Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

**Jaan Kristjan Kaasik**

# Ligilähedase keskpunkti omadusega meetrilise ruumi Lipschitzi-vaba ruum

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Andre Ostrak

Tartu 2020

# Ligilähedase keskpunkti omadusega meetrilise ruumi Lipschitzi-vaba ruum

Bakalaureusetöö
Jaan Kristjan Kaasik

**Lühikokkuvõte.** Bakalaureusetöös tõestatakse, et kui meetrilise ruumi $\mathbb{R}^m$ alamruumil $M$ on ligilähedase keskpunkti omadus, siis Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on lokaalselt peaaegu ruudu omadusega.

**CERCS teaduseriala:** P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
**Märksõnad:** funktsionaalanalüüs, Banachi ruumid, meetrilised ruumid, normeeritud ruumid, mittelineaarsed operaatorid.

# Lipschitz-free spaces over length metric spaces

Bachelor's thesis
Jaan Kristjan Kaasik

**Abstract.** In this bachelor's thesis, we prove that if a subspace $M$ of metric space $\mathbb{R}^m$ is a length space, then the Lipschitz-free space $\mathcal{F}(M)$ is locally almost square.

**CERCS research specialisation:** P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
**Keywords:** functional analysis, Banach spaces, metric spaces, normed spaces, non-linear operators.

# Sisukord

**Sissejuhatus** **4**

**1 Vajalikud eelteadmised** **6**

1.1 Lipschitzi ruum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
1.2 Lipschitzi-vaba ruum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
1.3 Ligilähedase keskpunkti omadusega meetriline ruum . . . . . . 9
1.4 Lokaalne peaaegu ruudu omadus . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

**2 Põhitulemus** **16**

**Kasutatud kirjandus** **22**

# Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on funktsionaalanalüüsi valdkonda kuuluv teaduslik uurimus Lipschitzi-vabade ruumide kirjeldamisega tegelevast aktiivsest ja populaarsest harust.

Iga Lipschitzi-vaba ruum on Banachi ruum, mille aluseks on mingi meetriline ruum. Meetriliste ruumide vahel tegutsev Lipschitzi funktsioon on jätkatav pidevaks lineaarseks operaatoriks vastavate Lipschitzi-vabade ruumide vahel, kusjuures nii, et jätku norm on täpselt algse kujutuse Lipschitzi konstant. See võimaldab (mittelineaarse) Lipschitzi funktsiooni asemel vaadelda (tavaliselt lihtsamat) lineaarset funktsiooni, mis tegutseb (tavaliselt keerukamate) Lipschitzi-vabade ruumide vahel.

Lipschitzi-vabad ruumid on rahuldavalt kirjeldatud küllaltki vähestel juhtudel. On teada, et ruumile $\mathbb{R}$ vastav Lipschitzi-vaba ruum on klassikaline Banachi ruum $L_1(\mathbb{R})$, kuid ühest suurema naturaalarvu $m$ korral ei ole teada ruumile $\mathbb{R}^m$ vastava Lipschitzi-vaba ruumi rahuldavat kirjeldust.

Hiljutises teadusartiklis [GPR] on näidatud, et Lipschitzi-vabal ruumil on (tuntud) Daugaveti omadus parajasti siis, kui vastaval meetrilisel ruumil on ligilähedase keskpunkti omadus. Viimast omadust uuritakse ka käesolevas bakalaureusetöös. Töö põhitulemus ütleb, et ruumi $\mathbb{R}^m$ kinnisele ja kumerale (s.t täielikule ligilähedase keskpunkti omadusega) meetrilisele alamruumile vastav Lipschitzi-vaba ruum on lokaalselt peaaegu ruudu omadusega. Uuringute laiem siht on kirjeldada Lipschitzi-vabades ruumides Daugaveti omadusele lähedasi omadusi aluseks oleva meetrilise ruumi terminites.

Bakalaureusetöö koosneb kahest peatükist. Esimeses peatükis antakse vajalikud spetsiifilised mõisted ja tulemused bakalureusetöö teises peatükis esitatud põhitulemuse ja selle tõestuse jaoks. Töös kasutatud üldised funktsionaalanalüüsi-alased teadmised on tuttavad ,,Funktsionaalanalüüs I“ loengukursusest ja leitavad ka Ojade õpikust [OO].

Bakalaureusetöös vaatleme ainult reaalseid normeeritud ruume. Töös kasutatud tähistused on standardsed. Ruumis $\mathbb{R}^m$ tähistame punktide $p$ ja $q$ vahelist lõiku $[p, q]$. Meetrilises ruumis tähistame sümboliga $B(a, r)$ lahtist kera keskpunktiga $a$ ja raadiusega $r$. Kui $X$ on mingi hulk ja $A$ tema alamhulk, siis hulga $A$ karakteristlik funktsioon on $\chi : X \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Olgu $X$ normeeritud ruum. Ruumi $X$ kinnist ühikkera, ühiksfääri ja kaasruumi tähistame vastavalt $B_X$, $S_X$ ja $X^*$. Kui $x \in X$, siis leidub $f \in B_{X^*}$ nii, et $f(x) = \|x\|$ (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest). Öeldakse, et normeeritud ruumid $X$ ja $Y$ on isomeetriliselt isomorfsed, kui leidub lineaarne sürjektiivne kujutus $T\colon X \to Y$ nii, et iga $x \in X$ korral $\|Tx\| = \|x\|$. Vastavat kujutust $T$ nimetatakse isomeetriliseks isomorfismiks.

