VEKTORARVUTUS ja RUUMI ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

E. Etverk

Tallinn 1967

AR

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika kateeder

E. Etverk

V E K T O R A R V U T U S
ja
R U U M I   A N A L Ü Ü T I L I N E
G E O M E E T R I A

Konspekt kaugüliõpilastele

Tallinn
1967

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра математики

Е. Етверк

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

На эстонском языке

Vastutav toimetaja O. Rünk

Trükkimisele antud 20.VII 67. Paber 60x84/16
Trükipg. 3,25. Tingpg. 3,02. Tiraaz 1500
MB-07332. TPI rotaprint, 1967. Tell.326

Hind 10 kop.

I. V E K T O R A R V U T U S

§ 1. Vektor. Vektorite võrdsus, liitmine ja arvuga korrutamine

1. Vektori mõiste

Suurusi on mitut liiki. Kaks lihtsamat suuruste liiki on skalaarsed suurused (ehk skalaarid) ja vektoriaalsed suurused (ehk vektorid).

Skalaarseks suuruseks nimetatakse suurust, mille väärtus pärast mõõduühiku valikut on täielikult iseloomustatav üheainsa arvuga.

Skalaarid on näiteks keha ruumala, mass ja temperatuur.

Vektoriaalseks suuruseks nimetatakse suurust, mille täielikuks iseloomustamiseks tuleb peale tema arvulise väärtuse määrata veel suuruse mõjumise siht ja suund.

Vektorid on näiteks keha liikumise kiirus ja kiirendus, jõud jm.

Vektorite tähistamiseks kasutatakse trükikirjas nn.poolpaksu kirja, käsitsi kirjutades ja masinkirjas aga noolekesi tähtede peal, nagu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$. Neid loeme: vektor a jne.

Vektori geomeetriliseks kujutiseks on suunaga lõik ruumis (joon. 1), s.o. sirglõik, mille üks otspunkt on loetud lõigu alguspunktiks ja teine tema lõpp-punktiks. Viimast märgitakse joonisel noolekesega. Selline geomeetriline vektor – suunaga sirglõik – iseloomustab täielikult vektoriaalset suurust, sest

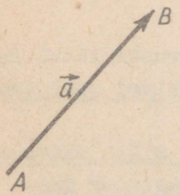
1) tema pikkus näitab vektori arvulist väärtust ehk vektori moodulit;

2) sirge, millel see lõik asetseb, näitab vektoriaalse suuruse mõjumise <u>sihti</u> (seda sirget nimetatakse <u>vektori kandjaks</u>);

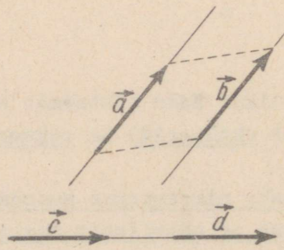
3) suund lõigu alguspunkti poolt lõpp-punkti poole on <u>vektori suund</u>.

Edaspidi mõistame vektori all ikka geomeetrilist vektorit.

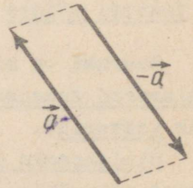
Vektorit, mille alguspunkt on A ja lõpp-punkt on B, tähistatakse sümboliga $\overrightarrow{AB}$. Vektori $\vec{a}$ pikkust (moodulit) märgitakse sümboliga $|\vec{a}|$ või lihtsalt a. Niisamuti vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus on $|\overrightarrow{AB}| = AB$.



Joon. 1.



Joon. 2.



Joon. 3.

2. <u>Kahe vektori võrdsus</u>

See, milliseid vektoreid loetakse võrdseiks, sõltub vaadeldavate suuruste liigist. Meie rakendame järgmist vektorite võrdsuse definitsiooni:

<u>kaht vektorit nimetatakse võrdseiks, kui neil on üks ja sama pikkus, siht ja suund</u>.

Kahel vektoril on üks ja sama siht, kui nende kandjad on paralleelsed (nagu vektoreil $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ joonisel 2) või ühtivad (nagu vektoreil $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ samal joonisel 2). Kaks samasihilist vektorit on kas samasuunalised (sümbolites $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) või vastandsuunalised (sümbolites $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$). Seega vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ võrdsuse definitsiooni saame sümbolites avaldada kujul (joon. 2):

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ kui } |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ ja } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}.$$

Kui kaks vektorit erinevad ainult suunalt, s.t. kui

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ ja } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b},$$

siis neid nimetatakse vastandvektoriteks (joon. 3). Vektori $\vec{a}$ vastandvektorit tähistatakse sümboliga $-\vec{a}$. Kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on vastandvektorid, siis

$$\vec{a} = -\vec{b}.$$

Vektorite võrdsuse definitsioonist järeldub, et rööplükkel saame vektorist temaga võrdse vektori (joon. 2). Seega vektori alguspunkt on vabalt valitav.

Samasihilisi vektoreid nimetatakse ka kollineaarseteks vektoriteks.

3. Vektorite summa ja vahe

Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summaks nimetatakse kolmandat vektorit $\vec{c}$, mille alguspunktiks on esimese vektori alguspunkt ja lõpp-punktiks teise vektori lõpp-punkt eeldusel, et teise vektori alguspunkt on tehtud ühtivaks esimese lõpp-punktiga (joon. 4):

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \vec{c}.$$

Kui sama punkti A juurde kannaksime esmalt vektori $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ ja viimase lõpp-punkti juurde vektori $\vec{a} = \overrightarrow{CD}$, siis rööpküliku omaduste järgi saaksime sama summa:

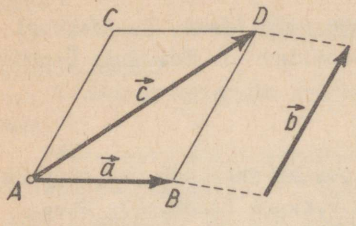
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Seega vektorite liitmisel kehtib vahetuvuseseadus. Ühtlasi näeme jooniselt, et vektorite liitmisel kehtib peale ülalantud kolmnurgareegli ka järgmine rööpkülikureegel: kui liidetavatel vektoritel on ühine alguspunkt A, siis nende summaks on liidetavatele ehitatud rööpküliku diagonaalvektor, mille alguspunktiks on sama punkt A.

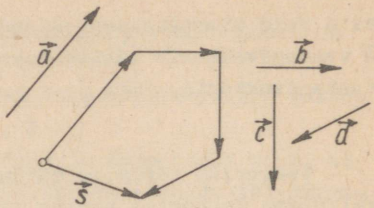
Kahe vektori liitmise eeskirja korduval rakendamisel saame liita kuitahes palju vektoreid (joon. 5):

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}.$$

Kui vektorite liitmisel viimase liidetava lõpp-punkt ühtib esimese liidetava alguspunktiga, siis summaks on nn. nullvektor, s.t. vektor, mille pikkus on null ja siht on määramata. Näiteks kahe vastandvektori summa on nullvektor.



Joon. 4.



Joon. 5.

Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheks nimetatakse vektori $\vec{a}$ ja vektori $\vec{b}$ vastandvektori $-\vec{b}$ summat:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Kui vähendatav ja lahutatav on viidud ühise alguspunkti juurde (joon. 6), siis vaheks on vektor, mis viib lahutatava lõpp-punktist vähendatava lõpp-punkti.

Vektorite liitmisel kehtib ka ühenduvuseseadus:

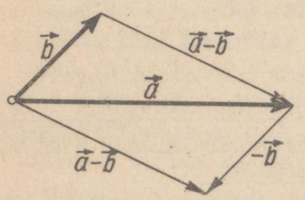
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Tõepoolest (joon. 7),

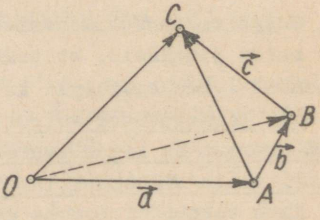
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

ja

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{OB} + \vec{c} = \overrightarrow{OC}.$$



Joon. 6.



Joon. 7.

4. Vektori korrutamine arvuga

Vektori $\vec{a}$ ja arvu $\alpha \neq 0$ korrutiseks

$$\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$$

nimetatakse vektoriga $\vec{a}$ kollineaarset vektorit, mille pikkus võrdub vektori $\vec{a}$ pikkuse ja arvu α absoluutväärtuse korrutisega ja mis $\alpha > 0$ puhul on vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline, aga $\alpha < 0$ puhul – vastandsuunaline. Kui $\alpha = 0$, siis $\alpha\vec{a} = 0\vec{a} = 0$ tähendab nullvektorit. Seega:

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|.$$

Kui $\alpha = \frac{1}{a} > 0$, siis

$$\alpha\vec{a} = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \vec{a}^{\,o},$$

kus $\vec{a}^{\,o}$ tähistab vektori $\vec{a}$ ühikvektorit, s.o. vektoriga $\vec{a}$ kollineaarset ja samasuunalist vektorit, mille pikkus on 1.

Vektori ja arvu korrutamisel kehtivad järgmised seadused:

1) vahetuvuseseadus, s.t.

$$\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha;$$

2) ühenduvuseseadus, s.t.

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a};$$

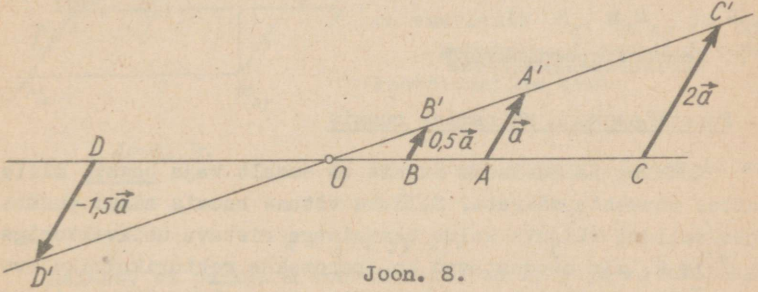
3) jaotuvuseseadus skalaarse teguri suhtes, s.t.

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};$$

4) jaotuvuseseadus vektoriaalse teguri suhtes, s.t.

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Vektori korrutamist mingi arvuga α võib vaadelda vektori niisuguse homoteetsusteisendusena (sarnasusteisendusena), mille tegur on α ja keskpunkt O on meelevaldne. Joonisel 8 on nii esitatud korrutised $\alpha\vec{a}$, kui α on 0,5; 2 ja –1,5; seejuures OB = 0,5·OA jne.



Joon. 8.

Ülalantud korrutamiseseadused 2, 3 ja 4 on kõik homoteetsuse omadused ja järelduvad joonisest 8 (vahetuvuseseadus on kehtestatud definitsiooniga).

Ühenduvuseseaduse tõestamiseks oletame, et $OB = \beta \cdot OA$ ja $OD = \alpha \cdot OB$. Siis $OD = \alpha(\beta \cdot OA) = \alpha\beta \cdot OA$. Nüüd on vektor $\overrightarrow{DD'}$ saadav kahel viisil:

$$\overrightarrow{DD'} = \alpha \cdot \overrightarrow{BB'} = \alpha(\beta \vec{a})$$

$$\overrightarrow{DD'} = \alpha\beta \cdot \overrightarrow{AA'} = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}.$$

Järelikult paremal seisvad avaldised on võrdsed.

Homoteetsust kasutades saame tõestada ka ülejäänud seadused.

