоянную толщину



Фиг. I

$$h = \begin{cases} h_0, & a \leq r < b, \\ h_1, & b < r \leq R, \end{cases} \quad (I.1)$$

где $h_0 \leq h_1$. Оболочка нагружена равномерно распределенным внутренним давлением интенсивности P . Как геометрические параметры, так и нагрузку считаем заданными.

Исследуем напряженно-деформационное состояние оболочки в стадии умеренно больших прогибов. При сделанных допущениях уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид [3]

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(\tau N_1) = N_2, \\ \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr}(\tau M_1) - M_2 \right] + \frac{d}{dr} \left[\tau N_1 \left(\frac{r}{A} + \frac{dW}{dr} \right) \right] + Pr = 0, \end{cases} \quad (I.2)$$

где N_1, N_2 - усилия, M_1, M_2 - изгибающие моменты и W - прогиб.

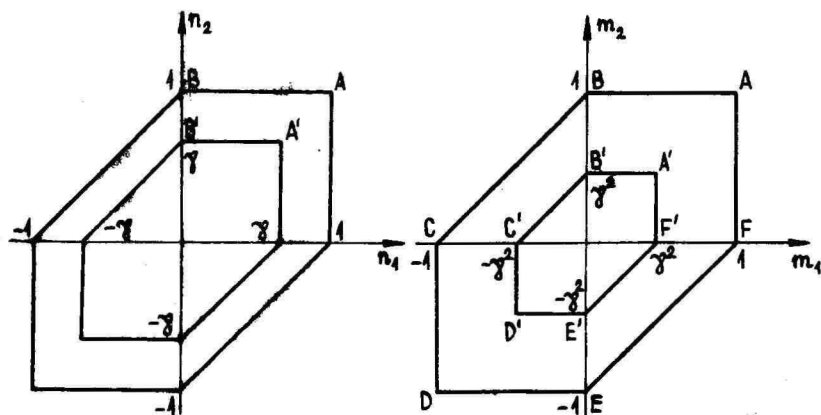
Для геометрически нелинейных оболочек получим компоненты деформации [3]

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{dU}{dr} + \frac{\tau}{A} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2, \\ \epsilon_2 &= \frac{U}{r}, \\ \alpha_1 &= -\frac{d^2 W}{dr^2}, \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{r} \frac{dW}{dr}, \end{aligned} \quad (I.3)$$

где U и W - перемещения, положительные направления которых совпадают с направлениями осей r и z соответственно.

Материал оболочки считаем жесткопластическим, подчиняющимся условию текучести Треска. Поверхность текучести в четырехмерном пространстве обобщенных напряжений аппроксимируем двумя шестиугольниками на плоскостях $N_1 N_2$ и $M_1 M_2$ (фиг. 2). Поверхность текучести такого типа была предложена Ходжем [4]; соответствующий подход в теории предельного равновесия известен как «метод ограниченного взаимовлияния напряжений». Несмотря на свою простоту, этот метод приводит к сравнительно хорошим оценкам несущей способности осесимметричных оболочек [4].

В работе применяется деформационная теория пластичнос-



Фиг. 2

ти, согласно которой вектор с компонентами деформации (I.3) перпендикулярен к данной поверхности текучести (фиг. 2).

Для того, чтобы упростить запись основных уравнений, введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{r}{R}, & n_i &= \frac{N_i}{N_*}, & m_i &= \frac{M_i}{M_*} \quad (i=1,2), & \nu &= \frac{PR^2}{M_*}, \\ u &= \frac{U}{V}, & \gamma &= \frac{h_0}{h_1}, & \alpha &= \frac{a}{R}, & \beta &= \frac{b}{R}, \\ \omega &= \frac{WA}{R^2}, & \kappa &= \frac{R^2 N_*}{\lambda M_*}, \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

где $N_* = \sigma_0 h_1$, $M_* = \frac{1}{4} \sigma_0 h_1^2$ (σ_0 - предел текучести материала). Используя переменные (I.4), уравнения равновесия (I.2) можно записать в виде

$$\begin{cases} (\varrho n_1)' = n_2 \\ [(\varrho m_1)' - m_2]' + [\kappa \varrho n_1 (\varrho + \omega')] + \nu \varrho = 0, \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

где штрих обозначает дифференцирование по ϱ . Аналогично из (I.3) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u' + \frac{R^2}{A^2} \left[\varrho \omega' + \frac{1}{2} \omega'^2 \right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{4u}{\varrho}, \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{A} \omega'', \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{A} \frac{\omega'}{\varrho}. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Поставленная задача заключается в построении решения уравнений (I.5) так, что напряженное состояние соответствует либо граням шестиугольников текучести, либо их внутренним точкам. Кроме того, вектор $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ перпендикулярен к выбранной грани шестиугольника на плоскости $n_1 n_2$ и вектор $\bar{\alpha\epsilon} = (\alpha\epsilon_1, \alpha\epsilon_2)$ является нормалью для соответствующих сторон шестиугольника на плоскости $m_1 m_2$ (фиг. 2). В случае, когда изображающая точка находится внутри шестиугольника, вектор деформации равен нулю.

Поскольку внутренний край оболочки свободен, внешний жестко защемлен, имеем следующие краевые условия (здесь q - перерезывающая сила):

$$m_1(\alpha) = n_1(\alpha) = q(\alpha) = 0 \quad (\text{I.7})$$

и

$$\omega(1) = 0, \quad m_1(1) = 1, \quad u(1) = 0, \quad (\text{I.8})$$

которые следует учитывать при решении данной задачи.

2. Профиль напряжений на плоскости усилий

Допустим, что напряженное состояние оболочки таково, что при $q \in (\alpha, \beta)$ оно соответствует стороне $A'B'$ (и при $q \in (\beta, 1)$ стороне AB) шестиугольника текучести на плоскости усилий. Таким образом,

$$n_2 = \begin{cases} \gamma, & q \in (\alpha, \beta), \\ 1, & q \in (\beta, 1). \end{cases} \quad (\text{2.1})$$

При пластическом режиме AB (или $A'B'$) согласно закону градиентальности имеем $\epsilon_2 \geq 0$, $\epsilon_1 = 0$. Поэтому с помощью (I.6) установим, что $u \geq 0$ и

$$u' = -\frac{R^2}{A^2} (q\omega' + \frac{1}{2}\omega'^2). \quad (\text{2.2})$$

Отсюда можно найти перемещение u после того, как известен прогиб ω .

Подставляя n_2 с помощью (2.1) в первое уравнение в системе (I.5) и интегрируя с учетом (I.7), находим

$$n_1 = \frac{\gamma}{q} (q - \alpha) \quad \text{при } q \in (\alpha, \beta) \quad (\text{2.3})$$

$$\text{и } n_1 = 1 + \frac{\gamma}{q} (\beta - \alpha) - \frac{\beta}{q} \quad \text{при } q \in (\beta, 1). \quad (\text{2.4})$$

Этот режим пластического деформирования является статически допустимым, если выполняются неравенства $0 \leq n_1 \leq \gamma$ при

$\varrho \in (\alpha, \beta)$ и $0 < n_1 < 1$ при $\varrho \in (\beta, 1)$. С помощью (2.3) и (2.4) можно проверить, что эти неравенства удовлетворены тождественно.

3. Первый тип решения

Оказывается, что при разных комбинациях величин α , β , γ , μ возможны различные профили напряжений на плоскости изгибающих моментов. Одна возможная комбинация пластических режимов следующая: при $\varrho \in (\alpha, \beta)$ напряженное состояние оболочки соответствует стороне $D'E'$, при $\varrho \in (\beta, \varrho_1)$ - стороне DE и при $\varrho \in (\varrho_1, 1)$ - стороне EF на плоскости изгибающих моментов (фиг. 2). Таким образом,

$$m_2 = \begin{cases} -\gamma^2, & \varrho \in (\alpha, \beta), \\ -1, & \varrho \in (\beta, \varrho_1), \end{cases} \quad (3.1)$$

где ϱ_1 определяется тем, что $m_1(\varrho_1) = 0$. Вблизи края имеем

$$m_2 = m_1 - 1, \quad \varrho \in (\varrho_1, 1). \quad (3.2)$$

Согласно ассоциированному закону деформирования $\kappa_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \omega'' &= 0, & \varrho \in (\alpha, \varrho_1), \\ \omega'' &= -\frac{\omega'}{\varrho}, & \varrho \in (\varrho_1, 1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Интегрируем уравнения (3.3) с учетом соотношений (1.8), которые дополним условием $\omega(\alpha) = \omega_0$. Определяя постоянные интегрирования из краевых условий исчисляя прогиб ω вместе с наклоном ω' непрерывными, получим

$$\omega = \begin{cases} \varphi(\varrho - \alpha) + \omega_0, & \varrho \in (\alpha, \varrho_1), \\ \varphi[\varrho_1 \ln \frac{\varrho}{\varrho_1} + \varrho_1 - \alpha] + \omega_0, & \varrho \in (\varrho_1, 1). \end{cases} \quad (3.4)$$

Для простоты записи здесь используется обозначение

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\varrho_1 \ln \varrho_1 - \varrho_1 + \alpha}. \quad (3.5)$$

Подставляя ω' с помощью (3.4), n_1 и m_2 с учетом (2.3), (2.4), (3.1), (3.2) во второе уравнение в системе (1.5), получим дифференциальное уравнение относительно функции m_1 . Интегрируя это уравнение при $\varrho \in (\alpha, \beta)$ и удовлетворяя условиям (1.7), находим

$$\begin{aligned} m_1 = & -\gamma^2 + \frac{\kappa \gamma \varphi}{2} (2\alpha - \varrho) + \kappa \gamma \varrho \left(\frac{\varrho}{2} - \frac{\varrho}{3} \right) + \frac{\mu}{6} (3\alpha^2 - \varrho^2) - \\ & - \frac{1}{\varrho} \left(-\alpha \gamma^2 + \frac{1}{6} \kappa \gamma \alpha^3 + \frac{1}{2} \kappa \gamma \varphi \alpha^2 + \frac{1}{3} \mu \alpha^3 \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поступив аналогично в области (β, ϱ_1) , получим

$$m_1 = -1 - \frac{\varrho^2}{6}(\rho + 2\kappa) - \kappa(\varphi + \nu)\frac{\varrho}{2} - \kappa\varphi\nu + C_1 + \frac{C_2}{\varrho}, \quad (3.7)$$

где $\nu = \gamma(\beta - \alpha) - \beta$.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем с помощью условий непрерывности величин m_1 и m_1' при $\varrho = \beta$. Из требований непрерывности следует

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - \gamma^2 + \frac{\rho}{2}\alpha^2, \\ C_2 &= \gamma^2\alpha - \frac{\kappa\gamma}{6}(2\beta^3 + \alpha^3 + 3\beta^2\varphi + 3\varphi\alpha^2 - 3\alpha\beta^2 - 6\alpha\beta\varphi) - \\ &\quad - \frac{\rho}{3}\alpha^3 + \frac{\kappa}{6}(2\beta^3 + 3(\varphi + \nu)\beta^2 + 6\varphi\nu\beta). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вблизи края оболочки изгибающий момент m_1 выражается в виде

$$m_1 = -\frac{\varrho^2}{4}(\rho + 2\kappa) + \kappa\nu\left(-\varrho + \frac{\varphi\varrho_1}{\varrho}\right) + \ln\varrho(-1 - \kappa\varphi\varrho_1 + C_3) + C_4, \quad (3.9)$$

$$\varrho \in (\varrho_1, 1).$$

Удовлетворяя условиям непрерывности изгибающего момента и его производной в точке $\varrho = \varrho_1$, находим

$$\begin{aligned} C_3 &= \kappa\left(\frac{\varrho_1^2}{3} + (\varphi + \nu)\frac{\varrho_1}{2} + \varphi\nu\right) + \frac{\rho}{6}\varrho_1^2 - \frac{1}{\varrho_1}C_2 + 1, \\ C_4 &= \frac{\varrho_1^2}{12}(2\kappa + \rho) + \frac{\kappa\varrho_1}{2}(-\varphi + \nu) + \frac{C_2}{\varrho_1} - 1 - \kappa\varphi(2\nu - \varrho_1 \ln\varrho_1) + \\ &\quad + C_1 - \ln\varrho_1(-1 + C_3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для определения величины ϱ_1 и w_0 имеем условия $m_1(\varrho_1) = 0$ и $m_1'(1) = 1$, которые в развернутом виде приводят с помощью (3.7) и (3.9) к уравнениям

$$-1 - \frac{\varrho_1^2}{6}(\rho + 2\kappa) - \frac{\kappa}{2}(\varphi + \nu)\varrho_1 - \kappa\varphi\nu + C_1 + \frac{C_2}{\varrho_1} = 0 \quad (3.11)$$

и

$$-1 - \kappa\nu - \frac{1}{4}(\rho + 2\kappa) + \kappa\nu\varrho_1\varphi + C_4 = 0. \quad (3.12)$$

Подставляя $C_1 - C_4$ из (3.8) и (3.10) в (3.11) и (3.12), получим уравнения относительно ϱ_1 и w_0 , которые решены численно на ЭВМ.

Постулированный режим пластического деформирования остается в силе, если $0 \geq m_1 \geq -\gamma^2$ при $\varrho \in (\alpha, \beta)$, $-1 \leq m_1 \leq 0$ при

$g \in (\beta, g_1)$ и $0 \leq m_1 \leq 1$ при $g \in (g_1, 1)$. Выполнение этих неравенств проверяется численно. Численный анализ позволяет найти пределы применимости данного режима деформирования.

Выше для определения перемещения u было получено уравнение (2.2). Подставляя сюда ω' , который находим согласно (3.4), и, интегрируя с учетом (1.8), получим

$$u = \begin{cases} \frac{R^2 \varphi}{2A^2} (g_1^2 - g^2 + g_1 \varphi - g \varphi) + u(g_1), & g \in (\alpha, g_1), \\ \frac{R^2 \varphi}{A^2} \left(\frac{\varphi}{2} \frac{g_1^2}{g} + g_1 \right) (1 - g), & g \in (g_1, 1), \end{cases} \quad (3.13)$$

где $u(g_1)$ истолковываем как постоянную интегрирования. Считая перемещение u непрерывным, получим

$$u(g_1) = \frac{R^2 \varphi}{A^2} \left(\frac{\varphi}{2} + 1 \right) g_1 (1 - g_1). \quad (3.14)$$

С помощью (3.13) и (3.14) можно показать, что $u \geq 0$, т.е. выбранный пластический режим является статически и кинематически допустимым.

4. Второй тип решения

Численный анализ показывает, что в некотором диапазоне геометрических параметров и нагрузки уравнения (3.11) и (3.12) не имеют решения, удовлетворяющего условию $g_1 > \beta$. Рассмотрим далее случай, когда $\alpha < g_1 < \beta$. Таким образом, предположим, что

$$m_2 = \begin{cases} -\gamma^2, & g \in (\alpha, g_1), \\ m_1 - \gamma^2, & g \in (g_1, \beta), \\ m_1 - 1, & g \in (\beta, 1). \end{cases} \quad (4.1)$$

Допустим, что на плоскости усилий (фиг. 2) по-прежнему имеем режим АВ, т.е. действительны соотношения (2.1)–(2.4). Подставляя m_2 с помощью (4.1) и ω' из (3.4) (эта формула вместе с (3.5) остаётся в силе и в данном случае) в (1.5), получим уравнение для определения изгибающего момента m_1 . Интегрируя это уравнение в области (α, g_1) и удовлетворяя граничным условиям $m_1(\alpha) = q(\alpha) = 0$, приходим к соотношению (3.6). Однако теперь (3.6) имеет место при $g \in (\alpha, g_1)$, где величину g_1 определим позже (допустим лишь, что $\alpha < g_1 < \beta$).

Аналогично к предыдущему случаю, при $g \in (g_1, \beta)$ получим

$$m_1 = -\frac{q^2}{4}(\rho + 2\kappa\gamma) + \kappa\gamma(\alpha q - \alpha\varphi \frac{q_1}{q}) + \ln q(-\gamma^2 - \kappa\gamma\varphi q_1 + B_1) + B_2. \quad (4.2)$$

Здесь B_1, B_2 - постоянные интегрирования, которые с помощью (3.6) выражаются в виде

$$B_1 = \gamma^2 + \frac{\kappa\gamma}{6}(2q_1^2 + 3\varphi q_1 - 3\alpha q_1 + 6\alpha\varphi) + \frac{\rho}{6}q_1^2 + \frac{1}{6q_1}(-6\alpha\gamma^2 + \kappa\gamma\alpha^3 + 3\kappa\gamma\varphi\alpha^2 + 2\rho\alpha^3) \quad (4.3)$$

$$B_2 = \frac{q_1^2}{4}(\rho + 2\kappa\gamma) - \kappa\gamma(\alpha q_1 - \alpha\varphi) - \ln q_1(-\gamma^2 - \kappa\gamma\varphi q_1 + B_1).$$

Вблизи края оболочки при $q \in (\beta, 1)$ имеем

$$m_1 = -\frac{q^2}{4}(\rho + 2\kappa) - \kappa\nu(q - \frac{\varphi q_1}{q}) + \ln q(-1 - \kappa\varphi q_1 + B_3) + B_4. \quad (4.4)$$

Из-за непрерывности величин m_1 и m_1'

$$B_3 = 1 - \gamma^2 + B_1, \quad (4.5)$$

$$B_4 = m_1(\beta) + \frac{\beta^2}{4}(\rho + 2\kappa) + \kappa\nu(\beta - \frac{\varphi q_1}{\beta}) - \ln \beta(-1 - \kappa\varphi q_1 + B_3),$$

где $m_1(\beta)$ определяется из (4.2).

Условия $m_1(q_1) = 0$ и $m_1(1) = 1$ приводят с помощью (3.6) и (4.4) к уравнениям

$$-\gamma^2 q_1 + \frac{\kappa\gamma\varphi}{2} q_1(2\alpha - q_1) + \frac{\kappa\gamma q_1}{6}(3\alpha - 2q_1) + \frac{\rho q_1}{6}(3\alpha^2 - q_1^2) + \alpha\gamma^2 - \frac{1}{6}\kappa\gamma\alpha^3 - \frac{1}{2}\kappa\gamma\varphi\alpha^2 - \frac{1}{3}\rho\alpha^3 = 0 \quad (4.6)$$

и

$$-1 - \frac{1}{4}(\rho + 2\kappa) - \kappa\nu(1 - \varphi q_1) + B_4 = 0, \quad (4.7)$$

откуда после подстановки величины B_4 получим систему для определения неизвестных ω_0 и q_1 (φ и ω_0 связаны соотношением (3.5)).

Что касается перемещений w , то оно определяется из (2.2) с учетом распределения наклона прогиба. Так как в данном случае остается в силе (3.4), то применимы и соотношения (3.13) и (3.14). Однако в этих формулах за q_1 и ω_0 следует выбирать решение уравнений (4.6) и (4.7).

Статическая допустимость данного режима пластического деформирования показывается численно.

5. Третий тип решения

Оказывается, что возможен и такой вариант решения, при котором $q_1 < \alpha$, т.е. $m_1 > 0$ при $q \in (\alpha, 1)$. В таком случае вблизи центра имеем режим 'EF', а около края оболочки реализуется режим EF на плоскости изгибающих моментов. Иными словами,

$$m_2 = \begin{cases} m_1 - \gamma^2, & q \in (\alpha, \beta), \\ m_1 - 1, & q \in (\beta, 1). \end{cases} \quad (5.1)$$

Согласно ассоциированному закону деформирования $w' = -\frac{w_0}{q}$. Поэтому теперь прогиб

$$w = \frac{w_0}{\ln \alpha} \ln q, \quad q \in (\alpha, 1). \quad (5.2)$$

Вычисляя компоненты деформации ε_1 и ε_2 с помощью (I.6) и (5.2), видим, что $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, т.е. вектор деформации является на самом деле внешней нормалью к поверхности текучести.

Подставляя m_1 и w' из (2.3), (2.4) и (5.2) в (I.5), можно проинтегрировать это уравнение. Учитывая при этом краевые условия (I.7), получим при $q \in (\alpha, \beta)$

$$m_1 = -\frac{q^2}{4}(\rho + 2\kappa\gamma) - \kappa\gamma\alpha\left(\frac{w_0}{q} - q\right) + \ln q(-\gamma^2 - \kappa\gamma w_1 + D_1) + D_2, \quad (5.3)$$

где $w_1 = \frac{w_0}{\ln \alpha}$ и

$$D_1 = \frac{\rho}{2}\alpha^2, \quad (5.4)$$

$$D_2 = \frac{\alpha^2}{4}(\rho + 2\kappa\gamma) + \kappa\gamma(w_1 - \alpha^2) - \ln \alpha(-\gamma^2 - \kappa\gamma w_1 + D_1).$$

В области $(\beta, 1)$ находим аналогично

$$m_1 = -\frac{q^2}{4}(\rho + 2\kappa) + \kappa\nu\left(\frac{w_0}{q} - q\right) + \ln q(-1 - \kappa w_1 + E_1) + E_2, \quad (5.5)$$

где

$$E_1 = 1 - \gamma^2 + \frac{\rho}{2}\alpha^2, \quad (5.6)$$

$$E_2 = m_1(\beta) + \frac{\beta^2}{4}(\rho + 2\kappa) - \kappa\nu\left(\frac{w_0}{\beta} - \beta\right) - \ln \beta(-1 - \kappa w_1 + E_1).$$

Для определения величины w_0 получим соотношение

$$w_0 = \frac{\beta}{\kappa} \ln \alpha \left\{ \kappa(\alpha - \beta + \beta \ln \frac{\alpha}{\beta}) - \beta \ln \beta - \beta\nu + \nu \right\}^{-1} \cdot \{-1 - \quad (5.7)$$

$$-\frac{1}{4} \{ \rho(1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \ln \alpha) + 2\kappa[\gamma(\beta - \alpha)^2 - \beta^2 + 1] \} + \gamma^2 \ln \alpha - \kappa\nu(1 - \beta) \}.$$

6. Четвертый тип решения

При проведении анализа выяснилось, что возможны и такие комбинации пластических режимов, при которых внешняя часть оболочки остается недеформируемой. Рассмотрим первый вариант такого типа деформирования. Пусть

$$m_2 = \begin{cases} -\gamma^2, & \varrho \in (\alpha, \varrho_1), \\ m_1 - \gamma^2, & \varrho \in (\varrho_1, \beta). \end{cases} \quad (6.1)$$

Вместо краевых условий (1.8) имеем

$$w(\beta) = 0, \quad m_1(\beta) = \gamma^2, \quad u(\beta) = 0. \quad (6.2)$$

В этом случае действительны соотношения (2.2), (2.3), (3.3) и первое из (2.1). Однако второе уравнение из (3.3) имеет место при $\varrho \in (\varrho_1, \beta)$. Интегрируя уравнения (3.3) с учетом (6.2), получим

$$w = \begin{cases} \varphi(\varrho - \alpha) + w_0, & \varrho \in (\alpha, \varrho_1), \\ \varphi[\varrho_1 \ln \frac{\varrho}{\varrho_1} + \varrho_1 - \alpha] + w_0, & \varrho \in (\varrho_1, \beta), \end{cases} \quad (6.3)$$

где

$$\varphi = \frac{w_0}{\varrho_1 \ln \frac{\varrho_1}{\beta} - \varrho_1 + \alpha}. \quad (6.4)$$

Изгибающий момент m_1 выражается соотношением (3.6) при $\varrho \in (\alpha, \varrho_1)$. Подставляя m_2 и w' с помощью (6.1)–(6.4) во второе уравнение (1.5) и интегрируя, получим при $\varrho \in (\varrho_1, \beta)$

$$m_1 = -\frac{\varrho^2}{4}(\mu + 2\kappa\gamma) - \kappa\gamma(\varphi\varrho_1 \ln \varrho - \alpha\varrho + \frac{\alpha\varphi\varrho_1}{\varrho}) - \gamma^2 \ln \varrho + F_1 \ln \varrho + F_2, \quad (6.5)$$

где

$$F_1 = \frac{\varrho_1^2}{6}(\mu + 2\kappa\gamma) + \frac{\kappa\gamma}{2}(\varrho_1\varphi - \alpha\varrho_1 - 2\alpha\varphi) + \gamma^2 + \frac{1}{6\varrho_1}(\kappa\gamma\alpha^3 - 6\alpha\gamma^2 + 3\kappa\gamma\varphi\alpha^2 + 2\mu\alpha^3), \quad (6.6)$$

$$F_2 = \frac{\varrho_1^2}{4}(\mu + 2\kappa\gamma) + \kappa\gamma(\varphi\varrho_1 \ln \varrho_1 - \alpha\varrho_1 + \alpha\varphi) + \gamma^2 \ln \varrho_1 + F_1 \ln \varrho_1.$$

Аналогично соотношениям (3.13), перемещение u имеет вид

$$u = \frac{R^2}{2A^2} \varphi \cdot \begin{cases} \varrho_1^2 - \varrho^2 - \varrho\varphi + \varrho_1\varphi + 2\varrho_1 \left(\frac{\varphi}{2\beta} + 1 \right) (\beta - \varrho_1), & \varrho \in (\alpha, \varrho_1), \\ \left(\frac{\varphi\varrho_1}{\varrho\beta} + 2 \right) (\beta - \varrho), & \varrho \in (\varrho_1, \beta). \end{cases} \quad (6.7)$$

Для определения величин w_0 и q_1 воспользуемся уравнением (4.6) и условием $m_1(\beta) = \gamma^2$, откуда получим

$$\gamma^2(1 + \ln \beta) + \frac{\beta^2}{4}(\mu + 2\kappa\gamma) + \kappa\gamma(\varphi_{q_1} \ln \beta - \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} \varphi_{q_1}) - F_1 \ln \beta - F_2 = 0. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) решается численно.

7. Пятый тип решения

Оказывается, что возможен еще один режим с недеформируемым краем. В этом случае

$$m_2 = m_1 - \gamma^2, \quad q \in (\alpha, \beta). \quad (7.1)$$

Согласно (6.2) прогиб w имеет теперь вид

$$w = \frac{w_0}{\ln \frac{\alpha}{\beta}} \ln \frac{q}{\beta}, \quad q \in (\alpha, \beta). \quad (7.2)$$

Для изгибающего момента m_1 при помощи (I.7), (7.1) и (7.2) получим выражение (I.5),

$$m_1 = -\frac{q^2}{4}(\mu + 2\kappa\gamma) - \kappa\gamma(w_1 \ln q - \alpha q + w_1 \frac{\alpha}{q}) - \gamma^2 \ln q + \frac{\mu}{2} \alpha \ln q + G_1, \quad (7.3)$$

где

$$G_1 = \kappa\gamma(w_0 + w_1 - \frac{\alpha^2}{2}) + \gamma^2 \ln \alpha + \frac{\mu^2}{4} \alpha^2 - \frac{\mu}{2} \alpha^2 \ln \alpha. \quad (7.4)$$

Интегрируя (2.2) с учетом (7.2) и (6.2), установим, что

$$\mu = \frac{R^2}{A^2} \frac{w_0}{\ln \frac{\alpha}{\beta}} (\beta - q) \left(1 + \frac{w_0}{2\beta q \ln \frac{\alpha}{\beta}} \right), \quad q \in (\alpha, \beta). \quad (7.5)$$

Величину w_0 определим из условия $m_1(\beta) = \gamma^2$, которое приводит с помощью (7.3) к уравнению

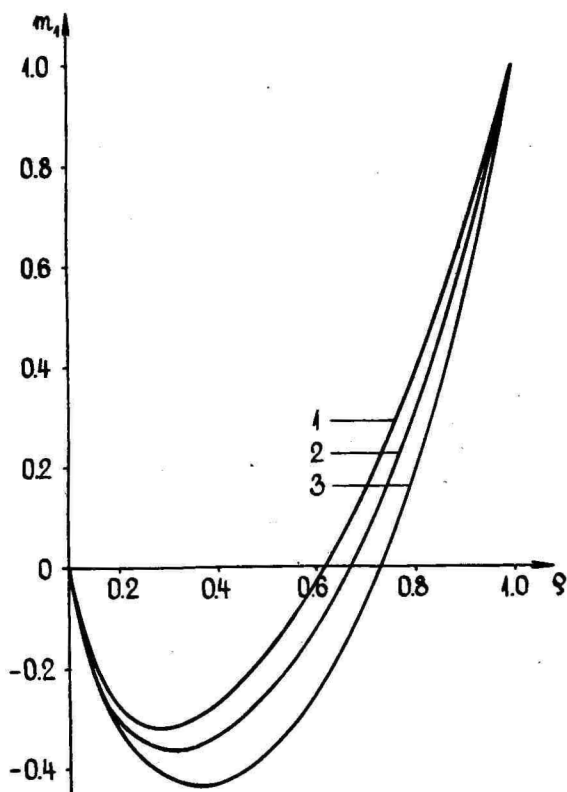
$$\gamma^2 \ln \beta + \kappa\gamma \left(\frac{\beta^2}{2} + w_1 \ln \beta - \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} w_1 \right) + \frac{\mu}{4} \beta^2 - \frac{\mu}{2} \alpha^2 \ln \beta + \gamma^2 - G_1 = 0. \quad (7.6)$$

После подстановки G_1 из (7.4) отсюда находим

$$w_0 = \frac{\beta \ln \alpha}{4\kappa\gamma [\beta - \alpha - \beta \ln \frac{\beta}{\alpha}]} \left\{ 4\gamma^2 \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) + 2\kappa\gamma (\beta - \alpha)^2 + \mu \left[\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right] \right\}. \quad (7.7)$$

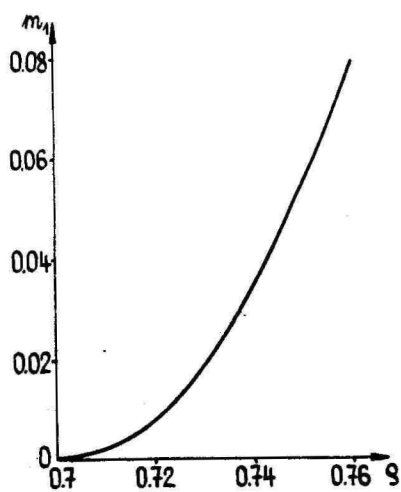
8. Обсуждение результатов

Результаты расчета представлены на фиг. 3 - 7. На фиг. 3 и 4 приведены графики изгибающего момента m_1 .