# 1 Vajalikud eelteadmised

Käesolevas peatükis anname vajalikud spetsiifilised mõisted ja tulemused bakalureusetöö teises peatükis esitatud põhitulemuse jaoks. Esimeses kahes alapunktis vaadeldud Lipschitzi ja Lipschitzi-vabade ruumide teooria on laiemalt tuntud, seega esitame kasutatavad tulemused tõestuseta, detailsema käsitluse leiab näiteks allikatest [N], [O] ja [W].

## 1.1 Lipschitzi ruum

**Definitsioon 1.1.** Olgu $(X, d_X)$ ja $(Y, d_Y)$ meetrilised ruumid ning $f\colon X \to Y$. Öeldakse, et kujutus $f$ rahuldab *Lipschitzi tingimust*, kui leidub $L \geq 0$ nii, et iga $p, q \in X$ korral

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L\, d_X(p, q).$$

Vähimat sellist arvu $L$ tähistatakse $\mathrm{Lip}(f)$.

**Definitsioon 1.2.** Meetrilist ruumi koos selles fikseeritud elemendiga nimetatakse *nullpunktiga meetriliseks ruumiks*. Fikseeritud elementi nimetatakse *nullpunktiks* ja tähistatakse sümboliga 0.

Olgu $M$ nullpunktiga meetriline ruum. Tähistame sümboliga $\mathrm{Lip}_0(M)$ kõigi selliste Lipschitzi tingimust rahuldavate kujutuste $f\colon M \to \mathbb{R}$ hulka, mille korral $f(0) = 0$. On teada, et $\mathrm{Lip}_0(M)$ on Banachi ruum punktiviisi defineeritud vektorruumi tehete ja normi $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f)$ suhtes.

**Lause 1.3** (vt nt [O, laused 1.3 ja 1.4])**.** *Hulk* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *on vektorruum üle reaalarvude korpuse punktiviisi defineeritud tehete suhtes ja Banachi ruum normiga*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f).$$

On teada (vt nt [O, lk 8]), et ruum $\mathrm{Lip}_0(M)$ ei sõltu tegelikult meetrilises ruumis $M$ nullpunkti valikust. Täpsemalt, kui esialgse nullpunkti 0 asemel lugeda meetrilise ruumi $M$ uueks nullpunktiks element $0'$ ja $\mathrm{Lip}_{0'}(M)$ on vastav Lipschitzi ruum, siis $\mathrm{Lip}_0(M)$ ja $\mathrm{Lip}_{0'}(M)$ on isomeetriliselt isomorfsed. Vastav isomeetriline isomorfism on $T\colon \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathrm{Lip}_{0'}(M)$,

$$(Tf)(p) = f(p) - f(0'), \qquad f \in \mathrm{Lip}_0(M),\ p \in M.$$

## 1.2 Lipschitzi-vaba ruum

Olgu $M$ meetriline ruum.

**Definitsioon 1.4.** Öeldakse, et funktsioon $m\colon M \to \mathbb{R}$ on *molekul*, kui tema kandja $\{p \in M\colon m(p) \neq 0\}$ on lõplik ja $\sum\limits_{p\in M} m(p) = 0$.

Tähistame kõikide selliste molekulide hulka $\mathcal{M}(M)$.

**Lause 1.5** (vt nt [O, lause 1.6])**.** *Hulk $\mathcal{M}(M)$ on vektorruum üle reaalarvude korpuse punktiviisi defineeritud tehete suhtes.*

On teada (vt nt [O, lk 9–10]), et iga molekuli $m \in \mathcal{M}(M)$ saab esitada kujul

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m_{p_i,q_i},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $p_i, q_i \in M$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ja molekul

$$m_{p_i,q_i} = \chi_{\{p_i\}} - \chi_{\{q_i\}}.$$

**Lause 1.6** (vt nt [O, laused 1.7 ja 1.8])**.** *Kujutus $\|\cdot\|_{AE}\colon \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}$,*

$$\|m\|_{AE} = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\, d(p_i,q_i)\colon m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m_{p_i,q_i} \right\},$$

*kus infiimum on võetud üle molekuli $m$ kõikide esituste, on norm vektorruumil $\mathcal{M}(M)$.*

**Definitsioon 1.7.** Normeeritud ruumi $\mathcal{M}(M)$ täieldit $\mathcal{F}(M)$ nimetatakse *Lipschitzi-vabaks ruumiks.*

**Teoreem 1.8** (vt nt [W, teoreem 3.3])**.** *Olgu $M$ nullpunktiga meetriline ruum. Banachi ruumid $\mathcal{F}(M)^*$ ja $\mathrm{Lip}_0(M)$ on isomeetriliselt isomorfsed. Vastav isomeetriline isomorfism on $T\colon\ \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathcal{F}(M)^*$,*

$$(Tf)(m_{p,q}) = f(p) - f(q), \qquad f \in \mathrm{Lip}_0(M),\ p,q \in M.$$

**Lause 1.9** (vt nt [O, lause 1.12])**.** *Iga $p,q \in M$ korral*

$$\|m_{p,q}\| = d(p,q).$$

**Teoreem 1.10** (vt nt [GPR, lk 3])**.** *Olgu $M$ meetriline ruum ja $A$ tema kõikjal tihe alamruum. Banachi ruumid $\mathcal{F}(M)$ ja $\mathcal{F}(A)$ on isomeetriliselt isomorfsed.*