5. Lineaarsed operatsioonid vektoritega

Lineaarseteks operatsioonideks vektoritega nimetatakse vektori korrutamist arvuga ja vektorite liitmist ning lahutamist. Nagu eespool nägime, kehtivad siin samad arvutamiseseadused, mis on kehtivad arvavaldiste kohta, seetõttu avaldisi, mis sisaldavad lineaarseid operatsioone vektoritega, tuleb teisendada ja lihtsustada algebra algkursusest tuntud reeglite järgi. Näiteks:

1) $$3(2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{b} - 3\vec{c}) + 4(\vec{a} + 2\vec{b}) =$$
$$= 6\vec{a} - 15\vec{b} + 3\vec{c} - 2\vec{b} + 6\vec{c} + 4\vec{a} + 8\vec{b} =$$
$$= 10\vec{a} - 9\vec{b} + 9\vec{c} = 10\vec{a} - 9(\vec{b} - \vec{c}).$$

2) $$\alpha(\vec{a} - \vec{b}) + \beta(\vec{b} - \vec{c}) - \gamma(\vec{c} - \vec{a}) =$$
$$= (\alpha + \gamma)\vec{a} + (\beta - \alpha)\vec{b} - (\beta + \gamma)\vec{c}.$$

§ 2. Vektori koordinaadid

1. Punkti asukoha määramine ruumis

Asukoha määramiseks ruumis on esmalt vaja baasi, mille suhtes asukohta määrata. Selleks võtame ruumis mingi punkti O ühes sellest väljuva kolme üksteisega ristuva ühikvektoriga $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$, mis moodustavad nn. paremakäe vektorikolmiku (vektori $\vec{k}$ lõpp-punktist vaadates näib täisnurkne pööre, mis vektori $\vec{i}$ viib vektori $\vec{j}$ peale, toimuvat vastu kellaosuti liikumist). Selle baasiga on määratud kolm koordinaattelge x, y ja z, mille ühikvektorid on vastavalt $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$, ning kolm koordinaattasapinda xy, yz ja zx, mis lõikuvad koordinaatide alguspunktis O (joon. 9).

Ruumipunkti M asukoha määramiseks leiame tema ristprojektsiooni M_{xy} xy-tasapinnal ja punkti M_{xy} ristprojektsiooni x-teljel, s.o. punkti M_x. Siis alguspunktist O punkti M minev vektor, s.o. punkti M kohavektor

$$\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_xM_{xy}} + \overrightarrow{M_{xy}M}.$$

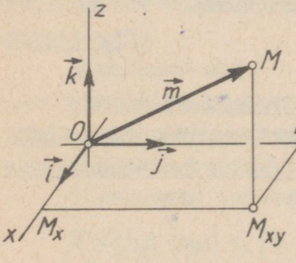
Et vektorid $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{M_xM_{xy}}$ ja $\overrightarrow{M_{xy}M}$ on vastavalt kollineaarsed vektoritega $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$, siis leidub kolm sellist arvu x, y ja z, et

$$\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i},\ \overrightarrow{M_xM_{xy}} = y\vec{j} \quad \text{ja} \ \overrightarrow{M_{xy}M} = z\vec{k}.$$

Asendades saame punkti M kohavektori nüüd kujul

$$\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Koordinaattelgede sihilisi kohavektori liidetavaid $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ nimetatakse kohavektori komponentideks telgede sihis ja nende kordajaid nimetatakse kohavektori koordinaatideks, ühtlasi ka kohavektori lõpp-punkti M koordinaatideks.



Joon. 9.

Punkti kohavektori koordinaatideks on selle kohavektori projektsioonid koordinaattelgedel, sest punkti M läbivad telgede risttasapinnad moodustavad telgedel lõigud, mille pikkused on vastavalt OM_x, M_xM_{xy} ja $M_{xy}M$.

Kohavektori avaldist tema koordinaatide kaudu

$$\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

kirjutame edaspidi lühemalt kujul

$$\vec{m} = \{x;\ y;\ z\}.$$

Lauset, et punkti M koordinaadid on x, y ja z, kirjutame endiselt kujul

$$M(x;\ y;\ z).$$

2. Vabavektori koordinaadid

Olgu vektori alguspunktiks punkt $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja lõpp-punktiks $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Leiame avaldise vektorile $\overrightarrow{AB}$ telgede ühikvektorite kaudu. Vektorite liitmise eeskirja järgi

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

seega

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

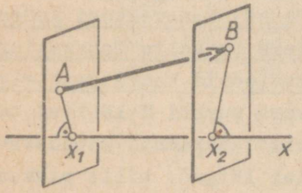
Kohavektorid $\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OA}$ avaldame ühikvektorite kaudu. Siis saame:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\ &= (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k} = \\ &= \{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\},\end{aligned}$$

s.t. mistahes vektori koordinaadid võrduvad tema lõpp-punkti ja alguspunkti vastavate koordinaatide vahedega.

Kui vektori otspunktidest A ja B panna läbi tasapinnad risti x-teljega, siis need lõikavad telge vastavalt punktides x_1 ja x_2 (joon. 10). Järelikult on vektori projektsioon teljel x suurusega $x_2 - x_1$. Niisiis,

vektori koordinaadid on vektori projektsioonid telgedel.



Joon. 10.

Ühe tähega märgitud vektori koordinaate tähistame sama tähega, kuid koordinaadile vastava indeksiga:

$$\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}.$$

Näide 1. Leiame vektori koordinaadid, kui vektori alguspunkt on A(3; -2; 5) ja lõpp-punkt on B(-1; 6; 2):

$$\overrightarrow{AB} = \{-1-3;\ 6+2;\ 2-5\} = \{-4;\ 8;\ -3\}.$$

Näide 2. Leiame vektori $\vec{a} = \{-4;\ 8;\ -3\}$ alguspunkti A, kui lõpp-punkt on B(-1; 6; 2).

Vektori $\vec{a}$ koordinaadid avalduvad otspunktide koordinaatide kaudu kujul

$$\begin{cases} a_x = x_2 - x_1, \\ a_y = y_2 - y_1, \\ a_z = z_2 - z_1. \end{cases}$$

Avaldades neist vektori alguspunkti koordinaadid, saame

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - a_x = -1 + 4 = 3, \\ y_1 = y_2 - a_y = 6 - 8 = -2, \\ z_1 = z_2 - a_z = 2 + 3 = 5. \end{cases}$$

Seega vektor $\vec{a}$ algab punktist A(3; -2; 5).

Lõpuks märgime, et

<u>võrdsetel vektoritel on vastavalt võrdsed koordinaadid ja, ümberpöördult, vastavalt võrdsete koordinaatidega vektorid on võrdsed.</u>

See tõsiasi järeldub sellest, et kui võrdsed vektorid viia rööplükke abil koordinaatide alguspunkti juurde, siis nende lõpp-punktid ühtivad. Järelikult on neil ühed ja samad koordinaadid - nende ühise lõpp-punkti koordinaadid. Ümberpöördult: kahe vektori vastavalt võrdsed koordinaadid määravad ainult ühe punkti, mis on neile vektoreile ühiseks lõpppunktiks.

3. <u>Lineaarsed operatsioonid vektoritega koordinaatides</u>

Vektorit, mis antud vektoritest saadakse lineaarsete operatsioonide tulemusena, nimetatakse nende <u>lineaarseks kombinatsiooniks</u>.

Tõestame, et

<u>vektorite lineaarse kombinatsiooni koordinaatideks on nende vektorite vastavate koordinaatide samalaadilised lineaarsed kombinatsioonid.</u>

Tõestuseks tuletame vektorite

$$\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}, \quad \vec{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$$

lineaarse kombinatsiooni

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

koordinaadid. Selleks avaldame kõik vektorid ühikvektorite kaudu:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + \beta(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) +$$
$$+ \gamma(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}),$$

mis pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saab kuju

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x)\vec{i} + (\alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y)\vec{j} +$$
$$+ (\alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z)\vec{k}.$$

Tulemus näitab, et väide on õige:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \{\alpha a_x+\beta b_x+\gamma c_x;\ \alpha a_y+\beta b_y+\gamma c_y;\ \alpha a_z+\beta b_z+\gamma c_z\}.$$

Näide 1. Kui $\vec{a} = \{3;\ 2;\ 4\}$, siis $5\vec{a} = \{5\cdot3;\ 5\cdot2;\ 5\cdot4\} = \{15;\ 10;\ 20\}$.

Näide 2. Kui $\vec{a} = \{2;\ -4;\ -1\}$ ja $\vec{b} = \{6;\ 3;\ -1\}$, siis

$$4\vec{a} + 3\vec{b} = 4\{2;\ -4;\ -1\} + 3\{6;\ 3;\ -1\} =$$
$$= \{8;\ -16;\ -4\} + \{18;\ 9;\ -3\} =$$
$$= \{26;\ -7;\ -7\}.$$

Viimases näites leidsime tulemuse üksikute tehete kaupa. Ülalantud teoreemi põhjal saab selle leida kiiremini järgmiselt:

$$4\vec{a} + 3\vec{b} = \{4.2 + 3\cdot6;\ 4\cdot(-4) + 3\cdot3;\ 4\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\} =$$
$$= \{26;\ -7;\ -7\}.$$

Näide 3. Kui $\vec{a} = \{4;\ -2;\ 3\}$, $\vec{b} = \{1;\ 0;\ -1\}$, $\vec{c} = \{-2;\ 3;\ 5\}$, siis $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} = \{8-3-8;\ -4-0+12;\ 6+3+20\} = \{-3;\ 8;\ 29\}$.

§ 3. Vektorite skalaarkorrutis

1. Skalaarkorrutise mõiste

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutiseks $\vec{a}\cdot\vec{b}$ nimetatakse vektorite pikkuste ja nende vahelise nurga koosinuse korrutist:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

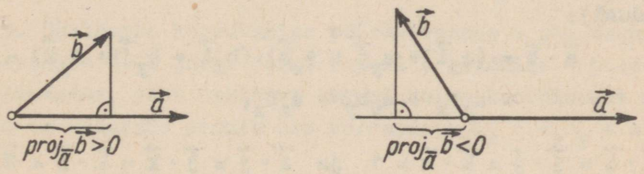
Sellest definitsioonist järeldub:

1) kui vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk (suurusega 0 ja π

vahelt) on täisnurgast väiksem, võrdub täisnurgaga, või on täisnurgast suurem, siis skalaarkorrutis $\vec{a} \cdot \vec{b}$ on vastavalt positiivne, null, või negatiivne;

2) skalaarkorrutis võrdub korrutisega, mille teguriteks on ühe vektori pikkus ja teise vektori projektsioon kui suunaga lõik esimese sihil (joon. 11, kaks varianti vastavalt sellele, kas nurk vektorite vahel on teravnurk või nürinurk):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a},\vec{b}) = a \cdot proj_{\vec{a}}\vec{b} = b \cdot proj_{\vec{b}}\vec{a};$$



Joon. 11.

3) kui tegurid on võrdsed, siis skalaarkorrutis võrdub vektori pikkuse ruuduga:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = aa \cos 0 = a^2 \text{ ehk } a^2 = \vec{a}^2,$$

seega

$$a = \sqrt{\vec{a}^2},$$

s.t. <u>vektori pikkus võrdub ruutjuurega vektori skalaarsest ruudust</u>.

