B. TIIKMA

Keha tasapinnaline liikumine

TALLINN
1966

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Teoreetilise mehaanika kateeder

B. Tiikma

KEHA TASAPINNALINE LIIKUMINE

Metoodiline vahend

Tallinn
1966

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ.
Таллин, ул. Калинина 101
Тийкма Борис Адольфович

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
Методическое пособие
На эстонском языке

Vastutav toimetaja N. Ismit

Trükkimisele antud 19. X 66. Paber 60x84/1/16
Trükipg. 2,5. Tingpg. 2,33. Tiraaž 500.
MB-o9356. TPI rotaprint, 1966. Tell.378
Hind 7 kop.

Teoreetilise mehaanika kinemaatika osa õppimisel on kesksemaid küsimusi jäiga keha tasapinnaline liikumine. Keha tasapinnalise lõike kui tasapinnalise kujundi mingi punkti kiiruse, eriti aga kiirenduse leidmine on osutunud kinemaatikaga esmakordselt tutvujale üheks raskemaks küsimuseks. Teiselt poolt on see kinemaatika peatükk laialdase praktilise tähtsusega. Võib ütelda, et keha tasapinnalise liikumise teoorial on kinemaatikas samaväärne koht kui tasapinnalise jõusüsteemi teoorial staatikas. Saanud igati tuttavaks tasapinnalise jõusüsteemi teooriaga, on õppijal edasisel staatikaga tutvumisel kergem jagu saada kehale mõjuva meelevaldse jõusüsteemi uurimisest. Nõnda on asi ka kinemaatikas. Omandanud korralikult keha tasapinnalise liikumise teooria, on õppijal seejärel kergem tutvuda ka keha teiste liikumistega.

Käesolevas töös on püütud algul meelde tuletada keha tasapinnalise liikumise üldomadusi, et siis lähemalt vaadelda tasapinnalise kujundi liikumisel punkti kiirust ja kiirendust nii mooduli kui ka suuna poolest. Pärast näiteid on esitatud küsimusi aine kordamiseks, ülesandeid ja skemaatilisi jooniseid küsimustega.

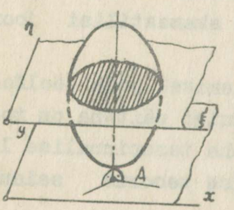
Keha tasapinnalise liikumise käsitlemisel pole eeldatud punkti liitliikumise teooria tundmist, kuigi näitena on toodud ühe ülesande võrdlev lahendus nii keha tasapinnalise liikumise teooria kui ka punkti liitliikumise teooria seisukohalt.

1.

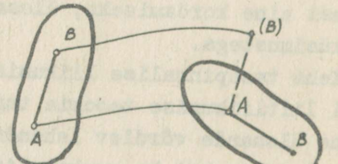
Keha tasapinnaline ehk tasaparalleelne liikumine. Keha liikumise võrrandid

Jäiga keha lihtsamad liikumised on tema translatoorne ehk kulgev liikumine ja pöörlemine ümber paigalseisva telje. Translatoorselt liigub näiteks veoauto kast siis, kui auto liigub sirgel teel. Paigalseisva ehk kinnistelje ümber pöörleb näiteks hooratas. Üsna palju aga esineb sellist keha liikumist, mille puhul keha iga punkt jääb liikumise kestel mingi kindla tasapinna suhtes paralleelsele tasapinnale. Nõnda liigub näiteks joonestuskolmnurk mööda joonestuslauda, ka väntmehhanism liigub nii, samal moel liiguvad mööblieseme punktid, kui mööblit libistada mööda põrandat. Ka ketta pöörlemist ümber kindla telje võib lugeda tasapinnaliseks ehk tasaparalleelseks liikumiseks.

Definitsioon: Jäiga keha tasapinnaliseks liikumiseks nimetatakse niisugust liikumist, mille puhul keha kõik punktid liiguvad antud liikumatu tasapinnaga paralleelsetes tasapindades. Sellest keha tasapinnalise liikumise definitsioonist ilmneb, et keha punktid, mis asetsevad (joon.1) kindla tasapinna ristsirgel AB, liiguvad kõik ühteviisi - neil on ühesugused trajektoorid, ühel ja samal ajahetkel võrdsed kiirused ja võrdsed kiirendused. Mainitud omadusest aga järeldub, et keha tasapinnalise liikumise kirjeldamiseks piisab sellest, kui vaadelda keha sellise lõike liikumist, mis jääb antud kindla tasapinnaga paralleelseks.

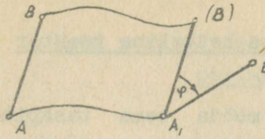


Joon. 1

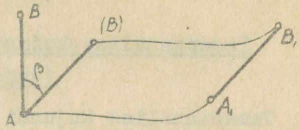


Joon. 2

Selle lõike liikumise määrab omakorda temal võetud sirglõigu AB liikumine. Seejuures punkt A joonestab mingi trajektoori AA_1, punkt B aga võib pöörelda ümber punkti A nurga φ võrra. Pöörlemine ümber A võib toimuda pärast lõigu AB translatoorset liikumist, enne seda või kogu translatoorse liikumise kestel.



Joon. 3



Joon. 4

Siit selgub, et tasapinnalise kujundi liikumisel oma tasapinnas see kujund võtab üheaegselt osa kahest liikumisest – translatoorsest ja pöörlevast, kusjuures pöörlemine toimub mingi punkti A (mida nimetatakse ka pooluseks) ümber.

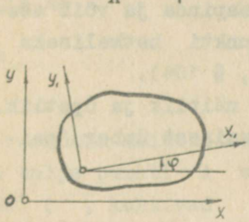
Seega, et määrata mingil ajahetkel keha asukohta ja asendit, on vaja teada kolme arvu: punkti A kaht koordinaati x_A ja y_A ning pöördenurka φ, mille võrra punktid pöörlevad ümber A. Võrrandid

$$x_A = f_1(t), \quad Y_A = f_2(t) \text{ ja } \varphi = f_3(t), \tag{1.1}$$

mis määravad keha liikumise, nimetatakse <u>keha tasapinnalise liikumise võrranditeks</u>. Viimane võrrand on kujundi pöörlemise võrrand ümber punkti A.

Keha tasapinnalist liikumist ei tohi ära segada keha translatoorse liikumisega. Viimase puhul peab ju keha mistahes sirge jääma liikumise kestel endaga paralleelseks. Sel korral on liikumine määratud punkti A liikumisvõrranditega – liikumise määramiseks peab teadma punkti A koordinaate x_A ja y_A aja funktsioonidena, s.o.

$$x_A = f_1(t) \text{ ja } y_A = f_2(t) \tag{1.2}$$



Joon. 5

Kui vaadelda paigalseisva teljestiku (x,y) kõrval veel koos liikuvat teljestikku (x_1, y_1), mille alguspunktiks on poolus A, siis määrab pöördenurk φ ühtlasi liikuva teljestiku pöördenurga paigalseisva teljestiku suhtes.

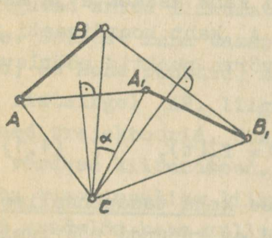
2.

Tasapinnalise kujundi pöörlemise hetkeline tsenter

Tasapinnalise kujundi liikumisel mööda tema tasapinda kehtib Bernoulli-Chasles'i[x] teoreem:

Tasapinnalist kujundit võib igast tema antud asendist üle viia mistahes uude asendisse pööramise teel mingi punkti ümber.[xx]

Teoreemi tõestamiseks võib vaadelda kujundi ühe sirglõigu AB liikumist.



Joon. 6

Olgu lõigu AB uus asend A_1B_1. Punktide AA_1 ja BB_1 ühenduslõikude keskristsirged lõikuvad ühes punktis C. Et keskristsirgete omaduse tõttu

$AC = A_1C$ ja $BC = B_1C$,

siis $\triangle A_1CB_1 = \triangle ACB$.

Seega on nende kolmnurkade tipunurgad ACB ja A_1CB_1 omavahel võrdsed ja

$$\angle ACB + \alpha = \alpha + \angle A_1CB_1.$$

Sellest järeldub, et punkt A on pöörelnud ümber punkti A_1 sama nurga võrra, mille võrra punkt B on pöörelnud punkti B_1. Kerge on veenduda, et ka lõigu AB teised punktid pöörlevad ühe ja sama nurga võrra ümber punkti C. Seda punkti C nimetatakse kujundi <u>lõplikuks (jäävaks) pöörlemistsentriks</u>. Juhul kui pöörlemistsenter liigub mööda tasapinda ja võib seega muuta oma asukohta, nimetatakse seda punkti hetkeliseks pöörlemistsentriks (vt. ka Яблонский, I, § 104).

Bernoulli-Chasles'i teoreem on väga näitlik ja õpetlik. Ta kergendab ühtlasi arusaamist keha liikumisest ümber paigalseisva punkti.

---

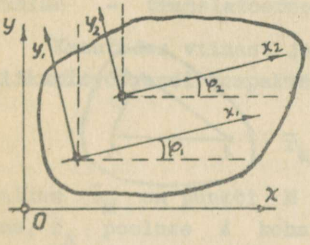
[x] Loe Šal.

