



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Iivi Vainikko

NÕTKETE ÜMMARGUSTE PLAATIDE PAINE TEMPERA-
TUURIPINGETE JA MATERJALI MITTEHOMOGEENSUSE
ARVESTAMISEGA ELASTILIS-PLASTILISTE DEFOR-
MATSIOONIDE PIIRKONNAS

Auhinnatöö

Juhendaja: prof. Ü. Lepik

Tartu 1964

SISSEJUHATUS

Ümmarguse muutuva paksusega plaatide paindeülesanne on üks aktuaalsemaid probleeme mehhaanikas. Ümmargune muutuva paksusega plaat leiab laialdast rakendamist konstruktiivse elemendina ehitustehnikas ja masinaehituses. Paljud küsimused, mis on seotud ümmarguste alusplaatide, turbiini ketaste, nõtkete ühendusvõllide, hüdromasinade tiivikute, klappide, ajamite, kettavedrude ja teiste projekteerimisega, viivad ümmarguste muutuva paksusega plaatide arvutamisele. Elastsusteoorias on niisuguse plaadi paindevõrrandid saadud O. Pichleri poolt 1928.a. [12]. Teisel kujul on need antud A.I. Lurje poolt [7]. O.Pichler ja A.I.Lurje on piirdunud ainult väikeste läbipainetega. Väikeste läbipainete teooriat muutuva paksusega plaadi korral on käsitlenud põhjalikult A.D. Kovalenko [3].

Plastiliste deformatsioonide valdkonnas on uurinud plaatide väikesi läbipaindeid A.A. Iljušin [2], V.V. Sokolovski [8] ja A.S. Grigorjev [1].

Konstantse paksusega plaatide suuri läbipaindeid on vaadeldud oma töödes Ü.Lepik [5, 6, 7].

Elastsete plaatide teooria suurte läbipainete korral on üles ehitatud Kármáni poolt järgmistel eeldustel.

1. Plaat on nii õhuke, et kehtib Kirchhoffi sirgete normaallide hüpotees.

2. Plaadi tasakaaluseisundit iseloomustavad väikesed deformatsioonid, kuid suured läbipainded ja kesktasandi elemendi pöörded. Tuleks märkida, et edaspidi mõtleme termini suurte läbipainete all läbipaindeid, mis on suured võrreldes plaadi paksusega, kuid peavad olema väikesed võrreldes plaadi teiste mõõdetega.

Ü. Lepik on oma töös [7] üldistanud elastsusteoorias tuntud Karmani võrrandid plastiliste deformatsioonide piirkonda suvalise kujuga plaadi jaoks. Seejuures on lähtutud väikeste elastilis-plastiliste deformatsioonide teooriast, mis, nagu on näidatud A.A. Iljušini poolt [2], annab õigeid tulemusi lihtkoormuse puhul (s.t. kui välistungid kasvavad nullist alates proportsionaalselt ainult ühele parameetrile), kuigi suurte läbipainete juhul selline olukord ei kehti. Ehkki lihtkoormuse jaoks pole veel täpset teooriat loodud, võib paljude tööde põhjal siiski teha järelduse, et teatud juhtudel on lihtkoormuse mõju väike ja selle võib jätta arvestamata (siia kuuluvad näiteks juhud, kus koormamisprotsess on lähedane lihtkoormusele või kus plastiliste deformatsioonide piirkond on plaadis vähe levinud).

Töös on arvestatud veel materjali mittehomoogeensust. Nende küsimustega on tegelnud poola teadlased eesotsas W.Olszakiga [11]. Kõiki karakteristikuid (Poissoni moodul, elastsusmoodul, voolavuspier, soojuspaisuvuse koefitsient jne.) loetakse antuks plaadi koordinaatfunktsioonidena. Arvestame ka temperatuuri mõju, kus temperatuuri pinged on toodud sisse Duhamel-Neumanni hüpotee-

si kohaselt, mis väidab, et kogu deformatsioon on pingetest tingitud deformatsiooni ja temperatuuri mõjul toimunud pikenemiste summa.

Käesoleva töö eesmärk on leida üldised paindevõrrandid ümmarguse plaadi jaoks elastilis-plastiliste deformatsioonide piirkonnas, lähtudes Ü. Lepiku poolt saadud tulemustest [7], kusjuures on Cartesiuse koordinaatidelt üle mindud polaarkoordinaatidele. Vastavad arvutused ongi esitatud paragrahvis 2.

Saadud võrrandid on küllaltki üldised, sest neis sisalduvad ka temperatuuripingeid ja materjali mittehomogeensust iseloomustavad liikmed; on arvestatud ka plastiliste deformatsioonide tekkimise võimalust. Kui piirata ülesande seadet ja minna üle erijuhtudele, lihtsustuvad need võrrandid tunduvalt.

Ühe erijuhuna on vaadeldud ümmarguse muutuva paksusega plaadi suuri telgsümmeetrilisi läbipaindeid elastsete deformatsioonide piirkonnas. Seda juhtu on varem käsitleanud E.H. Mansfield [10], kusjuures on arvestatud ka termilisi pingeid. Sama ülesande jaoks on leidnud põhivõrrandid E. Sakkov [13], kasutades nende tuletamisel variatsioonmeetodeid.

Käesolevas töös saadud võrrandsüsteem ühtub E.H. Mansfieldi ja E. Sakkovi poolt leitud tulemustega. On alandatud mõlema diferentsiaalvõrrandi järku kolmelt kahele. Ees neljandas paragrahvis on esitatud ülesande lahendus diferentsmeetodil, kusjuures saadud algebraline süsteem lahendatakse interpoleeritud iteratsiooni meetodil, mis on esitatud Kelleri ja Reissi poolt [9]. Numbriliste tulemuste saamiseks on koostatud programm elektronarvutusmasinale "Ural-1".

KASUTATUD TÄHISTUSI

x, y, z	Cartesiuse koordinaadid, x ja y telg asuvad plaadi tasapinnas,
r, θ	polaarkoordinaadid plaadi tasapinnas,
u, v, w	siirded vastavalt x, y, z telje suunas,
E, G	elastsusmoodul, nihkemoodul,
\mathcal{K}	ruumpaisumise moodul,
ν	Poissoni moodul,
ω	plastilisuse moodul,
D	plaadi jäikus,
α	soojuspaisumise koefitsient,
$h(x, y)$	plaadi paksus,
h_0	plaadi paksus tsentris ($r=0$),
$\left. \begin{array}{l} h_1(x, y) = z \\ h_2(x, y) = z \end{array} \right\}$	plaadi alumise ja ülemise pinna võrrandid,
b	plaadi raadius,
ρ	dimensioonita raadius, võrdub $\frac{r}{b}$,
δ	dimensioonita paksus, võrdub $\frac{z}{h_0}$,
n	jaotuste arv diferentsmeetodi kasutamisel,
κ	interpolatsiooni parameeter,
m	iteratsiooniprotsessi kordamiste arv,
$t(x, y, z)$	temperatuur,
t_0	temperatuur plaadi kihis $z=0$,
t_1	temperatuurigradient plaadi paksuse sihis,

