Tartu Riiklik Ülikool
Teoreetilise mehhaanika kateeder

A.Eero

ASTAATILISE TASAKAALU TEOORIA JA FERDINAND MINDINGI OSA SELLE ALUSTE RAJAMISEL

Diplomitöö

Juhendaja: prof. G.Rägo

Tartu 1956

Sisukord

Sissejuhatuseks

Kui paralleelsete tungide keskpunkti mõiste peitub eos juba Archimedese poolt antud kangi seaduses, siis on üldise tungide süsteemi keskpunkti mõiste loodud alles XIX sajandi kolmekümnendates aastates. Tungide süsteemi keskpunkti üldise mõiste isaks on Ferdinand Minding. Mindingi mõte on olnud viljakas: Mindingi teoreem tungide süsteemi keskpunkti kohta moodustab astaatilise tasakaalu teooria aluse. F.Mindingiga algab Tartu ülikooli rakendusmatemaatikute suguvõsa. Juba see üksinda õigustab peatumist tema uurimustel. Märgime, et käesoleva 1956. aasta algul möödus poolteistsada aastat F.Mindingi sünniajast. Ka seegi asjaolu annab põhjust tema uurimuste üksikasjalikuks analüüsimiseks.

Töös kasutatud sümboolika

Vektor tähisena on kasutatud . Summeerimismärgina kasutame Timerdingi[x)] eeskujul Gaussi poolt vähimruutude meetodi esitamisel tarvitatud püstsulgusid [ ] . Sellise summa tähistusviisi puhul muutuvad ka staatika valemid tunduvalt ülevaatlikumateks, kui $\sum$ -sümboli kasutamisel.

Gaussi summasümboleis tungide süsteemi resultandi komponendid avalduvad kujul

$$R_x = [X] \qquad R_y = [Y] \qquad R_z = [Z]$$

resulteeriva momendi komponendid aga kujul

$$L = [Zy - Yz] = [Zy] - [Yz]$$
$$M = [Xz - Zx] = [Xz] - [Zx]$$
$$N = [Yx - Xy] = [Yx] - [Xy]$$

Siin x , y , z tähendavad resultandi mõjusirge jooksva punkti koordinaate. Kirjutiste lühendamise otstarbel märgime sirgete sihikoosinusi töö lõpuosas α, β, γ α_1, β_1, γ_1 jne.

---

x) Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig, 1908.

I F.Mindingi eluloo lühiülevaade

Matemaatika professoritest, kes on töötanud Tartu ülikoolis selle enam kui 150-aastase tegevuse ajal ja on jätnud sügavaid jälgi kodumaise teaduse arengusse, tuleb esikohal nimetada Ferdinand Mindingit. Väärib märkimist, et F.Minding oli ajaliselt esimene Tartu ülikooli rakendusmatemaatika professor.

Ernst Ferdinand Adolph Minding sündis 11. jaanuaril 1806.a. Kališi linnas, kus ta isa oli kohtunikuks. Keskhariduse sai F.Minding Hirschbergi gümnaasiumis, mille lõpetas 1824. aastal, saades kõigis ainetes hinde "väga hea". Juba gümnaasiumis ilmnesid ta suured võimed vanades keeltes ja gümnaasiumi direktor soovitas talle soojalt jätkata õpinguid ülikoolis klassikalise filoloogia liinis. Olid ju eriteadlased vanade keelte alal Saksamaal tol ajal eriti suures aus. Minding astus Halle (Halle Saale ääres) ülikooli, kus kuulas loenguid humanitaarteaduste alalt. Varsti läks ta aga üle Berliini ülikooli. Ta kuulas seal klassikalise filoloogia, ajaloo ja filosoofia loenguid. Mindingi filosoofiaõpetajaks oli Hegel, ajalooõpetajaks - Ranke, kumbki ülemaailmselt kuulus oma ala esindaja. Ainult n.ö. muuseas kuulas Minding ka mõningaid füüsika ja keemia ning ühte staatika kursust. See staatika kursus oli ainukeseks ülikoolis kuulatud kursuseks matemaatika ja mehhaanika alalt, s.t. nende teaduste alalt, milles Minding hiljem nii edukalt loovalt töötas ning oma uurimustega üldise tunnustuse võitis. Hariduselt klassikaline filoloog ja ajaloolane, oli ta matemaatikas vaid iseõppijaks.

1827.a. Minding katkestas õpingud ülikoolis ja oli lühikest aega gümnaasiumiõpetajaks, õpetades matemaatikat, ajalugu ja emakeelt. 1829.a. kaitses ta Halles oma doktori dissertatsiooni kahekordsete integraalide ligikaudse arvutamise alalt. 1831.a. siirdus ta tööle Berliini ülikooli matemaatika dotsendi kohale. Tema lähimaks töökaaslaseks oli hiljem ülemaailmse kuulsuse omandanud matemaatik Peter Gustav Lejeune-Dirichlet - pärastine Gaussi järglane Göttingenis. Noorele Dirichlet'ile ja Mindingile sai osaks olla pioneerideks sel ajal alles uute matemaatikaharude õpetamisel Berliini ülikoolis: Mindingi ja Dirichlet'ga algab Berliini ülikoolis matemaatika alal võimas areng, mille tulemusena Berliini ülikool ka matemaatika alal jõudis XIX sajandi teisel poolel maailma esimeste ülikoolide hulka. Suureks õnneks Mindingile oli ka see, et juba esimesi aastaid Berliinis töötades sai ta lähemalt tuttavaks suure ja universaalse teadlasega - Alexander Humboldt'iga.1834.a. lõpetas Minding uurimuse tungide süsteemi keskpunkti olemasolu kohta. Humboldt, keda ka prantsuse teadlased väga austasid, esitas Mindingi töö Pariisi Teaduste Akadeemiale. Mindingi töö hindamiseks moodustatud komisjon andis selle kohta väga tunnustava otsuse, millega Mindingi nimi sai korraga tuttavaks kogu maailma teadlastele.

On huvitav märkida, et alates 1834. aastast töötas Minding , Berliini ülikoolis tööd katkestamata, ka veel kõrgema matemaatika ja teoreetilise mehhaanika dotsendina Berliini Kõrgemas Ehituskoolis (Allgemeine Bauschule, hiljem Bauacademie). 1843. aasta alguses Venemaa riigivalitsus tegi Mindingile ettepaneku asuda tööle Tartu ülikooli matemaatika professorina. Veel sama aasta sügisel asus Minding oma uuele töökohale. Just enne seda lahutati puht- ja rakendusmatemaatika kateeder kaheks iseseisvaks kateedriks. Puhta matemaatika kateedri juhatajaks määrati Senff, rakendusmatemaatika kateedri juhatajaks - Minding. Seega sai Minding Tartu ülikooli rakendusmatemaatikute esiisaks.

Berliini ülikoolis töötades valmis Mindingil kaheköiteline diferentsiaal- ja integraalarvutuse ja teoreetilise mehhaanika õpik, ilmunud aastail 1837-1838[x]. Avaldatud olid juba ka Mindingi silma-

---

[x] Ferd. Minding, Handbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Berlin, 1836-38.

paistvad tööd differentsiaalgeomeetria alalt. Seega Tartusse tuli Minding juba üldtunnustatud õpetlasena. See võimaldas talle juba Tartus töötamise esimestel aastatel sõlmida tihedad teaduslikud sidemed Peterburi Teaduste Akadeemia matemaatikutega. Eriti sõbralik vahekord kujunes tal akadeemik Bunjakovskiga.

1861. aastal anti Mindingile töö eest "Kahe muutujaga esimest järku differentsiaalvõrrandite integreerimisest" Ostrogradski ettepanekul Peterburi Teaduste Akadeemia poolt Demidovi nimeline preemia. 1864.a. valiti Minding Peterburi Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks ja 1879.a. sama Akadeemia auliikmeks. Minding suri 13. mail 1885. aastal. Ta teaduslikkude tööde arv ulatub 60-le. Mindingi tööde temaatika on väga mitmekülgne: töid leidub peaaegu kõigilt matemaatilise analüüsi ja teoreetilise mehhaanika aladelt. Kuid eriti hinnatavad on Mindingi uurimused pindade teooria alalt.

Paljude Mindingi poolt käsitletud teoreetilise mehhaanika küsimuste hulgas omab tähtsa koha tungide keskpunkti mõiste üldistamine mitteparalleelsete tungide juhule. Mindingi teoreem tungide süsteemi keskpunkti kohta moodustab astaatilise tasakaalu teooria aluse. Mindingi tööde jätkajatest astaatilise tasakaalu alal tuleb eelkõige nimetada kuulsat prantsuse geomeetrit Gaston Darboux'd, kelle töö sel alal ilmus Mindingi omast 36 aastat hiljem.

II Astaatilise tasakaalu mõiste

Astaatilise tasakaalu mõiste selgitamiseks vaatleme kõigepealt üldtuntud ülesannet paralleelsete tungide süsteemi taandamise kohta.

Olgu kindlale kehale punktides $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, ... , $P_n(x_n, y_n, z_n)$ rakendatud paralleelsed tungid $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ... , $\bar{F}_n$. Olgu teada 1) tungide suurused F_1 , F_2 , ... , F_n ühes kokkuleppega nende märgi suhtes; 2) nurgad α , β , γ tungide positiivse suuna ja koordinaattelgede vahel. Et tungid on paralleelsed, siis kõikide antud tungide jaoks need nurgad on samad.

Tõestame, et neid tunge võib alati asendada ühe ainsa tungiga.

Et antud paralleelsete tungide süsteem oleks ekvivalentne ühe tungiga $\bar{R} \neq 0$, peavad olema rahuldatud järgmised tingimused resultandi komponentide kohta:

$$\left.\begin{aligned} [X] &= [F\cos\alpha] = [F]\cos\alpha \\ [Y] &= [F\cos\beta] = [F]\cos\beta \\ [Z] &= [F\cos\gamma] = [F]\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ja järgmised tingimused resultandi momendi komponentide kohta:

$$\left.\begin{aligned} b[Z] - c[Y] &= [yF\cos\gamma - zF\cos\beta] \\ c[X] - a[Z] &= [zF\cos\alpha - xF\cos\gamma] \\ a[Y] - b[X] &= [xF\cos\beta - yF\cos\alpha] \end{aligned}\right\}$$

ehk

$$\left.\begin{aligned} b[Z] - c[Y] &= [Fy]\cos\gamma - [Fz]\cos\beta \\ c[X] - a[Z] &= [Fz]\cos\alpha - [Fx]\cos\gamma \\ a[Y] - b[X] &= [Fx]\cos\beta - [Fy]\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

kus a , b , c on resultandi $\bar{R}$ rakenduspunkti koordinaadid.