[xx] Muidugi selle teoreemiga pole väidetud, et see pööramine on kujundi <u>tõeline</u> liikumine. Väidetud on ainult, et kujund võib tasapinnaliselt nõnda liikuda.

Keha nurkkiiruse ja nurkkiirenduse sõltumatus pooluse A asukohast

Teooria ja praktika seisukohalt on päris oluline teada, et keha tasapinnalisel liikumisel tema pöörlemise nurkkiirus ω ja nurkkiirendus ε ei sõltu pooluse A asukohast. Teiste sõnadega: ülesande lahendamisel võib valida pooluseks keha mistahes punkti, ilma et seejuures peaks uuesti arvutama pöörlemise nurkkiirust või nurkkiirendust.

Et selles veenduda, vaatleme koos tasapinnalise kujundiga liikuvat teljestikku (x_1, y_1) algusega pooluses A_1.



Joon. 7

Liikuva teljestiku pöörlemise määrab nurk φ_1. Kui aga nüüd on valitud uus poolus A_2, siis uue liikuva teljestiku (x_2, y_2) pöördenurk on φ_2. Jäiga keha liikumisel jäävad temaga koos liikuvad sirged (praegu teljed x_1 ja x_2) omavahel paralleelseks.

Seepärast

$$\varphi_2 = \varphi_1 \qquad (3.1)$$

ja et

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \quad \text{ning} \quad \varepsilon_2 = \frac{d\varphi_2^2}{dt^2}, \qquad (3.2)$$

siis ka

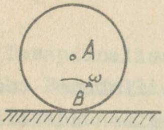
$$\omega_2 = \omega_1 \qquad (3.3)$$

ja

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1. \qquad (3.4)$$

Nõnda näiteks teades, et ketta libisemata veeremisel tema telje punkti A suhtes on nurkkiirus ω ja nurkkiirendus ε, kehtivad sama ω ja sama ε mingi teise punkti, näiteks maapinnaga kokkupuutepunkti B kohta.

Vaadeldud omadus kehtib muidugi ka nurkkiirusvektori $\bar{\omega}$ ja nurkkiirendusvektori $\bar{\varepsilon}$ kohta. Kasutades kujundi mingi punkti M kiirusvektori valemit (vt. (5.3)), võib küsimust vaadelda vektoriaalselt. Pooluste A_1 ja A_2 kohta kehtivad valemid:



Joon. 8

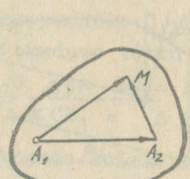
$$\bar{v}_M = \bar{v}_{A_1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{A_1M_1}, \quad \bar{v}_M = \bar{v}_{A_2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{A_2M} \quad \text{ja} \quad \bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{A_1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{A_1A_2}.$$

Järelikult $\bar{v}_{A_2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{A_2M} = \bar{v}_{A_1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{A_1M}$

ehk $\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{A_1M_2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{A_1M} =$

$= \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{A_1M}$,

millest $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1$, sest

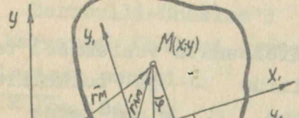


$$\bar{r}_{A_2M} = \bar{r}_{A_1M} - \bar{r}_{A_1M_2}.$$

Tôestuskäigust ilmneb, et mainitud omadus kehtib ka keha üldliikumise korral.

4.

Tasapinnalise kujundi punkti liikumisvôrrandid



Joon. 9

Olgu kujundi punkti M koordinaadid paigalseisvas teljestikus x_M, y_M ja liikuvas x_1, y_1, siis on joonise abil kerge veenduda, et

$$x_M = x_A + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi$$

$$y_M = y_A + x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi . \qquad (4.1)$$

Saadud valemeid nimetatakse tasapinnalise kujundi <u>punkti liikumisvôrrandeiks.</u>

Nende vôrrandite abil on hôlpus leida näiteks libisemata veereva ratta äärepunkti liikumisvôrrandeid juhul, kui ratas veereb sirgel teel, mööda liikumatut ringjoont (ratast) vôi ringjoone sees (vt. näiteks ülesandeid Meštšerski kogumikus, nr. 496 ja 497).

Punkti liikumise vôrrandid (4.1) sisaldavad ju analüütilise geomeetria tuntud teisenduste, nimelt rööplükke ja pöördteisenduste valemid. Nii vôib ütelda veel kord, et tasapinnalise kujundi liikumine tema enda tasapinnas on kahe liikumise – translatoorse ja rotatoorse üheaegne toimumine.

Kasutades viimast joonist (9), vôib esitada punkti M liikumisvôrrandi kompaktsel vektoriaalsel kujul

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_{AM} , \qquad (4.2)$$

milles $\bar{r}_M$ on punkti M kohavektor paigalseisvas teljestikus, $\bar{r}_A$ pooluse A kohavektor ja $\bar{r}_{AM}$ punkti kohavektor kujundiga kaasaliikuvas teljestikus. Ka see vektoriaalne valem näitab, et punkt M vôtab osa kahest liikumisest: pooluse liikumisest ja ümber pooluse pöörlemisest. Seejuures kohavektor $\bar{r}_{AM}$ on konstantse pikkusega, kuna punkt M jääb kord valitud poolusest A kindlale kaugusele.

5.

<u>Tasapinnalise kujundi punkti kiirus</u>

Teades punkti kinemaatikast, et punkti kiirusvektor on vôrdne tema kohavektori esimese tuletisega aja järgi, s.o.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}_M}{dt} , \qquad (5.1)$$

siis valemi $\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_{AM}$ (5.2) mõlema poole diferentseerimisel aja järgi saadaksegi punkti M kiirusvektori valem

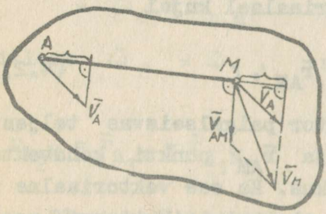
$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{AM}. \tag{5.3}$$

Seega punkti M kiirusvektor on pooluse kiirusvektori $\bar{v}_A$ ja pooluse ümber pöörlemise kiirusvektori $\bar{v}_{AM}$ summa. Valem (5.3) annab tasapinnalise kujundi kõigi punktide kiiruste arvutamise eeskirja.

Kuna konstantse pikkusega vektori tuletisvektor[x] on temaga risti, siis

$$\frac{d\bar{r}_{AM}}{dt} = \bar{v}_{AM} \perp \bar{r}_{AM}. \tag{5.4}$$

Näitlik on ka vektori $\bar{v}_M$ geomeetriline tõlgendus: punkti M kiirusvektor osutub vektoritele $\bar{v}_A$ ja $\bar{v}_{AM}$ ehitatud rööpküliku diagonaali sihiliseks vektoriks.



Joon. 10

Sellest geomeetrilisest pildist järeldub nagu iseenesest üsna ulatusliku praktilise tähtsusega lause:

Jäiga keha kahe punkti A ja M kiirusvektorite projektsioonid neid punkte ühendavale sirgele AM on omavahel võrdsed ja samasuunalised.

Tähendab

$$\text{proj } \bar{v}_M = \text{proj } \bar{v}_A.$$

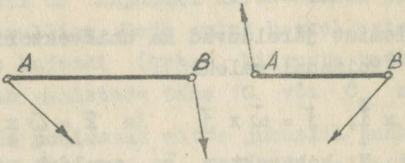
---

[x] Selle väite õigsuses võib veenduda alljärgnevalt. Olgu $\bar{a}$ konstantse pikkusega vektor. Siis $a^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = \text{const}$ ja $\frac{da^2}{dt} = 0$, teiselt poolt aga $\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{a})}{dt} = 2\,\dot{\bar{a}} \cdot \bar{a}$. Nende kahe avaldise võrdlemisest järeldub, et $2\,\dot{\bar{a}} \cdot \bar{a} = 0$. Seega $\dot{\bar{a}} \perp \bar{a}$.

Lause tõestuseks tuleb veenduda vaid selles, et punkti M rakendatud kiirusvektorite $\bar{v}_A$ ja $\bar{v}_M$ lõpp-punkte projekteerib üks ja seesama projekteeriv kiir.

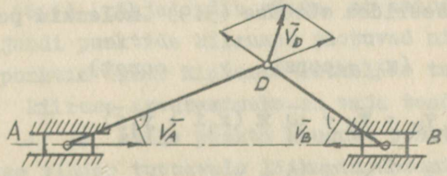
Lauset rakendatakse mitte üksnes kinemaatikas, vaid ka dünaamikas seoses staatika ja dünaamika üldvõrranditega (virtuaalsete nihete printsiibiga). See lause kehtib ka ruumis liikuva keha kohta, näiteks võib ütelda, et oda lennul tema mistahes kahe punkti kiiruste projektsioonid neid ühendavale sirgele on omavahel võrdsed.

Mainitud lausest järeldub, et joonisel (10a) toodud kahe punkti A ja B kiirusvektorite pildid ei ole õiged.