F	pingefunktsioon, mis on defineeritud võrdustega (2.2),
e_{xx}, e_{yy}, e_{zy}	kogudeformatsiooni komponendid,
$e_{xx}^{\circ}, e_{yy}^{\circ}, e_{xy}^{\circ}$	pingetest tingitud deformatsiooni komponendid,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	kesktasandi elemendi deformatsioonikomponendid (polaarkoordinaatides $\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{r\theta}$),
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	plaadi keskpinna kõverused,
$\varepsilon_1^{\circ}, \varepsilon_2^{\circ}, \varepsilon_3^{\circ}$	mittetermilistest pingetest tingitud kesktasandi elemendi deformatsiooni ja kõveruse komponendid, defineeritud seostega (1.14),
$\alpha_1^{\circ}, \alpha_2^{\circ}, \alpha_3^{\circ}$	
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	pinged plaadi ristlõikes,
T_1, T_2, T	tungid plaadi elemendi pikkusühiku kohta,
M_1, M_2, M	momendid plaadi elemendi pikkusühiku kohta,
σ	normaalpingete keskmine, defineeritud seosega $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)$,
e°	ruumdeformatsioon, defineeritud kujul $e^{\circ} = \frac{1}{3}(e_{xx}^{\circ} + e_{yy}^{\circ} + e_{zz}^{\circ})$,
σ_i	pingeintensiivsus,
e_i	deformatsiooniintensiivsus,
σ_s	materjali voolavuspiir,
E'	avaldise $E(1-\nu)$ tähis,
a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} ($i=1, 2, 3$)	kordajad valemitele (1.9), (1.10), mis avalduvad kujul (1.11),
$P_{\varepsilon}, P_{\alpha}, P_{\sigma}$	tähistused seostes (1.15),
$Q_{\varepsilon}, Q_{\alpha}$	
α_i, β_i ($i=1, \dots, 8$)	kordajad valemities (2.5), (2.6),
\mathcal{F}	suvalise kahemuutuja funktsiooni tähis,

$$\left. \begin{array}{l} A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij} \\ A_{ij}^*, B_{ij}^*, C_{ij}^*, D_{ij}^* \\ i+j=4; i, j \geq 0 \end{array} \right\}$$

kordajad diferentsiaalvõrrandeis (2.7)
ja (2.8),

$$\xi, \xi^*$$

diferentsiaalvõrrandite (2.7) ja (2.8)
mittelineaarse osa tähistus,

$$\varphi, \psi$$

on defineeritud valemitega: $\frac{dW}{dr} = \varphi, \frac{dF}{dr} = \psi,$

$$q$$

normaalkoormuse intensiivsus plaadi pinna-
ühiku kohta.

§ 1. PÕHISEOSED

Vaatleme meelevaldse kujuga plaati, mille paksus on muutuv. Koordinaatteljed valime järgmiselt: teljed x ja y asetsegu plaadi kesktasandil, telg z olgu risti eelmistega ning suunatud läbipainete poole. Plaatide teooriast on teada, et plaadi deformatsiooniseisundit iseloomustavad võrrandid:

$$e_{xx} = \varepsilon_1 - z\alpha_1, \quad e_{yy} = \varepsilon_2 - z\alpha_2, \quad e_{xy} = 2(\varepsilon_3 - z\alpha_3), \quad (1.1)$$

kus kesktasandi elemendi deformatsioonikomponendid avalduvad siirdekomponentide kaudu järgmiselt:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad 2\varepsilon_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.2)$$

ja kesktasandi kõverused kujul:

$$\alpha_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \alpha_3 = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.3)$$

Teiselt poolt on kogu deformatsioon pingetest tingitud deformatsiooni ja temperatuuri mõjul toimunud piknemise summa (Duhamel-Neumanni hüpotees):

$$e_{xx} = e_{xx}^0 + \alpha t, \quad e_{yy} = e_{yy}^0 + \alpha t, \quad e_{xy} = e_{xy}^0. \quad (1.4)$$

Pingedeformatsioonikomponendid saame leida Hencky-Iljušini võr-
randeist:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma &= 2\mathcal{K}(1-\omega)(e_{xx}^o - e^o) \\ \sigma_2 - \sigma &= 2\mathcal{K}(1-\omega)(e_{yy}^o - e^o) \\ \sigma_3 - \sigma &= 2\mathcal{K}(1-\omega)e_{xy}^o \end{aligned} \right\}, \quad (1.5)$$

kus

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{ja} \quad e^o = \frac{1}{3}(e_{xx}^o + e_{yy}^o + e_{zz}^o).$$

Plastiliste deformatsioonide piirkonnas loeme materjali kokkusurumatuks, s.t. $e^o = 0$ ehk $\nu = 0,5$. Suurust ω , n.n. plastilisuse moodulit, on kerge leida, kui on teada materjali mehhaanilisi omadusi iseloomustav diagramm $\sigma_i = \phi(e_i)$.

Plastilisuse mooduli võime määrata siis valemiga

$$\omega = 1 - \frac{\sigma_i}{E e_i}.$$

Elastsete deformatsioonide piirkonnas on alati $\omega = 0$, kusjuures arvestame materjali kokkusurumist. Ruumdeformatsiooni elastisuse seadus väidab, et $\sigma = 3\mathcal{K}e^o$, kus ruumpaisumise moodul $\mathcal{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$. Seda arvestades võime seosed (1.5), tehes asenduse (1.4), kirjutada kujul:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E'}{1-\nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy} - (1+\nu)\alpha t] \\ \sigma_2 &= \frac{E'}{1-\nu^2} [\nu e_{xx} + e_{yy} - (1+\nu)\alpha t] \\ \sigma_3 &= \frac{E'}{2(1+\nu)} e_{xy} \end{aligned} \right\}, \quad (1.6)$$

kus $E' = E(1-\omega)$. Siin on formaalselt ühendatud kaks erijuhtu:

1) kui $\omega = 0$ ja $\nu \neq 0,5$, siis seosed (1.6) kehtivad elastsete deformatsioonide piirkonnas;

2) kui $\omega \neq 0$ ja $\nu = 0,5$, siis seosed (1.6) kehtivad plastiliste deformatsioonide piirkonnas.

Tungide ja momentide avaldised leiame valemitest:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_1 dz, & \mathcal{T}_2 &= \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_2 dz, & \mathcal{P} &= \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_3 dz; \\ \mathcal{M}_1 &= \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_1 z dz, & \mathcal{M}_2 &= \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_2 z dz, & \mathcal{H} &= \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_3 z dz \end{aligned} \right\}, \quad (1.7)$$

kus

$$\left. \begin{aligned} z &= -h_1(x, y) \\ z &= h_2(x, y) \end{aligned} \right\}$$

on plaadi pealmiste pindade võrrandid. Piirdume juhuga, kus temperatuur muutub lineaarselt läbi plaadi paksuse:

$$t(x, y, z) = t_0(x, y) + z t_1(x, y). \quad (1.8)$$

Arvestades võrrandeid (1.1), (1.6) ja (1.8) saame integraalid (1.7) kirjutada kujul:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= a_{11} \varepsilon_1 + a_{21} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + a_{31} t_0 + a_{12} \alpha_1 + a_{22} (\alpha_1 + \alpha_2) + a_{32} t_1 \\ \mathcal{T}_2 &= a_{11} \varepsilon_2 + a_{21} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + a_{31} t_0 + a_{12} \alpha_2 + a_{22} (\alpha_1 + \alpha_2) + a_{32} t_1 \\ \mathcal{P} &= a_{11} \varepsilon_3 + a_{12} \alpha_3 \end{aligned} \right\}, \quad (1.9)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= a_{12} \varepsilon_1 + a_{22} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + a_{32} t_0 + a_{13} \alpha_1 + a_{23} (\alpha_1 + \alpha_2) + a_{33} t_1 \\ M_2 &= a_{12} \varepsilon_2 + a_{22} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + a_{32} t_0 + a_{13} \alpha_2 + a_{23} (\alpha_1 + \alpha_2) + a_{33} t_1 \\ \mathcal{K} &= a_{12} \varepsilon_3 + a_{13} \alpha_3 \end{aligned} \right\} (1.10)$$

kus

$$\left. \begin{aligned} a_{1i} &= \int_{(1)} \frac{\bar{E}}{1+\nu} z^{i-1} dz + \frac{2}{3} \int_{(2)} E' z^{i-1} dz \\ a_{2i} &= \int_{(1)} \frac{E\nu}{1-\nu^2} z^{i-1} dz + \frac{2}{3} \int_{(2)} E' z^{i-1} dz \\ a_{3i} &= \int_{(1)} \frac{\bar{E}\alpha}{1-\nu} z^{i-1} dz - 2 \int_{(2)} E' \alpha z^{i-1} dz \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3). \quad (1.11)$$

Indeksid (1) ja (2) tähendavad, et integraalid on võetud vastavalt üle elastsete ja plastiliste deformatsioonide piirkonna normaali suunas.

Plastiliste deformatsioonide piirkond on määratud võrratusega, mis on saadud Misese plastilisusestingimusest:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^{\circ 2} + e_{xx}^{\circ} e_{yy}^{\circ} + e_{yy}^{\circ 2} + \frac{1}{4} e_{xy}^{\circ 2}} \geq \frac{\sigma_s}{E}. \quad (1.12)$$

Tähistame

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^{\circ} &= \varepsilon_1 - \alpha t_0 \\ \varepsilon_2^{\circ} &= \varepsilon_2 - \alpha t_0 \\ \varepsilon_3^{\circ} &= \varepsilon_3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \alpha_1^{\circ} &= \alpha_1 - \alpha t_1 \\ \alpha_2^{\circ} &= \alpha_2 - \alpha t_1 \\ \alpha_3^{\circ} &= \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

ja arvestades, et

$$\left. \begin{aligned} e_{xx}^{\circ} &= \varepsilon_1^{\circ} + z \alpha_1^{\circ} \\ e_{yy}^{\circ} &= \varepsilon_2^{\circ} + z \alpha_2^{\circ} \\ e_{xy}^{\circ} &= 2(\varepsilon_3^{\circ} + z \alpha_3^{\circ}) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

saame deformatsioonintensiivsuse kirjutada kujul:

$$e_i = \frac{z}{\sqrt{3}} \sqrt{\mathcal{P}_{\varepsilon} + 2z \mathcal{P}_{\varepsilon\alpha} + z^2 \mathcal{P}_{\alpha} - 3\alpha(t_0 + t_1) [Q_{\varepsilon} + z Q_{\alpha} + \alpha(t_0 + t_1)]}, \quad (1.15)$$

kus

$$\mathcal{P}_{\varepsilon} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$

$$\mathcal{P}_{\alpha} = \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

$$\mathcal{P}_{\varepsilon\alpha} = \varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \alpha_1 + \varepsilon_3 \alpha_3,$$

$$Q_{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$Q_{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

§ 2. PÕHIVÖRRANDITE TULETAMINE

Kaks esimest tasakaalu diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

rahuks tuues sisse pingefunktsiooni kujul:

$$\bar{T}_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{T}_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \mathcal{I} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2.2)$$

Jääb järele kolmas tasakaalu diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = \bar{T}_1 \alpha_1 + \bar{T}_2 \alpha_2 + 2 \mathcal{I} \alpha_3 - q \quad (2.3)$$

ja deformatsiooni pidevuse võrrand:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = \alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_2 \quad (2.4)$$

Avaldame võrrandeist (1.9) kesktasandi elemendi deformatsiooni komponendid ja asendame kõverused ning tungid vastavalt nende avaldistega (1.3) ja (2.2). Saame:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \alpha_3 t_0 + \alpha_4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha_5 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \alpha_6 t_1 \\ \varepsilon_2 &= \alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha_3 t_0 + \alpha_4 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \alpha_5 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha_6 t_1 \\ \varepsilon_3 &= \alpha_7 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \alpha_8 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \beta_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \beta_3 t_0 + \beta_4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta_5 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \beta_6 t_1 \\ M_2 &= \beta_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta_3 t_0 + \beta_4 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \beta_5 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta_6 t_1 \\ H &= \beta_7 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \beta_8 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (2.6)$$

kus

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_{11} + a_{21}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})}, & \alpha_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})}, & \alpha_3 &= -\frac{a_{31}}{a_{11} + 2a_{21}}, \\ \alpha_4 &= -\frac{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})}, & \alpha_5 &= \frac{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})}, \\ \alpha_6 &= -\frac{a_{32}}{a_{11} + 2a_{21}}, & \alpha_7 &= -\frac{1}{a_{11}}, & \alpha_8 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}; \\ \beta_1 &= \frac{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})} = -\alpha_4, & \beta_2 &= -\frac{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})} = -\alpha_5, \\ \beta_3 &= \frac{a_{32}(a_{11} + 2a_{21}) - a_{31}(a_{12} + 2a_{22})}{a_{11} + 2a_{21}}, & \beta_4 &= \frac{a_{11}a_{13} - a_{12}^2}{a_{11}} + \beta_5, \\ \beta_5 &= \frac{a_{21}a_{12}(a_{12} - 2a_{22}) - a_{11}a_{22}(a_{22} - 2a_{12})}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})} + a_{23}, \\ \beta_6 &= -\frac{(a_{12} + 2a_{22})a_{32}}{a_{11} + 2a_{21}} + a_{33}, & \beta_7 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \alpha_8, \\ \beta_8 &= \frac{a_{11}a_{13} - a_{12}^2}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (2.6')$$

Nüüd leiame vajalikud tuletised ja asetame nad võrrandesse (2.3) ja (2.4) ning läheme üle polaarkoordinaatidesse. Selleks leiame vastavad seosed Cartesiuse ja polaarkoordinaatide vahel. Need on järgmised:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial r}, & \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}, & \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 Z}{\partial r^3}, & \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} &= \frac{\partial^4 Z}{\partial r^4}, \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta}, & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2}, & \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} &= \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} - \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{r^3} \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 Z}{\partial \theta^3}, \quad \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial^3 Z}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{8}{r^4} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 Z}{\partial \theta^4}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial Z}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial^3 Z}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta},$$

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 Z}{\partial r \partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^3 Z}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{6}{r^4} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial Z}{\partial r}.$$

Võttes aluseks need üleminekuseosed näeme, et deformatsiooni pidevuse võrrand polaarkoordinaatides on:

$$\sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} A_{ij} \frac{\partial^k w}{\partial r^i \partial \theta^j} + \sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} B_{ij} \frac{\partial^k F}{\partial r^i \partial \theta^j} + \sum_{k=0}^2 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} C_{ij} \frac{\partial^k t_0}{\partial r^i \partial \theta^j} + \sum_{k=0}^2 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} D_{ij} \frac{\partial^k t_1}{\partial r^i \partial \theta^j} = \epsilon. \quad (2.7)$$