**Järeldus 1.11.** *Kui $M$ on meetriline ruum ja $\widehat{M}$ tema täield, siis Banachi ruumid $\mathcal{F}(M)$ ja $\mathcal{F}(\widehat{M})$ on isomeetriliselt isomorfsed.*

**Teoreem 1.12** (McShane'i jätkamisteoreem, vt nt [W, teoreem 1.33])**.** *Olgu $M$ meetriline ruum, $M'$ tema alamruum ja $f' \colon M' \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon. Leidub funktsiooni $f'$ jätk $f \colon M \to \mathbb{R}$ nii, et* $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(f')$.

## 1.3 Ligilähedase keskpunkti omadusega meetriline ruum

**Definitsioon 1.13** (vt nt [GPR, definitsioon 3.1 ja lemma 3.2], [BH, lk 32])**.** Öeldakse, et meetrilisel ruumil $M$ on *ligilähedase keskpunkti omadus* (ingl. k *length space*), kui iga $p, q \in M$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $u \in M$ nii, et

$$\max\bigl\{d(p,u), d(u,q)\bigr\} < \frac{d(p,q)}{2} + \varepsilon.$$

Olgu $m \in \mathbb{N}$. Meetrilise ruumi $\mathbb{R}^m$ tavalist kaugust tähistame sümboliga $d$, s.t iga $p, q \in \mathbb{R}^m$ korral

$$d(p,q) = |p - q|,$$

kus $|\cdot|$ on moodul.

Olgu edaspidi $M$ meetrilise ruumi $\mathbb{R}^m$ alamruum.

**Lemma 1.14.** *Kui meetrilisel ruumil $M$ on ligilähedase keskpunkti omadus, siis iga $p, q \in M$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $u \in M$ nii, et*

$$d\Bigl(\frac{p+q}{2}, u\Bigr) < \varepsilon.$$

Lemma 1.14 tõestamisel kasutame järgmist teoreemi.

**Teoreem 1.15** (Apolloniose teoreem, vt nt [AAK, lk 16] )**.** *Olgu $A, B, C, D$ tasandi punktid, kusjuures $D$ on punktide $B$ ja $C$ vaheline keskpunkt. Kehtib võrdus*

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2\bigl(|AD|^2 + |BD|^2\bigr).$$

*Seega*

$$4\,|AD|^2 = 2\,|AB|^2 + 2\,|AC|^2 - |BC|^2.$$

**Märkus.** Apolloniose teoreem on erijuht skalaarkorrutisega ruumis kehtivast rööpküliku võrdusest (vt nt [OO, lk 235]): skalaarkorrutisega ruumi $X$ korral kehtib iga $x, y \in X$ korral võrdus

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr),$$

seega iga $x, y, z \in X$ korral (võttes eelnevas võrduses $x = \frac{x+y}{2} - z$ ja $y = \frac{x-y}{2}$) kehtib võrdus

$$\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 = 2\Bigl(\Bigl\|\frac{x+y}{2} - z\Bigr\|^2 + \Bigl\|\frac{x-y}{2}\Bigr\|^2\Bigr).$$

*Lemma 1.14 tõestus.* Eeldame, et meetrilisel ruumil $M$ on ligilähedase keskpunkti omadus. Olgu $p, q \in M$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu

$$\delta = \sqrt{\frac{d(p,q)^2}{4} + \varepsilon^2} - \frac{d(p,q)}{2}.$$

Eelduse kohaselt leidub $u \in M$ nii, et

$$\max\big\{d(p,u), d(u,q)\big\} < \frac{d(p,q)}{2} + \delta = \sqrt{\frac{d(p,q)^2}{4} + \varepsilon^2}.$$

Apolloniose teoreemi põhjal

$$\begin{aligned} 4\,d\Big(\frac{p+q}{2}, u\Big)^2 &= 2\,d(p,u)^2 + 2\,d(u,q)^2 - d(p,q)^2 \\ &< 2\left(\frac{d(p,q)^2}{4} + \varepsilon^2\right) + 2\left(\frac{d(p,q)^2}{4} + \varepsilon^2\right) - d(p,q)^2 \\ &= 4\varepsilon^2, \end{aligned}$$

järelikult

$$d\Big(\frac{p+q}{2}, u\Big) < \varepsilon.$$

□

**Lause 1.16.** *Kui meetrilisel ruumil $M$ on ligilähedase keskpunkti omadus, siis iga $p, q \in M$, $u \in [p,q]$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $v \in M$ nii, et*

$$d(u,v) < \varepsilon.$$

*Tõestus.* Eeldame, et meetrilise ruumil $M$ on ligilähedase keskpunkti omadus. Olgu $p, q \in M$, $\varepsilon > 0$ ja $u \in [p,q]$.