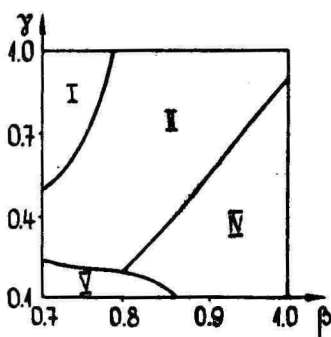


Фиг. 3

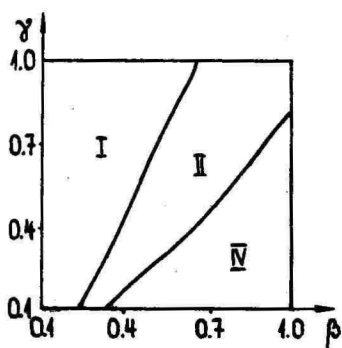
На фиг. 3 $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,3$; $\gamma = 0,8$; а фиг. 4 соответствует случаю, когда $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,76$; $\gamma = 0,28$. Распределения изгибающего момента, представленные на фиг. 3, характерны для первого типа решения (при данных значениях α , β и γ имеем первый тип решения), но фиг. 4 соответствует пятому типу решения. В последнем случае величина m_1 положительна во всех точках отрезка $(\alpha, 1)$. В вычислениях принималось $k = 2,5$. Кривые 1-3 на фиг. 3 соответствуют прогибам $\omega_0 = 0$, $\omega_0 = 0,5$ и $\omega_0 = 1,3$ соответственно.



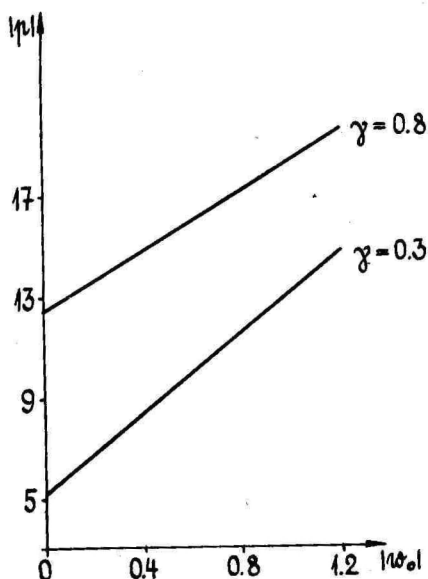
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Зависимость между интенсивностью распределенной поперечной нагрузки и максимальным прогибом приведена на фиг. 7. Здесь $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,5$ и $\kappa = 2,5$. Графики показывают, что уменьшение толщины в средней части оболочки приводит к быстрому росту прогиба.

Литература

1. Шаблий О.Н., Коба К.А., Конечные прогибы кольцевых пологих оболочек вращения из жесткопластического материала с упрочнением. Прикл. мех., 1974, № 3, 9-16.
2. Dumesnil C.E., Nevill G.E., Collapse loads of partially loaded clamped shallow spherical caps. AIAA Journal, 1970, 8, № 2, 361-363.
3. Duszek M., Geometryczne nieliniowa teoria konstrukcji sztywno-plastycznych. Warszawa, IPPT, 1975.
4. Hodge P.G., Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells. Prentice Hall, 1963.
5. Kondo K., Pian T.H.H., Large deformations of rigid-plastic shallow spherical shells. Int.J.Mech.Sci., 1981, 23, №2, 69-76.

Расчеты показывают, что то, какой тип решения реализуется, зависит от комбинации параметров α , β и γ . Области допустимых значений этих параметров при разных вариантах решений приведены при $w_0 = 0$ и $\kappa = 2,5$ на фиг. 5 и 6. На фиг. 5 $\alpha = 0,7$ и на фиг. 6 $\alpha = 0,1$. При расчетах обнаружено (это отражается и на фиг. 5), что пятый тип решения реализуется лишь тогда, когда толщина γ сравнительно мала.

Зависимость между интенсивностью распределенной поперечной на-

6. Lamblin D.O., Guerlement G., Save M.A., Solution de dimensionnement plastique de volume minimal de plaques circulaires pleines et sandwiches en présence de contraintes technologiques. J. Meç. Theor. et Appl., 1985, 4, N° 4, 433-461.
7. Lellep J., Lepik Ü., Analytical methods in plastic structural design. Eng. Optimiz., 1984, 7, N° 3, 209-239.
8. Pawlowski H., Spychala A., Optymalne kształtowanie sandwichowej powłoki kulistej. Biul. WAT J. Daubrowskiego, 1983, 32, N° 12, 57-68.
9. Save M.A., Limit analysis and design: an up-to-date subject of engineering plasticity. Plasticity Today: Modelling, Meth. and Appl. London, New York, 1985, 767-784.

Large deflections of rigid-plastic shallow
spherical shells

J. Lellep, H. Hein

Summary

Post-yield behaviour of shallow spherical shells subjected to the uniform internal pressure loading has been studied. The material of the shell is assumed to be a rigid-plastic one which obeys the Tresca yield condition and associated deformation law. The approximation of the exact yield surface which consists in separation of the bending and the membrane response has been used. Exact solutions for shallow shells of piece wise constant thickness have been established for different ratios of thicknesses. These computer-aided analytical solutions furnish useful results for optimal design of plastic shells in the post-yield point range.

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНО-
РОДНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ И КРУГЛЫХ ДИСКОВ, РАВНО-
ПРОЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

К. Хейн, М. Хейнлоо

Тартуский государственный университет

За последние десятилетия активно развивается проектирование равнопрочных конструкций, основанное на решении упругой задачи с дополнительным требованием выполнения при предельных нагрузках условия пластичности сразу во всей конструкции. Важной особенностью неоднородных конструкций является возможность обеспечения равнопрочности за счет распределения упругих свойств. В работах [1 - 3] получено точное аналитическое решение задачи об определении оптимальных распределений модуля Юнга по радиусу вращающихся дисков постоянной толщины [1], цилиндрических труб [2] и сферических сосудов [3], равнопрочных относительно условия пластичности Треска.

В данной работе аналогичная задача для вращающихся круглых дисков переменной толщины и цилиндрических труб решается относительно условия пластичности Мизеса. Предполагается, что рассматриваемые конструкции находятся в условиях плоской задачи и нагружены внутренним и внешним давлениями. В этих условиях, как и в работах [1-3], решение поставленной задачи расщепляется на задачу определения статически допустимых предельных нагрузок, обеспечивающих выполнение условия пластичности, и на задачу определения оптимального распределения модуля Юнга по радиусу, которое гарантирует упругие деформации конструкций вплоть до предельных нагрузок. Дополнительно в данной работе решается задача о нахождении границы области квазистатического изменения нагрузок, в которой обеспечиваются упругие деформации рассматриваемых конструкций с оптимальной неоднородностью и соответствующих однородных конструкций. Для решения поставленных задач построены численные алгоритмы, которые реализованы в одном пакете программ. На основании результатов расчетов построены графики зависимостей между предельными значениями нагрузок, графики распределений модуля Юнга по радиусу в различных

условиях нагружения и области упругих деформаций. Результаты данной работы сравниваются с аналогичными результатами работ [1 - 2], и обсуждается эффективность проектирования рассматриваемых конструкций с оптимальной неоднородностью вместо однородных.

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} r &= \frac{\rho}{f}; & E &= \frac{E^0}{\sigma^0}; & \sigma_\theta &= \frac{\sigma_\theta^0}{\sigma^0}; & \sigma_r &= \frac{\sigma_r^0}{\sigma^0}; & \alpha &= \frac{a}{f}; \\ \nu_1 &= \frac{\nu_1^0}{\sigma^0}; & \nu_2 &= \frac{\nu_2^0}{\sigma^0}; & h &= \frac{h^0(r)}{f}; & \omega &= \frac{\gamma(\omega^0 f)^2}{\sigma^0}; & \nu, \end{aligned}$$

где E^0 , ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона; σ_r , σ_θ - компоненты напряжений; a , f - внутренний и внешний радиусы; ρ ($a \leq \rho \leq b$) - текущий радиус; σ^0 - предел текучести; ν_1^0 , ν_2^0 - внутреннее и внешнее давления; ω^0 , γ - угловая скорость и плотность материала; $h^0(r)$ - функция распределения толщины диска.

Предельные значения напряжений и угловой скорости будут отмечены "звездочкой".

1. Определение статически допустимых предельных нагрузок.

Предположим, что условие пластичности Мизеса выполняется сразу во всех точках рассматриваемых конструкций. В условиях плоской задачи это требование приводит к выполнению следующего тождества:

$$\sigma_\theta^{*2} + \sigma_\theta^* \sigma_r^* (2 - 3\kappa) + \sigma_r^{*2} = \kappa, \quad (1)$$

где в случае диска $\kappa = 1$, а в случае трубы $\kappa = (\nu^2 - \nu + 1)^{-1}$. Разрешив тождество (1) относительно σ_θ^* , находим

$$\sigma_\theta^* = \frac{1}{2} \left[\sigma_r^* (3\kappa - 2) + \ell \sqrt{3\kappa(3\kappa - 4)\sigma_r^{*2} + 4\kappa} \right], \quad (2)$$

где $\ell = \pm 1$.

Предельные напряжения σ_r^* , σ_θ^* и предельная угловая скорость ω^* должны удовлетворять следующему уравнению равновесия:

$$\sigma_r^{*'} - \frac{1}{r} (\sigma_\theta^* - \sigma_r^*) + \frac{h'}{h} \sigma_r^* + \omega^* r = 0, \quad (3)$$

где штрих обозначает производную по r , а в случае трубы следует принять $h' \equiv 0$. Исключив с помощью тождества (2) величину σ_θ^* из уравнения (3), имеем

$$\sigma_r^{*'} = \frac{1}{2r} \left[(3\kappa - 4)\sigma_r^* + \ell \sqrt{3\kappa(3\kappa - 4)\sigma_r^{*2} + 4\kappa} \right] + h' h^{-1} \sigma_r^* - \omega^* r. \quad (4)$$

При заданных значениях величин μ_1^* и ω^* к уравнению (4) добавляется граничное условие

$$\sigma_r^*(\alpha) = -\mu_1^*, \quad (5)$$

и предельное значение внешнего давления определяется из условия

$$\sigma_r^*(1) = -\mu_2^*. \quad (6)$$

Если заданы величины μ_2^* и ω^* , то в качестве граничного условия к уравнению (4) используется равенство (6). Тогда предельное значение внутреннего давления определяется из условия (5). При заданных значениях величин μ_1^* и μ_2^* к уравнению (4) добавляется, например, условие (5). Значение величины ω^* определяется так, чтобы условие (6) удовлетворялось с заданной точностью.

2. Определение оптимального распределения модуля Юнга

Рассмотрим условие совместности деформаций

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r\varepsilon_\theta' = 0. \quad (7)$$

Пользуясь законом Гука

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} (\sigma_r^* - \nu^* \sigma_\theta^*); \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} (\sigma_\theta^* - \nu^* \sigma_r^*), \quad (8)$$

где $\nu^* = \nu$, $\varkappa = I$ в случае диска и $\varkappa = 1 - \nu^2$,

$$\nu^* = \frac{\nu}{1 - \nu^2}$$

в случае трубы, представим уравнение (7) в виде следующего дифференциального уравнения:

$$q' = \frac{r(\sigma_{\theta}^{*'} - \nu^* \sigma_r^{*'}) - (1 + \nu^*)(\sigma_r^* - \sigma_{\theta}^*)}{r(\sigma_{\theta}^* - \nu^* \sigma_r^*)}, \quad (9)$$

где обозначено $q = \ln E(r)$. Далее удобно принять $q = \ln E(r) - \ln E(1)$. Тогда к уравнению (9) можно добавить граничное условие

$$q(1) = 0. \quad (10)$$

С помощью формул (2), (4) и решения задачи Коши (4), (5) или (4), (6) можно решить задачу Коши (9), (10) и найти

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \exp q(r), \quad (11)$$

что и определяет требуемое оптимальное распределение модуля Юнга. Эти распределения могут быть реализованы приближенно в многослойных цилиндрических трубах и круглых дисках, представляющих собой наборы из большого числа связанных между собой одноосных труб или колец, имеющих различные модули Юнга, одинаковые коэффициенты Пуассона и пределы текучести.

3. Определение области упругих деформаций для конструкций с оптимальной неоднородностью и для соответствующих однородных конструкций

Согласно условию пластичности Мизеса граница области квазистатического изменения параметров ν_1 , ν_2 и ω , в которой деформации цилиндрических труб и круглых дисков остаются упругими, определяются равенством

$$\max_r [\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\theta} \sigma_r (2 - 3\kappa) + \sigma_r^2] = \kappa. \quad (12)$$

Пользуясь законом Гука (8) и уравнением (3), записанными для σ_r , σ_{θ} и ω , из уравнения (7) получим следующее дифференциальное уравнение для определения напряжений σ_r :

$$\sigma_r'' = f_1(r) \sigma_r' + f_2(r) \sigma_r + \omega(q'r - 3 - \nu^*), \quad (13)$$

где q' определяется уравнением (9), а

$$f_1(r) = (q'r - 3)r^{-4} - k'k^{-4};$$

$$f_2(r) = [(1 - \nu^* + r k' k^{-4})q' - (2 + \nu^*)k'k^{-4} + r\left(\frac{k'}{k}\right)']r^{-4}.$$

В случае однородных конструкций в (I3) следует принять $q' = 0$. Решение уравнения (I3) должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_r(\alpha) = -\nu_1; \quad \sigma_r(1) = -\nu_2. \quad (I4)$$

После решения краевой задачи (I3), (I4) напряжение σ_θ определяется из уравнения (3), записанного для σ_r , σ_θ и ω . Варьируя значениями параметров ν_1 , ν_2 и ω , определяем такие значения этих параметров, при которых равенство (I2) удовлетворяется с заданной точностью.

4. Численное решение поставленных задач

Для численного решения поставленных задач составлен пакет программ, который состоит из трех частей. В первой части пакета вычисляются зависимости между статически допустимыми предельными значениями параметров ν_1^* , ν_2^* и ω^* . При этом для решения задач Коши (4), (5) и (4), (6) используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка с прямыми и обратными шагами соответственно. Во второй части пакета при заданных значениях двух параметров из ν_1^* , ν_2^* и ω^* вычисляются оптимальные распределения модуля Юнга по радиусу рассматриваемых конструкций. В этой части задача Коши (9), (10) решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка с обратным шагом. При этом используются численные значения предельных напряжений и параметров ν_1^* , ν_2^* и ω^* из первой части пакета. В третьей части пакета находятся границы областей упругих деформаций в случае оптимальных распределений модуля Юнга, найденных во второй части, и в случае соответствующей однородной конструкции. Краевая задача (I3), (I4) решается методом суперпозиций. При численном вычислении напряжения σ_θ по уравнению (3), записанного для σ_r , σ_θ и ω , используется формула численного дифференцирования четвертого порядка.

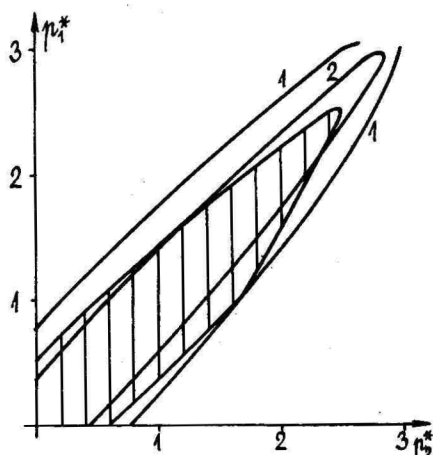
5. Результаты численного расчета

На фиг. 1 - 3 приведены результаты расчета оптимальной неоднородности цилиндрической трубы под действием внутренне-

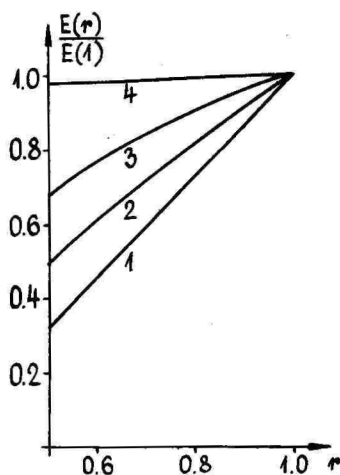
го и внешнего давлений, когда $\alpha = 0.5$,

$\nu = 0.33$. На фиг. 1 кривыми 1 представлены графики зависимостей между предельными значениями p_1^* и p_2^* . Кривая 2 определяет зависимость между p_1^* и p_2^* для однородной трубы в области упругих деформаций. На фиг. 2, 3 представлены графики оптимальных распределений модуля Юнга по радиусу трубы, причем на фиг. 2 кривой 1 соответствует значения

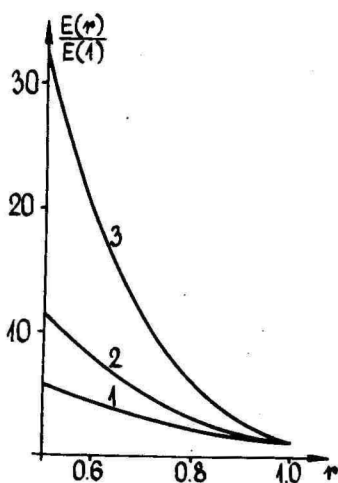
$p_1^* = 0.00$; $p_2^* = 0.76$,



Фиг. 1

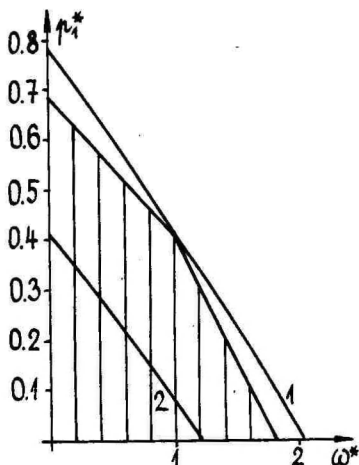


Фиг. 2

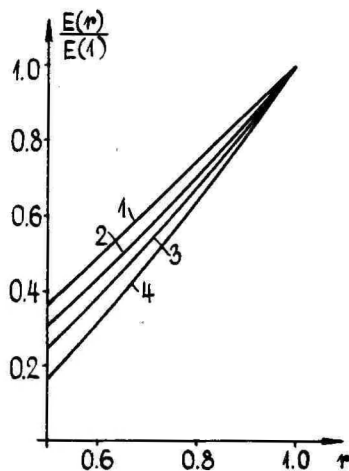


Фиг. 3

кривой 2 - $\nu_1^* = 1.00$; $\nu_2^* = 1.64$, кривой 3 - $\nu_1^* = 2.00$; $\nu_2^* = 2.43$, кривой 4 - $\nu_1^* = 3.00$; $\nu_2^* = 2.99$, а на фиг. 3 кривой I - $\nu_1^* = 3.00$; $\nu_2^* = 2.56$, кривой 2 - $\nu_1^* = 2.90$; $\nu_2^* = 2.39$, кривой 3 - $\nu_1^* = 2.80$; $\nu_2^* = 2.25$. Обратим внимание на различное поведение кривых на фиг. 2, 3.



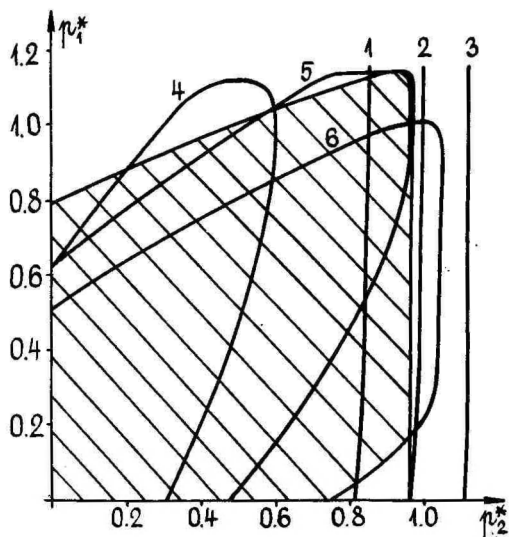
Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4, 5 приведены результаты расчета оптимальной неоднородности вращающейся цилиндрической трубы под действием внутреннего давления, когда $\alpha = 0.5$, $\nu = 0.33$. На фиг. 4 кривая I представляет график зависимости между ν_1^* и ω^* . Кривая 2 дает зависимость между ν_1^* и ω^* для однородной трубы в области упругих деформаций. На фиг. 5 представлены графики оптимального распределения модуля Юнга по радиусу трубы, причем на кривой I имеем $\nu_1^* = 0.33$; $\omega^* = 2.00$, на кривой 2 - $\nu_1^* = 0.25$; $\omega^* = 1.50$, на кривой 3 - $\nu_1^* = 0.42$; $\omega^* = 1.00$, на кривой 4 - $\nu_1^* = 0.79$; $\omega^* = 0.00$.

На фиг. 6, 7 приведены результаты расчета оптимальной неоднородности круглых дисков переменной толщины под воздействием давлений на внутреннем и внешнем радиусах, когда $\alpha = 0.1$, $\nu = 0.33$. В расчетах принято, что толщина диска изменяется по закону $h(r) = Hr^n$, где H



Фиг. 6

выполнение условия пластичности Мизеса сразу во всех точках диска возможно только в узком интервале изменения r_2^* . Кривыми 4 - 6 даются зависимости между r_1^* и r_2^* для однородного диска в области упругих деформаций. При этом на кривой 4 имеем $\nu = 0.3$, на кривой 5 - $\nu = 0.0$, на кривой 6 - $\nu = -0.3$. На фиг. 7 представлены графики оптимального распределения модуля Юнга по радиусу диска, причем на кривой I имеем $r_1^* = 0.00$; $r_2^* = 1.12$;

$\nu = -0.30$, на кривой 2 - $r_1^* = 0.00$; $r_2^* = 1.07$;

$\nu = -0.20$, на кривой 3 - $r_1^* = 0.71$; $r_2^* = 1.05$;

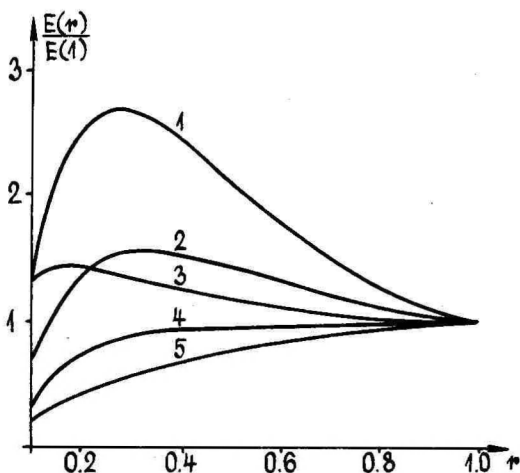
$\nu = -0.10$, на кривой 4 - $r_1^* = 0.00$; $r_2^* = 0.97$;

$\nu = 0.00$, на кривой 5 - $r_1^* = 0.00$; $r_2^* = 0.82$;

$\nu = 0.30$.

Области упругих деформаций для рассматриваемых конструкций с распределением модуля Юнга согласно кривой 2 на фиг. 2, кривой 3 на фиг. 5, кривой 4 на фиг. 6 заштрихованы соответственно на фиг. 1, 4, 6. На границе области упругих деформаций в точке $r_1^* = 1.00$; $r_2^* = 1.64$ на фиг. 1, в точке $r_1^* = 0.42$; $\omega^* = 1.00$ на фиг. 4 в точке $r_1^* = 0.00$; $r_2^* = 0.97$ на фиг. 6 условие Мизеса выполняется сразу

и ν - некоторые константы. На фиг. 6 кривыми 1 - 3 изображены графики зависимостей между r_1^* и r_2^* , причем на кривой 1 имеем $\nu = 0.3$, на кривой 2 - $\nu = 0.0$, на кривой 3 - $\nu = 0.3$. Из фиг. 6 следует, что в отличие от первых двух примеров



Фиг. 7

ти упругих деформаций. Интересно заметить, что области упругих деформаций для рассматриваемых конструкций с оптимальной неоднородностью на фиг. 4, 6 значительно больше соответствующих областей для однородных конструкций. Эти обстоятельства указывают на высокую эффективность оптимизации неоднородности цилиндрических труб и круглых дисков в рассматриваемом нагружении.

Сравнивая результаты данной работы и работы [2], заметим, что на фиг. 1 отсутствует график зависимости между ν_1^* и ν_2^* , когда $\nu_1^* > \nu_2^*$ и $2.56 < \nu_2^* < 2.99$, а в работе 2 такая зависимость получена в виде формулы. Остальные результаты данной работы по оптимизации неоднородности цилиндрических труб под действием внутреннего и внешнего давлений при качественном совпадении значительно отличаются количественно от результатов работы [2].

во всех точках. Область упругих деформаций для соответствующих однородных конструкций ограничена координатными осями и кривой 2 на фиг. 1, 4, кривыми 4 - 6 на фиг. 6.

Из фиг. 1, 4, 6 следует, что за счет оптимизации неоднородности можно значительно увеличить значения параметров ν_1^* , ν_2^* , ω^* по сравнению с аналогичными параметрами для однородных конструкций в области упругих деформаций.

Литература

1. Хейн К., Хейн М., Хейнлоо М., Оптимальная непрерывная неоднородность вращающегося диска в стационарном поле температуры. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 772, 60-69.
2. Хейн К., Хейнлоо М., Оптимизация непрерывной неоднородности цилиндрических труб под давлением. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 772, 44-59.
3. Хейн К., Хейнлоо М., Оптимальная неоднородность сферического сосуда под давлением. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 43-51.

Automatic calculation of the optimal non-homogeneity for cylindrical tubes and circular disks of uniform strength with regard to Mises yield condition

K. Hein, M. Heinloo

Summary

This paper continues the determination of optimal non-homogeneity that guarantees the satisfaction of the Mises yield condition simultaneously at all points of bodies. This trend has been started in reports [1 - 3]. Circular disks of variable thickness and cylindrical tubes subjected to pressures and angular rotation are regarded here. The main formulae and the description of automatic calculation have been brought out. Three examples have been solved and to illustrate the results, figures with optimal distributions of the Young modulus, distributions of limit loads, regions of elastic deformations in the case of homogeneity and optimal non-homogeneity have been presented. The effectiveness of the design of such a structure has been discussed.

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ ДИНАМИКИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Т. Лепикулт

Тартуский государственный университет

I. Постановка задачи

Рассмотрим жесткопластическую осесимметричную цилиндрическую оболочку типа сэндвича. Общая толщина стенки оболочки переменная, причем предполагаем, что сумма толщин внешних и толщина внутреннего слоев оболочки пропорциональны. Заданы ещё условия закрепления концов оболочки. Один из концов может быть также свободным. Опоры оболочки могут перемещаться в направлении оси, так что осевых усилий не возникает. Оболочка нагружена однопараметрическим внутренним давлением. Предполагаем, что в течение некоторого конечного промежутка времени интенсивность нагрузки выше предельной. Тогда в определённый момент времени оболочка перейдет (целиком или частично) в пластическое состояние и приобретёт некоторую кинетическую энергию. Эта энергия постепенно израсходуется на пластическую работу, и, наконец, движение прекратится. Поставим задачу найти остаточные прогибы срединной поверхности оболочки и время деформирования.

Из-за трудностей принципиального характера не рассматриваются оболочки, оба конца которых свободны.

2. Обозначения и безразмерные величины

Предполагаем, что функция, характеризующая интенсивность нагрузки, имеет следующий вид:

$$P(x, t) = P_1(x) \cdot P_2(t), \quad (I)$$

где x - координата вдоль оси оболочки, $t \geq 0$ - время, $P_1(x)$ - пространственная мода нагрузки, $P_2(t)$ - амплитудная функция. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\max_{t \geq 0} P_2(t) = 1$. Начало координат поместим в левом конце оболочки.

Введем следующие обозначения:

$2l$, R , $h(x)$ - длина, радиус и толщина внутреннего слоя стенки оболочки;

a_i , $i = 1, \dots, n$ - координаты поперечных сечений оболочки,

где толщина стенки имеет скачки, т.е.

- | | |
|--|--|
| $h_* = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} h(x) dx$ | - средняя толщина внутреннего слоя стенки оболочки; |
| $d = \text{const}$ | - отношение общей толщины внешних слоев к толщине внутреннего слоя; |
| ρ_1, ρ_2 | - плотность материала внутреннего и внешних слоев соответственно; |
| σ_0 | - предел текучести материала внешних слоев при растяжении; |
| $M(x, t), N(x, t)$ | - осевой момент и окружная сила на единицу длины соответственно (момент M считаем положительным, если он вызывает растяжение внутренних волокон, и отрицательным, если внешних; окружная сила положительна, если она вызывает растягивающие напряжения); |
| $W(x, t)$ | - прогиб по направлению внешней нормали к срединной поверхности оболочки; |
| $t_* = \max\{t: P_1(t) = 1\}$ | - самый поздний момент времени, когда интенсивность нагрузки достигает своего максимального значения. |

Дальнейшие рассуждения проведем, применяя следующие безразмерные величины и функции:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}; & \alpha_i &= \frac{a_i}{l}; & \gamma(\xi) &= \frac{h(\xi l)}{h_*}; \\ m(\xi, \tau) &= \frac{4}{d\sigma_0 h_*^2} \cdot M(\xi l, t_* \tau); & c^2 &= \frac{4l^2}{R h_*}; \\ n(\xi, \tau) &= \frac{1}{d\sigma_0 h_*} \cdot N(\xi l, t_* \tau); \\ \mu_1(\xi) &= \frac{R}{d\sigma_0 h_*} \cdot P_1(\xi l); & \mu_2(\tau) &= P_2(t_* \tau); \\ \nu(\xi, \tau) &= \mu_1(\xi) \cdot \mu_2(\tau); \\ w(\xi, \tau) &= \frac{R(d\rho_2 + \rho_1)}{d\sigma_0 t_*^2} \cdot W(\xi l, t_* \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Точкой и штрихом будут обозначены производные по τ и ξ соответственно. Для сокращения записей будем в дальнейшем пропускать аргументы ξ и τ введенных функций.

