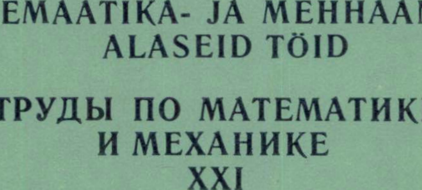
TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 448 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

FUNKTSIONAALANALÜÜSI RAKENDUSED FUNKTSIOONITEOORIAS JA ARVUTUSMEETODITES

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
XXI



ТАРТУ 1978

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 448 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

FUNKTSIONAALANALÜÜSI RAKENDUSED FUNKSIOONITEOORIAS JA ARVUTUSMEETODITES

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
XXI

ТАРТУ 1978

Настоящее издание является межвузовским сборником высших учебных заведений Эст. ССР.

Ученые записки Тартуского государственного университета
Выпуск 448
ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА
К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЙ
Труды по математике и механике XXI
На русском языке
Резюме на эстонском, английском и немецком языках
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Ответственный редактор С. Барон
Корректоры В. Логинова, О. Мутт, К. Уусталу
Сдано в набор 4/VII 1977. Подписано к печати 19/V 1978. Бумага типографская № 1, 60×90 1/16. Печ. листов 10,0. Учетно-издат. листов 10,68. Тираж 450. МВ 04904. Заказ № 3490.
Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II
Цена 1 руб. 60 коп.
2—2

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 3—11.

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. Абель

Тартуский государственный университет

Введение

1. Пусть (всюду в этой статье) A, B, C и D — локально выпуклые пространства[1]. Далее, через A' обозначается слабое сопряженное пространство пространства A, через $\mathfrak{E}(A)$ — множество всех равностепенно непрерывных подмножеств пространства A', а через $A \otimes B$ — тензорное произведение пространств A и B, наделенное топологией ε биравностепенно непрерывной сходимости, порожденной семейством

$$\{p_{S\otimes T}\colon S \in \mathfrak{E}(A),\ T \in \mathfrak{E}(B)\}$$

непрерывных полунорм, где

$$p_{S\otimes T}(u) = \sup\{|\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_k)\psi(b_k)|\colon \varphi \in S,\ \psi \in T,\ u = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k\}.$$

Пополнение тензорного произведения $A \otimes B$ в этой топологии обозначается через $A \otimes_\varepsilon B$.

2. Пусть X — вполне регулярное пространство. Через $C(X, A)$ обозначается пространство[2] всех непрерывных функций $f\colon X \to A$, а через $C_c(X, A)$ — пространство тех $f \in C(X, A)$, для которых $f(X)$ относительно компактно в A. Если X является локально компактным пространством, то через $C_0(X, A)$ обозначается пространство тех $f \in C(X, A)$, которые стремятся[3] к нулю в бесконечности пространства X. Пространство $C(X, A)$ наделим топологией компактной сходимости, а

[1] Рассматриваются только отделимые локально выпуклые пространства над F, т. е. над $\mathbf{R}$ или над $\mathbf{C}$.

[2] Алгебраические операции над функциями определяются, как обычно, поточечно.

[3] Функция $f \in C(X, A)$ называется стремящейся к нулю в бесконечности пространства X, если для каждой окрестности нуля O пространства A существует компактное подмножество $K \subset X$ такое, что $f(x) \in O$ при $x \in X \setminus K$.

пространства $C_c(X, A)$ и $C_0(X, A)$ — топологией равномерной сходимости. В случае, когда $A = F$ вместо $C(X, A)$, $C_c(X, A)$ и $C_0(X, A)$ пишем соответственно[4] $C(X)$, $C^*(X)$ и $C_0(X)$.

3. В настоящей статье обобщаются некоторые результаты Гротендика (см. [12], стр. 128, и [13], стр. 90) и Дитриха (см. [7], теорема 3) на случай пространств векторнозначных функций. Точнее, показывается справедливость следующих утверждений[5]:

$C(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C(X, A \otimes_\varepsilon B)$, если X — вполне регулярное k-пространство;

$C(X, A) \otimes_\varepsilon C(Y, B) \cong C(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B)$, если X и Y — такие вполне регулярные k-пространства, для которых и $X \times Y$ является k-пространством;

$C(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C(X, A \otimes_\varepsilon B)$, если X — вполне регулярное T_1-пространство;

$C_c(X, A) \otimes_\varepsilon C_c(Y, B) \cong C_c(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B)$, если X и Y — такие вполне регулярные T_1-пространства, для которых пространства[6] $\beta X \times \beta Y$ и $\beta(X \times Y)$ гомеоморфны;

$C_0(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C_0(X, A \otimes_\varepsilon B)$ для любого локально компактного отделимого пространства X;

$C_0(X, A) \otimes_\varepsilon C_0(Y, B) \cong C_0(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B)$ для любых локально компактных отделимых пространств X и Y.

В качестве вспомогательных результатов показывается, что $A \otimes_\varepsilon (B \otimes_\varepsilon C) \cong (A \otimes_\varepsilon B) \otimes_\varepsilon C$, что известно в случае банаховых пространств (см. [15], стр. 129).

Основная теорема

Как известно (см. [7], стр. 206), тензорное произведение $C(X) \otimes_\varepsilon A \cong C(X, A)$, если X — вполне регулярное k-пространство и A полно. В случае неполного пространства A справедлива

Лемма 1. *Если X — вполне регулярное k-пространство, то*[7] $C(X) \otimes_\varepsilon A \cong C(X, \tilde{A})$.

Доказательство. Как известно (см. [7], стр. 206), существует изоморфизм π из $C(X) \otimes A$ в $C(X, A)$. Пусть $\varkappa^0$ обозначает изоморфизм из $C(X, A)$ в $C(X, \tilde{A})$, определяемый равенством $\varkappa^0(f) = \varkappa_A \circ f$ для каждой $f \in C(X, A)$. Тогда композиция $\sigma = (\varkappa^0) \circ \pi$ определяет изоморфизм из $C(X) \otimes A$ в

[4] Пространство $C_c(X, F)$ совпадает с пространством $C^*(X, F)$ всех непрерывных ограниченных функций на X.

[5] Здесь и в дальнейшем пишем $A \cong B$, если существует изоморфизм A на B. При этом всюду под термином «изоморфизм» понимается «топологический изоморфизм».

[6] Через βX обозначается стоун-чеховское расширение пространства X.

[7] Через $\tilde{A}$ обозначается пополнение пространства A, а через $\varkappa_A : A \to \tilde{A}$ — изоморфизм, определяемый пополнением пространства A.

$C(X, \tilde{A})$. Так как [8] $\alpha \varkappa_A(a) = \sigma(\alpha \otimes a)$ при $\alpha \in C(X)$ и $a \in A$, то [9] $\mathrm{im}\,\sigma$ содержит линейную оболочку множества $\{\alpha \varkappa_A(a) : \alpha \in C(X, \mathbf{R}),\ a \in A\}$. Поэтому, по следствию 1 из [1], справедливо [10] соотношение $\mathrm{cl}\,(\mathrm{im}\,\sigma) = C(X, \tilde{A})$. Учитывая теперь полноту пространства $C(X, \tilde{A})$ (см., например, [14], стр. 231), получаем, что существует продолжение $\sigma^{\sim}$ изоморфизма σ из $C(X) \otimes_\varepsilon A$ на $C(X, \tilde{A})$, являющееся изоморфизмом (см. [5], стр. 158).

Лемма 2. *Если $\varrho : A \to C$ и $\delta : B \to D$ — такие изоморфизмы, что $\mathrm{cl}\,\varrho(A) = C$ и $\mathrm{cl}\,\delta(B) = D$, то $A \otimes_\varepsilon B \cong C \otimes_\varepsilon D$.*

Доказательство. Пусть элемент $u \in C \otimes D$ представим в виде

$$u = \sum_{k=1}^{n} c_k \otimes d_k,$$

а $\{\varrho[a_\alpha(k)] : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и $\{\delta[b_\beta(k)] : \beta \in \mathfrak{B}\}$ — сети, сходящиеся соответственно к c_k и d_k при [11] $k \in \mathbf{N}_n$. Далее, для каждых множеств $S \in \mathfrak{E}(C)$ и $T \in \mathfrak{E}(D)$ и чисел $k \in \mathbf{N}_n$ и $\varepsilon > 0$ пусть $O(c_k)$ и $O(d_k)$ — такие окрестности элементов c_k и d_k, что

$$|\varphi(c - c_k)| < \varepsilon/(2M(T)),$$

и

$$|\psi(d - d_k)| < \varepsilon/(2N(S, T, \varepsilon))$$

при $\varphi \in S$, $\psi \in T$, $c \in O(c_k)$ и $d \in O(d_k)$, где [12]

$$M(T) = \sup\,\{\sum_{k=1}^{n} |(d_k)^{\Delta}(\psi)| : \psi \in \mathrm{cl}\,T\}$$

и

$$N(S, T, \varepsilon) = n\varepsilon/(2M(T)) + \sup\,\{\sum_{k=1}^{n} |(c_k)^{\Delta}(\varphi)| : \varphi \in \mathrm{cl}\,S\}.$$

Теперь, учитывая вышесказанное, получаем, что существуют такие $\alpha_k \in \mathfrak{A}$ и $\beta_k \in \mathfrak{B}$, что

$$|\varphi\{\varrho[a_\alpha(k)] - c_k\}| < \varepsilon/(2M(T))$$

и

$$|\psi\{\delta[b_\beta(k)] - d_k\}| < \varepsilon/(2N(S, T, \varepsilon))$$

при $\alpha \geqslant \alpha_k$, $\beta \geqslant \beta_k$, $\varphi \in S$, $\psi \in T$ и $k \in \mathbf{N}_n$. Поэтому

$$H_1 = p_{S \otimes T}\{\sum_{k=1}^{n} (\varrho[a_\alpha(k)] - c_k) \otimes d_k\} <$$

$$< \varepsilon/(2M(T)) \cdot \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\psi(d_k)| : \psi \in T\} \leqslant \varepsilon/2$$

при $\alpha \geqslant \alpha_0$, где $\alpha_0 \geqslant \alpha_k$ для каждого $k \in \mathbf{N}_n$, а

---

[8] Через βa обозначается функция, удовлетворяющая на X условию $(\beta a)(x) = \beta(x)a$ для каждой $\beta \in C(X)$ и $a \in A$.

[9] Здесь и в дальнейшем, если $\sigma : A \to B$, то $\mathrm{im}\,\sigma = \sigma(A) \subseteq B$.

[10] Здесь и в дальнейшем через $\mathrm{cl}\,X$ обозначается замыкание множества $X \subseteq Y$ в топологии пространства Y.

[11] Здесь и в дальнейшем $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

[12] Для каждого $a \in A$ через a^{Δ} обозначается отображение, удовлетворяющее условию $a^{\Delta}(\varphi) = \varphi(a)$ при $\varphi \in A'$. При этом в слабой топологии a^{Δ} является непрерывным на A'.

$$H_2 = p_{S\otimes T}\{\sum_{k=1}^{n} \varrho[a_\alpha(k)] \otimes (\delta[b_\beta(k)] - d_k)\} <$$

$$< \varepsilon/(2N(S,T,\varepsilon)) \cdot \sum_{k=1}^{n} |\varphi(\varrho[a_\alpha(k)])| \leqslant \varepsilon/2$$

при $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $\beta \geqslant \beta_0$, где $\beta_0 \geqslant \beta_k$ для каждого $k \in \mathbf{N}_n$.

Пусть теперь

$$w_{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^{n} \varrho[a_\alpha(k)] \otimes \delta[b_\beta(k)].$$

Поскольку

$$p_{S\otimes T}(w_{\alpha,\beta} - u) \leqslant H_1 + H_2 < \varepsilon$$

при $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $\beta \geqslant \beta_0$, то сеть[13] $\{w_{\alpha,\beta} : (\alpha, \beta) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\} \subset \subset \mathrm{im}(\varrho \otimes \delta)$ сходится к u в топологии ε пространства $C \otimes D$. Следовательно, $\mathrm{cl}\,[\mathrm{im}(\varrho \otimes \delta)] = C \otimes D$.

Отображение $\varrho \otimes \delta$ является линейной инъекцией из $A \otimes B$ в $C \otimes D$. Кроме того, для каждых $S \in \mathfrak{E}(C)$ и $T \in \mathfrak{E}(D)$, справедливо неравенство

$$p_{S\otimes T}[(\varrho \otimes \delta)(u)] \leqslant p_{U\otimes V}(u),$$

где $U = \varrho'(S) \in \mathfrak{E}(A)$ и $V = \delta'(T) \in \mathfrak{E}(B)$, а для каждых $U \in \mathfrak{E}(A)$ и $V \in \mathfrak{E}(B)$ справедливо неравенство

$$p_{U\otimes V}(u) \leqslant p_{S\otimes T}[(\varrho \otimes \delta)(u)],$$

где $S = (\varrho')^{-1}(U) \in \mathfrak{E}(C)$ и $T = (\delta')^{-1}(V) \in)\mathfrak{E}(D)$. Поэтому $\varrho \otimes \delta$ определяет изоморфизм из $A \otimes B$ на всюду плотное подпространство в $C \otimes D$. В силу этого, $\tau = (\varkappa_{C\otimes D}) \circ (\varrho \otimes \delta)$ определяет изоморфизм из $A \otimes B$ на всюду плотное подпространство в $C \otimes_\varepsilon D$. Следовательно, продолжение τ^- изоморфизма τ есть изоморфизм из $A \otimes_\varepsilon B$ на $C \otimes_\varepsilon D$ (см. [5], стр. 158).

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$(A \otimes_\varepsilon B) \otimes_\varepsilon C \cong A \otimes_\varepsilon (B \otimes_\varepsilon C)$$

Доказательство. Как показано в [4], стр. 459, отображение $\nu : (a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$, где $a \in A$, $b \in B$ и $c \in D$, определяет линейную биекцию из $(A \otimes B) \otimes C$ на $A \otimes (B \otimes C)$. Пусть $\iota = \varkappa_{B\otimes C}$. Поскольку $\iota' : (B \otimes_\varepsilon C)' \to (B \otimes C)'$ является биекцией, то $(\iota')^{-1}(W) \in \mathfrak{E}(B \otimes_\varepsilon C)$ для каждого $W \in \mathfrak{E}(B \otimes C)$. В силу этого (см. [6], стр. 215), каждое $W \in \mathfrak{E}(B \otimes C)$ определяет замкнутые множества $T \in \mathfrak{E}(B)$ и $V \in \mathfrak{E}(C)$ и ограничен-

[13] Через $\delta \otimes \varrho$ обозначается отображение из $A \otimes B$ в $C \otimes D$, определяемое равенством

$$(\varrho \otimes \delta)(u) = \sum_{k=1}^{n} \varrho(a_k) \otimes \delta(b_k)$$

для каждого $u = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k \in A \otimes B$.

ное по норме подмнжество $M \subseteq C(T \times V)'$ такие, что для любого $\omega \in W$

$$\omega(b \otimes c) = (\iota')^{-1}(\omega)[\iota(b \otimes c)] = \mu[\iota(b \otimes c) \mid (T \times V)],$$

где $\mu \in M$. Таким образом, существуют $N > 0$ и $L > 0$ с

$$|\omega(b \otimes c)| \leqslant N \sup\{|[\iota(b \otimes c)](\psi, \chi)|: \psi \in T, \chi \in V\} =$$
$$= N\bar{p}_{T \otimes V}[\iota(b \otimes c)] \leqslant$$
$$\leqslant NLp_{T' \otimes V'}(b \otimes c),$$

где $T' \in \mathfrak{E}(B)$ и $V' \in \mathfrak{E}(C)$, а $\bar{p}_{T \otimes V}$ обозначает продолжение полунормы $p_{T \otimes V}$ на $B \otimes_\varepsilon C$. Учитывая это, для каждых $S \in \mathfrak{E}(A)$ и $W \in \mathfrak{E}(B \otimes C)$ имеем

$$p_{S \otimes W}[a \otimes (b \otimes c)] \leqslant$$
$$\leqslant NL \sup\{|(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b)\chi(c)|: \varphi \in S, \psi \in T', \chi \in V'\} =$$
$$= NLp_{U \otimes V'}[(a \otimes b) \otimes c]$$

при $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$, где [14] $U = S \otimes T' \in \mathfrak{E}(A \otimes B)$. Итак, отображение ν непрерывно на $(A \otimes B) \otimes C$. Аналогично для каждых $U \in \mathfrak{E}(A \otimes B)$ и $V \in \mathfrak{E}(C)$ существуют $K > 0$, $S \in \mathfrak{E}(A)$ и $T \in \mathfrak{E}(B)$ такие что

$$p_{U \otimes V}[(a \otimes b) \otimes c] \leqslant Kp_{S \otimes W}[a \otimes (b \otimes c)]$$

при $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$, где $W = T \otimes V \in \mathfrak{E}(B \otimes C)$. Значит, отображение ν^{-1} непрерывно на $A \otimes (B \otimes C)$. Таким образом, ν определяет изоморфизм из $(A \otimes B) \otimes C$ на $A \otimes (B \otimes C)$. В силу этого, композиция $\eta = \varkappa_{A \otimes (B \otimes C)} \circ \nu$ является изоморфизмом из $(A \otimes B) \otimes C$ на всюду плотное подпространство в $A \otimes_\varepsilon (B \otimes C)$ и имеет продолжение η^-, отображающее $(A \otimes B) \otimes_\varepsilon C$ изоморфно на $A \otimes_\varepsilon (B \otimes C)$.

Так как по лемме 2 имеем $(A \otimes B) \otimes_\varepsilon C \cong (A \otimes_\varepsilon B) \otimes_\varepsilon C$ и $A \otimes_\varepsilon (B \otimes C) \cong A \otimes_\varepsilon (B \otimes_\varepsilon C)$, то $(A \otimes_\varepsilon B) \otimes_\varepsilon C \cong A \otimes_\varepsilon (B \otimes_\varepsilon C)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если X — вполне регулярное k-пространство, то*

$$C(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C(X, A \otimes_\varepsilon B).$$

Доказательство. Так как $\varkappa^0$ определяет изоморфизм из $C(X, A)$ в $C(X, \tilde{A}) = \mathrm{cl}(\mathrm{im}\,\varkappa^0)$, то по леммам 1, 2, и 3 получаем, что

$$C(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C(X, \tilde{A}) \otimes_\varepsilon B \cong (C(X) \otimes_\varepsilon A) \otimes_\varepsilon B \cong$$
$$\cong C(X) \otimes_\varepsilon (A \otimes_\varepsilon B) \cong C(X, A \otimes_\varepsilon B).$$

---

[14] Как известно (см. [5], стр. 199), поляра множества $S \otimes T'$ является окрестностью нуля в $A \otimes B$. Следовательно (см. [6], стр. 160), $S \otimes T' \in \mathfrak{S}(A \otimes B)$.

Следствие 1. *Если X и Y — такие вполне регулярные k-пространства, что и $X \times Y$ является k-пространством, то* [15]

$$C(X, A) \otimes_\varepsilon C(Y, B) \cong C(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B).$$

Доказательство. Нетрудно показать, что $f \mapsto \varphi \circ f$ определяет изоморфизм из $C(X, A)$ на $C(X, B)$ для каждого изоморфизма φ из A на B. Поэтому, по теореме 1, лемме 2 и[16] теореме 2 книги [10], стр. 207, справедливы[17] соотношения

$$C(X, A) \otimes_\varepsilon C(Y, B) \cong C(X, A \otimes_\varepsilon C(Y, B)) \cong C(X, C(Y, B) \otimes_\varepsilon A) \cong$$
$$\cong C(X, C(Y, A) \otimes_\varepsilon B) \cong C(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B).$$

Некоторые применения

1. Как известно (см. [2], предложение 3), если X — вполне регулярное T_1-пространство, то $C(\beta X, A) \cong C_c(X, A)$. Поэтому, по лемме 2 и теореме 1,

$$C_c(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C(\beta X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C(\beta X, A \otimes_\varepsilon B) \cong C_c(X, A \otimes_\varepsilon B).$$

Итак, справедлива

Теорема 2. *Если X — вполне регулярное T_1-пространство, то*

$$C_c(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C_c(X, A \otimes_\varepsilon B).$$

Из теоремы 2 непосредственно следует

Следствие 2. *Если X — вполне регулярное T_1-пространство, то*

$$C^*(X) \otimes_\varepsilon A \cong C_c(X, \tilde{A}).$$

Следствие 3. *Если X и Y — такие вполне регулярные T_1-пространства, для которых*[18] $\beta X \times \beta Y$ *и* $\beta(X \times Y)$ *гомеоморфны, то*

$$C_c(X, A) \otimes_\varepsilon C_c(Y, B) \cong C_c(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B).$$

Доказательство. Отображение $f \mapsto f \circ \psi$ определяет изоморфизм из $C(X, A)$ на $C(Y, A)$ для каждого гомеоморфизма ψ пространства Y на X. Таким образом, по лемме 2 и следствию 1 получаем

$$C_c(X, A) \otimes_\varepsilon C_c(Y, B) \cong C(\beta X, A) \otimes_\varepsilon C(\beta Y, B) \cong$$
$$\cong C(\beta X \times \beta Y, A \otimes_\varepsilon B) \cong$$
$$\cong C(\beta(X \times Y), A \otimes_\varepsilon B) \cong$$
$$\cong C_c(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B).$$

---

[15] В [9], на стр. 249, приведен пример произведения k-пространств X и Y, которое не является k-пространством. При этом $X \times Y$ есть k-пространство, если X является k-пространством, а Y — локально компактным пространством (см. [9], стр. 263).

[16] В частном случае, когда Y локально компактно, можно использовать и результат из [3], на стр. 222.

[17] Нетрудно показать, что $A \otimes_\varepsilon B \cong B \otimes_\varepsilon A$.

2. Пусть X — локально компактное отделимое пространство, x_∞ — бесконечность пространства X и $X_\infty = X \cup \{x_\infty\}$. Далее, пусть θ — нулевой элемент пространства A. Обозначим

$$C(X_\infty \parallel x_\infty, A) = \{f \in C(X_\infty, A) : f(x_\infty) = \theta\}.$$

Пусть для каждой $f \in C_0(X, A)$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in X, \\ \theta & \text{при } x = x_\infty. \end{cases}$$

Отображение $f \mapsto \bar{f}$ является изоморфизмом из $C_0(X, A)$ на $C(X_\infty \parallel x_\infty, A)$.

Лемма 4. *Если X — локально компактное отделимое пространство, то*[19]

$$C_0(X) \otimes_\varepsilon A \cong C_0(X, \tilde{A}).$$

Доказательство. Как показано в доказательстве леммы 1, существует отображение σ, отображающее $C(X_\infty) \otimes A$ изоморфно в $C(X_\infty, \tilde{A})$. Пусть $\sigma' = \sigma | (C(X_\infty \parallel x_\infty) \otimes A)$. Тогда $\operatorname{im} \sigma' \subset C(X_\infty \parallel x_\infty, \tilde{A})$. Так как $\alpha \varkappa_A(a) = \sigma'(\alpha \otimes a)$ для каждых $\alpha \in C(X_\infty \parallel x_\infty)$ и $a \in A$, то $\operatorname{im} \sigma'$ содержит линейную оболочку множества $\{\alpha \varkappa_A(a) : \alpha \in C(X_\infty \parallel x_\infty, \mathbf{R}),\ a \in A\}$. Поэтому, по теореме 1 из [1], справедливо равенство $\operatorname{cl}(\operatorname{im} \sigma) = C(X_\infty \parallel x_\infty, \tilde{A})$. В силу этого, существует продолжение $(\sigma')^-$ изоморфизма σ', отображающее $C(X_\infty \parallel x_\infty) \otimes_\varepsilon A$ изоморфно на $C(X_\infty \parallel x_\infty, \tilde{A})$. Поэтому и по лемме 2 имеем $C(X_\infty \parallel x_\infty) \otimes_\varepsilon A \cong C_0(X) \otimes_\varepsilon A$ и $C(X_\infty \parallel x_\infty, \tilde{A}) \cong C_0(X, \tilde{A})$. Следовательно, $C_0(X) \otimes_\varepsilon A \cong C_0(X, \tilde{A})$.

Теорема 3. *Если X — локально компактное отделимое пространство, то*

$$C_0(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C_0(X, A \otimes_\varepsilon B).$$

Доказательство. Так как $\varkappa^{00} = \varkappa^0 | C_0(X, A)$ определяет изоморфизм из $C_0(X, A)$ в $C_0(X, \tilde{A})$ и $\alpha \varkappa_A(a) = \varkappa^{00}(\alpha a)$ при $\alpha \in C_0(X)$ и $a \in A$, то $\operatorname{im} \varkappa^{00}$ содержит линейную оболочку множества $\{\alpha \varkappa_A(a) : \alpha \in C_0(X, \mathbf{R}),\ a \in A\}$. Поэтому и по следствию 1 из [1] справедливо равенство $\operatorname{cl}(\operatorname{im} \varkappa^{00}) = C_0(X, \tilde{A})$. Следовательно, по леммам 2, 3 и 4 имеем

$$C_0(X, A) \otimes_\varepsilon B \cong C_0(X, \tilde{A}) \otimes_\varepsilon B \cong (C_0(X) \otimes_\varepsilon A) \otimes_\varepsilon B \cong$$
$$\cong C_0(X) \otimes_\varepsilon (A \otimes_\varepsilon B) \cong C_0(X, A \otimes_\varepsilon B).$$

Следствие 4. *Если X и Y — локально компактные отделимые пространства, то*

$$C_0(X, A) \otimes_\varepsilon C_0(Y, B) \cong C_0(X \times Y, A \otimes_\varepsilon B).$$

---

[18] Как известно (см. [11], стр. 271), $\beta X \times \beta Y = \beta(X \times Y)$ тогда и только тогда, когда пространство $X \times Y$ псевдокомпактно. Пример пространств X и Y, для которых $\beta X \times \beta Y$ и $\beta(X \times Y)$ гомеоморфны, но не равны, приведен в [8]. Условия псевдокмпактности произведения пространств приведены, например, в [16].

[19] В случае полного A лемма 4 известна (см. [13], стр. 128).

Доказательство. Отображение $f \mapsto \varphi \circ f$ отображает $C_0(X, A)$ изоморфно на $C_0(X, B)$ для каждого изоморфизма φ из A на B. Поэтому, по леммам 2, 3 и 4 и теореме Гротендика (см., например, [15], стр. 357), имеем

$$\begin{aligned} C_0(X,A)\otimes_\varepsilon C_0(Y,B) &\cong C_0(X,\tilde{A})\otimes_\varepsilon C_0(Y,\tilde{B}) \cong \\ &\cong (C_0(X)\otimes_\varepsilon A)\otimes_\varepsilon(C_0(Y)\otimes_\varepsilon B) \cong \\ &\cong C_0(X)\otimes_\varepsilon[A\otimes_\varepsilon(C_0(Y)\otimes_\varepsilon B)] \cong \\ &\cong C_0(X)\otimes_\varepsilon[(C_0(Y)\otimes_\varepsilon B)\otimes_\varepsilon A] \cong \\ &\cong [C_0(X)\otimes_\varepsilon(C_0(Y)\otimes_\varepsilon B)]\otimes_\varepsilon A \cong \\ &\cong [(C_0(X)\otimes_\varepsilon C_0(Y))\otimes_\varepsilon B]\otimes_\varepsilon A \cong \\ &\cong (C_0(X\times Y)\otimes_\varepsilon B)\otimes_\varepsilon A \cong \\ &\cong C_0(X\times Y)\otimes_\varepsilon(A\otimes_\varepsilon B) \cong \\ &\cong C_0(X\times Y, A\otimes_\varepsilon B). \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Литература

1. Абель М., Условия всюду плотности в некоторых пространствах непрерывных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, **430**, 6—13.
2. Абель М., Описание линейных мультипликативных функционалов в алгебрах непрерывных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, **430**, 14—21.
3. Бурбаки Н., Общая топология. Москва, 1975.
4. Ленг С., Алгебра. Москва, 1968.
5. Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства. Москва, 1967.
6. Шефер Х., Топологические векторные пространства. Москва, 1971.
7. Dietrich, W., The maximal ideal space of the topological algebra $C(X, A)$. Math. Ann., 1969, **183**, 201—212.
8. Gillman, L., Jerison, M., Stone-Čech compactification of a product. Arch. Math., 1959, **10**, 443—446.
9. Dugundji, J., Topology. Boston, 1966.
10. Engelking, R., Topologia ogòlna. Warszawa, 1975.
11. Gliksberg, I., Stone-Čech compactification of products. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, 369—382.
12. Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires. Mem. Amer. Math. Soc., 1955, **16**, 1—186.
13. Grothendieck, A., Topological vector spaces. London, 1973.
14. Kelly, J. L., General topology. New York, 1975.
15. Semadeni, Z., Banach spaces of continuous functions. Warszawa, 1971.
16. Tamano, H., A note on the pseudo-compactness of the product of two spaces. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1960, **A33**, 225—230.

Поступило
2 II 1977

VEKTORVÄÄRTUSTEGA FUNKTSIOONIDE RUUMIDE TENSORKORRUTISED

M. Abel

Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse mõned Grothendiecki [12, 13] ja Dietrichi [7] tulemused vektorväärtustega funktsioonide ruumide juhule. Mistahes lokaalsete kumerate ruumide A ja B korral näidatakse, et $C(X,A)\otimes_\varepsilon B \cong C(X, A\otimes_\varepsilon B)$, kui X on täielikult regulaarne k-ruum; $C(X,A)\otimes_\varepsilon C(Y,B)\cong C(X\times Y, A\otimes_\varepsilon B)$, kui X ja Y on sellised täielikult regulaarsed k-ruumid, mille korral ka $X\times Y$ on k-ruum; $C_c(X,A)\otimes_\varepsilon B\cong C_c(X,A\otimes_\varepsilon B)$, kui X on täielikult regulaarne T_1-ruum; $C_c(X,A)\otimes_\varepsilon C_c(Y,B)\cong C_c(X\times Y, A\otimes_\varepsilon B)$, kui X ja Y on sellised täielikult regulaarsed T_1-ruumid, mille korral ruumid $\beta X\times\beta Y$ ja $\beta(X\times Y)$ on homöomorfsed; $C_0(X,A)\otimes_\varepsilon B\cong C_0(X,A\otimes_\varepsilon B)$, kui X on lokaalselt kompaktne eralduv ruum ning $C_0(X,A)\otimes_\varepsilon C_0(Y,B)\cong C_0(X\times Y, A\otimes_\varepsilon B)$, kui X ja Y on lokaalselt kompaktsed eralduvad ruumid. Abitulemusena näidatakse, et $(A\otimes_\varepsilon B)\otimes_\varepsilon C\cong A\otimes_\varepsilon(B\otimes_\varepsilon C)$ mistahes lokaalselt kumerate ruumide A, B ja C korral, mis on teada juhul, kui A, B ja C on Banachi ruumid (vt. [15], lk. 358).

TENSOR PRODUCTS OF SPACES OF VECTOR-VALUED FUNCTIONS

M. Abel

Summary

Let A and B be locally convex spaces, $A\otimes B$ be the tensor product of A and B and $A\otimes_\varepsilon B$ be the completion of $A\otimes B$ in the topology ε of biequicontinuous convergence. Let $C(X,A)$ denote the space of all continuous functions from X to A and $C_c(X,A)$ denote the space of all such $f\in C(X,A)$ for which $f(X)$ is relatively compact in A. For locally compact space X let $C_0(X,A)$ denote the space of all continuous functions from X to A which vanish at infinity of space X. The space $C(X,A)$ we endow with the topology of compact convergence but spaces $C_c(X,A)$ and $C_0(X,A)$ with the topology of uniform convergence.

In the present paper some results of Grothendieck [12, 13] and Dietrich [7] are generalized for spaces of vector-valued functions. For locally convex spaces A and B it is proved that

$C(X,A)\otimes_\varepsilon B\cong C(X,A\otimes_\varepsilon B)$ if X is a completely regular k-space;

$C(X,A)\otimes_\varepsilon C(Y,B)\cong C(X\times Y,A\otimes_\varepsilon B)$ if X and Y are such completely regular k-spaces for which $X\times Y$ is also a k-space;

$C_c(X,A)\otimes_\varepsilon B\cong C_c(X,A\otimes_\varepsilon B)$ if X is a completely regular T_1-space;

$C_c(X,A)\otimes_\varepsilon C_c(Y,B)\cong C_c(X\times Y,A\otimes_\varepsilon B)$ if X and Y are such completely regular T_1-spaces for which $\beta X\times\beta Y$ and $\beta(X\times Y)$ are homeomorphic (here βX denotes the Stone-Čech compactification of X);

$C_0(X,A)\otimes_\varepsilon B\cong C_0(X,A\otimes_\varepsilon B)$ if X is a locally compact Hausdorff space;

$C_0(X,A)\otimes_\varepsilon C_0(Y,B)\cong C_0(X\times Y,A\otimes_\varepsilon B)$ if X and Y are locally compact Hausdorff spaces.

As a suplement result it is proved that $(A\otimes_\varepsilon B)\otimes_\varepsilon C\cong A\otimes_\varepsilon(B\otimes_\varepsilon C)$ for locally convex spaces A, B and C, which is known in the case of Banach spaces (cf. [15], p. 358).

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 12—20.

О СТРОЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИФТИНГ

А. Монаков-Рогозкин

Таллинский педагогический институт

В работе изучается строение допускающих лифтинг порядковых идеалов пространства $S(X, \Sigma, \mu)$ измеримых функций. Как показано в [4] и [5], такие идеалы могут быть и порядково неограниченными подмножествами в $S(X, \Sigma, \mu)$. Среди них особое место занимают введенные в [4] пространства $K(\varrho)$, порожденные лифтингами пространства L^∞. При этом пространство $K(\varrho)$ определяется как наибольший идеал в $S(X, \Sigma, \mu)$, на который может быть продолжен лифтинг ϱ пространства L^∞. Изучается порядковая структура таких пространств, которые являются весьма неклассическими, в частности, они могут не иметь нетривиальных вполне линейных функционалов.

1. Введем некоторые предварительные понятия и обозначения. В терминологии, относящейся к теории упорядоченных пространств, мы следуем, в основном, монографии [2]. Подробные сведения, относящиеся к теории лифтинга, содержатся в [3] и [6].

Множество всех вещественных чисел обозначается через $\mathbf{R}$. Через $\mathbf{1} = \mathbf{1}_X$ и $\mathbf{0} = \mathbf{0}_X$ обозначаются вещественные функции на множестве X, равные тождественно единице и нулю соответственно. Характеристическая функция множества A обозначается через φ_A, а сужение функции f на множестве A — через $f \| A$. Если (Y, τ) — топологическое пространство (т. е. Y — множество и τ — топология на Y), то через $C_{\mathrm{R}}(Y, \tau)$ обозначается алгебра всех вещественных непрерывных функций на Y, а через $C_{\mathrm{R}}{}^b(Y, \tau)$ — алгебра всех ограниченных функций из $C_{\mathrm{R}}(Y, \tau)$.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой такое, что $X \in \Sigma$, $M = M(X, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественно-значных измеримых функций на X с поточечными алгебраическими операциями и поточечным отношением порядка и $N = N(X, \Sigma, \mu)$ — идеал всех μ-пренебрежимых функций из M. Обозначим через $S = S(X, \Sigma, \mu)$ факторпространство M/N и пусть $\pi : M(X, \Sigma, \mu) \to S(X, \Sigma, \mu)$ — канонический гомоморфизм. Будем писать

$\pi(f)=f^*$. В пространстве S будут рассматриваться естественные алгебраические операции и порядок. В частности, мы полагаем $f^* \leqslant g^*$, если $f(x) \leqslant g(x)$ почти всюду на X. Пусть Σ_0 — совокупность всех множеств из Σ конечной меры, N_0 — идеал всех μ-пренебрежимых множеств, $\Omega=\Sigma/N_0$ — булева алгебра классов эквивалентных измеримых множеств и $\pi_0:\Sigma\to\Omega$ — канонический гомоморфизм. Будем писать $\pi_0(A)=A^*$. Если $A\in\Sigma$, то положим $\Sigma_A=\{A\cap B : B\in\Sigma\}$ и будем обозначать через μ_A сужение меры μ на σ-алгебру Σ_A. Обозначим, далее, через $M^\infty=M^\infty(X,\Sigma,\mu)$ пространство всех почти всюду ограниченных функций из M и пусть $L^\infty = L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ обозначает пространство $\pi(M^\infty)$. Если H — идеал[1] в $S(X,\Sigma,\mu)$ и $A\in\Sigma$, то через $(H;A^*)$ будет обозначаться компонента $\{f^*\varphi_A{}^* : f^*\in H\}$ пространства H.

Пусть H — векторная подрешетка пространства $S(X,\Sigma,\mu)$. *Лифтингом пространства H* называется такой решеточный гомоморфизм $\varrho: H\to\pi^{-1}(H)$, что $\pi\circ\varrho$ — тождественное отображение на H. Всякое пространство, в котором существует лифтинг, будем называть *пространством, допускающим лифтинг.*

Желая отметить, что $\varrho(u^*)=u$ для некоторой функции $u\in\pi^{-1}(H)$, мы будем говорить, что лифтинг ϱ является *u-лифтингом.*

Отметим особо, что в литературе под лифтингом ϱ пространства L^∞ понимается обычно $\mathbf{1}$-лифтинг, т. е. требуется, чтобы $\varrho(\mathbf{1}^*)=\mathbf{1}$. Если ϱ есть $\mathbf{1}$-лифтинг пространства L^∞, то соотношение

$$\varphi_{\varrho'(A^*)}=\varrho(\varphi_A{}^*), \qquad \text{где} \qquad A^*\in\Omega,$$

индуцирует *лифтинг на множествах* [3, 6], т. е. такой булевский гомоморфизм $\varrho':\Omega\to\Sigma$, что $\varrho(\varnothing^*)=\varnothing$, $\varrho(X^*)=X$ и $\pi_0\circ\varrho$ — тождественное отображение. В дальнейшем лифтинг на множествах, индуцированный лифтингом ϱ, будет обозначаться той же буквой ϱ. Будем говорить также о *лифтинге ϱ пространства* (X,Σ,μ), подразумевая под этим пару: $\mathbf{1}$-лифтинг пространства L^∞ и соответствующий лифтинг на множествах.