Valemist (1) saame

$$R^2 = [X]^2 + [Y]^2 + [Z]^2 = [F]^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = [F]^2$$

ehk

$$R = [F] \tag{3}$$

ja edasi

$$\left.\begin{aligned} \cos(R,x) &= \cos\alpha \\ \cos(R,y) &= \cos\beta \\ \cos(R,z) &= \cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nagu näitavad valemid (3) ja (4), paralleelsete tungide süsteemi resultant on paralleelne antud tungidega. Resultandi suurus on võrdne antud tungide algebralise summaga, kusjuures resultant on nende tungidega samasuunaline, mille aritmeetiline summa on suurem.

Võrrandid (2) määravad selle sirge, milles mõjub resultant . Tõepoolest, arvestades võrrandit (3), saame võrranditele (2) anda järgmise kuju

$$\left.\begin{aligned} (bR-[yF])\cos\gamma &= (cR-[zF])\cos\beta \\ (cR-[zF])\cos\alpha &= (aR-[xF])\cos\gamma \\ (aR-[xF])\cos\beta &= (bR-[yF])\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

Siit aga järeldub, et

$$\frac{aR-[xF]}{\cos\alpha} = \frac{bR-[yF]}{\cos\beta} = \frac{cR-[zF]}{\cos\gamma}$$

ehk, teisiti kujutatult,

$$\frac{a-\frac{[xF]}{R}}{\cos\alpha} = \frac{b-\frac{[yF]}{R}}{\cos\beta} = \frac{c-\frac{[zF]}{R}}{\cos\gamma} \tag{5}$$

Kui arve a, b ja c tõlgendada jooksvate koordinaatidena, siis võrrandid (5) kujutavad sirget ruumis. Nagu näha, see sirge läbib punkti koordinaatidega

$$\frac{[xF]}{R}, \quad \frac{[yF]}{R}, \quad \frac{[zF]}{R}$$

ja seda olenemata sellest, milliseid väärtusi omavad α, β, γ. Sellest järeldub, et kui tungide suurused ja rakenduspunktid jätame endisteks ja muudame ainult tungide ühist sihti, siis süsteemi resultanttung pöördub ühiselt antud tungide süsteemiga, läbides püsivalt üht ja sama punkti koordinaatidega

$$x_c = \frac{[xF]}{R}, \quad y_c = \frac{[yF]}{R}, \quad z_c = \frac{[zF]}{R}. \qquad (6)$$

Kui eeldada, et süsteemi resultanttung on rakendatud just sellesse punkti, siis kõikide tungide pööramisel ühe ja sama nurga võrra nende rakenduspunktide ümber ka resultant pöördub sama nurga võrra oma rakenduspunkti ümber. Punkti C koordinaatidega (6) nimetatakse paralleelsete tungide keskpunktiks. Kui eeldada, et koordinaatidesüsteem $Oxyz$ on muutumatult seotud kindla kehaga, siis selle asemel, et pöörata kõiki tunge nende rakenduspunktide ümber ühe ja sama nurga võrra, võime pöörata seda keha vastassuunas sama nurga võrra ümber punkti C. Ka sel puhul jäävad eelpooltuletatud valemid kehtivaks ja antud paralleelsete tungide resultant läheb keha igasuguse asendi puhul läbi punkti C. Kui keha kinnitada punktis C nii, et teda saaks pöörata punkti C ümber, siis punkti C reaktsioontung tasakaalustab resultandi $\bar{R}$. Seega meie juhul kindel keha jääb tungide süsteemi mõjul tasakaalu, hoolimata sellest, kuidas me keha ka ei pööraks. Sellist tasakaalu nimetatakse astaatiliseks tasakaaluks.

Seni oli meil tegemist paralleelsete tungide süsteemiga. Üldistades öeldut mistahes tungide süsteemile ütleme, et tungide tasakaalu nimetatakse astaatiliseks, kui tasakaal jääb edasi püsima ka siis veel, kui keha, millele tungid rakendatud, pööratakse mistahes nurga võrra.

Lihtsaimaks astaatilise tasakaalu näiteks on ühte punkti rakendatud tungide tasakaal.

Astaatilise tasakaalu küsimuses kindla keha translatoorne liikumine mingit tähtsust ei oma, kuna translatoorsel liikumisel tungide ja nende resultandi vastastikune asetumine ei muutu. Järelikult, kui tungide süsteem oli tasakaalus keha paigalolekul, siis keha translatoorsel liikumisel jääb tasakaal püsima, kui aga tungide suurused, suunad ja rakenduspunktid jäävad endisteks. Niisiis on translatoorse liikumise suhtes kindla keha igasugune tasakaal astaatiline. Seepärast tuleb astaatilise tasakaalu teoorias arvestada vaid kindla keha pöörlevat liikumist.

Et tasakaalus olev tungide süsteem võib pärast tema pööramist mitte enam tasakaalu jääda, näitab juba järgmine lihtne näide:

Mõjugu kehale piki sirget AB kaks tungi $\bar{P}$ ja $\bar{Q}$, mis suuruselt võrdsed ja suunalt vastupidised. Teame, et sel puhul tungid on tasakaalus. Kui aga keha pöörata ümber mingi telje, mis pole paralleelne sirgega AB, siis need tungid, kuigi nende rakenduspunktid jäävad endisteks, moodustavad tungide paari ja tungid pole enam tasakaalus: keha hakkab pöörlema tekkinud momendi mõjul.

Kui tungid mõjuvad ühes ja samas tasapinnas või on paralleelsed mingi tasapinnaga ja kui keha pöörata tasapinnaga risti oleva telje ümber, siis uues asendis kõik tungid esinevad pööratuna oma rakenduspunktide ümber ühe ja sama nurga võrra.

Üldjuhul, kui tungid on ruumis asetatud meelevaldselt, keha pööramisel kõik tungid pöörduvad erineva nurga võrra. Näiteks tung, mis on paralleelne pöörlemisteljega, säilitab oma sihi, pöörlemisteljega risti olev tung aga pöördub kõige suurema nurga võrra.

III Astaatiline tasakaal tasapinnalise tungide süsteemi puhul

1. Astaatiline tsenter

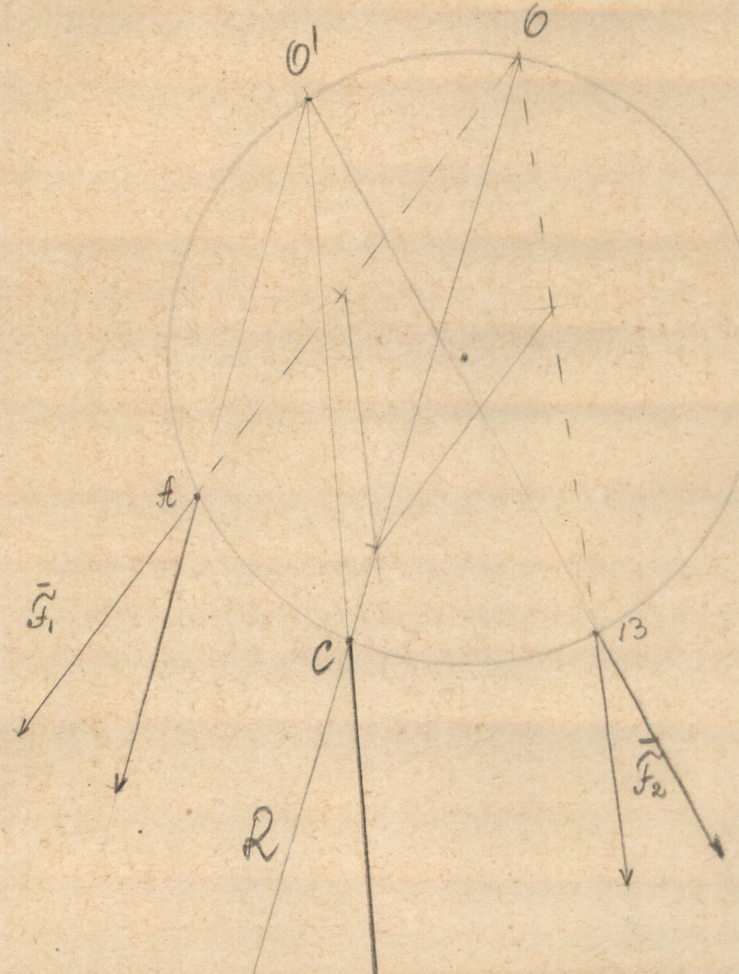
Oma edaspidiste arutluste lähtekohaks võtame teoreemi:

Tasapinnaliste tungide pööramisel nende rakenduspunktide ümber ühe ja sama nurga võrra ning ühes ja samas suunas (päri kellaosuti liikumist või vastu sellele) nende tungide resultandi mõjusirge läbib ikka ühte ja sama punkti.

Tõestame teoreemi algul kahe tungi $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ kohta. Tungide $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ rakenduspunktid olgu vastavalt A ja B (joonis 1), tungide mõjusirgete lõikepunkt O. Läbi punktide A, B ja O joonestame ringjoone. Kui nüüd tunge $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ pöörata nende rakenduspunktide ümber ühe ja sama nurga võrra, siis igas tungide $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ asendis tungide mõjusirgete lõikepunkt asub samal ringjoonel, kuna ju nurk AOB tungide mõjusirgete vahel suuruselt ei muutunud. Tungide $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ resultant $\overline{R}$ jaotab nurga $\alpha = \sphericalangle AOB$ osadeks α_1 ja α_2 nii, et $\frac{\overline{F}_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\overline{F}_2}{\sin\alpha_1}$. See suhe aga ei muutu tungide pööramisel ühe ja sama nurga võrra. Sellest järeldub: kui tungide $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ resultandi mõjusirge lõikab ringjoont punktis C, siis tungide pööramisel ühe ja sama nurga võrra nurk AOC ei muutu. Et aga tungide pööramisel nurga AOC tipp O liigub ringjoont mööda, siis resultandi mõjusirge läheb tungide igas asendis läbi punkti C. Kokku võttes:

Kui antud tungide $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ resultandi rakenduspunktiks valida punkt C, siis tungide pööramisel punktide A ja B ümber resultant pöördub punkti C ümber sama nurga võrra.

Olgu nüüd tegemist kolme tungiga $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$. Olgu tungide $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ resultant $\overline{R}'$ rakenduspunktiga C'. Liidame tungi $\overline{R}'$ tungiga $\overline{F}_3$ ja leiame punkti C'', mille ümber pöördub $\overline{R}'$ ja $\overline{F}_3$ resultant $\overline{R}''$. Nelja tungi $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ puhul liidame edasi $\overline{R}''$ ja $\overline{F}_4$



Joonis nr. 1.

jne. Nii leiame lõpuks antud tungide $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ resultandi $\overline{R}$ rakenduspunkti C. Saadud punkti C nimetatakse tasapinnalise tungide süsteemi astaatiliseks tsentriks.