Joon. 10^a

M ä r k u s: Teades kahevardalise mehhanismi äärmiste punktide kiirusi, võib leida varraste ühenduskoha (liigendi) kiiruse, kui kasutada kiiruste projektsiooni teoreemi (vt. joon. 10 ^{a})



Joon. 10^b

Kasutades tasapinnalise kujundi punkti liikumise võrrandeid (4.1) ja teades, et x_A, y_A ning φ on muutuvad, kuid x_1 ja y_1 konstantsed suurused, saab nende võrduste diferentseerimisel aja järgi kiirusvektori projektsioonid koordinaattelgedele x ja y.

$$x_M = x_A - x_1 \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} - y_1 \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

$$y_M = y_A + y_1\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} - y_1\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \tag{5.5}$$

ehk (4.1) abil:

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= v_{Mx} = \dot{x}_A - \omega\,(y_M - y_A), \\ \dot{y}_M &= v_{My} = \dot{y}_A + \omega\,(x_M - x_A). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Kiiruse valemi (5.4) teine tuletamisviis on järgmine. On teada, et paigalseisva telje ümber pöörleva jäiga keha punkti kiirusvektor avaldub nurkkiirusvektori $\bar{\omega}$ ja kohavektori $\bar{r}$ abil valemiga

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{5.7}$$

Sellest valemist järelduvad ka ühikvektorite $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ tuletisvalemid (Poissoni valemid):

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j} \quad \text{ja} \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \tag{5.8}$$

Nüüd punkti M kohavektor $\bar{r}_M$ avaldub nii:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + x_1\bar{i} + y_1\bar{j}, \tag{5.9}$$

milles

$$x_1 = x_M - x_A \quad \text{ja} \quad y_1 = y_M - y_A. \tag{5.10}$$

Diferentseerides võrduse (5.9) mõlemaid pooli aja järgi

$$(x_1 = \text{const}, \quad y_1 = \text{const}),$$

saab

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times (x_1\bar{i} + y_1\bar{j}) \tag{5.11}$$

ehk

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AM}. \tag{5.12}$$

Kerge on veenduda, et sellest vektorvalemist järelduvad kiiruse projektsioonid paigalseisvatele koordinaattelgedele valemite (5.6) kujul.

6.

Tasapinnalise kujundi kiiruste hetkeline tsenter

Kiiruse valemist $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{AM}$ (6.1)

järeldub, juhul kui $\bar{v}_{AM} = \bar{v}_A$, (6.2)

et $v_M = 0$, (6.3)

s.t. et punkti M kiirus on sel hetkel vôrdne nulliga.

Vôib üldiselt väita, et mittetranslatoorsel tasapinnalisel liikumisel on kujundil antud hetkel punkt, mille kiirus on vôrdne nulliga. Seda antud hetkel paigalseisvat punkti nimetatakse kujundi (keha) kiiruste hetkeliseks tsentriks. Teda vôib tähistada tähe C vôi C_v abil.

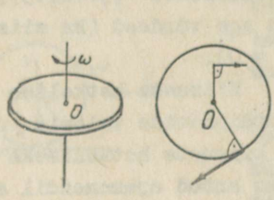
Kui valida pooluseks mitte juhuslik punkt A, vaid kiiruste hetkeline tsenter C, järeldub valemist (6.1), et

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{CM}, \tag{6.4}$$

kuna nüüd

$$\bar{v}_A = \bar{v}_C = 0.$$

Valemi (6.4) pôhjal vôib väita, et antud hetkel tasapinnalise kujundi punktide kiirused jaotuvad nii, nagu pöörleksid need punktid ümber kiiruste hetkelise tsentri C. Mingi punkti M kiiruse arvutamiseks on vaja teada pöörlemise nurkkiirust ω ja selle punkti kaugust punktist C. Sônastatud lause vihjab tuttavale liikumisjuhtumile, nimelt ringketta pöörlemisele oma tsentrit läbiva telje ümber.

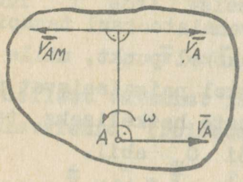


Joon. 11

Selle ketta kôik punktid tiirlevad ümber punkti O. Punkt O on ketta kiiruste hetkeline tsenter. Seejuures punktide joonkiirused on vôrdelised nende kaugustega tsentrist.

$$\frac{v_M}{v_A} = \frac{OM}{OA}. \tag{6.5}$$

Veel tähtsam on see, et kõikide punktide kiirusvektorid on risti nende pöörlemisraadiustega (nagu ikka ringliikumisel). Siit saab juhise tasapinnalise kujundi kiiruste hetkelise tsentri graafiliseks leidmiseks. Teades kahe punkti kiirusvektorite sihte, tuleb nendest punktidest tõmmata kiiruste sihtidele ristsirged. Ristsirgete lõikepunkt ongi antud keha kiiruste hetkeline tsenter. Sel viisil võib näiteks, teadmata ketta tsentri asukohta, leida viimase "kinemaatilisel" teel – kahe punkti kiiruste abil.



Joon. 12

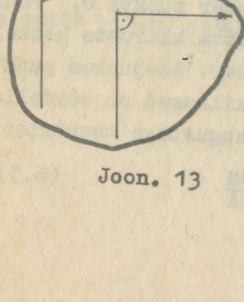
Teades mingi punkti A (pooluse) kiirust v_A ja keha nurkkiirust ω, võib punkti C asukoha leida ka järgmiselt: sammuda punktist A risti kiirusvektoriga $\bar{v}_A$ vastavalt selle pöörlemissuunale lõigu $d = \frac{v_A}{\omega}$ võrra kas vasakule või paremale. Lõigu lõpp-punkt ongi punkt C.

Sel korral $|\bar{v}_{AM}| = |\bar{v}_A|$.

Kiiruste hetkelise tsentri asukoha võib aga leida ka analüütiliselt. Selleks tuleb arvutada punkti C koordinaadid. Et $v_c = 0$ ($\dot{x}_c = 0$ ($\dot{y}_c = 0$), siis valemist (5.6) saab

$$x_c = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\omega}, \quad y_c = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\omega}. \qquad (6.6)$$

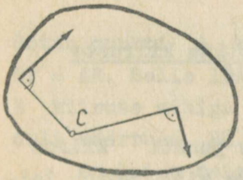
Neist valemeist on näha, et punkti C pole võimalik leida siis, kui $\omega = 0$. Tähendab sel hetkel keha ei pöörle, vaid liigub translatoorselt. Siis punktide kiirused ja samuti nende ristsirged on omavahel paralleelsed (joon.13), kiirused aga võrdsed (ka siis, kui $\varepsilon \neq 0$).


Joon. 13

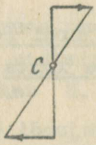
Kiiruste hetkelise tsentri koordinaatide valemid näitavad, et kiiruste hetkeliseks tsentriks antud ajamomendil saab olla ainult üks punkt, kuna x_c ja y_c sõltuvad võrduste parempoolsetest suurustest lineaarselt. Muidugi on ka geomeetriliselt ilmne, et kiiruste hetkeliseks tsentriks antud momendil saab olla ainult üks punkt.

Valemist (6.6) selgub ühtlasi, et igal erineval ajahetkel võib kiiruste hetkeline tsenter olla ise kohas. Seega punkt C joonestab paigalseisvas teljestikus mingi joone, mille võrrandite parameetriliseks paariks ongi (6.6). Seda joont nimetatakse kujundi <u>paigalseisvaks tsentroidiks</u>. Punkti C kujundatud joon liikuvas teljestikus kannab nimetust <u>liikuv tsentroid</u>.

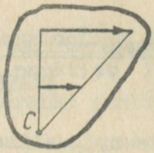
Järgmistel joonistel on näidatud kiiruste hetkelise tsentri leidmist.



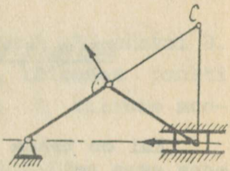
Joon. 14



Joon. 15

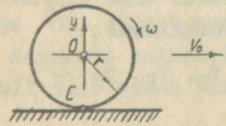


Joon. 16



Joon. 17

Joonistel 14 ja 17 piisab kahe punkti kiiruste sihtide teadmisest, joonistel 15 ja 16 aga peab teadma kahe punkti kiiruste mooduleid ja suundi. Kaks keskmist pilti tuletavad meelde ringketta raadiuse (ja diameetri) peal olevate punktide kiiruste jaotust. Joonisel 17 on esitatud väntmehhanismi kepsu kiiruste hetkeline tsenter.



Joon. 18

Huvitav on leida punkti C asukoht libisemata veereval rattal, tänapäeva ühel levinumal lihtmasinal.

Punkt C on kõigil libisemata veerevail rattail maapinnaga kokkupuute punktis olemas teekujust sõltumata. Selles võib veenduda mitmeti. Näiteks valemite (6.6) järgi.

$$x_c = 0 - \frac{0}{\omega} = 0, \quad y_c = r - \frac{v_0}{\omega} = r - r = 0$$

M ä r k u s: Kui on tegemist mitmest osast koosneva kehaga (näit. mehhanismiga), on igal osal oma erinev kiiruste hetkeline tsenter. Seepärast on mõttetu küsida auto või traktori kiiruste hetkelist tsentrit, küll aga võib seda küsida nende masinate osade kohta.

Sirgel teel libisemata veerava ratta paigalseisvaks tsentroidiks on sirgjoon, liikuvaks tsentroidiks ratta äärjoon.

Ratta äärel olevate punktide kiiruste leidmiseks on sobiv võtta pooluseks ka punkt C. Kuna nurkkiirus ω ei sõltu poolusest, siis ka C kohta jääb ta samaks.

