TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK № 37 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893 г.

MATEMAATIKA-LOODUSTEADUSKONNA TÖID

ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1955

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
VIHIK 37 ВЫПУСК

MATEMAATIKA-LOODUSTEADUSKONNA TÖID

ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1955

БОТАНИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ЭКСПЕДИЦИИ В ТАРТУСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Проф., доктор биолог. наук А. Вага

Кафедра систематики растений и геоботаники

В истории русской ботаники Тартуский (бывший Дерптский — Юрьевский) университет занимает значительное место. Работы тартуских ботаников, составляя неотъемлемую часть русской науки, характеризуются самостоятельным направлением, вследствие чего имеется полное основание говорить о тартуской ботанической школе. Эту школу по справедливости называют флористико-систематической и ботанико-географической. Такое направление определилось с самого начала основания Тартуского университета в 1802 г.

По первому уставу университета в состав философского факультета входил и естественно-исторический класс с тремя профессурами: 1) теоретической и опытной физики, 2) теоретической и опытной химии и 3) естественной истории вообще и ботаники в особенности. Таким образом, преподавание биологических дисциплин (ботаники и зоологии) было сосредоточено на последней кафедре, причем особенное внимание уделялось ботанике. Кроме ботаники и зоологии, на кафедре преподавалась и минералогия.

Первым профессором, читавшим курс естественной истории, был доктор медицины Г А. Герман, родом из Риги. Прибыв в Тарту в полном расцвете сил, в возрасте 29 лет, он энергично принялся за устройство своей кафедры. Так как для педагогической и научной работы не имелось никакой материальной базы и ее надо было создавать, то понятно, что кроме непосредственной преподавательской работы ему пришлось потратить много времени на организационную деятельность. Первым предметом его забот был ботанический сад, который уже к 1804 году оказался настолько благоустроенным, что в нем культивировался 1121 вид растений. В 1806 г. этот сад, расположенный за городом, был ликвидирован; началась закладка нового ботанического сада в центральной части города, в долине реки Эмайыги, где он находится и в настоящее время. Одновременно разрабатывались проекты оранжерей и других зданий. Строительные работы начались осенью 1806 г., и в 1810 г. была закончена постройка главного здания ботанического сада с двумя оранжереями, аудиторией, квартирами главного садовника и садовых рабочих. Г. А. Герман умер в 1809 г., т. е. за год до завершения дела, начатого по его инициативе.

Из научных экспедиций, организованных Г. А. Германом, (кроме экскурсий со студентами в тогдашних Эстляндской и Лифляндской губерниях) следует отметить поездку в Могилевскую губернию, в особенности же экспедицию с шестью студен-

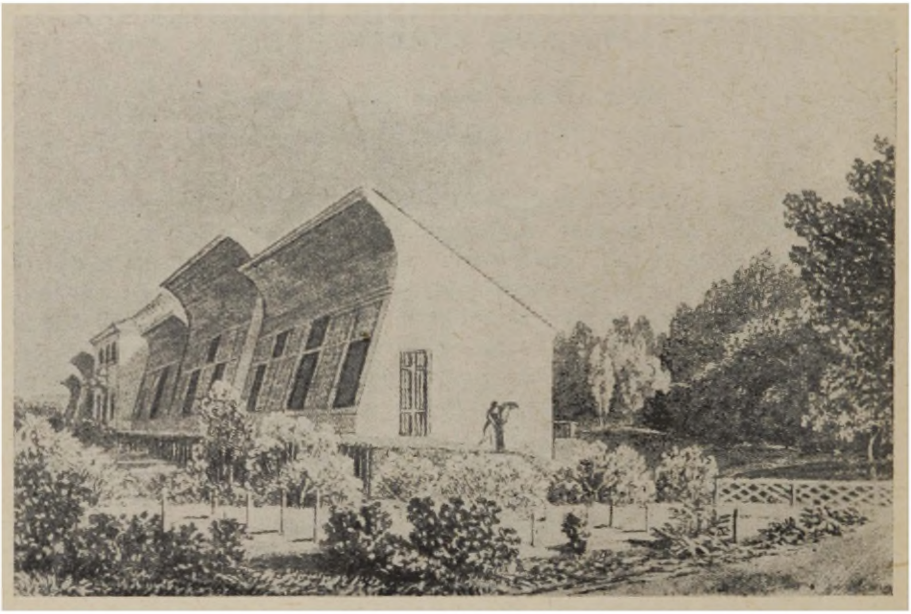


Рис. 1. Главное здание Ботанического сада Тартуского университета в первоначальном виде. С акватинты А. Клара 1821 г.

тами к Белому морю в 1804 г. Таким образом, уже при Г. А. Германе намечается основное направление научно-исследовательской работы Тартуского университета — изучение несметных природных богатств огромной России.

В работах по созданию Тартуского ботанического сада большую помощь Г. А. Герману оказал главный садовник И. А. Вейнман, опубликовавший в 1810 г. работу об этом саде, в которой приводится список всех культивированных тогда в саду растений. Вейнман работал в Тарту с 1804 по 1813 г., а затем переехал в Павловск, где и остался до конца своей жизни. Будучи не только узким садоводом-практиком, но и ботаником-систематиком, Вейнман продолжал в Павловске начатое им еще в Тарту изучение дикорастущей местной флоры, обращая особенное внимание на флору мхов, вследствие чего в истории русской ботаники он известен, как один из первых русских биологов.

Характер ботанических работ Тартуского университета окончательно определяется при проф. К. Ф. Ледебуре, который состоял директором ботанического сада с 1811 по 1835 г. «Изучить внутренние части России, в особенности же путешествовать по некоторым областям этой огромной страны, было желанием, пленившим меня с раннего юношества», — пишет он сам в 1829 г. Поэтому заняв профессуру в возрасте 25 лет, он немедленно старается осуществить свои давнишние мечты. Однако это удается ему нескоро, так как вследствие Отечественной войны 1812 г.,

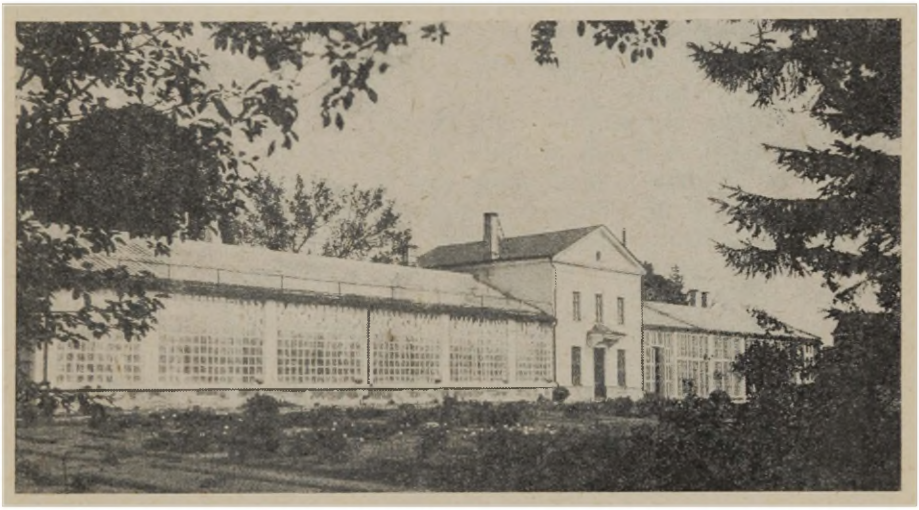


Рис. 2. Главное здание Ботанического сада Тартуского университета в 1941 г.

потребовавшей огромных жертв, финансовое положение России не позволяло делать значительные издержки на дальние экспедиции. Его ходатайство в 1814 г. о получении субсидии в сумме 1500 рублей для организации экспедиции в Крым было отклонено Министерством просвещения. В 1818 г. К. Ф. Ледебур едет на несколько месяцев в Крым для поправления здоровья. Хотя эта поездка и дала ему возможность ознакомиться с флорой юга России, но, как он сам пишет, «она не могла дать научных результатов, которых в других условиях можно было бы ожидать от этих интересных областей».

Лишь в 1825 г. К. Ф. Ледебуру для экспедиции на Алтай назначается субсидия из остаточных сумм университета в размере 10 000 рублей ассигнациями. С целью использования санного пути экспедиция была запланирована на зиму. Точно так же и обратный путь был намечен на зиму 1826/27 г.

Участниками алтайской экспедиции, кроме К. Ф. Ледебура, были его ученики, врач А. А. Бунге и фармацевт К. А. Мейер, оба недавно окончившие Тартуский университет и интересовавшиеся ботаникой. Сам К. Ф Ледебур по своей научной подготовке был ботаником, но так как ему в первый период его деятельности в Тартуском университете приходилось преподавать также зоологию и минералогию[1] то экспедиция имела в виду сбор материалов и по этим дисциплинам. Кроме того, К. Ф. Ледебур намеревался производить и археологические раскопки. Для определения высот были взяты с собой три барометра.

Экспедиция выехала из Тарту 21 января 1826 г Дорога шла через Петербург в Москву, оттуда через Нижний Новгород, Казань и Пермь в Екатеринбург Из Екатеринбурга К. Ф. Ледебур решил заехать в Ирбит, чтобы посетить знаменитую ирбитскую ярмарку, на которую привозились товары из Сибири и других прилегающих стран.

Из Ирбита экспедиция направилась в Тюмень, оттуда через Тобольск и Омск 9 марта прибыла в Барнаул. В Барнауле был выработан окончательный план работ экспедиции, согласно которому каждый из участников экспедиции наметил для исследования определенную территорию: А. А. Бунге выбрал для своих изысканий восточную часть Алтайских гор, К. А. Мейер — киргизские степи к западу от Алтая, а К. Ф. Ледебур — западную и южную часть Алтая. 18 марта А. А. Бунге и К. А. Мейер вместе выехали из Барнаула в Змеиногорск, откуда разошлись в разные стороны. К. Ф. Ледебур начал свои экспедиции 9 апреля. Важнейшими пунктами на его пути были Змеиногорск, Колывань, Риддер (ныне Лениногорск), Усть-Каменогорск, Зыряновское. Из последнего он совершил поездку до китайского пограничного пункта Чингиз-тей в провинции Хобдо. Обратно в Барнаул он прибыл 26 сентября.

Главный маршрут А. А. Бунге проходил по долине Чарыша через Катунь до реки Чуи, оттуда к северу до Телецкого озера. В Змеиногорск он возвратился к 29 августа и 26 сентября приехал вместе с К. Ф. Ледебуром в Барнаул.

К. А. Мейер направился из Змеиногорска через Усть-Каменогорск в Бухтарминск и оттуда далее к югу до озера Зайсан. Возвратившись в Усть-Каменогорск, он повернул к северо-западу и, прибыв в Семипалатинск, совершил переход через киргизские степи до Каракалинска. Обратно в Барнаул он прибыл 15 октября.

С собранными во время экспедиции материалами К. Ф. Ледебур в сопровождении К. А. Мейера выехал из Барнаула 23 декабря и благополучно прибыл в Тарту 4 февраля 1827 г. А. А. Бунге остался на Алтае и работал в должности врача на Колывано-Воскресенских заводах в Барнауле и в Змеиногорске.

[1] Преподавание зоологии поручается профессору И. Эшшольцу лишь в 1825 г., а минералогии М. Энгельгардту в 1820 г.

Алтайская экспедиция К. Ф. Ледебура собрала ценные материалы для изучения природы Алтая. Еще во время экспедиции К. Ф. Ледебур направил в Тарту по почте 42 ящика с семенами,

Рис. 3. Elymus dasystachys Trin. Пример таблицы из труда К. Ф. Ледебура «Icones plantarum».

черенками и живыми растениями. Главную же массу сборов К. Ф. Ледебур привез с собой (гербарий из 1600 видов цветковых растений, четвертая часть которых представляла новые виды). Ботанический сад Тартуского университета получил 7868 порций семян от 1341 вида растений и живых растений — 241 вид. Всего в числе растений, полученных как живыми, так и в виде черенков и семян, было около 500 видов, которые до этого в ботанических садах никогда не выращивались. Зоологическая часть сборов состояла из 526 видов насекомых, 21 вида (67 экземпляров) млекопитающих, 64 видов (115 экз.) птиц, 12—13 видов ящериц, 6—7 видов змей, 2 видов черепах и одного вида лягушек. Кроме того, была привезена минералогическая коллекция и 43 экземпляра археологических объектов.

Описание экспедиции было издано К. Ф. Ледебуром в двух томах в 1829—1830 гг. В первом томе кроме описания путешествий самого К. Ф. Ледебура приводятся обработанные проф. Ф. Парротом данные о барометрическом определении высот и составленный проф. М. Энгельгардтом петрографический обзор Малого Алтая и Киргизской степи по материалам, собранным экспедицией. Второй том составляют дневники А. А. Бунге и К. А. Мейера. Этот увлекательный труд несомненно способствовал пробуждению интереса к научным путешествиям у молодых ученых.

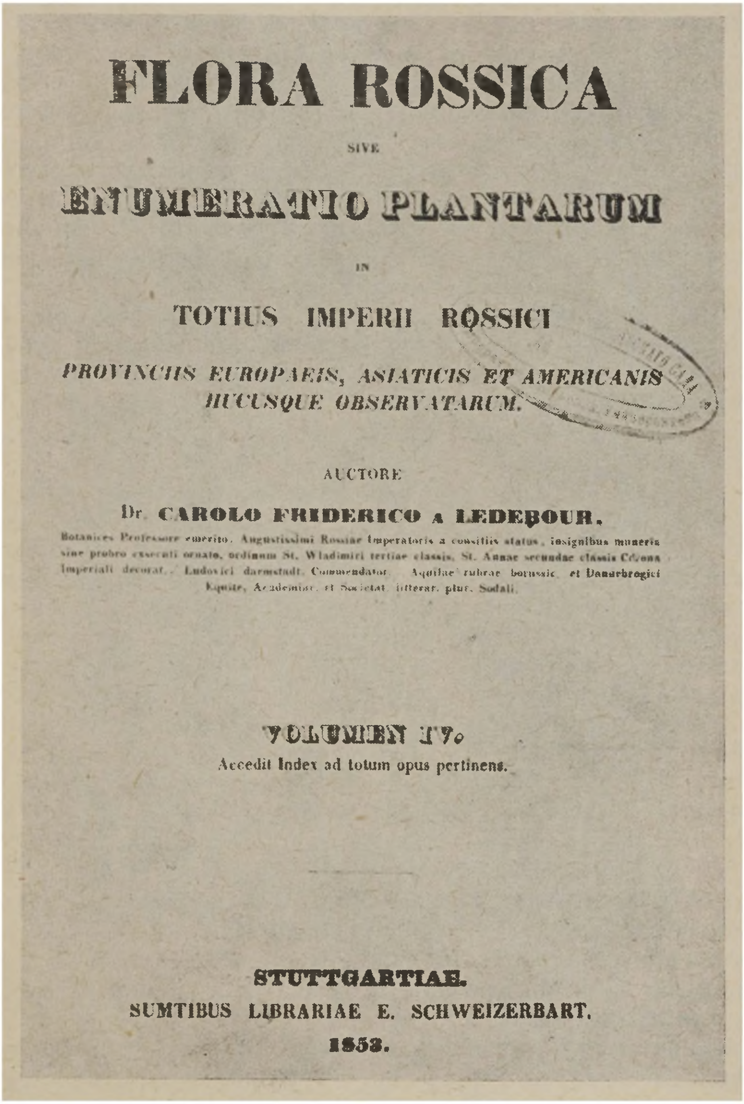
Привезенные и доставленные почтой живые растения были высажены в Тартуском ботаническом саду, семена разосланы также другим ботаническим садам, а весь этот материал послужил основой для последующих научных трудов К. Ф. Ледебура. К таким трудам относится прежде всего «Флора Алтая» («Flora Altaica»). вышедшая в четырех томах в 1829—1833 гг.

В составлении этой работы, кроме членов алтайской экспедиции Ледебура, Бунге и Мейера, принимали участие академик К. А. Триниус и один из учеников Ледебура — Р Э. Траутфеттер. Дополнением к этому труду является альбом новых или недостаточно известных растений русской, в особенности алтайской флоры («Icones plantarum novarum vel imperfecte cognitarum, floram rossicam, imprimis altaicam, illustrantes») Этот альбом издан в пяти выпусках в 1828—1834 гг. и содержит 500 превосходно исполненных таблиц.

Главным же трудом К. Ф. Ледебура, ознаменовавшим завершение одного этапа в изучении растительного мира России и поставившим имя автора на одно из самых почетных мест в истории русской ботаники, является «Флора России» («Flora Rossica sive enumeratio plantarum in totius Imperii Rossici provinciis europaeis, asiaticis et americanis hucusque observatarum», 1842—1853) Изданная в четырех томах, эта работа дает сводку всех накопленных к тому времени данных о флоре России.

Сама экспедиция и совместная с Ледебуром обработка ее материалов были превосходной школой для А. А. Бунге и К. А. Мейера. А. А. Бунге стал впоследствии преемником К. Ф Ледебура в Тартуском университете, а К. А. Мейер, после участия в экспедиции на Кавказ по поручению Российской Академии наук в 1829—1830 гг., был назначен помощником директора Петербургского ботанического сада, а в 1839 г. адъюнктом

Академии наук. В 1844 г. он был утвержден экстраординарным, а в 1845 г. ординарным академиком, оставаясь в должности помощника директора Петербургского ботанического сада. С 1851 г.


FLORA ROSSICA

SIVE

ENUMERATIO PLANTARUM

IN

TOTIUS IMPERII ROSSICI

PROVINCIIS EUROPAEIS, ASIATICIS ET AMERICANIS HUCUSQUE OBSERVATARUM.

AUCTORE

Dr. CAROLO FRIDERICO a LEDEBOUR.

Botanices Professore emerito, Augustissimi Rossiae Imperatoris a consiliis status, insignibus muneris sine probro exsecuti ornato, ordinum St. Wladimiri tertiae classis, St. Annae secundae classis Corona Imperiali decorat., Ludovici darmstadt. Commendator, Aquilae rubrae borussic. et Danebrogici Equite, Academiar. et Societat. litterar. plur. Sodali.

VOLUMEN IV.

Accedit Index ad totum opus pertinens.

STUTTGARTIAE.

SUMTIBUS LIBRARIAE E. SCHWEIZERBART.

1853.

Рис. 4. Заглавный лист четвёртого тома труда К. Ф. Ледебура «Flora Rossica».

до своей смерти (1855) он состоял директором того же сада. С Кавказа К. А. Мейер привез до 2000 видов растений, в том числе около 100 новых, причем им было установлено 9 новых родов. Из дальнейших работ К. А. Мейера важное значение имеют обработки коллекций, собранных многими путешественниками в разных частях России.

Из других учеников К. Ф. Ледебура по Тартускому университету известен упомянутый уже Р Э. Траутфеттер, окончивший университет в 1831 г До 1835 г. Р Э. Траутфеттер работал в Тарту сначала помощником директора Ботанического сада, а затем приват-доцентом. С 1835 г. он был помощником директора Петербургского ботанического сада, а с 1838 г. профессором Киевского университета, где с 1847 по 1859 г. состоял также ректором этого университета и попечителем учебного округа. С 1860 г. Р Э. Траутфеттер был директором Горыгорецкого земледельческого института, а с 1864 г. директором Петербургского ботанического сада. В состав Российской Академии наук он входил в качестве члена-корреспондента.

Научно-исследовательскую работу Р Э. Траутфеттер начал с систематического изучения ив (Salix) Лифляндской губернии. В дальнейшем он не ограничивался какой-либо отдельной группой растений, а обрабатывал как свои коллекции, так и сборы других путешественников-натуралистов (А. Миддендорфа, А. Шренка, Г Радде, А. Чекановского, Ф. Мюллера, И. Словцова и др.), полностью охватывая растительный мир самых разнообразных частей России. Им составлены, например, сводки данных о флоре Новой Земли, Чукотки, а также ботанико-географический обзор всей Европейской России. Число новых, им установленных и описанных видов растений весьма значительно.

Говоря о прямых учениках К. Ф. Ледебура, нельзя умолчать и о его деятельности в так называемом «Профессорском институте», открытом при Тартуском (Дерптском) университете в 1828 г. для подготовки к академической деятельности наиболее даровитых выпускников русских университетов. В первом из двух выпусков института были и два ботаника, написавшие под руководством К. Ф Ледебура свои докторские диссертации и защитившие их в Тарту Один из них, И. О. Шиховский, был сначала (с 1835 г.) профессором Московского, а затем (с 1840 г.) Петербургского университета. По характеру своих научных трудов он был морфологом, а в истории русской ботаники занимает почетное место как усердный популяризатор науки. Другой, П. Я. Корнух-Троцкий, с 1836 г. профессор Казанского университета, известен так же как морфолог.

Значение К. Ф Ледебура в истории русской ботаники и в изучении растительного покрова России не ограничивается, однако, тем, что он был непосредственным учителем многих ботаников. Как уже указывалось, большое значение имели и его научные труды, являвшиеся образцом для начинающих ботаников.

Традиции, заложенные К. Ф. Ледебуром, достойно продолжал его ученик и преемник по кафедре А. А. Бунге, работавший в Тарту с 1836 по 1867 г. и являвшийся соучастником алтайской экспедиции и соавтором знаменитых трудов своего учителя.

Оставшись в 1826 г. на Алтае, А. А. Бунге работал там врачом до 1833 г. В этот период ему удалось принять участие в экспедиции, направленной в 1830 г. в Китай русским правительством для смены состава русской миссии в Пекине. А. А. Бунге был прикомандирован к ней Российской Академией наук в качестве

Рис. 5. А. А. Бунге.

ботаника и врача. Экспедиция шла в Китай прямым путем через Томск, Иркутск, Кяхту и Калган, т. е. пересекая пустыню Гоби, о флоре которой в то время почти никаких сведений не имелось. Из Пекина А. А. Бунге весной 1831 г. совершил ботаническую экскурсию в Монголию, а затем собирал материалы в окрестностях Пекина. Вернувшись весною 1832 г. в Барнаул с богатыми ботаническими сборами, он немедленно представил отчет Академии наук и получил от нее новое задание — исследовать флору (а также фауну) восточного Алтая, в особенности берега реки Чуи. Успешно выполнив это задание, А. А. Бунге в следующем, 1833 году был назначен экстраординарным профессором ботаники Казанского университета. В том же году последовало утверждение его членом-корреспондентом Академии наук. Пребывание в Казани А. А. Бунге использовал для изучения флоры нижнего Поволжья.

С таким богатым опытом путешественника-натуралиста А. А. Бунге сравнительно молодым — в возрасте 33 лет — начал свою работу в Тарту Поскольку отсюда командировок в отдаленные части России не предвиделось, он наметил себе новой целью изучение флоры Прибалтики. К этой работе он привлек и своих учеников. Издание гербария флоры Прибалтики («Flora exsiccata Liv-, Esth-, und Kurlands»), начатое в 1849 г., было первым результатом этой совместной работы. Всего вышло 10 центуриев этого издания. Сводным же трудом о флоре Прибалтики явилась вышедшая в 1853 г. «Флора Эстляндии, Лифляндии и Курляндии» (на немецком языке), представляющая собой обработку «Флоры», изданной в 1839 г. И. Флейшером и Э. Линдеманом. Однако и в Тарту, в первый период своей деятельности, А. А. Бунге способствовал изучению флоры отдаленных частей родины. Таким трудом является обработка им коллекций по флоре Средней Азии, собранных А. Леманом в 1841—1842 гг. Результаты этой работы А. А. Бунге начал помещать в 1847 г в «Трудах Рижского общества естествоиспытателей», а полностью они были опубликованы Академией наук в 1854 г. Всего в этих сборах А. А. Бунге установил 1526 видов растений. Эта работа имеет большое историческое значение, так как «Флора России» К. Ф Ледебура не охватывает Средней Азии.

Началом второго периода деятельности А. А. Бунге в Тарту можно считать 1847 год, когда ему снова удалось участвовать в далекой экспедиции. В этом году Русское географическое общество снарядило экспедицию в Персию (Иран) и А. А. Бунге был прикомандирован к ней Академией наук. Экспедиция имела целью исследование Хорасана, северо-восточной провинции Ирана, прилегающей к нынешней Туркменской ССР В течение двух лет, благодаря своему неутомимому трудолюбию, А. А. Бунге собрал здесь огромный ботанический материал — более 5000 видов растений. Последующая деятельность А. А. Бунге состояла, главным образом, в монографической обработке отдельных родов и семейств растений, преимущественно по материалам его личного, чрезвычайно богатого гербария, содержавшего до 33 000 видов.

Монографии А. А. Бунге важны в том отношении, что в них обрабатываются полиморфные, трудные с точки зрения систематики, группы растений. Таковы его труды о тамарисках («Tentamen generis Tamaricum species accuratius definiendi», 1852), о солянках («Anabasearum revisio», 1862), об астрагалах («Generis Astragali species gerontogeae», 1868—1869), об остролодках

(«Species generis Oxytropis DC», 1874) и др. А. А. Бунге была присуждена Бэровская премия Академии наук, и в 1875 г он был избран почетным академиком.

Из многочисленных учеников А. А. Бунге назовем К. Е. Мерклина, окончившего Тартуский университет в 1845 г. Его первой научной работой было участие совместно с А. А. Бунге в обработке коллекций А. Лемана, причем им была обработана большая часть семейства лилейных. К. Е. Мерклин работал в высших учебных заведениях Петербурга и в Петербургском ботаническом саду. Большинство его трудов относится к фитопатологии и анатомии растений, в особенности же к палеоботанике. К последней группе принадлежит и его главнейший труд «Palaeodendrologikon Rossicum» (1855), за который он был удостоен Демидовской премии Академии наук. В 1864 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук.

Наиболее выдающимся из учеников А. А. Бунге был, однако, К. И. Максимович. Окончив Тартуский университет в 1850 г. и проработав два года в г. Тарту помощником директора Ботанического сада, он перешел в Петербургский ботанический сад, где работал до конца жизни. В 1865 г. К. И. Максимович был избран адъюнктом Академии наук, в 1868 г. экстраординарным, а в 1871 г ординарным академиком. К. И. Максимович известен как исследователь флоры Дальнего Востока. После участия в 1853 г. в кругосветном плавании фрегата «Диана», он почти три года (1854—1857) провел в Приамурском и Уссурийском краях, изучая их флору. За большую работу о флоре Приамурья «Primitiae Florae Amurensis» (1859) К. И. Максимовичу была присуждена Демидовская премия. С 1859 по 1864 г. К. И. Максимович вторично пребывал на Дальнем Востоке, работая на этот раз, кроме Приамурья, значительную часть времени в Японии, откуда он вернулся морским путем вокруг мыса Доброй Надежды. Обработке собранных в этих экспедициях материалов К. И. Максимович посвятил всю остальную жизнь. Им было установлено огромное число новых видов растений. Кроме того, он обрабатывал сборы Н. М. Пржевальского, Г Н. Потанина, П. Я. Пясецкого и других исследователей Центральной и Восточной Азии.

Другим учеником А. А. Бунге, впоследствии также членом Российской Академии наук, был Ф. Б. Шмидт, окончивший Тартуский университет в 1853 г и работавший помощником директора Тартуского ботанического сада с 1856 по 1859 г. Первые его научные труды были посвящены флоре Прибалтики: кандидатская диссертация о флоре острова Муху („Flora der Insel Moon mit orographisch-geognostischer Darstellung ihres Bodens", 1854) и магистерская диссертация о флоре северной Прибалтики („Flora des silurischen Bodens von Esthland, Nord-Livland und Oesel", 1855) Ф Б. Шмидт сотрудничал также с К. И. Максимовичем, обработав семейства зонтичных и гречишных для его „Primitiae Florae Amurensis" Наряду с ботаникой Ф Б. Шмидт занимался геологией и за работу о силурийской формации в Прибалтике (1858) был удостоен Демидовской премии Академии наук. По предложению Русского географического общества он принял участие в экспедиции, направленной этим обществом в 1859 г. на Дальний Восток. Будучи начальником физического отдела экспедиции, Ф. Б. Шмидт не меньшее внимание уделял и ботаническому изучению исследуемых территорий, в результате чего вышли его ботанические труды: „Flora Sachalinensis" и „Florula amguno-burejensis" (1868). В 1866 г. Академия наук

Рис. 6. Э. А. Руссов с женой.

отправила под начальством Ф. Б. Шмидта экспедицию в Восточную Сибирь для отыскания трупа мамонта. В этой экспедиции он также занимался ботаникой и результаты опубликовал в труде „Florula Jenisseensis arctica", представляющем собой часть общего отчета экспедиции. В 1872 г. Ф. Б. Шмидт был избран адъюнктом Академии наук по палеонтологии (а позднее ординарным академиком), и его дальнейшие труды относятся к этой области.

Работой о флоре Прибалтики начал свою деятельность и ученик А. А. Бунге П. П. Глен, окончивший Тартуский университет в 1860 г. В том же году появилась его «Флора окрестностей Дерпта» („Flora der Umgebung Dorpats"). Затем он участвовал в дальневосточной экспедиции Ф. Б. Шмидта, изучая, главным образом, остров Сахалин. С 1867 г. до своей смерти (1876)

П. П. Глен был консерватором Петербургского ботанического сада.

Ботаник Э. А. Руссов, ставший позднее (1874—1895) профессором Тартуского университета, также начал свою научную деятельность с работы о флоре высших растений Прибалтики. В 1862 г. была издана его «Флора окрестностей Ревеля». Дальнейшая его научно-исследовательская деятельность развивалась, однако, в другом направлении. Следуя новым веяниям в ботанике, Э. А. Руссов стал микроскопистом. Мастерски овладев микроскопической техникой, он занялся сначала изучением торфяных (сфагновых) мхов, которым посвящена его магистерская диссертация «Данные к изучению торфяных мхов» („Beiträge zur Kenntniss der Torfmoose", 1865) Анатомией и систематикой сфагновых мхов занимался он и позднее, исходя при этом из позиций эволюционной теории. Однако наиболее крупные труды Э. А. Руссова относятся к анатомии и истории развития папортникообразных и цветковых. Такова его докторская диссертация «Гистология и история развития спорокарпия марсилии» („Histiologie und Entwickelungsgeschichte der Sporenfrucht von Marsilia", 1871) За работу «Сравнительные исследования по гистологии (гистографии и гистогении) вегетативных и спорообразующих органов, а также по развитию спор у сосудистых тайнобрачных, с учетом гистологии явнобрачных, исходя из наблюдений над марсилиевыми» („Vergleichende Untersuchungen betreffend die Histiologie (Histiographie und Histiogenie) der vegetativen und Sporen-bildenden Organe und die Entwickelung der Sporen der Leitbündel-Kryptogamen mit Berücksichtigung der Histiologie der Phanerogamen, ausgehend von der Betrachtung der Marsiliaceen" 1872) Э. А. Руссову была присуждена Бэровская премия Российской Академии наук. Он был избран также членом-корреспондентом Академии наук. Другие его труды касаются строения и развития окаймленных пор, ситовидных трубок, строения лубяной паренхимы, строения древесины, строения межклетных ходов, плазмодесм между клетками и др. Как отмечает В. Ф. Раздорский[1] Э. А. Руссову принадлежит и первое описание кариокинеза, появившееся в 1872 г. (работа И. Д. Чистякова, в которой также описывается это явление, появилась в 1874 г.). Таким образом, если Э. А. Руссова по справедливости называют одним из классиков русской ботаники и одним из виднейших ботаников своего времени, то направление, данное им ботаническим исследованиям в Тарту, коренным образом отличается от направления, заложенного К. Ф. Ледебуром.

Ученик Э. А. Руссова И. Г Клинге, с 1879 по 1895 г. помощник директора ботанического сада и приват-доцент Тартуского университета, с 1895 г. библиотекарь Петербургского ботанического сада, а с 1899 г. до своей смерти (1902) главный ботаник

---

[1] Анатомия растений, 1949, стр. 52.

в том же саду, начал свою научную деятельность с анатомических работ. Его магистерская диссертация (1879) представляет собой анатомическое исследование корня злаков и осоковых. Вскоре, однако, он перешел на фитогеографические и флористико-систематические работы. Им составлена «Флора Эстляндии, Лифляндии и Курляндии» („Flora von Est-, Liv-, und Kurland", 1882). Он же является автором монографии о хвощах Прибалтики („Die Schaltelhalme, Equisetaceae L. C. Rich., von Est-. Liv- und Kurland" 1882) и нескольких работ об орхидных.

В. А. Ротерт, наиболее выдающийся из учеников Э. А. Руссова, в противоположность И. Г Клинге, остался верен направлению, данному учителем. Будучи весьма разносторонним ученым, он не чуждался и флористико-систематических работ как по высшим, так и по низшим растениям. Основная же масса его многочисленных трудов, принесших ему широкую известность, относится к области анатомии и физиологии растений. В области анатомии В. А. Ротерт изучал первичное строение стебля (1885). строение оболочки растительных сосудов (1899), кристаллоносные клетки у Pontederiaceae (1900). хромопласты вегетативных органов (1912), красного глазка флагеллат и зооспор водорослей (1914) и др. Из трудов по физиологии наиболее известна его работа о гелиотропизме (1893). В. А. Ротерт работал в качестве профессора в Казани, Харькове, Одессе и Кракове. Он был также членом Краковской (польской) Академии наук. Последние годы жизни (1914—1916) В. А. Ротерт провел в Петрограде, работая в Ботанической лаборатории Российской Академии наук.

Ледебуровские традиции в Тарту возродил Н. И. Кузнецов — профессор университета с 1895 по 1914 г. Он окончил Петербургский университет, где его учителем был Х. Я. Гоби — специалист по низшим растениям. Поэтому первую свою научную работу Н. И. Кузнецов посвятил флоре низших растений («Материалы к лишайниковой флоре Новой Земли», 1886—1887)

Х. Я. Гоби занимался также вопросами общей систематики, филогении и географии растений. Интерес к этим вопросам передался и Н. И. Кузнецову Этому способствовало то обстоятельство, что, еще будучи студентом, он совершил три ботанико-географических путешествия. В 1885 г он путешествовал по Шлиссельбургскому уезду Петербургской губернии, в 1886 г. по Архангельской губернии, а в 1887 г участвовал в экспедиции на северный Урал. По окончании университета он в течение трех лет (1888—1891) работал на Кавказе, изучая по поручению Русского географического общества историю развития флоры Кавказа, а летом 1894 г участвовал в экспедиции по исследованию источников главных рек Европейской России.

Таким образом, Н. И. Кузнецов определился как фитогеограф и намеревался защищать свою магистерскую диссертацию на фитогеографическую тему. Когда же обнаружилось, что это намерение не осуществимо, и необходимо было найти новую тему для диссертации, ему пришел на помощь бывший воспитанник Тартуского университета, главный ботаник Петербургского ботанического сада академик К. И. Максимович (Н. И. Кузнецов был в это время там же младшим консерватором), который посоветовал ему выбрать тему по систематике. Н. И. Кузнецов остановился на монографической обработке рода горечавки. Так возникла его монография «Подрод Eugentiana Kusnez. рода Gentiana Tourn. Систематическая, морфологическая и географическая обработка» (1894).

Рис. 7. Н. И. Кузнецов.

Работа над этим тщательно проведенным исследованием сделала из Н. И. Кузнецова хорошего систематика-монографа, и, заняв кафедру ботаники в Тарту, он сознательно поставил себе целью продолжение начатого К. Ф. Ледебуром дела. Задачу эту он блестяще выполнил, создав большую ботанико-географическую и флористико-систематическую школу, сделавшую очень много для изучения растительного покрова России и нынешнего Союза ССР. Говоря о двух ботанических школах, возникших в Тарту, — ледебуровской и кузнецовской, — следует помнить, что школы эти не обособлены друг от друга. Благодаря посредничеству К. И. Максимовича, между ними существует непосредственная преемственность.

Первым начинанием Н. И. Кузнецова в области собирания материалов по флоре России была организация обмена сухими растениями. Это мероприятие дало хорошие результаты, так как в обмене принимали участие многие видные ботаники (А. Н. Петунников, И. П. Бородин, Д. И. Литвинов, Р Регель, Г И. Радде, Н. В. Цингер, О. А. и Б. А. Федченко, В. Н. Сукачев и др.) и, кроме того, любители-флористы из самых различных частей России. Среди материала, накопленного путем обмена, оказалось много интересных и редких видов.

Чувствуя необходимость общения с широкой ботанической общественностью, Н. И. Кузнецов основал в 1900 г. печатный орган под названием «Труды Ботанического сада Императорского Юрьевского университета». Этот журнал издавался им в течение 15 лет. Заняв в 1914 г место директора Никитского ботанического сада близ Ялты, Кузнецов в течение 3 лет продолжал издание этого журнала под новым названием: «Вестник русской флоры». В обоих изданиях печатались научные статьи небольших размеров, рецензии, библиография и хроника. Особенное внимание Н. И. Кузнецов обращал на полноту хроники, стараясь отмечать все события и явления, касающиеся ботаники. В наше время эти журналы представляют большой интерес с точки зрения истории ботаники в России, так как в них довольно полно отражается ботаническая жизнь того времени.

Свое мнение по основному вопросу — о характере и цели ботанических работ — Н. И. Кузнецов высказал в 1900 г. Он решился выступить со смелой мыслью о необходимости приступить к изданию новой «Флоры России» взамен классического труда К. Ф. Ледебура, к тому времени уже устаревшего. Однако, осуществление такого труда было уже не под силу одному человеку, ввиду скопившегося к тому времени огромного количества материалов о флоре России. Необходима была коллективная работа с привлечением всех русских специалистов-ботаников. Нужно было договориться как об общем характере труда, так и о вопросах технического оформления издания. Предприятие потребовало бы также больших денежных средств и могло быть осуществлено лишь под руководством какого-либо авторитетного учреждения. По мнению Н. И. Кузнецова, этим учреждением должна была стать Российская Академия наук.

Опубликовав свои соображения в „Delectus III Plantarum exsiccatarum, quas anno 1900 permutationi offert Hortus Botanicus Universitatis Jurjevensis" Н. И. Кузнецов просил всех ботаников высказаться по этому вопросу. Очень сочувственно отнеслись к этому начинанию И. П. Бородин и С. И. Коржинский, причем последний выхлопотал даже специальные суммы для издания. Труднее, однако, было достигнуть сплочения научных сил в условиях того времени, когда каждый университет работал обособленно, важнейший ботанический центр — Петербургский ботанический сад — находился в ведомстве Главного управления землеустройства и земледелия, а Академия наук не являлась объединяющим и направляющим центром. На анкету Н. И. Кузнецова ответило 10 ботаников, в числе которых было только два молодых петербургских ботаника, В. Г Траншель и Р Э. Регель, и не было ни одного московского. Возможно, что неблагоприятное влияние на ход дела оказала и преждевременная смерть С. И. Коржинского (1900) Словом, выяснилось, что издание общей «Флоры России» по единому плану не осуществимо, а возможна лишь обработка материалов по флоре отдельных ее частей. После этого Н. И. Кузнецов решил выполнить начатую им в 1896 г. обработку флоры Кавказа как часть общей «Флоры России».

При таких обстоятельствах Н. И. Кузнецов со своими ближайшими сотрудниками, приват-доцентом Н. А. Бушем и ассистентом А. В. Фоминым, начал в 1900 г. работу над изданием своего капитального труда «Flora caucasica critica. Материалы для флоры Кавказа. Критическое систематическо-географическое исследование». К 1915 г., когда в условиях первой мировой войны пришлось прекратить работу, Н. И. Кузнецов успел издать 45 выпусков.

Излишне характеризовать этот труд и его значение. Тщательность выполнения его и обилие данных о географическом распространении видов растений известны каждому ботанику. Хотелось бы подчеркнуть лишь одно: этот труд является прекрасным примером коллективного сотрудничества. Работа была начата втроем, к концу же общее число сотрудников возросло до 30. Несмотря на это, она имеет цельный характер, так как основы для ее выполнения были четко выработаны Н. И. Кузнецовым. Важность метода коллективной работы, который ныне общепризнан в нашей стране, в то время, да и позднее, осознавалось далеко не всеми ботаниками. Известно, например, выражение В. И. Липского, назвавшего такой метод работы «кустарным производством».

На этом капитальном труде воспитывались многочисленные ученики и сотрудники Н. И. Кузнецова, заслуги которых в области русской и советской ботаники хорошо известны. Влияние Н. И. Кузнецова носило однако более широкий характер. Наши крупнейшие университеты — Петербургский, под влиянием Х. Я. Гоби, и Московский, под влиянием И. Н. Горожанкина, — в значительной мере сделались центрами по исследованию флоры низших растений, Тартуский же — по флоре, систематике и географии высших растений. Сюда приезжали защищать диссертации воспитанники других университетов. Так в 1902 году здесь защищал диссертацию А. Ф. Флеров, в 1909 г. — Р Э. Регель, в 1913 г. — Б. А. Келлер, впоследствии академик; в 1907 г о допущении к защите ходатайствовал В. Н. Сукачев.

Из других более крупных работ Н. И. Кузнецова, выполненных в Тарту, назовем: «К статистике флоры Кавказа» (1908), «Принципы деления Кавказа на ботанико-географические провинции» (1909), «К вопросу о происхождении нагорно-ксерофитной флоры Кавказа. Систематика рода Rindera Pall.» (1909), «Род Lycopsis и история его развития» (1910), «Нагорный Дагестан и значение его в истории развития флоры Кавказа» (1910). «Опыт деления Сибири на ботанико-географические провинции» (1912)

В 1904 г Н. И. Кузнецов был избран членом-корреспондентом Российской Академии наук.

В истории русской ботаники Н. И. Кузнецов известен также как автор первой русской филогенетической системы растений. Во «Флоре Кавказа» он применил систему А. Энглера, являющуюся наиболее тщательно выработанной в числе систем, предложенных различными ботаниками. Не соглашаясь, однако, с некоторыми основными положениями, на которых построена энглеровская система, Н. И. Кузнецов в течение долгих лет вырабатывал свою систему и опубликовал ее в книге «Введение в систематику цветковых растений», Юрьев, 1914. В переработанном виде она издана в 1922 г. и в 1936 г.

Н. И. Кузнецов стоит на точке зрения полифилетического происхождения цветковых растений. Часть их (Polycarpicae и происшедшие от них порядки) он производит от беннеттитовых, другую же часть (порядки Verticillatae, Proteales, Salicales, Myricales, Piperales и их производные) от каких-то неизвестных вымерших простейших голосеменных. Ценным в воззрениях Н. И. Кузнецова является допущение политопного происхождения цветковых, т. е. признание древними и исходными для других порядков типами не одних только многоплодниковых, а нескольких, возникших в разных местах независимо друг от друга, порядков.

В результате принципиальных критических высказываний Н. И. Кузнецова о работах других ботаников у него временами возникали с ними конфликты. Один из таких конфликтов произошел в 1908 г., когда был поднят вопрос о передаче Петербургского ботанического сада в ведение Академии наук. Для обсуждения этого вопроса была создана комиссия, в состав которой от Академии наук вошел и Н. И. Кузнецов. Поддерживая предполагавшуюся передачу, он подверг критике общую организацию исследовательской работы Петербургского ботанического сада, что и привело к острому конфликту. В конце концов передача не состоялась.

Реорганизация Академии наук была проведена только после Великой Октябрьской социалистической революции. В 1931 г. был создан руководящий центр ботанической научно-исследовательской работы — единый Ботанический институт Академии наук СССР, в систему которого вошел и Петербургский ботанический сад. Благотворные последствия этой реорганизации сказались немедленно: в 1934 г. под общей редакцией академика В. Л. Комарова начала выходить «Флора СССР» — труд, не имеющий себе равного в мировой научной литературе. Таким образом, при советском строе осуществилась идея, за которую полвека тому назад тщетно боролся Н. И. Кузнецов.

Обрабатывая флору Кавказа, Н. И. Кузнецов ставил также более широкую цель — выяснение истории происхождения этой флоры. В своем раннем труде «Элементы Средиземноморской области в Западном Закавказье» (1891) он на основании трехлетних работ пришел к выводу, что флора Западного Закавказья имеет древнее происхождение и сохранилась здесь в малоизмененном виде с третичной эпохи. Поэтому Н. И. Кузнецов предложил выделить этот район в самостоятельную Понтийскую или Колхидскую фитогеографическую область. Эти его выводы тогда были признаны недоказанными. Критическая обработка флоры Кавказа с точным указанием географического распространения всех видов и должна была дать данные для окончательного разрешения этого вопроса. Отсюда и вытекала определенная целенаправленность работы.

В связи с этой работой Н. И. Кузнецов трижды совершил экспедиции и путешествия из Тарту на Кавказ. Неоднократно он направлял туда своих учеников и сотрудников. В 1900 г. он исследовал высокогорную растительность Армении, предприняв в течение лета три поездки. Первая шла со станции Кировакан (Караклис) до озера Севан (Гокча), оттуда в верховья реки Мисхана, на гору Арагац (Алагез) и назад через Ленинакан (Александрополь). Вторая поездка была предпринята из Боржоми через Ахалцихе на Ахалкалаки и оттуда через Бакуриани обратно в Боржоми. Эта экспедиция имела целью выяснить причину безлесия нагорной Армении, представляющей черноземную степь на вулканическом туфе. По мнению Н. И. Кузнецова, безлесие зависит не только от климатических условий, но и от деятельности человека, вырубившего существовавшие здесь леса.

Летом 1911 г. Н. И. Кузнецов совершил большую экспедицию в Дагестан. Со станции Евлах экспедиция направилась на Нуху, оттуда в село Сарубаш, затем перевалом через Главный Кавказский хребет к верховьям реки Самура. Оттуда экспедиция спустилась до Рутула и через высокий перевал из бассейна Самура в верховья бассейна Чирах-Чая. Третьим перевалом направились в Кумухский округ и далее в Гуниб. Затем по Кара-Койсу и Аварскому Койсу спустились до аула Араканы и оттуда через перевал в Буйнакск (Темир-Хан-Шуру) и Махачкалу (Петровск) у Каспийского моря. Самым интересным результатом работ этой экспедиции было нахождение высокогорных ковыльных степей в Самурском округе и на перевале между аулом Араканы и Буйнакском.

В результате наблюдений экспедиции Н. И. Кузнецов внес также предложение об охране природы Кавказа. Он указал на необходимость охранения на Кавказе самшита, тисса, грецкого ореха, пинии (в Батумской области), чистоуста величавого (близ Адлера) и других растений. Он высказал также мысль о необходимости обратить окрестности Гуниба в национальный парк. Уже в предыдущем (1910) году им было сделано предложение Академии наук об объявлении заповедником Лагодехского ущелья в Кахетии, которое является классическим местом произрастания многих редких реликтовых растений кавказской флоры. Экспедиция 1911 года описана Н. И. Кузнецовым в его труде «В дебрях Дагестана» (1913)

Из сотрудников Н. И. Кузнецова упомянем прежде всего Н. А. Буша, впоследствии профессора Ленинградского университета и члена-корреспондента Академии наук СССР Н. А. Буш окончил Казанский университет и учился после этого в Лесном институте в Петербурге. В Тарту он работал с 1895 по 1902 г.: сначала помощником директора ботанического сада, а с 1900 г. также и приват-доцентом. Уже до прибытия в Тарту он имел солидный опыт ботаника-фитогеографа, приобретенный в нескольких научных экспедициях. Так, в 1890 г. он участвовал в экспедиции в Казанскую губернию, а в 1894 г. на Кавказ, в нынешнюю Азербайджанскую ССР В 1895 г. он также путешествовал по Кавказу в нынешней Грузинской ССР

Из Тарту Н. А. Буш совершил три научных путешествия в северо-западный Кавказ — в 1896, 1897 и 1899 гг. — для изучения растительности и ледников тогдашней Кубанской области. 1896 г он исследовал юго-восточную часть Кубанской области, выбрав главной квартирой Тебердинский аул и совершив из него четыре путешествия в горы. В результате экспедиции был собран гербарий из 5000 растений, составлена геоботаническая карта исследованного района и осмотрено 49 ледников, из которых 30 были описаны впервые. Летом 1897 г эти работы продолжались, причем главной их целью было исследование ледников северного склона Главного Кавказского хребта между Тебердой и Эльбрусом. Кроме того, Н. А. Буш задался целью выяснить причину обширного распространения сосновых лесов на северном склоне Главного Кавказского хребта и березовых лесов в нижней части лесной области. Самой продолжительной была третья экспедиция в 1899 г., длившаяся пять с половиной месяцев. На этот раз исследования производились в западной части Кубанской области. Н. А. Бушу удалось проследить распространение редких растений, представляющих остатки растительности третичной эпохи: рододендрона понтийского, черники кавказской, падуба, лавровишни, тисса, плюща и др.

Магистерскую диссертацию («Ranales флоры Кавказа») он защищал в Тарту в 1903 г., а докторскую («Rhoeadales и Sarraceniales флоры Кавказа») в 1911 г. Обе работы представляют собой части критической «Флоры Кавказа».

Другим славным сотрудником Н. И. Кузнецова был А. В. Фомин, окончивший Московский университет в 1893 г и работавший в Тарту ассистентом у Н. И. Кузнецова с 1896 по 1902 г. Впоследствии он был профессором Киевского университета (с 1914 г.) и действительным членом Академии наук Украинской ССР (с 1921 г.) Первая его экспедиция (в 1897 г.) имела целью геоботаническое исследование верховьев реки Оки; в последующие годы Н. И. Кузнецов направлял его на Кавказ. В 1898 г. он работал в Кахетии (часть нынешней Грузинской ССР). Выбрав отправным пунктом Лагодехи, А. В. Фомин изучал растительность южного склона Главного Кавказского хребта и долины реки Алазани. В следующем (1899) году эти исследования продолжались в юго-восточном направлении, причем была охвачена северная часть нынешней Азербайджанской ССР (окрестности Закатал и Нухи) В 1900 г. А. В. Фомин путешествовал по Армении, направляясь через Кировакан (Караклис) и Дилижан в Ереван, а оттуда через Эчмиадзин, Игдыр и Даш-бурун к предгорьям Арарата. После этого он сопровождал Н. И. Кузнецова в его экскурсии по Грузии из Боржоми через Ахалцихе в Ахалкалаки и оттуда через Бакуриани обратно в Боржоми. В 1901 г он совершил поездку в Ордубад и Нахичевань в нынешней Азербайджанской ССР до границы Ирана. В Азербайджане (окрестности Кюрдамира) и Армении (около озера Севан и Еревана) он экскурсировал и в 1902 г. Его диссертации — магистерская («Cucurbitaceae и Campanulaceae флоры Кавказа», 1907) и докторская («Pteridophyta флоры Кавказа», 1913) также являются частями критической «Флоры Кавказа»

Ученик Н. И. Кузнецова Б. Б. Гриневецкий, ныне профессор Варшавского университета, работавший в нашем городе после окончания Тартуского университета с 1901 по 1914 г сначала в качестве ассистента, а затем приват-доцента, также многократно путешествовал по Кавказу Он обработал для «Флоры Кавказа» семейство Dioscoreaceae. Однако его диссертации, защищенные в Тарту, имеют другой характер. Магистерская относится к области физиологии («Исследования над реотропизмом корней», 1909). а докторская к области анатомии растений («Анатомические исследования над устьицами», 1914).

Из других ботаников, участвовавших в обработке флоры Кавказа, упомянем Б. М. Козо-Полянского — ныне члена-корреспондента Академии наук СССР, Е. А. Буш, Б. А. Федченко, А. Ф Флерова, К. А. Фляксбергера, П. И. Мищенко, Р Э. Регеля, Ю. А. Филиппова, Е. И. Бордзиловского, Ю. Н. Воронова, И. В. Палибина, Д. И. Сосновского и Е. В. Вульфа.

Казалось, что после ухода Н. И. Кузнецова из Тарту был найден достойный продолжатель научно-исследовательской работы по ботанике в установившемся здесь направлении, так как в 1916 г. профессором был выбран крупнейший русский ботаник В. Л. Комаров, впоследствии президент Академии наук СССР Однако обстоятельства сложились иначе. Шла первая мировая война, линия фронта приближалась к Эстонии, — и В. Л. Комаров отказался от этого места. Вместо него в 1917 г. кафедру ботаники в Тарту занял другой славный деятель русской науки, хотя и в другом направлении, — М. С. Цвет, знаменитый исследователь растительных пигментов, создатель адсорбционного хроматографического метода; беспристрастный зарубежный специалист по этому вопросу Л. Цехмейстер характеризует С. М. Цвета как «гениального русского исследователя». М. С. Цвету не пришлось, однако, долго поработать в Тарту. Уже в следующем (1918) году, когда Эстония была оккупирована германскими войсками, он покинул Тарту.

Работа в Тартуском университете возобновилась в 1919 г. в условиях буржуазного строя в Эстонской республике. Однако в противоположность многим другим научным дисциплинам, которые из-за недостаточной материальной базы для научной работы, а также вследствие неверных методологических принципов, не могли дать ничего ценного в области науки, ботаника оказалась в более счастливом положении. Во время буржуазного периода в Тарту работали два видных ботаника. Первым, в 1919 г. кафедру ботаники занял известный миколог Ф. В. Бухгольц, питомец Московского университета, специалист по подземным грибам. Свою магистерскую диссертацию («Материалы к морфологии и систематике подземных грибов», 1902) и докторскую диссертацию («Новые данные к морфологии и цитологии подземных грибов (Fungi hypogei) ч. I. Род Endogone Link», 1911), он защищал в Московском университете. До приезда в Тарту Ф. В. Бухгольц работал в Рижском политехническом институте, где совместно со своим учеником А. С. Бондарцевым издавал «Гербарий русских грибов». К сожалению, Ф. В. Бухгольц умер в 1924 г., но за несколько лет своей деятельности в Тарту он все же успел наладить работу кафедры ботаники.

Другим ботаником, выдвинувшимся в Тарту, был проф. Т. М. Липпмаа, работавший в Тартуском университете с 1930 по 1943 г Первые его труды относятся к области изучения растительных пигментов. К этой группе работ принадлежат также его диссертации — магистерская о родоксантине (1925) и докторская об антоцианинах (1926). Позднее, в соответствии с профилем кафедры, Т. М. Липпмаа занимался флористическими и геоботаническими проблемами. Им дан анализ флоры Эстонии и деление Эстонии на ботанико-географические районы (1935) В области геоботаники, борясь против формального понимания фитоценозов как всяких растительных группировок, он выработал на экологическом основании метод одноярусных фитоценологических единиц и дал предварительную систему этих единиц для Эстонии (1933). Дальнейшей разработке этих проблем помешала трагическая смерть Т. М. Липпмаа во время Великой Отечественной войны.

Новая эпоха в научно-исследовательской ботанической работе начинается с восстановлением советского строя и включением Эстонии в дружную семью свободных советских народов. Первые шаги после освобождения Тарту доблестной Советской Армией от фашистских оккупантов были очень трудны вследствие варварских разрушений, произведенных гитлеровцами. Благодаря заботам партии и Советского правительства, а также великодушной помощи со стороны братских республик, вскоре удалось, однако, наладить исследовательскую работу по ботанике. Перед эстонскими ботаниками стоят теперь обширные задачи. В великий план преобразования природы СССР входят и работы по коренному изменению облика Эстонской ССР Болота и заболоченные земли, занимающие до 30% всей поверхности нашей республики, и другие непродуктивные земли должны быть превращены в плодородные поля и культурные леса. Это поднимает благосостояние трудящегося народа Эстонской ССР и является одной из предпосылок для постепенного перехода от социализма к коммунизму.

Ботаники должны дать научные основы для такого преобразования природы Эстонской ССР. С этой целью, используя данные, собранные всеми предшествующими исследователями растительного покрова Эстонской ССР составляется сводный труд о флоре республики. Одновременно ведутся работы по составлению обобщающего труда о растительности в виде геоботанической карты Эстонской ССР. Кроме того, ботаники участвуют в разрешении отдельных конкретных вопросов, возникающих в связи с мелиоративными и другими работами по преобразованию природы. Все эти работы ведутся в тесном сотрудничестве с Эстонской Академией наук.

ЛИТЕРАТУРА

Бреславец Л. П., Исаченко Б. Л., Комарницкий Н. А., Липшиц С. Ю., Максимов Н. А., Очерки по истории русской ботаники. Москва, 1947.

Буш Н. А., Предварительный отчет о путешествии по северо-западному Кавказу в 1896 году с целью исследования ледников и флоры. Изв. Русск. геогр. общ., 1897, т. 33, вып. 1, стр. 1—33.

Буш Н. А., Предварительный отчет о втором путешествии по северо-западному Кавказу в 1897 году. Там же, 1898, т. 34, вып. 5, стр. 519—589.

Буш Н. А., Описание и главнейшие результаты третьего путешествия по северо-западному Кавказу в 1899 году. Там же, 1900, т. 36, вып. 3, стр. 227—298.

Гриневецкий Б., Предварительный отчет о путешествии по Армении и Карабаху в 1903 году. Там же, 1904, т. 40, вып. 3, стр. 355—398.

Кузнецов Н. И., Обзор деятельности Ботанического сада Юрьевского университета за 1896 год. Учен. зап. Юрьевск. унив., 1897, т. 5, № 2.

Кузнецов Н. И., Обзор деятельности Ботанического сада Юрьевского университета за 1897 год. Там же, 1898, т. 6, № 1.

Кузнецов Н. И., Обзор деятельности Ботанического сада Юрьевского университета за 1898 год. Там же, 1899, т. 7, № 4.

Кузнецов Н. И., О ботанико-географических исследованиях Кавказа, совершенных по поручению Русского географического общества. Изв. Русск. геогр. общ., 1902, т. 38, вып. 2, стр. 206—227.

Кузнецов Н. И., В дебрях Дагестана. Путешествие в Дагестан в 1911 году по поручению Русского географического общества и Академии наук. Там же, 1913, т. 49, вып. 1—3, стр. 1—270.

Левицкий Г В., Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Юрьевского, бывшего Дерптского, университета за сто лет его существования (1802—1902). Юрьев, 1902, т. 1, 1903, т. 2.

Максимович К. И., Отчет о третьем присуждении премии тайного советника Бэра, читанный в публичном заседании Академии наук 17-го февраля 1873 года. С.-Петербург, 1873.

Фомин А. В., Предварительный отчет о ботанико-географических экскурсиях в восточном Закавказье. Изв. Русск. геогр. общ., 1900, т. 36, вып. 3, стр. 299—323.

Юбилейный сборник в честь 25-летия научной деятельности профессора Николая Ивановича Кузнецова. Юрьев, 1913.

Bunge A., Bruchstück aus dem Tagebuche des Professors Dr. A. Bunge auf dessen Reise nach China in den Jahren 1830 und 1831. Dorp. Jahrb. f. Litter., Statist. u. Kunst, bes. Russl., Leipzig, 1835.

Kupffer K. R., Zum Gedächtnis an Prof. Dr. Edmund Russow. Korresp.-bl. d. Naturf.-Ver., Riga, 1898, B. 40.

Kusnezow N. J., Professor Dr. Ed. Russow. Bot. Centralbl., 1897, B. 71.

Ein Lebensbild, Sitz.-ber. d. Naturf.-ges. Univ. Jurjew, 1896, B. 11.

Ledebour C. F., Reise durch das Altai-Gebirge und die Soongorische Kirgisen-Steppe. Berlin, 1829, B. 1, 1830, B. 2.

Russow E., Zum Gedächtnis an Alexander Bunge. Sitz.-ber. d. Naturf.-ges. Univ. Dorpat., 1889, B. 9.

Weinmann J. A., Der Botanische Garten der Universität zu Dorpat, im Jahre 1810.

BOTAANILISED UURIMUSED JA EKSPEDITSIOONID TARTU ÜLIKOOLIS

Prof., bioloogiatead. dr. A. Vaga
Taimesüstemaatika ja geobotaanika kateeder

Resümee

Tartu ülikool on vene teadusele andnud kaks botaanilist koolkonda — C. F Ledebouri ja N. I. Kuznetsovi koolkonna. C. F Ledebour töötas Tartus 1811. aastast 1835. aastani. Oma eesmärgiks seadis ta Vene riigi vähetuntud alade botaanilise uurimise. Kindla aluse selliseks tegevuseks lõi tema poolt korraldatud ekspeditsioon Altaisse aastail 1826—1827 Peale tema enda võtsid sellest osa tema õpilased A. Bunge ja C. Meyer. Ekspeditsioonilt toodi kaasa herbaarium 1600 taimeliigist, 7868 annust seemneid (1341 liigilt) ja 241 elusat taime, peale selle veel zooloogilised, mineraloogilised ja arheoloogilised kollektsioonid. Botaanilise materjali põhjal andis C. F Ledebour koos oma reisikaaslastega välja neljaköitelise Altai floora — „Flora Altaica" (1829—1833). Täienduse sellele teosele moodustab uute ja vähetuntud taimede album „Icones plantarum novarum vel imperfecte cognitarum, floram rossicam, imprimis altaicam, illustrantes" viies köites (1828—1834), mis sisaldab 500 pilditahvlit. C. F Ledebouri tähtsaimaks teoseks on aga „Flora Rossica sive enumeratio plantarum in totius Imperii Rossici provinciis europaeis, asiaticis et americanis hucusque observatarum" (1842—1853) See neljaköiteline, A. Bunge ja C. Meyeri kaasabil koostatud teos annab täieliku kriitilise ülevaate Vene riigi floorast.

Pärast C. F Ledebouri pensionile minekut jätkas tema poolt rajatud traditsioone Tartus tema õpilane ja kaastööline A. Bunge. Tema teine õpilane C. Meyer töötas kogu oma eluaja Peterburis, alguses sealse botaanikaaia direktori abina, hiljem direktorina, olles ühtlasi aastast 1844 Vene Teaduste Akadeemia ekstraordinaarseks ja aastast 1845 ordinaarseks tegevliikmeks. C. F. Ledebouri teistest õpilastest tuleb mainida R. E. Trautvetterit, kes töötas alguses Peterburis, siis Kiievis, seejärel Gorõ-Gorkis ja hiljem (1864—1875) jälle Peterburis botaanikaaia direktorina. Professorite Instituudi kaudu olid C. F Ledebouri õpilasteks I. O. Šihhovski,

hiljem professor Peterburis ja Moskvas, ning P J. Kornuhh-Trotski, hiljem professor Kaasanis.

A. Bunge töötas Tartus aastatel 1836—1867 Ta on tuntud kui kaugete idamaade floora uurija. Peale Altai uurimise, kus ta töötas aastatel 1826—1833, võttis ta osa ekspeditsioonist Hiinasse (1830—1832) ja oli aastatel 1833—1836 professoriks Kaasanis. Tartust võttis ta osa ekspeditsioonist Iraani (1847—1849). A. Bunge töödest on tähtsaimateks süstemaatilised monograafiad mitmetest taimesüstemaatika seisukohast rasketest, eriti Kesk-Aasias ja Iraanis levinud taimeperekondadest ja -sugukondadest. Peale selle on A. Bungel suuri teeneid Baltimaade floora süstemaatilise uurimise alal. Mainida tuleb siin tema poolt välja antud kuivatatud taimede kogu „Flora exsiccata Liv-, Esth- und Kurlands”

A. Bunge oli aastast 1833 Vene Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige ja aastast 1875 auliige.

Ka A. Bungel oli hulk silmapaistvaid õpilasi, kes levitasid Tartu koolkonna mõju Vene riigi muudesse osadesse, peamiselt aga Peterburi kesksetesse teaduslikesse asutustesse — botaanikaaeda ja Teaduste Akadeemiasse. Neist on tuntumad K. Mercklin, C. Maximowicz, F Schmidt, P Glehn jt.

A. Bunge õpilane oli ka E. A. Russow, kes töötas botaanika professorina Tartus aastatel 1874—1895. E. A. Russow esindas oma eelkäijatest erinevat uurimissuunda. Seoses mikroskoopilise tehnika arenemisega sammusid tol ajal botaanikas võidukäiku kõrgemate taimede anatoomia ja alamate taimede uurimine. Neil aladel töötades kerkis E. A. Russow oma aja üheks silmapaistvamaks teadlaseks. Osa tema töid käsitleb turbasammalde ehitust ja süstemaatikat, teine osa sõnajalgtaimede ja õistaimede anatoomiat ja ontogeneesi. Tema tähtsamatest saavutustest võiks mainida näiteks raku karüokineetilise jagunemise ja plasmodesmide avastamist.

C. F Ledebouri poolt rajatud uurimissuuna elustas Tartus uuesti N. I. Kuznetsov, kes töötas siin aastatel 1895—1914. Omalt poolt süvendas ta seda suunda floora-ajaloolise käsitluse juurdetoomisega. Tema uurimisobjektiks oli Kaukaasia floora, mille läbitöötamiseks ta mobiliseeris oma kaastöölised ja rohkearvulised õpilased, luues nõnda oma koolkonna. Peale Kaukaasia taimestiku kriitilise süstemaatilis-geograafilise läbitöötamise, millest ta jõudis välja anda 45 vihku, on N. I. Kuznetsov avaldanud monograafilisi töid taimesüstemaatika ja taimegeograafia alalt. Ta lõi ka esimese vene fülogeneetilise õistaimede süsteemi, mis ilmus Tartus aastal 1914.

N. I. Kuznetsovi muudest üritustest tuleb mainida herbaarsete taimede vahetuse organiseerimist, mille kaudu pandi alus kateedri üldherbaariumile. Laiemat tähtsust omab botaanilise ajakirja („Acta Horti Botanici”) väljaandmine 15 aasta vältel. Püüdes peegeldada tolleaegset botaanilist elu, oli see ainukeseks sellelaadiliseks ajakirjaks Venemaal.

Pärast N. I. Kuznetsovi lahkumist Tartust töötas siin lühikest aega (1917—1918) kuulus taimepigmentide uurija M. S. Tsvett, kelle tegevuse katkestas Tartu okupeerimine saksa sõjavägede poolt Esimese maailmasõja ajal.

Kodanlikus Eestis töötasid Tartus kaks tuntud botaanikut — Moskva ülikooli kasvandik mükoloog F V Bucholtz (1919—1924) ja geobotaanik ning taimepigmentide uurija T Lippmaa (1930—1943)

Uus ajajärk algab Nõukogude perioodiga, mil botaaniline uurimistöö, koordineerituna kogu Nõukogude Liidus tehtava tööga, on suunatud meie looduse uurimisele tema ümberkujundamise eesmärgil töötava rahva hüvanguks.

АКАДЕМИК В. Я. СТРУВЕ И ЕГО ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В ТАРТУСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Проф. Т. Роотсмяэ

Кафедра астрономии и геофизики

ВВЕДЕНИЕ

Проблематика астрономии очень обширна и разнообразна. Основной ее задачей является изучение состава, движения и развития вселенной — с целью получить правильную картину мира.

В ходе развития астрономии выявились две особенно важные черты: философское значение астрономии и значение ее прикладного раздела в практической деятельности человека.

Философское значение астрономии выявилось при изучении объективно существующей вселенной, или макрокосма. Анализ небесных тел постепенно привел мыслящее человечество к убеждению, что мир есть единый и закономерный процесс развития материи в бесконечном пространстве и времени. Одновременно выяснилось, что закономерности материи, известные на Земле, Солнце и звездах, существуют и во всех отдаленных частях мирового пространства, доступных нашему наблюдению. Везде господствует закон тяготения, везде существуют закономерности превращения материи и энергии, путем которых все части вселенной неразрывно связаны друг с другом, образуя единое целое.

Итак, ясно, что астрономия имеет философское значение, которое состоит в обосновании нашего мировоззрения. Рассмотрим теперь ее вторую важную функцию, ее практическую сторону, обслуживающую человечество. Без астрономии испытывали бы серьезные затруднения океанское пароходство и аэронавтика дальнего следования. Без нее не могут обойтись геодезия и география. В последнее время появилась необходимость пользоваться точными астрономическими данными в гравиметрии, что иногда имеет большое значение в разведке месторождений полезных ископаемых.

Известно также, что без чрезвычайно точных астрономических наблюдений невозможно установить точную систему времени, необходимую для производства, для согласования движения в ежедневной практической деятельности. Однако практическое значение астрономии далеко не исчерпывается сказанным выше. Новая отрасль астрономии — астрофизика — исследует явления, наблюдающиеся на Солнце, в связи с интенсивностью его излучения и спектральным составом. От этих явлений зависят погода, слышимость радио, земной магнетизм, полярное сияние. Исследование излучений Солнца имеет также тесную связь с биологией, медициной и преобразованием природы.

Хотя вселенная по содержанию и однородна, астрофизика показала нам большое разнообразие форм существования материи, гораздо большее, чем мы видим на Земле и в наших лабораториях. Открыты сверхразреженная межзвездная среда, так называемое космическое излучение и сверхплотные звезды, показывающие нам вещество в неизвестных ранее формах проявления. Соответствующие исследования помогают науке более глубоко изучить также и строение атома с целью применить энергию атомного ядра в мирном строительстве общества.

В нашу эпоху причины, обусловливающие развитие астрономии, весьма разнообразны, тогда как полтора-два столетия тому назад общественные мотивы развития этой науки в нашей стране были более ограниченные. В конце XVIII и начале XIX века интенсивно развивавшаяся капиталистическая промышленность и торговля как на суше, так и на море, требовали скорейшего освоения путей сообщения. Появилось стремление к открытию и исследованию неизвестных стран и в связи с этим необходимость выработать методы определения точных положений географических пунктов для составления правильных карт, освоения морских путей и т. п. Эту задачу и разрешала практическая астрономия, причем ее развитию особенно способствовала необходимость исследования обширных территорий России. Этим и объясняется то обстоятельство, что в первой половине прошлого столетия в нашей стране был построен ряд обсерваторий. Особенно важным событием как в истории русской астрономии, так и в истории астрономии вообще, было учреждение в сороковых годах прошлого столетия первоклассной Пулковской обсерватории, — этой знаменитой «метрополии астрономии». Одним из инициаторов и выдающихся руководителей этого важного предприятия был знаменитый астроном В. Я. Струве, который за свою плодотворную деятельность и был назначен директором Пулковской обсерватории (1839—1862) Уже в Тарту, где Струве работал около тридцати лет (1812—1839) им были написаны его основные труды по астрометрии, звездной астрономии и геодезии и создана школа, отличительные черты которой до сих пор сохраняют свое значение в советской стране. Благодаря Струве укрепились тесные связи между Тартуским университетом и другими русскими научными учреждениями, в особенности же с Пулковской обсерваторией и Российской Академией наук.