2. Skalaarkorrutise põhiomadused

Vektorite skalaarne korrutamine kui arvutusoperatsioon toimub järgmiste seaduste järgi, mis kõik kergesti järelduvad skalaarkorrutise definitsioonist (kuidas?):

1) vahetuvuseseadus, mis ütleb, et

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

2) ühenduvuseseadus, mille järgi

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}), \text{ (kus } \lambda \text{ on arv);}$$

3) jaotuvuseseadus, mille järgi

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Neist järeldub muuseas, et

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - b^2;$$

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2.$$

3. Skalaarkorrutis koordinaatides

Kui tegurid on antud koordinaatides

$$\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\},$$

siis skalaarkorrutis leitakse järgmiselt (rakendades p.2 antud omadusi):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

sest

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \quad \text{ja} \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$

Seega

kahe vektori skalaarkorrutis võrdub nende ühenimeliste koordinaatide korrutiste summaga.

Sellest järelduvad järgmised tõsiasjad.

1. Kui $\vec{a}\perp\vec{b}$, siis $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$ ja ümberpöördult (viimane eeldusel, et $\vec{a} \neq 0$ ja $\vec{b} \neq 0$).

2. Vektori $\vec{a}$ pikkus

$$a = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

mis järeldub eelmisest järeldusest ($a_x = b_x$ jne.).

3. Kahe vektori vahelise nurga koosinus (lähtudes skalaarkorrutise definitsioonist) avaldub koordinaatides kujul

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Kui vektoriks $\vec{b}$ võtta ühikvektor $\vec{i}$, $\vec{j}$ või $\vec{k}$, siis saame vektori $\vec{a}$ sihikoosinused:

$$\cos(\vec{i},\vec{a}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{j},\vec{a}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\vec{k},\vec{a}) = \frac{a_z}{a}.$$

Tähistades vektori sihinurki vastavalt tähtedega α, β ja γ, saame kergesti kontrollida (teha seda!), et vektori sihikoosinuste vahel kehtib järgmine seos:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

4. Vektori $\vec{a}$ projektsioon vektori $\vec{b}$ sihil (lähtudes p. 1 järeldusest 2) avaldub koordinaatides kujul

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

5. Skalaarse korrutamise pöördülesanne – ühe teguri $\vec{a}$ ja korrutise $\vec{a}\cdot\vec{b}$ järgi teise teguri $\vec{b}$ leidmine – pole üheselt lahenduv, sest otsitava teguri kolme koordinaadi määramiseks on kasutada ainult üks võrrand: $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

§ 4. Vektorite vektorkorrutis

1. Vektorkorrutise mõiste

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutiseks $\vec{a}\times\vec{b}$ nimetatakse vektorit $\vec{c}$, mis täidab järgmist kolme tingimust:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$ ja $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad nn. paremakäe kolmiku (nagu vastavalt parema käe pöial, esimene sõrm ja teine sõrm väljasirutatult);

3) vektori $\vec{c}$ pikkus $c = ab\sin(\vec{a},\vec{b})$, s.o. vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindalaga.

Sellest definitsioonist järeldub, et sõltuvalt vektorite vahelisest nurgast

$$0 \leqslant |\vec{a}\times\vec{b}| \leqslant ab,$$

kusjuures vektorkorrutise pikkus on null, kui tegurid on kollineaarsed ja pikkus on ab, kui tegurid on risti.

2. Vektorkorrutise põhiomadused

Vektorite vektoriaalne korrutamine kui arvutusoperatsioon toimub järgmiste seaduste järgi, mis järelduvad selle operatsiooni definitsioonist:

1) alternatiivsuseseadus, mis ütleb, et

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$$

2) ühenduvuseseadus, s.t.

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \text{ (kus } \lambda \text{ on arv);}$$

3) jaotuvuseseadus, mille kohaselt

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

(Nende seaduste tõestused vt. näiteks õpikust Privalov, Analüütiline geomeetria, II osa, pt. II, § 12.)

3. Vektorkorrutis koordinaatides

Kui vektorkorrutise tegurid on antud koordinaatides

$$\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}, \qquad \vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\},$$

siis, avaldades nad ühikvektorite $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ kaudu ning rakendades eelmises punktis antud korrutamiseseadusi, saame:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_xb_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_yb_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_zb_x(\vec{k} \times \vec{i}) + \\ &+ a_xb_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_yb_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_zb_y(\vec{k} \times \vec{j}) + \\ &+ a_xb_z(\vec{i} \times \vec{k}) + a_yb_z(\vec{j} \times \vec{k}) + a_zb_z(\vec{k} \times \vec{k}).\end{aligned}$$

Vektorkorrutise definitsioonist järeldub:

1) ühenimeliste ühikvektorite vektorkorrutis on 0, s.t.

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

sest $\sin(\vec{i},\vec{i}) = 0$ jne., seega korrutis on nullvektor;

2) kahe erinimelise ühikvektori korrutis võrdub kolmanda ühikvektoriga või selle vastandvektoriga sõltuvalt sellest, kas tegurid on antud ringjärjekorras ijki... või vastandjärjekorras kjik...:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

(Kontrollida neid võrdusi definitsiooni põhjal!)

Neid korrutisi kasutades saame:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-a_yb_x\vec{k}+a_zb_x\vec{j}+a_xb_y\vec{k}-a_zb_y\vec{i}-a_xb_z\vec{j}+a_yb_z\vec{i}.$$

Viies igas kahes liikmes ühise ühikvektori sulgude ette ja kirjutades sulgudesse jääva teguri determinandina, saame:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Saadud võrduse parema poole võib kirjutada kolmerealise determinandi kujul järgmiselt:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

See determinant ongi vektorkorrutise avaldiseks koordinaatides.

<u>Näide</u>. Vektorite $\vec{a}=\{1;\ -2;\ 3\}$ ja $\vec{b}=\{2;\ -1;\ 2\}$ vektorkorrutise leiame järgmiselt:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=(-4+3)\vec{i}-(2-6)\vec{j}+(-1+4)\vec{k}=$$
$$=-\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}=\{-1;\ 4;\ 3\}.$$

Vektorkorrutise kaudu saab avaldada vektoritele ehitatud kolmnurga pindala ja määrata nurka vektorite vahel. Kui

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}=\{c_x;\ c_y;\ c_z\},$$

kus

$$c_x=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\quad c_y=\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\quad c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix},\qquad (1)$$

siis vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud kolmnurga pindala

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}\ ;$$

nende vektorite vahelise nurga siinus aga avaldub kujul:

$$\sin(\vec{a},\vec{b}) = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{ab} = \frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Vektoriaalse korrutamise pöördülesanne – antud kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ järgi leida kolmas vektor $\vec{b}$ nii, et $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ – on lahenduv muidugi ainult siis, kui $\vec{a}\perp\vec{c}$, s.t. $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$. Otsitava vektori $\vec{b}$ koordinaadid peavad rahuldama kolmest võrrandist koosnevat süsteemi (1), mille determinant osutub võrdseks nulliga, nagu selgub selle arvutamisel. Vektori $\vec{b}$ ühe koordinaadi saame valida vabalt.

Näide. Leida vektor $\vec{b} = \{x;\ y;\ z\}$ nii, et $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$, kui $\vec{a} = \{3;\ 1;\ -2\}$ ja $\vec{c} = \{1;\ 5;\ 4\}$.

Tingimus $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ on täidetud, sest $\vec{a}\cdot\vec{c} = 3 + 5 - 8 = 0$.

Avaldame korrutise $\vec{a}\times\vec{b}$ koordinaatides ning võrdsustame selle koordinaadid vektori $\vec{c}$ vastavate koordinaatidega:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{z+2y;\ -3z-2x;\ 3y-x\}; \quad \begin{cases} 2y + z = 1 \\ -2x - 3z = 5 \\ -x+3y = 4. \end{cases}$$

Saadud süsteemi lahendamisel (näiteks y-koordinaati vabaks jättes) leiame, et

$$x = 3y-4 \quad \text{ja} \quad z = -2y+1.$$

Seega $\vec{b} = \{3y-4;\ y;\ -2y+1\}$.

§ 5. Kolme vektori segakorrutis

1. Segakorrutise mõiste ja geomeetriline tõlgendus

Kolme vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ segakorrutiseks nimetatakse korrutist

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

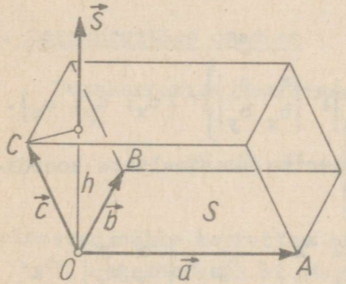
kus kahe vektori vektorkorrutis on korrutatud skalaarselt kolmanda vektoriga.

Skalaarkorrutise tegurite vahetuvuse tõttu saame segakorrutise anda ka teisel kujul:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

On ilmne, et segakorrutis on skalaar. Selgitame tema geomeetrilise tähenduse.

Kanname vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ühe punkti O juurde, kus nad moodustagu paremakäe kolmiku (joon. 12). Et ka $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{S} = \vec{a}\times\vec{b}$ moodustavad paremakäe kolmiku, siis vektorid $\vec{c}$ ja $\vec{S}$ lähevad ühele ja samale poole tasapinnast, mille määrab punkt O koos vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$.



Joon. 12.

Tõestame, et sel juhul <u>kolme vektori segakorrutis võrdub neile vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga</u>.

<u>Tõestus</u>. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{S}\cdot\vec{c} = |\vec{S}|\cdot \mathrm{proj}_{\vec{S}}\vec{c} = ab\sin(\vec{a},\vec{b})\cdot h = V$, kus $h = \mathrm{proj}_{\vec{S}}\vec{c}$ on vektoritele ehitatud rööptahuka kõrgus ja V on rööptahuka ruumala.

Kui vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad vasakukäe kolmiku, siis vektori $\vec{c}$ projektsioon vektori $\vec{S}$ sihil on negatiivne, kuid tema absoluutväärtus on ikkagi antud vektoritele ehitatud rööptahuka kõrgus. Seega nüüd

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = ab\sin(\vec{a},\vec{b})\cdot(-h) = -V.$$

Kokkuvõttes saame, et

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = V,$$

s.t. segakorrutise absoluutväärtus võrdub vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga. Seetõttu nimetatakse segakorrutist sageli ka <u>ruumkorrutiseks</u>.

2. Segakorrutis koordinaatides

Olgu antud kolm vektorit oma koordinaatidega:

$$\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\},$$
$$\vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\},$$
$$\vec{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}.$$

Avaldame nende segakorrutise koordinaatides:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot\vec{c} =$$
$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} \cdot \{c_x;\ c_y;\ c_z\}.$$

Et skalaarkorrutis võrdub tegurite ühenimeliste koordinaatide korrutiste summaga, siis

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z.$$

Kuid paremal seisev summa on järgmise kolmerealise determinandi arend viimase rea elementide järgi:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Seega <u>kolme vektori segakorrutis võrdub kolmerealise determinandiga, mille reaelementideks on antud vektorite koordinaadid</u>.