7.

Näiteid tasapinnalise kujundi punktide kiiruste leidmise kohta

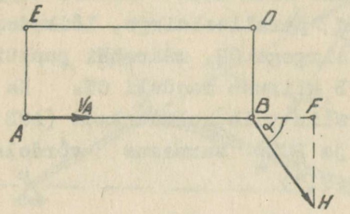
Kui on teada tasapinnalise kujundi ühe punkti kiirus moodulilt ja suunalt ja teise punkti kiiruse siht, võib leida selle kujundi mistahes punkti kiiruse. Nimelt kahe punkti kiiruste sihtide ristsirged määravad punkti C. Esimese punkti kiiruse jagatis punkti kaugusega kiiruste hetkelisest tsentrist C on võrdne kujundi nurkkiirusega ω. Edasi, teades teise punkti kaugust punktist C, saabki leida tema kiiruse, korrutades selle kauguse arvuga ω. Punktide kiiruste leidmiseks võib aga kasutada ka kiiruste projektsiooni lauset.

N ä i d e 1. Ristkülik ABDE liigub mööda tasapinda nõnda, et tema tipu A kiirus on v_A ja suunatud mööda külge AB, tipu B kiirus aga moodustab sihiga AB nurga α. Teades ristküliku mõõtmeid a ja b, leida tema tippude B, D ja E kiirused, samuti ristküliku nurkkiirus.

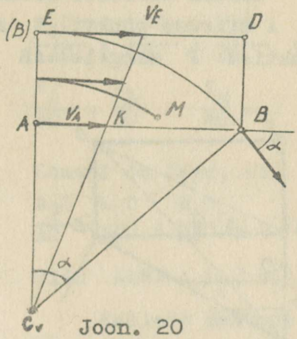
Antud: $\bar{v}_A$, d, a, b. Leida: v_B, v_D, v_E ja ω.

a. Graafiline lahendus:

Kahe punkti kiiruste projektsiooni teoreemi alusel kanname punkti A kiirusvektori pikkuse lõigu AK (mis praegu



Joon. 19



Joon. 20

ühtib punkti A kiiruse projektsiooniga sihil AB) punkti B. BF = AK. Selle lõigu ristsirge punktist F, lõikudes punkti B kiiruse sihiga kohas H, määrabki punkti B kiiruse mooduli väärtuse BH.

Et leida teiste punktide kiirusi, peab leidma enne nende kiiruste sihid. Selleks tuleb appi võtta kiiruste hetkeline tsenter.

Teine viis:

Punktide kiirusi on hõlpus leida kiiruste hetkelise tsentri abil. Punktide A ja B kiiruste ristsirged lõikuvad kohas C, mis ongi kiiruste hetkeliseks tsentriks ristküliku kõigi punktide kohta; kõik punktid pöörlevad sel hetkel ümber punkti C ühe ja sama nurkkiirusega ω .

Teades nüüd punkti C, võib raadiusega CB tõmmata ringjoone kaare ümber C kuni lõikumiseni sihiga C kohas (B), kust tõmmatud paralleellõik kiirusega v_A, lõikudes sihiga CK, määrab punkti B kiirusvektori pikkuse (B)L.

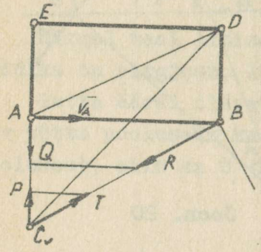
Sarnaste kolmnurkade ACK ja (B)CL külgede võrdelisuse abil saab seose kinemaatiliste suuruste vahel:

$$\frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = \omega \; . \qquad (7.1)$$

Analoogiliselt saab leida ristküliku teiste tippude või mistahes punkti (näiteks M) kiiruse.

Kolmas viis:

Teades kiiruste hetkelist tsentrit C, võib kanda punkti A kiiruse punkti C sihile CA. Siis kiirusvektori lõpp-punktist P sirgele AB tõmmatud paralleelsirge, lõikudes sirgega CB, määrabki punkti B kiiruse mooduli CT. Ka siin viib kolmnurkade (ACB ja PCT) sarnasus võrdele (7.1).



Joon. 21

Sama võrde saab veel teisel teel: kandes nimelt kiiruse v_A punkti A sihile AC_v ja tõmmates $QR \parallel AB$. Analoogiliselt saab leida kiirusi teistel punktidel.

b. <u>Analüütiline lahendus</u>:

Kiiruste projektsiooni lause põhjal

$$v_B \cos\alpha = v_K \qquad (7.2)$$

Jooniselt 20 selgub, et

$$AB = BC_v \sin\alpha \ ; \ BC_v = \frac{AB}{\sin\alpha}, \ AC_v = \frac{AB}{\tan\alpha} . \qquad (7.3)$$

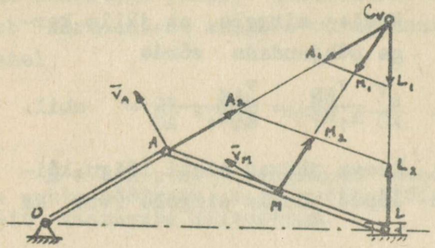
Siis $\dfrac{v_K}{AB/\tan\alpha} = \dfrac{v_B}{AB/\sin\alpha}$ ehk $v_B = \dfrac{v_A \tan\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{v_A}{\cos\alpha}$.

(7.4)

Ülejäänud punktide kiiruste arvutamiseks peab enne leidma vastavate pöörlemisraadiuste C_vD, C_vE jne. pikkused ja korrutama need siis kujundi nurkkiirusega

$$\omega = \frac{v_K}{AC_v} .$$

N ä i d e 2. Leida väntmehhanismi kepsu AL punkti M ja liuguri L kiirused, kui vända OA pikkus on r ja kepsul ℓ. Vänt pöörleb nurkkiirusega ω .



Joon. 22

Kerge on veenduda, et siin kehtib

$$\frac{A_1C}{AC} = \frac{L_1C}{LC} = \frac{M_1C}{MC} \quad \text{ehk}$$

$$\frac{v_A}{AC} = \frac{v_L}{LC} = \frac{v_M}{MC} = \omega \ . \tag{7.5}$$

Samuti on õige, et

$$\frac{A_2C}{AC} = \frac{L_2C}{LC} = \frac{M_2C}{MC} \ . \tag{7.6}$$

Siin $AL \parallel A_2L_2 \parallel A_1L_1$.

Sellest näitest ilmneb selgesti, kuivõrd võimsalt abistab kiiruste hetkeline tsenter punktide kiiruste leidmist. Kasutades seda punkti, saab üsna kergesti kätte kepsu AL paljude punktide kiirused nii suuruselt kui ka suunalt.

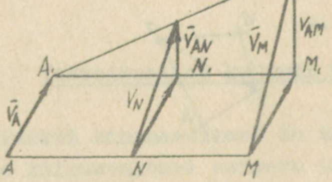
N ä i d e 3. Vaatleme valemi

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{AM} \tag{7.7}$$

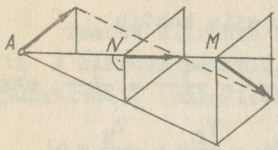
kasutamiseks ja tõlgendamiseks järgmist näidet. Olgu teada sirglõigu AM otspunkti A kiirusvektor $\bar{v}_A$ ja M pöörlemiskiirus $\bar{v}_{AM}$.

Joonisel 23 on näha, et punkti M kiirusvektori saab $\bar{v}_A$ ja $\bar{v}_{AM}$ liitmisel. Kui on vaja leida mingi punkti N kiirust, peab kandma punkti N pooluse A kiirusvektori $\bar{v}_A$ ja viimase lõpust tõmbama ristlõigu sihile AM kuni lõikumiseni punktide A ja M kiirusvektorite lõppusid ühendava sirgega. Nõnda

$$\bar{v}_N = \bar{v}_A + \bar{v}_{AN} \ .$$



Joon. 23



Joon. 24

Seda, et lõigu punktide kiirusvektorite lõpud jäävad ühele sirgele, on jälle kerge põhjendada võrde

$$\frac{v_{AN}}{A_1N_1} = \frac{v_{AM}}{A_1N_1} = \omega \quad \text{abil.}$$

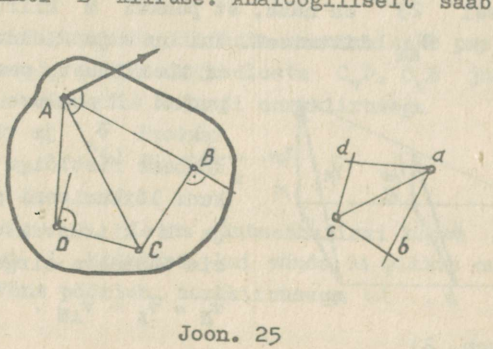
Seega jäävad alati lõigu kõikide punktide kiirusvektorite lõpud ühele sirgele (vt. ka joon. 24).

8.

Kiiruste diagramm (kiiruste plaan)

Tasaparalleelselt liikuva keha ja ka kehade süsteemi, näiteks mehhanismi, punktide kiiruste hõlpsaks graafiliseks leidmiseks on otstarbekohane kasutada võtet, mis seisneb kiiruste diagrammi (ehk plaani) konstrueerimises. Võte iseenesest on lihtne ja näitlik.