Сейчас, когда Тартуский государственный университет отпраздновал свой 150-летний юбилей, мы вспоминаем в числе знаменитых деятелей университета и великого ученого В. Я. Струве, заслуги которого имеют огромное научное и общественное значение. Всемирно известна грандиозная работа по геодезии, выполненная под руководством Струве и отчасти при его личном участии, — измерение дуги меридиана, проходящего через Тартускую астрономическую обсерваторию. Эта далеко опередившая свое время работа дала возможность более точно чем когда-либо раньше определить величину и форму земного шара и составить более точные географические карты. Другим огромным достижением Струве, принесшим ему широкую известность в ученых кругах, были его работы по звездной астрономии, в особенности многочисленные открытия и точные измерения двойных звезд. Эта работа также опередила свое время как по точности, так и по числу наблюдений. В результате продолжительного и упорного труда были опубликованы данные исследования более трех тысяч двойных звезд. По этим данным стало возможным сделать вывод, что движения компонентов звезд в системах двойных звезд основываются на законе тяготения, так же, как и движения в нашей солнечной системе. Этим было доказано единство вселенной и существование закона тяготения в сферах, недоступных ранее наблюдению, благодаря чему этот закон действительно можно было назвать всемирным законом тяготения или гравитацией.

Струве был первый из астрономов, определивший звездные расстояния путем измерения годовых параллаксов звезд. Этот факт также имел мировое значение, так как ранее техника подобных измерений еще не была развита. Действительное существование параллаксов звезд подтвердило предположение Коперника о том, что звезды настолько удалены от нас и их параллаксы настолько малы, что их нельзя было измерить из-за несовершенства техники того времени. Попытки других астрономов в этом направлении долго оставались безрезультатными и в более позднее время. Наконец, параллакс и вместе с ним звездное расстояние были впервые измерены, и, таким образом, гелиоцентрическая система Коперника, кроме открытия аберрации света, получила новое экспериментальное доказательство обращения земли вокруг Солнца. В то же время выяснилось, что звезды все же очень далеки от нас и что средняя плотность вещества в мировом пространстве очень мала. Вселенная оказалась несравненно более обширной, чем предполагалось раньше, и ее пределы раздвинулись до бесконечности.

Наконец, в половине прошлого столетия (1847), Струве в своем труде «Очерки по звездной астрономии» установил чрезвычайно важный факт: мировое пространство не вполне прозрачно и чисто, а заполнено сверхразреженной материей, поглощающей излучения звезд и ослабляющей их видимую яркость. В то время многие другие астрономы утверждали, что мировое пространство абсолютно прозрачно. Лишь спустя почти сто лет, в 1930 году, этот вопрос был поднят снова и превратился в актуальную проблему, над которой успешно работают современные ученые, особенно в Советском Союзе. Явление поглощения света в межзвездном пространстве, открытое Струве, имеет большое значение, так как существование рассеянной космической материи, вытекающее из факта поглощения света в межзвездной среде, говорит о том, что звезды связаны средой, из которой они постепенно возникают, и что они возникли не одновременно. В настоящее время также образуются и развиваются новые звезды, что особенно убедительно доказывают исследования советских ученых Амбарцумяна, Фесенкова, Шайна и других. Таким образом, перед нами встает космогоническая проблема — изучить вселенную не как стационарный механизм, а как динамический процесс образования и развития. Хотя Струве и не выступает непосредственно в роли философа, а является лишь прекрасным экспериментатором и вдумчивым астрономом, делающим правильные выводы о строении мира на основе наблюдений, однако результаты его работы, кроме научного значения, имеют и философско-идеологическое значение. На эту сторону его деятельности до сих пор обращалось мало внимания.

Свою юность и зрелые годы Струве провел в Тарту, где он начал заниматься астрономией и где развил и обработал большинство своих идей, которыми он позднее руководствовался при своих работах в качестве академика и директора Пулковской обсерватории. Поэтому следует подробно рассмотреть развитие работ Струве в Тарту попутно с его биографией.

В. Я. СТРУВЕ КАК АСТРОНОМ

Знаменитый астроном Василий Яковлевич Струве (Фридрих Георг Вильгельм Струве) родился 15 апреля 1793 г. в Альтоне, в семье директора гимназии. Под руководством своего отца Струве основательно изучил языки и математику и уже в пятнадцатилетнем возрасте получил аттестат зрелости. По семейным обстоятельствам талантливый юноша переехал в Тарту, где его брат был учителем гимназии.

В это время в Тарту уже существовал открытый в 1802 году университет. В. Я. Струве избрал своей специальностью филологию и работал с таким прилежанием, что уже через три года, в 1811 году, окончил университет и получил степень кандидата филологии за свою работу, удостоенную золотой медали и напечатанную за счет университета. В. Я Струве было тогда всего восемнадцать лет.

Занятия по филологии оказались очень полезными В. Я. Струве в его дальнейшей деятельности. Он знал несколько языков и, в первую очередь, активно владел латинским языком, на котором тогда ученые часто писали научные произведения.

В то же время Струве чувствовал особенно большой интерес к математическим наукам. Под влиянием и руководством тогдашних астрономов — проф. Пфаффа, проф. Гута и других, в особенности под влиянием профессора физики Паррота, пользовавшегося большим авторитетом в университете, Струве решил посвятить себя изучению точных наук и избрал своей специальностью астрономию. Систематически и упорно занимаясь физико-математическими науками и развиваясь с необычайной быстротой, он уже в 1813 г. выдержал экзамены на степень доктора и защитил докторскую диссертацию на тему об определении географических координат Тартуской Астрономической обсерватории («De geographica positione speculae astronomicae Dorpatensis»). Выбор этой темы показывает, с какой последовательностью, предусмотрительностью и планомерностью Струве начал свой путь ученого. Он прежде всего наметил себе определенный пункт на поверхности земного шара и начал вырабатывать строгую систему астрономических наблюдений. До Струве географические координаты Тартуской обсерватории были определены лишь приблизительно, Струве же определил их более точно, применяя при разрешении этой задачи своеобразную технику измерений и проявляя большую требовательность в отношении точности работы. После успешной защиты диссертации Струве — в двадцатилетнем возрасте — была присвоена ученая степень доктора. Таким образом, еще будучи студентом Тартуского университета, Струве посвятил себя научно-исследовательской деятельности, использовав все существовавшие в условиях того времени возможности. До конца своей жизни он отдавал все свои силы развитию русской науки, и его заслуги в этой области весьма значительны и разнообразны.

Деятельность Струве в Тарту можно разделить на два периода. Первый из них охватывает 1812—1818 гг., когда директором Тартуской обсерватории был проф. Гут, а Струве работал там в качестве астронома-наблюдателя, будучи в то же время экстраординарным профессором Тартуского университета. Во второй период (1818—1839) Струве был (после смерти Гута) директором Тартуской обсерватории и ординарным профессором университета вплоть до своего отъезда в Пулково. Оба эти периода составляют единое целое, оба они связаны непрерывно развивавшейся, инициативной деятельностью великого астронома. В Тартуском университете в 1818 году впервые была организована кафедра астрономии — специально для Струве, ввиду его выдающихся заслуг в учебной и научной работе. До того времени преподавание астрономии и математики было поручено одному и тому же профессору.

Интересно отметить то обстоятельство, что уже в ранний период его деятельности в его работе намечаются черты, характеризующие весь его дальнейший путь как в Тарту, так и в Пулковской обсерватории, где поле его деятельности значительно расширилось. Поэтому нельзя не обратить внимания на то, с какой необычайной энергией и настойчивостью работал Струве в ранние годы своей жизни, ведя занятия одновременно в самых разнообразных отраслях избранной им науки.

Рис. 1. Академик В. Я. Струве.

Ранняя деятельность этого талантливого астронома развивалась при следующих обстоятельствах. Уже при основании Тартуского университета (1802) его фактические основатели, и, прежде всего, профессор Паррот, сознавали необходимость создания базы для астрономических исследований, т. е. астрономической обсерватории. Здание обсерватории было построено уже в 1810 г., когда Струве был еще студентом-филологом, но вращающийся купол наблюдательной башни был сооружен по личной инициативе Струве значительно позднее (1825).

Вскоре после основания университета, еще до постройки новой обсерватории[1] проф. Паррот приобрел некоторые мелкие астрономические инструменты и пригласил работать в качестве астронома-наблюдателя местного учителя Э. Кнорре, человека уже немолодого, но старательного и трудолюбивого. На долю Кнорре выпала трудная задача самостоятельно овладеть техникой астрономических приборов и методами наблюдения. Его специальным заданием было определение географической широты Тарту. Для того, чтобы получить представление об упорном труде Кнорре, достаточно отметить, что всего лишь в течение 1803—1804 гг. он произвел 384 наблюдения в интересовавшей его области. Но, несмотря на настойчивую работу, Кнорре из-за несоответствующей методики наблюдений и плохих инструментов не смог получить таких результатов, точность которых могла бы соответствовать требованиям того времени.

В 1804 г. в Тарту прибыл И. Пфафф, приглашенный в качестве астронома и профессора по кафедре математики. Пфафф занялся исследованием техники астрономических инструментов и связанных с ними теоретических вопросов, а также усовершенствованием методов наблюдения. По всей вероятности, Пфафф привлек к этой работе и молодого Струве. После отъезда Пфаффа из Тарту на его место был приглашен проф. Гут из Харькова. Здание обсерватории тогда уже строилось (1809—1810), и на его постройку была израсходована значительная для того времени сумма в 120 000 рублей. Уже при Пфаффе были приобретены более крупные астрономические инструменты — рефлектор Гершеля, рефрактор Троутона и пассажный инструмент Доллонда, которыми впоследствии мог пользоваться Струве, работая в обсерватории.

Пассажный инструмент Доллонда был первым из трех главных инструментов, которыми пользовался Струве при своих астрономических наблюдениях, принесших ему мировую славу. Этот инструмент, хотя и был заказан профессором Пфаффом и прибыл на место в 1807 г., но еще не был тогда установлен в здании обсерватории. Преемник Пфаффа проф. Гут, директор Тартуской обсерватории в 1811—1819 гг., хотел доставить из Карелии через Петербург массивные гранитные опорные столбы, на которые должны были опираться концы оси вращения пассажного инструмента или так называемые цапфы. Это намерение проф. Гута не осуществилось, и тогда Струве заказал на месте простые столбы из кирпича (1813) прочность которых сначала возбуждала некоторые сомнения, но позднее, когда Струве основательно

[1] До постройки существующей в настоящее время обсерватории обсерватор Кнорре, профессор Пфафф и другие производили в Тарту астрономические наблюдения. Один из наблюдательных пунктов находился в доме Ленца на ул. Кююни (ныне 21 июня), другой в доме Ламберта на улице Ыпетая. От этих ранних тартуских «обсерваторий» после пожаров и перестроек города ничего не осталось.

проработал результаты исследований, сделанных при помощи пассажного инструмента, оказалось, что эти столбы вполне отвечают своему назначению. С помощью этого инструмента Струве вскоре и начал осуществлять свою программу наблюдений.

Директор обсерватории проф. Гут пошел навстречу начинанию Струве. Сам он не мог в достаточной мере заниматься астрономическими наблюдениями, так как был перегружен учебной работой. Работу по обсерватории он фактически передал в ведение Струве, который, занимая должность обсерватора, по существу являлся директором обсерватории и мог действовать там по своему усмотрению. Талант и усердие Струве, по сравнению со способностями Гута, отчасти оставляли в тени деятельность последнего. Гут за свое пребывание в Тарту не создал ничего значительного в области науки, но его большой заслугой было то, что он содействовал развитию плодотворной и разнообразной деятельности Струве.

Первые научные наблюдения Струве начал проводить в 1812 году. В течение нескольких лет было сделано много наблюдений, целью которых было определение географической широты и долготы. Результаты исследований, проведенных с помощью различных инструментов и методов, были опубликованы частью в докторской работе Струве, частью же в I томе публикаций Тартуской обсерватории и в периодических публикациях, изданных астрономом Боде (1817—1818). Все эти измерения производились с помощью различных мелких инструментов и носили более или менее случайный характер. Но в конце 1813 года появилась возможность в значительной мере расширить план наблюдений. Осенью 1813 г. Струве привел в полную готовность пассажный инструмент Доллонда. Когда инструмент был окончательно установлен в восточном зале обсерватории, проверена его устойчивость и определены константы поправок инструмента, то с 20 января 1814 г. могли начаться первые систематические наблюдения. При этом Струве имел возможность убедиться в отличных качествах пассажного инструмента Доллонда, которые высоко ценил и проф. Пфафф, основательно изучивший этот инструмент. Оптическая сила зрительной трубы была так велика, что можно было ясно видеть спутника Полярной Звезды, когда поле зрения зрительной трубы было освещено, или в сумерках, когда было так светло, что можно было делать записи наблюдений и различать стрелки на часах без искусственного освещения. В середине дня можно было наблюдать звезды третьей, а иногда и еще более слабой величины.

Струве предпринял большую астрометрическую работу — определить при помощи этого инструмента прямые восхождения всех звезд от 1-й до 5-й величины от северного полюса до 15° южного склонения. Таких звезд в известном каталоге, составленном астрономом Пиацци в Палермо, было очень мало. Таким образом, Струве в значительной мере дополнил каталогизирование этой части неба. Для уточнения результатов наблюдений Струве применял особые приемы, имевшие целью ослабить влияние погрешностей инструмента или личных ошибок наблюдателя. Полученные таким путем прямые восхождения многих фундаментальных звезд впоследствии стали опорными пунктами при определении прямых восхождений других звезд. Особое внимание Струве уделил определению прямого восхождения Полярной Звезды.

Составление каталога положений звезд, начатое Василием Яковлевичем Струве, хотя и было осуществлено при помощи сравнительно простых инструментов и выполнено в пределах ограниченной темы, все же имело весьма важное значение, так как Струве своим личным примером проложил путь дальнейшим исследованиям в этой области, и на их основании в дальнейшем составлялись обширные каталоги Пулкова, считающиеся лучшими в мире. Стоя перед пассажным инструментом Доллонда в Тартуской обсерватории и вспоминая о трудах Струве, связанных с этим инструментом, мы чувствуем, что здесь находится основа источника знаменитой школы русской фундаментальной астрономии. Пионерская деятельность Струве в этой области, так же как и в других его начинаниях, отличается широтой перспектив, последовательностью и основательностью.

Одна из отраслей астрономии — астрофизика — в настоящее время особенно привлекает внимание широких кругов и возбуждает интерес к астрономии как к учению о небесных телах. Начиная с возникновения астрофизики, строение небесных тел и процессы, происходящие в них, стали для нас гораздо более понятными. Интерес к небесным телам возбуждает именно их природа и строение. В противоположность этому, значение другой, старейшей отрасли астрономии — астрометрии, — может быть, и не привлекает такого внимания широких кругов. В первой половине прошлого столетия, когда астрофизика еще не зародилась, астрономические наблюдения могли ограничиваться лишь определением положений звезд, что и являлось предметом астрометрии.

Но астрометрия, все увеличивая точность измерения положений звезд, достигла очень важных и интересных результатов. Этим путем было открыто движение звезд и закономерности этого движения, стало возможным определять звездные расстояния (1839) и показать, что существуют системы солнц, где два солнца или еще большее количество солнц вращаются вокруг центра системы, подчиняясь закону гравитации. Сравнивая действительные, полученные путем наблюдений положения планет или звезд с положениями, полученными путем предварительных вычислений, стало возможным предсказывать и открывать неизвестные до сих пор планеты или звезды, — например, так были открыты планета Нептун и спутник Сириуса. Таким образом, в новейшее время стало возможным показать, что звезды, как солнца, имеют планетоподобных спутников, хотя до сих пор их невозможно было непосредственно наблюдать даже при помощи самых мощных наблюдательных инструментов. К этому добавляется и практическое требование, предъявляемое к астрономии — дать точнейшие координаты звезд для того, чтобы на их основании определить координаты географических пунктов на поверхности земного шара, являющихся основой картографирования.

Эти все возрастающие требования были причиной того, что в XIX веке стало уделяться особенно большое внимание усовершенствованию астрометрических инструментов и технике наблюдений.

Занимаясь систематическим измерением положений звезд, Струве наблюдал иногда и другие объекты, если к этому представлялся случай. Так, он наблюдал Луну, маленькую планету Цереру и кометы. Наблюдения положений кометы необходимы для того, чтобы определить орбиту кометы и проследить ее движение по орбите. Но уже тогда, т. е. в 20-х годах прошлого столетия, Струве заинтересовался той отраслью астрономии, исследование которой впоследствии оказалось особенно плодотворным и превзошло все достижения астрономов того времени. Речь идет о двойных звездах, которые до Струве наблюдал уже Вильям Гершель при помощи своих больших телескопов. Гершель открыл, описал и каталогизировал сотни таких звезд. Струве знал об исследованиях Гершеля и решил также начать работать в том же направлении, тем более что эта область была мало исследована и обещала дать науке много нового и интересного. Струве использовал для измерений двойных звезд имевшийся в его распоряжении пассажный инструмент, который, однако, для таких измерений не был приспособлен. Отсутствовал и микрометр, при помощи которого можно было бы производить измерения положения спутника звезды, т. е. определять его угловую дистанцию от главной звезды и направление положения, т. е. позиционный угол. Струве попробовал преодолеть эти трудности, приобретя в 1819 г. два микрометра, сделанных местным механиком. Они были использованы при наблюдениях, производимых при помощи 5-футовой зрительной трубы Троутона, но желаемая точность все же не была достигнута, так как оценки измерений частью приходилось делать приблизительно, на глазомер. Это не удовлетворяло Струве, и вскоре он заказал у Фраунгофера более усовершенствованный нитяной микрометр, дававший возможность повысить точность измерений. Максимально используя возможности своих наблюдательных инструментов, Струве, однако, знал, что обсерватория нуждается в более новом и усовершенствованном астрономическом оборудовании. При поддержке руководства университета и учитывая конъюнктуру финансового положения, Струве с большой энергией и последовательностью занялся приобретением новых, лучших инструментов.

Прежде всего Тартуская обсерватория нуждалась в меридианном круге, инструменте первостепенной важности, при помощи которого можно было бы с большой точностью измерять обе координаты звезд — прямое восхождение и склонение. Задача пассажного инструмента была ограниченнее, так как при его помощи можно было измерить лишь прямое восхождение звезд. Главной частью меридианного круга является точно разделенный на градусы и доли градуса круг, плоскость которого устанавливается в плоскости меридиана. При поддержке ректора университета Г Эверса Струве в 1817 г. обратился к ученому совету университета с предложением о приобретении меридианного круга, который предполагалось заказать у мюнхенского мастера-механика Рейхенбаха. Желание Струве было удовлетворено, инструмент был заказан и финансовые вопросы улажены, но выполнение заказа сильно затянулось. Приобретение этого инструмента оказалось настолько сложным и хлопотливым делом, что возникает вопрос, удалось ли бы обсерватории приобрести его, если бы Струве был менее активен. Так как Рейхенбах долго не отвечал на неоднократные запросы о выполнении заказа, то Струве, в беспокойстве за судьбу инструмента, выхлопотал себе командировку за границу с целью проверить, выполняется ли заказ. Струве полагал, что необходимо лично повлиять на мастера и таким образом ускорить ход работы, или — в случае неудачи — передать заказ другому мастеру Дальнейший ход событий показал, что Струве был прав, полагая, что личное влияние будет иметь решающее значение. Такая активность была характерной чертой Струве, и, по всей вероятности, она и была одной из главных причин успеха его начинаний.

Путешествие Струве за границу в 1820 г. принесло весьма плодотворные результаты. Он и раньше предпринимал подобные путешествия с научной целью, устанавливая связи с такими учеными, как Бессель, Ольберс и другие. В этот раз, руководствуясь конкретным заданием, он отправился в Мюнхен, где находились известные механические и оптические мастерские. Прежде всего там рассеялись сомнения Струве относительно меридианного круга: инструмент был почти готов. Однако понадобилось еще два года для его окончательной отделки, так что в Тарту он был доставлен лишь в 1822 г Когда Струве ознакомился с работами в мастерской точной механики Рейхенбаха, то последний открыл ему секрет разделения круга на градусы, известный только Гауссу, Репсольду и немногим другим. Так же дружески относился к Струве и Иосиф Фраунгофер, познакомив его со своими всемирно известными работами в области прикладной оптики.

Путешествие Струве за границу, кроме приобретения меридианного круга, имело большое значение еще и потому, что Струве удалось познакомиться в Геттингене с таким же меридианным кругом, какой был заказан для Тарту, но уже находившемся в действии. В отчете о своем путешествии Струве писал: «Критический просмотр дневника наблюдений, сделанных при помощи этого инструмента, убедил меня в том, что инструмент является самым совершенным из существующих в настоящее время — как со стороны механических частей, так и по оптическим качествам зрительной трубы, изготовленной в Мюнхене Фраунгофером».

После доставки меридианного круга в Тарту Струве приступил к наблюдениям звезд при помощи этого инструмента, в особенности к точным наблюдениям положений двойных звезд. Прежде всего, разумеется, были исследованы свойства самого меридианного круга (диаметр объектива 11 см, фокусное расстояние 160 см) затем астрономическая рефракция, с целью получить твердую основу для определения точных положений звезд. По поручению Струве особенно много наблюдений произвел астроном-наблюдатель Э. Прейсс (1827—1838) и позднее В. Деллен. Эти наблюдения использовали сам Струве и многие другие исследователи — Отто Струве, Петерс, Лундаль, Шидловский — для определения констант прецессии, нутации и аберрации. При помощи меридианного круга были определены и положения Солнца, Луны и планет, на основе которых впоследствии Струве и Ляпуновым был опубликован труд «Положение Солнца, Луны и планет» [1]

Интересно проследить подробнее, когда и для каких работ был использован в последующую эпоху знаменитый меридианный круг, приобретенный Тартуской обсерваторией благодаря заботам Струве.

При директоре Х. Мэдлере (1840—1865) астроном В. Деллен наблюдал при помощи меридианного круга двойные звезды (1840—1843). При директоре Т. Клаузене (1865—1872) меридианный круг был использован для наблюдений положений планет.

При двух следующих директорах — Л. Шварце (1872—1894) и Г Левицком (1894—1908) — меридианным кругом пользовались для составления международного каталога положений звезд. Эта работа производилась по поручению «Астрономического общества» («Astr. Gesellschaft») и была разделена по зонам между отдельными обсерваториями. Зоной Тартуской обсерватории был определен пояс небесной сферы со склонением 70°—75° Наблюдения длились непрерывно в течение тридцати лет (1870—1900). Работа велась, главным образом, астрономами-наблюдателями обсерватории. Все они были известными учеными, в числе которых встречались такие видные исследователи, как О. Баклунд, позднее директор Пулковской обсерватории, и Л. Струве, внук Василия Яковлевича Струве, впоследствии директор Харьковской обсерватории.

Таким образом, старый меридианный круг Рейхенбаха честно выполнил свою задачу в системе наблюдений Тартуской обсерва-

[1] W. Struve et Liapounow, Positions du soleil, de la lune et des planètes, 1853.

тории. Здесь был выработан классический стиль работы и создана методика наблюдения положений звезд, начатая и развитая В. Я. Струве и его преемниками. Этот стиль работы и эта методика поставили на верный путь фундаментальную астрономию

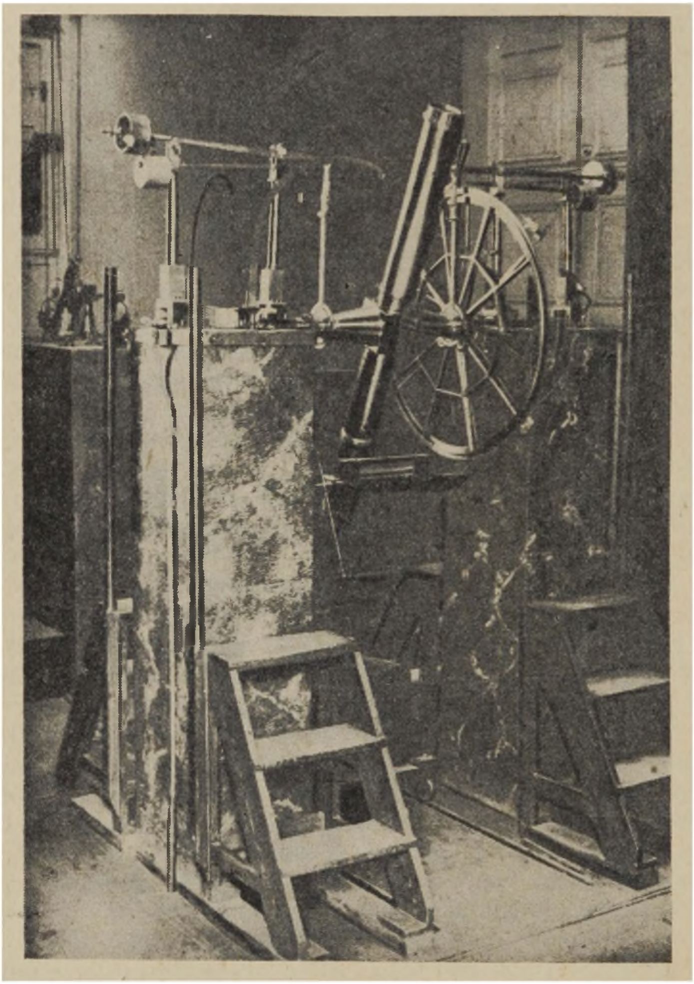


Рис. 2. Меридианный круг.

и астрометрию в России, особенно в Пулкове. Это влияние могло осуществляться тем легче, что во взаимном культурном сотрудничестве Тартуского университета с другими высшими научными учреждениями принимали активное участие В. Я. Струве и его ученики и преемники.

После одиннадцатилетней работы с меридианным кругом Струве в 1833 г. заказал у Репсольда новый меридианный круг.

Хотя Струве и признавал прекрасные качества инструмента Рейхенбаха и считал его художественным произведением техники, однако он видел, что его конструкцию можно сделать еще более совершенной. Обсудив этот вопрос с Репсольдом и предложив свой план усовершенствования конструкции инструмента, Струве и заказал новый меридианный круг, изготовление которого должно было закончиться в 1836 г К сожалению очень серьезные причины заставили Струве взять этот заказ обратно. Обстоятельства сложились так, что изготовление новых, мощных инструментов для оборудования новой Пулковской обсерватории потребовало так много времени и труда, что мастерская Репсольда была не в состоянии выполнить заказ Тартуской обсерватории. Преемники Струве, заведывавшие Тартуской обсерваторией после него, неоднократно делали попытки приобрести новый меридианный круг, удовлетворяющий требованиям своего времени, но из-за ограниченности средств, отпускаемых на оборудование обсерватории, это намерение оставалось неосуществленным. До конца прошлого столетия в Тартуской обсерватории все еще делались попытки использовать меридианный круг Рейхенбаха, но с течением времени выяснилось, что инструмент не может больше конкурировать с новыми инструментами этого типа, и им перестали пользоваться для научных наблюдений. В настоящее время он находится в качестве музейного экспоната в западном зале обсерватории, в помещении, выстроенном в 1950 г. для библиотеки, именно на том месте, через которое проходит дуга великого русского градусного измерения — так называемая «Дуга Струве». На этом месте Струве и другие исследователи в течение 80 лет производили меридианные измерения.

Хотя определение абсолютных положений звезд, или так называемая фундаментальная астрономия в течение последних пятидесяти лет не входит в программу Тартуской обсерватории, однако этого нельзя сказать об астрометрических измерениях вообще. Здесь, также как и в прежние времена, производятся диференциальные измерения положения астероидов и комет, причем особенно часто применяется фотографический метод. Здесь же при помощи 8-дюймового рефрактора Цейсса производились и измерения двойных звезд, исследованием которых в свое время занимался Струве.

Путешествие, которое предпринял Струве в 1820 г. для ознакомления с известными механическими и оптическими мастерскими в Мюнхене, преследовало гораздо более широкие цели, чем приобретение меридианного круга для обсерватории. Несомненно, что уже до этого путешествия у Струве был план постепенно снабдить Тартускую обсерваторию лучшими инструментами и таким путем создать исследовательское учреждение, не только удовлетворяющее требованиям своего времени, но и превышающее эти требования. Эту мысль Струве и выразил в своем отчете о путешествии, представленном университету. В этом отчете он говорил, что после приобретения меридианного круга и инструментов, необходимых для градусного измерения, Тартуская обсерватория была бы оборудована лучше, чем какая либо другая обсерватория в Европе. Струве писал: «Тогда в ней отсутствовала бы лишь одна из таких больших астрономических труб, какие изготовляет Фраунгофер. Приобретение такой астрономической трубы несомненно поставило бы оборудование Тартуской обсерватории на одно из первых мест в Европе, так как из-за высоких цен на эти колоссальные астрономические трубы их могут приобретать лишь немногие обсерватории».

Во время своего заграничного путешествия Струве на практике познакомился с знаменитыми астрономическими трубами, изготовленными Фраунгофером. Они вызвали в нем изумление. «Я видел, — пишет Струве, — такие большие астрономические трубы, каких никогда не изготовляли англичане. Эти инструменты отличались при этом весьма тщательной отделкой и полнотой во всех своих частях. Я убедился в их оптической мощности при непосредственных наблюдениях неба .»

Фраунгофер первым начал изготовлять большие ахроматические линзы для астрономических труб. Это было поворотным пунктом в прикладной оптике и вместе с тем в истории изготовления астрономических труб. Струве сравнил оптическую мощность 9-дюймового рефрактора Фраунгофера с мощностью других астрономических труб Тартуской обсерватории и убедился в том, что рефрактор Фраунгофера оставляет далеко позади все другие инструменты. По сравнению с пассажным инструментом Доллонда он был сильнее в пять раз. По оптической мощности его можно было сравнивать лишь с колоссальными зеркальными рефлекторами Гершеля, но он превосходил последние по ясности и точности изображений, так что, по словам Струве, при помощи рефрактора Фраунгофера «на небе можно было открыть много нового».

Изготовление рефрактора Фраунгофера в то время еще не было закончено, и Струве справедливо полагал, что Тартуской обсерватории едва ли представится другой случай приобрести такой большой рефрактор (диаметр объектива 24 см, фокусное расстояние 450 см). Такой инструмент мог изготовить только Фраунгофер. Затраты времени и денег, связанные с изготовлением инструмента, были чрезвычайно велики и оправдать их могло только служение науке. Фраунгофер мог умереть, и в таком случае, быть может, долгие годы пришлось бы ждать его достойного заместителя в этой области техники. Поэтому, по мнению Струве, было необходимо использовать представляющуюся возможность и без промедления заказать у Фраунгофера 9-дюймовый рефрактор. Это оказалось возможным, несмотря на некоторые денежные затруднения. Рефрактор обошелся обсерватории в 6200 рублей серебром. В течение нескольких лет эта сумма выплачивалась по частям из остатков бюджетных сумм университета.

9 ноября 1824 г. «гигантский телескоп» — как его тогда называли — прибыл в Тарту, проведя в дороге три месяца и проехав около 2000 километров. Рефрактор был упакован по частям в 22 ящика. Ученик Струве, морской офицер Врангель, дол-

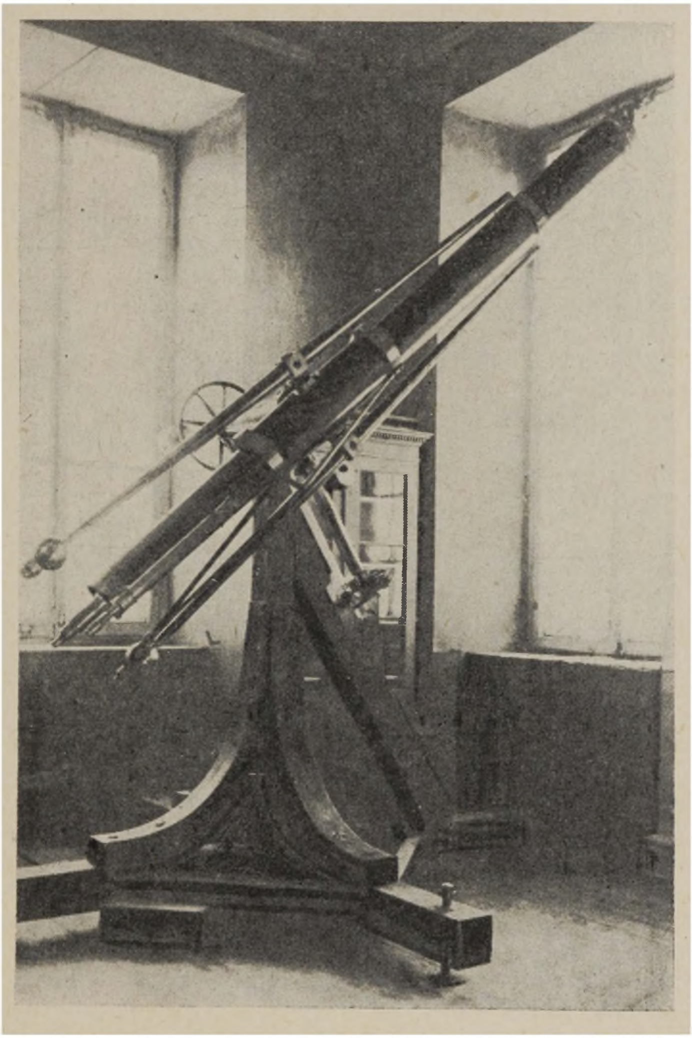


Рис. 3. Знаменитый 9-дюймовый рефрактор.

жен был выехать навстречу, в Поланген, чтобы следить за доставкой дорогого инструмента, но по дороге его экипаж опрокинулся около Валга и он сломал себе ногу. Рефрактор Фраунгофера все же прибыл в Тарту без всяких повреждений и был временно установлен в юго-западном углу западного зала обсерватории. Положение было не совсем подходящее, но лучшего места в обсерватории не было. Звезды можно было наблюдать только через окно, выходящее на юг и на запад до 45° высоты от горизонта.

После прибытия рефрактора несколько ноябрьских дней прошло в волнении и ожидании. Рефрактор был установлен и наблюдения можно было бы начать в любую минуту, но из-за облачной погоды нельзя было бросить ни одного взгляда на звездное небо. До 17 ноября за всю неделю выдался только один час, когда можно было наблюдать ясное небо. Это короткое время было употреблено на первоначальное ознакомление с оптической мощностью рефрактора Фраунгофера. Первое наблюдение не только удовлетворило Струве, но и вызвало его изумление. Так, например, светлая точка на темной, затемненной половине поверхности Луны, видимая в маленькую астрономическую трубу Троутона, оказалась состоящей из шести отдельных частей. Разрешающая сила рефрактора, от которой зависит ясность, точность изображения, была необычайно велика. В этом можно было убедиться, наблюдая двойные звезды при помощи обоих инструментов и сравнивая полученные изображения. Струве высоко оценил не только оптические свойства рефрактора, считая их несравненными, но и совершенство механических частей этого инструмента. Так, зрительная труба рефрактора Фраунгофера была снабжена часовым механизмом, приводящим ее в движение, а также двумя главными осями, скрепленными кругами для измерений, при помощи которых зрительную трубу можно было направлять на объект наблюдений даже днем. В этот вечер Струве с радостным волнением увидел, какое широкое поле деятельности открывается перед ним и какая интересная работа ждет его впереди. Убедившись в отличных качествах инструмента, Струве вскоре представил ректорату отчет, который закончил следующими словами: «Только бы мне самому удалось сколько-нибудь удовлетворить тем требованиям, какие предъявляет наука, а также прекрасный художник, создавший этот выдающийся инструмент, к тому, кто получил возможность пользоваться им   У меня никогда не будет недостатка в энергии и усердии, а несравненное произведение искусства само выполнит свою долю задачи».

Установка рефрактора Фраунгофера в меридианном зале обсерватории была лишь временной, так как не давала возможности в полной мере использовать этот ценный инструмент. Поэтому Струве вскоре представил заявление о необходимости сделать надстройку над каменным сводом башни обсерватории. Эта надстройка должна была представлять собой деревянную башню с вращающейся верхней частью, или куполом, под которым можно было бы установить новый рефрактор. В своем заявлении ректору университета от 30 декабря 1824 г. Струве указывает на одну из главных причин, вызывающих необходимость построить вращающуюся башню как можно скорее. По словам Струве эта причина заключалась в том, что «знаменитая комета Энке в августе 1825 г в первый раз будет видима в Европе, и это обстоятельство побудило английское правительство выстроить две новые обсерватории — на мысе Доброй Надежды и в Новой Голландии. При предстоящем своем появлении комета будет иметь такую слабую светимость, что ее можно будет увидеть только при помощи самых лучших астрономических труб. Ввиду этого обстоятельства было бы весьма желательно к этому времени установить гигантский телескоп на место, так как тогда Тартуская обсерватория, больше чем какая-либо другая, может надеяться снова открыть это своеобразное небесное тело...»

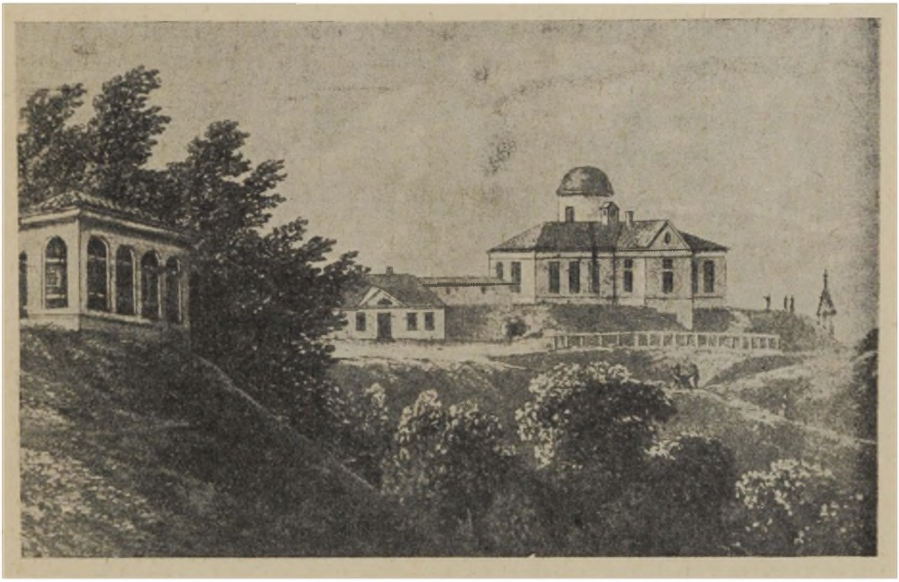


Рис. 4. Первоначальный вид Тартуской астрономической обсерватории с южной стороны в 1821 г., до постройки вращающегося купола над башней.

Постройка новой башни была предпринята, но к августу 1825 г., как этого желал Струве, она все же не была закончена, и наблюдения в куполе начались лишь 27 ноября. Купол башни был построен по плану проф. Паррота и обошелся в 17 504 рубля $32^1/_2$ коп., составлявших по курсу того времени солидную сумму. Строительные работы, которыми руководил Паррот в сотрудничестве со Струве, велись с большими затруднениями, так как в Тарту не было железолитейной мастерской, благодаря чему всю постройку пришлось произвести особым образом. Наконец, она все же была закончена и получила хорошую оценку со стороны официальной приемочной комиссии. Как башня, так и ее механизм, были устроены целесообразно. Вращающуюся часть башни — купол весом более чем в 20 000 фунтов — можно было привести в движение силой, равной лишь 7 фунтам.

Так же хорошо выполняли свое назначение верхние и боковые люки башни, открывающиеся во время наблюдений [1].

Как и можно было предполагать, после прибытия рефрактора Фраунгофера Тартуская обсерватория по своему оборудованию заняла одно из первых мест в мире, — и не только по количеству и качеству инструментов, но и по той работе, которая производилась при помощи этих инструментов. У Струве был теперь инструмент, с которым он мог заняться систематической работой в своей любимой области, т. е. исследованием двойных звезд. Работа

Рис. 5. Вид обсерватории с южной стороны после постройки вращающегося купола над башней в 1825 г.

Струве при помощи знаменитого рефрактора Фраунгофера занимает очень важное место в истории исследования этих объектов. До того Гершель уже открыл большое количество двойных звезд

[1] В этом купольном помещении 9-дюймовый рефрактор Фраунгофера помещался до 1912 г., т. е. в течение почти 90 лет, а затем уступил свое место новому 8-дюймовому рефрактору Цейсса. Но во время войны (1916 г.) рефрактор Цейсса был эвакуирован в далекий тыл. Рефрактор Фраунгофера, оставленный в Тарту, был снова помещен на свое старое место в куполе. После возвращения рефрактора Цейсса и его вторичной установки в купольном помещении рефрактор Фраунгофера был установлен внизу, где при его помощи хотя и при некоторых ограниченных условиях наблюдения посетителям обсерватории показывают астрономические объекты — Луну, планеты, двойные звезды и др. Таким образом, башня Паррота выполняет свое назначение и в настоящее время, но знаменитый рефрактор Фраунгофера больше не употребляется для точных измерений.

и понял их значение в строении вселенной. Струве с большим успехом продолжал эту работу и превзошел достижения своего славного предшественника. Уже в конце 1825 г., когда рефрактор был установлен в башне, наблюдения обнаружили 928 пар звезд, большинство которых было до тех пор неизвестно. При наблюдении двойных звезд применялся очень ценный микрометр, подаренный обсерватории Фраунгофером. При помощи этого микрометра с недостижимой до того времени точностью измерялось положение (дистанция и позиционный угол) менее яркой звезды, т. е. так называемого спутника, по отношению к более яркой звезде. К концу декабря были произведены микрометрические измерения 688 звезд, причем при обработке полученного материала выявились некоторые интересные аспекты.

Для того, чтобы как можно эффективнее использовать знаменитый рефрактор, Струве составил грандиозный план наблюдений двойных звезд и начал работать по этому плану. Он решил исследовать не только уже известные и случайно открытые двойные звезды, но и все звезды до 9-й величины, видимые в искатель рефрактора Фраунгофера и находящиеся в небесной сфере от северного полюса до параллели 15° южного склонения, с целью обнаружить и зафиксировать все звезды, которые окажутся двойными. Работа велась систематически: для общих наблюдений звезд небесная сфера была разделена на пояса (зоны), определялось прямое восхождение и склонение соответственно с точностью до $0^{м},1$ и $1'$ для каждой звезды, которая при увеличении в 214 раз, достигаемом при помощи рефрактора Фраунгофера, оказывалась двойной; затем определялись яркость компонентов звезды, приблизительная дистанция, цвет и т. д., причем не принимались в расчет те звезды, у которых расстояние между компонентами превышало предел $32''$ Таким образом за 320 наблюдательных часов в течение 138 наблюдательных ночей было исследовано более 100 000 звезд.

В результате длившейся два года планомерной работы в 1827 г вышел в свет хорошо известный среди астрономов капитальный труд под заглавием «Новый каталог двойных и кратных звезд» [1] Этот каталог содержит измерения 3112 двойных звезд вместе со сведениями о их яркости и других свойствах. Подавляющее большинство этих звезд было открыто впервые. В введении к этому труду Струве выражает свои первые мысли относительно классификации звезд по степени яркости. Исследования Струве в области двойных звезд принесли ему известность в ученом мире. Петербургская Академия наук избрала его своим почетным членом, а Лондонское астрономическое общество присудило ему большую золотую медаль.

Вслед за работой по каталогизации двойных звезд были предприняты точные измерения этих объектов при помощи микро-

[1] Catalogus novus stellarum duplicium et multiplicium, 1827.

метра, присоединенного к рефрактору Фраунгофера. В результате этой огромной работы, предпринятой впервые в истории астрономии, через 10 лет, в 1837 году, появился второй труд Струве «Микрометрические измерения двойных и кратных звезд в Тартуской обсерватории»[1] Этот труд так же, как и первый, был тоже удостоен медали. В нем содержатся точные измерения взаимных положений компонентов 2714 двойных и кратных звезд, а также оценки их яркости и цвета. По разным причинам некоторые звезды, входившие в «Новый каталог», были теперь исключены, и, наоборот, некоторые другие звезды, дистанции компонентов которых превышали установленный предел, были вписаны в каталог, так как между их компонентами наблюдалась физическая связь. Каждую систему двойных звезд измеряли, по крайней мере, в течение трех наблюдательных ночей, а в особенно сложных случаях и дольше. Таким образом, общее число отдельных измерений превысило 11 000, что в среднем составляло 800 в год. В 1831 г. число измерений достигло рекордной цифры — 2169, которую следует считать очень высокой, принимая во внимание то, что обнаружение каждой звезды требует времени, а ясные ночи в нашем климате бывают редко. Ценным и неотделимым добавлением к этому труду является его вводная часть, которая характеризует автора как исследователя, обладающего критическим подходом к предмету, редкой настойчивостью, основательностью и широким кругозором. В этом введении подробно рассматриваются методы наблюдений, обсуждаются ошибки и достигнутая точность. Кроме того в нем много интересных анализов яркости, цвета и распределения двойных звезд в пространстве и данных относительно поступательного и вращательного движения отдельных звезд.

В общем труд Струве «Микрометрические измерения» является сокровищницей науки, богатствами которой пользуется каждый, кто работает в этой области. Более того, ценность его с течением времени не уменьшается, а растет, так как он представляет собой основную базу для исследования неба представителями будущих, даже очень отдаленных поколений. Одной из характерных черт астрономии является возможность сотрудничества между людьми, которые жили в разные века и даже тысячелетия.

Интересно также отметить, что в этом труде мы уже встречаемся с принципами, изложенными в следующем, более сжатом и меньшем по объему труде Струве «Очерки по звездной астрономии» (1847) Эти очерки являются обзором звездного мира и отчетом Струве и его предшественников об исследованиях в области звездной астрономии. Историческое и научное значение этого труда уже отмечалось нами во введении к настоящей статье. При помощи статистических методов Струве исследовал строение

---

[1] Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae in specula Dorpatensi institutae, 1837.

звездного мира и сделал исторически важный обзор звездной системы, рассматривая вопрос о распределении звезд и о явлении поглощения света в пространстве, на основании которого можно сделать вывод о существовании межзвездного сверхразреженного рассеянного вещества. Эти мысли Струве вызывали некоторые возражения и споры. Его взгляды казались его противникам домыслами, не имеющими фактического обоснования. Лишь спустя сто лет взгляды Струве получили подтверждение, в особенности после того, как существование темного рассеянного вещества, поглощающего излучения звезд, было доказано астрофизическими исследованиями.

Опубликовав два капитальных труда по исследованию двойных звезд, Струве не считал еще свою работу в этой области законченной. По глубоко продуманным и веским мотивам он решил составить каталог точных астрономических координат двойных звезд, уже измеренных им при помощи рефрактора Фраунгофера, измерив их снова меридианным кругом и приурочив к определенному времени (1830 г.). Хотя составление такого каталога требовало большого труда и затраты времени, Струве все же не отказался от своего намерения. Вначале он производил измерения меридианным кругом один (1822—1826), но позднее, когда продолжавшаяся работа по наблюдению двойных звезд стала оставлять слишком мало времени для меридианных измерений, он нашел себе прекрасного помощника в лице ассистента Эрнста Прейсса. Биография последнего отличается своей необычайностью. Струве познакомился с Прейссом случайно. Прейсс был рабочим-ткачом и однажды находился на излечении в больнице. Заведующий больницей спросил у Струве, не найдется ли у него впоследствии какой-нибудь работы для выздоравливающего пациента. Струве, поговорив с Прейссом, заметил, что этот рабочий имеет недюжинные способности и интерес к математике. Струве взял его к себе на работу и сделал из него такого специалиста, что Прейсс впоследствии смог принять участие в кругосветном путешествии капитана Коцебу (1823—1825) в качестве астронома, задачей которого во время этой экспедиции было определение координат географических пунктов. Вернувшись из путешествия, Прейсс в течение 12 лет (1827—1839) работал в качестве астронома-наблюдателя, продолжая измерения посредством меридианного круга. Ранняя смерть Прейсса прервала эту работу на два года, затем ее продолжал ученик Струве, Деллен (1841—1843), который и довел план этих измерений до конца. Проработка данных наблюдений происходила уже в Пулкове, куда Струве переехал в 1839 г. В Пулковской обсерватории наблюдения были дополнены некоторыми данными, полученными на основании наблюдений Саблера, после чего вышла из печати большая монографическая работа: «Средние положения неподвижных звезд, в особенности двойных и кратных, эпохи 1830 г., полученные путем меридианных наблюдений в 1822—43 гг. в Тартуской обсерватории»[1] Этот монументальный труд (в формате фолио) состоит из двух частей. Первая часть представляет собой обширное, подлинно классическое введение, занимающее 254 страницы. Здесь приводятся исследования аберрации, прецессии и нутации, необходимые для определения новых, точных констант, затем даются исследования личных ошибок наблюдателя и веса наблюдений, собственного движения солнечной системы и звезд, и, наконец, статистика двойных звезд. Вторая часть состоит из пяти отдельных каталогов разных периодов, которые в общей сложности приурочены к 1830 г. Данные этих каталогов сравнены с данными ранее вышедших каталогов Брадлея, Лаланда, Пиацци и Грумбридж. Каталог Струве «Средние положения» содержит данные относительно 2874 звезд. В него входят не только двойные, но и фундаментальные и другие звезды, причем небольшое число двойных звезд по некоторым причинам в каталог не включено. Упомянутые три монументальных труда Струве «Новый каталог», «Микрометрические измерения» и «Средние положения» составляют одно целое, содержащее все данные того времени о двойных звездах и являющееся твердой основой для дальнейших исследований в этой области.

Все приведенное выше дает краткий обзор главнейших исследований В. Я. Струве в области астрономии, произведенных им в Тартуской обсерватории. Необходимо упомянуть еще и об измерении параллакса α Лиры (Веги). Все эти труды имеют тесную связь с двумя важными астрономическими инструментами — меридианным кругом и рефрактором Фраунгофера, приобретенными обсерваторией по инициативе и настоянию Струве.

Кроме упомянутых инструментов Струве заботился и о приобретении более мелких астрономических приборов, необходимых для учебной работы и геодезических измерений при триангуляционных работах. Уходя из Тартуской обсерватории, Струве оставил здесь богатое наследство в виде различных инструментов, составляющих 126 номеров на сумму 90 700 рублей. В Тарту находилась наиболее полно оборудованная университетская обсерватория (по сравнению с обсерваториями всех европейских университетов), обладавшая рефрактором Фраунгофера, считавшимся в то время величайшим и совершеннейшим рефрактором в мире. При приобретении научного инвентаря Струве обнаруживал большую находчивость в изыскании денежных рессурсов, не говоря уже об умении правильно оценить качество приобретаемых предметов.

Заслуги Струве очень велики и в деле организации библиотеки при Тартуской обсерватории. Он придавал большое значение

---

[1] Stellarum fixarum, imprimis duplicium et multiplicium positiones mediae pro epocha 1830, deductae ex observationibus meridianis annis 1822 ad 1843 in specula Dorpatensi institutis. Petropoli, 1852.

полной и систематической библиотеке, и впоследствии такая библиотека была организована под его личным руководством в Пулковской обсерватории. Тартуская библиотека уступала в размерах Пулковской, но все же в ней были собраны все важнейшие

Рис. 6. Вид обсерватории с северной стороны.

теоретические работы по астрономии, все главные издания обсерваторий и астрономические журналы. Забота Струве о близкой его сердцу библиотеке Тартуской обсерватории особенно ярко проявилась в 1830 г., когда он вернулся из заграничного путешествия, предпринятого в связи с градусным измерением. За границей он получил в подарок от учреждений и частных лиц много ценных книг. Все эти книги Струве в свою очередь подарил Тартуской обсерватории. В своем отчете от 20 декабря 1830 г Струве пишет: «Хотя все эти книги и подарены лично мне, но я все-таки знаю, что я получил их, благодаря моему посту директора обсерватории. Поэтому я передаю их библиотеке учреждения». Если принять во внимание то обстоятельство, что приобретение книг было в то время связано с большими техническими и другими затруднениями, то пожертвование Струве надо считать особенно ценным. До конца своего пребывания в Тарту Струве старался постоянно пополнять библиотеку обсерватории, и к 1 января 1839 г в ней насчитывалось 715 томов на сумму 6700 рублей. Позднее, после Струве, в составе этой библиотеки появились большие пробелы.

Качество и успех астрономических наблюдений в большой степени зависит от физических условий, в которых работают наблюдатели. Это обстоятельство особенно необходимо учитывать в нашем суровом и изменчивом климате. Постоянная забота Струве о благоустройстве обсерватории выражалась также и в том, что он настойчиво старался устранить один крупный недостаток, связанный с проектом постройки обсерватории. Недостаток состоял в том, что в плане постройки не были предусмотрены квартиры для астрономов. Как известно, наблюдения производятся по ночам, — следовательно работник обсерватории должен явиться на работу вечером, проделав иногда довольно длинный путь от своей квартиры до обсерватории, затем напряженно проработать несколько часов и утомленным опять отправляться домой. Такая работа очень вредно влияет на здоровье работников обсерватории. Струве знал о печальных последствиях такого положения дела и поэтому усиленно настаивал на необходимости построить квартиры для астрономов при обсерватории.

После смерти Гута (1818) Струве, работавший до того времени в качестве астронома-наблюдателя, стал директором обсерватории и ординарным профессором, продолжая в то же время выполнять обязанности астронома-наблюдателя (1818—1827), несмотря на то, что эта должность была ликвидирована. Прежде всего Струве добился того, что при обсерватории была выстроена квартира для директора. Это было вскоре выполнено, и 15 июня 1821 г. Струве переселился туда. В 1827 г. по его предложению была снова учреждена должность астронома-наблюдателя (обсерватора). Квартиры для последнего при обсерватории все еще не было, и Струве начал ходатайствовать о ее постройке, как только представилась к этому возможность. Заодно Струве хлопотал и о других необходимых пристройках к обсерватории — аудитории, отапливаемого помещения для инструментов и механической мастерской. В течение трех лет Струве добивался осуществления своего плана, но так как денег на это не отпускали, то он оставил в стороне вопрос о других пристройках и настаивал только на квартире для астронома-наблюдателя, сделав предложение построить ее за счет штатной суммы обсерватории.

С этой целью Струве путем экономии собрал ко времени своего отъезда из Тарту около 20 000 рублей из остатков годовой сметы учреждения. Уезжая, Струве в последний раз напомнил о необходимости выстроить квартиру для обсерватора и настоятельно просил выполнить его просьбу. К сожалению, и это последнее усилие улучшить положение обсерватории не принесло желаемых результатов. Позже временно исполняющий обязанности директора профессор Зенфф и сменивший Струве директор Мэдлер в течение нескольких лет приводили в своих отчетах аргументы Струве о необходимости построить квартиру для астронома-наблюдателя. Мэдлер даже добавил к собранной сумме около 5000 рублей. Однако в годовом отчете 1844 года почему-то не упоминается больше ни о квартире для обсерватора, ни о собранной на ее постройку сумме, которая так и была навсегда потеряна для обсерватории. Завещание Струве в этом отношении осталось невыполненным.

С другой стороны, следует отметить, что, занимая пост директора, Струве увеличил штатную сумму, отпускаемую на нужды обсерватории с 2000 до 8000 рублей. Такое значительное увеличение произошло в результате ходатайства Струве. В своем заявлении от 30 декабря 1830 г. он обосновывает необходимость повышения штатных сумм также и тем доводом, что деятельность обсерватории должна соответствовать уровню развития науки и директор должен заботиться об опубликовании в печати результатов астрономических наблюдений. Позднее, после ухода Струве, замечается постепенное уменьшение штатной суммы. Так, например, в 1872 г. она составляла всего лишь 1150 рублей. Часто приходилось урезывать даже самые необходимые расходы, не говоря уже о невозможности поддерживания деятельности научного учреждения на должной высоте.

СТРУВЕ — ГЕОДЕЗИСТ

Струве посвятил всю свою жизнь интенсивной деятельности в области астрономии и в области геодезии. Эта деятельность отличалась глубиной и широким размахом как по одной линии, так и по другой. Он был одним из основоположников этих наук и проложил путь для их дальнейшего развития, работая с одинаковым успехом в обеих областях и достигнув в них выдающихся результатов.

Работы по геодезии Струве начал почти в одно время с астрономическими занятиями. Мысль о великом русском градусном измерении по Тартускому меридиану зародилась у Струве уже в 1812 г., когда он был еще студентом. После этого, начиная с 1816 г., он почти непрерывно занимался геодезическими научно-исследовательскими работами до конца своей научной деятельности.

Результаты своих исследований Струве изложил в двух, известных всем астрономам и геодезистам классических трудах: «Описание измерения градуса широты» [1] и «Дуга меридиана 25°20′ между Дунаем и Северным Ледовитым океаном» [2]. В этих трудах излагаются все подробности произведенных работ и дается исторический обзор градусных измерений.

Великое русское градусное измерение было начато и осуществлено Василием Яковлевичем Струве. Основа, на которой оно базировалось, включала два компонента: первый из них представляет собой тригонометрическое измерение, проведенное самим Струве в прибалтийских губерниях, и второй — такое же измерение, проведенное под руководством генерала Теннера в западных губерниях России.

В 1816 г «Лифляндское экономическое общество» предложило Струве — тогдашнему обсерватору Тартуской обсерватории — руководить измерительными и картографическими работами Лифляндии. Цель работ была чисто практической: представить территории отдельных местностей в одной системе измерения. По всей вероятности, сам Струве и был фактическим инициатором этого предприятия. В дальнейшие годы Струве летом руководил измерениями, а в остальное время занимался учебной работой и астрономическими исследованиями. Эти геодезические работы стали основой научного предприятия и в то же время являлись учебно-методическим занятием. Струве рекомендовал студентам, изучавшим геодезию, пользоваться возможностью практически познакомиться с геодезическими работами, производившимися под его руководством. По заявлениям, которые Струве представлял университету, видно, какой живой интерес вызывала в нем геодезия, несмотря на то, что в этой области он был самоучкой. Этот интерес пробудился в нем уже тогда, когда он только что начал заниматься математическими науками. Можно предполагать, что картографирование реки Эмайыги, предпринятое обсерватором Паукером в 1808 г., дало ему некоторый опыт и послужило толчком к дальнейшей деятельности в этом направлении, но достижения Струве вскоре превзошли все сделанное ранее в области геодезии как по широте планов, так и по их выполнению.

Тригонометрическое измерение и другие полевые работы были закончены весной 1819 г. измерением базы на льду озера Выртсъярв. Однако составление карты потребовало продолжительной дальнейшей работы, так как было необходимо заполнить много пробелов в области топографической картографии. Карта появилась лишь в 1839 году.

Как только были закончены картографические работы в прибалтийских губерниях, Струве приступил к проведению великого

---

[1] Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, 1831.

[2] Arc du Méridien de 25°20′ entre le Danube et la mer Glaciale, 1857.

градусного измерения. Первый этап этой работы по своим размерам был довольно скромным начинанием. Частично использовав уже существующие данные, Струве измерил дугу Тартуского меридиана длиной в 3°35′ от Суурсааре до Екабпилс. Это было так называемое Прибалтийское градусное измерение, законченное поздней осенью 1827 г. Дополнительные же наблюдения продолжались в обсерватории и в некоторых пунктах триангуляционной сети. Все эти работы вместе с вычислениями производились с необычайной быстротой, и в 1831 г. уже вышли два больших тома (в формате фолио) классического труда Струве «Описание измерения градуса широты».

Измерительные работы Струве отличаются очень большой точностью, достигнутой в результате его необычайной старательности, личного умения наблюдать и тех методов наблюдения, которые он применял. Большую часть астрономо-геодезических работ и сопутствующих им вычислений Струве выполнял сам, и только при полевых работах пользовался помощью одного или нескольких подсобных работников. В числе помощников Струве был Паукер, сделавший небольшое количество наблюдений самостоятельно, а также ученики Струве, контингент которых составляли студенты, питомцы университета и прикомандированные к университету моряки. Среди его сменявшихся помощников встречаются такие имена, как Прейсс, Лемм, Федоров, Деливрон, Соколов и другие. Таким образом, идея градусного измерения исходила от Струве, т. е. из Тартуского университета, и работы осуществлялись силами университета. Тартуский же университет и финансировал эти работы, за исключением сумм, предназначенных на покупку геодезических инструментов. Следовательно, градусное измерение можно рассматривать как предприятие Тартуского университета.

После окончания Прибалтийского градусного измерения Струве остался при своем первоначальном намерении продолжать его в южном и северном направлениях. Для этого он вступил в переговоры с генералом Теннером, производившим триангуляционные измерения в западных губерниях России, с целью использовать пункты этой триангуляционной сети для градусного измерения в южном направлении. В своем плане работ, связанных с этим измерением, Струве пишет: «Желательно, чтобы руководство работами было доверено астроному Тартуской обсерватории, так как последняя располагает всеми необходимыми для работы инструментами, и притом работа будет производиться на тех же принципах, что и при проведении Прибалтийского градусного измерения, в результате чего будет достигнуто необходимое единство измерений».

Фактическими производителями измерительных работ по предложению Струве были назначены армейские офицеры, которые во время зимних перерывов в работе изучали у Струве астрономию и геодезию, участвуя при этом и в вычислительных работах.

Затем, в сотрудничестве с геодезистами Финляндии и Скандинавии, Струве продолжал градусное измерение в северном направлении до Северного Ледовитого океана. Таким образом, под руководством Струве, из скромной геодезической работы с течением времени выросло грандиозное предприятие — великое русское градусное измерение по Тартускому меридиану от Северного Ледовитого океана до устья реки Дуная. Была измерена дуга длиной в 25°20′ широты или около 2800 километров. Это измерение можно было бы продолжать дальше в южном направлении, чтобы достигнуть наибольшего протяжения измерения градуса широты, какое вообще возможно на земном шаре. Мечтой Струве и было продолжение великого градусного измерения по крайней мере до острова Крита на Средиземном море. Предварительные работы для осуществления этого плана стали производиться на месте лишь в 1867 г. после смерти Струве (1864), причем было обнаружено, что эта работа могла бы вестись в условиях, вполне подходящих для геодезических измерений. Несмотря на это, намерение Струве пока еще не осуществлено.

В последние годы жизни Струве работа по градусному измерению приняла еще более широкие размеры и стала еще более международной, так как в то время по инициативе Струве было предпринято градусное измерение и по параллели земного шара на 52° широты, длиной в 69 градусов долготы или 3500 километров. Но сам Струве не дожил до окончания этих измерений.

Таким образом Тартуский университет был исходным пунктом грандиозного предприятия — знаменитого градусного измерения, начатого по инициативе Струве и осуществленного под его руководством, с целью не только создать твердую основу для географического картографирования, но и определить величину и более точную форму нашей планеты.

НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ СТРУВЕ И ЕГО УЧЕНИКИ

Так же как в научном творчестве, Струве имеет большие заслуги и в воспитательно-педагогической работе. Его талантливость и основательная математическая подготовка, ясное изложение научных истин и товарищески заботливое отношение к студентам заслужили общее признание и обеспечили успех его деятельности. Струве владел своим предметом как с теоретической, так и с практической стороны. Так как до 1819 года кафедра астрономии еще не была отделена от кафедры математики, то Струве в качестве экстраординарного профессора, кроме астрономических дисциплин, преподавал и предметы чисто математические. Известно, что уже тогда Струве сразу же поднял на должную научную высоту преподавание этих предметов в Тартуском университете, которое до тех пор находилось в элементарном состоянии.

У Струве было много способных учеников, многие из которых впоследствии получили известность как выдающиеся ученые и педагоги. Однако лекции Струве составляли лишь небольшую часть всей его педагогической деятельности. В Тартуский университет приезжали питомцы других русских университетов для подготовки к профессуре, так как здесь в течение продолжительного времени существовал так называемый Профессорский институт. Каковы бы ни были мотивы основания этого института, остается фактом то, что в нем под руководством Струве и профессора математики Бартельса проходили дополнительную научную подготовку многие известные представители точных наук, например. Котельников, Савич, Лапшин и др. Эти ученые, получив здесь основательные научные знания, принимали участие в создании тесной связи между Тартуским университетом и другими русскими университетами. Струве обучал также и тех армейских и флотских офицеров, которых правительство командировало в Тарту для того, чтобы они под руководством Струве усваивали необходимые для их специальности знания по астрономии и геодезии. Многие из этих учеников Струве впоследствии были известны как хорошие специалисты. Кроме них, в Тартуский университет по особому распоряжению посылали учиться воспитанников Петербургского воспитательного дома, у которых, однако, не было университетского образования и поэтому их работы не были в такой мере самостоятельными, как у воспитанников Профессорского института. Несмотря на это, один из таких учеников, также присланный из воспитательного дома, изучив под руководством Струве астрономию и геодезию, стал его помощником. Это был Василий Федоров, впоследствии профессор астрономии Киевского университета.

Струве обучал не только теоретически. Предпринимая важные работы по астрономии и геодезии, он выбирал наиболее прилежных учеников и привлекал их к участию в работах, учитывая интересы и способности каждого из них. При этом Струве обладал особым талантом выбирать людей, действительно любящих науку, из которых впоследствии выходили хорошие специалисты и научные работники, приносившие пользу народу и родине.

В педагогической деятельности Струве следует отметить еще одну особенно ценную черту, заключавшуюся в умении руководить научной работой так, чтобы она была плодотворной. Педагогическая работа Струве не ограничивалась подготовкой хороших специалистов-практиков. Для каждого из них он умел подыскать практическое занятие или научное исследование, чтобы молодой ученый сразу мог применить свои знания к делу. Таким образом ученики Струве по его указаниям и в соответствии с его идеями занимались научными исследованиями и принимали участие в важных общегосударственных предприятиях, имевших большое общественное значение, и поэтому педагогическую работу Струве необходимо расценивать как научно-педагогическую и общественно-культурную деятельность. Эта деятельность продолжалась и после ухода Струве из Тарту на более широкое научное поприще — в Пулково.

Для дополнения характеристики деятельности Струве приведем краткий обзор тех предприятий, в которых участвовали его ученики и которые имели широкое научное и общественное значение [1]

Карл Кнорре. Сын первого астронома-наблюдателя Тартуской обсерватории Эрнста Кнорре, родился в 1802 г. По рекомендации Струве был назначен астрономом Черноморского флота и директором основанной в Николаеве астрономической обсерватории. Его деятельность в научной и учебной области, так же как и при выполнении особых обязанностей, заслужила полное одобрение начальника флота. Астрономические наблюдения Кнорре были опубликованы в изданиях Тартуской обсерватории (томы II и III), а также в других периодических изданиях.

Выше мы уже упоминали о талантливом и трудолюбивом астрономе-практике Эрнсте Прейссе, о его ценных работах по определению положений двойных звезд при помощи меридианного круга, а также о его кругосветном путешествии. Как известно, в первой трети прошлого столетия русский флот предпринимал далекие морские путешествия, отчасти имевшие целью исследование новых и малоисследованных земель. Так, на парусном судне «Предприятие», отправившемся в кругосветное путешествие под начальством капитана Коцебу (путешествие продолжалось с 1823 по 1826 гг.), находились многие естествоиспытатели во главе с тартуским профессором Эшшольц. В их числе были и студенты Тартуского университета, впоследствии известные ученые — астроном Прейсс, физик Ленц и минералог Гофман. Прейсс принимал участие в экспедиции Коцебу по предложению адмирала Крузенштерна и рекомендации Струве. В своей рекомендации Струве говорит, что в лице Прейсса соединены «талант наблюдателя, опытность механика и большое рвение». Во время путешествия было сделано много ценных наблюдений. Результаты наблюдений Прейсса, отредактированные самим Струве, были опубликованы в Тарту под заглавием «Астрономические наблюдения во время кругосветного путешествия».

Для определения географической долготы Прейсс первым применил так называемый метод кульминации Луны, который был введен в употребление англичанином Фостером на пять месяцев позднее, во время исследовательской экспедиции капитана Пэрри.

Из числа тех учеников Струве, жизненный путь которых отличается своей необычайностью, следует назвать бывшего воспитанника Петербургского воспитательного дома Василия Федорова (1802—1855), имя которого уже упоминалось выше. Неко-

---

[1] Более подробные данные по этому вопросу можно найти в труде Г Левицкого «Астрономы Юрьевского университета», 1899.

торых воспитанников, когда они достигали зрелого возраста, воспитательный дом направлял в учебные заведения для получения образования, соответствующего их способностям и интересам. Таким образом в Тартуский университет попал и Федоров вместе с несколькими другими молодыми людьми. Федоров и Степанов избрали своей специальностью математические науки, и Федоров, тогда уже взрослый юноша, в особенности заинтересовался астрономией. Струве высоко оценил его способности и в январе 1824 г. стал ходатайствовать о том, чтобы Федоров был назначен его помощником при проведении астрономических наблюдений. Несмотря на то, что ответ на это ходатайство задержался по некоторым причинам, зависевшим не от университета, а от протектората воспитательного дома, Федоров фактически уже помогал своему учителю при астрономических наблюдениях. В своих отчетах Струве неоднократно подтверждал, что Федоров все больше оправдывает возлагаемые на него надежды и что из него может выйти теоретически и практически подготовленный астроном, который впоследствии будет приносить большую пользу и обсерватории и геодезическим предприятиям по градусному измерению.

В 1828 г. студенты Федоров и Степанов окончили университет. После этого Степанов был направлен для усовершенствования в своей специальности в Берлинский и Лейпцигский университеты, Федорову же предложили принять участие в качестве астронома в научно-исследовательской экспедиции, организованной проф. Парротом (младшим), и он направляется на гору Арарат. Предприятие было поддержано правительством, и Федорову была выдана денежная сумма, необходимая для покупки инструментов и других вещей. Научная экспедиция продолжалась около года, до 1 марта 1830 г. Результаты научных исследований были изложены в труде Паррота «Путешествие на Арарат» [1] Во второй части этого труда опубликованы и результаты астрономических и геодезических измерений, произведенных Федоровым.