В теории лифтинга обычно предполагается, что пространство с мерой (X,Σ,μ) обладает следующими свойствами. Пусть $C(\mu)$ — семейство всех разбиений $\{X_\xi : \xi\in\Xi\}$ множества X таких, что

1) $0<\mu(X_\xi)<\infty$ для всех $\xi\in\Xi$;

2) если $0<\mu(A)<\infty$, то найдется не более чем счетное множество индексов Ξ_A, для которого

$$\mu(A\setminus\bigcup_{\xi\in\Xi_A} X_\xi)=0.$$

---

[1] *Порядковым идеалом* (в дальнейшем просто *идеалом*) в S будем называть всякое его линейное подмножество H такое, что если $f^*\in H$, $g^*\in S$, $|g^*|\leqslant|f^*|$, то $g^*\in H$.

Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что мера μ обладает *свойством прямой суммы*, т. е.

1) (X, Σ, μ) полно по мере;

2) если $B \cap A \in \Sigma$ для всех $A \in \Sigma_0$, то $B \in \Sigma$ и $\mu(B) = \sup\{\mu(A) : A \subset B,\ A \in \Sigma_0\}$;

3) $C(\mu) \neq \varnothing$.

При этих условиях существует 1-лифтинг пространства L^∞, булева алгебра Ω полна, а $S(X, \Sigma, \mu)$ является K-пространством [3, 6].

В работе [4] получен следующий результат.

Теорема 1. *Для всякого 1-лифтинга ϱ пространства $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ существует порядковый идеал $K(\varrho)$ пространства $S(X, \Sigma, \mu)$ со следующими свойствами:*

а) $L^\infty \subset K(\varrho)$;

б) *в пространстве $K(\varrho)$ существует лифтинг, продолжающий ϱ* (в дальнейшем обозначаемый той же буквой ϱ);

в) $K(\varrho)$ — *наибольший идеал с такими свойствами.*

Этот результат получен в [4] и [5] различными способами, кроме того, показано, что продолжение лифтинга ϱ на $K(\varrho)$ всегда единственно. Будем называть $K(\varrho)$ *пространством, порожденным лифтингом* ϱ. Приведем одно явное описание пространства $K(\varrho)$. Пусть T_ρ есть топология на X, база которой образована всеми множествами вида $A = \varrho(A^*)$. Тогда $\varrho(L^\infty) = C_R{}^b(X, T_\rho)$ (см. [3, 6]) и, как показано в [5], стр. 17, $K(\varrho) = \pi(C_R(X, T_\rho))$ и $\varrho(K(\varrho)) = C_R(X, T_\rho)$. Отсюда следует, что пространство $K(\varrho)$ замкнуто относительно суперпозиций его элементов с непрерывными функциями из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, т. е. если $f^* \in K(\varrho)$ и $h \in C_R(\mathbf{R})$, то $(h \circ f)^* \in K(\varrho)$. Пространство $K(\varrho)$ может быть порядково неограниченным в S, оно является в нем подалгеброй и всякий лифтинг ϱ мультипликативен на порожденном им пространстве $K(\varrho)$ (см. [4, 5]).

2. Покажем прежде всего, что при изучении допускающих лифтинг идеалов пространства S можно, не умаляя общности, считать меру μ конечной, а эти идеалы — содержащими пространство L^∞.

Теорема 2. *Для всякого порядкового идеала $H \subset S(X, \Sigma, \mu)$ существует дизъюнктное семейство $\{X_\xi : \xi \in \Xi\}$ элементов булевой алгебры Ω, обладающее следующими свойствами:*

1) $0 < \mu(X_\xi) < \infty$ *для всех* $\xi \in \Xi$;

2) *для любого* $\xi \in \Xi$ *либо* $(L^\infty; X_\xi{}^*) \subset H$, *либо* $(H; X_\xi{}^*) = \{0^*\}$;

3) $\sup\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi{}^* = X^*$.

Более того, множества X_ξ можно выбрать такими, чтобы семейство $\{X_\xi : \xi \in \Xi\}$ принадлежало $C(\mu)$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{A^* : A^* \in \Omega,\ 0 < \mu(A) < \infty,\ (L^\infty; A^*) \subset H\}.$$

Пусть $X_1^* = \sup \Gamma$, тогда если $B^* \subset X_1^*$ и $0 < \mu(B) < \infty$, то существует такое $E^* \in \Gamma$, что $E^* \subset B^*$. Таким образом, множество Γ минорантно в порожденной элементом X_1^* компоненте полной булевой алгебры Ω и, в силу принципа исчерпывания ([1], стр. 112), найдется дизъюнктное семейство $\{X_\xi : \xi \in \Xi_1\}$ элементов Γ, для которого

$$\sup_{\xi \in \Xi_1} X_\xi^* = X_1^*.$$

Рассуждая аналогично для системы всех элементов конечной положительной меры из Ω и компоненты, порожденной элементом $X_0^* = \complement X_1^* = X^* \setminus X_1^*$, мы получим систему $\{X_\xi^* : \xi \in \Xi_0\}$, для которой

$$\sup_{\xi \in \Xi_0} X_\xi^* = X_0^*.$$

Если теперь положить $\Xi = \Xi_0 \cup \Xi_1$, то система $\{X_\xi^* : \xi \in \Xi\}$ очевидно обладает свойствами 1) и 3). Свойство 2) также выполнено, поскольку, как легко показать, $(H; X_0^*) = \{0\}$.

Для доказательства последнего утверждения теоремы возьмем произвольный лифтинг σ пространства (X, Σ, μ) и положим $X_\xi = \sigma(X_\xi^*)$ для $\xi \in \Xi$. Тогда [3, 6] множество

$$Y = \bigcup_{\xi \in \Xi} X_\xi$$

измеримо и

$$Y^* = \sup_{\xi \in \Xi} X_\xi^*,$$

тем самым $Y^* = X^*$. Присоединяя пренебрежимое множество

$$X \setminus \bigcup_{\xi \in \Xi} X_\xi$$

к одному из множеств X_ξ, мы и получим требуемое семейство $\{X_\xi : \xi \in \Xi\}$ из $C(\mu)$.

Теорема 2 доказана.

Пусть $\{X_\xi : \xi \in \Xi\}$ — семейство подмножеств X, подобранное по теореме 2. Положим, обозначая $X(\xi) = X_\xi$,

$$G_\xi = \{f \mid X_\xi : f \in \pi^{-1}(H)\}, \quad \Sigma_\xi = \Sigma_{X(\xi)} \quad \text{и} \quad \mu_\xi = \mu_{X(\xi)}.$$

Пусть N_ξ — идеал всех μ_ξ-пренебрежимых подмножеств из X_ξ и $\pi_\xi : M(X_\xi, \Sigma_\xi, \mu_\xi) \to S(X_\xi, \Sigma_\xi, \mu_\xi)$ — канонический гомоморфизм. Обозначим также $H_\xi = \pi_\xi(G_\xi)$; ясно, что H_ξ изоморфно компоненте $(H; X_\xi^*)$.

Теорема 3. *Пусть H — идеал в $S(X, \Sigma, \mu)$ и $\{X_\xi : \xi \in \Xi\}$ — принадлежащее $C(\mu)$ семейство подмножеств X, подобранное согласно теореме 2. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Пространство H допускает лифтинг.*

(2) *Каждая компонента $(H; X_\xi^*)$, где $\xi \in \Xi$, допускает лифтинг.*

(3) *Каждое пространство H_ξ допускает лифтинг.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Пусть ϱ_ξ — лифтинг компоненты $(H; X_\xi^*)$. Для $f \in G_\xi$ положим

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X_\xi, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus X_\xi, \end{cases}$$

тогда $\bar{f}^* \in (H; X_\xi^*)$ и, если $\pi_\xi(f) = \pi_\xi(g)$, то $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$ почти всюду на X. Отсюда легко вывести, что формула

$$\delta_\xi(f^*) = \varrho_\xi(\bar{f}^*) \mid X_\xi, \text{ где } f^* \in H_\xi,$$

определяет лифтинг δ_ξ пространства H_ξ. Таким образом, (2) $\Rightarrow$ (3).

Докажем наконец, что (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть δ_ξ — лифтинг пространства H_ξ. Для $f^* \in H$ и $x \in X$ положим $f_\xi = f \mid X_\xi$ и

$$\varrho(f^*)(x) = \delta_\xi(\pi_\xi(f_\xi))(x), \quad \text{если} \quad x \in X_\xi.$$

Тогда произведение $\varrho(f^*)$ на характеристическую функцию любого множества X_ξ принадлежит $M(X, \Sigma, \mu)$. Так как семейство $\{X_\xi : \xi \in \Xi\}$ входит в $C(\mu)$, мы получаем, что $\varrho(f^*) \in M(X, \Sigma, \mu)$. Далее, множество $\{x : \varrho(f^*)(x) \neq f(x)\}$ имеет пренебрежимое пересечение с любым X_ξ, т. е. оно локально пренебрежимо, а, значит, и пренебрежимо. Следовательно, $(\varrho(f^*))^* = f^*$. Нетрудно проверить, что ϱ обладает и всеми остальными свойствами лифтинга.

Теорема 3 доказана.

Следствие. *Для того, чтобы идеал H пространства $S(X, \Sigma, \mu)$ допускал лифтинг, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали все компоненты $(H; A^*)$ пространства H такие, что $0 < \mu(A) < \infty$ и $(L^\infty; A^*) \subset H$.*

Необходимость в этом утверждении очевидна, а достаточность следует из теорем 2 и 3.

3. Покажем теперь, какую роль играют порожденные лифтингами пространства $K(\varrho)$ в проблеме существования лифтинга в идеалах пространства $S(X, \Sigma, \mu)$. Заметим, что, если векторная подрешетка H пространства S допускает лифтинг σ и $L^\infty \subset H$, то $\sigma \mid L^\infty$ может и не быть лифтингом пространства L^∞ (т. е. **1**-лифтингом). Тем не менее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Порядковый идеал H пространства $S(X, \Sigma, \mu)$ допускает лифтинг в том и только том случае, когда он содержится в порожденном некоторым лифтингом ϱ пространства (X, Σ, μ) пространстве $K(\varrho)$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости заметим, прежде всего, что можно, в силу следствия из теоремы 3, считать, что $L^\infty \subset H$. Пусть σ — лифтинг пространства H. Полагая $X_0 = \{x : \sigma(\mathbf{1}^*)(x) = 1\}$, получим, в силу соотношения $\sigma(\mathbf{1}^*)(x) = 1$ почти всюду, что $X_0^* = X^*$. Выберем произвольную точку $x_0 \in X_0$ и определим отображение $\varrho : H \to \pi^{-1}(H)$ следующим образом:

$$\varrho(f^*)(x) = \begin{cases} \sigma(f^*)(x), & \text{если} \quad x \in X_0, \\ \sigma(f^*)(x_0), & \text{если} \quad x \notin X_0. \end{cases}$$

Ясно, что ϱ есть лифтинг пространства H и $\varrho(\mathbf{1}^*) = \mathbf{1}$. Отсюда следует, что $\varrho | L^\infty$ есть $\mathbf{1}$-лифтинг пространства L^∞ и, в силу теоремы 1, $H \subset K(\varrho)$.

Теорема 4 доказана.

Следствие. *Если H — идеал в $S(X, \Sigma, \mu)$, содержащий $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ и допускающий лифтинг, то существует $\mathbf{1}$-лифтинг пространства H.*

4. Приведем примеры пространств, допускающих лифтинг.

Пример 1. Пусть $u^* \in S(X, \Sigma, \mu)$ и $u^* \geqslant 0^*$. Положим $L_u{}^\infty = u^* L^\infty = \{u^* f^* : f^* \in L^\infty\}$, тогда [4] пространство $L_u{}^\infty$ допускает лифтинг.

Пример 2. Пусть $D = \{u_n{}^*\}$ — счетная система элементов из $S(X, \Sigma, \mu)$ и H — объединение пространств $L_u{}^\infty$ по всем $u^* \in D$. Тогда, если мера конечна, можно, в силу порядковой регулярности пространства S (см. [2], стр. 186), подобрать $v^* \in S$ и числовую последовательность $\lambda_n > 0$ так, чтобы $|u_n{}^*| \leqslant \lambda_n v^*$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому $H \subset L_v{}^\infty$ и H допускает лифтинг. Случай произвольной меры сводится к рассмотренному с помощью теоремы 3.

Пример 3. Пусть идеал $H_0 \subset S(X, \Sigma, \mu)$ допускает лифтинг. Рассмотрим идеал H, порожденный всевозможными суперпозициями $(\varphi \circ f)^*$ функций $f^* \in H$ с непрерывными функциями $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Тогда, в силу теоремы 4 и замкнутости пространств $K(\varrho)$ относительно указанных суперпозиций, пространство H допускает лифтинг. При этом H не является, в общем, порядково ограниченным подмножеством в $S(X, \Sigma, \mu)$.

Пример 4. Пусть $X = \mathbf{R}$, μ — мера Лебега, $C_{\mathrm{R}}{}^b(X, +)$ — алгебра непрерывных справа ограниченных функций на X и ϱ — лифтинг пространства L^∞, *сильный относительно* $C_{\mathrm{R}}{}^b(X, +)$, т. е. такой, что $\varrho(f^*) = f$ для всех $f \in C_{\mathrm{R}}{}^b(X, +)$ (см. [6]). Обозначим через $C_{\mathrm{R}}(X, +)$ алгебру всех непрерывных справа функций на X. Тогда $C_{\mathrm{R}}(X, +) \subset C_{\mathrm{R}}(X, T_\varrho)$, а потому пространство

$$H = \bigcup_{u \in C_{\mathrm{R}}(X, +)} L_u{}^\infty$$

содержится в $K(\varrho)$ и тем самым допускает лифтинг. Ясно, что H — подалгебра и порядовый идеал в пространстве S. С помощью некоторой модификации методов статьи [5] можно показать, что в H нет нетривиальных вполне линейных функционалов [2].

---

[2] Регулярный (т. е. представимый в виде разности двух линейных положительных) функционал Ψ на векторной решетке E называется *вполне линейным* (или *порядково непрерывным*), если $(o)\text{-}\lim x_\alpha = x$ $(x_\alpha, x \in E)$ влечет $\Psi(x_\alpha) \to \Psi(x)$. Здесь символ $(o)\text{-}\lim x_\alpha$ означает предел по упорядочению ([2], стр. 239).

5. Пусть ϱ — некоторый лифтинг пространства (X, Σ, μ). Следующая теорема дополняет[3] теоремы 2 и 9 статьи [5].

Теорема 5. *Пусть ϱ — лифтинг пространства (X, Σ, μ). Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *В пространстве $K(\varrho)$ существуют нетривиальные вполне линейные функционалы.*

(2) *Некоторое непустое множество вида $A = \varrho(A^*)$ псевдокомпактно[4] в топологии T_ρ.*

(3) *В пространстве $K(\varrho)$ существует такая ненулевая компонента $(K(\varrho); A^*)$, что $(K(\varrho); A^*) = (L^\infty; A^*)$.*

Доказательство. Отрицания утверждений (1) и (2) оказываются эквивалентными соответственно утверждениям (1) и (2) теоремы 2 в [5], если воспользоваться тем фактом, что, в силу открыто-замкнутости множества $A = \varrho(A^*)$ (см. [6]), всякая функция из $C_R(A, T_\rho^A)$ (где T_ρ^A — топология, индуцированная на A топологией T_ρ) продолжима до функции из $C_R(X, T_\rho)$. Таким образом, (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна. Для доказательства соотношения (2) $\Rightarrow$ (3) напомним, что $\varrho(K(\varrho)) = C_R(X, T_\rho)$. Поэтому, если $\varrho(A^*)$ псевдокомпактно, то для всех $f^* \in K(\varrho)$ имеем $\varrho(f^*) | A \in C_R^b(A, T_\rho^A)$, откуда и следует (3).

Теорема 5 доказана.

Пусть ϱ — фиксированный лифтинг пространства (X, Σ, μ). Положим

$$\Lambda = \{A^* : A^* \in \Omega, (K(\varrho); A^*) = (L^\infty; A^*)\} \text{ и } X_\rho = \bigcup_{A^* \in \Lambda} \varrho(A^*).$$

Тогда X_ρ открыто в топологии T_ρ и, как показано в [3, 6], измеримо. Заметим, что, в общем, X_ρ не обязано совпадать с $\varrho(X_\rho^*)$. Можно также показать, что компонента $(K(\varrho); X_\rho^*)$ не обязана быть порядково ограниченной в $S(X, \Sigma, \mu)$. Тем не менее, как показывает следующая теорема, дизъюнктные компоненты $(K(\varrho); X_\rho^*)$ и $(K(\varrho); \complement X_\rho^*)$ весьма естественным образом разбивают пространство $K(\varrho)$.

Теорема 6. *Если $X_\rho^* \neq \varnothing^*$, то компонента $(K(\varrho); X_\rho^*)$ обладает следующими свойствами:*

(1) *В пространстве $(K(\varrho); X_\rho^*)$ и любой его ненулевой компоненте есть нетривиальные вполне линейные функционалы.*

(2) *В компоненте $(K(\varrho); E^*)$ есть нетривиальные вполне линейные функционалы в том и только том случае, когда $E^* \cap X_\rho^* \neq \varnothing^*$.*

(3) *Если на компоненте $(K(\varrho); E^*)$ имеется существенно положительный вполне линейный функционал, то $E^* \subset X_\rho^*$.*

---

[3] В связи с этим заметим, что формулировка теоремы 9 (утверждения <II> и <III>) и вытекающих из нее результатов в [5] ошибочны. Правильная формулировка содержится в теореме 5 настоящей статьи.

[4] Топологическое пространство (Y, τ) называется *псевдокомпактным*, если $C_R(Y, \tau) = C_R^b(Y, \tau)$.

Доказательство. (1) Пусть $(K(\varrho); E^*)$ — ненулевая компонента в $(K(\varrho); X_\rho^*)$. Тогда $\varnothing^* \neq E^* \subset X_\rho^*$ и для некоторого $A^* \in \Lambda$ множество $B = \varrho(E^*) \cap \varrho(A^*)$ непренебрежимо. Очевидно, что $B^* \in \Lambda$ и $(L^\infty; B^*) = (K(\varrho); B^*) = ((K(\varrho); E^*); B^*)$, откуда и следует требуемое.

Достаточность в утверждении (2) следует из (1). Чтобы доказать необходимость, положим $E = \varrho(E^*)$ и пусть ϱ' — сужение[5] лифтинга ϱ на пространство с мерой (E, Σ_E, μ_E). Тогда пространство $K(\varrho')$ изоморфно пространству $(K(\varrho); E^*)$, поэтому, в силу теоремы 5, если в $(K(\varrho); E^*)$ есть ненулевые вполне линейные функционалы, то найдется непренебрежимое множество $A \subset \varrho(E^*)$, для которого

$$A^* \cap (\varrho(E^*))_{\rho'}^* = \varnothing^*.$$

Следовательно, $E^* \cap X_\rho^* \neq \varnothing^*$ и свойство (2) доказано.

Наконец в предположениях утверждения (3) имеем, в силу (2), $E^* \cap X_\rho^* \neq \varnothing^*$. Допустим, что $E^* \setminus X_\rho^* \neq \varnothing^*$. Тогда на компоненте $(K(\varrho); E^* \setminus X_\rho^*)$ имеется существенно положительный вполне линейный функционал, что противоречит построению X_ρ.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Для любого лифтинга ϱ пространства (X, Σ, μ) существует максимальная (по включению) система дизъюнктных множеств $\{A_\xi : \xi \in \Xi\}$ со следующими свойствами:*

1) $0 < \mu(A_\xi) < \infty$ *при всех* $\xi \in \Xi$;

2) $(K(\varrho); A_\xi^*) = (L^\infty; A_\xi^*)$ *при всех* $\xi \in \Xi$;

3) $X_\rho^* = \sup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi^*$.

Доказательство может быть получено с помощью рассуждений, подобных доказательству теоремы 2. Таким образом, пространство $K(\varrho)$ разлагается в прямую сумму дизъюнктных компонент $(K(\varrho); A_\xi^*)$ и одной компоненты $(K(\varrho); \complement X_\rho^*)$. Последнюю компоненту естественно назвать *компонентой высокого роста пространства* $K(\varrho)$. Дальнейшее изучение этой компоненты представляет наибольший интерес в исследовании свойств пространств $K(\varrho)$.

Автор благодарит Д. А. Владимирова за ценное обсуждение.

Литература

1. Владимиров Д. А., Булевы алгебры. Москва, 1969.
2. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва, 1961.
3. Левин В. Л., Выпуклые интегральные функционалы и теория лифтинга. Успехи мат. наук, 1975, 30, № 2, 115—172.

---

[5] См. доказательство импликации (2) ⇒ (3) в теореме 3.

4. Монаков-Рогозкин А. К., Пространства, допускающие лифтинг. В сб. «Работы по мат. и физ.», Таллин, 1974, 5—14.
5. Монаков-Рогозкин А. К., Об одном способе сравнения лифтингов. В сб. «Работы по мат. и физ.», Таллин, 1974, 15—34.
6. Ionescu Tulcea, A., Ionescu Tulcea, C., Topics in the theory of lifting. Berlin—Heidelberg—New York, 1969.

Поступило
2 II 1977

LIFTINGUT LUBAVATE MÕÕTUVATE FUNKTSIOONIDE RUUMIDE EHITUSEST

A. Monakov-Rogozkin

Resümee

Artiklis vaadeldakse selliseid kõigi mõõtuvate funktsioonide ruumi $S=$ $=S(X,\Sigma,\mu)$ järjestusideaale, milles on olemas lifting. Nagu on näidatud artiklites [4, 5], võivad need ideaalid olla järjestuse mõttes ka tõkestamata ruumis S. Artiklis uuritakse selliste ruumide järjestusstruktuuri, seejuures näidatakse, et need ruumid on esitatavad teatud omadustega mittelõikuvate komponentide otsesummana. Erilist tähelepanu pööratakse artiklis [4] toodud ruumidele $K(\varrho)$ — suurimatele ruumi S järjestusideaalidele, millele on jätkatavad ruumi L^∞ liftingud ϱ. Saadakse tingimused, mille korral ruumis $K(\varrho)$ pole mittetriviaalseid täielikult lineaarseid funktsionaale.

ON THE STRUCTURE OF LIFTING ADMIT SPACES OF MEASURABLE FUNCTIONS

A. Monakov-Rogozkin

Summary

The paper deals with the lifting admit order ideals of the space $S=$ $=S(X,\Sigma,\mu)$ of all real-valued measurable functions. As is shown in [4, 5] these spaces may be even order unbounded in the space S. The order structure of such spaces is studied. It is shown, in particular, that they may be represented as a direct sum of disjoint bands with concrete properties. Special attention is devoted to the spaces $K(\varrho)$ introduced in [4] — the largest ideals in S on which the liftings ϱ of the space L^∞ may be continued. Conditions which are equivalent to nonexistence of nontrivial order continuous linear functionals in these spaces are considered.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 21—30.

ОБОБЩЕННАЯ СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ И СВОЙСТВО БАНАХА—САКСА

Э. Кольк

Тартуский государственный университет

Пусть E — секвенциально полное отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство над полем K, где $K = \mathbf{R}$ или $K = \mathbf{C}$. Обозначим через $s(E)$ множество всех последовательностей [1]

$$X = (x_i), \tag{1}$$

где $x_i \in E$, а через $m(E)$, $w(E)$ и $c(E)$ — его подмножества, состоящие соответственно из всех ограниченных, слабо сходящихся и сходящихся последовательностей (1).

Пусть, далее, $A = (a_{nk})$ — скалярная матрица и $AX = (\sigma_n)$, где

$$\sigma_n = \sum_k a_{nk} x_k. \tag{2}$$

Последовательность $X \in s(E)$ называется *A-суммируемой* к значению $x \in E$ (коротко $A\text{-}\lim X = x$), если ряды в (2) сходятся и $\lim AX = x$ в E.

В работе [5] мы ввели следующие понятия обобщенной секвенциальной сходимости в E. Последовательность $X \in s(E)$ называется *A^0-сходящейся* к элементу $x \in E$ (коротко $A^0\text{-}\lim X = x$), если $A\text{-}\lim Y = x$ для каждой $Y \in \mathfrak{N}(X)$, где $\mathfrak{N}(X)$ — множество всех подпоследовательностей последовательности X. Последовательность X называется *A^1-сходящейся* к элементу $x \in E$ (коротко $A^1\text{-}\lim X = x$), если для любой $Y \in \mathfrak{N}(X)$ существует $Z \in \mathfrak{N}(Y)$ с $A\text{-}\lim Z = x$. *Поля A^0- и A^1-сходимости* определяются равенствами

$$c_{A^0}(E) = \{X \in s(E) : \exists A^0\text{-}\lim X\},$$

$$c_{A^1}(E) = \{X \in s(E) : \exists A^1\text{-}\lim X\}.$$

При исследовании свойств A^0- и A^1-сходимости приходится на матрицу A налагать определенные ограничения. Матрица A называется *K-матрицей* (см. [6], стр. 16, или [1], стр. 13), если

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 1 до $+\infty$.

$$\exists \lim a_{nk} = a_k, \tag{3}$$

$$\exists \lim \sum_k a_{nk} = a, \tag{4}$$

$$\sup \sum_k |a_{nk}| = M < \infty; \tag{5}$$

а K-матрица A с $a_k = 0$ и $a = 1$ называется *T-матрицей.* Обозначим символами $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{T}$, соответственно, множества всех K- и T-матриц. Через $\mathfrak{P}$ обозначим множество всех T-матриц с

$$\lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0. \tag{6}$$

Говорят (см. [5], стр. 137), что E обладает *свойством* $BS(A)$, если любая $X \in w(E)$ содержит A-суммируемую подпоследовательность. При $A = (C, 1)$, где $(C, 1)$ — матрица метода суммирования арифметических средних, мы, следуя [20], вместо $BS(A)$ пишем BS (читаем: свойство Банаха—Сакса).

Последовательность $X \in s(E)$ мы называем *A-устойчивой* (с пределом x), если $A\text{-}\lim Y = x$ равномерно относительно $Y \in \mathfrak{N}(X)$. Пространство E, где каждая $X \in m(E)$ содержит A-устойчивую подпоследовательность, мы называем *A-устойчивым.* При $A = (C, 1)$ мы имеем дело, соответственно, с устойчивыми последовательностями и пространствами (ср. [17], стр. 294).

В начале данной статьи мы продолжаем исследование свойств A^1-сходимости, начатое в [5]. Мы покажем в § 1, что в банаховом пространстве A^1- и B^1-сходимости совпадают для любых матриц $A, B \in \mathfrak{P}$, а при $A \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{P}$ имеем $c_{A^1}(E) = c(E)$. Оказывается, что множество $c_{A^1}(E)$, если E — банахово пространство и $A \in \mathfrak{T}$, есть наименьший класс топологически сходящихся последовательностей, содержащий $c_{A^0}(E)$. В частности, в пространствах C_e с $e = [0, 1]$, m, c и L^p при $p > 1$ понятия сильной, A^0- и A^1-сходимости отличаются друг от друга для $A \in \mathfrak{P}$.

Параграф 2 посвящен обобщению некоторых теорем Брудно и Агнью. В виде следствия получено, например, что для матриц $A \in \mathfrak{K}$ со свойством Агнью

$$\liminf \left(|a_{nn}| - \sum_{k \neq n} |a_{nk}|\right) > 0 \tag{7}$$

справедливы равенства $c_{A^1}(E) = c_{A^0}(E) = c(E)$.

В § 3 доказано, что банахово пространство устойчиво тогда и только тогда, когда оно рефлексивно и обладает свойством Банаха—Сакса. В частности, все равномерно выпуклые банаховы пространства устойчивы. Из полученных результатов вытекает, что произведение конечного числа пространств со свойством BS также обладает этим свойством. В конце работы доказано, что *поле суммируемости*

$$\lambda_B = \{X \in s(K) : BX \in \lambda\} \tag{8}$$

конечнострочной матрицы B обладает свойством Банаха—Сакса, если этим свойством обладает FK-пространство λ. В частности, поля суммируемости c_B и $(c_0)_B$ конечнострочной матрицы B являются FK-пространствами со свойством BS, а поле суммируемости $l^p{}_B$ нормальной матрицы B будет устойчивым при $p > 1$.

§ 1. Об A^1-сходимости

Пусть E — банахово пространство и $A \in \mathfrak{T}$. Рудаков [11, 12, 13] доказал следующие теоремы.

Теорема А. *Для любых двух матриц $A, B \in \mathfrak{P}$ соотношения $A^0\text{-}\lim X = x$ и $B^0\text{-}\lim X = x$ равносильны; из $A^0\text{-}\lim X = x$ следует A-устойчивость последовательности X.*

Теорема В. *Если $A \in \mathfrak{P}$ и $c_{A^0}(E) \neq c(E)$, то A^0-сходимость не является топологической сходимостью.*

Теорема С. *При $A \in \mathfrak{T} \backslash \mathfrak{P}$ справедливо равенство $c_{A^0}(E) = c(E)$.*

Далее, в работе [19] доказана

Теорема D. *Последовательность $X \in m(E)$ содержит такую подпоследовательность Y, что или существует $A^0\text{-}\lim Y$, или ни одна подпоследовательность последовательности Y не является A-суммируемой.*

Отсюда и из теоремы А следует

Лемма 1. *Каждая A^1-сходящаяся последовательность содержит A^0-сходящуюся подпоследовательность. Соотношения $A^1\text{-}\lim X = x$ и $B^1\text{-}\lim X = x$ равносильны для любых матриц A и B из $\mathfrak{P}$.*

Так как A^0-сходимость есть L-сходимость (см. [18], стр. 484) и A^1-сходимость как L^*-сходимость (см. [7], стр. 197 или [18], стр. 484) является топологической сходимостью (см. [22], теорема 3), то на основе результатов работы [18], стр. 485, справедлива

Теорема 1. *Множество $c_{A^1}(E)$ есть наименьший класс топологически сходящихся последовательностей, содержащий A^0-сходящиеся последовательности.*

Следствие 1. *При*

$$c_{A^0}(E) \neq c(E) \tag{9}$$

имеет место строгое включение $c_{A^1}(E) \supset c_{A^0}(E)$, а при $c_{A^0}(E) = c(E)$ верно равенство $c_{A^1}(E) = c_{A^0}(E)$. В частности, для $E = m, c, C_e$ или L^p при $p > 1$ справедливы включения $c(E) \subset c_{A^0}(E) \subset c_{A^1}(E)$.

Доказательство. Первая половина утверждения на основе теоремы В следует сразу из теоремы 1. Для доказательства остальной части достаточно убедиться в справедливости условия (9) в указанных пространствах. Для пространств m, c

и L^p это было доказано в работе [5]. Пространство C_e является универсальным. Так как сходимость, A^0-сходимость и A^1-сходимость сохраняются при изоморфизме, то в C_e условие (9) выполнено на основе включения, например, $c \subset \subset C_e$ (в смысле изоморфизма).

Доказанное следствие 1 вместе с теоремой C позволяет сформулировать следующее

Следствие 2. *При* $A \in \mathfrak{T} \backslash \mathfrak{P}$ *справедливо равенство* $c_{A^1}(E) = c(E)$.

Говорят, что пространство E обладает *свойством Шура*, если $w(E) = c(E)$. Из следствия 2 и доказанных в [5] включений

$$c(E) \subseteq c_{A^0}(E) \subseteq c_{A^1}(E) \subseteq w(E) \tag{10}$$

и теоремы 15 непосредственно вытекает

Предложение 1. *Банахово пространство E обладает свойством Шура тогда и только тогда, когда E обладает свойством $BS(A)$ для какой-то матрицы $A \in \mathfrak{T} \backslash \mathfrak{P}$.*

§ 2. Обобщения теорем Брудно и Агнью

Пусть

$$c_A(E) = \{X \in s(E) : \exists A\text{-}\lim X\}.$$

Матричный метод суммирования A называется *консервативным* в $s(E)$, если $c(E) \subseteq c_A(E)$. Консервативный метод суммирования A называется *регулярным* в $s(E)$, если из $\lim X = x$ следует $A\text{-}\lim X = x$.

Известно (см. [5], теорема 2), что матричный метод A является регулярным в $s(E)$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{T}$. Жаворонков [3] показал, что для включения $c(E) \subseteq c_A(E)$ в случае полного пространства E необходимо и достаточно, чтобы $A \in \mathfrak{K}$. Здесь мы докажем прямым путем аналогичное утверждение для секвенциально полного пространства E.

Теорема 2. *Пусть E — секвенциально полное локально выпуклое пространство. Матричный метод суммирования A является консервативным в $s(E)$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{K}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\theta \neq \neq x \in E$ и $\lim b_i = b$, где $b_i, b \in K$. Тогда $x'(x) = 1$ для некоторого $x' \in E'$, где E' — топологическое сопряженное пространство к E. Ввиду включения $c(E) \subseteq c_A(E)$ и секвенциальной полноты E существует

$$\lim \sum_k a_{nk} b_k x = y.$$

Но тогда

$$\lim \sum_k a_{nk} b_k = \lim x'(\sum_k a_{nk} b_k x) = x'(y)$$

и доказательство необходимости завершается применением известной теоремы Кожима—Шура (см. [1], теорема 1.1, или [6], теорема 4.1, I).

Достаточность. Пусть $A \in \mathfrak{K}$ и $X \in c(E)$, где $\lim X = x$. Пусть, далее, $p \in Q$, где топология в E определена системой полунорм Q. Тогда $\sup p(x_k) = N < \infty$. Ввиду $\lim p(x_k - x) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер m, что $p(x_k - x) < \varepsilon/(6M)$ при $k \geqslant m$. По условию (3) определим индекс r так, чтобы

$$\sum_{k<m} |a_{nk} - a_k| < \varepsilon/(12N)$$

при $n \geqslant r$. Наконец, в силу условия (4) фиксируем индекс l таким, чтобы

$$p(x) \left| \sum_k a_{nk} - a \right| < \varepsilon/6$$

при $n \geqslant l$. Таким образом, учитывая еще условие (5), при $n \geqslant \max(r, l)$ получаем

$$\begin{aligned} p\Big(\sum_k a_{n+p,k}x_k - \sum_k a_{nk}x_k\Big) &\leqslant \sum_{k<m} |a_{n+p,k} - a_k| p(x_k) + \\ &+ \sum_{k<m} |a_k - a_{nk}| p(x_k) + \sum_{k\geqslant m} |a_{n+p,k}| p(x_k - x) + \\ &+ \sum_{k\geqslant m} |a_{nk}| p(x - x_k) + p(x) \sum_{k<m} |a_k - a_{n+p,k}| + \\ &+ p(x) \sum_{k<m} |a_{nk} - a_k| + p(x) \Big| \sum_k a_{n+p,k} - a \Big| + \\ &+ p(x) \Big| a - \sum_k a_{nk} \Big| < \\ &< N\varepsilon/(12N) + N\varepsilon/(12N) + M\varepsilon/(6M) + M\varepsilon/(6M) + \\ &+ p(x)\varepsilon/(12N) + p(x)\varepsilon/(12N) + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, AX — последовательность Коши и, в силу секвенциальной полноты пространства E, сходится. Теорема доказана.

Обозначим символом $\mathfrak{M}$ множество всех нормальных матриц $A \in \mathfrak{T}$. Пусть $c = c(\mathbf{C})$, $c_A = c_A(\mathbf{C})$ и $m = m(\mathbf{C})$. В теории суммируемости числовых последовательностей известна следующая теорема Брудно [2], передоказанная в [25].

Теорема E. *Для любой матрицы* $A \in \mathfrak{T}$ *найдется матрица* $B \in \mathfrak{M}$ *со свойством* $c_A \cap m = c_B \cap m$, *причем из* $A\text{-}\lim X = x$ *следует* $B\text{-}\lim X = x$.

При помощи теоремы 2 из [5] нетрудно убедиться, что построения Троппера [25] остаются в силе, если заменить $\mathbf{C}$ пространством E и абсолютные величины полунормами $p \in Q$. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Для любой матрицы* $A \in \mathfrak{T}$ *и секвенциально полного локально выпуклого пространства* E *найдется матрица* $B \in \mathfrak{M}$ *со свойством* $c_A(E) \cap m(E) = c_B(E) \cap m(E)$, *причем из* $A\text{-}\lim X = x$ *следует* $B\text{-}\lim X = x$.

Из построения матрицы B в [25] ясно, что имеет место

Следствие 3. *Если в теореме* 3 *матрица* $A \in \mathfrak{P}$, *то и* $B \in \mathfrak{P}$.