Olgu teada keha ühe punkti A kiirus v_A moodulilt ja suunalt ja teise punkti B kiiruse v_B siht. Siin on, nagu eespool nägime, kerge leida keha kiiruste hetkelist tsentrit. Seejärel joonestatakse abijoonisel kiirus v_A lõiguna ca (paralleelselt vektoriga $\bar{v}_A$) ja punktist c tõmmatakse v_B sihiline sirge. Nüüd punktist a tõmmatud lõik ab AB-ga määrabki punkti B kiiruse. Analoogiliselt saab ed si-



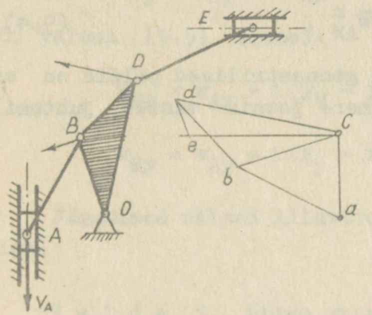
Joon. 25

hil punkti d. Lõigu cd pikkus osutubki punkti D kiiruse mooduliks. Võtte põhjendus on lihtne. Nagu lk-l 19 toodud näidetegi puhul, järeldub ka siin kolmnurkade ACB ja acb sarnasusest külgede võrdelisus ja sellest seos kiiruste vahel

$$\frac{ca}{CA} = \frac{cb}{CB} \text{ ehk } \frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB} = \omega \ . \qquad (8.1)$$

M ä r k u s: Diagrammi abcde ... joonestamisel võib ka muuta mõõtkava, s.o. võtta lõigud ac, bc jne. võrdeliselt vastavate kiirustega.

N ä i d e 4. Kiiruste diagrammi kasutamine mitmest osast koosneva kehade süsteemi puhul.



Joon. 26

Teades joonisel 26 kujutatud mehhanismi liuguri A kiirust, võib leida punktide B, D ja E kiirused.

Punkti B kiirus on risti tema pöörlemisraadiusega OB ja punkti D kiirus risti raadiusega OD. Teades sel viisil punktide B, D ja E kiiruste sihte, saab diagrammi abil leida üsna hõlpsasti ka nende punktide kiiruste moodulid.

Antud mehhanismi punktide kiirusi on muidugi võimalik leida ka ilma kiiruste diagrammita, kui kasutada selleks iga osa kohta kiiruste hetkelist tsentrit, nagu selgus eelmistest näidetest.

9.

Tasapinnalise kujundi punkti kiirenduse leidmine

Punkti kinemaatikast on teada, et kiirendusvektor on võrdne kiirusvektori esimese tuletisega aja järgi[x]:

[x] Mehhanismide teoorias tähistatakse kiirendust tähega a, sõna "acceleratio" (kiirendus) esimene täht.

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \tag{9.1}$$

Diferentseerides tasapinnalise kujundi punkti kiirusvektorit aja järgi, saamegi kiirendusvektori. Nônda valemist

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{AM} \tag{9.2}$$

saab valemi

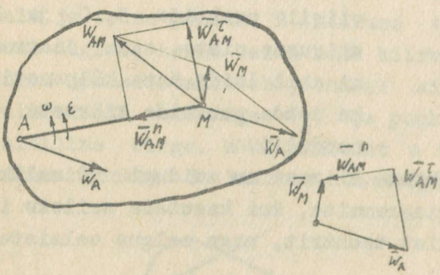
$$\bar{w}_M = \bar{w}_A + \bar{w}_{AM}. \tag{9.3}$$

See tähendab, et punkti M kiirendusvektor on pooluse A kiirendusvektori ja pooluse ümber pöörlemise kiirendusvektori summa. Pöörlemisel aga kiirendus jaotub kaheks komponendiks, punkti ja normaalkiirenduseks, seega

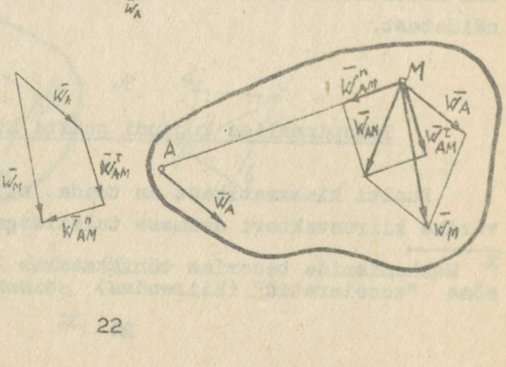
$$\bar{w}_M = \bar{w}_A + \bar{w}_{AM} + \bar{w}_{AM}^{\,n}. \tag{9.4}$$

Sellele valemile vastavad geomeetrilised pildid on antud joonistel 27 ja 28. Esimene joonis vastab juhtumile,

Joon. 27



Joon. 28



kui pöörlemine on kiirenev, s.o. kui nurkkiirus ω ja nurkkiirendus ε on ühesuunalised (kiirenev pöörlemine). Teine joonis on aeglustuva pöörlemise kohta.

Kiirenduse valemit (9.4) vôib väljendada veel nii:

$$\bar{w}_M = \bar{w}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AM} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{AM}, \tag{9.5}$$

mis osutub valemi (5.12) diferentseerimise tulemuseks.

Kiirendusvektori projektsioonid x- ja y-teljele kujunevad järgmiselt:

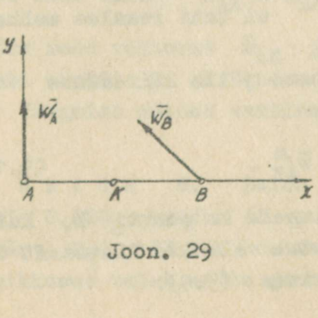
$$\begin{aligned} w_{Mx} &= w_{Ax} + (w_{AM}^{\tau})x + (w_{AM}^{n})x, \\ w_{My} &= w_{Ay} + (w_{AM}^{\tau})y + (w_{AM}^{n})y \end{aligned} \tag{9.6}$$

vôi valemi (9.5) alusel:

$$\begin{aligned} w_{Mx} &= w_{Ax} - \varepsilon (y_M - y_A) - \omega^2 (x_M - x_A), \\ w_{My} &= w_{Ay} + \varepsilon (x_y - x_A) - \omega^2 (y_M - y_A). \end{aligned} \tag{9.7}$$

Järgmised näited illustreerivad kiirendusvalemi kasutamist.

N ä i d e 5. Sirge varras AB = a liigub mööda tasapinda nônda, et tema otsa A kiirendus on $w_A = 1\ m/s^2$ ja risti lôiguga AB. Teise otsa B kiirendus on $w_B = 1\ m/s^2$, mis on suunatud AB suhtes nurga $\alpha = 45^o$ all, nagu näidatud joonisel. Leida varda nurkkiirus (vôi ω^2) ja nurkkiirendus ε. Samuti leida varda keskpunkti K kiirendus.



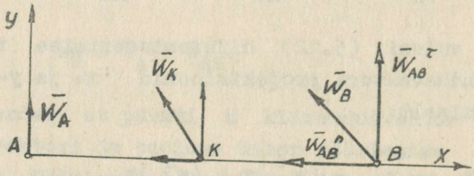
Joon. 29

Antud: a, α, $w_A = 1\ m/s^2$, $w_B = 1\ m/s^2$.

Leida: ω^2, ε ja $\bar{w}_K$, kui AK = KB.

a. Analüütiline lahendus. Võttes punkti A pooluseks ja x-telje mööda AB sihti, võib kirjutada

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{AB}^{\tau} + \bar{w}_{AB}^{n} . \qquad (9.8)$$



Joon. 30

Projekteerime selle vektorvõrduse algul x-teljele, siis y-teljele:

$$w_{Bx} = 0 + 0 - w_{AB}^{n},$$
$$w_{By} = w_A + w_{AB}^{\tau} + 0 \qquad (9.9)$$

või arvulisi andmeid kasutades:

$$-1.\cos 45^o = -\omega^2 a, \quad \text{millest } \omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{2a}, \qquad (9.10)$$

$$+1.\sin 45^o = 1 + \varepsilon a, \text{ millest } \varepsilon = \frac{\sqrt{2}-2}{2a} = \sim - \frac{0{,}295}{a},$$

sest $w_{AB}^{n} = \omega^2 a$ ja $w_{AB}^{\tau} = \varepsilon a.$

Seega antud hetkel varda nurkkiiruse ruut on võrdne $\frac{\sqrt{2}}{2a}$ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ja nurkkiirendus $-\frac{0{,}295}{a}$ $\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

Märkusena olgu öeldud, et ω^2 ei tohi reaalse mehhanismi liikumisel olla negatiivne.

Selleks et leida w_K, kasutame jälle kiirenduse valemit (9.8) kujul

$$\bar{w}_K = \bar{w}_A + \bar{w}_{AK}^{\tau} + \bar{w}_{AK}^{n} . \qquad (9.11)$$

Siin oleks võinud valida pooluseks ka punkti B, kuid punkti A kiirenduse suund hõlbustab valemite lihtsamat avaldamist, nagu see ilmnes juba valemites (9.9).