Et segakorrutise absoluutväärtus võrdub teguritele ehitatud rööptahuka ruumalaga V, siis

$$V = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|.$$

<u>Näide</u>. Olgu rööptahuka tipust O(1; 3; 2) väljuvate servade otspunktid A(2; 1; 3), B(-1; 2; 5) ja C(0; 4; 6) (joon. 12). Siis sellest tipust väljuvad vektorid on

$$\overrightarrow{OA} = \{1;\ -2;\ 1\},$$
$$\overrightarrow{OB} = \{-2;\ -1;\ 3\},$$
$$\overrightarrow{OC} = \{-1;\ 1;\ 4\}.$$

Nende vektorite segakorrutise arvutamisel saame:

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -20.$$

Seega rööptahuka OABC ruumala V = 20.

3. Segakorrutise omadusi

Segakorrutise avaldisest koordinaatides

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

tulenevad selle korrutise mõned tähtsad omadused.

1. Segakorrutis ei muutu, kui selles vektoriaalse korrutamise ja skalaarse korrutamise märkide asukohad vahetada, s.t.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

kusjuures esimesena teostatakse ikka vektoriaalne korrutamine.

Tõepoolest, arvutades viimase korrutise koordinaatides, saaksime sama determinandi:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \{a_x;\ a_y;\ a_z\} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Selle omaduse tõttu segakorrutist kirjutatakse lihtsalt kujul $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, kus üks kahest kõrvutiseisvast korrutamisest on vektoriaalne (mis teostatakse esimesena), teine skalaarne. Niisiis,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

Vektoritele $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ehitatud rööptahuka ruumala saame kirjutada nüüd kujul

$$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|.$$

2. Kui segakorrutises vahetada kaks kõrvutiseisvat tegurit, siis korrutise märk muutub vastupidiseks (sest vastava vektorkorrutise märk muutub vastupidiseks). Sellest järeldub, et kahe sellise tegurite vahetamise tulemusena segakorrutis ei muutu. Nii saame:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}.$$

II. RUUMI ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

§ 1. Põhiülesanded

1. Kahe punkti vaheline kaugus

Punktide $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ vaheline kaugus d on vektori

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$$

pikkus (vt. peat. I, §·3, p. 3, järeldus 2):

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

2. Lõigu jaotamine antud suhtes

Kui punktide $A(x_1;y_1;z_1)$ ja $B(x_2;y_2;z_2)$ vaheline lõik AB on jaotatud punktiga $C(x;y;z)$ suhtes λ, kus $\lambda \neq -1$ on antud arv, siis suunaga lõikude $\overline{AC}$ ja $\overline{CB}$ suhe

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda \quad \text{ehk} \quad \overline{AC} = \lambda \overline{CB}.$$

Kuid siis ka

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$$

ehk

$$\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\} = \lambda\{x_2-x;\ y_2-y;\ z_2-z\} =$$
$$= \{\lambda(x_2-x);\ \lambda(y_2-y);\ \lambda(z_2-z)\}.$$

Vektorite võrdsuse tingimuse põhjal siis

$$x-x_1 = \lambda x_2-\lambda x; \quad y-y_1 = \lambda y_2-\lambda y; \quad z-z_1 = \lambda z_2-\lambda z.$$

Lahendades need võrrandid x, y ja z suhtes, saame jaotuspunkti C koordinaadid:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Kui C on lõigu AB keskpunkt, siis $\lambda = 1$; järelikult lõigu keskpunkti koordinaadid avalduvad otspunktide koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

3. Kolmnurga pindala

Olgu kolmnurga tippudeks punktid

$$A(x_1;y_1;z_1), \; B(x_2;y_2;z_2), \; C(x_3;y_3;z_3).$$

Kolmnurga ABC pindala on pool vektoritele $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ ehitatud rööpküliku pindalast, s.t.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Et $\overrightarrow{AB} = \{x_2-x_1;\; y_2-y_1;\; z_2-z_1\}$ ja

$\overrightarrow{AC} = \{x_3-x_1;\; y_3-y_1;\; z_3-z_1\}$,

siis

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

kus v_x, v_y ja v_z on vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ vektorkorrutise koordinaadid.

Näide. Leiame kolmnurga ABC pindala S andmeil:

$$A(3;\, -1;\, 2), \quad B(2;\, 4;\, 3), \quad C(1;\, 2;\, 4).$$

$$\overrightarrow{AB} = \{-1;\, 5;\, 1\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-2;\, 3;\, 2\}.$$

Seega $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \{7;\, 0;\, 7\}$

ja $S = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + 0^2 + 7^2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}.$

4. Tetraeedri ruumala

Olgu tetraeedri tippudeks punktid A, B, C ja D. Vektoritele $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AD}$ ehitatud rööptahuka ruumala teatavasti võrdub nende vektorite segakorrutise absoluutväärtusega. Et tetraeedri põhja pindala on pool selle rööptahuka põhja pindalast ja tetraeedri ruumala on $\frac{1}{3}$ tema põhja pindala ja kõrguse korrutisest, siis tetraeedri ruumala on $\frac{1}{6}$ vaadeldava rööptahuka ruumalast. Seega tetraeedri ruumala

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right|.$$

Kui tetraeedri tippude koordinaadid on

$$A(x_1;y_1;z_1),\ B(x_2;y_2;z_2),\ C(x_3;y_3;z_3),\ D(x_4;y_4;z_4),$$

siis ruumala on

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{matrix}\right\|.$$

§ 2. Tasapind

1. Pinna võrrandi mõiste. Sfääri võrrand

Pinna võrrandiks nimetatakse sellist võrrandit vektorites või koordinaatides, mida rahuldavad pinna kõik punktid ja ainult need.

Näitena pinna võrrandist tuletame sfääri võrrandi.

Olgu sfääri keskpunktiks punkt $K(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ja raadiuseks r. Siis sfääri suvalise punkti $M(x;\ y;\ z)$ kaugus punktist K on r, s.t.

$$|\overrightarrow{KM}| = r.$$

Avaldades selle vektori pikkuse tema otspunktide koordinaatide abil (vt. valem § 1, p. 1), saame

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$$

ehk

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Sama võrrand vektorites on

$$(\vec{m} - \vec{k})^2 = r^2,$$

kus $\vec{m}$ on sfääri suvalise punkti M kohavektor ja $\vec{k}$ on keskpunkti K kohavektor.

Ümberpöördult, kui mingi punkti koordinaadid x, y ja z rahuldavad seda võrrandit, siis punkti kaugus punktist K on r, tähendab, ta asetseb sfääril. Seega võrrand (1) on sfääri võrrand.

Avades võrrandis (1) sulud, koondades sarnased liikmed ja korrutades võrrandi mõlemaid pooli mingi arvuga A, saame sellele kuju

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0. \qquad (1')$$

Seega <u>sfääri võrrand on kolme tundmatuga teise astme võrrand, milles tundmatute ruutudel on võrdsed kordajad ja milles puuduvad liikmed tundmatute korrutistega xy, xz, yz</u>.

Kuid iga selline võrrand ei tarvitse olla sfääri võrrand. Ta on seda vaid siis, kui võrrandi (1') teisendamisel kujule (1) parem pool osutub positiivseks.

<u>Näide</u>. Selgitame, mida esitab võrrand

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 5x - 8y + 4 = 0.$$

Jagades võrrandi pooled 2-ga ja eraldades siis täisruudud, saame:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{5}{2}x - 4y + 2 = 0$$

$$(x + \frac{5}{4})^2 + (y - 2)^2 + z^2 = -2 + \frac{25}{16} + 4$$

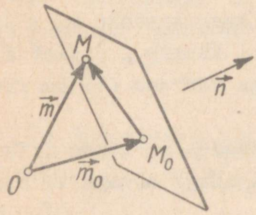
ehk

$$(x + \frac{5}{4})^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \frac{57}{16}.$$

Seega antud võrrand esitab sfääri, mille keskpunktiks on punkt $(-\frac{5}{4}; 2; 0)$ ja raadius on $\frac{\sqrt{57}}{4}$.

2. Ühe punkti ja normaalvektoriga määratud tasapinna võrrand

Oletame, et tasapind läbib antud punkti $M_o(x_o;y_o;z_o)$ ja on risti antud vektoriga $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$, mida nimetatakse tasapinna normaalvektoriks (joon. 13).



Joon. 13.

Tasapinna võrrandi tuletamiseks võtame sellel mistahes punkti $M(x;\ y;\ z)$, mille ühendame alguspunktiga O ja punktiga M_o. Siis

$$\overrightarrow{OM_o} + \overrightarrow{M_oM} = \overrightarrow{OM}$$

ehk teisiti tähistades

$$\vec{m}_o + \overrightarrow{M_oM} = \vec{m}.$$

Siit

$$\overrightarrow{M_oM} = \vec{m} - \vec{m}_o.$$

Et vektorid $\overrightarrow{M_oM}$ ja $\vec{n}$ on punkti M iga asukoha puhul risti, siis

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_oM} = 0$$

ehk

$$\vec{n} \cdot (\vec{m} - \vec{m}_o) = 0. \qquad (2)$$

See ongi antud tasapinna võrrand vektorites (miks?).

Avaldades võrrandis (2) esinevad vektorid koordinaatides, saame

$$\{A;\ B;\ C\} \cdot \{x-x_o;\ y-y_o;\ z-z_o\} = 0,$$

ehk, arvutades skalaarkorrutise,

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0. \qquad (2')$$

Tulemus on ühe punkti ja normaalvektoriga määratud tasapinna võrrand koordinaatides.

Kui tasapinnast on antud kolm punkti $A(x_o;\ y_o;\ z_o)$, $B(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja $C(x_2;\ y_2;\ z_2)$, siis tasapinna normaalvektoriks saame võtta vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ vektorkorrutise (aga ka iga sellega kollineaarse vektori):

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

Näide. Punkti (2; 0; -3) läbiva ja vektoriga $\{4; -2; 5\}$ ristuva tasapinna võrrand on

$$4(x-2) - 2(y-0) + 5(z+3) = 0$$

ehk

$$4x - 2y + 5z + 7 = 0.$$

3. Tasapinna üldvõrrand

Avades võrrandis (2) sulud ja tähistades arvu $-\vec{n} \cdot \vec{m}_0$ tähega D, saame võrrandi

$$\vec{n} \cdot \vec{m} + D = 0. \qquad (3)$$

Analoogiliselt saame võrrandist (2') võrrandi

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3')$$

kus vabaliige $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Võrrandit (3) ja (3') nimetatakse tasapinna üldvõrrandiks (vastavalt vektorites ja koordinaatides).

Et iga tasapinna võrrandi saab anda kujul (2) ja sellest saab tuletada võrrandi (3'), siis

iga tasapinna võrrand on lineaarne muutujate x, y ja z suhtes.

Ümberpöördult, iga lineaarne võrrand (3') esitab tasapinda, kui selles võrrandis vähemalt üks kordajaist A, B ja C on nullist erinev. Tõepoolest, kui näiteks $C \neq 0$, siis võrrand (3') esitab tasapinda, mis on risti vektoriga $\{A; B; C\}$ ja läbib punkti $(0; 0; -\frac{D}{C})$.

Selgitame, milliseid tasapindu esitab võrrand (3') siis, kui mõni kordajaist A, B, C ja D on nullid.

Kui $D = 0$, siis tasapind läbib koordinaatide alguspunkti, sest selle koordinaadid rahuldavad võrrandit.