Ввиду ограниченности A^0- и A^1-сходящихся последовательностей, из теоремы 3 непосредственно вытекает еще

Следствие 4. *Если $A \in \mathfrak{T}$, то существует матрица $B \in \mathfrak{M}$ со свойствами $c_{A^1}(E) = c_{B^1}(E)$ и $c_{A^0}(E) = c_{B^0}(E)$, причем значения обобщенных пределов сохраняются.*

Замечание. По теореме A и лемме 1 в случае банахова пространства E при $A \in \mathfrak{P}$ в следствии 4 матрицу B можно заменить матрицей метода суммирования арифметических средних.

Следующая теорема принадлежит Агнью [14].

Теорема F. *Если матрица $A \in \mathfrak{T}$ удовлетворяет условию* (7), *то $c_A \cap m = c$. Если A, кроме того, треугольна, то $c_A = c$.*

Михалин (см. [9], теорема 1) обобщил теорему F на K-матрицы. Применяя метод работы [8], мы обобщаем теорему Агнью на случай локально выпуклого пространства E.

Теорема 4. *Пусть E — секвенциально полное локально выпуклое пространство. Если матрица $A \in \mathfrak{K}$ (треугольная матрица $A \in \mathfrak{K}$) удовлетворяет условию* (7), *то $c_A(E) \cap m(E) = c(E)$ (соответственно, $c_A(E) = c(E)$).*

Доказательство требуется только для включения $c_A(E) \cap m(E) \subseteq c(E)$ (соответственно, $c_A(E) \subseteq c(E)$). Пусть $A \in \mathfrak{K}$ и выполняется условие (7). Тогда, заменяя в матрице A конечное число первых строк, мы придем к матрице $B \in \mathfrak{K}$, где $c_A(E) = c_B(E)$ с $A\text{-}\lim X = B\text{-}\lim X$ при $X \in c_A(E)$ и

$$\inf \left[|b_{nn}| - \sum_{k \neq n} |b_{nk}| \right] > 0.$$

По теореме 1 из [8] существует обратная матрица $B^{-1} \in \mathfrak{K}$. Для любой $X \in m(E)$ имеем

$$B^{-1}(BX) = (B^{-1}B)X = X. \tag{11}$$

Следовательно, если $X \in c_A(E) \cap m(E)$, то $X \in m(E)$, $BX \in c(E)$, и по теореме 2 имеем $X \in c(E)$. В случае, когда A треугольна, по теореме 1 из [8] будет треугольной и матрица B. Поэтому равенство (11) сохраняется для любой $X \in s(E)$ и, значит, из $X \in c_A(E)$ следует $X \in c(E)$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Условие (7) не является необходимым для справедливости указанных в теореме 4 равенств. Например, регулярная нормальная матрица $A = (a_{nk})$, где $a_{11} = 1$ и $a_{2i,2i} = 1$, $a_{2i,k} = 0$ $(k \neq 2i)$, $a_{2i+1,2i} = i/(2i+1)$, $a_{2i+1,2i+1} = (i+1)/(2i+1)$, $a_{2i+1,k} = 0$ $(k \neq 2i+1,\ k \neq 2i)$ при $i = 1, 2, \ldots$, не удовлетворяет условию (7). Но в то же время по доказательству теоремы 4 справедливо $c_A(E) = c(E)$, ибо A имеет регулярную обратную $A^{-1} = (b_{nk})$ с $b_{11} = 1$ и $b_{2i,2i} = 1$, $b_{2i,k} = 0$ $(k \neq 2i)$, $b_{2i+1,2i} = -i/(i+1)$, $b_{2i+1,2i+1} = (2i+1):(i+1)$, $b_{2i+1,k} = 0$ $(k \neq 2i+1,\ k \neq 2i)$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Ввиду ограниченности A^1-сходящихся последовательностей из теоремы 4 непосредственно вытекает

Следствие 5. *Для матриц* $A \in \mathfrak{K}$ *со свойством* (7) *справедливы равенства* $c_{A^1}(E) = c_{A^0}(E) = c(E)$.

Отсюда на основе следствия 1 получаем

Следствие 6. *Для матриц* $A \in \mathfrak{P}$ *условие* (7) *не выполняется.*

По включениям (10) из следствия 5 вытекает

Предложение 2. *Пространство* E *обладает свойством Шура тогда и только тогда, когда найдется такая матрица* $A \in \mathfrak{K}$ *со свойством* (7), *что* $w(E) = c_{A^1}(E)$.

Отметим, что в частном случае, когда $A \in \mathfrak{T}$ и E — банахово пространство, предложение 2 содержится в предложении 1 на основе следствия 6.

§ 3. О свойстве Банаха—Сакса

По лемме 1 и теореме А имеет место

Предложение 3. *В банаховом пространстве* E *свойство* $BS(A)$ *для любого* $A \in \mathfrak{P}$ *равносильно свойству* BS. *В пространстве со свойством* BS *любая* $X \in w(E)$ *содержит устойчивую подпоследовательность.*

З а м е ч а н и е. Отметим, что вторая половина предложения 3 без доказательства была приведена уже в работе [24], стр. 341.

Свойство BS и устойчивость связаны следующим образом.

Предложение 4. *Банахово пространство* E *является устойчивым тогда и только тогда, когда оно рефлексивно и обладает свойством* BS.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Если E устойчиво, то для любой $X \in m(E)$ найдется такая $Y \in \mathfrak{R}(X)$, что существует $(C, 1)\text{-}\lim Y$. Но тогда по теореме 1 из [4] пространство E рефлексивно.

Д о с т а т о ч н о с т ь непосредственно следует из предложения 3.

Известно, что любое равномерно выпуклое банахово пространство является рефлексивным (см. [23], стр. 358) и обладает свойством Банаха—Сакса (см. [21], стр. 188).

Следствие 7. *Все равномерно выпуклые банаховы пространства устойчивы.*

По предложению 3 свойство BS равносильно существованию у каждой последовательности $X \in w(E)$ устойчивой подпоследовательности Y. Последовательность (z_i), где $z_i = (x_i, y_i)$, из точек произведения $E \times F$ банаховых пространств E и F будет устойчивой тогда и только тогда, когда (x_i) и (y_i) устойчивы, соответственно, в пространствах E и F. Так как слабая сходимость сохраняется при переходе к произведениям (см. [10], стр. 147), то имеет место

Теорема 5. *Произведение конечного числа банаховых пространств со свойством BS снова обладает этим свойством.*

В конце этого параграфа мы укажем новый класс пространств со свойством Банаха—Сакса в виде полей суммируемости. Пусть λ есть FK-пространство, т. е. пространство Фреше числовых последовательностей, в котором имеет место сходимость по координатам.

Теорема 6. *Поле суммируемости λ_B конечнострочной матрицы B является FK-пространством со свойством BS, если этим свойством обладает пространство λ.*

Доказательство. Пусть B — конечнострочная матрица. По одной теореме Беннетта (см. [16], теорема 6) поле суммируемости λ_B изоморфно замкнутому подпространству H произведения $s \times \lambda$. Пространство s как произведение $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \ldots$ обладает свойством Шура, ибо наряду со слабой топологией при переходе к произведениям сохраняется и топология Макки (см. [10], стр. 147). Но тогда произведение $s \times \lambda$ очевидно обладает свойством BS и, следовательно, этим свойством обладает и подпространство H, ибо свойство BS сохраняется при изоморфизме.

Известно, что пространства c, c_0 (см. [20], стр. 91) и l^p при $p \geqslant 1$ (см. [15], стр. 56) обладают свойством Банаха—Сакса.

Следствие 8. *Поля суммируемости c_B, $(c_0)_B$ и $l^p{}_B$ конечнострочной матрицы B обладают свойством BS.*

По предложению 4 и теореме 7 из [16] имеет место

Следствие 9. *Пусть λ — рефлексивное нормируемое FK-пространство со свойством BS. Поле суммируемости λ_B нормальной матрицы B является устойчивым.*

Следствие 10. *Поле суммируемости $l^p{}_B$ нормальной матрицы B является устойчивым при $p > 1$.*

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Брудно А. Л., Суммирование ограниченных последовательностей матрицами. Матем. сб., 1945, **16**, 191—247.
3. Жаворонков В. Д., Структура полей эффективности линейных операторов. Диссертация, Свердловск, 1975.
4. Кольк Э., О рефлексивности и суммируемости в пространствах Фреше. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 127—130.
5. Кольк Э., Теорема Бака в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **374**, 128—140.
6. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
7. Куратовский К., Топология, т. 1. Москва, 1966.
8. Мельник В. И., Обращение бесконечных матриц и неэффективность матричных методов суммирования. Укр. матем. ж., 1976, **28**, № 1, 36—42.

9. Михалин Г. А., Обобщение теоремы Агнью и о равносильности методов Кожима методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей. Укр. матем. ж., 1974, **26**, № 1, 95—98.
10. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж., Топологические векторные пространства. Москва, 1967.
11. Рудаков С. А., Суммируемость слабо сходящихся последовательностей в банаховых пространствах. Матем. зап. Уральского ун-та, 1975, **9**, № 2, 103—110.
12. Рудаков С. А., Исправление к статье «Суммируемость слабо сходящихся последовательностей в банаховых пространствах». Матем. зап. Уральского ун-та, 1975, **9**, № 4, 128.
13. Рудаков С. А., Один вид слабо сходящихся последовательностей и их суммирование в нормированных пространствах. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1975, № 4, 59 (аннотация статьи, принятой к печати).
14. Agnew, R. P., Equivalence of methods for evaluation of sequences. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 550—556.
15. Banach, S., Saks, S., Sur la convergence forte dans les champs L^p. Studia math., 1930, **2**, 51—57.
16. Bennett, G., A representation theorem for summability domains. Proc. London Math. Soc., 1972, **24**, № 2, 193—203.
17. Brunel, A., Sucheston, L., On B-convex Banach spaces. Math. Syst. Theor., 1974, **7**, 294—299.
18. Dudley, R. M., On sequential convergence. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **112**, № 3, 483—507.
19. Erdös, P., Magidor, M., A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, **59**, № 2, 232—234.
20. Farnum, N. R., The Banach-Saks theorem in $C(S)$. Canad. J. Math., 1974, **26**, № 1, 91—97.
21. Kakutani, S., Weak convergence in uniformly convex spaces. Tôhoku Math. J., 1938, **45**, 188—193.
22. Kisýski, J., Convergence du type L. Colloq. math., 1960, **7**, № 2, 205—211.
23. Köthe, G., Topologische lineare Räume. I. Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
24. Szlenk, W., Sur les suites faiblement convergentes dans l'espace L. Studia math., 1965, **25**, № 3, 337—341.
25. Tropper, A. M., A sufficient condition for a regular matrix to sum a bounded divergent sequence. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 671—677.

Поступило
19 IX 1977

ÜLDISTATUD JADALINE KOONDUVUS JA BANACH-SAKSI OMADUS

E. Kolk

Resümee

Käesolevas artiklis jätkatakse töös [5] sisse toodud A^0- ja A^1-koonduvuse mõistete uurimist. Üldistatakse lokaalselt kumera ruumi juhule mõned Brudno ja Agnew teoreemid. Näidatakse, et Banachi ruumis E Toeplitzi maatriksi A korral on A^1-koonduvate jadade hulk vähim topoloogiliselt koonduvate jadade klass, mis sisaldab kõik A^0-koonduvad jadad. Ruumides $C[0, 1]$, m, c ja L^p, kui $p>1$, on tugev, A^0- ja A^1-koonduvus üksteisest erinevad.

Osutub, et Banachi ruum on stabiilne parajasti siis, kui ta on refleksiivne ja Banach-Saksi omadusega ruum. Tõestatakse veel, et lõplikurealise maatriksi B summeerimisväli λ_B on Banach-Saksi omadusega, kui λ on sama omadusega FK-ruum.

DIE VERALLGEMEINERTE FOLGENKONVERGENZ UND DIE BANACH-SAKS-EIGENSCHAFT

E. Kolk

Zusammenfassung

Es sei E ein folgenvollständiger separierter lokalkonvexer topologischer linearer Raum über dem Körper K der reellen oder komplexen Zahlen. Im Aufsatz [5] haben wir die Konvergenzen $A\text{-}\lim X=x$, $A^0\text{-}\lim X=x$ und $A^{1'}\text{-}\lim X=x$ für eine Matrix A mit Elementen aus K eingeführt. Es sei $\mathfrak{T}$ (bzw. $\mathfrak{P}$) die Menge aller Toepliz-Matrizen (bzw. aller Toeplitz-Matrizen mit der Eigenschaft (6)).

In diesem Aufsatz werden einige Sätze von Brudno und Agnew auf den Fall des lokalkonvexen Raumes verallgemeinert. Weiter beweist man sowohl die Equivalenz der $A^{1'}$- und B^1-Konvergenz im Banach-Raum E für $A, B \in \mathfrak{P}$ als auch die Equivalenz der starken und A^1-Konvergenz für $A \in \mathfrak{T}\backslash\mathfrak{P}$. Es erweist sich, daß für $A \in \mathfrak{T}$ die Menge aller $A^{1'}$-konvergenten Folgen für Banach-Raum E die engste alle A^0-konvergenten Folgen umfassende Klasse bildet. Daraus ergibt sich der Unterschied zwischen der starken, A^0- und A^1-Konvergenz für $A \in \mathfrak{P}$ in den Räumen $C[0, 1]$, m, c und L^p mit $p>1$.

Einige Resultate sind mit der Banach-Saks-Eigenschaft (s. [20], S. 91) verbunden. Hier beweist man, daß ein Banach-Raum genau dann stabil (s. [17], S. 294) ist, wenn es reflexiv ist und die Banach-Saks-Eigenschaft besitzt. Haben die Banach-Räume E und F die Banach-Saks-Eigenschaft, so hat diese Eigenschaft auch das topologische Produkt $E\times F$. Zuletzt beweist man, daß das Wirkfeld (8) der zeilenfiniten Matrix B die Banach-Saks-Eigenschaft hat, wenn der FK-Raum λ sie besitzt. Unter anderem besitzen die Banach-Saks-Eigenschaft die Wirkfelder c_B und $(c_0)_B$ der zeilenfiniten Matrix B. Das Wirkfeld $l^p{}_B$ einer echten Dreiecksmatrix ist aber stabil bei $p>1$.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 31—39.

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

А. Кивинукк

Таллинский политехнический институт

1. Теоремы сравнения

Пусть X — вещественное или комплексное пространство Банаха, $[X]$ — банахова алгебра всех линейных непрерывных операторов на X и (P_k) — тотальная последовательность ортогональных проекторов, т. е.

1° $P_k \in [X]$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$;

2° если $P_k f = 0$ для всех k, то $f = 0$;

3° $P_j P_k = \delta_{jk} P_k$, где δ_{jk} — символ Кронекера.

Тогда для каждого элемента $f \in X$ имеем единственное разложение Фурье

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} P_k f.$$

Введем на X операторы $U_r \in [X]$ со значениями

$$U_r f \sim \sum_{k=0}^{\infty} g_k(r) P_k f, \tag{1}$$

где (g_k) — последовательность вещественных функций с областью определения $\mathfrak{R}$, у которой фиксируется некоторая точка сгущения ϱ. Если в соответствии (1) ряд справа сходится по норме, то он сходится к $U_r f$. В частности, оператор $Z_n^\lambda \in [X]$, где

$$Z_n^\lambda f = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ 1 - \left(\dfrac{k}{n+1} \right)^\lambda \right\} P_k f, & \lambda = 1, 2, \ldots, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} P_k f, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{2}$$

называем *оператором Зигмунда порядка* λ.

Целью настоящей статьи является доказать неравенство [1]

$$\|f-U_rf\|\leqslant C(\lambda,n,r)\,\|f-Z^\lambda_n f\| \tag{3}$$

в предположении, что множители $g_k(r)$ являются в определенном смысле аналитичными. Теоремы, которые содержат неравенства типа (3), называются *теоремами сравнения методов приближений.* Некоторые теоремы сравнения другого характера получены в работах Тригуба [3], Бомана, Шапиро [4], Бутцера, Неселя, Требелса [6].

В дальнейшем предположим, что выполнено условие

$$\|Z^1{}_n\|=O(1). \tag{Z}$$

Лемма 1. *Если* $\|Z^1{}_n\|\leqslant C$, *то* $\|Z^\lambda{}_n\|\leqslant(1+C)^\lambda-1$ *при* $\lambda=1,2,\ldots.$

Доказательство. Для любого x по формуле бинома

$$1-x^\lambda=\sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\nu+1}\binom{\lambda}{\nu}(1-x)^\nu. \tag{4}$$

Возьмем $x=k/(n+1)$, умножим равенство (4) на P_kf и суммируем по $k=0,1,\ldots,n$, вследствие чего ввиду (2) получаем

$$Z^\lambda{}_nf=\sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\nu+1}\binom{\lambda}{\nu}(Z^1{}_n)^\nu f,$$

где

$$(Z^1_n)^\nu f=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)^\nu P_kf.$$

Так как $\|(Z^1{}_n)^\nu f\|\leqslant C^\nu\|f\|$, то

$$\|Z^\lambda_nf\|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{\nu}C^\nu\|f\|=\{(1+C)^\lambda-1\}\|f\|.$$

Для точки сгущения ϱ фиксируем семейство окрестностей $\{V_\varrho(p)\colon p\geqslant0\}$ со свойством: для всех $p\geqslant q$ справедливо включение $V_\varrho(p)\subset V_\varrho(q)$. Сформулируем для функции

$$G(k,r)=1-g_k(r)$$

Условие А. *Пусть существуют натуральное число* λ *и функции* $c_\nu(r)$, *где* $c_\lambda(r)\neq0$, *такие, что при* $r\in V_\varrho(k)$ *имеет место разложение*

$$G(k,r)=\sum_{\nu=\lambda}^{\infty}c_\nu(r)k^\nu$$

с бесконечным радиусом сходимости.

Пусть $P_k(X)=X_k$. Тогда наилучшим приближением порядка n элемента $f\in X$ называем величину

$$E_n(f)=\inf_{f_k\in X_k}\|f-\sum_{k=0}^{n}f_k\|.$$

---

[1] Везде константы обозначим буквой C, по необходимости добавим параметры, от которых зависит константа.

Известно (см., например, [2], стр. 20), что существует элемент наилучшего приближения $t_n = f^*_0 + f^*_1 + \ldots + f^*_n$, где $f^*_k \in X_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ такой, что

$$E_n(f) = \|f - t_n\|.$$

Введем функцию

$$|G|(k, r) = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} |c_\nu(r)| k^\nu,$$

Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условие* (Z) *и условие* A. *Тогда существует константа* $C > 0$, *такая, что для всех* $f \in X$ *и* $r \in V_\rho(n)$ *имеет место неравенство* [2]

$$\|f - U_r f\| \prec \|U_r\| E_n(f) + |G|(C(n+1), r) \|f - Z^\lambda{}_n f\|.$$

Доказательство. Ввиду линейности оператора (1) имеем

$$\|f - U_r f\| \leqslant \|f - t_n\| + \|t_n - U_r t_n\| + \|U_r(t_n - f)\| \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \|U_r\|) E_n(f) + \|t_n - U_r t_n\|. \tag{5}$$

По определению $X_k = P_k(X)$ имеем, что $f_k \in X_k$ тогда и только тогда, когда $P_k f_k = f_k$. Поскольку $t_n = f^*_0 + f^*_1 + \ldots + f^*_n$, где $f^*_k \in X_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, то

$$U_r t_n = \sum_{k=0}^{n} g_k(r) P_k t_n = \sum_{k=0}^{n} g_k(r) P_k f^*_k = \sum_{k=0}^{n} g_k(r) f^*_k$$

и

$$t_n - U_r t_n = \sum_{k=0}^{n} \{1 - g_k(r)\} f^*_k.$$

Пусть $r \in V_\rho(n) \subset V_\rho(k)$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда по условию A имеем

$$t_n - U_r t_n = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r) (n+1)^\nu \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+1}\right)^\nu f^*_k =$$
$$= \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r) (n+1)^\nu (t_n - Z^\nu{}_n t_n).$$

Следовательно,

$$\|t_n - U_r t_n\| \leqslant \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} |c_\nu(r)| (n+1)^\nu \|t_n - Z^\nu{}_n t_n\|. \tag{6}$$

Гырлих, Несель и Требелс ([7], стр. 127) доказали, что при условии (Z) для всех $\omega > 0$, $f \in X$ и $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\|\sum_{k=0}^{n} k^\omega P_k f\| \leqslant C(\omega) n^\omega \|\sum_{k=0}^{n} P_k f\|.$$

---

[2] Здесь $\alpha \prec \beta$ означает, что $\alpha \leqslant C\beta$, $C > 0$ — некоторая константа.

При $\omega = 1$ получаем отсюда

$$\|t_n - Z^\nu{}_n t_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+1}\right)^\nu f^*{}_k \right\| \leqslant C \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\nu-1} f^*{}_k \right\| =$$

$$= C \|t_n - Z^{\nu-1}{}_n t_n\|,$$

откуда при $\nu \geqslant \lambda$ по индукции получаем

$$\|t_n - Z^\nu{}_n t_n\| \leqslant C^{\nu-\lambda} \|t_n - Z^\lambda{}_n t_n\|.$$

Следовательно, из (6) вытекает

$$\|t_n - U_r t_n\| \leqslant C^{-\lambda} |G| (C(n+1), r) \|t_n - Z^\lambda{}_n t_n\|. \tag{7}$$

Из неравенства

$$E_n(f) \leqslant \|f - Z^\lambda{}_n f\| \tag{8}$$

и по лемме 1 имеем

$$\|t_n - Z^\lambda{}_n t_n\| \leqslant \|t_n - f\| + \|f - Z^\lambda{}_n f\| + \|Z^\lambda{}_n (f - t_n)\| \prec$$

$$\prec \|f - Z^\lambda{}_n f\|.$$

В заключение, из (5) и (7) получаем утверждение теоремы.

Теорему 1 можно несколько усилить при помощи понятия мультипликатора.

Говорят, что последовательность $\gamma = (\gamma_k)$ является мультипликатором типа (X, X), если для каждого $f \in X$ существует $f^\gamma \in X$ такой, что при любом k имеет место равенство $\gamma_k P_k f = P_k f^\gamma$. Кроме того, если обозначим $Mf = f^\gamma$, то (ср. [5], предложение 6.5.1) $M \in [X]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условие* (Z) *и условие* A, *причем при* $r \to \varrho$

$$|c_\lambda(r)| \prec |c_{\lambda+1}(r)|. \tag{9}$$

Тогда существует константа $C > 0$ *такая, что для всех* $r \in V_\varrho(n)$ *и* $f \in X$ *имеет место неравенство*

$$\|f - U_r f\| \prec \|U_r\| E_n(f) + |G| (C(n+1), r) \|f - Z^{\lambda+1}{}_n f\|.$$

Доказательство. Ввиду (6) имеем

$$\|t_n - U_r t_n\| \leqslant |c_\lambda(r)| (n+1)^\lambda \|t_n - Z^\lambda{}_n t_n\| +$$

$$+ \sum_{\nu=\lambda+1}^{\infty} |c_\nu(r)| (n+1)^\nu \|t_n - Z^\nu{}_n t_n\|. \tag{10}$$

В работе [7], стр. 124, доказано, что при условии (Z) ограниченная последовательность γ является мультипликатором типа (X, X), если выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \gamma_k| < \infty.$$

При условии (Z) последовательность $(1/k)$ является мультипликатором. Следовательно,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\lambda} f^*_k \right\| < (n+1) \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\lambda+1} f^*_k \right\|,$$

что равносильно неравенству

$$\|t_n - Z^{\lambda}{}_n t_n\| < (n+1)\|t_n - Z^{\lambda+1}{}_n t_n\|.$$

Таким образом, по предположению (9) имеем,

$$|c_\lambda(r)|(n+1)^{\lambda}\|t_n - Z^{\lambda}{}_n t_n\| < |c_{\lambda+1}(r)|(n+1)^{\lambda+1}\|t_n - Z^{\lambda+1}{}_n t_n\|,$$

и из (10) получаем

$$\|t_n - U_r t_n\| < \sum_{\nu=\lambda+1}^{\infty} |c_\nu(r)|(n+1)^{\nu}\|t_n - Z^{\nu}{}_n t_n\|.$$

2. Применения

Применим теорему 1 для оператора $B_n \in [X]$, где

$$B_n f = \sum_{k=0}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1} P_k f,$$

который называем оператором Бернштейна—Рогозинского (ср. [5], стр. 56).

Лемма 2. *Если* $\|Z^0{}_n\| = O(n)$ *и* $\|Z^1{}_n\| \leqslant C$, *то* $\|B_n\| = O(1)$.

Доказательство. Разлагаем $\cos x$ в ряд Тейлора и воспользуемся равенством (4). Имеем

$$\cos\frac{k\pi}{2n+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!}\left\{\frac{\pi(n+1)}{2n+1}\right\}^{2\nu}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{2\nu} = \cos\frac{\pi(n+1)}{2n+1} +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!}\left\{\frac{\pi(n+1)}{2n+1}\right\}^{2\nu}\sum_{\mu=1}^{2\nu}(-1)^{\mu}\binom{2\nu}{\mu}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)^{\mu}.$$

Аналогично доказательству леммы 1 отсюда следует равенство

$$B_n f = \cos\frac{\pi(n+1)}{2n+1} Z^0{}_n f +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!}\left\{\frac{\pi(n+1)}{2n+1}\right\}^{2\nu}\sum_{\mu=1}^{2\nu}(-1)^{\mu}\binom{2\nu}{\mu}(Z^1{}_n)^{\mu} f$$

и далее

$$\|B_n f\| \leqslant -\cos\frac{\pi(n+1)}{2n+1}\|Z^0{}_n f\| +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu)!}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{2\nu}\sum_{\mu=1}^{2\nu}\binom{2\nu}{\mu}C^{\mu}\|f\|. \qquad (11)$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} n\cos\frac{\pi(n+1)}{2n+1} = -\frac{\pi}{4},$$

то по условию $\|Z^0{}_n\| = O(n)$ первое слагаемое неравенства (11) ограничено. А второе слагаемое неравенства (11) не превосходит величину $\|f\|\,\mathrm{ch}\,2\pi(1+C)/3$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Если* $\|Z^0{}_n\| = O(n)$ *и выполнено условие* (Z), *то для всех* $f\in X$ *и* $n=1, 2, \ldots$ *имеет место неравенство*

$$\|f-B_nf\| < \|f-Z^2{}_nf\|.$$

Доказательство. Оператор Бернштейна—Рогозинского имеет вид (1), где

$$g_k(n) = \begin{cases} \cos\dfrac{k\pi}{2n+1}, & 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & k>n, \end{cases}$$

а $\mathfrak{N} = \mathbf{N}$ — множество натуральных чисел и $\varrho=\infty$. Положим $V_\infty(p) = \{n\in\mathbf{N} : n\geqslant p\}$. Тогда при $n\in V_\infty(k)$ имеем

$$G(k, n) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{1}{(2\nu)!}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^{2\nu}k^{2\nu}.$$

Следовательно, условие А выполнено при $\lambda=2$ и из теоремы 1 и леммы 2 для всех $f\in X$ и $n\in V_\infty(n) = \mathbf{N}$ следует

$$\|f-B_nf\| < E_n(f) + |G|\,(C(n+1), n)\,\|f-Z^2{}_nf\|,$$

где

$$|G|\,(C(n+1), n) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu)!}\left\{\frac{C(n+1)\pi}{2n+1}\right\}^{2\nu} \leqslant \mathrm{ch}\,\frac{2\pi C}{3} - 1.$$

Теорема доказана, если учесть неравенство (8).

Отметим, что условие А выполнено для наиболее распространенных методов приближения (ср. [1], § 3). Следовательно, аналогичные теоремы имеют место также и для других методов приближения. Кроме того, как показано в [7], стр. 39—48, полученные теоремы 1—3 можно применять для изучения порядка приближения функций методами суммирования рядов Фурье по ортогональным полиномам Бесселя, Лагерра, Эрмита, ультрасферических, Уолша, Хаара и т. д.

Рассмотрим теперь одно применение теоремы 2. Пусть $X = X_{2\pi}$ — пространство вещественных непрерывных 2π-периодических функций или вещественных измеримых (по Лебегу) 2π-периодических функций, p-я степень модуля которых интегрируема, где $1\leqslant p<\infty$. Проекторами $P_k\in[X_{2\pi}]$ являются

$$(P_kf)(x) = \begin{cases} f^\triangle(k)e^{ikx}+f^\triangle(-k)e^{-ikx}, & k=1, 2, \ldots,\\ f^\triangle(0). & k=0, \end{cases} \tag{12}$$

где $f^\triangle(k)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in X_{2\pi}$ по системе (e^{ikx}).

Штарк [8] ввел метод приближения $U^h{}_r \in [X_{2\pi}]$ типа (1) с множителями

$$g_k(r) = r^k\{1+k(1-r)h(r)\} \tag{13}$$

при $\mathfrak{R} =]0, 1[$ и $\varrho = 1$. Там же доказано, что если функция h непрерывно дифференцируема на $[r_0, 1]$, где $r_0 > 0$ и $h(1) = 1$, то $\|U^h{}_r\| = O(1)$. Впрочем, доказано, что и рассматриваемый метод в общем не положительный. Напротив, метод Абеля—Пуассона (см. [5], стр. 46), который соответствует случаю $h = 0$, является положительным.

Известно (см. [5], стр. 43), что для проекторов (12) условие (Z) выполнено. Рассмотрим условие А. Положим $V_1(p) = \mathfrak{R}$. Тогда при $r \in V_1(k)$ имеем

$$G(k, r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left\{ (r-1)h(r) - \frac{\ln r}{\nu}\right\} k^\nu.$$

Таким образом, условие А выполнено при $\lambda = 1$. Исследуем неравенство (9) при $r \to 1-$. Пусть сперва $h = 0$. Тогда

$$\lim_{r\to 1-}\left|\frac{c_1(r)}{c_2(r)}\right| = \lim_{r\to 1-}\frac{2|\ln r|}{(\ln r)^2} = \infty,$$

и неравенство (9) не выполняется. В общем случае $h(r) \to 1$ при $r \to 1-$ и по правилу Лопиталя находим

$$\lim_{r\to 1-}\left|\frac{c_1(r)}{c_2(r)}\right| = \lim_{r\to 1-}\left|\frac{(r-1)h(r) - \ln r}{\ln r\{(r-1)h(r) - (\ln r)/2\}}\right| =$$

$$= \lim_{r\to 1-}\left|\frac{h'(r) + (r\ln r + 1 - r)/r(r-1)^2}{h(r) + (r-1)h'(r) - 1/(2r)}\right| =$$

$$= |1 + 2\lim_{r\to 1-} h'(r)| < \infty,$$

$$\lim_{r\to 1-}\left|\frac{c_2(r)}{c_3(r)}\right| = \lim_{r\to 1-}\left|\frac{2(r-1)h(r) - \ln r}{\ln r\{(r-1)h(r) - (\ln r)/3\}}\right| = \infty.$$

Следовательно, неравенство (9) при $\lambda = 1$ выполняется, а $|c_2(r)| < |c_3(r)|$ не выполняется. Учитывая (8), из теоремы 2 получаем для всех $f \in X_{2\pi}$ и $r \in]0, 1[$ неравенство

$$\|f - U^h{}_r f\| < |G|\,(C(n+1), r)\,\|f - Z^2{}_n f\|,$$

где

$$|G|\,(C(n+1), r) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|(r-1)h(r)\frac{(\ln r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} - \frac{(\ln r)^\nu}{\nu!}\right|\{C(n+1)\}^\nu \leqslant$$

$$\leqslant \{C(n+1)(1-r)|h(r)| + 1\}\exp\{-C(n+1)\ln r\} - 1.$$

Положим $n = [1/(1-r)]$, где [ ] — целая часть числа. Тогда $|G|(C(n+1), r) = O(1)$, и имеет место

Теорема 4. *Для метода приближения вида* (1) *с множителями* (13) *при всех* $f \in X_{2\pi}$ *и* $r \in]0,1[$ *справедливо неравенство*

$$\|f - U^h{}_r f\| \leq \|f - Z^2_{[1/(1-r)]} f\|.$$

Для метода Абеля—Пуассона имеет место неравенство

$$\|f - U^0{}_r f\| \leq \|f - Z^1_{[1/(1-r)]} f\|.$$

Последняя оценка известна из работ разных авторов, остальные результаты этой статьи, по-видимому, публикуются впервые.

Литература

1. Кивинукк А., О порядке приближения периодических функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 238—246.
2. Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
3. Тригуб Р. М., Суммируемость и абсолютная сходимость рядов Фурье в целом. В сб. «Метрич. вопр. теории функций и отображений», Киев, 1971, вып. 2, 173—266.
4. Boman, J., Shapiro, H. S., Comparison theorems for a generalized modulus of continuity. Arkiv. mat., 1971, **9**, 91—116.
5. Butzer, P. L., Nessel, R. J., Fourier Analysis and Approximation. Vol. 1, One-Dimensional Theory. Basel — Stuttgart, 1971.
6. Butzer, P. L., Nessel, R. J., Trebels, W., On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces. I: Comparison theorems. Tôhoku Math. J., 1972, **24**, № 2, 127—140.
7. Görlich, E., Nessel, R. J., Trebels, W., Bernstein-type inequalities for families of multiplier Operators in Banach spaces with Cesàro decompositions. I. General Theory. Acta scient. math., 1973, **34**, 121—130. II. Applications. Acta scient. math., 1974, **36**, № 1—2, 39—48.
8. Stark, E. L., On a generalization of Abel-Poisson's singular integral having kernels of finite oscillation. Stud. sci. math. hung., 1972, **7**, № 3—4, 437—449.

Поступило
28 I 1977

FOURIER' ARENDUSTE SUMMEERIMISMEETODITE VÕRDLUSTEOREEMID BANACHI RUUMIS

A. Kivinukk

Resümee

Käesoleva artikli eesmärgiks on tõestada kaks võrdlusteoreemi (teoreemid 1 ja 2) üldkujul (3) Fourier' arenduste summeerimismeetodite (1) ja (2) jaoks. Nimetatud teoreemid omavad rakendusi funktsioonide lähenduskiiruse hindamisel, kui lähendamine toimub Fourier' ridade abil trigonomeetrilise süsteemi (teoreem 4), Besseli, Laguerre, Hermite'i, ultrasfääriliste, Walshi, Haari jne. polünoomide järgi (teoreem 3 ja [7], lk. 39—48).

COMPARISON THEOREMS FOR SUMMATION PROCESSES OF FOURIER EXPANSIONS IN BANACH SPACES

A. Kivinukk

Summary

The purpose of this paper is to prove inequalities of the type (3), where summation processes U_r and Z_n are defined in (1) and (2), respectively. Theorems 1 and 2 of the type (3) have applications for the approximation order of summations processes of Fourier expansions. In particular, for Fourier series of trigonometric (theorem 4), Bessel, Laguerre, Hermite, ultraspherical, Walsh, Haar etc. functions (theorem 3 and [7], pp. 39—48).

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 40—45.

ВКЛЮЧЕНИЕ АБСТРАКТНЫХ FK-ПРОСТРАНСТВ

Т. Лейгер

Тартуский государственный университет

Пусть X — пространство Фреше (т. е. полное метризуемое локально выпуклое пространство) с нулевым элементом θ и полунормами Q_j. Пусть X' — топологическое сопряженное пространства X. Пространство $E(X)$ последовательностей [1] $x=(\xi_k)$, где $\xi_k \in X$, называем *абстрактным K-пространством*, если оно линейное топологическое пространство с покоординатной сходимостью, т. е., если $x_n \to x$ в $E(X)$, то $\xi^n{}_k \to \xi_k$ в X, где $x_n=(\xi^n{}_k)$. Полное метризуемое локально выпуклое K-пространство называется FK-пространством, нормируемое FK-пространство называется BK-пространством.

В настоящей заметке исследуются некоторые вопросы включения абстрактных FK-пространств. В п. 1 изучаются свойства, связанные с ограниченностью и сходимостью по отрезкам, а также дуальностью K-пространств. Доказываются некоторые предложения, хорошо известные из работ Целлера [11, 12] для пространств числовых последовательностей. В п. 2 доказываются теоремы включения, известные [6, 7, 10] для пространств числовых последовательностей.

В работе рассматриваем следующие пространства последовательностей:

$s(X)=\{x=(\xi_n):\xi_n\in X\}$,

$c(X)=\{x\in s(X):\exists \lim \xi_n\}$, $c_0(X)=\{x\in s(X):\lim \xi_n=\theta\}$,

$l_p(X)=\{x\in s(X):\Sigma\, Q_j(\xi_n)^p<\infty,\ j=1, 2, \ldots\}$, $l(X)=l_1(X)$,

$E^\infty(X)=\{x\in s(X):\xi_k\neq\theta$ для конечного числа индексов $k\}$.

Все эти пространства, кроме $E^\infty(X)$, являются FK-пространствами (см., например, [7]). Если X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, то $c(X)$ и $c_0(X)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\sup\|\xi_n\|$, $l_p(X)$ — с нормой $\Sigma\,\|\xi_n\|^p$ при $p\geqslant 1$. Вместо $E(\mathbf{R})$ будем писать E, например, $s(\mathbf{R})=s$.

Мы рассматриваем только такие пространства $E(X)$, которые включают $E^\infty(X)$. Абстрактное K-пространство (FK-пространство) в дальнейшем обычно называем K-пространством (соответственно FK-пространством).

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то каждое соотношение справедливо при всех значениях 1, 2, ... соответствующих индексов.