Seega

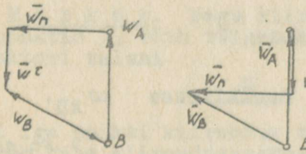
$$\ddot{x}_K = 0 + 0 - \omega^2 \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2a} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,, \qquad (9.12)$$

$$\ddot{y}_K = 1 + \varepsilon \frac{a}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}-2}{4} = 1 - 0{,}147 = 0{,}85$$

ja $$w_K = \sqrt{\ddot{x}_K^2 + \ddot{y}_K^2} = \sqrt{0{,}85} = 0{,}92. \qquad (9.13)$$

b. Graafiline lahendus

Üsna hõlpus on seda ülesannet lahendada graafiliselt koos lühikeste abiarvutustega. Kuna on antud punktide A ja B kiirendusvektorid, võib otsekohe joonestada punkti B kohta kiirendusvektori diagrammi. Algul tuleb punkti B (või joonise pinnal mingi kõrvalpunkti) kanda vektorid $\bar{w}_A$ ja $\bar{w}_B$, seejärel $\bar{w}_A$ lõpust tõmmata $\bar{w}^n$ siht ja $\bar{w}_B$ lõpust $\bar{w}^\tau$ siht (või $\bar{w}_B$ lõpust $\bar{w}^n$ siht ja $\bar{w}_A$ lõpust $\bar{w}^\tau$ siht). Nende sihtide lõikepunkt määrabki vektorite $\bar{w}^n$ ja $\bar{w}^\tau$ pikkused. Eks pea ju $\bar{w}_A + \bar{w}_{AB}^\tau + \bar{w}_{AB}^n$ olema võrdne vektoriga $\bar{w}_B$.



Joon. 31

Nüüd

$$\omega^2 = \frac{w_{AB}^n}{a} \quad \text{ja} \quad |\varepsilon| = \frac{|w_{AB}^\tau|}{a}\,. \qquad (9.14)$$

Edasi saab leida $w_{AK}^\tau = \varepsilon \frac{a}{2}$ ja $\bar{w}_{AK}^n = \omega^2 \frac{a}{2}$. (9.15)

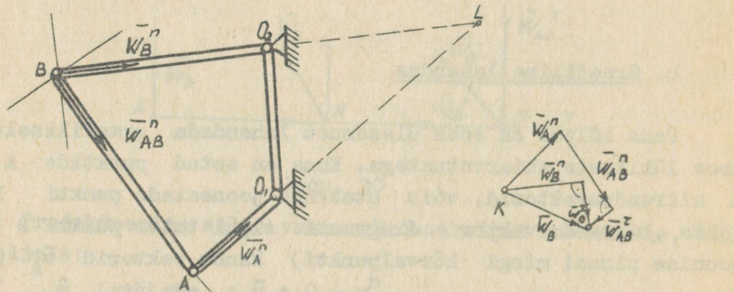
Kandes need vektorid $\bar{w}_{AK}$ ja $\bar{w}_{AK}^n$ vektori $\bar{w}_A$ lõppu, saabki punkti K kiirendusvektori $\bar{w}_K$.

Järgmist näidet vaatleme skemaatiliselt.

N ä i d e 6. Leida joonisel 32 kujutatud mehhanismi O_1ABO_2 varda AB punkti B kiirendus, kui on teada, et vänt O_1A pöörleb konstantse nurkkiirusega ω ja varraste pikkused tuleb mõõta jooniselt.

Lahendus:

Punkti A kiiruse saab nurkkiiruse ω ja vända O_1A pikkuse korrutisena. Et punktide A ja B kiirused on risti nende pöörlemisraadiustega O_1A ja O_2B, siis nende raadiuste sihid lôikuvad varda AB kiiruste hetkelises tsent-



Joon. 32

ris L. Nüüd saab leida varda AB nurkkiiruse ω_{AB}.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AL}. \qquad (9.16)$$

Punkti A kiirendus osutub normaalkiirenduseks piki O_1A, kuna puutekiirendus on ω jäävuse tôttu vôrdne nulliga.

$$w_A^n = \omega \cdot O_1A. \qquad (9.17)$$

Edasi

$$w_{AB}^n = \omega^2_{AB} \cdot AB \qquad (9.18)$$

ja

$$w_B^n = \omega^2_{O_2B} \cdot O_2B, \qquad (9.19)$$

kuna

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_B}{O_2B}. \qquad (9.20)$$

Vôib kirjutada

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{AB}^\tau + \bar{w}_{AB}^n \qquad (9.21)$$

ja teiselt poolt

$$\bar{w}_B = \bar{w}_B^{\tau} + \bar{w}_B^n . \qquad (9.22)$$

Nendes vektorvôrdustes on teada $\bar{w}_A$, $\bar{w}_B^n$ ja $\bar{w}_{AB}^n$ nii moodulilt kui ka suunalt. Et leida tundmatud $\bar{w}_{AB}^{\tau}$ ja $\bar{w}_B^{\tau}$, tuleb ehitada kaks kiirenduste hulknurka vastavalt vôrdustele (9.21) ja (9.22).

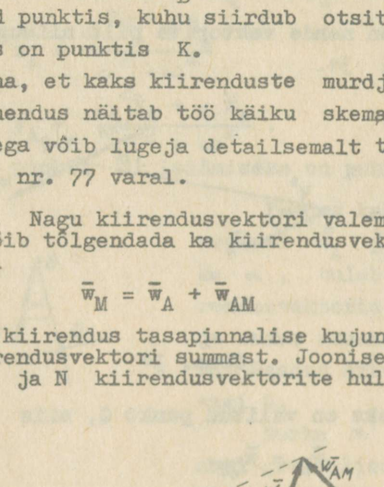
Joonisel 32 ongi vektori $\bar{w}_A^n$ lôppu liidetud $\bar{w}_{AB}^n$ ning viimase lôpust tômmatud ristsirge, mis on $\bar{w}_{AB}^{\tau}$ sihiline. Vektori $\bar{w}_A^n$ alguspunkti on kantud vektor $\bar{w}_B^n$ ja selle lôpust on tômmatud ristsiht ($\bar{w}_B$ siht). Vektorite sihid $\bar{w}_B^{\tau}$ ja $\bar{w}_{AB}^{\tau}$ lôikuvad punktis, kuhu siirdub otsitava vektori $\bar{\bar{w}}_B$ lôpp; tema algus on punktis K.

Nônda on näha, et kaks kiirenduste murdjoont määravad $\bar{w}_B$. Esitatud lahendus näitab töö käiku skemaatiliselt. Seda laadi ülesandega vôib lugeja detailsemalt tutvuda S.Targi[x] ôpiku näite nr. 77 varal.

M ä r k u s. Nagu kiirendusvektori valemit on tôlgendatud punktis 7, vôib tôlgendada ka kiirendusvektorit. Kiirendusvektori valemi

$$\bar{w}_M = \bar{w}_A + \bar{w}_{AM} \qquad (9.23)$$

järgi iga punkti kiirendus tasapinnalise kujundi liikumisel koosneb kahe kiirendusvektori summast. Joonisel 33 on näidatud punktide M ja N kiirendusvektorite hulknurgad.



Joon. 33

x S. Targ. Teoreetiline mehaanika. Kirjastus "Valgus", Tallinn 1966.

Tasapinnalise kujundi kiirenduste hetkeline tsenter

Mööda tasapinda mittetranslatoorselt liikuval tasapinnalisel kujundil leidub antud hetkel punkt, mille kiirendus võrdub nulliga. Seda punkti nimetatakse kujundi hetkeliseks kiirenduste tsentriks. Teda võib tähistada C_w või Q abil.

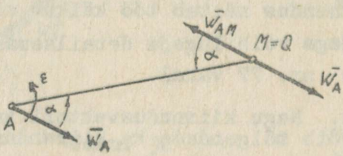
Kiirendusvektori valemist

$$\bar{w}_M = \bar{w}_A + \bar{w}_{AM} \tag{10.1}$$

järeldub

$$\bar{w}_M = 0, \text{ kui } \bar{w}_{AM} = - \bar{w}_A. \tag{10.2}$$

Sel juhul on nende vektorite pilt niisugune, nagu kujutatud joonisel 34.

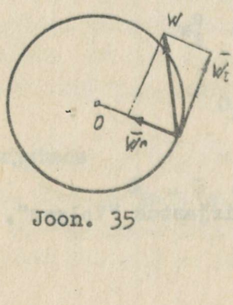


Joon. 34

Kui pooluseks on valitud punkt Q, siis

$$\bar{w}_M = \bar{w}_{QM}. \tag{10.3}$$

Nõnda võib ütelda, et tasapinnalise kujundi punktide kiirendused jaotuvad selliselt, nagu pöörleksid punktid ümber hetkeliste kiirenduste tsentri.



Joon. 35

On teada, et punkti ringliikumisel tema kiirendus moodustab pöörlemisraadiusega nurga α, mille kohta kehtib seos

$$\tan \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{10.4}$$

Seejuures nurka α môôdetakse alates vektorist $\bar{w}$ kiireneva pöörlemise puhul pöörlemise suunas, aeglustuva pöörlemise korral vastassuunas. Seepärast, teades ω, ε ja $\bar{w}_A$, saab hôlpsasti leida punkti Q: pööranud antud punkti A kiirendusvektorit nurga α vôrra, tuleb môôta mööda seda sihti lôigu pikkusega

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} . \qquad (10.5)$$

Teine viis punkti Q leidmiseks on arvutada valemite (9.7) abil tema koordinaadid x_Q ja y_Q. Need on

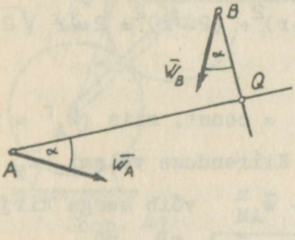
$$x_Q = x_A + \frac{\omega^2 \ddot{x}_A - \varepsilon \ddot{y}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$y_Q = y_A + \frac{\omega^2 \ddot{y}_A + \varepsilon \ddot{x}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Kolmas viis punkti Q leidmiseks on puhtgraafiline.