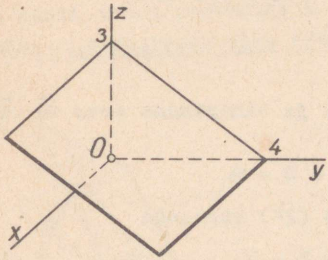
Kui $A = 0$ või $B = 0$ või $C = 0$, siis tasapinna normaalvektori $\vec{n} = \{A; B; C\}$ üks koordinaat on null, seega normaalvektor on risti selle koordinaatteljega ja tasapind on paralleelne selle teljega. Näiteks võrrand

$$3y + 4z - 12 = 0$$

esitab tasapinda, mis on paralleelne x-teljega ja lõikab y-telge punktis (0; 4; 0) ning z-telge punktis (0; 0; 3) (joon. 14). Võrrandi võib kirjutada ka kujul

$$0 \cdot x + 3y + 4z - 12 = 0,$$

millest nähtub, et y ja z iga väärtuspaari puhul, mis võrrandit rahuldab, on x meelevaldne.



Joon. 14.

Kui $A = 0$ või $B = 0$ või $C = 0$ ja veel $D = 0$, siis tasapind läbib koordinaatide alguspunkti ja ühtlasi üht koordinaattelge.

Kui kordajatest A, B ja C mingid kaks on nullid, siis tasapinna normaalvektor on risti kahe koordinaatteljega, seega paralleelne kolmanda teljega. Tasapind on siis risti kolmanda teljega, seega paralleelne ühe koordinaattasapinnaga. Niisiis, võrrandid

$$Ax + D = 0, \qquad By + D = 0, \qquad Cz + D = 0$$

esitavad tasapindu, mis on risti vastavalt x-teljega, y-teljega ja z-teljega.

Erijuhtumil, kui ka vabaliige $D = 0$, saame võrrandid

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

mis esitavad vastavalt yz-tasapinda, zx-tasapinda ja xy-tasapinda.

4. Tasapinna normaalvõrrand

Teisendame tasapinna üldvõrrandit (3) ja (3') nii, et selles esinev normaalvektor oleks ühikvektor ja vabaliige oleks negatiivne. Selleks jagame võrrandi pooli arvuga $\pm|\vec{n}| = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, kus võtame märgi +, kui $D < 0$ ja märgi –, kui $D > 0$. (Kui $D = 0$, siis on ükskõik, kumb märk võtta.) Saame võrrandi

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{m} + D}{\pm n} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Tähistame uue vabaliikme $\frac{D}{\pm n}$ lühemalt $-p$. Et uus normaalvektor on ühikvektor, siis tema koordinaadid on normaalvektori sihikoosinused:

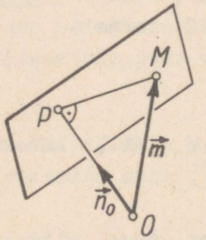
$$\frac{\vec{n}}{\pm n} = \vec{n}^o = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}.$$

Uus võrrand on

$$\vec{n}^o \cdot \vec{m} - p = 0 \quad \text{ehk} \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

See ongi tasapinna normaalvõrrand (vektorites ja koordinaatides). Selles esineva vabaliikme p tähenduse selgitamiseks avaldame korrutise $\vec{n}^o \cdot \vec{m}$ vektori $\vec{m}$ projektsiooni abil (joon. 15):

$$p = \vec{n}^o \cdot \vec{m} = |\vec{n}^o| \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{m} = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{m} = OP.$$



Joon. 15.

Seega $p = OP$ on kaugus alguspunktist tasapinnani.

Normaalvõrrandis on tasapinda määravateks andmeteks alguspunktist tasapinnale tõmmatud ristlõigu pikkus ja selle lõigu sihikoosinused.

Näide. Teisendame normaalkujuliseks võrrandi

$$2x - 3y + z + 7 = 0.$$

Normaalvektori pikkus on

$$n = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}.$$

Normaalvõrrand on seega

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x + \frac{3}{\sqrt{14}}y - \frac{1}{\sqrt{14}}z - \frac{7}{\sqrt{14}} = 0.$$

5. Tasapinna võrrand telglõikudes

Viime tasapinna üldvõrrandis (3') vabaliikme paremale ja jagame võrrandi pooled arvuga $-D$. Siis saab anda võrrandile kuju

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{4}$$

kus

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

tähendavad koordinaattelgede lõike alguspunktist kuni punktini, milles tasapind lõikab seda telge. Tõepoolest, lõikumisel näiteks x-teljega on $y = 0 = z$, seega võrrandist (4) saame $x = a$. Võrrand (4) ongi tasapinna võrrand telglõikudes. Sellise kuju saab võrrandile anda ainult siis, kui ükski kordajaist A, B, C ja D ei ole null.

Näide. Kui tasapind lõikab x-telge punktis, kus $x = 4$, y-telge punktis, kus $y = -2$ ja z-telge punktis, kus $z = 5$, siis tema võrrand on

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1.$$

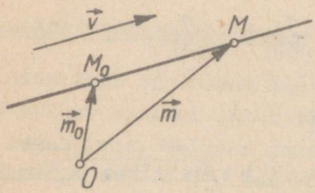
§ 3. Sirgjoon

1. Sirgjoone võrrand vektorites

Olgu ruumisirgest antud üks punkt M_0, mille kohavektor on $\vec{m}_0$, ja sirgega kollineaarne vektor $\vec{v}$, mida nimetame sirgesihiliseks vektoriks.

Sirgjoone võrrandi saamiseks võtame sirgel mistahes punkti M, mille kohavektor olgu $\vec{m}$. Avaldame vektori $\vec{m}$ vektorite $\vec{m}_0$ ja $\vec{v}$ kaudu (joon. 16):

$$\vec{m} = \vec{m}_0 + \overrightarrow{M_0M}.$$



Joon. 16.

Et $\overrightarrow{M_0M}$ ja $\vec{v}$ on kollineaarsed, siis

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{v},$$

kus t on mistahes arv (parameeter). Asendades saame

$$\vec{m} = \vec{m}_0 + t\vec{v}. \qquad (1)$$

See ongi sirgjoone võrrand vektorites, sest seda rahuldavad antud sirge kõigi punktide kohavektorid ja ainult need.

2. Sirgjoone parameetrilised võrrandid

Olgu võrrandis (1) esinevate vektorite koordinaadid järgmised:

$$\vec{m}_0 = \{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad \vec{v} = \{v_x;\ v_y;\ v_z\},\quad \vec{m} = \{x;\ y;\ z\}.$$

Et võrrandis (1) paremal seisva vektorite lineaarse kombinatsiooni $\vec{m}_0 + t\vec{v}$ koordinaadid peavada võrduma vektori $\vec{m}$ vastavate koordinaatidega, siis võrrandist (1) saame kolm võrrandit koordinaatides:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases} \tag{2}$$

Neid nimetame sirgjoone parameetrilisteks võrranditeks.

Näide. Leiame punkte A(2; 5; 1) ja B(4; -1; 5) läbiva sirgjoone parameetrilised võrrandid.

Sirgesihiliseks vektoriks võime võtta vektori $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \{2;\ -6;\ 4\}.$$

Punktiks, mida sirge läbib, võtame A. Võrrandid on

$$\begin{cases} x = 2 + 2t; \\ y = 5 - 6t; \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$$

3. Sirgjoone kanoonilised võrrandid

Elimineerime võrranditest (2) parameetri t. Selleks avaldame t igast võrrandist ja võrdsustame tulemused:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}. \tag{3}$$

Need ongi sirgjoone kanoonilised võrrandid. Kui neis mõni jagaja on null, siis ka vastav jagatav on null, nagu selgub võrranditest (2). Näiteks, kui $v_x = 0$, siis ka $x - x_0 = 0$, sest sel juhul $x = x_0$.

Kui sirgest on antud kaks punkti $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ja $B(x_1;\ y_1;\ z_1)$, siis sirgesihiliseks vektoriks saame

$$\vec{v} = \{x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0\}$$

ja sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{3'}$$

4. Sirgjoon kahe tasapinna lõikejoonena

Sirgjoone kanoonilised võrrandid (3) sisaldavad kaht sõltumatut võrrandit

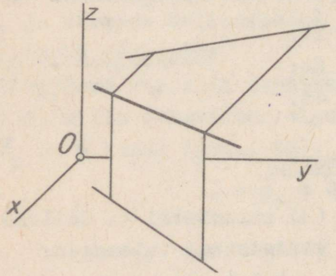
$$\frac{x - x_o}{v_x} = \frac{y - y_o}{v_y} \quad \text{ja} \quad \frac{y - y_o}{v_y} = \frac{z - z_o}{v_z}. \qquad (4)$$

Neile saab anda kuju

$$\begin{aligned} &v_y x - v_x y - (v_y x_o - v_x y_o) = 0 \\ \text{ja} \quad &v_z y - v_y z - (v_z y_o - v_y z_o) = 0, \end{aligned} \qquad (4')$$

milledest esimene esitab z-teljega, teine x-teljega paralleelset tasapinda läbi antud sirge. Need on seega antud sirget vastavalt xy-tasapinnale ja yz-tasapinnale projekteerivad tasapinnad (joon. 17). Kolmas projekteeriv tasapind on

$$\frac{x - x_o}{v_x} = \frac{z - z_o}{v_z}.$$



Joon. 17.

Kui võrranditest (4') ühe pooli korrutada mingi arvuga λ ja siis võrrandid liikmeti liita, siis saame antud sirget läbiva tasapinna võrrandi, sest kui mingi punkti koordinaadid rahuldavad mõlemat võrrandit (4'), siis nad rahuldavad ka neist tuletatud võrrandit. Andes λ-le kaks väärtust, saame kaks tasapinda:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

millede lõikejooneks on antud sirge.

Ümberpöördult, iga kaks võrrandit kujul (5), kus tundmatute kordajad pole võrdelised (tasapindade normaalvektorid pole kollineaarsed) esitavad kaht lõikuvat tasapinda; neist võrrandeist koostatud süsteem (5) esitab siis nende tasapindade lõikesirget.

Kahe tasapinna võrranditest (5) võib tuletada lõikesirge kanoonilised võrrandid. Viimaste kirjutamiseks peab teadma mingit sirgesihilist vektorit ja sirge üht punkti. Tasapindade lõikesirge sihiline vektor on risti kummagi tasapinna normaalvektoriga, järelikult kõlbab selleks tasapindade normaalvektorite vektorkorrutis (aga ka iga sellega kollineaarne vektor). Sirge punktiks on kõige lihtsam võtta punkt, milles sirge lõikab üht koordinaattasapinda ($x = 0$ või $y = 0$ või $z = 0$).

Näide. Leiame tasapindade

$$x + 2y - 3z + 4 = 0$$
$$2x - y + z - 2 = 0$$

lõikesirge kanoonilised võrrandid.

Siin

$$\vec{n}_1 = \{1;\ 2;\ -3\} \text{ ja}$$
$$\vec{n}_2 = \{2;\ -1;\ 1\}.$$

Järelikult

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{-1;\ -7;\ -5\},$$

mistõttu sirgesihiliseks vektoriks võtame

$$\vec{v} = \{1;\ 7;\ 5\}.$$

Leiame punkti, milles tasapindade lõikesirge lõikab xy-tasapinda (siis $z = 0$):

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Siit

$$x = 0 \text{ ja } y = -2.$$

Seega antud tasapindade lõikesirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x}{1} = \frac{y + 2}{7} = \frac{z}{5}.$$

Tulemuse kontrolliks võib näidata, et selle sirge mingid kaks punkti on mõlemal antud tasapinnal.