Kui punkti C rakendada tung $\overline{R}_1 = -(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_n)$, siis see tung tasakaalustab antud tungide süsteemi. Tasakaal jääb püsima ka siis, kui tunge pööratakse mõne nurga võrra nende rakenduspunktide ümber: tasakaal on astaatiline.

2. Astaatilise tsentri koordinaadid
Viriaal

Võtame tungide mõjumistasapinna xy -tasapinnaks. Et eelduste kohaselt tungide $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ rakenduspunktid ei muutu (muutub vaid tungide siht), siis iga tung $\overline{F}$ on määratud oma nelja koordinaadiga $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, x, y, millised loeme antuks. Astaatilise tsentri koordinaadid tähistame x_0, y_0. Resultandi $\overline{R}$ projektsioonid koordinaattelgedele tähistame vastavalt R_x ja R_y:

$$R_x = [\mathcal{X}] \qquad R_y = [\mathcal{Y}]$$

Tungi $\overline{F}$ moment z -telje suhtes on

$$x\mathcal{Y} - y\mathcal{X}$$

ja resulteeriv moment sama telje suhtes

$$N = [x\mathcal{Y} - y\mathcal{X}]$$

Et resultandi moment on võrdne üksiktungide momentide summaga, siis resultandi mõjusirge iga punkti koordinaadid (x, y) peavad rahuldama võrrandit

$$x R_y - y R_x - N = 0 \qquad (7)$$

See võrdus ongi siis resultandi mõjusirge võrrand. Mõistagi peavad ka astaatilise tsentri koordinaadid rahuldama seda võrrandit, seepärast

$$x_0 R_y - y_0 R_x - N = 0 \qquad (8)$$

Sellele võrrandile saab anda teise kuju. Et sellele välja jõuda, arutleme nii:

Tähistame tungi $\overline{\mathcal{F}}$ ja x-telje vahelise nurga α-ga. Pöörame seda tungi tema rakenduspunkti ümber nurga β võrra. Siis uued projektsioonid koordinaattelgedele avalduvad kujul:

$$\mathcal{X}' = \mathcal{F}\cos(\alpha+\beta) = \mathcal{X}\cos\beta - \mathcal{Y}\sin\beta$$
$$\mathcal{Y}' = \mathcal{F}\sin(\alpha+\beta) = \mathcal{X}\sin\beta + \mathcal{Y}\cos\beta$$

ja uus moment kujul

$$\mathcal{N}' = x\mathcal{Y}' - y\mathcal{X}' = (x\mathcal{Y} - y\mathcal{X})\cos\beta - (x\mathcal{X} + y\mathcal{Y})\sin\beta$$

Järelikult

$$\left.\begin{aligned} R_x' &= [\mathcal{X}'] = R_x\cos\beta - R_y\sin\beta \\ R_y' &= [\mathcal{Y}'] = R_x\sin\beta + R_y\cos\beta \\ \mathcal{N}' &= [\mathcal{N}] = \mathcal{N}\cos\beta + \mathcal{V}\sin\beta \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

kus

$$\mathcal{V} = [x\mathcal{X} + y\mathcal{Y}] \qquad (10)$$

Suurust $\mathcal{V}$ nimetatakse antud tungide süsteemi viriaaliks[x]. Resultandi mõjusirge võrrandi võime seega esitada kujul

$$x R_y' - y R_x' - \mathcal{N}' = 0$$

ehk kujul

$$(x R_y - y R_x - \mathcal{N})\cos\beta + (x R_x + y R_y - \mathcal{V})\sin\beta = 0$$

Et astaatilise tsentri koordinaadid peavad rahuldama seda võrrandit, siis

$$(x_0 R_y - y_0 R_x - \mathcal{N})\cos\beta + (x_0 R_x + y_0 R_y - \mathcal{V})\sin\beta = 0$$

Vastavalt võrrandile (8)

$$x_0 R_y - y_0 R_x - \mathcal{N} = 0,$$

seega

$$(x_0 R_x + y_0 R_y - \mathcal{V})\sin\beta = 0$$

Kuna nurk β on vabalt valitav, siis

$$x_0 R_x + y_0 R_y - \mathcal{V} = 0 \qquad (11)$$

---

[x] Mõiste "viriaal" võeti tarvitusele alles R.Clausiuse poolt termodünaamikas. See mõiste osutub aga sobivaks töövahendiks ka kõnesoleva staatika probleemi käsitlemisel.

Nagu näeme, saab astaatilise tsentri koordinaadid määrata võrrandisüsteemist

$$x_0 R_y - y_0 R_x - \mathcal{N} = 0$$
$$x_0 R_x + y_0 R_y - \mathcal{V} = 0$$

Selle süsteemi lahendid on

$$x_0 = \frac{\mathcal{V} R_x + \mathcal{N} R_y}{R^2} \quad \text{ja} \quad y_0 = \frac{\mathcal{V} R_y - \mathcal{N} R_x}{R^2} \tag{12}$$

Viriaali $\mathcal{V}$ suurus, nagu momendi $\mathcal{N}$ suuruski, oleneb koordinaatide alguse asendist. Kui koordinaatide alguseks valida astaatiline tsenter, siis võrranditest (8) ja (11) järeldub, et $\mathcal{N} = 0$ ja $\mathcal{V} = 0$. Niisiis:

Tungide tasapinnal leidub ikka niisugune punkt (astaatiline tsenter), mille suhtes antud tungide moment ja viriaal jäävad püsivalt võrdseks nulliga, kui tungide süsteemi pöörata ükspuha missuguse nurga võrra.

Viriaalile saab anda järgmise geomeetrilise tõlgenduse: kui koordinaatide algus tähistada O-ga ja tungi $\bar{F}$ rakenduspunkt A-ga, siis

$$x\mathcal{X} + y\mathcal{Y} = OA \cdot F \cos(\widehat{OA, F})$$

ja viriaal on selliste korrutiste summa.

Juhul, kui tungide süsteemi resultant $\bar{R}' = 0$ ja tungide süsteem pole tasakaalus, siis see tungide süsteem on ekvivalentne tungipaariga. Valemist (12) järeldub, et sel puhul astaatiline tsenter asub lõpmatuses. Valemist

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cos\beta + \mathcal{V} \sin\beta$$

nähtub, et kui antud tunge pöörata nurga β võrra, kusjuures

$$\tan\beta = -\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{V}},$$

siis antud tungide süsteem on tasakaalus. Tungide süsteem on tasakaalus ka sel juhul, kui nii $\bar{R}' = 0$, kui ka $\mathcal{N}' = 0$. Siit saame järeldada ka pöördväite kehtivust: kui esialgne tungide süsteem oli tasakaalus ($\bar{R}=0$, $\mathcal{N}=0$), siis tungide pööramisel mingi nurga β võrra tungide süsteem on ekvivalentne tungipaariga, mille moment

$$\mathcal{N}' = \mathcal{V}\sin\beta$$

Saadud valemist järeldub, et sel juhul viriaal on võrdne sellise tungipaari momendiga, mis tekib tasakaalus olevate tungide pööramisel täisnurga võrra.

Illustreerivaid näiteid

1. Tõestada, et kahe paralleelse tungi astaatiline tsenter asub nende tungide rakenduspunkte ühendaval sirgel.

Olgu antud kaks paralleelset tungi $\bar{F}_1$ rakenduspunktiga (x_1, y_1) ja $\bar{F}_2$ rakenduspunktiga (x_2, y_2).

Tungide rakenduspunkte ühendava sirge võrrand on

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x & y_1 - y \end{vmatrix} = 0$$

ehk, pärast lihtsustamist

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Eespool tõestasime, et paralleelsete tungide astaatilise tsentri koordinaadid avalduvad kujul

$$x_c = \frac{[Fx]}{[F]} \qquad y_c = \frac{[Fy]}{[F]} .$$

Käesoleval juhul

$$x_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} \qquad y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}$$

Kui astaatiline tsenter peaks asuma antud tungide rakenduspunkte ühendaval sirgel, siis astaatilise tsentri koordinaadid peavad rahuldama selle sirge võrrandit. Kontrollime seda.

$$(y_1 - y_2)\frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} + (x_2 - x_1)\frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} + x_1 y_2 - x_2 y_1 =$$

$$= \frac{\mathcal{F}_1 x_1 y_1 + \mathcal{F}_2 x_2 y_1 - \mathcal{F}_1 x_1 y_2 - \mathcal{F}_2 x_2 y_2 + \mathcal{F}_1 x_2 y_2 + \mathcal{F}_2 x_2 y_2 - \mathcal{F}_1 x_1 y_1}{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2} +$$

$$+ \frac{- \mathcal{F}_2 x_1 y_2 + \mathcal{F}_1 x_1 y_2 - \mathcal{F}_1 x_2 y_1 + \mathcal{F}_2 x_1 y_2 - \mathcal{F}_2 x_2 y_1}{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2} = 0$$

Sellega oleme tõestanud, et kahe paralleelse tungi astaatiline tsenter tõepoolest asub nende tungide rakenduspunkte ühendaval sirgel.

2. Tõestada, et ühel tasapinnal asuva ja tasakaalus oleva tungide süsteemi astaatiline tsenter on määramatu.

Tasakaalu korral on $[\bar{\mathcal{F}}]$ ja $\bar{\mathcal{N}}$ võrdsed nulliga. Seega on $[\mathcal{X}]$, $[\mathcal{Y}]$ ja $\mathcal{N} = 0$. Sel juhul valemid

$$x_0 = \frac{\mathcal{V}[\mathcal{X}] + \mathcal{N}[\mathcal{Y}]}{[\mathcal{F}]^2} \qquad y_0 = \frac{\mathcal{V}[\mathcal{Y}] - \mathcal{N}[\mathcal{X}]}{[\mathcal{F}]^2}$$

annavad

$$x_0 = \frac{0}{0} \qquad y_0 = \frac{0}{0}.$$

IV Astaatilise tasakaalu tingimused

Oletame, et kindlale kehale on punktides $\mathcal{P}(x,y,z)$ (kus indeksid on jäetud kirjutamata) rakendatud ruumiline tungide süsteem. Üldjuhul see süsteem on asendatav ühe resultanttungiga $[\bar{\mathcal{F}}]$ ja tungipaariga, mille moment on $[\bar{r}\times\bar{\mathcal{F}}]$, kus $\bar{r}$ tähendab punkti $\mathcal{P}$ kohavektorit. Keha on tasakaalus (üldjuhul, muidugi mitte astaatilises tasakaalus) siis ja ainult siis, kui nii resultant kui ka tungipaari moment on võrdsed nulliga. Kirjutades neid tingimusi vektorite $\bar{r}$ ja $\bar{\mathcal{F}}$ komponentides, saame

$$\left.\begin{aligned}[X]&=0\\ [Y]&=0\\ [Z]&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{ja} \quad \begin{aligned}[Zy-Yz]&=0\\ [Xz-Zx]&=0\\ [Yx-Xy]&=0\end{aligned}$$

ehk, teisel kujul

$$\left.\begin{aligned}[X]&=0\\ [Y]&=0\\ [Z]&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{ja} \quad \left.\begin{aligned}[Zy]-[Yz]&=0\\ [Xz]-[Zx]&=0\\ [Yx]-[Xy]&=0\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Leiame nüüd lisatingimused, mis vajalikud selleks, et keha jääks tasakaalu ka siis, kui keha pöörata mingi telje ümber mistahes nurga võrra.