3. Основные соотношения

Решению задачи должно удовлетворять следующим условиям:

1) уравнение движения

$$m'' + c^2(n - \rho + \gamma \dot{\omega}) = 0 ; \quad (3)$$

2) условию пластичности

$$\Phi(m, n) \leq 0 , \quad (4)$$

где Φ - функция текучести;

3) соотношениям ассоциированного закона течения

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\dot{\omega}''}{c^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial m} , \\ \dot{\epsilon} = \dot{\omega}' = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n} , \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\lambda \begin{cases} = 0, & \text{если } \Phi(m, n) < 0 & \text{или} \\ & \Phi(m, n) = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial m} \dot{m} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \dot{n} < 0 \\ > 0, & \text{если } \Phi(m, n) = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial m} \dot{m} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \dot{n} = 0 ; \end{cases}$$

4) начальным условиям для скоростей и перемещений

$$\dot{\omega}'(\tau_0(\xi), \xi) = \dot{\omega}(\tau_0(\xi), \xi) = 0 , \quad (6)$$

где $\tau_0(\xi)$ - начальный момент времени пластического деформирования в сечении ξ ;

5) граничным условиям :

а) если конец оболочки $\xi^* = 0$ или $\xi^* = 2$ свободно оперт, то

$$m(\xi^*, \tau) = 0 , \quad (7)$$

$$\dot{\omega}(\xi^*, \tau) = 0 ; \quad (8)$$

б) если конец оболочки свободен, то к условию (7) прибавляется

$$m'(\xi^*, \tau) = 0 ; \quad (9)$$

в) при жесткой заделке конца и на границе жесткой и пластической областей выполняются условие (8) и

$$m(\xi^*, \tau) = \gamma^2(\xi^*) ; \quad (10)$$

г) в случае симметричной задачи относительно сечения $\xi^* = 1$ будет достаточно рассмотреть только левую половину оболочки при граничных условиях

$$m'(1, \tau) = 0 \quad (11)$$

и либо

$$m(1, \tau) = -\gamma^2(1) , \quad (12)$$

либо

$$\dot{w}'(1, \tau) = 0 ; \quad (13)$$

д) на движущейся границе пластической зоны должно удовлетворяться дополнительное граничное условие

$$m'(\xi^*, \tau) = 2\gamma(\xi^*)\gamma'(\xi^*) ; \quad (14)$$

б) требование неотрицательности мощности пластической диссипации энергии:

$$m \cdot \frac{\dot{w}''}{c^2} + n \cdot \dot{w} > 0 \quad (15)$$

или

$$m \cdot (\dot{w}'(\xi^*+, \tau) - \dot{w}'(\xi^*-, \tau)) \geq 0 \quad (15')$$

если в сечении ξ^* величина \dot{w}'' является неопределенной.

Из вышеуказанных условий следует ещё уравнение принципа виртуальной мощности ([I], с. 35)

$$\int_0^2 \left[m \cdot \frac{\dot{w}''}{c^2} + (n - \rho + \gamma \dot{w}') \dot{w} \right] d\xi + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^k m(\xi_i, \tau) \cdot [\dot{w}'(\xi_i+, \tau) - \dot{w}'(\xi_i-, \tau)] = 0 \quad (16)$$

для каждого $\tau > 0$,

где через ζ_i , $i=1, \dots, l$ обозначены точки разрыва \dot{w}' (в их числе могут быть и концы оболочки). Интегрируя последнее соотношение по τ , получим

$$\int_0^{\tau} \int_0^2 \left[m \cdot \frac{\dot{w}''}{c^2} + (n - \rho) \dot{w}' \right] d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^2 \gamma \dot{w}'^2 d\xi + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^l \int_0^{\tau} m(\zeta_i, \tau) \cdot [\dot{w}'(\zeta_i +, \tau) - \dot{w}'(\zeta_i -, \tau)] d\tau = 0. \quad (17)$$

Последнее условие будем использовать в качестве интегрального критерия истинности решения.

Ограничимся классом задач, где компонента решения $\dot{w}'(\xi, \tau) > 0$, $\xi \in [0, 2]$. Из сделанного предположения, ассоциированного закона течения (5) и свойства функции текучести $\text{sign} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{sign } n$ вытекает, что

- 1) пластические деформации могут возникать лишь при $n \geq 0$, что позволяет рассматривать только правую часть кривой текучести;
- 2) во внутренних точках пластических зон должно быть $\dot{w}' > 0$, и, следовательно, напряженное состояние не может находиться в регулярных точках кривой текучести, где $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ (т.е., где касательная к кривой параллельна оси n).

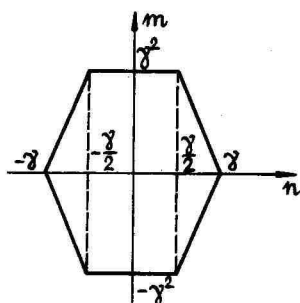
В качестве условий текучести будем использовать условия Треска и Мизеса. Проанализируем оба условия отдельно. Остаточные прогибы можно найти, интегрируя соотношение $\frac{\partial n}{\partial t} = \dot{w}'$, после чего будем иметь

$$w(\xi, \tau_f) = \int_{\tau_n}^{\tau_f} \dot{w}'(\xi, \tau) d\tau, \quad (18)$$

где $\tau_f = \tau_f(\xi)$ - время остановки движения в точке ξ .

4. Система определяющих уравнений и метод решения при условии текучести Треска

При условии текучести Треска ограничимся оболочкой кусочно-постоянной толщины стенки. Кривая текучести показана на фиг. I.



Фиг. I

Предположение, введенное в конце предыдущего пункта, позволяет утверждать, что пластические деформации могут возникать лишь при $\gamma/2 < n < \gamma$, т.е. на прямых

$$m + 2\gamma n - 2\gamma^2 = 0, \text{ если } m \geq 0; \quad (19)$$

$$-m + 2\gamma n - 2\gamma^2 = 0, \text{ если } m \leq 0.$$

Должно быть выполнено условие $|m| \leq \gamma^2$. (20)

Обозначим через β_i , $i = 1, \dots, k$ следующие сечения оболочки:

- а) границы пластических зон;
- б) сечения скачков толщины;
- в) сечения разрывности $\dot{\omega}'$ (пластические шарнирные окружности);
- г) сечения, где меняется знак изгибающего момента.

Через γ_i обозначим толщину стенки на участке $\xi \in (\beta_i, \beta_{i+1})$. Тогда из ассоциированного закона течения (5) и уравнения функции текучести (19) следует

$$\dot{\omega}' \pm b_i^2 \dot{\omega} = 0, \quad \text{где } b_i = \sqrt{\sigma^2 / (2\gamma_i)} \quad (21)$$

Решая последнее уравнение, получим на отрезке $\xi \in (\beta_i, \beta_{i+1})$

$$\dot{\omega}' = \begin{cases} c_1^i(\tau) \cos b_i \xi + c_2^i(\tau) \sin b_i \xi, & \text{если } m \leq 0, \\ c_1^i(\tau) e^{b_i \xi} + c_2^i(\tau) e^{-b_i \xi}, & \text{если } m \geq 0, \end{cases} \quad (22)$$

где c_1^i , c_2^i - искомые функции.

Продифференцировав последнее соотношение по τ , получим

$$\ddot{w} = \begin{cases} \dot{c}_1^i \cos b_i \xi + \dot{c}_2^i \sin b_i \xi, & \text{если } m < 0, \\ \dot{c}_1^i e^{b_i \xi} + \dot{c}_2^i e^{-b_i \xi}, & \text{если } m > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя полученное выражение для \ddot{w} в уравнение равновесия (3) и учитывая уравнения (19), получим

$$m^i + b_i^2 m_i = c^2 [\gamma_i - \rho - \gamma_i (\dot{c}_1^i \cos b_i \xi + \dot{c}_2^i \sin b_i \xi)], \quad \text{если } m < 0;$$

$$m^i - b_i^2 m_i = c^2 [\gamma_i - \rho - \gamma_i (\dot{c}_1^i e^{b_i \xi} + \dot{c}_2^i e^{-b_i \xi})], \quad \text{если } m > 0. \quad (24)$$

Проинтегрируем теперь последние уравнения по ξ . Введем следующие функции

$$\psi_i(\xi) = \begin{cases} -\frac{c^2 \gamma_i}{2b_i} [(\xi - \beta_i) \sin b_i \xi + \frac{1}{2b_i} (\cos b_i \xi - \cos b_i (2\beta_i - \xi))], & \text{если } m < 0; \\ -\frac{c^2 \gamma_i}{2b_i} [(\xi - \beta_i) e^{b_i \xi} - \frac{1}{2b_i} (e^{b_i \xi} - e^{b_i (2\beta_i - \xi)})], & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$\varphi_i(\xi) = \begin{cases} \frac{c^2 \gamma_i}{2b_i} [(\xi - \beta_i) \cos b_i \xi - \frac{1}{2b_i} (\sin b_i \xi - \sin b_i (2\beta_i - \xi))], & \text{если } m < 0; \\ \frac{c^2 \gamma_i}{2b_i} [(\xi - \beta_i) e^{-b_i \xi} + \frac{1}{2b_i} (e^{-b_i \xi} - e^{-b_i (2\beta_i - \xi)})], & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$\psi_i(\xi) = \begin{cases} -\frac{c^2 \gamma_i}{2} [(\xi - \beta_i) \cos b_i \xi + \frac{1}{2b_i} (\sin b_i \xi - \sin b_i (2\beta_i - \xi))], & \text{если } m < 0; \\ -\frac{c^2 \gamma_i}{2} [(\xi - \beta_i) e^{b_i \xi} + \frac{1}{2b_i} (e^{b_i \xi} - e^{b_i (2\beta_i - \xi)})], & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$\varphi_i(\xi) = \begin{cases} \frac{c^2 \gamma_i}{2} [(\xi - \beta_i) \sin b_i \xi + \frac{1}{2b_i} (\cos b_i \xi - \cos b_i (2\beta_i - \xi))], & \text{если } m < 0; \\ \frac{c^2 \gamma_i}{2} [(\xi - \beta_i) e^{-b_i \xi} - \frac{1}{2b_i} (e^{-b_i \xi} - e^{-b_i (2\beta_i - \xi)})], & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$v_i^1(\xi) = \begin{cases} \cos b_i(\xi - \beta_i), & \text{если } m \leq 0; \\ \operatorname{ch} b_i(\xi - \beta_i), & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$v_i^2(\xi) = \begin{cases} \sin b_i(\xi - \beta_i), & \text{если } m \leq 0; \\ \operatorname{sh} b_i(\xi - \beta_i), & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$v_i^3(\xi) = \begin{cases} -b_i \sin b_i(\xi - \beta_i), & \text{если } m \leq 0; \\ b_i \operatorname{sh} b_i(\xi - \beta_i), & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

(25)

$$v_i^4(\xi) = b_i v_i^3(\xi);$$

$$\mu_i(\xi, y) = \begin{cases} \sin b_i(\xi - y), & \text{если } m \leq 0; \\ \operatorname{sh} b_i(\xi - y), & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$\mu_i^1(\xi, y) = \begin{cases} b_i \cos b_i(\xi - y), & \text{если } m \leq 0; \\ b_i \operatorname{ch} b_i(\xi - y), & \text{если } m > 0; \end{cases}$$

$$F(\xi, \tau) = \frac{c^2}{b_i} \int_{\rho_i}^{\xi} (\rho(y, \tau) - \gamma_i) \mu_i(\xi, y) dy;$$

$$F'(\xi, \tau) = \frac{c^2}{b_i} \int_{\rho_i}^{\xi} (\rho(y, \tau) - \gamma_i) \mu_i^1(\xi, y) dy,$$

мы можем представить результат в форме

$$m(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} v_i^1(\xi) \\ \frac{1}{b_i} v_i^2(\xi) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_i \\ m_i' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_i^1(\xi) \\ \psi_i^2(\xi) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{c}_1^i \\ \dot{c}_2^i \end{pmatrix} + F(\xi, \tau), \quad (26)$$

$$m'(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} v_i^1(\xi) \\ \frac{1}{b_i} v_i^2(\xi) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_i \\ m_i' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_i^1(\xi) \\ \psi_i^2(\xi) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{c}_1^i \\ \dot{c}_2^i \end{pmatrix} + F'(\xi, \tau) \quad (27)$$

при $\xi \in [\beta_i, \beta_{i+1}]$.

Принимая в последних формулах $\xi = \beta_{i+1}$, мы получим рекуррентные связи относительно переменных m_i' и m_i .

Допустим теперь, что границам пластической зоны соответствуют индексы q и r в векторе $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $1 \leq q < r \leq n$. В этой зоне мы имеем следующие условия:

- 1) условия непрерывности для m , m' и \dot{w} в точках β_i , $i = q+1, \dots, r-1$;
- 2) $\dot{w}'(\beta_i^+, \tau) = \dot{w}'(\beta_i^-, \tau)$ или $m_i = \pm \gamma^2(\beta_i)$, $i = q+1, \dots, r-1$;
- 3) по 2 граничных условия на границах пластической зоны;
- 4) в движущихся точках β_i :
 - а) $m_i = 0$, если в точке $\xi = \beta_i$ изменяется знак момента;
 - б) $m_i' = 0$, если при $\xi = \beta_i$ находится движущаяся шарнирная окружность (в том числе могут быть движущиеся границы пластических зон).

Переменными являются

$$*) \dot{c}_1^i, \dot{c}_2^i, m_i, m_i', \quad i = q, \dots, r-1;$$

***) движущиеся точки β_i .

Относительно $4(r-q)-4$ переменных типа *) мы получим квазилинейную дифференциально - алгебраическую систему из условий 1, 2, 3. Относительно переменных типа ***) мы получим систему нелинейных уравнений из условий 4.

Прежде чем приступить к решению описанной системы, попробуем по возможности её упростить, уменьшая число пере-

менных и уравнений в фундаментальной системе.

Из переменных m_i, m'_i независимыми являются только две (удобно в качестве них выбрать m_q и m'_q); остальные мы можем исключить из системы при помощи рекуррентных соотношений.

Далее исключаем из фундаментальной системы часть переменных \dot{c}_1^i, \dot{c}_2^i . С этой целью обозначим через $K \subseteq \{q, q+1, \dots, r-1\}$ совокупность тех индексов, которым соответствуют шарнирные окружности, включая индекс q левой границы пластической зоны. Если $j \notin K, j \neq r$, то при $\xi = \beta_j$ величины \dot{w} и \dot{w}' должны быть непрерывными, что приводит к системе уравнений

$$A_{i-1}(\beta_i) \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1^{i-1} \\ \dot{c}_2^{i-1} \end{pmatrix} = A_i(\beta_i) \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1^i \\ \dot{c}_2^i \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где

$$A_i(\xi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t_i \xi & \sin t_i \xi \\ -t_i \sin t_i \xi & t_i \cos t_i \xi \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_i, \tau) < 0, \\ \begin{pmatrix} e^{t_i \xi} & e^{-t_i \xi} \\ t_i e^{t_i \xi} & -t_i e^{-t_i \xi} \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_i, \tau) > 0. \end{cases} \quad (29)$$

В общем случае, если κ и λ — два последовательных индекса из K , то

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1^i \\ \dot{c}_2^i \end{pmatrix} = D_\kappa^i \begin{pmatrix} \dot{c}_1^\kappa \\ \dot{c}_2^\kappa \end{pmatrix}, \quad i = \kappa, \kappa+1, \dots, \lambda-1, \quad (30)$$

где

$$D_\kappa^i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } \kappa = i; \\ \prod_{j=1}^{i-\kappa} [A_{\kappa+j}^{-1}(\beta_{\kappa+j}) \cdot A_{\kappa+j-1}(\beta_{\kappa+j})], & \text{если } i > \kappa; \end{cases} \quad (31)$$

$$A_j^{-1}(\xi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t_i \xi & -\frac{1}{t_i} \sin t_i \xi \\ \sin t_i \xi & \frac{1}{t_i} \cos t_i \xi \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_{i+}, \tau) < 0; \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-t_i \xi} & \frac{1}{2t_i} e^{-t_i \xi} \\ \frac{1}{2} e^{t_i \xi} & -\frac{1}{2t_i} e^{t_i \xi} \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_{i+}, \tau) > 0. \end{cases} \quad (32)$$

С помощью соотношений (20) из системы (26) - (27) получим

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= \begin{pmatrix} \psi_i'(\beta_{i+}) \\ \frac{1}{t_i} \psi_i''(\beta_{i+}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_i \\ m_i' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_i(\beta_{i+}) \\ \psi_i'(\beta_{i+}) \end{pmatrix}^T D_{i+}^i \begin{pmatrix} \dot{c}_1^k \\ \dot{c}_2^k \end{pmatrix} + F(\beta_{i+}, \tau), \\ m_{i+1}' &= \begin{pmatrix} \psi_i'(\beta_{i+}) \\ \frac{1}{t_i} \psi_i''(\beta_{i+}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_i \\ m_i' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_i'(\beta_{i+}) \\ \psi_i''(\beta_{i+}) \end{pmatrix}^T D_{i+}^i \begin{pmatrix} \dot{c}_1^k \\ \dot{c}_2^k \end{pmatrix} + F'(\beta_{i+}, \tau), \end{aligned} \quad (33)$$

$$k < i < s, \quad k \in K, \quad s \in KU\{r\} \setminus \{q\}.$$

Таким образом, в фундаментальной системе уравнений остались переменные $\dot{c}_1^k, \dot{c}_2^k, k \in K, m_q, m_q'$. Для их определения мы используем условия

$$\dot{\omega}(\beta_{k-}, \tau) = \dot{\omega}(\beta_{k+}, \tau), \quad m(\beta_{k-}, \tau) = \pm \gamma^k(\beta_{k-}), \quad k \in K, \quad k \neq q \quad (34)$$

и 4 граничных условия.

Запишем фундаментальную систему в виде

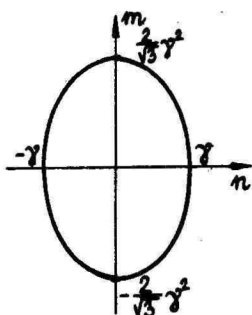
$$G \cdot \bar{z} = \bar{E}, \quad (35)$$

где $G = G(\tau, \beta_i)$ и $\bar{E} = \bar{E}(\tau, \beta_i)$ - матрица и вектор свободных членов системы, $\bar{z} = (\dot{c}_1^k, \dot{c}_2^k, m_q', m_q)$ - вектор неизвестных, $\dot{c}_j^k = (\dot{c}_j^k)$, $k \in K$. Опишем кратко один шаг интегрирования системы. Допустим, что к моменту τ нам известны значения параметров β_i . На их основе составим систему (35) и решим её относительно \bar{z} . Далее, при помощи (30) определяем переменные \dot{c}_1^i и \dot{c}_2^i , $i \neq k$ и проводим процедуру интегрирования переменных \dot{c}_1^i, \dot{c}_2^i . Затем на основе (26)-(27) определяем величины m_i и m_i' , $i = q+1, \dots, r-1$ и, наконец, применяя условия 4, найдем новые значения для β_i . Применяя для интегрирования метод Рунге-Кутты, придется на каждом шаге эту процедуру провести несколько раз. В конечном счёте нами будет найдено решение к моменту $\tau + \Delta\tau$.

Применяя формулы (22) и (18), мы можем найти остаточные прогибы и поле скоростей к этому моменту. Общую стратегию решения задачи приведем в пункте 6 данной работы.

5. Система определяющих уравнений и метод решения при условии текучести Мизеса

Кривая текучести Мизеса (эллипс Мизеса) показана на фиг. 2.



Фиг. 2

Её уравнением является

$$\Phi(m, n) = \frac{3m^2}{4\gamma^2} + \frac{n^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \quad (36)$$

Из утверждения в конце пункта 3 и гладкости кривой текучести вытекает, что во внутренних точках пластических зон не может реализоваться напряженное состояние

$$n = 0, \quad m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma^2,$$

что исключает возможность появления в этих точках шарнирных окружностей, характерных для кусочно-линейных условий текучести.

Из ассоциированного закона течения (5) и уравнения (36) следует

$$\dot{m}^2 = \frac{3c^2}{2\gamma} m \dot{m} \cdot (4\gamma^2 - 3m^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (37)$$

Найти аналитического решения этого уравнения не удастся, и в отличие от условия текучести Треска нам придется интегрировать систему уравнений в частных производных. Из уравнения движения (3) и условия текучести (36) вытекает, что

$$m'' + c^2 \gamma \dot{m}' = c^2 \eta - \frac{c^2}{2\gamma} (4\gamma^2 - 3m^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (38)$$

Система (37) - (38) является системой в частных производных

параболического типа относительно искомых функций $\dot{w}(\xi, \tau)$ и $m(\xi, \tau)$ с нелинейной правой частью.

Допустим, что к какому-то временному слою $\tau_j = \tau_0 + j \cdot \Delta\tau$, $j=0, 1, \dots$ мы нашли границы пластической зоны β_q и β_r , $1 \leq q < r \leq n$ и значения функций m и \dot{w} в узловых точках $\xi_i = \beta_q + i \cdot \Delta\xi$, $i=0, 1, \dots, n_r(\tau)$.

Обозначим через

$$m_{i,j} = m(\xi_i, \tau_j), \quad \dot{w}_{i,j} = \dot{w}(\xi_i, \tau_j), \quad (39)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_r(\tau_j).$$

Интерполируем функцию $m(\xi, \tau_j)$ кубической сплайн-функцией $T_{3,j}(\xi)$. Одновременно с конструированием сплайна конструируются и вторые производные $T_{3,j}''(\xi_i)$. Применяя их в качестве аппроксимации для $m''(\xi_i, \tau_j)$, построим разностную схему по τ для уравнения (38). Получим

$$\dot{w}_{i,j+1} = \dot{w}_{i,j} + \frac{\Delta\tau}{c^2 \gamma} \left[\nu(\xi_i, \tau_j) - \frac{c^2}{2\gamma} (4\gamma^4 - 3m_{i,j}^2) \dot{w}^2 - T_{3,j}''(\xi_i) \right]. \quad (40)$$

С помощью этой схемы найдем значение \dot{w} в $(j+1)$ -ом слое времени, за исключением её значений в узлах ξ_i , прилегающих к границам пластической зоны, и в точках β_i , $q < i < r$. Для нахождения значений \dot{w} в названных узлах и для определения движущихся границ рассмотрим ещё одну сплайн-функцию $S_{3,j+1}(\xi)$, аппроксимирующую функцию $\dot{w}(\xi, \tau_{j+1})$. Она должна удовлетворять граничным условиям и условиям непрерывности для \dot{w} и \dot{w}' в точках β_i , $i = q+1, \dots, r-1$. Если граница пластической зоны совпадает со свободным концом оболочки, то нам не хватает одного граничного условия для определения сплайна, и одно граничное условие $m(\beta_q, \tau_{j+1}) = 0$ (или $m(\beta_r, \tau_{j+1}) = 0$) придется заменить эквивалентным (на основании уравнения (37)) условием $\dot{w}''(\beta_q, \tau_{j+1}) = 0$ (или $\dot{w}''(\beta_r, \tau_{j+1}) = 0$).

На движущейся границе пластической зоны придется сначала определить положение граница $\xi^* = \beta_q(\tau_{j+1})$ и/или $\xi^* = \beta_r(\tau_{j+1})$. В первом случае для определения ξ^* предполагаем, что \dot{w} является кубической функцией, проходящей через точки $(\xi^*, 0)$, $(\xi_0, \dot{w}_0, j+1)$, $(\xi_1, \dot{w}_1, j+1)$ и удовлетворяющей

условиям ,

$$\dot{w}''(\xi^*, \tau_{j+1}) = 0, \quad \dot{w}''(\xi^*, \tau_{j+1}) = \frac{4\gamma(\xi^*)}{c^2} \cdot \dot{w}''(\xi^*, \tau_{j+1}). \quad (41)$$

Последние два условия вытекают из граничных условий (10) и (14). Из названных пяти условий получим уравнение

$$\begin{aligned} \dot{w}''_{1,j+1} \cdot \left[(\xi_0 - \xi^*)^3 + \frac{4\gamma(\xi^*)}{c^2} (\xi_0 - \xi^*) \right] = \\ = \dot{w}''_{0,j+1} \left[(\xi_1 - \xi^*)^3 + \frac{4\gamma(\xi^*)}{c^2} (\xi_1 - \xi^*) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

относительно ξ^* . Если $\gamma(\xi) \equiv \text{const}$, $\xi \in [\xi^*, \xi_0]$ и $\dot{w}''_{1,j+1} \neq \dot{w}''_{0,j+1}$, то последнее уравнение является кубическим уравнением относительно ξ^* , имеющим один действительный корень. Аналогично определяем положение правой движущейся границы, после чего будут определены и граничные условия для сплайна.

После конструирования сплайна $S_{2,j+1}(\xi)$, применяя $S''_{2,j+1}$ в качестве аппроксимации для \dot{w}'' , мы получим из уравнения (37)

$$m_{i,j+1} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\gamma^3}{(3c^2 + 4\theta_i^2 \gamma^2)^{1/2}} \cdot \theta_i, \quad (43)$$

где

$$\theta_i = \frac{S''_{2,j+1}(\xi_i)}{\dot{w}''(\xi_i, \tau_{j+1})}. \quad (44)$$

В граничных точках пластической зоны условие (43) заменяется соответствующим граничным условием для изгибающего момента.

После осуществления описанной процедуры нами найдено решение системы во временном слое τ_{j+1} . В случае подвижных границ после каждого шага придется ещё расширить или стягивать сетку по ξ .

При малых скоростях (в начале и конце движения) описан-

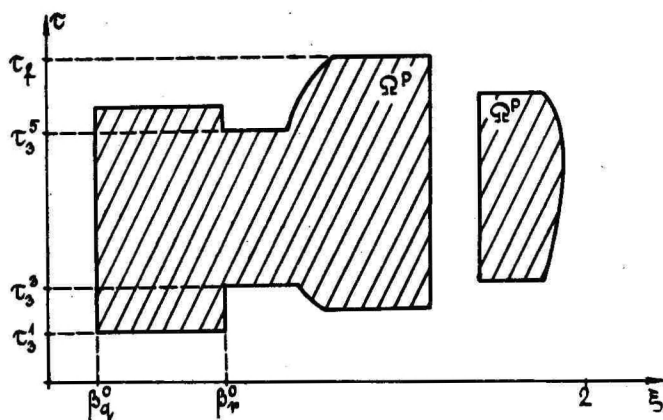
ный алгоритм не работает ввиду неопределенностей в (44). Тогда в некотором временном интервале придется интегрировать "жесткое уравнение" (38) при фиксированных значениях m , игнорируя уравнение (37).

6. Общая схема решения задачи

Описанные системы уравнений не действуют в жестких зонах оболочки. Для решения задачи придется сначала определить предельную нагрузку, начальные границы пластических зон и распределение напряжений. Кроме того, в ходе решения задачи могут возникнуть новые пластические зоны, а старые могут помимо непрерывного расширения увеличиваться ещё скачком. Расчет жестких зон можно провести по-разному; автор данной статьи применил метод линейного программирования. Суть метода можно найти в монографии [1].

Опишем кратко ход решения задачи.

Пусть деформирование оболочки происходит в области $\Omega^P \subset [0, 2] \times \tau$, $\tau > 0$ (фиг. 3).



Фиг. 3

Сначала при помощи методов линейного программирования найдем предельное значение ρ_2^* для амплитудной функции $\rho_2(\tau)$, начальные границы β_a^0 , β_r^0 , пластической зоны (пласти-

ческих зон). и распределение напряжений (т.е. функций $m(\xi, \tau'_i)$ и $n(\xi, \tau'_i)$, $\beta_q^0 \leq \xi \leq \beta_r^0$); момент времени τ'_i найдем из уравнения $r_2(\tau'_i) = r_2^*$. Затем приступим к интегрированию системы определяющих уравнений для этой зоны. В каждый момент времени мы можем найти значения функций $m(\xi, \tau)$ и $n(\xi, \tau)$ на границах жестких и пластических зон. Теперь рассмотрим каждую жесткую зону $\mathcal{R}_1^{*0} = [0, \beta_q]$, $\mathcal{R}_2^{*0} = [\beta_r, 2]$ как изолированную оболочку и, учитывая найденные граничные условия для моментов, определим для неё предельную нагрузку и момент начала деформирования τ'_i . Если этот момент достаточно близок к "бегущему" моменту, то соответствующим образом расширим старые и/или прибавим новые пластические зоны.

После шага интегрирования в каждой пластической зоне следует провести анализ истинности решения. В принципе мы должны проверить выполнение условия пластичности (4) и неотрицательности мощности диссипации (15). В точках неопределенности $\dot{\epsilon}^*$ проверим условие (15'). В случае условия текучести Мизеса условие (4) окажется выполненным автоматически, но в случае условия Треска оно равносильно условию (20). Если где-нибудь оно является невыполненным, то в соответствующем сечении появляется новая шарнирная окружность, и придется соответствующим образом перестроить систему определяющих уравнений.

Если неравенство (15) окажется где-нибудь нарушенным, то движение в соответствующем сечении прекращается; если (15') не удовлетворено, то в соответствующем сечении пластическая шарнирная окружность исчезает. Решение системы заканчивается, когда скорости будут везде равными нулю. К этому моменту определяются и остаточные прогибы.

На каждом шаге интегрирования найдем ещё поправки в интегралах уравнений (17) и (18).

Отклонение функционала, стоящего в левой части уравнения (17), от нуля дает нам возможность судить об истинности решения.

Таким образом, общую схему решения можно представить так:

- 1) решить задачу о несущей способности оболочки и найти начальные границы пластических зон;
- 2) провести шаг интегрирования во всех пластических зонах;

3) провести анализ результатов интегрирования и в случае необходимости скорректировать систему определяющих уравнений;

4) провести анализ жестких зон и в случае необходимости скорректировать количество и/или границы пластических зон;

5) если движение не завершено, идти к 2.

С целью экономии машинного времени можно процедуру 4 проводить не на каждом шаге интегрирования, а только после нескольких шагов в фазах нарастания нагрузки, интерполируя значения ν_1^* .

Следует ещё отметить, что в момент неплавного срастания или уединения двух пластических зон (моменты τ_2^* и τ_2^* на фиг. 3) $m(\xi, \tau)$ в общем случае имеет разрыв по времени, т.е. $\lim_{\tau \rightarrow \tau_2^*} m(\xi, \tau) \neq \lim_{\tau \rightarrow \tau_2^*} m(\xi, \tau)$.