1. Сходимость и ограниченность по отрезкам в K-пространствах. *Отрезком* последовательности $x \in s(X)$ называем последовательность

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} e_k(\xi_k), \tag{1}$$

где $e_k(\xi) = (\theta, \ldots, \theta, \xi, \theta, \ldots)$, причем $\xi \in X$ стоит на k-том месте. Если $E(X)$ является K-пространством, то $P_n \in \in L(E(X), E(X))$. Мы говорим, что в точке $x \in E(X)$ имеет место сходимость (ограниченность) по отрезкам, если $P_n x \to x$ (соответственно $(P_n x)$ ограничена) в $E(X)$. Введем обозначения:

$$E(X)_{AK} = \{x \in E(X) : P_n x \to x\},$$
$$E(X)_{AB} = \{x \in s(X) : (P_n x) \quad \text{ограничена в } E(X)\},$$
$$E(X)_{AD} = \mathrm{cl}\, E^\infty(X),$$

т. е. $E(X)_{AD}$ — замыкание подпространства $E^\infty(X)$ в $E(X)$. Отметим, что $c_0(X)_{AK} = c_0(X)$ и $l_p(X)_{AK} = l_p(X)$ при $p \geqslant 1$.

Аналогично случаю $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$ (см. [11], предложение 4.5) доказывается следующее предложение, согласно которому FK-топология в пространстве последовательностей определяется однозначно.

Предложение 1. *Если $E(X)$ и $F(X)$ — полные метризуемые K-пространства, $E(X) \supset F(X)$ и $x^n \to x$ в $F(X)$, то и в $E(X)$.*

Из предложения 1 непосредственно вытекает

Предложение 2. *Если $E(X)$ и $F(X)$ — полные метризуемые K-пространства и $E(X) \supset F(X)$, то $E(X)_{AK} \supset F(X)_{AK}$, $E(X)_{AB} \supset F(X)_{AB}$ и $E(X)_{AD} \supset F(X)_{AD}$.*

Предложение 3. *Если $E(X)$ является FK-пространством, то равенство $E(X)_{AK} = E(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $E(X) = E(X)_{AD}$ и $E(X) \subset E(X)_{AB}$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из включений $E(X)_{AK} \subset E(X)_{AB}$ и $E(X)_{AK} \subset E(X)_{AD}$.

Достаточность. Пусть $E(X) = E(X)_{AD} \subset E(X)_{AB}$. Тогда последовательность операторов (P_n) точечно ограничена в $E(X)$. Так как $e_k(\xi)$ с $\xi \in X$ составляют фундаментальное множество в $E(X)$ и последовательность операторов (P_n) точечно сходится на этом множестве, то согласно теореме Банаха—Штейнгауза (см. [2], стр. 67, теорема 18), (P_n) сходится на $E(X)$, т. е. $E(X) = E(X)_{AK}$.

В случае $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$ соответствующий результат доказан Целлером ([12], предложение 3.3).

Пусть $E(X)$ — локально выпуклое K-пространство и $E(X)'$ — его топологическое сопряженное. Обозначим $S_n x = = \varphi_1 \xi_1 + \ldots + \varphi_n \xi_n$,

$$E^\beta(X') = \{(\varphi_k) \in s(X') : (S_n x) \in c \ \ \forall x \in E(X)\},$$
$$E^\delta(X') = \{(\varphi_k) \in s(X') : \exists f \in E(X)' : f e_k(\xi) = \varphi_k \xi \ \ \forall \xi \in X\}.$$

Предложение 4. *Если в каждой точке FK-пространства $E(X)$ имеет место сходимость по отрезкам, то $E^{\delta}(X') = E^{\beta}(X')$.*

Доказательство. Пусть $(\varphi_k) \in E^{\beta}(X')$ и $fx = \sum \varphi_k \xi_k$. Тогда аналогично доказательству теоремы 2 из [8], получаем, что $f \in E(X)'$. Так как $fe_k(\xi) = \varphi_k \xi$, то $E^{\beta}(X') \subset E^{\delta}(X')$.

Если $E(X)_{AK} = E(X)$, то для каждого $f \in E(X)'$ имеем $fx = \sum \varphi_k \xi_k$, где $\varphi_k \xi = fe_k(\xi)$ с $\xi \in X$. Отсюда ряд $\sum \varphi_k \xi_k$ сходится и $E^{\delta}(X') \subset E^{\beta}(X')$. В итоге $E^{\delta}(X') = E^{\beta}(X')$.

2. Некоторые теоремы включения. В этом пункте приведем для FK-пространств некоторые теоремы включения, которые в случае $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$ доказаны Беннетом [6], Беннетом и Кальтоном [7], Шнайдером и Виланским [10]. При этом доказательства общих теорем 1—4 в деталях совпадают с доказательствами соответствующих теорем из [10] для пространств числовых последовательностей. Поэтому эти доказательства опускаем.

Теорема 1. *Пусть $E(X)$ и $F(X)$ — полные метризуемые K-пространства, причем $F(X) = F(X)_{AD}$. Включение $E(X) \supset F(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $E(X)$ индуцирует на $E^{\infty}(X)$ более слабую топологию, чем $F(X)$.*

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 будет $E(X) \supset F(X)$ тогда и только тогда, когда каждое множество $S \subset E^{\infty}(X)$, ограниченное в $F(X)$, ограничено в $E(X)$.*

Пусть в дальнейшем X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $S(X)$ — его единичная сфера. Для $\xi \in X$ обозначим $\xi^{\triangle} = \|\xi\|^{-1}\xi$, если $\xi \neq \theta$ и $\xi^{\triangle} = \theta$, если $\xi = \theta$. Пусть $H = \{e_k(\xi) \colon \xi \in S(X)\}$, а $\Gamma(H)$ — его абсолютно выпуклая оболочка.

Теорема 3. *Пусть $F(X)$ является BK-пространством и p — его норма, $F(X) = F(X)_{AD}$ и $D = \{x \in E^{\infty}(X) \colon p(x) \leqslant 1\}$. Полное метризуемое K-пространство $E(X)$ включает $F(X)$ тогда и только тогда, когда D ограничено в $E(X)$.*

Теорема 4. *Пусть $E(X)$ и $F(X)$ суть FK-пространства и $F(X) = F(X)_{AD}$. Включение $E(X) \supset F(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $E^{\delta}(X') \subset F^{\delta}(X')$.*

Пользуясь теоремами 1—4, найдем необходимые и достаточные условия для включений $E(X) \supset l(X)$, $E(X) \supset l_p(X)$ и $E(X) \subset c_0(X)$.

Предложение 5. *Полное метризуемое K-пространство $E(X)$ включает $l(X)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(H)$ ограничено в $E(X)$.*

Доказательство. Пусть $D = \{z \in E^{\infty}(X) \colon \sum \|\zeta_k\| \leqslant 1\}$ и $x \in D$. Тогда существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} e_k(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\| e_k(\xi^{\triangle}{}_k)$$

и $\|\xi_1\| + \ldots + \|\xi_n\| \leqslant 1$. По определению абсолютно выпуклой оболочки $x \in \Gamma(H)$ и мы получаем включение $D \subset \Gamma(H)$.

Пусть теперь $z \in \Gamma(H)$. Тогда существуют $n \in \mathbf{N}$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| \leqslant 1$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n \in S(X)$ такие, что

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} e_k(\alpha_k \xi_k).$$

Так как $z \in E^\infty(X)$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \|\alpha_k \xi_k\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leqslant 1,$$

то $z \in D$. Следовательно, $\Gamma(H) \subset D$ и в итоге $D = \Gamma(H)$. Теперь утверждение следует из теоремы 3.

Следствие. *FK-пространство $E(X)$ включает $l(X)$ тогда и только тогда, когда H ограничено в $E(X)$.*

Доказательство вытекает из предложения 5, так как в локально выпуклом пространстве множество ограничено тогда и только тогда, когда ограничена его абсолютно выпуклая оболочка. Положив здесь $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$, мы получаем следствие 1 из [10] и теорему 2 из [6].

Пусть $E(X)$ является FK-пространством с полунормами (p_j). Для каждого $j \in \mathbf{N}$ обозначим

$$\gamma^j{}_k = \sup\{p_j(e_k(\xi)) : \xi \in S(X)\}, \quad \gamma^j = (\gamma^j{}_k).$$

Предложение 6. *В FK-пространстве $E(X)$ множество H ограничено тогда и только тогда, когда ограничены последовательности γ^j.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество H ограничено в $E(X)$. Тогда существуют $M_j > 0$ такие, что $p_j(e_k(\xi)) \leqslant M_j$ для всех k и $\xi \in S(X)$. Следовательно, $\gamma^j{}_k \leqslant M_j$, т. е. γ^j ограничены.

Достаточность. Пусть последовательности γ^j ограничены. Если для любых последовательностей $(\xi^0{}_k) \subset S(X)$ и $a = (a_k) \in c_0$ сходится $(a_k e_k(\xi^0{}_k))$ к нулевому элементу θ в $E(X)$, то согласно предложению 5.3 из [4], множество H ограничено в $E(X)$. Имеем $p_j(a_k e_k(\xi^0{}_k)) = |a_k| p_j(e_k(\xi^0{}_k)) \leqslant |a_k| \gamma^j{}_k$ для всех j и k, а так как γ^j ограничены и $a \in c_0$, то $(a_k \gamma^j{}_k) \in c_0$. Предложение доказано.

Пусть Y — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$ и $A_{nk} \in L(X, Y)$. Преобразование $y = Ax = (\eta_n)$, где

$$\eta_n = \sum_k A_{nk} \xi_k,$$

определяет обобщенный матричный метод суммирования A.

Предложение 7. *Пусть $E(Y)$ является FK-пространством с полунормами (q_j) и $E(Y) \supset E^\infty(Y)$. В пространстве последовательностей $E_A(X) = \{x \in s(X) : Ax \in E(Y)\}$ полунормы*

$$p_{2n-1}(x) = \sup_m \|\sum_{k=1}^{m} A_{nk} \xi_k\|_Y, \quad p_{2n}(x) = \|\xi_n\|, \quad r_j(x) = q_j(Ax)$$

определяют FK-топологию.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего результата для числовых последовательностей (см.

[11], предложение 4.10). Из предложения 7 вытекает, что поле суммируемости $c_A(X)$ является FK-пространством с полунормами p_k и $p_0(x) = \sup_n \|\sum_k A_{nk}\xi_k\|_Y$.

Для метода A и $\xi \in X$ обозначим $A^k\xi = (A_{nk}\xi)$.

Теорема 5. *Включение* $E_A(X) \supset l(X)$ *справедливо тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1° $A^k\xi \in E(Y)$ *при всех* $\xi \in S(X)$,

2° *множество* $S = \{A^k\xi : \xi \in S(X)\}$ *ограничено в* $E(Y)$.

Доказательство. Так как условие 1° равносильно включению $E_A(X) \supset E^\infty(X)$, то оно необходимо. Согласно следствию из предложения 5, включение $E_A(X) \supset l(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда множество H ограничено в $E_A(X)$. По предложению 6, множество H ограничено в $E_A(X)$ тогда и только тогда, когда

$$p_{2n-1}(e_k(\xi)) = \|A_{nk}\xi\|_Y \leqslant M_n, \quad \xi \in S(X), \tag{3}$$

$$r_j(e_k(\xi)) = q_j(A^k\xi) \leqslant N_j, \quad \xi \in S(X). \tag{4}$$

Неравенства (3) вытекают из неравенств (4), но последние справедливы тогда и только тогда, когда S ограничено в $E(Y)$.

В случае $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$ получаем следствие теоремы 2 из [6].

Следующие две теоремы, являющиеся непосредственными следствиями теоремы 5, доказаны Кангро [2]. Это обобщения теорем Хана и Кноппа—Лоренца (см. [1], теоремы 3.1 и 4.1).

Теорема 6. *Для включения* $c_A(X) \supset l(X)$ *необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $\exists \lim_n A_{nk}\xi$, $\xi \in S(X)$,

2° $\sup_{n,k} \|A_{nk}\| < \infty$.

Теорема 7. *Для включения* $l_A(X) \supset l(X)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sup_k \sum_n \|A_{nk}\| < \infty.$$

Для изучения включений $E(X) \supset c_0(X)$ и $E(X) \supset l_p(X)$ воспользуемся теоремой 4. Доказываемая ниже теорема 8 является обобщением результатов Беннета и Кальтона ([7], предложение 5) и Беннета ([6], следствие из теоремы 5).

Теорема 8. *FK-пространство $E(X)$ включает $c_0(X)$ (соответственно $l_p(X)$ с $p \geqslant 1$) тогда и только тогда, когда для всех $f \in E(X)'$ имеем $\Sigma \|\varphi_k\| < \infty$ (соответственно $\Sigma \|\varphi_k\|^q < \infty$ с $1/p + 1/q = 1$), где $\varphi_k\xi = fe_k(\xi)$.*

Доказательство. Так как $c_0(X)_{AK} = c_0(X)$ и по предложению (α) из [9] имеем $c_0(X)' = l(X')$, то $(\varphi_k) \in c_0{}^\delta(X')$ тогда и только тогда, когда $\Sigma \|\varphi_k\| < \infty$. По теореме 4 пространство $E(X)$ включает $c_0(X)$ тогда и только тогда, когда $E^\delta(X') \subset c_0{}^\delta(X')$, т. е. $\Sigma \|\varphi_k\| < \infty$ с $\varphi_k\xi = fe_k(\xi)$ при всех $f \in E(X)'$. Для $l_p(X)$ доказательство аналогичное.

Приведем еще одну теорему включения для пространств $l_p(X)$, где $0 < p < 1$. Известно [6], что эти пространства не являются локально выпуклыми. Доказательство теоремы опускаем, ибо оно аналогично доказательству теоремы 6 из [6].

Теорема 10. *Если $E(X)$ является FK-пространством, то оно включает $l_p(X)$ с $0 < p \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда $E(X) \supset l(X)$.*

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости. Таллин, 1977.
2. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
3. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ. матем. наук, 1956, **2**, 108—128.
4. Шефер Х., Топологические векторные пространства. Москва, 1971.
5. Baric, L. W., The chi function in generalized summability. Studia math., 1971, **39**, 165—180.
6. Bennett, G., Some inclusion theorems for sequence spaces. Pacific J. Math., 1973, **46**, 17—30.
7. Bennett, G., Kalton, N. J., FK-spaces containing c_0. Duke Math. J., 1972, **39**, 561—582.
8. Garling, D. J. H., The β- and γ-duality of sequence spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1967, **63**, 963—981.
9. Leonard, I. E., Banach sequence spaces. J. Math. Anal. Appl., 1976, **54**, 245—265.
10. Snyder, A. K., Wilansky, A., Inclusion theorems and semiconservative FK spaces. Rocky Mountain J. Math., 1972, **2**, 595—603.
11. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, **53**, 463—487.
12. Zeller, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, **55**, 55—70.

Поступило
17 VII 1977

ABSTRAKTSETE *FK*-RUUMIDE SISALDUVUS

T. Leiger

Resümee

Olgu X Fréchet' ruum. Töös vaadeldakse Fréchet' ruume, mille elementideks on jadad $x=(\xi_k)$, kus $\xi_k \in X$, ja milles kehtib koonduvus koordinaatide järgi. Üldistatakse mõningaid FK-ruumide sisalduvusteoreemid.

VERGLEICHSSÄTZE FÜR ABSTRAKTE *FK*-RÄUME

T. Leiger

Zusammenfassung

Sei X ein Fréchet'-Raum und $E(X)$ ein Fréchet'-Raum der Folgen $x=(\xi_k)$, wo $\xi_k \in X$, mit der koordinatenweise Konvergenz. Wir verallgemeinern einige Vergleichssätze aus [10] und geben notwendige und hinreichende Bedingungen für $E(X) \supset l_p(X)$, $(p>0)$, $E(X) \supset c_0(X)$, $E_A(X) \supset l(X)$, $c_A(X) \subset l(X)$ und $l_A(X) \supset l(X)$.

Уч. зап. Тартуск. 1978, **448**, 46—51.

ЯДРО α-СУММИРУЕМОСТИ ПИТЕРСЕНА

Л. Лооне

Тартуский государственный университет

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над **C** или **R**, и E' — топологически сопряженное пространство к E. Пусть $\mathfrak{J}$ — некоторый фильтр в E' с базисом $\mathfrak{B} = \{K_i : i \in I\}$ из выпуклых слабо замкнутых множеств. Пусть

$$K_i(x) = \{\langle x, f\rangle : f \in K_i\}.$$

Пересечение замыканий множеств $K_i(x)$, где $i \in I$, называется ядром $K(x)$ элемента x по фильтру $\mathfrak{J}$. Говорят, что элемент x *ограничен по ядру*, если ядро $K(x)$ является непустым и ограниченным множеством. Если ядро $K(x)$ содержит только один элемент, то говорят, что x *сходится по ядру*.

Понятие ядра элемента в отделимом локально выпуклом пространстве E введено в статье [4]. Там же введены понятия сходящегося и ограниченного по ядру элементов. В статьях [4, 5] показано, как определить фильтр в m и s, чтобы ядро по фильтру совпадало с ядром Кноппа. Кроме того, в [4] показано, как определить ядро для матричного метода A так, чтобы сходимость по ядру совпадала с A-суммируемостью. В статье [6] рассмотрено ядро почти-сходимости, которое определено множеством банаховых пределов. Как известно, сходимость по такому ядру называется почти-сходимостью. Питерсен [7] определил α-метод суммируемости, частным случаем которого является метод почти-сходимости. Понятие α-суммируемости следующее.

Пусть[1] $A_m = (a_{mnk})$ — матричные методы суммирования для любого $m = 0, 1, \ldots$. Говорят, что последовательность $x = \{\xi_k\}$, *суммируема α-методом* $\{A_m\}$ к a, если равномерно относительно n существует предел $\lim\limits_m \sum\limits_k a_{mnk}\xi_k = a$.

Возникает вопрос, можно ли определить ядро α-метода так, чтобы сходимость по ядру совпадала с α-суммируемостью? Если это возможно, то будет ли это новое понятие расширением понятия ядра почти-сходимости? Точнее, будет ли ядро α-метода суммируемости ядром почти-сходимости в смысле статьи [6], если $\{A_m\}$ является методом почти-сходимости? Решению таких вопросов посвящена настоящая статья.

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все значения 0, 1, ...

§ 1. Определение ядра α-метода

Пусть Q является множеством всевозможных операторов $q: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Пусть α является множеством всех матричных методов суммирования вида $B_q = (a_{mq(m)k})$, где $q \in Q$. Значит, множество α состоит из всех таких матриц, первым рядом которых служит какой-то ряд матрицы A_1, вторым рядом которых служит какой-то ряд матрицы A_2 и т. д. Питерсеном [7] доказана

Теорема 1. *Метод $\{A_m\}$ суммирует такие и только такие последовательности, которые суммируемы каждым элементом из множества α.*

Пусть фильтр $\mathfrak{J}^\circ$ определяет ядро Кноппа $K^\circ(x)$ и фильтр $\mathfrak{J}_q$ определяет ядро B_q-суммируемости, т. е. ядро $K^\circ(B_q x)$.

Определение 1. *Ядром α-метода называется ядро, определяемое фильтром* [2]

$$\mathfrak{J}_\alpha = \mathrm{cl\,co\,inf}\,\{\mathfrak{J}_q : q \in Q\}. \tag{1.1}$$

Мы определили, таким образом, ядро α-метода посредством ядра Кноппа. Это определение не связано с конкретным пространством. Оно применимо как в s, так и в m, а также в других подпространствах пространства s, где определена локально выпуклая топология и найден фильтр $\mathfrak{J}^\circ$, определяющий ядро Кноппа. Обозначим ядро α-метода через $K_\alpha(x)$ и фильтр $\inf\{\mathfrak{J}_q : q \in Q\}$ через $\mathfrak{J}^*$.

Теорема 2. *Множеством сходящихся элементов по ядру α-метода является множество c_α всех α-суммируемых последовательностей.*

Доказательство. При помощи теоремы 1 из определения ядра α-метода вытекает, что каждая сходящаяся последовательность по ядру является α-суммируемой. Покажем, что верно и обратное. Пусть $x \in c_\alpha$. Следовательно, по теореме 1 получаем $K^\circ(B_q x) = \{a\}$ $\forall q \in Q$. Значит, каждый фильтр [3] $\mathfrak{J}_q(x)$ сходится к a. Пусть b — произвольный элемент из $K_\alpha(x)$. Следовательно, существует фильтр $\mathfrak{J}$, мажорирующий фильтр $\mathfrak{J}_\alpha$, такой, что b является пределом фильтра $\mathfrak{J}(x)$ (см. [1], стр. 101). Рассмотрим фильтр окрестностей $\mathfrak{A}$ точки a. Этот фильтр является мажорируемым каждым фильтром $\mathfrak{J}_q(x)$, следовательно, и фильтром $\mathfrak{J}^*(x)$. Прообраз $\mathfrak{A}^{-1}(x)$ фильтра $\mathfrak{A}$ имеет базис из замкнутых и выпуклых множеств, причем он мажорируем фильтром $\mathfrak{J}^*$. Так как $\mathfrak{J}_\alpha$ является слабейшим фильтром, имеющим базис из замкнутых и выпуклых множеств и мажорирующий фильтр $\mathfrak{J}^*$, то фильтр $\mathfrak{J}_\alpha$ мажорирует фильтр $\mathfrak{A}^{-1}(x)$. Следовательно, предел фильтра $\mathfrak{J}(x)$ должен быть пределом фильтра $\mathfrak{A}$ (см. [1], глава I, § 6). Значит $b = a$.

---

[2] Через $\mathrm{cl\,co}\,\mathfrak{J}$ обозначается слабейший фильтр, который мажорирует фильтр $\mathfrak{J}$ и имеет базис из замкнутых и выпуклых множеств.

[3] Под фильтром $\mathfrak{J}(x)$ подразумеваем фильтр, базисом которого является образ базиса фильтра $\mathfrak{J}$ с отображением x.

§ 2. Ядро α-метода Питерсена в пространстве m

Пусть m — пространство всех ограниченных вещественных последовательностей с обычной нормой. Определим в m структуру порядка следующим образом: если $x=\{\xi_k\}$ и $y=\{\eta_k\}$, то $x \leqslant y$, когда $\xi_k \leqslant \eta_k$ для каждого k. При такой структуре для каждого множества H, содержащего верхние грани всех своих конечных подмножеств и имеющего верхнюю грань в m, и для любого положительного функционала f из m' выполняется равенство

$$\sup\{\langle x, f\rangle : x \in H\} = \langle \sup H, f\rangle \tag{2.0}$$

(см. [2], стр. 239). В пространстве m рассмотрим α-метод Питерсена, определенный последовательностью матричных методов $\{A_m\}$. Теперь по определению α-сходимости, последовательность x является α-суммируемой к числу a тогда и только тогда, когда в пространстве m существует[4] $\lim\limits_m A_m x = ae$.

Из теоремы Банаха—Штейнгауза вытекают следующие необходимые и достаточные условия для регулярности α-метода:

$$1^\circ \ \lim_m \sup_n |a_{mnk}| = 0, \tag{2.1}$$

$$2^\circ \ \lim_m \sum_k a_{mnk} = 1 \quad \text{равномерно относительно } n. \tag{2.2}$$

$$3^\circ \ \sup_m \sup_n \sum_k |a_{mnk}| = M < \infty. \tag{2.3}$$

В дальнейшем рассмотрим только такие α-методы $\{A_m\}$, для которых условие (2.3) выполнено.

Как доказано в [4], ядро Кноппа можно определить одним множеством K°. Множество K° состоит из всех таких элементов $f \in m'$, удовлетворяющих условиям:

$$1^\circ \ \langle e_k, f\rangle = 0, \quad k=0, 1, \ldots, \tag{2.4}$$

$$2^\circ \ \langle e, f\rangle = 1, \tag{2.5}$$

$$3^\circ \ \|f\| = 1. \tag{2.6}$$

Еще одним ядром, рассмотренным нами в m, было ядро почти-сходимости. Оно определено тоже одним множеством, а именно множеством F всех банаховых функционалов, т. е. множеством всех функционалов из K°, удовлетворяющих, кроме (2.4)—(2.6), еще следующему условию[4]

$$4^\circ \ \langle Sx - x, f\rangle = 0 \quad \forall x \in m, \tag{2.7}$$

Возникает вопрос, можно ли определить ядро α-метода через одно множество. Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 3. *Ядро α-метода определяется одним множеством K_α, где*

$$K_\alpha = \mathrm{cl}\,\mathrm{co} \bigcup \{{}^tB_q(K^\circ) : q \in Q\}. \tag{2.8}$$

---

[4] Обозначаем $e=\{1, 1, \ldots\}$ и $e_k=\{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, где 1 стоит на k-том месте, а через S обозначаем оператор левого сдвига.

Доказательство. Для любого $q \in Q$ и $f \in K^\circ$ имеем
$$\|{}^tB_qf\| \leqslant \|{}^tB_q\| \leqslant \sup \|A_m\| = M < \infty.$$
Значит, множество K_α является слабо бикомпактным множеством. Как известно, из статьи [4], фильтр $\mathfrak{I}_q$, определяющий ядро для метода B_q, порождается множеством ${}^tB_q(K^\circ)$. Следовательно, фильтром $\mathfrak{I}^*$ является фильтр, порождаемый множеством $\bigcup\{{}^tB_q(K^\circ) : q \in Q\}$. Итак, фильтром $\mathfrak{I}_\alpha$ служит фильтр, порожденный множеством K_α.

Теорема 4. *Ядро почти-сходимости является ядром α-метода $\{A_m\}$, где*
$$a_{mnk} = \begin{cases} 1/(m+1) & \textit{при } n \leqslant k \leqslant n+m, \\ 0 & \textit{при } n > k \textit{ или } k > n+m. \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что $F = K_\alpha$, где K_α определено формулой (2.8), причем матрицы $B_q = (a_{mq(m)k})$ определены следующим образом
$$a_{mq(m)k} = \begin{cases} 1/(m+1) & \textit{при } q(m) \leqslant k \leqslant q(m)+m, \\ 0 & \textit{при } q(m) > k \textit{ или } k > q(m)+m. \end{cases}$$

Так как для любого B_q удовлетворены условия[5] предложения 2.1 статьи [6], то ${}^tB_q(K^\circ) \subset F$ для любого q из Q. Следовательно, $K_\alpha \subset F$.

Пусть $g(x)$ является опорной функцией множества K_α. Значит, имеет место
$$g(x) \geqslant \sup_{f \in K^\circ} \sup_{q \in Q} \langle B_q x, f \rangle.$$
Так как функции $f \in K^\circ$ положительны, $H = \{B_q : q \in Q\}$ удовлетворяет условию (2.0), то $\sup\{\langle B_q x, f\rangle : q \in Q\} = \langle \sup H, f \rangle$. Вычислим эту верхнюю грань:
$$\sup H = \sup_{q \in Q} \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \xi_{k+q(m)} \right\}_{m=0}^{\infty} = \left\{ \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \xi_{k+n} \right\}_{m=0}^{\infty}.$$
Следовательно,
$$g(x) \geqslant \sup_{f \in K^\circ} \left\langle \left\{ \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \xi_{k+n} \right\}, f \right\rangle = \overline{\lim_m} \sup_n \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \xi_{k+n} = h(x).$$
Как известно [8], функция $h(x)$ является опорной функцией множества F. Но, так как $K_\alpha \subset F$, то возможно лишь $g(x) = h(x)$, т. е. $K_\alpha = F$. Теорема доказана.

§ 3. Ядерное включение α-методов

В теории ядер важной является проблема: при каких условиях для оператора A ядро элемента x включает ядро элемента Ax? Классической здесь является (см. [3], стр. 174)

[5] См. теорему 5 в настоящей статье.

Теорема 5. *Пусть $A = (a_{nk})$ — матричный метод на m. Чтобы для каждого $x \in m$ имело место*

$$K^\circ(Ax) \subset K^\circ(x) \tag{3.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

1° *метод A был регулярным,*

2° $$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1. \tag{3.2}$$

Следующая теорема, доказанная в [6], решает аналогичную проблему между ядрами Кноппа и почти-сходимости.

Теорема 6. *Пусть $A = (a_{nk})$ — матричный метод на m. Чтобы для каждого $x \in m$ имело место*

$$K^\circ(Ax) \subset F(x), \tag{3.3}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

1° *для любого $x \in m$ имело место* (3.1),

2° $$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{nk+1}| = 0. \tag{3.4}$$

При каких условиях α-метод «ядерно сильнее», чем сходимость, т. е. когда верно включение

$$K_\alpha(x) \subset K^\circ(x) \tag{3.5}$$

для любого $x \in m$? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 7. *Пусть α-метод определен последовательностью матричных методов $\{A_m\}$. Для того, чтобы для каждого $x \in m$ имело место включение* (3.5), *необходимо и достаточно, чтобы*

1° *α-метод был регулярным,* (3.6)

2° $$\lim_m \|A_m\| = 1. \tag{3.7}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $K_\alpha \subset K^\circ$. Следовательно, $K_\alpha(x) = K^\circ(x)$ $\forall x \in c$, т. е. α-метод регулярен. Из включения $K_\alpha \subset K^\circ$ вытекает, что ${}^tB_q(K^\circ) \subset K^\alpha$ $\forall q \in Q$. Значит, по теореме 5 для каждого q имеет место

$$\lim_m \sum_k |a_{mq(m)k}| = 1.$$

Имея в виду определение множества Q, из последнего равенства вытекает равносильное требованию (3.7) условие

$$\lim_m \sup_n \sum_k |a_{mnk}| = 1.$$

Достаточность. Пусть верны (3.6) и (3.7). Тогда для любого $q \in Q$ выполнены условия теоремы 5. Поэтому ${}^tB_q(K^\circ) \subset K^\circ$ $\forall q \in Q$, и, следовательно, верно включение $K_\alpha \subset K^\circ$, т. е. и включение (3.5).

Теорема 8. *Пусть α-метод определен последовательностью матричных методов $\{A_m\}$. Чтобы имело место*

$$K_\alpha(x) \subset F(x) \quad \forall x \in m, \tag{3.8}$$

необходимо и достаточно выполнение условий (3.6), (3.7) *и*

$$\lim_m \|A_m(S - E)\| = 0. \tag{3.9}$$

Доказательство. Необходимость условий (3.6) и (3.7) вытекает из включения $F \subset K^\circ$. Если $K_\alpha \subset F$, то ${}^tB_q(K^\circ) \subset$

$\subset F \ \forall q \in Q$ и, следовательно, по теореме 6 для любого $q \in Q$

$$\lim_m \sum_k |a_{mq(m)k} - a_{mq(m)k+1}| = 0.$$

Отсюда по определению множества Q получаем равносильное требованию (3.9) условие

$$\lim_m \sup_n \sum_k |a_{mnk} - a_{mnk+1}| = 0.$$

Достаточность. Если удовлетворены условия теоремы 8, то каждый матричный метод B_q удовлетворяет условиям теоремы 6, т. е. ${}^tB_q(K^\circ) \subset F \quad \forall q \in Q$. Следовательно, $K_\alpha \subset F$, т. е. верно и включение (3.8).

Литература

1. Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры. Москва, 1968.
2. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва, 1961.
3. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
4. Лооне Л., О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 125—135.
5. Лооне Л., Об ограниченных по ядру элементах в локально выпуклом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 86—90.
6. Лооне Л., Ядро Кноппа и ядро почти-сходимости в пространстве m. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 131—144; 1975, **355**, 148—156.
7. Petersen, G. M., Almost Convergence and the Buck-Pollard Property. Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, 469—477.
8. Simons, S., Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals. J. Math. Anal. and Appl., 1969, **26**, 640—655.

Поступило
14 VII 1977

PETERSENI α-MENETLUSE TUUM

L. Loone

Resümee

Töös vaadeldakse tuuma, mis on määratud filtriga (1.1). Uuritakse toodud mõiste kooskõla α-summeeruvuse mõiste ja peaaegu-koonduvuse tuuma mõistega.

THE CORE DETERMINED BY PETERSEN'S α-METHOD OF SUMMABILITY

L. Loone

Summary

The core of an element in a locally convex space has been defined in [4]. In this paper a core determined by Petersen's α-method is defined as a core fixed by the filter (1.1). This core is called α-core. In section 1 it is shown that the set of sequences convergent by α-core is the set of the α-summable sequences. In section 2 the author proves that an α-core in space m is determined by the set K_α (see (2.8)). Theorem 4 in the same section demonstrates that the concept of α-core is compatible with the concept of the almost convergency core. In section 3 the necessary and sufficient conditions are established for inclusions (3.5) and (3.8) to be valid for each $\mathbf{x} \in m$. In those formulae $K^\circ(x)$ denotes Knopp's core of the element x and $F(x)$ denotes the set of all Banach limits of x, and $K_\alpha(x)$ denotes α-core of x.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 52—54.

НЕКОТОРЫЕ ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ ДЛЯ ЛАКУНАРНЫХ РЯДОВ

И. Таммерайд

Таллинский политехнический институт

В статье [5] Обрешков доказал, что лакуна Θk при $\Theta > 0$ является тауберовым условием для лакунарных рядов для методов суммирования Гельдера H^n и Чезаро C^n $(n \in \mathbf{N})$. Обрешков доказал эти теоремы, используя «теорему больших индексов» Харди—Литлвуда [2]. Прямое доказательство этих результатов дано в статье [3]. Новый подход к доказательству таких проблем, а также наиболее простое доказательство в случае метода C арифметических средних дано в статье [4]. В настоящей заметке доказаны две теоремы о тауберовых теоремах с остаточным членом для лакунарных рядов в случае методов суммирования H^n и C^n.

Теорема 1. *Если последовательность* $x = \{\xi_\nu\}$ *удовлетворяет условиям*

$$x \in (C, m^\lambda), \tag{1}$$

$$\vec{\Delta}\xi_\nu = 0 \qquad (\nu \notin \{k(l)\}), \tag{2}$$

где $k = \{k(l)\}$ — *любая монотонно возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, удовлетворяющая условию*

$$k(l+1) - k(l) > \Theta k(l) \qquad (\Theta > 0), \tag{3}$$

и $\lambda = \{\lambda_n\}$ — *любая монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$(C, m^\lambda) \subset (E, m^\lambda), \tag{4}$$

то

$$x \in (E, m^\lambda). \tag{5}$$

Доказательство для случая $\lambda_\nu = O(1)$, т. е. для случая обыкновенной суммируемости предложено в статье [5]. Предположим $\lambda_\nu \neq O(1)$ и обозначим $[(1+\Theta)k(l)] = \omega$,

$$\sigma_\omega = (\omega+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^{\omega} \xi_\nu$$

и

$$\lim_{\omega\to\infty} \sigma_\omega = \sigma.$$

Ввиду справедливости равенства

$$\lambda_{k(l)}(\xi_{k(l)}-\sigma)=\frac{\omega+1}{\omega-k(l)+1}\cdot\frac{\lambda_{k(l)}}{\lambda_\omega}\cdot\lambda_\omega(\sigma_\omega-\sigma)-$$

$$-\frac{k(l)}{\omega-k(l)+1}\cdot\frac{\lambda_{k(l)}}{\lambda_{k(l)-1}}\cdot(\sigma_{k(l)-1}-\sigma)\lambda_{k(l)-1}$$

и соотношений

$$\frac{\omega+1}{\omega-k(l)+1}=O(1)=\frac{k(l)}{\omega-k(l)+1},$$

$$\frac{\lambda_{k(l)}}{\lambda_\omega}=O(1)=\frac{\lambda_{k(l)}}{\lambda_{k(l)-1}},$$

вытекающие соответственно из условий (3) и (4), заключаем

$$\lambda_{k(l)}(\xi_{k(l)}-\sigma)=O(1).$$

Следовательно, справедливо утверждение теоремы.

Теорема 2. *Если последовательность* x *удовлетворяет условиям* (2),

$$x\in(C^n,\ m^\lambda)\qquad(n\in\mathbf{N})\tag{6}$$

и

$$\nu\overline{\Delta}\xi_\nu=O(1),\tag{7}$$

где последовательности k *и* λ *удовлетворяют условиям* (3), (4) *и*

$$l\lambda_{k(l)+m}=O(k(l)+m)\quad(k(l)\leqslant k(l)+m<k(l+1),\ m\in N_0),\tag{8}$$

то справедливо соотношение (5).

Доказательство. Так как условие (7) уже является тауберовым при $\lambda_n=O(1)$, то предположим $\lambda_n\neq O(1)$. Для величины $\overline{\Delta}\sigma_\nu$ получаем при условиях теоремы выражение

$$\overline{\Delta}\sigma_{k(l)+m}=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{l}k(\nu)\overline{\Delta}\xi_{k(\nu)}}{(k(l)+m+1)(k(l)+m)}$$

$$(k(l)\leqslant k(l)+m<k(l+1),\ m\in N_0),\tag{9}$$

С учетом условий (7) и (8), при помощи соотношения (9) выводим, что

$$(k(l)+m)\lambda_{k(l)+m}\overline{\Delta}\sigma_{k(l)+m}=O\left(\frac{l\lambda_{k(l)+m}}{k(l)+m+1}\right)=O(1)$$

$$(k(l)\leqslant k(l)+m<k(l+1),\ m\in N_0).$$

Следовательно,

$$\nu\lambda_\nu\overline{\Delta}\sigma_\nu=O(1).\tag{10}$$

Так как при условии (4) справедливо (см. [1], теорема 4) соотношение

$$(C^n,\ m^\lambda)=(H^n,\ m^\lambda),$$

то из условия (6) вытекает соотношение

$$x \in (H^n, m^\lambda). \tag{11}$$

При $n = 1$ утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1. При $n \geqslant 2$ по условиям (4) и (10) из соотношения (11) вытекает (см. [1], лемма 10 и теорема 6) соотношение (1). Если теперь применить теорему 1, то отсюда следует утверждение теоремы 2.