Pöörame algul keha x-telje ümber mistahes nurga α võrra. Olgu kehaga kaasaliikuv koordinaadistik $y'Oz'$. Siis tungide projektsioonid x-teljele ei muutu, projektsioonid telgedele y' ja z' aga avalduvad kujul

$$\left.\begin{aligned}Y'&=Y\cos\alpha+Z\sin\alpha\\ Z'&=-Y\sin\alpha+Z\cos\alpha\end{aligned}\right\}$$

Kui eeldada, et tungide rakenduspunktid pöörduvad kehaga kaasa, siis nende punktide koordinaadid ei muutu. Seega peale keha pööret x-telje ümber võtavad tasakaaluvõrrandid järgmise kuju:

$$\begin{aligned} &[X'] = 0 \qquad && [Z'y] - [Y'z] = 0 \\ &[Y'] = 0 && [X'z] - [Z'x] = 0 \\ &[Z'] = 0 && [Y'x] - [X'y] = 0 \end{aligned}\Bigg\}$$

ehk, teisiti kirjutatult,

$$\left.\begin{aligned} &[X] = 0 \\ &[Y\cos\alpha + Z\sin\alpha] = 0 \\ &[-Y\sin\alpha + Z\cos\alpha] = 0 \end{aligned}\right\} \text{ ehk } \left.\begin{aligned} &[X] = 0 \\ &[Y]\cos\alpha + [Z]\sin\alpha = 0 \\ -&[Y]\sin\alpha + [Z]\cos\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

ja

$$\left.\begin{aligned} &(-[Yy]-[Zz])\sin\alpha + ([Zy]-[Yz])\cos\alpha = 0 \\ &[Xz] + [Yx]\sin\alpha - [Zx]\cos\alpha = 0 \\ &[Yx]\cos\alpha + [Zx]\sin\alpha - [Xy] = 0 \end{aligned}\right\}$$

Arvestades võrdusi

$$[Zy] - [Yz] = 0, \quad [Xz] - [Zx] = 0 \text{ ja } [Yx] - [Xy] = 0$$

näeme, et viimast võrrandite kolmikut saab kirjutada kujul

$$\left.\begin{aligned} &([Yy] + [Zz])\sin\alpha = 0 \\ &[Zx](1-\cos\alpha) + [Yx]\sin\alpha = 0 \\ &[Yx](1-\cos\alpha) + [Zx]\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Et eelduse järgi $[X]=0$, $[Y]=0$ ja $[Z]=0$, siis kolm võrrandit (14) on ~~rakendatud~~ rahuldatud igasuguse α väärtuse puhul. Et ka järgmised kolm võrrandit (15) oleksid rahuldatud igasuguse α puhul, selleks peavad olema täidetud tingimused

1°. $[Yy] + [Zz] = 0$

ja 2°. $\begin{vmatrix} [Zx] & [Yx] \\ -[Yx] & [Zx] \end{vmatrix} = 0$

Determinandi arendamine annab

$$[Zx]^2 + [Yx]^2 = 0$$

kust

$$[Zx] = 0, \quad [Yx] = 0.$$

Nii siis, et tasakaal jääks püsima igasugusel keha pöördel ümber x -telje, peavad olema täidetud tingimused:

$$[Z_x]=0 \qquad [Y_x]=0 \qquad [Y_y]+[Z_z]=0$$

Kui keha pöörata y -telje ümber, leiame analoogse tuletusviisiga tingimused

$$[X_y]=0 \qquad [Z_y]=0 \qquad [Z_z]+[X_x]=0$$

ja kui keha pöörata z -telje ümber, tingimused

$$[Y_z]=0 \qquad [X_z]=0 \qquad [X_x]+[Y_y]=0$$

Tingimustest

$$[X_x]+[Y_y]=0, \ [Y_y]+[Z_z]=0, \ [Z_z]+[X_x]=0$$

järeldub, et

$$[X_x]+[Y_y]+[Z_z]=0$$

Seega, liikmeti lahutamisel,

$$[X_x]=0, \ [Y_y]=0, \ [Z_z]=0.$$

D'Alembert'i lause järgi keha pööramine ümber antud punkti taandub ikka pööramisele seda punkti läbiva telje ümber. Edasi on teada, et kindla keha pööramist antud punkti O läbiva telje ümber võib alati asendada pööramisega kolme üksteisega risti oleva ja antud punkti O läbiva telje ümber. Seepärast, kui kindla keha pööramisel koordinaattelgede x, y, z ümber tungide tasakaal jäi püsima, siis jääb tasakaal püsima ka sel juhul, kui keha pöörata ümber mistahes telje, mis läbib punkti O . Nagu näeme, selleks et tasakaal oleks astaatiline on tarvilik, et lisaks üldistele tasakaalutingimustele

$$[X]=0, \ [Y]=0, \ [Z]=0$$

$$[Z_y]-[Y_z]=0$$

$$[X_z]-[Z_x]=0$$

$$[Y_x]-[X_y]=0$$

peavad olema täidetud ka veel tingimused

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{X}_x]=0 \quad [\mathcal{X}_y]=0 \quad [\mathcal{X}_z]=0 \\
&[\mathcal{Y}_x]=0 \quad [\mathcal{Y}_y]=0 \quad [\mathcal{Y}_z]=0 \\
&[\mathcal{Z}_x]=0 \quad [\mathcal{Z}_y]=0 \quad [\mathcal{Z}_z]=0
\end{aligned} \tag{16}
$$

Viimaste tingimuste täitmisel on automaatselt täidetud tingimused

$$[\mathcal{Z}_y]-[\mathcal{Y}_z]=0, \quad [\mathcal{X}_z]-[\mathcal{Z}_x]=0, \quad [\mathcal{Y}_x]-[\mathcal{X}_y]=0$$

Niisiis astaatiliseks taskaaluks punkti O kinnitamisel on tarvilik, et oleks täidetud järgmised 12 tingimust:

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{X}]=0 \quad [\mathcal{Y}]=0 \quad [\mathcal{Z}]=0 \\
&[\mathcal{X}_x]=0 \quad [\mathcal{X}_y]=0 \quad [\mathcal{X}_z]=0 \\
&[\mathcal{Y}_x]=0 \quad [\mathcal{Y}_y]=0 \quad [\mathcal{Y}_z]=0 \\
&[\mathcal{Z}_x]=0 \quad [\mathcal{Z}_y]=0 \quad [\mathcal{Z}_z]=0
\end{aligned} \tag{17}
$$

Nagu kohe näha, need tingimused on ühtlasi ka piisavad.

Jääb lahendada veel küsimus: kas keha tasakaal jääb astaatiliseks ka sel juhul, kui keha pöörata telje ümber, mis ei läbi punkti O? Kinemaatikas tõestatakse, et keha pööramist võib asendada pööramisega antud teljega paralleelse telje ümber, kui aga see liita kohaselt valitud translatoorse liikumisega. Eelpool aga näitasime, et translatoorse liikumise suhtes on igasugune tasakaal astaatiline. Seega võime seatud küsimusele anda jaatava vastuse: keha tasakaal on astaatiline, kui tungisüsteemi astaatilised koordinaadid on võrdsed nulliga.

V Astaatilise tasakaalu üldine teooria

Eelmises peatükis veendusime selles, et tasapinnalise tungide süsteemi punul leidub süsteemi tasapinnal punkt, astaatiline tsenter , niisugune, et kui temale rakendada antud tungidega võrdvastupidised tungid, siis keha jääb astaatilisse tasakaalu. Selle punkti koordinaadid on:

$$x_0 = \frac{\mathcal{V}[X] + \mathcal{N}[Y]}{[X]^2 + [Y]^2}$$

$$y_0 = \frac{\mathcal{V}[Y] - \mathcal{N}[X]}{[X]^2 + [Y]^2}$$

Oma teoses "Handbuch der theoretischen Mechanik", ilmunud Berliinis a. 1838, Minding seab esmakordselt küsimuse ka ruumilise tungide süsteemi keskpunkti olemasolu kohta.

1. Ruumilise tungide süsteemi keskpunkt Mindingi järgi

Lähtudes astaatilise tasakaalu mõistest defineerime kahe tungisüsteemi astaatilise ekvivalentsuse järgmiselt:

Kahte tungisüsteemi nimetatakse astaatiliselt ekvivalentseks, kui need tungisüsteemid on staatiliselt ekvivalentsed ja jäävad niisugusteks ka veel siis, kui tunge pöörata ühes ja samas suunas ühe ja sama nurga võrra nende rakenduspunktide ümber. Näitame, et

kaks tungisüsteemi on astaatiliselt ekvivalentsed, kui nende vastavad astaatilised koordinaadid on võrdsed.