Как Паррот, так и Струве были довольны работой Федорова. Струве обратился к ректору (1830) с просьбой о том, чтобы Федоров был оставлен при университете еще на год для научной работы, — главным образом для вычислений и окончательной разработки данных астрономических наблюдений и тригонометрических измерений, произведенных во время путешествия на Арарат. После окончания этой работы Федоров, как и многие молодые ученые того времени, стал мечтать о поездке за границу вместе со своими товарищами и о поступлении там в университет для усовершенствования в специальности.

Однако обстоятельства сложились так, что Федорову пришлось приступить к выполнению весьма ответственной задачи в своем отечестве. Эту задачу поставил перед ним Струве, предло-

[1] F Parrot, Reise zum Ararat, 1834.

жив ему заняться определением координат многих географических пунктов в западной Сибири. Вначале Федоров испытывал некоторые сомнения и просил времени для того, чтобы обдумать это предложение, но вскоре решил смело приступить к выполнению работы, придя к убеждению, что таким путем он лучше всего сможет отблагодарить свою родину за все благодеяния, оказанные ему, начиная с его детства.

Программа географической экспедиции, составленная Струве и геодезистом генерального штаба Шубертом, состояла в определении географического положения 48 пунктов на территории западной Сибири между 50 и 60 градусом широты; географическую долготу 12 главных пунктов надо было определить при помощи метода кульминации Луны, а положение остальных пунктов по отношению к соответствующим главным пунктам — при помощи транспортирования хронометров. Эта работа имела большое значение, так как в прежних географических картах Азиатской части России встречалось много крупных ошибок, которые нужно было исправить. Так, например, между местом впадения реки Лепши в озеро Балхаш, определенным по точным измерениям Федорова, и тем местом, которое было отмечено на старой карте, оказалась разница в 2 градуса, что составляет около 200 км на поверхности Земли. В одном из отчетов Тартуской обсерватории Струве указывает также, что по измерениям Федорова северная часть реки Енисея находится приблизительно на три градуса западнее, чем отмечено на лучших прежних картах. Кроме астрономических наблюдений, были предусмотрены и тригонометрические измерения некоторых пунктов, а также измерения высоты гор. При измерениях последнего типа должен был применяться барометр. Академия наук поручила Федорову определить во многих пунктах также и элементы магнитного поля. Для всех этих измерений было необходимо большое количество инструментов, перевозка и хранение которых, особенно в условиях путешествия по обширным территориям Сибири, требовали больших забот и внимания.

До отправления в далекое и продолжительное путешествие (в июне 1832 г.) Федоров провел в Тарту ряд пробных измерений при помощи инструментов, предназначенных для экспедиции. Близкие связи Сибирской экспедиции с Тарту подтверждаются тем обстоятельством, что Струве все это время внимательно следил за деятельностью экспедиции и каждый раз представлял о ней отдельный отчет в виде приложения к отчету Тартуской обсерватории.

Пространства Сибири, по которым проходила экспедиция, были так обширны, что Федоров не смог закончить намеченную в программе работу к назначенному сроку, тем более, что во время путешествия возникали и другие трудности и случайные помехи. Федорову пришлось работать в непривычном для него суровом климате Сибири, с его коротким летом и сильными морозами. Только здоровый, энергичный молодой человек мог справиться со всеми этими трудностями. Экспедиция закончилась в ноябре 1837 г., и Федоров, после пятилетнего отсутствия вернулся в Тарту. Результаты его исследований были очень значительны. Струве высоко оценил усердие Федорова и другие его личные качества, проявившиеся при проведении измерительных работ в Сибири. Он называл молодого ученого «неутомимым путешественником» и докладывал об его успехах высшим властям, которым с тех пор также стало известно имя Федорова. Прибыв в Тарту, Федоров написал подробный отчет о своем путешествии, который появился в печати под редакцией Струве в 1838 г.[1] После этого Федоров приступил к обработке своих исследований, которые он предполагал издать в двух томах. Но, к сожалению, это намерение не осуществилось, так как власти почему-то сильно спешили с определением Федорова «на место». Уже и раньше неоднократно возбуждался вопрос о его немедленном возвращении из Сибири, а теперь, когда он вернулся в Тарту, его сразу же назначили профессором астрономии в Киевский университет (1838); позднее он стал там деканом (1840) проректором (1841) и, наконец, ректором (1843). В Киеве Федоров был так занят педагогической и административной работой, а также постройкой обсерватории, что для обработки своих исследований ему не хватало времени. Как отмечает проф. Левицкий, Струве поручил обработку научных материалов Федорова своему ученику, кандидату Харьковского университета Шидловскому. Вычисления были закончены в 1845 г., но работа не была опубликована в печати, и, кроме того, она не охватывала всех исследований Федорова.

Один из учеников Струве проявлял особенный интерес к механике астрономических точных инструментов. Это был Уно Порт. Он поступил в университет, чтобы приобрести необходимые знания и стать мастером в интересующей его области. Благодаря своей проницательности Струве понял это и постарался сделать из Порта незаменимого работника обсерватории. В 1835 г., когда уже шли строительные работы Пулковской обсерватории и Струве было поручено заказать за границей астрономические инструменты, он послал в мюнхенские мастерские Порта, который должен был следить за изготовлением инструментов и сообщать Струве о всех подробностях работы. Струве и Порт выполнили свои обязанности с таким чувством ответственности, что впоследствии Порту был поручен надзор за изготовлением рефрактора для Казанской обсерватории, заказанного через посредство Струве. Порт же наблюдал и за доставкой этого инструмента в Петербург. Из истории Пулковской обсерватории известно, что Порт был там первым механиком после учреждения

[1] W. Fedorows vorläufiger Bericht über die von ihm in den Jahren 1832 bis 1837.. in West-Sibirien ausgeführten astronomisch-geographischen Arbeiten, Herausgegeben von F G. W. Struve. St. Petersburg, 1838.

обсерватории. Он контролировал состояние инструментов и сам изготовлял некоторые приборы для Пулковской обсерватории и для обсерваторий университетов. Таким образом, можно отметить, что, подготовив Порта, Струве оказал большую услугу отечественной промышленности, особенно в области развития производства астрономических инструментов.

Из тех учеников Струве, которые были воспитанниками учрежденного при Тартуском университете Профессорского института, следует особенно выделить А. Савича и Г Саблера.

А. Савич и Г Саблер работали с одинаковым успехом как в области теории, так и в области практических занятий. Савич был кандидат наук Московского университета, а Саблер — Тартуского. Они поступили в Профессорский институт приблизительно в одно время, в начале 1834 г. Известно, что в дальнейшем Алексей Николаевич Савич (1810—1883) был профессором астрономии, обладавшим педагогическими способностями. В продолжении 40 лет он читал лекции в Петербургском университете, заменяя Вишневского. После смерти Струве он был избран в члены Академии наук. Заслуги Савича как ученого были особенно значительны в области применения практической астрономии для определения географических координат и в области применения теории вероятностей при обработке наблюдений. Что касается Саблера, то он впоследствии успешно работал в Пулковской обсерватории в области фундаментальных наблюдений. Стремясь стать учеными, Савич и Саблер достигли в Тарту больших успехов в работе и сделали много научных наблюдений. В 1835 г появилась знаменитая комета Галлея, что дало им возможность овладеть техникой наблюдения комет. Оба молодых астронома фактически принимали участие в этих наблюдениях, работая под руководством Струве: Савич ассистировал Струве при наблюдениях кометы у большого рефрактора, а Саблер определял положения кометы при помощи пассажного инструмента.

В следующем году (1836) Струве предложил своим ученикам разрешить трудную и интересную задачу в области практической астрономии и геодезии, а именно — определить разницу уровней или высот Черного и Каспийского морей. Проблема была актуальной и по ее поводу часто происходили дискуссии. План работы был составлен Струве и одобрен Академией наук. Так как в плане предусматривалось, что для проведения измерений нужны три человека, то третьим наблюдателем был назначен ученик Струве Фусс. Перед путешествием под руководством Струве были проведены пробные измерения в окрестностях Тарту. Вслед за этим экспедиция летом 1836 г приступила к нивелировочным работам на северном Кавказе. Работы длились около полутора лет, а затем экспедиция в феврале 1838 г. вернулась в Тарту, где сразу же началась обработка данных. В результате исследований оказалось, что поверхность Каспийского моря лежит на 83,67 (английских) фута или на 25,50 метра ниже поверхности Черного моря, с возможной ошибкой 1,25 фута или 0,38 метра. Описание всех измерений, составленное Саблером, было напечатано по поручению Академии наук под руководством Струве [1]

Проработка частей собранного материала дала участникам экспедиции возможность написать докторские диссертации [2], которые они впоследствии защитили в Тарту. После защиты своей диссертации Савич прочитал в Тартуском университете пробную вводную лекцию на русском языке на тему: «О физических свойствах комет».

Упомянутый 1839 год имел поворотное значение в истории кафедры астрономии Тартуского университета и в истории Тартуской обсерватории. Профессор астрономии и директор обсерватории В. Струве после тридцатилетней самоотверженной работы в Тарту оставил Тартускую обсерваторию и занял весьма ответственное место директора спроектированной им Пулковской обсерватории. Приблизительно в это же время из рядов работников Тартуской обсерватории ушли и наиболее опытные помощники Струве. Савич был назначен профессором астрономии Петербургского университета, где в дальнейшем и развивалась его продолжительная и плодотворная научно-педагогическая деятельность. Саблер перешел на работу в Пулковскую обсерваторию. Умер обсерватор Прейсс.

Из других молодых учеников Струве, которые лишь в течение непродолжительного времени работали при нем в Тарту, но уже успели обнаружить блестящие способности, следует назвать сына В. Струве — Отто Струве и В. Деллена. Имея таких руководителей, как В. Струве и профессор математики Бартельс, они с необычайной быстротой усвоили основы наук и вскоре приступили к научным работам. В тот период, когда в Пулкове шла постройка обсерватории, В. Струве часто ездил туда. В его отсутствие микрометрические измерения двойных звезд производил ассистент О. Струве, которому едва исполнилось двадцать лет. После отъезда О. Струве вместе с отцом в Пулково, работу в Тарту продолжал ассистент В. Деллен. После смерти Прейсса наблюдения при помощи меридианного круга не производились до тех пор, пока В. Деллен по совету Струве не начал измерять при помощи меридианного круга положения двойных звезд для большого каталога Струве. По первоначалному плану измерения должны были продолжаться только один год. Однако и после трех лет (1841—1844) напряженной работы они еще не были

[1] Beschreibung der zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und dem Caspischen Meere . . von G. Fuss, A. Sawitsch und G. Sabler ausgeführten Messungen. Petersburg, 1849.

[2] Диссертации были следующие: A. Sawitsch, Über die Höhe des Caspischen Meeres und der Hauptspitzen der Caucasischen Gebirge. Dorpat, 1839; G. Sabler, Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung und über die Gesetze der Veränderung derselben, Dorpat, 1839.

доведены до конца. В этот период В. Деллен написал кандидатскую диссертацию на очень интересную физическую тему [1] и после успешной защиты этой диссертации перешел на работу в Пулковскую обсерваторию, которой и была посвящена большая часть его жизни.

В последние годы пребывания Струве в Тарту в числе его учеников был и кандидат Харьковского университета А. П. Шид-

Рис. 7. Фотокопия заглавного листа большого труда В. Я. Струве «Описание Пулковской обсерватории».

ловский, защищавший в Тарту в 1841 г. свою диссертацию [2], тема которой без сомнения была предложена ему Василием Яковлевичем Струве.

Кроме всей этой разнообразной и чрезвычайно плодотворной деятельности, Струве в последние годы пребывания в Тарту

---

[1] Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, betrachtet als ein Mittel, eine Entscheidung zu erlangen zwischen der Emanations- und Vibrations-Theorie.

[2] Bestimmung der Constante der Nutation aus den geraden Aufsteigungen von α Ursae Minoris.

отдавал много сил составлению проекта Пулковской обсерватории, постройке этой обсерватории и снабжению ее инструментами. Уже в 1827 г. Петербургская Академия наук имела намерение выстроить вне города новую астрономическую обсерваторию, для которой было подыскано подходящее место вблизи поселка Пулково, в двух десятках километров к югу от Петербурга. Строительные работы начались, и в 1834 г. Струве было предложено занять место директора строящейся Пулковской обсерватории, причем ему вначале было разрешено продолжать работу и в Тартуском университете. В течение пяти лет (1834—1839) Струве пришлось делить свои силы между Тартуской и Пулковской обсерваториями. Струве составил строго продуманную программу работы Пулковской обсерватории и определил состав инструментов, большинство которых впервые вводилось в употребление. Эта напряженная работа Струве оказала большое влияние на рост научного значения Пулковской обсерватории и вместе с тем на дальнейшее развитие русской науки.

После того как организация Пулковской обсерватории была закончена, Струве навсегда покинул Тарту, где он работал 31 год, и переехал в Пулково, чтобы приступить к ответственной новой работе.

В своем прощальном письме ректорату Тартуского университета от 8 марта 1839 г. Струве выражал свою искреннюю благодарность ректорату и характеризовал свои отношения с университетом следующими словами: «. Когда я начинал свою работу, постройка обсерватории только что закончилась, и ее оборудование имело недостатки. Поэтому я был вынужден часто обращаться к ректорату с просьбой об усовершенствовании оборудования. Каждая моя просьба находила поддержку. И теперь Тартуская обсерватория получила известность и признание; она так богато оборудована в части инвентаря и инструментов, как немногие обсерватории в мире».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривая деятельность Василия Яковлевича Струве в Тартуском университете в первой трети прошлого столетия, мы видим широту, многосторонность и интенсивность этой деятельности. Во всех его начинаниях отражены черты его характера: выдержка, усидчивость, предусмотрительность, организаторские способности и склонность к общественной работе. Приступив к научно-исследовательской работе в очень скромных условиях Тарту, Струве сделал Тартускую обсерваторию первоклассным научным учреждением и вместе со своими сотрудниками и помощниками произвел здесь целый ряд опередивших свое время фундаментальных исследований в области астрономии и геодезии. Его работы, кроме их прогрессивно-научной и идеологической ценности, имеют также большое практическое и прикладное значение.

Кроме научно-исследовательской работы, Струве имел выдающиеся достижения и в области учебно-педагогической деятельности в Тартуском университете. Выступив в качестве преподавателя астрономии, геодезии и других математических дисциплин, Струве высоко поднял научно-педагогический уровень учебной работы, так что его лекции составили новую эпоху в преподавании математических предметов. Но работа в университете являлась лишь одной стороной его педагогической деятельности. Кроме университетских лекций, он читал специальные курсы офицерам армии и флота и руководил занятиями воспитанников Профессорского института. Струве умел привлекать и воодушевлять молодежь. Многие его ученики стали его помощниками и сотрудниками, во многих он пробудил интерес к самостоятельной научной деятельности. Эти люди впоследствии выполнили целый ряд астрономических и геодезических предприятий, возникших по мысли и указанию Струве и имевших широкое общегосударственное значение. Таким образом, в результате научно-педагогической деятельности Струве создалась и организовалась школа астрономов и геодезистов, которая постепенно распространялась по всем другим русским университетам и научным учреждениям. В. Я. Струве тесно связал Тартуский университет с другими очагами науки в России. В его лице мы имеем одного из выдающихся представителей передовых ученых дореволюционной России, на образцовые труды которых опирается мощное развитие современного советского естествознания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов Вельяминов, Б. А., История астрономии в России в XIX столетии. Труды Института истории естествознания АН СССР, т. II, 1948.
2. Левицкий, Г В., Астрономы Юрьевского университета. Юрьев, 1899.
3. Левицкий, Г В., Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Юрьевского, бывшего Дерптского, университета за сто лет его существования (1802—1902). Юрьев, 1902, т. I, стр. 303—315.
4. Мартинсон, Э., Исторические связи Тартуского (б. Юрьевского) университета с русской наукой. Таллин, 1951.
5. Перель, Ю. Г., Выдающиеся русские астрономы. М.—Л., 1951.
6. Петухов, Е. В., Императорский Юрьевский, бывший Дерптский, университет за сто лет его существования (1802—1902), т. I: Первый и второй периоды (1802—1865). Исторический очерк. Юрьев, 1902, В. Я. Струве, стр. 179, 268, 407
7. Сто лет Пулковской обсерватории. АН СССР, М.—Л., 1945.
8. Argelander, Friedrich Georg Wilhelm Struve. Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft, 1. Jahrgang, Erstes Heft, 1866.
9. Newcomb Engelmann, Populäre Astronomie, 6. Auflage, 1921, S. 609—610; 823—824.
10. Oettingen, A., Gedächtnisrede zur Feier des hundertjährigen Geburtstages von Wilhelm Struve. Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft, 29. Jahrgang, Erstes Heft, 1894.

11. P a u c k e r, G., Vermessung des Embachs, seines Laufes und seiner Profile, 1855.
12. S t r u v e, F G. W., Études d'astronomie stellaire. St.-Pétersbourg, 1847.
13. S t r u v e, F. G. W., Description de l'Observatoire Astronomique Central de Poulkova. St.-Pétersbourg, 1845.
14. S t r u v e, F G. W., Beschreibung der . Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands. Dorpat, 1831.
15. S t r u v e, F G. W., Arc du Méridien de 25°20′ entre le Danube et la mer Glaciale mesuré depuis 1816 jusqu'en 1856 sous la direction de C. de Tenner, Chr. Hansteen, N. H. Selander, F G. W. Struve. Ouvrage composé sur les différents matériaux et rédigé par F G. W. Struve, 2 tomes. St.-Pétersbourg, 1857.
16. S t r u v e, F G. W., Resultate der in den Jahren 1816 bis 1819 ausgeführten astronomisch-trigonometrischen Vermessung Livlands. Aus den „Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences, Sc. math. T. IV" besonders abgedruckt. Petersburg, 1844.

AKADEEMIK W. STRUVE JA TEMA TEGEVUS TARTU ÜLIKOOLIS

Prof. T. Rootsmäe

Astronoomia ja geofüüsika kateeder

Resümee

XVIII sajandi lõpus ja XIX sajandi alguses arenes võimsalt kapitalistlik tööstus ja kaubandus, mis nõudis maa- ja mereteede kiireimat vallutamist. Püüd avastada ja uurida tundmatuid maid muutus järjest elavamaks. See avaldas tugevat mõju astronoomia arengule, eriti tema rakenduslikus osas, mille eesmärgiks on välja arendada geograafiliste punktide asukohtade ja täpse aja määramise meetodid. Astronoomia rakenduslik osa määrab peamiselt tema praktilise väärtuse, kuid peale selle on astronoomial suur filosoofiline tähtsus, mis seisab meie maailmavaate põhjendamises ja loodusnähtuste ning nende arenemise seaduspärasuste avastamises.

Vastavalt elu praktilistele nõuetele organiseeriti meie maal möödunud sajandi esimesel poolel rida observatooriume, nende hulgas ka Pulkovo esmajärguline tähetorn. Selle ettevõtte üheks algatajaks oli kuulus astronoom W Struve (1793—1864), kes oli hiljem ka Pulkovo observatooriumi esimeseks direktoriks (1839—1862).

Struve alustas oma kuulsat ja viljakat teaduslikku tegevust Tartu tähetornis, mis ehitati 1810. aastal, mõni aasta pärast Tartu ülikooli asutamist (1802)

Struve põlvnes filoloogide perekonnast ja omandas ka ise Tartu ülikoolis filoloogilise hariduse, lõpetades õpingud sel alal kuldmedaliga. Peatselt aga hakkas ta tegelema füüsikalis-matemaatiliste teadustega ning valis oma erialaks astronoomia. Lõpetanud 1812. aastal Tartu ülikooli füüsika-matemaatika fakulteedi, asus Struve kohe intensiivselt uurimistöödele, kaitstes juba järgmisel aastal oma doktoridissertatsiooni teemal „Tartu Tähetorni geograafilisest asendist" Pärast seda hakkas Struve töötama observatooriumis astronoomina-vaatlejana ja alates 1818. aastast juba astronoomina-professorina ning Tartu ülikooli Tähetorni direktorina. Sellel alal tegutses Struve kuni oma üleminekuni Pulkovosse 1839. aastal.

Et Tartu Observatoorium oli tol ajal puudulikult varustatud astronoomiliste instrumentidega, siis võttis Struve antud olukorra parandamiseks tarvitusele otsustavad abinõud. Tema initsiatiivil telliti ja toimetati kohale Reichenbachi meridiaanring (1822) ja Fraunhoferi suur 9-tolline akromaatiline refraktor (1824). Viimast instrumenti peeti kaua aega maailma suurimaks ja täiuslikemaks refraktoriks.

Omades tolle aja parimaid astronoomilisi instrumente, süvenes Struve nende abil temale omase energiaga astronoomilistesse uuringutesse. Sellega rajas Struve teed fundamentaalse astronoomia ja täheastronoomia koolkonna loomisele Venemaal. Suure refraktori abil, rakendades selle juures täpset mikromeetrit, teostas Struve tema poolt kavandatud suurejoonelise programmi kaksiktähtede kataloogi koostamise alal.

Nõnda koostati esiteks „Kaksiktähtede uus kataloog" (1827) ja kümme aastat hiljem „Kaksiktähtede mikromeetrilised mõõtmised" (1837), kapitaalne töö, mis sisaldab ligikaudu 3000 kaksiktähe komponentide vastastikuste asendite täpseid mõõtmisi. See töö ületas teisi kaasaegseid sellelaadilisi töid nii oma mõõtmiste täpsuselt kui ka vaatluste ning vaadeldud objektide arvult. Nende Struve teaduslike tööde tähtsust tunnustati ka tolle aja teadlaste poolt ning Struve valiti Peterburi Teaduste Akadeemia auliikmeks (1827) ja varsti ka tegevliikmeks (1832). Kuid Struve ei pidanud oma tööd kaksiktähtede alal veel lõpetatuks ning lisas kahele seniilmunud teosele veel kolmanda, mis sisaldas kõikide mõõdetud kaksiktähtede täpseid astronoomilisi koordinaate. Selle ulatusliku töö „Kaksiktähtede keskmised asendid" (1852) aluseks olid peamiselt Struve ja tema abiliste poolt Tartu meridiaanringi abil teostatud mõõtmised.

Hiljem, juba Pulkovos, jätkas Struve kaksiktähtede uurimist. Laiendades oma uurimiste materjale ning täpsustades varem teostatud mõõtmisi, viis Struve sel viisil lõpule oma uurimiste tsükli kaksiktähtedest. Struve mainitud kolm põhilist teost moodustavad ühtse terviku, mis annab kindla aluse igasugusteks uurimisteks selles valdkonnas nii olevikus kui ka tulevikus.

Üks Struve tähelepanuväärivamaid algatusi täheastronoomia alal seisab tähtede kauguste määramises parallaksi mõõtmiste abil. Struve mõõtis esimesena Tartu Tähetornis Fraunhoferi refraktori abil tähe α Lyrae (Vega) parallaksi.

Tänapäeva seisukohalt vaadelduna pälvivad eriti kõrget hinnangut Struve uurimised tähtede statistika alal, missuguste uurimiste tulemused on esitatud tema teoses „Täheastronoomia etüüdid" (1847). Tähtede arvu loendamise põhjal taevasfääril tuletas Struve meie tähesüsteemi ehituse kaks tähtsat seaduspärasust. Üks neist ilmneb tähtede galaktilise kontsentratsiooni nähtuses, s. o. nende suurimas tihenduses Linnutee tasandi lähedal. Teine seaduspärasus esineb valguse neeldumisel tähtedevahelises ruumis. Küsimuse julge püstitamisega tähtedevahelisest valguse neeldumisest ennetas Struve tunduvalt oma aega. Seda küsimust käsitleti ligi 100 aastat ja alles 1930. aastal leidis valguse neeldumise küsimus lahenduse. Nagu teada, tingib gaasilis-tolmne keskkond valguse neeldumist tähtedevahelises ruumis, missugusel nähtusel on kaasaja teaduses, eriti täheastronoomias ja kosmogoonias, määratu tähtsus.

Peaaegu üheaegselt astronoomiliste tööde algusega alustas Struve ka geodeetilisi töid, mis oma tagasihoidlikust algastmest, Liivimaa maamõõtmisest, muutusid varsti grandioosseks ettevõtteks, suureks vene kraadimõõtmiseks piki Tartu meridiaani. Struve sooritas isiklikult selle töö esimese etapi, mõõtes endise Liivi ja Eesti kubermangu territooriumil meridiaani kaare pikkuse 3°35′ ulatuses. Lõpetanud viimase töö 1827 aastal, esitas Struve selle tulemused kahes mahukas köites pealkirja all „Laiuskraadi mõõtmise kirjeldus" (1831). Pärast seda tegi Struve kohe ettepaneku jätkata kraadimõõtmist lõuna ja põhja suunas. See teostatigi järgnevail aastail tema juhendamisel, kusjuures mõõdeti meridiaani kaare pikkust Põhja-Jäämerest kuni Doonau suudmeni, kogu ulatuses 25°20′ ehk 2800 kilomeetrit. Selle suurejoonelise ettevõtte, vene suure kraadimõõtmise üksikasjad on esitatud W Struve töös „Meridiaani kaar" (1857) Kraadimõõtmise eesmärgiks oli määrata Maa täpne suurus ja kuju ning seega ühtlasi rajada kindel alus riigi laialdase territooriumi kaardistamisele.

Tegutsedes Tartu Tähetornis ajavahemikus 1812.—1839. a., arendas, viimistles ja enamasti ka juba teostas Struve neid ideid, milledest ta juhindus hiljem, töötades Pulkovos astronoomia ja geodeesia alal.

Peale väga viljaka teadusliku uurimistöö saavutas Struve Tartu ülikoolis silmapaistvaid tulemusi ka õppe-pedagoogilisel alal. Juba algusest peale, kui ta asus ülikoolis õpetama astronoomiat, geodeesiat ja teisi matemaatilisi distsipliine, tõusis õpetamine elementaarselt tasemelt järsku kõrge teaduslikkuseni, nii et Struve loengud tähistasid matemaatiliste teaduste õpetamises Tartu ülikoolis hoopis uut ajastut.

Kuid need loengud moodustasid ainult osa Struve kogu õppetegevusest. Peale tavaliste loengute luges ta erikursusi ja korraldas praktilisi töid armee ja laevastiku ohvitseridele, kes olid tema juurde komandeeritud. Ta juhendas ka Professorite Instituudi kasvandike ja teiste õpilaste töid astronoomia ja geodeesia alal. Struve oskas noori inimesi innustada ja ergutada iseseisvale teaduslikule uurimistööle. Paljud Struve õpilased, nagu Preuss, Savitš, Fjodorov, Sabler jt., said hiljem tema abilisteks ja kaastöölisteks. Nad viisid Struve plaanide ja juhendite kohaselt läbi terve rea ulatuslikke üleriikliku tähtsusega astronoomilisi ja geodeetilisi üritusi.

Nii kujunes ja organiseerus Struve teaduslik-pedagoogilise tegevuse tulemusena astronoomide ja geodeetide koolkond, mis järkjärgult levis Venemaa kõigisse ülikoolidesse ja teaduslikesse asutustesse. Akadeemik W. Struve rajas Tartu ülikooli ja teiste vene teaduslike asutuste vahel tiheda sideme. Tema isikus esineb revolutsioonieelse Venemaa üks väärikamaid eesrindlikke teadlasi, kelle eeskujulikele töödele tugineb kaasaegse nõukogude loodusteaduse võimas areng.

ИЗ ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕТЫРЕХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ МАТЕМАТИКОВ ТАРТУСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

(Очерк) [1]

Проф. Г Ряго

Кафедра теоретической механики

Из профессоров-математиков Дерптского—Юрьевского—Тартуского университета за 150 лет его существования особенно глубокое и плодотворное влияние на развитие отечественной науки оказали Мартин Бартельс, Фердинанд Миндинг, Феодор Эдуардович Молин и Гурий Васильевич Колосов. Последующие строки ставят себе задачей дать краткий обзор их жизни, научной и научно-педагогической деятельности.

Глава I

МАРТИН БАРТЕЛЬС

1. Биографические данные

Мартин Бартельс (Johann Martin Christian Bartels) принадлежит к небольшому числу математиков, не оставивших сколько-нибудь заметного следа своей исследовательской работой, но очень много способствовавших росту высокоодаренных своих учеников: кроме целого ряда ученых, заслуживших почетную известность, на личном счете Мартина Бартельса стоят два величайших в истории математики — Карл Фридрих Гаусс (Carl Friedrich Gauss) и Николай Иванович Лобачевский. Глубокое уважение обоих этих гигантов математической мысли к своему скромному учителю, Бартельсу, является неоспоримым доказательством их большой признательности к нему И Гаусса и Лобачевского связывали с Бартельсом искренние, дружеские отношения.

Мартин Бартельс родился 12 августа (н. стиля) 1769 года в Брауншвейге сыном бедных родителей. Первоначальное образо-

[1] Очерк был написан по случаю исполнения в 1952 году 150-летия Тартуского университета и предназначался для более широкого курга читателей.

вание он получил в родном городе, сначала в так называемой «Сиротской школе» (Waisenhausschule), потом в одной из двух городских «Школ письма и счета» (Schreib- und Rechenschule). В этих школах учили только чистописанию, орфографии, арифметике и по тогдашним порядкам, конечно, и «закону божьему».

Не имея еще 14 лет от роду, Бартельс поступил на должность помощника учителя. Работая по семь часов в школе, он, кроме того, ежедневно затрачивал значительную часть времени на составление и переписку всевозможных счетов для городских бухгалтеров, надеясь таким образом основательно выучиться счетоводному делу. При такой нагрузке почти не оставалось времени для своих собственных занятий. После 5 лет непосильного для его возраста труда Бартельс решается бросить эту притупляющую умственно и изнуряющую физически работу и, не считаясь ни с материальной необеспеченностью, ни даже с полным отсутствием необходимых знаний, поступает студентом в Карловскую Коллегию (Collegio Carolino) родного города, принятие в которую к счастью для Бартельса не связывалось со сдачей какого бы то ни было вступительного экзамена; требовалось только представить свидетельство о хорошем поведении и внести плату за учение. Работая не покладая рук, Бартельс довольно скоро овладел латинским, французским и английским языками в такой степени, что смог зарабатывать себе средства к существованию переводами научной литературы с этих языков на немецкий. Из математических дисциплин в Коллегии преподавались только элементарная алгебра, геометрия и тригонометрия, но эти разделы математики Бартельс тут усвоил прочно.

После трехлетнего обучения в Карловской Коллегии Бартельс поступает в Гельмштедтский университет и проходит там полный курс юридических наук. В Гельмштедте Бартельс знакомится с знаменитым математиком И. Ф. Пфаффом (Johann Friedrich Pfaff). По дружескому совету И. Ф. Пфаффа Бартельс оставляет Гельмштедт и переходит в Геттингенский университет, где занимается уже одной только математикой. Но и в Геттингене он не проходил сколько-нибудь систематического курса высшей математики; поэтому знания в этой области науки Бартельсу приходилось приобретать в основном самоучкой. Опасение в недостаточной подготовленности к научной работе заставило Бартельса отказаться от своего первоначального намерения получить докторскую степень и добиться приват-доцентуры, к тому же ни в какой степени не обеспечивавших материально. Бартельс оставляет университет и обосновывается преподавателем учительской семинарии в Рейхенау в Швейцарии, откуда в 1800 году переходит преподавателем в реальное училище в швейцарском же городе Аарау.

В 1805 году Бартельсу неожиданно открывается широкая перспектива научной работы: вице-президент Петербургской Академии наук С. Я. Румовский, состоявший одновременно попечителем казанского учебного округа, предложил Бартельсу ординарную профессуру математики в только что основанном Казанском университете. На Бартельса Румовскому указал непременный секретарь Петербургской Академии наук Николай Фусс. Вероятно Румовский консультировался с Фуссом, Фусс в свою очередь списался с Гауссом, Гаусс же рекомендовал Бартельса, которого знал уже с ученической скамьи и с которым оставался в дружеских отношениях еще и много лет спустя.

Бартельс принял сделанное ему почетное предложение, прося только дать время на устройство своих домашних дел. Румовский не замедлил представить кандидатуру Бартельса на утверждение, мотивируя свое представление тем, что «Бартельс столь глубокие и превосходные имеет в высшей математике сведения, что без всякого прекословия может он занять место в числе искуснейших математиков в немецкой земле» и что было бы весьма важным «приобретение толь искусного математика, которому вся Германия имеет мало подобных». Однако Бартельс отказался приехать в Казань, несмотря на то, что Румовский уже выслал ему значительный аванс на путевые расходы. Свой отказ он мотивирует тем, что не сможет уговорить семью расстаться с родными и ехать в такую даль, а уговорить семью тем более трудно, что и на родине открывалась возможность получить работу, его удовлетворяющую. Бартельс сам признается, что не оправдывает своего образа действия. Причиной, побудившей Бартельса нарушить данное слово, было обстоятельство, что брауншвейгский герцог обещался предоставить ему почетную работу по специальности в родном городе и начал выплачивать Бартельсу жалованье сразу же, еще до утверждения его в будущей должности.

Герцог брауншвейгский предполагал построить у себя астрономическую обсерваторию, заведывать которой должен был К. Ф. Гаусс, успевший уже к этому времени приобрести европейскую известность своими глубокими математическими и астрономическими исследованиями. Обсерваторию предполагалось оснастить мощным новейшим оборудованием. Далее предполагалось создать специальный математический институт, связанный с одной стороны с обсерваторией, с другой — с Карловской Коллегией. Организатором и руководителем запроектированного математического института по предложению Гаусса был предусмотрен Бартельс. Казалось, что начинают осуществляться мечты его молодых лет: служить науке и обучать ей юношество. Заманчивые для Бартельса перспективы научной работы однако не сбылись: в 1806 г. в Германию вторглись наполеоновские полчища, и немецким князьям и герцогам было не до астрономических обсерваторий. Думать о научной работе в Германии в создавшихся условиях Бартельс, конечно, не мог. Он вспомнил сделанное ему год назад почетное предложение занять кафедру математики Казанского университета и написал Румовскому о своей готовности приехать. К счастью для Бартельса, Румовский не порвал с ним связи и после того, как Бартельс нарушил данное им слово; наоборот, Румовский продолжал с ним переписку и просил помочь найти достойного кандидата на Казанскую кафедру математики. Однако, несмотря на честные старания Бартельса, дело не подвигалось: одних кандидатов пугала отдаленность Казани, другие выставляли совершенно непомерные требования. Не увенчавшиеся успехом старания Бартельса доставили ему все же исключительную честь: по предложению Румовского Бартельс в знак признательности за понесенные хлопоты был избран почетным членом Казанского университета.

Тотчас же по получении от Бартельса письма о его готовности занять предложенную ему ранее профессуру, Румовский оформил его официальное назначение; он оказал ему и всяческое содействие в переезде и устройстве в Казани.

Казанский университет был основан в 1804 году. но укомплектование его кафедр заняло ряд лет и к приезду Бартельса было еще далеко не закончено. Бартельс продолжал деятельно помогать Румовскому в этой работе.

Блестящая рекомендация Фусса и исключительное внимание, которым Румовский окружил Бартельса, создали вокруг него ореол научной знаменитости. Однако достаточных оснований к этому, собственно, не было: ни до приезда в Казань, ни потом Бартельс не дал ничего такого, с чем бы осталось связанным его имя. Но, благодаря долголетней, неутомимой работе над собою, он был человеком широко образованным; он глубоко и всесторонне владел почти всеми отделами математики своего времени, он был отличным педагогом, исполнительным и чрезвычайно добросовестным администратором, к тому же еще и очень располагавшей к себе личностью. Бартельс принадлежал, вместе с астрономом В. Я. Струве, к той немногочисленной группе родившихся за рубежом ученых, которые, раз переселившись в Россию, видели в ней свою вторую родину и оставались ей верны до конца.

Бартельс прибыл в Казань в начале 1808 года. К своей радости он нашел там, несмотря на еще очень незначительное общее число студентов, «необычно большой интерес к математическим наукам» [1] Планируя лекции по высшему анализу, он мог рассчитывать, по меньшей мере, на 20 слушателей. Такая большая аудитория математиков была в то время редкостью: в знаменитом Геттингене, например, аудитория математиков насчитывала в то время редко более 6 человек; такой же немногочисленной она была и в других университетах Запада, да и у нас, например, в Дерпте. Но пожалуй еще более неожиданными явились для Бартельса два других обстоятельства: во-первых, то, что студенты оказались очень хорошо подготовленными; во-вторых, то, что они работали с увлечением, с энтузиазмом — одно из многочисленных проявлений общественного подъема в России начала XIX века.

---

[1] „. ungemein viel Sinn für das Studium der mathematischen Wissenschaften"

Хорошей математической подготовкой аудитория Бартельса в очень большой степени была обязана Григорию Ивановичу Карташевскому — первому преподавателю математики в Казанском университете. Бывший питомец Московского университета, прекрасно образованный, человек с возвышенным взглядом на задачи университета, Карташевский хорошо владел своим предметом, страстно его любил, непрестанно в нем совершенствовался и великолепно преподавал его. На заложенном Карташевским фундаменте Бартельс мог строить дальше быстро и прочно. Успехи студентов не замедлили сказаться, вызывая похвалу и неподдельную радость Бартельса. В числе его первых слушателей находим Николая Ивановича Лобачевского, будущего великого русского геометра.

В Казани Бартельс проработал 12 лет. Своей педагогической деятельностью он снискал себе глубокую благодарность своих студентов. Профессорская коллегия его ценила как прямого и честного работника. Доверие к Бартельсу его сотоварищей по службе нашло свое отражение в частности и в том, что Бартельс, выбранный в 1813 году деканом факультета, оставался на этом посту до самого своего отъезда из Казани в Дерпт.

Казанский университет только-только успел оформиться и наладить педагогическую и научную работу, как и на него легла черная тень дикой реакции Александровского времени: царское правительство всюду искало крамолу, а в университетах видело ее опаснейших рассадников; не избег этого подозрения и Казанский университет — отчет о ревизии Казанского университета М. Л. Магницким в 1819 г. заканчивается недвусмысленным предложением предать Казанский университет «публичному уничтожению». Вместо энтузиазма и преданности делу науки в университете воцарились лицемерие, подхалимство, угодничество и ханжество. Лучшие его профессора или были уволены или ушли сами; ушел и Бартельс. Ему это было нетрудно сделать — в августе 1820 года Совет Дерптского университета избрал его профессором чистой и прикладной математики. В представлении факультета Бартельс охарактеризован как «превосходный преподаватель математики и очень опытный в ведении дел человек»[1].

Бартельс прибыл в Дерпт в январе 1821 года и вскоре приступил к чтению лекций. Некоторое разочарование на новом месте службы доставило ему то обстоятельство, что несмотря на большее общее число студентов университета, чем в Казани, в Дерпте число студентов-математиков оказалось все же значительно меньше, чем Бартельс их имел в Казани. К тому же все преподавание математики, в условиях Дерптского университета, пришлось сначала ограничить почти одной элементарной математикой. Только уже несколько лет спустя Бартельс мог рассчитывать на 10—12 слушателей курсов высшей математики; часть их состав-

[1] „trefflicher Lehrer der Mathematik und .. gewandter Geschäftsmann"

ляли лица, приехавшие в Дерпт учиться астрономии у знаменитого астронома, впоследствии основателя и директора Пулковской обсерватории, В. Я. Струве. Читая ряд математических курсов, Струве сам оказал очень большое влияние на развитие преподавания математики в первые годы существования Дерптского университета. Несомненно Струве работал с Бартельсом рука в руку; он был с Бартельсом связан не только дружбой, но впоследствии и семейными узами: Струве был вторым браком женат на дочери Бартельса.

В 1826 году Бартельс избирается членом-корреспондентом Петербургской Академии наук.

В 1833 году исполнилось 25 лет профессорской службы Бартельса в России. По ходатайству Совета университета Бартельсу было присвоено звание заслуженного профессора. Философский факультет, в рамках которого работали тогда все профессора физико-математических наук, представил Бартельса для оставления еще на пять лет на действительной службе, так как «у всех членов Ученого Совета может иметься одно только мнение о прошлой и поныне продолжающейся отличной работе представляемого как по научной, так и по административной линии» [1] Иного, чем это «одно только мнение», были три профессора богословского факультета. Несмотря на козни последних, Бартельсу был продлен срок службы на пять лет. Но Бартельс не дослужил до конца этого пятилетия: он умер 19 декабря (н. стиля) 1836 года 67 лет от роду.

2. О научно-педагогической деятельности Бартельса

Как уже было указано выше, Бартельс не оставил в науке заметного следа: ни его докторская диссертация из области вариационного исчисления, ни посвященная В. Я. Струве работа по теории аналитических функций, ни его обзор основных формул аналитической геометрии пространства не являются работами сколько-нибудь значительного научного веса. То же можно сказать и о самом большом по объему труде Бартельса: «Лекции по математическому анализу» [2]. По собственным словам Бартельса он надеялся этим трудом отчитаться в том, каким образом он вел доверенное ему дело преподавания математики в Казанском и Дерптском университетах в течение целой четверти столетия. Вышедший в 1837 году прекрасно изданный первый том труда Бартельса, отпечатанный в Дерптской университетской типографии, содержит некоторые вопросы элементарной математики, сферическую тригонометрию, разложения в ряды и аналитическую

[1] „. fortwährende ausgezeichnete Tätigkeit des Präsentierten sowohl in wissenschaftlicher als administrativer Hinsicht bei allen Gliedern des Conseils nur eine Meinung herrschen kann".

[2] J. M. C. Bartels, Vorlesungen über mathematische Analysis. Dorpat, 1837.

геометрию. Книга стоит на научном уровне того времени, но чего-нибудь нового не дает. Запланированные II и III том труда должны были содержать дифференциальное и интегральное исчисление, теоретическую механику и теорию вероятностей. Таким образом, труд должен был охватить почти все разделы «высшей математики» в широком смысле слова. Каждый из этих разделов Бартельс читал не раз; однако он не рассчитал ни трудностей составления такого труда, ни трудностей издания его в тогдашних условиях. На всю громадную Российскую империю удалось собрать всего только 178 подписчиков на труд Бартельса! По напечатании первого тома своего труда Бартельс должен был уплатить из своих сбережений большую сумму по счету типографии. Только после долгих хлопот сумма эта ему была возмещена казной. Томы II и III труда не были изданы и остались даже не написанными: Бартельс умер еще до выхода в свет первого тома.

Бартельс не оставил следа в науке своими исследованиями. но имя его все же не будет забыто: Бартельсу был своим математическим образованием обязан Н. И. Лобачевский. Бартельс приехал в Казань, будучи уже почетным членом Казанского университета, имя его было окружено ореолом славы большого ученого, университетская молодежь его ждала. На его первую лекцию собрались студенты всех факультетов; в числе прочих там был и студент-медик Н. И. Лобачевский. Очень скоро под влиянием лекций Бартельса Н. И. Лобачевский оставил медицинский факультет и перешел на философский, где преподавалась математика. Исключительные успехи Лобачевского удостаиваются полного признания Бартельса и через него становятся известными не только всему университету, но и в министерстве. По окончании Лобачевским университетского курса Бартельс продолжает заниматься с ним частным образом у себя на дому, результатом чего является законченное уже в 1811 году рассуждение Лобачевского о «теории эллиптического движения небесных тел», в котором Лобачевский, по словам Бартельса, «проявил такие признаки отличнейшего математического дарования, что составит себе славное имя».

Не подлежит сомнению, что глубиной своих математических знаний, широтой математического кругозора, отточенностью математической мысли Н. И. Лобачевский был в основном обязан руководству Бартельса. Нельзя не отметить и исключительно доброжелательного, чисто человеческого отношения Бартельса к Лобачевскому. Лобачевский отличался пылким и независимым характером; будучи по природе своей очень озорным, он за свои проказы и проступки не раз сидел в карцере, заносился на «черную доску» и подвергался публичному выговору А когда инспекция студентов донесла на Лобачевского, что он «в значительной мере явил признаки безбожия», против Лобачевского было возбуждено дело, грозившее окончиться «высочайшим повелением» о сдаче Лобачевского в солдаты. От этой страшной кары Александрозского времени Лобачевского спасло только энергичное заступничество Бартельса и его ближайших коллег.

Много высказано предположений о том, какую роль сыграл Бартельс в создании Лобачевским обессмертившей его имя «воображаемой геометрии». Бартельс не был человеком большого творческого размаха и более чем вероятно, что Лобачевский, став уже в 1814 году самостоятельным преподавателем в Казанском университете, должен был сам искать тематику для своих исследований. Не раз высказывалось предположение, что Лобачевский мог от Бартельса, бывшего в дружеской переписке с Гауссом, узнать о размышлениях последнего об основаниях геометрии. Сейчас можно считать достоверным, что это не так и что к своему великому открытию «воображаемой геометрии» Лобачевский пришел самостоятельно, без какого бы то ни было содействия Бартельса.

Помимо Н. И. Лобачевского Бартельс подготовил к научной работе и астронома И. М. Симонова, не говоря о нескольких других менее известных профессорах и многочисленных преподавателях гимназий. За 12 лет своей деятельности в Казани Бартельс положил прочное основание казанской математической школе, блистательным первенцем которой был Н. И. Лобачевский, школе, которой отечественная наука с полным правом всегда гордилась и гордится по наше время.

В Дерпте Бартельс состоял профессором 15 лет. Его большой заслугой перед Дерптским университетом является организация учебного процесса по всему циклу математических наук. Хотя еще и до него иногда читались отдельные курсы по высшей математике, но все же только с Бартельса начинается планомерное чтение всех основных курсов высшей математики в широком смысле этого слова. У Бартельса получили свое математическое образование не только математики, но и все астрономы и геодезисты, вышедшие из астрономической школы В. Я. Струве. Деятельное участие принимал Бартельс и в работе Дерптского «профессорского института», в котором подготовлялись к профессорскому званию отобранные для этой цели молодые ученые из многих университетов России. Из учеников Бартельса, работавших потом в Дерпте, упомянем Карла Зенффа (Karl Eduard Senff), унаследовавшего в 1829 году кафедру своего учителя.

Глава II

ФЕРДИНАНД МИНДИНГ

1. Биографические данные

Фердинанд Миндинг (Ernst Ferdinand Adolph Minding) является, бесспорно, самым значительным математиком и одним из самых крупных ученых, вообще когда-либо работавших в Тартуском университете. Родился Миндинг 11 анваря (н. стиля) 1806 года в принадлежавшем тогда Пруссии городе Калише, где отец его был заседателем городского суда. Среднее образование Миндинг получил в Гиршбергской (Hirschberg) гимназии, которую окончил в 1824 году, имея в аттестате зрелости по всем без исключения предметам оценку отлично.

Уже в гимназии Миндинг обнаружил большие способности к древним языкам; должно быть по этой причине директор гимназии уговаривал его посвятить себя изучению этих языков и специализироваться на древнееврейском языке. Как известно, специалисты по древним языкам были в Германии всегда в особом почете. Поступив в университет в Галле (Halle an der Saale) и вскоре переведясь в Берлин, Миндинг, по совету ли своего бывшего директора, или по собственному влечению, действительно занимается гуманитарными науками: он слушает лекции по классической филологии, по истории и, как тогда водилось, и по философии, имея в числе своих учителей философа Гегеля и историка Ранке. Только между прочим Миндинг слушает несколько курсов по физике и химии и один небольшой курс по статике. Последний был единственным прослушанным им курсом из области математики и механики, то есть той именно области науки, в которой Миндинг потом с таким успехом работал и исследованиями в которой он завоевал всеобщее признание. Миндинг принадлежит к очень немногочисленной группе математиков самоучек, оставивших в науке глубокий след. Здесь имя Миндинга красуется рядом с именами знаменитого Кенигсбергского профессора-математика К. Г. Я. Якоби (C. G. J. Jacobi), брата известного физика Б. С. Якоби, работавшего сначала профессором в Дерпте, потом академиком в Петербургской Академии наук; к этой же группе принадлежит и замечательный, безвременно скончавшийся индийский математик Раманужан (Ramanujan)

В 1827 году Миндинг оставил университет и был короткое время учителем гимназии, преподавая математику, историю и родной язык. В 1829 году он защищает в Галле докторскую диссертацию о приближенном вычислении двойного интеграла, а в 1831 году обосновывается в Берлинском университете приват-доцентом по специальности математика. Его ближайшим товарищем по службе был знаменитый впоследствии математик Лежен-Дирихле (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet), унаследовавший в 1859 году кафедру Гаусса в Геттингенском университете. Тогда еще молодым Дирихле и Миндингу выпала честь быть пионерами в области преподавания в Берлинском университете новейших в то время разделов математики; именно с Миндинга и Дирихле начинается мощный подъем развития математической науки в крупнейшем университете Германии, вышедшем к концу XIX столетия и в области математики на одно из первых мест в мире.

Большим счастьем для Миндинга было, что уже в первые годы его деятельности в Берлинском университете у него установились дружеские отношения с великим путешественником и исключительно широкого размаха ученым Александром Гумбольдтом (Alexander Humboldt) [1] В 1834 году у Миндинга, кроме нескольких уже опубликованных работ, было закончено исследование о возможности обобщения понятия центра сил, понятия, сложившегося для случая параллельных сил еще у Архимеда. Гумбольдт, который и во французских научных кругах пользовался исключительным уважением, как ни один немец ни до, ни после него, представил исследование Миндинга Парижской Академии наук. В комиссию для оценки работы Миндинга были назначены Пуассон (Poisson), Либри (Libri) и Понсле (Poncelet) [2]. Заключение комисси Парижской Академии сделало имя Миндинга известным в ученых кругах всего мира.

Не лишено интереса, что Миндинг с 1834 года, не оставляя работы в Берлинском университете, состоял доцентом высшей математики и теоретической механики еще и в Берлинском Высшем строительном училище (Allgemeine Bauschule, Bauacademie) [3].

В начале 1843 года русское правительство предложило Миндингу занять кафедру математики в Дерптском университете. Миндинг предложение принял, летом 1843 года переехал в Дерпт и с осени того же года приступил к исполнению своих новых обязанностей.

Около этого времени кафедра чистой и прикладной математики была разделена на две самостоятельные кафедры. На кафедре чистой математики остался Зенфф, Миндинг же занял кафедру прикладной математики, переняв от Зенффа и заведывание математическим кабинетом. Таким образом Миндинг является родоначальником прикладных математиков Тартуского университета.

За двенадцать лет работы в Берлинском университете и в Высшем строительном училище Миндинг успел издать двухтомный курс дифференциального и интегрального исчисления и теоретической механики и напечатать ряд выдающихся работ по дифференциальной геометрии, сразу же принесших ему славу крупного исследователя. Таким образом в Дерпт Миндинг прие-

[1] Славное имя Александра Гумбольдта присвоено Берлинскому университету после освобождения Германии Советской Армией от фашистской тирании и восстановления Берлинского университета Правительством Демократической Германской Республики при всесторонней помощи со стороны Советской власти.

[2] Понсле — один из создателей проективной геометрии, открыл все существенные предложения ее в бытность свою военнопленным в России, после развала наполеоновской армии в 1812 году. Вернувшись во Францию, он завоевал себе в науке звание «отца технической механики»; он внедрил в нее основное понятие работы и положил этим начало бурному росту этой дисциплины.

[3] В этом же Высшем строительном училище работал до перехода в Берлинский университет «отец математической строгости» Карл Вейерштрасс (Karl Weierstrass), отеческий друг и научный руководитель Софьи Ковалевской.

хал уже общепризнанным ученым. Поэтому уже в начале его дерптской деятельности у него установились тесные научные отношения с математиками Петербургской Академии наук. Узы искренней дружбы связывали его с академиком В. Я. Буняковским. Они неоднократно гостили друг у друга. Глубокую взаимную привязанность этих двух мужей науки прервала только смерть Миндинга в 1885 году.

В 1861 году Миндингу за его «Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными» по докладу академика М. В. Остроградского была присуждена (тридцатая по счету) Демидовская премия Петербургской Академии наук. В 1864 году Петербургская Академия наук избрала Миндинга своим членом-корреспондентом, а в 1879 году, по случаю исполнения 50 лет со дня получения Миндингом докторской степени, Академия оказала ему исключительную честь, избрав его своим почетным членом. Многочисленные ученики Миндинга отметили эту юбилейную дату знаками благодарности и искреннего уважения. Быть может, наибольшую радость на старости дней принес Миндингу поздравительный адрес от Петербургской Академии наук. В нем стоят слова: «. что по особому к тебе благоволению божественной воли, на годы не взирая, обилие трудов твоих не убывает; не притупилась острота и не ослабла сила твоего ума: последние твои научные изыскания свидетельствуют о той же мудрости, тонкости и мощи ума, проявленных в трудах наиболее цветущего периода твоей деятельности.» [1]

Полную ясность суждения и живой интерес ко всему, что творилось на научном горизонте, Миндинг сохранил до последних дней своей жизни. Он умер 13 мая (н. стиля) 1885 года 79-летним стариком.

Миндинг не занимал административных постов и не принадлежал к числу профессоров, игравших роль в общественной жизни маленького университетского города Дерпта. Небольшой круг ближайших друзей Миндинга знал его как человека открытой души и независимого образа суждения; ученики же ценили в нем большого ученого и всесторонне и глубоко образованного человека.

2. О научном творчестве Миндинга

Список научных работ Миндинга насчитывает 60 номеров. Тематика этих работ разнообразна: представлены почти все разделы математического анализа и теоретической механики. Цен-

[1] „ quod singulari quodam divini numinis favore tibi contigit, ut labentibus annis haud diminueretur tuorum laborum ubertas neque ingenii tui acumen hebesceret aut debilitaretur: novissimae tuae questiones eandem referunt sagacitatem, eundum mentis vigorem, idemque acumen quo florentissimae aetatis opera tua commendantur.”

нейшие же достижения Миндинга относятся к теории поверхностей. Порожденная, как и многие другие отделы математического анализа, знаменитейшим математиком Петербургской Академии наук, великим Леонардом Эйлером, и получившая 80 лет спустя из рук Гаусса новую, мощную аппаратуру исследования, теория поверхностей развилась в XIX веке в богатейшую по результатам математическую дисциплину, давшую основу для совершенно новой постановки вопроса о пространстве и ставшую основным математическим орудием построения теории всемирного тяготения в руках Альберта Эйнштейна. Миндинг был первым по времени и первым по значению полученных результатов продолжателем геометрического творения Гаусса. Ему удалось доказать, что так называемая геодезическая кривизна кривой на поверхности есть одна из основных характеристик поверхности. Эта характеристика сохраняет свое значение при всяком изгибании поверхности, то есть при всякой деформации поверхности, проводимой без складок и без разрыва ее, или иначе: при всякой деформации поверхности, при которой сохраняют свою длину все линии, которые можно на поверхности провести.

Второе крупное достижение Миндинга заключается в первых основоположных результатах решения вопроса, каким образом узнать, развертываются ли две заданные поверхности одна на другую или, что то же, может ли одна поверхность быть изгибаема в другую (конечно без складок и разрыва), или, еще иначе, может ли одна поверхность быть наложена на другую. Проблема ведет свое начало еще от Гаусса, являясь одной из основных проблем дифференциальной геометрии. После Миндинга ею занимались знаменитые геометры Бонне (Bonnet), Кристоффель (Christoffel) и Дарбу (Darboux) Видный голландский геометр Стройк (D. J. Struik)[1] называет вопрос «проблемой Миндинга». Важнейшая из теорем Миндинга устанавливает, что две поверхности одной и той же постоянной кривизны всегда наложимы друг на друга.

Насколько глубоко Миндинг вник в вопросы изгибания поверхностей, показывает и тот факт, что Миндинг уже в 1838 году высказал мысль о невозможности изгибания, то есть недеформируемости шаровой поверхности. Утверждение было потом распространено на весь класс замкнутых выпуклых поверхностей. Такими являются, например, яйцевидные поверхности и поверхность трехосного эллипсоида. Утверждение Миндинга о неизгибаемости шаровой поверхности является исторически первым вопросом «изгибания поверхностей в большом масштабе». Это утверждение Миндинга было доказано только в 1899 году

Миндингу принадлежит далее честь нахождения всех поверх-

[1] Последние годы Стройк был профессором в Америке. За свои прогрессивные взгляды он снят с работы.

ностей вращения, имеющих во всех своих точках одну и ту же кривизну, короче говоря, поверхностей вращения постоянной кривизны.

Как известно, Лобачевский 11 февраля (ст. стиля) 1826 года зачитал на собрании физико-математического факультета (или, как тогда говорили, отделения физико-математических наук) Казанского университета доклад: «Сжатое изложение начал геометрии .»[1] В конце этого доклада было дано основное уравнение геометрии Лобачевского, с помощью которого решаются все вопросы измерения в «воображаемой геометрии». Отсюда ясно, что уже в самом начале 1826 года Лобачевский владел всеми основными положениями созданной им и носящей его имя геометрии. В 1838 году Миндинг отыскивает и находит все поверхности вращения постоянной кривизны, в том числе поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны. Но ни Миндинг, ни Лобачевский, работая, как казалось, над совершенно разной проблематикой, не подозревали, до чего тесно связаны между собою полученные ими результаты, а возможно, что никто из них ничего и не знал о работах другого. И только в 1868 году знаменитый итальянский геометр Бельтрами (Eugenio Beltrami) показал, что при отрицательном знаке кривизны кратчайшие линии на поверхностях Миндинга обладают всеми свойствами прямых линий геометрии Лобачевского. С этого времени геометрия Лобачевского не нуждается более в эпитете «воображаемая»; геометрия Лобачевского стала настолько же реальной, насколько реальной является наша геометрия повседневной жизни — геометрия Евклида.

Со времен Зенодора (II столетие до н. э.) математикам известна изопериметрическая задача, связываемая с именем мифической королевы Дидоны, сестры Пигмалиона: какую форму надо придать замкнутой нити данной длины, чтобы она на плоскости обхватила наибольшую площадь? Уже греки знали, что этой формой должна быть окружность. По многим причинам задача привлекала внимание математиков вплоть до последнего времени. Миндинг поставил себе целью решить задачу, перенеся ее с плоскости на кривые поверхности. Она стала его излюбленной задачей; он посвятил ей ряд исследований от второй до шестидесятой работы своей долгой жизни. Полученные Миндингом результаты являются классическими.

Как и многие другие крупные ученые, Миндинг не избег участи остаться в каком-нибудь особенно важном достижении незамеченным. Так было с его работой об интегралах алгебраических функций, появившейся в 1842 году в ведущем тогда немецком математическом журнале Крелле

---

[1] Exposition succinte des principes de la Geométrie..

(Crelle). Пятьдесят лет спустя, в 1892 году, первые знатоки вопроса Бриль и Нэтер (Alexander Brill, Max Noether) пишут: «. приходится удивляться тому, насколько глубоко этот одаренный исследователь (подразумевается Миндинг — *Г Р.*) вник в ход мыслей Абеля и круг орудий его работы и в скольких существенных результатах он (Миндинг — *Г Р.*) в некотором смысле Абеля опередил. К тому же надо признать, что в смысле ясности, краткости и целесообразного построения доказательства работа не отстает от Абелевой» [1]

Из ряда ценных результатов, полученных Миндингом в области теоретической механики, назовем только его обобщение установленного уже Архимедом понятия центра параллельных сил на случай системы непараллельных сил, о чем речь была уже впереди. Основная теорема Миндинга о центре сил стала основой учения об астатическом равновесии (так называется равновесие, сохраняющееся при повороте всех действующих сил на какой угодно угол). Это учение было развито известным французским геометром Дарбу (Gaston Darboux) в 1871 году, спустя 36 лет после появления работы Миндинга.

3. О педагогической деятельности Миндинга в Дерпте

Миндинг, начав свою педагогическую деятельность в Дерпте в 1843 году, не оставил университета по выслуге 25 лет: принимая во внимание его исключительно плодотворную деятельность как ученого и как преподавателя, срок службы ему был три раза продлен, каждый раз на одно пятилетие. Профессором Дерптского университета Миндинг был таким образом полные 40 лет и службу в университете оставил только в 1883 году, за два года до своей смерти.

Преподавательская деятельность Миндинга в Дерптском университете была чрезвычайно разнообразна. Свой основной предмет — теоретическую механику — он читал, как это делается и в данное время, в течение трех семестров. Первым из Дерптских профессоров-математиков Миндинг ввел практические занятия (вернее, теоретические упражнения) по механике; он же первым

---

[1] „.. so ist doch erstaunlich, wie tief der geistvolle Forscher in Abels Gedankengang und in den Kreis seiner Hilfsmittel eingedrungen ist, und wie viele wesentliche Ergebnisse Abels er in gewissem Sinne anticipiert hat. Auch ist zuzugeben, dass in Bezug auf Durchsichtigkeit, Kürze und zweckmässige Anordnung der Beweisführung die Arbeit hinter der Abels nicht zurücksteht."

Заметим, что названного здесь, умершего 27 лет от туберкулеза, норвежского математика Абеля (Niels Henrik Abel) погубила материальная нужда. Абель, один из величайших математиков начала прошлого века, пославший Гауссу свою обессмертившую его работу, не удостоился даже ответа последнего Содержащий, по выражению К. Г Я. Якоби, величайшее математическое открытие своего времени параллельный мемуар Абеля, поданный в Парижскую Академию наук, залежался в архиве Академии и был извлечен оттуда только много лет после смерти Абеля и ряд лет после появления работы Миндинга по тому же вопросу.

начал читать специальные курсы механики, в числе прочих — курс теории упругости, тогда еще очень молодую дисциплину. Кроме своего основного предмета Миндинг постоянно читал и общие и специальные курсы по чистой математике, а после смерти Зенффа, с 1849 до 1852 года, он один вел преподавание и по чистой, и по прикладной математике. Об исключительной разносторонности его интересов свидетельствует тот факт, что он долгие годы преподавал и высшую геодезию и сам вел практические занятия по топографии, а кроме того иногда читал еще и курсы геометрической оптики.

4. Об учениках Миндинга

Несомненно, что именно благодаря такой разносторонности Миндинга учеников его можно было найти и в Московском математическом обществе, и в Пулковской астрономической обсерватории, и в Рижском политехническом институте, и в германских университетах, не говоря уже о преподавателях гимназий на всей необъятной территории России.

Наиболее известным из учеников Миндинга, впоследствии математиков-профессоров, является Аксель Гарнак (Axel Harnack), учившийся в Дерпте с 1869 по 1873 год и работавший потом в Германии. Наиболее же заслуженным отечественным математиком из учеников Миндинга, духовным последователем и продолжателем его работ является Карл Михайлович Петерсон, исключительная судьба которого обязывает хоть вкратце остановиться на его биографии.

Карл Михайлович Петерсон (Carl Petersohn), по национальности латыш, родился в гор. Риге, в мещанской семье. В 1847 году Петерсон поступил в Дерптский университет, курс которого окончил по физико-математическому факультету в 1852 году. Кандидатская работа Петерсона носит пометку Миндинга «отлично» (ausgezeichnet). Надо думать, что тема работы Петерсону была дана Миндингом. В этой оставшейся ненапечатанной работе [1] Петерсон в 1853 году дает формулы, равнозначные знаменитым формулам Майнарди-Кодацци (по имени итальянских геометров Mainardi и Codazzi) Майнарди опубликовал их в 1856 году; Кодацци придал им в 1867 году современный вид. В той же своей кандидатской работе Петерсон ввел в рассмотрение три величины, равносильные коэффициентам так называемой второй квадратичной формы (Гауссовы D, D' и D'') и доказал знаменитую теорему о том, что всякая поверхность однозначно определяется первой квадратичной формой и названными тремя величинами, теорему, носящую незаслуженно имя Бонне (Bonnet), работа которого была опубликована только в 1867 году, то есть 14 лет спустя после представления Петерсоном

[1] Работа напечатана в 1952 году в Историко-математических исследованиях, вып. V. стр. 87.

своей кандидатской диссертации. Если бы работа Петерсона была сразу же напечатана, то благодаря ей одной автор ее вошел бы в число первых геометров XIX века. Многое из дальнейшей жизни К. М. Петерсона до сих пор не выяснено; неизвестно, например, где Петерсон провел следующие за окончанием университета 12 лет и чем он в эти годы занимался. Только скудные же сведения имеются и о последующем периоде его жизни. Известно, что К. М. Петерсон в 1865 году поступил нештатным преподавателем в Петропавловское немецкое училище в Москве. Здесь он вступает в частный кружок математиков, собиравшихся обычно на дому у профессора Н. Д. Брашмана. Осенью 1864 года было решено кружок преобразовать в научное общество — что и было вскоре претворено в жизнь; было основано Московское математическое общество. Это было первой по времени большой математической организацией в России. Одним из немногочисленных членов основателей этого общества был К. М. Петерсон. Уже в 1865 году обществом начал издаваться первый в России математический журнал: «Математический Сборник»; первый выпуск его вышел в конце 1866 года.

Настоящим украшением первых десяти томов этого сборника являются шесть работ К. М. Петерсона по дифференциальной геометрии. Кроме этих работ Петерсон в 1868 году издал в Лейпциге книгу: «О кривых и поверхностях» («Ueber Curven und Flächen»), в которой дал решение проблемы об изгибании минимальных поверхностей и изгибании поверхностей переноса. Решение первой проблемы необоснованно приписывается Шварцу (H. A. Schwartz), второй — Бианки (E. Bianchi). Названные здесь работы К. М. Петерсона считают сейчас входящими в «золотой фонд» работ по теории поверхностей. Но тогда они не были оценены ни у нас, ни на Западе. «Случай Петерсона» является ярчайшим примером безучастного отношения не только властей царского времени, но и научных кругов того времени к творческим достижениям отечественных ученых. Заметим, что развитию идей и проблематики К. М. Петерсона уже полстолетия посвящены изыскания многих геометров всего мира. А так называемую теорию изгибания поверхностей на главном основании за последние десятилетия разрабатывала и разрабатывает и сейчас дифференциально-геометрическая школа московских математиков.

Трудно себе представить, что работами К. М. Петерсона не заинтересовался ни один из его сочленов по Московскому математическому обществу. Еще труднее понять, как могло случиться, что это общество реагировало на смерть своего сочлена основателя даже не некрологом, а одним только простым заявлением о совершившемся. В 1879 году, за два года до смерти К. М. Петерсона, Новороссийский университет присудил ему степень доктора honoris causa, но, как ни странно, не за признанные теперь классическими его работы по теории поверхностей, а за работы по дифференциальным уравнениям, — область, где К. М. Петерсон следа не оставил. Получение за научные заслуги степени почетного доктора на общественном и материальном положении Петерсона отозвалось разве только в одном: после 14-летней службы в Петропавловском немецком училище в Москве К. М. Петерсон из разряда преподавателей «по найму» был переведен в штатные преподаватели! К. М. Петерсон «был одним из наиболее талантливых геометров с живым и ярким воображением, намного опередившим свое время» (слова проф. МГУ С. П. Финикова) Тем не менее ему не было суждено преподавать в университете. Более того — около 20 лет имя его было совершенно забыто. И только в 1902 году о нем вспомнили: известный немецкий математик Штеккель (Paul Stäckel) дал его краткую биографию, а другие два — Мангольдт (Hans Mangoldt) и Лилиенталь (Reinhold Lilienthal), писавшие статьи по вопросам дифференциальной геометрии для издававшейся тогда по почину Феликса Клейна большой «Энциклопедии математических наук», должны были цитировать К. М. Петерсона десятки раз. С этого времени имя К. М. Петерсона стало широко известно и в Москве. В наше же советское время, когда бережно хранится каждое отечественное научное достижение, скромный преподаватель средней школы К. М. Петерсон, работавший по найму, то есть чуть не поденно, с гордостью признается как крупнейший московский геометр XIX века, как основоположник московской школы русских и советских дифференциальных геометров.

Глава III

ФЕОДОР ЭДУАРДОВИЧ МОЛИН

Феодор Эдуардович Молин (Theodor Molien) родился в гор. Риге 29 августа (ст. стиля) 1861 года. Отец его был заведующим частным учебным заведением. О сословном происхождении Молина в личном деле его точных данных нет; вероятнее всего, что предки его были мещанами. И о национальности Молина в его документах прямых указаний нет; из косвенных данных можно заключить, что он был немцем российского подданства. Среднее образование Молин получил в Рижской губернской гимназии, которую окончил в 1879 году. Должно быть, после этого мать его переехала в Дерпт. В январе 1880 года мать Молина удостоверяет, что она дает согласие на поступление сына в местный университет, и Молин зачисляется в нем студентом астрономии. По окончании полного курса наук в октябре 1883 года он утверждается Советом университета в степени кандидата астрономии. Кандидатская работа его „Bahn des Cometen 1880 III" напечатана в Astronomische Nachrichten Nr. 2510.

Дальнейшей работой Молина руководит заведующий кафедрой прикладной математики Дерптского университета, разносторонний математик Линдштедт (Anders Lindstedt), давший за 1882—1886 гг. несколько ценных работ из области теории возмущений и задачи о трех телах в небесной механике и завоевавший себе потом, по возвращении на родину — Швецию, общее признание своей педагогической, а также широкой организаторской деятельностью в области высшего технического образования. В докладной записке физико-математическому факультету Дерптского университета Линдштедт признает за Молиным «несомненно совершенно необычную научную одаренность» [1] Осенью 1883 года Молин отправляется для пополнения своих знаний за границу и работает в течение трех семестров в Лейпциге у Феликса Клейна (Felix Klein), признанного уже тогда одним из крупнейших геометров Европы и славившегося своими блестящими по форме и насыщенными новыми мыслями лекциями. У Клейна Молин слушал лекции по разным отделам математики, стоявшим в то время в центре внимания математического мира; у Клейна же Молин работал в семинаре. Аттестация, данная Клейном Молину, гласит: «. могу дать его прилежанию, его стремлениям и его пониманию дела только самую лучшую оценку» [2] Клейн занимался в тот период глубокими вопросами алгебры и теории функций комплексного переменного. По его совету Молин занялся линейными преобразованиями эллиптических функций. Полученные результаты Молин представил физико-математическому факультету Дерптского университета в качестве диссертации на соискание ученой степени магистра чистой математики. Диссертация озаглавлена: „Ueber die lineare Transformation der elliptischen Functionen. Dorpat, 1885" Весной 1885 года Молин отлично сдал экзамены на степень магистра чистой математики и после защиты диссертации был осенью 1885 года утвержден в этой ученой степени.