Литература

1. Таммерайд И., Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 161—170.
2. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., A further note on the converse of Abel's theorem. Proc. London Math. Soc. (2), 1926, **25**, 219—236.
3. Meyer-König, W., Limitierungsumkehrsätz mit Lückenbedingungen, I. Math. Z., 1939, **45**, 447—478.
4. Meyer-König, W., Zeller, K., Lücken umkehrsätze und Lückenperfektheit. Math. Z., 1956, **66**, 203—224.
5. Obreschkoff, N., Über einige Sätze für Summierung von divergenten Reihen. Tohoku Math. J., 1930, **32**, 231—233.

Поступило
14 III 1977

MÕNINGAD JÄÄKLIIKMEGA TAUBERI TEOREEMID LAKUNAARSETE RIDADE KORRAL

I. Tammeraid

Resümee

Töös leitakse mõningad lüngateoreemid kiirusega summeerivuse jaoks summeerimismeetodite C^n ja H^n korral. Osutub, et klassikaline lüngateoreem aritmeetiliste keskmiste summeerimismenetluse jaoks on üldistatav ka kiirusega summeeruvuse juhule (teoreem 1). Menetluste C^n ja H^n korral ($n \geqslant 2$) on klassikaliste väidete üldistus saadud piisaval lisatingimusel (8) (teoreem 2).

SOME TAUBERIAN REMAINDER THEOREMS FOR GAP SERIES

I. Tammeraid

Summary

A series Σa_ν is called a gap series if $a_\nu = 0$ for $\nu \notin \{k(l)\}$ with $k(l) > > (1+\Theta)k(l)$ for $\Theta > 0$. In the present paper have been found some gap-Tauberian conditions for Tauberian remainder theorems for methods H^n and C^n $(n \in \mathbf{N})$.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 55—65.

ОДИН СПОСОБ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ СЕМЕЙСТВ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

А. Тали

Таллинский педагогический институт

§ 1. Введение

Пусть A_α с $\alpha > 0$ — семейство матричных методов суммирования, переводящих последовательности [1] $x = \{s_n\}$ в последовательности $A_\alpha x = \{t_n{}^\alpha\}$. Параметр α введен так, что при $\beta > \alpha$ метод A_β сильнее [2] метода A_α; далее отмечаем это коротко — $A_\beta \supset A_\alpha$.

Определение 1. *Назовем семейство A_α выпуклым, если из соотношений*

$$A_\alpha x \in m, \quad A_\beta x \in c$$

всегда следует $A_\gamma x \in c$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Мы знаем, что наиболее известное семейство методов суммирования — семейство методов Чезаро — выпукло (см., например, [1], стр. 91). Это доказали Харди и Литлвуд в 1913 году и тем самым была впервые поставлена проблема выпуклости: при каких условиях семейство методов суммирования A_α выпукло? Далее, Рисс (см. [5], стр. 19) распространил теорему Харди—Литлвуда на семейство нормальных средних Рисса, а Касс [4] на некоторое семейство методов Вороного—Нёрлунда [3]. Поскольку проблему выпуклости можно отнести, с одной стороны, к тауберовым теоремам, а, с другой стороны, к теории приближения, то она имеет как теоретическое, так и прикладное значение.

---

[1] Свободные индексы принимают все значения 0, 1, 2, ...

[2] В настоящей статье условимся говорить, что метод A_β сильнее метода A_α, и писать $A_\beta \supset A_\alpha$, если $cA_\beta \supset cA_\alpha$ (с соместностью) и $mA_\beta \supset mA_\alpha$ (обозначения см. [1], стр. 46 и 61).

[3] Известны также некоторые модификации теоремы выпуклости для абсолютной и сильной суммируемостей. Поскольку в данной работе модификации проблемы выпуклости не рассматриваются, то здесь мы на них не останавливаемся. Подробный обзор дан в статье Г. Кангро [2].

В данной работе поставлена проблема выпуклости в более общем виде: рассматривается возможность построения выпуклых семейств методов суммирования. В § 2 доказываются теоремы, дающие достаточные условия для того, чтобы семейство регулярных треугольных методов A_α было выпуклым (теоремы 1, 2 и 3). Предполагается, что методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$, где $\delta > 0$, связаны соотношением

$$t_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha} t_k^{\alpha}, \tag{1}$$

где $(d_{nk}^{\alpha\delta})$ — треугольная матрица с $d_{nk}^{\alpha 1} = 1/M_\alpha$, причем M_α не зависит от k и n, а $\{b_n^\alpha\}$ — некоторая последовательность с $b_n^\alpha \neq 0$.

Отметим, что семейства методов Чезаро и Вороного—Нёрлунда удовлетворяют соотношению (1). Из доказываемых в §2 теорем в качестве следствий выводятся ранее известные теоремы выпуклости для методов Вороного—Нёрлунда и Чезаро (следствие 1 и примечание 3). В § 3 дается способ для построения выпуклого семейства A_α на базе любого заданного регулярного треугольного метода A. Приводятся примеры (следствие 2, примечания 5 и 6). В § 4 теоремы выпуклости, доказанные в § 2, переносятся на интегральные и полунепрерывные методы суммирования (теоремы 5 и 6, примечание 9). Устанавливается выпуклость семейства интегральных методов Чезаро и нормальных средних Рисса (следствия 3 и 4).

§ 2. Теоремы выпуклости для треугольных матричных методов

Исследование проблемы выпуклости существенно упрощается, если считать методы A_α регулярными.

Лемма 1. *Пусть A_α — семейство регулярных матричных методов, где $A_\beta \supset A_\alpha$ при $\beta > \alpha$. Если из соотношений $A_\alpha x \in m$ и $A_{\alpha+1} x \in c_0$ всегда следует $A_{\alpha+\delta} x \in c_0$ при $0 < \delta < 1$, то семейство A_α выпукло.*

Доказательство. Согласно определению 1, покажем сперва, что из $A_\alpha x \in m$ и $A_\beta x \in c_0$ следует $A_\gamma x \in c_0$ при каждом $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Рассуждая аналогично как в [1], стр. 91, без ограничения общности, можем считать $\beta = \alpha + 1$. Следовательно, по предположению леммы из $A_\alpha x \in m$ и $A_\beta x \in c_0$ следует $A_\gamma x \in c_0$ при любом $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

Учитывая регулярность методов A_α, завершаем доказательство, т. е. заключаем, что из $A_\alpha x \in m$ и $A_\beta x \in c$ следует $A_\gamma x \in c$ (с сохранением суммы)[4] при каждом $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

Далее будем считать методы A_α треугольными и связанными соотношением (1). Докажем следующую теорему.

---

[4] Здесь (а также в доказательствах теорем 1—3) используется только условие 2° теоремы Теплица для методов A_α (см., например, [1], стр. 16).

Теорема 1. *Пусть A_α — семейство регулярных треугольных методов, где $A_\beta \supset A_\alpha$ при $\beta > \alpha$. Если методы A_α связаны соотношением (1), удовлетворяющим при $0 < \delta < 1$ условиям*

1° *преобразования $C^{\alpha\delta\theta} = (c_{nk}^{\alpha\delta\theta})$, где*[5]

$$c_{nk}^{\alpha\delta\theta} = \begin{cases} \Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha+1}/b_n^{\alpha+\delta} & \text{при} \quad k < N, \\ 0 & \text{при} \quad k \geqslant N, \end{cases}$$

являются преобразованиями типа $c_0 \to c_0$,

2° $d_{nN}^{\alpha\delta} b_N^{\alpha+1}/b_n^{\alpha+\delta} = O_\theta(1)$,

3° $\sum\limits_{k=N+1}^{n} |d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha}/b_n^{\alpha+\delta}| = O\{\varphi^{\alpha\delta}(\theta)\}$,

где[6] $1/2 < \theta < 1$, $\varphi^{\alpha\delta}(\theta) \to 0$ *при* $\theta \to 1$- *и* $N = [\theta n]$, *то семейство A_α выпукло.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно доказать, что из $t_n^\alpha = O(1)$ и $t_n^{\alpha+1} = o(1)$ следует $t_n^{\alpha+\delta} = o(1)$ для любого δ с $0 < \delta < 1$. Для этого разобьем сумму (1) при помощи $\theta \in (1/2, 1)$ на две части:

$$t_n^{\alpha+\delta} = I_n + K_n,$$

где

$$I_n = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{N} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha t_k^\alpha$$

и

$$K_n = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=N+1}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha t_k^\alpha.$$

При помощи преобразования Абеля выводим, что

$$I_n = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} \sum_{\nu=0}^{k} b_\nu^\alpha t_\nu^\alpha + \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} d_{nN}^{\alpha\delta} \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu^\alpha t_\nu^\alpha = I_n' + I_n'',$$

где

$$I_n' = \frac{M_\alpha}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha+1} t_k^{\alpha+1}$$

и

$$I_n'' = M_\alpha d_{nN}^{\alpha\delta} b_N^{\alpha+1} t_N^{\alpha+1}/b_n^{\alpha+\delta}.$$

Поскольку $t_n^{\alpha+1} = o(1)$, то по условию 1° заключаем, что $I_n' = o(1)$. Учитывая условия $t_n^{\alpha+1} = o(1)$ и 2°, имеем:

$$I_n'' = O_\theta\{|t_N^{\alpha+1}|\} = o(1).$$

Далее, учитывая условия $t_n^\alpha = O(1)$ и 3°, выводим, что

$$K_n = O\{\sum_{k=N+1}^{n} |d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha/b_n^{\alpha+\delta}|\} = O\{\varphi^{\alpha\delta}(\theta)\}.$$

---

[5] Напомним, что $\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} = d_{nk}^{\alpha\delta} - d_{n,k+1}^{\alpha\delta}$.

[6] Везде в условиях ограниченности постоянные могут зависеть от α и δ, но нигде не зависят от n и k.

Выбирая θ достаточно близким к единице, можем сделать $\varphi^{\alpha\delta}(\theta)$ сколь угодно близким к нулю. Тем самым, теорема 1 доказана, ибо $t_n^{\alpha+\delta}=I_n'+I_n''+K_n=o(1)$.

Если методы[7] (1) типа $c_0\to c_0$, то, ввиду регулярности методов A_α, условие $A_\beta\supset A_\alpha$ при $\beta>\alpha$ выполнено. Учитывая далее необходимые и достаточные условия для того, чтобы методы (1) и $C^{\alpha\delta\theta}$ были методами типа $c_0\to c_0$ (см., например, [1], стр. 17), из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть A_α — семейство регулярных треугольных методов, связанных соотношением* (1). *Если при* $0<\delta<1$ *выполнены условия:*

1° *последовательности* $\{\|b_n^\alpha\|\}$ *монотонно возрастают,*

2° $\lim\limits_n d_{nk}^{\alpha\delta}/b_n^{\alpha+\delta}=0 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$,

3° $\sum\limits_{k=0}^{n}|d_{nk}^{\alpha\delta}|=O\{|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^\alpha|\}$,

4° $\sum\limits_{k=0}^{N-1}|\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta}|=O_\theta\{|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^{\alpha+1}|\}$,

5° $d_{nN}^{\alpha\delta}=O_\theta\{|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^{\alpha+1}|\}$,

6° $\sum\limits_{k=N+1}^{n}|d_{nk}^{\alpha\delta}|=O\{\varphi^{\alpha\delta}(\theta)\,|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^\alpha|\}$,

где $N=[\theta n]$, $1/2<\theta<1$ *и* $\varphi^{\alpha\delta}(\theta)\to 0$ *при* $\theta\to 1$-, *то семейство* A_α *выпукло.*

При помощи теоремы 2 доказывается

Теорема 3. *Пусть A_α — семейство регулярных треугольных методов, связанных соотношением* (1). *Если при* $0<\delta<1$ *выполнены условия*

1° *последовательности* $\{\|b_n^\alpha\|\}$ *монотонно возрастают и*

$M_1n^\delta\leqslant|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^\alpha|\leqslant M_2n^\delta \qquad (n>0)$,

2° $d_{nk}^{\alpha\delta}=O\{(n-k+1)^{\delta-1}\} \qquad (0\leqslant k\leqslant n)$,

3° $\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta}=O\{(n-k+1)^{\delta-2}\} \qquad (0\leqslant k<n)$,

то семейство A_α *выпукло.*

Доказательство. Условие 1° теоремы 2 содержится в условии 1° данной теоремы. Условия 2°, 3°, 5° и 6° выполнены в силу условий 1° и 2° данной теоремы. Действительно,

$$d_{nk}^{\alpha\delta}b_k^\alpha/b_n^{\alpha+\delta}=O\{|d_{nk}^{\alpha\delta}b_n^\alpha/b_n^{\alpha+\delta}|\}=$$
$$=O\{n^{-\delta}(n-k+1)^{\delta-1}\}=o(1)$$

при каждом k. Значит, и $d_{nk}^{\alpha\delta}/b_n^{\alpha+\delta}=o(1) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$, т. е. условие 2° выполнено. Так же проверяется выполнение условия 3° теоремы 2:

$$\sum_{k=0}^{n}|d_{nk}^{\alpha\delta}|=O\{\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)^{\delta-1}\}=O\{|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^\alpha|\}.$$

---

[7] Имеем в виду матричные методы, определенные соотношением (1).

Далее, проверим условия 5° и 6°. Действительно, ввиду 1° и 2° имеем

$$d_{nN}^{\alpha\delta}=O\{(n-N)^{\delta-1}\}=O\{n^{\delta-1}(1-\theta)^{\delta-1}\}=O_\theta\{n^{\delta-1}\}= \\ =O_\theta\{|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^{\alpha+1}|\}$$

и

$$\sum_{k=N+1}^{n}|d_{nk}^{\alpha\delta}|=O\{\sum_{k=N+1}^{n}(n-k+1)^{\delta-1}\}=O\{(n-N)^{\delta}\}= \\ =O\{(1-\theta)^{\delta}n^{\delta}\}=O\{(1-\theta)^{\delta}|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^{\alpha}|\}.$$

Значит, условия 5° и 6° выполнены, положив $\varphi^{\alpha\delta}(\theta)=(1-\theta)^{\delta}$. Осталось еще вывести условие 4°. В силу условий 1° и 3° доказываемой теоремы имеем:

$$\sum_{k=0}^{N-1}|\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta}|=O\{\sum_{k=0}^{N-1}(n-k+1)^{\delta-2}\}=O\{(n-N)^{\delta-2}N\}= \\ =O\{n^{\delta-1}(1-\theta)^{\delta-2}\theta\}=O_\theta\{n^{\delta-1}\}=O_\theta\{|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^{\alpha+1}|\}.$$

Примечание 1. Поскольку доказательства теорем 1, 2 и 3 опираются на связь между методами A_α, а не на прямое определение методов, то теоремы 1, 2 и 3 справедливы и тогда, когда методы A_α определены в виде преобразований, переводящих ряды в последовательности.

Примечание 2. Если регулярные треугольные методы A_α связаны сооотношением

$$t_n^{\alpha+\delta}=\frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\delta-1}b_k^{\alpha}t_k^{\alpha},$$

где $A_n^{\delta-1}$ — биномиальные коэффициенты (см. [1], стр. 73), а последовательности $\{b_n^{\alpha}\}$ удовлетворяют условию 1° теоремы 3, то семейство A_α выпукло.

Действительно, поскольку при $d_{nk}^{\alpha\delta}=A_{n-k}^{\delta-1}$ выполнены условия 2° и 3° теоремы 3 (см., например, [1], стр. 79), то, в силу теоремы 3, семейство A_α выпукло.

В качестве примера рассмотрим семейство Вороного—Нёрлунда (N, p_n^{α}), определенное соотношением (см. [4])

$$t_n^{\alpha}=\frac{1}{P_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^{\alpha}s_k,$$

где [8] $\alpha>0$,

$$P_n^{\alpha}=p_n^{\alpha+1}=\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha},\ p_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}p_k,\ p_0>0,\ p_n\geqslant 0.$$

Так как методы (N, p_n^{α}) связаны соотношением

$$t_n^{\alpha+\delta}=\frac{1}{P_n^{\alpha+\delta}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\delta-1}P_k^{\alpha}t_k^{\alpha}, \tag{2}$$

[8] В работе [4] параметр α удовлетворяет условию $\alpha>-1$, но поскольку в теоремах выпуклости у нас $\alpha>0$, то и здесь мы ограничиваемся положительными значениями параметра.

то из теоремы 3 непосредственно вытекает следующий результат работы [4].

Следствие 1. *Если выполнено условие*[9]

$$M_1 n^\delta \leqslant P_n^{\alpha+\delta}/P_n^\alpha \leqslant M_2 n^\delta \quad (n>0),$$

то семейство (N, p_n^α) *выпукло.*

Примечание 3. В частности, когда $p_0 = 1$ и $p_n = 0$ при $n > 0$, методы (N, p_n^α) превращаются в методы Чезаро (C, α). Поскольку в данном случае $P_n^\alpha = A_n^\alpha$, то выполнено условие следствия 1, т. е.

$$M_1 n^\delta \leqslant A_n^{\alpha+\delta}/A_n^\alpha \leqslant M_2 n^\delta,$$

и мы снова заключаем, что семейство (C, α) выпукло.

§ 3. Построение выпуклых семейств A_α на базе регулярного метода A

Опираясь на теоремы, доказанные в § 2, можем построить выпуклые семейства.

Пусть $A = (a_{nk})$ — некоторый регулярный треугольный метод. Определим семейство A_α при помощи соотношения (1), допуская здесь также значение параметра $\alpha = 0$, положив $\{t_n^0\} = A_0 x = Ax$. Будем говорить, что A_α построено *на базе метода* A. Заметим, что если методы, определенные соотношением (1) с $\alpha \geqslant 0$ и $\delta > 0$, регулярны, то, в силу регулярности метода A, регулярны и методы A_α. Непосредственно из теоремы 2 выводится следующая

Теорема 4. *Если соотношение* (1) *удовлетворяет при* $\alpha \geqslant 0$ *и* $0 < \delta < 1$ *условиям* 1°—6° *теоремы* 2 *и условию*

$$7^\circ \ \lim_n \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha = 1,$$

то семейство A_α, *построенное на базе регулярного метода* A, *выпукло.*

Доказательство. По условиям 1°, 2°, 3° и 7° методы, определенные соотношением (1) с $\alpha \geqslant 0$ и $0 < \delta < 1$, регулярны. Тогда регулярны и методы A_α, и в силу теоремы 2 семейство A_α выпукло.

Примечание 4. Если соотношение (1) удовлетворяет при $\alpha \geqslant 0$, $0 < \delta < 1$ условиям 1°—3° теоремы 3 и условию 7° теоремы 4, то семейство A_α, построенное на базе регулярного метода A, выпукло, так как выполнены условия 1°—7° теоремы 4 (см. доказательство теоремы 3).

---

[9] Постоянные M_1 и M_2 имеют в разных местах разные значения.

Для примера построим выпуклое семейство на базе метода взвешенных средних Рисса $A=(R, p_n)$, где $p_0>0$ и $p_n \geqslant 0$. Вводим параметр α при помощи соотношения (2), прибавляя значение параметра $\alpha=0$ с учетом, что

$$p_n{}^0=p_n, \quad P_n{}^0=P_n, \quad t_n{}^0=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_k.$$

Из соотношения (2) получим, что методы A_α определяются соотношением

$$t_n{}^\alpha=\frac{1}{P_n{}^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} p_k s_k. \tag{3}$$

Справедливо следующее

Следствие 2. *Если* $0<M_1 \leqslant p_n \leqslant M_2$, *то семейство* A_α, *определенное соотношением* (3), *выпукло.*

Доказательство. Введем обозначения $b_n{}^\alpha=P_n{}^\alpha$ и $d_{nk}{}^{\alpha\delta}=A_{n-k}{}^{\delta-1}$. Учитывая определение $P_n{}^\alpha$ и ограничения на p_n, получим, что

$$N_1 n^{\alpha+1} \leqslant P_n{}^\alpha \leqslant N_2 n^{\alpha+1} \qquad (\alpha \geqslant 0).$$

Из последнего выводим, что $\lim P_n=\infty$, т. е. исходный метод (R, p_n) регулярен (см., например, [1], стр. 114), и что

$$K_1 n^\delta \leqslant P_n{}^{\alpha+\delta}/P_n{}^\alpha \leqslant K_2 n^\delta.$$

Таким образом (см. примечание 2), выполнены условия 1°—3° теоремы 3. В силу примечания 4 доказательство завершено, ибо

$$\frac{1}{P_n{}^{\alpha+\delta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} P_k{}^\alpha=\frac{1}{P_n{}^{\alpha+\delta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} p_k{}^{\alpha+1}=$$

$$=\frac{p_n{}^{\alpha+\delta+1}}{P_n{}^{\alpha+\delta}}=\frac{P_n{}^{\alpha+\delta}}{P_n{}^{\alpha+\delta}}=1.$$

Примечание 5. Выпуклое семейство методов Вороного—Нёрлунда $(N, p_n{}^\alpha)$, удовлетворяющее условию следствия 1, можем, например, построить на базе метода Вороного—Нёрлунда $A=(N, p_n)$, где $0 \leqslant p_n \downarrow$. В частности, если $p_0=1$ и $p_n=0$ при $n>0$, получим семейство Чезаро, построенное на базе метода сходимости E.

Примечание 6. На базе любого регулярного треугольного метода A можно построить выпуклое семейство, например, соотношением

$$t_n{}^{\alpha+\delta}=\frac{1}{A_n{}^{\alpha+\delta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} A_k{}^\alpha t_k{}^\alpha,$$

где $\alpha \geqslant 0$ и $\delta>0$, а $A_n{}^\nu$ — биномиальные коэффициенты и $\{t_n{}^0\}=Ax$.

§ 4. Выпуклые семейства интегральных и полунепрерывных методов

Обозначим через X множество всех функций $x = s(u)$ вещественной переменной $u \geqslant 0$, интегрируемых[10] на любом конечном отрезке $[0, u]$.

1. Пусть A_α с $\alpha > 0$ — семейство интегральных преобразований, определенных функциями a^α и переводящих функции $x \in X$ в функции $A_\alpha x = t^\alpha \in X$, где

$$t^\alpha(u) = \int_0^u a^\alpha(u, v) s(v) dv, \qquad u \geqslant 0.$$

Будем говорить, что функция x суммируема методом A_α к сумме t, если $t^\alpha(u) \to t$ при $u \to \infty$, а функция x ограничена методом A_α, если $t^\alpha(u) = O(1)$.

Предположим, что[11] $A_\beta \supset A_\alpha$ при $\beta > \alpha$.

Определение 2. *Семейство A_α называется выпуклым, если из соотношений*

$$t^\alpha(u) = O(1), \qquad \lim_{u \to \infty} t^\beta(u) = t,$$

всегда следует $\lim\limits_{u \to \infty} t^\gamma(u) = t$ *при* $\alpha < \gamma < \beta$.

Примечание 7. Полагая методы A_α регулярными[12], можем при доказательстве выпуклости ограничиваться доказательством того, что из соотношений $t^\alpha(u) = O(1)$ и $t^{\alpha+1}(u) = o(1)$ с $0 < \delta < 1$ всегда следует $t^{\alpha+\delta}(u) = o(1)$ $(u \to \infty)$. К этому результату приходим аналогично лемме 1.

Далее, будем считать методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$, где $\delta > 0$, связанными соотношением

$$t^{\alpha+\delta}(u) = \frac{1}{b^{\alpha+\delta}(u)} \int_0^u d^{\alpha\delta}(u, v) b^\alpha(v) t^\alpha(v) dv, \tag{4}$$

где $b^\alpha \in X$, функции $d^{\alpha\delta}$ дифференцируемы по v и $d^{\alpha 1}(u, v) = 1/M_\alpha$ при $0 \leqslant v \leqslant u$, причем M_α не зависит от u и v.

При сделанных предположениях можем перенести на интегральные методы теоремы, доказанные в § 2. Например, теорема 1 превращается в следующую теорему.

---

[10] Интегрируемость предполагается в смысле Лебега.

[11] Мы пишем $A_\beta \supset A_\alpha$, если из $t^\alpha(u) \to t$ следует $t^\beta(u) \to t$ при $u \to \infty$ и из $t^\alpha(u) = O(1)$ следует $t^\beta(u) = O(1)$.

[12] Метод A_α регулярен, если из $\lim\limits_{u \to \infty} s(u) = s$ следует $\lim\limits_{u \to \infty} t^\alpha(u) = s$.

Теорема 5. *Пусть A_α — семейство регулярных интегральных методов, где $A_\beta \supset A_\alpha$ при $\beta > \alpha$. Если имеет место соотношение* (4), *удовлетворяющее при* $0 < \delta < 1$ *условиям:*

1° *интегральные преобразования*

$$c^{\alpha\delta\Theta}(u, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{b^{\alpha+\delta}(u)} \dfrac{\partial d^{\alpha\delta}(u, v)}{\partial v} b^{\alpha+1}(v) & \text{при} \quad v \leqslant U, \\ 0 & \text{при} \quad v > U, \end{cases}$$

переводят все[13] *0-функции в 0-функции,*

2° $d^{\alpha\delta}(u, U)\, b^{\alpha+1}(U)/b^{\alpha+\delta}(u) = O_\theta(1)$,

3° $\int\limits_U^u |d^{\alpha\delta}(u, v)\, b^\alpha(v)/b^{\alpha+\delta}(u)|\, dv = O\{\varphi^{\alpha\delta}(\theta)\}$,

где $1/2 < \theta < 1$, $\varphi^{\alpha\delta}(\theta) \to 0$ *при* $\theta \to 1$- *и* $U = \theta u$, *то семейство* A_α *выпукло.*

Доказательсто аналогично доказательству теоремы 1 (вместо преобразования Абеля надо применить интегрирование по частям).

Теорема 6. *Пусть A_α семейство регулярных методов, связанных соотношением* (4), *удовлетворяющее при* $0 < \delta < 1$ *условиям:*

1° *функции* $\|b^\alpha(\cdot)\|$ *монотонно возрастают и*

$$M_1 u^\delta \leqslant |b^{\alpha+\delta}(u)/b^\alpha(u)| \leqslant M_2 u^\delta \qquad (u > 0),$$

2° $d^{\alpha\delta}(u, v) = O\{(u - v)^{\delta-1}\} \qquad (0 \leqslant v < u)$,

3° $\dfrac{\partial d^{\alpha\delta}(u, v)}{\partial v} = O\{(u - v)^{\delta-2}\} \qquad (0 \leqslant v < u)$.

Тогда семейство A_α выпукло.

Доказательство. По условиям 1° и 2° в силу регулярности[14] A_α имеем $A_\beta \supset A_\alpha$ при $\beta > \alpha$. Условия 1°—3° обеспечивают выполнение и остальных условий теоремы 5, вследствие чего семейство A_α выпукло.

Следствие 3. *Семейство интегральных методов Чезаро*[15], *определенное соотношением*

$$t^\alpha(u) = \frac{\alpha}{u^\alpha} \int\limits_0^u (u - v)^{\alpha-1} s(v)\, dv \qquad (\alpha > 0),$$

выпукло.

Доказательство. Методы семейства связаны соотношением (4) при

$$b^\alpha(u) = u^\alpha, \qquad d^{\alpha\delta}(u, v) = \frac{\Gamma(\alpha+\delta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\delta)} (u - v)^{\delta-1} \qquad (0 \leqslant v \leqslant u).$$

Остается применить теорему 6.

---

[13] Функция s называется 0-функцией, если $s(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

[14] Условия регулярности см., например, в [3], стр. 71 и 86.

[15] См., например, [3], стр. 143.

Примечание 8. Опираясь на теорему 6, можем строить выпуклые семейства интегральных методов на базе заданного регулярного метода A, при помощи соотношения (4) с $\alpha \geqslant 0$, $\delta > 0$ и $t^0(u) = Ax$.

2. Пусть теперь A_α — семейство полунепрерывных преобразований, определенных функциями $a_k{}^\alpha$ аргумента $u \geqslant 0$ и переводящих последовательности $x = \{s_n\}$ в функции $A_\alpha x = t^\alpha \in X$, где

$$t^\alpha(u) = \sum_{k<u} a_k{}^\alpha(u) s_k.$$

Говорят, что последовательность x суммируема методом A_α к сумме t, если $t^\alpha(u) \to t$ при $u \to \infty$.

Примечание 9. Поскольку данные методы являются частными случаями интегральных методов, то теоремы 5 и 6 справедливы и здесь. Заметим, что x мы можем считать как последовательностью $\{s_n\}$ так и рядом Σs_n.

Следствие 4. *Семейство нормальных средних Рисса* (R, λ, α), *определенных соотношением*

$$t^\alpha(u) = \frac{1}{u^\alpha} \sum_{\lambda_k<u} (u - \lambda_k)^\alpha s_k,$$

где $\alpha > 0$ *и* $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, *выпукло.*

Доказательство. Методы (R, λ, α) регулярны [16] и связаны таким же соотношением [17] (4), как и интегральные методы Чезаро. Поэтому, в силу следствия 3 и примечания 9, семейство (R, λ, α) выпукло [18].

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Кангро Г., Теория суммируемости последовательностей и рядов. В сб. «Мат. анализ. Т. 12. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР», М., 1974, 5—70.
3. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
4. Cass, F. P., Convexity theorems for Nörlund and strong Nörlund summability. Math. Z., 1969, **112**, № 5, 357—363.
5. Chandrasekharan, K., Minakshisundaram, S., Typical means. Oxford, 1952.

Поступило
11 III 1977

[16] См., например, [3], стр. 115.
[17] См., например, [5], стр. 3.
[18] Этот результат известен (см. [5], стр. 19).

ÜHEST KUMERATE SUMMEERIMISMENETLUSTE PEREDE MOODUSTAMISE VÕIMALUSEST

A. Tali

Resümee

Olgu A_α, $\alpha>0$, maatriksmenetluste pere, mis rahuldab tingimust: kui $\beta>\alpha$, siis $cA_\alpha \supset cA_\alpha$ (kooskõlaga) ja $mA_\beta \subset mA_\alpha$. Me nimetame peret A_α kumeraks, kui seostest $A_\alpha x \in m$, $A_\beta x \in c$ järeldub $A_\gamma x \in c$, kui $\alpha<\gamma<\beta$.

Käesolevas artiklis vaadeldakse regulaarsete kolmnurksete menetluste peresid A_α, mis rahuldavad seoseid (1). Paragrahvis 2 tõestatakse teoreemid (1, 2 ja 3), mis annavad piisavad tingimused pere A_α kumeruseks ja millest järelduvad kumerusteoreemid Woronoi-Nörlundi pere (N, p_n^α) ja Cesàro pere (C, α) jaoks. Tõestatud kumerusteoreemide abil tuuakse paragrahvis 3 välja meetod kumerate perede ehitamiseks etteantud regulaarse menetluse A baasil. Vaadeldakse näiteid. Paragrahvis 4 kantakse eespool tõestatud teoreemid üle integraal- ja poolpidevatele teisendustele. Veendutakse Cesàro integraalteisenduste pere ning Rieszi pere (R, λ, α) kumeruses.

THE CONSTRUCTING CONVEX FAMILIES OF SUMMABILITY METHODS

A. Tali

Summary

Let A_α, $\alpha>0$, be a family of consistent matrix summability methods, where $cA_\beta \supset cA_\alpha$ and $mA_\beta \supset mA_\alpha$ if $\beta>\alpha$. The family A_α is said to be convex if from $A_\alpha x \in m$ and $A_\beta x \in c$ follows $A_\gamma x \in c$ for $\alpha<\gamma<\beta$.

The present paper deals with families of regular triangular summability methods which satisfy the relation (1). In section 2 sufficient convexity conditions of the family A_α are established (theorems 1, 2, 3). These theorems include convexity theorems for Woronoi-Nörlund family (N, p_n^α) and Cesàro family (C, α). In section 3 the method for building convex families on the basis of a regular method A is given. Some examples are presented. In section 4 above-mentioned theorems are transmitted to integral and semi-continuous summability methods. Convexity of Cesàro integral methods family and Riesz family (R, λ, α) is established.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 66—73.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИСТЕМ СУММИРУЕМОСТИ

Х. Тюрнпу

Тартуский государственный университет

1. Известно, что система Радемахера $r = \{r_k(t)\}$, которую можно задать формулой (см. [4], стр. 149)

$$r_n(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \chi^k{}_{n-1}(t), \tag{1}$$

где $h = \{\chi^k{}_n(t)\}$ — система Хаара, обладает замечательными свойствами, связанными со сходимостью почти всюду рядов [1] (см. [4], глава VII)

$$\sum \xi_k r_k(t), \tag{2}$$

где $x = \{\xi_k\} \in l^2$. В настоящей заметке мы рассмотрим произвольную систему φ измеримых и почти всюду конечных на отрезке $e = [a, b]$ функций $\varphi_k(t)$, для которых почти всюду на e для всех $x \in l^p$ с $1 < p < \infty$ сходится подпоследовательность $\{s_{\nu_n}(x, t)\}$ частичных сумм ряда

$$\sum \xi_k \varphi_k(t). \tag{3}$$

В этом случае говорят, что φ является системой ν_n-сходимости для l^p. В частности, если $\nu_n = n$, говорят, что φ — система сходимости для l^p.

Далее, пусть $B = (\beta_{nk})$ — треугольная матрица преобразования ряда в последовательность. Обозначим

$$\sigma_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} \xi_k \varphi_k(t).$$

Если для всех $x \in l^p$ почти всюду на e существует предел [2]

$$\lim \sigma_{\nu_n}(x, t),$$

то говорят, что φ — система $B\nu_n$-суммируемости для l^p. Если $\nu_n = n$, то говорят, что φ — система B-суммируемости для l^p.

---

[1] Через $\sum u_k$ мы обозначаем $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

[2] Через $\lim u_k$ обозначаем $\lim_{k\to\infty} u_k$.

Аналогично определяются системы сходимости и B-суммируемости по мере для l^p.

Известно (см. [1], стр. 132), что если $p=2$, а φ — ортогональная на e система и B — регулярный метод суммирования, то каждая система B-суммируемости для l^2 является для некоторой подпоследовательности $\{\nu_n\}$ также системой ν_n-сходимости для l^2.

Определим теперь систему $\psi=\{\psi_k(t)\}$, полагая

$$\psi_k(t)=\sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \alpha_{ki}\varphi_i(t), \tag{4}$$

где

$$\sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |\alpha_{ki}|^p \leqslant M \tag{5}$$

при некотором $M>0$. Так определенную систему ψ мы называем системой *типа Радемахера степени p, или R_p-системой.*

В частности, система Радемахера является R_2-системой.

Мы докажем, что имеет место

Теорема 1. *Если φ — система ν_n-сходимости для l^p при $1<p<\infty$, то R_p-система ψ является системой сходимости для l^p.*

Из этой теоремы вытекает, что система Радемахера является системой сходимости для l^2.

Кроме того, из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Если φ — ортогональная на e система C^α-суммируемости с $\alpha>0$ для l^2, то R_2-система ψ с $\nu_n=2^n$ является системой сходимости для l^2.*

Так как доказательство следствия 1 вытекает из факта, что из C^α-суммируемости ортогонального ряда (3) почти всюду на e для $x\in l^2$ вытекает сходимость частичных сумм $s_{2^n}(x,t)$ ряда (3) почти всюду на e (см. [1], стр. 125), то, воспользуясь аналогичным свойством для других методов суммирования, мы можем получить различные варианты следствия 1. Более того, как следует из следующей теоремы 2, требование ортогональности системы φ в следствии 1 является лишним.

Теорема 2. *Пусть регулярный треугольный метод суммирования B с матрицей (β_{nk}) преобразования ряда в последовательность удовлетворяет условию*

$$\sum_{\nu_n\geqslant k} (\beta_{\nu_n k}-1)^2\leqslant M. \tag{6}$$

Тогда, если φ является системой $B\nu_n$-суммируемости для l^2, то она является также системой ν_n-сходимости для l^2.

Учитывая, что по следствию 2 из [8] достаточным условием для того, чтобы система φ была системой $B\nu_n$-суммируемости для l^2, является конечность почти всюду мажорант функций Лебега

$$L_n(B, \varphi, t) = \int_e \sup_{p \geqslant n} \left| \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk}\beta_{pk}\varphi_k(t)\varphi_k(\tau) \right| d\tau,$$

из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть регулярный метод суммирования B удовлетворяет условию* (6). *Если почти всюду на e*

$$L\nu_n(B, \varphi, t) = O_t(1), \tag{7}$$

то R_2-система ψ является системой сходимости для l^2.

Известно (см. [2]), что ряд (2) даже безусловно почти всюду сходится для l^2. Оказывается, что это вытекает из специальных свойств системы h, ибо существует система сходимости φ для l^2 такая, что некоторая R_2-система ψ не является системой безусловной сходимости для l^2. На самом деле, пусть $g = \{g_k(t)\}$ некоторая система сходимости для l^2. Определим систему φ, полагая $\varphi_k(t) = g_k(t)$, если $k \neq 2^s$ и $\varphi_{2^s}(t) = w_s(t)$, где $w = \{w_s(t)\}$ — система Уолша. Очевидно, что φ — система сходимости для l^2, но R_2-система ψ с $\nu_n = 2^n$ и $\alpha_{ki} = \delta_{ki}$ — символ Кронекера, не является системой безусловной сходимости для l^2, ибо в рассматриваемом случае $\psi = w$.