Tähistame tungi $\bar{F}$ komponendid enne pööret X, Y, Z ja peale tungide pööret mingi nurga võrra X', Y', Z'. Kui sihikoosinused, mis määravad teljestiku $x' y' z'$ orientatsiooni teljestiku x, y, z suhtes, anda tabeliga

	x	y	z
x'	α_1	α_2	α_3
y'	β_1	β_2	β_3
z'	γ_1	γ_2	γ_3

siis tungide uued komponendid avalduvad vanade kaudu kujul

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}' &= \alpha_1 \mathcal{X} + \alpha_2 \mathcal{Y} + \alpha_3 \mathcal{Z}, \\
\mathcal{Y}' &= \beta_1 \mathcal{X} + \beta_2 \mathcal{Y} + \beta_3 \mathcal{Z} \\
\mathcal{Z}' &= \gamma_1 \mathcal{X} + \gamma_2 \mathcal{Y} + \gamma_3 \mathcal{Z}
\end{aligned} \tag{18}
$$

Seega

$$[\mathcal{X}'] = \alpha_1 [\mathcal{X}] + \alpha_2 [\mathcal{Y}] + \alpha_3 [\mathcal{Z}]$$

ja kaks analoogilist avaldist $[\mathcal{Y}']$ ja $[\mathcal{Z}']$ jaoks. Edasi saame

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{X}'x] &= \alpha_1 [\mathcal{X}x] + \alpha_2 [\mathcal{Y}x] + \alpha_3 [\mathcal{Z}x] \\
[\mathcal{Y}'x] &= \beta_1 [\mathcal{X}x] + \beta_2 [\mathcal{Y}x] + \beta_3 [\mathcal{Z}x] \\
[\mathcal{Z}'x] &= \gamma_1 [\mathcal{X}x] + \gamma_2 [\mathcal{Y}x] + \gamma_3 [\mathcal{Z}x]
\end{aligned} \tag{19}
$$

ja kuus analoogilist avaldist

$$[\mathcal{X}'y], \ldots, [\mathcal{Z}'z]$$

jaoks. Saadud avaldistest näeme, et kui kahe tungisüsteemi astaatilised koordinaadid olid enne pööret vastavalt võrdsed, siis jäävad nad võrdseks ka siis, kui mõlema süsteemi tunge pöörata ühe ja sama nurga võrra. Kui aga kahe tungisüsteemi astaatilised koordinaadid on võrdsed, siis on neil võrdsed ka nende staatilised koordinaadid

$$[\mathcal{X}], \quad [\mathcal{Y}], \quad [\mathcal{Z}],$$

$$[\mathcal{Z}y] - [\mathcal{Y}z], \quad [\mathcal{X}z] - [\mathcal{Z}x], \quad [\mathcal{Y}x] - [\mathcal{X}y]$$

Järelikult need tungide süsteemid on ekvivalentsed.

Seame nüüd endile järgmise ülesande:

Olgu kindlale kehale rakendatud ruumiline tungide süsteem, mis antud oma 12 astaatilise koordinaadiga

$$\begin{matrix} [X] & [Y] & [Z] \\ [X_x] & [X_y] & [X_z] \\ [Y_x] & [Y_y] & [Y_z] \\ [Z_x] & [Z_y] & [Z_z] \end{matrix} \qquad (20)$$

Asendada antud tungide süsteem teise astaatiliselt ekvivalentse tungisüsteemiga, mis koosneks kolmest ette antud sihiga tungist.

Näitame, et need kolm tungi on täielikult ja üheselt määratud. Tähistame otsitavate tungide suurused R, R', R'', nende rakenduspunktide koordinaadid vastavalt (x_0, y_0, z_0), (x_0', y_0', z_0'), (x_0'', y_0'', z_0'') ja nende sihikoosinused (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Et otsitav süsteem oleks antud tungide süsteemiga astaatiliselt ekvivalentne, selleks peavad vastavad astaatilised koordinaadid olema võrdsed. Seega peab olema

$$\left.\begin{aligned} R\alpha + R'\alpha' + R''\alpha'' &= [X] \\ R\beta + R'\beta' + R''\beta'' &= [Y] \\ R\gamma + R'\gamma' + R''\gamma'' &= [Z] \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Kui eeldada, et otsitavad tungid R, R', R'' pole paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga, siis sellest võrrandisüsteemist saame nad üheselt määrata, sest

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Kui aga tungide R, R', R'' suurused on juba määratud, võime asuda nende rakenduspunktide koordinaatide määramisele. Selleks on meil 3 x 3 võrrandit:

$$\left.\begin{aligned} R\alpha x_0 + R'\alpha' x_0' + R''\alpha'' x_0'' &= [X_x] \\ R\beta x_0 + R'\beta' x_0' + R''\beta'' x_0'' &= [Y_x] \\ R\gamma x_0 + R'\gamma' x_0' + R''\gamma'' x_0'' &= [Z_x] \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} R\alpha y_0 + R'\alpha' y_0' + R''\alpha'' y_0'' &= [\mathcal{X}_y] \\ R\beta y_0 + R'\beta' y_0' + R''\beta'' y_0'' &= [\mathcal{Y}_y] \\ R\gamma y_0 + R'\gamma' y_0' + R''\gamma'' y_0'' &= [\mathcal{Z}_y] \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} R\alpha z_0 + R'\alpha' z_0' + R''\alpha'' z_0'' &= [\mathcal{X}_z] \\ R\beta z_0 + R'\beta' z_0' + R''\beta'' z_0'' &= [\mathcal{Y}_z] \\ R\gamma z_0 + R'\gamma' z_0' + R''\gamma'' z_0'' &= [\mathcal{Z}_z] \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Ka need koordinaadid on üheselt määratavad, kuna iga võrrandi rühma determinant on nullist erinev.

Katsume valida otsitavate tungide sihid nii, et kaks neist $(\alpha', \beta', \gamma')$ ja $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ seisaksid risti sihiga (α, β, γ). Selleks peab olema

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Korrutame võrrandeid (21) ja (22) α, β, γ -ga ja liidame saadud tulemused. Saame

$$\begin{aligned} R &= [\mathcal{X}]\alpha + [\mathcal{Y}]\beta + [\mathcal{Z}]\gamma \\ R\cdot x_0 &= [\mathcal{X}_x]\alpha + [\mathcal{Y}_x]\beta + [\mathcal{Z}_x]\gamma \end{aligned} \qquad (25)$$

ja edasi

$$x_0 = \frac{[\mathcal{X}_x]\alpha + [\mathcal{Y}_x]\beta + [\mathcal{Z}_x]\gamma}{[\mathcal{X}]\alpha + [\mathcal{Y}]\beta + [\mathcal{Z}]\gamma}$$

Analoogilisel teel saame avaldada y_0 ja z_0. Seega tungi R rakenduspunkti koordinaadid on arvutatavad avaldistest

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{[\mathcal{X}_x]\alpha + [\mathcal{Y}_x]\beta + [\mathcal{Z}_x]\gamma}{[\mathcal{X}]\alpha + [\mathcal{Y}]\beta + [\mathcal{Z}]\gamma} \\ y_0 &= \frac{[\mathcal{X}_y]\alpha + [\mathcal{Y}_y]\beta + [\mathcal{Z}_y]\gamma}{[\mathcal{X}]\alpha + [\mathcal{Y}]\beta + [\mathcal{Z}]\gamma} \\ z_0 &= \frac{[\mathcal{X}_z]\alpha + [\mathcal{Y}_z]\beta + [\mathcal{Z}_z]\gamma}{[\mathcal{X}]\alpha + [\mathcal{Y}]\beta + [\mathcal{Z}]\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Tungi R , mille sihikoosinused on (α, β, γ), mille suurus on määratud avaldisega (25) ja mille rakenduspunkti koordinaadid x_0, y_0, z_0 on antud avaldistega (26), nimetatakse antud <u>tungisüsteemi komponendiks</u> sihikoosinustega (α, β, γ) määratud sihis. Nimetatud komponendi olemus selgub järgnevast: kui tähistame R_ν -ga avaldise

$$\mathfrak{X}_\nu \alpha + \mathfrak{Y}_\nu \beta + \mathfrak{Z}_\nu \gamma$$

siis võrrandid (26) annavad

$$x_0 = \frac{[Rx]}{[R]}, \quad y_0 = \frac{[Ry]}{[R]}, \quad z_0 = \frac{[Rz]}{[R]}$$

Siit nähtub, et kui antud tungide süsteemile koostada komponendid sihis, mis määratud sihikoosinustega (α, β, γ), ja need komponendid kui paralleelsed tungid liita (kusjuures nende rakenduspunktid ühtuvad antud tungide rakenduspunktidega), siis saame antud tungisüsteemi komponendi ette antud sihis.

Valemist (26) nähtub, et kolm antud tungisüsteemi komponenti lõikavad koordinaattelgi punktides koordinaatidega

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = \dfrac{[\mathfrak{X}x]}{[\mathfrak{X}]} & y_1 = \dfrac{[\mathfrak{X}y]}{[\mathfrak{X}]} & z_1 = \dfrac{[\mathfrak{X}z]}{[\mathfrak{X}]} \\[2ex] x_2 = \dfrac{[\mathfrak{Y}x]}{[\mathfrak{Y}]} & y_2 = \dfrac{[\mathfrak{Y}y]}{[\mathfrak{Y}]} & z_2 = \dfrac{[\mathfrak{Y}z]}{[\mathfrak{Y}]} \\[2ex] x_3 = \dfrac{[\mathfrak{Z}x]}{[\mathfrak{Z}]} & y_3 = \dfrac{[\mathfrak{Z}y]}{[\mathfrak{Z}]} & z_3 = \dfrac{[\mathfrak{Z}z]}{[\mathfrak{Z}]} \end{array}\right\} \qquad (27)$$

kuna komponentide suurused on

$$[\mathfrak{X}], \quad [\mathfrak{Y}], \quad [\mathfrak{Z}].$$

Edasi saame järeldada valemitest (24), et komponendi rakenduspunkt asub alati kindlal tasapinnal. Seda tasapinda nimetatakse <u>tungisüsteemi kesktasapinnaks</u>[1]. Tasapinna võrrandi saame, kui võrranditest (26)

---

1) Minding, Journ. f. math., Bd. 15, 1836, p. 27.

elimineerime α, β, γ . Selleks anname nendele võrranditele järgmise kuju:

$$(x_0[X]-[X_x])\alpha+(x_0[Y]-[Y_x])\beta+(x_0[Z]-[Z_x])\gamma=0$$
$$(y_0[X]-[X_y])\alpha+(y_0[Y]-[Y_y])\beta+(y_0[Z]-[Z_y])\gamma=0$$
$$(z_0[X]-[X_z])\alpha+(z_0[Y]-[Y_z])\beta+(z_0[Z]-[Z_z])\gamma=0$$

Et saadud võrrandisüsteemil oleksid nullist erinevad lahendid, selleks peab süsteemi determinant võrduma nulliga

$$\begin{vmatrix} x_0[X]-[X_x] & x_0[Y]-[Y_x] & x_0[Z]-[Z_x] \\ y_0[X]-[X_y] & y_0[Y]-[Y_y] & y_0[Z]-[Z_y] \\ z_0[X]-[X_z] & z_0[Y]-[Y_z] & z_0[Z]-[Z_z] \end{vmatrix} = 0$$

Selle kolmandat järku determinandi saame asendada järgmise neljandat järku determinandiga

$$\begin{vmatrix} x_0 & [X_x] & [Y_x] & [Z_x] \\ y_0 & [X_y] & [Y_y] & [Z_y] \\ z_0 & [X_z] & [Y_z] & [Z_z] \\ 1 & [X] & [Y] & [Z] \end{vmatrix} = 0$$

sest korrutades teist, kolmandat ja neljandat veergu -1 -ga saame

$$\begin{vmatrix} x_0 & -[X_x] & -[Y_x] & -[Z_x] \\ y_0 & -[X_y] & -[Y_y] & -[Z_y] \\ z_0 & -[X_z] & -[Y_z] & -[Z_z] \\ 1 & -[X] & -[Y] & -[Z] \end{vmatrix} = 0$$