По старинному, еще державшемуся и в Дерпте обычаю Молин к диссертации приложил ряд тезисов, не имеющих, собственно, никакого отношения к защищаемой работе. Они показывают, что Молин не был ученым только в узкой своей специальности, но широко интересовался принципиальными вопросами науки. Приведем для примера некоторые из этих тезисов:

Тезис первый: «В геометрии имеются трансцендентальные аксиомы».

Тезис пятый: «При первом обучении геометрии надо отдать предпочтение евклидову методу перед более новым методом».

---

[1] „unzweifelhaft ungewöhnliche wissenschaftliche Begabung"

[2] „. . . kann ich seinem Fleisse, seinem Streben, wie seinem Verständnisse das allerbeste Zeugnis ausstellen"

Как видно из этих тезисов, в вопросах основ и метода геометрии Молин в 1885 году стоял на идеалистических позициях Канта, еще почти безраздельно господствовавших в науке во второй половине XIX столетия. Только очень медленно пролагало себе дорогу убеждение об о п ы т н о м происхождении геометрических истин и необходимости нового методического подхода к вопросам преподавания геометрии.

Тезис третий говорит, что: «Закон инерции не есть следствие закона причинности»; тезис шестой, что: «Гипотеза Тихо Браге (Tycho Brahe) о планетной системе была для своего времени более научной, чем коперниканская». Насколько первые два приведенные тезиса носят печать консервативности, настолько два последних дышат современным духом.

За неимением вакантных должностей по отделу математики физико-математический факультет университета не мог предоставить Молину работу, на которую он имел и моральное и юридическое право претендовать. Факультет решил войти в вышестоящие инстанции с ходатайством об учреждении новой, т р е т ь е й штатной должности по отделу математики — доцентуры чистой математики. Необходимость основания такой доцентуры факультет мотивирует тем, что один имеющийся профессор чистой математики не в состоянии преподавать все разделы этой науки и потому уже в течение многих лет часть их приходится читать профессору прикладной математики и даже астроному-наблюдателю. На создаваемую доцентуру предполагалось возложить преподавание теории чисел, новой геометрии и новой алгебры. Под новой геометрией надо понимать проективную геометрию, под новой алгеброй — теорию групп. Испрашиваемая штатная доцентура была университетом получена, и кандидатом на нее был выдвинут Молин. В соответствующем представлении Собранию физико-математического факультета декан его, физик Эттинген (Arthur Oettingen), пишет: «Во всех трех работах г. Молин показал, что он овладел новыми методами и результатами (математики — *Г Р.*) в поразительно короткое время и что он в высокой степени обладает способностью к самостоятельной научной работе. Факультет знает г. Молина как человека отличных способностей, ясного понимания и неутомимого прилежания, соединенного с сильной целеустремленностью» [1] В представлении своем Совету университета физико-математический факультет пишет, что «Все члены физико-математического факультета, имевшие дело с г Молиным, хвалят его выдающиеся способности, его большое прилежание и настойчивость, связанные с неизменным постоянством его харак-

[1] „In allen dreien Arbeiten hat Herr Molien bewiesen, dass er sich die neuen Methoden und Resultate in überraschend kurzer Zeit zu eigen gemacht hat und im hohen Grade die Fähigkeit besitzt in selbständiger Weise wissenschaftlich zu arbeiten. Der Facultät ist Herr Molien bekannt als Mann von ausgezeichneter Begabung, von klarer Auffassung, von unermüdlichem Fleiss, verbunden mit intensiver Strebsamkeit."

тера»[1] В ходатайстве об утверждении Молина указывается также на его выдающиеся лекторские способности, проявленные им на математических и физических коллоквиумах. Предложением попечителя Рижского (б. Дерптского) Учебного Округа от 29 ноября (ст. стиля) 1885 года Молин, согласно избранию Совета университета, был утвержден доцентом математики.

Свободные от учебных занятий месяцы июнь—август (как это было тогда в Дерпте и других русских университетах) Молин в 1886, 1888 и 1889 гг проводит «летним семестром» в научных центрах Германии. Интерес его концентрируется на «высших комплексных числах» или, как теперь принято говорить, на «гиперкомплексных числах». Работа над ними завершается знаменитым трудом Молина: «О системах высших комплексных чисел»[2], напечатанном в 1891 году в 40 томе известного математического журнала Mathematische Annalen.

Зачатки теории комплексных чисел вида $a\cdot 1 + b\cdot\sqrt{-1}$ или, как принято писать теперь, $a + bi$, связываются обычно с именем Кардана (Geronimo или Girolamo Cardano, 1545) Эйлер знал уже все их основные свойства и дал в 1743 году свою знаменитую формулу

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

связывающую экспоненциальную функцию с тригонометрическими функциями; она является сейчас одной из самых важных формул математического анализа. Само обозначение корня квадратного из отрицательной единицы буквою i принадлежит Эйлеру Наглядное толкование комплексных чисел $a + bi$ и действий над ними было дано датским землемером Весселем (Caspar Wessel) в 1797 году. В 1843 году знаменитый ирландский математик Гамильтон (Sir William Rowan Hamilton) изучил простейший вид «высших комплексных чисел», чисел вида $a\cdot 1 + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k$, составленных из обычной единицы и трех новых основных единиц i, j и k. Свои «числа» Гамильтон назвал кватернионами (quatuor — по-латыни четыре). Основное затруднение при построении таких систем комплексных чисел вида $a\cdot 1 + b\cdot i$, далее $a\cdot 1 + b\cdot i + c\cdot j$, $a\cdot 1 + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k$ и т. д., заключается в обстоятельстве, что в этих системах не удается сохранить без изменения кодекса законов операций (сравнение по величине; сложение, вычитание, умножение и деление). Так уже при первом расширении понятия числа, при переходе от натуральных чисел к положительным и отрицательным целым числам, включая нуль, приходится делать оговорку, что деление на нуль недопустимо; в системе комплекс-

---

[1] „Alle Glieder der physico-mathematischen Facultät, die mit Herrn Molien zu tun gehabt, rühmen seine hervorragende Begabung nebst grossem Fleisse und Ausdauer bei unwandelbarer Solidität des Charakters."

[2] Über Systeme höherer komplexer Zahlen.

ных чисел вида $a + b\ i$ теряют смысл понятия «больше» и «меньше»; в системе чисел вида $a\ 1 + b\ i + c\ j + d\ k$ произведение зависит от порядка сомножителей и произведение может равняться нулю даже и в том случае, когда ни один из сомножителей нулю не равен. Дело усложняется еще более при большем числе основных единиц.

Работа Молина «О системах высших комплексных чисел» была представлена им в качестве докторской диссертации. После защиты ее осенью 1892 года Молин был утвержден в степени доктора чистой математики.

Трудом Молина «О системах высших комплексных чисел» заложены основы общей теории гиперкомплексных чисел, то есть чисел вида $a_1\ e_1 + a_2\ e_2 + \quad + a_n\ e_n$, где e_1, e_2, $\quad$, e_n «единицы» системы, и этим самым завершен основной этап решения задачи, история которой ведет от Кардана, де Муавра, Эйлера, Гаусса и Гамильтона к алгебраистам наших дней. Этой своей работой Молин стал в ряды ведущих алгебраистов конца прошлого столетия. Основоположное значение его работы было сразу же признано математическим ученым миром, в частности известным немецким алгебраистом Фробениусом (Gustav Frobenius) и замечательным норвежским геометром Ли (Sophus Lie). Высокая оценка работы Молина французскими математиками выразилась во вручении ему в 1894 году золотой медали, выбитой по случаю семидесятилетия знаменитого французского математика Эрмита (Charles Hermite) — честь, которой удостоились только особенно заслуженные математики того времени.

Несмотря на европейское имя, Молину в условиях царского времени пришлось еще годы оставаться доцентом, то есть в должности, обычно занимаемой начинающими учеными; в положении о Дерптском университете была предусмотрена только одна профессура чистой математики и не было никаких видов на увеличение штата университета еще одним профессором, чем бы и не мотивировали необходимость такого увеличения.

Как известно, языком преподавания в Дерптском университете со времени его основания был немецкий. На немецком же языке велось преподавание в средних учебных заведениях Прибалтийского края. Борьба за ведение преподавания на русском, государственном языке, шедшая уже годы между государственными органами и балтийским дворянством, закончилась только тогда, когда последовало «высочайшее повеление» от 10 апреля (ст. стиля) 1887 года, по которому средние учебные заведения Прибалтийского края должны были перейти на ведение преподавания на русском языке, и был установлен срок (1 января 1895 года) для перехода на русский язык всем факультетам Дерптского университета. Должно быть, в связи с предстоящим переходом учебного процесса на государственный язык, Молин получил командировку в Москву на весь 1892 год для усовершенствования себя в знании русского языка. К сожалению, нет данных о том, вступил ли Молин в более близкое общение с работавшими тогда в Московском университете профессорами-математиками (В. Я. Цингер, Н. В. Бугаев, П. А. Некрасов) или нет.

С уходом профессора Ф. Шура (Friedrich Schur) на работу в Высшее техническое училище (Политехнический институт) в Карлсруэ, кафедра чистой математики Дерптского университета остается вакантной и Молин, письмом от 5 октября 1892 года, просит попечителя Дерптского учебного округа Н. А. Лавровского иметь его в виду, как кандидата на вакантную должность заведующего кафедрой чистой математики. Какими мотивами руководствовался Лавровский при замещении названной кафедры, неизвестно, но Молину было сообщено, что «на означенную кафедру предложено назначить приват-доцента Московского университета Леонида Лахтина со званием исправляющего должность экстраординарного профессора». Лахтин в это время не был еще даже магистром и в вопросе научной квалификации, конечно, не мог конкурировать с Молиным: он, правда, уже в год назначения в Дерптский университет защитил магистерскую диссертацию, но только в 1896 году стал доктором. Молин так и остался доцентом и только через 8 лет после защиты своей знаменитой докторской диссертации был «высочайшим приказом» от 16 декабря 1900 года назначен ординарным профессором, но не в Юрьевский университет, а в Томский технологический институт.

Переехав в Сибирь, Молин развивает кипучую деятельность по организации педагогического процесса, создает при Институте математическую библиотеку, издает курс лекций по математическому анализу и сборники задач по читаемому им курсу и впервые в Томске организует обязательные для студентов практические занятия по математике. Это было большим шагом вперед в постановке преподавания высшей математики: в дореволюционное время преподавание математики обычно ограничивалось только чтением лекций.

С 1914 года Молин состоит профессором Сибирских высших женских курсов и, когда в переломном 1917 году в Томском университете открывается физико-математический факультет, он переходит на работу в Томский университет, оставаясь ему верным до своей смерти, постигшей его 25 декабря 1941 года на 80 году жизни.

Томску — славной кузнице кадров Сибири — Молин отдал 41 год своей жизни. Научная работа отходит у него тут на второй план; первое место занимает обязательная педагогическая работа, организация семинаров по новым научным проблемам математики, организация и руководство единственным сибирским математическим журналом «Известия Научно-Исследовательского Института математики и механики при Томском государственном университете», выращивание инженерных и математических кадров Сибири.

Молин не был кабинетным ученым типа отошедшего от жизни профессора: он живо интересовался всем, что делается на фронте общественной жизни. Как человек твердых прогрессивных убеждений, он открыто становился на сторону революционного студенчества, на что, конечно, царская власть не замедлила ответить репрессиями. Научные, педагогические и организационные заслуги Феодора Эдуардовича Молина были полностью оценены уже только после Великой октябрьской социалистической революции: Советское правительство присвоило Молину почетное звание «заслуженного деятеля науки».

Глава IV

ГУРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ КОЛОСОВ

1. Биографические данные

Гурий Васильевич Колосов родился 12 августа (ст. стиля) 1867 года в селе Устье, Новгородской губернии. В 1877 году он был определен в частную гимназию Бычкова в Петербурге (впоследствии частная гимназия Гуревича) Окончив гимназию с золотой медалью в 1885 году, Г В. Колосов в том же году поступил в Петербургский университет студентом математического отделения физико-математического факультета. По окончании в 1889 году курса университета и сдачи государственных экзаменов Г В. Колосов был удостоен диплома первой степени. Выполненная Г В. Колосовым еще в студенческие годы работа «О кручении призм» обратила на себя внимание его учителя и научного руководителя, ведущего петербургского теоретика-механика проф. Д. К. Бобылева. По его предложению Г В. Колосов был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию по кафедре теоретической механики или по тогдашней, еще и позднее долго державшейся терминологии, кафедре прикладной математики.

В 1893/94 учебном году Г В. Колосов сдал магистерские экзамены, что в то время открывало дорогу к преподавательской работе в высших учебных заведениях. В 1894 году Г В. Колосов был назначен хранителем механического кабинета Петербургского университета, в каковой должности оставался до перехода на работу в Юрьевский университет в 1903 году.

Педагогическую работу Г В. Колосов начал в 1894 году руководителем практических занятий по теоретической механике в Институте инженеров путей сообщения, бывшем со времени своего основания в 1812 году ведущим высшим техническим учебным заведением Российской Империи. С 1898 года Г В. Колосов состоит руководителем практических занятий по теоретической механике еще и в Институте гражданских инженеров и на архитектурном отделении Академии художеств.

С уходом Адольфа Кнезера профессором в Берлинскую горную академию в конце 1900 года встал вопрос о замещении освободившейся кафедры прикладной математики Юрьевского университета. Руководство факультетом или медлило, или почему-то хотело обойти предвиденный законом порядок замещения вакансий. 30 января 1902 года попечитель Рижского учебного округа потребовал, чтобы по вопросу об объявлении конкурса для замещения вакантной кафедры прикладной математики состоялось заключение Совета университета, а 8 марта того же года ректор по постановлению Совета потребовал представления ему всего делопроизводства факультета по названному вопросу. По-видимому около этого времени начались переговоры декана факультета Б. И. Срезневского с Г В. Колосовым о переходе последнего на службу в Юрьевский университет, пока в качестве приват-доцента. 29 сентября 1902 г. на это было получено «высочайшее соизволение». Однако вскоре выяснилось, что в делопроизводстве не был соблюден закон: Г В. Колосову было присвоено наименование приват-доцента «неточно», а именно без защиты специальной диссертации на получение права чтения лекций (*pro venia legendi*), как этого требовал устав Юрьевского университета. О таком требовании никто Г В. Колосова не уведомил. Предвидя возможность возникновения дрязг для него лично и больших неприятностей для лиц, по вине которых возникла путаница, он хотел было совершенно отказаться от приезда на работу в Юрьевском университете. К счастью для университета, 31 января 1903 года последовало новое «высочайшее соизволение», а именно «на допущение хранителя кабинета практической механики С.-Петербургского университета магистранда Колосова, не взирая на несоблюдение требуемых уставом Юрьевского университета условий, к чтению лекций в сем университете, впредь до получения степени магистра, в качестве приват-доцента .». Магистерская диссертация Колосова на тему: «О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела», была уже готова и 11 мая 1903 года состоялась ее публичная защита в Петербургском университете. В августе того же 1903 года состоялось назначение Г В. Колосова экстраординарным профессором Юрьевского университета.

В Юрьевском университете Г В. Колосов проработал 10 лет. В 1909 году Г В. Колосов напечатал большую, ставшую потом отправным пунктом для других исследователей, ныне уже классическую работу: «Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости» и представил ее Петербургскому университету в качестве докторской диссертации. Как передавал потом сам Гурий Васильевич, работа была допущена к защите не без трений. Все же защита, состоявшаяся 21 ноября 1910 года, прошла успешно и докторская степень была автору присуждена. «Высочайшим приказом по гражданскому ведомству» от 28 марта 1911 года Г В. Колосов был назначен ординарным профессором Юрьевского университета, а таким же приказом от 9 сентября 1913 года, по избрании по конкурсу, переведен на службу ординарным профессором Электротехнического института в Петербурге, по кафедре теоретической механики.

В Петербург Г В. Колосова тянул не столько Электротехнический институт, сколько Петербургский университет, где он имел бы большую аудиторию, смог бы шире развернуть работу в избранном направлении и создать свою школу. Предложением от 2 ноября 1913 года он был допущен к чтению лекций в Петербургском университете с зачислением в штат приват-доцентов с весеннего полугодия 1914 года. Уже через 2 года, в 1916 году, он занимает ординарную профессуру механики Петербургского университета, унаследовав кафедру своего учителя К. Д. Бобылева, и заведует ею до назначения его заведующим кафедрой механики упругих тел в августе 1930 года. В 1931 году Г В. Колосов избирается членом-корреспондентом Академии наук СССР Однако дальнейшую работу Г В. Колосова прервала смерть.

2. Научная и педагогическая деятельность Г В. Колосова

Список научных трудов Г В. Колосова содержит 63 номера. Из этих работ можно выделить четыре основные группы: к первой относятся работы, посвященные теории вращения твердого тела вокруг неподвижной точки; ко второй — работы о движении твердого тела в идеальной жидкости; к третьей — работы по теории упругости; к четвертой — работы с более или менее случайной тематикой.

Фундамент динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, был заложен в 1765 году Леонардом Эйлером. Им даны дифференциальные уравнения, определяющие движение такого тела, и разобран до конца случай его вращения при отсутствии внешних сил. Этот случай имеем перед собою, например, когда подвешиваем тяжелое тело в центре его тяжести. Следующий большой шаг вперед в продвижении проблемы был сделан современником Эйлера, великим французским математиком Лагранжем (Joseph-Louis Lagrange), решившим в 1788 году задачу для случая, когда рассматриваемое тело есть тело вращения, ось которого проходит через неподвижную точку. Математические трудности решения задачи для всех прочих случаев были непреодолимы, и вопрос стоял на мертвой точке ровно 100 лет: безуспешно занимались им крупнейшие математики мира. Парижская Академия включала продвижение этой задачи в свои конкурсные задания на соискание крупных премий. Такой конкурс Парижская Академия объявила в последний раз в 1888 году, связав его с одной из наиболее почетных своих премий — премией Бордена (Bordin). Академия поставила непременным условием, чтобы в конкурсном сочинении были усовершенствованы или дополнены в каком-либо существенном отношении уже добытые результаты в этой области механики. Из 15 представленных работ достойной премии оказалась только одна. Так как тема задавалась раньше уже два раза безрезультатно, представленная же на третий конкурс работа превзошла по своим достижениям все ожидания, то премию решено было увеличить с 3000 золотых франков до 5000. При вскрытии приложенного к работе конверта в нем оказалась карточка с именем Софьи Ковалевской, уже общепризнанного ученого, величайшего математика-женщины всех времен, состоявшей в то время ординарным профессором Стокгольмского университета. Как известно, в условиях царского времени Ковалевской не удалось устроиться научным работником на своей родине ни до, ни даже после ее научного триумфа в Парижской Академии. Работа Софьи Ковалевской вызвала исключительный интерес и многочисленные попытки к дальнейшему продвижению проблемы, особенно в направлении отыскания новых частных случаев интегрируемости уравнений Эйлера с одной стороны и детального истолкования случая Ковалевской с другой. Много усилий в этом направлении было приложено со стороны ведущих прикладных математиков и теоретиков-механиков Петербургского и Московского университетов, каковыми были тогда: Д. К. Бобылев, В. А. Стеклов, Н. Е. Жуковский. К ним присоединились потом еще Д. Н. Горячев и Г. В. Колосов. Перу последнего принадлежит 10 работ в этом направлении, напечатанных в русских, немецких, английских и итальянских крупных научных журналах. Заметим мимоходом, что вопросом о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки занимался в Юрьевском университете еще до Колосова (в 1895 году) профессор Отто Штауде, выяснивший ряд вопросов, связанных с свободными осями вращения твердого тела [1] Работы Г. В. Колосова и вышеназванных других русских ученых, правда, не открыли новых путей решения вопросов вращения твердого тела; но вместе с работами некоторых зарубежных исследователей они завершили эпоху, открытую в этой классической проблеме Софьей Ковалевской.

Вторая группа работ Г. В. Колосова, группа работ по движению твердого тела в жидкости, ведет свое начало от парадоксального результата, полученного почти одновременно знаменитым французским энциклопедистом и не менее знаменитым математиком Д'Аламбером (Jean Le Rond D'Alembert) и сотоварищем М. В. Ломоносова по только что основанной Петербургской Академии наук — Леонардом Эйлером: шар,

[1] Свободными осями называются оси, не оказывающие при вращении тела давления на подшипники.

движущийся в несжимаемой идеальной жидкости, не встречает в ней никакого сопротивления. Задача о движении твердого тела в жидкости связана (как и задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки) с большими математическими трудностями, а потому всякий новый решенный частный случай этой задачи представляет большой интерес, правда в основном только математический: вопросы, которые тут ставит жизнь — вопросы движения судна в жидкости, вопросы движения самолета и вопросы движения реактивного снаряда в воздухе, — решаются сейчас изо дня в день и, конечно, не спрашивая, проинтегрированы ли в классическом смысле дифференциальные уравнения этого движения или нет. Если нет, решение вопроса дается мощными приближенными методами математического анализа.

Третью группу работ Г В. Колосова составляют его исследования, посвященные применению теории функций комплексного переменного к решению задач теории упругости. Работ, относящихся к этой группе, всего 17 Самой крупной из них и по величине, и по значению является занимающая 187 страниц докторская диссертация Г В. Колосова: «Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости», Юрьев, 1909 г. Как говорил сам Гурий Васильевич, он к мысли о вероятной возможности применения методов комплексной переменной в теории упругости пришел, изучая знаменитую работу Н. Е. Жуковского «Видоизменение метода Кирхгофа для определения течения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной наперед линии тока», о которой он всегда говорил с восхищением. Зная о не совсем доброжелательном отношении к своей диссертации со стороны петербургских математиков, он с нелегким сердцем поехал на ее защиту и тогда, надо думать, сам не предполагал, что этой своей работой закладывает фундамент исключительным успехам теории упругости в нашем отечестве. В 1915 году Г В. Колосов опубликовывает совместно со своим учеником, только что окончившим Петербургский университет, Николаем Ивановичем Мусхелишвили, работу «О равновесии упругих круглых дисков под влиянием напряжений, приложенных в точках их обвода и действующих в их плоскости», а через 18 лет Н. И. Мусхелишвили печатает свой капитальный труд «Некоторые основные задачи математической теории упругости», которым сразу завоевал себе место крупнейшего представителя теории упругости не только в Советском Союзе, но, пожалуй, и во всем мире. Во всякой задаче теории упругости основными величинами являются напряжение и смещение. В своей докторской диссертации Г В. Колосов выразил их через две функции комплексного переменного. Данные Г В. Колосовым в 1909 году формулы являются и теперь еще рабочим инструментом для решения плоских задач теории упругости. Строгому же обоснованию и дальнейшему блестящему развитию методов, базирующихся на формулах Г В. Колосова, мы всецело обязаны Н. И. Мусхелишвили. Работа Н. И. Мусхелишвили была оценена сразу же после ее появления. Немалую в этом заслугу имел покойный академик А. Н. Крылов — знаменитый теоретик корабля. Уже в год появления «Некоторых основных задач математической теории упругости» Н. И. Мусхелишвили избирается членом-корреспондентом АН СССР, в 1933 году — в действительные члены АН СССР, а с 1941 года он президент АН Грузинской ССР Второе издание названной выше книги, вышедшее в 1935 году, удостоилось Сталинской премии первой степени. Созданная Н. И. Мусхелишвили Тбилисская школа прикладных математиков является сейчас одной из самых мощных математических школ Советского Союза. Первым своим крупным успехам она обязана жизненности идей, заложенных в основных формулах докторской диссертации Г В. Колосова.

Четвертую группу работ Г В. Колосова составляют небольшие работы с довольно пестрой тематикой: тут находим и обзорные статьи о работах русских механиков, и статью «О преподавании механики», и статью «О законе Бэра размывания берегов рек», две статьи «Математическая теория заразительности эклампсии», и статью «Формула Пирсона в применении к ботаническим исследованиям П. И. Кузнецова», и ряд других. Г В. Колосов был убежден, и эту свою мысль высказывал неоднократно, что математический метод исследования приложим в конечном счете ко всем окружающим нас явлениям природы. В частности он живо интересовался приложениями теории вероятностей к биологическим явлениям.

Г В. Колосов вырос в школе К. Д. Бобылева, представителя чисто аналитического, лагранжевого направления в теоретической механике. Поэтому понятно, что все его теоретико-механические работы отражают стремление добиться приведения задачи к «изящным» уравнениям и формулам. Но Гурий Васильевич никогда только этим не ограничивался: он высоко ценил наглядные, геометрические методы и всегда заботился о внесении элемента живого представления в изложение истин теоретической механики.

Г В. Колосов глубоко и всесторонне владел своим предметом, обладал «чутьем красивого» в математике, прекрасно владел словом, очень изящно писал на доске. Гурий Васильевич был увлекательным лектором; редкая его лекция проходила без приведения захватывающих моментов и интересных деталей из истории науки и жизни ее творцов. Наиболее ценным был в его лекциях элемент «последних донесений с позиций»: Гурий Васильевич был глубоко убежден в том, что «студента необходимо в науке возможно скорее вывести на позицию, туда, где стреляют». Несколько отрицательно сказались на его педагогической деятельности его забывчивость и феноменальная рассеянность; студенты, ожидая его прихода в аудиторию, не всегда были уверены в том, какой из предметов он будет читать и трудно было предвидеть, о чем будет итти речь в одной или другой лекции.

Г В. Колосов был по природе своей отзывчивым человеком и всегда, чем мог, помогал студентам. Он был большой патриот и в этом же духе воспитывал своих учеников. В частности, он всегда с большой гордостью говорил о достижениях отечественной науки и необходимости ее пропаганды как у себя дома, так и за рубежом. Г В. Колосов на политической арене и в общественной жизни не выступал; но он был человеком передового образа мысли; он не мог без негодования говорить о разорении Московского университета министром Л. А. Кассо; перенесение же тем же министром подготовки молодых научных кадров из своих отечественных университетов в пресловутые «кассовские заграничные семинары» он считал преступлением.

Юрьевскому университету Г В. Колосов отдал десять лучших лет творческого периода своей жизни; Петроградскому, а затем Ленинградскому университету — в сумме около 30 лет. Перечень знаменитых механиков-теоретиков нашей родины начинается великими именами Леонарда Эйлера и Даниила Бернулли. Он ведет через М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина к славным механикам-теоретикам советского времени. В этой цепи имен на видном месте стоит и имя Гурия Васильевича Колосова.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И АРХИВНЫХ ДОКУМЕНТОВ

Ко всем главам:

1. Левицкий, Г В., Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Юрьевского, бывшего Дерптского, университета за сто лет его существования (1802—1902). Том 1, Юрьев, 1902.
2. Петухов, Е. В., Императорский Юрьевский, бывший Дерптский, университет за сто лет его существования (1802—1902). Том 1: первый и второй периоды (1802—1865). Исторический очерк. Юрьев, 1902.
3. Петухов, Е. В., Императорский Юрьевский, бывший Дерптский, университет в последний период своего столетнего существования (1865—1902). Исторический очерк. С.-Петербург, 1906.

К главе 1 (Мартин Бартельс):

1. Личное дело М. Бартельса в Эстонском Республиканском Историческом Архиве.
2. J. M. C. Bartels, Vorlesungen über mathematische Analysis. Dorpat, 1837. Vorrede.
3. Булич, Н., Из первых лет Казанского университета (1805—1819). Часть первая, Казань, 1887.
4. Статья: Депман, И. Я., М. Ф. Бартельс — учитель Н. И. Лобачевского, Историко-математические исследования. Выпуск III, М.—Л., 1950, стр. 475—485.
5. Friedrich Engel und Paul Stäckel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie I: Nikolai Iwanowitsch Lobatschefskij. Leipzig, 1898, S. 349—422: Lobatschefskijs Leben und Schriften.
6. Каган, В. Ф., Лобачевский. М.—Л., 1944.

7. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Труды Комиссии по истории Академии наук СССР, М.—Л., 1948.

К главе II (Фердинанд Миндинг):

1. Личное дело Ф. Миндинга в Эстонском Республиканском Историческом Архиве.
2. Статья: Александров, П. С., Русская математика XIX и XX вв. и ее влияние на мировую науку. Ученые Записки Московского ордена Ленина Г. университета имени М. В. Ломоносова. Вып. 91, том 1, книга первая. Москва, 1947, стр. 3—33.
3. Статья: Выгодский, М. Я., Математика и ее деятели в Московском университете во второй половине XIX в. Историко-математические исследования. Выпуск 1. М.—Л., 1948, стр. 141—183.
4. Статья: Adolf Kneser, Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst biographischen Notizen, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 45. Band. Historisch-litterarische Abteilung. 1900. S. 113—128.

К главе III (Ф. Э. Молин):

1. Личное дело Ф Э. Молина в Эстонском Республиканском Историческом Архиве.
2. Известия научно-исследовательского института математики и механики при Томском Г университете им. В. В. Куйбышева. Том III, вып. 1. Томск, 1946.

К главе IV (Г. В. Колосов):

1. Личное дело Г В. Колосова в Эстонском Республиканском Историческом Архиве.
2. Выписка из личного листка по учету кадров, заполненного Г. В. Колосовым 21 ноября 1931 г., Из Архива Ленинградского Г. университета.
3. Выписка из формулярного списка о службе Г В. Колосова, Из Архива Ленинградского Г университета.
4. Копия с Curriculum vitae Г. В. Колосова, Из Архива Ленинградского Г. университета.
5. Копия со списка: «Главнейшие научные труды проф. Г В. Колосова», Из Архива Ленинградского Г университета.

TARTU ÜLIKOOLI NELJA SILMAPAISTVA MATEMAATIKU ELUST JA TEGEVUSEST

Prof. G. Rägo
Teoreetilise mehaanika kateeder

Resümee

Matemaatika professoritest, kes on töötanud Tartu ülikoolis selle 150-aastase tegevuse ajal ja on jätnud eriti sügavaid jälgi kodumaise teaduse arengusse, tuleb nimetada eelkõige nelja nime: Martin Bartels, Ferdinand Minding, Theodor Molien ja Guri Kolossov.

M. Bartels sündis 1769. aastal vaeste vanemate lapsena. Kuigi ta ei saanud süstemaatilist haridust, arenes ta tänu väsimatule enesetäiendamisele laialt haritud ning oma eriala sügavalt ja igakülgselt tundvaks matemaatikuks. Olles töötanud kümmekond aastat Šveitsis õpetajana, asus ta matemaatika professorina tööle Kaasani ülikooli, kus ta leidis eest kuulajaskonna „harukdaselt suure huvi matemaatiliste ainete vastu" Siin valmistas ta teaduslikule tööle ette terve plejaadi noori teadlasi, nende hulgas suure vene geomeetri N. I. Lobatševski. Magnitski nimega seotud tagurliku voolu mõjulepääsemisel lahkus Bartels Kaasanist ja asus tööle Tartu ülikooli. Temalt said oma matemaatilise hariduse teiste hulgas kõik W Struve koolkonna astronoomid ja geodeedid.

F Minding on suurimaid Tartu ülikoolis töötanud teadlasi. Hariduselt klassikaline filoloog ja ajaloolane, oli ta matemaatikas iseõppijaks. Ta oli ajaliselt esimene Tartu ülikooli r a k e n d u s - m a t e m a a t i k a professor. Tema kuulsamad tööd on pühendatud pindade paindumise probleemile. Tema suurimaks teeneks on konstantse kõverusega pöördpindade avastamine. Neil pindadel sai hiljem oma näitliku, konkreetse tõlgenduse Lobatševski loodud mitteeukleidiline geomeetria. Mindingi paljudest õpilastest väärib eriti esiletõstmist C. Petersohn, kes oma kapitaalse väärtusega töödega pindade teooria alalt pani aluse Moskva diferentsiaalgeomeetria koolkonnale.

T. Molien sündis Riias, õppis Tartu ülikoolis ja kaitses siin 1891. aastal oma hiljem ülemaailmse kuulsuse võitnud doktori-

väitekirja „Kõrgemate kompleksarvude süsteemidest" 1900. aastast peale töötas Molien 41 aastat Tomski Tehnoloogilises Instituudis ja ülikoolis, kasvatades siin, Siberi kaadrite sepikojas, paljusid matemaatikuid ja insenere.

G. Kolossov sündis 1867 aastal Novgorodi kubermangus. Ta lõpetas 1889. aastal Peterburi ülikooli, töötas aastail 1894—1903 mitme Peterburi kõrgema kooli õppejõuna, asus siis Tartu ülikooli rakendusmatemaatika professoriks ja siirdus 1913. aastal jälle tagasi Peterburi, kus töötas oma surmani. Tartus valmis Kolossovil tema kuulus doktoriväitekiri „Kompleksmuutuja teooria ühest rakendusest tasapinnalise elastsusteooria probleemile" Selle tööga pandi alus elastsusteooria ja selle rakenduste hiilgavale arengule Nõukogude Liidus.

МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Ю. Лумисте

Кафедра геометрии

1. В III главе своей работы [1] Л. В. Канторович рассматривает известный метод решения функциональных уравнений — метод наискорейшего спуска, идея которого принадлежит Коши. В этой работе Л. В. Канторович впервые дает исчерпывающее теоретическое обоснование этого метода в случае линейных уравнений. В связи с этим он высказывает мнение, что метод оказывается эффективным и при нелинейных уравнениях.

В настоящей работе делается попытка обобщить метод наискорейшего спуска применительно к случаю нелинейных функциональных уравнений. К одному конкретному случаю, именно к системе нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений этот метод применяли некоторые зарубежные авторы (Curry [2], Booth [3]) без изучения вопросов сходимости. В общем случае, насколько автору известно, это ещё не сделано.

2. Рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$x + F(x) = 0 \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H.

Этому уравнению соответствует некоторая экстремальная задача, решение которой является в то же время решением уравнения (1)

Теорема 1: Если $f(x)$ такой функционал, что $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ в каждой точке x, $x \in H$, то точка x^* которая даёт экстремум функционала

$$I(x) = (x, x) + 2f(x), \tag{2}$$

оказывается решением уравнения (1)

Теорема легко доказывается, если иметь в виду, что необходимым условием для того, чтобы точка x^* дала экстремум функционала (2), является

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(x^* + \varepsilon z)\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

при каждом z, $z \in H$, $\| z \| \leqslant C$, и что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x + \varepsilon z) = (F(x + \varepsilon z), z)$$

3. Экстремальную точку x^* функционала (2) определяем при помощи последовательных приближений. Исходим из некоторой, в общем произвольно выбранной, точки x_0. Переход от приближения x_{n-1} к приближению x_n определяем следующим образом.

Из всех элементов z, $z \in H$, $\| z \| = C$ выбираем элемент $z_n \in H$ так, чтобы $I(x_{n-1} + \varepsilon z)$ имел в точке x_{n-1} при $z = z_n$ наискорейшее изменение. Изменение функционала $I(x_{n-1} + \varepsilon z)$ в точке x_{n-1} определяется выражением

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(x_{n-1} + \varepsilon z)\right]_{\varepsilon=0} = 2(x_{n-1} + F(x_{n-1}), z)$$

Наискорейшее изменение достигается элементом

$$z_n = x_{n-1} + F(x_{n-1}), \tag{I}$$

потому что по неравенству Буняковского

$$(x_{n-1} + F(x_{n-1}), z) \leqslant \| x_{n-1} + F(x_{n-1}) \| \, \| z \| = C \| x_{n-1} + F(x_{n-1}) \|,$$

где равенство получается при $z = z_n$, определяемому формулой (I) (если выбрать $C = \| x_{n-1} + F(x_{n-1}) \|$).

Дальше определяем действительное число ε_n так, чтобы $I(x_{n-1} + \varepsilon z_n)$ имел при $\varepsilon = \varepsilon_n$ экстремальное значение. Мы получим его из условия

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(x_{n-1} + \varepsilon z_n) = 0$$

или

$$(x_{n-1}, z_n) + \varepsilon (z_n, z_n) + (F(x_{n-1} + \varepsilon z_n), z_n) = 0. \tag{II}$$

Это даёт нам уравнение для определения ε_n.

За следующее приближение возьмем

$$x_n = x_{n-1} + \varepsilon_n z_n. \tag{3}$$

Из уравнения (II) вытекает одно важное для дальнейшего анализа следствие. Именно, из (II) видно, что

$$(x_n + F(x_n), z_n) = 0,$$

т. е.

$$(z_{n+1}, z_n) = 0. \tag{4}$$

4. Наша дальнейшая задача заключается в изучении вопроса сходимости последовательности

$$x_0, x_1, \quad , x_n,$$

Допустим, что нам удалось показать замкнутое множество X, содержащее всю эту последовательность. Во всяком случае в роли X можно взять всё пространство H.

Докажем сперва следующую лемму.

Лемма: Если оператор $F(x)$ удовлетворяет на множестве X условию

(5) $$m \| \Delta x \|^2 \leqslant (\Delta F(x), \quad \Delta x) \leqslant M \| \Delta x \|^2$$

где $$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) \text{ и } 0 \leqslant m < M,$$

то решение ε_n уравнения (II) отрицательно и

(6) $$-\frac{1}{1+m} \leqslant \varepsilon_n \leqslant -\frac{1}{1+M}.$$

Доказательство:

Из условия (5) следует

$$m\varepsilon_n^2 \| z_n \|^2 \leqslant (F(x_{n-1} + \varepsilon_n z_n) - F(x_{n-1}), \ \varepsilon_n z_n) \leqslant M\varepsilon_n^2 \| z_n \|^2.$$

Так как в силу (I) и (II)

$$\begin{aligned}
&(F(x_{n-1} + \varepsilon_n z_n) - F(x_{n-1}), \ \varepsilon_n z_n) = \\
&= \varepsilon_n (x_{n-1} + F(x_{n-1} + \varepsilon_n z_n) - x_{n-1} - F(x_{n-1}), \ z_n) = \\
&= \varepsilon_n [(x_{n-1}, z_n) + (F(x_{n-1} + \varepsilon_n z_n), \ z_n) - (z_n, z_n)] = \\
&= \varepsilon_n [-\varepsilon_n \| z_n \|^2 - \| z_n \|^2] = -\varepsilon_n (1 + \varepsilon_n) \| z_n \|^2
\end{aligned}$$

то $$m\varepsilon_n^2 \leqslant -\varepsilon_n (1 + \varepsilon_n) \leqslant M\varepsilon_n^2.$$

Если бы теперь было $\varepsilon_n > 0$, то

$$-\frac{1}{1+M} \leqslant \varepsilon_n \leqslant -\frac{1}{1+m},$$

и мы получили бы противоречие; значит $\varepsilon_n < 0$ (нас интересует только $\varepsilon_n \neq 0$) и

$$-\frac{1}{1+m} \leqslant \varepsilon_n \leqslant -\frac{1}{1+M}$$

5. Используя доказанную лемму, можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2: Если оператор $F(x)$ в уравнении (1) удовлетворяет на множестве X условиям:

1° $\| \Delta F(x) \| \leqslant M \| \Delta x \|$,

2° $(\Delta F(x), \Delta x) \geqslant m \| \Delta x \|^2$, где $m \geqslant 0$,

3° $M < \sqrt{1 + 2m + 2m^2}$,

то последовательность

$$x_0, \ x_1, \quad x_n,$$

сильно сходится к единственному в X решению x^* уравнения (1) со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство:

Из (I) следует

$$z_n - z_{n-1} = [x_{n-1} - x_{n-2}] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] = \\ = \varepsilon_{n-1} z_{n-1} + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-1})]$$

и отсюда в силу условия 1°

$$\| z_n - (1 + \varepsilon_{n-1}) z_{n-1} \| = \| F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) \| \leqslant M \mid \varepsilon_{n-1} \mid \| z_{n-1} \|.$$

С другой стороны (4) дает

$$\| z_n - (1 + \varepsilon_{n-1}) z_{n-1} \|^2 = \| z_n \|^2 + (1 + \varepsilon_{n-1})^2 \| z_{n-1} \|^2.$$

Следовательно

$$\| z_n \|^2 \leqslant [M^2 \varepsilon^2_{n-1} - (1 + \varepsilon_{n-1})^2] \| z_{n-1} \|^2$$

и

(7) $$\| z_n \| \leqslant q_{n-1} \| z_{n-1} \|,$$

где $$q_{n-1} = \sqrt{M^2 \varepsilon^2_{n-1} - (1 + \varepsilon_{n-1})^2}$$

Нетрудно показать, что из 1° и 2° следует выполнение условия (5) леммы.

Теперь в силу (6) и условия 3° имеем

$$0 \leqslant M^2 \varepsilon^2_{n-1} - (1 + \varepsilon_{n-1})^2 \leqslant \frac{M^2}{1 + m^2} - \left(1 - \frac{1}{1 + m}\right)^2 = \frac{M^2 - m^2}{(1 + m)^2} < 1,$$

значит

(8) $$0 \leqslant q_{n-1} \leqslant Q < 1,$$

где $$Q = \frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{1 + m}$$

Неравенства (7) и (8) имеют место при каждом n. Поэтому

$$\| z_n \| \leqslant q_{n-1} \| z_{n-1} \| \leqslant q_{n-1} q_{n-2} \| z_{n-2} \| \leqslant \\ \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} q_k \| z_1 \| \leqslant Q^{n-1} \| z_1 \|.$$

Уравнение (1) и равенство (I) дают

$$[x_{n-1} - x^*] + [F(x_{n-1}) - F(x^*)] = z_n,$$

откуда

$$\| [x_{n-1} - x^*] + [F(x_{n-1}) - F(x^*)] \| = \| z_n \|.$$

Но

$$\| [x_{n-1} - x^*] + [F(x_{n-1}) - F(x^*)] \|^2 = \| x_{n-1} - x^* \|^2 + \\ + 2(F(x_{n-1}) - F(x^*),\ x_{n-1} - x^*) + \| F(x_{n-1}) - F(x^*) \|^2 \geqslant \\ \geqslant (1 + 2m) \| x_{n-1} - x^* \|^2,$$

ибо в силу условия 2° и замкнутости множества X

$$(F(x_{n-1}) - F(x^*),\ x_{n-1} - x^*) \geqslant m \| x_{n-1} - x^* \|^2,$$

а $$\| F(x_{n-1}) - F(x^*) \|^2 \geqslant 0.$$

Значит

$$(1+2m)\| x_{n-1}-x^* \|^2 \leqslant \| z_n \|^2$$

и

$$\| x_{n-1}-x^* \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+2m}} \| z_n \| \leqslant \frac{\| z_1 \|}{\sqrt{1+2m}} Q^{n-1},$$

что и доказывает теорему.

Оказывается, что условие 2° гарантирует и однозначность решения в множестве X. Действительно, если допустим, что X содержит кроме решения x^* ещё другое решение x^{**} то

$$(x^*-x^{**})+[F(x^*)-F(x^{**})]=0$$

и

$$\| x^*-x^{**} \|^2+(F(x^*)-F(x^{**}),\ x^*-x^{**})=0.$$

Так как здесь оба слагаемые неотрицательны, то остается единственная возможность, что они оба равны нулю; в частности

$$\| x^*-x^{**} \|=0,$$

т. е.

$$x^*-x^{**}=0$$

или

$$x^*=x^{**}$$

6. Практическое применение метода наискорейшего спуска в предлагаемом виде часто наталкивается на технические трудности, связанные с нелинейностью уравнения (II) для определения ε_n. Эти трудности можно обойти, если определить ε_n не из уравнения (II), а взять просто $\varepsilon_n=\varepsilon$, где ε придётся выбрать так, чтобы была обеспечена достаточно хорошая сходимость процесса. Это окажется вполне возможным, если иметь в виду (6). Метод в таком виде можно рассматривать как некоторое улучшение метода итерации. Именно, оказывается, что при $\varepsilon_n=-1$ получается обычный метод итерации. То, что предлагаемый метод действительно является улучшением метода итерации, видно из того, что он обеспечивает сходимость при более общих условиях (условием сходимости метода итерации является $\| \Delta F(x) \| \leqslant M \| \Delta x \|$, где $M<1$), и имеет более быструю сходимость $\left(\frac{\sqrt{M^2-m^2}}{1+m}<M,\right.$ если $\left.m>0\right)$.

7 Метод наискорейшего спуска успешно применяется к решению систем нелинейных уравнений. Но более важным является возможность решить при помощи этого метода с достаточной точностью нелинейное интегральное уравнение вида

$$x(s)+\int_0^1 K(s,\ t,\ x(t))\,dt=0,$$

где $K(s,\ t,\ u)$ есть непрерывная функция своих аргументов.

Автор рассмотрел, например, уравнение

$$x(s)+\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}} e^{x(t)+\sqrt{t^2+1}-t}\,dt=0,$$

точное решение которого есть

$$x^*(s)=s-\sqrt{s^2+1}.$$

При приближенном вычислении интегралов было выбрано некоторое видоизменение формул Гаусса, предлагаемое Ветчинкиным в [4].

Если за первоначальное приближение взять $x_0(s)=0$, то пятое приближение получается в виде

$$x_5(s)=-\left[\frac{0{,}00609}{\sqrt{s^2+0{,}0025}}+\frac{0{,}05321}{\sqrt{s^2+0{,}0529}}+\frac{0{,}14700}{\sqrt{s^2+0{,}2500}}+\right.$$
$$\left.+\frac{0{,}17816}{\sqrt{s^2+0{,}5292}}+\frac{0{,}11614}{\sqrt{s^2+0{,}9025}}\right]$$

При этом погрешность $|x^*(s)-x_5(s)|$ не превосходит 0,007. если $0\leqslant s\leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Успехи матем. наук, т. III, вып. 6 (28), (1948), 89.
2. H. Curry, Quart. Appl. Math., 2, № 3, (1944), 258.
3. A. D. Booth, Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., 2, (1949), 460.
4. В. П. Ветчинкин, Труды Центр. аэрогидр. инст., вып. 192, (1934).

KIIREIMA LANGUSE MEETOD MITTELINEAARSETE VÕRRANDITE KORRAL

Ü. Lumiste
Geomeetria kateeder

Resümee

Töös vaadeldakse mittelineaarset funktsionaalvõrrandit

$$(1) \qquad x + F(x) = 0$$

Hilberti ruumis H ning seatakse talle vastavusse teatud ekstreemumülesanne. Funktsionaali

$$I(x) = (x, x) + 2f(x)$$

ekstreemum osutub võrrandi (1) lahendiks ja on leitav kiireima languse meetodiga. ($F(x) = \text{grad}\, f(x)$ iga $x \in H$ korral).

Võttes alglähendiks x_0, leiame lähendi x_{n-1} abil lähendi x_n järgmiselt:

$$(\mathrm{I}) \qquad x_n = x_{n-1} + \varepsilon_n z_n$$

kus

$$z_n = x_{n-1} + F(x_{n-1})$$

ning ε_n on valitud nii, et $I(x_{n-1} + \varepsilon z_n)$ omaks kohal $\varepsilon = \varepsilon_n$ ekstreemumi. ε_n määramiseks saame võrrandi

$$(\mathrm{II}) \qquad (x_{n-1}, z_n) + \varepsilon(z_n, z_n) + (F(x_{n-1} + \varepsilon z_n), z_n) = 0.$$

Kui iteratsioonijada $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ kuulub ruumis H asuvasse kinnisesse hulka X, siis jada koondub tugevalt võrrandi (1) lahendiks x^*, mis on ainus X-s, kui on täidetud tingimused

1° $\|\Delta F(x)\| \leqslant M\|\Delta x\|$,
2° $(\Delta F(x), \Delta x) \geqslant m\|\Delta x\|^2$, kus $m \geqslant 0$,
3° $M < \sqrt{1 + 2m + 2m^2}$.

Praktikas osutub mittelineaarse võrrandi (II) lahendamine igal sammul raskeks ning seepärast on lihtsam võtta $\varepsilon_n = \varepsilon$, kus

$$-\frac{1}{1+m} \leqslant \varepsilon \leqslant -\frac{1}{1+M}.$$

Meetod osutub hariliku iteratsioonimeetodi paranduseks. Nimelt erijuhul, kui $\varepsilon_n = -1$, saame hariliku iteratsioonimeetodi. Kiireima languse meetod koondub avaramatel tingimustel ning seejuures kiiremini kui iteratsioonimeetod.

Lõpuks vaadeldakse meetodi rakendamist mittelineaarse pideva tuumaga integraalvõrrandi

$$x(s) + \int_0^1 K(s, t, x(t))\,dt = 0$$

korral.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Л. Выханду

Кафедра геометрии

Метод Ньютона для решения систем n алгебраических уравнений с n неизвестными

$$(1) \qquad y^i = f_i(x^1, \quad , x^n) = 0, \quad (i = 1,\ 2, \quad n)$$

состоит в том, что если нам известно начальное приближение к корню $(x_0^1, \quad , x_0^n)$, то следующее приближение $(x_1^1, \quad , x_1^n)$ определяется из системы уравнений для поправок

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^1}\right)_0 (x_1^1 - x_0^1) + \quad + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^n}\right)_0 (x_1^n - x_0^n) + \\ + f_i(x_0^1, \quad , x_0^n) = 0, \quad (i = 1,\ 2, \quad n).$$

Если выполнены условия, рассмотренные Канторовичем [1], то данная алгебраическая система имеет решение, которое может быть найдено с помощью процесса Ньютона. Геометрически это значит, что мы заменяем поверхности в $n + 1$ мерном пространстве касательными плоскостями к ним в точках $(x_0^1 \quad x_0^n, y_0^i)$, $(i = 0,1, \quad n)$, где $y_0^i = f_i(x_0^1, \quad , x_0^n)$.

Сходимость метода Ньютона мы сможем ускорить, если вместо поверхностей y^i рассмотрим гиперболоиды z^i, имеющие с ними касание второго порядка.

Первое приближение $(x_1^1, \quad x_1^n)$ к решению системы (1) определяем из системы уравнений

$$(3) \qquad a_1^i(x_1^1 - x_0^1) + \quad + a_n^i(x_1^n - x_0^n) + a^i_{n+1} = 0 \\ (i = 1, 2, \quad , n).$$

где a^i коэффициенты гиперболоида

$$(4) \qquad z^i = \frac{a_1^i(x_1^1 - x_0^1) + \cdots + a_n^i(x_1^n - x_0^n) + a^i_{n+1}}{\sum\limits_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} b_j(x_1^j - x_0^j)(x_1^k - x_0^k) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x_1^j - x_0^j) + c_{n+1}},$$

имеющего в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n, y_0^i)$ касание второго порядка с поверхностью (1)

$$y^i = f_i(x^1, \ldots x^n).$$

Если

$$u_0^i = f_i(x_0^1, \ldots x_0^n)$$

(5)
$$u^i_{x_j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 \quad (j = 1, 2, \ldots n),$$

$$u^i_{x_j^2} = \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}\right)_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

то мы можем коэффициенты a^i определить из системы уравнений, которую получаем из условий, что поверхности y^i и гиперболоиды z^i имеют касание второго порядка.

Определитель полученной таким образом системы линейных уравнений

(6)
$$\Delta = u_0^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & u_0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & u_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2u^i_{x_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 2u^i_{x_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2u^i_{x_{n-2}} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 2u^i_{x_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 2u^i_{x_n} \end{vmatrix}.$$

и вектор свободных членов:

(7)
$$(-\Delta \cdot u_0^i, -\Delta \cdot u^i_{x_1}, \ldots, -\Delta \cdot u^i_{x_n}, -\Delta \cdot u^i_{x_1^2}, \ldots, -\Delta \cdot u^i_{x_n^2}).$$

При решении этой системы получаем:

(8)
$$a^i_j = u^i_{x_j} - \frac{u^i_0 u^i_{x_j^2}}{2u^i_{x_j}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots n),$$

$$a^i_{n+1} = u^i_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В качестве примера рассмотрим следующую систему:

(9)
$$\begin{aligned} x^2y^2 - 2x^3 - 5y^3 + 10 &= 0 \\ x^4 - 8y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

За начальное приближение возьмем точку $(-2,\ 2)$.

Система для определения первых поправок $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$ будет для метода Ньютона

$$(10)\qquad \begin{aligned} -40\ \Delta x - 44\ \Delta y + 2 &= 0 \\ -32\ \Delta x - 8\ \Delta y + 1 &= 0, \end{aligned}$$

так что значения поправок будут

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0{,}0257 \\ \Delta y &= 0{,}0221, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x = -1{,}9742 \\ y_1 &= y_0 + \Delta y = 2{,}0221. \end{aligned}$$

Обобщенный метод Ньютона дает систему

$$(11)\qquad \begin{aligned} -39{,}2\ \Delta x - 45{,}18182\ \Delta y + 2 &= 0 \\ -31{,}25\ \Delta x - 8\ \Delta y + 1 &= 0, \end{aligned}$$

решение которой есть

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0{,}02658 \\ \Delta y &= 0{,}02121. \end{aligned}$$

Таким образом первое приближение будет

$$\begin{aligned} x_1 &= -1{,}97342 \\ y_1 &= 2{,}02121. \end{aligned}$$

С точностью до седьмого десятичного знака получаем

$$\begin{aligned} x &= -1{,}9735205 \\ y &= 2{,}0211670. \end{aligned}$$

Как видим, система (11) определяет приближение решения точнее, чем система (10), и это за счет лишь небольшого увеличения объема вычислительной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Успехи матем. наук, т. III, вып. 6(28), (1948), 89.

NEWTONI MEETODI ÜLDISTUS MITTELINEAARSETE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMISEKS

L. Võhandu
Geomeetria kateeder

Resümee

Töös vaadeldakse mittelineaarse võrrandisüsteemi

(1) $y^i = f_i(x^1, \quad x^n) = 0 \quad (i = 1,2, \quad , n)$

lahendamist puutuvate hüperboloidide meetodi abil.

Esimese lähendi võrrandisüsteemi (1) lahendile $(x_1^1, \quad , x_1^n)$ leiame alglähendi $(x_0^1, \quad , x_0^n)$ abil lineaarsest võrrandisüsteemist

(3) $$a_1^i(x_1^1 - x_0^1) + \quad + a_n^i(x_1^n - x_0^n) + a^i_{n+1} = 0$$
$$(i = 1,2, \quad , n)$$

kus a^i tähendab pinnaga $y^i = f_i(x^1 \quad , x^n)$ punktis $(x_0^1, \quad , x_0^n, y_0^i)$ teist järku puutumist omava hüperboloidi

$$z^i = \frac{a_1^i(x_1^1 - x_0^1) + \ldots + a_n^i(x_1^n - x_0^n) + a^i_{n+1}}{\sum\limits_{j,k=1,\, j\neq k}^{n} b_j(x_1^j - x_0^j)(x_1^k - x_0^k) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x_1^j - x_0^j) + c_{n+1}}$$

kordajaid.

Tuues sisse tähistused

$$u_0^i = f_i(x_0^1, \quad , x_0^n),$$
$$u^i_{x_j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_0 \quad (j = 1,2, \quad , n),$$
$$u^i_{x^2_j} = \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}\right)_0 \quad (j = 1,2, \quad , n),$$

saame võrrandisüsteemi (3) kordajate jaoks avaldised

$$a_j^i = u^i_{x_j} - \frac{u_0^i u^i_{x_j^2}}{2u^i_{x_j}} \quad (i, j = 1,2, \quad , n)$$

$$a^i_{n+1} = u_0^i \quad (i = 1,2, \quad n).$$

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПРОБЛЕМА ЭВОЛЮЦИИ ЗВЕЗД-ГИГАНТОВ

Проф. Т. Роотсмяэ

Кафедра астрономии и геофизики

Проблема эволюции звезд весьма интересна и актуальна, так как она связана с изучением строения и свойств материи в гораздо более широких физических условиях по сравнению с теми, которые могут осуществляться при наших лабораторных исследованиях. Занимаясь изучением звездной космогонии и эволюции, мы изучаем материю в космической обстановке — в пределах особенных, экстремальных значений температуры и давления. Но актуальность этой проблемы возрастает еще благодаря тому, что история развития звезд касается и развития Солнца, как одной из звезд, с которой теснейшим образом связана жизнь на нашей планете.

1. Исходной основой и средством ориентировки при решении вопросов звездной эволюции является диаграмма «спектр — светимость», в которой интерпретируются корреляции между абсолютной светимостью звезды и ее спектральным типом. Согласно этой диаграмме звезды группируются в два видных раздела — в звезды-гиганты и звезды главной последовательности. Но кроме упомянутых категорий звезд, в настоящее время различают еще сверх- и субгиганты, субкарлики, белые карлики, цефеиды с длинным и коротким периодом, мириды и другие.

В то время, когда вопрос о внутреннем строении и источниках энергии звезд главной последовательности, благодаря успехам теоретической астрофизики, казался уже почти выясненным [1], аналогичный вопрос относительно звезд-гигантов оставался далеко еще нерешенным. Оказалось весьма трудным объяснить интенсивность излучения звезды-гиганта, допуская, что модель ее построена на таких же началах, на каких построена и модель звезды-карлика, если только ее ядру не приписать особых свойств, например, очень быстрое вращение вместе с конвективной турбулентностью или крайне большую плотность вещества с весьма высокой температурой, являющейся следствием гравитационного сжатия центральной части звезды. При таких предпосылках возможно освобождение ядерной энергии атомов. Кроме того, без добавочных условий возраст этих звезд оказался бы относительно очень коротким, что на основании наблюдений нельзя считать вероятным. Производство энергии при помощи углеродного цикла, при превращении водорода в гелий, также не может вполне объяснить вопрос в случае этих звезд [1].

Несмотря на то, что разработкой теории строения гигантских звезд занимался ряд исследователей, в том числе Альбада [2], Гамов [3; 4], Козырев, Ландау [5], Эпик [6], Северный [7; 8], Соболев [9] и другие, у нас, повидимому, нет еще удовлетворительной теории для интерпретации внутреннего строения гигантских звезд. Тем более трудным является в настоящее время создать теорию развития или, по крайней мере, указать направление пути эволюции этих звезд.

По первоначальной концепции Рессела, гигантские звезды, образовавшиеся из рассеянной газово-пылевой материи, имеют в начальный период звездного развития очень малую плотность, которая, однако, благодаря действию гравитационных сил с течением времени постепенно увеличивается. Объем и радиус звезды при этом уменьшаются, гравитационная потенциальная энергия при сжатии газового шара превращается в кинетическую энергию частиц, одним из следствий чего является постепенное повышение температуры звезды. Вследствие этого спектральный тип звезды переходит от «позднего» к более «раннему», проходя последовательно типы M, K, G, F A до B; цвет звезды из красного становится более белым, причем абсолютная светимость звезды почти не изменяется. Таким образом при гравитационном сжатии звезды ее плотность возрастает и температура повышается; звезда излучает энергию за счет сил тяготения. Но как показали расчеты, такой, так называемый кельвинский, период развития является сравнительно непродолжительным, вследствие чего вероятность найти звезду в такой стадии развития должна быть малой.

Таким образом, модель строения звезды из идеального газа по Эддингтону в применении к гигантским звездам для изучения их внутреннего строения и эволюции, не оказалась эффективной. Для интерпретации того, что происходит в гигантских звездах, применялись иногда сложные модели внутреннего строения звезд [6]. Согласно таким схемам ядра звезд-гигантов считаются очень плотными и горячими. В чрезвычайных условиях температуры и давления материя в центральной области звезд-гигантов в высокой степени ионизирована. При таких условиях ядра атомов чрезвычайно приближены друг к другу, и между ними происходят соударения с весьма интенсивным выделением ядерной энергии.

В более позднее время существование очень плотного и горячего центрального ядра внутри гигантской звезды все более находит подтверждение в наблюдениях спектроскопистов, как об этом на основании собственных и других наблюдений докладывает

Мензель [10]: «Может быть, все звезды-гиганты имеют ядра типа звезд Вольфа-Райе, окруженные турбулентными слоями конвективных токов. Известно, что некоторые сверхгиганты имеют обширные атмосферы. В случае α Aurigae мы имеем возмущения в атмосфере звезды, показывающие присутствие протуберанцев и волокнистой структуры.» .«В общем можно рассматривать гиганты как звезды, имеющие горячие ядра, сходные по строению со звездами типа Вольфа-Райе, причем радиус ядра в сравнении с радиусом оболочки представляет совсем малую величину.» В таком же смысле, но еще с большей определенностью высказываются по этому вопросу советские астрономы Масевич [11] и Соболев [9].

Таким образом, по спектру и по структурности упомянутые звезды состоят из двух различных компонентов. Один компонент представляет собой очень плотную и горячую центральную часть звезды, по структуре сходную со звездой Вольфа-Райе; другой же компонент состоит из крайне разреженной, весьма обширной, но с относительно низкой температурой оболочки, окружающей центральную часть звезды. Раньше такие звезды считались, даже Мензелем, двойными звездами [10], компоненты которых имеют различный показатель цвета и спектральный тип. Но на самом деле здесь приходится иметь дело с единой целой звездой, компоненты которой заключены в ней самой, в ее собственной структуре. Нередко в таких случаях мы имеем перед собой неправильную или полуправильную переменную звезду, например, типа α Orionis. Итак, хотя из наблюдений звезд-гигантов можно заключить, что они имеют специфическое строение, отличное от строения звезд главной последовательности, но, повидимому, до сих пор еще не удалось выяснить вопрос как о механизме производства энергии, так и о направлении пути развития этих звезд [8, стр. 329].

Кажется вероятным, что рост массы и плотности весьма горячего и плотного ядра звезды с течением времени прогрессирует. Вследствие освобождения атомной энергии в ядре звезды, окружающая его оболочка может сильно раздуваться и разрежаться. Вместе с тем излучение звезды, приходящееся на единицу ее внешней поверхности в единицу времени, уменьшается, вследствие чего эффективная температура звезды падает, и ее цвет становится более красным, а спектр более «поздним». Таким образом, например, гиганты спектрального класса M должны были бы представлять более позднюю стадию развития гигантской звезды, чем гиганты классов K и G, следовательно, они по возрасту должны оказаться относительно более старыми звездами, опережавшими стадию развития K- и G-гигантов. Но такое представление о направлении пути или линии развития звезд-гигантов совершенно противоположно вышеупомянутой первоначальной эволюционной схеме по Ресселу, которая едва ли соответствует действительности.

В связи с важностью космогонической проблемы вообще и с проблемой эволюции гигантских звезд в частности особенно интересно для выяснения направления хода эволюции звезд применить метод статистического исследования скоростей, т. е. метод кинематических характеристик или элементов.

2. В целях нашего исследования мы используем предположение, по которому состояние равновесия Галактической системы в течение всего времени ее развития характеризуется как нестационарное. Эту точку зрения повидимому подтверждают такие черты строения и динамики Галактической системы, как явление подсистем, звездных облаков, звездных ассоциаций и скоплений, далее большая сгущенность газово-пылевой материи вблизи плоскости галактического экватора. К такому же выводу можно придти рассматривая разнообразие форм внегалактических систем; эти формы, повидимому, в общем представляют отдельные звенья в цепи развития какой-нибудь звездной системы.

Параллельно с вековым изменением формы и механизма звездной системы, с изменением пространственного распределения массы в ней, шло изменение внутреннего строения звезд, эволюция их структуры. Так как звезды с равнозначащими массами могут внешне выявлять весьма различные астрофизические свойства, каковыми являются, например, температура, спектральный тип и показатель цвета, то кажется, что эти свойства являются критериями возраста в развитии звезд. Но так как возрасты их различны, то и начальные моменты их образования должны различаться, если только уместно говорить о таковых «моментах». Поэтому вполне вероятно (это подтверждается и наблюдениями советских астрофизиков — Амбарцумяна, Фесенкова, Шайна и других), что звезды образовались и образуются из космической рассеянной газово-пылевой среды не одновременно, а в последовательные периоды времени в соответствии с различными динамическими состояниями звездной системы Галактики.

Представим себе для наглядности, что в какую-нибудь эпоху времени T_1 (см. схему стр. 124) из диффузной материи в определенном месте галактического пространства сконденсировалась группа звезд с статистически-кинематическими характеристиками, которые мы обозначим через K_1. Обозначим соответственно этому динамическое состояние галактической системы, так называемые динамические характеристики, через D_1, под которыми подразумевается закономерность распределения материи в этой системе, от чего зависит гравитационный потенциал в данном месте пространства. При этом гравитационный потенциал, повидимому, является важнейшим формирующим фактором кинематических характеристик.

В следующую рассматриваемую эпоху T_2 из диффузной материи в той же части пространства образовались или образуются звезды с другими кинематическими характеристиками K_2, соответственно динамической характеристике D_2, и т. д. При этом мы предполагаем, что движение упомянутых звезд в Галактике приблизительно круговое, что эти звезды принадлежат к «плоским» или «промежуточным» подсистемам.

С течением времени динамическая характеристика в данной зоне галактического пространства (например, на расстоянии Солнца от центра Галактики) постепенно изменяется, вследствие чего изменяются и кинематические характеристики звездных групп (подсистем), образующихся одна за другой в эволюционном процессе из диффузной материи. Соответственно этим изменениям, хотя и независимо от них, изменяются и физические характеристики звезд, что и составляет прогрессирующую последовательность этапов их эволюционного пути.

Во время развития Галактики при пространственном перераспределении ее массы в виде звездного и диффузного вещества особенно важно рассмотреть два аспекта: сгущение материи по направлению к центру Галактики и по направлению перпендикулярно к ее основной плоскости симметрии, к плоскости галактического экватора. От изменения того и другого фактора зависит изменение силы притяжения и потенциала в каком-нибудь месте гравитационного поля Галактики. При этом сгущение материи по направлению к центру могло в общем вызвать вековое ускорение ее галактического вращения. Стремление же диффузной материи к основной галактической плоскости могло с течением времени повести к значительному уменьшению дисперсий скоростей близкруговых движений. Важно отметить, что изменение потенциала не может, повидимому, изменять или перемешивать последовательность кинематических элементов ряда звездных групп или подсистем, формирующихся одна за другой в продолжающемся процессе звездообразования. Исходя из этого, кинематические характеристики K_1, K_2, K_3, должны образовать ряды закономерных последовательностей.

Итак, масса сфероидной галактической системы при своем вращении вокруг оси симметрии, в известный период своего развития, все более сгущалась и сплющивалась в направлении, поперечном к галактической плоскости. Звезды, образовавшиеся из рассеянной материи, постепенно все более и более смещавшейся к галактической плоскости, имели соответственно более раннему периоду своего рождения меньшую галактическую концентрацию в сравнении со звездами, сгустившимися затем из более плотного и тонкого слоя материи, рассеянной на более близком расстоянии от основной плоскости Галактики. Параллельно с изменением этой обстановки и в зависимости от нее изменялись закономерно и кинематические характеристики образовавшихся звезд в эпоху их рождения. Если, например, для упрощения задачи считать, что скорости звезд распределены по закону эллипсоида, то происходит изменение элементов этого эллипсоида, т. е. координат его центра (центроида) в пространстве скоростей, далее размеров и направлений осей эллипсоида. Согласно представленной схеме развития звездной системы оси эллипсоидов скоростей звездных групп, образовавшихся последовательно во времени одна за другой, должны были сокращаться и объемы эллипсоидов уменьшаться. Следовательно, должны были уменьшаться в среднем, например, и компоненты пространственных скоростей, перпендикулярных к галактической плоскости, которые мы для краткости называем поперечными скоростями (z-компоненты)

Можно представить, что грандиозный процесс эволюции звездной системы, результатом которого является изменение ее формы и динамики, происходил и происходит не скачкообразно, а более или менее плавно, непрерывно. Внутри звездной системы Галактики из ее диффузной материи последовательно образовались и продолжают образовываться вновь другие звезды попутно с вариацией внешнего вида и механизма внутренних движений системы. Разгруппировав звезды по какой-нибудь астрофизической характеристике, например, по спектру и абсолютной светимости, нетрудно найти соответствие между астрофизическими признаками отдельных группировок и их кинематическими характеристиками, которые зависят от отдельных последовательных ступеней развития звездной системы.

Таким образом, механизм галактической системы представляется нам как бы колоссальным хронографом, который при посредстве формаций скоростей звезд, т. е. тел скоростей, регистрирует последующие ступени внутреннего состояния звезд, что и составляет ход их эволюции.

Нами сделаны попытки применить этот принцип для выяснения закономерностей в ходе развития звезд [12; 13]. Анализируя кинематические характеристики последних, как индикаторы ступеней звездной эволюции, мы должны обнаруживать систематический ход, что действительно и имеет место.

Представленные выше космогонические соотношения можно для большей наглядности фиксировать и уточнять при помощи надлежащей схемы, которая наглядно показывает зависимость хода эволюции звезд от этапов развития звездной системы.

Чтобы создать себе общую картину о динамическом развитии звездной системы, мы пользуемся представлением, что эта система, из рассеянного вещества которой постепенно уплотняются, конденсируются звезды, имеет определенный момент вращения и в известный период времени определенную степень сжатия сфероидной формы, со временем становится более сплюснутой попутно с увеличением вращательной скорости системы.

Отметим в процессе формирования звездной системы какой-нибудь «исходный момент», в действительности же какую-нибудь эпоху с довольно неопределенной продолжительностью, по край-

Схема развития звезд в связи с развитием звездной системы

Эпохи	Динамические характеристики звездной системы	Кинематические характеристики звездных групп	Астрофизические характеристики звезд в связи с их кинематическими характеристиками				
			T_1	T_2	T_3	T_4	. . .
1	2	3	4	5	6	7	
T_1	D_1	K_1	A_1, K_{11}	A_2, K_{12}	A_3, K_{13}	A_4, K_{14}	
T_2	D_2	K_2		A_1, K_{22}	A_2, K_{23}	A_3, K_{24}	
T_3	D_3	K_3			A_1, K_{33}	A_2, K_{34}	
T_4	D_4	K_4				A_1, K_{44}	

ней мере несколько десятков или даже сотен миллионов лет, но по сравнению с продолжительностью существования Галактики совсем незначительный промежуток времени. Обозначим эту выбранную эпоху через T_1 (см. схему). Вообразим, что в ту эпоху из диффузной материи образуются сгустки и из последних формируются звезды, в начале, быть может, соединенные в звездные ассоциации или цепочки. Рассмотрим эту картину возникновения звезд не вблизи центра системы и не около ее периферии, где могут существовать особые условия, а в определенном удалении от центра, например, на расстоянии половины радиуса от него, т. е. приблизительно в зоне, где происходит галактическое вращение Солнца и местных звезд. Представляется вероятным, что дисперсия скоростей звезд, формирующихся из диффузной материи, является величиной того же порядка, как дисперсия скоростей движущейся газово-пылевой массы перед ее сгущением в звезды. Применим для обозначения характеристик распределения скоростей звезд знак K_1, под которым подразумеваем величины, полученные в результате статистической обработки наблюдательного материала скоростей. Эти величины — статистические характеристики скоростей — мы называем *кинематическими характеристиками*, или *элементами* группировок звезд.