Näitame esiteks, et iga $k \in \mathbb{N}$ ja iga $l \in \{0, \ldots, 2^k\}$ korral leidub $u_{\frac{l}{2^k}} \in M$ nii, et

$$d\left(u_{\frac{l}{2^k}}, \frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q\right) < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j}.$$

Ilmselt võime võtta $u_1 = p$, $u_0 = q$. Lemma 1.14 põhjal leidub $u_{\frac{1}{2}} \in M$ nii, et

$$d\Big(u_{\frac{1}{2}}, \frac{p+q}{2}\Big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Eeldame, et leiduvad punktid $u_0, u_{\frac{1}{2^k}}, \ldots, u_{\frac{2^k-1}{2^k}}, u_1 \in M$ nii, et iga $l \in \{0, \ldots, 2^k\}$ korral

$$d\left(u_{\frac{l}{2^k}}, \frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q\right) < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j}.$$

Lemma 1.14 põhjal leidub iga $l \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ korral $u_{\frac{2l+1}{2^{k+1}}} \in M$ nii, et

$$d\Bigg(u_{\frac{2l+1}{2^{k+1}}}, \frac{u_{\frac{l}{2^k}} + u_{\frac{l+1}{2^k}}}{2}\Bigg) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^k}.$$

Eelduse põhjal

$$\begin{aligned}
&d\Bigg(\frac{u_{\frac{l}{2^k}} + u_{\frac{l+1}{2^k}}}{2}, \frac{2l+1}{2^{k+1}}p + \Big(1 - \frac{2l+1}{2^{k+1}}\Big)q\Bigg) \\
&\quad = \left|\frac{u_{\frac{l}{2^k}}}{2} + \frac{u_{\frac{l+1}{2^k}}}{2} - \frac{2l+1}{2^{k+1}}p - \left(1 - \frac{2l+1}{2^{k+1}}\right)q\right| \\
&\quad = \left|\frac{u_{\frac{l}{2^k}}}{2} + \frac{u_{\frac{l+1}{2^k}}}{2} - \frac{1}{2}\frac{l}{2^k}p - \frac{1}{2}\frac{l+1}{2^k}p - \frac{1}{2}\frac{2^k - l}{2^k}q - \frac{1}{2}\frac{2^k - l - 1}{2^k}q\right| \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\left|u_{\frac{l}{2^k}} - \frac{l}{2^k}p - \frac{2^k - l}{2^k}q\right| + \frac{1}{2}\left|u_{\frac{l+1}{2^k}} - \frac{l+1}{2^k}p - \frac{2^k - l - 1}{2^k}q\right| \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[d\Big(u_{\frac{l}{2^k}}, \frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q\Big) + d\Big(u_{\frac{l+1}{2^k}}, \frac{l+1}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l+1}{2^k}\Big)q\Big)\right] \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j}.
\end{aligned}$$

Seega iga $l \in \{0, \ldots, 2^{k+1}\}$ korral

$$d\Big(u_{\frac{l}{2^{k+1}}}, \frac{l}{2^{k+1}}p + \Big(1 - \frac{l}{2^{k+1}}\Big)q\Big) < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j}.$$

Oleme näidanud, et iga $k \in \mathbb{N}$ ja iga $l \in \{0, \ldots, 2^k\}$ korral leidub $u_{\frac{l}{2^k}} \in M$ nii, et

$$d\Big(u_{\frac{l}{2^k}}, \frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q\Big) < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j}.$$

Kuna $u \in [p, q]$, siis leiduvad $k \in \mathbb{N}$ ja $l \in \{0, \ldots, 2^k\}$ nii, et

$$d\Big(u, \frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q\Big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eelneva põhjal leidub $u_{\frac{l}{2^k}} \in M$ nii, et

$$d\Big(u_{\frac{l}{2^k}}, \frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q\Big) \leq \frac{\varepsilon}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Võttes $v = u_{\frac{l}{2^k}}$, saame

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq d\Big(u, \frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q\Big) + d\Big(\frac{l}{2^k}p + \Big(1 - \frac{l}{2^k}\Big)q, v\Big) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Järeldus 1.17.** *Olgu $M$ ligilähedase keskpunkti omadusega täielik meetriline ruum. Iga $p, q \in M$ korral $[p,q] \subset M$, s.t $M$ on kumer.*

*Tõestus.* Olgu $p, q \in M$ ja $u \in [p,q]$. Eelneva lause põhjal leidub iga $n \in \mathbb{N}$ korral $v_n \in M$ nii, et

$$d(u, v_n) < \frac{1}{n}.$$

Järelikult $v_n \to u$. Kuna $M$ on täielik, siis $u \in M$. □

**Lause 1.18.** *Kui meetrilise ruumi kõikjal tihedal alamruumil on ligilähedase keskpunkti omadus, siis meetrilisel ruumil on ligilähedase keskpunkti omadus.*