Korrutame nüüd esimese veeru $[X]$ ja liidame teisele veerule, siis esimest veergu $[Y]$ ja liidame kolmandale veerule ning esimest veergu $[Z]$ ja liidame neljandale veerule. Siis saame

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_0[X]-[X_x] & x_0[Y]-[Y_x] & x_0[Z]-[Z_x] \\ y_0 & y_0[X]-[X_y] & y_0[Y]-[Y_y] & y_0[Z]-[Z_y] \\ z_0 & z_0[X]-[X_z] & z_0[Y]-[Y_z] & z_0[Z]-[Z_z] \\ 1 & [X]-[X] & [Y]-[Y] & [Z]-[Z] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_0 & x_0[X]-[X_x] & x_0[Y]-[Y_x] & x_0[Z]-[Z_x] \\ y_0 & y_0[X]-[X_y] & y_0[Y]-[Y_y] & y_0[Z]-[Z_y] \\ z_0 & z_0[X]-[X_z] & z_0[Y]-[Y_z] & z_0[Z]-[Z_z] \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_0[X]-[X_x] & x_0[Y]-[Y_x] & x_0[Z]-[Z_x] \\ y_0[X]-[X_y] & y_0[Y]-[Y_y] & y_0[Z]-[Z_y] \\ z_0[X]-[X_z] & z_0[Y]-[Y_z] & z_0[Z]-[Z_z] \end{vmatrix} = 0$$

Arvestades võrrandeid (27) näeme, et

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (28)$$

Asendades (x_0, y_0, z_0) järjest kolmikutega (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) näeme, et need kolmikud rahuldavad viimast võrrandit, see tähendab aga, et kesktasapind läbib punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ja (x_3, y_3, z_3) ehk, teisiti, kesktasapind on määratud kolme punktiga (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ja (x_3, y_3, z_3).

Võrrandis (25) tähendavad $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ tungisüsteemi resultandi komponente. Valemist (25) nähtub, et komponendi leidmiseks etteantud sihis tuleb tung ($[X]$, $[Y]$, $[Z]$) projekteerida sellele sihile. See asjaolu õigustab siis ka nimetuse "tungisüsteemi komponent sihis (α, β, γ)".

Komponent omab suurima väärtuse siis, kui komponendi siht langeb ühte resultandi sihiga. Selleks, et see sihtide ühtelangemine teostuks, tuleb sihikoosinused valida suuruses

$$\alpha = \frac{[\mathcal{X}]}{\sqrt{[\mathcal{X}]^2+[\mathcal{Y}]^2+[\mathcal{Z}]^2}} \qquad \beta = \frac{[\mathcal{Y}]}{\sqrt{[\mathcal{X}]^2+[\mathcal{Y}]^2+[\mathcal{Z}]^2}} \tag{29}$$

$$\gamma = \frac{[\mathcal{Z}]}{\sqrt{[\mathcal{X}]^2+[\mathcal{Y}]^2+[\mathcal{Z}]^2}}$$

Siis aga resultandi $\mathcal{R}$ rakenduspunkti koordinaadid $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ avalduvad kujul

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{[\mathcal{X}_x][\mathcal{X}]+[\mathcal{Y}_x][\mathcal{Y}]+[\mathcal{Z}_x][\mathcal{Z}]}{[\mathcal{X}]^2+[\mathcal{Y}]^2+[\mathcal{Z}]^2} \\ \bar{y}_0 &= \frac{[\mathcal{X}_y][\mathcal{X}]+[\mathcal{Y}_y][\mathcal{Y}]+[\mathcal{Z}_y][\mathcal{Z}]}{[\mathcal{X}]^2+[\mathcal{Y}]^2+[\mathcal{Z}]^2} \\ \bar{z}_0 &= \frac{[\mathcal{X}_z][\mathcal{X}]+[\mathcal{Y}_z][\mathcal{Y}]+[\mathcal{Z}_z][\mathcal{Z}]}{[\mathcal{X}]^2+[\mathcal{Y}]^2+[\mathcal{Z}]^2} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Punkti koordinaatidega $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ nimetatakse <u>tungisüsteemi Mindingi keskpunktiks</u>[1]. Kui arvestada valemeid (27) ja tähistada $[\mathcal{X}] = X$, $[\mathcal{Y}] = Y$, $[\mathcal{Z}] = Z$, saame Mindingi keskpunkti koordinaatide jaoks järgmised avaldised

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{X^2 x_1 + Y^2 x_2 + Z^2 x_3}{X^2+Y^2+Z^2} \\ \bar{y}_0 &= \frac{X^2 y_1 + Y^2 y_2 + Z^2 y_3}{X^2+Y^2+Z^2} \\ \bar{z}_0 &= \frac{X^2 z_1 + Y^2 z_2 + Z^2 z_3}{X^2+Y^2+Z^2} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

---

[1] Minding, Journ. f. Math. (Crelle), Bd. 14, 1835, p. 289.

Et koordinaatide teljed on valitud vabalt mistahes kolmes paariti ristsihis, siis võime valemite (31) sisu sõnastada järgmiselt:

Olgu antud kindlale kehale rakendatud tungide süsteem ja määratud selle süsteemi resultandi komponendid kolmes paariti risti seisvas sihis. Kui siis nende komponentide rakenduspunktides kinnitada massid, mis on võrdelised eelpoolnimetatud komponentide ruutudega, siis on nende masside raskuspunkt Mindingi tsentraalpunktis.

Illustreeriv näide

Tõestada, et iga antud tungide süsteem on astaatiliselt tasakaalustatav nelja antud punkti rakendatud tungiga.

Olgu kindlale kehale rakendatud tungide süsteem, mille 12 astaatilist koordinaati on

$$\begin{matrix} [X] & [Y] & [Z] \\ [X_x] & [Y_x] & [Z_x] \\ [X_y] & [Y_y] & [Z_y] \\ [X_z] & [Y_z] & [Z_z] \end{matrix}$$

Asendame antud tungide süsteemi astaatiliselt ekvivalentse nelja antud punkti rakendatud tungiga. Olgu antud nelja punkti koordinaadid (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ja (x_4, y_4, z_4). Otsitavate tungide projektsioonid koordinaattelgedele tähistame

$$(X_1, Y_1, Z_1)\ ,\ (X_2, Y_2, Z_2),\ (X_3, Y_3, Z_3)\ \text{ja}\ (X_4, Y_4, Z_4).$$

Selleks, et otsitav tungide süsteem oleks astaatiliselt ekvivalentne antud tungide süsteemiga, peavad olema täidetud järgmised tingimused:

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= [X] \\ X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 + X_4x_4 &= [X_x] \\ X_1y_1 + X_2y_2 + X_3y_3 + X_4y_4 &= [X_y] \\ X_1z_1 + X_2z_2 + X_3z_3 + X_4z_4 &= [X_z] \end{aligned}\right\}$$

Sellest võrrandisüsteemist saame määrata $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ ja $\mathcal{X}_4$. Analoogilise võrrandisüsteemi saame ka $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{Y}_3$, $\mathcal{Y}_4$ määramiseks:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3 + \mathcal{Y}_4 &= [\mathcal{Y}] \\ \mathcal{Y}_1 x_1 + \mathcal{Y}_2 x_2 + \mathcal{Y}_3 x_3 + \mathcal{Y}_4 x_4 &= [\mathcal{Y}x] \\ \mathcal{Y}_1 y_1 + \mathcal{Y}_2 y_2 + \mathcal{Y}_3 y_3 + \mathcal{Y}_4 y_4 &= [\mathcal{Y}y] \\ \mathcal{Y}_1 z_1 + \mathcal{Y}_2 z_2 + \mathcal{Y}_3 z_3 + \mathcal{Y}_4 z_4 &= [\mathcal{Y}z] \end{aligned}\right\}$$

ja $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$, $\mathcal{Z}_4$ määramiseks:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_4 &= [\mathcal{Z}] \\ \mathcal{Z}_1 x_1 + \mathcal{Z}_2 x_2 + \mathcal{Z}_3 x_3 + \mathcal{Z}_4 x_4 &= [\mathcal{Z}x] \\ \mathcal{Z}_1 y_1 + \mathcal{Z}_2 y_2 + \mathcal{Z}_3 y_3 + \mathcal{Z}_4 y_4 &= [\mathcal{Z}y] \\ \mathcal{Z}_1 z_1 + \mathcal{Z}_2 z_2 + \mathcal{Z}_3 z_3 + \mathcal{Z}_4 z_4 &= [\mathcal{Z}z] \end{aligned}\right\}$$

Tungi $\bar{R}_1$ suuruse arvutame avaldisest

$$R_1 = \sqrt{\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Z}_1^2}$$

ja mõjusirge sihikoosinused avaldistest

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{X}_1}{\sqrt{\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Z}_1^2}} \qquad \beta_1 = \frac{\mathcal{Y}_1}{\sqrt{\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Z}_1^2}}$$

$$\gamma_1 = \frac{\mathcal{Z}_1}{\sqrt{\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Z}_1^2}}$$

Analoogilised avaldised saame ka tungide $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$ ja $\bar{R}_4$ määramiseks. Et antud tungide süsteem oleks astaatilises tasakaalus, selleks liidame antud tungide süsteemi tungidele punktides (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ja (x_4, y_4, z_4) vastavalt tungid $-\bar{R}_1$, $-\bar{R}_2$, $-\bar{R}_3$ ja $-\bar{R}_4$.

Sel juhul kehale rakendatud tungide 12 astaatilist koordinaati on nullid ning seega keha tasakaal on astaatiline.

2. Tungisüsteemi astaatiline vektormoment tasapinna suhtes

Konfokaalsed momentpinnad

Astaatilise vektormomendi definitsiooni asemel anname kokkuleppe selle suuruse saamiseks:

antud tungisüsteemi iga tungi sihis kujutame vektori, mille pikkuseks on tungi suuruse korrutis tungi rakenduspunkti kaugusega, viimast tausttasapinnast arvates. Saadud vektorite resultant kujutabki antud tungisüsteemi astaatilist momenti tausttasapinna suhtes.