Литература

1. Ерхов М.И., Теория идеально пластических тел и конструкций. М., "Наука", 1978.
2. Комаров К.Л., Немировский Ю.В., Динамика жесткопластических элементов конструкций. Новосибирск, "Наука", 1984.
3. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, "Валгус", 1982.
4. Мазалов В.Н., Немировский Ю.В., Динамика тонкостенных пластических конструкций. В кн.: Проблемы динамики упругопластических сред. М., "Мир", 1975, 155-247.
5. Ходж Ф.Г., Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. М., Машгиз, 1963.

Automatic calculation for dynamic bending
of rigid-plastic cylindrical shells

T. Lepikult

Summary

Dynamic behaviour of cylindrical shells subjected to a internal pressure is studied. The yield conditions of Tresca and Mises for sandwich shell are used. The thickness of the shell is assumed to be piecewise constant in the case of the Tresca condition and it is arbitrary for the Mises condition. The pressure is taken in the form

$$p(x,t) = p_1(x) \cdot p_2(t) .$$

Systems of equations of motion for both conditions are derived. The algorithms of solution are prescribed and some numerical examples presented.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРЫ К ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКЕ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

К проблемам оптимального проектирования конструкций относятся задачи определения оптимального расположения дополнительных опор, установка которых позволяет увеличить жёсткость конструкций. Расположение дополнительных опор целесообразно выбирать так, чтобы при этом достигал минимума некоторый критерий качества, например, максимальный прогиб. Условия оптимальности для задач такого рода в случае статического нагружения были получены в [1] для упругих и в [2] для жёсткопластических балок, а в [3] этот подход был расширен при помощи метода модальных движений на случай импульсного нагружения нелинейно-упругих, жёсткопластических и нелинейно-вязких балок. В случае более точных немодальных решений интегральные условия оптимальности расположения дополнительных опор к импульсно нагруженным жёсткопластическим балкам выводились в [2, 5]. Задачи оптимального расположения дополнительных опор к жёсткопластическим балкам, круглым пластинкам и цилиндрическим оболочкам, подверженным импульсному нагружению, решались в точной постановке также в [1, 6-8, 10]. Рассматриваемому кругу вопросов посвящена специальная глава монографии [4].

В данной работе задача определения оптимального расположения опоры, осуществляющий жёсткое закрепление, решается для произвольно закреплённой на концах балки, подверженной воздействию нагрузки прямоугольного типа.

I. О динамике жёсткопластической балки

Задача динамического изгиба жёсткопластической балки, концы которой либо оба свободно оперты, либо оба заделаны, была решена в [9]. Если рассмотреть «промежуточные» случаи закрепления концов, когда изгибающий момент на каждом из концов балки при её движении принимает любое постоянное значение не меньше взятой со знаком минус предельной своей величины и не больше нуля, то оказывается, что механизмы движения балки, предложенные в [9], остаются в силе. Поэтому

остановимся на этом вопросе вкратце, имея целью использовать полученные результаты для решения оптимизационной задачи.

Направим координатную ось Ox вдоль жёсткопластической балки постоянного сечения и обозначим через a и b координаты её левого и правого конца соответственно. Движение балки происходит согласно дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = Q(x, t), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - p(t), \quad (1)$$

к которым добавим следующие начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned} w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} &= 0, \\ w(a, t) = w(b, t) = \frac{\partial w(a, t)}{\partial t} = \frac{\partial w(b, t)}{\partial t} &= 0, \quad (2) \\ M(a, t) = -\alpha M_0, \quad M(b, t) &= -\beta M_0. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем t - время, $M(x, t)$ и M_0 - изгибающий и предельный изгибающий моменты соответственно, $Q(x, t)$ - перерезывающая сила, m - масса балки на единицу длины (считаем, что $m = \text{const}$), $w(x, t)$ - прогиб, $p(t)$ - интенсивность действующей на балку равномерной поперечной нагрузки, которую принимаем равной постоянной величине p при $0 \leq t \leq \tau$ и нулю при $t > \tau$, где τ - момент снятия нагрузки, $0 \leq \alpha$, $\beta \leq 1$ (в случае идеального свободного опирания концов балки $\alpha = \beta = 0$, а в случае идеальной заделки концов $\alpha = \beta = 1$).

Несущая способность закреплённой таким образом балки будет равна

$$p_0 = 2(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1+\beta})^2 M_0 / (b-a)^2. \quad (3)$$

Аналогично работе [9] для нагрузок из промежутка $p_0 \leq p \leq 3p_0$ как в стадии нагружения, так и в стадии инерционного движения имеет место стационарный шарнир в сечении с координатой

$$\xi = (a\sqrt{1+\beta} + b\sqrt{1+\alpha}) / (\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1+\beta}).$$

Интегрируя уравнения движения балки (1) с учётом условий (2) и линейности скорости прогиба на отрезках $a \leq x \leq \xi$, $\xi \leq x \leq b$, находим, что движение балки прекратится в момент времени $t_f = \rho c / \rho_0$ и при этом максимальный остаточный прогиб будет равен

$$w(\xi, t_f) = \frac{3\rho c^2}{4m} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right), \quad \rho_0 < \rho \leq 3\rho_0. \quad (4)$$

Для нагрузок, удовлетворяющих условию $\rho > 3\rho_0$, в стадии нагружения имеются два стационарных шарнира, разбивающих отрезок $a \leq x \leq b$ на три промежутка линейного изменения скорости прогиба, которая на среднем отрезке постоянна по координате. Аналогичная трапецевидная форма скорости прогиба имеет место на первом этапе стадии инерционного движения, только шарниры при этом движутся навстречу друг другу, сходясь в сечении с координатой ξ . На втором этапе инерционного движения реализуется модальная форма движения, имевшая место при нагрузках из интервала $\rho_0 < \rho \leq 3\rho_0$.

Учитывая вышесказанное, из (1) и (2) можно найти, что и для высоких нагрузок время движения балки равно $t_f = \rho c / \rho_0$, а максимальный остаточный прогиб в этом случае будет равен

$$w(\xi, t_f) = \frac{\rho c^2}{6m} \left(4 \frac{\rho}{\rho_0} - 3 \right), \quad \rho \geq 3\rho_0. \quad (5)$$

Отметим ещё, что необходимое условие $|M(x, t)| \leq M_0$ при $a \leq x \leq b$ и $0 \leq t \leq t_f$ во всех фазах движения как раз равносильно имеющим место соответствующим условиям на величину нагрузки ρ .

2. Оптимальное расположение дополнительной опоры

Рассмотрим закреплённую на концах жёсткопластическую балку постоянного сечения. Длина балки равна l , и на расстоянии δ от её левого конца, в центре тяжести которого поместим начало направленной вдоль балки координатной оси Ox , фиксирована дополнительная опора, препятствующая прогибанию балки в этой точке. В начальный момент времени балка не деформирована и находится в покое.

В течение времени τ на балку действует равномерная нагрузка интенсивности ρ , которая затем мгновенно снимается. Масса m балки на единицу длины постоянна.

Изгибающий момент балки на опорах во время её движения зададим следующими условиями:

$$M(0, t) = -\alpha M_0, \quad M(s, t) = -M_0, \quad M(l, t) = -\beta M_0,$$

где $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Требуется найти такое расположение дополнительной опоры, при котором максимальный остаточный прогиб всей балки был бы минимален.

Согласно (3) несущие способности $\rho_{01}(s)$ и $\rho_{02}(s)$ левой ($0 \leq x \leq s$) и правой ($s \leq x \leq l$) частей балки равны соответственно

$$\rho_{01}(s) = 2(\sqrt{2} + \sqrt{1+\alpha})^2 M_0 / s^2, \quad \rho_{02}(s) = 2(\sqrt{2} + \sqrt{1+\beta})^2 M_0 / (l-s)^2. \quad (6)$$

Учитывая (4) и (5), максимальные остаточные прогибы $W_1(s)$ и $W_2(s)$ для левой и правой частей балки можно записать соответственно в виде

$$W_1(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, \alpha_1(\rho)] \cap [0, l], \\ \frac{3\rho\tau^2}{4m} \left[\frac{\rho}{\rho_{01}(s)} - 1 \right], & s \in [\alpha_1(\rho), \alpha_2(\rho)] \cap [0, l], \\ \frac{\rho\tau^2}{6m} \left[4 \frac{\rho}{\rho_{01}(s)} - 3 \right], & s \in [\alpha_2(\rho), +\infty) \cap [0, l], \end{cases} \quad (7)$$

$$W_2(s) = \begin{cases} \frac{\nu \tau^2}{6m} \left[4 \frac{\nu}{\nu_{02}(s)} - 3 \right], & s \in (-\infty, \beta_2(\nu)] \cap [0, l], \\ \frac{3\nu \tau^2}{4m} \left[\frac{\nu}{\nu_{02}(s)} - 1 \right], & s \in [\beta_2(\nu), \beta_1(\nu)] \cap [0, l], \\ 0, & s \in [\beta_1(\nu), l] \cap [0, l], \end{cases} \quad (8)$$

где $\alpha_1(\nu) = (\sqrt{2} + \sqrt{1+\alpha}) \sqrt{\frac{2M_0}{\nu}}$, $\alpha_2(\nu) = \alpha_1(\nu) \sqrt{3}$,
 $\beta_1(\nu) = l - (\sqrt{2} + \sqrt{1+\beta}) \sqrt{\frac{2M_0}{\nu}}$, $\beta_2(\nu) = l - (\sqrt{2} + \sqrt{1+\beta}) \sqrt{\frac{6M_0}{\nu}}$.

Теперь, вводя обозначения $\nu_1 = 2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \min\{\alpha, \beta\}})^2 M_0 / l^2$,

$$\nu_2 = 2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \max\{\alpha, \beta\}})^2 M_0 / l^2, \quad \nu_3 = 2(2\sqrt{2} + \sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1+\beta})^2 M_0 / l^2$$

и учитывая (7) и (8), из условия $\max\{W_1(s), W_2(s)\} \rightarrow \min$ для оптимального расположения опоры s_0 находим

$$\begin{aligned} s_0 &\in [0, l] && \text{при } \nu \leq \nu_1, \\ s_0 &\in \begin{cases} [0, \alpha_1(\nu)], \\ [\beta_1(\nu), l], \end{cases} && \begin{aligned} &\text{если } \alpha \leq \beta \\ &\text{если } \alpha \geq \beta \end{aligned} \text{ при } \nu_1 \leq \nu \leq \nu_2, \\ s_0 &\in [\beta_1(\nu), \alpha_1(\nu)] && \text{при } \nu_2 \leq \nu \leq \nu_3, \\ s_0 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\alpha}}{2\sqrt{2} + \sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1+\beta}} l && \text{при } \nu \geq \nu_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что значение $s_0 = (\sqrt{2} + \sqrt{1+\alpha}) l / (2\sqrt{2} + \sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1+\beta})$ при $\nu \leq \nu_3$ всегда входит в полученные выше допустимые отрезки изменения величины s_0 . Найденное здесь значение для s_0 при $\nu \geq \nu_3$ в частном случае $\alpha = 1$, $\beta = 0$ совпадает с соответствующими результатами статей [1, 10].

Максимальный остаточный прогиб всей балки при оптимальном расположении опоры равен

$$W_{\max}(s_0) = \begin{cases} 0, & \nu \leq \nu_3 \\ \frac{3\nu\tau^2}{4\pi} \left(\frac{\nu}{\nu_3} - 1 \right), & \nu_3 \leq \nu \leq 3\nu_3 \\ \frac{\nu\tau^2}{6\pi} \left(4 \frac{\nu}{\nu_3} - 3 \right), & 3\nu_3 \leq \nu. \end{cases}$$

Выразим эффективность оптимального расположения дополнительной опоры при помощи коэффициента экономии

$e = W_{\max}(s_0) / W_{\max}(l/2)$, где $W_{\max}(l/2)$ - максимальный остаточный прогиб балки в случае, когда дополнительная опора расположена посередине балки. При $\nu \leq 4\nu_1$ $W_{\max}(s_0) = W_{\max}(l/2) = 0$, а для $\nu > 4\nu_1$ получим

$$e = \begin{cases} 0, & 4\nu_1 \leq \nu \leq \nu_3, \\ \frac{4\nu_1(\nu - \nu_3)}{\nu_3(\nu - 4\nu_1)}, & \nu_3 \leq \nu \leq 12\nu_1, \\ \frac{9\nu_1(\nu - \nu_3)}{2\nu_3(\nu - 3\nu_1)}, & 12\nu_1 \leq \nu \leq 3\nu_3, \\ \frac{\nu_1(4\nu - 3\nu_3)}{\nu_3(\nu - 3\nu_1)}, & 3\nu_3 \leq \nu. \end{cases}$$

Заметим, что для $\alpha \neq \beta$ и $\nu > 4\nu_1$ при возрастании интенсивности нагрузки ν коэффициент экономии e также увеличивается. При этом, например, для одного свободно опертого, а для другого заделанного конца балки предел $\lim_{\nu \rightarrow \infty} e(\nu)$, выражающий случай наихудшей относительно эффективности в принятом нами смысле, будет равен

$$4(1 + \sqrt{2})^2 / (1 + 3\sqrt{2})^2 \approx 0,8482.$$

В заключение сделаем несколько замечаний относительно

условий оптимальности расположения дополнительной опоры.

Для жёсткопластической балки, подвержённой импульсному нагружению, в работах [2, 4, 5], исходя из теории оптимального управления с распределёнными параметрами, было выведено следующее интегральное условие оптимальности, являющееся обобщением известного из статики условия Прагера - Розвани [12] :

$$\int_0^{t_f} [Q(s_+, t) \frac{\partial}{\partial x} w(s_+, t) - Q(s_-, t) \frac{\partial}{\partial x} w(s_-, t)] dt = 0,$$

где t_f - момент окончания движения.

Отметим, что и в случае прямоугольной нагрузки это условие сохраняется, поскольку оно является следствием вытекающих из решения данной задачи более сильных условий

$$\frac{\partial}{\partial x} w(s_+, t) - \frac{\partial}{\partial x} w(s_-, t) = 0 \quad \text{при } \nu \leq \nu_3, \quad (10)$$

$$Q(s_+, t) - Q(s_-, t) w \frac{\partial}{\partial x} w(s_+, t) - \frac{\partial}{\partial x} w(s_-, t) \text{ при } \nu > \nu_3.$$

Сравнивая (6) и (9), можно сделать вывод, что при $\nu \geq \nu_3$ оптимальная координата дополнительной опоры находится из условия равенства несущих способностей левой и правой частей балки, т.е. из условия $\nu_{01}(s) = \nu_{02}(s)$. Наконец, учитывая последнее равенство и следующий из п. I факт, согласно которому моменты прекращения движения для левой и правой частей балки равны $t_{f1} = \nu\tau / \nu_{01}(s)$ и $t_{f2} = \nu\tau / \nu_{02}(s)$ соответственно, заключаем, что при оптимальном расположении дополнительной опоры движение обеих частей балки заканчивается одновременно.

Литература

1. Леллеп Я., Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсивно нагруженной пластической балки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 52-57.
2. Леллеп Я., Об условиях оптимальности расположения дополнительной опоры. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 564, 41-50.
3. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 132-143.
4. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструк-

ций в случае динамического нагружения. Таллин, „Валгус“, 1982, 196 с.

5. Лепик Ю., Об условии оптимальности балок с дополнительными опорами при динамических нагрузках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 675, 45-61.
6. Лепик Ю., Определение оптимального положения опор для жёсткопластической балки в случае импульсного нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 675, 62-76.
7. Оленев Г., Оптимальное расположение дополнительных опор к жёсткопластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 30-41.
8. Оленев Г., Об оптимальном расположении дополнительной опоры к жёсткопластической цилиндрической оболочке при импульсном нагружении. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 42-51.
9. Саймондс П., Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа. Механика. Сб. перев. и обз. ин. пер. лит., 1956, №4, 90-108.
10. Lellep J., Optymalizacja położenia podpór belki sztywno-plastycznej obciążonej impulsem prędkości. Mech. teoret. i stosow., 1978, 16, №. 4, 573-582.
11. Mróz Z., Rozvany G.I.N., Optimal design of structures with variable support conditions. J. Optimiz. Theory and Appl., 1975, 15, №. 1, 85-101.
12. Prager W., Rozvany G.I.N., Plastic design of beams: optimal locations of supports and steps in yield moment. Int. J. Mech. Sci., 1975, 17, №. 10, 627-631.

Optimal location of the additional support
for a rigid-plastic beam under dynamic loading

G. Olenev

Summary

The stiffness of structures can be increased by applying additional supports. In the present paper optimal location of the additional inner support for a rigid-plastic beam with supported edges is found on condition that the

maximal residual deflection has the minimal value. The beam is subjected to the transverse uniform dynamic loading, which is varying in time according to the law of rectangular impulse. Both the initial deflection and velocity field of the beam are equal to zero. When the beam moves, the bending moment at the edges corresponds to an ideal hinge or ideal clamping or to any value lying between these two extreme cases and the bending moment at the inner support corresponds to an ideal clamping.

The solution of the present optimization problem is based on the investigation into the problem of dynamical bending of rigid-plastic beams. It appears that the velocity field offered by Symonds [9] for both simply supported or clamped edges also hold good in any intermediate case of supporting.

The integral optimality criteria derived by Lepik [5] and Lellep [2] generalizing the well-known Prager-Rozvany [12] static condition for impulsive loading also hold in the case of "rectangular" dynamic loading because they follow from the stronger conditions (10), which are also observed. It appears that optimal location of the additional support for high loads can also be determined from the condition of equality of load capacities of both parts of the beam.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА УДЗАВЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

В данной работе рассматривается задача упругопластического изгиба тонкой двумерной пологой оболочки, подверженной воздействию произвольно направленной внешней статической нагрузки. Применяется условие пластичности Мизеса и уравнение состояния деформационной теории пластичности, введенное Генки. Используемый ниже метод является обобщением на случай пологой оболочки подхода, примененного в [2] к решению задачи изгиба упругопластической тонкой пластинки. Исходная задача сводится к эквивалентному в определенном смысле вопросу отыскания седловой точки лагранжиана, для построения которой применяется итерационный метод Удзавы. Определен такой промежуток изменения итерационного параметра алгоритма Удзавы, что при принадлежности параметра этому промежутку последовательность приближений поля напряжений сходится сильно в соответствующем гильбертовом пространстве к действительному полю напряжений оболочки.

1. Постановка задачи и введение функции Лагранжа

Рассмотрим упругопластическую пологую оболочку постоянной толщины h , срединная поверхность которой задается уравнением $z(x) = 0$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{D}$, а \mathfrak{D} — ограниченная двумерная область с липшицевой границей, являющаяся проекцией на \mathbb{R}^2 срединной поверхности оболочки. Изгиб оболочки будет рассматриваться в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 с координатами x_1, x_2, x_3 . Статическая внешняя нагрузка имеет компоненты p_1, p_2, p_3 . Обозначим через \mathfrak{D}_h декартово произведение $\mathfrak{D}_h = \mathfrak{D} \times [-h/2, h/2]$. Границу области \mathfrak{D} представим в виде объединения взаимно дизъюнктивных множеств $\partial \mathfrak{D} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем на Γ_0 оболочка заделана, на Γ_1 — шарнирно оперта, на Γ_2 — свободна.

Везде далее индексы α, β принимают значения

1, 2, а индексы i, j, k, l - значения 1, 2,
 3. Условимся также считать, что по повторяющимся индексам
 производится суммирование.

Запишем уравнения равновесия пологой оболочки в виде

$$N_{\alpha\beta,\beta} = -\rho_{\alpha}, \quad \kappa_1 N_{11} + \kappa_2 N_{22} + M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -\rho_3. \quad (I)$$

Здесь уезлия $N_{\alpha\beta}$ и изгибающие моменты $M_{\alpha\beta}$ записы-
 ваются через компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ в виде

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3;$$

частная производная функции f по x_α здесь и далее
 обозначается через $f_{,\alpha}$, κ_1 и κ_2 - главные кривиз-
 ны срединной поверхности оболочки, т.е. $\kappa_1 = \bar{x}_{,11}$, $\kappa_2 = \bar{x}_{,22}$,
 причем константы c_1 и c_2 таковы, что
 $|\kappa_\alpha(x)| \leq c_\alpha, \quad x \in \mathcal{R}$.

Компоненты деформации, принимая гипотезы Кирхгофа-Лява,
 запишем в виде

$$\epsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \kappa_{\alpha\beta} u_3 - x_3 u_{3,\alpha\beta}, \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0, \quad (2)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор перемещений точек
 срединной поверхности оболочки, $\kappa_{11} = \kappa_1$, $\kappa_{22} = \kappa_2$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$.

Определим гильбертово пространство напряжений

$$H = \{ \sigma = \{ \sigma_{ij} \} : \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \sigma_{33} = 0, \sigma_{ij} \in L_2(\mathcal{R}_h) \}$$

со скалярным произведением

$$(\sigma, \tau)_H = \int_{\mathcal{R}_h} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx dx_3, \quad \sigma, \tau \in H.$$

и гильбертово пространство перемещений

$$V = \{ v = \{ v_i \} : v_\alpha \in W_2^{(1)}(\mathcal{R}), v_3 \in W_2^{(2)}(\mathcal{R}), v_i = 0 \text{ на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_V = \int_{\mathcal{R}} (u_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta} + u_3 v_3 + u_{3,\alpha\beta} v_{3,\alpha\beta}) dx, \quad u, v \in V. \quad (3)$$

Здесь $L_2(\mathcal{R}_h)$ - пространство функций, суммируемых с
 квадратом на \mathcal{R}_h , $W_2^{(1)}(\mathcal{R})$, $W_2^{(2)}(\mathcal{R})$ - пространства С.Л.
 Соболева, равенства в определении V понимаются в смыс-
 ле теории следов, все производные - обобщенные.

Будем пользоваться условием пластичности Мизеса

$$F(\sigma) \leq \kappa, \text{ где в случае изгиба тонкой оболочки } F(\sigma) = \left[\frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \right]^{1/2}, \text{ а } \kappa = \sigma_0 / \sqrt{3}, \text{ где}$$

σ_0 - предел текучести при растяжении материала оболочки.

Введем замкнутое выпуклое в N множество

$$K = \{ \sigma \in N : F(\sigma) \leq \kappa \text{ почти всюду на } \mathcal{R}_h \}.$$

Предположим, кроме того, что $\rho_i \in L_2(\mathcal{R})$, и определим множество

$$M = \{ \sigma \in N : \int_{\mathcal{R}_h} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\nu) dx dx_3 = \int_{\mathcal{R}} \rho_i \sigma_i dx, \forall \nu \in V \}.$$

Тогда для достаточно гладких σ из условия $\sigma \in M$ следуют уравнения равновесия (I) и граничные условия для усилий и моментов на Γ_2 .

Теперь исходную задачу запишем в следующем виде:

найти

$$\sigma \in \text{КПМ}, u \in V : \varepsilon_{ij}(u) = a_{ijkl} \sigma_{kl} + \lambda_{ij}, \lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0, \forall \tau \in K. (4)$$

Здесь использован закон пластичности Генки, λ_{ij} - пластические составляющие деформации, a_{ijkl} - коэффициенты упругости, принадлежащие пространству $L_\infty(\mathcal{R}_h)$ и удовлетворяющие, как обычно, условиям симметрии

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

и равномерной положительной определенности

$$a_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c_0 \xi_{ij} \xi_{ij}, \forall \xi_{ij}, c_0 = \text{const} > 0. (5)$$

Вводя квадратичный функционал

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_h} a_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} dx dx_3,$$

аналогично [4] (стр. 245 - 246) можно показать, что если (σ, u) - решение (4) и $\text{КПМ} \neq \emptyset$, то существует единственное

$$\sigma : J(\sigma) = \min_{\tau \in \text{КПМ}} J(\tau). (6)$$

Введём функцию Лагранжа (см., например, [3], стр. 35 или [5], стр. 171)

$$L(\sigma, q, u) = J(\sigma) + \int_{\mathbb{R}^n} q F(\sigma) dx dx_3 + \int_{\mathbb{R}^n} u_i p_i dx - \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx dx_3, \quad (7)$$

где $\sigma \in H$, $q \in L_+ = \{q: q \in L_2(\mathbb{R}^n), q \geq 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{R}^n\}$, $u \in V$.

Согласно теореме 2 [2] (стр. 8-9), если (σ, q, u) - седловая точка лагранжиана (7), т.е.

$L(\sigma, p, v) \leq L(\sigma, q, u) \leq L(\tau, q, u)$, $\forall \tau \in H, p \in L_+, v \in V$, то σ - решение (6), а

$$q = \begin{cases} 0, & \text{если } F(\sigma) < 0, \\ \geq 0, & \text{если } F(\sigma) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Обратно, если (σ, u) - решение (4), $\lambda_{ij} = \mu_{ij} q$, где μ_{ij} - субградиент F в точке σ , а q удовлетворяет (8), то (σ, q, u) - седловая точка (7).

2. Сходимость алгоритма Удзавы

Итерационный алгоритм Удзавы разыскания седловой точки сводится к следующему (см., например, [3], стр. 105-109). Сначала задаём $q^0 \in L_+$ и $u^0 \in V$ (например, можно взять $q^0 = 0$ и $u^0 = 0$). Зная $q^n \in L_+$ и $u^n \in V$, находим σ^n , доставляющий минимум функционалу $L(\sigma, q^n, u^n)$ на H . Например, для однородного изотропного материала σ^n есть решение системы конечных уравнений

$$\begin{cases} [\lambda + 2\mu + \frac{1}{3} \frac{q^n}{F(\sigma)}] \sigma_{11} + [\lambda - \frac{1}{6} \frac{q^n}{F(\sigma)}] \sigma_{22} = \varepsilon_{11}(u^n), \\ [\lambda - \frac{1}{6} \frac{q^n}{F(\sigma)}] \sigma_{11} + [\lambda + 2\mu + \frac{1}{3} \frac{q^n}{F(\sigma)}] \sigma_{22} = \varepsilon_{22}(u^n), \\ [2\mu + \frac{q^n}{F(\sigma)}] \sigma_{12} = \varepsilon_{12}(u^n), \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \end{cases}$$

где λ и μ - постоянные Ламе.

Заметим, что в общем случае для отыскания минимума

функционала $L(\sigma, q^n, u^n)$ на H снова можно применить итерационный метод, базирующийся на алгоритме Удзавы.

Далее, функция Φ из формулы (4.4) из [3] (стр. 105) в нашем случае имеет вид $\Phi(\sigma) = (F(\sigma), G(\sigma))$, где оператор $G: H \rightarrow V$ определяется соотношением

$$(\sigma, G(\sigma))_V = \int_{\mathcal{R}} v_i \rho_i dx - \int_{\mathcal{R}_h} \sigma_{\alpha\rho} \varepsilon_{\alpha\rho}(\sigma) dx dx_2, \quad \forall \sigma \in V, \quad (9)$$

поэтому итерация (4.13) из [3] (стр. 107) позволяет, исходя из (σ^n, q^n, u^n) , найти q^{n+1} и u^{n+1} по формулам

$$q^{n+1} = \text{Pr}_{L_+}(q^n + \varrho F(\sigma^n)),$$

$$u^{n+1} = u^n + \varrho G(\sigma^n),$$

где Pr_{L_+} - оператор проектирования $L_2(\mathcal{R}_h) \rightarrow L_+$, а ϱ - параметр, который ниже соответствующим образом подбирается.

Оператор проектирования пространства $L_2(\mathcal{R}_h)$ на L_+ , примененный к любой функции $r(x) \in L_2(\mathcal{R}_h)$, имеет вид

$$\text{Pr}_{L_+} r(x) = \max(0, r(x)).$$

Учитывая (2), (3) и (9), для определения $G(\sigma) = (G_1(\sigma), G_2(\sigma), G_3(\sigma))$ получим уравнения Пуассона

$$-\Delta G_\alpha = \rho_\alpha + N_{\alpha\rho, \rho}$$

с однородными граничными условиями Дирихле на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и Неймана на Γ_2 , а также уравнение

$$\Delta^2 G_\beta + G_\beta = \rho_\beta + \kappa_1 N_{11} + \kappa_2 N_{22} + M_{\alpha\rho, \alpha\rho}$$

с однородными граничными условиями Дирихле на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, условиями шарнирного опирания на Γ_1 и условиями свободного края на Γ_2 .

Т е о р е м а. Пусть (σ, q, u) - седловая точка лагранжиана (7). Тогда, если

$$0 < \varrho < 4c_0 / [1 + 2h(1 + k^2/12 + c_1^2 + c_2^2 + 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2})],$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n = \sigma$ в H .

Доказательство. Согласно теореме 4.1 из [3] (стр. 108-109) достаточно проверить следующие условия:

- 1) коэрцитивность билинейной формы $a(\tau, \sigma) = \int_{\mathcal{R}_n} a_{ijkl} \tau_{ij} \sigma_{kl} dx_1 dx_2$, т.е. существование $\alpha > 0: a(\sigma, \sigma) \geq \alpha \|\sigma\|_H^2, \forall \sigma \in H$;
- 2) выпуклость и замкнутость множества $L_+ \times V$ в пространстве $L_2(\mathcal{R}_n) \times V$;
- 3) выпуклость и слабую полунепрерывность снизу функционала $\sigma \rightarrow (q, F(\sigma))_{L_2(\mathcal{R}_n)} + (u, G(\sigma))_V$;
- 4) липшицируемость функции $\Phi(\sigma) = (F(\sigma), G(\sigma))$, т.е. существование константы C такой, что

$$\|\Phi(\sigma) - \Phi(\tau)\|_{L_2(\mathcal{R}_n) \times V} \leq C \|\sigma - \tau\|_H, \quad \forall \sigma, \tau \in H, \quad (10)$$

где

$$\|\Phi(\sigma)\|_{L_2(\mathcal{R}_n) \times V}^2 = \|F(\sigma)\|_{L_2(\mathcal{R}_n)}^2 + \|G(\sigma)\|_V^2.$$

Первое условие выполнено вследствие (5), если α положить равным c_0 . Второе условие очевидно.