*Tõestus.* Olgu meetrilisel ruumi $M$ kõikjal tihedal alamruumil $A$ ligilähedase keskpunkti omadus. Näitame, et meetrilisel ruumil $M$ on ligilähedase keskpunkti omadus. Olgu $p, q \in M$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna $A$ on ruumis $M$ kõikjal tihe, siis leiduvad $u, v \in A$ nii, et

$$d(p,u) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ja

$$d(q,v) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alamruumis $A$ saame ligilähedase keskpunkti omadusega leida $w \in A$ nii, et

$$\max\big\{d(u,w), d(w,v)\big\} < \frac{d(u,v)}{2} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} d(p,w) &\leq d(p,u) + d(u,w) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{d(u,v)}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{d(u,p)}{2} + \frac{d(p,q)}{2} + \frac{d(q,v)}{2} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{d(p,q)}{2} + \frac{\varepsilon}{6} \\ &= \frac{d(p,q)}{2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Analoogiliselt saame, et

$$d(q, w) < \frac{d(p, q)}{2} + \varepsilon.$$

Järelikult

$$\max\big\{d(p, w), d(w, q)\big\} < \frac{d(p, q)}{2} + \varepsilon.$$

□

**Järeldus 1.19.** *Kui meetrilisel ruumil on ligilähedase keskpunkti omadus, siis tema täieldil on ligilähedase keskpunkti omadus.*

**Lemma 1.20.** *Iga $x \in S_{\mathcal{F}(M)}$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, m_{p_i, q_i} \in B_{\mathcal{M}(M)}$ nii, et $\|x - z\| < \varepsilon$ ja*

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, d(p_i, q_i) = 1$$

*ning erinevate indeksite $i$ ja $j$ korral on lõikudel $[p_i, q_i]$ ja $[p_j, q_j]$ ülimalt üks ühine punkt.*

*Tõestus.* Olgu $0 < \delta < 1$ selline, et

$$\delta + \frac{\delta}{1 - \delta} < \varepsilon.$$

Lipschitzi-vaba ruumi ja molekulide ruumi normi definitsiooni kohaselt leidub $y = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \, m_{u_j, v_j} \in \mathcal{M}(M)$ nii, et $\|y\| < 1$, $\|x - y\| \leq \delta$ ja

$$\sum_{j=1}^{N} |\gamma_j| \, d(u_j, v_j) \leq 1.$$

Olgu

$$z = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \, m_{u_j, v_j}, \tag{1}$$

kus iga $j \in \{1, \ldots, N\}$ korral

$$\beta_j = \frac{\gamma_j}{\sum_{j=1}^{N} |\gamma_j| \, d(u_j, v_j)}.$$

Paneme tähele, et

$$1 - \delta < \|y\| < \sum_{j=1}^{N} |\gamma_j| \, d(u_j, v_j) \leq 1,$$

seega

$$\|y - z\| = \left\|y - \frac{y}{\sum_{j=1}^{N} |\gamma_j|\, d(u_j, v_j)}\right\| \leq \|y\| \left|1 - \frac{1}{1-\delta}\right| \leq \frac{\delta}{1-\delta},$$

mistõttu

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \leq \delta + \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon.$$

Näitame, et elemendil $z$ leidub sobiv esitus. Lähtume tema definitsioonist (1). Kui $N = 1$, siis on sobiv esitus leitud. Vaatleme edasises ainult juhtu $N = 2$, juhul $N > 2$ on sobiva esituse konstrueerimise põhiidee sama. Kui lõikudel $[u_1, v_1]$ ja $[u_2, v_2]$ on ülimalt üks lõikepunkt, siis vaadeldav esitus on sobiv. Eeldame, et lõikudel $[u_1, v_1]$ ja $[u_2, v_2]$ on rohkem kui üks lõikepunkt. Siis on $[u_1, v_1] \cap [u_2, v_2]$ lõik. Olgu $[p, q] = [u_1, v_1] \cap [u_2, v_2]$ selline, et

$$0 = d(u_1, u_1) \leq d(u_1, p) < d(u_1, q) \leq d(u_1, v_1).$$

Vajadusel vahetades omavahel $u_2$ ja $v_2$ ning arvestades, et

$$z = \beta_1\, m_{u_1,v_1} + (-\beta_2)\, m_{v_2,u_2},$$

kehtigu ka

$$0 = d(u_2, u_2) \leq d(u_2, p) < d(u_2, q) \leq d(u_2, v_2).$$

Paneme tähele, et sobiv esitus on

$$z = \beta_1\, m_{u_1,p} + \beta_1\, m_{q,v_1} + (\beta_1 + \beta_2)\, m_{p,q} + \beta_2\, m_{u_2,p} + \beta_2\, m_{q,v_2},$$

sest

$$\begin{aligned}
\beta_1\, m_{u_1,p} + \beta_1\, m_{p,q} + \beta_1\, m_{q,v_1} &= \beta_1(m_{u_1,p} + m_{p,q} + m_{q,v_1}) \\
&= \beta_1(\chi_{\{u_1\}} - \chi_{\{p\}} + \chi_{\{p\}} - \chi_{\{q\}} + \chi_{\{q\}} - \chi_{\{v_1\}}) \\
&= \beta_1(\chi_{\{u_1\}} - \chi_{\{v_1\}}) \\
&= \beta_1\, m_{u_1,v_1}
\end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$\beta_2\, m_{u_2,p} + \beta_2\, m_{p,q} + \beta_2\, m_{q,v_2} = \beta_2\, m_{u_2,v_2}.$$

Kuna

$$d(u_1, v_1) = d(u_1, p) + d(p, q) + d(q, v_1)$$

ja

$$d(u_2, v_2) = d(u_2, p) + d(p, q) + d(q, v_2),$$

siis

$$\begin{aligned}
&|\beta_1| \big(d(u_1, p) + d(p, q) + d(q, v_1)\big) + |\beta_2| \big(d(u_2, p) + d(p, q) + d(q, v_2)\big) \\
&\quad = |\beta_1|\, d(u_1, v_1) + |\beta_2|\, d(u_2, v_2) = 1.
\end{aligned}$$