Как орбиты звезд в Галактике, так и траектории движущихся частиц подчиняются условиям гравитационного поля Галактики и с течением времени изменяются соответственно изменению потенциала, обусловленному перераспределением масс в пределах звездной системы.

Что касается изменения распределения в пространстве диффузной материи и образующихся из нее звезд, то в этом отношении у них, т. е. у диффузной и звездной материи, должно иметь место значительное различие. В то время, когда распределение формирующихся звезд в пространстве и соответственное распределение их скоростей в продолжение длительного времени изменяются относительно медленно, распределение диффузной материи в пространстве и скоростей ее частиц изменяется значительно более быстрыми темпами. Причиной этого надо считать то обстоятельство, что большие приближения звезд или встречи бывают очень редки в сравнении с соударениями частиц при их движениях. Вследствие столкновений неупругих частиц газово-пылевого вещества частицы теряют скорость и дисперсия скоростей уменьшается, причем частицы «падают», т. е. приближаются как к главной плоскости симметрии, так и к центру звездной системы.

У образовавшихся звезд дисперсия скоростей должна была хотя и в незначительной мере, но медленно даже расти благодаря прогрессивному изменению гравитационного потенциала, зависящего от постепенной, все возрастающей галактической концентрации диффузного вещества. Влияние же приближений и близких встреч между звездами на распределение их скоростей бывает настолько незначительно, что с этим фактором, по крайней мере при первоначальном рассмотрении вопроса, вовсе не приходится считаться. В рамках настоящей работы в задачу автора не входило теоретическое изучение соответственных, сюда относящихся проблем звездной динамики, но в данном случае представленные здесь положения приняты в виде вероятной рабочей гипотезы за основание при разработке вопросов развития звезд.

При первоначальном рассмотрении вопроса о путях развития звезд для упрощения решения задачи мы исходим из допущения, что массы звезд почти равны между собой и постоянны, т. е. с течением времени сколько-нибудь значительно не изменяются. Для выяснения сути вопроса обратимся опять к соответствующей схеме (стр. 124). Пусть какой-нибудь выбранной космической эпохе T_1 соответствует динамическая характеристика D_1, под которой мы понимаем закономерность пространственного распределения массы в Галактике. От этого распределения зависит гравитационный потенциал в каком-нибудь месте внутри галактической системы, а также распределение скоростей звезд и частиц диффузной материи соответственно рассматриваемому месту. Эта характеристика D_1 должна зависеть в общем от внешней формы звездной системы в эпоху T_1. Таким образом динамическим характеристикам соответствуют кинематические характеристики в ту же эпоху в таком виде, как они представляются наблюдателю в какой-нибудь ограниченной части пространства, например, вокруг нас на расстоянии до нескольких сотен или даже тысячи парсеков. Ясно, что кинематические характеристики представляют собой функции динамического состояния Галактики, функции динамических характеристик, следовательно и времени.

Чтобы при помощи нашей схемы можно было следить за ходом эволюции звезд, надо астрофизические характеристики звезд — температуру, цвет, спектр и др. — как показатели отдельных этапов звездного развития, привести в связь с кинематическими характеристиками. При этом важно иметь в виду следующее. На характер эволюции звезды особенно воздействуют два фактора: одним из них является первоначальный состав материала, из которого формируется звезда, а другой — значение первоначальной массы формирующейся звезды. Что касается состава материала, формы материи, то за неимением данных нам в настоящее время остается предположить, что материальный состав всех звезд в начальный период их развития один и тот же. Относительно же масс мы с достаточной достоверностью знаем их значения на основании соотношений «масса — светимость». Следовательно, при изучении звездной эволюции мы можем считаться с массами звезд. Кроме того, так как в настоящее время у нас недостаточно данных, чтобы судить о том, в какой мере в течение рассматриваемого периода эволюции изменяются массы звезд, то для выяснения путей их эволюции приходится принять, что значения масс, если дело не касается особенных звезд, относительно мало изменяются. Если звезды с приблизительно равными значениями массы выявляют различные астрофизические характеристики, то из этого можно заключить, что такие звезды находятся в различных стадиях своего развития и представляют собой звезды различного возраста.

По нашей схеме мы считаем, что в эпоху T_1, когда из диффузной материи образуются только что формирующиеся молодые звезды, у них сперва появляются астрофизические характеристики, по нашему обозначению A_1. Но последние сопоставлены с кинематическими характеристиками, которые мы обозначим через K_{11}. При этом первая цифра индекса означает эпоху T_1, когда звезда пребывает в фазе своего развития, которой соответствуют астрофизические характеристики A_1, вторая же цифра индекса означает ту более позднюю эпоху времени, когда звезду наблюдают, т. е. эпоху, когда фиксируют ее астрофизические характеристики. В рассматриваемом случае обе эти эпохи совпадают, вследствие чего обе цифры индекса одинаковы. С формальной точки зрения первая цифра индекса при K означает порядок горизонтальной строки, вторая цифра — порядок вертикальной строки в нашей схеме. Заметим, что индексы при A повторяются, в то время как индексы при K не повторяются, следовательно кинематические характеристики представляют собой различные числа.

В следующую эпоху T_2, когда динамические и кинематические характеристики выражаются соответственно через D_2 и K_2, формирующиеся звезды начали, как и в предыдущую эпоху, свою карьеру эволюции в связи с астрофизической характеристикой A_1. Но с этой характеристикой должны быть связаны уже другие кинематические характеристики, которые обозначаются через K_{22}. Таким образом, оказывается, что астрофизические характеристики A_1 в этом случае скомбинированы с кинематическими характеристиками K_{22}. Но в то же самое время астрофизические характеристики A_1, свойственные предыдущей эпохе T_1, оказались уже измененными, и их мы обозначим через A_2. С этой характеристикой мы комбинируем кинематические характеристики, которыми являются уже не K_{11}, а K_{12}, получившиеся из K_{11} по прошествии промежутка времени $T_2 - T_1$.

Таким образом можно было бы продолжать рассмотрение нашей схемы, имеющей методологическое значение при трактовке эволюционной проблемы при помощи способа кинематических характеристик. Так, звезды, образовавшиеся в эпоху T_3 из небулярной среды и начавшие свой путь эволюции, имеют также вначале астрофизическую характеристику A_1, в то время как звезды, образовавшиеся в более ранние эпохи T_2 и T_1, являются уже звездами более авансированного возраста и обнаруживают астрофизические характеристики соответственно A_2 и A_3 (см. столбец схемы T_3). Эти астрофизические характеристики теперь уже связаны соответственно с кинематическими признаками или характеристиками K_{23} и K_{13}. Итак, в столбце под T_3 нашей схемы мы видим отдельные этапы звездного развития A_3, A_2, A_1 (читая сверху вниз) Последовательность этих этапов обратна тому порядку, по которому действительно происходит изменение кинематических элементов с течением времени; другими словами — истинное направление пути эволюции звезды. Чтобы получить верную картину о ходе эволюции, надо читать астрофизические характеристики по столбцам снизу вверх: A_1, A_2 A_3, Это сводится к тому же самому, если в строках читать слева направо. Эти физические характеристики связаны соответственно с различаемыми друг от друга кинематическими характеристиками K_{33}, K_{23}, K_{13}, которые являются функциями времени. Таким образом, при посредстве кинематических характеристик оказывается возможным установить физические характеристики звезд в той последовательности, в которой они следуют одна за другой при естественном ходе развития звезд, что дает возможность построить схему их эволюции.

Итак, исходя из сделанных выше предположений о динамике звездной системы, на основании которых кинематические характеристики закономерно изменяются во времени, можно на основании систематического изменения этих характеристик судить о направлении пути развития звезд. Таким образом, кинематические характеристики сопоставлены с возрастными характеристиками звезд.

Картина до некоторой степени имеет аналогию с той, которая наблюдается в каком-нибудь коллективе биологических существ одного вида, например, в человеческом обществе. Юноша видит будущее своего физического состояния в состоянии человека средних лет или старика, родившегося десятки лет тому назад. Свое прошлое же он видит в младенце, который явился на свет после него. Подобно этому мы могли бы предвидеть, например, будущую судьбу Солнца по тем астрофизическим характеристикам, которые присущи звездам более старого возраста, чем Солнце, и имеющим массу, равную солнечной, в то время как прошлое Солнца мы воспринимаем в аспекте астрофизических характеристик звезд с массами, равными солнечной, и возникшими в более поздний период времени.

Если массы звезд были бы равными, то было бы нетрудно вскрывать соотношения между их кинематическими и физическими характеристиками. Достаточно было бы тогда разгруппировать звезды, например, по спектру и определить соответственно отдельным группировкам их кинематические характеристики как функции времени. Эти характеристики связаны с пространственными скоростями и их компонентами, что явствует, например, из распределения поперечных скоростей, т. е. составляющих, перпендикулярных к галактической плоскости. Но последние связаны с распределением звезд в Галактике относительно ее основной плоскости симметрии таким образом, что меньшему значению дисперсии поперечных скоростей соответствует и меньшее значение дисперсии расстояний звезд от галактической плоскости, следовательно большая сплюснутость сфероидной формы Галактики, или также рассматриваемых ее «подсистем». Допуская вероятное последовательное сплющивание звездной системы, или также подсистем, можно на основании вышеуказанного соотношения заключить, что дисперсия поперечных скоростей постепенно уменьшается. Тогда для звезд с равнозначащими массами возможно получить последовательность астрофизических характеристик, что и составляет последовательность этапов развития звезд:

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to$$

Но действительное положение в природе сложнее по сравнению с предварительно установленной схематической картиной развития. При рождении звезд из рассеянной материи распределение их первоначальных масс $F(\mathfrak{M})$ нам сколько-нибудь достоверно еще не известно. Кроме того, массы их с течением времени должны изменяться. Все это осложняет дискуссию о проблеме эволюции звезд в сравнении со случаем, если считать массы их постоянными и между собой равными. Так как от величины массы звезды зависит скорость и интенсивность процесса эволюции, ее своеобразие и разнородность (звезды-гиганты, звезды-карлики и др.), то вследствие этого раскрытие законов звездной эволюции на основании кинематических характеристик связано со значительными трудностями. Эти трудности возросли бы еще более, если допустить значительную изменяемость массы звезд в ходе процесса их развития.

Однако к решению задачи, хотя довольно осложненной конкретными условиями, можно, очевидно, подойти довольно близко, если рассматриваемый коллектив звезд разделить на подгруппы звезд с приблизительно равными массами, заключенными в узких пределах. В таком случае, применяя к нашим подгруппам в отдельности нашу схему развития, можно ожидать, что в каждой подгруппе выявляются такие же закономерности, как в упрощенном случае, т. е. когда массы всех звезд считались равными. Возможно, что звезды, образовавшиеся в одну и ту же эпоху и, по сравнению с размерами Галактики, на малых расстояниях друг от друга, имеют, независимо от величины их масс, кинематические характеристики того же порядка.

Кинематические характеристики образовавшихся и развивающихся звезд в процессе развития Галактики изменяются. Например, в случае поперечных компонентов пространственных скоростей их изменения могут происходить таким образом, что у ранее образовавшихся звезд дисперсии этих компонентов от одной причины уменьшаются, от другой же могут увеличиваться. Причиной последнего явления, как было указано выше, может быть изменение гравитационного поля в зависимости от постепенного приближения сгущающейся диффузной материи к галактической плоскости. Но вызванные таким путем изменения гравитационного поля влияют на поперечные компоненты скоростей в одном и том же направлении и в общем не нарушают качественно какой-нибудь исходной последовательности кинематических характеристик выбранных звездных групп или подсистем.

Можно указать еще на один фактор, от которого также могут зависеть изменения кинематических характеристик звезд. Этим фактором является тенденция к равному распределению кинетической энергии в движениях звезд аналогично распределению энергии в движениях частиц газа. В случае частиц газа фактором, уравнивающим их кинематические энергии, являются столкновения частиц между собою; в случае же звезд, где не только столкновения, но даже и большие приближения бывают очень редки, таким фактором является взаимное притяжение звезд, попавших друг от друга на близкое расстояние.

Хотя такая тенденция теоретически существует, но ее эффект является весьма малым. В результате этого закона скорости более старых и малых звезд должны оказаться больше, чем скорости более юных и массивных звезд, что не приводит, однако, к нарушению раз установившейся последовательности кинематических характеристик.

Таким образом, в результате дискуссии по вопросу о кинематических характеристиках очевидно, что способ определения относительных возрастов звезд при помощи их кинематических характеристик может быть применим к решению проблемы о путях эволюции звезд.

3. Перейдем теперь к более конкретному рассмотрению вопроса на основании данных, выведенных из наблюдений.

Рассмотрим сперва компонент скорости, перпендикулярный к галактической плоскости, названный нами выше поперечною скоростью. Согласно представленной схеме развития звездной си-

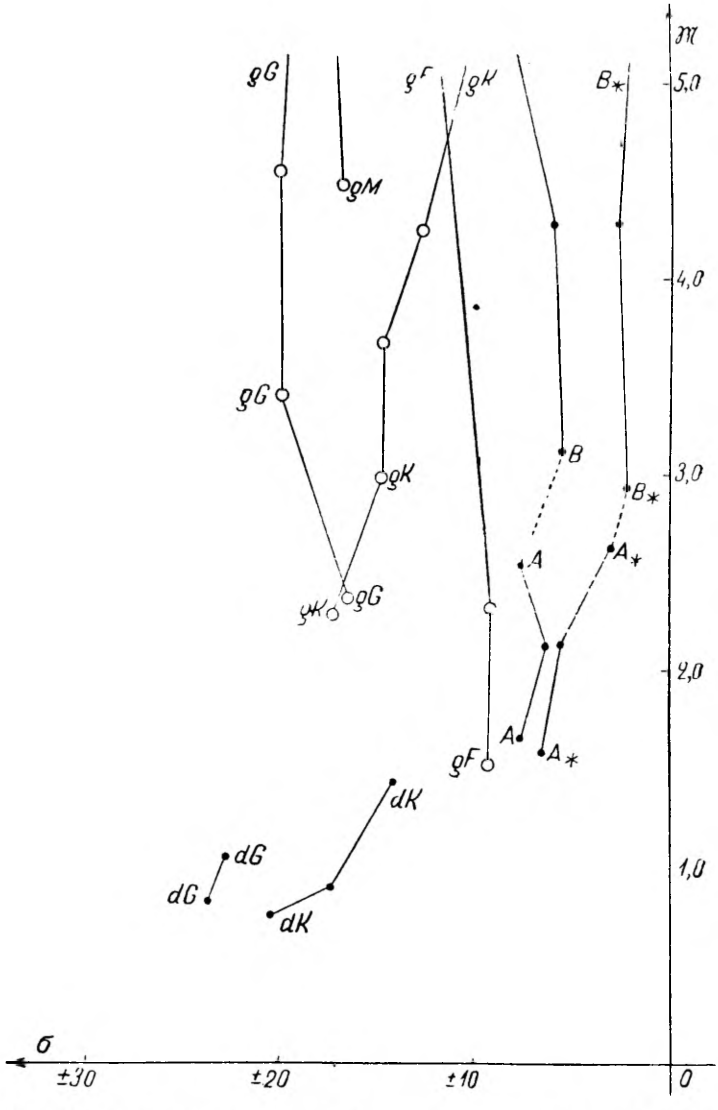


Рис. 1. Связь между дисперсией поперечных скоростей звезд и средним значением их массы $\mathfrak{M}$ соответственно группировкам звезд, указанным в диаграмме.

стемы средние поперечные скорости и их дисперсии у последовательно одна за другой образующихся звездных групп или подсистем постепенно уменьшаются. На основании этого можно предположить, при известных ограничениях, следующий вероятный критерий возрастов звезд: звезды в системе, близкой к стационарному состоянию, являются тем *более молодыми, тем более позднего происхождения, чем меньше их средняя поперечная скорость и дисперсия этих скоростей и, напротив, звезды тем старше, тем более раннего происхождения, чем больше их средняя поперечная скорость и дисперсия этих скоростей.*

Рассмотрим с этой точки зрения схему эволюции звезд при помощи диаграммы (рис. 1) в зависимости от дисперсии поперечных скоростей и от массы.

Для определения кинематических характеристик в этой (рис. 1) и следующей диаграмме (рис. 2) был использован материал, представленный в каталоге компонентов пространственных скоростей [14]. Общий характер этой диаграммы (рис. 1) не изменяется, если массы заменить абсолютной светимостью. Пусть по оси абсцисс представлены дисперсии поперечных скоростей звездных групп, а по оси ординат их массы. При помощи пары таких координат в диаграмме отмечены положения центроидов соответственных групп звезд. Всякую группу характеризует среднее значение массы и спектральный тип со средним его индексом. За единицу массы принята масса Солнца, а дисперсия скоростей выражена в единицах км/сек. Из диаграммы видно, что группы *B*- и *A*-звезд имеют меньшие, карликовые звезды — значительно большие, гиганты же поздних спектральных типов *G*, *K* и *M* промежуточные значения дисперсий поперечных скоростей. Рассматривая дисперсии скоростей как космические показатели времени соответственно этапам развития Галактической системы, можно на основании этого сделать заключения об относительных возрастах звезд с различными физическими характеристиками. При применении этого принципа оказывается, что *A*- и *B*-звезды должны представлять собою ступени развития сравнительно позднего времени; это одни из самых молодых среди всех рассматриваемых звезд.

Отсюда ясно, как при помощи нашей диаграммы можно показать последовательность во времени физических характеристик какой-нибудь звезды с почти неизменной массой, т. е. ход эволюции звезды. Чем правее в диаграмме расположен кружочек, соответствующий группе звезд, тем более позднего происхождения, тем более молодыми являются звезды этих групп и наоборот.

По абсолютной светимости и по значению массы звезды разделяются на две большие группы, звезды-гиганты и звезды-карлики, астрофизическое различие которых велико, чему соответствует и большое различие их кинематических характеристик. Рассматривая диаграмму кинематических характеристик (рис. 1) в разделе звезд-гигантов мы видим, что подгруппы этих звезд по светимости или массе располагаются по оси абсцисс в определенном порядке, обратном в сравнении с расположением подгрупп карликовых звезд. Хотя *B*- и *A*-звезды образуют продолжение главной последовательности в диаграмме спектр — светимость, однако эти звезды следует считать принадлежащими и к коллективу звезд-гигантов, почему они часто и называются белыми гигантами. Белые гиганты должны являться звездами самого позднего происхождения среди рассматриваемых здесь категорий звезд. Это подтверждается и тем обстоятельством, что B- и A-звезды составляют большой процент состава членов звездных ассоциаций и рассеянных скоплений, которые несомненно являются молодыми звездными образованиями, так как звезды их постепенно рассеиваются в пространстве попутно с увеличением дисперсии скоростей этих звезд. Белым гигантам на пути развития предшествуют желтовато-белые F-гиганты и еще впереди их красноватые K- и, возможно, M-гиганты. При значениях звездных масс, меньших 2,3 солнечной массы, как это явствует из расположения подгрупп звезд-гигантов в диаграмме, эволюция должна происходить соответственно схеме:

$$B,\ A \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK.$$

Но и красные M-гиганты, собственно сверхгиганты, не составляют исключения из этого правила. Итак, белые гигантские звезды должны в общем представлять стадии более раннего развития в сравнении с желтыми и красными гигантами. Из этого следует, что гигантские звезды развиваются в направлении от белого к красному цвету и от более высокой к более низкой эффективной температуре. Известный диссонанс в эту общую закономерность повидимому привносится подгруппами G-гигантов, для которых среднее значение массы либо равняется, либо больше числа 2,3. Для этих групп дисперсии поперечных скоростей превосходят дисперсии скоростей таких же групп K-гигантов, и в дальнейшем, при увеличении средней массы, превосходят в этом отношении даже M-гиганты. Такое анормальное соотношение G-гигантов при больших значениях массы или абсолютной светимости поднимает вопрос, решение которого надо искать в будущем.

Мы рассмотрели зависимость между эволюцией звезды и поперечным компонентом z ее пространственной скорости. Но такую же зависимость можно распространить и на другие компоненты — на ротационный T и галактически-радиальный R, а, следовательно, и на пространственную скорость целиком. При этом скорости считаются относительно центроида местных, т. е. находящихся в соседстве Солнца звезд. Но вышеприведенное закономерное соотношение между эволюцией звезд и их скоростями в общем остается в силе и в том случае, если скорости считать относительно Солнца. Это следует из того, что направление движения Солнца относительно центроида особенно значительно не отличается от направления вращения Галактики. Кроме того, скорость Солнца относительно центроида мала в сравнении с линейной скоростью вращения Галактики. Поэтому можно считать за правило, что скорости старых звезд относительно Солнца в среднем больше, чем скорости молодых. Если же вместо скоростей относительно центроида или относительно Солнца иметь в виду скорости галактического вращения относительно галактического центра, то правило о ходе эволюции или о направлении пути развития звезд выражается следующей версией: звезды тем более раннего возраста, чем больше у них скорость галактического вращения (B- и A звезды), и тем более позднего возраста, чем меньше у них скорость галактического вращения (G- и K-карлики).

Но так как строение Галактики и основные черты ее динамической организации в настоящее время нам еще не достаточно известны, то едва ли выраженное выше правило можно распространить на все части Галактики или на всю систему как на целое. Речь идет о распределении скоростей звезд в местной области звездной системы, из какового распределения мы и исходим.

Вероятность вышеприведенных соображений в пользу существования соотношения между скоростью галактического вращения и возрастом звезд вытекает из известного соотношения между скоростью галактического вращения центроидов звездных групп и дисперсией пекулярных скоростей звезд этих групп, из так называемого параболического соотношения Стремберга, хотя при применении к космогонической задаче несущественно, чтобы это соотношение непременно выражалось бы формулой параболы. Таким образом на основании рассматриваемого материала было выведено «параболическое» соотношение

$$\dot{T} = -0{,}258\sigma_z^2 + 10{,}8,$$

где $\dot{T}$ означает компонент скорости вращения и σ_z — дисперсию поперечных скоростей. Константа 10,8 км/сек зависит от выбора начала координат, в настоящем случае от общего центроида.

Интерпретируя закон Стремберга как космогоническое соотношение между развивающейся динамикой галактической системы и кинематическими характеристиками звезд, можно придти к следующему заключению: если у групп звезд или подсистем, образующихся одна за другой в последующие периоды времени, поперечные скорости выявляют тенденцию к постепенному убыванию, то в то же время скорости вращения у них возрастают.

Таким образом, чтобы наметить последовательность этапов развития звезд, мы воспользуемся вторым критерием в виде ротационной скорости $\dot{T}$ Из этого следует, что звезды-гиганты должны быть в общем более позднего происхождения, т. е. более молодыми, чем звезды-карлики; при этом самого позднего происхождения, из числа рассматриваемого коллектива звезд, следует считать B- и A-звезды, что подтверждается обоими критериями совместно. В разделе желтых и красных гигантов ротационные скорости соответственных центроидов мало различаются между собою, в то время как поперечные скорости показывают значительные расхождения. В разделе карликовых звезд соответственно переходу от спектрального типа F к спектральному типу K замечается закономерное уменьшение скорости галактического вращения и увеличение дисперсии поперечных скоростей. Из этого должно как будто следовать, что в ходе эволюции звезды-карлики с течением

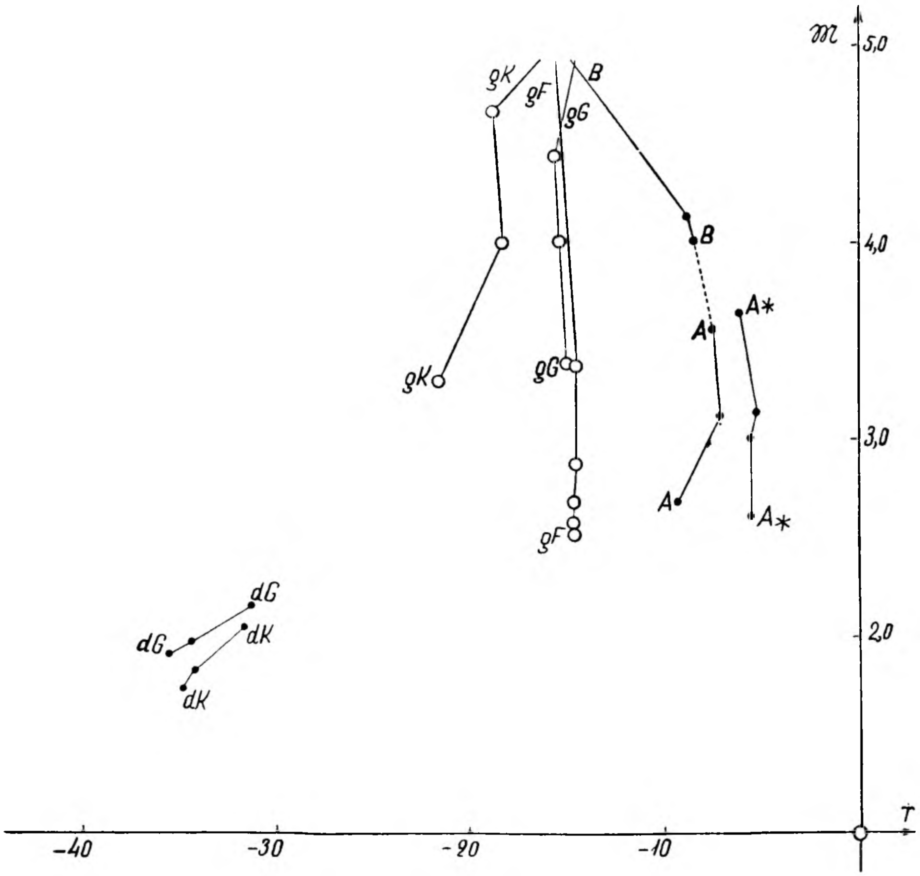


Рис. 2. Связь между ротационной скоростью центроидов звездных группировок и средними значениями их масс $\mathfrak{M}$.

времени должны становиться более горячими и белыми. Но этой диаграммы, возможно, одной еще не достаточно для точной характеристики пути эволюции звезд-карликов. При эволюции существенным фактором является значение массы или абсолютной светимости звезды. Желая в ходе эволюции принять в расчет и массу звезды, представим диаграмму (рис. 2), в которой по оси абсцисс мы откладываем ротационные скорости, а по оси ординат значения массы в единицах массы Солнца. В диаграмме представлены группировки звезд с соответственным спектральным типом, причем налево внизу расположены графики звезд-карликов, а направо вверху звезд-гигантов.

Рассматривая диаграмму, можно сделать некоторые интересные заключения. Факты, имеющие в ходе эволюции звезд первостепенную важность, отображаются в этой диаграмме, которую мы могли бы назвать **диаграммой звездной эволюции**. Группировки звезд, представленные на диаграмме правее, имеют соответственно большую скорость вращения в Галактике. Звезды тех групп, которые представлены здесь выше, имеют большую массу или большую абсолютную светимость и наоборот. Это — диаграмма или закон «скорость — спектр — светимость (масса)». Из этого вытекает, что все звездные группировки, которые представлены в диаграмме правее, возникали из диффузной материи Галактики в более поздние времена и, наоборот, объекты, представленные здесь, имеют тем более старый возраст, чем левее они расположены в диаграмме. При перемещении в диаграмме по какой-нибудь линии, параллельной оси абсцисс, т. е. оси скоростей галактического вращения, мы при пересечении этой линии с соответствующими графиками, соединяющими группировки звезд, находим точки, астрофизически характеризующие путь эволюции какой-нибудь звезды с определенной массой.

Применяя этот метод к звездам-гигантам, можно при помощи диаграммы (рис. 2) охарактеризовать путь развития этих звезд, при этом еще в более ясно выраженных очертаниях, чем это возможно было воспроизвести при посредстве диаграммы $\mathfrak{M}\sigma$ (рис. 1). Что касается спектрального типа, эффективной температуры и, вероятно, средней плотности звезды, то у звезд-гигантов эти характеристики должны с течением времени изменяться в порядке, показанном графиками звезд-гигантов (рис. 2). Основываясь на показаниях этих графиков, белый гигант типа B и A переходит в желтоватый (F G), а затем красноватый (K, M); эффективная температура звезды понижается, средняя плотность ее в огромных размерах уменьшается, в то время как объем в таких же размерах увеличивается. Хотя таким образом звезда расширяется, но общее количество испускаемой энергии при этом мало изменяется. Как было указано уже в начале настоящей статьи, к такому же выводу относительно звезд-гигантов пришли и некоторые астрофизики, исходя, согласно наблюдениям, из внутреннего строения звезды.

Далее интересно проследить по диаграмме аналогично тому, как это было выполнено ранее при помощи $\mathfrak{M}\sigma$-диаграммы, что соответственно значению массы, равному 1,5, этап развития или характер пути эволюции звезды становится особенным. Этапы развития следуют один за другим с необыкновенной быстротой, эволюция звезды происходит бурно, состояние звезды является нестационарным. При этом возникает вопрос об условиях явления новых звезд. Когда значение массы меньше, чем 1,5, развитие протекает по пути, характерному для звезд-карликов. Если же исходная масса звезды превышает указанное значение, эволюция ее должна идти по пути, свойственному гигантским звездам. Заметим, кстати, что рассмотрение кинематических характеристик и вопроса эволюции звезд-карликов не вошло в рамки настоящей статьи.

Из рассмотренных диаграмм (рис. 1 и 2) видно, что звезды, принадлежащие к рассеянным скоплениям (в большинстве звезды типа *А*) следует считать самыми молодыми в нашей выборке

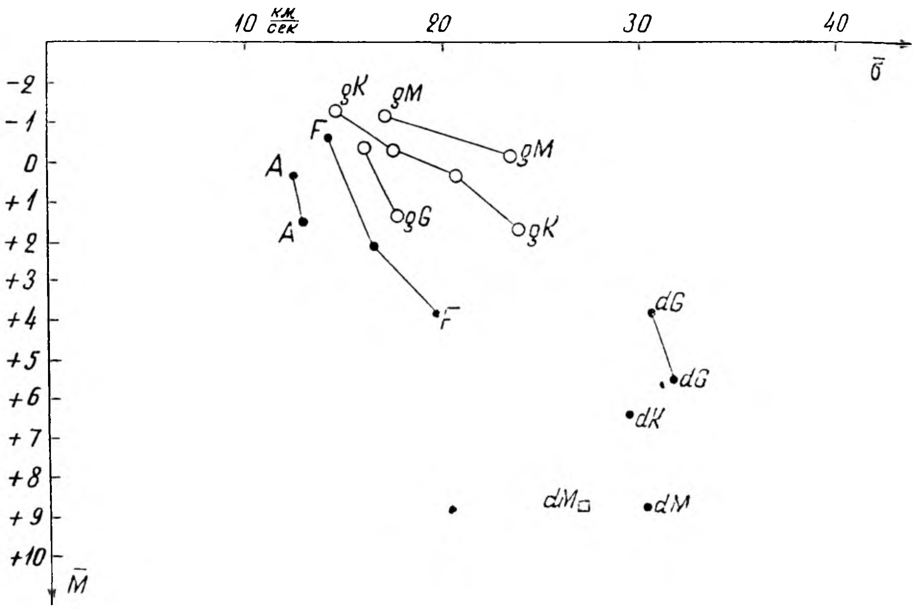


Рис. 3. Связь между средними значениями осей эллипсоидов скоростей и абсолютными величинами звезд, соответственно группировкам их по спектру и абсолютной величине (соотв. светимости). Данные радиальных скоростей взяты из труда Нордстрем [16]. Знаком □ обозначена группа М-карликов, изученная Высотским [17].

звезд, так как они имеют наибольшие скорости галактического вращения. Этот факт вполне согласуется и с результатами астрофизического исследования звездных ассоциаций и рассеянных скоплений [15].

Итак, благодаря статистическому анализу скоростей звезд, оказалось возможным открыть один из замечательных аспектов о путях их развития. Дополнительный и к тому же убедительный довод в пользу вероятной картины развития звезд, особенно звезд-гигантов, дается последующей диаграммой (рис. 3) Здесь по оси абсцисс представлены средние значения осей эллипсоидов скоростей, которые приблизительно равны радиусам тел скоростей, если тела представлять себе сферическими, соответственно отдельным группам звезд по их спектру и абсолютной величине. Другими словами, по оси абсцисс представлены приблизительные величины дисперсий пространственных скоростей, отсчитанных от соответствующих центроидов отдельных групп звезд, в то время как по оси ординат представлены их средние абсолютные величины. Для составления диаграммы были использованы результаты наших вычислений, выведенные на основании радиальных скоростей 4217 звезд в работе Нордстрем [16].

Каждый кружочек в этой диаграмме (рис. 3) соответствует какой-нибудь группе звезд, связанной кроме двух астрофизических характеристик (спектр и абсолютная величина) с кинематической характеристикой, которой в данном случае является среднее арифметическое из трех осей эллипсоида скоростей. Соединяя между собой группировки одноименных спектральных типов отрезками прямых, получаем интересный рисунок, закономерности которого ясно бросаются в глаза. Спектральным типам соответствуют отдельные графики, которые, не пересекаясь между собой на рисунке, кажутся, однако, радиально исходящими как будто из одной точки. При этом графики расположены на чертеже в том же порядке, в каком следуют спектры в их классификации. Вероятно, что закономерная последовательность графиков и распределение группировок звезд на них интерпретируют закономерности путей развития звезд-гигантов. Каждый отрезок прямой, отсчитываемый по оси абсцисс (σ) от начала, измеряет радиус тела скоростей, а вместе с тем и продолжительность времени, так как по принятому нами предположению размеры тела скоростей находятся в соответствии с этапами развития звездной системы, другими словами, они измеряют промежутки времени ее эволюции.

С течением времени диффузная материя, из которой в длительном процессе образуются звезды, постепенно приближается к центру звездной системы, а также к галактической плоскости. Можно полагать, что такой процесс продолжается и в настоящее время. Когда, таким образом, диффузная материя постепенно сгущалась и дисперсия скоростей ее частиц уменьшалась, то в эпоху, когда зародились теперешние красные гиганты, дисперсия их скоростей была значительно больше в сравнении с дисперсией скоростей теперешних белых гигантов, которые могли формироваться в более позднюю эпоху. Поэтому размеры эллипсоидов скоростей у звезд-гигантов типа M и K значительно больше размеров эллипсоидов скоростей у гигантов типа F A и B. Итак, красные гиганты представляют собою звезды, которые образовались либо до рождения теперешних gG-, gF-, A- и B-звезд, либо образовались с ними одновременно, но имели бóльшую массу, так что их развитие шло более быстрыми темпами. Чем время было более позднее, тем меньшими стали размеры эллипсоидов скоростей формирующихся звезд; чем время было более раннее, тем большими оказались размеры эллипсоидов скоростей звезд при их сгущении из межзвездной диффузной среды. Начиная с известного времени, размеры эллипсоидов скоростей могли в некоторой степени начать и увеличиваться благодаря изменению поля тяготения вследствие приближения диффузной материи постепенно все на более близкое расстояние к основной плоскости симметрии. Но, несмотря на это, последовательность размеров эллипсоидов скоростей продолжала сохранять свой характер в течение неопределенно долгого времени. Желая установить этапы развития звезды в тот порядок, в котором они действительно следуют один за другим по путям эволюции в природе, надо в диаграмме (рис. 3) по прямой, параллельной оси абсцисс, переходить слева направо. Из этого следует, что направление пути развития гигантских звезд, согласно изложенному выше, можно при помощи соответствующих спектральных обозначений представить в таком же виде, как прежде:

$$B,\ A \to gF \to gG \to gK \to gM.$$

Эти выводы повидимому согласуются и с результатами новейших наблюдений звездных ассоциаций. Как указывает на это В. А. Амбарцумян [18, стр. 19], горячие гиганты в звездных ассоциациях находятся в несомненном родстве с сверхгигантами поздних типов:

«В некоторые O-ассоциации входят сверхгиганты самых поздних спектральных типов, среди которых выделяются полуправильные и неправильные переменные. Среди представителей этого класса объектов выделяется гранатовая звезда μ Цефея, которая определенно входит в хорошо изученную расширяющуюся ассоциацию Цефея. Интересно, что ассоциация вокруг h и χ Персея, не содержащая заметной газовой туманности, в то же время имеет в своем составе ряд красных сверхгигантов, большинство которых является полуправильными переменными.»

Можно думать, что сверхгиганты поздних спектральных типов встречаются в более старых ассоциациях, которыми приходится считать такие, где, как в h и χ Персея, незаметна диффузная материя. Если в молодых ассоциациях красные сверхгиганты либо вовсе не встречаются, либо встречаются в относительно малом количестве, то отсюда можно вывести, что белые сверхгиганты в своем дальнейшем развитии превращаются в красные, т. е. в гиганты более позднего спектрального типа.

При всем этом надо различать два понятия: «более поздний этап развития», что то же самое, что «более поздний возраст звезды», и «более старая звезда».

Звезда может быть «нестарой», т. е. «молодой», как например μ Цефея, так как она принадлежит к звездной ассоциации, но иметь более «поздний этап развития» (красный гигант), что в приведенном случае обусловлено большой массой звезды.

Далее надо полагать, что сверхгиганты поздних типов, как например μ Цефея, являются звездами, имеющими наибольшие массы среди других членов ассоциации. Так как звезды одной и той же ассоциации образовались приблизительно одновременно, то наибольшая исходная масса обусловливает на эволюционном пути звезды наиболее авансированный этап развития в виде красного сверхгиганта. Хотя существование ассоциации относительно непродолжительно, но за промежуток времени ее существования у ее звезд могли уже выявиться различия физических характеристик в зависимости от исходных значений масс звезд, входящих в состав ассоциации. В случае же обыкновенных гигантов, т. е. в случае звезд более малых масс, для выявления таких различий физических характеристик потребовалось, вероятно, значительно больше времени — такой период, за который могут уже измениться кинематические характеристики звезд.

Интересно рассмотреть с эволюционной точки зрения вопрос о различии природы компонентов двойных звезд. Известно, что в случае звезд-гигантов, приблизительно до абсолютной величины $M = +3$, компоненту с большей массой соответствует более поздний спектральный тип. По современным взглядам [18] вероятность, что двойные звезды могут образоваться путем деления или путем захвата, очень мала, почему надо считать правильным предположение, что компоненты двойных звезд образуются почти одновременно из сгустков диффузной материи. Из факта одновременности начала звездной эволюции компонентов двойной звезды можно заключить, что за один и тот же промежуток времени — от зарождения звезды до настоящего момента — компоненты звезды прошли относительно неравные пути эволюции и достигли различных стадий развития, что выражается в различии их физических характеристик. Но какая из стадий предшествует другой, этот вопрос может быть, вероятно, решен при помощи метода кинематических характеристик к оценке относительных возрастов звезд.

При применении вышеописанного метода кинематических характеристик для определения направления путей развития галактических звезд, найдены некоторые замечательные результаты. В будущем теоретической астрофизике, звездной динамике и статистике звездных скоростей предстоит задача подвергнуть эти выводы контрольному анализу с целью выяснения закономерностей и деталей развития звезд на их пространном пути эволюции.

ТЕЗИСЫ

1. Существует вполне определенное соответствие между кинематическими характеристиками звезд и их астрофизическими характеристиками, как спектральный тип, абсолютная светимость и др.

2. Изменения кинематических характеристик, определяемых на основании компонентов пространственных скоростей звезд, должны зависеть от изменения внешней формы Галактической звезд-

ной системы, т. е. от изменения пространственного распределения материи в ней. Другими словами, тело скоростей звезд находится в зависимости от эволюционного этапа динамического состояния Галактики.

3. Для установления последовательности кинематических элементов во времени для отдельных звездных групп или подсистем, можно исходить из вероятного предположения, что скорость галактического вращения звезд в рассматриваемый период с течением времени постепенно увеличивается и вместе с тем сжатие приблизительно сфероидальной формы Галактики возрастает. Тела скоростей звезд, в частности их эллипсоиды скоростей, имеют тем меньшие размеры, чем в более поздние периоды времени из диффузной газово-пылевой межзвездной материи образовались соответственные звезды, и наоборот.

4. Исходя из упомянутых положений, можно на основании закономерного изменения кинематических характеристик отдельных звездных групп заключить о закономерной последовательности во времени физических состояний звезды, принадлежащей к определенной группе, другими словами, определить путь эволюции звезды. При этом в целях упрощения задачи принимается, что химический состав дозвездной материи является приблизительно одинаковым и значение массы звезды в ее эволюционном процессе в значительной степени не изменяется.

5. До сих пор кинематические характеристики рассматривались хотя в соответствии с группами звезд, с так называемыми подсистемами, имеющими приблизительно одинаковые астрофизические характеристики, но сами эти подсистемы в общем считались неизменными как и их кинематические характеристики. В настоящем вопрос рассматривается не в статической, а в динамической и комплексной форме, из чего следует его космогоническое значение.

6. Применяя вышепредставленный метод кинематических характеристик к звездам-гигантам для выяснения их пути эволюции, надо считать вероятным, что ход эволюции названных звезд происходит согласно схеме:

$$A,\ B \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM.$$

При процессе эволюции гигантских звезд размеры их увеличиваются, вследствие чего средняя плотность их вещества уменьшается; эффективная температура падает и показатель цвета возрастает; в центральной части звезды развивается и растет весьма плотное и горячее ядро, производящее энергию излучения.

7 Вопрос определения путей развития звезд-карликов представляется более сложным, в особенности ввиду разделения главной последовательности на две части [19]. Предварительные вы-

воды относительно путей эволюции звезд-карликов указывают на возможность развития по спектральным типам согласно схеме:

$$dM \to dK \to dG.$$

Звезда повидимому становится более белой, плотной и горячей. Но вопрос о направлении изменения абсолютной светимости такой звезды однако остается открытым.

8. Из анализа кинематических характеристик явствует, на что указывают некоторые выводы теоретической астрофизики о внутреннем строении звезды, что если начальная масса звезды более 1,5 солнечных масс, то эволюция звезды происходит по пути, свойственному звездам-гигантам; если же начальная масса звезды не превосходит значения 1,5 солнечных масс, то эволюция происходит по пути, свойственному звездам-карликам.

ТАБЛИЦЫ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРУППИРОВОК ЗВЕЗД

Обозначения

M	Абсолютная величина звезды.
$\overline{M}$	Среднее абсолютных величин.
$\overline{\mathfrak{M}}$	Среднее значений масс.
$Sp.$	Спектр.
$\overline{w}$	Среднее пространственных скоростей, взятых относительно центроида.
x, y, z	Компоненты скоростей соответственных центроидов относительно Солнца в галактической прямоугольной системе координат.
$\dot{R}, \dot{T}, \dot{Z}.$	Компоненты (координаты) скоростей соответственных центроидов относительно Солнца в галактически-радиальной прямоугольной системе координат.
$\dot{R}$	Координата скорости, направленная по галактическому радиусу в направлении от центра Галактики ($l = 331°,5$)
$\dot{T}$	Координата скорости, направленная по вектору галактического вращения ($l = 61°,5$)
$\dot{Z} = z$	Координата скорости, направленная перпендикулярно к плоскости галактического экватора (поперечная скорость), с положительным направлением в северный полюс Галактики.
$\sigma_{\dot{R}}, \sigma_{\dot{T}}, \sigma_{\dot{Z}}$	Дисперсии соответственных координат скоростей.

Белые

№	M	$\overline{M}$	$\overline{\mathfrak{M}}$	$\overline{Sp.}$	$\overline{w}$	$\dot{x}$	y	$\dot{z}$
	1	2	3	4	5	6	7	8
				B звезды				
1	—∞ —1,0	—1,87	8,03	2,29	19,8	—14,5	— 9,9	—2,5
2*		—1,92	8,09	2,00	12,4	—20,6	— 5,2	—7,4
3|*|		—1,85	7,91	2,44	23,5	—11,4	—12,3	0,0
4	—0,9 ... 0,0	—0,51	4,28	6,20	14,0	—16,8	— 9,8	—5,7
5*		—0,50	4,28	6,09	11,1	—19,1	— 7,2	—6,0
6|*|		—0,52	4,28	6,27	15,9	—15,2	—11,6	—5,5
7	+0,1 ..+1,0	+0,38	3,09	8,54	17,0	— 9,7	— 4,9	—6,5
8*		+0,49	2,94	8,71	8,9	—15,0	— 1,9	—6,2
9|*|		+0,33	3,11	8,47	20,3	— 7,4	— 6,2	—6,7
10	—∞ ... +∞	—0,86	5,43	5,16	16,8	—14,6	— 8,9	—4,6
11*		—0,85	5,43	5,04	11,2	—19,0	— 5,6	—6,6
12|*|		—0,86	5,43	5,25	19,8	—12,2	—10,7	—3,6
				A звезды				
1	+0,1 ..+1,0	+0,78	2,56	1,00	21,21	— 7,9	—4,0	—6,4
2*		+0,81	2,62	0,79	21,00	—10,2	—1,5	—6,7
3|*|		+0,77	2,55	1,05	21,27	— 7,3	—4,7	—6,3
4	+1,1 .. +2,0	+1,51	2,12	2,34	20,17	— 6,6	—4,0	—6,8
5*		+1,49	2,12	2,35	24,12	— 6,0	—2,9	—7,4
6|*|		+1,52	2,11	2,34	18,56	— 6,9	—4,5	—6,5
7	+2,1 +3,0	+2,37	1,64	5,74	24,26	—10,0	—3,5	—5,5
8*		+2,45	1,60	5,87	25,39	— 8,6	—1,3	—4,8
9|*|		+2,32	1,67	5,66	25,51	—10,3	—5,0	—5,9
10	+0,1 ... +3,0	+1,50	2,13	2,81	21,59	— 7,9	—3,9	—6,3
11*		+1,69	2,00	3,29	23,89	— 8,2	—2,0	—6,3
12|*|		+1,42	2,18	2,61	20,65	— 7,8	—4,7	—6,3

Звезды-

№	M	$\overline{M}$	$\overline{\mathfrak{M}}$	$\overline{Sp.}$	$\overline{w}$	$\dot{x}$	y	$\dot{z}$
	1	2	3	4	5	6	7	8
				dF-звезды				
1	+3,1 .+3,5	+3,35	1,35	5,24	60,1	—25,0	—27,3	—9,0
2	+3,6 .. +4,0	+3,80	1,22	6,02	76,9	—35,7	—33,1	—6,2
3	+4,1 ... +∞	+4,42	1,05	7,03	101,3	—14,4	—58,4	—5,6
4	+3,1 ... +∞	+3,78	1,23	5,97	76,6	—27,1	—36,9	—7,1
				dG-звезды				
1	+3,1 +4,5	+4,01	1,15	2,34	62,0	—30,0	—19,4	—6,7
2	+4,6 .+5,5	+5,02	0,98	4,66	58,1	—36,3	—15,9	—6,0
3	+5,6 .+∞	+5,76	0,82	5,76	79,9	—40,3	—25,8	—7,8
4	+3,1 +5,5	+4,60	1,05	3,70	59,72	—33,7	—17,4	—6,3
5	+4,6. +∞	+5,31	0,92	5,10	66,78	—37,9	—19,8	—6,7
6	+3,1 ..+∞	+4,96	0,99	4,27	65,3	—35,5	—19,7	—6,7
				dK-звезды				
1	+3,1 ... +4,5	+3,80	1,41	0,00	43,4	—31,5	—13,3	—7,0
2	+4,6 ... +6,0	+5,68	0,87	0,54	63,5	—31,7	—22,3	—4,9
3	+6,1 +∞	+6,90	0,74	3,52	70,8	—33,5	—21,6	—8,8
4	+3,1 ..+6,0	+5,12	1,03	0,38	56,0	—31,6	—19,6	—5,5
5	+3,1 +∞	+6,43	0,82	2,61	66,5	—42,9	—21,0	—7,8

гиганты

Таблица I

№	$\dot{T}$	$\dot{R}$	$\sigma_{\dot{T}}$	$\sigma_{\dot{R}}$	$\varepsilon_{\dot{T}}$	$\varepsilon_{\dot{Z}}$	n
	9	10	11	12	13	14	15
			B-звезды				
1	—15,6	+ 5,8	±15,61	±12,01	±2,28	±1,75	48
2*	—14,4	+15,6	4,78	3,68	1,23	0,95	16
3|*|	—16,2	+ 4,1	18,75	14,42	3,37	2,59	32
4	—16,6	+10,1	8,63	6,64	1,17	0,90	55
5*	—15,4	+13,3	5,67	4,36	1,24	0,95	22
6|*|	—17,4	+ 7,8	10,14	7,80	1,79	1,38	33
7	— 8,4	+ 6,2	6,55	6,50	1,76	1,36	24
8*	— 8,8	+12,3	5,26	4,05	2,15	1,65	7
9|*|	— 8,9	+ 3,5	9,45	7,27	2,36	1,82	17
10	—14,7	+ 8,5	11,76	9,03	1,05	0,80	127
11*	—14,0	+14,0	5,30	4,08	0,80	0,62	45
12|*|	—15,1	+ 5,6	14,07	10,81	1,56	1,20	82
			A звезды				
1	—7,2	+5,0	± 9,92	±9,02	±1,19	±1,09	70
2*	—6,2	+8,2	6,26	5,69	1,74	1,58	14
3|*|	—7,6	+4,2	10,66	9,69	1,44	1,31	56
4	—6,7	+3,9	8,77	7,97	0,93	0,84	90
5*	—5,4	+3,9	8,30	7,55	1,66	1,51	26
6|*|	—7,2	+3,9	8,95	8,14	1,13	1,03	64
7	—7,8	+7,1	9,99	9,08	1,32	1,20	58
8*	—5,7	+7,8	9,21	8,57	1,96	1,78	23
9|*|	—9,3	+6,7	10,46	9,51	1,80	1,63	35
10	—7,2	+5,0	9,48	8,62	0,64	0,59	218
11*	—5,7	+6,3	8,25	7,50	1,05	0,95	63
*|	—7,9	+4,7	9,94	9,04	0,70	0,73	155

карлики

Таблица II

№	$\dot{T}$	$\dot{R}$	$\sigma_{\dot{T}}$	$\sigma_{\dot{Z}}$	$\varepsilon_{\dot{T}}$	$\varepsilon_{\dot{Z}}$	n
	9	10	11	12	13	14	15
			dF-звезды				
1	—35,9	+ 8,8	±34,63	±28,62	±4,90	±4,05	51
2	—46,0	+15,6	47,76	39,47	6,27	5,18	59
3	—58,0	—15,3	47,58	39,32	8,41	6,95	33
4	—45,2	+ 6,0	43,49	35,94	3,65	3,02	143
			dG-звезды				
1	—31,3	+17,1	±39,97	±25,62	±6,10	±3,91	44
2	—31,3	+24,3	37,80	24,23	4,84	3,10	62
3	—41,9	+23,0	40,45	25,93	6,40	4,10	41
4	—31,3	+21,3	38,72	24,82	3,78	2,42	106
5	—35,5	+23,8	38,88	24,92	3,87	2,48	103
6	—34,3	+21,8	39,20	25,13	3,25	2,09	147
			dK-звезды				
1	—26,7	+21,4	±24,09	±18,11	±7,62	±5,73	11
2	—34,8	+17,2	25,74	19,35	5,15	3,87	26
3	—34,9	+19,1	29,74	22,36	3,15	2,37	90
4	—32,2	+18,4	25,26	18,99	4,21	3,16	37
5	—34,1	+18,8	28,53	21,45	2,54	1,91	127

№	M	$\overline{M}$	$\overline{\mathfrak{M}}$	$\overline{Sp.}$	$\overline{w}$	$\dot{x}$	y	$\dot{z}$
	1	2	3	4	5	6	7	8
				gF звезды				
1	−∞ ... 0,0	−1,38	6,42	6,24	21,0	−15,8	−10,9	−7,7
2	+0,1 ..+2,0	+1,23	2,38	3,61	27,3	−20,8	− 5,5	−5,1
3	+2,1 .+2,5	+2,33	1,68	2,30	38,2	−17,2	− 7,5	−4,8
4	+2,6 +3,0	+2,88	1,54	3,65	26,4	−14,7	− 8,4	−6,9
5	+2,1 +3,0	+2,63	1,59	3,11	31,1	−15,7	− 8,0	−6,4
6*	+2,1 +3,0	+2,66	1,52	3,14	34,9	−44,3	+12,7	−8,2
7[*]	+2,1 .+3,0	+2,62	1,60	3,14	30,6	−11,7	−10,9	−6,2
8	0,0 ... +3,0	+2,14	1,87	3,28	29,8	−17,5	− 8,0	−6,1
9	−∞ .+3,0	+1,56	2,61	3,76	28,4	−17,2	− 7,8	−6,4
10[*]	−∞ +3,0	+1,49	2,68	3,82	27,9	−15,3	− 9,2	−6,2
11	−∞ +2,0	+0,36	3,81	4,54	25,1	−19,0	− 7,4	−6,0
				gG звезды				
1	−∞ −1,0	−2,51	12,31	2,65	29,0	−14,7	−10,9	−11,6
2	−0,9 0,0	−0,35	3,55	4,95	31,8	− 8,4	−10,6	− 7,6
3	+0,1 ... +1,0	+0,56	3,41	6,67	35,7	−17,5	− 8,3	− 9,6
4	+1,1 .. +3,0	+1,74	2,39	7,11	31,2	−20,0	− 6,1	− 5,4
5	+0,1 ... +0,5	+0,29	3,70	6,03	34,1	−13,7	− 8,0	−11,7
6	+0,6 ... +1,0	+0,78	3,18	7,21	37,0	−20,6	− 8,5	− 7,8
7	+1,1 ... +1,5	+1,35	2,66	7,09	28,6	− 8,8	− 2,9	− 3,3
8	+1,6 . +3,0	+2,11	2,14	7,12	33,9	−30,8	− 9,2	− 7,5
9	−∞ 0,0	−1,05	7,05	4,20	30,9	−10,4	−10,7	− 8,9
10	+0,1 .+3,0	+1,05	2,99	6,85	33,9	−18,5	− 7,4	− 7,8
11	−∞ ... +3,0	+0,33	4,27	5,94	32,7	−15,8	− 8,5	− 8,1
				gK-звезды				
1	−∞ ... 0,0	−0,40	5,94	1,82	23,8	−25,2	− 2,2	+0,5
2	+0,1 ... +0,5	+0,39	4,25	3,63	27,3	−12,2	− 8,6	−5,0
3	+0,6 ... +1,0	+0,71	3,68	2,91	33,4	−16,9	−12,3	−5,6
4	+1,1 ... +1,5	+1,28	3,00	1,26	34,2	−19,4	−10,2	−2,7
5	+1,6 ... +3,0	+2,05	2,30	0,72	37,9	− 7,2	−20,7	−4,3
6	+1,1 .. +3,0	+1,65	2,66	1,00	36,0	−13,5	−15,3	−3,5
7	+0,1 ... +3,0	+0,86	3,59	2,64	32,1	−14,5	−11,9	−4,8
8	−∞ +3,0	+0,81	3,86	2,61	31,9	−14,9	−11,6	−4,6
				gM-звезды				
1	−∞ .. 0,0	−0,49	9,52	1,58	38,5	−12,9	−16,2	−6,2
2	+0,1 ... +0,5	+0,31	6,78	1,30	30,8	−10,7	−13,5	−7,5
3	+0,6 ... +3,0	+0,87	4,48	1,04	27,0	−10,5	− 3,5	−3,0
4	+0,1 ... +3,0	+0,52	5,90	1,20	29,3	−10,7	− 9,4	−5,8
5	−∞ .+3,0	+0,16	7,18	1,34	32,6	−11,5	−11,8	−5,9

гиганты

Таблица III

№	$\dot{T}$	$\dot{R}$	$\sigma_{\dot{T}}$	$\sigma_{\dot{Z}}$	$\varepsilon_{\dot{T}}$	$\varepsilon_{\dot{Z}}$	n
	9	10	11	12	13	14	15
			gF-звезды				
1	—17,1	+ 8,7	±26,19	±14,63	±6,55	±3,66	17
2	—14,6	+15,6	20,26	11,32	3,70	2,07	31
3	—14,7	+11,5	17,22	9,62	3,67	2,05	23
4	—14,4	+ 8,9	20,44	11,42	3,56	1,99	34
5	—14,3	+10,1	19,21	10,73	2,60	1,43	57
6*	—10,9	+45,8	16,36	9,14	6,68	3,73	7
7|*|	—15,0	+ 5,1	19,56	10,93	2,79	1,56	50
8	—14,8	+11,6	19,58	10,94	2,10	1,17	88
9	—15,0	+11,5	20,80	11,62	2,04	1,14	105
10|*|	—15,3	+ 9,1	21,18	11,83	2,15	1,20	98
11	—15,5	+13,2	22,54	12,59	3,29	1,84	48
			gG звезды				
1	—16,6	+ 7,8	±19,26	±17,20	±4,54	±4,05	19
2	—13,2	+ 2,4	24,55	21,92	3,93	3,51	40
3	—15,5	+11,4	24,36	21,75	3,02	2,70	66
4	—14,9	+14,8	20,68	18,46	3,05	2,72	47
5	—13,5	+ 8,3	19,72	17,61	3,66	3,27	30
6	—17,2	+14,1	27,64	24,68	4,67	4,17	36
7	— 6,8	+ 6,4	16,33	14,58	3,48	3,11	23
8	—22,7	+22,8	24,10	21,52	5,03	4,49	24
9	—14,4	+ 4,1	22,98	20,52	3,02	2,69	59
10	—15,3	+12,8	22,90	20,45	2,16	1,93	113
11	—15,0	+ 9,8	22,93	20,47	1,75	1,56	172
			gK-звезды				
1	—14,0	+21,1	±11,27	±10,06	±3,40	±3,03	12
2	—13,4	+ 6,6	16,28	14,54	1,64	1,46	100
3	—18,9	+ 9,0	18,35	16,38	1,62	1,45	128
4	—18,2	+12,2	18,75	16,74	2,92	2,61	42
5	—21,6	— 3,6	21,39	19,10	3,13	3,06	40
6	—19,9	+ 4,5	20,08	17,93	2,23	1,99	82
7	—17,4	+ 7,0	18,20	16,25	1,03	0,92	310
8	—17,3	+ 7,6	17,99	16,06	1,01	0,90	322
			gM звезды				
1	—20,4	— 3,4	±22,42	±19,00	±3,96	±3,96	33
2	—16,6	+3,2	22,83	19,35	3,80	3,22	37
3	— 8,0	+7,7	21,85	18,52	4,66	3,95	23
4	—13,3	+4,9	22,46	19,03	2,93	2,48	60
5	—15,8	+4,5	22,44	19,02	2,34	1,98	93

$\varepsilon_{\dot{R}}$, $\varepsilon_{\dot{T}}$, $\varepsilon_{\dot{Z}}$ Средние квадратичные девиации («ошибки») для скоростей центроидов соответственных группировок звезд.

* Группировки, состоящие только из звезд, входящих в состав звездных скоплений или потоков (у B-звезд — главным образом Ориона и Персея, а у A-звезд — Большой Медведицы и Тельца).

|*| Группировки без звезд, входящих в звездные скопления.

n Число звезд соответственно отдельным группировкам.

В основу вычислений положены данные каталога пространственных скоростей звезд [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bethe, H. A., Energy production in stars, The Physical Review, **55**, second series, Jan. 1—June 15, 1939.
2. Albada, G. B., Some remarks about the internal constitution of the red giants, Bull. Astr. Inst. of Netherlands, Vol. X, No. 366, 1945.
3. Gamow, G., Phys. Rev., **53**, **55**, 1938—1939.
4. Gamow, G., Rev. of. Mod. Phys., **17**, 125, 1945.
5. Ландау, Л., ДАН СССР, **17**, № 6, 1937.
6. Öpik, E., Publ. de l'Obs. Astr. de l'Université de Tartu, T. XXX, No. 3, 1938.
7. Северный, А. В. и Масевич, А. Г., О строении гигантских звезд, АЖ СССР, XXIII, 4, 1946.
8. Северный, А. В., Современный этап теоретического изучения звезд, Успехи астрономических наук, III, 1947.
9. Соболев, В. В., Движущиеся облочки звезд, Л., 1947.
10. Menzel, D. H., The internal constitution of giant M-stars, Physica XII, No. 9—10, (Zeeman-Congress, Amsterdam), 1946.
11. Масевич, А. Г., Звездные последовательности в свете современных взглядов на строение и источники энергии звезд, Сообщения Гос. Астр. Инст. им. И. К. Штернберга, № 30, 1949.
12. Роотсмяэ, Т. Я., Новые идеи в связи с эволюцией звезд (на эстонском языке), Календарь Тартуской Астр. Обс., 1943.
13. Роотсмяэ, Т. Я., Космогонические выводы из статистики скоростей звезд (на эстонском языке), Доклад на научной сессии Тартуского гос. университета, Календарь Тартуской Аст. Обс., 1946.
14. Фесенков, В. Г. и др., Каталог экваториальных компонентов скоростей 1470 звезд, Труды Государственного Астрофизического Института, т. III, М., 1926.
15. Амбарцумян, В. А., Астрофизика и эволюция звезд, Ереван, 1947.
16. Nordström, H., A study of stellar motions, based on radial velocities, Lund, Medd. II, **79**, 1936.
17. Vyssotsky, A. N., Motion and absolute magnitudes of Dwarf M-stars, Astrophys. Journ., **104**, **2**, 1946.
18. Амбарцумян, В. А., Вводный доклад на симпозиуме по эволюции звезд, Изд. АН СССР, М., 1952.
19. Паренаго, П. П., О звездах туманности Ориона, АЖ XXX, 3, 1953.

HIIDTÄHTEDE KINEMAATILISED KARAKTERISTIKUD JA EVOLUTSIOONI PROBLEEM

Prof. T. Rootsmäe

Astronoomia ja geofüüsika kateeder

Resümee

Tähtede evolutsiooni probleem omab eriti suurt tähtsust seepärast, et ta käsitleb aine ehitust ja omadusi palju ulatuslikumais tingimusis, kui need on võimalikud meie laboratoorsete katsete puhul. Selle probleemi tähtsus on praktilist ja ühtlasi filosoofilist laadi ning tema aktuaalsust suurendab veelgi asjaolu, et tähtede evolutsiooni uurimine puudutab ka meie Päikese kui ühe tähe tulevast olukorda, millega on lähedalt seotud elu edasikestmine maakeral.

Rakendades gaaside teooria ja termodünaamika aluseid graviteeruvatele kerakujulistele gaasimassidele, nagu seda on tähed, ja arvestades seejuures ka kiirguse rõhumist, võisid juba varasemad uurijad luua tähtede seesmise ehituse teooria. Sel ajal, kui selle teooria rakendamine kääbustähtedele, nagu seda on Päike, võimaldas saada üsna tõhusaid, vaatlustega kooskõlas olevaid tulemusi, tekkisid teooria rakendamisel hiidtähtedele suured raskused, mida õnnestus osalt ületada alles pärast seda, kui nende tähtede seesmise ehituse käsitlemisel võeti abiks aatomituuma energia seadused.

Hiidtähe suurest massist tingitud tugeva gravitatsioonitungi mõjul tiheneb tähe aine, eriti tähe südamiku läheduses, võimsa gaasirõhu all sedavõrd, et ta suuresti ioniseerub ja et tekib isegi keemiliste elementide muundumine. Niisuguses protsessis vallandub tohutult palju kiirgust, missugune fakt on kooskõlas vaatlustega. Sellises olukorras täht paisub määratult, muutudes hiiglaslikuks gaasikeraks väga tiheda ja ülikuuma südamikuga ning väga hõreda ja võrdlemisi madalat temperatuuri omava ümbrise ehk atmosfääriga.

Edasi tekib küsimus, kuidas eelnevalt kirjeldatud hiidtäht pika aja jooksul muudab oma struktuuri, evolutsioneerub. Tähe evolutsiooni käigu kohta võib teha mitmesuguseid oletusi. Mõnede astrofüüsikute poolt oli esitatud seisukoht, et arenev hiidtäht oman-

dab aja jooksul järjest ulatuslikumad mõõtmed, gaasi keskmine tihedus väheneb, tähe pinnatemperatuur alaneb ja tema värvus muutub valgest punasemaks, kuid et mainitud seisukoha tõepärasuses veenduda, on väga tarvilik leida sellele väitele kinnitus teisel viisil. Selleks rakendati käesolevas töös kiiruste statistilist meetodit, mille eesmärgiks on kindlaks määrata tähtede arenemise suundi, evolutsiooni teid. Meetodi põhijooned on kokkuvõtlikult esitatud järgnevas.

Jagades tähed nende füüsikaliste karakteristikute (eriti absoluutse heleduse ja spektri) järgi rühmadeks ja määrates saadud rühmade jaoks tähtede ruumiskiiruste komponentide jaotuste statistilised karakteristikud, nn. kinemaatilised karakteristikud ehk elemendid, osutus sel teel võimalikuks avastada seaduspäraseid seoseid tähtede füüsikaliste ja kinemaatiliste karakteristikute vahel. Peale selle käsitleti kinemaatiliste karakteristikutena tähtede kiiruste ellipsoidide telgede suurusi.

Selleks, et täherühmade kinemaatiliste ja füüsikaliste karakteristikute vastavuse seadust ära kasutada tähtede arengukäigu väljaselgitamiseks, tuli teha tõenäoline oletus selle kohta, kuidas muutub Galaktika dünaamilise korrastuse ja ruumilise ehituse iseloom vastavalt perioodidele, milledel gaasilis-tolmsest keskkonnast miljardite aastate kestel hajusa aine tihenedes järk-järgult tekkisid tähed. See oletus, mida rakendati tööhüpoteesina, seisab selles, et Galaktika ürgne udukogu, omades teatavat pöördemomenti, tihenes üha ja tema aineosakesed, tiireldes Galaktika tsentri ümber, lähenesid aja jooksul järjest Galaktika põhitasandile ning ühtlasi ka tema tsentrile. Rööbiti sellega muutus udukogu sfäroidiline kuju lapikumaks, kusjuures selle sisemiste osade pöördekiirused üha kasvasid. Galaktika süsteemi tähed ei tekkinud üheaegselt, vaid üksteisele järgnevatel ajaperioodidel. See ei ole praegusel ajal enam oletus, vaid vaatlustest järeldatud tulemus. Tähtede tekkimine jätkub ka praegu. Rühm tähti, mis tekkis difuussest mateeriast teataval ajastul, omas teatavaid kindlaid, sellele ajastule omaseid kinemaatilisi karakteristikuid. Tähed, mis tekkisid hiljem, järgmisil ajastuil, omasid teistsuguseid, neile ajastuile vastavaid kiiruste jaotusi, teisi kinemaatilisi karakteristikuid. Aja jooksul need kiiruste karakteristikud muutusid vastavalt Galaktika kuju ja gravitatsiooni potentsiaali muutumisele, kuid viimaste muutumine ei võinud segi paisata üksikute, ajas üksteise järel kujunenud täherühmade kinemaatiliste karakteristikute esialgset järjestust.

Tuginedes sellele tähtsale seadusele, on kinemaatiliste karakteristikute põhjal võimalik määrata, millisesse Galaktika tähesüsteemi evolutsiooniperioodi või arengufaasi kuuluvad tähed, milledel on antud astrofüüsikalised tunnused. Niisuguse kinemaatilistel ja astrofüüsikalistel karakteristikutel põhineva analüüsi abil saab järjestada tähtede arenemise üksikuid etappe, seega määrata nende evolutsiooni käiku. Seejuures tuleb tähele panna, et tähe seesmine ehitus ja arenemise käigu iseloom olenevad tähe esialgsest keemilisest koostisest ja massist. Et esialgse keemilise koostise kohta puuduvad andmed, siis tuleb lihtsalt oletada, et tähed tekivad ühesuguse keemilise koostisega ainest. Seejärel tuleb vaadelda tähe evolutsiooni käiku sõltuvalt ainult massi algväärtusest. Selleks eeldame, et tähtede massid on absoluutsete heleduste põhjal küllalt hästi tuntud ja et vaadeldavas ajavahemikus masside väärtused suhteliselt palju ei muutu.

Tähtede arenemiskäiku käsitlev statistilis-kinemaatiline meetod, mis seob tähtede evolutsiooni käiku Galaktika süsteemi kuju muutumisega, osutub viljakaks, sest see avab vastaval alal uusi väljavaateid ja kinnitab leitud seisukohti. Uurimise tulemused on rahuldavas kooskõlas nende tulemustega, milliseid on sel alal võimaldanud saavutada teoreetiline astrofüüsika. Rakendades kõnesolevat uurimismeetodit hiidtähtedele, on leitud, et nende arenguline muutumine toimub vastavalt spektrite järjekorrale: $B, A \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$. Väliselt toimub muutumine nii, et tähe pinna temperatuur järjest langeb ja tähe värvus muutub punasemaks.

Tähtede evolutsiooni käigu seaduspärasusi näitavad juuresolevad diagrammid [1] Neis on täherühmade eritsentroidide asendid antud kahe koordinaadiga. Joonisel 1 on abstsiss- ja ordinaatteljel esitatud vastavalt rühma kuuluvate tähtede ristkiiruste dispersioon σ ja masside keskväärtus $\mathfrak{M}$. Suurema kiiruste dispersiooniga tähed (gG, gK) on suhteliselt vanema eaga kui väiksema kiiruste dispersiooniga tähed (A, B). Seesama järeldub ka joonisest 2, kus kiiruste dispersioon abstsissteljel on asendatud rühma eritsentroidi rotatoorse kiirusega. Suurem rotatoorne kiirus T viitab tähe suhteliselt nooremale eale (A-tähed) ja vastupidi.