По теореме 8.7. из [1] (стр. 104) третье условие будет также выполнено, если функционал

$$\sigma \rightarrow (q, F(\sigma))_{L_2(\mathcal{R}_n)} + (u, G(\sigma))_V$$

имеет субградиент (или опорный функционал) $\forall \sigma \in H$.

Но это действительно так, т.к. этот субградиент существует $\forall \sigma \in H$ и равен

$$l(\sigma) = \int_{\mathcal{R}_n} q_{ij} \mu_{ij} \sigma_{ij} dx_1 dx_2 - \int_{\mathcal{R}_n} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}(u) dx_1 dx_2,$$

где μ_{ij} - субградиент $F(\sigma)$ в точке σ .

Докажем справедливость четвертого условия. Поскольку в нашем случае $\sigma_{33} = 0$, то $F(\sigma)$ - норма в пятимерном пространстве векторов, следовательно,

$$|F(\sigma) - F(\tau)| \leq F(\sigma - \tau) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{ij} - \tau_{ij})(\sigma_{ij} - \tau_{ij})]^{1/2},$$

поэтому

$$\|F(\sigma) - F(\tau)\|_{L_2(\mathcal{R}_N)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\sigma - \tau\|_H. \quad (II)$$

Далее заметим, что

$$\|G(\sigma) - G(\tau)\|_V = \sup_{\sigma \in V, \|\sigma\|=1} |(\sigma, G(\sigma) - G(\tau))_V|. \quad (I2)$$

Учитывая (9), пользуясь неравенствами Коши для суммы и Буняковского для интеграла, а также принимая во внимание симметричность тензора напряжений, можем записать следующую цепочку неравенств:

$$|(\sigma, G(\sigma) - G(\tau))_V| = \left| \int_{\mathcal{R}_N} (\sigma_{\alpha, \rho} \nu_{\alpha, \rho} \sigma_3 - \tau_{\alpha, \rho} \nu_{\alpha, \rho} \tau_3) (c_{\alpha \rho} - \tau_{\alpha \rho}) dx_1 dx_2 dx_3 \right| \leq$$

$$\leq \left[\int_{\mathcal{R}_N} (\nu_{\alpha, \rho} \nu_{\alpha, \rho} + \nu_{3, \alpha \rho} \nu_{3, \alpha \rho} x_3^2 + \nu_{\alpha \rho} \nu_{\alpha \rho} \sigma_3^2 + 2\nu_{\alpha \rho} \nu_{\alpha, \rho} \sigma_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right]^{1/2} \|\sigma - \tau\|_H \leq$$

$$\leq [h(1 + h^2/12 + c_1^2 + c_2^2 + 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2})]^{1/2} \cdot \|\sigma\|_V \cdot \|\sigma - \tau\|_H.$$

Отсюда и из (II) и (I2) следует, что

$$\begin{aligned} \|\Phi(\sigma) - \Phi(\tau)\|_{L_2(\mathcal{R}_N) \times V}^2 &= \|F(\sigma) - F(\tau)\|_{L_2(\mathcal{R}_N)}^2 + \|G(\sigma) - G(\tau)\|_V^2 \leq \\ &\leq [1/2 + h(1 + h^2/12 + c_1^2 + c_2^2 + 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2})] \cdot \|\sigma - \tau\|_H^2, \end{aligned}$$

т.е. (I0) выполнено, если $C^2 = 1/2 + h(1 + h^2/12 + c_1^2 + c_2^2 + 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2})$.

Наконец, из доказательства теоремы 4.1. из [3] (стр. 108-109) следует, что $\sigma^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$, если

$$0 < \varrho < 2c_0 / C^2, \quad \text{что и требовалось}$$

доказать.

Численное решение данной задачи возможно при помощи построения разностной аппроксимации предложенного итерационного процесса.

Литература

1. Вайнберг М.М., Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., "Наука", 1972.
2. Волошановская С.Н., Карчевский М.М., Об итерационных методах решения задач упругопластического изгиба пластин. В кн.: Численные методы и их применение. Казань, изд-во Казанского ун-та, 1983, 3-18.
3. Глевински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольтер Р., Численные исследование вариационных неравенств. М., "Мир", 1979.
4. Дюво Г., Лионс Ж.-Л., Неравенства в механике и физике. М., "Наука", 1980.
5. Экланд И., Темам Р., Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., "Мир", 1979.

Application of Udzawa algorithm to the solution of problem of bending of elastic-plastic shallow shells

G. Olenev

Summary

In the present paper the problem of elastic-plastic static bending of two-dimensional shallow shells is reduced to the problem of finding the saddle point of the corresponding function of Lagrange. The construction of this saddle point is realized with the aid of Udzawa iterative method. Such an interval of the iterative parameter changes is presented where for every parameter included in this interval the sequence of approximations of the stress field is converged, in the particular Hilbert space, to a real stress field.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ
КРУГЛЫХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ПЛАСТИН,
ЗАДЕЛАННЫХ ПО КРАЮ

Ю. Кирс

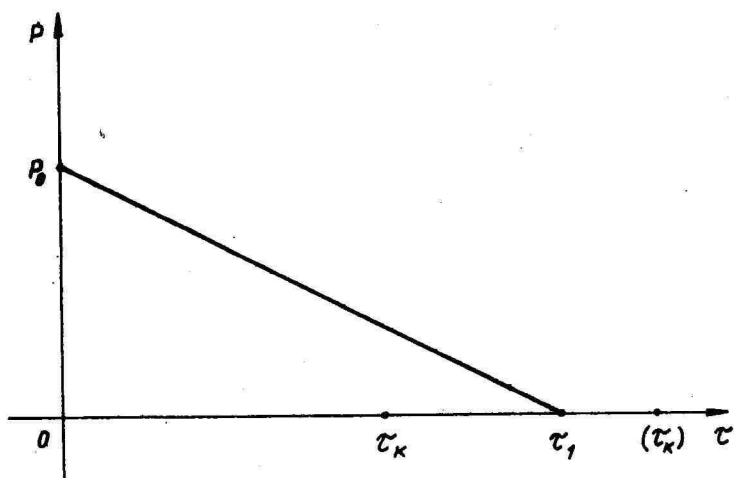
Таллинский политехнический институт

В работе [1] впервые были изложены общие идеи оптимального проектирования круговых упрочняющихся пластин. При этом рассматривалась шарнирно опертая пластина, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, вид которой на плоскости $P\tau$ (нагрузка - время) представлял собой прямоугольник. Задача была решена в момент снятия нагрузки. В работе [2] была рассмотрена такая же пластина, но с экспоненциально убывающей нагрузкой (на плоскости $P\tau$). Решение было получено для момента остановки пластины. В работе [3] дано полное решение оптимального проектирования круговых упрочняющихся пластин. К пластине была приложена линейно убывающая нагрузка в виде треугольника на плоскости $P\tau$.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального проектирования изотропно упрочняющихся круглых пластин, заделанных по краю. Предлагается два метода решения данной задачи.

§1. Формулировка задачи и общие уравнения

I. Рассмотрим круглую пластину, заделанную по краю. Пусть толщина её равна $2H$, а радиус R . Пластина нагружена равномерно распределённой динамической нагрузкой P , вид которой на плоскости $P\tau$ изображен на фиг. 1. В момент $\tau = \tau_1$ нагрузка P становится равной нулю и дальнейшее движение пластины происходит по инерции до остановки в момент τ_* . Однако движение пластины может закончиться уже в первой фазе, т.е. при $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Как показали расчеты, это имеет место в большинстве случаев. При заданном объеме V_0 пластины требуется определить толщину $2H$ в зависимости от радиальной координаты r так, чтобы остаточный прогиб в центре был бы минимальным. При этом должно быть выполнено добавочное условие $H \geq H_0$, где H_0 - заданная величина. Используем координаты r и z . Начало координат находится в центре пластины на средин-



Фиг. I

ной плоскости. Ось Ox направлена вниз.

Материал пластины изотропно упрочняющийся и подчиняется условию текучести Мизеса и ассоциированному закону течения.

2. Как известно из теории пластического течения

$$\dot{\epsilon}_r^p = \lambda \epsilon_r ; \quad \dot{\epsilon}_\varphi^p = \lambda \epsilon_\varphi ; \quad \dot{\epsilon}_z^p = \lambda \epsilon_z , \quad (I.1)$$

где $\dot{\epsilon}_r^p$, $\dot{\epsilon}_\varphi^p$, $\dot{\epsilon}_z^p$ - компоненты скорости пластической деформации; ϵ_r , ϵ_φ и ϵ_z - компоненты девиатора напряжений.

Скорость работы пластической деформации

$$\dot{A}_p = s_r \dot{\epsilon}_r + s_\varphi \dot{\epsilon}_\varphi + s_z \dot{\epsilon}_z . \quad (I.2)$$

Предположим, что пластические деформации малы и упругие деформации не учитываются.

Так как интенсивность касательных напряжений

$$T = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} , \quad (I.3)$$

а интенсивность скорости деформации сдвига

$$\eta = 2\sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2} , \quad (I.4)$$

то, учитывая ещё соотношения (I.1) и (I.2), имеем

$$\dot{A}_p = \eta T . \quad (I.5)$$

Обозначим для удобства здесь и далее

$$\sigma_1 = \sigma_r , \quad \sigma_2 = \sigma_\varphi , \quad \epsilon_1 = \epsilon_r , \quad \epsilon_2 = \epsilon_\varphi .$$

Предположим

$$A_p = BT^2 + c_0 , \quad (I.6)$$

где B - заданная константа материала, а c_0 - постоянная, вычисляемая из начальных условий. При $\tau = 0$ имеем $A_p = 0$ и $T = T_0$. Пусть σ_{s0} - предел текучести материала в начальный момент нагружения, а σ_s - предел текучести в любой момент. Учитывая, что $\sigma_s = 3T^2$ и $\sigma_{s0} = 3T_0^2$, находим

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{3A_p}{B} + \sigma_{s0}^2} \quad (I.7)$$

Из соотношения (I.6) и (I.5) получим

$$2BT dT = \eta T dt \quad (I.8)$$

После решения этого дифференциального уравнения находим

$$T = \frac{\gamma |z|}{B} + \frac{\sigma_{s0}}{\sqrt{3}}, \quad (I.9)$$

где

$$\gamma = \int_0^t \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2} dt, \quad (I.10)$$

а α_1 и α_2 — главные кривизны.

$$\text{Поэтому } e_1 = z\alpha_1 \quad \text{и} \quad e_2 = z\alpha_2, \quad (I.11)$$

а

$$\alpha_1 = -\frac{d^2 W}{dr^2}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \quad (I.12)$$

Имея в виду, что по теории течения $\lambda = \eta/2T$, получим из уравнений (I.1)

$$\frac{\sigma_1}{2\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\sigma_2}{2\alpha_2 + \alpha_1} = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{z\gamma}{B} + \frac{\sigma_{s0} \operatorname{sign} z}{\sqrt{3}} \right), \quad (I.13)$$

где

$$\zeta = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2} \quad (I.14)$$

3. Используя соотношения (I.13), уже легко найти уравнения для моментов M_1 и M_2

$$\frac{M_1}{2\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{M_2}{2\alpha_2 + \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{3}\zeta} \left(\frac{2\sqrt{3}\gamma H^3}{3B} + \sigma_{s0} H^2 \right) \quad (I.15)$$

Добавим сюда ещё уравнения движения пластины

$$\frac{d^2}{dr^2} (rM_1) - \frac{dM_2}{dr} + Pr = 2\mu H r \ddot{W}, \quad (I.16)$$

где μ - плотность материала. Приложенная нагрузка

$$P = \begin{cases} P_0(1 - \tau/\tau_1), & \text{если } 0 \leq \tau \leq \tau_1, \\ 0, & \text{если } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_u. \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Перейдём к безразмерным величинам.

Пусть

$$\begin{aligned} h &= \frac{H}{H_0}, & x &= \frac{r}{R}, & t &= \frac{\tau}{\tau_1}, \\ \omega &= \frac{W}{H_0}, & m_1 &= \frac{M_1}{\sigma_{\tau_0} H_0^2}, & m_2 &= \frac{M_2}{\sigma_{\tau_0} H_0^2}, \\ V &= \frac{V_0}{2\pi R^2 H_0}, & q &= \frac{PR^2}{\sigma_{\tau_0} H_0^2}, & m_3 &= \frac{M_3}{\sigma_{\tau_0} H_0^2}, \\ u &= \frac{\mu R^2}{\sigma_{\tau_0} \tau_1}, & \alpha &= \frac{2H_0^2}{3BR^2 \sigma_{\tau_0}}, \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

где $\sigma_{\tau_0} = \sigma_{s_0}/\sqrt{3}$.

При решении задачи используем метод модальных решений. В этом случае имеем

$$w = f(x) \cdot \varphi(t). \quad (\text{I.19})$$

Т.н. "полутолщину" h будем искать в виде

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i. \quad (\text{I.20})$$

Из условия $dh/dx = 0$ при $x = 0$ получим $b_1 = 0$.

Имея в виду, что

$$V_0 = 4\pi \int_0^R r H dr, \quad (\text{I.21})$$

найдем после преобразований (I.18)

$$h_0 = b_0 = V - \frac{b_2}{2} - \frac{2b_4}{5} - \frac{b_6}{3} - \frac{2b_8}{7} - \frac{b_{10}}{4}. \quad (\text{I.22})$$

Теперь основную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{d^2}{dx^2}(x m_1) - \frac{dm_2}{dx} + q_0(1-t)x &= 2u h x \dot{\varphi} \dot{f}; \\ 2) \quad \frac{m_1}{2v_1 + v_2} = \frac{m_2}{2v_2 + v_1} = \alpha \varphi \dot{h}^2 + \frac{h^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2}}; \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

- 3) $v_1 = -\frac{df}{dx^2} = -f'$;
 4) $v_2 = -\frac{1}{x} \frac{df}{dx} = -\frac{1}{x} f'$;
 5) $h = h_0 + \sum_{i=2}^n b_i x^i$.

- Примечания: 1) Здесь и далее точка над переменной обозначает дифференцирование по безразмерному времени t , а запятая - по координате x .
 2) Параметр α характеризует меру упрочнения и имеет в дальнейшем существенное значение.
 3) Как известно, по Мизесу

$$m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2 = m_0^2. \quad (I.24)$$

§2. Моментно-кинетический метод решения задачи

1. Предположим, что дана зависимость

$$v_1 = F v_2. \quad (2.1)$$

Тогда из второго уравнения системы (I.23) следует

$$m_2 = \frac{(2+F)m_1}{(2F+1)}. \quad (2.2)$$

Из условия (I.24) вытекает

$$m_2 = \frac{m_1}{2} + \sqrt{m_0^2 - \frac{3}{4} m_1^2}. \quad (2.3)$$

Пусть

$$m_1 = C_k m_0, \quad (2.4)$$

тогда по уравнению (2.3) имеем

$$m_2 = \frac{m_0}{2} (C_k + \sqrt{4 - 3C_k^2}). \quad (2.5)$$

Учитывая соотношения (2.4) и (2.5), находим из равенства (2.2)

$$F = \frac{3C_k - \sqrt{4 - 3C_k^2}}{2\sqrt{4 - 3C_k^2}}. \quad (2.6)$$

Теперь нужно найти приближенное выражение функции $C_w = C_w(x)$. Из условий (2.1) и (2.6) ясно, что при $x = 0$ должно быть $C_w = 1$. Далее, при $x \rightarrow 1$ должно быть $F \rightarrow -\infty$, поэтому при $x = 1$ имеем $C_w = -2/\sqrt{3}$. Учитывая все это, получим

$$C_w = 1 - x \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right), \quad (2.7)$$

и, наконец,

$$F = \frac{(1,5 - 3,232051x)}{\sqrt{(1-x)(13,9282x+1)}} - \frac{1}{2}. \quad (2.8)$$

Подставляем это выражение в условие (2.1) и, используя также третье и четвертое уравнения системы (1.23), находим дифференциальное уравнение для вычисления функции $f(x)$, а именно:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{x} \left[\frac{(1,5 - 3,232051x)}{\sqrt{(1-x)(13,9282x+1)}} - \frac{1}{2} \right] \frac{df}{dx}. \quad (2.9)$$

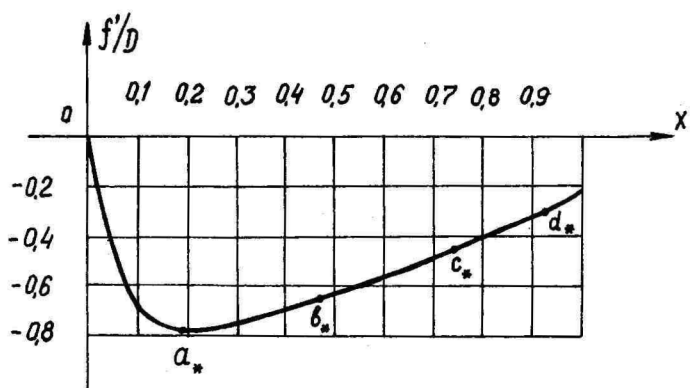
Отсюда

$$f' = \frac{-20Dx \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \right] \right\}}{\left[1 + \frac{\sqrt{3}x}{(2-\sqrt{3})} + \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}x}{(2-\sqrt{3})} - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right) x^2} \right]^{3/2}}. \quad (2.10)$$

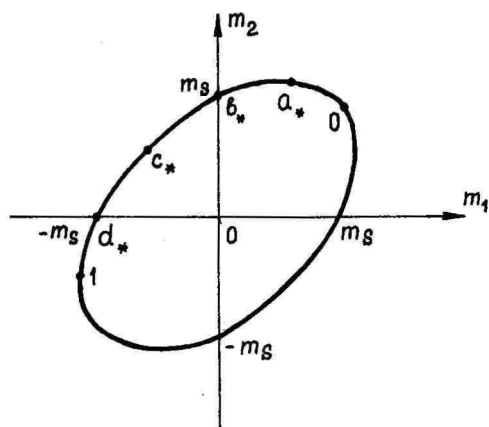
К сожалению, проинтегрировать это выражение аналитически не удастся. Для того, чтобы всё-таки определить $f(x)$ и решить систему (1.23), нужно найти приближенное выражение искомой функции. График функции f'/D дан на фиг. 2. На фиг. 3 изображена кривая текучести Мизеса с опорными точками.

2. Из системы (1.23) получим

$$m_1 - m_2 + x m_1' = -\frac{q x^2}{2} + 2k\psi \int k x f dx + C_1,$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$m_2 = m_1 \cdot \left(\frac{2v_2 + v_1}{2v_1 + v_2} \right),$$

$$v_1 = -f'',$$

(2.11)

$$v_2 = -\frac{1}{x} f'.$$

Для функции $h(x)$ используем пятое уравнение системы (1.23), где для упрощения возьмем $t_5 = t_6 = 0$.

Для нахождения функции $f(x)$ делим отрезок $[0; 1]$ на части и в каждой подобласти аппроксимируем функцию $f'(x)$ из уравнения (2.10) прямой, а именно:

$$\begin{aligned} 1) 0 \leq x \leq 0,04 : & \quad f'_1 = -11,6Dx, \\ 2) 0,04 \leq x \leq 0,09 : & \quad f'_2 = -D(4,32x + 0,2912), \\ 3) 0,09 \leq x \leq 0,153077 : & \quad f'_3 = -D(1,27622x + 0,56544), \\ 4) 0,153077 \leq x \leq 0,25 : & \quad f'_4 = -D \cdot 0,7605, \\ 5) 0,25 \leq x \leq 1 : & \quad f'_5 = D(0,63643x - 0,94964). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теперь легко проинтегрировать уравнения (2.12), удовлетворяя всем условиям непрерывности, а также условиям $f(1) = 0$ и $f(0) = 1$ (см. (1.19)).

Общий вид найденных функций

$$f_n = a_{0n} + a_{1n}x + a_{2n}x^2, \quad (2.13)$$

где a_{0n} , a_{1n} и a_{2n} — постоянные, вычисляемые при интегрировании системы (2.12).

Теперь нужно решить дифференциальное уравнение (2.11) в каждой части отдельно, используя при этом условия непрерывности функции m_1 . В первой части $0 \leq x \leq 0,04$ определим константы интегрирования из условий: 1) $m_1'(0, t) = 0$, 2) $m_1(0, t) \equiv m_0 = h_0^2(\sqrt{3} + 6|a_{21}| \cdot \alpha \varphi h_0)$.

В последней части $0,25 \leq x \leq 1$ получим в общем виде следующее выражение:

$$m_1 = \frac{D_5(x) \cdot x}{1 + 6e_3 x}, \quad (2.14)$$

где $e_2 = a_{25}/a_{45}$. Оказывается, что при $\alpha = \alpha_* = 0,48165$ знаменатель в уравнении (2.14) становится равным нулю. Поэтому $D_5(\alpha_*) = 0$. При этом условии получим дифференциальное уравнение для вычисления функции $\varphi(t)$, а именно:

$$\ddot{\varphi} + A_2^2 \varphi = \frac{1}{\alpha A_1} [2,588413 q_0 (1-t) - h_0^2 7,129606], \quad (2.15)$$

где

$$A_1 = 4,25177V - b_2 \cdot 1,98966 - b_3 \cdot 1,66804 - b_4 \cdot 1,40849, \quad (2.16)$$

$$A_2 = 16,161925 h_0 \cdot \sqrt{\frac{\alpha h_0}{\alpha A_1}}. \quad (2.17)$$

Данное решение действительно при $0 \leq t \leq 1$, т.е. в первой фазе движения, когда $q \neq 0$ (см. фиг. 1). Используя условия $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, находим

$$\varphi = \frac{9,9094 \cdot q_0}{10^3 \alpha A_1 h_0^2} \cdot [A_2(1-A_3)(1 - \cos A_2 t) - A_2 t + \sin A_2 t], \quad (2.18)$$

где

$$A_3 = 2,7544313 h_0^2 / q_0.$$

Если движение пластины кончается уже в первой фазе, то из условия $\dot{\varphi}(t_w) = 0$ следует

$$t_w = \frac{2}{A_2} \cdot \arctan [A_2(1-A_3)], \quad (2.19)$$

где $t_w \leq 1$. Минимизировать нужно функцию $F_M = w(\alpha=0; t=t_w)$. После необходимых вычислений получим

$$F_M = \frac{q_0 \cdot 1,98188}{10^3 \alpha A_2 h_0^2} \cdot \left(\tan \frac{A_2 t_w}{2} - \frac{A_2 t_w}{2} \right), \quad (2.20)$$

где α — параметр, характеризующий меру упрочнения материала. При $\alpha = 0$ имеем дело с жесткопластическим материалом. При этом получим

$$t_u^0 = 2(1 - A_3), \quad (2.21)$$

$$F_M^0 = \frac{4,72561 q_0 (t_u^0)^3}{8 \kappa A_1},$$

где $t_u^0 < 1$.

3. Предположим теперь, что движение пластины не прекратилось в первой фазе, а пластинка продолжает по инерции двигаться во время второй фазы ($t > 1$), когда $q = 0$. Теперь нужно интегрировать ту же систему (2.II), приняв

$q = 0$ и подставляя $\psi(t)$ вместо функции $\varphi(t)$, так как здесь имеем

$$w(x, t) = \psi(t) \cdot f(x). \quad (2.22)$$

Функции $f(x)$ и $h(x)$ остаются такими же, как и в первой фазе. Интегрирование системы (2.II) также аналогично решению в первой фазе. Поэтому для определения функции $\psi(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\psi} + A_2^2 \psi = - \frac{h_0^2 \cdot 7,129606}{\kappa A_1}. \quad (2.23)$$

Его легко решить, используя условия непрерывности

$$\varphi(1) = \psi(1) \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}(1) = \dot{\psi}(1).$$

Время остановки деформирования получится здесь

$$t_u = \begin{cases} \frac{1}{A_2} \cdot \arctan A_4 & \text{при } A_4 > 0, \\ \frac{1}{A_2} \cdot (\pi + \arctan A_4) & \text{при } A_4 < 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

где

$$A_4 = \frac{1 - \cos A_2}{A_2(A_2 - 1) + \sin A_2} \quad (2.25)$$

Выражение минимизируемой функции

$$F_M = \frac{2,72947}{10^2 \alpha h_0 A_2 A_3} \cdot [A_2(A_2 - 1) \cos A_2 t_{\kappa} - A_2 A_3 + \sin A_2 t_{\kappa} + \sin(A_2 - A_2 t_{\kappa})] \quad (2.26)$$

Для пластины без упрочнения ($\alpha = 0$) имеем

$$\begin{aligned} t_{\kappa}^0 &= 1/2A_3, \\ F_M^0 &= \frac{q_0(3-4A_3)}{9,27209 \mu A_1 A_3} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Как уже сказано, толщина h определяется из выражения

$$h = h_0 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4, \quad (2.28)$$

где $h_0 = V - \frac{b_2}{2} - \frac{2b_3}{5} - \frac{b_4}{3}$.

Для полного решения проблемы нужно ещё определить параметры b_2 , b_3 и b_4 так, чтобы функция F_M была минимальной. При этом надо учитывать, что $h > 1$ при всех значениях координаты x . Прямые методы ($dF_M/dt_i = 0$) здесь не проходят, так как полученные уравнения очень сложные. Поэтому используем косвенные методы.

В качестве функции $h(x)$ имеем параболу четвертой степени, причем $h'(0) = 0$. Учитывая это, легко найти различные виды конфигурации пластины (т.е. функции $h(x)$) и проанализировать их отдельно все.

Вид I. Здесь

$$h' = Ax(x-a)(x+a). \quad (2.29)$$

Функция $h = h(x)$ имеет максимум при $x = 0$, а минимумы при $x = a$ и $x = -a$.

Отсюда вытекает

$$h = h_0 - \frac{Aa^2 x^2}{2} + \frac{Ax^4}{4}, \quad (2.30)$$

где

$$h_0 = V + \frac{Aa^2}{4} - \frac{A}{12}. \quad (2.31)$$

Исследования показали, что функция F_M зависит от толщины в центре h_0 : чем больше h_0 , тем меньше F_M . С другой стороны, h_0 тем больше, чем меньше минимальная толщина $h(a)$. Вспомнив условие $h \geq 1$, получим из уравнения $h(a) = 1$ следующее выражение:

$$A = \frac{12(1-V)}{(3a^2-1)-3a^4}. \quad (2.32)$$

Подставляя (2.32) в уравнение (2.31), находим из условия

$$dh_0/da = 0:$$

$$a = 0,846497; \quad b_2 = -12(V-1); \quad b_3 = 0;$$

$$b_4 = 9(V-1); \quad h_0 = 4V-3.$$

Вид 2. Здесь

$$h' = Ax(x-a)(x+b). \quad (2.33)$$

Функция $h(x)$ имеет максимум при $x = 0$, а минимумы — при $x = a$ и $x = -b$.

Отсюда

$$h = \frac{Ax^4}{4} + \frac{A(b-a)x^3}{3} - \frac{Aabx^2}{2} + h_0, \quad (2.34)$$

где

$$h_0 = V + \frac{A}{60} [45ab - 8(b-a) - 5]. \quad (2.35)$$

Из условия $h(a) = 1$ легко определить коэффициент A , после чего имеем

$$h_0 = 1 + \frac{5(V-1)(a^4 + 2ba^3)}{[8(b-a) - 45ab + 5 + 5a^4 + 10ba^3]}. \quad (2.36)$$

Теперь $dh_0/da = 0$ дает

$$\frac{3}{2}a^2(15b+8)+40a(3b^2-1)-24b^2-15b=0 \quad (2.37)$$

С другой стороны, исследования показали, что $dh_0/dt > 0$ всегда. Поэтому для того, чтобы увеличить h_0 и уменьшить F_m , должно $t \rightarrow \infty$. Но тогда $A \rightarrow 0$, а

$$bA \rightarrow \frac{60(V-1)}{(40a^2-15a+8)} \quad (2.38)$$

Из уравнения (2.37) получим, что $a \rightarrow 0,8$. Теперь легко найти, что $b_2 = -21,42857(V-1)$; $b_3 = 47,85714(V-1)$; $b_4 = 0$; $h_0 = (32V-25)/7$.

Вид 3. Здесь

$$h' = -Ax(x-a)(x-b), \quad (2.39)$$

где $A > 0$. Отсюда

$$h = -\frac{Ax^4}{4} + \frac{A(a+b)x^3}{3} - \frac{Aabx^2}{2} + h_0, \quad (2.40)$$

где

$$h_0 = V + \frac{A}{60} [15ab - 8(a+b) + 5] \quad (2.41)$$

Функция $h(x)$ имеет минимум при $x = a$ и максимум - при $x = 0$ и $x = b$.

Кроме условия $h(a) = 1$, используем здесь и $h(1) = 1$, определяя таким образом коэффициенты A и b . Затем $dh_0/da = 0$ дает: $a = \frac{2}{3}$, $b = 0,895833$, $h_0 = 8V - 7$, $b_2 = -86(V-1)$, $b_3 = 150(V-1)$, $b_4 = -72(V-1)$.

Как показали последующие расчеты, вид 3 является самым оптимальным при данной постановке задачи.

Вид 4 аналогичен виду 3 с той разницей, что вместо условия $h(1) = 1$ используем $b = 1$. Здесь получим:

$$\begin{aligned} a &= 0,72903, & b &= 1, & h_0 &= 6,857V - 5,857, \\ b_2 &= -60,9061(V-1), & b_3 &= 96,3(V-1), \\ b_4 &= -41,77214(V-1). \end{aligned}$$

Примечания: 1) Другие возможные случаи функции $h(x)$ из формулы (2.28) здесь не приводятся, так как результаты получились для них гораздо хуже оптимального (вид 3).

2) В таблице I вид 5 обозначает оптимальный проект, полученный по приближенному методу в §3.