2. Для доказательства теорем нам нужны следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Для того, чтобы φ была системой ν_n-сходимости для l^p при $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлись такие измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $N_\varepsilon > 0$, что при $1/p + 1/q = 1$*

$$\sum \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \left| \int_{T_\varepsilon} h_n(t)\varphi_k(t)\,dt \right|^q \leqslant N_\varepsilon \tag{8}$$

для всех

$$h_n(t) = \sum_{i=n}^{\infty} \chi_i(t),$$

где χ_i — характеристические функции измеримых множеств $\mathfrak{M}_i \subset T_\varepsilon$ с $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup \mathfrak{M}_i \subset T_\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть φ — система ν_n-сходимости для l^p. По теореме Никишина (см. [5], теорема 10) для этого необходимо и достаточно, чтобы при некоторой $M_\varepsilon > 0$

$$\int_{T_\varepsilon} \sup \left| \sum_{k=0}^{\nu_n} \xi_k \varphi_k(t) \right| dt \leqslant M_\varepsilon \|x\|. \tag{9}$$

Из последнего условия вытекает, что равномерно по m

$$\left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m} \chi_n(t) \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi_k \varphi_k(t)\, dt \right| \leqslant M_\varepsilon \|x\|.$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования, мы в силу принципа равномерной ограниченности обнаруживаем существование постоянной $N_\varepsilon > 0$ такой, что для всех $s < \nu_m$

$$\sum_{k=0}^{s} \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{\nu_n \geqslant k}^{m} \chi_n(t) \varphi_k(t)\, dt \right|^q \leqslant N_\varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по m, получаем, что

$$\sum \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{\nu_n \geqslant k} \chi_n(t) \varphi_k(t)\, dt \right|^q \leqslant N_\varepsilon. \tag{10}$$

Так как полученное неравенство равносильно неравенству (8), то необходимость условия (8) доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие (8). Тогда выполнено также условие (10), из которого вытекает, что для всех m и $x \in l^p$

$$A = \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{k=0}^{\nu_m} \xi_k \varphi_k(t) \sum_{\nu_n \geqslant k} \chi_n(t)\, dt \right| \leqslant N_\varepsilon \|x\|.$$

Но, с другой стороны,

$$A \geqslant \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m} \chi_n(t) \sum_{k=0}^{\nu_n} \xi_k \varphi_k(t)\, dt \right| - \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=m+1}^{\infty} \chi_n(t) \sum_{k=0}^{\nu_m} \xi_k \varphi_k(t)\, dt \right| =$$
$$= B_m - C_m.$$

Кроме того, если в условии (10) множество $\mathfrak{M}_i = \varnothing$ при $i \leqslant m$, получаем, что найдется $N'_\varepsilon > 0$ такая, что $C_m \leqslant N'_\varepsilon \|x\|$.

Итак, найдется постоянная $M_\varepsilon > 0$ такая, что

$$B_m \leqslant M_\varepsilon \|x\|.$$

Из последнего условия при помощи рассуждения, приведенного в доказательстве достаточности леммы 3 из [4], выводим, что

$$\int_{T_\varepsilon} \sup_{n \leqslant m} \left| \sum_{k=0}^{\nu_n} \xi_k \varphi_k(t) \right| dt \leqslant 2M_\varepsilon \|x\|.$$

Так как последнее условие равносильно условию (9), то лемма 1 полностью доказана.

Следствие 3. *Для того, чтобы система φ была системой сходимости для l^p, необходимо и достаточно, чтобы в обозначениях леммы* 1

$$\sum \left| \int_{T_\varepsilon} h_n(t) \varphi_n(t)\, dt \right|^q \leqslant N_\varepsilon.$$

Лемма 2. *Если φ является системой C-суммируемости по мере для l^p для некоторого регулярного конечнострочного метода суммирования $C = (\gamma_{nk})$, то φ является системой сходимости по мере для l^p.*

Доказательство. Обозначая

$$\sigma_n(C, x, t) = \sum_{k=0}^{s_n} \gamma_{nk}\xi_k\varphi_k(t), \tag{11}$$

мы заметим, что C-суммируемость ряда (3) по мере на e означает сходимость последовательности (11) в F-пространстве M_e всех измеримых на e функций. Пусть σ — линейный непрерывный оператор из l^2 в M_e, определенный равенством

$$\sigma(C, x, t) = \lim \sigma_n(C, x, t).$$

Из непрерывности оператора σ вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что при $|\beta| \leqslant \delta_\varepsilon$ для всех $\|x\| \leqslant 1$ имеем $\|\beta\sigma x\| < \varepsilon$. Это означает, что для $0 < \beta_\varepsilon < \delta_\varepsilon$.

$$\inf_{\alpha>0} [\alpha + \text{mes}(t\colon\ |\beta_\varepsilon\sigma(C, x, t)| > \alpha)] < \varepsilon.$$

Найдем теперь $\alpha_\varepsilon > 0$ такое, чтобы

$$\alpha_\varepsilon + \text{mes}(t\colon\ |\beta_\varepsilon\sigma(C, x, t)| > \alpha_e) < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства выводим, что

$$\text{mes}(t\colon\ |\sigma(C, x, t)| > \alpha_e/\beta_\varepsilon) < \varepsilon,$$

т. е. множество $Q = \{\sigma x\colon \|x\| \leqslant 1\}$ ограничено по мере (см., например, [5], стр. 136) и, следовательно, σ — ограниченный линейный оператор из l^p в M_e (см. [5], определение 6).

По теореме Никишина (см. [5], теорема 2) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\text{mes}\, T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\int_{T_\varepsilon} |\sigma(C, x, t)|\, dt \leqslant M_\varepsilon \|x\|.$$

Из последнего неравенства выводим, что для всех $\|x_s\| \leqslant 1$ с $x_s = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_s, 0, 0, \ldots\}$

$$\int_{T_\varepsilon} |\sigma(C, x_s, t)|\, dt \leqslant M_\varepsilon. \tag{12}$$

Так как при $s < s_n$

$$\sigma_n(C, x_s, t) = \sum_{k=0}^{s} \gamma_{nk}\xi_k\varphi_k(t),$$

то в силу регулярности метода C получаем, что

$$\sigma(C, x_s, t) = \sum_{k=0}^{s} \xi_k\varphi_k(t).$$

Итак, условие (12) превращается в условие

$$\int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{s} \xi_k\varphi_k(t) \right| dt \leqslant M_\varepsilon,$$

из которого в силу теоремы Никишина (см. [5], теорема 7) вытекает, что φ — система сходимости по мере для l^p.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть ψ является R_p-системой. Для того, чтобы она была системой сходимости в l^p, в силу следствия 3 достаточно, чтобы при некотором $M_\varepsilon > 0$

$$D = \sum \left| \int_{T_\varepsilon} h_n(t) \psi_n(t)\, dt \right|^q \leqslant M_\varepsilon.$$

Но

$$D = \sum \left| \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \int_{T_\varepsilon} h_n(t) \alpha_{nk} \varphi_k(t)\, dt \right|^q,$$

Следовательно, учитывая условия (5) и (8), мы имеем, что

$$D \leqslant \sum \left\{ \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} |\alpha_{nk}|^p \right\}^{q/p} \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \left| \int_{T_\varepsilon} h_n(t) \varphi_k(t)\, dt \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant M^{q/p} N_\varepsilon = M_\varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Если φ — система $B\nu_n$-суммируемости для l^2, то она также система $B\nu_n$-суммируемости по мере для l^2. Определяя метод суммирования $C = (\gamma_{nk})$ с $\gamma_{nk} = \beta_{\nu_n k}$, убеждаемся, что C — такой регулярный метод суммирования, для которого φ является системой C-суммируемости по мере для l^2. По лемме 2, тогда φ является системой сходимости по мере для l^2, вследствие чего по теореме Никишина (см. [6], теорема 5) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся ортонормированная на e система $g = \{g_k(t)\}$, измеримое подмножество $E_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} E_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon > 0$ такие, что $\varphi_n(t) = M_\varepsilon g_n(t)$ на E_ε.

Покажем, что φ — система ν_n-сходимости для l^2. Для этого достаточно доказать, что разность

$$\tau_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\nu_n} (1 - \beta_{\nu_n k}) \xi_k \varphi_k(t)$$

сходится почти всюду для всех $x \in l^2$. Так как $\tau_n(x, t)$ определяют последовательность линейных непрерывных операторов из l^2 в M_e, то в силу теоремы Банаха (см. [3], стр. 361) надо лишь установить, что для всех $x \in l^p$ почти всюду на e

$$\sup_n |\tau_n(x, t)| < \infty.$$

По лемме 3 из [7] для последнего необходимо и достаточно, чтобы для каждых $\varepsilon > 0$ и $x \in l^2$ нашлись измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\operatorname{mes} T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что равномерно относительно всех разбиений $\mathfrak{M}^m{}_x$ множества $T_{\varepsilon x}$ на $m+1$ непересекающихся измеримых частей $\mathfrak{M}^m{}_{xn}$ имело место неравенство

$$E = \left| \int_{T_{\varepsilon x}} \sum_{n=0}^{m} \chi^x{}_{mn}(t) \tau_n(x, t)\, dt \right| \leqslant M_{\varepsilon x},$$

где χ^x_{mn} — характеристические функции множеств $\mathfrak{M}^m_{xn}$. Но, если $T_{\varepsilon x} = E_\varepsilon$, то, применив неравенство Коши—Буняковского для суммы и интеграла, учитывая ортогональность системы g и неравенство (6), имеем

$$E^2 \leqslant M_\varepsilon (b-a) \sum_{n=0}^{m} \int_{E_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{\nu_n} (1-\beta_{\nu_n k}) \xi_k g_k(t) \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant M_\varepsilon (b-a) \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{\nu_n} (1-\beta_{\nu_n k})^2 \xi^2_k \leqslant$$

$$\leqslant M_\varepsilon (b-a) \sum_{k=0}^{\infty} \xi^2_k \sum_{\nu_n \geqslant k}^{\infty} (1-\beta_{\nu_n k})^2 \leqslant M M_\varepsilon (b-a) \|x\| = M_{\varepsilon x}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Гапошкин В. Ф., Лакунарные ряды и независимые функции. Успехи матем. наук, 1966, **22**, 6, 3—82.
3. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
4. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
5. Никишин Е. М., Резонансные теоремы и надлинейные операторы. Успехи матем. наук, 1970, **25**, 129—191.
6. Никишин Е. М., О системах сходимости по мере для l_2. Матем. заметки, 1973, **13**, 3, 337—340.
7. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 140—151.
8. Тюрнпу Х., О значении функций Лебега для сходимости и суммируемости функциональных рядов почти всюду. Ann. Univ. sci. budapest. Sec. math., 1973, **16**, 125—132.

Поступило
27 I 1977

ÜHEST SUMMEERUVUSSÜSTEEMIDE TEISENDUSE KLASSIST

H. Türnpu

Resümee

Olgu $\varphi = \{\varphi_k(t)\}$ lõigus $[a, b]$ niisuguste mõõtuvate ja peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide süsteem, et rea (3) osasummade osajada $\{s_{\nu_n}(x, t)\}$ koonduks iga $x = \{\xi_k\} \in l^p$ $(1 < p < \infty)$ korral peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$. Defineerime süsteemi $\psi = \{\psi_k(t)\}$ võrdusega (4) ja võrratusega (5). Töös tõestatakse, et sel korral koondub rida

$$\sum \xi_k \psi_k(t) \tag{13}$$

peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$ iga $x \in l^p$ korral.

Järeldusena saadakse siit, et kui peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$ kehtib tingimus (7) mingi kolmnurkse regulaarse menetluse $B = (\beta_{nk})$ korral, siis rida (13) koondub peaaegu kõikjal lõigus $[a, b]$ iga süsteemi ψ korral, mis on defineeritud seostega (4) ja (5), võttes viimastes $p=2$.

ABOUT THE TRANSFORMATIONS OF SUMMABILITY SYSTEMS

H. Türnpu

Summary

Let $\varphi = \{\varphi_k(t)\}$ be a such system of functions, which are measurable and almost everywhere finite on $[a, b]$ and for which the subsequence $s_{\nu_n}(x, t)$ of partial sums of the series (3) convergences almost everywhere on $[a, b]$ for all $x = \{\xi_k\} \in l^p$ $(1 < p < \infty)$. Let $\psi = \{\psi_k(t)\}$ denote the system defined by (4). In the present paper it is proved, that the series (13) convergences almost everywhere on $[a, b]$ for all $x \in l^p$.

As a corollary it is proved that when the condition (7) is fulfilled almost everywhere on $[a, b]$ for some triangle regular summability method $B = (\beta_{nk})$, then the series (13), where the system ψ satisfies the condition (5) with $p=2$, convergences almost everywhere on $[a, b]$ for all $x \in l^2$.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 74—81.

О МЕТОДЕ РЕДУКЦИИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА

Г. Вайникко и Р. Лепик

Тартуский государственный университет

Теория одномерных дискретных уравнений Винера—Хопфа и метода редукции для них имеет весьма законченный вид (см. [3] и библиографию в нем). Теория многомерных уравнений далека от завершения, хотя здесь ведутся довольно интенсивные исследования (см. [2—6, 8—10]). В настоящей статье для таких уравнений развивается новый подход, использующий совершенно элементарные средства и позволяющий усилить или расширить некоторые известные результаты.

§ 1. Результаты статьи

Мы будем рассматривать бесконечные линейные системы (дискретные уравнения Винера—Хопфа) вида

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^m{}_+} a_{j-k}x_k=y_j \qquad (j\in \mathbf{Z}^m{}_+), \tag{1}$$

где a_j $(j\in\mathbf{Z}^m)$ и y_j $(j\in\mathbf{Z}^m{}_+)$ — заданные, x_j $(j\in\mathbf{Z}^m{}_+)$ — искомые комплесные числа, $\mathbf{Z}^m$ — целочисленная сетка в $\mathbf{R}^m$,

$$\mathbf{Z}^m{}_+=\{k=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbf{Z}^m;\ 0\leqslant k_i<\infty,\ i=1,\ldots,m\}$$

— положительный «октант» в $\mathbf{Z}^m$. Метод редукции для бесконечной системы (1) заключается в ее замене конечной усеченной системой

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^m{}_n} a_{j-k}x_k=y_j \qquad (j\in \mathbf{Z}^m{}_n), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{Z}^m{}_n=\{k\in\mathbf{Z}^m\colon\ 0\leqslant k_i\leqslant n,\ i=1,\ldots,m\}.$$

Нам понадобятся обозначения и для других октантов в $\mathbf{Z}^m$. Для любого $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ с $\sigma_i=\pm1$ $(i=1,\ldots,m)$ обозначим

$$\mathbf{Z}^m{}_\sigma=\{k\in\mathbf{Z}^m\colon\ 0\leqslant\sigma_i k_i<\infty,\ i=1,\ldots,m\},$$

так что, в частности, $\mathbf{Z}^m{}_+=\mathbf{Z}^m{}_\sigma$ с $\sigma=(1,\ldots,1)$.

Ниже E — любое из следующих пространств:

$\mathbf{l}^p = \mathbf{l}^p(\mathbf{Z}^m)$, $1 \leqslant p < \infty$, — пространство сеточных функций $x : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{C}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\mathbf{l}^p} = \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}^m} |x(j)|^p\Big)^{1/p};$$

$\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{Z}^m)$ — пространство ограниченных сеточных функций $x : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{C}$ с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{m}} = \sup_{j\in\mathbf{Z}^m} |x(j)|;$$

$\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}(\mathbf{Z}^m)$ — пространство сеточных функций $x : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{C}$, для которых $x(j) \to 0$ при $|j| \to \infty$, с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{c}_0} = \max_{j\in\mathbf{Z}^m} |x(j)|.$$

Для любого подмножества $D \subset \mathbf{Z}^m$ под $E(D) \subset E$ понимается подпространство сеточных функций $x \in E$, имеющих носитель в D (т. е. равных нулю в $\mathbf{Z}^m \setminus D$); соответствующий естественный проектор обозначим через P_D:

$$(P_D x)(j) = \begin{cases} x(j) & \text{при } j \in D, \\ 0 & \text{при } j \in \mathbf{Z}^m \setminus D. \end{cases}$$

Будем также пользоваться сокращенными обозначениями

$$E_+ = E(\mathbf{Z}^m{}_+), \quad P_+ = P_{\mathbf{Z}^m{}_+}, \quad E_n = E(\mathbf{Z}^m{}_n), \quad P_n = P_{\mathbf{Z}^m{}_n},$$
$$E_\sigma = E(\mathbf{Z}^m{}_\sigma), \quad P_\sigma = P_{\mathbf{Z}^m{}_\sigma}.$$

Введем, наконец, операторы сдвига $U^k : E \to E$ $(k \in \mathbf{Z}^m)$:

$$(U^k x)(j) = x(j-k), \quad j \in \mathbf{Z}^m, \quad x \in E.$$

Ясно, что U^k — линейный изометрический оператор в E. В дальнейшем будем считать, что

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^m} |a_j| < \infty. \tag{3}$$

Оператор

$$A := \sum_{j\in\mathbf{Z}^m} a_j U^j$$

линеен и ограничен в E, причем $\|A\| \leqslant \Sigma |a_j|$, а функция a (так называемый символ операторов A), где

$$a(t) := \sum_{j\in\mathbf{Z}^m} a_j e^{ijt} \quad (t \in \mathbf{R}^m;\ i = \sqrt{-1};\ jt = j_1 t_1 + \ldots + j_m t_m), \tag{4}$$

непрерывна по совокупности переменных $t_1, \ldots, t_m$ и 2π-периодична по каждому из них.

Пользуясь введенными обозначениями, запишем системы (1) и (2) в виде

$$P_+ A x = y \tag{1'}$$

и

$$P_n A x_n = P_n y, \tag{2'}$$

где $y \in E_+$ задан, а $x \in E_+$ и $x_n \in E_n$ искомые. Однозначная разрешимость систем (1) и (2) равносильна обратимости операторов $P_+A: E_+ \to E_+$ и $P_nA: E_n \to E_n$. Переходим к формулировкам основных результатов статьи; доказательства даны в следующих параграфах.

Теорема 1. *Для того, чтобы при почти всех n операторы $P_nA: E_n \to E_n$ были обратимыми и*

$$\|(P_nA)^{-1}\| \leqslant c = \text{const} \quad (n \geqslant n_0), \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех 2^m октантов $\mathbf{Z}^m{}_\sigma$ выполнялись неравенства

$$\gamma_\sigma := \inf_{x \in E_\sigma,\ \|x\|=1} \|P_\sigma A x\| > 0. \tag{6}$$

Если последнее условие выполнено, то существует также ограниченный обратный $(P_+A)^{-1}: E_+ \to E_+$.

Из (5) обычным образом выводится оценка

$$\|x^*{}_n - x^*\| \leqslant c' \|x^* - P_n x^*\| \qquad (c' = \|A\| c + 1 = \text{const}), \tag{7}$$

где $x^* = (P_+A)^{-1} y$, $x^*{}_n = (P_nA)^{-1} P_n y$ — решения систем (1) и (2). При $E = \mathbf{l}^p$, $1 \leqslant p < \infty$, а также при $E = \mathbf{c}_0$ проекторы P_n сильно сходятся к P_+. Поэтому оценка (7) влечет за собой сходимость $\|x^*{}_n - x^*\| \to 0$ при любом $y \in E_+$. При $E = \mathbf{m}$ такого заключения из (7) делать нельзя, тем не менее, как будет показано, сходимость $x^*{}_n \to x^*$ имеет место в следующей ослабленной топологии: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое r, что

$$\|P_{n-r}(x^*{}_n - x^*)\| \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant n_0). \tag{7'}$$

Если (5) нарушено (но P_nA: $E_n \to E_n$ все же обратимы), то для некоторого $y \in E_+$ имеем $\|x^*{}_n\| \to \infty$. В силу сказанного, условие (6) можно рассматривать как критерий сходимости метода редукции. Некоторый другой критерий сходимости установлен в [8] для пространств $\mathbf{l}^p$, $1 \leqslant p < \infty$; он применим для более широких классов уравнений Винера—Хопфа и способов их редукции, однако, в рассматриваемой нами ситуации критерий (6), как нам кажется, более удобен и эффективен — он включает меньшее число условий.

Естественными являются попытки выразить критерий сходимости (6) в виде условий на символ $a(t)$ оператора A. При $m = 2$ это частично удается, опираясь на следующую теорему (см. [4, 6, 9, 10].

Теорема 2. *Для того, чтобы оператор $P_+A: E_+ \to E_+$ при $m = 2$ был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1° $a(t) \neq 0, \quad t \in \mathbf{R}^2$;

$$2^\circ \ \varkappa_1 := \frac{1}{2\pi} [\arg a(s, 0)]_{s=0}^{2\pi} = 0, \quad \varkappa_2 := \frac{1}{2\pi} [\arg a(0, s)]_{s=0}^{2\pi} = 0.$$

Индекс оператора $P_+A: E_+ \to E_+$ при выполнении этих условий равен нулю.

Фредгольмовыми с нулевым индексом в условиях 1° и 2° являются и операторы $P_\sigma A: E_\sigma \to E_\sigma$, соответствующие остальным квадрантам, и из теоремы 1 получаем

Следствие. *Для обратимости $P_n A: E_n \to E_n$ $(n \geqslant n_0)$ и выполнения равномерной по n оценки* (5) *обратных операторов при $m = 2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1° *и* 2° *теоремы 2 и чтобы для всех четырех квадрантов $\mathbf{Z}^2_\sigma$ уравнение $P_\sigma Ax = 0$ имело в E_σ лишь нулевое решение.*

§ 2. Операторы $B_{D,\eta}$ (технические средства статьи)

Для любых $D \subset \mathbf{Z}^m$ и $\eta > 0$ введем линейный оператор $B_{D,\eta}: E \to E$, действующий по формуле

$$(B_{D,\eta} x)(j) = e^{-\eta d(j,D)} x(j), \quad j \in \mathbf{Z}^m, \quad x \in E,$$

где расстояние

$$d(j,D) = \inf_{k \in D} |j - k| \quad (|j| := |j_1| + \ldots + |j_m|).$$

Операторы $B_{D,\eta}$ имеют в дальнейших рассуждениях важнейшую роль. Перечислим некоторые их свойства.

Для конечного множества $D \subset \mathbf{Z}^m$ оператор $B_{D,\eta}: E \to E$ вполне непрерывен. Далее, для любых $D, D' \subset \mathbf{Z}^m$ имеем

$$\|B_{D,\eta}\| = 1, \quad P_{D'} B_{D,\eta} = B_{D,\eta} P_{D'}, \quad \|P_{D'} B_{D,\eta}\| = e^{-\eta d(D',D)}, \tag{8}$$

где

$$d(D',D) = \sup_{j \in D'} \inf_{k \in D} |j - k|.$$

Если $D^1, \ldots, D^l$ — непересекающиеся подмножества из $\mathbf{Z}^m$, а D — их объединение, $d(D^i, D^{i'}) \geqslant 2r$ при $i \neq i'$ $(i, i' = 1, \ldots, l)$, то

$$\|B_{D,\eta} - \sum_{i=1}^{l} B_{D^i,\eta}\| \leqslant (l-1) e^{-\eta r}. \tag{9}$$

Наконец,

$$\sup_{D \subset \mathbf{Z}^m} \|AB_{D,\eta} - B_{D,\eta} A\| \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to 0. \tag{10}$$

Докажем (9). Имеем

$$\|B_{D,\eta} - \sum_{i=1}^{l} B_{D^i,\eta}\| = \sup_{j \in \mathbf{Z}^m} |e^{-\eta d(j,D)} - \sum_{i=1}^{l} e^{-\eta d(j,D^i)}|.$$

Если $i = i(j)$ таков, что $d(j, D) = d(j, D^i)$, то расстояние от j до остальных $l-1$ подмножеств из $D^1, \ldots, D^l$ не менее r, и мы приходим к оценке (9).

Докажем (10). Для $x \in E$ и $k, j \in \mathbf{Z}^m$ имеем

$$(U^k B_{D,\eta} x - B_{D,\eta} U^k x)(j) = \{e^{-\eta d(j-k,D)} - e^{-\eta d(j,D)}\} x(j-k),$$

откуда

$$\|U^k B_{D,\eta} - B_{D,\eta} U^k\| \leqslant \sup_{j \in \mathbf{Z}^m} |e^{-\eta d(j-k,D)} - e^{-\eta d(j,D)}|.$$

Для любого $D \subset \mathbf{Z}^m$ справедливо неравенство

$$|d(j-k, D) - d(j, D)| \leqslant |k|,$$

поэтому

$$\|U^k B_{D,\eta} - B_{D,\eta} U^k\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{s_1 s_2 \geqslant 0 \\ |s_1 - s_2| \leqslant |k|}} |e^{\eta s_1} - e^{-\eta s_2}| = \sup_{\substack{s_1, s_2 \geqslant 0 \\ |s_1 - s_2| \leqslant |k|}} \eta \left| \int_{s_1}^{s_2} e^{-\eta s}\, ds \right| \leqslant |k| \eta.$$

Теперь для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое r, что

$$\sum_{|k| > r} |a_k| < \varepsilon.$$

Тогда при достаточно малых $\eta > 0$ имеем

$$\|AB_{D,\eta} - B_{D,\eta} A\| \leqslant 2\varepsilon + \sum_{|k| \leqslant r} |a_k| \, \|U^k B_{D,\eta} - B_{D,\eta} U^k\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + r\eta \sum |a_k| < 3\varepsilon,$$

что и доказывает (10).

§ 3. Доказательство теоремы 1 и оценок сходимости

1. Зафиксируем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и подберем $\eta > 0$ так, чтобы (см. (10))

$$\sup_{D \subset \mathbf{Z}^m} \|AB_{D,\eta} - B_{D,\eta} A\| \leqslant \varepsilon; \tag{11}$$

затем выберем достаточно большое r так, чтобы

$$e^{-\eta r} \leqslant \varepsilon, \qquad \sum_{|j| \geqslant r} |a_j| \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

2. Покажем, что из (6) следует (5). Допустим, что (5) не выполняется, т. е. существует последовательность (x_n) с

$$x_n \in E_n, \qquad \|x_n\| = 1, \qquad \|P_n A x_n\| \to 0. \tag{13}$$

Введем для любого σ с $\sigma_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ множества

$$D^\sigma = D^\sigma_n = \{k \in \mathbf{Z}^m:\ 0 \leqslant k_i \leqslant n - r \text{ при } \sigma_i = 1,\ r \leqslant k_i \leqslant n \text{ при } \sigma_i = -1\},$$

$$K^\sigma = K^\sigma_n = \{k \in \mathbf{Z}^m:\ 0 \leqslant k_i < \infty \text{ при } \sigma_i = 1,\ -\infty < k_i \leqslant n \text{ при } \sigma_i = -1\}.$$

Обозначив $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $\tau_i = \min\{0, \sigma_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$, имеем

$$U^{n\tau} P_{K^\sigma} = P_\sigma U^{n\tau}. \tag{14}$$

Из (13) следует (см. (8)), что

$$\|P_n B_{D^\sigma,\eta} A x_n\| \to 0;$$

поскольку $d(K^\sigma \setminus \mathbf{Z}^m_+, D^\sigma) = r$, то (см. (8) и (12))

$$\|P_{K^\sigma \setminus \mathbf{Z}^m_+} B_{D^\sigma,\eta} A x_n\| \leqslant e^{-\eta r} \|A x_n\| \leqslant \|A\| \varepsilon.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\|P_{K^\sigma} B_{D^\sigma,\eta} A x_n\| \leqslant (\|A\| + 1)\varepsilon \qquad (n \geqslant n_0).$$

Ввиду (14) и изометричности $U^{n\tau}$ имеем также

$$\|P_\sigma U^{n\tau} B_{D^\sigma,\eta} A x_n\| \leqslant (\|A\|+1)\varepsilon \qquad (n \geqslant n_0).$$

Воспользовавшись (11) и перестановочностью U^k и A, отсюда находим

$$\|P_\sigma A (U^{n\tau} B_{D^\sigma,\eta} x_n)\| \leqslant (\|A\|+2)\varepsilon \qquad (n \geqslant n_0).$$

Из $x_n \in E_n$ следует, что

$$B_{D^\sigma,\eta} x_n \in E_n, \quad U^{n\tau} B_{D^\sigma,\eta} x_n \in E_\sigma,$$

и на основании (6) заключаем, что

$$\|B_{D^\sigma,\eta} x_n\| = \|U^{n\tau} B_{D^\sigma,\eta} x_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma_\sigma} (\|A\|+2)\varepsilon \qquad (n \geqslant n_0).$$

Поскольку 2^m множества D^σ перекрывают $\mathbf{Z}^m{}_n$, а $(B_{D^\sigma,\eta} x_n)(j) = x_n(j)$ для $j \in D^\sigma$, то

$$\|x_n\| \leqslant \sum_\sigma \|B_{D^\sigma,\eta} x_n\| \leqslant \sum_\sigma \frac{1}{\gamma_\sigma} (\|A\|+2)\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это противоречит условию $\|x_n\| = 1$. Тем самым доказано, что (5) следует из (6).

3. Допустим теперь, что при некотором σ имеем

$$\inf_{x \in E_\sigma,\ \|x\|=1} \|P_\sigma A x\| = 0,$$

и убедимся, что тогда

$$\inf_{x_n \in E_n,\ \|x_n\|=1} \|P_n A x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Выберем $x \in E_\sigma$, $\|x\| = 1$, так, чтобы $\|P_\sigma A x\| < \varepsilon$. Не умаляя общности, можно считать, что носитель x ограничен (конечен). Для пространств $\mathbf{l}^p$ и $\mathbf{c}_0$ это сразу ясно из аппроксимационных соображений; в случае пространства $\mathbf{m}$ мы ввиду (11) можем $x \in \mathbf{m}$ сперва заменить на $B_{D^0,\eta} x \in \mathbf{c}_0$, где D^0 — одноточечное множество $\{j_0\}$, $j_0 \in \mathbf{Z}^m{}_\sigma$ таков, что $|x(j_0)| > \|x\| - \varepsilon$, а затем $B_{D^0,\eta} x$ проаппроксимировать сеточной функцией с ограниченным носителем. Итак, можно считать, что для выбранного нами $x \in E_\sigma$ носитель

$$\operatorname{supp} x \subset \{k \in \mathbf{Z}^m{}_\sigma : \ |k_i| \leqslant n_0, \ i = 1, \ldots, m\}.$$

При $n \geqslant n_0$ тогда имеем $U^{-n\tau} x \in E_n$, $\|U^{-n\tau} x\| = 1$, $\|P_n A (U^{-n\tau} x)\| < \varepsilon$. Тем самым завершено доказательство равносильности условий (5) и (6).

4. Покажем, что из (6) (или из (5)) следует существование ограниченного обратного оператора $(P_+ A)^{-1} : E_+ \to E_+$. В доказательстве нуждается лишь соотношение $P_+ A E_+ = E_+$. Пусть сперва $E = \mathbf{c}_0$ или $E = \mathbf{l}^p$, $1 \leqslant p < \infty$. В таком случае $P_n A P_n x \to P_+ A x$ для любого $x \in E_+$, что совместно с (5) означает, что последовательность операторов $P_nA: E_n \to E_n$ устойчиво сходится к $P_+A: E_+ \to E_+$. Предельный оператор P_+A будет обратимым тогда и только тогда (см. [1], стр. 35), когда выполнено следующее *условие регулярности*:

$$x_n \in E_n,\ \|x_n\| = 1,\ (P_nAx_n) \text{ компактна } \Rightarrow (x_n) \text{ компактна.}$$

Мы приступим к проверке равносильного условия

$$x_n \in E_n,\ \|x_n\| = 1,\ P_nAx_n \to y \in E_+ \Rightarrow (x_n) \text{ компактна.} \quad (16)$$

Выберем n_0 так, чтобы $\|y - P_{n_0}y\| \leqslant \varepsilon$, и положим $D = \mathbf{Z}^m{}_{n_0}$. Из (8), (11) и сходимости $P_nAx_n \to y$ следует, что при достаточно больших n

$$\|P_nA(x_n - B_{D,\eta}x_n)\| \leqslant \|P_nAx_n - B_{D,\eta}P_nAx_n\| + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \|y - B_{D,\eta}y\| + 2\varepsilon \leqslant 3\varepsilon;$$

поскольку $x_n - B_{D,\eta}x_n \in E_n$, то совместно с (5) это дает

$$\|x_n - B_{D,\eta}x_n\| \leqslant 3c\varepsilon.$$

Последовательность $(B_{D,\eta}x_n)$ компактна ввиду конечности D. Но тогда компактной будет и последовательность (x_n), ибо она сколь угодно близка к компактным последовательностям. Итак, (16) выполнено, и $(P_+A)^{-1}: E_+ \to E_+$ в случае пространств $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{l}^p$ существует. В случае пространства $\mathbf{m}$ указанный обратный оператор существует по той причине, что $P_+A: \mathbf{m}(\mathbf{Z}^m{}_+) \to \mathbf{m}(\mathbf{Z}^m{}_+)$ является вторым сопряженным к $P_+A: \mathbf{c}_0(\mathbf{Z}^m{}_+) \to \mathbf{c}_0(\mathbf{Z}^m{}_+)$, а условие (5) в случае $E = \mathbf{m}$ и $E = \mathbf{c}_0$ одинаково.

5. Докажем оценку (7). Из равенства

$$P_nA(x^*{}_n - P_nx^*) = P_ny - P_nAP_nx^* = P_nA(x^* - P_nx^*)$$

на основании (5) находим

$$\|x^*{}_n - P_nx^*\| \leqslant c\|A\|\,\|x^* - P_nx^*\|.$$

Отсюда и из равенства

$$x^*{}_n - x^* = (x^*{}_n - P_nx^*) - (x^* - P_nx^*)$$

вытекает оценка (7).

6. Пусть $E = \mathbf{m}$. Докажем (7'). Положим $D_n = \mathbf{Z}^m{}_{n-r}$ (выбор η и r осуществлен в п. 1). На основании (5), (7), (8), (11) и (12) и равенства $P_nA(x^*{}_n - x^*) = P_ny - P_ny = 0$ находим

$$\|P_{n-r}(x^*{}_n - x^*)\| \leqslant \|B_{D_n,\eta}(x^*{}_n - P_nx^*)\| \leqslant$$
$$\leqslant c\|P_nAB_{D_n,\eta}(x^*{}_n - P_nx^*)\| \leqslant$$
$$\leqslant c\|P_nAB_{D_n,\eta}(x^*{}_n - x^*)\| + c\|A\|\,\|B_{D_n,\eta}(I - P_n)x^*\| \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon\|x^*{}_n - x^*\| + c\|B_{D_n,\eta}P_nA(x^*{}_n - x^*)\| + c\|A\|e^{-\eta r}\|x^*\| \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon\|x^*{}_n - x^*\| + c\|A\|\,\varepsilon\,\|x^*\| \leqslant (2\|A\|c + 1)\|x^*\|\,\varepsilon,$$

что равносильно (7').

Авторы выражают искреннюю благодарность Р. В. Дудучаве за полезные обсуждения излагаемых в статье вопросов.

Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Гольденштейн Л. С., Дискретный аналог многомерного интегрального уравнения Винера—Хопфа. Мат. исследования (Кишинев), 1967, **2**, № 3, 52—63.
3. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Москва, 1971.
4. Дуглас Р. Г., Хоув Р., C^*-алгебра теплицевых операторов в квадранте. Сб. перев. ин. статей, Математика, 1973, **17**, № 5, 67—81.
5. Дудучава Р. В., О многомерных уравнениях в свертках, составленных из коэффициентов Фурье разрывных функций. Сообщ. АН ГрузССР, 1974, **74**, № 2, 277—280.
6. Дудучава Р. В., Интегральные операторяы свертки на квадранте с разрывными символами. Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, **40**, № 2, 388—412.
7. Като Т., Теория возмущения линейных операторов. Москва, 1972.
8. Козак А. В., О методе редукции для многомерных дискретных сверток. Мат. исследования (Кишинев), 1973, **8**, № 3, 157—160.
9. Малышев В. А., Уравнение Винера—Хопфа в четверти плоскости, дискретные группы и автоморфные функции. Матем. сб., 1971, **84**, № 4, 499—525.
10. Симоненко И. Б., О многомерных дискретных свертках. Мат. исследования (Кишинев), 1968, **3**, № 1, 108—122.

Поступило
15 II 1977

REDUKTSIOONIMEETODIST MITMEMÕÕTMELISTE DISKREETSETE WIENER-HOPFI VÕRRANDITE PUHUL

G. Vainikko ja R. Lepik

Resümee

Käesolevas artiklis on mitmemõõtmeliste diskreetsete Wiener-Hopfi võrrandite jaoks välja arendatud uus lähenemisviis, mis kasutab elementaarseid vahendeid ja võimaldab tugevdada või laiendada teadaolevaid tulemusi reduktsioonimeetodi koonduvuse kohta. Põhitulemused on antud teoreemis 1.

ON THE REDUCTION METHOD FOR MULTIDIMENSIONAL DISCRETE WIENER-HOPF EQUATIONS

G. Vainikko and R. Lepik

Summary

In the present paper a new approach for multidimensional discrete Wiener-Hopf equations is elaborated. Although our approach uses only elementary means, it enables to strengthen or extend known convergence results for the reduction method. The main conclusions are given in Theorem 1.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 82—93.

ТЕОРИЯ АБСТРАКТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Б. Шехтман

Тартуский государственный университет

В настоящей работе предлагаются абстрактные определения интерполяционных процессов в произвольных банаховых пространствах. На основании этих определений доказывается ряд теорем существования, единственности и представления интерполирующего элемента, обобщающие классические. Особое внимание уделяется сходимости абстрактных интерполяционных процессов и их конкретных реализаций в виде сплайнового интерполирования.