Tasakaalu võrrand polaarkoordinaatides saab kuju

$$\sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} A_{ij}^* \frac{\partial^k w}{\partial r^i \partial \theta^j} + \sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} B_{ij}^* \frac{\partial^k F}{\partial r^i \partial \theta^j} + \sum_{k=0}^2 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} C_{ij}^* \frac{\partial^k t_0}{\partial r^i \partial \theta^j} + \sum_{k=0}^2 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} D_{ij}^* \frac{\partial^k t_1}{\partial r^i \partial \theta^j} = \epsilon^*. \quad (2.8)$$

Neis valemis indekseile $i=0$, $j=0$ vastavate "0-järku tuletiste" all tuleb mõista avaldisi

$$\frac{\partial^0 w}{\partial r^0 \partial \theta^0} = w, \quad \frac{\partial^0 F}{\partial r^0 \partial \theta^0} = F, \quad \frac{\partial^0 t_0}{\partial r^0 \partial \theta^0} = t_0, \quad \frac{\partial^0 t_1}{\partial r^0 \partial \theta^0} = t_1.$$

Ülejäänud sümbolite tähendus on järgmine:

$$A_{40} = \alpha_5, \quad A_{04} = \frac{1}{r^4} \alpha_5, \quad A_{22} = \frac{2}{r^2} (\alpha_4 - \alpha_8), \quad A_{30} = \frac{2}{r} (\alpha_4 - \alpha_8) + 2 \frac{\partial \alpha_5}{\partial r},$$

$$A_{03} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial \alpha_5}{\partial \theta}, \quad A_{21} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_4}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_8}{\partial \theta}, \quad A_{12} = \frac{6}{r^3} \alpha_5 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_4}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_8}{\partial r},$$

$$A_{20} = -\frac{1}{r^2} (4\alpha_4 - 4\alpha_8 - 3\alpha_5) + \frac{3}{r} \frac{\partial \alpha_4}{\partial r} + \frac{\partial^2 \alpha_5}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha_8}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial \theta^2},$$

$$A_{02} = \frac{4}{r^4} (3\alpha_4 - 3\alpha_8 - 2\alpha_5) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial r^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \alpha_4}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \alpha_5}{\partial r} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial \alpha_8}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 \alpha_5}{\partial \theta^2},$$

$$A_{11} = -\frac{4}{r^3} \frac{\partial \alpha_4}{\partial \theta} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial \alpha_5}{\partial \theta} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial \alpha_8}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_8}{\partial r \partial \theta},$$

$$A_{10} = \frac{1}{r^3} (4\alpha_4 - 4\alpha_8 - 3\alpha_5) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_4}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \alpha_5}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_8}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \alpha_5}{\partial \theta^2},$$

$$A_{01} = \frac{4}{r^4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial \theta} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial \alpha_5}{\partial \theta} - \frac{6}{r^4} \frac{\partial \alpha_8}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \alpha_8}{\partial r \partial \theta};$$

$$B_{40} = \alpha_1, \quad B_{04} = \frac{1}{r^4} \alpha_1, \quad B_{22} = \frac{2}{r^2} (\alpha_2 - \alpha_7) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta}, \quad B_{30} = \frac{2}{r} (\alpha_2 - \alpha_7) + 2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial r},$$

$$B_{03} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta}, \quad B_{21} = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_7}{\partial \theta}, \quad B_{12} = \frac{6}{r^3} \alpha_1 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_7}{\partial r},$$

$$B_{20} = -\frac{1}{r^2} (4\alpha_2 - 4\alpha_7 - 3\alpha_1) + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \alpha_2}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha_7}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial \theta^2},$$

$$B_{02} = \frac{4}{r^4} (3\alpha_2 - 3\alpha_7 - 2\alpha_1) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial r^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \alpha_2}{\partial r} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial \alpha_7}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \theta^2},$$

$$B_{11} = \frac{6}{r^3} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial \alpha_7}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_7}{\partial r \partial \theta},$$

$$B_{10} = \frac{1}{r^3} (4\alpha_2 - 4\alpha_7 - 3\alpha_1) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_7}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \theta^2},$$

$$B_{01} = -\frac{4}{r^4} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} - \frac{6}{r^4} \frac{\partial \alpha_7}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \alpha_7}{\partial r \partial \theta};$$

$$C_{20} = \alpha_3, \quad C_{02} = \frac{1}{r^2} \alpha_3, \quad C_{10} = 2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \alpha_3, \quad C_{01} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \theta},$$

$$C_{00} = \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial \theta^2};$$

$$D_{20} = \alpha_6, \quad D_{02} = \frac{1}{r^2} \alpha_6, \quad D_{10} = 2 \frac{\partial \alpha_6}{\partial r} + \frac{1}{r} \alpha_6, \quad D_{01} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \alpha_6}{\partial \theta},$$

$$D_{00} = \frac{\partial^2 \alpha_6}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_6}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha_6}{\partial \theta^2},$$

$$A_{00} = A_{31} = A_{13} = B_{00} = B_{31} = B_{13} = C_{11} = D_{11} = 0.$$

$$A_{40}^* = \beta_4, \quad A_{04}^* = \frac{1}{r^4} \beta_4, \quad A_{22}^* = \frac{2}{r^2} (\beta_5 + \beta_8), \quad A_{30}^* = \frac{2}{r} (\beta_5 + \beta_8) + 2 \frac{\partial \beta_4}{\partial r},$$

$$A_{03}^* = \frac{2}{r^4} \frac{\partial \beta_4}{\partial \theta}, \quad A_{21}^* = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_5}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_8}{\partial \theta}, \quad A_{12}^* = \frac{6}{r^3} \beta_4 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_5}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_8}{\partial r},$$

$$A_{20}^* = -\frac{1}{r^2} (4\beta_5 + 4\beta_8 - 3\beta_4) + \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \beta_5}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \beta_8}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_5}{\partial \theta^2},$$

$$A_{02}^* = \frac{4}{r^4} (3\beta_5 + 3\beta_8 - 2\beta_4) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \beta_4}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_5}{\partial r^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \beta_5}{\partial r} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \beta_8}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial \theta^2},$$

$$A_{11}^* = -\frac{4}{r^3} \frac{\partial \beta_5}{\partial \theta} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial \beta_4}{\partial \theta} - \frac{6}{r^3} \frac{\partial \beta_8}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_8}{\partial r \partial \theta},$$

$$A_{10}^* = \frac{1}{r^3} (4\beta_5 + 4\beta_8 - 3\beta_4) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \beta_4}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \beta_5}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_5}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_8}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial \theta^2},$$

$$A_{01}^* = -\frac{4}{r^4} \frac{\partial \beta_4}{\partial \theta} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial \beta_5}{\partial \theta} + \frac{6}{r^4} \frac{\partial \beta_8}{\partial \theta} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \beta_8}{\partial r \partial \theta},$$