Таблица I

x	h				
	Вид I	Вид 2	Вид 3	Вид 4	Вид 5
0	5	5,57I	9	7,857	7
0,1	4,88I	5,375	8,283	7,340	6,705
0,2	4,534	4,857	6,645	6,124	5,875
0,3	3,993	4,125	4,727	4,637	4,67I
0,4	3,310	3,286	2,997	3,206	3,33I
0,5	2,563	2,446	1,750	2,057	2,125
0,6	1,846	1,714	1,109	1,319	1,30I
0,7	1,28I	1,196	1,023	1,014	1,00I
0,8	1,006	1,000	1,269	1,073	1,169
0,9	1,185	1,232	1,45I	1,319	1,438
I,0	2	2	I	I,479	I

5. Наконец, интересно узнать, насколько увеличивается предел текучести σ_s по сравнению с начальным σ_{s0} . С одной стороны,

$$M_s = \sigma_s H^2, \quad (2.42)$$

а с другой,

$$M_s = \sigma_{s0} H^2 + \frac{2\sqrt{3} \gamma H^3}{3B}. \quad (2.43)$$

Обозначим

$$n_s = \sigma_s / \sigma_{s0}.$$

Из уравнений (2.42) и (2.43) находим

$$n_s = 1 + \alpha h \rho \sqrt{v_1^2 + v_2^2} + v_1 v_2. \quad (2.44)$$

Отсюда

$$n_1 = n_s \Big|_{\substack{x=0 \\ t=t_k}} = 1 + \alpha h_0 F_H \cdot 36,837. \quad (2.45)$$

§3. Приближенный метод вычисления кинематически
возможного решения

1. Для определения толщины $h(x)$ используем пятое уравнение системы (I.23), приняв в этом случае $t_2 = t_3 = 0$. Поэтому

$$h = h_0 + t_2 x^2 + t_4 x^4 + t_6 x^6, \quad (3.1)$$

где

$$h_0 = V - \frac{t_2}{2} - \frac{t_4}{3} - \frac{t_6}{4}. \quad (3.2)$$

По-прежнему используем для прогиба w выражение (I.19), но функцию $f(x)$ определим на этот раз гораздо проще. При этом требуем только, чтобы были выполнены кинематические условия $f'(0) = 0$; $f'(1) = 0$; $f(1) = 0$; $f(0) = 1$. Отсюда

$$f(x) = 1 - 2x^2 + x^4 = (1 - x^2)^2. \quad (3.3)$$

Подставляем (3.3) в систему (2.II). Это дифференциальное уравнение интегрируется достаточно просто. Получим формулу для вычисления момента m_1 .

Учитывая теперь, что

$$m_1(0, t) = 12\alpha\varphi h_0^3 + \sqrt{3} h_0^2, \quad (3.4)$$

находим дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi(t)$, а именно:

$$\ddot{\varphi} + A_2^2 \varphi = \frac{1}{2\mu A_1} [165q_0(1-t) - 1760\sqrt{3} h_0^2], \quad (3.5)$$

$$\text{где } A_1 = 135V - t_2 \cdot 56,3017 - t_4 \cdot 43,2103 - t_6 \cdot 33,37, \quad (3.6)$$

$$A_2 = 3h_0 \cdot \sqrt{\frac{165\alpha h_0}{2\mu A_1}}. \quad (3.7)$$

При $0 \leq t \leq 1$ получим

$$\varphi = \frac{55}{2\mu A_1 A_2^2} \cdot [(3q_0 - 32\sqrt{3} h_0^2)(1 - \cos A_2 t) + (3q_0/A_2)(\sin A_2 t - A_2 t)] \quad (3.8)$$

Если движение пластины прекратится в первой фазе $0 \leq t \leq 1$, то момент времени остановки

$$t_w = \frac{2}{A_2} \arctan(A_2 A_3), \quad (3.9)$$

где

$$\lambda_3 = 1 - \frac{32\sqrt{3}h_0^2}{3q_0}. \quad (3.10)$$

Минимизируемое выражение при этом

$$F_M = \frac{165q_0}{2\mu A_1 A_2^3} \cdot [(1 + A_2^2 A_3^2) \sin(A_2 t_w) - A_2 t_w]. \quad (3.11)$$

Без учета упрочнения ($\alpha = 0$) имеем

$$t_w^0 = 2A_3; \quad F_M^0 = 55q_0 A_3^2 / \mu A_1. \quad (3.12)$$

2. Если движение пластины продолжается во время второй фазы ($t \geq 1$) при $q = 0$, то для определения функции $\psi(t)$ получим дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (3.5), только $q = 0$.

После его решения находим

$$t_w = \begin{cases} \frac{1}{A_2} \cdot \arctan A_4, & \text{если } A_4 > 0, \\ \frac{1}{A_2} \cdot (\pi + \arctan A_4), & \text{если } A_4 < 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

где

$$A_4 = \frac{1 - \cos A_2}{\sin A_2 - A_2 A_3}. \quad (3.14)$$

Наконец,

$$F_M = \frac{\sqrt{3}}{12\alpha h_0} \cdot [\cos(A_2 - A_2 t_w) - 1] + \frac{q_0}{128 A_2 \alpha h_0^3} \cdot [\sin A_2 t_w + \sin(A_2 - A_2 t_w) + A_2(A_3 - 1)\cos(A_2 - A_2 t_w) - A_2 A_3 \cos A_2 t_w]. \quad (3.15)$$

При $\alpha = 0$ имеем

$$t_w^0 = \frac{1}{2(1 - A_3)}; \quad F_M^0 = \frac{55q_0(4A_3 - 1)}{16\mu A_1(1 - A_3)}. \quad (3.16)$$

Обозначив, как прежде, $\nu_s = \sigma_s / \sigma_{s0}$, получим

$$n_1 = n_0 \Big|_{x=0}^{t=t_u} = 1 + \alpha h_0 F_M 4\sqrt{3} \quad (3.17)$$

3. Для нахождения оптимального проекта пластины используем тот же метод, что и во втором параграфе. Учитывая, что $h(x)$ - сейчас четная функция, имеем в оптимальном случае

$$h' = Ax(x^2 - a^2)(x^2 - b^2), \quad (3.18)$$

откуда
$$h = h_0 + \frac{Aa^2 b^2 x^2}{2} - \frac{A(a^2 + b^2)x^4}{4} + \frac{Ax^6}{6}, \quad (3.19)$$

где
$$h_0 = V - \frac{A}{24} [6a^2 b^2 - 2(a^2 + b^2) + 1]. \quad (3.20)$$

Используя условия $h(a) = 1$; $h'(a) = 0$; $h(1) = 1$ и, наконец, $dh_0/da = 0$, получим: $a = \sqrt{2}/2$,
 $b_1 = 0,91287$, $b_2 = -30(V - 1)$, $b_3 = 48[V - 1]$,
 $b_4 = -24(V - 1)$ и $h_0 = 6V - 5$.

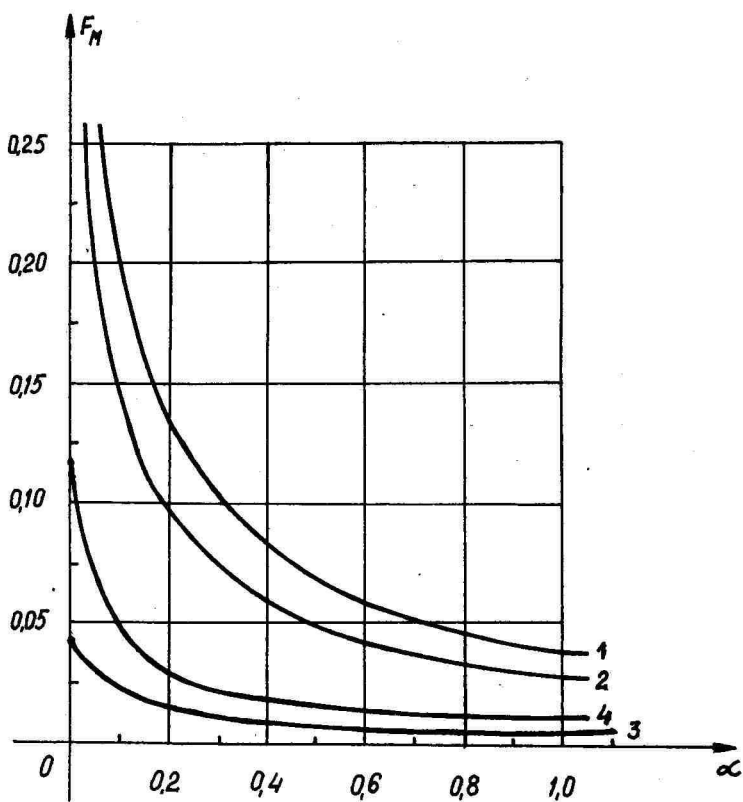
Обозначим это как вид 5. Результаты расчета толщины $h(x)$ даны в таблице I.

Примечание: Если в выражении (3.1) взять $b_0 = 0$, то получится оптимальный проект, который идентичен виду I в предыдущем параграфе.

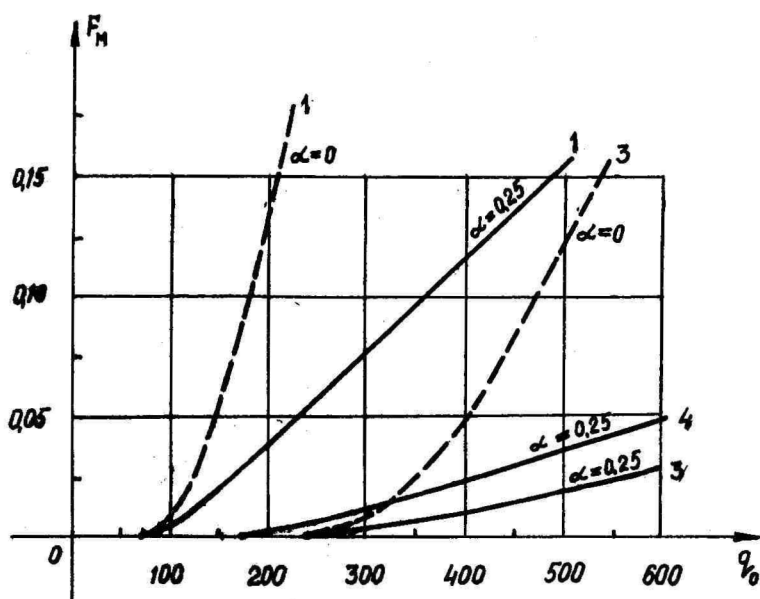
§4. Числовые примеры и анализ результатов

I. Пусть $V = 2$, $n = 40$, $q_0 = 400$. Рассмотрим первый метод - моментно-кинетический метод решения задачи (§2). На фиг. 4 изображены графики зависимости остаточного прогиба в центре (F_M) от параметра упрочнения α . Цифры 1, 2, 3 и 4 обозначают соответственно виды 1-ый, 2-ой, 3-ий и 4-ый. При $\alpha = 0$ имеем пластину без упрочнения (жестко-пластический случай). При этом F_M^0 равняется соответственно 0,7349 (1-ый вид); 0,5069 (2-ой вид); 0,0484 (3-ий вид) и 0,1182 (4-ый вид).

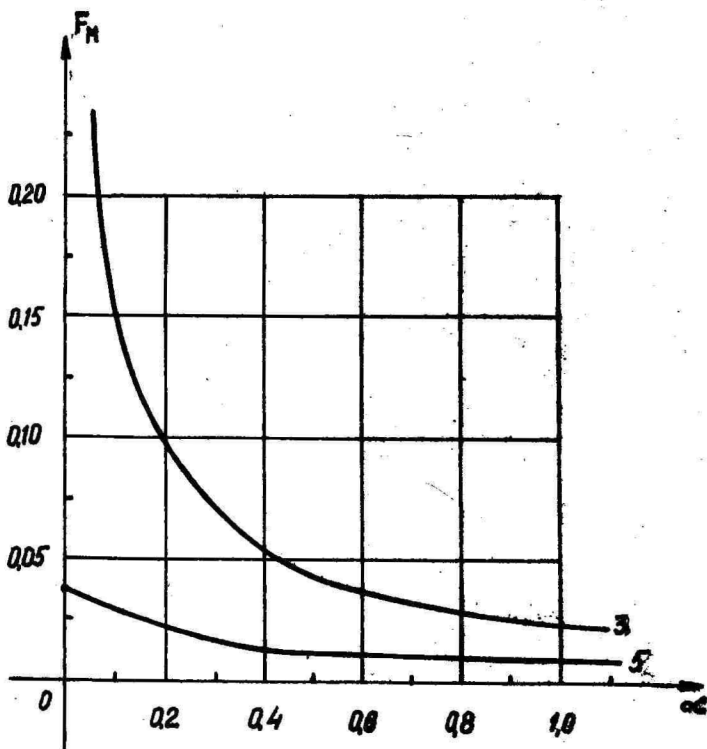
На фиг. 5 представлены графики зависимости функции F_M от начальной нагрузки q_0 при $\alpha = 0,25$ для 1-го, 3-го и 4-го видов пластины. Для сравнения добавлены графики зависимости функции F_M^0 от параметра α для



Фиг. 4



Фиг. 5



Датр. 6

I-го и 3-го видов. По-прежнему $V = 2$; $\psi = 40$.

Исследования показали существенную зависимость остаточного прогиба в центре F_M от параметра упрочнения α . Даже очень маленькие значения параметра α резко уменьшают функцию F_M по сравнению с пластиной без упрочнения. При увеличении параметра α скорость уменьшения функции F_M быстро снижается.

При увеличении начальной нагрузки q_0 остаточные прогибы растут и при этом разница результатов по сравнению с пластиной без упрочнения резко возрастает.

2. Исследовать второй метод (приближенный, §3) при $q_0 = 400$ не удастся, так как при $V = 2$ начальная нагрузка должна удовлетворять неравенству $q_0 > 905,3$. Возьмем поэтому $V = 2$, $\psi = 40$ и $q_0 = 1200$. На фиг. 6 представлены графики зависимости остаточного прогиба F_M от параметра упрочнения α . Здесь цифра 3 обозначает 3-ий вид пластинки, расчеты для которого сделаны I-ым методом (моментно-кинематическим), а 5 обозначает 5-ый вид, для которого использован 2-ой метод решения (приближенный, дающий кинематически возможное решение). При втором методе минимизируемая функция F_M меньше, чем при первом. Кроме того, второй метод гораздо проще. Разница результатов довольно большая при очень маленьких значениях параметра α , но эта разница быстро уменьшается. Начиная примерно со значения $\alpha = 1$, результаты уже довольно близки. Но надо заметить, что области применения вышеуказанных методов не совсем совпадают. Первый метод работает хорошо при малых и средних нагрузках $q_0 < 3q_0^{min}$, тогда как для второго метода эти нагрузки ещё слишком малы.

3. По формулам (2.42) - (2.45) был введен коэффициент n_1 , который показывает, во сколько раз увеличился предел текучести в центре в момент остановки по сравнению с начальным пределом текучести.

В таблице 2 приведены значения коэффициента n_1 для видов I - 4 (метод решения I) при $V = 2$; $\psi = 40$; $q_0 = 400$, а также для сравнения при I-ом и 2-ом методе решения при $q_0 = 1200$.

4. Если нас интересует только проект пластины и не интересует ни время деформирования, ни остаточный прогиб, тогда задачу можно решить и без учета упрочнения. Но если

надо узнать и время, и остаточные прогибы, тогда учет упрочнения необходим - слишком уж велика разница в результатах.

5. Первый и второй методы как бы противопоставлены друг другу. При первом методе вначале задается соотношение $v_1 = Fv_2$ и из этого при помощи формул теории пластичности находится уравнение линии изгиба $f(x)$. При втором методе задается линия изгиба $f(x)$ и из этого находится соотношение $F = v_1/v_2$.

6. Если взять I-ый метод решения (моментно-кинематический) и вместе задачи с тремя параметрами рассмотреть двухпараметрическую задачу, то самый хороший проект получится в случае, когда $t_4 = 0$ (вид 2). При этом

$$h = h_0 + t_1 x^2 + t_2 x^3.$$

Таблица 2

$$V = 2 ; \quad \kappa = 40$$

α	n_1					
	$q_0 = 400$				$q_0 = 1200$	
	вид 1	вид 2	вид 3	вид 4	вид 3	вид 5
0	I	I	I	I	I	I
0,1	4,71	4,02	1,63	2,18	6,29	1,12
0,2	5,88	4,91	1,82	2,50	7,14	1,19
0,3	6,53	5,39	1,93	2,67	7,56	1,23
0,4	6,96	5,71	2,00	2,79	7,82	1,26
0,5	7,27	5,94	2,05	2,87	8,00	1,29
0,6	7,51	6,12	2,09	2,93	8,14	1,31
0,7	7,71	6,26	2,12	2,98	8,25	1,33
1	8,12	6,56	2,18	3,08	8,48	1,37
1,5	8,53	6,86	2,25	3,19	8,70	1,41
2	8,78	7,04	2,29	3,25	8,84	1,43
2,5	8,96	7,17	2,32	3,30	8,93	1,45
	I. метод				I. метод	2. метод

Литература

1. Кирс Д., Кенк К., Об оптимальном проектировании круговых пластин. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 23-29.
2. Кирс Д., Кенк К., Оптимальное проектирование равномерно нагруженной круговой пластины. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 83-87.
3. Кирс Д., Оптимальное проектирование шарнирно закрепленных круговых упрочняющихся пластин при динамическом нагружении. Прикладные проблемы прочности и пластичности, Горький, 1987.

Optimal design of built-in circular plates,
considering the hardening of material

J. Kirs

Summary

Optimal design of built-in circular plates made of isotropically hardening material is examined. The plate is under the monotonously decreasing normal pressure. The purpose is to determine such a function of thickness for which the normal deformations in the centre of the plate, at the moment when the movement of the plate has stopped, were as small as possible. The problem is solved by using two different methods. Both of them are based on the yield curve of Mises. Numerical results are presented.

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Х.Рельвик

Таллинский политехнический институт

В доказательстве [3, с. 205] основной леммы вариационно-го исчисления пользуются произвольной функцией аналогично **возможной скорости** [1] в механике. Эти две отрасли науки развиваются параллельно и дополняют друг друга.

В пунктах I - 8 статьи показано, что при изучении проблем механического движения уравнение Эйлера может иметь **много внешних видов** или, с другой точки зрения, вместо уравнения Эйлера применимы еще многие другие. В пунктах 9 - 12 составлена функция, аналогичная потенциальной энергии, но зависящая от координаты и скорости.

I. Многообразие уравнений Лагранжа

Пусть

$$L = T - \Pi, \quad (1)$$

где L - функция Лагранжа, T - кинетическая энергия и Π - потенциальная энергия.

Для составления дифференциальных уравнений движения механической системы применимы очень многие уравнения аналитической механики (уравнения Лагранжа, Манжерона - Делеану Нильзена, Ценова, Аппеля и др.). В статье [2] для них даны некоторые обобщения и этим путем еще расширены возможности разработки вопросов механического движения.

Уравнения Лагранжа являются частным случаем уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

из вариационного исчисления. Если теперь ввести и в другие уравнения аналитической механики понятие потенциальной энергии, то можно получить целый ряд уравнений, разных по внешнему виду, но эквивалентных уравнению (2) в том смысле, что после выполнения действий дифференцирования они все дают то

же самое дифференциальное уравнение второго порядка, что дает и уравнение (2). Каждое такое уравнение тоже представляет собой частный случай уравнения Эйлера.

Соединяющим звеном между такими уравнениями целесообразно использовать уравнением возможной мощности [I]

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = \sum \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_i\}$$

или

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} \{\sigma^j\} = Q_j \{\sigma^j\},$$

где в левой части встречается сумма

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij}, \quad (3)$$

которую можно выразить через многие функции [2], а в правой части есть обобщенные силы

$$Q_j = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij}.$$

Здесь $\bar{v}_i = \sigma^j \bar{u}_{ij}$ - скорость i -той точки системы, $\bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i$ - ускорение, σ^j - параметры скорости и \bar{u}_{ij} - базисные векторы [I].

Рассмотрим здесь только движение голономной консервативной системы с одной степенью свободы. Тогда обобщенные координаты $q^j = x$, обобщенные скорости $\dot{q}^j = \dot{x}$ и коэффициенты (объекта) неголономности $\gamma_{j\mu}^{\lambda} = 0$:

$$q^j = x, \quad \dot{q}^j = \dot{x}, \quad \gamma_{j\mu}^{\lambda} = 0, \quad Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}. \quad (4)$$

Рассмотрим эти уравнения, группируя их, как это сделано в [2]. Если там встречаются величины \bar{v}_i , то нам нужно только $\bar{v}_i = 0$, т.е. обобщенные силы Q_j , а из функций

$$V^{l,n} = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}_i^{(l)} \cdot \bar{v}_i^{(n)} \quad \text{выбираем только}$$

$$V^{0,n} = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}_i^{(n)} \cdot \bar{v}_i^{(n)} \quad \text{и} \quad V^{1,n} = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)}.$$

2. Обобщенные уравнения Лагранжа

Формула (20) [2] дает

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_{ij} =$$

$$= A \left[(n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v_i^{(n)}} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial x_i^{(n)}} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v_a^{(n)}} v^a \gamma_{ij}^a \right] = Q_j \quad (n=0,1,2,\dots),$$

где

$$A = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ 2, & \text{если } n = 1 \\ \frac{2}{n+1}, & \text{если } n > 1 \end{cases} \quad (5)$$

При условиях (4) мы получим

$$(n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial x^{(n+1)}} - \frac{\partial L_{0,n}}{\partial x^{(n)}} = 0 \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (6)$$

где

$$L_{0,n} = 2V^{0,n} - \frac{2}{A} \Pi \quad (7)$$

Случай $n = 0$ дает уравнение Лагранжа (2), так как $V^{0,0} = T$ и $L_{0,0} = L = T - \Pi$. Обобщенная сила $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$.

Из каждого уравнения (6) после выполнения операций дифференцирования получим то же самое дифференциальное уравнение второго порядка, что дает и уравнение (2).

Из уравнений (2) и (6) видно, что

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_{ij} - Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial x^{(n+1)}} - \frac{\partial L_{0,n}}{\partial x^{(n)}},$$

где $L \neq L_{0,n}$. Функцию $L_{0,n}$ можно назвать обобщенным лагранжианом. В дальнейшем будет видно, что это название все-таки целесообразно внедрять для еще более широкого класса функций, где L и $L_{0,n}$ являются частными случаями.

3. Вторая серия обобщенных уравнений Лагранжа

Из формулы (27) [2] найдем

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_{ij} =$$

$$= A \left[(n+2) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^0} \sigma^k \gamma_{jk}^0 \right] = Q_j \quad (n=0,1,2,\dots).$$

В случае (4) получим уравнение

$$(n+2) \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} - \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} = 0 \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (8)$$

где A дано условиями (5) и $L_{0,n}$ - формулой (7).

Каждое уравнение (8) дает после вычисления производных то же самое дифференциальное уравнение, что дает и уравнение (2).

4. Третья серия обобщенных уравнений Лагранжа

По формуле (33) [2]

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_{ij} =$$

$$= A \left[(n+h+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^0} \sigma^k \gamma_{jk}^0 \right] = Q_j.$$

При условиях (4) получим уравнения

$$(n+h+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} - \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{\sigma}^i} = 0 \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (9)$$

$$(h=1,2,\dots),$$

где $L_{0,n}$ задается формулой (7).

Случай $h=1$ мы рассмотрели в предыдущем пункте.

Уравнения (9) так же, как и уравнения предыдущих пунктов, равносильны уравнению (2).

5. Уравнения Нильзена, Ценова и Манжерона-Делеану

Сумма (3) выражается ещё, например, через функции

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_{ij} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - (1+h) \frac{\partial T}{\partial q_j} \right]$$

Уравнения (12) и (13) и по внешнему виду сильно отличаются от уравнения (2), но все-таки после выполнения операций дифференцирования они дают то же самое дифференциальное уравнение второго порядка, которое получается из уравнения (2).

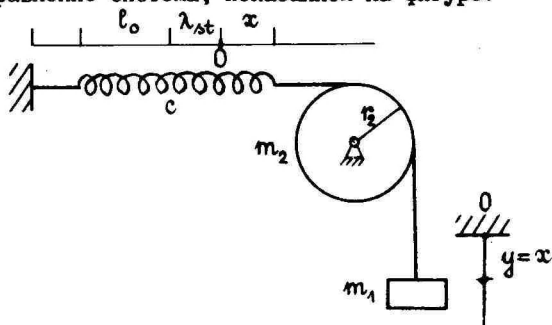
Из уравнений (2), (6), (8), (10), (11), (12) и (13) следует, что в условиях (4)

$$\begin{aligned} \sum m_i \ddot{a}_i \cdot \ddot{u}_{ij} - Q_j &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{x}^{(n+1)}} - \frac{\partial L_{0,n}}{\partial x} = \\ &= (n+2) \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{x}^{(n+2)}} - \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{x}^{(n+1)}} = (n+h+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{x}^{(n+1)}} - \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{x}^{(h)}} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(h)}} - (1+h) \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L_{0,n}}{\partial \dot{x}^{(n+h)}} - \frac{n+h+1}{n+1} \frac{\partial L_{0,n}}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial L_{1,1}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_{1,n}}{\partial \dot{x}^{(n+1)}} \quad , \end{aligned}$$

где $L \neq L_{0,n} \neq L_{1,1} \neq L_{1,n}$ и, следовательно, (обобщенный) лагранжиан не единственный. Этот факт проф. В.В. Добронравов считал очень интересным.

8. Пример

Пренебрегая массой троса и пружины и учитывая массу груза m_1 , массу блока m_2 и жесткость пружины c , составим уравнение системы, показанной на фигуре.



Вспользуемся уравнением (2).

$$\text{Кинетическая энергия } T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 r^2}{2} \frac{\dot{\omega}^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{4}.$$

$$\text{Потенциальная энергия } \Pi = \frac{1}{2} c(x + \lambda_{st})^2 - m_1 g x.$$

$$\text{Функция Лагранжа } L = T - \Pi = \frac{\dot{x}^2}{2} \frac{2m_1 + m_2}{2} -$$

$$- \frac{c(x + \lambda_{st})^2}{2} + m_1 g x.$$

Уравнение (I) дает дифференциальное уравнение

$$\frac{2m_1 + m_2}{2} \ddot{x} + c(x + \lambda_{st}) - m_1 g = 0.$$

Из условия равновесия системы найдем, что $c \lambda_{st} = m_1 g$ и результат упрощается:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = c(x + \lambda_{st}) - m_1 g = cx \quad (\text{I4})$$

или

$$\ddot{x} + \frac{2c}{2m_1 + m_2} x = 0. \quad (\text{I5})$$

Вспользуемся уравнением (6) при $n = 1$ ($A = 2$).

Аналог кинетической энергии

$$2V^{0,1} = m_1 \dot{x} \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \dot{x} \ddot{x}.$$

$$\text{Обобщенный лагранжиан } L_{0,1} = 2V^{0,1} - \dot{\Pi} =$$

$$= m_1 \dot{x} \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \dot{x} \ddot{x} + c(x + \lambda_{st}) \dot{x} - m_1 g \dot{x} = 0.$$

$$\text{Уравнение (6) дает } 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,1}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_{0,1}}{\partial x} = 0;$$

$$m_1 \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \ddot{x} + c(x + \lambda_{st}) - m_1 g = 0.$$

С учетом формулы (I4) получим уравнение (I5).

Воспользуемся уравнением (6) при $n = 2$ ($A = 2/3$).

$$\text{Обобщенный лагранжиан } L_{0,2} = 2V^{0,2} - 3\dot{\Pi} =$$

$$= m_1 \dot{x} \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \dot{x} (\ddot{x} - \frac{\dot{x}^2}{r}) - 3c(\dot{x}^2 + x \ddot{x}).$$

Уравнение (6) в этом случае будет

$$3 \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{0,2}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_{0,2}}{\partial x} = 0$$

и с учетом формулы (I4) дает

$$3(m_1 \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \ddot{x}) + 3cx = 0; \quad \ddot{x} + \frac{2c}{2m_1 + m_2} x = 0,$$

что совпадает с ответом (I5).

Воспользуемся уравнением Аппеля.

$$\text{Обобщенный лагранжиан } L_{1,1} = 5 + \ddot{\Pi} =$$

$$= \frac{m_1 \ddot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{4} (\ddot{x}^2 + \dot{x}^4) + c\dot{x}^2 + c(x + \lambda_{st})\ddot{x} - m_1 g \ddot{x}.$$

Уравнение (I2) будет

$$\frac{\partial L_{1,1}}{\partial \ddot{x}} = 0; \quad m_1 \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \ddot{x} + c(x + \lambda_{st}) - m_1 g = 0.$$

С учетом формулы (I4) найдем

$$\ddot{x} + \frac{2c}{2m_1 + m_2} x = 0,$$

т.е. ответ (I5).

Воспользуемся уравнением (I3) при $n = 3$.

$$\text{Обобщенный лагранжиан } L_{1,3} = 2V^{1,3} + \ddot{\Pi} =$$

$$= m_1 \ddot{x}^{(n)} \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \ddot{x}^{(n)} \ddot{x} + cx \ddot{x} +$$

+ (члены без производной $\frac{(\ddot{x})^3}{x}$).

Уравнение (I3)

$$\frac{\partial L_{1,3}}{\partial \ddot{x}^{(n)}} = 0; \quad m_1 \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \ddot{x} + cx = 0$$

дает ответ (I5).

9. Случай силы, зависящей от скорости

Если сила зависит только от координаты, то существует потенциальная энергия, т.е. такая функция, что $F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$. Возникает вопрос, можно ли найти аналогичную функцию для силы $F = F(x, \dot{x})$.

В таком случае естественно ожидать в уравнении Эйлера три члена:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} = 0. \quad (16)$$

Вместо кинетической энергии T воспользуемся функцией

$$S = V^{4,1} = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_i = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i,$$

где $\bar{v}_i = v^i \bar{u}_{ij}$, v^i - параметры скорости и \bar{u}_{ij} - базисные векторы [I]. Таким образом, $S = S(x, \dot{x}, \ddot{x})$ (прямой зависимостью от времени t пренебрегаем).

Вычисления дают

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial v^i} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial S}{\partial \dot{v}^i} = \sum m_i \ddot{v}_i \cdot \bar{u}_{ij}. \quad (17)$$

Функция S допускает сумму производных вида левой части (16), но не равную нулю.