§ 4. Ülesandeid sirgjoone ja tasapinna kohta

1. Kahe tasapinna vastastikune asend

Vaatleme tasapindade

to vektor võrrandid $\vec{n}_1 \cdot \vec{m} + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ (1)

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{m} + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} \tag{2}$$

vastastikust asendit.

Tasapinnad (1) ja (2) lõikuvad, kui nende normaalvektorid ei ole kollineaarsed, s.t.

$$\vec{n}_1 \neq \lambda \vec{n}_2$$

ehk, teisiti, mingid kaks kolmest suhtest

$$\frac{A_1}{A_2}, \quad \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{C_1}{C_2}$$

pole võrdsed.

Tasapinnad (1) ja (2) on paralleelsed, kui

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2, \text{ kuid } D_1 \neq D_2;$$

teisiti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Tasapinnad (1) ja (2) ühtivad, kui

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \text{ ja } D_1 = D_2$$

ehk

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Kui tasapinnad lõikuvad, siis tekib küsimus nende lõikesirge leidmisest (vt. § 3, p. 4) ning nende vahelise nurga määramisest. Viimane võrdub normaalvektorite $\vec{n}_1$ ja $\vec{n}_2$ vahelise nurgaga või selle kõrvunurgaga (vastavalt sellele, kumb neist on mittenürinurk). Seega

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{n_1 \cdot n_2} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Erijuhul, kui $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, on tasapinnad risti.

2. Sirgjoone ja tasapinna vastastikune asend

Vaatleme sirget $\quad \vec{m} = \vec{m}_0 + t\vec{v} \qquad (1)$

ja tasapinda $\quad \vec{n} \cdot \vec{m} + D = 0, \qquad (2)$

kus $\vec{m}_0 = \{x_0;y_0;z_0\}$, $\vec{v} = \{v_x; v_y;v_z\}$, $\vec{n} = \{A;B;C\}$.

Sirge (1) asetseb tasapinnal (2), kui sirge on risti tasapinna normaalvektoriga, s.t. kui $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ ja lisaks sellele sirge mingi punkt, näiteks punkt $M_0(x_0;y_0;z_0)$ asetseb tasapinnal. Näiteks sirge

$$\frac{x + 6{,}5}{3} = \frac{y + 1}{2} = z - 1$$

asetseb tasapinnal

$$2x - 8y + 10z - 5 = 0,$$

sest

1) $\vec{n} \cdot \vec{v} = \{2;-8;10\} \cdot \{3;2;1\} = 6 - 16 + 10 = 0$ ja

2) $2 \cdot (-6{,}5) - 8 \cdot (-1) + 10 \cdot 1 - 5 = -13 + 8 + 10 - 5 = 0.$

Sirge (1) on paralleelne tasapinnaga (2), kui sirge on risti tasapinna normaalvektoriga, s.t. $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, kuid sirge punkt $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ei asetse tasapinnal.

Sirge (1) lõikub tasapinnaga (2), kui $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$. Erijuhul, kui $\vec{n} = \lambda\vec{v}$, s.t. $\vec{n} \parallel \vec{v}$, on sirge tasapinnaga risti.

Lõikumise korral tekib kaks küsimust: 1) kus toimub lõikumine ja 2) kui suure nurga all see toimub?

Sirge ja tasapinna lõikepunkti leidmiseks tuleb lahendada võrranditest (1) ja (2) koosnev süsteem

$$\begin{cases} \vec{m} = \vec{m}_0 + t\vec{v}, \\ \vec{n} \cdot \vec{m} + D = 0. \end{cases}$$

Siit saab kergesti tuletada valemi lõikepunkti kohavektori arvutamiseks, kuid lihtsam on igal konkreetsel juhul see lahendus läbi teha.

<u>Näide</u>. Kui sirge on antud oma parameetriliste võrranditega

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3 + t$$

ja tasapind võrrandiga $-12+5-2+9$

$$3x + y - 2z + 9 = 0,$$

siis parameetri t väärtuse nende lõikepunktis leiame võrrandist

$$3(2 + 3t) + (1 - 2t) - 2(3 + t) + 9 = 0,$$

millest $t = -2$. Sirge võrranditest järeldub nüüd, et

$$x = -4, \quad y = 5, \quad z = 1.$$

Tulemust kontrollime tasapinna võrrandi abil. Lõikepunkt on $(-4;5;1)$.

Sirge ja tasapinna vaheline nurk

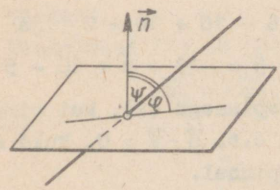
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

kus ψ on mittenürinurk tasapinna normaali ja sirge vahel (joon. 18). Kui tasapinna normaalvektor on $\vec{n}$ ja sirge sihiline vektor $\vec{v}$, siis

$$\cos\psi = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{nv}\right|,$$

seega

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{nv}\right|.$$



Joon. 18.

3. Kahe sirgjoone vastastikune asend

Olgu antud kaks sirget oma võrranditega

$$\vec{m} = \vec{m}_0 + t\vec{v}$$

ja

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + t\vec{u}.$$

Sirged on <u>paralleelsed</u>, kui nende sihilised vektorid on kollineaarsed, s.t.

$$\vec{u} = \lambda\vec{v}$$

ja ühe sirge antud punkt ei asetse teisel sirgel (näiteks $\vec{m}_0$ ei rahulda teise sirge võrrandit). Kui $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ja $\vec{m}_0$ rahuldab teist võrrandit, siis sirged <u>ühtivad</u>.

Kui sirgete sihilised vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ei ole kollineaarsed, siis sirged <u>lõikuvad</u> või on <u>kiivsed</u>. Lõikumine leiab aset, kui vektorid $\vec{m}_1-\vec{m}_0$, $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ on <u>komplanaarsed</u>, s.t. paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga. Sel juhul neile ehitatud rööptahuka ruumala on null, s.t. segakorrutis

$$(\vec{m}_1-\vec{m}_0)\,\vec{v}\,\vec{u} = 0.$$

Kui viimane korrutis ei ole null, siis antud sirged on kiivsirged.

<u>Näide 1</u>. Sirged

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

ja

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1}$$

ühtivad, sest neil on üks ja sama sihivektor $\{3;\ 2;\ -1\}$ ning esimese sirge antud punkt (2;-1;-2) rahuldab teise sirge võrrandeid:

$$\frac{2-5}{3} = \frac{-1-1}{2} = \frac{-2+3}{-1}.$$

<u>Näide 2</u>. Sirged

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1} \qquad (1)$$

ja

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{5} \qquad (2)$$

lõikuvad, sest vektorite $\vec{m}_1-\vec{m}_0$, $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ segakorrutis on null (kuid $\vec{u} \neq \lambda\vec{v}$):

$$\begin{vmatrix} 4-5 & 3-1 & 3+3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -14 - 34 + 48 = 0.$$

Nende sirgete lõikepunkti leidmiseks tuleb lahendada võrrandeist (1) ja (2) koosnev süsteem. Selleks avaldame ühe sirge võrrandeist näiteks y (või z) x kaudu ja paigutame saadud avaldise teise sirge võrranditesse. Võrrandeist (1) saame:

$$y = \frac{2(x-5)}{3} + 1 = \frac{2x-7}{3}.$$

Nüüd järeldub võrrandeist (2), et

$$4(x-4) = 2\left(\frac{2x-7}{3} - 3\right),$$

millest $x = 2$. Edasi saab kergesti leida, et $y = -1$ ja $z = -2$. Punkt (2;-1;-2) rahuldab mõlema sirge võrrandeid, järelikult ta on nende sirgete lõikepunkt.

Näide 3. Sirged

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{-1}$$

ja

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$$

on kiivsed, sest nende sihivektorid $\{3;-2;-1\}$ ja $\{2;3;4\}$ pole kollineaarsed ja vektorid $\{3;-2;-1\}$, $\{2;3;4\}$, $\{5-1;1+1;-3-2\}$ pole komplanaarsed:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-23) + 2(-26) - (-8) \neq 0.$$

Kahe (lõikuva või kiiv-) sirge vaheline nurk on

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{uv},$$

kus $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on antud sirgete sihivektorid. Nii näiteks sirgete (1) ja (2) vaheline nurk (näite 2 andmeil) on:

$$\varphi = \arccos \frac{3\cdot 2 + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 5}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{4+16+25}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{14\cdot 45}} =$$

$$= \arccos \frac{3\sqrt{70}}{70} \approx \arccos 0,3586 \approx 69^\circ.$$

4. Punkti kaugus tasapinnast

Punkti kaugus tasapinnast võrdub tasapinna normaalvõrrandi vasaku poolega, milles tasapinna punkti koordinaadid on asendatud antud punkti koordinaatidega.

Tõestuseks paneme läbi antud punkti $M(x_0;y_0;z_0)$ abitasapinna π', mis on paralleelne antud tasapinnaga π, mille normaalvõrrand olgu

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Kui punkti M kaugus antud tasapinnast π on d (joon. 19), siis teda läbiva abitasapinna võrrand on

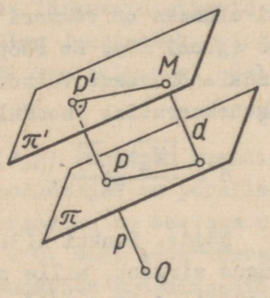
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (p+d) = 0, \qquad (1)$$

kus d tuleb lugeda positiivseks, kui punktid M ja O on antud tasapinnast teine teisel pool, negatiivseks aga, kui nad on sellest ühel pool. Et punkt M asetseb abitasapinnal π', siis tema koordinaadid rahuldavad selle tasapinna võrrandit (1):

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - (p + d) = 0.$$

Saadud võrrandist leiamegi d:

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p. \qquad (2)$$



Joon. 19.

Võttes punktiks M alguspunkti (0;0;0), saame valemist (2), et d = -p, mis kinnitab ülalantud seisukohta, et kaugus tasapinnast π alguspunkti poole on negatiivne. Kooskõlas sellega on tasapinna kaugus alguspunktist, s.o. p, ikka positiivne.

<u>Näide</u>. Leiame punkti (1;-2;3) kauguse tasapinnast

$$2x + 2y - z + 9 = 0.$$

Tasapinna normaalvõrrand on

$$\frac{2x + 2y - z + 9}{-\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 0.$$

Antud punkti kaugus tasapinnast on

$$d = \frac{2\cdot 1 + 2(-2) - 3 + 9}{-\sqrt{9}} = -\frac{4}{3}.$$

Seega punkt asetseb tasapinnast $\frac{4}{3}$ ühiku kaugusel seal pool, kus on alguspunkt.

Olgu märgitud, et kahe <u>paralleelse tasapinna</u> (samuti <u>sirge ja temaga paralleelse tasapinna</u>) <u>vahelise kauguse</u> leidmine taandub eelmisele ülesandele sel teel, et ühel tasapinnal (sirgel) võetakse vabalt mingi punkt. Aga sellele taandub ka <u>kahe kiivsirge vahelise kauguse</u> (s.o. nende ühise ristlõigu pikkuse) leidmine, kui läbi ühe sirge panna tasapind, mis on paralleelne teise antud sirgega, ja siis leida teise sirge kaugus sellest abitasapinnast.