Teades kahe punkti kiirendusi $\bar{w}_A$ ja $\bar{w}_B$ ning nurka α, tuleb môlemad kiirendusvektorid pöörata ühes ja samas suunas nurga α vôrra. Saadud sihtide lôikepunkt ongi Q.

Nurka α saab leida samuti graafiliselt, milles vôib veenduda p.9 märkuse pôhjal.

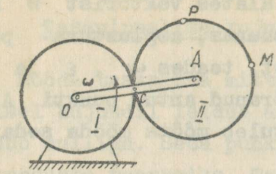


Joon. 36

11.

Punkti liitliikumise ja keha tasapinnalise liikumise teooriate vôrdlemine

Järgnevas on toodud näide keha tasaparalleelse liikumise ja punkti liitliikumise teooriate vôrdlemiseks.



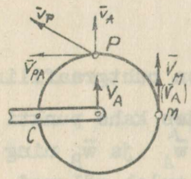
Joon. 37

N ä i d e 7. Kaks omavahel võrdse raadiusega r hammasratast on teineteisega seotud vända OA abil. I ratas on liikumatu, II ratas saab mööda esimest ratast veereda libisemata. Nõutakse leida liikuva ratta punktide M ja P kiirused ja kiirendused, kui vända nurkkiirus ω = const.

1. Lahendus tasaparalleelse liikumise teooria järgi

a. Kiiruste leidmine:

$$v_A = 2\,\omega r; \quad \omega_{II} = \frac{2\,\omega\, r}{r} = 2\,\omega\,.$$



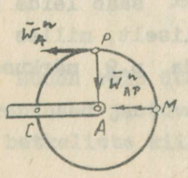
$v_M = v_A + v_{AM}$, sest pooluse A kiirus ja punkti M pöörlemise joonkiirus on ühesihilised. Seega

$$v_M = 2\,\omega\, r + 2\,\omega\, r = 4\,\omega\, r$$

$$v_P = \sqrt{(2\omega r)^2 + (2\omega r)^2} = 2\,\omega r\,\sqrt{2};$$

Joon. 38

b. Kiirenduse leidmine: Et ω = const, siis $w_A^{\tau} = 0$ ja $w_{AM}^{\tau} = 0$. Kiirenduse valemi $\bar{w}_M = \bar{w}_A + \bar{w}_{AM}^{\tau} + \bar{w}_{AM}^{n}$ võib seega kirjutada lühemalt $\bar{w}_M = \bar{w}_A^n + \bar{w}_{AM}^n$.



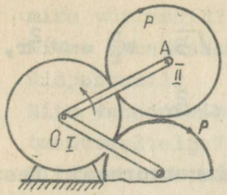
Punkti M kiirendusvektori komponendid on mõlemad ühesuunalised ja seega $w_M = 2\,r\omega^2 + 4\,r\omega^2 = 6\,r\omega^2$. Punkti P puhul $\bar{w}_{AP}^n \perp \bar{w}_A^n$. Siis

Joon. 39

$$w_P = \sqrt{(2r\omega^2)^2 + (4r\omega^2)^2} = r\omega^2\,\sqrt{20}.$$

2. Lahendus punkti liitliikumise teooria järgi

Ratta II liikumine jaguneb kaasaliikumiseks, mis siin osutub tema pöörlemiseks koos vändaga ümber punkti O, ja re-

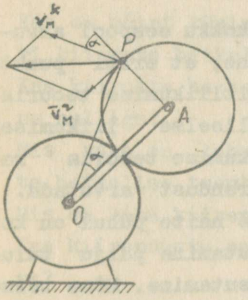


Joon. 40

latiivseks liikumiseks, mis siin on ratta II pöörlemine ümber telje läbi punkti A.

a. Kiiruse arvutamine:

$v_M^{abs} = v_M^{kaas} + v_M^{rel}$ (môlemad kiirused on ühesihilised), $v_M^{kaas} = 3r\omega$, $v_M^{rel} = r\omega_{rel}$, kuna $\omega_{rel} = \omega_{abs} - \omega_{kaas} = 2\omega - \omega = \omega$. Seega $v_M^{abs} = 3\omega r + \omega r = 4\omega r$ nagu eelmise arvutuse järgi. $v_P^{rel} = \omega r$, $v_P^{kaas} = \omega \cdot OP$. $OP = r\sqrt{5}$. Teades, et $\sin\alpha = \dfrac{r}{r\sqrt{5}}$, vôib kas koosinusteoreemi vôi kiiruste projekteerimise abil leida punkti P absoluutse kiiruse $2\omega r\sqrt{2}$. Nônda näiteks valemi $v_{abs} = \sqrt{v_k^2 + v_r^2 + 2v_k v_r \cos\alpha}$ järgi peab kirjutama



Joon. 41

$$v_{abs} = \sqrt{(\omega r\sqrt{5})^2 + (\omega r)^2 + 2\omega r\sqrt{5}\omega r\frac{r}{2\sqrt{5}}} = 2\omega r\sqrt{2}.$$

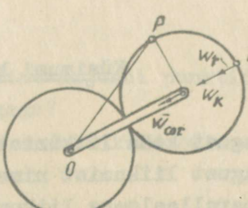
b. Kiirenduse arvutamine:

Algul vaatleme punkti M. Coriolise lause järgi $\bar{w}_{abs} = \bar{w}_k + \bar{w}_r + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$. Et $\omega = \text{const}$, $w_k^{\tau} = 0$ ja $w_r^{\tau} = 0$.

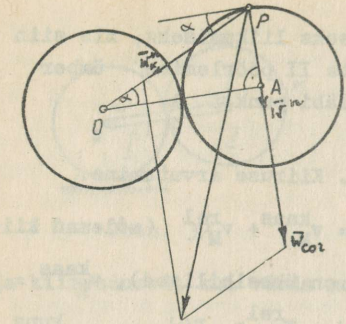
$w_k^n = 3\omega^2 r$, $w_r^n = \omega^2 r$

$w_{cor} = 2\omega\omega r = 2\omega^2 r$, siis

$w_{Mabs} = (3+1+2)\omega^2 r = 6\omega^2 r.$



Joon. 42



Joon. 43

Punkti P kohta:

$$w_k^n = \omega^2 r\sqrt{5}, \quad w_r^n = \omega^2 r,$$

$$w_{cor} = 2\omega^2 r.$$

Koosinusteoreemi kasutamisel järeldub, et

$$w_{abs}^2 = (\omega^2 r + 2\omega^2 r)^2 + (\omega^2 r\sqrt{5})^2 + 2(3\omega^2 r)\,\omega^2 r \cdot \sqrt{5}\,\frac{2}{r\sqrt{5}} \text{ ja } w_{abs} = r\omega^2\sqrt{20}.$$

Selgub, et kôik tulemused langevad kokku eespool arvutatud tulemustega, kuid lugeja märkab kohe, et eriti punkti P kiiruse ja kiirenduse arvutamine liitliikumise teooria järgi on tunduvalt vaevarikkam tasaparalleelse liikumise teooriaga vôrreldes. Tasaparalleelse liikumise teooria rakendamisel ei tule muidugi Coriolise kiirendust arvutada.

Kôigest sellest paistab, et praeguse näite puhul on keha tasaparalleelse liikumise teooria kasutamine palju tulusam kui punkti liitliikumise teooria kasutamine. Mône teise ülesande puhul on kasulikum liitliikumise teooria. Nônda "vôistlevad" need môlemad teooriad omavahel.

12.

Küsimusi kordamiseks

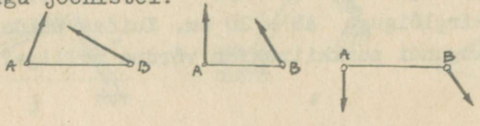
1. Missugust keha liikumist nimetatakse translatoorseks?
2. Missugust liikumist nimetatakse keha tasapinnaliseks ehk tasaparalleelseks liikumiseks?
3. Kirjutada välja keha tasapinnalise liikumise vôrrandid.