Если какая-то другая функция $\Pi_1 = \Pi_1(x, \dot{x})$ (индекс 1 указывает зависимость силы от первой производной от координаты), то её вторая производная $\ddot{\Pi}_1 = \ddot{\Pi}_1(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$, и путем прямых вычислений можно убедиться в том, что она удовлетворяет уравнению Эйлера, имеющему четыре члена:

$$\frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial \ddot{\ddot{x}}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \ddot{\Pi}_1}{\partial \ddot{\ddot{x}}} = \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \dot{x}}. \quad (18)$$

Сумма (18) может служить вспомогательной величиной для дополнения левой части равенства (17) до нуля.

С другой стороны, правая часть (17) подскажет, что уравнение возможной мощности [I] должно содержать вторую производную силы:

$$\sum m_i \ddot{\bar{v}}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = \sum \ddot{\bar{F}}_i \cdot \{\bar{v}_i\} ;$$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} \sum (m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i) \right] \cdot \bar{u}_{ij} \{v^j\} = 0 ,$$

что правильно, так как $\sum m_i \bar{a}_i = \sum \bar{F}_i$.

Итак, нашей задачей является составление функции Π_4 , которая была бы связана с силой $F = F(x, \dot{x})$ и дополнила бы левую часть (17) до нуля.

10. Алгоритм составления уравнения (16) для материальной системы

Пусть $F = F(x, \dot{x})$. Найдем такую функцию $\Pi_4(x, \dot{x})$, что

$$\frac{\partial \ddot{\Pi}_4}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\Pi}_4}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \Pi_4}{\partial \ddot{x}} = \ddot{F}$$

или с помощью равенства (18)

$$\frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \dot{\Pi}_4}{\partial \ddot{x}} = \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \dot{\Pi}_4}{\partial \ddot{x}} = \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \Pi_4}{\partial \dot{x}} = \ddot{F} .$$

Отсюда, пренебрегая членами вида $C_2 + C_4 t$, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\Pi}_4}{\partial \ddot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\Pi}_4}{\partial \ddot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi_4}{\partial \dot{x}} = F ;$$

$$\dot{\Pi}_4 = \ddot{x} C + \ddot{x} \int_0^t F dt + g(x, \dot{x}, \ddot{x}) =$$

$$= \ddot{x}(C + I(x)) + g(x, \dot{x}, \ddot{x}) ; \quad (19)$$

$$\dot{\Pi}_4 = \dot{x} C + \dot{x} I(x) + h(x, \dot{x}) ; \quad (20)$$

$$P_1 = \dot{x}C + \dot{x}I(x) + \kappa(x), \quad (21)$$

где C - постоянная интегрирования и предположено, что импульс силы $\int_0^t F dt = I(x)$ - функция только координаты.

(Если же $\int_0^t F dt = I(x, \dot{x})$, то $F = \frac{d}{dt} I(x, \dot{x}) = -\frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}} \ddot{x}$ и сила зависит ещё от \ddot{x}).
Вместо $\kappa(x)$ можно взять и $\kappa(x, t)$.

Дальше построим функцию $P_1 = S - \dot{P}_1$ и составим уравнение

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P_1}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial P_1}{\partial \ddot{x}} = 0. \quad (22)$$

II. Пример

Составим уравнение (22) для силы $F = 2\alpha\dot{x}$.

Из формулы (21)

$$\begin{aligned} P_1 &= \dot{x}C + \dot{x} \int_0^t 2\alpha\dot{x} dt + \kappa(x) = \\ &= \dot{x}C + \dot{x}(\alpha^2 - \alpha_0^2) + \kappa(x); \end{aligned}$$

$$\dot{P}_1 = \ddot{x}C + \ddot{x}(\alpha^2 - \alpha_0^2) + 2\alpha\dot{x}^2 + \dot{\kappa};$$

$$\ddot{P}_1 = \ddot{\alpha}C + \ddot{\alpha}(\alpha^2 - \alpha_0^2) + 6\alpha\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{\alpha}^3 + \ddot{\kappa}.$$

Вычисления дают

$$\frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial P_1}{\partial \ddot{x}} = 2\alpha\ddot{x} + 6\dot{\alpha}\dot{x}$$

или, что то же самое,

$$\frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \ddot{x}} = 2\alpha\ddot{x} + 6\dot{\alpha}\dot{x}.$$

Пусть для определенности сила действует на материальную точку массы m . Тогда энергия ускорения $S = \frac{1}{2} m \ddot{x}^2$ и функция $P_1 = S - \dot{P}_1$, имеющая вид

$$P_1 = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \ddot{x}(x^2 - x_0^2) - 6x\dot{x}\ddot{x} - 2\dot{x}^3,$$

позволяют записать уравнение движения материальной точки в виде уравнения Эйлера, имеющего три члена, т.е. уравнения (22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial x} &= -2x\ddot{x} - 6\dot{x}\ddot{x}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial P_1}{\partial \dot{x}} &= -6x\ddot{x} - 18\dot{x}\ddot{x}; \\ \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial P_1}{\partial \ddot{x}} &= m - 6x\ddot{x} - 18\dot{x}\ddot{x}; \\ m\ddot{x} - 2x\ddot{x} - 6\dot{x}\ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

или для проверки

$$\frac{d^2}{dt^2} (m\ddot{x} - 2x\ddot{x}) = 0,$$

что правильно, так как по данным задачи $2x\ddot{x} = F$ и в скобках встречается выражение закона Ньютона для данной материальной точки.

То же самое можно получить при помощи формулы (20), но пользоваться формулой (19) трудно, так как значительная часть функции Π_1 остается в $q(x, \dot{x}, \ddot{x})$. Краткая форма

$$\frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \ddot{x}} \quad \text{все-таки всегда применима.}$$

12. Пример

Составим уравнение (22) для материальной точки массы m , движущейся под действием силы $F = \dot{x} \cos x$. Постоянной S и функцией $\mu(x)$ пренебрегаем, так как они не имеют влияния на окончательный результат.

По формуле (21)

$$\Pi_1 = \dot{x} \sin x,$$

откуда

$$P_1 = S - \Pi_1 = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \dot{x} \sin x - 3\ddot{x}\dot{x} \cos x + \dot{x}^3 \sin x.$$

Уравнение (24) будет

$$m\ddot{x} - \ddot{x}\cos\alpha + 3\dot{x}\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha.$$

Для проверки заметим, что его можно переписать так:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\ddot{x} - \dot{x}\cos\alpha) = 0$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\ddot{x} - F) = 0,$$

что правильно, так как в скобках имеется выражение, по закону Ньютона равное нулю.

13. Случай силы, зависящей только от времени. Пример

Формулы (19) (20), (21) применимы и в случае, если сила $F = F(t)$:

$$P_1 = \dot{x}C + \dot{x}I(t) + u(x, t);$$

$$\ddot{P}_1 = \ddot{x}C + \ddot{x}I + 2\dot{x}\dot{I} + \dot{x}\ddot{I} + \ddot{u}.$$

Пусть, например, на материальную точку массы m действует сила $F = A\sin \kappa^*t$. Тогда, пренебрегая постоянной C и функцией $u(x, t)$, которые не имеют влияния на окончательный результат, имеем

$$I(t) = \int_0^t F dt = \int_0^t A\sin \kappa^*t dt = \frac{A}{\kappa^*}(1 - \cos \kappa^*t);$$

$$\ddot{P}_1 = \frac{A\ddot{x}_0}{\kappa^{*2}}(1 - \cos \kappa^*t) + 2\dot{x}A\sin \kappa^*t + \dot{x}A\kappa^*\cos \kappa^*t;$$

$$P_1 = \frac{m\ddot{x}^2}{2} - \ddot{P}_1,$$

и уравнение (22) будет

$$m\ddot{x} + A\kappa^{*2}\sin \kappa^*t = 0,$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\ddot{x} - A\sin \kappa^*t) = 0,$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\ddot{x} - F) = 0.$$

Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О., Основные вопросы аналитической механики. Уравнение возможной мощности. Таллин, " Валгус ", 1979.
2. Рельвик Х., Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. Тр. Таллинск. полит. ин-та, 1973, №345, 53-62.
3. Смирнов В.И., Курс высшей математики. Т.4, 3-е изд., М., Гос. изд. тех-теор. лит., 1953.

About some equations of analytical
mechanics and calculation of variations

H. Relvik

Summary

Common lines between the calculation of variations and mechanics by means of the possible power equation are studied in the paper. The function (21), analogous to the potential energy, is used for obtaining the differential equation of motion (22) in case of the force depending on velocity.

К РЕАЛИЗАЦИИ ОДНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ЭВМ ТИПА СМ

Л.С.Ильина, И.Ф.Моисеева, Б.Н.Ясулович
Таллинский политехнический институт

Важнейшим и наиболее трудоёмким этапом динамического расчёта упругих систем является определение спектра собственных частот (ССЧ) этих систем.

В рамках метода конечных элементов (МКЭ) эта задача сводится к отысканию корней частотного уравнения

$$\| [K] - \lambda [M] \| = 0, \quad (I)$$

где $[K]$ – матрица жесткости ансамбля элементов расчетной модели (РМ); λ – квадрат круговой частоты; $[M]$ – матрица масс ансамбля элементов РМ.

Решение (I), как правило, осуществляют итерационным и методами на ЭВМ. При этом характеристический определитель (I) приводится к специальному виду с помощью цепочки достаточно громоздких матричных операций, что в конечном итоге нарушает его исходную ленточную структуру. Кроме этого, указанная процедура связана с необходимостью обрабатывать и одновременно держать в оперативной памяти ЭВМ несколько заполненных матриц. Это, естественно, требует как наличия большого объема оперативной памяти машины, так и значительных затрат машинного времени на арифметические операции.

Однако возможности диалогового режима современных ЭВМ, работающих как в режиме разделения времени, так и персональных ЭВМ в особенности, позволяют применить иной подход к разрешению (I) или, другими словами, к определению ССЧ исходной конструкции.

Здесь следует иметь в виду, что при динамическом расчёте строительных, самолетных или судовых конструкций практически достаточно знать первые 5 – 10 корней (низших частот) уравнения (I), т.е. ограничиться решением частичной проблемы собственных значений.

В этой ситуации представляется целесообразным использовать для отыскания указанного числа низших частот способ подбора. Процедуру этого способа можно условно разбить на два этапа. На первом этапе определяется численное значение

характеристического определителя при некотором принятом значении собственной частоты $\lambda = \lambda_0$. На втором этапе сначала определяется место λ_0 в ряду собственных частот РМ исходной конструкции, другими словами, её номер, а затем вычисляется её значение как угодно близкое к истинному значению частоты соответствующего номера. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет найдено требуемое число собственных частот.

Для вычисления значения определителя последний приводится к определителю с треугольной матрицей по методу Гаусса [1]. При этом исходный и приведенный определители равны. Значение же определителя с треугольной матрицей равно произведению его элементов, стоящих на главной диагонали.

Проследим последовательность действий первого этапа на примере характеристического определителя (I) четвертого порядка.

Вначале задаемся значением собственной частоты λ_0 для данной системы, используя, например, рекомендацию [2]. Затем подставляем значение λ_0 в (I), умножаем на него элементы матрицы масс [M] и производим вычитание матриц [K] и $\lambda_0[M]$.

Представим определитель (I) результирующей матрицы в виде

$$\Delta(\lambda_0) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Приводя (2) по методу Гаусса к треугольному виду и вычисляя его значение, будем иметь

$$\Delta(\lambda_0) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix} = K_{11} a_{22} b_{33} c_{44}, \quad (3)$$

где a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} - элементы преобразованных строк треугольной матрицы.

Теперь нужно перейти ко второму этапу. На этом этапе

для определения номера собственной частоты λ_0 в ряду ССЧ расчетной модели, а также её значения, приближенного и истинному с заданной точностью, также используются возможности алгоритма Гаусса.

Дело в том, что при определении по методу Гаусса частного значения основного определителя $\Delta_n(\lambda_0)$ без дополнительных вычислений получаются и значения главных миноров $\Delta_r(\lambda_0)$ определителя. Это позволяет использовать знаки главных миноров, построив из них ряд

$$\text{sign } \Delta_1(\lambda_0), \text{sign } \Delta_2(\lambda_0), \dots, \text{sign } \Delta_{n-1}(\lambda_0), \text{sign } \Delta_n(\lambda_0), (4)$$

где $\Delta_k(\lambda_0)$ - знак k -го главного минора при заданном λ_0 .

Если r есть число перемен знака в ряду (4), то, как следует из теоремы Гаусса [1], исследуемая собственная частота λ_0 лежит между частотами.

$$\lambda_r^{(n)} \leq \lambda_0 < \lambda_{r+1}^{(n)}, \quad (5)$$

где $\lambda_r^{(n)}$ и $\lambda_{r+1}^{(n)}$ - корни (собственные частоты) r и $(r+1)$ характеристического определителя (I) n -го порядка.

Конечная цель второго этапа и состоит в том, чтобы приблизить λ_0 к значению корня $\lambda_r^{(n)}$ уравнения (I) с заданной точностью.

Эта цель достигается уточнением λ_0 в диапазоне (5) для функции $\Delta_n(\lambda)$ методом деления отрезка пополам согласно условию

$$\Delta_n(\lambda) \leq \varepsilon, \quad (6)$$

где ε - заданная точность вычисления определителя порядка n при текущем значении λ .

Описанный выше алгоритм решения частотного уравнения (I) методом подбора реализован в программе, составленной на языке Бейсик для компьютера типа СМ. Программа работает в диалоговом режиме.

Так как МКЭ предопределяет симметричность матриц [K] и [M], то и матрица характеристического определителя (I) будет обладать этим же свойством. Значит, для приведения (I) к треугольному виду методом Гаусса достаточно хранить в оперативной памяти компьютера лишь верхние треугольные части матриц [K] и [M]. Последнее существенно расширяет возможности имеющихся мини и персональных компьютеров при ре-

шении подобных задач. Далее, поскольку процедура приведения по Гауссу не является итерационной, то она, а также вычисление миноров и подсчет перемен знаков, осуществляется в течение очень короткого промежутка времени, практически моментально. Так же быстро протекает и процедура отыскания корня $\lambda_p^{(n)}$ уравнения (I) методом деления отрезка пополам.

В заключение следует отметить, что в отличие от [3] в данной работе исходное частотное уравнение (I) не подвергается дополнительным преобразованиям. Кроме того, диалоговый режим позволяет проектировщику анализировать промежуточные результаты, выводимые на экран дисплея и, используя полученную информацию, принимать дальнейшее решение. Иными словами, диалоговый режим дает возможность проектировщику активно вмешиваться в процесс счета и вести направленный поиск требуемого числа нижних частот ССЧ расчетной модели.

Литература

1. Курдюмов А.А., Вибрация корабля. Л., Судпромгиз, 1961.
2. Яблонский А.А., Норейко С.С., Курс теории колебаний. М., "Высшая школа", 1975.
3. Лукаш Э.П., Определение спектра собственных частот судовых конструкций на ЭЦВМ. М., Сб. н. тр. ОИИМФ, Вып. 6, 1975.

On the realization of an algorithm for solving a frequency equation on CM-type computers

L.S. Ilijna, I.F. Moissejeva, B.N. Jasulovich

Summary

An algorithm for solving a frequency equation on CM-type computers is presented. The method of Gauss is used for calculating the characteristic determinant. For the separation of the zero-points of the determinant the Gauss theorem is used. For automatic calculation of such equations a "BASIC" program has been worked out and solved on the CM-type computers.

ПЛОСКОСТЬ МИНКОВСКОГО

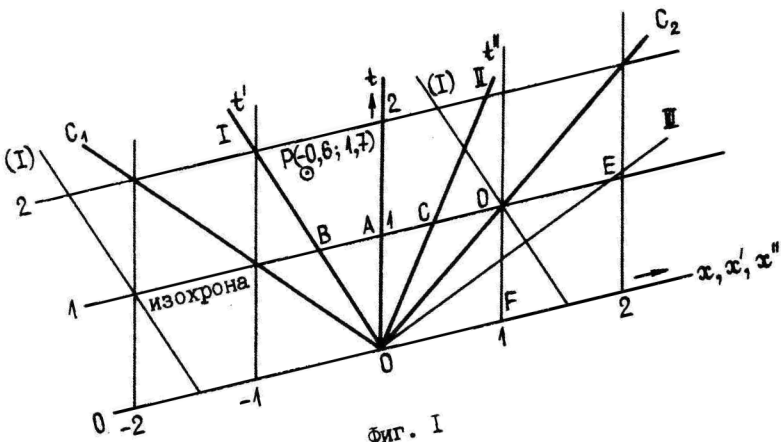
О. Сильде, А. Хайтин

Таллинский политехнический институт

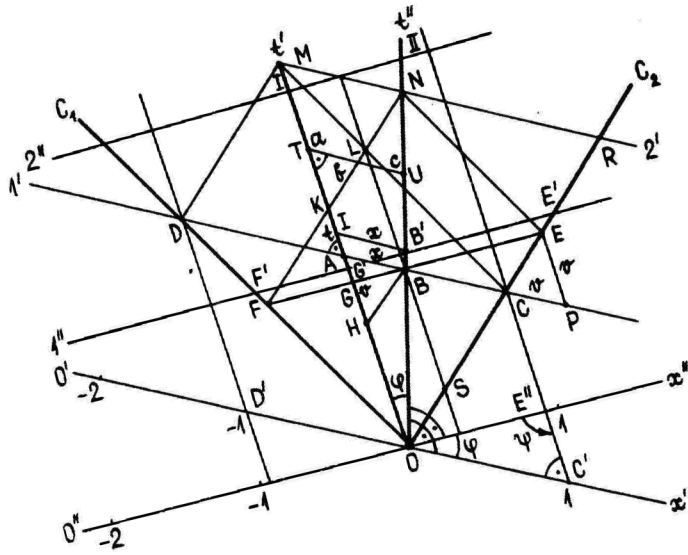
Опыт показывает, что применение геометрического метода для решения задач частной теории относительности намного упрощает решение, делает его более наглядным и дает большую уверенность решающему. В изложениях же теории относительности её геометрия, носящая название мира (или геометрии) Минковского, обыкновенно дается после прохождения кинематики, часто в сокращенном виде, чего недостаточно для применения её к решению задач. Авторы настоящей статьи намерены поступить наоборот: в основу теории относительности положить её геометрию, содержащую и кинематику, так что собственная теория относительности может начинаться примерно с динамики. Превосходство такого метода авторы видят в том, что геометрия, где все покоится, более наглядная и доходчивая, чем кинематика, где все движется. В этой статье будет рассматриваться только плоскость Минковского (называемая также псевдоевклидовой плоскостью), в связи с которой решаются основные вопросы. Переход к трех- или четырехмерному пространству не вызывает особых трудностей, так как прибавляются измерения евклидовой геометрии.

I. Диаграмма "время-путь". Такая диаграмма применяется на практике. Здесь мы будем связывать эту диаграмму с решением вопросов геометрии и потому придаем ей более абстрактный вид (фиг. I).

На евклидовой плоскости берем две пересекающиеся прямые, отметим положительные направления и назовем: ось времени - t и ось пути - x . Точку их пересечения O примем за начало координат, считая там $t = x = 0$. На каждой оси выберем (независимо друг от друга) отрезок, изображающий единицу измерения, и вычертим шкалу. Через отмеченные точки на оси t проведем прямые, параллельные оси x , и назовем их изохронами; они изображают те точки плоскости, где время получает значения, показанные на шкале времени (или на левом конце линий). Аналогично можем провести через точки, отмеченные на оси x , прямые, параллельные оси t . Получается координатная сеть. Каждой точке на плоскости (напр.,



Фиг. 1



Фиг. 2

т. Р) приписываются две координаты (t , x). Движение какого-либо тела (считаемого точкой) изображается на этом графике (на плоскости) некоторой линией, которую уже теперь назовем мировой линией этой точки. Путь (по оси x) будет всегда считать прямолинейным.

Пусть ось x представляет бесконечно длинное железнодорожное полотно, на котором расположены пары параллельных рельсов с движущимися по ним поездами. Точка O , выбранная на полотне, — начало координат. Положение каждого поезда определяется координатами его центральной точки, время измеряется синхронизированными идеальными часами как на полотне, так и в поезде. В дальнейшем будем иметь в виду равномерно движущиеся поезда, представляющие так называемые инерциальные системы физики. На фиг. I показаны мировые линии двух таких поездов, I и II, которые в момент „нуль“ проехали мимо начала координат O . Их скорости можно отсчитывать на шкале I, напр., у поезда I — 0,5 ед., у поезда II + 0,4 ед. (приблизительно).

Основные значения будут иметь мировые линии световых сигналов, отправленных вдоль полотна направо или налево. Но при обыкновенных единицах длины и времени изображение движения световых сигналов на диаграмме невозможно вследствие очень большой их скорости. Нам следует ввести новую, световую единицу, которая определяется как промежуток времени, в течение которого свет пробегает путь, равный единице длины. Время и длина получают, таким образом, общую меру, скорость света $c = 1$. Пусть OA на фиг. I изображает единицу светового времени. Лучи c_1 и c_2 (световые линии) изображают мировые линии световых сигналов, отправленных вдоль полотна из точки O (в момент $t = 0$). Цифра III отмечает мировую линию точки (поезда), движущейся со скоростью большей скорости света. Для такого тела оба световых сигнала движутся в одну сторону (влево), но с различными скоростями; такое движение невозможно в теории относительности, где свет во всех инерциальных системах имеет одну постоянную скорость. (Здесь надо помнить, что единицей времени у нас всюду в дальнейшем будет световая единица. Если v^* и c будут скорости точки a света при какой-нибудь другой единице времени, то $v = v^* : c$; если a и a^* — соответственно ускорения, то $\alpha = a^* : c^2$.) Движения начала и конца каждого поезда изображаются прямыми, параллельными

мировой линии центра на равных расстояниях от неё (на фигуре для поезда I: $(I)-(I')$). На фигуре I можно найти скорости не только относительно полетна, но и относительно, например, любого поезда. Для этого следует мировую линию этого поезда считать осью времени (t' и t''). Напр., полетно движется относительно первого поезда со скоростью $+0,5$, поезд II - со скоростью $+0,9$. Во всех системах единица времени изображается отрезком её мировой линии между двумя соседними изохронами, напр., $OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1$.

Таким образом, на диаграмме возникла своеобразная геометрия плоскости: в каждом направлении имеется длина единичного отрезка. С этой геометрией нам нечего предпринять, но она содержит некоторое свойство, имеющее в дальнейшем основное значение: **аффинность**, т.е. прямые евклидовой плоскости будут прямыми этой геометрии, параллельные прямые останутся параллельными, параллельные отрезки между параллельными равны, отношение мер параллельных отрезков равно отношению евклидовых мер этих отрезков, треугольники с параллельными сторонами подобны, т.е. их стороны и внутренние углы соответственно равны и т.д. Эти свойства сохраняются и впрямь, когда не будем отказываться и от помощи евклидовой геометрии.

На фиг. I, где мы скорость света учли равной единице в двух направлениях на полотне, она получает различные значения относительно поездов. Следует указать на одно свойство света: если отправить в момент $t = 0$ из точки O световые сигналы на полетно и в обоих поездах, то их фронты движутся вместе, т.е. световые линии всех этих сигналов совпадают. Это позволяет положить в основу диаграммы световые линии, которые изображаются на плоскости в виде двух пересекающихся бесконечно широких пучков параллельных прямых линий, так как все тела на полотне и в поездах испускают свет в любой момент времени, из которых мы выбираем нужные для нас.

Из сказанного видно, что ось времени может меняться и зависимости от того, относительно какого тела рассматривается движение, но ось \mathcal{X} и изохроны сохраняются неподвижными. В этом заключается абсолютность времени. На диаграмме (фиг. I) изображаются пространственно - временные отношения классической физики.

2. Основные постулаты теории относительности: 1) постулат относительности: все инерциальные системы равноправны, законы природы в них выражаются одинаково; 2) постулат постоянства

скорости света: световой сигнал движется в пустом пространстве во всех инерциальных системах во всех направлениях с одинаковой постоянной скоростью, не зависящей от его источника.

Эти постулаты учтем в дальнейших диаграммах.

3. Диаграмма "время - путь", приведенная в согласии с постулатами (фиг. 2).

Из точки O проведены две световые линии s_1 и s_2 и мировые линии двух поездов OM и ON (соответственно I и II), которые являются их осями времени t' и t'' . (Скорости поездов должны быть меньше скорости света, и их мировые линии должны находиться во внутренней области между световыми линиями). Выберем на оси t' единицу времени OA . Для нахождения направления оси x' и меры на ней рассуждаем так: в момент A оба световых сигнала должны отстоять от середины поезда (от точки A) на равных расстояниях (вследствие постулата 2)); для нахождения таких точек на световых линиях следует построить параллелограмм $ODMC$ так, чтобы точка A находилась на пересечении его диагоналей (для этого следует отметить $AM=OA$) Диагональ DC и будет параллельна искомой оси x' , а единицей на ней будет отрезок AC ($OC'=AC$). При таком выборе единицы скорость света будет $AC:OA = 1:1 = 1$. Линии DC и MN являются изохронами I, 2 первого поезда (ось x' - нулевая изохрона). В результате для поезда I все готово: каждая точка на плоскости определяется двумя координатами (t', x').

Скорость второго поезда $V_{21} = V$ относительно первого измеряется отрезком AB (при единице AC , напр., $V_{21} \approx 0,4$). Пока ещё единица на поезде II не найдена, но можно определить направление оси x'' . Для этого построим параллелограмм $OFNE$, где серединой диагоналей будет точка B ; диагональ FE параллельна оси x'' . Таким образом, по необходимости оси пространства будут иметь разные направления, что совсем не соответствует фиг. 1. Изохронами (но не под номерами I, 2) для второго поезда будут FE , $F'E'$ и т.д. Отсюда видно, что каждая система имеет свои оси и изохроны, абсолютность времени потерялась. Поэтому мы вправе спросить: сколько показывает часы поезда II в точке B (часы поезда I показывает там I)? Пусть эти часы показывают время $X(OB=X)$, тогда в точке G часы поезда II показывают тоже X .

Задачей будет нахождение показания часов первого поезда в точке G . Для этого проведем отрезок $NB \parallel OC$. Иском $AN = AB = \sigma$, так как $AO = AC = 1$. Отрезок $BL \parallel OA$ и отрезок MC пересекаются в точке L на стороне FN : 1) $KL = LN$, так как $OC = CR$ (ибо $OA = AM$); 2) $LN = NB = KL$ ($\triangle OBN \cong \triangle BNL$) и $CE = NB$. Продлим отрезок AC до точки P ; $CP = AB = \sigma$; иском $\triangle CPE = \triangle AVN$ (по соотв. равным двум сторонам углу между ними). Следовательно, $EP = AN = \sigma$ и $EP \parallel AN$, откуда получим $\triangle ABG \sim \triangle BPE$ ($BP = 1$; $BE = X$; $PE = \sigma$), значит, 1) $AG : \sigma = \sigma : 1$, откуда $AG = \sigma^2$ и $OG = 1 - \sigma^2$; 2) $GB : \sigma = BE : 1$; получим $GB = \sigma X$ и $-\sigma_{12} = GB : OB = \sigma$, то есть поезд I идет относительно II с такой же (абсолютной) скоростью, как II поезд относительно I. Тогда по постулату относительности показание часов поезда I в точке G должно равняться X^2 ($X^2 : X = X : 1$). Следовательно, $X^2 = 1 - \sigma^2$ и

$$X = \sqrt{1 - \sigma^2} \quad (I)$$

Мы получили одно из основных соотношений теории относительности: замедление (дилатация) часов: движущиеся часы отстают по сравнению с покоящимися в отношении $\sqrt{1 - \sigma^2}$.

Пусть отрезок OB' будет единичным на оси t'' . Проведем через него $B'E' \parallel BE$; эта линия пересекает ось t' в точке G' ; в этой точке показание часов поезда I должно быть X ; но $1 : X = X : X^2$, т.е. отрезок OG' среднепропорциональный между отрезками OA и OG ; построение отрезка OG' дается в евклидовой геометрии (точка G' делит отрезок AG приблизительно пополам). Единицей длины на оси x'' будет $B'E'$.

Допустим, CC' и DD' будут мировыми линиями конца и начала поезда I, тогда длина поезда равна 2 ед. От поезда II для измерения длины поезда I придется одновременно (с точки зрения поезда II) отметить положение конца и начала поезда I, т.е. измерить отрезок $F''E''$. Из условия $\triangle OC'E'' \cong \triangle BPE$ найдем, что $OE'' = X$ и длина I поезда $2X = 2\sqrt{1 - \sigma^2}$: движущийся поезд сокращается в направлении движения в отношении $\sqrt{1 - \sigma^2}$ (лоренцово сокращение). Наше построение показывает, что для всякой оси t получается определенная единица измерения (также и для оси x), в зависимости от выбора начального отрезка OA . При прибли-

жения оси t к световой линии эти единицы все время увеличиваются (в евклидовой геометрии), становясь бесконечно длинными на световой линии. Таким образом, на световой линии любой конечный отрезок имеет длину нуль (поэтому световая линия называется изотропной прямой). Доказательство см. дальше.

Световые линии (если продлить их вниз) разделяют плоскость на четыре области. В верхней области содержатся мировые линии (оси времени) поездов, проходящих через точку O в момент $t=0$; начиная с точки O , показания их часов все время будут увеличиваться. Эта область называется временной областью в будущее, ей противоположная (вниз) — временная область в прошлое. Боковые области — пространственные, в них расположены оси x . Через каждую точку временной области из точки O можно проложить некоторую ось времени, как и через каждую точку пространственной области — ось x ; каждой оси t соответствует одна ось x и наоборот. Любая из пар (t, x) может быть представителем полотна, но обыкновенно ее выбирают биссектрисы углов между световыми линиями. На световых линиях оси t и x совпадают. Оси времени и параллельные им прямые называются временными, другие — пространственными прямыми.