Täiendava ning veenva argumendi hiidtähtede eelkirjeldatud arengupildi tõepärasuse kasuks lisab juurde joonis 3, kus rõhtteljeks on kiiruste ellipsoidide telgede keskväärtused (kiiruste kehandite raadiused) ja püstteljeks tähtede absoluutsed suurused. Faktiline materjal oli viimasel juhul võetud radiaalkiirusi käsitlevast tööst [16], milles tähtede koguarv on 4217 neist 3535 hiid- ja 682 kääbustähte.

Kääbustähtede evolutsiooni uurimine ei kuulu otseselt käesoleva töö ülesannete hulka, kuigi on vihjatud ka sellele küsimusele. Nagu nähtub vastavatest diagrammidest, peaks nende tähtede areng spektriliikide järgi kulgema üldiselt hiidtähtedega võrreldes vastupidises suunas. Ühtlasi ilmneb seaduspärasus, et tähed suurema massiga kui 1,5 Päikese massi evolutsioneeruvad hiidtähtedena, kuna väiksema massiga tähed käituvad selles suhtes kääbustena.

Käesolev uurimus põhineb peamiselt ruumiskiiruste kataloogi [14] andmestikul, mis sisaldab 1471 numbrit, milledest 43% vastavad hiidtähtedele.

---

[1] Vt. ka Tähetorni kalender 1946, lk. 82.

О СУММИРОВАНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ

Проф., доктор физ.-мат. наук Г. Кангро

Кафедра геометрии

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматриваются следующие три проблемы, которые имеют большое значение в теории суммирования степенных рядов.

Проблема I. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы степенной ряд[1] $\Sigma u_n \Theta^n$ $(|\Theta| \leqslant 1)$ был B-суммируемым ($|B|$-суммируемым) при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых) рядах Σu_n и чтобы имело место равенство

$$\lim_{\Theta \to 1} B\left\{\sum u_n \Theta^n\right\} = A\left\{\sum u_n\right\},$$

где $A\{\Sigma u_n\}$ означает обобщенную сумму ряда Σu_n, которая получается в результате суммирования методом A.

Проблема II. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы степенные ряды

$$\sum \frac{u_n}{n+1} \Theta^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n u_n \Theta^{n-1} \quad (|\Theta| \leqslant 1),$$

первый из которых получается из ряда $\Sigma u_n \Theta^n$ путем почленного интегрирования, второй — путем почленного дифференцирования, были B-суммируемыми ($|B|$-суммируемыми) при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых) рядах Σu_n.

Проблема III. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд Σw_n, получившийся из рядов Σu_n и Σv_n по правилу умножения Коши, был B-суммируемым ($|B|$-суммируемым) при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых) рядах Σu_n.

[1] Если пределы суммирования не указаны, то суммирование происходит по индексам от 0 до ∞.

В случае сходящихся рядов теоремы, дающие решение поставленных проблем, общеизвестны. В случае же суммируемых рядов проблемы I—III решены только для некоторых методов суммирования, причем сравнительно мало изучены проблемы I и II относительно абсолютной суммируемости. Наиболее полные результаты были получены для методов суммирования Вороного (в частности Чезаро), Эйлера-Кноппа и Ле-Руа (в частности Бореля) [1, 2].

В случае просто суммируемых рядов проблемы I и II изучались автором [3] для нормальных матричных методов суммирования, причем полученные общие результаты применялись к изучению метода (R, p_n) взвешенных средних Рисса.

В настоящей работе излагается общая схема исследования проблем I—III для нормальных матричных методов суммирования, как в случае простой, так и в случае абсолютной суммируемости рассматриваемых рядов. Матричные методы суммирования трактуются в виде преобразования рядов, так как этот метод имеет некоторые преимущества — особенно при изучении абсолютной суммируемости — перед методом преобразования последовательностей, который использовался автором в статье [3]. Для метода взвешенных средних Рисса выводятся несколько новых результатов (теоремы 7—10, 13—15, 17, 18, 20—23), а также обобщаются результаты, которые были получены в статье [3] (теоремы 11, 12, 16, 19)

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Пусть $A=(a_{nk})$ — бесконечная матрица, элементами a_{nk} $(n, k=0, 1, 2, \ldots)$ которой служат действительные или комплексные числа. При помощи матрицы A ряд

$$\Sigma u_n, \tag{I}$$

с действительными или комплексными членами u_n, посредством формул

$$u_n' = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

преобразуется в ряд $\Sigma u_n'$ Если ряд $\Sigma u_n'$ сходится к некоторой сумме U, то назовем ряд (I) суммируемым методом A или просто A-суммируемым к сумме U и будем писать

$$U=\sum u_n'=A\left\{\sum u_n\right\}$$

Если же ряд $\Sigma u_n'$ абсолютно сходится, то назовем ряд (I) абсолютно суммируемым методом A или просто $|A|$-суммируемым. Метод A называется треугольным, если матрица A треугольна, т. е. если $a_{nk}=0$ при $k>n$. В этом случае приведенные выше формулы преобразования рядов напишутся в виде

$$(1) \qquad u_n'=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}u_k \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Обозначая частные суммы рядов Σu_n и $\Sigma u_n'$ соответственно через U_n и U_n', т. е.

$$U_n=\sum_{k=0}^{n} u_k, \quad U_n'=\sum_{k=0}^{n} u_k',$$

из формул (1) найдем:

$$U_n'=\sum_{k=0}^{n} g_{nk}u_k \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n} a_{\nu k}.$$

Применение преобразования Абеля к сумме U_n' дает:

$$(2) \qquad U_n'=\sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk}U_k \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$(3) \qquad \alpha_{nk}=\begin{cases} \Delta g_{nk}{}^{1} & \text{при } k<n, \\ g_{nn} & \text{при } k=n, \end{cases} \qquad g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n} a_{\nu k}.$$

Таким образом, каждый треугольный матричный метод суммирования A, данный в виде (1) преобразования рядов, можно привести к виду (2) преобразования последовательностей частных сумм этих рядов. Из формул (3), которые определяют переход от преобразования (1) к преобразованию (2), без труда вытекает:

$$(4) \qquad a_{nk}=\begin{cases} g_{nk}-g_{n-1,k} & \text{при } k<n, \\ g_{nn} & \text{при } k=n, \end{cases} \qquad g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n} \alpha_{n\nu}.$$

---

[1] Разность Δg_{nk} определяется равенством $\Delta g_{nk}=g_{nk}-g_{n,k+1}$. При наличии двух индексов разность в настоящей статье всегда составляется по второму индексу.

Формулы (4) определяют переход от преобразования (2) к преобразованию (1).

Треугольный метод $A = (\alpha_{nk})$ называется нормальным, если $\alpha_{nn} \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Условие нормальности является необходимым и достаточным для того, чтобы треугольная матрица имела обратную матрицу $A^{-1} = (\alpha_{nk})^{-1}$ Из существования матрицы $(\alpha_{nk})^{-1}$ следует существование матрицы $(a_{nk})^{-1}$ и наоборот, так как по формулам (3) имеем

$$a_{nn} = g_{nn} = \alpha_{nn}.$$

В результате обращения формул (1) и (2) находим:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk} u_k' \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_{nk} U_k' \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где

$$(\eta_{nk}) = (\alpha_{nk})^{-1}, \quad (\xi_{nk}) = (a_{nk})^{-1}$$

Формулы (5) и (6) определяют также некоторый матричный метод суммирования: формулы (5) определяют этот метод в виде преобразования рядов, формулы (6) — в виде преобразования последовательностей частных сумм этих рядов. Поэтому между величинами η_{nk} и ξ_{nk} имеют место соотношения, аналогичные соотношениям (3) и (4), а именно:

$$\xi_{nk} = \begin{cases} \Delta\gamma_{nk} & \text{при } k < n, \\ \gamma_{nn} & \text{при } k = n, \end{cases} \qquad \gamma_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \eta_{\nu k}; \tag{7}$$

$$\eta_{nk} = \begin{cases} \gamma_{nk} - \gamma_{n-1,k} & \text{при } k < n, \\ \gamma_{nn} & \text{при } k = n, \end{cases} \qquad \gamma_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \xi_{n\nu}. \tag{8}$$

Таким образом, зная матрицы (a_{nk}) и $(\xi_{nk}) = (a_{nk})^{-1}$ легко вычислить матрицы (α_{nk}) и $(\eta_{nk}) = (\alpha_{nk})^{-1}$ и наоборот. Рассмотрим, например, метод (R, p_n) взвешенных средних Рисса, где

$$a_{nk} = \frac{p_k}{P_n} \quad \left(P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k\right)$$

Нетрудно проверить, что

$$\xi_{nk}=0 \text{ при } n>k+1,\ \xi_{k+1,k}=-\frac{P_k}{p_{k+1}},\quad \xi_{kk}=\frac{P_k}{p_k}$$

Согласно формулам (4) и (8) находим:

$$(9)\qquad a_{nk}=\frac{p_n P_{k-1}}{P_{n-1}P_n}\quad \text{при } n>0,\ a_{00}=1;$$

$$\eta_{nk}=0 \text{ при } n>k+1,\ \eta_{k+1,k}=-\frac{P_{k-1}}{p_k},\quad \eta_{kk}=\frac{P_k}{p_k},$$

если положим $P_{-1}=0$.

В работе [3] рассматривались нормальные матричные методы суммирования в виде (2). В настоящей статье мы используем вид (1)

2. В дальнейшем нам понадобятся некоторые теоремы, дающие необходимые и достаточные условия для того, чтобы матричный метод $A=(a_{nk})$ суммировал (абсолютно суммировал) все сходящиеся (абсолютно сходящиеся) ряды.

Пусть матричный метод $A=(a_{nk})$ преобразует ряд Σu_n в ряд $\Sigma u_n'$ по формулам

$$(10)\qquad u_n'=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}u_k\quad (n=0,1,2,\ldots),$$

причем мы здесь не будем предполагать, что матрица (a_{nk}) треугольна.

Теорема I. Метод $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд сохраняет сходимость, т. е. суммирует все сходящиеся ряды тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} g_{nk}=g_k\quad (k=0,1,2,\ldots),$$

$$2^\circ\ \sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta g_{nk}\right|\leqslant M \quad\text{независимо от } n,$$

где

$$g_{nk}=\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu k}.$$

При этом метод A сохраняет сумму каждого сходящегося ряда тогда и только тогда, когда $g_k=1$ $(k=0,1,2,\ldots)$

Теорема I по существу была доказана Ханом [4] в 1922 г

Теорема II. Метод $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд сохраняет абсолютную сходимость, т. е. абсолютно суммирует все абсолютно сходящиеся ряды тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{nk}\right| \leqslant M \quad \text{независимо от } k.$$

При этом метод A сохраняет сумму каждого абсолютно сходящегося ряда тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}=1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорему II доказали Кнопп и Лоренц [5] и по существу также Суноути [6] в 1949 г.

Теорема III. Метод $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд суммирует все абсолютно сходящиеся ряды тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk}=g_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

2° $|g_{nk}|\leqslant M$ независимо от n и k,

где

$$g_{nk}=\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu k}.$$

При этом метод A сохраняет сумму каждого абсолютно сходящегося ряда тогда и только тогда, когда $g_k=1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Теорема III по существу была доказана Ханом [4] в 1922 г

Теорема IV. Если метод $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд суммирует все сходящиеся (абсолютно сходящиеся) ряды, то для каждого сходящегося (абсолютно сходящегося) ряда Σu_n имеет место соотношение

$$A\left\{\sum u_n\right\}=\sum g_k u_k,$$

где

$$g_k=\lim_{n\to\infty} g_{nk}=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu k}.$$

Доказательство. Согласно определению A-суммируемости и A-суммы ряда Σu_n имеем

$$A\left\{\sum u_n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty} u_n'=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} u_n'=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}u_k=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}a_{nk}\right)u_k=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g_{mk}u_k=\sum_{k=0}^{\infty}g_k u_k,$$

причем последний шаг — предельный переход под знаком суммы — является допустимым, если ряд $\Sigma g_{mk}u_k$ равномерно сходится относительно m. Если ряд Σu_n абсолютно сходится, то равномерная сходимость ряда $\Sigma g_{mk}u_k$ без труда вытекает из условия 2° теоремы III. В случае же неабсолютной сходимости ряда Σu_n при помощи преобразования Абеля мы находим:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}g_{mk}u_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\Delta g_{mk}\cdot(U_k-U_n)+g_{m,n+p}(U_{n+p}-U_n). \tag{11}$$

В силу условий 2° теорем I и III имеют место неравенства

$$\sum_{k=0}^{n+p-1}|\Delta g_{mk}|\leqslant M,\quad |g_{m,n+p}|\leqslant M,$$

где M не зависит от m, n и p. Так как, с другой стороны, последовательность $\{U_n\}$ сходится, то мы можем для любого, наперед заданного положительного числа ε выбирать такое натуральное число N чтобы неравенство

$$|U_k-U_n|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

имело место для каждого $k>n$, если только $n>N$ Таким образом, при $n>N$ из (11) вытекает неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}g_{mk}u_k\right|<\varepsilon,$$

справедливое для любого натурального числа p, независимо от m, чем равномерная сходимость ряда $\Sigma g_{mk}u_k$ доказана.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Проблемы I—III (кроме второй части проблемы I), поставленные нами во введении настоящей статьи, можно рассматривать как частные случаи следующей, более общей проблемы: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд Σw_n, где [1]

[1] При $\varepsilon=-1$ положим $w_0=0$.

$$(12)\qquad w_n = \sum_{k=0}^{n+\varepsilon} c_{nk} u_k \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

был B-суммируемым ($|B|$-суммируемым) при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых) рядах Σu_n. Соответственно отдельным проблемам I—III, величины ε и c_{nk} имеют следующие значения:

проблема I. $\varepsilon = 0$, $\quad c_{nk} = \begin{cases} \Theta^n & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k \neq n; \end{cases}$

проблема II:
а) интегрирование

$$\varepsilon = -1,\ c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\Theta^n}{n} & \text{при } k = n - 1, \\ 0 & \text{при } k \neq n - 1; \end{cases}$$

б) дифференцирование

$$\varepsilon = 1,\ c_{nk} = \begin{cases} (n+1)\,\Theta^n & \text{при } k = n + 1, \\ 0 & \text{при } k \neq n + 1; \end{cases}$$

проблема III: $\varepsilon = 0$, $\quad c_{nk} = \begin{cases} v_{n-k} & \text{при } k \leqslant n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$

Будем предполагать в настоящем параграфе, что ε имеет одно из значений 0, -1 и 1, а c_{nk} — произвольные действительные или комплексные числа, удовлетворяющие условию $c_{nk} = 0$ при $k > n + \varepsilon$.

Пусть $A = (\alpha_{nk})$ — некоторый нормальный и $B = (\beta_{nk})$ — произвольный треугольный метод преобразования ряда в ряд. Используя символику матричного исчисления, мы можем формулы (1) и (5) переписать в виде

$$(13)\qquad \begin{aligned} u' &= Au, \\ u &= A^{-1}u' \end{aligned}$$

где

$$u = \begin{Vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \end{Vmatrix}, \qquad u' = \begin{Vmatrix} u_0' \\ u_1' \\ \vdots \\ u_n' \\ \vdots \end{Vmatrix}.$$

Таким же образом можно формулы (12) переписать в виде

$$(14) \qquad w = Cu,$$

где w — матрица-столбец, состоящая из членов w_n ряда Σw_n, а $C = (c_{nk})$ — матрица, которая при $\varepsilon = 0$ является треугольной, имея при $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = 1$ соответственно следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ c_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ c_{20} & c_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} c_{00} & c_{01} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & c_{n,n+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

Согласно определению, B-суммируемость ($|B|$-суммируемость) ряда Σw_n эквивалентна сходимости (абсолютной сходимости) ряда $\Sigma w_n'$, где

$$w_n' = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} w_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

или, в матричной форме,

$$w' = Bw.$$

Отсюда, в силу формул (14) и (13), получаем:

$$w' = BCu = BCA^{-1}u'$$

Таким образом, будем иметь:

$$w' = Du'$$

где

$$D = BCA^{-1}$$

является матрицей такого же типа как C. Обозначая элементы матрицы D через δ_{nk}, т. е. $D = (\delta_{nk})$, находим:

$$(15) \qquad w_n' = \sum_{k=0}^{n+\varepsilon} \delta_{nk} u_k' \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$(16) \qquad \begin{gathered} \delta_{nk} = \sum_{\nu=k-\varepsilon}^{n} \sum_{\mu=k}^{\nu+\varepsilon} \beta_{n\nu} c_{\nu\mu} \eta_{\mu k} \quad \text{при } k \leqslant n + \varepsilon, \\ \delta_{nk} = 0 \text{ при } k > n + \varepsilon, \end{gathered}$$

если положим $c_{-1,0}=0$. Итак, как явствует из формул (15), ряд Σw_n является B-суммируемым ($|B|$-суммируемым) при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых) рядах Σu_n тогда и только тогда, когда метод $D=(\delta_{nk})$ преобразования ряда в ряд суммирует (абсолютно суммирует) все сходящиеся (абсолютно сходящиеся) ряды $\Sigma u_n'$ Следовательно, для решения проблемы, поставленной в начале настоящего параграфа, нам приходится только применять теоремы I—III к методу $D=(\delta_{nk})$ преобразования ряда в ряд. Поскольку $\delta_{\nu k}=0$ при $\nu<k-\varepsilon$, то величины g_{nk}, встречающиеся в теоремах I и III, определяются в данном случае формулой

$$g_{nk}=\sum_{\nu=k-\varepsilon}^{n}\delta_{\nu k},$$

если положим $\delta_{-1,0}=0$. При помощи формулы (16) находим

$$g_{nk}=\sum_{\nu=k-\varepsilon}^{n}\sum_{\mu=k}^{\nu+\varepsilon}(\beta_{\nu\nu}+\beta_{\nu+1,\nu}+\quad+\beta_{n\nu})\,c_{\nu\mu}\eta_{\mu k}\quad \text{при}\quad k\leqslant n+\varepsilon,$$

(17)

$$g_{nk}=0 \text{ при } k>n+\varepsilon,$$

если положим $c_{-1,0}=0$. Соответственно теоремам I—III получаем следующие основные теоремы.

Теорема 1. Ряд Σw_n, члены w_n которого определяются формулой (12), является B-суммируемым при всех A-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk}$ $(k=0, 1, 2, \quad .)$.

2° $\sum\limits_{k=}^{n+\varepsilon}|\Delta g_{nk}|\leqslant M$,

где M не зависит от n, а величины g_{nk} даются формулой (17).

Теорема 2. Ряд Σw_n, члены w_n которого определяются формулой (12), является $|B|$-суммируемым при всех $|A|$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=k-\varepsilon}^{\infty}|\delta_{nk}|\leqslant M,$$

где M не зависит от k, а величины δ_{nk} даются формулой (16).

Теорема 3. Ряд Σw_n, члены w_n которого определяются формулой (12), является B-суммируемым при всех $|A|$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$,

2° $|g_{nk}| \leqslant M$,

где M не зависит от n и $k \leqslant n+\varepsilon$, а величины g_{nk} даются формулой (17)

Теоремы 1—3 определяют общую схему для решения проблем I—III (кроме второй части проблемы I), поставленных во введении настоящей статьи. Прежде чем приступить к конкретным применениям этих теорем, пополним постановку проблемы, из которой мы исходили в настоящем параграфе. Тем самым мы имеем, в частности, возможность решить и вторую часть проблемы I, заключающуюся в нахождении необходимых и достаточных условий для справедливости равенства

$$\lim_{\Theta\to 1} B\left\{\sum u_n\Theta^n\right\} = A\left\{\sum u_n\right\}$$

при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых) рядах Σu_n.

2. Предположим, что коэффициенты c_{nk} в формуле (12) зависят от комплексного параметра Θ, который стремится к некоторому предельному значению Θ_0. Тогда члены w_n и w_n' рядов Σw_n и $\Sigma w_n'$ а также величины δ_{nk}, g_{nk} и g_k являются функциями от Θ; обозначим их соответственно через $w_n(\Theta)$, $w_n'(\Theta)$, $\delta_n(\Theta)$, $g_{nk}(\Theta)$ и $g_n(\Theta)$. Возникает вопрос: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд $\Sigma w_n(\Theta)$ был B-суммируемым ($|B|$-суммируемым) при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых) рядах Σu_n и чтобы имело место равенство

$$\lim_{\Theta\to\Theta_0} B\left\{\sum w_n(\Theta)\right\} = A\left\{\sum u_n\right\} \tag{18}$$

Проблема I, поставленная во введении настоящей статьи, представляет собой частный случай этого вопроса, при котором $w_n(\Theta) = u_n\Theta^n$ и $\Theta_0 = 1$.

Первая часть поставленного вопроса решается теоремами 1—3. Нам остается найти необходимые и достаточные условия для справедливости равенства (18).

По определению B-суммы ряда $\Sigma w_n(\Theta)$ имеем:

$$B\left\{\sum w_n(\Theta)\right\} = \sum w_n'(\Theta),$$

где, согласно формуле (15).

$$w_n'(\Theta) = \sum_{k=0}^{n+\varepsilon} \delta_{nk}(\Theta)\, u_k' \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum w_n'(\Theta) = D\left\{\sum u_n'\right\}$$

и, следовательно,

$$B\left\{\sum w_n(\Theta)\right\} = D\left\{\sum u_n'\right\}$$

С другой стороны, по определению A-суммы ряда Σu_n имеем:

$$A\left\{\sum u_n\right\} = \sum u_n'$$

Таким образом, равенство (18) можно переписать в виде

$$\lim_{\Theta \to \Theta_0} D\left\{\sum u_n'\right\} = \sum u_n' \tag{19}$$

где ряд $\Sigma u_n'$ согласно предположению, сходится (абсолютно сходится).

Так как метод $D = (\delta_{nk}(\Theta))$ преобразования ряда в ряд должен суммировать все сходящиеся (абсолютно сходящиеся) ряды, то, согласно теореме IV будем иметь:

$$D\left\{\sum u_n'\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\Theta)\, u_k'$$

где

$$g_k(\Theta) = \lim_{n \to \infty} g_{nk}(\Theta).$$

Поэтому равенству (19) можно придать окончательный вид

$$\lim_{\Theta \to \Theta_0} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\Theta)\, u_k' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n' \tag{20}$$

Равенство (20) эквивалентно требованию регулярности метода множителей сходимости $\{g_k(\Theta)\}$ в классе сходящихся (абсолютно сходящихся) рядов, т. е. требованию суммируемости методом множителей сходимости $\{g_k(\Theta)\}$ любого сходящегося (абсолютно сходящегося) ряда к своей обыкновенной сумме. Как показал Перрон [7], для регулярности метода множителей сходимости $\{g_k(\Theta)\}$ в классе сходящихся рядов достаточно выполнения следующих двух условий:

1° $\lim\limits_{\Theta \to \Theta_0} g_k(\Theta) = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

2° $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\Delta g_k(\Theta)| \leqslant M$ независимо от Θ в некоторой окрестности Θ_0. Лоренц [8] показал, что условия Перрона являются также необходимыми.

Можно доказать, что для регулярности метода множителей сходимости $\{g_k(\Theta)\}$ в классе абсолютно сходящихся рядов необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1° $\lim\limits_{\Theta \to \Theta_0} g_k(\Theta) = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

2° $|g_k(\Theta)| \leqslant M$ независимо от k и Θ в некоторой окрестности Θ_0.

Действительно, пусть $\{\Theta_n\}$ — некоторая последовательность, сходящаяся к Θ_0. Если обозначить

$$g_k(\Theta_n) = g_{nk},$$

то равенство (20) при $\Theta = \Theta_n$ имеет вид

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_{nk} u_k' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n' \tag{21}$$

Как следует из теоремы III, равенство (21) справедливо при всех абсолютно сходящихся рядах $\Sigma u_n'$ тогда и только тогда, когда

1° $\lim\limits_{n \to \infty} g_{nk} = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

2° $|g_{nk}| \leqslant M$ независимо от[1] $n > n_0$ и k.

Отсюда непосредственно вытекает наше утверждение.

Теперь легко сформулировать следующие обобщения теорем 1—3.

Теорема 4. Ряд Σw_n, члены w_n которого определяются формулой (12), является B-суммируемым, и равенство (18) справедливо при всех A-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n \to \infty} g_{nk}(\Theta) = g_k(\Theta) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

2° $\sum\limits_{k=0}^{n+\varepsilon} |\Delta g_{nk}(\Theta)| \leqslant M(\Theta)$ независимо от n,

---

[1] Здесь выполнение неравенства 2° для всех n не обязательно.

3° $\lim\limits_{\Theta\to\Theta_0} g_k(\Theta)=1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$,

4° $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\Delta g_k(\Theta)| \leqslant M$ независимо от Θ в некоторой окрестности Θ_0.

Теорема 5. Ряд Σw_n, члены w_n которого определяются формулой (12), является $|B|$-суммируемым, и равенство (18) справедливо при всех $|A|$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда

1° $\sum\limits_{n=k-\varepsilon}^{\infty} |\delta_{nk}(\Theta)| \leqslant M$ независимо от k,

2° $\lim\limits_{\Theta\to\Theta_0} g_k(\Theta)=1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

3° $|g_k(\Theta)| \leqslant M$ независимо от k и Θ в некоторой окрестности Θ_0.

Теорема 6. Ряд Σw_n, члены w_n которого определяются формулой (12), является B-суммируемым, и равенство (18) справедливо при всех $|A|$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk}(\Theta)=g_k(\Theta) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$,

2° $|g_{nk}(\Theta)| \leqslant M(\Theta)$ независимо от n и $k \leqslant n+\varepsilon$,

3° $\lim\limits_{\Theta\to\Theta_0} g_k(\Theta)=1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$,

4° $|g_k(\Theta)| \leqslant M$ независимо от k и Θ в некоторой окрестности Θ_0.

Если положим в частности $w_n=\varepsilon_n(\Theta)u_n$, где $\{\varepsilon_n(\Theta)\}$ — некоторая последовательность функций от Θ, то из теорем 1—6 можно вывести ряд так называемых «теорем о множителях сходимости и суммируемости», теория которых наиболее детально разработана в случае метода суммирования Вороного (в частности Чезаро). Мы надеемся более подробно вернуться к этому вопросу в следующей статье. Теперь же перейдем к решению проблем I—III, сформулированных во введении настоящей статьи, в случае метода взвешенных средних Рисса.

§ 4. О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ I В СЛУЧАЕ МЕТОДА РИССА

1. Для изучения суммируемости степенного ряда

$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n\Theta^n \quad (|\Theta| \leqslant 1),$$

величины ε и c_{nk} в преобразовании (12) приходится выбирать следующим образом (стр. 157):

$$\varepsilon = 0, \quad c_{nk} = \begin{cases} \Theta^n & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

При этих условиях формулы (16) и (17) дают:

$$\text{(22)} \quad \begin{aligned} &\delta_{nk}(\Theta) = \sum_{\nu=k}^{n} \beta_{n\nu}\, \eta_{\nu k}\, \Theta^{\nu} \quad \text{при } n \geqslant k, \\ &\delta_{nk}(\Theta) = 0 \text{ при } n < k; \end{aligned}$$

$$\text{(23)} \quad \begin{aligned} &g_{nk}(\Theta) = \sum_{\nu=k}^{n} (\beta_{\nu\nu} + \beta_{\nu+1,\nu} + \ldots + \beta_{n\nu})\, \eta_{\nu k}\, \Theta^{\nu} \text{ при } k \leqslant n, \\ &g_{nk}(\Theta) = 0 \text{ при } k > n. \end{aligned}$$

В частности, при $B = E$, где E — метод обыкновенной сходимости, соответствующий единичной матрице, величины $\delta_{nk}(\Theta)$ и $g_{nk}(\Theta)$, определенные формулами (22) и (23), превращаются в

$$\text{(24)} \qquad \delta'_{nk}(\Theta) = \eta_{nk}\Theta^n,$$

$$\text{(25)} \qquad g'_{nk}(\Theta) = \sum_{\nu=k}^{n} \eta_{\nu k}\, \Theta^{\nu}$$

Предположим теперь, что $A = (R, p_n)$, $B = (R, q_n)$, где $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — последовательности отличных от нуля действительных или комплексных чисел, таких, что суммы

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_n, \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

также отличны от нуля. Тогда, согласно формулам (9), имеем:

$$\beta_{n\nu} = \frac{q_n Q_{\nu-1}}{Q_{n-1} Q_n} \text{ при } n > 0,\ \beta_{00} = 1;$$

$$\eta_{\nu k} = 0 \text{ при } \nu > k+1, \quad \eta_{k+1,k} = -\frac{P_{k-1}}{p_k}; \quad \eta_{kk} = \frac{P_k}{p_k},$$

причем надо учесть, что $P_{-1} = 0$, $Q_{-1} = 0$. Соглашение $P_{-1} = 0$, $Q_{-1} = 0$ мы будем всегда использовать в дальнейшем.

В случае $A=(R,\ p_n)$ $B=(R,\ q_n)$ из формул (22)—(25) получаем:

$$\delta_{nk}(\Theta)=\frac{q_n\,\Theta^k}{Q_{n-1}Q_n p_k}(P_k Q_{k-1}-P_{k-1}Q_k\Theta) \text{ при } n>k, \tag{26}$$

$$\delta_{kk}(\Theta)=\frac{q_k P_k}{Q_k p_k}\Theta^k; \tag{27}$$

$$g_{nk}(\Theta)=\frac{Q_n-Q_{k-1}}{Q_n}\,\frac{P_k}{p_k}\Theta^k-\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\frac{P_{k-1}}{p_k}\Theta^{k+1} \text{ при } k<n, \tag{28}$$

$$g_{nn}(\Theta)=\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Theta^n; \tag{29}$$

$$\begin{gathered}\delta'_{nk}(\Theta)=0 \text{ при } n>k+1, \quad \delta'_{k+1,k}(\Theta)=-\frac{P_{k-1}}{p_k}\Theta^{k+1},\\ \delta'_{kk}(\Theta)=\frac{P_k}{p_k}\Theta^k,\end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}g'_{nk}(\Theta)=\frac{P_k}{p_k}\Theta^k-\frac{P_{k-1}}{p_k}\Theta^{k+1} \text{ при } k<n,\\ g'_{nn}(\Theta)=\frac{P_n}{p_n}\Theta^n.\end{gathered} \tag{31}$$

2. Предположим в этом пункте, что метод $B=(R,\ q_n)$ суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда, согласно теореме III, имеют место следующие необходимые и достаточные условия [1]:

1° существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n \neq 0$, конечный или бесконечный,

2° $\left|\frac{Q_k}{Q_n}\right| \leqslant L$ независимо от n и $k\leqslant n$,

причем в случае регулярности метода $(R,\ q_n)$ имеем $\lim Q_n=\infty$.

Как следует из формулы (28), $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk}(\Theta)$, ввиду условия 1° всегда существует, т. е. условие 1° теоремы 3 всегда выполняется. Что касается условия 2° теоремы 3, то оно эквивалентно следующим двум условиям:

$$\left|\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Theta^n\right| \leqslant M(\Theta), \tag{32}$$

$$\left|\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\frac{P_k}{p_k}\Theta^k(1-\Theta)\right| \leqslant N(\Theta). \tag{33}$$

---

[1] Если $q_n>0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, то условия 1° и 2° отпадают.

Действительно, формулу (28) можно переписать в виде

$$g_{nk}(\Theta)=\frac{Q_n-(Q_k-q_k)}{Q_n}\,\frac{P_k}{p_k}\,\Theta^k-\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\frac{P_k-p_k}{p_k}\,\Theta^{k+1},$$

откуда

$$g_{nk}(\Theta)=\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\frac{P_k}{p_k}\,\Theta^k(1-\Theta)+\frac{q_kP_k}{Q_np_k}\,\Theta^k+ \tag{34}$$
$$+\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\Theta^{k+1}\quad\text{при } k<n.$$

Необходимость условия (32) непосредственно вытекает из (29). Необходимость же условия (33) следует из (34), если принять во внимание, что вследствие (32) и условия 2° имеем:

$$\left|\frac{q_kP_k}{Q_np_k}\,\Theta^k\right|=\left|\frac{q_kP_k}{Q_kp_k}\,\Theta^k\right|\left|\frac{Q_k}{Q_n}\right|\leqslant LM(\Theta),$$

$$\left|\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\Theta^{k+1}\right|\leqslant 1+\left|\frac{Q_k}{Q_n}\right|\leqslant 1+L,$$

так как $|\Theta|\leqslant 1$. Достаточность условий (32) и (33) теперь уже очевидна. Тем самым нами доказана следующая теорема.

Теорема 7. Пусть метод $(R,\ q_n)$ суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда степенной ряд (II) является $(R,\ q_n)$-суммируемым для всех $|R,\ p_n|$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

1° $\left|\dfrac{q_nP_n}{Q_np_n}\,\Theta^n\right|\leqslant M(\Theta)$ независимо от n,

2° $\left|\dfrac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\dfrac{P_k}{p_k}\,\Theta^k(1-\Theta)\right|\leqslant N(\Theta)$ независимо от n и $k\leqslant n$.

В частности, если $(R,\ q_n)=(R,\ p_n)$, то условие 1° теоремы 7 отпадает. Если же $\Theta=1$, то условие 2° теоремы 7 отпадает и условие

$$\left|\frac{q_n}{Q_n}\right|\leqslant M\left|\frac{p_n}{P_n}\right|, \tag{35}$$

где M не зависит от n, является необходимым и достаточным для того, чтобы из $|R,\ p_n|$-суммируемости следовала $(R,\ q_n)$-суммируемость.

Если вместо формул (28) и (29) исходить из формул (31) то из теоремы 3 без труда вытекает, что ряд (II) является сходящимся для всех $|R,\ p_n|$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{P_n}{p_n}\,\Theta^n\right|\leqslant M(\Theta)\ \text{независимо от } n. \tag{36}$$

Тот же самый результат можно получить и из теоремы 7, если принять во внимание, что, согласно результату Хилла [9], регулярный метод (R, q_n) эквивалентен обыкновенной сходимости тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{Q_n}{q_n}\right| \leqslant L \text{ независимо от } n.$$

Если метод (R, q_n) регулярен, т. е. $\lim Q_n = \infty$, то из условия 2° теоремы 7 при $n \to \infty$ получаем

$$\left|\frac{P_k}{p_k}\Theta^k(1-\Theta)\right| \leqslant N(\Theta) \text{ независимо от } k,$$

откуда, согласно (36), вытекает сходимость ряда (II), если $\Theta \neq 1$. Итак, если метод (R, q_n) регулярен, то условие 2° теоремы 7 влечет за собой уже сходимость ряда $\Sigma u_n\Theta^n$ $(\Theta \neq 1)$.

Если же метод (R, q_n) нерегулярен, т. е. $\lim Q_n = \lambda \neq 0$ конечен, то из условий теоремы 7 сходимости ряда (II), вообще говоря, не следует. Покажем это на примере.

Пусть $q_k = 2^{-k} = p_k$ и, следовательно, $Q_k = 2 - 2^{-k} = P_k$. Нетрудно проверить выполнение условий теоремы 7 при $|\Theta| \leqslant 1$. Но, согласно условию (36), ряд $\Sigma u_n\Theta^n$ является сходящимся только при $|\Theta| \leqslant \frac{1}{2}$

Приступая к применению теоремы 6, следует с самого начала различать два случая, в зависимости от того, является ли метод (R, q_n) регулярным или нет.

1) Если метод (R, q_n) регулярен, т. е. $\lim Q_n = \infty$ то, как мы только что видели, достаточно ограничиться рассмотрением случая $B = E$. Тогда из первой формулы (31) (или из (28)) найдем:

$$g_k'(\Theta) = \lim_{n\to\infty} g'_{nk}(\Theta) = \frac{P_k}{p_k}\Theta^k - \frac{P_{k-1}}{p_k}\Theta^{k+1},$$

откуда

$$g_k'(\Theta) = \frac{P_k}{p_k}\Theta^k(1-\Theta) + \Theta^{k+1}. \tag{37}$$

Отсюда при помощи теоремы 6 получается следующая теорема.

Теорема 8. Пусть метод (R, q_n) регулярен в классе абсолютно сходящихся рядов. Тогда степенной ряд (II) сходится и справедливо равенство

$$\lim_{\Theta\to 1} \sum u_n\Theta^n = (R, p_n)\left\{\sum u_n\right\}$$

при всех $|R, p_n|$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{P_k}{p_k}\Theta^k\right| \leqslant \frac{M}{|1-\Theta|}$$

независимо от k в некоторой окрестности точки $\Theta = 1$.

2) Если метод (R, q_n) нерегулярен, т. е. $\lim Q_n = \lambda \neq 0$ конечен, то из формулы (34) находим:

$$g_k(\Theta) = \frac{\lambda - Q_k}{\lambda} \frac{P_k}{p_k} \Theta^k (1-\Theta) + \frac{q_k P_k}{\lambda p_k} \Theta^k + \frac{\lambda - Q_k}{\lambda} \Theta^{k+1} \tag{38}$$

Согласно условию 3° теоремы 6 должны иметь место равенства

$$\lim_{\Theta \to 1} g_k(\Theta) = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$\frac{q_k P_k}{\lambda p_k} + \frac{\lambda - Q_k}{\lambda} = 1,$$

откуда

$$\frac{P_k}{p_k} = \frac{Q_k}{q_k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Так как коэффициенты a_{nk}, определяющие метод (R, p_n), являются, согласно первой формуле (9), однородными функциями относительно $p_0, p_1, \ldots, p_n$, то без ограничения общности можно принять, что $p_0 = 1$. По той же причине можно принять $q_0 = 1$, так что $p_0 = q_0$. Покажем, что тогда

$$p_k = q_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е. что методы (R, p_n) и (R, q_n) совпадают. В самом деле, из (39) при $k = n$ находим

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} = \frac{Q_{n-1}}{q_n},$$

откуда $p_n = q_n$, если предположим, что равенство $p_k = q_k$ имеет место при всех $k < n$. Поскольку $p_0 = q_0$, то наше утверждение доказано.

Условие 4° теоремы 6, согласно формуле (38), в случае $(R, q_n) = (R, p_n)$ гласит:

$$\left| \frac{\lambda - P_k}{p_k} \Theta^k \right| \leqslant \frac{M}{|1-\Theta|}$$

Учитывая еще условие 2° теоремы 7 при $(R, q_n) = (R, p_n)$, можем сформулировать следующую теорему

Теорема 9. Пусть нерегулярный метод (R, q_n) суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда степенной ряд (II) является (R, q_n)-суммируемым и справедливо равенство

$$\lim_{\Theta \to 1} (R, q_n) \left\{ \sum u_n \Theta^n \right\} = (R, p_n) \left\{ \sum u_n \right\}$$

при всех $|R, p_n|$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда методы (R, p_n) и (R, q_n) совпадают и

$$1^\circ \left|\frac{\Theta^k}{p_k}\right| \leqslant N(\Theta)$$

$$2^\circ \left|\frac{\lambda - P_k}{p_k}\,\Theta^k\right| \leqslant \frac{M}{|1-\Theta|}$$

независимо от k в некоторой окрестности точки $\Theta = 1$.

Пусть, например, $p_k = 2^{-k}$ и, следовательно, $P_k = 2 - 2^{-k}$, $\lambda = 2$. Тогда нетрудно убедиться, что условия 1° и 2° теоремы 9 удовлетворяются при всех $|\Theta| \leqslant 1$. Тем самым показано, что из $|R, 2^{-n}|$-суммируемости степенного ряда (II) в точке $\Theta = 1$ следует $(R, 2^{-n})$-суммируемость ряда (II) во всех точках круга $|\Theta| \leqslant 1$, а также справедливость равенства

$$\lim_{\Theta\to 1}(R,\ 2^{-n})\left\{\sum u_n\Theta^n\right\} = (R,\ 2^{-n})\left\{\sum u_n\right\},$$

независимо от способа стремления точки Θ к точке 1 в круге $|\Theta| \leqslant 1$. Как вытекает из теоремы 10 следующего пункта, в точках круга $|\Theta| \leqslant 1$ имеет место даже $|R, 2^{-n}|$-суммируемость.

3. Предположим, что метод (R, q_n) сохраняет абсолютную сходимость, т. е. абсолютно суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда, согласно теореме II, имеет место следующее необходимое и достаточное условие [1]

$$(40)\qquad \left|Q_{k-1}\right|\sum_{n=k}^{\infty}\left|\frac{q_n}{Q_{n-1}Q_n}\right| \leqslant L \text{ независимо от } k,$$

причем в случае регулярности метода (R, q_n) имеем $\lim Q_n = \infty$. Из (40) следует, что метод (R, q_n) нерегулярен и сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, когда ряд $\Sigma|q_n|$ сходится и $\lim Q_n \neq 0$.

Преобразуем формулу (26) следующим образом:

$$\delta_{nk}(\Theta) = \frac{q_n\Theta^k}{Q_{n-1}Q_nP_k}\left[P_k(Q_k - q_k) - (P_k - p_k)\,Q_k\Theta\right] =$$

$$= \frac{Q_kq_n}{Q_{n-1}Q_n}\left[\frac{P_k}{p_k}\,\Theta^k(1-\Theta) - \frac{q_kP_k}{Q_kp_k}\,\Theta^k + \Theta^{k+1}\right]$$

Имея в виду, что в случае регулярности метода (R, q_n)

$$\left|Q_k\right|\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{q_n}{Q_{n-1}Q_n}\right| \geqslant \left|Q_k\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{q_n}{Q_{n-1}Q_n}\right| = \left|Q_k\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{n-1}} - \frac{1}{Q_n}\right)\right| = 1,$$

---

[1] Условие (40) выполняется, если $q_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

и в случае нерегулярности

$$\left|Q_k\right|\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{q_n}{Q_{n-1}Q_n}\right|\geqslant K\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|q_n\right|,$$

где K — некоторая постоянная, а также учитывая (27) и (40), из теоремы 2 нетрудно вывести следующую теорему

Теорема 10. Пусть метод (R, q_n) сохраняет абсолютную сходимость. Тогда степенной ряд (II) является $|R, q_n|$-суммируемым для всех $|R, p_n|$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

1° $\left|\frac{q_k P_k}{Q_k p_k}\Theta^k\right|\leqslant M(\Theta)$ независимо от k,

2° $\left|R_k\frac{P_k}{p_k}\Theta^k(1-\Theta)\right|\leqslant N(\Theta)$ независимо от k,

где $R_k=1$ в случае регулярности и

$$R_k=\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|q_n\right|$$

в случае нерегулярности метода (R, q_n)

Если метод (R, q_n) сохраняет абсолютную сходимость, то, в частности, при $\Theta=1$ из теоремы 10 вытекает, что условие (35) является необходимым и достаточным для того, чтобы из $|R, p_n|$-суммируемости следовало $|R, q_n|$-суммируемость. В случае $p_n>0$, $q_n>0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ Суноути [6] показал, что неравенство

$$\frac{q_{n+1}}{Q_n}<\frac{p_{n+1}}{P_n}$$

является достаточным для того, чтобы из $|R, p_n|$-суммируемости следовала $|R, q_n|$-суммируемость. Как отметил Бозанкэ [10], более подробное исследование доказательства Суноути приводит к необходимому и достаточному условию

$$\frac{q_n}{Q_n}<M\frac{p_n}{P_n}$$

Так как в случае регулярности метода (R, q_n) условия теорем 10 и 7 эквивалентны, то условие (36) влечет за собой даже абсолютную сходимость ряда (II) [1] В частности при $\Theta=1$ из (36) вытекает, что условие

$$\left|\frac{P_n}{p_n}\right|\leqslant M \tag{41}$$

[1] Этот результат на основании формул (30) непосредственно вытекает и из теоремы 2.

является необходимым и достаточным для того, чтобы $|R, p_n|$-суммируемость, регулярная в классе абсолютно сходящихся рядов, была эквивалентна абсолютной сходимости. В случае $p_n > 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), необходимые и достаточные условия для того, чтобы регулярная $|R, p_n|$-суммируемость была эквивалентна абсолютной сходимости, дал Суноути [6] в виде, несколько отличающемся от (41).

Наоборот, если $|R, p_n|$-суммируемость эквивалентна абсолютной сходимости, то из (41) следует выполнение условия (36) при всех $|\Theta| \leqslant 1$. Отсюда вытекает тот известный факт, что абсолютная сходимость степенного ряда в некоторой точке окружности круга сходимости влечет за собой абсолютную сходимость этого ряда везде на круге сходимости.

Аналогичным образом, условие теоремы 8 обеспечивает также абсолютную сходимость ряда (II). В частности, если $|R, p_n|$-суммируемость эквивалентна абсолютной сходимости, то из (41) следует выполнение условия теоремы 8 при всех $|\Theta| \leqslant 1$. Это выражает тот известный факт, что в случае абсолютной сходимости степенного ряда (II) в точке $\Theta = 1$ равенство

$$\lim_{\Theta \to 1} \sum u_n \Theta^n = \sum u_n$$

справедливо независимо от способа стремления точки Θ к точке 1 в круге $|\Theta| \leqslant 1$.

4. Предположим в этом пункте, что метод $B = (R, q_n)$ сохраняет сходимость, т. е. суммирует все сходящиеся ряды. Тогда, согласно теореме 1, имеют место следующие необходимые и достаточные условия [1]:

1° существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n \neq 0$, конечный или бесконечный,

2° $\sum\limits_{k=0}^{n} \left| \frac{q_k}{Q_n} \right| \leqslant L$ независимо от n, причем в случае регулярности метода (R, q_n) имеем $\lim Q_n = \infty$.

Как следует из формулы (28), условие 1° теоремы 1 всегда выполняется. Для исследования условия 2° теоремы 1 преобразуем разность $\Delta g_{nk}(\Theta)$ $(k < n)$ при помощи (28) следующим образом:

$$\Delta g_{nk}(\Theta) = \frac{Q_n - Q_{k-1}}{Q_n} \frac{P_k}{p_k} \Theta^k - \frac{Q_n - (Q_{k-1} + q_k)}{Q_n} \frac{P_k - p_k}{p_k} \Theta^{k+1} -$$
$$- \frac{Q_n - (Q_{k+1} - q_{k+1})}{Q_n} \frac{P_k + p_{k+1}}{p_{k+1}} \Theta^{k+1} +$$
$$+ \frac{Q_n - Q_{k+1}}{Q_n} \frac{P_k}{p_{k+1}} \Theta^{k+2},$$

[1] Если $q_n > 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), то условия 1° и 2° отпадают.

откуда

$$(42)\qquad \Delta g_{nk}(\Theta)=\left[\left(\frac{Q_n-Q_{k-1}}{p_k}-\frac{Q_n-Q_{k+1}}{p_{k+1}}\Theta\right)(1-\Theta)+\right.$$
$$\left.+\Delta\frac{q_k}{p_k}\Theta\right]\frac{P_k}{Q_n}\Theta^k$$

На основе формул (29) и (42) из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 11. Пусть метод $(R,\ q_n)$ сохраняет сходимость[1]. Тогда степенной ряд (II) является $(R,\ q_n)$-суммируемым для всех $(R,\ p_n)$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$1^\circ\ \left|\frac{q_nP_n}{Q_np_n}\Theta^n\right|\leqslant M(\Theta),$$

$$2^\circ\ \sum_{k=0}^{n-1}\left|\left(\frac{Q_n-Q_{k-1}}{p_k}-\frac{Q_n-Q_{k+1}}{p_{k+1}}\Theta\right)(1-\Theta)+\Delta\frac{q_k}{p_k}\Theta\right|\left|\frac{P_k}{Q_n}\Theta^k\right|\leqslant N(\Theta),$$

где $M(\Theta)$ и $N(\Theta)$ не зависят от n.

В частности, если $\Theta=1$, то из теоремы 11 вытекает теорема Гарабедяна и Рандельса [11], которая дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод $(R,\ q_n)$ был не слабее метода $(R,\ p_n)$. Если же $(R,\ q_n)=(R,\ p_n)$, то условие 1° теоремы 11 отпадает и теорема 11 превращается в теорему 5 статьи [3]. Если, наконец, метод $(R,\ q_n)$ эквивалентен обыкновенной сходимости, так что

$$\left|\frac{Q_n}{q_n}\right|\leqslant L,$$

то из теоремы 11 получается теорема 6 статьи [3].

Перейдя к применению теоремы 4, следует различать два случая, в зависимости от того, является ли метод $(R,\ q_n)$ регулярным или нет.

1) Если $(R,\ q_n)$ регулярен, т. е. $\lim Q_n=\infty$, то условие 3° теоремы 4 всегда выполняется. Поскольку по формуле (42) при $n\to\infty$ имеем

$$\Delta g_k(\Theta)=(1-\Theta)\left(\frac{1}{p_k}-\frac{\Theta}{p_{k+1}}\right)P_k\Theta^k,$$

[1] Для справедливости теоремы 11 достаточно предполагать существование предела $\lim Q_n\neq 0$, конечного или бесконечного.

то условие 4° теоремы 4 гласит:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |1-\Theta| \left| \frac{1}{p_k} - \frac{\Theta}{p_{k+1}} \right| |P_k \Theta^k| \leqslant M.$$

Тем самым из теоремы 4 выведена следующая теорема.

Теорема 12. Пусть метод $(R,\ q_n)$ регулярен в классе сходящихся рядов. Тогда степенной ряд (II) является $(R,\ q_n)$-суммируемым и справедливо равенство

$$\lim_{\Theta\to 1} (R,\ q_n)\left\{\sum u_n \Theta^n\right\} = (R,\ p_n)\left\{\sum u_n\right\}$$

при всех $(R,\ p_n)$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда кроме двух условий теоремы 11 выполняется еще условие

$$3^\circ \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{p_k} - \frac{\Theta}{p_{k+1}} \right| \left| P_k \Theta^k \right| \leqslant \frac{M}{|1-\Theta|}$$

в некоторой окрестности точки $\Theta = 1$.

В частности, если $(R,\ q_n)=(R,\ p_n)$, то теорема 12 превращается в теорему 9 статьи [3]. Если же метод $(R,\ q_n)$ эквивалентен обыкновенной сходимости, то из теоремы 12 вытекает теорема 10 статьи [3].

2) Если (R, q_n) нерегулярен, т. е. $\lim Q_n = \lambda \neq 0$ конечен, то, как мы видели в пункте 2, условие 3° теоремы 4 удовлетворяется тогда и только тогда, когда $(R,\ q_n)=(R,\ p_n)$. Тогда из формулы (42) при $n\to\infty$ найдем:

$$\Delta g_k(\Theta) = (1-\Theta)\left(\frac{\lambda - P_{k-1}}{p_k} - \frac{\lambda - P_{k+1}}{p_{k+1}}\Theta\right)\frac{P_k}{\lambda}\Theta^k$$

Учитывая еще условие 2° теоремы 11 при $(R,\ q_n)=(R,\ p_n)$, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 13. Пусть нерегулярный метод $(R,\ q_n)$ сохраняет сходимость. Тогда степенной ряд (II) является $(R,\ q_n)$-суммируемым и справедливо равенство

$$\lim_{\Theta\to 1} (R,\ q_n)\left\{\sum u_n \Theta^n\right\} = (R,\ p_n)\left\{\sum u_n\right\}$$

при всех $(R,\ p_n)$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда методы $(R,\ p_n)$ и $(R,\ q_n)$ совпадают и

$$1^\circ \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{P_n - P_{k-1}}{p_k} - \frac{P_n - P_{k+1}}{p_{k+1}}\Theta \right| \left| \Theta^k \right| \leqslant N(\Theta)$$

независимо от n,

$$2^\circ \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda - P_{k-1}}{p_k} - \frac{\lambda - P_{k+1}}{p_{k+1}} \Theta \right| \left| \Theta^k \right| \leqslant \frac{M}{|1-\Theta|}$$

в некоторой окрестности точки $\Theta = 1$.

Пусть, например, $p_k = 2^{-k}$ и, следовательно, $P_k = 2 - 2^{-k}$, $\lambda = 2$. Нетрудно убедиться, что условие 1° теоремы 13 удовлетворяется тогда и только тогда, когда $|\Theta| < 1$. Что касается условия 2° теоремы 13, то оно имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} |2-\Theta| \, |\Theta|^k \leqslant \frac{M}{|1-\Theta|},$$

откуда в силу неравенства $|2-\Theta| \geqslant 2 - |\Theta| \geqslant 1$ находим

$$\frac{|1-\Theta|}{1-|\Theta|} \leqslant M.$$

Интерпретируя полученное неравенство геометрически, можем сказать, что ряд $\Sigma u_n \Theta^n$ $(R,\ 2^{-n})$-суммируем и справедливо равенство

$$\lim_{\Theta \to 1} (R,\ 2^{-n}) \left\{ \sum u_n \Theta^n \right\} = (R,\ 2^{-n}) \left\{ \sum u_n \right\}$$

при всех $(R,\ 2^{-n})$-суммируемых рядах Σu_n тогда и только тогда, когда Θ стремится к точке 1 в круге $|\Theta| < 1$ изнутри любого угла раствора меньше π и с вершиной в точке 1.

§ 5. О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ II В СЛУЧАЕ МЕТОДА РИССА

1. Для изучения суммируемости степенного ряда

$$\text{(III)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n+1} \Theta^{n+1} \quad (|\Theta| \leqslant 1),$$

получившегося из ряда $\Sigma u_n \Theta^n$ путем почленного интегрирования, величины ε и c_{nk} в преобразовании (12) приходится выбирать следующим образом (стр. 157):

$$\varepsilon = -1, \quad c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\Theta^n}{n} & \text{при } k = n-1, \\ 0 & \text{при } k \neq n-1. \end{cases}$$

При этих условиях из формул (16) и (17) получаем:

$$(43) \qquad \delta_{nk} = \sum_{\nu=k+1}^{n} \beta_{n\nu} \eta_{\nu-1,\,k} \frac{\Theta^\nu}{\nu} \quad \text{при } n \geqslant k+1,$$

$$\delta_{nk} = 0 \text{ при } n < k+1;$$

$$(44)\quad g_{nk}=\sum_{\nu=k+1}^{n}(\beta_{\nu\nu}+\beta_{\nu+1,\nu}+\quad+\beta_{n\nu})\,\eta_{\nu-1,k}\frac{\Theta^{\nu}}{\nu}\ \text{при}\ k\leqslant n-1,$$

$$g_{nk}=0\ \text{при}\ k>n-1.$$

В частности, если $A=(R, p_n)$, $B=(R, q_n)$. то из формул (43) и (44) находим:

$$(45)\qquad \delta_{nk}=\frac{q_n\,\theta^{k+1}}{Q_{n-1}\,Q_n\,p_k}\left(\frac{P_k\,Q_k}{k+1}-\frac{P_{k-1}\,Q_{k+1}}{k+2}\,\Theta\right)\ \text{при}\ n>k+1,$$

$$(46)\qquad \delta_{k+1,k}=\frac{q_{k+1}\,P_k}{Q_{k+1}\,p_k}\,\frac{\theta^{k+1}}{k+1};$$

$$(47)\qquad g_{nk}=\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\frac{P_k}{p_k}\,\frac{\theta^{k+1}}{k+1}-\frac{Q_n-Q_{k+1}}{Q_n}\,\frac{P_{k-1}}{p_k}\,\frac{\theta^{k+2}}{k+2}$$

при $k<n-1$,

$$(48)\qquad g_{n,n-1}=\frac{q_n\,P_{n-1}}{Q_n\,p_{n-1}}\,\frac{\theta^{n}}{n}$$

Осуществляя преобразования, аналогичные преобразованиям, проведенным нами при доказательстве теорем 7, 10 и 11, из формул (45) и (47) получаем:

$$(49)\qquad \delta_{nk}=\frac{Q_{k+1}\,q_n}{Q_{n-1}\,Q_n}\left[\frac{P_k}{p_k}\,\Theta^{k+1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\theta}{k+2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{q_{k+1}P_k}{Q_{k+1}p_k}\,\frac{\theta^{k+1}}{k+1}+\frac{\theta^{k+2}}{k+2}\right],$$

$$(50)\qquad g_{nk}=\frac{Q_n-Q_k}{Q_n}\,\frac{P_k}{p_k}\,\Theta^{k+1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\theta}{k+2}\right)+$$

$$+\frac{q_{k+1}\,P_k}{Q_n p_k}\,\frac{\theta^{k+2}}{k+2}+\frac{Q_n-Q_{k+1}}{Q_n}\,\frac{\theta^{k+2}}{k+2},$$

$$(51)\qquad \Delta g_{nk}=\left[\frac{Q_n-Q_k}{p_k}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\theta}{k+2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{Q_n-Q_{k+2}}{p_{k+1}}\,\Theta\left(\frac{1}{k+2}-\frac{\theta}{k+3}\right)+\frac{\theta}{k+2}\,\Delta\frac{q_{k+1}}{p_k}\right]\frac{P_k}{Q_n}\,\Theta^{k+1}$$

Формулы (49)—(51) справедливы при $k<n-1$.

Из теорем 3, 2 и 1 при помощи формул (48). (50), (46), (49) и (51) нетрудно вывести следующие три теоремы.

Теорема 14. Пусть метод (R, q_n) суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда степенной ряд (III) является (R, q_n)-суммируемым для всех $|R, p_n|$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \quad \left| \frac{q_n P_{n-1}}{Q_n p_{n-1}} \frac{\Theta^n}{n} \right| \leqslant M(\Theta) \text{ независимо от } n,$$

$$2^\circ \quad \left| \frac{Q_n - Q_k}{Q_n} \frac{P_k}{p_k} \Theta^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\Theta}{k+2} \right) \right| \leqslant N(\Theta) \text{ независимо от } n \text{ и}$$

$k \leqslant n - 1$.

Теорема 15. Пусть метод (R, q_n) сохраняет абсолютную сходимость. Тогда степенной ряд (III) является $|R, q_n|$-суммируемым для всех $|R, p_n|$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \quad \left| \frac{q_{k+1} P_k}{Q_{k+1} p_k} \frac{\Theta^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant M(\Theta) \text{ независимо от } k,$$

$$2^\circ \quad \left| R_{k+1} \frac{P_k}{p_k} \Theta^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\Theta}{k+2} \right) \right| \leqslant N(\Theta) \text{ независимо от } k, \text{ где}$$

R_k имеет такое же значение как в теореме 10.

Теорема 16. Пусть метод (R, q_n) сохраняет сходимость[1] Тогда степенной ряд (III) является (R, q_n)-суммируемым для всех (R, p_n)-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \quad \left| \frac{q_n P_{n-1}}{Q_n p_{n-1}} \frac{\Theta^n}{n} \right| \leqslant M(\Theta),$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=0}^{n-2} \left| \frac{Q_n - Q_k}{p_k} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\Theta}{k+2} \right) - \frac{Q_n - Q_{k+2}}{p_{k+1}} \Theta \left(\frac{1}{k+2} - \frac{\Theta}{k+3} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Theta}{k+2} \Delta \frac{q_{k+1}}{p_k} \right| \left| \frac{P_k}{Q_n} \Theta^{k+1} \right| \leqslant N(\Theta),$$

где $M(\Theta)$ и $N(\Theta)$ не зависят от n.

В частности, если $(R, q_n) = (R, p_{n-1})$, т. е. $q_n = p_{n-1}$ и, следовательно[2], $Q_n = P_{n-1} + q_0$, то условие 1° теорем 14—16 отпадает. Если, кроме того, $\Theta = 1$, то из теоремы 16 вытекает теорема 13 статьи [3].

---

[1] Для справедливости теоремы 16 достаточно предполагать существование предела $\lim Q_n \neq 0$, конечного или бесконечного.

[2] Величина q_0 остается произвольной. Можно выбрать, например, $q_0 = 1$ (стр. 168).

Если (R, q_n)-суммируемость эквивалентна обыкновенной сходимости ($|R, q_n|$-суммируемость эквивалентна абсолютной сходимости), так что

$$\left|\frac{Q_n}{q_n}\right| \leqslant L,$$

то из условий 1° теорем 14—16 вытекает

$$\left|\frac{P_{n-1}\Theta^n}{p_{n-1}n}\right| \leqslant LM(\Theta). \tag{52}$$

Тогда выполнение условий 2° теорем 14 и 15 является следствием условия (52), в то время как условие 2° теоремы 16 можно привести к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(k+2)-(k+1)\Theta}{(k+1)p_k}-\frac{(k+3)-(k+2)\Theta}{(k+3)p_{k+1}}\Theta\right|\left|\frac{P_k\Theta^{k+1}}{k+2}\right| < +\infty. \tag{53}$$

В частности, если $\Theta \doteq 1$, то из условий (52) и (53) получается теорема 14 статьи [3].

Заметим, наконец, что в случае регулярности метода (R, q_n) условие 2° теоремы 15 получается из условия 2° теоремы 14 при $n \to \infty$. Отсюда следует, что выполнение условий теоремы 14 обеспечивает даже $|R, q_n|$-суммируемость ряда (III), если только метод (R, q_n), сохраняя абсолютную сходимость, регулярен в классе абсолютно сходящихся рядов.

2. Для изучения суммируемости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nu_n\Theta^{n-1} \qquad (|\Theta| \leqslant 1). \tag{IV}$$

получившегося из ряда $\Sigma u_n\Theta^n$ путем почленного дифференцирования, величины ε и c_{nk} в преобразовании (12) приходится выбирать следующим образом (стр. 157):

$$\varepsilon = 1,\quad c_{nk} = \begin{cases}(n+1)\Theta^n & \text{при } k = n+1,\\ 0 & \text{при } k \neq n+1.\end{cases}$$

При этих условиях из формул (16) и (17) получаем:

$$\delta_{nk} = \sum_{\nu=k-1}^{n}\beta_{n\nu}\eta_{\nu+1,\,k}(\nu+1)\Theta^\nu \quad \text{при } n \geqslant k-1, \tag{54}$$

$$\delta_{nk} = 0 \text{ при } n < k-1;$$

$$g_{nk} = \sum_{\nu=k-1}^{n}(\beta_{\nu\nu}+\beta_{\nu+1,\,\nu}+\ldots+\beta_{n\nu})\eta_{\nu+1,\,k}(\nu+1)\Theta^\nu \tag{55}$$

при $k \leqslant n+1$,

$$g_{nk} = 0 \text{ при } k > n+1.$$

В частности, если $A=(R, p_n)$, $B=(R, q_n)$, то из формул (54) и (55), после соответствующих преобразований, находим:

$$\delta_{nk}=\frac{Q_{k-1}q_n}{Q_{n-1}Q_n}\left[\frac{P_k}{p_k}\Theta^{k-1}(k-(k+1)\Theta)-\frac{q_{k-1}P_k}{Q_{k-1}p_k}k\Theta^{k-1}+\right.$$
$$\left.+(k+1)\Theta^k\right] \text{ при } n>k-1, \tag{56}$$

$$\delta_{k-1,k}=\frac{q_{k-1}P_k}{Q_{k-1}p_k}k\Theta^{k-1}; \tag{57}$$

$$g_{nk}=\frac{Q_n-Q_{k-2}}{Q_n}\frac{P_k}{p_k}\Theta^{k-1}(k-(k+1)\Theta)+\frac{q_{k-1}P_k}{Q_np_k}(k+1)\Theta^k+$$
$$+\frac{Q_n-Q_{k-1}}{Q_n}(k+1)\Theta^k \text{ при } k<n+1, \tag{58}$$

$$g_{n,n+1}=\frac{q_nP_{n+1}}{Q_np_{n+1}}(n+1)\Theta^n, \tag{59}$$

$$\Delta g_{nk}=\left[\frac{Q_n-Q_{k-2}}{p_k}(k-(k+1)\Theta)-\frac{Q_n-Q_k}{p_{k+1}}\Theta((k+1)-\right.$$
$$\left.-(k+2)\Theta)+\Theta(k+1)\Delta\frac{q_{k-1}}{p_k}\right]\frac{P_k}{Q_n}\Theta^{k-1} \quad \text{при } k<n+1. \tag{60}$$

При применении теорем 1 и 2 целесообразно ввести ограничение $|\Theta|<1$ (вместо $|\Theta|\leqslant 1$). В случае регулярности метода (R, q_n) это ограничение можно оправдать тем обстоятельством, что ряд (IV) в точке $\Theta=1$ никаким регулярным треугольным методом $B=(\beta_{nk})$ не суммируется, даже если предполагать абсолютную сходимость ряда Σu_n.

Действительно, если $A=E$, где E — метод обыкновенной сходимости, то при $\Theta=1$ из (55) получается:

$$g_{nk}=(\beta_{k-1,k-1}+\beta_{k,k-1}+\quad+\beta_{n,k-1})k,$$

откуда ввиду регулярности метода B находим:

$$\lim_{n\to\infty} g_{nk}=k,$$

так что величины g_{nk} не могут быть ограничены. Наше утверждение вытекает теперь из теоремы 3.

Из теорем 3, 2 и 1 при помощи формул (59), (58), (57), (56) и (60) нетрудно вывести следующие три теоремы, если учитывать, что при $|\Theta|<1$ имеем

$$|k-(k+1)\Theta|\geqslant k-(k+1)|\Theta|=(1-|\Theta|)k-|\Theta|\geqslant\frac{1-|\Theta|}{2}k,$$

если $k\geqslant\frac{2|\Theta|}{1-|\Theta|}$.

Теорема 17. Пусть метод (R, q_n) суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда степенной ряд (IV), где $|\Theta| < 1$, является (R, q_n)-суммируемым для всех $|R, p_n|$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{Q_n - Q_{k-2}}{Q_n} \frac{P_k}{p_k} k\Theta^{k-1} \right| \leqslant N(\Theta) \text{ независимо от } n \text{ и } k \leqslant n + 1.$$

Теорема 18. Пусть метод (R, q_n) сохраняет абсолютную сходимость. Тогда степенной ряд (IV), где $|\Theta| < 1$, является $|R, q_n|$-суммируемым для всех $|R, p_n|$-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \quad \left| \frac{q_{k-1} P_k}{Q_{k-1} p_k} k\Theta^{k-1} \right| \leqslant M(\Theta) \text{ независимо от } k,$$

$$2^\circ \quad \left| R_{k-1} \frac{P_k}{p_k} k\Theta^{k-1} \right| \leqslant N(\Theta) \text{ независимо от } k,$$

где R_k имеет такое же значение как в теореме 10.

Теорема 19. Пусть метод (R, q_n) сохраняет сходимость[1] Тогда степенной ряд (IV) является (R, q_n)-суммируемым для всех (R, p_n)-суммируемых рядов Σu_n тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \quad \left| \frac{q_n P_{n+1}}{Q_n p_{n+1}} (n+1)\Theta^n \right| \leqslant M(\Theta),$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{Q_n - Q_{k-2}}{p_k} [k - (k+1)\Theta] - \frac{Q_n - Q_k}{p_{k+1}} \Theta [(k+1) - (k+2)\Theta] + \Theta(k+1) \Delta \frac{q_{k-1}}{p_k} \right| \left| \frac{P_k}{Q_n} \Theta^{k-1} \right| \leqslant N(\Theta),$$

где $M(\Theta)$ и $N(\Theta)$ не зависят от n.

В частности, если $(R, q_n) = (R, p_{n+1})$, т. е. $q_n = p_{n+1}$ и, следовательно, $Q_n = P_{n+1} - p_0$, то, при $|\Theta| < 1$, условие 1° теоремы 19 отпадает и из теоремы 19 вытекает теорема 16 статьи [3].

§ 6. О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ III В СЛУЧАЕ МЕТОДА РИССА

1. Мы начнем настоящий параграф кратким изложением вопроса о транслятивности методов суммирования, так как проблема III тесно связана с этим вопросом.

Метод суммирования A называется транслятивным слева, если из A-суммируемости ряда

$$(61) \qquad u_0 + u_1 + \quad + u_n +$$

[1] Для справедливости теоремы 19 достаточно предполагать существование предела $\lim Q_n \neq 0$, конечного или бесконечного.

к сумме U следует A-суммируемость ряда

$$0 + u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \tag{62}$$

к той же сумме U. Если из $|A|$-суммируемости ряда (61) следует $|A|$-суммируемость ряда (62) к той же сумме, то будем называть метод A абсолютно транслятивным слева. Аналогично можно определить понятие транслятивности (абсолютной транслятивности) справа, но нам в дальнейшем понадобится только понятие транслятивности (абсолютной транслятивности) слева.

Условия, необходимые и достаточные для транслятивности метода (R, p_n) Рисса, были даны Хиллом [9] в 1942 г. Найдем необходимые и достаточные условия для абсолютной транслятивности метода (R, p_n). Для этого заметим, что переход от ряда (61) к ряду (62) осуществляется при помощи преобразования

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} u_k \quad (w_0 = 0),$$

где w_n — n-ый член ряда (62) и

$$c_{nk} = \begin{cases} 1 \text{ при } k = n-1, \\ 0 \text{ при } k \neq n-1. \end{cases} \tag{63}$$

Так как это преобразование является частным случаем преобразования (12), то необходимые и достаточные условия абсолютной транслятивности метода $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд получаются из теоремы 2 при выполнении дополнительного условия

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \delta_{nk} = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{64}$$

обеспечивающего, согласно теореме II, совпадение сумм рядов (61) и (62) При этом надо учитывать, что $B = A$, $\varepsilon = -1$ и величины c_{nk} выражаются соотношениями (63). При этих условиях из (16) находим:

$$\delta_{nk} = \sum_{\nu=k+1}^{n} a_{n\nu} \eta_{\nu-1,k} \quad \text{при } n \geqslant k+1, \tag{65}$$
$$\delta_{nk} = 0 \quad \text{при } n < k+1.$$

В частности, для метода $A = (R, p_n)$ из (65) получаем:

$$\delta_{nk} = \frac{p_n}{P_{n-1} P_n p_k} (P_k^2 - P_{k+1} P_{k-1}) =$$
$$= \frac{p_n}{P_{n-1} P_n p_k} [(P_{k+1} - p_{k+1}) P_k - P_{k+1} (P_k - p_k)]$$

или

$$\delta_{nk} = \frac{P_{k+1}\,p_n}{P_{n-1}P_n}\left(1 - \frac{p_{k+1}P_k}{P_{k+1}p_k}\right) \quad \text{при } n > k+1, \tag{66}$$

$$\delta_{k+1,\,k} = \frac{p_{k+1}\,P_k}{P_{k+1}\,p_k} \tag{67}$$

Так как, согласно формулам (66) и (67).