4. Kuidas näevad välja tasapinnalise kujundi punkti liikumise võrrandid?
5. Mitme vabadusastmega on keha tasapinnaline liikumine üldjuhtumil?
6. Mitu vabadusastet on ringketta pöörlemisel ümber tema tsentraaltelje?
7. Mitu vabadusastet on väntmehhanismi liikumisel?
8. Missuguseks kaheks liikumiseks jaotub tasapinnalise kujundi liikumine tema enda tasapinnas?
9. Kirjutada kujundi punkti liikumise kiiruse valem. Sama teha kiirenduse kohta.
10. Kas pöörlemise nurkkiirus ja nurkkiirendus sõltuvad pooluse asukohast?
11. Kas jalgratta pedaal liigub translatoorselt siis, kui ratas liigub sirgel teel?
12. Mis on kiiruste hetkeline tsenter?
13. Kas on mõtet küsimusel: kus asetseb auto, veduri, traktori kiiruste hetkeline tsenter?
14. Kas kiiruste hetkelise tsentri kiirendus peab olema võrdne nulliga?
15. Mis vahe on keha pöörlemise hetkelise tsentri ja kiiruste hetkelise tsentri vahel?
16. Mis on keha kiirenduste hetkeline tsenter?
17. Kas kiirenduste hetkelise tsentri kiirus on võrdne nulliga?
18. Kus asetsevad telje ümber pöörleva ketta kiiruste ja kiirenduste hetkelised tsentrid?

13.

Ülesanded

1. Kus peaksid asetsema tasapinnalise kujundi punktid, millede kiirused on risti mingi sirgega?
2. Kas kahe punkti A ja B kiirused võiksid olla sellised, nagu joonistel?



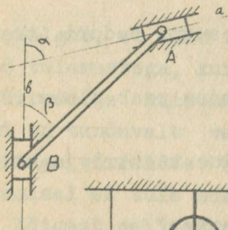
3. Missuguses autoratta veerandis on ratta kiirenduste hetkeline tsenter, kui ratas veereb sirgel teel libisemata ja liikumine on a) kiirenev, b) aeglustuv.

4. Kuidas on võimalik leida tasapinnalise kujundi kiirenduste hetkelist tsentrit, kui on teada kujundi kahe punkti kiirendusvektorid?

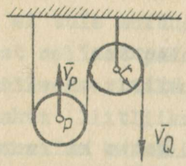
5. Kuidas saab leida tasapinnalise kujundi kiirenduste hetkelist tsentrit puhtgraafilisel viisil?

Näpunäide: kasutada märkust p. 9 lõpus.

6. Arvutada sirgel teel libisemata veereva ratta äärepunktide kiirused ja kiirendused, kui need punktid asetsevad püst- ja rõhtdiameetril. Võrrelda nende punktide kiirusi äärepunkti trajektoori (tsükloidi) abil arvestatud tulemustega. Ratta raadius on r ja keskpunkti kiirus v_o.

7. 

Varras AB nihkub tasapinnal nõnda, et punktid A ja B jäävad sirgetele a ja b. Teades punkti A kiirust v_A, kiirendust w_A, varda pikkust a ning nurki α ja β, leida punkti B kiirus ja varda nurkkiirus ning nurkkiirendus.

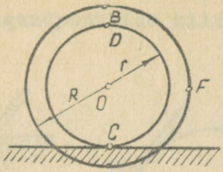
8. 

Leida joonisel kujutatud plokkide süsteemi vasaku ploki telje kiirus v_P, kui on teada kiirus v_Q ja plokkide raadius r.

9. Ratas raadiusega r veereb sirgel teel libisemata nii, et telje kiirus on v_A ja kiirendus w_A. Leida ratta nurkkiirus ja nurkkiirendus.

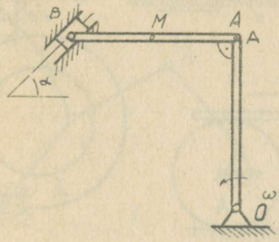
10. Tasapinnalise kujundi kahe punkti A ja B kiirendused $w_A = 20$ cm/s^2 ja $w_B = 15$ cm/s^2 on risti neid punkte ühendava sirglõiguga $AB = 20$ cm. Kuidas näidata, et sel juhtumil kujundi nurkkiirus on võrdne nulliga?

11.



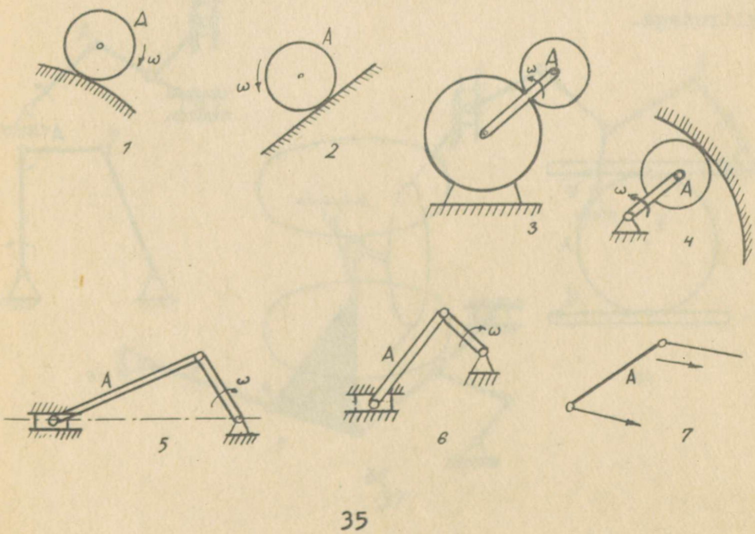
Trummel raadiusega r veereb mööda sirget teed. Tema punkti D kiirus on $v_D = const$. Leida trumli küljes oleva ratta punktide B, E ja F kiirused ja kiirendused.

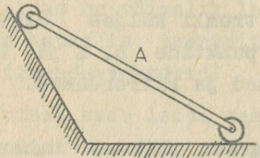
12.



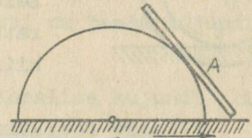
Varras OA pöörleb ümber punkti O konstantse nurkkiirusega $\omega = 2\ \frac{rad}{s}$. Selle vardaga on liigendiga A kinnitatud varras AB, mille otspunkt B on ühenduses kaldsirget mööda liikuva liuguriga B. Kaldsirge kaldenurk $\alpha = 45^\circ$. AO = r = = 40 cm. AB = 2r. Leida punkti B ja keskpunkti M kiirus ning kiirendus.

13. Leida joonistel kujutatud tasapinnaliste kujundite (tähega A märgitud kehade) kiiruste hetkelised tsentrid.

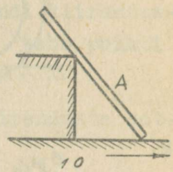




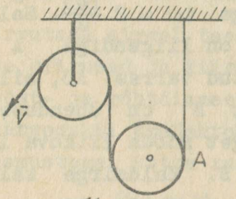
8



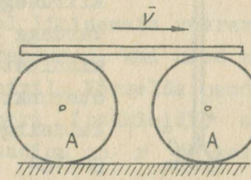
9



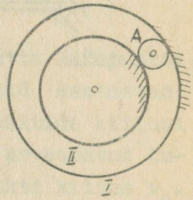
10



11

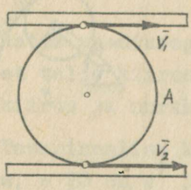


12

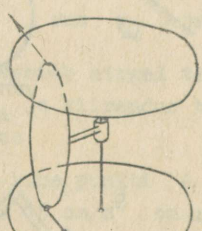


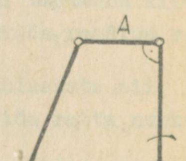
13

Joonisel 13 vaadelda juhtumeid: a) ringjoon I liigub, aga II on paigal, b) II liigub, I paigal c) mõlemad pöörlevad erinevate nurkkiirustega ühes suunas (või vastassuunas), d) mõlemad pöörlevad nõnda, et nende puutepunktid rattaga A liiguvad teineteisele vastassuunas ühesuguse kiirusega.



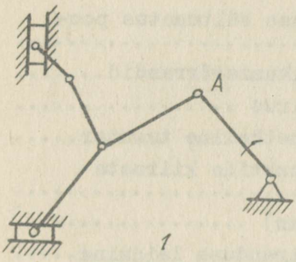
14



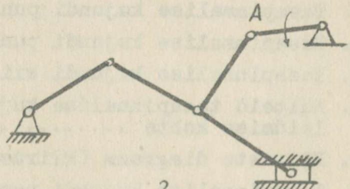


16

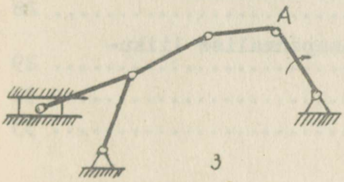
14. Leida graafiliselt joonisel kujutatud varrasmehhanismide liigendpunktide kiirused, kui on teada punkti A kiirus.



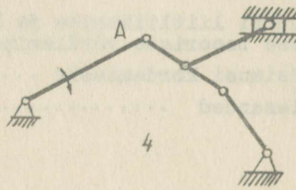
1



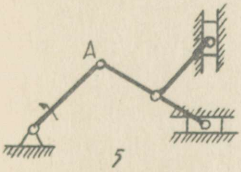
2



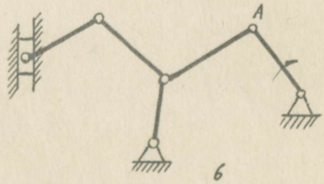
3



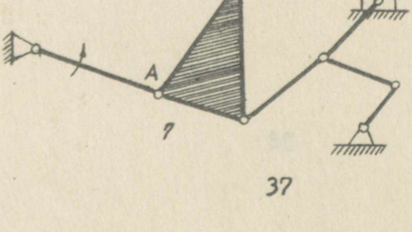
4



5



6



7

S i s u k o r d

Hind 7 kop.