Astaatilise momendi avaldise tuletamiseks oletame, et tausttasapinna võrrand on jooksvates koordinaatides $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ antud kujul

$$\xi\bar{x} + \eta\bar{y} + \zeta\bar{z} - \Theta = 0$$

nii et normiv tegur

$$\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Kui mingi tungi rakenduspunkti koordinaadid tähistame x , y , z , siis selle punkti kaugus tausttasapinnast avaldub kujul

$$p = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z - \Theta}{\sigma}$$

Nimetatud tungi astaatilise vektormomendi komponendid oleksid siis

$$\mathfrak{X}p, \quad \mathfrak{Y}p, \quad \mathfrak{Z}p.$$

Kui resulteeriva vektormeomendi komponendid märgime tähtedega $\mathcal{H}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{Z}$, siis

$$\mathcal{H} = [\mathfrak{X}p] = [\mathfrak{X}\frac{\xi x + \eta y + \zeta z - \Theta}{\sigma}] =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left([\mathfrak{X}x]\xi + [\mathfrak{X}y]\eta + [\mathfrak{X}z]\zeta - [\mathfrak{X}]\Theta\right)$$

ehk

$$\left.\begin{aligned}\sigma\mathcal{X} &= [X_x]\xi + [X_y]\eta + [X_z]\zeta - [X]\Theta \\ \sigma\mathcal{Y} &= [Y_x]\xi + [Y_y]\eta + [Y_z]\zeta - [Y]\Theta \\ \sigma\mathcal{Z} &= [Z_x]\xi + [Z_y]\eta + [Z_z]\zeta - [Z]\Theta\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

ja samuti

Tungisüsteemi astaatilist vektormomenti kujutava vektori pikkust nimetatakse antud tungisüsteemi <u>skalaarseks momendiks</u> taustasapinna suhtes. Tähistame skalaarse momendi tähega Σ ; siis

$$\Sigma = \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2} \tag{33}$$

Seni olid meil koordinaatteljed valitud vabalt. Järgnevas valime koordinaatteljed nii, et kesktasapinnaks oleks xy -tasapind ja koordinaatide alguseks oleks tungisüsteemi keskpunkt.

Kui kesktasapinnaks valime xy -tasapinna, siis ta võrrand on esitatav kujul $z=0$. Seega eespooltoodud võrrandeis kordajad

$[X_z]$, $[Y_z]$ ja $[Z_z]$ on nullid. (34)

Et eelduse kohaselt koordinaatide algus on tungisüsteemi keskpunktis, siis

$$\bar{x}_0, \quad \bar{y}_0 = 0, \quad \bar{z}_0 = 0$$

ja järelikult

$$\begin{aligned}[X_x][X] + [Y_x][Y] + [Z_x][Z] &= 0 \\ [X_y][X] + [Y_y][Y] + [Z_y][Z] &= 0\end{aligned} \tag{35}$$

Avaldisi (34) ja (35) arvesse võttes saame skalaarse momendi jaoks järgmise avaldise

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\Sigma^2 = ([X_x]\xi + [X_y]\eta)^2 + ([Y_x]\xi + [Y_y]\eta)^2 + ([Z_x]\xi + [Z_y]\eta)^2 + ([X]^2 + [Y]^2 + [Z]^2)\Theta^2 \tag{36}$$

ehk

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\Sigma^2 = \Phi + R^2\Theta^2$$

kus

$$R^2 = [X]^2 + [Y]^2 + [Z]^2 \tag{37}$$

ja

$$\Phi = ([X_x]\xi + [X_y]\eta)^2 + ([Y_x]\xi + [Y_y]\eta)^2 + $$
$$+ ([Z_x]\xi + [Z_y]\eta)^2 \tag{38}$$

Et Φ avaldis on kolme koordinaatides lineaaravaldise ruudu summa, siis võrrand $\Phi = const$ kujutab ellipsi võrrandit. Kui x ja y telgedeks valime selle ellipsi peateljed, siis saame Φ avaldise kirjutada kujul

$$\Phi = P^2\xi^2 + Q^2\eta^2 \tag{39}$$

kusjuures

$$\left.\begin{aligned} [X_x][X_y] + [Y_x][Y_y] + [Z_x][Z_y] &= 0 \\ [X_x]^2 + [Y_x]^2 + [Z_x]^2 &= P^2 \\ [X_y]^2 + [Y_y]^2 + [Z_y]^2 &= Q^2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Eespoolseletatud koordinaadistiku valikul saame skalaarse momendi avaldise esitada kujul

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\Sigma^2 = P^2\xi^2 + Q^2\eta^2 + R^2\Theta^2$$

ehk

$$(\Sigma^2 - P^2)\xi^2 + (\Sigma^2 - Q^2)\eta^2 + \Sigma^2\zeta^2 = R^2\Theta^2 \tag{41}$$

Kui eeldada, et Σ on konstant, siis saadud võrrand kujutab teist järku pinda ruumilistes tangentsiaalsetes koordinaatides. Punktkoordinaatidele üle minnes saame viimase võrrandi kirjutada kujul

$$\frac{x^2}{\Sigma^2 - P^2} + \frac{y^2}{\Sigma^2 - Q^2} + \frac{z^2}{\Sigma^2} = \frac{1}{R^2} \tag{42}$$

Kui parameetrile Σ anname kõik võimalikud väärtused, saame konfokaalsete pindade pere.

Seega:

Tausttasapinnad, mille suhtes tungide süsteem omab konstantse skalaarse momendi, mähivad teist järku pinda. Skalaarse momendi väärtuse muutudes tausttasapindade poolt mähitud pinnad moodustavad konfokaalsete pindade pere.

3. Kolme komponendi rakenduspunktide asetumine

Arvestades avaldist (34) võime astaatilised koordinaadid valida järgmiselt:

$$\left.\begin{array}{llll} [\mathcal{X}_x] = P\alpha_1 & [\mathcal{X}_y] = Q\alpha_2 & [\mathcal{X}_z] = 0 & [\mathcal{X}] = R\alpha_3 \\ [\mathcal{Y}_x] = P\beta_1 & [\mathcal{Y}_y] = Q\beta_2 & [\mathcal{Y}_z] = 0 & [\mathcal{Y}] = R\beta_3 \\ [\mathcal{Z}_x] = P\gamma_1 & [\mathcal{Z}_y] = Q\gamma_2 & [\mathcal{Z}_z] = 0 & [\mathcal{Z}] = R\gamma_3 \end{array}\right\} \quad (43)$$

Asetades need väärtused võrranditesse (35), (37), (40) saame

$$\begin{aligned} P\alpha_1 R\alpha_3 + P\beta_1 R\beta_3 + P\gamma_1 R\gamma_3 &= 0 \\ Q\alpha_2 R\alpha_3 + Q\beta_2 R\beta_3 + Q\gamma_2 R\gamma_3 &= 0 \\ P\alpha_1 Q\alpha_2 + P\beta_1 Q\beta_2 + P\gamma_1 Q\gamma_2 &= 0 \\ P^2\alpha_1^2 + P^2\beta_1^2 + P^2\gamma_1^2 &= P^2 \\ Q^2\alpha_2^2 + Q^2\beta_2^2 + Q^2\gamma_2^2 &= Q^2 \\ R^2\alpha_3^2 + R^2\beta_3^2 + R^2\gamma_3^2 &= R^2 \end{aligned}$$

ehk, taandades,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\beta_2 &= 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned}\right. \quad (44)$$

Saadud avaldistest järeldub, et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ja $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ on kolme paarikaupa teineteisel risti seisva sirge sihikoosinused.

Seega võime tungisüsteemi pöörata tungide rakenduspunktide ümber nii, et süsteemi astaatilised koordinaadid omaksid järgmisi väärtusi

$$\begin{matrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{matrix}$$

Kui lähtume astaatiliste koordinaatide niisugustest väärtustest ja pöörame tunge nende rakenduspunktide ümber ühise nurga võrra, siis vastavalt valemitele (18) ja (19) oleksid uued astaatilised koordinaadid järgmised:

$$\begin{matrix} P\alpha_1 & Q\alpha_2 & 0 & R\alpha_3 \\ P\beta_1 & Q\beta_2 & 0 & R\beta_3 \\ P\gamma_1 & Q\gamma_2 & 0 & R\gamma_3 \end{matrix}$$

s.o. just need avaldised, mis seisavad valemeis (43). Siinkohal tuleb märkida, et skalaarse momendi väärtus ei muutu, kui pöörame tunge nende rakenduspunktide ümber ühe ja sama nurga võrra, kuna seejuures pöördub ka resultant oma rakenduspunkti ümber sama nurga võrra, resultandi suurus aga ei muutu. Et nimetatud operatsioonil skalaarne moment ei muutu, siis jääb muutumatuks ka konfokaalsete pindade pere (42).

Asetame nüüd komponendi R rakenduspunkti koordinaatide avaldisse (26) astaatilised koordinaadid kujul (43). Siis

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{P}{R}\,\frac{\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma}{\alpha_3\alpha+\beta_3\beta+\gamma_3\gamma} \\ y &= \frac{Q}{R}\,\frac{\alpha_2\alpha+\beta_2\beta+\gamma_2\gamma}{\alpha_3\alpha+\beta_3\beta+\gamma_3\gamma} \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Komponendi R' rakenduspunkti koordinaadid on avaldatavad analoogiliselt:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{P}{R}\,\frac{\alpha_1\alpha'+\beta_1\beta'+\gamma_1\gamma'}{\alpha_3\alpha'+\beta_3\beta'+\gamma_3\gamma'} \\ y' &= \frac{Q}{R}\,\frac{\alpha_2\alpha'+\beta_2\beta'+\gamma_2\gamma'}{\alpha_3\alpha'+\beta_3\beta'+\gamma_3\gamma'} \\ z' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Moodustame ühenimeliste koordinaatide korrutised:

$$\left.\begin{aligned} xx' &= \frac{P^2}{R^2}\frac{(\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma)(\alpha_1\alpha'+\beta_1\beta'+\gamma_1\gamma')}{(\alpha_3\alpha+\beta_3\beta+\gamma_3\gamma)(\alpha_3\alpha'+\beta_3\beta'+\gamma_3\gamma')} \\ yy' &= \frac{Q^2}{R^2}\frac{(\alpha_2\alpha+\beta_2\beta+\gamma_2\gamma)(\alpha_2\alpha'+\beta_2\beta'+\gamma_2\gamma')}{(\alpha_3\alpha+\beta_3\beta+\gamma_3\gamma)(\alpha_3\alpha'+\beta_3\beta'+\gamma_3\gamma')} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

$$zz' = 0$$

Kui arvestada, et ka $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ja $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ on kolme paarikaupa risti oleva sirge sihikoosinused, siis pärast lihtsustamist saame:

$$\frac{xx'}{P^2} + \frac{yy'}{Q^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}{(\alpha_3\alpha+\beta_3\beta+\gamma_3\gamma)(\alpha_3\alpha'+\beta_3\beta'+\gamma_3\gamma')}$$

Kui komponendid R ja R' on vastastikku risti, siis

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

ja

$$\frac{xx'}{P^2} + \frac{yy'}{Q^2} = -\frac{1}{R^2} \quad (47)$$

Sirge

$$\frac{xx'}{P^2} + \frac{yy'}{Q^2} = \frac{1}{R^2}$$

on punkti $P'(x', y')$ polaar ellipsi

$$\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{Q^2} = \frac{1}{R^2}$$

suhtes, nii et punkt P' on sirge pooluseks. Meie sirge

$$\frac{xx'}{P^2} + \frac{yy'}{Q^2} = -\frac{1}{R^2}$$

on aga paralleelne sirgega

$$\frac{xx'}{P^2} + \frac{yy'}{Q^2} = \frac{1}{R^2}$$

ja asub selle sirgega sümmeetriliselt ellipsi keskpunkti suhtes. Seda sirget nimetatakse punkti P' antipolaariks.