$$B_{40}^* = \beta_2, \quad B_{04}^* = \frac{1}{r^4} \beta_2, \quad B_{22}^* = \frac{2}{r^2} (\beta_1 + \beta_7) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta}, \quad B_{30}^* = \frac{2}{r} (\beta_1 + \beta_7) + 2 \frac{\partial \beta_2}{\partial r},$$

$$B_{03}^* = \frac{2}{r^4} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta}, \quad B_{21}^* = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_7}{\partial \theta}, \quad B_{12}^* = \frac{6}{r^3} \beta_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_1}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_7}{\partial r},$$

$$B_{20}^* = -\frac{1}{r^2} (4\beta_1 + 4\beta_7 - 3\beta_2) + \frac{3}{r} \frac{\partial \beta_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \beta_7}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial \theta^2},$$

$$B_{02}^* = \frac{4}{r^4} (3\beta_1 + 3\beta_7 - 2\beta_2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial r^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \beta_1}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \beta_2}{\partial r} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \beta_7}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial \theta^2},$$

$$B_{11}^* = -\frac{4}{r^3} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} - \frac{6}{r^3} \frac{\partial \beta_7}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_7}{\partial r \partial \theta},$$

$$B_{10}^* = \frac{1}{r^3} (4\beta_1 + 4\beta_7 - 3\beta_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \beta_2}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_7}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial \theta^2},$$

$$B_{01}^* = \frac{4}{r^4} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} + \frac{6}{r^4} \frac{\partial \beta_7}{\partial \theta} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \beta_7}{\partial r \partial \theta},$$

$$C_{20}^* = \beta_3, \quad C_{02}^* = \frac{1}{r^2} \beta_3, \quad C_{10}^* = 2 \frac{\partial \beta_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_3, \quad C_{01}^* = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta},$$

$$C_{00}^* = \frac{\partial^2 \beta_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_3}{\partial \theta^2}; \quad D_{00}^* = \frac{\partial^2 \beta_6}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_6}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta_6}{\partial \theta^2},$$

$$D_{20}^* = \beta_6, \quad D_{02}^* = \frac{1}{r^2} \beta_6, \quad D_{10}^* = 2 \frac{\partial \beta_6}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_6, \quad D_{01}^* = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_6}{\partial \theta},$$

$$A_{00}^* = A_{31}^* = A_{13}^* = B_{00}^* = B_{31}^* = B_{13}^* = C_{11}^* = D_{11}^* = 0.$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta^2},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^* = & -q + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \\ & - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ & + \frac{2}{r^3} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^4} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Siin ja edaspidi mõistame sümboolite ε_1 , ε_2 , ε_3 all suurusi ε_r , ε_θ , $\varepsilon_{r\theta}$, samuti olgu

$$\alpha_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

Nagu nägime eespool, saime ümmarguse plaadi painde jaoks üldjuhul kaks neljandat järku mittelineaarset diferentsiaalvõrrandit. Neid võrrandeid võib vaadelda kui elastsusteooriast hästi tuntud Kármáni võrrandite üldistust. Saadud võrrandite integreerimine valmistab suuri raskusi plastiliste deformatsioonide juhul. Sel korral võiks kasutada ülesande lahendamiseks elastsete lähendite meetodit, näiteks allpool antud skeemi järgi.

1) Mehhaanikalised karakteristikud E , ν , σ_s , α ja temperatuuri jaotuse loeme antuteks kogu plaadi ulatuses. Andes ette koormuse q ja kasutades materjali $\sigma_i \varepsilon_i$ -diagrammi, la-

hendamete ülesande oletusel, et deformatsioonid jäävad kogu plaadis elastseteks. Nii leiame ülesandele esimeses lähendis suurused $\mathcal{N}^{(1)}$, $\mathcal{F}^{(1)}$ ja samuti $\varepsilon_1^{(1)}$, $\varepsilon_2^{(1)}$, $\varepsilon_3^{(1)}$; $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$.

2) Arvutades valemite (1.13) järgi suurused $\varepsilon_1^{o(1)}$, $\varepsilon_2^{o(1)}$, $\varepsilon_3^{o(1)}$ ja $\alpha_1^{o(1)}$, $\alpha_2^{o(1)}$, $\alpha_3^{o(1)}$, leiame seostest (1.15) ja (1.12) plastiliste deformatsioonide piirkondade ulatuse kogu plaadis esimeses lähenduses.

3) Nüüd arvutame integraalid (1.11) ja leiame kordajad diferentsiaalvõrranditele (2.7) ja (2.8).

4) Saadud üldistatud Kármáni võrrandeist leiame teised lähendid $\mathcal{N}^{(2)}$, $\mathcal{F}^{(2)}$. Seda protsessi võime korrata kuni oleme saavutanud vajaliku täpsuse.

§ 3. ÜMMARGUSE ELASTSE MUUTUVA PAKSUSEGA HOMO-
GEENSE PLAADI SUURED TELGSÜMMEETRILISED
LÄBIPAINDED

Olgu antud ümmargune radiaalsümmeetriliselt muutuva pak-
susega plaat, siis $h = h(r)$. Olgu talle peale pandud ühtlaselt
jaotatud koormus intensiivsusega q . Temperatuuripingeid me
käesoleval juhul ei arvesta. Kuna läbipaine on telgsümmeetriline,
siis tuletised polaarnurga θ järgi langevad välja. Arvutame
antud juhule vastavad integraalid (1.11) rajades $-\frac{h}{2}$ kuni $+\frac{h}{2}$ -ni.
Tulemuseks saame:

$$a_{11} = \frac{Eh}{1+\nu}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)},$$

$$a_{21} = \frac{Eh\nu}{1-\nu^2}, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = \frac{Eh^3\nu}{12(1-\nu^2)},$$
(3.1)

Seoste (2.6') põhjal leiame, et

$$\alpha_1 = \frac{1}{Eh}, \quad \alpha_2 = -\frac{\nu}{Eh}, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 0, \quad \alpha_7 = -\frac{1+\nu}{Eh}, \quad \alpha_8 = 0.$$

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$
(3.2)

$$\beta_5 = \frac{Eh^3\nu}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta_6 = 0, \quad \beta_7 = 0,$$

$$\beta_8 = \frac{Eh^3}{12(1+\nu^2)}.$$

Kirjutame välja nende suuruste tuletised, mis ei ole nullid:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} &= -\frac{1}{Eh^2} \frac{dh}{dr}, & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial r^2} &= \frac{1}{Eh^3} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 - h \frac{d^2 h}{dr^2} \right], \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial r} &= \frac{v}{Eh^2} \frac{dh}{dr}, & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial r^2} &= -\frac{v}{Eh^3} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 - h \frac{d^2 h}{dr^2} \right], \\ \frac{\partial \alpha_7}{\partial r} &= \frac{1+v}{Eh^2} \frac{dh}{dr}; \\ \frac{\partial \beta_4}{\partial r} &= \frac{Eh^2}{4(1-v^2)} \frac{dh}{dr}, & \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial r^2} &= \frac{Eh}{4(1-v^2)} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dr^2} \right], \\ \frac{\partial \beta_5}{\partial r} &= \frac{Eh^2 v}{4(1-v^2)} \frac{dh}{dr}, & \frac{\partial^2 \beta_5}{\partial r^2} &= \frac{Eh v}{4(1-v^2)} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dr^2} \right], \\ \frac{\partial \beta_8}{\partial r} &= \frac{Eh^2}{4(1+v)} \frac{dh}{dr}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Arvutame nüüd kordajad võrranditele (2.7) ja (2.8)