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \delta_{nk} = \frac{p_{k+1}P_k}{P_{k+1}p_k} + \left(1 - \frac{p_{k+1}P_k}{P_{k+1}p_k}\right) P_{k+1} \sum_{n=k+2}^{\infty} \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{p_{k+1}P_k}{P_{k+1}p_k}\right) \frac{P_{k+1}}{\lambda},$$

где $\lambda = \lim P_k$, то условие (64) имеет вид

$$\left(1 - \frac{p_{k+1}P_k}{P_{k+1}p_k}\right) \frac{P_{k+1}}{\lambda} = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{68}$$

Поскольку в случае равенства нулю первого множителя в левой части условия (68) получается нелепость [1]

$$P_k = p_k \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то из (68) вытекает $\lambda = \infty$, т. е. метод $(R,\ p_n)$ должен быть регулярен.

При помощи формул (67) и (66) из теоремы 2 теперь без труда получается следующая теорема.

Теорема 20. Метод $(R,\ p_n)$, сохраняющий абсолютную сходимость, абсолютно транслятивен слева тогда и только тогда, когда он регулярен и удовлетворяет условию

$$\left|\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}}\right| \leqslant M \left|\frac{p_k}{P_k}\right| \quad \text{независимо от } k. \tag{69}$$

Примечание 1. В случае абсолютной транслятивности справа, условие (69) заменяется условием

$$\left|\frac{p_k}{P_k}\right| \leqslant M \left|\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}}\right| \tag{70}$$

Примечание 2. Если вместо теоремы 2 применить теорему 3, то в предположении, что метод $(R,\ p_n)$ суммирует все абсолютно сходящиеся ряды, приходим к тем же условиям (69) и (70). Если же вместо теоремы 2 применить теорему 1, то получаются результаты Хилла [9].

[1] Согласно предположению, $p_k \neq 0$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

2. Для изучения суммируемости ряда

$$\text{(V)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} w_n \quad (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \quad + u_n v_0),$$

получившегося из рядов Σu_n и Σv_n путем умножения по правилу Коши, величины ε и c_{nk} в преобразовании (12) приходится выбирать следующим образом (стр. 157):

$$\varepsilon = 0, \; c_{nk} = \begin{cases} v_{n-k} & \text{при } k \leqslant n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

При этих условиях из формул (16) и (17) получаем:

$$\text{(71)} \qquad \delta_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \sum_{\mu=k}^{\nu} \beta_{n\nu} v_{\nu-\mu} \eta_{\mu k} \quad \text{при } n \geqslant k,$$

$$\delta_{nk} = 0 \quad \text{при } n < k;$$

$$\text{(72)} \quad g_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \sum_{\mu=k}^{\nu} (\beta_{\nu\nu} + \beta_{\nu+1,\nu} + \quad + \beta_{n\nu}) v_{\nu-\mu} \eta_{\mu k} \text{ при } k \leqslant n,$$

$$g_{nk} = 0 \quad \text{при } n < k.$$

В частности, при $A = (R, p_n)$ и при произвольном $B = (\beta_{nk})$ из формулы (71) находим:

$$\text{(73)} \qquad \delta_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \frac{\beta_{n\nu}}{p_k} (P_k v_{\nu-k} - P_{k-1} v_{\nu-k-1}) \quad \text{при } n > k,$$

$$\text{(74)} \qquad \delta_{kk} = \beta_{kk} \frac{P_k}{p_k} v_0.$$

Обозначая через v'_{nk} n-ый член ряда, получившегося из ряда

$$\underbrace{0 + 0 + \quad + 0}_{k \text{ нулей}} + v_0 + v_1 + \quad + v_{n-k} +$$

при преобразовании методом B, т. е.

$$v'_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \beta_{n\nu} v_{\nu-k},$$

можем формулы (73) написать в виде

$$\delta_{nk} = \frac{P_k}{p_k} v'_{nk} - \frac{P_{k-1}}{p_k} v'_{n,k+1} \quad \text{при } n > k,$$

откуда, учитывая также формулу (74), находим:

$$g_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \delta_{\nu k} = \frac{P_k}{p_k} \sum_{\nu=k}^{n} v'_{\nu k} - \frac{P_{k-1}}{p_k} \sum_{\nu=k+1}^{n} v'_{\nu, k+1} \tag{75}$$

Если предполагать ряд Σv_n B-суммируемым ($|B|$-суммируемым) к сумме V а метод B — транслятивным (абсолютно транслятивным) слева, то из (75) получаем

$$g_k = \lim_{n\to\infty} g_{nk} = \frac{P_k}{p_k} V - \frac{P_{k-1}}{p_k} V = V$$

С другой стороны, по формуле (15) имеем

$$w_n' = \sum_{k=0}^{n} \delta_{nk} u_k',$$

где u_k' — k-ый член ряда, получившегося из ряда Σu_n при преобразовании методом (R, p_n), а w_n' — n-ый член ряда, получившегося из ряда Σw_n при преобразовании методом B. Если метод $D = (\delta_{nk})$ суммирует все сходящиеся (абсолютно сходящиеся) ряды, то на основании теоремы (IV) справедливо соотношение

$$D\left\{\sum u_n'\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k u_k' = V \sum_{k=0}^{\infty} u_k'$$

при предположении сходимости (абсолютной сходимости) ряда $\Sigma u_n'$ т. е. (R, p_n)-суммируемости ($|R, p_n|$-суммируемости) ряда Σu_n. Так как

$$D\left\{\sum u_n'\right\} = B\left\{\sum w_n\right\}, \quad V = B\left\{\sum v_n\right\},$$

$$\sum u_k' = (R, p_n)\left\{\sum u_n\right\},$$

то нами доказана следующая теорема, позволяющая доказать теоремы типа классической теоремы Абеля об умножении сходящихся рядов.

Теорема 21. Если ряд (V) суммируется некоторым транслятивным (абсолютно транслятивным) слева методом B при всех (R, p_n)-суммируемых ($|R, p_n|$-суммируемых) рядах Σu_n, а ряд Σv_n является B-суммируемым ($|B|$-суммируемым), то имеет место соотношение

$$B\left\{\sum w_n\right\} = (R, p_n)\left\{\sum u_n\right\} \cdot B\left\{\sum v_n\right\}$$

3. Ограничимся в настоящей статье изучением случая $A=E$, $B=(R,\ p_n)$, где E — метод обыкновенной сходимости. В этом случае из формул (71) и (72) находим:

$$(76)\qquad \delta_{nk}=\frac{p_n}{P_{n-1}P_n}\sum_{\nu=k}^{n}P_{\nu-1}v_{\nu-k}=\frac{p_n}{P_{n-1}P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k}P_{k+\nu-1}v_\nu,$$

$$(77)\qquad g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\left(1-\frac{P_{\nu-1}}{P_n}\right)v_{\nu-k}=\sum_{\nu=0}^{n-k}\left(1-\frac{P_{k+\nu-1}}{P_n}\right)v_\nu.$$

При помощи преобразования Абеля из (77) получается

$$(78)\qquad g_{nk}=\sum_{\nu=0}^{n-k}\frac{p_{k+\nu}}{P_n}V_\nu,$$

где $V_\nu=v_0+v_1+\ldots+v_\nu$. Преобразуем формулу (78) следующим образом, используя еще раз преобразование Абеля:

$$g_{nk}=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k}\frac{p_{k+\nu}}{p_\nu}\cdot p_\nu V_\nu=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k-1}\Delta\frac{p_{k+\nu}}{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}p_\mu V_\mu+$$

$$+\frac{p_n}{P_n p_{n-k}}\sum_{\mu=0}^{n-k}p_\mu V_\mu$$

или

$$(79)\qquad g_{nk}=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k-1}P_\nu g_{\nu 0}\Delta\frac{p_{k+\nu}}{p_\nu}+\frac{p_n P_{n-k}}{P_n p_{n-k}}g_{n-k,\,0},$$

где, согласно формуле (78).

$$g_{n0}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_\nu}{P_n}V_\nu.$$

При помощи теоремы 3 теперь нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 22. Пусть метод $(R,\ p_n)$ удовлетворяет условиям

$$1^\circ\ \left|\frac{P_{n-k}}{p_{n-k}}\right|\leqslant M\left|\frac{P_n}{p_n}\right|,$$

$$2^\circ\ \sum_{\nu=0}^{n-k-1}\left|P_\nu\Delta\frac{p_{k+\nu}}{p_\nu}\right|\leqslant N|P_n|,$$

где M и N не зависят от n и $k < n$. Для того, чтобы ряд (V) был (R, p_n)-суммируемым при всех абсолютно сходящихся рядах Σu_n, необходимо и достаточно, чтобы ряд Σv_n был (R, p_n)-суммируемым.

Действительно, при $k = 1$ условия 1° и 2° теоремы 22 превращаются в условия Хилла [9] о транслятивности слева метода (R, p_n) Тем самым обеспечивается транслятивность слева метода (R, p_n), удовлетворяющего условиям теоремы 22. Но, как мы видели в пункте 2, из транслятивности слева метода (R, p_n) и (R, p_n)-суммируемости ряда Σv_n следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk}$, т. е. выполнение условия 1° теоремы 3. Выполнение же условия 2° теоремы 3 непосредственно вытекает из формулы (79), если принять во внимание условия 1° и 2° теоремы 22, а также ограниченность величин g_{n0}, вытекающую из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} g_{n0}$. Тем самым теорема 22 доказана.

В частности, если метод (R, p_n) эквивалентен обыкновенной сходимости, например, если $p_n = 2^n$, то условия 1° и 2° теоремы 22 выполняются. Таким образом, из теоремы 22 вытекает классическая теорема Мертенса о сходимости произведения двух сходящихся рядов, один из которых абсолютно сходится.

Приступим, наконец, к применению теоремы 2. Для этого, используя преобразование Абеля, преобразуем формулу (76) следующим образом:

$$\delta_{nk} = \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \left[\sum_{\nu=1}^{n-k} \frac{P_{k+\nu-1}}{P_{\nu-1}} \cdot P_{\nu-1} v_\nu + P_{k-1} v_0 \right] =$$

$$= \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \left[\sum_{\nu=1}^{n-k-1} \left(\Delta \frac{P_{k+\nu-1}}{P_{\nu-1}} \right) \sum_{\mu=1}^{\nu} P_{\mu-1} v_\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{P_{n-1}}{P_{n-k-1}} \sum_{\mu=1}^{n-k} P_{\mu-1} v_\mu + P_{k-1} v_0 \right]$$

или

$$\delta_{nk} = \frac{P_k p_n}{P_{n-1} P_n} \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{p_\nu P_{k+\nu-1} - p_{k+\nu} P_{\nu-1}}{p_\nu P_k} \delta_{\nu 0} + \tag{80}$$

$$+ \frac{p_n P_{n-k}}{P_n p_{n-k}} \delta_{n-k,0},$$

где, согласно формуле (76),

$$\delta_{n0} = \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} v_\nu,$$

поскольку $P_{-1}=0$. При помощи теоремы 2 теперь нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 23. Пусть метод (R, p_n) сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условиям

1° $\left|\dfrac{P_{n-k}}{p_{n-k}}\right| \leqslant M \left|\dfrac{P_n}{p_n}\right|$ независимо от n и $k<n$,

2° $\left|\dfrac{p_n P_{k+n-1} - p_{k+n} P_{n-1}}{p_n P_k}\right| \leqslant N$ независимо от n и k.

Для того, чтобы ряд (V) был $|R, p_n|$-суммируемым при всех абсолютно сходящихся рядах Σu_n, необходимо и достаточно, чтобы ряд Σv_n был $|R, p_n|$-суммируемым.

Действительно, из формулы (80), ввиду условий 1° и 2° теоремы 23, следует

$$|\delta_{nk}| \leqslant NS\left|\frac{P_k p_n}{P_{n-1} P_n}\right| + M|\delta_{n-k,0}|,$$

где ряд

$$S=\sum_{\nu=0}^{\infty}|\delta_{\nu 0}|$$

в силу $|R, p_n|$-суммируемости ряда Σv_n сходится. Следовательно,

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\delta_{nk}| \leqslant \left|\frac{p_k}{P_k} v_0\right| + NS|P_k| \sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_{n-1}P_n}\right| + MS$$

и, поскольку метод (R, p_n) сохраняет абсолютную сходимость, условие теоремы 2 удовлетворяется. Тем самым теорема 23 доказана.

В частности, если метод (R, p_n) эквивалентен обыкновенной сходимости, например, если $p_n=2^n$, то условия 1° и 2° теоремы 23 выполняются. Таким образом, из теоремы 23 вытекает классическая теорема Коши об абсолютной сходимости произведения двух абсолютно сходящихся рядов.

П р и м е ч а н и е. Если метод (R, p_n) регулярен, то, при условиях теорем 22 или 23, суммы рядов Σu_n, Σv_n и Σw_n связаны соотношением

$$(R, p_n)\left\{\sum w_n\right\} = \sum u_n \cdot (R, p_n)\left\{\sum v_n\right\},$$

согласно теореме 21.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди, Г., Расходящиеся ряды, М., 1951.
2. Кангро, Г., B_α-суммирование произвольного порядка и его применение к степенным рядам, Ученые Записки ТГУ. **3** (мат. науки), (1946).
3. Кангро, Г., О суммировании степенных рядов нормальными линейными методами, Научные труды, посвященные 150-летию ТГУ (1952), стр. 223—246.
4. Hahn, H., Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte für Math. und Phys., **32**, (1922), S. 3—88.
5. Knopp, K. und Lorentz, G., Beiträge zur absoluten Limitierung, Archiv der Mathematik, **2**, (1949), S. 10—16.
6. Sunouchi, G., Absolute summability of series with constant terms, Tôhoku Math. Journal, **1** (2. ser.), (1949), p. 57—65.
7. Perron, O.,Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, Math. Zeitschrift, **6**, (1920), S. 286—310.
8. Лоренц, Г Р., Über lineare Summierungsverfahren, Матем. сборник, **39**, (1932), стр. 44—51.
9. Hill, Y. D., Some properties of summability, Duke Math. Journal, **9**, (1942), p. 373—381.
10. Bosanquet, L., Mathematical Reviews, **11**, (1950), p. 654.
11. Garabedian, H. L. and Randels, W. C., Theorems on Riesz means, Duke Math. Journal, **4**, (1938), p. 529—533.

LÕPMATUTE RIDADE SUMMEERIMISEST MAATRIKSMENETLUSTEGA

Prof., füüs.-mat. tead. doktor G. Kangro
Geomeetria kateeder

Resümee

Rida Σu_n nimetame summeeruvaks maatriksmenetlusega $A = (a_{nk})$ ehk lihtsalt A-summeeruvaks ($|A|$-summeeruvaks), kui teisendatud rida $\Sigma u_n'$ koondub (absoluutselt koondub), kus

$$u_n' = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} u_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Summat $\Sigma u_n'$ nimetame sel korral rea Σu_n A-summaks ja märgime

$$\sum u_n' = A\left\{\sum u_n\right\}$$

Olgu antud veel teine maatriksmenetlus $B = (\beta_{nk})$. Käesolevas töös uuritakse rea Σw_n B-summeeruvust ($|B|$-summeeruvust), kus

$$w_n = \sum_{k=0}^{n+\varepsilon} c_{nk} u_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eeldusel, et Σu_n on A-summeeruv ($|A|$-summeeruv) Ridade Σw_n hulka kuuluvad — vastavalt kordajate c_{nk} ja täisarvu ε valikule — astmerida $\Sigma u_n \Theta^n$ ja sellest liikmeti integreerimisel ning diferentseerimisel tuletatud read, samuti read

$$0 + u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

ridade Σu_n ja Σv_n Cauchy korrutis jt.

Kui eeldada, et $a_{nn} \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, siis omab maatriks $A = (a_{nk})$ pöördmaatriksit $A^{-1} = (\eta_{nk})$ Sel juhul saab püstitada tarvilikud ja piisavad tingimused, mille puhul rea Σu_n A-summeeruvus ($|A|$-summeeruvus) toob kaasa rea Σw_n B-summeeruvuse

($|B|$-summeeruvuse) ja, kui w_n osutub muutuja Θ funktsiooniks, siis ka võrduse

$$(V) \qquad \lim_{\Theta\to\Theta_0} B\left\{\sum w_n\right\} = A\left\{\sum u_n\right\}$$

kehtivuse. Nii saab tõestada näiteks järgmist teoreemi.

T e o r e e m 1. Rida Σw_n on B-summeeruv iga $|A|$-summeeruva rea Σu_n puhul siis ja ainult siis, kui

1° eksisteerib $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk} = g_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

2° $|g_{nk}| \leqslant M \quad (k \leqslant n + \varepsilon; \quad n = 0, 1, 2, \ldots),$

kus

$$g_{nk} = \sum_{\nu=k-\varepsilon}^{n} \sum_{\mu=k}^{\nu+\varepsilon} (\beta_{\nu\nu} + \beta_{\nu+1,\nu} + \ldots + \beta_{n\nu}) c_{\nu\mu}\eta_{\mu k}, \quad \text{kui } k \leqslant n + \varepsilon,$$

$$g_{nk} = 0, \quad \text{kui } k > n + \varepsilon.$$

Juhul, kui w_n on Θ funktsioon, leiab võrdus (V) aset siis ja ainult siis, kui täiendavalt kehtivad tingimused:

3° $\lim\limits_{\Theta\to\Theta_0} g_k = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$

4° $|g_k| \leqslant N \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

punkti $\Theta = \Theta_0$ vaadeldavas ümbruses.

Eriti kui $A = (R, p_n)$, $B = (R, p_n)$, kus (R, p_n) tähendab Rieszi kaalutud keskmiste menetlust, mis on määratud jadaga $\{p_n\}$, nii et

$$a_{nk} = \frac{p_n P_{k-1}}{P_{n-1} P_n}, \quad \text{kui } k \leqslant n \ (n > 0)$$

$$a_{nk} = 0, \quad \text{kui } k > n,$$

$$a_{00} = 1,$$

kus $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \neq 0 \ (n \geqslant 0)$, $P_{-1} = 0$, saame teoreemist 1 muuhulgas kaks järgmist teoreemi.

T e o r e e m 2. Rida $\Sigma u_n \Theta^n$ koondub ringis $|\Theta| < 1$ ja kehtib võrdus

$$\lim_{\Theta\to 1} \sum u_n \Theta^n = A\left\{\sum u_n\right\}$$

iga $|R, p_n|$-summeeruva rea Σu_n puhul siis ja ainult siis, kui

$$\left|\frac{P_k}{p_k}\Theta^k\right| \leqslant \frac{M}{|1-\Theta|} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

punkti $\Theta = 1$ vaadeldavas ümbruses.

Teoreem 3. Rahuldagu menetlus (R, p_n) tingimusi

$$1^\circ \quad \left|\frac{P_{n-k}}{p_{n-k}}\right| \leqslant M \left|\frac{P_n}{p_n}\right|,$$

$$2^\circ \quad \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \left|P_\nu \Delta \frac{p_{k+\nu}}{p_\nu}\right| \leqslant N |P_n|,$$

kus M ja N ei sõltu suurustest n ja $k < n$. Selleks, et ridade Σu_n ja Σv_n Cauchy korrutis oleks (R, p_n)-summeeruv iga absoluutselt koonduva rea Σu_n puhul, on tarvilik ja piisav, et rida Σv_n oleks (R, p_n)-summeeruv. Kui peale selle $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \infty$, siis on rea Σw_n (R, p_n)-summa võrdne rea Σu_n summa ja rea Σv_n (R, p_n)-summa korrutisega.

Üldse on käesolevas töös tuletatud 6 üldist teoreemi ja 17 teoreemi Rieszi kaalutud keskmiste menetluse kohta.

О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ

Проф., доктор физ.-мат. наук Г Кангро

Кафедра геометрии

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Известная теорема Дедекинда и Адамара устанавливает, что ряд $\Sigma u_k \varepsilon_k$ сходится при всех сходящихся рядах Σu_k (или при всех рядах Σu_k с ограниченными частными суммами) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\varepsilon_k\}$ является абсолютно сходящейся (или, соответственно, абсолютно сходящейся к нулю). Эта теорема допускает важные обобщения на суммируемые ряды, первое из которых принадлежит Харди и Бору [1], и на основании которых возникла целая отрасль теории рядов — т е о р и я м н о ж и т е л е й с у м м и р у е м о с т и.

В настоящей статье мы будем рассматривать комплексные ряды и последовательности, а также комплексные матрицы, определяющие методы суммирования этих рядов и последовательностей. Ради простоты мы будем обозначать метод суммирования и матрицу, определяющую его, одной и той же буквой, а именно латинской буквой в случае суммирования рядов, и готической буквой в случае суммирования последовательностей.

Пусть задана матрица $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$ При помощи формул [1]

$$(1) \qquad U_n' = \sum_k a_{nk} u_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ряд Σu_k, в случае сходимости рядов $\Sigma a_{nk} u_k$, преобразуется в последовательность $\{U_n'\}$ Если последовательность $\{U_n'\}$ сходится (абсолютно сходится или ограничена), то назовем ряд Σu_k A-суммируемым ($|A|$-суммируемым или, соответственно, A-ограниченным). В случае A-суммируемости ($|A|$-суммируемости)

[1] Если пределы суммирования не указаны, то индекс суммирования пробегает все значения 0, 1, 2,

ряда Σu_k назовем предел последовательности $\{U_n'\}$ A-суммой ряда Σu_k и пишем

$$A\left\{\sum u_k\right\} = \lim U_n'$$

Следуя Пейеримхоффу [2], мы будем называть величины ε_k множителями суммируемости типа (A, B), если ряд $\Sigma u_k \varepsilon_k$ является B-суммируемым при всех A-суммируемых рядах Σu_k. Аналогично определяются множители суммируемости типов $(|A|, B)$, $(|A|, |B|)$ и (A_O, B), где символ A_O означает A-ограниченность ряда Σu_k. В частности, если $B = (\beta_{nk})$ является методом обыкновенной сходимости, т. е. если $\beta_{nk} = 1$ при $k \leqslant n$ и $\beta_{nk} = 0$ при $k > n$, то вместо множителей суммируемости рассматриваемых типов говорят о множителях сходимости (абсолютной сходимости) относительно A ($|A|$ или, соответственно, A_O).

Во многих вопросах теории рядов (например, при изучении проблемы включения матричных методов суммирования последовательностей) является важным исследование суммируемости (в частности сходимости) ряда $\Sigma U_k \varepsilon_k$, где $U_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_k$. При этом предполагается, что последовательность $\{U_k\}$ суммируема методом $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$, который мы определим формулами

$$U_n'' = \sum_k a_{nk} U_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Если последовательность $\{U_n''\}$ сходится (абсолютно сходится или ограничена) то назовем последовательность $\{U_k\}$ $\mathfrak{A}$-суммируемой ($|\mathfrak{A}|$-суммируемой или, соответственно, $\mathfrak{A}$-ограниченной) В случае $\mathfrak{A}$-суммируемости ($|\mathfrak{A}|$-суммируемости) последовательности $\{U_k\}$ мы понимаем под $\mathfrak{A}$-суммой последовательности $\{U_k\}$ предел последовательности $\{U_n''\}$ и пишем

$$\mathfrak{A}\{U_k\} = \lim U_n''$$

Величины ε_k мы будем называть множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$, если ряд $\Sigma U_k \varepsilon_k$ является B-суммируемым при всех $\mathfrak{A}$-суммируемых последовательностях $\{U_k\}$ Аналогично определяются множители суммируемости типов $(|\mathfrak{A}|, B)$, $(|\mathfrak{A}|, |B|)$ и $(\mathfrak{A}_O, B$ (символом $\mathfrak{A}_O$ обозначается $\mathfrak{A}$-ограниченность последовательности $\{U_k\}$) и, в частности, множители сходимости (абсолютной сходимости) относительно $\mathfrak{A}$ ($|\mathfrak{A}|$ или, соответственно, $\mathfrak{A}_O$).

Если матрица $A = (\alpha_{nk})$ треугольна, то при $a_{nk} = \Delta\alpha_{nk}$ [1] матрицей $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ определяется тот же самый метод суммирования.

[1] Разность $\Delta\alpha_{nk}$ дается равенством $\Delta\alpha_{nk} = \alpha_{nk} - \alpha_{n,k+1}$. При наличии двух индексов разность в настоящей статье всегда составляется по второму индексу.

Например, метод взвешенных средних Рисса можно задать матрицей P с элементами

$$(3)\qquad a_{nk}=\begin{cases}1-\dfrac{P_{k-1}}{P_n} & \text{при } k\leqslant n\\ 0 & \text{при } k>n,\end{cases}$$

как метод суммирования рядов, или матрицей $\mathfrak{P}$ с элементами

$$(4)\qquad a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{p_k}{P_n} & \text{при } k\leqslant n\\ 0 & \text{при } k>n,\end{cases}$$

как метод суммирования последовательностей, причем

$$P_n=p_0+p_1+\quad+p_n,\ P_n\neq 0 \text{ при } n\geqslant 0,\ P_{-1}=0.$$

Главной целью настоящей статьи является изучение множителей суммируемости типов $(\mathfrak{P}, B)$, $(|\mathfrak{P}|, B)$, $(|\mathfrak{P}|, |B|)$, $(\mathfrak{P}_O, B)$, $(P\ B)$, $(|P|, B)$, $(|P|, |B|)$ и (P_O, B) при произвольном B, удовлетворяющем некоторым условиям типа корегулярности, в частности, регулярности. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы величины ε_k были множителями сходимости относительно P и P_O, найдены в 1951 г Юркатом [3] при помощи метода Шура. В том же году Пейеримхофф [2], применяя методы функционального анализа, дал новый метод для нахождения необходимых и, в некоторых случаях и достаточных условий, которым должны удовлетворить множители суммируемости типов $(\mathfrak{A}, B)$ и (A, B) При помощи этого метода ему удалось найти множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}, B)$ для регулярного B, множители сходимости относительно P и, вместе с Юркатом [4], множители суммируемости типа (P, P). В 1953 г Пейеримхофф [5] распространяет свою теорию на множители суммируемости типов $(|\mathfrak{A}|, B)$ и $(|A|, B)$ В частности, Пейеримхофф находит множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, B)$ для регулярного B, множители сходимости относительно $|P|$ и множители суммируемости типа $(|P|, P)$ Наконец, Юркатом и Пейеримхоффом [6] были получены необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типов $(P\ Q)$ и (P_O, Q), где Q — метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{q_k\}$ При этом Юркат и Пейеримхофф наложили на матрицы P и Q следующие ограничения: $p_k>0$, $q_k>0$, последовательность $\left\{\dfrac{q_k}{p_k}\right\}$ ограничена и монотонна при $k\geqslant k_0$.

В § 2 настоящей статьи приводятся несколько более или менее известных понятий и лемм, нужных для следующих параграфов. В § 3 при помощи метода Шура в виде восьми теорем даются общие необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют множители суммируемости типов $(\mathfrak{A}, B)$, $(|\mathfrak{A}|, B)$, $(|\mathfrak{A}|, |B|)$, $(\mathfrak{A}_O, B)$, (A, B), $(|A|, B)$, $(|A|, |B|)$ и (A_O, B). В §§ 4 и 5 из общих теорем § 3 выводятся эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости названных типов при $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$ или, соответственно, $A = P$. Перечисленные выше результаты Юрката и Пейеримхоффа являются частными случаями полученных нами теорем. Наконец, в § 6 показывается, как общую теорию множителей суммируемости, изложенную в § 3, можно использовать при изучении непрерывности и дифференцируемости B-суммы ряда $\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta)$. как функции от Θ, если предполагать A-суммируемость ряда Σu_k.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЛЕММЫ

1. Матричный метод суммирования последовательностей. Пусть $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ есть метод суммирования последовательностей, данный формулами (2). В дальнейшем нам нужны некоторые леммы, имеющие и самостоятельное значение в теории рядов.

Лемма 1 (Кожима-Шур) Метод $\mathfrak{A}$ суммирует все последовательности, сходящиеся к нулю, тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$2^\circ \sum_k |a_{nk}| \leqslant M \text{ независимо от } n.$$

Из 1° и 2° вытекает добавочное условие

$$3^\circ \sum |a_k| < \infty.$$

Лемма 2 (Хан). Метод $\mathfrak{A}$ суммирует все последовательности, абсолютно сходящиеся к нулю, тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$2^\circ \left|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}\right| \leqslant M \text{ независимо от } n \text{ и } k.$$

Из 1° и 2° вытекает добавочное условие

$$3^\circ \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu = O(1).$$

Примечание 1. Если к условиям 1° и 2° лемм 1 и 2 присоединить требование о существовании предела

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=a,$$

то получаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\mathfrak{A}$ суммировал все сходящиеся или, соответственно, абсолютно сходящиеся последовательности.

Лемма 3 (Мэарс). Метод $\mathfrak{A}$ абсолютно суммирует все последовательности, абсолютно сходящиеся к нулю (или вообще все абсолютно сходящиеся последовательности), тогда и только тогда, когда

$$\sum_n |r_{nk}-r_{n-1,\,k}|\leqslant M \text{ независимо от } k,$$

где

$$r_{nk}=\sum_{\nu=k}^{\infty}a_{n\nu} \text{ при } n\geqslant 0,\quad r_{-1,\,k}=0.$$

Лемма 4 (Шур). Метод $\mathfrak{A}$ суммирует все ограниченные последовательности тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} a_{nk}=a_k \quad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$2^\circ \lim_{n\to\infty}\sum_k |a_{nk}|=\sum |a_k|$$

Из 1° и 2° вытекает добавочное условие

$$3^\circ \lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=\sum a_k.$$

Примечание 2. При выполнении условий некоторой из лемм 1—4 справедливо равенство

$$\mathfrak{A}\{U_k\}=\sum a_k U_k \tag{5}$$

для всех последовательностей $\{U_k\}$, рассматриваемых в соответствующей лемме.

Применяя леммы 1 и 3 вместе с примечанием 1 к методу $\mathfrak{P}$ взвешенных средних Рисса, данному формулой (4), приходим к следующим результатам, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма I. Метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{p_k\}$, сохраняет сходимость (т. е. суммирует все сходящиеся последовательности) тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim P_n \neq 0$, конечный или бесконечный,

2° $\sum_{k=0}^{n} |p_k| = O(P_n)$

Лемма II. Метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{p_k\}$, сохраняет абсолютную сходимость (т. е. абсолютно суммирует все абсолютно сходящиеся последовательности) тогда и только тогда, когда

$$|P_{k-1}| \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \right| = O(1).$$

Пусть метод $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость. Тогда $\mathfrak{A}$ суммирует, в частности, последовательности $\{\delta_{k\nu}\}$ ($\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) и $\{\delta_{kk}\}$, где $\delta_{k\nu}$ есть символ Кронеккера, определенный следующим образом:

$$\delta_{k\nu} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = \nu \\ 0 & \text{при } k \neq \nu. \end{cases}$$

Введя величину $\varrho(\mathfrak{A})$ равенством

$$\varrho(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\{\delta_{kk}\} - \sum_{\nu} \mathfrak{A}\{\delta_{k\nu}\},$$

имеем:

(6) $$\varrho(\mathfrak{A}) = a - \sum a_\nu,$$

где

$$a_\nu = \lim_{n\to\infty} a_{n\nu}, \quad a = \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk}.$$

Следуя Виланскому [7], назовем метод $\mathfrak{A}$, сохраняющий сходимость, *корегулярным*, если $\varrho(\mathfrak{A}) \neq 0$, и *конулевым*, если $\varrho(\mathfrak{A}) = 0$. Например, если $\lim P_n$ бесконечен, то метод $\mathfrak{P}$ взвешенных средних Рисса, сохраняющий сходимость, корегулярен (именно регулярен). Если же $\lim P_n$ конечен, то $\mathfrak{P}$ является конулевым. В последнем случае ряд Σp_k абсолютно сходится.

Известно, что многие свойства матричных методов суммирования зависят от того, является ли рассматриваемый метод корегулярным или конулевым. Как мы увидим в дальнейшем, сказанное относится и к теоремам о множителях суммируемости.

Метод $\mathfrak{A}$ называется реверсивным, если система (2) имеет единственное решение при каждой сходящейся последовательности $\{U_k''\}$. Если $\mathfrak{A}$ реверсивный, то, согласно одной известной теореме Банаха [8], из (2) следует

$$U_n = \gamma_n U'' + \sum_k \xi_{nk} U_k'' \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где

$$U'' = \lim U_n'' = \mathfrak{A}\{U_k\}, \quad \sum_k |\xi_{nk}| < \infty.$$

При $U_k'' = \delta_{k\nu}$ из (7) находим, что последовательность $\{\xi_{k\nu}\}$ представляет собой решение системы (2) для $U_n'' = \delta_{n\nu}$, т. е.

$$\sum_k a_{nk}\xi_{k\nu} = \delta_{n\nu} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

откуда

$$\mathfrak{A}\{\xi_{k\nu}\} = 0$$

для фиксированного ν.

При $U_k'' = \delta_{kk}$ из (7) вытекает, что последовательность $\{\xi_k\}$, где

$$\xi_k = \gamma_k + \sum_\nu \xi_{k\nu}, \tag{9}$$

представляет собой решение системы (2) для $U_n'' = \delta_{nn}$, так что

$$\mathfrak{A}\{\xi_k\} = 1.$$

В силу (9) можно формулам (7) придать вид

$$U_n = \xi_n U'' + \sum_k \xi_{nk}(U_k'' - U'') \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

Если реверсивный метод $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость, то при $U_n = \delta_{n\nu}$ и, соответственно, при $U_n = \delta_{nn}$ из (7) получаем:

$$\gamma_n a_\nu + \sum_k \xi_{nk} a_{k\nu} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

$$\gamma_n a + \sum_k \xi_{nk} \sum_\nu a_{k\nu} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Просуммируя в (11) по ν от нуля до бесконечности и вычитая полученный результат из (12), находим:

$$\gamma_n \varrho(\mathfrak{A}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

так как изменение порядка суммирования в двойном ряде $\sum_k \xi_{nk} \sum_\nu a_{k\nu}$, ввиду сходимости ряда $\sum_k |\xi_{nk}|$ и условия 2° леммы 1, допустимо.

Если реверсивный метод $\mathfrak{A}$ является треугольным, т. е. если метод $\mathfrak{A}$ нормальный, то имеем:

$$\gamma_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

Из (13) следует, что соотношение (14) справедливо и для корегулярного реверсивного метода $\mathfrak{A}$. Ввиду (9) соотношение (14) эквивалентно формуле

$$\xi_k = \sum_\nu \xi_{k\nu}. \tag{15}$$

Если верно соотношение (14) или $a_\nu = 0$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, то из (8) и (11) вытекает, что матрица $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ имеет двустороннюю обратную

$$\mathfrak{A}^{-1} = (\xi_{nk}).$$

Примечание 3. При многих известных матричных методах суммирования выполняется условие

$$\sum_\nu a_{k\nu} = a$$

независимо от k (например, при методах Рисса, Вороного—Норлунда, Хаусдорфа, Бернштейна—Рогозинского и других). Из (12), ввиду этого условия и (9), находим:

$$\gamma_n a + (\xi_n - \gamma_n) a = 1,$$

откуда

$$\xi_n = \frac{1}{a}.$$

2. Матричный метод суммирования рядов. Пусть $B = (\beta_{nk})$ есть метод суммирования рядов, определенный при помощи формул, получаемых из (1) при замене a_{nk} через β_{nk}.

Лемма 5 (Хан). Метод B сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n \to \infty} \beta_{nk} = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

2° $\sum_k |\Delta\beta_{nk}| \leqslant M$ независимо от n.

Из 1° и 2° вытекает добавочное условие

$3^\circ \sum |\Delta\beta_k| < \infty.$

Л е м м а 6 (Хан). Метод B суммирует все абсолютно сходящиеся ряды тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{nk} = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$

2° $|\beta_{nk}| \leqslant M$ независимо от n и k.

Из 1° и 2° вытекает добавочное условие

$3^\circ |\beta_k| \leqslant M.$

Л е м м а 7 (Суноути) Метод B сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, когда

$$\sum_n |\beta_{nk} - \beta_{n-1,k}| \leqslant M \text{ независимо от } k.$$

Л е м м а 8 (Хан) Метод B суммирует все ряды с ограниченными частными суммами тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{nk} = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$

$2^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \sum_k |\Delta\beta_{nk}| = \sum |\Delta\beta_k|.$

Из 1° и 2° вытекает добавочное условие [1]

$3^\circ \lim \beta_k = 0.$

Пусть метод B сохраняет сходимость. Тогда определим величину $\varrho(B)$ равенством

$$\varrho(B) = B\left\{\sum \delta_{k0}\right\} - \sum_\nu B\left\{\sum \Delta\delta_{k\nu}\right\},$$

откуда

$$\varrho(B) = \lim \beta_k,$$

где

$$\beta_k = \lim_{n\to\infty} \beta_{nk}.$$

Метод B, сохраняющий сходимость, будем называть к о р е г у л я р н ы м, если $\varrho(B) \neq 0$, и к о н у л е в ы м, если $\varrho(B) = 0$.

П р и м е ч а н и е 4. Если метод B сохраняет сходимость, то в силу условия 2° леммы 5 существует $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_{nk}$. Без нарушения общности мы можем предполагать, что

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{nk} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

[1] См. примечание 4.

так как в противном случае B является эквивалентным методу обыкновенной сходимости. Действительно, если для некоторого n имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_{nk}\neq 0$, то найдутся такое положительное число d и натуральное число k_0, что $|\beta_{nk}|>d$ при $k\geqslant k_0$. Для $k>k_0$ мы при помощи преобразования Абеля находим:

$$\sum_{\nu=k_0}^{k} u_\nu=\sum_{\nu=k_0}^{k}\frac{1}{\beta_{n\nu}}(\beta_{n\nu}u_\nu)=\sum_{\nu=k_0}^{k-1}\Delta\left(\frac{1}{\beta_{n\nu}}\right)\sum_{\mu=k_0}^{\nu}\beta_{n\mu}u_\mu+\frac{1}{\beta_{nk}}\sum_{\mu=k_0}^{k}\beta_{n\mu}u_\mu,$$

откуда, в силу условия 2° леммы 5 и неравенства $|\beta_{nk}|>d$, вытекает, что B-суммируемость ряда Σu_ν влечет за собой сходимость этого ряда. Следовательно, B может суммировать только сходящиеся ряды.

Пусть, наконец, $A=(a_{nk})$ есть метод суммирования рядов, определенный при помощи формул (1). Если A реверсивный метод, то, аналогично формулам (10), из (1) получаем:

$$(16)\qquad u_n=\eta_n U'+\sum_k \eta_{nk}(U_k'-U')\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$U'=\lim U_n'=A\left\{\sum u_k\right\},\quad \sum_k|\xi_{nk}|<\infty,$$

а ряды $\sum\limits_k\eta_{k\nu}$ и $\Sigma\eta_k$ являются решениями системы (1) при $U_n'=\delta_{n\nu}$ и, соответственно, при $U_n'=\delta_{nn}$, так что имеем:

$$A\left\{\sum\eta_{k\nu}\right\}=0,\quad A\left\{\sum\eta_k\right\}=1$$

§ 3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ

1. Множители суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$. Образуем из чисел ε_k и элементов β_{nk} матрицы B новую матрицу $\mathfrak{B}=(b_{nk})$ с элементами

$$(17)\qquad b_{nk}=\beta_{nk}\varepsilon_k.$$

Матрицу $\mathfrak{B}$ мы будем рассматривать как матрицу некоторого метода суммирования последовательностей. Из определения множителей суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$ вытекает, что для того, чтобы величины ε_k служили множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$, необходимо и достаточно, чтобы метод $\mathfrak{B}$ включал $\mathfrak{A}$, т. е. чтобы $\mathfrak{B}$ суммировал все последовательности, суммируемые методом $\mathfrak{A}$.

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод $\mathfrak{B}$ включал $\mathfrak{A}$, даны Мазуром [9] для нормального $\mathfrak{A}$ и обобщены

Хиллом [10] для любого реверсивного $\mathfrak{A}$. Доказательство теоремы Мазура и Хилла основано на методе Шура. Так как идея доказательства теоремы Мазура и Хилла является для нас существенным в дальнейшем, то передаем коротко это доказательство.

При помощи формул (10) найдем:

$$\sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu} U_\nu = U'' \sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu} \xi_\nu + \sum_{\nu} c^n{}_{k\nu} (U_\nu'' - U''), \tag{18}$$

где

$$c^n{}_{k\nu} = \sum_{\mu=0}^{k} b_{n\mu} \xi_{\mu\nu}$$

Последовательность $\{\xi_k\}$, являющаяся $\mathfrak{A}$-суммируемой, должна быть и $\mathfrak{B}$-суммируема, вследствие чего ряд $\Sigma b_{n\nu} \xi_\nu$ должен сходиться при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ Поэтому, для сходимости ряда $\Sigma b_{n\nu} U_\nu$ при всех $\mathfrak{A}$-суммируемых последовательностях $\{U_\nu\}$, согласно лемме 1, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{k \to \infty} c^n{}_{k\nu} = c_{n\nu} \tag{19}$$

и выполнялось условие

$$\sum_{\nu} \left| c^n{}_{k\nu} \right| \leqslant M_n \text{ независимо от } k. \tag{20}$$

Тогда в силу примечания 2 из (18) при $k \to \infty$ получим:

$$\sum_{\nu} b_{n\nu} U_\nu = U'' \sum_{\nu} b_{n\nu} \xi_\nu + \sum_{\nu} c_{n\nu} (U_\nu'' - U''). \tag{21}$$

Ввиду $\mathfrak{B}$-суммируемости последовательности $\{\xi_\nu\}$ из (21), согласно лемме 1, следует, что для того, чтобы метод $\mathfrak{B}$ включал $\mathfrak{A}$, кроме условий (19) и (20) необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{n \to \infty} c_{n\nu} = c_\nu \tag{22}$$

и выполнение условия

$$\sum_{\nu} \left| c_{n\nu} \right| \leqslant M \text{ независимо от } n. \tag{23}$$

В силу соотношения (17) из (19), (20), (22) и (23) вытекает следующее предложение.

Теорема 1. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$ тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ ряды } \sum \varepsilon_k \xi_k \text{ и } \sum_k \varepsilon_k \xi_{k\nu} \ B\text{-суммируемы},$$

$$2^\circ \sum_\nu |c^n_{k\nu}| \leqslant M_n \text{ независимо от } k,$$

$$3^\circ \sum_\nu |c_{n\nu}| \leqslant M \text{ независимо от } n,$$

где

$$c^n_{k\nu} = \sum_{\mu=0}^{k} \beta_{n\mu} \varepsilon_\mu \xi_{\mu\nu}, \quad c_{n\nu} = \lim_{k\to\infty} c^n_{k\nu}. \tag{24}$$

При применении теоремы 1 мы будем использовать следующие добавочные необходимые условия:

$$4^\circ \sum |c_\nu| < \infty, \quad c_\nu = \lim_{n\to\infty} c_{n\nu},$$

$$5^\circ \sum |\beta_\nu \varepsilon_\nu| < \infty, \quad \beta_\nu = \lim_{n\to\infty} \beta_{n\nu}.$$

Условие 4° непосредственно получается из условия 3° леммы 1. Условие 5° необходимо, если $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость. Действительно, если величины ε_k суть множители суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$, то $\mathfrak{B}$ включает $\mathfrak{A}$ и, тем самым, сохраняет сходимость. Ввиду соотношения (17), из условия 3° леммы 1 и следует 5°.

Если $\lim \beta_\nu \neq 0$ (т. е., если B корегулярен), то из 5° непосредственно вытекает

$$\sum |\varepsilon_\nu| < \infty \tag{25}$$

Примечание 5. Переходя в равенстве (21) к пределу при $n \to \infty$, согласно примечанию 2 и условию 3° леммы 1 мы найдем:

$$\mathfrak{B}\{U_\nu\} = \gamma U'' + \sum c_\nu U_\nu'', \quad \sum |c_\nu| < \infty, \tag{26}$$

где

$$\gamma = \mathfrak{B}\{\xi_\nu\} - \sum c_\nu .$$

Равенство (26) справедливо для всех $\mathfrak{A}$-суммируемых последовательностей $\{U_\nu\}$ Если $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость и $\mathfrak{B}$ включает

$\mathfrak{A}$, то, как показали Виланский [7] для нормального и Целлер [11] для любого $\mathfrak{A}$, имеет место соотношение

$$(27) \qquad \varrho(\mathfrak{B}) = \gamma\varrho(\mathfrak{A}).$$

Если метод B корегулярен, то, согласно (6), получаем:

$$\varrho(\mathfrak{B}) = b - \sum b_\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_\nu \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu - \sum \beta_\nu\varepsilon_\nu = 0,$$

так как ряд $\Sigma\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu$, в силу (25) и условия 2° леммы 6, равномерно сходится относительно n. Отсюда и из (27), в случае корегулярности метода $\mathfrak{A}$, вытекает $\gamma = 0$, вследствие чего (26) превращается в равенство

$$(28) \qquad B\{U_\nu\varepsilon_\nu\} = \sum c_\nu U_\nu'', \quad \sum |c_\nu| < \infty,$$

где последовательность $\{U_\nu''\}$ определяется формулами (2).

Справедливость равенства (28) показал Пейеримхофф [2] в предположении, что $\mathfrak{A}$ нормальный совершенный метод, а B регулярный. В действительности же для справедливости равенства (28) совершенство метода $\mathfrak{A}$ не является существенным.

Примечание 6. Пусть методы $\mathfrak{A}$ и B удовлетворяют условиям

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \quad \beta_k = \lim_{n\to\infty} \beta_{nk} = 1.$$

Тогда из (26) при $U_k = \delta_{k\nu}$ найдем:

$$(29) \qquad \varepsilon_\nu = \sum_k c_k a_{k\nu}, \quad \sum |c_k| < \infty$$

Условие (29) играет важную роль в теории множителей суммируемости типа ($\mathfrak{A}$, B) Пейеримхоффа. Как показал Пейеримхофф [2], для регулярных методов $\mathfrak{A}$ и B условие (29) является и достаточным для того, чтобы величины ε_ν служили множителями суммируемости типа ($\mathfrak{A}$, B), если в пространстве последовательностей, $\mathfrak{A}$-суммируемых к нулю, имеет место сходимость по отрезкам.

2. Множители суммируемости типа ($|\mathfrak{A}|$, B). Из определения множителей суммируемости типа ($|\mathfrak{A}|$, B) вытекает, что для того, чтобы величины ε_k служили множителями суммируемости типа ($|\mathfrak{A}|$, B), необходимо и достаточно, чтобы метод $\mathfrak{B}$ включал $|\mathfrak{A}|$, т. е. чтобы $\mathfrak{B}$ суммировал все $|\mathfrak{A}|$-суммируемые последовательности. При этом элементы b_{nk} матрицы $\mathfrak{B}$ определяются через элементы β_{nk} матрицы B равенством (17). Поступая так же, как при доказательстве теоремы Мазура и Хилла, но используя вместо леммы 1 лемму 2, приходим к следующему предложению.

Теорема 2. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, B)$ тогда и только тогда, когда

1° ряды $\sum \varepsilon_k \xi_k$ и $\sum_k \varepsilon_k \xi_{k\nu}$ B-суммируемы,

2° $\left| \sum_{\nu=0}^{l} c^n{}_{k\nu} \right| \leqslant M_n$ независимо от k и l,

3° $\left| \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} \right| \leqslant M$ независимо от n и k,

где $c^n{}_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$ даются формулами (24)

При применении теоремы 2 мы будем использовать следующие добавочные необходимые условия:

$$4^\circ \quad \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu = O(1), \quad c_\nu = \lim_{n\to\infty} c_{n\nu},$$

$$5^\circ \quad \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu \varepsilon_\nu = O(1), \quad \beta_\nu = \lim_{n\to\infty} \beta_{n\nu}.$$

Условие 4° непосредственно получается из условия 3° леммы 2. Условие 5° необходимо, если $\mathfrak{A}$ сохраняет абсолютную сходимость. Действительно, если величины ε_k суть множители суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, B)$, то $\mathfrak{B}$ включает $|\mathfrak{A}|$ и, следовательно, суммирует все абсолютно сходящиеся последовательности. Из условия 3° леммы 2 тогда следует 5°

Если B является корегулярным, то из 5° вытекает

$$\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu = O(1). \tag{30}$$

Действительно, раз $\lim \beta_\nu \neq 0$, то найдутся такое положительное число d и натуральное число k_0, что

$$|\beta_\nu| > d \text{ при } k \geqslant k_0. \tag{31}$$

Тогда при $k > k_0$ имеем:

$$\sum_{\nu=k_0}^{k} \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=k_0}^{k} \frac{1}{\beta_\nu}(\beta_\nu \varepsilon_\nu) = \sum_{\nu=k_0}^{k-1} \Delta\left(\frac{1}{\beta_\nu}\right) \sum_{\mu=k_0}^{\nu} \beta_\mu \varepsilon_\mu + \frac{1}{\beta_k} \sum_{\mu=k_0}^{k} \beta_\mu \varepsilon_\mu,$$

откуда, в силу (31), условия 3° леммы 5 и условия 5° теоремы 2, следует (30)

Примечание 7 Переходя в равенстве (21) к пределу при $n \to \infty$, согласно примечанию 2 и условию 3° леммы 2 для последовательностей $\{U_\nu\}$, $|\mathfrak{A}|$-суммируемых к нулю, мы найдем:

$$\mathfrak{B}\{U_\nu\} = \sum c_\nu U_\nu'', \quad \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu = O(1)$$

или, применяя преобразование Абеля,

$$B\{U_\nu \varepsilon_\nu\} = \sum C_\nu \Delta U_\nu'', \quad C_\nu = O(1) \tag{32}$$

Справедливость равенства (32) показал Пейеримхофф [5] в предположении, что $\mathfrak{A}$ нормальный абсолютно совершенный метод, а B удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{nk} = 1$. В действительности же для справедливости равенства (32) абсолютное совершенство метода $\mathfrak{A}$ не является существенным.

Примечание 8. Пусть методы $\mathfrak{A}$ и B удовлетворяют условиям примечания 6, и пусть последовательности $\{\delta_{k\nu}\}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) $|\mathfrak{A}|$-суммируемы. Тогда из (32) при $U_k = \delta_{k\nu}$ мы найдем:

$$\varepsilon_\nu = \sum_k C_k (a_{k\nu} - a_{k+1,\nu}), \quad C_k = O(1). \tag{33}$$

Условие (33) имеет большое значение в теории множителей суммируемости типа ($|\mathfrak{A}|$, B) Пейеримхоффа. Из работы [5] Пейеримхоффа вытекает, что в случае регулярного B и абсолютно регулярного $\mathfrak{A}$ условие (33) вместе с требованием B-суммируемости ряда $\Sigma\varepsilon_\nu$ является и достаточным для того, чтобы величины ε_ν служили множителями суммируемости типа ($|\mathfrak{A}|$, B), если в пространстве последовательностей, $|\mathfrak{A}|$-суммируемых к нулю, имеет место сходимость по отрезкам.

3. Множители суммируемости типов ($|\mathfrak{A}|$, $|B|$) и ($\mathfrak{A}_0$, B).

При помощи лемм 2—4 можно сформулировать следующие предложения, доказательства которых аналогичны доказательству теоремы 1.

Теорема 3. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа ($|\mathfrak{A}|$, $|B|$) тогда и только тогда, когда

1° ряд $\sum \varepsilon_k \xi_k$ $|B|$-суммируем,

2° $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{l} c^n{}_{k\nu}\right| \leqslant M_n$ независимо от k и l,

3° $\sum\limits_n |r_{nk} - r_{n-1,k}| \leqslant M$ независимо от k, где

$$r_{nk} = \sum_{\nu=k}^{\infty} c_{n\nu} \text{ при } n \geqslant 0, \quad r_{-1,k} = 0,$$

а $c^n_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$ даются формулами (24)

При применении теоремы 3 мы будем использовать следующее добавочное условие, вытекающее из леммы 3:

$$4^\circ \quad \sum_n \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} (\beta_{n\nu} - \beta_{n-1,\nu}) \varepsilon_\nu \right| = O(1).$$

Условие 4° необходимо, если $\mathfrak{A}$ сохраняет абсолютную сходимость.

Теорема 4. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}_O, B)$ тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ ряды } \sum \varepsilon_k \xi_k \text{ и } \sum_k \varepsilon_k \xi_{k\nu} \quad B\text{-суммируемы},$$

$$2^\circ \quad \lim_{k \to \infty} \sum_\nu |c^n_{k\nu}| = \sum_\nu |c_{n\nu}|,$$

$$3^\circ \quad \lim_{n \to \infty} \sum_\nu |c_{n\nu}| = \sum |c_\nu|,$$

где $c^n_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$ даются формулами (24) а $c_\nu = \lim\limits_{n \to \infty} c_{n\nu}$.

При применении теоремы 4 мы будем использовать следующие добавочные необходимые условия, вытекающие из условия 3° леммы 4:

$$4^\circ \quad \lim_{n \to \infty} \sum_\nu c_{n\nu} = \sum c_\nu,$$

$$5^\circ \quad \lim_{n \to \infty} \sum_\nu \beta_{n\nu} \varepsilon_\nu = \sum \beta_\nu \varepsilon_\nu.$$

Условие 5° необходимо, если $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость.

4. Множители суммируемости типа (A, B). Образуем матрицу $\bar{B} = (\bar{\beta}_{nk})$ с элементами

$$\bar{\beta}_{nk} = \beta_{nk} \varepsilon_k. \tag{34}$$

Матрицу $\bar{B}$ мы будем рассматривать как матрицу некоторого метода суммирования рядов. Из определения множителей суммируемости типа (A, B) вытекает, что для того, чтобы величины ε_k служили множителями суммируемости типа (A, B). необходимо и достаточно, чтобы метод $\overline{B}$ включал A. При помощи рассуждений аналогичных рассуждениям при доказательстве теоремы Мазура и Хилла, можно найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод $\overline{B}$ включал A.

Действительно, при помощи формул (16) получим:

$$\sum_{\nu=0}^{k} \overline{\beta}_{n\nu} u_\nu = U' \sum_{\nu=0}^{k} \overline{\beta}_{n\nu} \eta_\nu + \sum_{\nu} \gamma^n{}_{k\nu} (U_\nu' - U'), \tag{35}$$

где

$$\gamma^n{}_{k\nu} = \sum_{\mu=0}^{k} \overline{\beta}_{n\mu} \eta_{\mu\nu}.$$

Раз ряд $\Sigma\eta_\nu$ A-суммируем, то он должен быть и $\overline{B}$-суммируем, в результате чего ряд $\Sigma\overline{\beta}_{n\nu}\eta_\nu$ должен сходится при каждом $n = 0, 1, 2,$ Следовательно, для сходимости ряда $\Sigma\overline{\beta}_{n\nu} u_\nu$ при всех A-суммируемых рядах Σu_ν, согласно лемме 1, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{k\to\infty} \gamma^n{}_{k\nu} = \gamma_{n\nu} \tag{36}$$

и выполнялось условие

$$\sum_{\nu} |\gamma^n{}_{k\nu}| \leqslant M_n \quad \text{независимо от } k. \tag{37}$$

При выполнении условий (36) и (37). в силу примечания 2 из (35) при $k \to \infty$ мы найдем:

$$\sum_{\nu} \overline{\beta}_{n\nu} u_\nu = U' \sum_{\nu} \overline{\beta}_{n\nu}\eta_\nu + \sum_{\nu} \gamma_{n\nu} (U_\nu' - U'). \tag{38}$$

Ввиду $\overline{B}$-суммируемости ряда $\Sigma\eta_\nu$ из (38), согласно лемме 1, следует, что для того, чтобы метод $\overline{B}$ включал A, кроме условий (36) и (37) необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{n\nu} = \gamma_\nu \tag{39}$$

и выполнение условия

$$\sum_{\nu} |\gamma_{n\nu}| \leqslant M \quad \text{независимо от } n. \tag{40}$$

В силу соотношения (34) из (36), (37), (39) и (40) вытекает следующее предложение.

Теорема 5. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа (A, B) тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ ряды } \sum \varepsilon_k \eta_k \text{ и } \sum_k \varepsilon_k \eta_{k\nu} \; B\text{-суммируемы},$$

$$2^\circ \sum_\nu |\gamma^n{}_{k\nu}| \leqslant M_n \text{ независимо от } k,$$

$$3^\circ \sum_\nu |\gamma_{n\nu}| \leqslant M \text{ независимо от } n,$$

где

$$\gamma^n{}_{k\nu} = \sum_{\mu=0}^{k} \beta_{n\mu} \varepsilon_\mu \eta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{n\nu} = \lim_{k\to\infty} \gamma^n{}_{k\nu}. \tag{41}$$

При применении теоремы 5 будем использовать следующие добавочные необходимые условия, вытекающие из условий 3° лемм 1 и 5:

$$4^\circ \sum |\gamma_\nu| < \infty, \quad \gamma_\nu = \lim_{n\to\infty} \gamma_{n\nu},$$

$$5^\circ \sum |\Delta(\beta_\nu \varepsilon_\nu)| < \infty, \quad \beta_\nu = \lim_{n\to\infty} \beta_{n\nu}.$$

Условие 5° необходимо, если A сохраняет сходимость.

Если B является корегулярным, то из 5° следует

$$\sum |\Delta \varepsilon_\nu| < \infty. \tag{42}$$

Действительно, в силу 5° существует предел $\lim \beta_\nu \varepsilon_\nu$ а раз $\lim \beta_\nu \neq 0$, то существует и предел $\lim \varepsilon_\nu$, вследствие чего ряд $\Sigma \varepsilon_\nu \Delta \beta_\nu$, ввиду условия 3° леммы 5, абсолютно сходится. Но тогда и ряд $\Sigma \beta_{\nu+1} \Delta \varepsilon_\nu$ абсолютно сходится, так как

$$\beta_{\nu+1} \Delta \varepsilon_\nu = \Delta(\beta_\nu \varepsilon_\nu) - \varepsilon_\nu \Delta \beta_\nu.$$

В силу условия $\lim \beta_\nu \neq 0$ из абсолютной сходимости ряда $\Sigma \beta_{\nu+1} \Delta \varepsilon_\nu$ вытекает (42).

5. Множители суммируемости типов $(|A|, B)$, $(|A|, |B|)$ и (A_O, B) При помощи лемм 2—4 нетрудно сформулировать следующие предложения, доказательства которых аналогичны доказательству теоремы 5, вследствие чего их можно пропустить.

Теорема 6. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа $(|A|, B)$ тогда и только тогда, когда

1° ряды $\sum \varepsilon_k \eta_k$ и $\sum\limits_k \varepsilon_k \eta_{k\nu}$ B-суммируемы,

2° $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{l} \gamma^n{}_{k\nu}\right| \leqslant M_n$ независимо от k и l,

3° $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{k} \gamma_{n\nu}\right| \leqslant M$ независимо от n и k,

где $\gamma^n{}_{k\nu}$ и $\gamma_{n\nu}$ определяются формулами (41).

При применении теоремы 6 будем использовать следующие добавочные необходимые условия, вытекающие из условий 3° лемм 2 и 6:

$$4° \quad \sum_{\nu=0}^{k} \gamma_\nu = O(1), \quad \gamma_\nu = \lim_{n\to\infty} \gamma_{n\nu},$$

$$5° \quad \beta_\nu \varepsilon_\nu = O(1), \quad \beta_\nu = \lim_{n\to\infty} \beta_{n\nu}.$$

Условие 5° необходимо, если A сохраняет абсолютную сходимость.

Если $\lim \beta_\nu \neq 0$ (т. е., если B корегулярен), то из 5° непосредственно вытекает $\varepsilon_\nu = O(1)$.

Теорема 7. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа $(|A|, |B|)$ тогда и только тогда, когда

1° ряд $\sum \varepsilon_k \eta_k$ $|B|$-суммируем,

2° $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{l} \gamma^n{}_{k\nu}\right| \leqslant M_n$ независимо от k и l,

3° $\sum\limits_n |\varrho_{nk} - \varrho_{n-1,k}| \leqslant M$ независимо от k,

где

$$\varrho_{nk} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \gamma_{n\nu} \text{ при } n \geqslant 0, \quad \varrho_{-1,k} = 0,$$

а $\gamma^n{}_{k\nu}$ и $\gamma_{n\nu}$ определяются формулами (41)

Теорема 8. Величины ε_k являются множителями суммируемости типа (A_O, B) тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \text{ ряды } \sum \varepsilon_k \eta_k \text{ и } \sum_k \varepsilon_k \eta_{k\nu} \; B\text{-суммируемы},$$

$$2^\circ \lim_{k \to \infty} \sum_\nu |\gamma^n_{k\nu}| = \sum_\nu |\gamma_{n\nu}|,$$

$$3^\circ \lim_{n \to \infty} \sum_\nu |\gamma_{n\nu}| = \sum |\gamma_\nu|,$$

где $\gamma^n_{k\nu}$ и $\gamma_{n\nu}$ определяются формулами (41), а $\gamma_\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{n\nu}$

При применении теоремы 8 будем использовать следующие добавочные необходимые условия, вытекающие из условий 3° лемм 4 и 8:

$$4^\circ \lim_{n \to \infty} \sum_\nu \gamma_{n\nu} = \sum \gamma_\nu,$$

$$5^\circ \lim \beta_\nu \varepsilon_\nu = 0$$

Условие 5° необходимо, если A сохраняет сходимость.

Если $\lim \beta_\nu \neq 0$ (т. е., если B корегулярен), то из 5° непосредственно вытекает $\varepsilon_\nu = o(1)$.

Отметим в заключение, что теоремы 1—8 справедливы для любого B и реверсивного $\mathfrak{A}$ или, соответственно, для A, за исключением теорем 4 и 8, которые верны при нормальном $\mathfrak{A}$ или, соответственно, при A. Для справедливости добавочных условий 5° теорем 1, 4, 5 и 8 требуется от $\mathfrak{A}$ или, соответственно, от A сохранение сходимости, для справедливости же добавочных условий 5° теорем 2 и 6, а также условия 4° теоремы 3 — сохранение абсолютной сходимости. Если матрица B конечнострочна, то условия 2° теорем 1—8 отпадают.

§ 4. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПОВ

$(\mathfrak{P}, B)$, $(|\mathfrak{P}|, B)$, $(|\mathfrak{P}|, |B|)$ и $(\mathfrak{P}_O, B)$

Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$ есть метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{p_k\}$ при помощи формул (4). Если $p_k \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то $\mathfrak{P}$ является реверсивным (нормальным), и для элементов $\xi_{k\nu}$ обратной матрицы $\mathfrak{P}^{-1}$ имеем:

$$\xi_{\nu\nu} = \frac{P_\nu}{p_\nu}, \quad \xi_{\nu+1,\nu} = -\frac{P_\nu}{p_{\nu+1}},$$

$$\xi_{k\nu} = 0 \text{ при } k < \nu \text{ и при } k > \nu + 1,$$

причем $\xi_\nu = 1$.

Вычисляя величины $c^n{}_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$, в случае произвольного B, согласно формулам (24), мы находим:

$$(43)\qquad \begin{cases} c^n{}_{k\nu} = P_\nu \Delta \dfrac{\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} = c_{n\nu} & \text{при } \nu < k \\ c^n{}_{kk} = \beta_{nk} P_k \dfrac{\varepsilon_k}{p_k} \\ c^n{}_{k\nu} = 0 & \text{при } \nu > k, \end{cases}$$

$$(44)\qquad c_{n\nu} = P_\nu \Delta \frac{\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu}$$

Существование предела $\beta_\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_{n\nu}$ влечет за собой существование предела

$$(45)\qquad c_\nu = \lim_{n\to\infty} c_{n\nu} = P_\nu \Delta \frac{\beta_\nu \varepsilon_\nu}{p_\nu}$$

1. Множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}, B)$. Найдем сначала множители сходимости для $\mathfrak{P}$. В случае множителей сходимости имеем:

$$\beta_{nk} = 1 \text{ при } k \leqslant n, \ \beta_{nk} = 0 \text{ при } k > n,$$

вследствие чего формула (44) превращается в

$$(46)\qquad c_{nk} = \begin{cases} P_k \Delta \dfrac{\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } k < n \\ P_k \dfrac{\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } k = n \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

При помощи тождества

$$(47)\qquad \sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} = \sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu - P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}$$

из теоремы 1 получается следующее предложение.

Теорема 9. Величины ε_k являются множителями сходимости для метода $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \ \sum \left| P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \text{ существует } \lim P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}.$$

Отметим, что в теореме 9 на $\mathfrak{P}$ никакие ограничения, кроме $p_k \neq 0$, не накладываются. Если $\mathfrak{P}$ сохраняет сходимость, то теорему 9 можно уточнить.

Следствие. Если $\mathfrak{P}$ регулярен, то условие 2° теоремы 9 можно заменить условием

$$\varepsilon_k = o(p_k). \tag{48}$$

Если же $\mathfrak{P}$ конулевой, то условие 2° теоремы 9 можно опустить.

Действительно, из условия 1° теоремы 9, в силу $\lim P_k \neq 0$, следует существование предела

$$l = \lim \frac{\varepsilon_k}{p_k}$$

Из равенства

$$c_k = P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k}$$

находим:

$$\varepsilon_k = p_k \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{c_\nu}{P_\nu} + l p_k. \tag{49}$$

Если $\mathfrak{P}$ регулярен, то из условия 2° теоремы 9 вытекает условие (48), т. е. $l = 0$. Если же $\mathfrak{P}$ конулевой, то $\Sigma \mid p_k \mid < \infty$. В обоих случаях из (49), ввиду $\Sigma \mid c_k \mid < \infty$ и леммы I, следует $\Sigma \mid \varepsilon_k \mid < \infty$, вследствие чего из тождества (47) получается условие 2° теоремы 9.

Теорема 10. Если $\mathfrak{P}$ сохраняет сходимость и B корегулярен, то условия теоремы 9 являются необходимыми и достаточными для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа ($\mathfrak{P}$, B)

Доказательство. Исходим из необходимых условий 4° и 5° теоремы 1, которые, согласно (45), имеют вид:

$$\sum \left| P_k \Delta \frac{\beta_k \varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty, \quad \sum \mid \beta_k \varepsilon_k \mid < \infty. \tag{50}$$

Для доказательства теоремы 10 достаточно показать, что из (50) вытекают условия теоремы 9.

Если условия (50) выполнены, то из тождества

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \Delta \frac{\beta_\nu \varepsilon_\nu}{p_\nu} = \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu \varepsilon_\nu - \beta_k P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \tag{51}$$

следует условие 2° теоремы 9, так как $\lim \beta_k \neq 0$. Далее, ввиду условия 3° леммы 5 будет:

$$\sum \left| P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta \beta_k \right| < \infty.$$

Но поскольку

$$\beta_{k+1} \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} = \Delta \frac{\beta_k \varepsilon_k}{p_k} - \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta \beta_k,$$

то имеем:

$$\sum \left| P_k \beta_{k+1} \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty,$$

откуда, в силу $\lim \beta_k \neq 0$, вытекает условие 1° теоремы 9.

Необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типа ($\mathfrak{P}$, B), в случае регулярных $\mathfrak{P}$ и B, дал Пейеримхофф [2].

2. Множители суммируемости типа ($|\mathfrak{P}|$, B).

Теорема 11. Пусть $\mathfrak{P}$ сохраняет абсолютную сходимость и B корегулярен. Тогда для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа ($|\mathfrak{P}|$, B), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1° $P_k \varepsilon_k = O(p_k)$,

2° ряд $\Sigma \varepsilon_k$ B-суммируем и имеет ограниченные частные суммы.

Доказательство. Необходимость условия 1° следует из тождества (51), если иметь в виду (45), условия 4° и 5° теоремы 2 и условие $\lim \beta_k \neq 0$. Необходимость условия 2° вытекает из условия 1° теоремы 2 и из (30) Для доказательства достаточности условий теоремы 11 покажем, что при их выполнении условия теоремы 2 удовлетворяются.

Исходим из тождества

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \Delta \frac{\beta_{n\nu} \varepsilon_\nu}{p_\nu} = \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{n\nu} \varepsilon_\nu - \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \tag{52}$$

Так как

$$\sum_{\nu=0}^{k} \beta_{n\nu} \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{k-1} \Delta \beta_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \varepsilon_\mu + \beta_{nk} \sum_{\mu=0}^{k} \varepsilon_\mu,$$

то, в силу условий 2° теоремы 11 и лемм 5 и 6, сумма в правой части тождества (52) ограничена. Следовательно, ввиду условия 1° теоремы 11 и условия 2° леммы 6, сумма в левой части тождества (52) также ограничена. Тем самым выполнение условия 3° теоремы 2, в силу (44), доказано. Выполнение условия 2° теоремы 2 теперь без труда вытекает из (43), а выполнение условия 1° теоремы 2 из условия 2° теоремы 11.

Необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типа ($|\mathfrak{P}|$, B) применительно к случаю регулярного B и абсолютно регулярного $\mathfrak{P}$ вытекают из работы [5] Пейеримхоффа.

3. Множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, |B|)$

Теорема 12. Пусть $\mathfrak{P}$ и B сохраняют абсолютную сходимость и B, сверх того, корегулярен. Тогда для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1° $P_k\varepsilon_k = O(p_k)$,

2° ряд $\Sigma\varepsilon_k$ $|B|$-суммируем и имеет ограниченные частные суммы,

3° $$\sum_n \left| \sum_{\nu=0}^{k} (\beta_{n\nu} - \beta_{n-1,\nu})\varepsilon_\nu \right| = O(1).$$

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° непосредственно следует из теоремы 11 и из условия 1° теоремы 3, а необходимость условия 3° — из условий 1° и 4° теоремы 3. Для доказательства достаточности условий теоремы 12 проверим выполнение условий теоремы 3.