Sellega on lemma tõestatud. □

## 1.4 Lokaalne peaaegu ruudu omadus

**Definitsioon 1.21** (vt nt [ALL, definitsioon 1.1, lause 2.1])**.** Öeldakse, et Banachi ruum $X$ on

1) *lokaalselt peaaegu ruudu omadusega* (*LASQ*, ingl. k *locally almost square*), kui iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et $\|x \pm y\| \leq 1 + \varepsilon$;

2) *peaaegu ruudu omadusega* (*ASQ*, ingl. k *almost square*), kui iga $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\|x_i \pm y\| \leq 1 + \varepsilon$.

Kui Banachi ruum on ASQ, siis ilmselt on ta ka LASQ. Vastupidine implikatsioon üldiselt ei kehti, näiteks $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$ on LASQ, kuid ei ole ASQ (vt nt teoreem 2.1, [ALL] lemma 5.5).

# 2 Põhitulemus

Selles peatükis sõnastame ja tõestame bakalaureusetöö põhitulemuse.

**Teoreem 2.1.** *Olgu $M$ meetrilise ruumi $\mathbb{R}^m$ alamruum. Kui ruumil $M$ on ligilähedase keskpunkti omadus, siis $\mathcal{F}(M)$ on LASQ.*

*Tõestus.* Olgu meetrilisel ruumil $M$ ligilähedase keskpunkti omadus. Teoreemi 1.10 ja järelduste 1.11 ning 1.19 põhjal, minnes vajadusel üle $M$ täieldile, võime eeldada, et $M$ on täielik. Olgu $x \in S_{\mathcal{F}(M)}$ ja $\varepsilon > 0$. Lemma 1.20 põhjal leidub $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, m_{p_i,q_i} \in B_{\mathcal{M}(M)}$ nii, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, $\|x - z\| < \varepsilon$ ja

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i\, d(p_i, q_i) = 1$$

ning erinevate indeksite $i$ ja $j$ korral on lõikudel $[p_i, q_i]$ ja $[p_j, q_j]$ ülimalt üks ühine punkt.

Fikseerime ruumis $M$ nullelemendi $0 = p_1$. Piisab näidata, et leidub $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, y_i \in S_{\mathcal{F}(M)}$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\|m_{p_i,q_i} \pm y_i\| \le d(p_i, q_i),$$

sest sel juhul

$$\big\|z \pm y\big\| \le \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \|m_{p_i,q_i} \pm y_i\| \le \sum_{i=1}^n \alpha_i\, d(p_i, q_i) = 1,$$

mistõttu

$$\|x \pm y\| \le \|x - z\| + \|z \pm y\| \le 1 + \varepsilon.$$

Tähistame

$$A = \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{q_1, \dots, q_n\} \cup \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \big([p_i, q_i] \cap [p_j, q_j]\big)$$

ning $B \subset M$ ja $r > 0$ korral

$$U(B, r) = \{p \in M \colon d(p, B) < r\},$$

kus

$$d(p, B) = \inf\{d(p, q) : q \in B\}.$$

Valime $s > 0$ nii, et kui $[p_i, q_i] \cap [p_j, q_j] = \emptyset$, siis

$$U\big([p_i, q_i], s\big) \cap U\big([p_j, q_j], s\big) = \emptyset$$

ja erinevate $u, v \in A$ korral $d(u,v) > 2s$.

Leiame $0 < r < s$ nii, et erinevate $i, j \in \{1, \dots, n\}$ korral

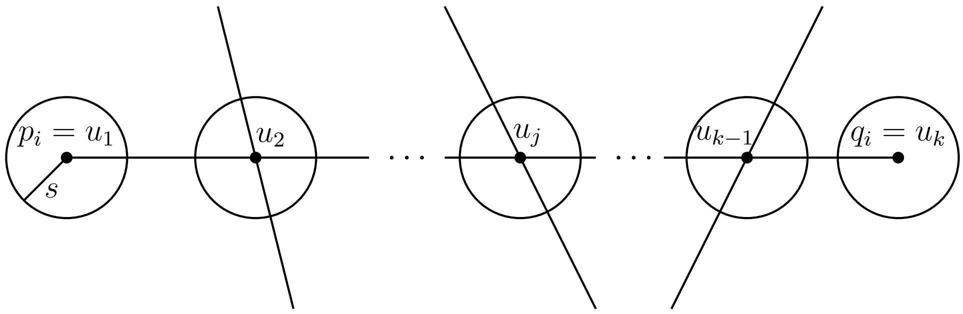
$$\operatorname{diam}\Big(U\big([p_i, q_i], r\big) \cap U\big([p_j, q_j], r\big)\Big) < s.$$

Sel juhul

$$\Big(U\big([p_i, q_i], r\big) \cap U\big([p_j, q_j], r\big)\Big) \setminus B = \emptyset,$$

kus $B = \bigcup_{a \in A} B(a, s)$.

Fikseerime $i \in \{1, \dots, n\}$. Olgu $[p_i, q_i] \cap A = \{u_1, \dots, u_k\}$, kusjuures $u_1 = p_i$, $u_k = q_i$ ja $d(p_i, u_1) < \dots < d(p_i, u_k)$ (vt joonis 1).