$$\begin{aligned} B_{40} &= \frac{1}{Eh}, & B_{30} &= \frac{2}{r} \frac{1}{Eh} - \frac{2}{Eh^2} \frac{dh}{dr}, \\ B_{20} &= -\frac{1}{r^2} \frac{1}{Eh} + \frac{1}{Eh^3} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 - h \frac{d^2 h}{dr^2} \right] - \frac{2-v}{rEh^2} \frac{dh}{dr}, \\ B_{10} &= \frac{1}{r^3} \frac{1}{Eh} - \frac{1}{r^2} \frac{1}{Eh^2} \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r} \frac{v}{Eh^3} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 - h \frac{d^2 h}{dr^2} \right], \\ A_{40}^* &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}, & A_{30}^* &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \cdot \frac{2}{r} + \frac{2Eh^2}{4(1-v^2)} \frac{dh}{dr}, \\ A_{20}^* &= -\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{2+v}{r} \frac{Eh^2}{4(1-v^2)} \frac{dh}{dr} + \frac{Eh}{4(1-v^2)} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dr^2} \right], \\ A_{10}^* &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{Eh^2}{4(1-v^2)} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} \frac{Eh v}{4(1-v^2)} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dr^2} \right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nüüd saame välja kirjutada põhivõrrandid käesolevas punktis

vaadeldava erijuhu jaoks:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 F}{dr^4} + \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{d^3 F}{dr^3} + \left\{ -\frac{1}{r^3} - \frac{2-\nu}{rh} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{h^2} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 - h \frac{d^2 h}{dr^2} \right] \right\} \frac{d^2 F}{dr^2} + \\ + \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2 h} \frac{dh}{dr} - \frac{\nu}{rh^2} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 - h \frac{d^2 h}{dr^2} \right] \right\} \frac{dF}{dr} = \\ = - \frac{Eh}{r} \frac{dW}{dr} \frac{d^2 W}{dr^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W}{dr^4} + \left(\frac{2}{r} + \frac{6}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{d^3 W}{dr^3} + \left\{ -\frac{1}{r^3} + \frac{3(2+\nu)}{rh} \frac{dh}{dr} + \frac{3}{h^2} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dr^2} \right] \right\} \frac{d^2 W}{dr^2} + \\ + \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^2 h} \frac{dh}{dr} + \frac{3\nu}{rh^2} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dr^2} \right] \right\} \frac{dW}{dr} = \\ = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \left[-q + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dF}{dr} \frac{dW}{dr} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tähistame $\frac{dW}{dr} = \varphi$ ja $\frac{dF}{dr} = \psi$. Teades, et plaadi jäikus avaldub valemiga $\mathcal{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, saame

$$\frac{d\mathcal{D}}{dr} = \frac{Eh^2}{4(1-\nu^2)} \frac{dh}{dr}, \quad \frac{d^2 \mathcal{D}}{dr^2} = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} \left[2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dr^2} \right].$$

Arvestades neid seoseid, võime tasakaalu diferentsiaalvõrrandile (3.6) anda kuju:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^3} \varphi + \\ + \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{d\mathcal{D}}{dr} \left(2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2+\nu}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi \right) + \\ + \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{d^2 \mathcal{D}}{dr^2} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) = \frac{1}{\mathcal{D}r} \frac{d}{dr} \varphi \psi - \frac{q}{\mathcal{D}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Deformatsiooni pidevuse võrrandi võime ümber kirjutada kujul:

$$\begin{aligned} & \frac{d^3\psi}{dr^3} - \frac{2}{r} \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r^3} \psi + \\ & + h \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{h} \right) \left(2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2-\nu}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2} \psi \right) + \\ & + h \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{h} \right) \left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{\nu}{r} \psi \right) = - \frac{Eh}{r} \varphi \frac{d\varphi}{dr}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Kui võrrelda kaht saadud võrrandit (3.7) ja (3.8), näeme analoogiat, millele on juhtinud tähelepanu Y.C. Fung [14] ja W. Prager [15]. Kui $q=0$, siis võime seda väljendada järgmise tabeli kujul:

deformatsiooni pidevuse võrrandis		tasakaalu diferentsiaal- võrrandis
$1/h$	\longleftrightarrow	D
F	\longleftrightarrow	w
$(1+\nu)$	\longleftrightarrow	$(1-\nu)$

Võrrandite (3.7) ja (3.8) järku saab alandada ning me saame kaks teist järku diferentsiaalvõrrandit:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi + \frac{1}{D} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \frac{dD}{dr} = \frac{1}{Dr} \psi \varphi - \frac{\nu q}{2D} \\ & \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2} \psi - \frac{1}{h} \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\nu}{r} \psi \right) \frac{dh}{dr} = - \frac{Eh}{2r} \varphi^2 \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Need ongi põhivõrranditeks ümmarguse muutuva paksusega plaadi suurte telgsümmeetriliste läbipainete jaoks. Nende integreerimisel tulevad veel arvesse rajatingimused vastavalt kontuuri kinnitussviisile:

1) vabalt toetatud kontuuri puhul,

kui $z = 0$, siis $\varphi = 0, \psi = 0;$

kui $z = b$, siis $\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{b} \varphi = 0, \psi = 0;$

2) jäigalt kinnitatud kontuuri puhul,

kui $z = 0$, siis $\varphi = 0, \psi = 0;$

kui $z = b$, siis $\varphi = 0, \psi = 0.$

§ 4. VÖRRANDSÜSTEEMI (3.5) LAHENDAMINE
DIFERENTSMEETODIL

Vaatleme ümmargust plaati, mille paksus muutub lineaarse seaduse järgi:

$$\delta = 1 + N\rho, \quad (4.1)$$

kus $\rho = \frac{r}{b}$, $\delta = \frac{h}{h_0}$. Mõjugu plaadile ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega q . Olgu plaat kontuuril vabalt toetatud. Nii tuleb antud juhul lahendada võrrandsüsteem

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \varphi + \frac{3}{\delta} \left(\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{\nu}{\rho} \varphi \right) N &= \\ &= \frac{12(1-\nu^2)b}{Eh_0^3 \delta^3 \rho} \psi \varphi - \frac{6(1-\nu^2)b^2 \rho q}{Eh_0^3 \delta^3} \\ \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \psi - \frac{1}{\delta} \left(\frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\nu}{\rho} \psi \right) N &= \\ &= - \frac{Eh_0 b}{2\rho} \varphi^2 \end{aligned} \right\} (4.2)$$

rajatingimustel:

$$\left. \begin{aligned} \text{kui } \rho=0 &, \text{ siis } \varphi=0, \psi=0 \\ \text{kui } \rho=1 &, \text{ siis } \frac{d\varphi}{d\rho} + \nu\varphi=0, \psi=0 \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Selle ülesande lahendamiseks kasutame teist järku täpsusega diferentsmeetodit. Meid huvitavad lahendid lõigul $[0, b]$.