§ 1. Теорема о представлении

1.1. Пусть заданы банаховы пространства X и Y. Через $\mathfrak{L}(X, Y)$ обозначим пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y. Если $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$, то символы $\ker A$, $\operatorname{im} A, D(A)$ обозначают ядро, образ и область определения оператора A; 1_X — это тождественный оператор в X.

Определение 1. *Будем говорить, что элемент $x \in X$ интерполирует заданный элемент $y \in X$ (в смысле оператора $i \in \mathfrak{L}(X, Y)$), если $(x - y) \in \ker i$.*

Множество всех элементов, интерполирующих x, есть[1] $[x] \in X/\ker i$.

Определение 2. *Оператор $p \in \mathfrak{L}(X, X)$ назовем интерполирующим, если* $\operatorname{im}(1 - p) \subseteq \ker i \subseteq \ker p$.

Множество всех интерполирующих операторов обозначим через $\mathfrak{P}(i)$.

Предложение 1. *Оператор $p \in \mathfrak{L}(X, X)$ является интерполирующим тогда и только тогда, когда он проектор и* $\ker i = \ker p$.

Доказательство. Если $p \in \mathfrak{P}(i)$, то для любого $x \in X$

$$(x - px) \in \ker i \subseteq \ker p,$$

а значит $p(x - px) = 0$, откуда $p^2 = p$. Далее, если $y \in \ker p$, то $y - py = y \in \ker i$. Обратно, для любого $x \in X$ имеем $p^2 x = px$, или $(x - px) \in \ker p = \ker i$. Предложение доказано.

[1] Здесь и далее $[x]$ — элемент соответствующего фактор-пространства, содержащий x.

1.2. Определение 3. *Оператор* $v \in \mathfrak{L}(Y, X)$ *назовем восстанавливающим, если* $ivi = i$. *Множество таких операторов обозначим через* $\mathfrak{V}(i)$.

Теорема 1 (см. [5], стр. 321). *Для того, чтобы множество* $\mathfrak{V}(i)$ *было непустым, необходимо и достаточно, чтобы образ и ядро оператора* i *были дополняемы.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда* $\mathfrak{P}(i) \neq \varnothing$ *и при этом* $\mathfrak{P}(i) = \mathfrak{V}(i)\, i$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathfrak{P}(i)$. Обозначим через k канонический гомоморфизм из X в $X/\ker i = X/\ker p$. Через P и I обозначим фактор-операторы из $\mathfrak{L}(X/\ker i, X)$ и $\mathfrak{L}(X/\ker i, Y)$. Оператор I индуцирует изоморфизм из $\mathfrak{L}(X/\ker i, \operatorname{im} i)$. Обратный к нему оператор определен на дополняемом в Y подпространстве, и поэтому его можно расширить на все пространство. Если обозначить это расширение через r, то получим $p = Pri$. Докажем теперь, что $Pr \in \mathfrak{V}(i)$. Действительно, поскольку $p \in \mathfrak{P}(i)$, то $ip = i$ и, значит, $iPri = i$. Обратно, пусть $v \in \mathfrak{V}(i)$, тогда $ivi = i$ и, значит, $\operatorname{im}(1 - vi) \subseteq \ker i$. Вложение же $\ker i \subseteq \ker(vi)$ очевидно. Теорема доказана.

Теорема 2 дает возможность изучения интерполяционного процесса сводить к свойствам восстанавливающих операторов. Уже сама по себе теорема 2 дала критерий существования интерполяционного проектора и метод его конструктивного построения.

В дальнейшем нам понадобится следующее

Предложение 2. *Если* $v \in \mathfrak{V}(i)$, *то* $\ker v \cap \operatorname{im} i = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $y \in \ker v \cap \operatorname{im} i$ и $y \neq 0$. Тогда существует $x \in X$ такое, что $y = ix$. Имеем

$$y = ix = ivix = ivy = 0.$$

1.3. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что оператор i имеет дополняемые ядро и образ.

Определение 4. *Замкнутое подпространство* $S \subseteq X$ *назовем интерполяционным, если для любого* $x \in X$ *существует единственный элемент* $\sigma \in S$, *интерполирующий* x.

Теорема 3. *Для того, чтобы подпространство* $S \subseteq X$ *было интерполяционным, необходимо и достаточно существование* $v \in \mathfrak{V}(i)$ *такого, что* $S = v(\operatorname{im} i)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $S = v(\operatorname{im} i) = vi(X)$. Поскольку $p = vi$ есть проектор, то S замкнуто. Для каждого $x \in X$ элемент $px \in S$ интерполирует x. Наконец, если $\sigma \in S$ интерполирует $x \in X$, то $i\sigma = ipx$, и, значит,

$$\sigma = v(i\sigma) = v(ipx) = vix = px.$$

Необходимость. Пусть S — интерполяционное подпространство. Обозначим через p оператор, ставящий каждому $x \in X$ в соответствие элемент $\sigma \in S$, интерполирующий x. Поскольку такой элемент существует и единственен, то оператор p определен корректно и $D(p) = X$. Покажем, что p удовлетворяет условиям определения 2. Имеем $(x - px) \in \ker i$. Выбрав $x \in \ker i$, получаем $px \in \ker p$, а поскольку $0 \in S$ интерполирует x и является единственным в S элементом такого рода, то $x \in \ker p$. Покажем, что p линеен. Пусть $px = \sigma$ и $py = s$. Тогда

$$i[(\mu\sigma + \eta s) - (\mu x + \eta y)] = \mu i(\sigma - x) + \eta i(s - y) = 0.$$

Значит, $\mu\sigma + \eta s$ интерполируют $\mu x + \eta y$, и оператор p линеен. Покажем, что он непрерывен. Рассмотрим график оператора p, т. е. $G(p) = \{[x, s] \in X \times S : s = px\}$. Предположим, что $G(p) \ni [x_n, s_n] \to [x, s]$. Поскольку S замкнуто, то $s \in S$ и $ix = \lim ix_n = \lim is_n = is$. Таким образом, s интерполирует x и $[x, s] \in G(p)$. Значит, график оператора p замкнут, сам оператор определен на всем пространстве и, по теореме о замкнутом графике, он непрерывен. Теорема доказана.

Интерполяционное подпространство $v(\operatorname{im} i)$ в дальнейшем будем обозначать $S[v; i]$. Из теорем 2, 3 и предложения 2 легко следуют следующие следствия.

Следствие 1. *Оператор v порождает изоморфизм*

$$v : \operatorname{im} i \to S[v, i].$$

По следствию 1 всевозможные пространства $S[v, i]$ изоморфны между собой, а также пространствам $\operatorname{im} i$, $X/\ker i$ и L, где L таково, что $X = \ker i \dotplus L$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\dim S[v, i] = \dim \operatorname{im} i = \dim L = \operatorname{codim} \ker i.$$

Следствие 2. *Замкнутое подпространство $S \subseteq X$ является интерполяционным тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ существует $\sigma \in S$, интерполирующий x, и $S \cap \ker i = \{0\}$.*

Следствие 3. *Пусть $X = \ker i \dotplus L$. Тогда L — интерполяционное подпространство.*

Следствие 4. *Пусть $\operatorname{codim} \ker i < \infty$. Тогда для того, чтобы подпространство $S \subseteq X$ было интерполяционным, необходимо и достаточно, чтобы $S \cap \ker i = \{0\}$ и $\dim S = \operatorname{codim} \ker i$.*

Доказательство. Пусть $X = \ker i \dotplus L$, а P — проектор на L параллельно $\ker i$. Рассмотрим сужение $p = P | S$. Имеем $\ker p = \{0\}$, но поскольку p отображает конечномерное пространство в конечномерное, то p — изоморфизм S на L. Значит, для любого $\sigma \in L$ существует $s \in S$ такое, что $\sigma = ps$. Поскольку σ интерполирует s, то по следствиям 2 и 3 само S является интерполяционным подпространством.

1.4. Приведем еще один пример использования теоремы 2.

Предложение 3. *Если $v_0 \in \mathfrak{B}(i)$, то множество всех восстанавливающих операторов задается формулой $v = v_0 i v_0 + u - v_0 i u i v_0$ с произвольным $u \in \mathfrak{L}(Y, X)$.*

Доказательство. Тривиально проверяется, что при любом u оператор v восстанавливающий. Обратно, пусть задан $v \in \mathfrak{B}(i)$, тогда, взяв в качестве u сам оператор v, получаем v.

Следствие 5. *Пусть $p_0 = v_0 i$. Тогда $\mathfrak{P}(i)$ задается формулой*

$$p = p_0 + (1 - p_0)\, ui.$$

1.5. Пусть задан набор функционалов $l_1, \ldots, l_n \in X^*$. Зададим оператор i равенством $ix = \{\langle l_1, x\rangle, \ldots, \langle l_n, x\rangle\} \in \mathbf{R}^n$ и предположим, что функционалы $l_1, \ldots, l_n$ линейно-независимы. Имеем $\ker i = \{x \in X : \langle l_k, x\rangle = 0;\ \ k = 1, \ldots, n\} = [L\{l_k\}]^{\perp}$. Отсюда $L\{l_k\} = (\ker i)^{\perp}$, где $L\{l_k\}$ — линейная оболочка функционалов $l_1, \ldots, l_n$. По следствию теоремы 3 имеем $\dim S[v, i] = n$ при любом $v \in \mathfrak{B}(i)$.

Пусть задан оператор i и интерполяционное подпространство S. Найдем оператор $v \in \mathfrak{B}(i)$ такой, что $S = S[v, i]$. Поскольку имеем $S \cap \ker i = \{0\}$, то оператор i порождает изоморфизм из S на $\mathbf{R}^n$, а, значит, в S существует базис $\{s_k\}$, биортогональный к $l_1, \ldots, l_n$. Интерполяционный проектор задается равенством

$$px = \sum_{k=1}^{n} \langle l_k, x\rangle\, s_k.$$

Определим оператор $r \in \mathfrak{L}(X^*, \mathbf{R}^n)$ следующим равенством: $rf = \{\langle f, s_1\rangle, \ldots, \langle f, s_n\rangle\}$. Тогда

$$r^*\{\xi_k\} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k s_k,$$

и, следовательно, $r^* ix = px$. Значит, $r^* \in \mathfrak{B}(i)$ и $S = S[v, i]$.

Пусть теперь задан $p_0 \in \mathfrak{P}(i)$, где

$$p_0 x = \sum_{k=1}^{n} \langle l_k, x\rangle\, s_k.$$

Каждый оператор $u \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, X)$ задается системой элементов $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \in X$ по формуле

$$u\{\xi_k\} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sigma_k.$$

Таким образом, множество всех интерполирующих проекторов имеет вид

$$px = \sum_{k=1}^{n} \langle l_k, x\rangle\, s_k + \sum_{k=1}^{n} \langle l_k, x\rangle\, \sigma_k - \sum_{k=1}^{n} \langle l_k, x\rangle \sum_{j=1}^{n} \langle l_j, \sigma_k\rangle\, s_j.$$

§ 2. Сходимость интерполяционных процессов

2.1. В этом параграфе будет рассматриваться следующая ситуация. Заданы последовательности пространств Y_k и операторов $i_k \in \mathfrak{L}(X, Y_k)$. Как и раньше будем предполагать ядра и образы операторов i_k дополняемыми и рассматривать операторы $v_k \in \mathfrak{V}(i_k)$. Каждой паре операторов $\{v_k, i_k\}$ соответствует интерполяционное пространство $S[v_k, i_k]$. Каждому элементу $x \in X$ соответствует последовательность элементов $\sigma_k \in S[v_k, i_k]$, интерполирующих $x \in X$. Нас будет интересовать сходимость $\sigma_k \to x$, или в иных обозначениях $p_k x = v_k i_k x \to x$.

Определение 5. *Будем говорить, что интерполяционный процесс сильно (слабо) сходится, если последовательность операторов $p_k = v_k i_k$ сильно (слабо) сходится к единичному.*

(Слабая сходимость обозначается $- \rightharpoonup$).

3.2. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 1. *Для сходимости последовательности проекторов p_k к единичному, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|p_k\| \leqslant \text{const}, \qquad d(x, \operatorname{im} p_k) \to 0 \qquad (\forall x \in X). \tag{2.1}$$

Доказательство. Имеем $p_k z_k = z_k$ для любого $z_k \in \operatorname{im} p_k$, и

$$\|x - p_k x\| \leqslant \|x - z_k\| + \|p_k z_k - p_k x\| \leqslant \|x - z_k\| (1 + \|p_k\|).$$

Обратное очевидно.

Теорема 4. *Пусть последовательность подпространств $\{(\ker i_k)^\perp\}_k$ предельно плотна в X. Тогда для слабой сходимости интерполяционного процесса необходимо и достаточно, чтобы нормы $\|p_k\|$ были равномерно ограничены.*

Доказательство. Условия

$$\|p_k\| \leqslant \text{const}, \qquad d(f, (\ker i_k)^\perp) \to 0$$

равносильны условиям

$$\|p_k\| \leqslant \text{const}, \qquad d(f, \operatorname{im} p_k^*) \to 0,$$

что по лемме 1 равносильно сходимости $p_k^* \to 1$, откуда $p_k - \to 1$. Теорема доказана.

Условие предельной полноты, однако, не является необходимым даже в случае сильной сходимости интерполяционного процесса, ибо это значило бы, что из $p_k \to 1$ следует $p_k^* \to 1$. Удается доказать, что верна лишь следующая

Теорема 5. *Пусть пространство X рефлексивно, а ядра операторов i_k вложены, т. е. $\ker i_k \supset \ker i_{k+1}$ для всех k. Тогда условие предельной плотности необходимо для слабой сходимости интерполяционного процесса.*

Доказательство. Пусть $p_k - \to 1$. Тогда $p_k^* - \to 1$ и, значит, для всех $f \in X^*$ элементы $g_k = p_k^* f \in (\ker i_k)^\perp$ слабо сходятся к f. Но тогда (см. [3], стр. 46) найдется последовательность чисел λ_k таких, что элементы

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k \in (\ker i_n)^\perp$$

сильно сходятся к f, т. е. выполнено условие предельной плотности.

Часто бывает удобна следующая

Лемма 2. *Пусть пространства X и Y_k гильбертовы, $\|i_k\| \leqslant 1$ и $\|i_k x\| \to \|x\|$ для всех $x \in X$. Тогда*

$$d(f, (\ker i_k)^{\perp}) \to 0 \qquad (\forall f \in X^*). \tag{2.2}$$

Доказательство. Введем операторы $D_k = (1 - i_k{}^* i_k)^{1/2}$. Имеем $\|D_k x\|^2 = \langle x - i_k{}^* i_k x, x\rangle = \|x\|^2 - \|i_k x\|^2$. Значит, если $\|i_k x\| = \|x\|$, то $D_k \to 0$, а, значит, и $D_k{}^2 \to 0$. Но $i_k{}^* i_k x \in (\ker i_k)^{\perp}$, т. е. выполнено условие (2.2).

2.2. Докажем еще две теоремы о сильной сходимости интерполяционных процессов.

Теорема 6. *Пусть X — пространство Ефимова—Стечкина. Пусть, кроме условия (2.2), выполнено условие $\|p_k x\| \to \|x\|$ для всех $x \in X$. Тогда интерполяционный процесс сильно сходится.*

Доказательство. Из (2.2) следует $p_k \dashrightarrow 1$, что вместе со сходимостью $\|p_k x\| \to \|x\|$ дает сильную сходимость.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 4, и, кроме того, $S_k \subset S_{k+1}$ для всех k. Тогда интерполяционный процесс сильно сходится.*

Доказательство. По теореме 4 имеем $p_k x \dashrightarrow x$ для всех $x \in X$. Поскольку $S_k \subset S_{k+1}$, то существует последовательность $\{s_n\}$, где

$$s_n \in S_n, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k x \to x \qquad \left(\forall x \in X;\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1\right).$$

Таким образом,

$$d(x, \operatorname{im} p_k) = d(x, S_k) \to 0 \quad (\forall x \in X)$$

и по лемме 2 получаем сильную сходимость $p_k \to 1$.

В соответствии с теоремой Банаха—Штейнгауса можно (допуская некоторую вольность речи) всякую сходимость рассматривать как совокупность двух свойств: ограниченность и сходимость на всюду плотном множестве. Доказанные теоремы позволяют сделать вывод, что за сходимость на всюду плотном множестве «отвечает» только качество информации об элементе (интерполяционные условия), а за ограниченность — метод интерполирования (восстанавливающий оператор).

§ 4. Сходимость абстрактных сплайнов

3.1. Приведем без доказательств некоторые сведения об абстрактных сплайнах (см. [5], стр. 225).

Пусть заданы гильбертовы пространства X, Y_k и Z, а также операторы $i_k \in \mathfrak{L}(X, Y_k)$ и $U \in \mathfrak{L}(X, Z)$. Пусть нормы $\|x\|_k{}^2 = \|i_k x\|^2 + \|Ux\|^2$ эквивалентны исходной, т. е. существуют наборы положительных констант a_k и c_k такие, что

$$a_k \|x\|_k \leqslant \|x\| \leqslant c_k \|x\|_k.$$

Введем в рассмотрение пространство сплайнов

$$\mathrm{sl}(U, i_k) := \{\sigma \in X : \langle Ux, U\sigma \rangle = 0;\ \forall x \in \ker i_k\};$$

как показано в [5], стр. 227, оно является интерполяционным, и элемент $\sigma \in \mathrm{sl}(U, i_k)$ обладает *свойством минимальной нормы*, т. е.

$$\|U\sigma\| = \min_{x \in [\sigma]} \|Ux\|.$$

3.2. Следующая теорема является усилением одной теоремы Василенко [2].

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* (2.2) *и константы* c_k *ограничены. Тогда процесс сплайновой интерполяции сильно сходится.*

Доказательство. Покажем, что последовательность интерполирующих сплайнов ограничена. Пусть p_k — интерполяционный проектор на пространство сплайнов. Имеем

$$\|x - p_k x\|^2 \leqslant c_k^2 (\|i_k(x - p_k x)\|^2 + \|U(x - p_k x)\|^2).$$

Ввиду $c_k \leqslant c$, используя свойство минимальной нормы и интерполяционность проектора, получим

$$\|x - p_k x\|^2 \leqslant c_k^2 \|Ux - Up_k x\|^2 \leqslant 4c^2 \|Ux\|^2,$$

ибо $\|Up_k x\| \leqslant \|Ux\|$. Далее, $\|p_k x\| - \|x\| \leqslant \|x - p_k x\| \leqslant \leqslant 2c \|Ux\|$, откуда $\|p_k x\| \leqslant (1 + 2c\|U\|)\|x\|$, и по принципу равномерной ограниченности $\|p_k\| \leqslant \mathrm{const}$. Ограниченность $\{p_k\}$ доказана.

Теперь по теореме 4 можно заключить, что

$$\sigma_k = p_k x \rightharpoonup 1. \tag{3.1}$$

Докажем сильную сходимость. Из (3.1) вытекает $Up_k x \rightharpoonup Ux$, откуда

$$\|Ux\| \leqslant \liminf \|Up_k x\|.$$

Но по свойству минимальной нормы $\|Up_k x\| \leqslant \|Ux\|$, откуда имеем $\|Up_k x\| \to \|Ux\|$, что вместе с (3.1) дает $Up_k x \to Ux$.

Далее,

$$\|x - p_k x\|^2 \leqslant c_k^2 (\|Ux - Up_k x\|^2 + \|i_k(x - p_k x)\|^2).$$

Первое слагаемое в последнем выражении стремится к нулю по ранее доказанному, второе же равно нулю. Теорема доказана.

Замечание. Пусть оператор i_k задан набором функционалов $l_1, \ldots, l_k$, а оператор $i_n = (l_1, \ldots, l_k, \ldots l_n)$ при $n > k$. Тогда для всех $x \in X$ имеем $\|i_k x\| \leqslant \|i_n x\|$ и, следовательно, константы c_k ограничены. Описанный случай для обычной интерполяции соответствует вложенным сеткам. В этом случае $\mathrm{sl}(U, i_k) \subset \mathrm{sl}(U, i_{k+1})$ для всех k и, следовательно, сильная сходимость вытекает и из теоремы 7.

3.3. **Теорема 9.** *Пусть операторы*[1]

$$i_k = (l_1^{(k)}, \ldots, l_k^{(k)}) \in \mathfrak{L}(H_2^1, R^k),$$

а функционалы $l_j^{(k)}$ определены формулой $\langle l_j^{(k)}, x\rangle = x(t_j^{(k)})$, где

$$a = t_1^{(k)} < t_2^{(k)} < \ldots < t_k^{(k)} = b.$$

Тогда для того, чтобы выполнялось условие (2.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\|\Delta_k\| = \max_{1 < j \leqslant k} |t_j^{(k)} - t_{j-1}^{(k)}| \to 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Необходимость. Условие (2.2) эквивалентно следующему: для любого $x \in H_2'$ существуют наборы чисел $\{\alpha_j^{(k)}\}$; $(j = 1, \ldots k)$ такие, что

$$\|x(t) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} l_j^{(k)}\|_{H_2^1} \to 0,$$

или

$$\sup_{\|y\|_{H_2^1} \leqslant 1} |\langle x, y\rangle - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} y(t_j^{(k)})| \to 0.$$

Учитывая общий вид скалярного произведения в H_2', получаем, что условие (2.2) эквивалентно тому, что для каждого $x \in H_2'$ существуют наборы чисел $\{\alpha_j^{(k)}\}$ такие, что

$$\sup_{\|y\|_{H_2^1} \leqslant 1} |\int_a^b x'(t) y'(t)\, dt + \int_a^b x(t) y(t)\, dt - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} y(t_j^{(k)})| \to 0. \tag{3.3}$$

Как известно (см. [1], стр. 97), из сходимости квадратурных процессов даже более простого вида следует (3.2). Таким образом, для выполнения условия (2.2) условие (3.2) является необходимым.

Достаточность. Пусть $\alpha_j^{(k)} = \beta_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)}$. Тогда

$$\sup_{\|y\| \leqslant 1} |\int_a^b x'(t) y'(t)\, dt + \int_a^b x(t) y(t)\, dt - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} y(t_j^{(k)})| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\int_a^b x'(t) y'(t)\, dt - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(k)} y(t_j^{(k)})| +$$

$$+ \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\int_a^b x(t) y(t)\, dt - \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} y(t_j^{(k)})|. \tag{3.4}$$

Мы докажем, что если выполнено условие (3.2), то существуют наборы чисел $\{\gamma_j^{(k)}\}_{j=1,\ldots,k}$ и $\{\beta_j^{(k)}\}_{j=1,\ldots,k}$ такие, что каждое из слагаемых в первой части неравенства (3.4) стремится к нулю. Начнем со второго. Пусть условие (2.2) выполнено, тогда для каждого $x \in C$ существует сходящаяся квадратурная формула вида

$$|\int_a^b x(t) y(t)\, dt - \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} y(t_j^{(k)})| \to 0 \qquad (y \in C). \tag{3.5}$$

---

[1] Элементы пространств H_2^1 и C суть функции, определенные на отрезке $[a, b]$.

Поскольку единичный шар из H_2^1 компактен в C, то на нем имеет место равномерная сходимость

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1} \left| \int_a^b x(t)y(t)\,dt - \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} y(t_j^{(k)}) \right| \to 0.$$

Исследуем теперь первое слагаемое. Поскольку множество бесконечно дифференцируемых функций C^∞ всюду плотно в H_2^1, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции z_ε такие, что

$$\|x - z_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Для данной функции z_ε существует номер $k = k(\varepsilon)$ и коэффициенты $\gamma_j^{(k)}(\varepsilon)$, для которых

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1} \left| \int_a^b z_\varepsilon''(t)y(t)\,dt - \left[\sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(k)}(\varepsilon) y(t_j^{(k)}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + y(a) z_\varepsilon''(a) - y(b)\,(z_\varepsilon''(b)\right] \right| < \varepsilon.$$

Обозначим через L билинейный функционал, определенный формулой

$$L(x, y) = \int_a^b x'(t)y'(t)\,dt.$$

Этот функционал непрерывен на H_2^1, так как

$$L(x, y) = \langle x, y\rangle_{H_2^1} - \int_a^b x(t)y(t)\,dt.$$

Поскольку

$$L(z_\varepsilon, y) = \int_a^b z_\varepsilon'(t)y'(t)\,dt = y(t)z_\varepsilon'(t)\Big|_a^b - \int_a^b z_\varepsilon''(t)y(t)\,dt,$$

то

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1} \left| L(x, y) - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(k)}(\varepsilon) y(t_j^{(k)}) \right| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1} |L(x, y) - L(z_\varepsilon, y)| +$$
$$+ \sup_{\|y\|\leqslant 1} \left| L(z_\varepsilon, y) - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(k)}(\varepsilon) y(t_j^{(k)}) \right| \leqslant (\|L\| + 1)\,\varepsilon.$$

Итак, мы нашли коэффициенты $\{\gamma_j^{(k)}(\varepsilon)\}_{j=1,\ldots,k}$ такие, что

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1} \left| \int_a^b x'(t)y'(t)\,dt - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(k)}(\varepsilon) y(t_j^{(k)}) \right| < \varepsilon.$$

Положим теперь $k_m = k(1/m)$, и при $k_m \leqslant k < k_{m+1}$ выберем числа $\gamma_j^{(k)} = \gamma_j^{(k)}(1/m)$. Тогда имеем

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1} \left| \int_a^b x'(t)y'(t)\,dt - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(k)} y(t_j^{(k)}) \right| \to 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\Delta_k \subset \Delta_{k+1}$ при любых k. Тогда последовательность сплайнов $\sigma_k \in \mathrm{sl}(d/dt, i_k)$, интерполирующих функцию $x \in H_2^1$, сходится к ней в том и только в том случае, если $\|\Delta_k\| \to 0$.*

Доказательство. Если выполнено условие (3.2), то по теореме 9 выполнено условие (2.2), а поскольку $\Delta_k \subset \Delta_{k+1}$, то выполнены все условия теоремы 8, и, значит, процесс сплайновой интерполяции сходится. Обратно, пусть процесс сплайновой интерполяции сходится. Тогда по теореме 5 выполнено условие (2.2), а по теореме 9 имеет место условие (3.2), что и требовалось доказать.

§ 4. Оценка погрешности

4.1. В классических курсах численного анализа доказывается следующий результат (см. [4], стр. 226).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана достаточно гладкая функция x и чебышевская система функций $s_1, \ldots, s_n$. Если обобщенный полином

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k(t)$$

интерполирует x по узлам $t_1, \ldots, t_n$, то

$$x(t) - s(t) = Tx(\xi) \cdot z(t), \tag{4.1}$$

где T — линейный дифференциальный оператор с ядром $\ker T$, равным $L(\{s_k(t)\}_{k=1,\ldots,n})$, а ξ — некоторая точка из $[a, b]$ и z — такая функция, что $z(t_k) = 0$ и $Tz(t) \equiv 1$.

В этом параграфе мы получим такой результат для абстрактного интерполирования.

4.2. Пусть по-прежнему X и Y — банаховы пространства, $i \in \mathfrak{L}(X, Y)$; $v \in \mathfrak{B}(i)$; $p = vi$, а $S = S[v, i]$ — интерполяционное подпространство. Зададимся еще банаховым пространством Z и замкнутым оператором T, действующим из X на Z, таким что $\ker T = S$.

Теорема 10. *Имеют место оценки*

$$\|x - px\| \leqslant C\|Tx\|; \quad |\langle f, x - px\rangle| \leqslant C(f)\|Tx\| \quad \forall x \in D(T), \tag{4.2}$$

где

$$C = \sup_{\substack{\|Tz\| \leqslant 1 \\ 0 \neq z \in \ker i}} \|z\| = \sup_{0 \neq z \in \ker i} \frac{\|z\|}{\|Tz\|}; \tag{4.3}$$

$$C(f) = \sup_{\substack{\|Tz\| \leqslant 1 \\ 0 \neq z \in \ker i}} |\langle f, z\rangle| = \sup_{0 \neq z \in \ker i} \frac{|\langle f, z\rangle|}{\|Tz\|}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $T_0 : X/\ker T \to Z$ — фактор-оператор. Он непрерывно обратим (см. [5], стр. 321), и, значит, оператор $C = (1 - p)_0 T_0^{-1}$, где $(1 - p)_0$ — фактор-оператор, соответствующий оператору $1 - p$, удовлетворяет условию $1 - p = CT$. Далее, для любого $x \in D(T)$

$$|\langle f, x - px\rangle| = |\langle f, CTx\rangle| = |\langle C^* f, Tx\rangle| \leqslant \|C^* f\| \cdot \|Tx\|.$$

Но

$$\|C^*f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle C^*f, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle f, Cx\rangle| = \sup_{y} \frac{\langle f, y - py\rangle}{\|Ty\|}.$$

Поскольку $Ty = T(y - py)$, то

$$|\langle f, x - px\rangle| \leqslant \sup_{\substack{\|Ty\|\leqslant 1 \\ 0\neq y\in\ker i}} \langle f, y\rangle \, \|Tx\|.$$

Мы получили оценку (4.4). Оценка (4.3) доказывается аналогично.

Замечание. В случае сплайн-интерполирования имеет место оценка

$$\|x - px\| \leqslant \sup_{0\neq z\in\ker i} \frac{\|z\|}{\|Uz\|} \cdot \|Ux\|,$$

что существенно лучше, ибо здесь лишь $\ker U \subset \mathrm{sl}(U, i)$.

4.3. Если пространство X гильбертово, а ядра операторов i_k вложены, то для соответствующих коэффициентов c_k можно получить следующую асимптотику. Пусть операторы T_k с $\ker T_k = S_k$ образуют полугруппу. Без ограничения общности можем считать их самосопряженными, поскольку замена T_k на $(T_k{}^*T_k)^{1/2}$ не изменяет величины C_k. Имеем

$$C_{2n} = \sup_{z\in\ker i_{2n}} \frac{\|z\|}{\|T_{2n}z\|} \leqslant \sup_{z\in\ker i_n} \frac{\|z\|}{\|T_{2n}z\|}.$$

Далее, $\|T_nz\|^2 = |\langle T_nz, T_nz\rangle| = |\langle T_{2n}z, z\rangle| \leqslant \|T_{2n}z\|\,\|z\|$, откуда $\|T_{2n}z\| \geqslant \|T_nz\|^2/\|z\|$. Таким образом,

$$C_{2n} \leqslant \sup_{z\in\ker i_n} \frac{\|z\|^2}{\|T_nz\|^2} = C_n{}^2.$$

Итак, $C_{2^n\cdot k} \leqslant C_k^{2^n}$.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность профессору Г. Вайникко за постоянное внимание и помощь в работе.

Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Василенко В. А., Сходимость операторных интерполирующих сплайнов. В сб. «Вариационно-разност. методы в мат. физ.», Новосибирск, 1973 (1974), 95—100.
3. Крейн С. Г. и др., Функциональный анализ. Москва, 1972.
4. Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа. Москва, 1956.
5. Nashed, M. Z., Generalized inverses, solvability and iteration for singular operator equation. Nonlinear Functional Analysis and applications, New-York, 1971, 311—359.
6. Sard, A., Optimal approximation. J. Funct. Analysis, 1967, 1, № 2, 222—244.

Поступило
27 X 1977

ABSTRAKTNE INTERPOLATSIOONITEOORIA

B. Šehtman

Resümee

Töös antakse interpolatsiooni protsessi abstraktne definitsioon suvalises Banachi ruumis. Selliste protsesside uurimiseks tuuakse sisse kolm mõistet, mis üldistavad senituntuid. Need mõisted on: interpolatsiooniprojektor, taastamisoperaator ja interpolatsiooniruum. Esimeses osas uuritakse neid mõisteid ja tõestatakse teoreemid nende vastastikusest seosest. Teises osas uurime abstraktse interpolatsiooni protsessi koonduvust. Neid uurimusi kasutatakse konkreetsete interpolatsioone koondumise tõestamisel.

ABSTRACT INTERPOLATION THEORY

B. Shehtman

Summary

In this note an effort is made to give an abstract approach to some features of the theory of interpolation within the framework of functional analysis. Some existence and unity theorems are proved as well as the convergence of the interpolation process. Finally, as an illustration the linkage of these results to classical spline interpolation theory is described.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 94—98.

РЕЗОЛЬВЕНТА ФРЕДГОЛЬМА И ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

С. Михлин

Ленинградский государственный университет

Г. Вайникко

Тартуский государственный университет

В настоящей заметке с помощью резольвенты Фредгольма решается задача обращения матрицы вида $I-\lambda A$, где I — единичная матрица, λ — численный параметр. Полученный нами результат по существу содержится в книге [2], § 1, стр. 21, и § 47, стр. 312. Новым является лишь метод доказательства.

Линейную алгебраическую систему

$$\xi_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j=f_i,\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,n, \tag{1}$$

можно преобразовать в равносильное интегральное уравнение Фредгольма с конечномерным ядром. Пусть $\varphi_i(x)$, $i=1,\ldots,n$, — ортонормированные в $L_2(0,1)$ функции. Введем обозначения

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x), \tag{2}$$

$$K(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y) \tag{3}$$

и составим интегральное уравнение

$$u(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\,u(y)\,dy=f(x). \tag{4}$$

Ядро уравнения (4) конечномерное, и это уравнение обычным способом приводится к линейной алгебраической системе. Нетрудно видеть, что это будет система (1), причем

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i(x). \tag{5}$$

Пусть $D(\lambda)$ и $D(x,y;\lambda)$ — определитель и первый минор Фредгольма для ядра (3), так что резольвента названного ядра

$$\Gamma(x,y;\lambda)=\frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)}.$$

Если значение λ нехарактеристическое, то

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\Gamma(x,y;\lambda)f(y)\,dy.$$

Умножая это на $\varphi_i(x)$ и интегрируя, получим

$$\xi_i = f_i + \lambda \int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, y; \lambda)\varphi_i(x) f(y)\,dx\,dy =$$

$$= f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} f_j \int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, y; \lambda)\varphi_i(x)\varphi_j(y)\,dx\,dy.$$

Обозначая через A матрицу элементов a_{ij}, на основании последней формулы заключаем, что

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda B(\lambda), \tag{6}$$

где $B(\lambda)$ — матрица элементов

$$b_{ij} = b_{ij}(\lambda) = \int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, y; \lambda)\varphi_i(x)\varphi_j(y)\,dx\,dy. \tag{7}$$

Таким образом, вычисление матрицы $(I - \lambda A)^{-1}$ сводится к вычислению резольвенты ядра (3). Коэффициенты разложений

$$\left.\begin{aligned} D(x, y; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k(x, y)\lambda^k, \\ D(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \gamma_k \lambda^k \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

вычислим по рекурентным формулам Фредгольма (см. [1], стр. 34—38):

$$\left.\begin{aligned} &\beta_0(x, y) = K(x, y), \qquad \gamma_0 = 1, \\ &\beta_k(x, y) = \gamma_k K(x, y) - \int_0^1 K(x, t)\beta_{k-1}(t, y)\,dt, \\ &\gamma_k = \frac{1}{k}\int_0^1 \beta_{k-1}(x, x)\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ядро (3) можно представить в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(y),$$

где

$$\psi_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi_j(y).$$

Как мы сейчас докажем, отсюда вытекает, что $\beta_k(x, y) \equiv 0$ при $k \geqslant n$, и, следовательно, $\gamma_k = 0$ при $k > n$, так что на самом деле

$$\left.\begin{aligned} D(x, y; \lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \beta_k(x, y)\lambda^k, \\ D(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \gamma_k \lambda^k. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Пусть $K(x, y)$ — произвольное фредгольмово ядро вида

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(y).$$

По известной формуле Фредгольма (см. [1], стр. 37)

$$n!\beta_n(x,y)=$$

$$=\int_0^1\cdots\int_0^1 \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,y) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_n,y) & K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\dots dt_n. \qquad (11)$$

Рассмотрим определитель порядка $n+1$:

$$\begin{vmatrix} K(\sigma_0,\tau_0) & K(\sigma_0,\tau_1) & \dots & K(\sigma_0,\tau_n) \\ K(\sigma_1,\tau_0) & K(\sigma_1,\tau_1) & \dots & K(\sigma_1,\tau_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(\sigma_n,\tau_0) & K(\sigma_n,\tau_1) & \dots & K(\sigma_n,\tau_n) \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Ядро $K(x,y)$ представим в виде

$$K(x,y)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,b_i(y),$$

где $a_0(x)=b_0(y)\equiv 0$. Элементы определителя (12) имеют вид

$$\sum_{l=0}^{n} a_l(\sigma_i)\,b_l(\tau_j);$$

отсюда следует, что указанный определитель равен произведению определителей двух матриц, элементы которых соответственно равны $\alpha_{il}=a_l(\sigma_i)$, $\beta_{lj}=b_l(\tau_j)$. Но эти определители равны нулю, потому что каждая из названных матриц содержит ряд из нулей. Таким образом, определитель (12) тождественно равен нулю. Положив теперь $\sigma_0=x$, $\tau_0=y$, $\sigma_i=\tau_i=t_i$, $i=1,\dots,n$, убедимся, что $\beta_n(x,y)\equiv 0$. Теперь из формул (9) вытекает, что $\beta_k(x,y)\equiv 0$, $\gamma_k=0$ при $k>n$.