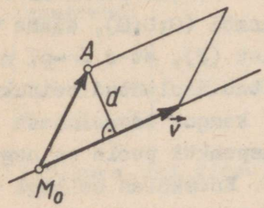
5. Punkti kaugus sirgest

Punkti $A(x_1;y_1;z_1)$ kaugus sirgest

$$\vec{m} = \vec{m}_0 + t\vec{v}$$

leitakse vektoritele $\vec{v}$ ja $\overrightarrow{M_0A}$, kus M_0 on sirge antud punkt, ehitatud rööpküliku kõrgusena, kui aluseks on vektori $\vec{v}$ pikkus (joon. 20). Et rööpküliku pindala on nende vektorite vektorkorrutise moodul, siis

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0A} \times \vec{v}|}{v}.$$



Joon. 20.

Näide. Punkti $A(3;-1;2)$ kaugus sirgest, mille parameetrilised võrrandid on

$$x = 1 + 2t, \quad y = 3 - t, \quad z = -4 + 3t,$$

leitakse järgmiselt.

Sirgel antud punkt on $M_0(1;3;-4)$, seega

$$\overrightarrow{M_0A} = \{2;-4;6\}$$

ja

$$\vec{v} = \{2;-1;3\}.$$

Edasi saame: $\overrightarrow{M_0A} \times \vec{v} = \{-6;6;6\}$,

$$|\overrightarrow{M_0A} \times \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3},$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{14},$$

$$d = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{42}}{7}.$$

Sellele ülesandele arusaadavalt taandub ka kahe paralleelse sirge vahelise kauguse leidmine.

§ 5. Teist järku pinnad

1. Üldine silinderpind. Teist järku silinderpinnad

Silinderpinnaks nimetatakse pinda, millel asetsevad kõik antud sirgega paralleelsed sirged, mis lõikavad üht ja sama joont. Seda joont nimetatakse silinderpinna juhtjooneks ja teda lõikavaid sirgeid silinderpinna moodustajateks.

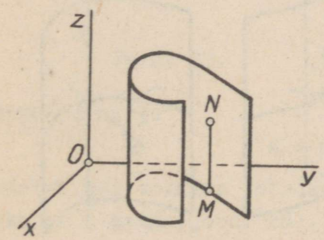
Olgu juhtjooneks mingi joon ühel koordinaattasapinnal, näiteks xy-tasapinnal. Selle joone võrrandi saab anda kujul

$$F(x,y) = 0,$$

kus $F(x,y)$ tähendab avaldist, mis sisaldab muutujaid x ja y. Kui moodustajad on paralleelsed z-teljega, siis silinderpinna võrrandiks on seesama võrrand $F(x,y) = 0$, ehk $F(x,y) + 0 \cdot z = 0$, sest seda võrrandit rahuldavad silinderpinna kõikide punktide koordinaadid ja ainult need (joon. 21). Tõepoolest, kui mingi punkt $M(x,y)$ rahuldab juhtjoone võrrandit

$$F(x,y) = 0,$$

siis punkt $N(x;y;z)$ rahuldab sama võrrandit, olgu z milline tahes.



Joon. 21.

Üldiselt, kui pinna võrrandis puudub pinna jooksva punkti üks koordinaat, siis võrrand esitab silinderpinda, mille moodustajad on paralleelsed puuduvale koordinaadile vastava teljega.

Näiteks võrrand $x^2 + y^2 = 1$ esitab silindrit, mille moodustajad on paralleelsed z-teljega ja juhtjooneks on ühikringjoon keskpunktiga koordinaatide alguspunktis.

Kui pinda lõigata mingi teise pinnaga, siis saame joone. Viimast esitab võrrandisüsteem, mis koosneb antud kahe pinna võrranditest. Näiteks silinderpinna $F(x,y) = 0$ juhtjoone saame anda süsteemiga

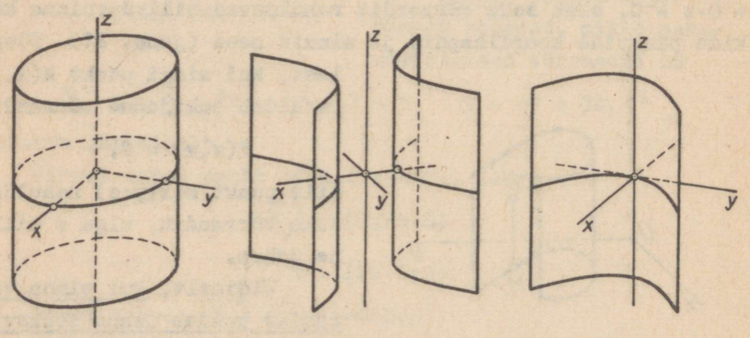
$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Kui silinderpinna juhtjooneks on mingi teist järku joon ühel koordinaattasapinnal ja moodustajad on paralleelsed kolmanda teljega, siis pinda nimetatakse <u>teist järku silinderpinnaks</u>. Vastavalt juhtjoonele saame kolm liiki teist järku silinderpindu: <u>elliptiline, hüperboolne ja paraboolne silinder</u>. Kui juhtjoonteks võtta kanooniliste võrranditega määratud teist järku jooned xy-tasapinnal, siis

elliptilise silindri (joon. 22) võrrand on $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

hüperboolse silindri (joon. 23) võrrand on $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

paraboolse silindri (joon. 24) võrrand on $y^2 = 2px$.



Joon. 22. Joon. 23. Joon. 24.

2. <u>Pöördpind. Pöördkoonus ja üldine teist järku koonus</u>

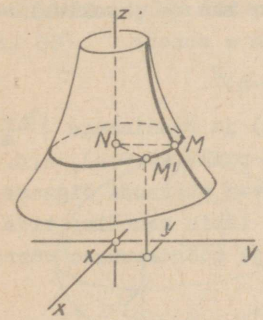
<u>Pöördpinnaks nimetatakse pinda, mille kujundab tasapinnaline joon, kui ta pöörleb ümber oma tasapinnal asetseva sirge</u>. Viimast nimetatakse pöördpinna <u>teljeks</u>. Pinda kujundavat joont tema mistahes asendis nimetatakse pöördpinna <u>meridiaaniks</u>.

Võtame meridiaaniks yz-tasapinnal asetseva joone

$$\begin{cases} F(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

ja pöördpinna teljeks z-telje (joon. 25). Joone (1) pöörlemisel ümber z-telje jääb tema mistahes punkti M(0;y;z) kaugus teljest, s.o. lõigu NM pikkus, muutumatuks. See punkt üldasendis olgu M'(x;y;z). Siis $NM' = \sqrt{x^2 + y^2}$. Selle suuruse ja z vahel peab kehtima sama seos, mis on meridiaani võrrandis y ja z vahel. Sellest järeldub, et pöördpinna võrrandi saamiseks tuleb meridiaani võrrandis y asendada avaldisega $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (– sellepärast, et y võib võrrandis olla ka negatiivne). Pöördpinna võrrand on seega

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0.$$



Joon. 25.

Üldiselt: pöördpinna võrrandi saamiseks tuleb koordinaattasapinnal antud meridiaani võrrandis pöörlemisteljele mittevastava koordinaadi ruut asendada pöörlemisteljele mittevastavate koordinaatide ruutude summaga.

Näide. Tuletame yz-tasapinnal asetseva sirge

$$z = my + b$$

pöörlemisel tekkiva pöördkoonuse võrrandi, kui pöörlemisteljeks on z-telg (joon. 26). Vastavalt ülalantud eeskirjale tuleb meridiaani võrrandis y asendada avaldisega $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

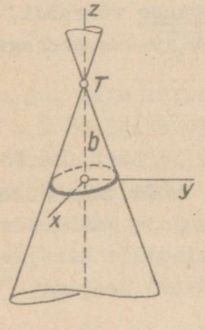
Nii saame:

$$z = \pm m\sqrt{x^2 + y^2} + b.$$

Viies b vasakule ja tõstes võrrandi pooled ruutu, saame võrrandile anda kuju

$$m^2x^2 + m^2y^2 - (z-b)^2 = 0, \quad (2)$$

mis ongi otsitavaks võrrandiks.



Joon. 26.

Kontrolliks arvutame pinna (2) mõned lõiked.

1. Lõikame pinda yz-tasapinnaga. Sellel $x = 0$ ja võrrandist (2) järeldub, et

$$m^2y^2 - (z-b)^2 = 0$$

ehk

$$(my + z - b)(my - z + b) = 0,$$

millest

$$z = -my + b \quad \text{ja} \quad z = my + b;$$

seega lõige yz-tasapinnaga on sirgete paar.

2. Lõikame pinda (2) tasapinnaga, mis on paralleelne xy-tasapinnaga, s.o. tasapinnaga $z = h = \text{const}$:

$$m^2x^2 + m^2y^2 = (h-b)^2.$$

Lõige on ringjoon keskpunktiga (0;0;h) ja raadiusega $\left|\frac{h-b}{m}\right|$, kui $h \neq b$. Kui $h = b$, siis lõikeks on punkt (0;0;b), s.o. koonuse tipp T. Saadud lõiked kinnitavad võrrandi õigsust.

Kui pöördkoonust moodustav sirge läbib koordinaatide alguspunkti, siis tema võrrandis $b = 0$ ja pöördkoonuse võrrandiks saame

$$m^2x^2 + m^2y^2 - z^2 = 0.$$

Siin m^2 võib olla ka positiivne murd, ütleme $c^2 : a^2$. Asendades ja jagades võrrandi pooli arvuga c^2, saame pöördkoonuse võrrandile kuju

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Sellest saame <u>üldise teist järku koonuse</u> võrrandi, kui x^2 ja y^2 jagajad teeme erinevaiks, nii et xy-tasapinnaga paralleelsed lõiked oleksid juba ellipsid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Pole raske näidata (teha seda!), et selle pinna lõiked tasapinnaga $x = h$ osutuvad hüperboolideks.

3. Ellipsoidid

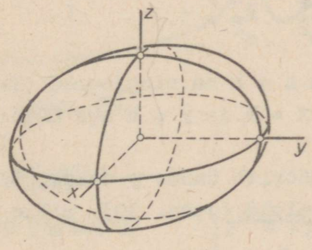
Kui ellips

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

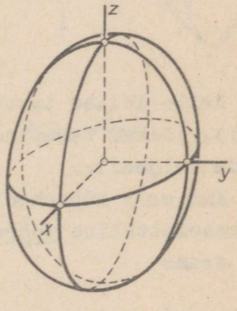
pöörleb ümber z-telje, siis tekib pöördellipsoid, mille võrrand on

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

Kui $b > c$, siis ellipsi pöörlemine toimus lühema telje ümber ja saadud pöördellipsoidi nimetatakse lapikuks pöördellipsoidiks (joon. 27). Kui $b < c$, s.t. ellipsi pöörlemine toimub pikema telje ümber, siis pöördellipsoid on piklik (joon. 28).



Joon. 27.



Joon. 28.

Saadud pöördellipsoidi lõiked tasapinnaga $z = h$ on $|h| < c$ puhul ringjooned

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - h^2}{c^2}.$$

Kui $h = \pm c$, siis lõikeks on punkt; kui aga $|h| > c$, siis tasapind $z = h$ ei lõika ellipsoidi.

Pöördellipsoidi lõiked tasapindadega $x = h$ ja $y = h$, kus $|h| < b$, on ellipsid.