Jaotame raadiuse n võrdseks osaks, $l = \frac{b}{n}$. Tähistame $\varphi(\rho_i) = \varphi_i$, $\psi(\rho_i) = \psi_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Nende väärtuste jaoks moodustame algebralise võrrandsüsteemi, kirjutades võrrandid (4.2) välja igas sõlmpunktis, kusjuures tuletiste asendamiseks kasutame järgmisi seoseid:

$$\frac{d\varphi(\rho_i)}{d\rho} \approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2l}, \quad \frac{d^2\varphi(\rho_i)}{d\rho^2} \approx \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{l^2},$$

$$\frac{d\psi(\rho_i)}{d\rho} \approx \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2l}, \quad \frac{d^2\psi(\rho_i)}{d\rho^2} \approx \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{l^2},$$

$$\frac{d\varphi(\rho_n)}{d\rho} \approx \frac{3\varphi_n - 4\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}}{2l}. \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Nüüd saame rajaülesande (4.2) - (4.3) asemel algebralise mitte-lineaarsete võrrandite süsteemi:

$$A_i \varphi_{i+1} + B_i \varphi_i + C \varphi_{i-1} = D_i \psi_i \varphi_i - Q_i^* \quad (4.4)$$

$$F_i \psi_{i+1} + G_i \psi_i + H_i \psi_{i-1} = J_i \varphi_i^2, \quad (4.5)$$

$$\varphi_0 = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\psi_0 = 0,$$

$$(3 - 2lv) \varphi_n - 4\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} = 0,$$

$$\psi_n = 0.$$

kus

$$A_i = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{3}{\sigma_i} \mathcal{N} \right),$$

$$B_i = -\frac{2}{l^2} - \frac{1}{\rho_i^2} + \frac{3v}{\sigma_i \rho_i} \mathcal{N},$$

$$\begin{aligned}
 C_i &= \frac{1}{l^2} - \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{3}{\sigma_i} N \right), \\
 D_i &= \frac{12(1-\nu^2)h}{Eh_0^3} \cdot \frac{1}{\sigma_i^3 \rho_i}, \\
 Q_i^* &= \frac{6(1-\nu^2)h^3 q}{Eh_0^3} \cdot \frac{\rho_i}{\sigma_i^3}, \\
 F_i &= \frac{1}{l^2} + \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\sigma_i} N \right), \\
 g_i &= -\frac{2}{l^2} - \frac{1}{\rho_i^2} + \frac{\nu}{\sigma_i \rho_i} N, \\
 H_i &= \frac{1}{l^2} - \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\sigma_i} N \right), \\
 J_i &= -\frac{Eh_0 h}{2} \cdot \frac{\sigma_i}{\rho_i}.
 \end{aligned}$$

Saadud süsteemi lahendamiseks kasutame Kelléri ja Reissi poolt esitatud [9] interpoleeritud iteratsiooni meetodit.

Kõigepealt võtame vaatluse alla võrrandi (4.4), kusjuures tähistame $T_i = D_i \varphi_i \psi_i - Q_i^*$. Alglähendi leiame nii, et $\psi(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n) = 0$. Saame lineaarse algebraise süsteemi $\varphi(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ suhtes:

$$\left. \begin{aligned}
 A_i \varphi_{i+1} + B_i \varphi_i + C_i \varphi_{i-1} &= T_i \\
 \varphi_0 &= 0 \\
 (3-2\nu)\varphi_n - 4\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (4.6)$$

Selle süsteemi lahendame elimineerimismeetodil, mis seisneb tundmatute järk-järgulises elimineerimises järgmise skeemi järgi:

$$\varphi_{i+1} = \frac{1}{A_i} (-B_i \varphi_i - C_i \varphi_{i-1} + J_i); \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_1 = \xi, \quad (\text{selle võtame uueks tundmatuks})$$

$$\varphi_2 = a_2 \xi + b_2,$$

$$\varphi_3 = a_3 \xi + b_3,$$

.....

$$\varphi_n = a_n \xi + b_n,$$

Asendades φ_n , φ_{n-1} ja φ_{n-2} viimasesse võrrandisse, saame avaldada sealt ainukese tundmatu ξ :

$$\xi = - \frac{(3-2lv)b_n - 4b_{n-1} + b_{n-2}}{(3-2lv)a_n - 4a_{n-1} + a_{n-2}}.$$

Kordajad saame arvutada järgmiselt:

$$\left. \begin{aligned} a_{i+1} &= -\frac{1}{A_i} (B_i a_i + C_i a_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} b_{i+1} &= -\frac{1}{A_i} (B_i b_i + C_i b_{i-1} - J_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ b_0 &= 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Süsteemi (4.6) lahendiks saame $\varphi^{\circ}(\varphi_0^{\circ}, \varphi_1^{\circ}, \varphi_2^{\circ}, \dots, \varphi_n^{\circ})$.

Nüüd asetame selle võrrandi (4.5) paremasse poolde. Saame jälle mingi lineaarsete võrrandite süsteemi, mille lahendame samuti elimineerimismeetodil:

$$\left. \begin{aligned} F_i \psi_{i+1} + G_i \psi_i + H_i \psi_{i-1} &= J_i \varphi_i^{\circ 2} \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ \psi_0 &= 0 \\ \psi_n &= 0 \end{aligned} \right\} (4.7)$$

$$\psi_{i+1} = \frac{1}{F_i} (-G_i \psi_i - H_i \psi_{i-1} + J_i \varphi_i^{\circ 2}),$$

$$\psi_0 = 0,$$

$$\psi_1 = \eta,$$

$$\psi_2 = c_2 \eta + d_2,$$

$$\psi_3 = c_3 \eta + d_3,$$

.....

$$\psi_n = c_n \eta + d_n = 0,$$

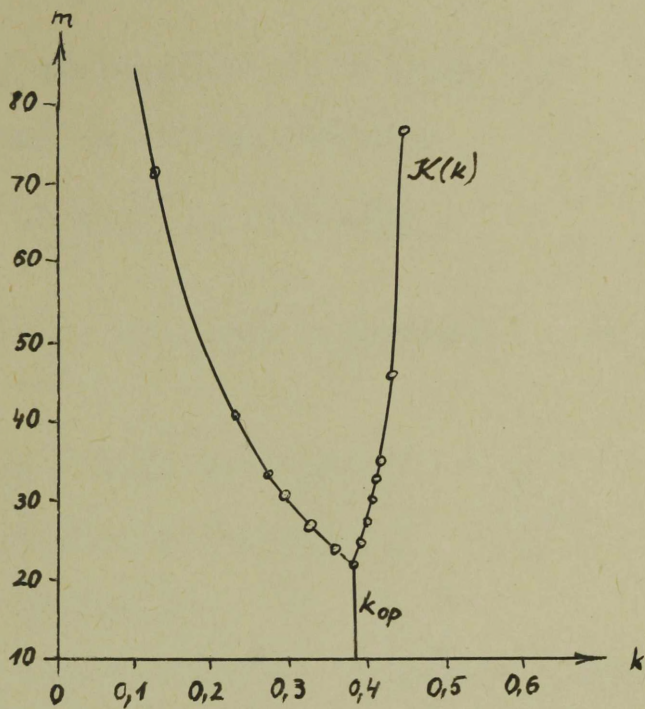
$$\eta = -\frac{d_n}{c_n}.$$

$$\left. \begin{aligned} c_{i+1} &= -\frac{1}{F_i} (G_i c_i + H_i c_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ c_0 &= 0 \\ c_1 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