Поскольку, согласно примечанию 4, $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_{nk} = 0$, то, ввиду (44) и условий 1° и 2° теоремы 12, из тождества (52) при $k \to \infty$ находим:

$$\sum_\nu c_{n\nu} = \sum_\nu \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu \tag{53}$$

и, следовательно,

$$r_{nk} = \sum_{\nu=k}^{\infty} c_{n\nu} = \sum_\nu c_{n\nu} - \sum_{\nu=0}^{k-1} c_{n\nu} = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu + \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}$$

Теперь уже нетрудно убедиться в выполнении условия 3° теоремы 3, если иметь в виду условия теоремы 12 и условие леммы 7. Выполнение условия 2° теоремы 3 проверяется так же, как при доказательстве теоремы 11. Выполнение же условия 1° теоремы 3 непосредственно вытекает из условия 2° теоремы 12.

Примечание 9. Если $B = Q$, где Q — метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{q_k\}$, т. е. если

$$\beta_{nk} = \begin{cases} 1 - \dfrac{Q_{k-1}}{Q_n} & \text{при } k \leqslant n \\ 0 & \text{при } k > n, \end{cases}$$

где

$$Q_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n, \quad Q_n \neq 0 \text{ при } n \geqslant 0, \quad Q_{-1} = 0,$$

то условие 3° теоремы 12 можно опустить. Действительно, поскольку при $B = Q$

$$\sum_{\nu=0}^{k} (\beta_{n\nu} - \beta_{n-1,\nu})\varepsilon_\nu = \frac{q_n}{Q_{n-1}Q_n} \sum_{\nu=0}^{k} Q_{\nu-1}\,\varepsilon_\nu =$$

$$= \frac{q_n Q_k}{Q_{n-1}\,Q_n}\left(\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu - \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{k\nu}\varepsilon_\nu\right),$$

то, в силу условия 2° теоремы 12 и леммы II, мы имеем:

$$\sum_n \left|\sum_{\nu=0}^{k} (\beta_{n\nu} - \beta_{n-1,\nu})\varepsilon_\nu\right| \leqslant \left|\sum_{\nu=0}^{k} (\beta_{k\nu} - \beta_{k-1,\nu})\,\varepsilon_\nu\right| +$$

$$+ \left|\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu - \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{k\nu}\varepsilon_\nu\right| \,|\,Q_k\,| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left|\frac{q_n}{Q_{n-1}\,Q_n}\right| = O(1).$$

4. Множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}_O, B)$. Найдем сначала множители сходимости относительно $\mathfrak{P}_O$. В силу (46) условие 3° теоремы 4 гласит:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{k-1}\left|P_\nu\,\Delta\frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right| + \left|P_k\frac{\varepsilon_k}{p_k}\right|\right) = \sum\left|P_\nu\,\Delta\frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right|,$$

откуда

$$P_k\varepsilon_k = o(p_k).$$

При помощи тождества (47) из теоремы 4 получается следующее предложение.

Теорема 13. Величины ε_k являются множителями сходимости относительно $\mathfrak{P}_O$ тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \ \sum\left|P_k\Delta\frac{\varepsilon_k}{p_k}\right| < \infty,$$

$$2^\circ \ P_k\varepsilon_k = o(p_k)$$

Отметим, что в теореме 13 на $\mathfrak{P}$ никакие ограничения, кроме $p_k \neq 0$, не накладываются. Если $\mathfrak{P}$ сохраняет сходимость, то условие 2° теоремы 13 можно заменить более слабым условием $\varepsilon_k = o(p_k)$, как это следует из (49) при $l = 0$. Отсюда, в силу следствия теоремы 9, вытекает, что для регулярного $\mathfrak{P}$ множители сходимости относительно $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_O$ совпадают.

Теорема 14. Если $\mathfrak{P}$ сохраняет сходимость и B корегулярен, то условия теоремы 13 являются необходимыми и достаточными для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа $(\mathfrak{P}_O, B)$

Доказательство. Достаточно показать, что условия теоремы 13 необходимы для того, чтобы величины ε_k служили множителями суммируемости типа $(\mathfrak{P}_O, B)$ Так как множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}, B)$ одновременно являются и множителями суммируемости типа $(\mathfrak{P}_O, B)$, то необходимость условия 1° теоремы 13 непосредственно следует из теоремы 10. Покажем, что необходимость условия 2° теоремы 13 вытекает из условий 4° и 5° теоремы 4. Действительно, в силу (51) и (53), условие 4° теоремы 4 гласит:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu} \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu = \sum \beta_\nu \varepsilon_\nu - \lim \beta_k P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}$$

или, имея в виду условие 5° теоремы 4,

$$\lim \beta_k P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} = 0$$

Раз $\lim \beta_k \neq 0$, то отсюда и следует условие 2° теоремы 13.

Следствие. Если $\mathfrak{P}$ регулярен и B корегулярен, то множители суммируемости типов $(\mathfrak{P}, B)$ и $(\mathfrak{P}_O, B)$ совпадают.

Примечание 10. Требование корегулярности метода B является существенным для справедливости теорем настоящего параграфа. В самом деле, метод $B = (\beta_{nk})$, где

$$\beta_{nk} = 0 \text{ при } k > 0, \ \beta_{n0} = 1,$$

является конулевым. Поскольку B суммирует все ряды $(B\{\Sigma u_k\} = u_0)$, то для него условия теорем настоящего параграфа не являются необходимыми.

Пример. Если $p_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то метод $\mathfrak{P}$ сохраняет и сходимость и абсолютную сходимость, так как условия лемм I и II при $p_k > 0$ всегда удовлетворяются. Если, сверх того, последовательность $\{P_k\}$ неограничена, то $\mathfrak{P}$ регулярен, в противном же случае $\mathfrak{P}$ конулевой. В первом случае числа

$$\varepsilon_k = \frac{p_k}{(P_k)^\sigma} \tag{54}$$

являются множителями сходимости относительно $\mathfrak{P}_O$ (а также множителями абсолютной сходимости относительно $|\mathfrak{P}|$), если $\sigma > 1$. Во втором случае числа (54) служат множителями сходимости для $\mathfrak{P}$ (а также множителями абсолютной сходимости для

$|\mathfrak{P}|$) независимо от σ. Сказанное вытекает из теорем 13, 12 и 9, если иметь в виду, что, в силу равенства (54) и неравенства

$$P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} < \frac{\sigma p_{k+1}}{(P_k)^{\sigma-1} P_{k+1}} \quad (\sigma > 1),$$

ряды

$$\sum |\varepsilon_k| \quad \text{и} \quad \sum \left| P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right|$$

при данных условиях сходятся. Сходимость этих рядов следует из одной теоремы Прингсхейма [12], если последовательность $\{P_k\}$ неограничена и $\sigma > 1$, а из сходимости ряда $\Sigma |p_k|$, если последовательность $\{P_k\}$ ограничена.

§ 5. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПОВ
(P, B), $(|P|, B)$, $(|P|, |B|)$ и (P_O, B)[1]

Пусть $A = P$ есть метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{p_k\}$ при помощи формул (3). Если $p_k \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то P является реверсивным (нормальным), и для элементов $\eta_{k\nu}$ обратной матрицы P^{-1} мы имеем:

$$\eta_{\nu\nu} = \frac{P_\nu}{p_\nu}, \quad \eta_{\nu+1,\nu} = -P_\nu\left(\frac{1}{p_\nu} + \frac{1}{p_{\nu+1}}\right), \quad \eta_{\nu+2,\nu} = \frac{P_\nu}{p_{\nu+1}},$$

$$\eta_{k\nu} = 0 \text{ при } k < \nu \text{ и при } k > \nu + 2,$$

причем

$$\eta_\nu = 0 \text{ при } \nu > 0, \; \eta_0 = 1.$$

Отсюда следует, что условия 1° теорем 5—8 при $A = P$ всегда удовлетворяются, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{n\nu} = \beta_\nu$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\beta_\nu = 1$.

Вычисляя величины $\gamma^n{}_{k\nu}$ и $\gamma_{n\nu}$, в случае произвольного B, согласно формулам (41), мы находим:

$$(55) \quad \begin{cases} \gamma^n{}_{k\nu} = P_\nu \Delta \dfrac{(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu)}{p_\nu} = \gamma_{n\nu} \text{ при } \nu < k-1 \\ \gamma^n{}_{k,k-1} = \gamma_{n,k-1} - \beta_{n,k+1} P_{k-1} \dfrac{\varepsilon_{k+1}}{p_k} \\ \gamma^n{}_{kk} = \beta_{nk} P_k \dfrac{\varepsilon_k}{p_k} \\ \gamma^n{}_{k\nu} = 0 \text{ при } \nu > k, \end{cases}$$

$$(56) \quad \gamma_{n\nu} = P_\nu \Delta \frac{\Delta(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu)}{p_\nu}$$

---

[1] Результаты этого параграфа опубликованы без доказательств в 1954 г. [15].

Ввиду предположения $\beta_\nu = 1$ имеем:

$$\gamma_\nu = \lim_{n\to\infty} \gamma_{n\nu} = P_\nu \Delta \frac{\Delta \varepsilon_\nu}{p_\nu} \tag{57}$$

1. Множители суммируемости типа $(P\ B)$

Теорема 15. Если P сохраняет сходимость и B регулярен, то для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа $(P\ B)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1° $\sum \left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty$,

2° $P_k \Delta \varepsilon_k = O(p_k)$[1],

3° $\sum_k \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{\Delta \beta_{nk}}{p_k} \right| \leqslant M$ независимо от n,

4° $\left| \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| \leqslant M_n$ независимо от k.

Доказательство. Необходимость условия 1° непосредственно следует из условия 4° теоремы 5 и из (57): Из тождества

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \Delta \frac{\Delta \varepsilon_\nu}{p_\nu} = \sum_{\nu=0}^{k} \Delta \varepsilon_\nu - P_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}, \tag{58}$$

в силу условия 5° теоремы 5 и условия 1° теоремы 15, вытекает необходимость условия 2° Чтобы показать необходимость условия 3° преобразуем формулу (56) следующим образом:

$$\gamma_{nk} = P_k \left[\frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k} - \frac{\Delta(\beta_{n,k+1}\varepsilon_{k+1})}{p_{k+1}} \right] =$$

$$= P_k \left(\frac{\beta_{nk}\Delta\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}\Delta\beta_{nk}}{p_k} - \frac{\varepsilon_{k+1}\Delta\beta_{n,k+1} + \beta_{n,k+2}\Delta\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}} \right) =$$

$$= P_k \left[\frac{(\Delta\beta_{nk} + \beta_{n,k+1})\Delta\varepsilon_k}{p_k} - \frac{(\beta_{n,k+1} - \Delta\beta_{n,k+1})\Delta\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{k+1} \left(\frac{\Delta\beta_{nk}}{p_k} - \frac{\Delta\beta_{n,k+1}}{p_{k+1}} \right) \right]$$

или

$$\gamma_{nk} = P_k \left(\frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} \Delta\beta_{nk} + \frac{\Delta\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}} \Delta\beta_{n,k+1} + \beta_{n,k+1} \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{\Delta\beta_{nk}}{p_k} \right) \tag{59}$$

---

[1] В действительности же существует предел $\lim P_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}$

Условие 3° теоремы 15 теперь получается из условия 3° теоремы 5, если иметь в виду условия 1° и 2° теоремы 15, а также условия 2° лемм 5 и 6. Условие 4° теоремы 15, ввиду предпоследней формулы (55), непосредственно следует из условия 2° теоремы 5. Тем самым необходимость условий теоремы 15 доказана.

Чтобы доказать достаточность этих условий, покажем, что они обеспечивают выполнение условий теоремы 5. Что условие 3° теоремы 5, согласно (59), выполняется, это видно из условий 1°—3° теоремы 15 и из условий 2° лемм 5 и 6. Далее, согласно формулам (55), имеем:

$$\sum_{\nu}\left|\gamma^{n}{}_{k\nu}\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{k-1}\left|\gamma_{n\nu}\right| + \left|\beta_{n,\,k+1} P_{k-1}\frac{\varepsilon_{k+1}}{p_k}\right| + \left|\beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}\right|,$$

откуда при помощи тождества

$$(60)\qquad \beta_{n,\,k+1} P_{k-1}\frac{\varepsilon_{k+1}}{p_k} = \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} - P_k \frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k} - \beta_{n,\,k+1}\varepsilon_{k+1}$$

получаем:

$$\sum_{\nu}\left|\gamma^{n}{}_{k\nu}\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{k-1}\left|\gamma_{n\nu}\right| + \left|\beta_{n,\,k+1}\varepsilon_{k+1}\right| + \left|P_k\frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k}\right| + 2\left|\beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}\right|$$

Теперь нетрудно проверить выполнение условия 2° теоремы 5, если иметь в виду, что из условий 1 и 2 теоремы 15 и из тождества (58) вытекает ограниченность величин ε_{k+1}, а из тождества

$$(61)\qquad \sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \Delta\frac{\Delta(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu)}{p_\nu} = \sum_{\nu=0}^{k}\Delta(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu) - P_k\frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k}$$

ограниченность величин

$$(62)\qquad d_{nk} = P_k\frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k}$$

при фиксированном n. Условие 1° теоремы 5, как отмечено в начале настоящего параграфа, автоматически выполнено.

При $\varepsilon_k = 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) из теоремы 15 получается следующее предложение.

Следствие 1. *Метод B включает P тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ\quad \sum_{k}\left|P_k \Delta\frac{\Delta\beta_{nk}}{p_k}\right| \leqslant M \text{ независимо от } n,$$

$$2^\circ\quad \left|\frac{\beta_{nk}P_k}{p_k}\right| \leqslant M_n \text{ независимо от } k.$$

Если следствие 1 непосредственно вывести из теоремы 5 при $\varepsilon_k = 1$, то оказывается, что для справедливости его достаточно предполагать существование пределов

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{nk} \text{ и } \lim_{k\to\infty} \beta_{nk}.$$

В частности, если $B = Q$, где Q — метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{q_k\}$, то из следствия 1 вытекает теорема Гарабедяна и Рандельса [13] о включении одного метода взвешенных средних Рисса другим.

При $B = Q$ из теоремы 15 вытекает следующее предложение.

Следствие 2. Если P сохраняет сходимость и Q регулярен, то величины ε_k являются множителями суммируемости типа (P, Q) тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \quad \sum \left| P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \quad P_k \Delta\varepsilon_k = O(p_k),$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{q_k}{p_k} \right| = O(Q_n),$$

$$4^\circ \quad P_k \varepsilon_k q_k = O(p_k Q_k).$$

В частности, если Q эквивалентен методу обыкновенной сходимости, т. е. если $Q_k = O(q_k)$ [10], то условие 3° можно опустить, и из следствия 2 получается одно предложение Юрката и Пейеримхоффа [2, 3]. Если же $Q = P$ (или, если в более общем случае Q включает P), то условия 3° и 4° отпадают, и следствие 2 дает второе предложение Юрката и Пейеримхоффа [4]. Наконец, если $p_k > 0$, $q_k > 0$ и последовательность $\left\{\frac{q_k}{p_k}\right\}$ монотонна и ограничена, то условие 3° можно отбросить, и из следствия 2 получается третье предложение Юрката и Пейеримхоффа [6] о множителях суммируемости для методов взвешенных средних Рисса. Случай $\varepsilon_k = \Theta^k$ ($|\Theta| \leqslant 1$) при произвольном Q рассмотрен автором [14]

2. Множители суммируемости типа $(|P|, B)$.

Теорема 16. Если P сохраняет абсолютную сходимость и B регулярен, то для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа $(|P|, B)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1^\circ \quad \varepsilon_k = O(1).$$

$$2^\circ \quad P_k \Delta\varepsilon_k = O(p_k),$$

$$3^\circ \left| P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta\beta_{nk} \right| \leqslant M \text{ независимо от } n \text{ и } k,$$

$$4^\circ \left| \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| \leqslant M_n \text{ независимо от } k.$$

Доказательство. Условие 1° непосредственно получается из условия 5° теоремы 6, а условие 2° из условия 4° теоремы 6 при помощи тождества (58). Условие 3° следует из условия 3° теоремы 6 при помощи тождества (61), условий 1°, 2° теоремы 16 и условия 2° леммы 6, а условие 4° ввиду предпоследней формулы (55), непосредственно вытекает из условия 2° теоремы 6. Тем самым необходимость условий теоремы 16 доказана.

Остается проверить выполнение условий теоремы 6 в предположении, что условия теоремы 16 удовлетворяются. Выполнение условия 3° теоремы 6 следует из условий 1°—3° теоремы 16 и из условия 2° леммы 6 при помощи тождества (61) Согласно формулам (55) и условию 4° теоремы 16, условие 2° теоремы 6, ввиду выполнения условия 3° теоремы 6, сводится к условию

$$\left| \beta_{n,\,k+1} P_{k-1} \frac{\varepsilon_{k+1}}{p_k} \right| \leqslant M_n,$$

выполнение которого, в силу тождества (60), обеспечивается условиями теоремы 16 и условием 2° леммы 6. Условие 1 теоремы 6 автоматически выполнено.

При $B = Q$, где Q — метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{q_k\}$ из теоремы 16 вытекает следующее предложение.

Следствие. Если P сохраняет абсолютную сходимость и Q регулярен, то величины ε_k являются множителями суммируемости типа $(|P|, Q)$ тогда и только тогда, когда

$$1^\circ\ \varepsilon_k = O(1).$$
$$2^\circ\ P_k \Delta\varepsilon_k = O(p_k),$$
$$3^\circ\ P_k \varepsilon_k q_k = O(p_k Q_k)$$

Частные случаи следствия, именно случай, когда Q эквивалентен методу обыкновенной сходимости (случай множителей сходимости) и случай $Q = P$ изучены Пейеримхоффом [5] Случай $\varepsilon_k = \Theta^k$ $(|\Theta| \leqslant 1)$ при произвольном Q рассмотрен автором [14].

3. Множители суммируемости типа $(|P|, |B|)$.

Теорема 17. Если P и B сохраняют абсолютную сходимость и B, сверх того, регулярен, то для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа $(|P|, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1° $\varepsilon_k = O(1)$,
2° $P_k \Delta\varepsilon_k = O(p_k)$,
3° $\left| P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| \sum_n \left| \Delta(\beta_{nk} - \beta_{n-1,k}) \right| = O(1)$,
4° $\left| \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| \leqslant M_n$ независимо от k,

5° существует $\lim\limits_{k\to\infty} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta\beta_{nk}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Так как множители суммируемости типа $(|P|, |B|)$ одновременно являются и множителями суммируемости типа $(|P|, B)$, то необходимость условий 1°, 2° и 4° непосредственно следует из теоремы 16. Покажем, что необходимость условий 3° и 5° вытекает из условия 3° теоремы 7 Действительно, последнее условие предполагает сходимость ряда $\sum\limits_\nu \gamma_{n\nu}$, для чего, согласно тождеству (61), необходимо (и достаточно) существование предела

$$d_n = \lim_{k\to\infty} P_k \frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k}, \tag{63}$$

так как ряд в правой части тождества (61), в силу условия 1° и примечания 4, сходится. Ввиду условия 2° и примечания 4 из (63) следует условие 5°

Согласно (61), имеем:

$$\varrho_{nk} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \gamma_{n\nu} = \sum_{\nu} \gamma_{n\nu} - \sum_{\nu=0}^{k-1} \gamma_{n\nu} = \beta_{n,k+1}\varepsilon_{k+1} + d_{nk} - d_n, \tag{64}$$

где d_{nk} и d_n определяются формулами (62) и (63) В силу условия 1° теоремы 17 и леммы 7 условие 3° теоремы 7 сводится к условию

$$\sum_n |(d_{nk} - d_{n-1,k}) - (d_n - d_{n-1})| = O(1),$$

которое эквивалентно условию

$$\sum_n |d_{nk} - d_{n-1,k}| = O(1),$$

откуда и вытекает условие 3° теоремы 17

Обращаясь к доказательству достаточности условий теоремы 17 отметим, что выполнение условия 3° теоремы 7 следует из условий 1° 2° 3°, 5° теоремы 17 и из леммы 7 при помощи формулы

(64) Выполнение условия 2° теоремы 7 проверяется так же, как при доказательстве теоремы 16, если иметь в виду, что из условия 3° теоремы 17 следует условие 3° теоремы 16. В самом деле, в силу условия 3° теоремы 17 для любого n имеем:

$$|P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta(\beta_{\nu k} - \beta_{\nu-1, k})| \leqslant M$$

или

$$|P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta\beta_{nk}| \leqslant M$$

Условие 1° теоремы 7 автоматически выполнено.

В частности, если $B = Q$, то условия 4° и 5° теоремы 17 отпадают, а условие 3° гласит:

$$\left| P_k \frac{\varepsilon_k q_k}{p_k Q_k} \right| \left(1 + |Q_k| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{q_n}{Q_{n-1} Q_n} \right| \right) \leqslant M$$

или, в силу леммы II,

$$P_k \varepsilon_k q_k = O(p_k Q_k).$$

Отсюда при помощи следствия теоремы 16 получается следующее предложение.

Следствие. Если P и Q сохраняют абсолютную сходимость и Q, сверх того, регулярен, то множители суммируемости типов $(|P|, Q)$ и $(|P|, |Q|)$ совпадают.

4. Множители суммируемости типа (P_O, B).

Теорема 18. Если P сохраняет сходимость и B регулярен, то для того, чтобы величины ε_k были множителями суммируемости типа (P_O, B), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1^\circ \quad \sum \left| P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty \quad \text{и} \quad \varepsilon_k = o(1),$$

$$2^\circ \quad P_k \Delta\varepsilon_k = o(p_k),$$

$$3^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \sum_k \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{\Delta\beta_{nk}}{p_k} \right| = 0,$$

$$4^\circ \quad \lim_{k\to\infty} \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Доказательство. Необходимость условия 1° вытекает из условия 1° теоремы 15 и из условия 5° теоремы 8. Далее, согласно формулам (55) и (60), имеем:

$$(65)\quad \sum_{\nu}\left|\gamma^{n}{}_{k\nu}\right| = \sum_{\nu=0}^{k-2}\left|\gamma_{n\nu}\right| + \left|\gamma_{n,\,k-1} - \beta_{n,\,k+1}\varepsilon_{k+1} + P_k\frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k}\right| + \left|\beta_{nk}P_k\frac{\varepsilon_k}{p_k}\right|,$$

откуда при $k \to \infty$ в силу условия 2° теоремы 8 следует условие 4° теоремы 18 и справедливость равенства

$$(66)\qquad \lim_{k\to\infty} P_k\frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k} = 0.$$

С другой стороны, имея в виду (66). из тождеств (61) и (58) при $k \to \infty$ получаем:

$$\sum_{\nu}\gamma_{n\nu} = \beta_{n0}\varepsilon_0,$$

$$\sum \gamma_{\nu} = \varepsilon_0 - \lim P_k\frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}.$$

Отсюда, в силу условия 4° теоремы 8, следует условие 2° теоремы 18.

Наконец, из формулы (59) вытекает:

$$(67)\quad \begin{aligned}\sum_k\left|P_k\varepsilon_{k+1}\Delta\frac{\Delta\beta_{nk}}{p_k}\right| \leqslant \sum_k\left|\gamma_{nk}-\gamma_k\right| + \sum_k\left|P_k\frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}\Delta\beta_{nk}\right| + \\ + \sum_k\left|P_k\frac{\Delta\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}}\Delta\beta_{n,\,k+1}\right| + \sum_k\left|(\beta_{n,\,k+1}-1)P_k\Delta\frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}\right|,\end{aligned}$$

где ряды в правой части неравенства, ввиду условия 3° теоремы 8, условий 1° и 2° теоремы 18 и регулярности метода B, равномерно сходятся относительно n. При $n \to \infty$ из (67) следует условие 3° теоремы 18.

Остается доказать достаточность условий теоремы 18. При помощи формулы (59) мы находим:

$$\left|\sum_k|\gamma_{nk}| - \sum|\gamma_k|\right| \leqslant \sum_k\left|P_k\frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}\Delta\beta_{nk}\right| + \sum_k\left|P_k\frac{\Delta\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}}\Delta\beta_{n,\,k+1}\right| + \sum_k\left|(\beta_{n,\,k+1}-1)P_k\Delta\frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}\right| + \sum_k\left|P_k\varepsilon_{k+1}\Delta\frac{\Delta\beta_{nk}}{p_k}\right|$$

Отсюда, в силу условий 1°—3° теоремы 18 и регулярности метода B, следует выполнение условия 3° теоремы 8. Условие 3° теоремы 8 влечет за собой условие 4° той же теоремы, откуда при помощи тождеств (61) и (58) вытекает справедливость равенства (66), если иметь в виду условия 1° и 2° теоремы 18. Теперь из (65) и из условий 1° и 4° теоремы 18 получается условие 2° теоремы 8. Условие 1° теоремы 8 автоматически выполнено.

В частности, при $B=Q$ из теоремы 18 вытекает следующее предложение.

Следствие. Если P сохраняет сходимость и Q регулярен, то величины ε_k являются множителями суммируемости типа (P_O, Q) тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \quad \sum \left| P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty \quad \text{и} \quad \varepsilon_k = o(1),$$

$$2^\circ \quad P_k \Delta\varepsilon_k = o(p_k),$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{q_k}{p_k} \right| = o(Q_n),$$

$$4^\circ \quad P_k \varepsilon_k q_k = o(p_k Q_k).$$

Частный случай следствия, когда Q эквивалентен методу обыкновенной сходимости (случай множителей сходимости), рассмотрен Юркатом [3], а случай, когда $p_k > 0$, $q_k > 0$ и последовательность $\left\{\frac{q_k}{p_k}\right\}$ монотонна и ограничена, Юркатом и Пейеримхоффом [6].

§ 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ B-СУММЫ РЯДА $\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta)$

1. Метод множителей суммируемости. Метод Шура, при помощи которого мы устанавливали общие теоремы о множителях суммируемости, применимый также к нахождению необходимых и достаточных условий для непрерывности и дифференцируемости B-суммы ряда $\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta)$ при всех A-суммируемых ($|A|$-суммируемых или A-ограниченных) рядах Σu_k. Ограничиваясь изучением случая A-суммируемых рядов $\Sigma \varepsilon_k$, введем следующее понятие, которое оказывается полезным нам в дальнейшем.

Пусть дана матрица $B=(\beta_{nk})$ и последовательность функций $\varepsilon_k(\Theta)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, определенных на некотором множестве E (в комплексной плоскости) для которого данная точка Θ_0 служит предельной точкой. Будем называть ряд Σu_k суммируемым методом множителей суммируемости (B, ε_k) или просто (B, ε_k)-суммируемым, если существует (конечный) предел

$$U = \lim_{\Theta\to\Theta_0} \lim_{n\to\infty} \sum_k \beta_{nk}\varepsilon_k(\Theta) u_k = \lim_{\Theta\to\Theta_0} B\left\{\sum u_k \varepsilon_k(\Theta)\right\}$$

Число U назовем (B, ε_k)-суммой ряда Σu_k и пишем

$$U = (B, \varepsilon_k) \left\{\sum u_k\right\}$$

Если B есть метод обыкновенной сходимости, т. е. если $\beta_{nk} = 1$ при $k \leqslant n$ и $\beta_{nk} = 0$ при $k > n$, то метод (B, ε_k) превращается в метод множителей сходимости, определенный последовательностью $\{\varepsilon_k(\Theta)\}$

Поставим задачу, найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод (B, ε_k) включал реверсивный матричный метод A, определенный при помощи формул (1), и чтобы (B, ε_k) был совместным с A.

$B\ \{\Sigma u_k\varepsilon_k(\Theta)\}$ существует при всех A-суммируемых рядах для тех значений Θ, при которых величины $\varepsilon_k(\Theta)$ являются множителями суммируемости типа (A, B). Тогда из (38) при $n \to \infty$, в силу примечания 2, получаем:

$$(68) \quad B\left\{\sum u_k\varepsilon_k(\Theta)\right\} = U'\, B\left\{\sum \eta_k\varepsilon_k(\Theta)\right\} + \sum \gamma_\nu(\Theta)(U_\nu' - U'),$$

где

$$U' = A\left\{\sum u_k\right\}, \quad \gamma_\nu(\Theta) = B\left\{\sum \eta_{k\nu}\varepsilon_k(\Theta)\right\}$$

Раз $\Sigma\eta_k$ как A-суммируемый ряд, должен быть (B, ε_k)-суммируемым, то для существования предела

$$\lim_{\Theta\to\Theta_0} B\left\{\sum u_k\varepsilon_k(\Theta)\right\},$$

согласно лемме 1, необходимо и достаточно [1] чтобы существовал предел

$$\gamma_\nu = \lim_{\Theta\to\Theta_0} \gamma_\nu(\Theta) = (B, \varepsilon_k)\left\{\sum \eta_{k\nu}\right\}$$

и выполнялось условие

$$\Sigma\, |\gamma_\nu(\Theta)| \leqslant M \text{ при } \Theta \to \Theta_0.$$

Тогда из (68) при $\Theta \to \Theta_0$, в силу примечания 2, находим [2]:

$$(69) \quad (B, \varepsilon_k)\left\{\sum u_k\right\} = U'\,(B, \varepsilon_k)\left\{\sum \eta_k\right\} + \sum \gamma_\nu\,(U_\nu' - U').$$

Отсюда вытекает, что методы A и (B, ε_k) совместны, т. е.

$$(B, \varepsilon_k)\left\{\sum u_k\right\} = A\left\{\sum u_k\right\}$$

[1] Нетрудно обобщить лемму 1 для полунепрерывной матрицы $\mathfrak{A}$.

[2] Нетрудно убедиться, что примечание 2 справедливо и в случае полунепрерывной матрицы $\mathfrak{A}$.

тогда и только тогда, когда

$$(70)\qquad (B,\, \varepsilon_k)\left\{\sum \eta_{k\nu}\right\} = 0,\ \ (B,\, \varepsilon_k)\left\{\sum \eta_k\right\} = 1$$

Теперь мы можем сформулировать следующее предложение.

Теорема 19. Метод множителей суммируемости $(B,\, \varepsilon_k)$ включает A тогда и только тогда, когда

1° величины $\varepsilon_k(\Theta)$ являются множителями суммируемости типа $(A,\, B)$ для $\Theta \to \Theta_0$,

2° ряды $\sum \eta_k$ и $\sum\limits_k \eta_{k\nu}$ $(B,\, \varepsilon_k)$-суммируемы,

3° $\sum |\gamma_\nu(\Theta)| \leqslant M$ при $\Theta \to \Theta_0$,

где

$$\gamma_\nu(\Theta) = B\left\{\sum \eta_{k\nu}\varepsilon_k(\Theta)\right\}$$

Методы A и $(B,\, \varepsilon_k)$ совместны тогда и только тогда, когда выполняются добавочные условия (70).

В частности, если A — метод обыкновенной сходимости, то имеем:

$$\eta_{\nu\nu} = 1,\ \ \eta_{\nu+1,\,\nu} = -1,\ \ \eta_{k\nu} = 0 \text{ при } k < \nu \text{ и при } k > \nu + 1$$

и из теоремы 19 при помощи теоремы 5 получается следующее предложение.

Следствие. Метод множителей суммируемости $(B,\, \varepsilon_k)$ сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда

1° существует $\lim\limits_{\Theta \to \Theta_0} \varepsilon_k(\Theta)$,

2° $\sum\limits_k |\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k(\Theta))| \leqslant M(\Theta)$ независимо от n при $\Theta \to \Theta_0$,

3° $|\beta_{nk}\varepsilon_k(\Theta)| \leqslant M_n(\Theta)$ независимо от k при $\Theta \to \Theta_0$,

4° $\sum |\Delta(\beta_k\varepsilon_k(\Theta))| \leqslant M$ независимо от Θ при $\Theta \to \Theta_0$.

Метод $(B,\, \varepsilon_k)$ регулярен тогда и только тогда, когда выполняется добавочное условие

$$\lim_{\Theta \to \Theta_0} \varepsilon_k(\Theta) = \frac{1}{\beta_k},\quad \beta_k = \lim_{n \to \infty} \beta_{nk}.$$

Если B является методом обыкновенной сходимости, то условия 2° и 3° можно опустить, и из следствия получается известная теорема Перрона и Лоренца о регулярности метода множителей сходимости, определенного последовательностью $\{\varepsilon_k(\Theta)\}$

2. B сумма ряда $\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta)$ как функция от Θ. Введем обозначение

$$f(\Theta) = B\left\{\sum u_k \varepsilon_k(\Theta)\right\}$$

Функция $f(\Theta)$ определена в тех точках области D, для которых величины $\varepsilon_k(\Theta)$ служат множителями суммируемости типа (A, B). Пусть Θ_0 есть неизолированная точка множества определения $f(\Theta)$ Тогда $f(\Theta)$ непрерывна в точке Θ_0, если

$$\lim_{\Theta \to \Theta_0} f(\Theta) = f(\Theta_0)$$

или

$$(B, \varepsilon_k)\left\{\sum u_k\right\} = B\left\{\sum u_k \varepsilon_k(\Theta_0)\right\} \tag{71}$$

Отсюда при помощи равенств (68) и (69) вытекает следующее предложение.

Теорема 20. B-сумма ряда $\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta)$, как функция от Θ, является непрерывной в точке Θ_0 при всех A-суммируемых рядах Σu_k тогда и только тогда, когда

1° B-сумма рядов $\Sigma \eta_k \varepsilon_k(\Theta)$ и $\sum\limits_k \eta_{k\nu} \varepsilon_k(\Theta)$ непрерывна в точке Θ_0,

2° числа $\varepsilon_k(\Theta_0)$ суть множители суммируемости типа (A, B),

3° метод (B, ε_k) включает A.

Далее, для производной функции $f(\Theta)$ в точке Θ_0 будем иметь:

$$f'(\Theta) = \lim_{\Theta \to \Theta_0} \frac{f(\Theta) - f(\Theta_0)}{\Theta - \Theta_0} = \lim_{\Theta \to \Theta_0} \frac{B\{\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta)\} - B\{\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta_0)\}}{\Theta - \Theta_0} =$$

$$= (B, \bar{\varepsilon}_k)\left\{\sum u_k\right\},$$

где

$$\bar{\varepsilon}_k(\Theta) = \frac{\varepsilon_k(\Theta) - \varepsilon_k(\Theta_0)}{\Theta - \Theta_0} \tag{72}$$

Возникает вопрос, при каких условиях ряд $\Sigma u_k \varepsilon_k'(\Theta)$, получившийся из ряда $\Sigma u_k \varepsilon_k(\Theta)$ путем почленного дифференцирования, является B-суммируемым в точке Θ_0 и справедливо равенство

$$B\left\{\sum u_k \varepsilon_k'(\Theta_0)\right\} = \frac{d}{d\Theta} B\left\{\sum u_k \varepsilon_k(\Theta)\right\}_{\Theta = \Theta_0} \tag{73}$$

для всех A-суммируемых рядов Σu_k. Ответ на этот вопрос дается следующим предложением.

Теорема 21. Ряд $\Sigma u_k \varepsilon_k'(\Theta_0)$ является B-суммируемым и справедливо равенство (73) при всех A-суммируемых рядах Σu_k тогда и только тогда, когда

1° равенство (73) имеет место для рядов $\Sigma \eta_k$ и $\sum\limits_k \eta_{k\nu}$,

2° числа $\varepsilon_k'(\Theta_0)$ служат множителями суммируемости типа (A, B).

3° метод $(B, \bar{\varepsilon}_k)$, где $\bar{\varepsilon}_k(\Theta)$ определяется формулой (72), включает A.

Используя теорему 15, нетрудно применить теоремы 20 и 21 к случаю $A = P$, где P — метод взвешенных средних Рисса. Тогда условия 1° этих теорем автоматически выполняются, вследствие чего равенства (71) и (73) всегда справедливы, если только существуют их обе части.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди, Г., Расходящиеся ряды, М., 1951.
2. Peyerimhoff A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschrift, **55**, (1952), S. 23—54.
3. Jurkat, W., Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln, Math. Zeitschrift, **54**, (1951), S. 262—271.
4. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Zeitschrift, **55**, (1952), S. 92—108.
5. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit, Math. Zeitschrift, **57**, (1953), S. 265—290.
6. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschrift, **58**, (1953), S. 186—203.
7. Wilansky, A., An application of Banach linear functionals to summability, Trans. of the Amer. Math. Society, **67**, (1949), p. 59—68.
8. Банах, С. С., Курс функціонального аналізу, 1948, стр. 1—400.
9. Mazur, S., Über lineare Limitierungsverfahren, Math. Zeitschrift, **28**, (1928), S. 599—611.
10. Hill, Y. D., Some properties of summability, Duke Math. Journal, **9**, (1942), p. 373—381.
11. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Zeitschrift, **53**, (1951), S. 463—487.
12. Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 1947
13. Garabedian, H. L., Randels, W. C., Theorems on Riesz means, Duke Math. Journal, **4**, (1938), p. 529—533.
14. Кангро, Г., О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов, этот журнал, стр. 150—187
15. Кангро, Г., Множители суммируемости для метода взвешенных средних арифметических, Доклады АН СССР **99** (1954), стр. 9—11.

SUMMEERUVUSTEGURITEST

Prof., füüs.-mat. tead. doktor G. Kangro
Geomeetria kateeder

R e s ü m e e

Suurusi ε_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) nimetame (A, B) tüüpi summeeruvustegureiks, kui iga A-summeeruva rea Σu_k puhul rida $\Sigma u_k \varepsilon_k$ osutub B-summeeruvaks. Siinjuures eeldame, et summeerimismenetlused A ja B on antud rida-jadateisenduste abil vastavalt maatriksitega (α_{nk}) ja (β_{nk}). Analoogiliselt defineerime ($|A|$, B), ($|A|$, $|B|$) ja (A_O,B) tüüpi summeeruvustegureid, kus $|A|$ tähendab absoluutset A-summeeruvust ja A_O A-tõkestatust.

Suurusi ε_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) nimetame ($\mathfrak{A}$, B) tüüpi summeeruvustegureiks, kui iga $\mathfrak{A}$-summeeruva jada $\{U_k\}$ puhul rida $\Sigma U_k \varepsilon_k$ on B-summeeruv. Summeerimismenetluse $\mathfrak{A}$ kohta eeldame, et ta on antud jada-jadateisenduse abil maatriksiga (a_{nk}). Samasugusel viisil defineerime ($|\mathfrak{A}|$, B), ($|\mathfrak{A}|$, $|B|$) ja ($\mathfrak{A}_O$, B) tüüpi summeeruvustegureid.

Käesoleva töö peaeesmärgiks on ülalnimetatud tüüpi summeeruvustegurite uurimine sel juhul, kui A [vastavalt $\mathfrak{A}$] kujutab Rieszi kaalutud keskmiste menetlust, s. o. juhul, kus

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} 1 - \dfrac{P_{k-1}}{P_n}, & \text{kui } k \leqslant n \\ 0, & \text{kui } k > n \end{cases}$$

ja vastavalt

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n}, & \text{kui } k \leqslant n \\ 0, & \text{kui } k > n. \end{cases}$$

Siinjuures $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $P_{-1} = 0$, kus $\{p_k\}$ tähendab antud jada, mille puhul $p_k \neq 0$ ja $P_n \neq 0$.

Summeeruvustegureid Rieszi kaalutud keskmiste menetluse puhul on uurinud Jurkat ja Peyerimhoff, kelle poolt on avaldatud 1951. aastast alates rida teoreeme, mis annavad tarvilikud ja piisavad tingimused mitmesuguste summeeruvustegurite jaoks. Nendes summeeruvustegurite teoreemides on aga tehtud suuri kitsendusi vaadeldavate summeerimismenetluste suhtes: näiteks juhtudel (A, B), $(|A|, B)$ ja (A_0, B) on eeldatud kindlat seost menetluste A ja B vahel. Seejuures $(|A|, |B|)$ ja $(|\mathfrak{A}|, |B|)$ tüüpi summeeruvustegureid pole Jurkat ja Peyerimhoff üldse uurinud. Kõik need kitsendused on tingitud meetodist, mida kasutavad nimetatud autorid.

Rakendades nn. Schuri meetodit ja kasutades ära teatavaid täiendavaid tarvilikke tingimusi, mis järelduvad üldisest tarvilike ja piisavate tingimuste süsteemist, tuletatakse käesolevas töös Rieszi kaalutud keskmiste menetluse jaoks summeeruvustegurite teoreemid, kus B jääb meelevaldseks koregulaarseks või regulaarseks menetluseks. Siinjuures B kolmnurksust ei nõuta. Nendest teoreemidest saadakse erijuhtudena kergesti Jurkati ja Peyerimhoffi tulemused.

Toome näitena kahele summeeruvustegurite tüübile vastavad teoreemid.

Teoreem 1. Olgu $\mathfrak{A}$ koonduvust säilitav kaalutud keskmiste menetlus ja B mistahes koregulaarne menetlus. Suurused ε_k on $(\mathfrak{A}, B)$ tüüpi summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui on täidetud järgmised kaks tingimust:

$$1^\circ \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty\,[1],$$

$$2^\circ \quad \text{eksisteerib } \lim P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}.$$

Kui menetlused $\mathfrak{A}$ ja B on regulaarsed, siis saadakse teoreemist 1 vastav Peyerimhoffi tulemus [2].

Teoreem 2. Olgu A koonduvust säilitav kaalutud keskmiste menetlus ja B mistahes regulaarne menetlus. Suurused ε_k on (A, B) tüüpi summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui on täidetud järgmised neli tingimust:

$$1^\circ \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \quad P_k \Delta\varepsilon_k = O(p_k),$$

---

[1] $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$.

$$3^\circ \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{\Delta \beta_{nk}}{p_k} \right| \leqslant M \text{ sõltumata } n\text{-st,}$$

$$4^\circ \quad \left| \beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| < M_n \text{ sõltumata } k\text{-st.}$$

Erijuhul, kui B on koonduvusmenetlus (koonduvustegurite juhtum), siis teoreemi 2 tingimus 3° omab kuju $P_k \varepsilon_k = O(p_k)$, kuna tingimus 4° langeb ära. Kui peale selle A on regulaarne, siis järelduvad teoreemist 2 Jurkati ja Peyerimhoffi koonduvustegurite teoreemid kaalutud keskmiste menetluse jaoks [2, 3].

Kui $B = A$, siis teoreemi 2 tingimused 3° ja 4° langevad ära, ning teoreem 2 annab vastava Jurkati ja Peyerimhoffi teoreemi [4].

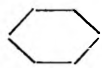
Kui B on Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, mis on määratud jadaga $\{q_k\}$, kus jada $\left\{\frac{q_k}{p_k}\right\}$ on monotoonne $k \geqslant k_0$ puhul ja tõkestatud, $p_k > 0$, $q_k > 0$, siis teoreemi 2 tingimus 3° omab kuju $P_k q_k \varepsilon_k = O(p_k Q_k)$, $Q_k = q_0 + q_1 + \ldots + q_k$, kuna tingimus 4° langeb ära. Regulaarse A korral saadakse siis teoreemist 2 vastav Jurkati ja Peyerimhoffi tulemus [6].

Lõpuks, kui $\varepsilon_k = 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, siis teoreemi 2 tingimused 1° ja 2° langevad ära ning teoreem 2 annab tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et B sisaldaks Rieszi kaalutud keskmiste menetlust. Erijuhul, kui B on Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, mis on määratud jadaga $\{q_k\}$, siis ka teoreemi 2 tingimus 4° langeb ära ning me saame teoreemist 2 tuntud Garabediani ja Randelsi teoreemi [13]

Ülejäänud summeeruvustegurite tüüpide puhul saadakse analoogilised tulemused.

TÄHTSAMATE SULFANIILAMIID-PREPARAATIDE IDENTIFITSEERIMISEST

A. Konsin
Analüütilise keemia kateeder

Meditsiinis kasutatavad sulfaniilamiid-preparaadid on sulfaniilhappeamiidi (p-amiinbensoolsulfoonamiidi) H_2N—  —SO_2NH_2 derivaadid. Sulfaniilhappeamiidi amiin- või amiidrühma vesinikuaatomite asendamisel mitmesuguste orgaaniliste radikaalidega on saadud terve rida terapeutiliselt väärtuslikke sulfaniilamiid-preparaate. Vastavalt keemilisele struktuurile võib neid liigitada [1] kahte rühma:

1) isotsüklilised sulfaniilamiid-preparaadid: sulfaniilamiid, disulfaan, albutsiid, sultsimiid jt.;
2) heterotsüklilised sulfaniilamiid-preparaadid: sulfidiin, sulfadiasiin, sulfatiasool, sulfasool, ftalasool jt.

Lähedase keemilise struktuuriga sulfaniilamiid-preparaatide laialdane kasutamine nõuab spetsiifilisi reaktsioone nende identifitseerimiseks. Suur osa kirjanduses esitatud reaktsioonidest osutuvad rühmareaktsioonideks, kuid erinevate orgaaniliste radikaalide tõttu amiin- ja amiidrühmas muutuvad omadused molekuli sulfaniilamiidses osas, mis võimaldab üldisi reaktsioone kasutada ka sulfaniilamiid-preparaatide eristamiseks [2].

Nii kvalitatiivsed samastamisreaktsioonid kui ka kvantitatiivsed määramised baseeruvad sulfaniilamiid-preparaatide üksikutel koostisosadel, milliseid eritletakse järgmiselt [2, 3]:

1) aromaatne amiinrühm, 2) aromaatne tuum, 3) sulfamiidrühm, 4) mitmesugused radikaalid amiin- ja amiidrühmades.

Aromaatsest amiinrühmast on sulfaniilamiid-preparaatidel tingitud:

1) diazoderivaatide moodustumine, mis liitumisel mitmesuguste ühenditega (atsetüleeritud 2R-happega, difenüülamiiniga, dimetüül-α-naftüülamiiniga, tümooliga jne.) annavad värvilisi produkte [4, 5].

Tabel 1

Sulfaniilamiid-preparaatide mikrokristalloskoopilised reaktsioonid raskemetallide sooladega

Sulfaniilamiid-preparaadid / Reaktiiv	Sulfaniilamiid	Disulfaan	Sultsimiid
1	2	3	4
$FeCl_3$	Rombikujulised kristallid, pikad prismad	Amorfne kollane sade; seismisel pikkadest nõeltest rosetid	Amorfne kollane sade
$CrCl_3$	Amorfne rohekashall sade	Amorfne rohekashall sade; seismisel pikkadest nõeltest rosetid	Amorfne rohekashall sade
$MnCl_2$	Amorfne sade	Amorfne sade; seismisel pikkadest nõeltest rosetid	Amorfne valge sade
$SnCl_2$	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade; seismisel pikkadest nõeltest rosetid	Amorfne valge sade
$CdCl_2$	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade; seismisel nõeltest rosetid	Amorfne valge sade
$Bi(NO_3)_3$	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade; seismisel pikkadest nõeltest rosetid	Amorfne valge sade
$AgNO_3$	Amorfne valge sade; seismisel nõeltest rosetid	Amorfne valge sade; osalt peentest nõeltest rosetid	Peened nõelad

järg

Sulfidiin	Sulfatiasool	Ftalasool	Sulfadiasiin
5	6	7	8
Osaliselt liitunud rombid, lühikesed prismad, rosetid	Pikad kuusnurgad, osalt deformeerunud servadega	Amorfne kollane sade	Rosette moodustavad nõelad ja pulgakesed
Osaliselt liitunud rombid, lühikesed prismad, rosetid	Amorfne rohekashall sade, osalt kuusnurksed kristallid	Amorfne rohekashall sade	Rosette moodustavad nõelad ja pulgakesed
Amorfne valge sade; seismisel rombidest rosetid	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade
Osaliselt liitunud rombid, lühikesed prismad, rosetid	Amorfne valge sade	Amorfne sade; seismisel peentest nõeltest kerajad moodustised	Osalt rosettideks liitunud nõelad
Amorfne valge sade; seismisel prismadest rosetid	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade
Osaliselt liitunud rombid, lühikesed prismad, rosetid	Pikad kuusnurgad, osalt amorfne sade	Amorfne sade; seismisel peentest nõeltest kerajad moodustised	Osalt rosettideks liitunud nõelad
Amorfne valge sade; segamisel ja soojendamisel nõeltest rosetid	Amorfne valge sade	Amorfne valge sade	Nõelad, nõeltest rosetid ja vihud

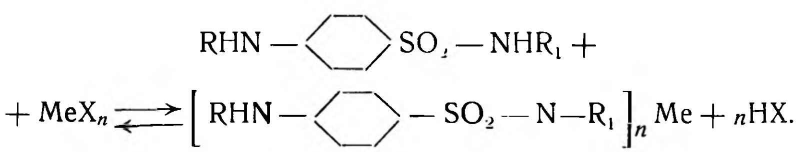
2) kondensatsioonireaktsioonid aldehüüdidega (p-dimetüülamiinbensaldehüüdiga [4], furfurooliga [3]),
3) indofenoolreaktsioon [6, 7],
4) reaktsioonid alkaloidide sadestamise reaktiividega [1, 3, 8, 9],
5) reaktsioon ligniiniga [10].

Aromaatsel tuumal baseerub halogeenderivaatide moodustumine [3, 8, 11]. Sulfamiidrühmal põhinevad:
1) reaktsioonid raskemetallidega [12, 13, 14, 15],
2) taandumine vesinikuga (in statu nasc.) tiofenoolideks [16].

Rühmareaktsioonide hulka kuuluvad veel oksüdatsioonireaktsioonid [8, 11] ja pürolüüs [1, 8, 17].

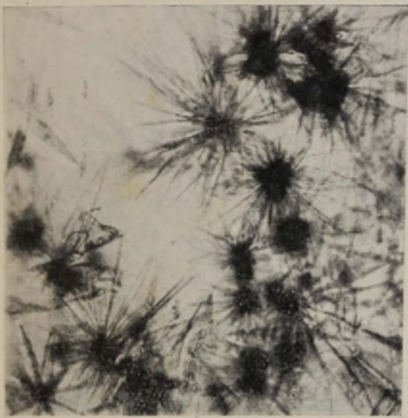
Kuigi sulfaniilamiid-preparaatide keemilisele analüüsile on pühendatud rida töid, ei ole nende kvalitatiivne analüüs siiski täiesti läbi töötatud ja enamiku kasutusel olevate sulfaniilamiid-preparaatide jaoks puuduvad spetsiifilised reaktsioonid. Kvalitatiivse mikrokeemilise analüüsi kohta on kirjanduses ainult väheseid teateid [1].

Käesoleva töö eesmärgiks on laiendada mikrokristalloskoopiliste reaktsioonide rakendamise võimalusi sulfaniilamiid-preparaatide identifitseerimisele ja leida spetsiifilisi reaktsioone nende eristamiseks. On lähtutud sulfaniilamiid-preparaatide omadusest moodustada raskemetallidega vees vähe lahustuvaid sooli, vastavalt üldisele reaktsioonile:

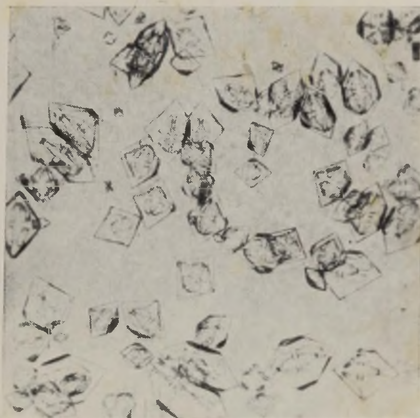


Et rõhuval enamikul sulfaniilamiid-preparaatidel on happeline dissotsiatsioonikonstant väga väike, siis sulfaniilamiid-preparaatide vahetul mõjutamisel raskemetallide sooladega sadet ei teki. Sademeid saadakse ainult raskemetallide soolade toimel vastavatesse naatriumisooladesse [2].

Katsed teostati järgmiste sulfaniilamiid-preparaatidega: sulfaniilamiid, disulfaan, sultsimiid, sulfidiin, sulfatiasool, ftalasool, sulfadiasiin. Vastavad naatriumisoolad valmistati preparaadi lahustamisel 0,1 n naatriumhüdroksüüdi-lahuses. Leelise ülehulga vältimiseks võeti 0,1 n naatriumhüdroksüüdi-lahust vähem kui oli vaja ekvivalentsuse saavutamiseks. Sulfaniilamiid-preparaadi lahustumatuks jäänud osa filtreeriti [12]. 1 tilgale saadud lahusele lisati esemeklaasil kristallike raskemetalli soola. Tabelis 1 on toodud mikrokristalloskoopiliste reaktsioonide tulemused raudkloriidi, kroomkloriidi, mangaankloriidi, stannokloriidi, kadmiumkloriidi, vismutnitraadi ja hõbenitraadiga. Vaskkloriidi, nikkelkloriidi, koobaltkloriidi, elavhõbekloriidi ja pliinitraadiga saadi amorfsed sademed.

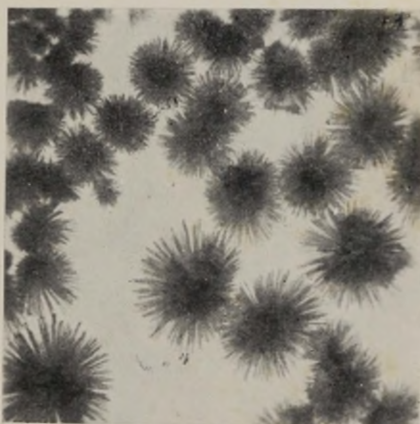


1. Sulfatiasooli kristallid $NiCl_2$-ga.

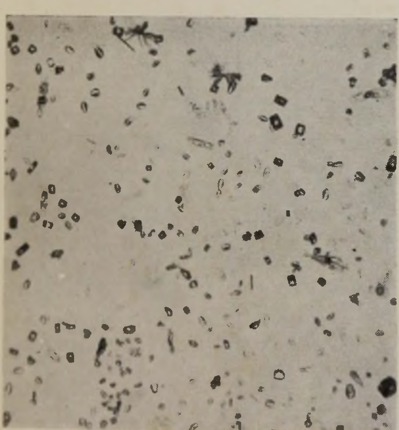


2. Sulfadiasiini kristallid $CdCl_2$-ga.

3. Sulfatiasooli kristallid $CdCl_2$-ga.



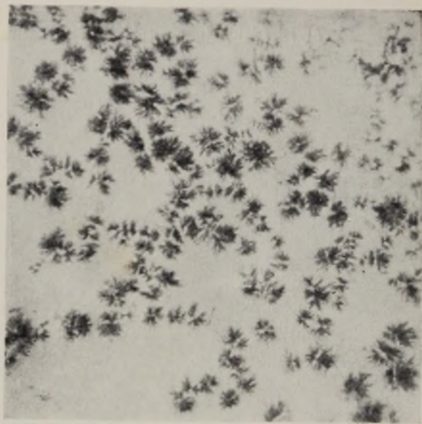
4. Disulfaani kristallid HCl-ga sadestamisel.



5. Sulfidiini kristallid HCl-ga sadestamisel.

6. Sulfatiasooli kristallid HCl-ga sadestamisel.

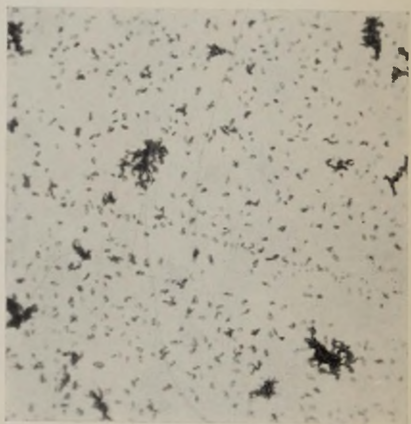
TAHVEL II.



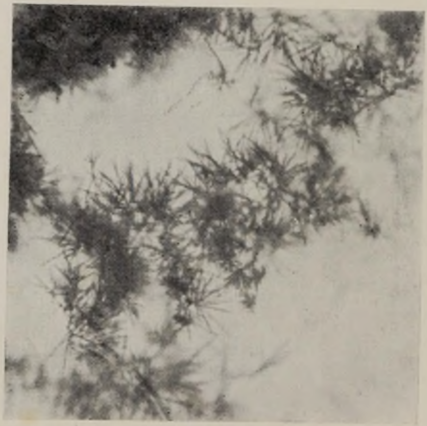
7. Ftalasooli kristallid HCl-ga sadestamisel.

8. Sulfadiasiini kristallid HCl-ga sadestamisel.

9. Sulfadiasiini kristallid $SnCl_2$ — HCl-ga.



10. Sulfidiini kristallid $Br_2 + KBr$-ga.



11. Sulfaniilamiidi kristallid $Br_2 + KBr$-ga.

Tabelist 1 nähtub, et disulfaan annab kõigi reaktiividega pikkadest nõeltest rosetid, sulfidiin — rombid, lühikesed prismad ja rosetid, sulfadiasiin — nõelad ja pulgakesed, mis osalt moodustavad rosette (mangaankloriidiga ja kadmiumkloriidiga amorfne sade) Sulfaniilamiid annab kristalse sademe ferrikloriidi ja hõbenitraadiga, sultsimiid ainult hõbenitraadiga, sulfatiasool — ferrikloriidi, kroomkloriidi ja vismutnitraadiga, ftalasool — stannokloriidi ja vismutnitraadiga.

Mikrokristalloskoopilisi reaktsioone mõningate raskemetallide sooladega teostati sulfaniilamiid-preparaatidele ka ammoniakaalses keskkonnas. Reaktiividena kasutati selliseid raskemetallide sooli (vaskkloriid, koobaltkloriid, nikkelkloriid, tsinkkloriid, kadmiumkloriid ja hõbenitraat), mis ammooniumhüdroksüüdiga moodustavad lahustuvaid kompleksühendeid, et seega vältida amorfsete hüdroksüüdide segavat mõju. Reaktsioon viidi läbi järgmiselt: väike hulk preparaati (0,5—1 mg) lahustati esemeklaasil 1—2 tilgas kontsentreeritud ammooniumhüdroksüüdis ja lisati kristallike reaktiivi. Sulfatiasool andis kristalse sademe kõigi eeltoodud raskemetallide sooladega, sulfadiasiin ainult kadmiumkloriidi ja hõbenitraadiga. Sulfaniilamiidi, disulfaani, sultsimiidi, sulfidiini ja ftalasooliga sadet ei tekkinud. Katsete tulemused sulfatiasooli ja sulfadiasiiniga on esitatud tabelis 2.

Katse tulemustest selgub, et hõbenitraati ei saa kasutada reaktiivina ammoniakaalses keskkonnas, sest sulfatiasooli ja sulfadiasiiniga saadud kristallide kujud erinevad liiga vähe üksteisest. Kuigi reaktsioon vaskkloriidi, koobaltkloriidi, nikkelkloriidi ja tsinkkloriidiga on spetsiifiline sulfatiasoolile ammoniakaalses keskkonnas, sobib mikrokristalloskoopilise reaktiivina neist ainult nikkelkloriid, mis annab sulfatiasooliga iseloomuliku mikroskoopilise pildi (foto 1) Parimaks tabelis 2 toodud reaktiividest on kadmiumkloriid, mis annab karakteersed kristallid sulfatiasooliga, eriti aga sulfadiasiiniga (fotod 2 ja 3).

Tabelisse 3 on paigutatud sulfaniilamiid-preparaatide mikrokristalloskoopilised reaktsioonid, mis katsete tulemuste põhjal osutusid paremateks. Lisaks eeltoodud reaktsioonidele nikkelkloriidi ja kadmiumkloriidiga on esitatud sulfaniilamiid-preparaatide kristallide kuju sadestamisel 0,05 n soolhappega vastavast naatriumisoolast (valmistamine kirjeldatud eespool; fotod 4, 5, 6, 7 ja 8). Eriti karakteersed kristallid tekivad disulfaaniga. Reaktsioon $SnCl_2$—HCl-ga, mis on kirjanduses esitatud [18] makroreaktsioonina, töötati ümber mikrokristalloskoopiliseks reaktsiooniks. Kasutatud sulfaniilamiid-preparaatidest osutus nimetatud reaktiiv spetsiifiliseks sulfadiasiinile (foto 9). Burkat'i [8] poolt esitatud reaktsiooni $Br_2 + KBr$-ga võib kasutada mikrokristalloskoopilise reaktsioonina sulfidiinile ja sulfaniilamiidile (fotod 10 ja 11).

Tabel 2

Sulfatiasooli ja sulfadiasiini mikrokristalloskoopilised reaktsioonid raskemetallide sooladega ammoniakaalses keskkonnas

Reaktiiv / Sulfaniil-amiid-preparaadid	$CuCl_2$	$CoCl_2$	$NiCl_2$	$ZnCl_2$	$CdCl_2$	$AgNO_3$
Sulfatiasool	Värvusetud ebakorrapärase servaga plaadikujulised kristallid ja oksataolised moodustised	Suured värvusetud lehetaolised plaadid, mis moodustavad rosette	Värvusetud õietaolised moodustised	Amorfne valge sade, mis seismisel muutub kristalseks; pulgakesed, mis osalt moodustavad rosette; prismad	Värvusetud kuusnurgad ja rosetid nendest	Värvusetud nõelad, nõeltest rosetid ja kimbud
Sulfadiasiin	—	—	—	—	Värvusetud rombid ja kuusnurgad	Värvusetud nõelad ja nõeltest rosetid

Tabel 3

Mikrokristalloskoopilisi reaktsioone sulfaniilamiid-preparaatidele

Reaktiiv	Reaktsiooni teostamine	Kristallide kuju						
		Sulfaniilamiid	Disulfaan	Sultsimiid	Sulfidiin	Sulfatiasool	Ftalasool	Sulfadiasiin
$NiCl_2$	Väike hulk preparaati lahustatakse esemeklaasil 1 tilgas konts. NH_4OH-s ja lisatakse kristallike $NiCl_2$	—	—	—	—	Värvusetud õietaolised moodustised	—	—
$CdCl_2$	Väike hulk preparaati lahustatakse esemeklaasil 1 tilgas konts. NH_4OH-s ja lisatakse kristallike $CdCl_2$	—	—	—	—	Värvusetud kuusnurkadest rosetid	—	Värvusetud rombid ja kuusnurgad
0,05n HCl	1 tilgale sulfaniilamiid-preparaadi naatriumisoolale lisatakse 1 tilk 0,05n HCl	—	Pikkadest nõeltest rosetid	—	Rombid, kuusnurgad, lühikesed prismad, rosetid	Osalt deformeerunud servadega kuusnurgad	Peentest haralistest nõeltest kerajad moodustised	Üksikud nõelad, vihud ja rosetid
$SnCl_2$—HCl 1 g $SnCl_2$ lahustatud 1 ml konts. HCl-s	Väikesele hulgale preparaadile lisatakse esemeklaasil 1 tilk reaktiivi ja segatakse klaaspulgaga aine lahustumiseni	—	—	—	—	—	—	Pulgakesed, pikad nõelad ja rosetid
Br_2 + KBr 10 ml 15% KBr-le lisatud 5 tilka Br_2	1 tilgale 0,3% soolhappelisele preparaadilahusele lisatakse 1 tilk reaktiivi	Kõverad nõelad, oksakesed ja rosetid	Amorfne sade	Amorfne sade	Peened rombikujulised kristallid	Amorfne sade	—	Amorfne sade

Kokkuvõte

1. On esitatud uus mikrokristalloskoopiline reaktsioon sulfadiasiinile ja sulfatiasoolile kadmiumkloriidiga.

2. On selgitatud disulfaani, sulfidiini, sulfatiasooli, ftalasooli ja sulfadiasiini tõestamise võimalus kristallide kuju järgi preparaadi sadestamisel soolhappega vastavast naatriumisoolast.

3. On näidatud $SnCl_2$—HCl kasutamise võimalus mikrokristalloskoopilisel reaktsioonil sulfadiasiinile.

KIRJANDUS

1. Буркат, С. Е., Журнал аналитической химии, 3, 166 (1950).
2. Шах, Ц. И., Количественное определение сульфаниламидных препаратов, 1949 (Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. фарм. наук).
3. Rosenthaler, L., Pharmaceutica Acta Helvetiae, 5/6, 112 (1946).
4. Мелькумянц, Н. Б., Фармация, 8, 33 (1941).
5. Попов, С. Ф., Фармация, 3, 37 (1947).
6. Эткин, М. М., Фармация, 11/12, 42 (1941).
7. Эткин, М. М., Труды Туркменского Госуд. Медиц. Инст., т. III, 412 (1947).
8. Буркат, С. Е., Украинский фармацевтический журнал, 1, 22 (1941), ref. Chem. Zentralblatt, 1941, II, 2589.
9. Игнатовская, А., Фармация, 4, 37 (1946).
10. Овчинников, Н. М., Вестник венерологии и дерматологии, 11, 50 (1939).
11. Буркат, С. Е., Украинский фармацевтический журнал, 2, 28 (1939), ref. Chem. Zentralblatt, 1940, II, 2783.
12. Вайсман, Г А. и Шах, Ц. И., Фармация, 3, 12 (1947).
13. Горяйнова, Н. С. и Долгина, Г. И., Фармация, 3, 19 (1947).
14. Иванов, Ф. В., Фармация, 4, 38 (1943).
15. Dodson, M. C. a. Todd, W. R., The Journal of Laboratory and Clinical Medicine, 10, 891 (1945).
16. Бурмистров, С. И., Фармация, 2, 29 (1946).
17. Rodillon, G., Journal de Pharmacie et de Chemie, 10, (1941).
18. Calamari, J. A., Hubata R. a. Roth, P. B., Ind. Eng. Chem. Analyt., 14, 534 (1942).

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВАЖНЕЙШИХ СУЛЬФАНИЛАМИДНЫХ ПРЕПАРАТОВ

А. Консин

Кафедра аналитической химии

Резюме

Целью настоящей работы являлась задача расширить возможности применения микрокристаллоскопических реакций для идентификации сульфаниламидных препаратов и найти специфические реакции для различения их.

При опытах мы применяли следующие сульфаниламидные препараты: сульфаниламид, дисульфан, сульцимид, сульфидин, сульфатиазол, фталазол и сульфадиазин, основываясь на их свойстве образовывать в воде с солями тяжелых металлов трудно растворимые соединения. Вышеупомянутые сульфаниламидные препараты растворяли в 0,1 н. $NaOH$ и действовали на них некоторыми солями тяжелых металлов ($FeCl_3$, $CrCl_3$, $MnCl_2$, $SnCl_2$, $CdCl_2$, $Bi(NO_3)_3$, $AgNO_3$). Дисульфан, сульфидин и сульфадиазин дали со всеми названными реактивами кристаллические осадки (за исключением сульфадиазина, который с $MnCl_2$ и $CdCl_2$ дал аморфные осадки); сульфаниламид дал кристаллические осадки только с $AgNO_3$ и $FeCl_3$; сульцимид с $AgNO_3$; сульфатиазол с $FeCl_3$, $CrCl_3$ и $Bi(NO_3)_3$; фталазол с $SnCl_2$ и $Bi(NO_3)_3$.

На сульфаниламидные препараты, растворяемые в конц. NH_4OH, действовали следующими солями тяжелых металлов: $CuCl_2$, $CoCl_2$, $NiCl_2$, $ZnCl_2$, $CdCl_2$ и $AgNO_3$. Сульфатиазол дал кристаллические осадки со всеми вышеуказанными солями тяжелых металлов; сульфадиазин только с $CdCl_2$ и $AgNO_3$. Сульфаниламид, дисульфан, сульцимид, сульфидин и фталазол никакого осадка не дали.

Наиболее эффективной из применяемых солей тяжелых металлов является $CdCl_2$, которая дает характерные кристаллы с растворенными в конц. NH_4OH сульфатиазолом и сульфадиазином.

Кроме того, в работе выяснена возможность определения дисульфана, сульфидина, сульфатиазола, фталазола и сульфадиазина по форме кристаллов с помощью осаждения препаратов соляной кислотой из соответственных солей натрия. Особенно характерные кристаллы получались с дисульфаном.

Приведенная в литературе макрореакция с $SnCl_2$—HCl разработана в микрокристаллоскопическую, которая оказалась специфической из применяемых препаратов для сульфадиазина.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Труды естественно-математического факультета.

На эстонском и русском языках.

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярну маантеэ 10.

*

Toimetaja A. Vaga.

Tehniline toimetaja H. Kohu.

Korrektorid M. Juske ja J. Rammi.

Ladumisele antud 20. XII 1954. Trükkimisele antud 8. VI 1955. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 15,25 + 1 lisaleht. Arvutuspoognaid 13,84. Trükiarv 1000. MB-10956. Tellimise nr. 4343. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Vallikraavi 4.

Hind rbl. 10.15

HANS HEIDEMANNI NIM. TRK.
Tartu, Vallikraavi 4

KONTROLL NR. 1

Raamatus leiduva defekti korral palume raamat tagastada ümbervahetamiseks ühes selle etiketiga.

Trükivigu — Опечатки

Lk. Стр.	Rida Строка	On trükitud Напечатано	Peab olema Должно быть
160	16 alt снизу	$\delta_n(\Theta)$	$\delta_{nk}(\Theta)$
160	15 alt снизу	$g_n(\Theta)$	$g_k(\Theta)$
169	3 ülalt сверху	$\left\|\frac{\Theta^k}{p_k}\right\|$	$\left\|\frac{P_n - P_k}{p_k}\Theta^k\right\|$
183	8 ülalt сверху	$w^{n'}$	$w_n{}'$
192	9 alt снизу	$(\mathfrak{A}_O, B$	$(\mathfrak{A}_O, B)$
197	2 alt снизу	$\gamma_n a_\nu + \sum_k \xi_{nk} a_{k\nu} = 0$	$\gamma_n a_\nu + \sum_k \xi_{nk} a_{k\nu} = \delta_{n\nu}$
200	16 ülalt сверху	$\sum_k \|\xi_{nk}\|$	$\sum_k \|\eta_{nk}\|$
217	7 alt снизу	$P_\nu \Delta \frac{(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu)}{p_\nu}$	$P_\nu \Delta \frac{\Delta(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu)}{p_\nu}$

Tell. 4343.