Seega võrrandist (47) järeldub, et komponentide R ja R' rakenduspunktid on xy-tasapinnal ellipsi

$$\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{Q^2} = \frac{1}{R^2}$$

suhtes antipolaarsüsteemi konjugeeritud punktid.

Kokku võttes võime öelda:

kolme paarikaupa risti seisva komponendi rakenduspunktid on kesktasapinnal kolmnurga tippudeks ja need tipud on paariti antipolaarsüsteemis konjugeeritud. See lause kuulub G.Darboux'le ja toodud tema 1877.a. avaldatud töös.

4. Mindingi lause tungide süsteemi resultandi mõjusirge kohta

Lähtudes avaldisest (43) saame antud tungisüsteemi staatilised koordinaadid avaldada järgmiselt:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= R\alpha_3 & \mathcal{L} &= Q\gamma_2 \\ \mathcal{Y} &= R\beta_3 & \mathcal{M} &= -P\gamma_1 \\ \mathcal{Z} &= R\gamma_3 & \mathcal{N} &= P\beta_1 - Q\alpha_2 \end{aligned} \qquad (48)$$

Iga kindlale kehale rakendatud tungide süsteem on üldjuhul asendatav tungi kruviga, mõistes selle all tungide kompleksi, mis koosneb resultandist R ja tungipaarist, mille moment on paralleelne resultandiga. Kruvi parameeter

$$k = \frac{\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \mathcal{N}\mathcal{Z}}{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}.$$

ehk, meie juhul,

$$k = \frac{Q\gamma_2\alpha_3 - P\gamma_1\beta_3 + (P\beta_1 - Q\alpha_2)\gamma_3}{R} =$$

$$= \frac{(\beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3)P + (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3)Q}{R}.$$

Et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ja $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ on kolme paariti risti oleva sihi sihikoosinused, siis

$$\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3 = \beta_1$$

$$\beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3 = -\alpha_2$$

ja seega

$$k = \frac{-\alpha_2 P + \beta_1 Q}{R}. \qquad (49)$$

Järgnevas vaatleme juhtu, kus antud tungide süsteem on asendatav ühe ainsa tungiga. Siis $k = 0$ ja

$$\alpha_2 P = \beta_1 Q \qquad (50)$$

Tähistame resultandi mõjusirge jooksva punkti koordinaadid (x, y, z), siis

$$\mathcal{L} = Zy - Yz \qquad \mathcal{M} = Xz - Zx \qquad \mathcal{N} = Yx - Xy .$$

Resultandi mõjusirge ja yz -tasapinna lõikepunktis on $x = 0$. Järelikult

$$\mathcal{N} = -Xy \qquad \mathcal{M} = Xz$$

ehk, arvestades valemeid (48),

$$P\beta_1 - Q\alpha_2 = R\alpha_3 y \qquad -P\gamma_1 = R\alpha_3 z \tag{51}$$

Korrutame esimest avaldist P -ga:

$$P^2\beta_1 - PQ\alpha_2 = -RP\alpha_3 y$$

Et

$$\alpha_2 P = \beta_1 Q \quad , \text{ siis } \quad P = \frac{\beta_1 Q}{\alpha_2}$$

ja

$$P^2\beta_1 - PQ\alpha_2 = P^2\beta_1 - \frac{Q^2\beta_1\alpha_2}{\alpha_2} = (P^2 - Q^2)\beta_1 ,$$

nii et

$$(P^2 - Q^2)\beta_1 = -RP\alpha_3 y$$

Tõstame saadud avaldise ruutu ja jagame vahega $P^2 - Q^2$; saame

$$\beta_1^2 - \alpha_2^2 = R^2\alpha_3^2 \frac{y^2}{P^2 - Q^2} \tag{52}$$

Kuna valemi (50) järgi

$$Q = \frac{\alpha_2 P}{\beta_1} \quad , \text{ siis } \quad Q^2 = \frac{\alpha_2^2 P^2}{\beta_1^2}$$

ning

$$(P^2 - Q^2)\beta_1^2 = P^2(\beta_1^2 - \alpha_2^2)$$

Valemite (51) teisest reast saame, et

$$\gamma_1^2 = R^2\alpha_3^2 \frac{z^2}{P^2} . \tag{53}$$

Liidame avaldised (52) ja (53):

$$\beta_1^2 - \alpha_2^2 + \gamma_1^2 = R^2\alpha_3^2 \frac{y^2}{P^2 - Q^2} + R^2\alpha_3^2 \frac{z^2}{P^2}$$

Et $\beta_1^2+\gamma_1^2=1-\alpha_1^2$, siis

$$1-\alpha_1^2-\alpha_2^2=R^2\alpha_3^2\left(\frac{y^2}{P^2-Q^2}+\frac{z^2}{P^2}\right)$$

Kuna aga

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,$$

siis

$$1-\alpha_1^2-\alpha_2^2=\alpha_3^2$$

ja

$$\alpha_3^2=R^2\alpha_3^2\left(\frac{y^2}{P^2-Q^2}+\frac{z^2}{P^2}\right)$$

ehk

$$\frac{y^2}{P^2-Q^2}+\frac{z^2}{P^2}=\frac{1}{R^2} \tag{54}$$

Seega resultandi mõjusirge lõikepunkti koordinaadid yz -tasapinnaga peavad rahuldama saadud võrrandit. Analoogilisel teel saab tõestada, et resultandi mõjusirge ja xz -tasapinna lõikepunkti koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$-\frac{x^2}{P^2-Q^2}+\frac{z^2}{Q^2}=\frac{1}{R^2} \tag{55}$$

Kahest viimasest võrrandist järeldub Mindingi poolt antud lause:

Kui antud tungide süsteem taandub üheks tungiks, siis resultandi mõjusirge läbib alati kahte koonuslõiget, milledest üks on yz -tasapinnal asuv ellips ja teine xz -tasapinnal asuv hüperbool, kusjuures need omavahel risti asetsevates tasapindades olevad koonuslõiked läbivad üksteise fookuseid.

Ruumilistes tangentsiaalsetes koordinaatides avalduvad eelpoolnimetatud koonuslõigete võrrandid järgmiselt:

$$\begin{aligned}(P^2-Q^2)\eta^2+P^2\zeta^2&=R^2\Theta^2\\(Q^2-P^2)\xi^2+Q^2\zeta^2&=R^2\Theta^2\end{aligned} \tag{56}$$

Need avaldised saame tuletada ka valemitest (41), kui sellesse asendame üks kord $\Sigma^2=P^2$ ja teine kord $\Sigma^2=Q^2$. Mõlemad koonuslõiked on konfokaalsete pindade pere kõveraks kõdunud indiviidid. Neid kõveraid nimetatakse <u>konfokaalsete pindade fokaalkõverateks</u>.

Seega võime eelmise lause sõnastada järgmiselt:

Kui antud tungide süsteem on tungide pööramisega viidud sellisesse asendisse, et ta on asendatav ühe ainsa tungiga, siis resultandi mõjusirge lõikab konfokaalsete pindade pere mõlemat fokaalkõverat[1].

---

[1] Minding, Journal für Math., Bd. 15, 1836.

Kokkuvõte

Nagu eelpool märgitud, on F.Minding astaatilise tasakaalu teooria aluste looja. Ühelt poolt oma raamatus "Handbuch der theoretischen Mechanik", ilmunud Berliinis 1838.a., ja teiselt poolt Crelles Journal'is nr. 14, 1835 ja nr. 11, 1836.a. avaldatud töödes "Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpuncte nicht parallerer Kräft" ja "Über den Ort sämmtilicher Resultates eines der Drechung unterworfenene Systems von Kräften" annab Minding ühel ja samal tasapinnal asuvate tungide keskpunkti mõiste ja analüütilised avaldised keskpunkti koordinaatide määramiseks. Edasi üldistab ta saadud tulemused ka ruumilise tungide süsteemi juhule ja näitab, et antud ruumilist tungide süsteemi saab asendada kolme, etteantud sihis mõjuva tungiga. Nende kolme tungi sihtideks võib valida näiteks ka kolme paariti risti asetseva sirge sihid. Vaatamata sellele, millistes sihtides oleme valinud kolm komponenti, asuvad nende komponentide rakenduspunktid alati ühel ja samal tasapinnal - kesktasapinnal.

Edasi vaatleb Minding juhtu, et antud tungide süsteem on asendatav ühe ainsa tungiga. Nagu temal õnnestus näidata, sel juhul resultandi mõjusirge läbib alati teatava konfokaalsete pindade pere fokaalkõveraid. 36 aastat peale F.Mindingi töö ilmumist jõuab samadele tulemustele ka G.Darboux. Küsimust edasi arendades käsitleb kuulus prantsuse geomeeter ka üldjuhtu, see on juhtu, kus antud tungide süsteemi saab asendada tungi kruviga. Darboux laiendab tsentraaltelje mõistet ka tungi kruvi juhule. Astaatilise tasakaalu küsimust on peatselt peale Mindingi uurinud ka Moebius. Moebiuse poolt on loodud tasakaalu telgede mõiste. Asjaolu, et F.Mindingi poolt loodud üldise tungide süsteemi keskpunkti mõiste on köitnud nii suurte ja tunnustatud teadlaste tähelepanu näitab, kui sügav ja väärtuslik see mõiste on. Seda kinnitab ka veel seegi tõsiasi, et selle mõistega on tegeldud ka veel 100 aastat peale tema loomist, teiste hulgas Mindingi kolmanda järglase G.V.Kolossovi poolt.

Kasutatud kirjandus

1. Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A.L.Crelle, Band 14, 1835 und Band 15, 1836.

2. F.Minding, Handbuch der theoretischen Mechanik, Berlin, 1838.

3. Г. Ряго, Из жизни и деятельности четырёх замечательных математиков Тартуского университета.
Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised, vihik 37, Tallinn, 1955.

4. Статика, курс читанный проф. П. Г. Сомовым в 1915 году, Петроград.

5. H.E.Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig, 1908.

6. F.Auerbach und W.Hort, Technische und physikalische Mechanik starrer Systeme, Leipzig, 1929.