Joonis 1: Punktide $u_1, \dots, u_k$ valik.

Olgu $K \in \mathbb{N}$ selline, et iga $j \in \{1, \dots, k\}$ korral

$$d(u_j, u_{j+1}) - 2s \leq Kr.$$

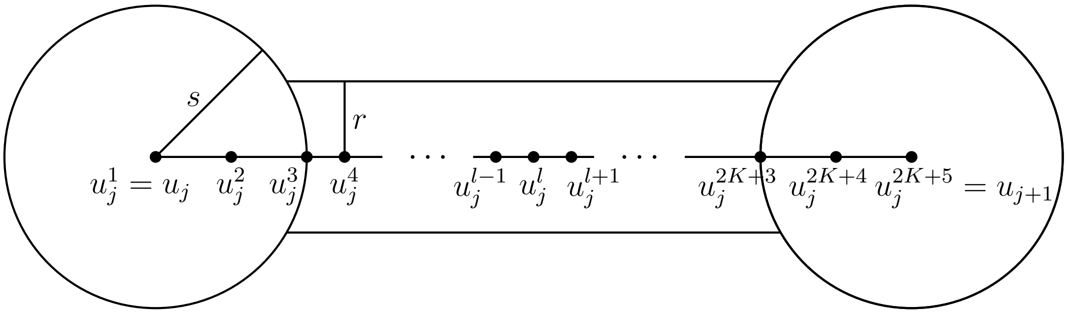
Iga $j \in \{1, \dots, k-1\}$ korral olgu $u_j^1, \dots, u_j^{2K+5} \in [u_j, u_{j+1}]$ sellised, et

$$\begin{aligned} d(u_j, u_j^1) &= 0, \\ d(u_j, u_j^2) &= \frac{s}{2}, \\ d(u_j^{2K+4}, u_{j+1}) &= \frac{s}{2}, \\ d(u_j^{2K+5}, u_{j+1}) &= 0 \end{aligned}$$

ja iga $l \in \{0, \dots, 2K\}$ korral

$$d(u_j, u_j^{l+3}) = s + \frac{l}{2K}\big(d(u_j, u_{j+1}) - 2s\big)$$

(vt joonis 2).




Joonis 2: Punktide $u_j^1, \ldots, u_j^{2K+5}$ valik.

Võtame

$$y_i = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \left( m_{u_j^{2l} u_j^{2l-1}} + m_{u_j^{2l} u_j^{2l+1}} \right).$$

Näitame, et $\|m_{p_i,q_i} \pm y_i\| \leq d(p_i, q_i)$. Kuna iga $f \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ korral

$$\begin{aligned}
\left| f(m_{p_i,q_i} + y_i) \right| &= \Bigg| f(p_i) - f(q_i) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \left( f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l-1}) + f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l+1}) \right) \Bigg| \\
&= 2 \left| \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \left( f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l+1}) \right) \right| \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \left| f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l+1}) \right| \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} d(u_j^{2l}, u_j^{2l+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} d(u_j^1, u_{j+1}^1) \\
&= d(p_i, q_i),
\end{aligned}$$

siis

$$\|m_{p_i,q_i} + y_i\| \leq d(p_i, q_i).$$

Analoogiliselt, kuna iga $f \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ korral

$$\begin{aligned}
|f(m_{p_i,q_i} - y_i)| &= \Big| f(p_i) - f(q_i) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \big( f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l-1}) + f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l+1}) \big) \Big| \\
&= 2 \Big| \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \big( f(u_j^{2l-1}) - f(u_j^{2l}) \big) \Big| \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \big| f(u_j^{2l-1}) - f(u_j^{2l}) \big| \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} d(u_j^{2l-1}, u_j^{2l}) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} d(u_j^1, u_{j+1}^1) \\
&= d(p_i, q_i),
\end{aligned}$$

siis

$$\|m_{p_i,q_i} - y_i\| \leq d(p_i, q_i).$$

Edasi näitame, et $\|y\| = 1$. Kuna

$$\begin{aligned}
\|y_i\| &= \frac{1}{2} \, \|m_{p_i,q_i} + y_i - m_{p_i,q_i} + y_i\| \\
&\leq \frac{1}{2} \big( \, \|m_{p_i,q_i} + y_i\| + \|m_{p_i,q_i} - y_i\| \, \big) \\
&= d(p_i, q_i),
\end{aligned}$$

siis

$$\|y\| \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i \Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \|y_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, d(p_i, q_i) = 1.$$