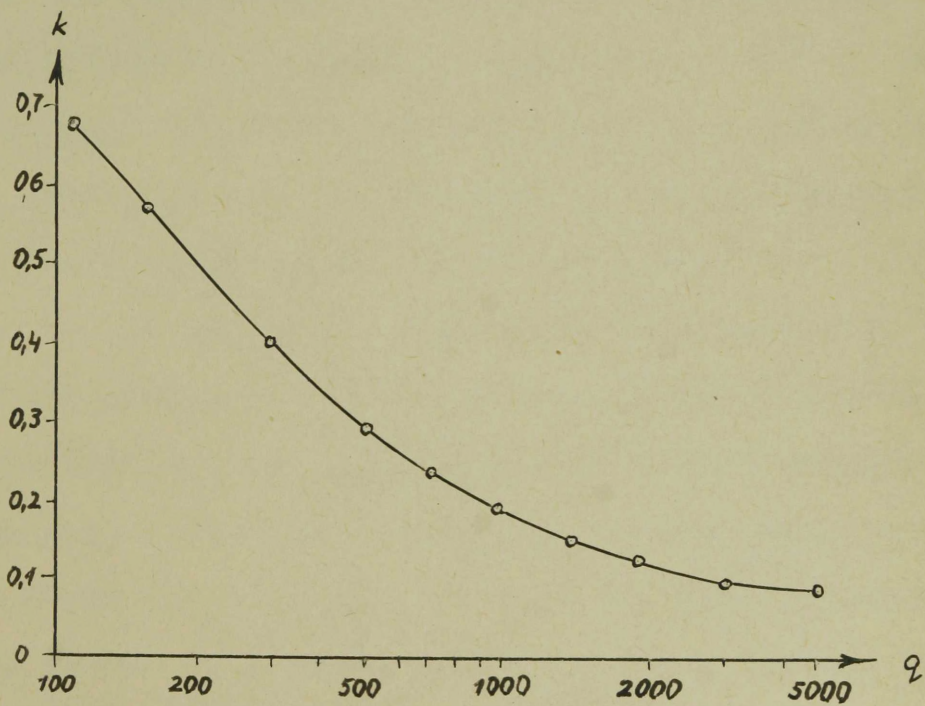
$$\left. \begin{aligned} d_{i+1} &= -\frac{1}{F_i} (G_i d_i + H_i d_{i-1} + J_i \varphi_i^{\circ 2}) \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ d_0 &= 0 \\ d_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Saame lahendiks $\psi^{\circ}(\psi_0^{\circ}, \psi_1^{\circ}, \psi_2^{\circ}, \dots, \psi_n^{\circ})$.

Asetame saadud lahendid φ° ja ψ° võrrandi (4.4) paremasse poolde ning leiame suuruse



Joonis 1.



Joonis 2

$$J_i = D_i \varphi_i^0 \psi_i^0 - q_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Nüüd leiame uuesti süsteemi (4.6) lahendi $\varphi^{1*}(\varphi_0^{1*}, \varphi_1^{1*}, \dots, \varphi_n^{1*})$

Järgmiseks algühendiks võtame suuruse:

$$\varphi^1 = \kappa \varphi^{1*} + (1-\kappa) \varphi^0,$$

kus κ on nn. interpolatsiooni parameeter ja muutub vahemikus $0 \leq \kappa \leq 1$.

Edasi asendame saadud uue lahendi φ^1 süsteemi (4.7) paremasse poolde ja leiame uue lahendi ψ^1 . Protsessi kordame kuni oleme saavutanud vajaliku täpsuse.

Keller ja Reiss on näidanud, kuidas on võimalik leida interpolatsiooniparameetrit κ kindla koormuse jaoks. Optimaalseks interpolatsiooniparameetriks nimetame sellist κ väärtust, mille puhul iteratsiooniprotsess kõige kiiremini koondub antud koormuse juures. Tüüpiline seos interpolatsiooniparameetri ja vajaliku täpsuse saavutamiseks tehtud iteratsioonide arvu vahel $\mathcal{K}(\kappa)$ on toodud graafikul (joonis 1), mis on võetud tööst [9]. Optimaalsele väärtusele vastab graafikul κ_{op} , kus $\mathcal{K}(\kappa)$ omab miinimumi.

Iga koormuse jaoks tuleb leida vastav optimaalne κ . Keller-Reiss on näidanud, et optimaalse κ puhul koondumisprotsessi kiirus ei sõltu olulisel määral valitud jaotuste arvust. Praktiliselt on kasulik leida optimaalse κ väärtus ainult mõnede erinevate koormuste jaoks ja konstrueerida vastav graafik, kust saaks määrata vahepealsetele koormustele vastavad κ_{op} väärtused (joonis 2)

Käesoleva töö korral, kus vaadeldakse muutuva paksusega plaate, on interpolatsiooniparameetri κ määramine mõnevõrra komplikseeritum, kuna võib arvata, et κ sõltub ka plaadi kujust.

Hainim
31. märts 1964.

KASUTATUD KIRJANDUS

1. Григорьев А.С., Об изгибе круглой плиты за пределом упругости. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
2. Ильюшин А.А., Пластичность. Гостехиздат. 1948.
3. Ковленко А.Д., Круглые пластины переменной толщины. Физматгиз. 1959.
4. Лепик Ю.Р., Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах. Инж. сб. т. 24, 1956.
5. Лепик Ю.Р., Равновесие гибких пластинок за пределом упругости. ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.
6. Лепик Ю.Р., Температурные напряжения в гибких неоднородных пластнах за пределом упругости. Рукопись, 1963.
7. Лурье Л.И., К задаче о равновесии плиты переменной толщины. Труды Ленинградского индустриального института, раздел физ.-матем. наук, № 6, 1936.
8. Соколовский В.В., Теория пластичности, Гостехиздат, 1950.
9. Keller, H. B. and Reiss, E.L., Iterative Solutions for the Non-Linear Bending of Circular Plates. Commun Pure and Appl. Math., vol. XI, 1957.
10. Mansfield, E. H., On the Analysis of Elastic Plates of Variable Thickness, Quart. J. Mech. Appl. Math., vol. XV, p. 2, 1962.

11. Olszak, W., Urbanovski, W., Plastic non-homogeneity: a survey of theoretical and experimental research. Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 1959, chapt.VII.
12. Pichler, O., Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, Berlin, 1928.
13. Sakkov, E., Ümmargune muutuva paksusega plaat suurte telg-sümmeetriliste läbipainete korral. Seminaritöö, Tartu, 1963.
14. Fung, I.C., Bending of Thin Elastic Plates of Variable Thickness, J. Aero. Sci. 20, 1953.
15. Prager, W., On the Analogy Between Plates and Disks, Proc. Roy. Soc., A. 239, 1957.

SISUKORD

	Lk.
Sissejuhatus	1
Kasutatud tähistusi	4
§ 1. Põhiseosed	7
§ 2. Põhivõrrandite tuletamine	12
§ 3. Ümmarguse elastse muutuva paksusega homo- geense plaadi suured telgsümmeetrilised läbipainded	19
§ 4. Võrrandsüsteemi (3.5) lahendamine diferents- meetodil	24
Kasutatud kirjandus	31