4. Плоскость Минковского. Хотя отношения мер на диаграмме (фиг. 2) ещё полностью не выяснены, мы забежим немножко вперед и назовем плоскость диаграммы плоскостью Минковского, ибо здесь получены уже основные временно — пространственные отношения частной теории относительности: замедление часов и лоренцово сокращение. Так как любую точку на полотне можно выбрать за начальную, а также можно любой момент времени выбрать равным нулю, то любая точка плоскости может быть началом координат. В любой точке можно построить две световые линии, однако они должны принадлежать двум пучкам параллельных линий, о которых речь была выше. Все единицы измерения, которые были выбраны в какой — нибудь точке O , переносятся во все другие точки. Каждая точка плоскости представляет некоторое событие, которое может быть отмечено на полотне или в поездах и в каждой инерциальной системе, где эта точка имеет определенные координаты. Одновременность двух событий в разных точках пространства может быть определена относительно какой — нибудь определенной системы коор-

динат. Одновременными будут два события в системе, где они лежат на одной изохроне. Два события, лежащие на временной прямой, будут одномоментными в системе, ось времени которой параллельна этой прямой. Возьмем на оси t' (фиг.2) произвольную точку T и проведем отрезок $TU \parallel AB$. Пусть $OT = a$; $TU = b$ и $OU = c$. Тогда из подобия треугольников имеем $OT : OA = TU : AB = OU : OB$,
или $a : 1 = b : v = c : \sqrt{1 - v^2}$,
или $a^2 - b^2 = c^2$. (2)

Получилось нечто вроде теоремы Пифагора евклидовой геометрии. Так мы и будем её считать и аналогично угол OTU считать прямым (например, если бы считали угол OUT прямым, пришло бы к бессмыслице). Следовательно, вообще углы между осями t и соответствующими x будут прямыми. Будем называть стороны треугольника, прилежащие к прямому углу, катетами, противоположную сторону — гипотенузой; угол между гипотенузой и катетом, лежащим с ним в одной области (см. замечку в скобках после (6)), назовем острым, другой — псевдоострым. Двух прямых углов в треугольнике не существует. Напр., в $\triangle OAB$ угол \widehat{AOB} — острый, \widehat{OBA} — псевдоострый. Если катеты равны, то гипотенуза будет отрезком световой линии нулевой длины. Получается несколько своеобразная картина: прямой угол $t'Ox'$ вмещается полностью в прямой угол $t'Ox$. Возникшую трудность должно разрешить правило измерения углов.

Проведем отрезок $IB' \parallel AB$ (фиг.2). Пусть $OI = t$, $IB' = x$, тогда

$$t^2 - x^2 = 1. \quad (3)$$

В этом равенстве можно t и x считать переменными; получается некоторая кривая линия, характеризующаяся тем, что на ней кончатся единичные отрезки, выходящие из точки O . Она является гиперболой, для которой световые линии будут асимптотами; в каждой точке касательная к ней направлена перпендикулярно к оси времени через эту точку; назовем её линией меры. (Выберем на оси t' координату t очень большой. Пусть соответствующая в уравнении (3) $x = t - \alpha$; получим $t^2 - (t - \alpha)^2 = 1$, откуда $\alpha \approx 1 : 2t$; α измеряет расстояние от точки (t, x) до световой линии; при беспредельном увеличении t это расстояние стремится к нулю).

Все результаты, полученные во временной области, переносятся в пространственную область. Треугольнику OAB

соответствует $\triangle OC'E''$, с прямым углом в точке C' . Значит,

$$OC'^2 - C'E''^2 = OE''^2$$

или

$$1 - v^2 = \chi^2.$$

И в пространственной области возникает линия меры $x^2 - t^2 = 1$ (вследствие центральной симметрии она имеется во всех четырех областях).

Из любой точки A плоскости можно построить прямую линию, перпендикулярную к данной прямой (образующую с ней прямой угол): 1) если точка A на прямой, то отмерим от неё в обе стороны равные отрезки; перпендикуляр проходит через точку пересечения световых линий, проведенных через концы этих отрезков, 2) если точка A вне прямой, то проведем через неё световые линии, и перпендикуляр проходит через середину отрезка, отсеченного световыми линиями на прямой. Световая линия перпендикулярна самой себе. Таким образом, есть возможность построить прямоугольные треугольники в любом месте плоскости, при этом гипотенуза (если она не кратчайшая линия) находится в одной области с одним катетом. Угол между ними обозначим буквой φ .

Приведенные здесь построения можно упростить, если параллельные лучи световых линий выбрать перпендикулярными между собой (в смысле евклидовой геометрии). Тогда параллелограммы $ODMC$ и т.д. будут прямоугольниками, перпендикулярные линии плоскости Минковского расположатся тогда симметрично относительно световых линий; также расположатся соответствующие оси t и x и единицы длины на соответствующих осях будут равными; равными будут и углы между осями t', t'' и соответствующими x', x'' (все в смысле евклидовой метрики). Гиперболы меры будут равнобедренными и т.д.

5. Измерение углов. Рассмотрим прямоугольный треугольник OTU . Из соотношения $a^2 - b^2 = c^2$ получим

$$\frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Гиперболический синус и косинус связаны соотношением $ch^2 \varphi - sh^2 \varphi = 1$. Поэтому разумно связать угол φ со сторонами следующим образом:

$$ch \varphi = \frac{a}{c}; \quad sh \varphi = \frac{b}{c}; \quad th \varphi = \frac{b}{a}. \quad (5)$$

Из прямоугольного треугольника OAB получим

$$OA = a = 1; \quad AB = b = v; \quad OB = c = \sqrt{1 - v^2},$$

следовательно, $ch \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$; $sh \varphi = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$; $th \varphi = v. \quad (6)$

Эти соотношения положим в основу для всех прямоугольных треугольников, в которых катет a и гипотенуза c принадлежат одной области. (Для решения вопроса, к каким областям принадлежат стороны угла, через его вершину провести следует световые линии. Тогда видно, в какую область упадет сторона.) Таким образом, любой угол, стороны которого принадлежат одной области, получает меру. Будет ли мера суммы углов равна сумме мер, этот вопрос рассмотрим дальше.

Чтобы получить меру для псевдоуглов, измерение углов следует связать с вращением. Будем считать во временных областях положительным вращение по движению часовой стрелки, а в пространственных областях наоборот. Прямой угол обозначим буквой δ и сочтем его положительным при вращении против часовой стрелки. Около световой линии всегда можно выделить прямой угол, стороны которого приближаются сколь угодно близко к ней, и, наоборот, прямой угол со сторонами как угодно удаленными от световой линии (тогда его стороны приближаются к другой световой линии.) Таким образом, можно любой угол разложить на слагаемые, среди которых могут быть и прямые углы, и, начиная вращение с одной стороны угла, складывая эти слагаемые (учитывая знаки), приходим к другой стороне с определенной мерой. Конечно, обратное вращение дает противоположное значение меры угла. Например, (фиг.2) начнем вращение со стороны OC' , до стороны OE'' получим угол $+\varphi$ (вращение против часовой стрелки в пространственной области), прибавим прямой угол BOE'' : $\varphi + \delta$ (согласно определению положительного направления), дальше прибавим угол AOB (этот угол следует взять с минусом, так как во временной области положительным будет вращение по часовой стрелке); получим $\varphi + \delta - \varphi = \delta$ (т.е. угол $C'OA$).

6. Векторное исчисление. Векторное исчисление вводится по примеру евклидовой плоскости. Каждый вектор, кроме изотропного, можно выразить через его абсолютное значение (модуль) и единичный вектор его направлениями

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{u}_a = a \vec{u}_a \quad (7)$$

Скалярное произведение векторов подчиняется тем же законам, что и на евклидовой плоскости (точка между векторами - символ скалярного умножения): 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2) $(\alpha \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a} \cdot \vec{b})$; 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$. Нам следует определить скалярное

произведение единичных векторов. Обозначим на фиг. 2 векторы

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a\vec{u}_a; \quad \vec{b} = b\vec{u}_b; \quad \vec{c} = c\vec{u}_c; \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{c}; \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c}, \end{aligned}$$

получим $(a\vec{u}_a + b\vec{u}_b) \cdot (a\vec{u}_a + b\vec{u}_b) = a^2\vec{u}_a \cdot \vec{u}_a + 2ab\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b + b^2\vec{u}_b \cdot \vec{u}_b$;
 $\vec{c} \cdot \vec{c} = c^2\vec{u}_c \cdot \vec{u}_c$.

Из этих данных получается равенство $a^2 - b^2 = c^2$, если положить $\vec{u}_a \cdot \vec{u}_a = +1$; $\vec{u}_c \cdot \vec{u}_c = +1$; $\vec{u}_b \cdot \vec{u}_b = -1$; $\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b = 0$. Обозначим единичные векторы осей $\vec{u}_b, \vec{u}_b', \vec{u}_c, \vec{u}_c', \vec{u}_a, \vec{u}_a', \vec{u}_x, \vec{u}_x', \vec{u}_y, \vec{u}_y'$ и т.д.; по предыдущему примеру следует положить $\vec{u}_b \cdot \vec{u}_c = \vec{u}_b' \cdot \vec{u}_c' = \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c' = 1$; $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_x' \cdot \vec{u}_x' = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = -1$; $\vec{u}_b \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_b' \cdot \vec{u}_x' = \vec{u}_c \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_c' \cdot \vec{u}_y' = 0$. (8)

Выводим непосредственно связи между единичными векторами во временной и пространственной областях (фиг. 2)

$$\vec{u}_{x'} = \vec{O}B' = \vec{O}I + \vec{I}B' = \vec{u}_x \operatorname{ch} \varphi + \vec{u}_y \operatorname{sh} \varphi, \quad (8a)$$

так как $OI = 1 \cdot \operatorname{ch} \varphi$; $IB' = 1 \cdot \operatorname{sh} \varphi$.

$$\vec{u}_y = \vec{u}_{y'} \operatorname{ch} \varphi - \vec{u}_{x'} \operatorname{sh} \varphi \quad (8b)$$

(вращение в противоположную сторону); аналогично

$$\vec{u}_{x''} = \vec{u}_{x'} \operatorname{ch} \varphi + \vec{u}_{y'} \operatorname{sh} \varphi; \quad \vec{u}_{y''} = \vec{u}_{y'} \operatorname{ch} \varphi - \vec{u}_{x'} \operatorname{sh} \varphi. \quad (8c)$$

Следовательно, $\vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_{x'} = \operatorname{ch} \varphi$; $\vec{u}_{y'} \cdot \vec{u}_{y'} = -\operatorname{sh} \varphi$;
 $\vec{u}_{x''} \cdot \vec{u}_{x''} = -\operatorname{ch} \varphi$; $\vec{u}_{y''} \cdot \vec{u}_{y''} = \operatorname{sh} \varphi$ и т.д. (8d)

модуль любого изотропного вектора равен нулю. Напр., изотропным вектором будет $\vec{u}_{x'} + \vec{u}_{x''}$, его модуль $(\vec{u}_{x'} + \vec{u}_{x''}) \cdot (\vec{u}_{x'} + \vec{u}_{x''}) = 1 + 0 - 1 = 0$.

Пусть единичные векторы сторон любого угла будут \vec{u}_1 и \vec{u}_2 , тогда гиперболический косинус угла (\vec{u}_1, \vec{u}_2) между ними выразится в общем случае следующим образом:

$$\operatorname{ch}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{(+\sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1})(+\sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2})}. \quad (9)$$

Если стороны угла содержат и изотропные векторы, то придется пользоваться более общей формулой:

$$\operatorname{ch}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{(+\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}})(+\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}})}. \quad (9a)$$

Возьмём во временной области три оси: t', t'' и t''' , пусть углы между ними $(t', t'') = \varphi$; $(t'', t''') = \varphi$;

тогда $\vec{u}_{t''} = \vec{u}_{t'} \operatorname{ch} \varphi - \vec{u}_{t'''} \operatorname{sh} \varphi$; $\vec{u}_{t'''} = \vec{u}_{t''} \operatorname{ch} \varphi + \vec{u}_{t'''} \operatorname{sh} \varphi$, (10)

откуда

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x' = \text{ch}\varphi \text{ch}\psi + \text{sh}\varphi \text{sh}\psi = \text{ch}(\varphi + \psi); \quad (10a)$$

таким образом, $\widehat{\vec{u}_x, \vec{u}_x'} = \varphi + \psi$, т.е. при сложении углов их меры суммируются.

Возьмем на фиг. 2 угол $\angle C'OB = \varphi + \delta$,

$$\text{ch}(\varphi + \delta) = \text{ch}\varphi \text{ch}\delta + \text{sh}\varphi \text{sh}\delta; \quad (11)$$

с другой стороны, по формуле (9)

$$\text{ch}(\varphi + \delta) = \frac{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x'}{\sqrt{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x'} \sqrt{\vec{u}_x' \cdot \vec{u}_x'}} = \frac{-\text{sh}\varphi}{i} = i \text{sh}\varphi; \quad (12)$$

формулы (11) и (12) совпадают, если принять $\text{ch}\delta = 0$ и $\text{sh}\delta = i$, т.е. $\delta = i \frac{\pi}{2}$.

Чему равняется угол ψ в треугольнике $OE''C'$ (фиг. 2)?

Единичными векторами его сторон будут $-\vec{u}_x''$ и $-\vec{u}_x'$, следовательно, по (9) $\text{ch}(-\vec{u}_x'', -\vec{u}_x') = \frac{\vec{u}_x'' \cdot \vec{u}_x'}{i} = \frac{\text{sh}\varphi}{i} = -i \text{sh}\varphi$.

С другой стороны, $\text{ch}(\delta - \varphi) = \text{ch}\delta \text{ch}\varphi - \text{sh}\delta \text{sh}\varphi = -i \text{sh}\varphi$.

Следовательно, мы вправе считать $\psi = i \frac{\pi}{2} - \varphi$.

При этом вращении для всех углов должно совершиться против часовой стрелки и сумма всех внутренних углов треугольника будет

$$i \frac{\pi}{2} + \varphi + \psi = i\pi.$$

При обратном вращении получилось бы противоположное число $(-i\pi)$. Этот результат общий для всех треугольников; следует также учесть знак угла, стороны которого принадлежат одной области в зависимости от направления вращения.

Исследование прямоугольных треугольников (фиг. 2) OAB , OBG , BAG , BPE и т.д. приведет к такому результату, что два острых угла с взаимно вертикальными сторонами абсолютно равны. Однако псевдоострые углы этих треугольников не всегда равны. Если острый угол φ пространственный, то псевдоострый равен $\delta - \varphi$; при временном остром угле псевдоострый равен $\delta - (-\varphi) = \delta + \varphi$. Два таких неравных псевдоострых угла имеются при вершине G $(\delta + \varphi) + (\delta - \varphi) = 2\delta = i\pi$.

Из (фиг. 2) видно, что $\text{th} \angle AOC = AC : OA = 1$; следовательно, $\angle AOC \rightarrow \infty$, световая линия образует с любой прямой, не параллельной с ней, бесконечно большой угол.

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $a \cdot b \neq 0$, т.е. $\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b = 0$, то

$$\text{ch}(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \quad \text{и} \quad \text{sh}(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pm i \quad (12a)$$

(см. после (4)), откуда $(\vec{a}, \vec{b}) = \pm i \frac{\pi}{2}$, т.е. векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны.

7. Треугольники. Решение общих треугольников - задача объемная. И здесь имеются теоремы, подобные теоремам синуса, косинуса и т.д. евклидовой плоскости. Заниматься этими вопросами в маленькой статье невозможно. Но можно указать на два способа решения любого треугольника: 1) всякий треугольник можно или разложить в сумму прямоугольных, или дополнить до прямоугольного треугольника; это дает возможность для решения данного треугольника; 2) можно использовать векторное исчисление: обозначая стороны треугольника a, b, c как векторы, можем пользоваться векторными соотношениями $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ и т.д.

8. Сложение скоростей. Пусть даны три инерциальные системы 1, 2, 3 с осями времени t', t'', t''' (как было при (10)); углы $(t', t'') = \varphi$; $(t'', t''') = \psi$ и $(t', t''') = \varphi + \psi$; тогда скорость второй системы относительно первой $v_{21} = th \varphi$, скорость третьей относительно второй - $v_{32} = th \psi$ и скорость третьей относительно первой - $v_{31} = th(\varphi + \psi)$, но

$$th(\varphi + \psi) = \frac{th \varphi + th \psi}{1 + th \varphi th \psi},$$

откуда

$$v_{31} = \frac{v_{21} + v_{32}}{1 + v_{21} v_{32}} \quad (12)$$

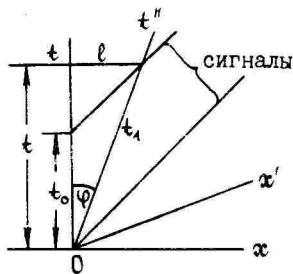
Если вместо светового времени пользоваться любой единицей времени, то

$$v_{31}^* = (v_{21}^* + v_{32}^*) : \left(1 + \frac{v_{21}^* v_{32}^*}{c^2}\right) \quad (13a)$$

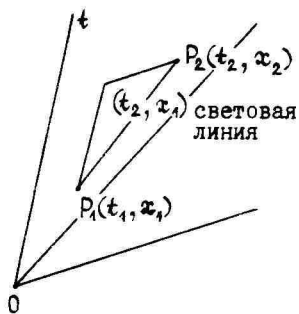
9. Эффект Доплера. Из системы (t, x) в точке $x=0$ выпускают через каждые t_0 единиц времени сигналы в положительном направлении. Через какие-то промежутки времени t_1 эти сигналы принимаются в системе (t', x') , движущейся со скоростью v относительно первой. Скорость движения сигналов в системе (t, x) считаем равной κ (фиг.3).

$$l : t_1 = \kappa t_1 = v : \sqrt{1 - v^2}; \quad t_1 = l \sqrt{1 - v^2} : v;$$

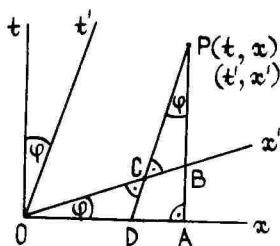
$$l = vt_1 = (t - t_0) \kappa = (l : v - t_0) \kappa,$$



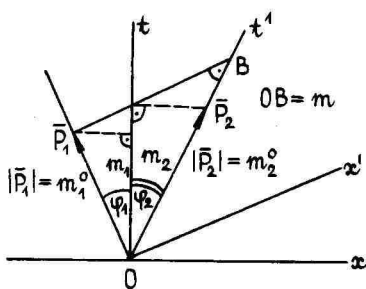
Фиг. 3



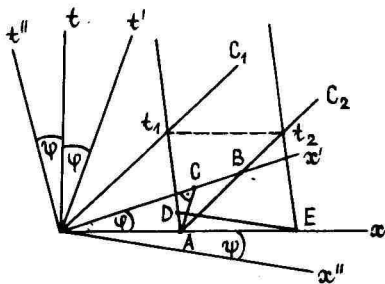
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

откуда

$$l = v \mu t_0 : (\mu - v) \quad (14)$$

и

$$t_1 = \frac{\mu \sqrt{1 - v^2}}{\mu - v} t_0$$

Если имеем световые сигналы, то $\mu = 1$ и

$$t_1 = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} t_0 \quad (14a)$$

10. Координаты и меры. Назовем рассмотренные нами координатные системы прямоугольными декартовыми. Их начальные точки могут быть произвольно расположены на плоскости. Каждая из полученных таким образом координатных систем соответствует некоторой инерциальной системе, т.е. некоторому с постоянной скоростью движущемуся поезду. Возьмем в одной из этих систем (фиг. 4) две точки

$$P_1(t_1, x_1) \quad \text{и} \quad P_2(t_2, x_2);$$

отрезок $P_1 P_2 = |s|$.

Всего возможны три случая:

- 1) $|t_2 - t_1| > |x_2 - x_1|$ - отрезок $P_1 P_2$ - временной /временнoобразный/,
 2) $|t_2 - t_1| = |x_2 - x_1| - P_1 P_2$ - изотропный,
 3) $|t_2 - t_1| < |x_2 - x_1| - P_1 P_2$ - пространственный.

В случае 1)

$$s^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \quad \text{или} \quad s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2, \quad (15)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta x = x_2 - x_1$;

в случае 2) $s^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 0$; (15a)

в случае 3)

$$s^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0 \quad (15b)$$

или

$$s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2.$$

В случае 1) s - промежуток собственного времени точки, для которой отрезок $P_1 P_2$ будет частью мировой линии (s также будет собственным временем инерциальной системы, ось времени которой $\parallel P_1 P_2$); в случае 3) $|s|$ будет длина отрезка $P_1 P_2$. В обоих случаях s является инвариантом (не зависящим от выбора координатной системы). Демонстрация будет дальше дано ниже.

Если $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$; (при временной

мировой линии), то $\Delta^2 = (t_2 - t_1)^2(1 - v^2)$ и $\Delta = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - v^2}$. (16)

Формула (16) показывает замедление времени в движущейся системе.

Если точка движется неравномерно, то её мировая линия будет кривой и конечные разности следует заменить дифференциалами

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \quad (17)$$

Скорость точки

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (18)$$

всегда меньше скорости света, и мировая линия всюду временная: $ds^2 > 0$. Из (17) получим, учтя (18),

$$ds = \sqrt{1 - v^2} dt, \quad (19)$$

и так как на бесконечно малом участке можем считать v постоянной, то по (19) ds есть дифференциал собственного времени движущейся точки на этом отрезке; тогда промежуток собственного времени на конечном участке будет

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - v^2} dt, \quad (20)$$

где скорость v следует считать заданной функцией t . Значения ds и s не зависят от выбора координатной системы (как и Δ в начале этого пункта). В этом смысле ds имеет преимущество перед dt , которая зависит от выбора координатной системы. Производные от инвариантов по s будут также инвариантами. Из (19) видно, что

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = ch \varphi, \quad (21)$$

где φ угол между касательной к мировой линии и осью t .

Пусть \vec{r} — радиус-вектор из начала координат до точки $P(x, t)$ (он инвариант), тогда $\vec{r} = t\vec{u}_t + x\vec{u}_x$. Дифференцируя по собственному времени, имеем

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dt}{ds} \vec{u}_t + \frac{dx}{ds} \vec{u}_x = V; \quad (22)$$

V называется мировой скоростью точки

$$V \cdot V = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 \quad \text{или} \quad |V| = 1 \quad (23)$$

(получается из (17), если разделить на ds^2). Геометрически \vec{V} есть единичный вектор касательной к мировой линии в рассматриваемой точке. Дифференцирование же по t дает

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_t + \frac{dx}{dt} \vec{u}_x = \vec{u}_t + v\vec{u}_x = \vec{u}_t + v. \quad (24)$$

Дифференцируя (22) еще раз, получим

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2t}{ds^2} \vec{u}_t + \frac{d^2x}{ds^2} \vec{u}_x = \vec{W}, \quad (25)$$

где \vec{W} — мировое ускорение. С другой стороны,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x = \vec{a}, \quad (25a)$$

т.е. обыкновенное ускорение.

Из (22) и (25) получим

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad (26)$$

(если $V^2 = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1$, то $\frac{dV^2}{ds} = 2\left(\frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0$),

т.е. $\vec{W} \perp \vec{V}$. Геометрически $|\vec{W}|$ есть кривизна мировой линии в рассматриваемой точке (см. (12a)).

II. Преобразование Лоренца. Это — преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости Минковского с сохранением начала координат (фиг. 5).

$$AP = t; \quad OA = x; \quad CP = t'; \quad OC = x';$$

$$AB = x \operatorname{th} \varphi; \quad BP = t - x \operatorname{th} \varphi;$$

$$t' = BP \operatorname{ch} \varphi = t \operatorname{ch} \varphi - x \operatorname{sh} \varphi; \quad (\operatorname{th} \varphi \operatorname{ch} \varphi = \operatorname{sh} \varphi);$$

$$DA = t \operatorname{th} \varphi; \quad OD = x - t \operatorname{th} \varphi;$$

$$x' = OD \operatorname{ch} \varphi = x \operatorname{ch} \varphi - t \operatorname{sh} \varphi$$

или, заменяя $\operatorname{ch} \varphi$ и $\operatorname{sh} \varphi$ значениями (6), получим

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (27)$$

При обратном преобразовании следует φ заменить на $-\varphi$:

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}; \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (27a)$$

Вычислим $s^2 = t'^2 - x'^2 = \left(\frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}\right)^2 - \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)^2 = t^2 - x^2$,

откуда следует инвариантность s .

Мы дали краткий обзор того, как из евклидовой плоскости

редилась плоскость Минковского и каковы особенности этой плоскости. Это краткое изложение может иногда оказаться недостаточным для применения к решению задач, но есть возможность более основательного изложения. Все же можно сравнить на некоторых примерах два метода, которые назовем геометрическим (изложенный здесь) и физическим.

12. Примеры. Примеры взяты из книг профессора П.Карда, Специальная теория относительности. Тарту, Изд.ТТУ, 1972.

1⁰. Две частицы с массами покоя m_1^0 и m_2^0 движутся на одной прямой навстречу друг другу, причем их массы соответственно равны m_1 и m_2 . Определить массу m первой частицы относительно той инерциальной системы, в которой вторая частица покоится.

Физический метод примерно такой. Из заданных масс можем вычислить скорости обеих частиц по известной формуле; $m = m_0 \cdot \sqrt{1 - v^2}$; далее находим по известной формуле (13) относительную скорость второй частицы, откуда можно найти массу m . Затем следует результат преобразовать к нужной форме. Всего четыре этапа.

В геометрическом методе сделаем набросок (фиг.6) как всегда при задачах геометрии. Пусть $\vec{P}_1 = m_1^0 \vec{V}_1$ и $\vec{P}_2 = m_2^0 \vec{V}_2$ - векторы массы - импульса обеих частиц. Их проекции на ось t будут массы m_1 и m_2 .

Следовательно, можем вычислить $\operatorname{sh} \varphi_1 = m_1 : m_1^0$ и $\operatorname{sh} \varphi_2 = m_2 : m_2^0$. В системе (t', x') вторая частица покоится. Для нахождения массы m придется OP_1 спроектировать ортогонально на ось t' (т.е. из точки P_1 провести параллель к оси x'). Отрезок $OB = m$. Из $\triangle OP_1B$ найдём $OB = m_1^0 \operatorname{ch}(\varphi_1 + \varphi_2) = m$. Это и есть ответ, данный автором. Для получения ответа не понадобилось каких - либо вычислений, он просто дается на фигуре.

2⁰. Вывести с помощью преобразований Лоренца формулу преобразования расстояния между движущимися один вслед другому фотонах (фиг.7).

Мировые линии фотонов - световые линии C_1 и C_2 . В системе (t, x) расстояние между ними $OA = l$, а в системе (t', x') - $OB = k$;

$$OC = OA \operatorname{ch} \varphi; \quad CB = AC = OA \operatorname{sh} \varphi;$$

следовательно,

$$k = l(\operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi) = l \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = l \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}}$$

Преобразования Лоренца не понадобятся.

3°. Два фотона движутся как в предыдущем примере. Навстречу им движутся со скоростью v двое часов, синхронных в системе собственного покоя. Расстояние между часами тоже равно l . Передние часы, встречаясь с задним фотоном, показывают t_1 , задние часы, встречаясь с передним фотоном, показывают t_2 . Найти разность $t_2 - t_1$. В системе (t, x) (фиг.7) эти встречи совершаются одновременно (вследствие равных расстояний l). В их собственной системе изохроны параллельны оси x' разность показаний измеряется отрезком $AD = AE \operatorname{sh} \psi$ или $t_2 - t_1 = vl : \sqrt{1 - v^2}$.

Die Minkowskische Ebene

O. Silde, A. Haitin

Resümee

Die Grundsätze der Minkowskischen Ebene werden vom Zeit-Raum-Diagramm bei Berücksichtigung der Grundpostulaten der speziellen Relativitätstheorie abgeleitet. Die Beispiele zeigen den Vorzug der geometrischen Methode bei Lösung der Aufgaben der speziellen Relativitätstheorie.

СОДЕРЖАНИЕ

Ю.Лепик, Ю.Лумисте, К 300-летию выхода трактата И.Ньютона "Математические начала естествознания"	3
Ю.Лепик, Анализ послекритической стадии балок, потерявших устойчивость за пределом упругости	9
Я.Леллеп, С.Ханнус, Оптимизация расположения дополнительных опор к пластической цилиндрической оболочке	21
Я.Леллеп, Ю.Маяк, Оптимизация жёсткопластических геометрически нелинейных цилиндрических оболочек	27
Я.Леллеп, Х.Хейн, Большие прогибы жесткопластических пологих сферических оболочек	37

К.Хейн, М.Хейнлоо, Автоматизированный расчет оптимальной непрерывной неоднородности цилиндрических труб и круглых дисков, равнопрочных относительно условия пластичности Мизеса	52
Т.Лепикулт, Автоматизированный расчет динамики жесткопластических цилиндрических оболочек	62
Г.Оленев, Оптимальное расположение дополнительной опоры к жёсткопластической балке при динамическом нагружении	80
Г.Оленев, Применение алгоритма Удзавы к решению задачи изгиба упругопластической пологой оболочки	89
Ю.Кирс, Оптимальное проектирование круглых упрочняющихся пластин, заделанных по краю	97
Х.Рельвик, О некоторых уравнениях аналитической механики и вариационного исчисления	121
Л.Ильина, И.Моисеева, Б.Ясулович, К реализации одного алгоритма решения частотного уравнения на ЭВМ типа СМ	136
О.Сильде, А.Хайтин, Плоскость Минковского	140

CONTENTS

Ü.Lepik, Analysis of the postcritical stage of rigid-plastic beams	20
J.Lellep, S.Hannus, Optimization of the location of additional supports for a plastic cylindrical shell	26
J.Lellep, J.Majak, Optimization of geometrically nonlinear rigid-plastic cylindrical shells	36
J.Lellep, H.Hein, Large deflections of rigid-plastic shallow spherical shells	51
K.Hein, M.Heinloo, Automatic calculation of the optimal non-homogeneity for cylindrical tubes and circular disks of uniform strength with regard to Mises yield condition	61
T.Lepikult, Automatic calculation for dynamic bending of rigid-plastic cylindrical shells	79
G.Olenev, Optimal location of the additional support for a rigid-plastic beam under dynamic loading.	87

G.Olenev, Application of Udzawa algorithm to the solution of problem of bending of elastic-plastic shallow shells	96
J.Kirs, Optimal design of built-in circular plates, considering the hardening of material	120
H.Relvik, About some equations of analytical mechanics and calculation of variations	135
L.Iljina, I.Moisseejeva, B.Jasulovich, On the realization of an algorithm for solving a frequency equation on CM-type computers	139
O.Silde, A.Haitin, Die Minkowskische Ebene	158