Näitame et $\|y\| \geq 1$. Selleks piisab näidata, et mingi $f \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ korral $f(y) = 1$. Sobiva funktsiooni $f$ defineerime $[p_i, q_i]$ osalõikude $[u_j, u_{j+1}]$ punktides $u_j^1, \ldots, u_j^{2K+5}$ järgmiselt

$$f(u_j^l) = \begin{cases} 0, & \text{kui } l \text{ on paaritu,} \\ \frac{s}{2}, & \text{kui } l = 2 \text{ või } l = 2K + 4, \\ \frac{d(u_j^1, u_{j+1}^1) - 2s}{2K}, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Märgime, et iga $j$ ja $l$ korral

$$f(u_j^l) \leq \frac{s}{2},$$

sest

$$\frac{d(u_j^1, u_{j+1}^1) - 2s}{2K} \leq \frac{r}{2} < \frac{s}{2}$$

Ilmselt iga $u, v \in \{u_j^1, \dots, u_j^{2K+5}\}$ korral

$$|f(u) - f(v)| \leq d(u, v).$$

Kui $i' \in \{1, \dots, n\}$, siis sarnaselt lõiguga $[p_i, q_i]$ oleme lõigu $[p_{i'}, q_{i'}]$ jaotanud osalõikudeks hulga

$$\{v_1, \dots, v_{k'}\} = A \cap [p_{i'}, q_{i'}]$$

punktide abil, leidnud $K' \in \mathbb{N}$ nii, et iga $j' \in \{1, \dots, k' - 1\}$ korral

$$d(v_{j'}, v_{j'+1}) - 2s \leq K'r,$$

fikseerinud igas lõigus $[v_{j'}, v_{j'+1}]$ punktid $v_{j'}^1, \dots, v_{j'}^{2K'+5}$ nii, nagu osalõigus $[u_j, u_{j+1}]$ punktid $u_j^1, \dots, u_j^{2K+5}$, ning defineerinud analoogiliselt väärtused $f(v_{j'}^1), \dots, f(v_{j'}^{2K'+5})$.

Vaatleme $i, i' \in \{1, \dots, n\}$ korral vastavalt $[p_i, q_i]$ ja $[p_{i'}, q_{i'}]$ osalõike $[u_j, u_{j+1}]$ ja $[v_{j'}, v_{j'+1}]$. Olgu $u \in \{u_j^1, \dots, u_j^{2K+5}\}$ ja $v \in \{v_{j'}^1, \dots, v_{j'}^{2K'+5}\}$. Kui $u = v$, siis $f(u) = f(v)$, sest juhul $i \neq i'$ kehtib $f(u) = f(v) = 0$. Seega on vaadeldud punktides $f$ defineeritud korrektselt.

Veendume, et $u \neq v$ korral

$$|f(u) - f(v)| \leq d(u, v).$$

Kui $[u_j, u_{j+1}] \cap [v_{j'}, v_{j'+1}] = \emptyset$, siis

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u)| + |f(v)| \leq \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s < d(u, v).$$

Kui $[u_j, u_{j+1}] \cap [v_{j'}, v_{j'+1}] \neq \emptyset$, siis kas $[u_j, u_{j+1}] = [v_{j'}, v_{j'+1}]$, mistõttu $|f(u) - f(v)| \leq d(u, v)$, või neil lõikudel on täpselt üks ühine punkt. Viimasel juhul vaatleme kolme alternatiivset olukorda.

Kui leidub $a \in A$ nii, et $u, v \in B(a, s)$, siis juhul $u = a$ või $v = a$ kehtib $|f(u) - f(v)| = \frac{s}{2}$, vastasel juhul $f(u) = f(v) = \frac{s}{2}$. Mõlemal juhul

$$|f(u) - f(v)| \leq d(u, v).$$

Kui leidub $a \in A$ nii, et $u \in B(a,s)$ ja $v \notin B(a,s)$, siis

$$|f(u) - f(v)| \leq \frac{s}{2} \leq d(u,v).$$

Kui $u, v \notin B$, siis

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u)| + |f(v)| < 2r \leq d(u,v).$$

McShane'i jätkuteoreemi põhjal võime eeldada, et funktsioon $f$ on defineeritud kogu ruumil $M$ nii, et $\|f\| \leq 1$. Lõpetuseks piisab näidata, et $f(y_i) = d(p_i, q_i)$, sest sel juhul

$$f(y) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, d(p_i, q_i) = 1.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
f(y_i) &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{K+2} \Big( f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l-1}) + f(u_j^{2l}) - f(u_j^{2l+1}) \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \Big( s + 2K \frac{d(u_j, u_{j+1}) - 2s}{2K} + s \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} d(u_j, u_{j+1}) \\
&= d(p_i, q_i).
\end{aligned}$$

Sellega on teoreem tõestatud. $\square$

# Kasutatud kirjandus


[AAK] E. Abel, M. Abel, Ü. Kaasik, *Koolimatemaatika entsüklopeedia*, kolmas väljanne, Ilmamaa, 2006.

[ALL] T. A. Abrahmasen, J. Langemets, V. Lima, *Almost square banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), lk 1549–1565.

[BH] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 319, Springer-Verlag, 1999.

[GPR] L. García-Lirola, A. Procházka, A. Rueda Zoca, *A characterisation of the Daugavet property in spaces of Lipschitz functions*, J. Math. Anal. Appl. **464** (2018), lk 473–492.

[N] H. Niglas, *Lipschitzi kujutused ja M-ideaalid*, magistritöö, Tartu Ülikool, 2014.
`http://hdl.handle.net/10062/42888`

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, 1991.

[O] A. Ostrak, *Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisus*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, 2016.
`http://hdl.handle.net/10062/53789`

[W] N. Weaver, *Lipschitz algebras*, teine väljaanne, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2018.

## Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Jaan Kristjan Kaasik,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Ligilähedase keskpunkti omadusega meetrilise ruumi Lipschitzi-vaba ruum“,

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Andre Ostrak, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

*Jaan Kristjan Kaasik*

15.05.2020