Teisendame pinda (1) nii, et ka tema lõiked tasapinnaga $z = h$ oleksid ellipsid. Selleks tuleb x^2 jagaja teha erinevaks y^2 jagajast (kõrvaldades sellega pöördpinna tunnuse):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Saadud pinda nimetatakse kolmeteljeliseks ellipsoidiks (joonised 27 ja 28, kui neis lõiked risti z-teljega lugeda ellipsiteks).

4. Hüperboloidid

Kui hüperbool

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

pöörleb ümber z-telje, siis tekib ühekatteline pöördhüperboloid (joon. 29), mille võrrand on

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (2)$$

Selle lõiked tasapinnaga $z = h$ on ringjooned (leida raadius!), lõiked tasapindadega $x = h$ ja $y = h$ aga hüperboolid (leida teljed!).

Kui sama hüperbool (1) pöörleb ümber y-telje, siis tekib kahekatteline pöördhüperboloid (joon. 30), mille võrrandiks saame

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

ehk

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (3)$$

Selle lõiked tasapinnaga $y = h$, kui $|h| > b$, on ringjooned (põhjendada seda!), lõiked tasapindadega $x = h$ ja $z = h$ aga hüperboolid.

Kui võrranditest (2) ja (3) kõrvaldada pöördpinna tunnus, muutes x^2 jagajat, siis saame neist vastavalt:

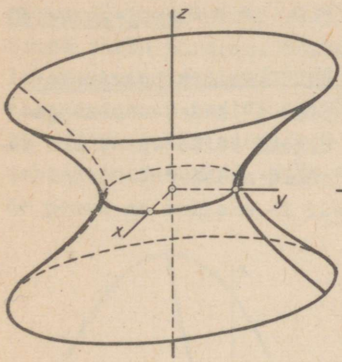
ühekattelise hüperboloidi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

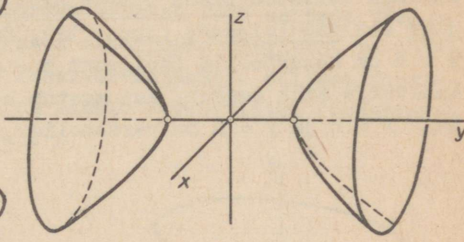
ja kahekattelise hüperboloidi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Neid pindu kujutavad endised joonised 29 ja 30, kui neil endised ringjoonelised lõiked lugeda ellipsiteks.



Joon. 29.



Joon. 30.

5. Paraboloidid

Kui parabool
$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

pöörleb ümber z-telje, siis tekib pöördparaboloid (joon. 31), mille võrrand on

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

ehk

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a}, \tag{4}$$

kus $a = 2p > 0$.

Pinna lõiked tasapinnaga $z = h > 0$ on ringjooned raadiustega $\sqrt{ah}$. Lõiked tasapinnaga $x = h$ (samuti $y = h$) on meridiaaniga võrdsed paraboolid, fokaallaiusega $a = 2p$.

Kui pöördparaboloidi võrrandist (4) kõrvaldada pöördpinna tunnus, võttes y^2 jagajaks arvust a erineva arvu $b > 0$, siis saame elliptilise paraboloidi

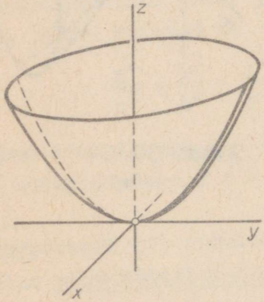
$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}, \tag{5}$$

mille lõiked tasapinnaga $z = h > 0$ on ellipsid, lõiked tasapindadega $x = h$ ja $y = h$ aga endiselt paraboolid (vt. joonist 31, lugedes seal z-teljega ristuvad lõiked ellipsiteks).

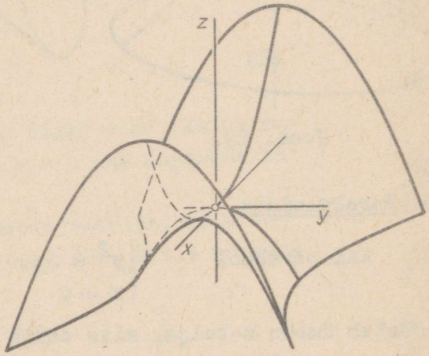
Kui viimases võrrandis asendada b arvuga $-b < 0$, siis saame võrrandi

$$z = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}, \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{6}$$

millega esitatud pinda nimetatakse <u>hüperboolseks paraboloidiks</u> ehk <u>sadulpinnaks</u> (joon. 32). Selle lõiked tasapinnaga $z = h$ on hüperboolid (erijuhul $h = 0$ sirgete paar), mille fokaaltelje siht muutub, kui muutub h märk. Lõiked tasapindadega $x = h$ ja $y = h$ on paraboolid.



Joon. 31.



Joon. 32.

6. <u>Kokk õte</u>

Vaadeldud viit pinda, nimelt <u>ellipsoidi</u> (mille erijuhuks on sfäär), <u>ühekattelist hüperboloidi, kahekattelist hüperboloidi, elliptilist paraboloidi ja hüperboolset paraboloidi</u> koos teist järku <u>koonuse</u> ja <u>silindritega</u> nimetatakse <u>teist järku pindadeks</u>, sest nende <u>kanoonilised võrrandid</u> ristkoordinaatides, nagu nägime, osutusid teise astme võrranditeks koordinaatide x, y ja z suhtes. Vastavalt sellele sirge lõikab neid pindu ülimalt kahes punktis (mõnel neist võib sirge ka asetseda).

Kui koordinaate teisendada (teljestiku rööplükke ja pööramise teel), siis teisenduvad teist järku pindade võrrandid üldkujule

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Tekib küsimus, kas see <u>üldine teise astme võrrand kolme tundmatuga</u> esitab veel muid pindu peale ülalnimetatud teist järku pindade. Selle võrrandi uurimine näitab, et peale nimetatud seitsme pinnaliigi võrrand võib esitada veel tasapindade paari, kahekordset tasapinda, sirgjoont ja punkti või ta ei esita mingit reaalset kujundit. Sellest järeldub, et teist järku pindu on ainult seitse liiki (tasapindade paari me selleks ei loe).

S i s u k o r d

I. V E K T O R A R V U T U S

II. RUUMI ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

Table (continued)

Characters / The investigated groups	Horizontal facial profile (average point, 1—3)	Prominence of cheekbones (average point, 1—3)	Width of eye-slit (average point, 1—3)	Eye slant (average point, 1—3)	Epicanthus, %	Nasal root height (average point, 1—3)	Horizontal profile of nasal bridge (average point, 1—3)	Upper lip profile (average point, 1—3)	Eye colour (average point, 0—2)	Hair colour (average point, 0—4)	Stature	Head length	Head breadth	Cephalic index	Bizygomatic breadth	Morphological facial height	Morphological facial index	Nasal index	Nasal bridge profile (concave, %)
The Mari																			
in the south of the Mari A.S.S.R.																			
23. Yelasy (The Mountain Mari)	1.89	1.55	1.67	2.28	11.0	2.69	2.37	1.78	0.99	3.30	164.8	188.0	153.7	81.8	141,4	127.3	90.0	63.3	18.0
24. Zvenigovo (The Meadow Mari)	2.18	1.57	1.65	2.20	12.0	2.61	2.22	1.82	0.94	3.41	163.6	186.7	151.2	81.0	139.3	125.9	90.4	63.7	11.0
25. Morki (The Meadow Mari)	2.16	1.63	1.85	2.25	18.0	2.65	2.35	1.87	1.01	3.35	163.3	188.1	153.5	81.6	140.3	126.8	90.4	61.4	13.0
in the north of the Mari A.S.S.R.																			
26. Medvedevo (The Meadow Mari)	2.34	1.43	1.74	2.09	13.7	2.54	2.51	1.84	0.82	3.51	162.7	187.6	152.5	81.3	138.9	126.6	91.1	63.5	9.5
27. Orshanka (The Meadow Mari)	2.57	1.29	1.83	2.23	17.0	2.58	2.40	2.03	1.01	3.62	161,0	188,1	150,6	80.1	138.4	125.3	90.5	62.0	13.0
28. Sernur (The Meadow Mari)	2.24	1.47	1.83	2.18	18.0	2.57	2.38	1.88	0.83	3.31	162.1	186.4	151.4	81.2	137.8	127.4	92.4	60.6	13.5
29. Mari—Turek (The Meadow Mari)	2.52	1.34	1.90	2.17	8.1	2.57	2.40	1.80	0.78	3.48	161.7	186.6	151.6	81.2	138.4	126.4	91.3	61.4	16.2
in the south-east of the Kirov region																			
30. Shurma (The Eastern Mari)	2.48	1.34	1.60	2.38	17.0	2.58	2.64	1.83	0.98	3.44	161.3	187.2	153.2	81.8	140.4	124.2	88.5	65.5	20.0
in the north-west of the Bashkir A.S.S.R.																			
31. Kaltasy (The Eastern Mari)	2.55	1.27	1.59	2.29	10.0	2.12	2.40	1.75	0.96	3.59	160.9	188.4	152.3	80,8	140.0	125.7	89.8	64.7	26.0
32. Mishkino (The Eastern Mari)	2.29	1.76	1.70	2.37	12.9	2.19	2.58	1.99	0.91	3.61	161.5	189.5	152.5	80.5	140.1	126.8	90.5	62.0	14.0
The Mordvinians-Erza																			
in the east of the Mordovian A.S.S.R.																			
33. Chamzinka	2.35	1.50	2.02	2.08	9.0	2.55	2.59	2.28	0.39	3.12	167.2	191.4	153.8	80.4	140.7	124.9	88.8	65.5	15.0
34. Kozlovka	2.81	1.25	2.11	2.13	2.0	2.73	2.75	2.23	0.59	3.28	167.9	190.8	153.6	80.5	140.5	126.7	90.2	64.6	11.0
35. Atyashevo	2.86	1.15	1.95	2.11	6.0	2.75	2.78	2.35	0.54	3.17	170.5	192.9	153.6	79.6	141.2	127.4	90.2	66.8	17.0
36. Dubenki	2.76	1.25	1.87	2.19	4.0	2.58	2.71	2.35	0.64	2.89	168.1	192.4	151.7	78.8	139.8	126.2	90.3	66.0	17.0
The Mordvinians-Moksha																			
in the north-west of the Mordovian A.S.S.R.																			
37. Atyuryevo	2.41	1.40	1.95	2.10	13.5	2.62	2.50	1.88	0.72	3.28	165.7	191.6	149.0	77.8	138.4	125.8	90.9	66.0	6.2
38. Krasnoslobodsk	2.39	1.36	1.93	2.19	10.0	2.61	2.47	1.90	0.68	3.09	165,3	192,3	150,3	78.2	138.6	126.9	91.6	65.2	11.0
39. Staro-Sindrovo	2.23	1.38	1.94	2.12	7.0	2.67	2.27	1.86	0.75	3.32	165.7	192.2	151.5	78.8	139.1	124.9	89.8	67.1	16.0
in the south-west of the Mordovian A.S.S.R.																			
40. Shiringushi	2.68	1.14	1.83	2.16	7.0	2.84	2.59	2.15	0.78	3.12	166.0	192.3	151.7	78.9	139.4	127.3	91.3	64.9	10.0

Hind 10 kop.