Легко видеть, что $\beta_k(x,y)$ имеет вид

$$\beta_k(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\varphi_i(x)\varphi_j(y) \qquad (13)$$

и что

$$\gamma_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr}A^{(k-1)}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(k-1)}, \qquad (14)$$

где $A^{(k)}$ — матрица элементов $a_{ij}^{(k)}$; мы полагаем здесь и ниже $A^{(0)}=A$ и $a_{ij}^{(0)}=a_{ij}$. Действительно, допуская, что формула (13) верна для $k-1$, найдем по формуле (9)

$$\beta_k(x,y)=\gamma_k\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(0)}\varphi_i(x)\varphi_j(y)-$$

$$-\int_0^1\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}^{(0)}\varphi_i(x)\varphi_l(t)\sum_{m,j=1}^{n} a_{mj}^{(k-1)}\varphi_m(t)\varphi_j(y)\,dt=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_i(x)\varphi_j(y)\Big[\gamma_k a_{ij}^{(0)}-\sum_{m=1}^{n} a_{im}^{(0)}a_{mj}^{(k-1)}\Big].$$

Теперь очевидно, что $\beta_k(x, y)$ имеет вид (13), причем

$$a_{ij}^{(k)} = \gamma_k a_{ij}^{(0)} - \sum_{m=1}^{n} a_{im}^{(0)} a_{mj}^{(k-1)}. \tag{15}$$

Формула (15) равносильна следующей:

$$A^{(k)} = A^{(0)}[\gamma_k I - A^{(k-1)}], \qquad A^{(0)} = A. \tag{16}$$

По последней из формул (9)

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k-1)} \varphi_i(x) \varphi_j(x)\, dx = \frac{1}{k} \operatorname{tr} A^{(k-1)},$$

и формула (14) также доказана.

Матрицы $A^{(k)}$ перестановочны между собой, так что, в частности, справедлива формула

$$A^{(k)} = [\gamma_k I - A^{(k-1)}] A^{(0)}. \tag{16a}$$

Вычислим матрицу $B(\lambda)$ (формула (7)). Прежде всего,

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \gamma_k \lambda^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{tr} A^{(k-1)} \lambda^k. \tag{17}$$

Далее,

$$b_{ij} = \frac{1}{D(\lambda)} \int_0^1 \int_0^1 D(x, y; \lambda) \varphi_i(x) \varphi_j(y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \lambda^k \int_0^1 \int_0^1 \beta_k(x, y) \varphi_i(x) \varphi_j(y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{ij}^{(k)} \lambda^k.$$

Отсюда

$$B(\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A^{(k)} \lambda^k. \tag{18}$$

Формулы (17) и (18) решают задачу обращения матрицы $I - \lambda A$.

Как мы видели, $\beta_n(x, y) = 0$, а тогда, в силу формулы (13), $A^{(n)} = 0$. Если матрица A обратима, то из формулы (16) следует

$$A^{(n-1)} = \gamma_n I; \tag{19}$$

формула (19) верна и тогда, когда матрица A необратима — достаточно заменить A на $A + \varepsilon I$ и затем положить $\varepsilon \to 0$.

Укажем на связь с методом Д. К. Фаддеева построения матрицы A^{-1}. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\gamma_n \neq 0$. Из (16) и (19) имеем

$$\gamma_n I = A^{(n-1)} = A(\gamma_{n-1} I - A^{(n-2)}),$$

откуда

$$A^{-1} = \frac{1}{\gamma_n}(\gamma_{n-1} I - A^{(n-2)}).$$

Это и есть формула [2] для обращения A. Приведенные выше рекуррентные формулы для вычисления γ_n и $A^{(n-2)}$ с точностью до несущественных различий в обозначениях совпадают с рекуррентными формулами Д. К. Фаддеева.

Литература

1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV. Москва, 1957.
2. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры. Москва, 1963.

Поступило
3 I 1977

FREDHOLMI RESOLVENT JA PARAMEETRIST LINEAARSELT SÕLTUVATE MAATRIKSITE PÖÖRAMINE

S. Mihlin ja G. Vainikko

Resümee

Lineaarne võrrandisüsteem (1) on samaväärne kõdunud tuumaga integraalvõrrandiga (2)—(4). Leides viimase resolvendi Fredholmi rekurrentsete valemite abil, jõuame teatava arvutusskeemini maatriksi $I - \lambda A$ pööramiseks. See arvutusskeem osutub lähedaseks D. K. Faddejevi meetodile.

THE FREDHOLM RESOLVENT AND AN INVERSION OF MATRICES WHICH DEPEND LINEARLY ON A PARAMETER

S. Mihlin and G. Vainikko

Summary

A linear system of equations is equivalent to an integral equation with a degenerated kernel. Finding the resolvent of the integral equation by means of Fredholm recurrent formulas we get an inversion method for the matrix $I - \lambda A$. This method is rather close to the method of D. K. Faddeev.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 99—106.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

О. Карма

Тартуский государственный университет

Пусть на множестве U задан функционал $\Phi(\cdot)$ и поставлена одна из следующих задач:

найти $\Phi^* = \inf\{\Phi(u)\colon\ u \in U\}$

(задача оптимизации по результату) или

найти $u^* \in U$: $\Phi(u^*) \leqslant \Phi(u)$, $\forall u \in U$

(задача оптимизации по стратегии (по управлению)).

Для решения этих задач можно применить следующий подход. Функционал $\Phi(\cdot)$ заменяется легче вычисляемым функционалом $\Phi_n(\cdot)$, а найденные для $\Phi_n(\cdot)$ решения объявляют приближенными решениями первоначальных задач. При этом функционал $\Phi_n(\cdot)$ выбирают, как правило, из некоторого семейства $\{\Phi_n(\cdot),\ n \in \mathbf{N}\}$, которое стремится к $\Phi(\cdot)$ при $n \to \infty$. Представляет интерес выяснить, при каких условиях найденные таким образом приближенные решения дают при $n \to \infty$ правильную картину о решениях первоначальных задач.

§ 1. Сходимость инфимумов

1.0. Пусть на множествах U и U_n, $n \in \mathbf{N}$, заданы соответственно функционалы $\Phi(\cdot)$ и $\Phi_n(\cdot)$, $n \in \mathbf{N}$. Введем следующие обозначения и определения[1]:

$$\Phi^* = \inf\{\Phi(u)\colon u \in U\}; \quad \Phi_n{}^* = \inf\{\Phi_n(u_n)\colon u_n \in U_n\};$$

элемент u из U называем оптимальной стратегией для $\Phi(\cdot)$, если $\Phi(u) = \Phi^*$; последовательность $\{u^n,\ n \in N'\}$ элементов u^n из U называем минимизирующей (для $\Phi(\cdot)$), если $\Phi(u^n) \to \Phi^*$, $n \in N'$; последовательность $\{u_n,\ n \in N'\}$ с u_n из U_n называем минимизирующей (для $\{\Phi_n(\cdot),\ n \in N'\}$), если для некоторой

[1] Элементы множества U обозначаем u, u', ..., элементы множества U_n обозначаем u_n, u'_n, ... Через N', N'', ... обозначаем бесконечные подмножества множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ с естественным упорядочением. Запись $\lim \alpha_n = \alpha$, $n \in N'$, или $\alpha_n \to \alpha$, $n \in N'$, означает сходимость при $n \to \infty$, причем индекс n пробегает множество N'. Если множество индексов не указано, то это $\mathbf{N}$.

последовательности неотрицательных чисел ε_n таких, что $\varepsilon_n \to 0$, $n \in N'$, имеют место неравенства [2]:

$$\Phi_n(u_n) \leqslant \Phi_n^* + \varepsilon_n, \quad n \in N'.$$

1.1. Отметим предварительно, что даже в случае, когда $U_n = U$ и $\Phi_n(u_n) \to \Phi(u)$ для всех u из U и всех $u_n \to u$, нельзя без дополнительных предположений утверждать, что $\Phi_n^* \to \Phi^*$. Можно лишь доказать, что $\limsup \Phi_n^* \leqslant \Phi^*$.

Лемма 1.1. *Неравенство*

$$\limsup \Phi_n^* \leqslant \Phi^* \tag{1.1}$$

равносильно следующему требованию:

существуют последовательность $\{u_n\}$ с u_n из U_n и минимизирующая для $\Phi(\cdot)$ последовательность $\{u^n\}$ с u^n из U такие, что

$$\limsup [\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n)] \leqslant 0. \tag{1.2}$$

Доказательство. а) Пусть выполнено (1.2). Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что

$$\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n) \leqslant \varepsilon_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Поэтому имеем

$$\Phi_n^* \leqslant \Phi_n(u^n) \leqslant \Phi(u^n) + \varepsilon_n,$$

откуда предельным переходом получим (1.1), так как $\{u^n\}$ минимизирующая и $\varepsilon_n \to 0$.

б) Пусть выполнено (1.1). Если $\limsup \Phi_n^* \neq -\infty$, то и $\Phi^* \neq -\infty$ и в качестве искомых последовательностей можно выбрать любые минимизирующие последовательности $\{u_n\}$ и $\{u^n\}$. Для них

$$\limsup [\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n)] = \limsup \Phi_n^* - \Phi^* \leqslant 0.$$

Если же $\limsup \Phi_n^* = -\infty$, то при выборе минимизирующих последовательностей достаточно дополнительно потребовать, чтобы, начиная с некоторого индекса n_0, при всех n выполнялись неравенства $\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n) \leqslant 0$, а это всегда выполнимо.

Лемма 1.2. *Пусть для всех элементов некоторой последовательности $\{u^k,\ k \in \mathbf{N}\}$ существуют последовательности $\{u_n^k,\ n \in \mathbf{N}\}$ такие, что*

$$\limsup \Phi_n(u_n^k) \leqslant \Phi(u^k). \tag{1.3}$$

Тогда существуют последовательности $\{u^n\}$ с u^n из U и $\{u_n\}$ с u_n из U_n такие, что

1) $u^n = u^k, \quad n_k \leqslant n < n_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$ (1.4)

где n_k — некоторые числа такие, что $n_1 = 1$, $n_k < n_{k+1} < \infty$,

2) $\limsup [\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n)] \leqslant 0.$ (1.5)

[2] Здесь и везде в дальнейшем запись $-\infty + \varepsilon$ при положительном ε будем понимать как число $-1/\varepsilon$, а записи $-\infty + 0$ и $-\infty - c$ (при $c > 0$), как $-\infty$.

Доказательство. Для каждого k находим индекс n_k из условий

$$n_1=1, \quad n_k>n_{k-1}; \tag{1.6}$$

$$n\geqslant n_k \Rightarrow \Phi_n(u_n{}^k)-\Phi(u^k)\leqslant 1/k, \quad k=2, 3, \ldots . \tag{1.7}$$

Последовательности $\{u^n\}$ и $\{u_n\}$, определенные равенствами

$$u^n=u^1, \quad u_n=u_n{}^1 \quad \text{при} \quad 1\leqslant n<n_2, \tag{1.8}$$

$$u^n=u^k, \quad u_n=u_n{}^k \quad \text{при} \quad n_k\leqslant n<n_{k+1}, \quad k=2, 3, \ldots, \tag{1.9}$$

будут обладать свойствами (1.4) и (1.5).

Замечание. Если в лемме 1.2 условие (1.3) заменить на более сильное условие $\Phi_n(u_n{}^k)\to\Phi(u^k)$, то вместо неравенства (1.5) можно писать $\Phi_n(u_n)-\Phi(u^n)\to 0$.

Как следствие из лемм 1.1 и 1.2 получается следующее

Предложение 1.1. *Неравенство* $\limsup \Phi_n{}^*\leqslant\Phi^*$ *равносильно следующему требованию:*

для всех элементов некоторой (или любой) минимизирующей для $\Phi(\cdot)$ *последовательности* $\{u^k,\ k\in\mathbf{N}\}$ *существуют последовательности* $\{u_n{}^k,\ n\in\mathbf{N}\}$ *такие, что*

$$\limsup_{n\in\mathbf{N}} \Phi_n(u_n{}^k)\leqslant\Phi(u^k). \tag{1.10}$$

Доказательство необходимости приведенного требования: для каждого u^k можно в качестве искомой последовательности $\{u_n{}^k\}$ выбрать некоторую минимизирующую для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательность, так как тогда при любом $\varepsilon>0$ имеем

$$\Phi_n(u_n{}^k)\leqslant\Phi(u^k)+\varepsilon, \quad n\geqslant n_0.$$

Замечание. Предложение 1.1 нетрудно доказывается и непосредственно, но построение, проведенное при доказательстве леммы 1.2, будет нам полезно и в дальнейшем.

Лемма 1.3. *Неравенство*

$$\liminf \Phi_n{}^*\geqslant\Phi^* \tag{1.11}$$

равносильно следующему требованию:

существуют минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ *последовательность* $\{u_n\}$ *с* u_n *из* U_n *и последовательность* $\{u^n\}$ *с* u^n *из* U *такие, что*

$$\liminf\,[\Phi_n(u_n)-\Phi(u^n)]\geqslant 0. \tag{1.12}$$

Доказательство проводится рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 1.1.

а) Пусть выполнено (1.12). Тогда существует последовательность $\varepsilon_n\to 0$ с $\varepsilon_n\geqslant 0$ такая, что

$$\Phi_n(u_n)-\Phi(u^n)\geqslant-\varepsilon_n, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Поэтому имеем $\Phi_n(u_n)\geqslant\Phi(u^n)-\varepsilon_n\geqslant\Phi^*-\varepsilon_n, \quad n\in\mathbf{N}$, откуда получаем (1.11), так как $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность.

б) Пусть выполняется (1.11). Если $\Phi^* \neq -\infty$, то и $\liminf \Phi_n^* \neq -\infty$ и в качестве искомых последовательностей можно выбрать любые минимизирующие последовательности — для них

$$\liminf [\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n)] =$$
$$= \liminf \Phi_n(u_n) - \Phi^* \geqslant \liminf \Phi_n^* - \Phi^* \geqslant 0.$$

Если же $\Phi^* = -\infty$, то достаточно дополнительно требовать, чтобы, начиная с некоторого индекса n_0, при всех n выполнялись неравенства $\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n) \geqslant 0$, а это всегда выполнимо.

1.2. Рассмотрим отдельно случай, когда можно говорить о «близости» последовательностей $\{u_n\}$ с u_n из U_n и $\{u^n\}$ с u^n из U.

Будем предполагать, что задана некоторая последовательность функционалов $\varrho_n : U_n \times U \to \mathbf{R}$ (которые характеризуют для нас «близость» элементов u_n из U_n и u из U).

Примеры.

1) Функционалы $\varrho_n(\cdot,\cdot)$ могут, например, быть заданы равенствами

$$\varrho_n(u_n, u) = 0, \qquad \forall u_n \in U_n, \qquad u \in U.$$

Это позволяет обобщить приводимые ниже результаты и на случай, когда никаких функционалов не задано.

2) Функционалы $\varrho_n(\cdot,\cdot)$ могут, например, быть заданы равенствами $\varrho_n(u_n, u) = \max\{|f_n^k(u_n) - f^k(u)|, \quad k \in K_n\}$, где $\{f_n^k(\cdot),\ k \in K_n\}$ и $\{f^k(\cdot),\ k \in K_n\}$ — некоторые совокупности функционалов на U_n и U соответственно.

3) Пусть U_n и U — подмножества метрических пространств E_n и E, с метриками $|\cdot,\cdot|_n$ и $|\cdot,\cdot|$ соответственно.

Если задана последовательность «связывающих отображений-сужений» $r_n : E \to E_n$, то можно определить $\varrho_n(u_n, u) = |u_n, r_n u|_n$. Если задана последовательность «связывающих отображений-вложений» $j_n : E_n \to E$, то можно определить $\varrho_n(u_n, u) = |j_n u_n, u|$.

Если $\varrho_n(u_n, u) \to 0$, $n \in N'$, то будем говорить, что последовательность $\{u_n, n \in N'\}$ с u_n из U_n сходится к пределу u из U, и писать $u_n \to u$, $n \in N'$.

Отметим, что обычно приближающие задачи строят таким образом, что выполнены следующие условия:

Условие (a): $u_n \to u,\ n \in N' \Rightarrow \Phi_n(u_n) \to \Phi(u),\ n \in N'$;

Условие (c): $\forall u \in U\ \exists \{u_n\}:\ u_n \to u,\ \Phi_n(u_n) \to \Phi(u)$.

Введем еще

Условие (l_0): *существуют минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательность $\{u_n\}$ с u_n из U_n и последовательность $\{u^n\}$ с u^n из U такие, что*

$$\varrho_n(u_n, u^n) \to 0, \qquad \Phi_n(u_n) - \Phi(u^n) \to 0. \tag{1.13}$$

Предложение 1.2. *Пусть выполнено следующее условие: для всех элементов некоторой минимизирующей для $\Phi(\cdot)$ последовательности $\{u^k,\ k\in\mathbf{N}\}$ с u^k из U существуют последовательности $\{u_n{}^k,\ n\in\mathbf{N}\}$ с $u_n{}^k$ из U_n такие, что*

$$\varrho_n(u_n{}^k, u^k)\to 0,\quad \Phi_n(u_n{}^k)\to\Phi(u^k),\quad n\in\mathbf{N}. \tag{1.14}$$

Тогда равенство $\lim\Phi_n{}^*=\Phi^*$ *равносильно условию* (l_0). *При этом последовательность $\{u^n\}$ будет всегда минимизирующей для $\Phi(\cdot)$.*

Доказательство. Достаточность условия (l_0) для равенства $\lim\Phi_n{}^*=\Phi^*$ следует из предложения 1.1 и леммы 1.3. Для доказательства необходимости условия (l_0) можно исходить из некоторой минимизирующей для $\Phi(\cdot)$ последовательности и построить для нее (аналогично доказательству леммы 1.2) последовательности $\{u^n\}$ и $\{u_n\}$ со свойствами (1.4) и (1.13). Ввиду равенства $\lim\Phi_n{}^*=\Phi^*$ последовательность $\{u_n\}$ будет при этом минимизирующей.

§ 2. Приближение оптимальных стратегий

2.0. Будем предполагать, как и в п. 1.2, что задана некоторая последовательность функционалов $\varrho_n: U_n\times U\to\mathbf{R}$.

В дальнейшем нам нужны следующие условия.

Условие (a_0): *если $\{u_n,\ n\in N'\}$ минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot),\ n\in N'\}$ последовательность и $u_n\to u'$, $n\in N'$, то $\Phi_n(u_n)\to\Phi(u)$, $n\in N'$;*

Условие (c_0): *множество $U^0=\{u\in U:\Phi(u)=\Phi^*\}$ не пусто, и для каждого u^0 из U^0 существует последовательность $\{u_n\}$ такая, что $\varrho_n(u_n, u^0)\to 0$, $\Phi_n(u_n)\to\Phi(u^0)$;*

Условие (c_ε): *при некотором $\varepsilon>0$ для каждого u^ε такого, что $\Phi(u^\varepsilon)\leqslant\Phi^*+\varepsilon$, существует последовательность $\{u_n\}$ с u_n из U_n такая, что $\varrho_n(u_n, u^\varepsilon)\to 0$, $\Phi_n(u_n)\to\Phi(u^\varepsilon)$.*

2.1. Теорема 2.1. *Пусть выполнено хоть одно из условий (c_ε) или (c_0). Для того, чтобы имели место следующие утверждения 1°, 2° и 3°:*

1° $\Phi_n{}^*\to\Phi^*$,

2° *для каждой оптимальной для $\Phi(\cdot)$ стратегии u^0 существует минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательность, сходящаяся к u^0,*

3° *если $\{u_n,\ n\in N'\}$ минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot),\ n\in N'\}$ последовательность и $u_n\to u^0$, $n\in N'$, то u^0 оптимальная для $\Phi(\cdot)$ стратегия,*

необходимо и достаточно выполнение условий (l_0) и (a_0).

Доказательство. Равносильность утверждения 1° и условия (l_0) установлена в предложении 1.2. Если же $\lim\Phi_n{}^*=\Phi^*$, то ясно, что как из условия (c_ε), так и из условия (c_0) следует утверждение 2°, а (a_0) равносильно утверждению 3°.

2.2. Приведем некоторые достаточные условия для выполнения условия (l_0).

Последовательность $\{u_n,\ n\in N'\}$ с u_n из U_n будем называть компактной, если для каждого $N''\subset N'$ существует $N'''\subset N''$ такое, что $\{u_n,\ n\in N'''\}$ сходится к некоторому элементу из U.

Предложение 2.1. *Пусть выполнены условия* (a_0) *и* (c_ε). *Если существует хоть одна компактная минимизирующая для* $\{\Phi_n(\cdot)\}$ *последовательность, то* $\Phi_n^*\to\Phi^*$, *множество* U^0 *не пусто и выполнены условия* (c_0) *и* (l_0).

Доказательство. По предложению 1.1 из условия (c_ε) вытекает, что $\limsup\Phi_n^*\leqslant\Phi^*$.

Пусть $\{u_n\}$ компактная минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательность, а N' такая подпоследовательность индексов, что на ней реализуется $\liminf\Phi_n^*$:

$$\lim_{n\in N'}\Phi_n^*=\liminf_{n\in\mathbf{N}}\Phi_n^*.$$

Пусть, далее, $N''\subset N'$ такая подпоследовательность индексов, что $\{u_n,\ n\in N''\}$ сходится к некоторому пределу u^0 из U. Ввиду условия (a_0) тогда $\Phi_n(u_n)\to\Phi(u^0)$, $n\in N''$ и из неравенства

$$\Phi_n^*+\varepsilon_n\geqslant\Phi_n(u_n)$$

предельным переходом по $n\in N''$ получим, что

$$\liminf\Phi_n^*\geqslant\Phi(u^0)\geqslant\Phi^*.$$

Значит, $\lim\Phi_n^*=\Phi^*=\Phi(u^0)$. В этом случае из условия (c_ε) следует (c_0), а по предложению 1.2 также (l_0).

Предложение 2.2. *Пусть* $\Phi_n^*\to\Phi^*$ *и выполнено условие* (c_0). *Тогда существует компактная минимизирующая для* $\{\Phi_n(\cdot)\}$ *последовательность и выполнено условие* (l_0).

Доказательство. Любая последовательность $u_n\to u^0$ из условия (c_0) будет минимизирующей, так как $\Phi_n^*\to\Phi^*$. Эта последовательность также компактна и удовлетворяет условию (l_0) вместе с последовательностью $\{u^n\}$ с $u^n\equiv u^0$.

2.3. Приведем еще некоторые достаточные условия для компактности всех минимизирующих для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательностей. Мы будем здесь предполагать, что в U определено понятие сходимости последовательностей $\{u^n,\ n\in N'\}$, причем эта сходимость «согласована» со сходимостью последовательностей $\{u_n\}$ с u_n из U_n в следующем смысле:

$$u^n\to u,\ \varrho_n(u_n,u^n)\to 0,\ n\in N'\Rightarrow u_n\to u,\ n\in N'; \qquad (2.1)$$

$$u_n\to u,\ \varrho_n(u_n,u^n)\to 0,\ n\in N'\Rightarrow u^n\to u,\ n\in N'. \qquad (2.2)$$

Последовательность $\{u^n,\ n\in N'\}$ с u^n из U будем называть компактной, если для каждой $N''\subset N'$ существует $N'''\subset N''$ такое, что $\{u^n,\ n\in N'''\}$ сходится к некоторому пределу u из U.

Замечание. Если выполнено условие (2.1), то из условий (a) и (c) следует, что функционал $\Phi(\cdot)$ непрерывен в следующем смысле: $u^k\to u\Rightarrow\Phi(u^k)\to\Phi(u)$.

Действительно, ввиду условия (c) можно, аналогично доказательству леммы 1.2, для произвольной последовательности $\{u^k, k \in N\}$ с $u^k \to u$ построить последовательности $\{u^n\}$ и $\{u_n\}$, удовлетворяющие требованиям (1.4) и (1.13). При этом из (2.1) следует, что $u_n \to u$, а из условия (a) получаем, что $\Phi_n(u_n) \to \Phi(u)$. Так как $\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n) \to 0$, то отсюда выводим, что $\Phi(u^n) \to \Phi(u)$ и $\Phi(u^k) \to \Phi(u)$.

Введем еще следующее

Условие (l_0'): *для каждой минимизирующей для* $\{\Phi_n(\cdot)\}$ *последовательности* $\{u_n\}$ *существует такая последовательность* $\{u^n\}$ *с* u^n *из* U, *что*

$$\varrho_n(u_n, u^n) \to 0, \qquad \Phi_n(u_n) - \Phi(u^n) \to 0. \tag{2.3}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (a_0) *и* (c_ε). *Для того, чтобы каждая минимизирующая для* $\{\Phi_n(\cdot)\}$ *последовательность была компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *каждая минимизирующая для* $\Phi(\cdot)$ *последовательность компактна,*

2) *имеет место условие* (l_0').

Доказательство. Достаточность. Во-первых, из условий (a_0), (c_ε) и (l_0') следует, что $\Phi_n{}^* \to \Phi^*$.

Пусть теперь $\{u_n\}$ — некоторая минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательность, а $\{u_n,\ n \in N'\}$ — произвольная ее подпоследовательность. Пусть $\{u^n\}$ — последовательность, найденная по (2.3). Так как $\Phi_n{}^* \to \Phi^*$, то последовательность $\{u^n\}$ будет при этом минимизирующей для $\Phi(\cdot)$. Поэтому $\{u^n\}$ должна быть компактной, и существуют подпоследовательность индексов $N'' \subset N'$ и элемент u_0 из U такие, что $u^n \to u^0$, $n \in N''$. Но тогда по условию (2.1) также $u_n \to u^0$, $n \in N''$, что ввиду произвольности N' и означает компактность последовательности $\{u_n\}$.

Необходимость. Пусть все минимизирующие для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательности компактны, но не выполнено условие (l_0'). Пусть $\{u_n\}$ — некоторая минимизирующая для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательность, на которой условие (l_0') не выполняется.

Вспомним, что по предложению 2.1 множество U^0 не пусто, и определим для каждого u_n элемент $u^n \in U^0$ из условия

$$\varrho_n(u_n, u^n) \leqslant \inf\{\varrho_n(u_n, u):\ u \in U^0\} + \alpha_n, \tag{2.4}$$

где α_n — некоторая сходящаяся к нулю последовательность. Так как $\Phi_n{}^* \to \Phi^*$, то $\Phi_n(u_n) - \Phi(u^n) \to 0$.

По предположению $\varrho_n(u_n, u^n)$ не сходится к нулю, поэтому существуют $\varepsilon > 0$ и N' такие, что

$$\varrho_n(u_n, u^n) \geqslant 2\varepsilon \geqslant \varepsilon + \alpha_n, \qquad n \in N'.$$

Значит, ввиду (2.4) имеем

$$\inf\{\varrho_n(u_n, u):\ u \in U^0\} \geqslant \varepsilon, \qquad n \in N'. \tag{2.5}$$

Пользуясь компактностью последовательности $\{u_n\}$, найдем теперь $N'' \subset N'$ и u^0 из U такие, что $u_n \to u^0$, $n \in N''$. Но тогда из теоремы 2.1 (она применима ввиду предложения 2.1) следует, что $u^0 \in U^0$, а это противоречит неравенствам (2.5).

Пусть теперь все минимизирующие для $\{\Phi_n(\cdot)\}$ последовательности компактны и выполнено условие (l_0'), но существует минимизирующая для $\{\Phi(\cdot)\}$ некомпактная последовательность $\{u^k\}$. Без ограничения общности будем предполагать, что сама $\{u^k\}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей.

Используя условие (c_ε), построим, аналогично доказательству леммы 1.2, последовательности $\{u^n\}$ и $\{u_n\}$, удовлетворяющие условиям (1.4) и (2.3). Так как $\Phi_n^* \to \Phi^*$ (выполнены условия (a_0), (c_ε) и (l_0) теоремы 2.1) и последовательность $\{u^n\}$ является минимизирующей для $\Phi(\cdot)$, то последовательность $\{u_n\}$ должна быть минимизирующей для $\{\Phi_n(\cdot)\}$. Значит, $\{u_n\}$ компактна и существуют N' и u^0 из U такие, что $u_n \to u^0$, $n \in N'$. По условию (2.2) тогда $u^n \to u^0$, $n \in N'$, что противоречит некомпактности $\{u^k\}$. Этим теорема 2.2 полностью доказана.

Приведенные выше результаты являются уточнением и обобщением аналогичных результатов, например, в [1, 2].

Литература

1. Будак Б. М., Беркович Е. М., Об аппроксимации экстремальных задач 1. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, **11**, № 3, 581—596.
2. Esser, H., Zur Diskretisierung von Extremalproblemen. Lect. Notes Math., 1973, **333**, 69—88.

Поступило
10 I 1977

APROKSIMATSIOONIST EKSTREEMUMÜLESANNETES

O. Karma

Resümee

Artiklis tõestatakse mõned üldised väited ligikaudsete meetodite koondumisest ekstreemumülesannetes. Saadud tulemused üldistavad ja täpsustavad analoogilisi varem teadaolevaid tulemusi (vt. näit. [1, 2]).

ABOUT APPROXIMATION IN OPTIMIZATION PROBLEMS

O. Karma

Summary

Some general results about converging of approximate methods in optimization problems are proved. These results generalize and make more exact analogical results, known previously (see e. g. [1, 2]).

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 107—117.

ОПЕРАТОР СДВИГА ПО ТРАЕКТОРИЯМ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

М. Каменский

Воронежский государственный университет

При изучении различных вопросов сохранения устойчивости или неустойчивости периодических решений дифференциальных уравнений при малых изменениях параметров, входящих в уравнение, нужно следить не за всем спектром оператора сдвига за период (или кратное ему время) по траекториям линеаризованной вдоль исследуемого решения системы, а лишь за точками спектра, лежащими вне некоторого круга K радиуса, меньше единицы. Часто может оказаться, что, хотя весь спектр и не меняется непрерывно при изменении параметров, его часть, лежащая вне круга K, непрерывно зависит от параметров. В [5] доказана абстрактная теорема, дающая в терминах мер некомпактности необходимые и достаточные условия такого поведения спектра. Эту теорему для удобства ссылок мы приводим в § 1 (теорема 3). В настоящей работе изучаются условия на правую часть уравнений нейтрального типа, содержащую параметр, обеспечивающие выполнение достаточных условий абстрактной теоремы.

§ 1. Обозначения, используемые понятия и факты

На протяжении всей статьи через E будет обозначаться вещественное или комплексное банахово пространство, через $\mathbf{R}^m$ вещественное m-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, через $K(\lambda, r)$ круг комплексной плоскости с центром в точке λ радиуса r. Пространство непрерывных функций x, действующих из $[a, b]$ в $\mathbf{R}^m$, с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

мы будем обозначать через $C([a, b], \mathbf{R}^m)$, пространство непрерывно дифференцируемых функций с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

через $C^1([a, b], \mathbf{R}^m)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех ограниченных подмножеств банахова пространства E. Если задана функция $\psi : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$, удовлетворяющая соотношению $\psi(\mathrm{clco}\,\Omega) = \psi(\Omega)$, где $\mathrm{clco}\,\Omega$ — замыкание выпуклой оболочки Ω, мы, следуя [9], будем говорить, что в E задана *мера некомпактности* ψ.

Мерой некомпактности Хаусдорфа (см. [9]) множества $\Omega \in \mathfrak{M}$ называют нижнюю грань чисел $\varepsilon > 0$, при которых множество Ω имеет в E конечную ε-сеть. Мера некомпактности Хаусдорфа множества Ω обозначается обычно $\chi(\Omega)$.

Пусть Ω — ограниченное подмножество $C([a, b], \mathbf{R}^m)$ и $[c, d] \subseteq [a, b]$. Через $\chi_{c,d}(\Omega)$ мы будем обозначать меру некомпактности Хаусдорфа в пространстве $C([c, d], \mathbf{R}^m)$ сужения множества функций из Ω на $[c, d]$.

В [4] показано, что

$$\chi_{c,d}(\Omega) = \limsup_{\delta\to 0}\ \sup_{x\in\Omega}\ \max_{c\leqslant\tau\leqslant d-\delta}\ \min_{y\in\mathbf{R}^m}\ \max_{\tau\leqslant t\leqslant\tau+\delta} |x(t) - y|.$$

Из указанной формулы следует, что для любого $c \in [a, b]$

$$\chi_{a,b}(\Omega) \leqslant \chi_{a,c}(\Omega) + \chi_{c,b}(\Omega).$$

Мера некомпактности ψ называется (см. [9]): *монотонной*, если из $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ следует $\psi(\Omega_1 \leqslant \psi(\Omega_2)$; *алгебраически полуаддитивной*, если $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leqslant \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$; *полуоднородной*, если $\psi(\lambda\Omega) \leqslant \|\lambda\|\psi(\Omega)$; *правильной*, если равенство $\psi(\Omega) = 0$ эквивалентно полной ограниченности Ω.

Нормальной мерой некомпактности в пространстве E (см. [9]) называют любую полунорму Φ, заданную на пространстве ограниченных последовательностей элементов из E, обращающуюся в нуль на вполне ограниченных последовательностях и только на них.

Теорема 1 (см. [9]). *Пусть ψ монотонна, алгебраически полуаддитивна, полуоднородна и правильна. Тогда ψ порождает в E нормальную меру некомпактности Φ, задаваемую формулой* $\Phi(\{x_n\}) = \psi(\{x_n\})$.

Линейный ограниченный оператор A, действующий из E в E, называется (см. [9]) (k, Φ)*-ограниченным*, если для любой ограниченной последовательности X выполнено неравенство $\Phi(AX) \leqslant k\Phi(X)$.

Теорема 2 (см. [9]). *Пусть A является (k, Φ)-ограниченным оператором. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вне круга $K(0, k + \varepsilon)$ лежит лишь конечное число точек спектра оператора A, причем эти точки могут быть лишь собственными значениями конечной кратности.*

Последовательность $\{A_n\}$ линейных ограниченных операторов называется (см. [5]) *уплотняющей с константой k по совокупности переменных* относительно нормальной меры некомпактности Φ, заданной в E, если для любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset E$ выполнено неравенство $\Phi(\{A_n x_n\}) \leqslant$ $\leqslant k\Phi(\{x_n\})$.

Пусть операторы последовательности $\{A_n\}$ удовлетворяют следующим требованиям:

(A^I): *операторы* A_n *сильно сходятся при* $n \to \infty$ *к линейному ограниченному оператору* A_∞;

(A^{II}): *существует* $q > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon > 0$ *вне* $K(0, q+\varepsilon)$ *каждый из операторов* A_n *имеет лишь конечное число точек спектра и эти точки могут быть только собственными значениями конечной кратности.*

Обозначим через Γ_ε границу $K(0, q+\varepsilon)$ и пусть $\Gamma_\varepsilon \cap \sigma(A_n) = \varnothing$ при $n = 1, 2, \ldots, \infty$. Тогда через $P_n(\varepsilon)$ обозначим проектор Рисса оператора A_n по контуру Γ_ε и положим $A_n(\varepsilon) = A_n(I - P_n(\varepsilon))$.

Теорема 3 (см. [5]). *Пусть выполнены требования* (A^I) *и* (A^{II}). *Тогда для того, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *такого, что* $\Gamma_\varepsilon \cap \sigma(A_n) = \varnothing$ *при* $n = 1, 2, \ldots, \infty$, *проекторы* $P_n(\varepsilon)$ *сходились по норме к* $P_\infty(\varepsilon)$, *а операторы* $[\lambda I - A_n(\varepsilon)]^{-1}$ *сильно сходились к* $[\lambda I - A_\infty(\varepsilon)]^{-1}$, *когда* λ *лежит вне* $K(0, q+\varepsilon)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\delta > 0$ *и любой подпоследовательности* $\{A_{n(k)}\}$ *последовательности* $\{A_n\}$ *существовала нормальная мера некомпактности* Φ *такая, что последовательность* $\{A_{n(k)}\}$ *уплотняет с константой* $q + \delta$ *по совокупности переменных относительно* Φ.

§ 2. Примеры из теории уравнений нейтрального типа

В этом параграфе мы приведем два примера семейств операторов, удовлетворяющих достаточным условиям теоремы 3. Эти примеры связаны с оператором сдвига по траекториям уравнений нейтрального типа, правая часть которых зависит от малого параметра.

Приведем сначала одно абстрактное утверждение о выполнении достаточных условий теоремы 3. Выполнение требований этого утверждения мы и будем проверять в примерах.

Теорема 4. *Пусть* Ξ — *метрическое пространство и оператор* $U: \Xi \times E \to E$ *удовлетворяет следующим требованиям:*

(U^I): *при любом фиксированном* x *оператор* $U(\cdot, x)$ *непрерывен;*

(U^{II}): *при любом фиксированном* ξ *оператор* $U(\xi, \cdot)$ — *линейный ограниченный оператор;*

(U^{III}): *существует мера некомпактности* ψ, *удовлетворяющая условиям, наложенным на* ψ *в теореме* 1, *и такая, что для любого ограниченного множества* $\Omega \subset E$ *множество* $U(\Xi \times \Omega)$ *ограничено и выполнено неравенство*

$$\psi(U(\Xi \times \Omega) \leqslant q\psi(\Omega).$$

Тогда для любой точки $\xi_\infty \in \Xi$ *и последовательности* $\{\xi_n\}$, $\xi_n \to \xi_\infty$, *последовательность операторов* $\{A_n\}$, *задаваемых формулами*

$$A_n x = U(\xi_n, x),$$

удовлетворяет требованиям (A^{I}) *и* (A^{II}) *и достаточному условию теоремы* 3.

Доказательство. Выполнение требования (A^{I}) вытекает из требования (U^{I}). В силу теоремы 1 мера некомпактности ψ порождает в E нормальную меру некомпактности Φ, задаваемую формулой $\Phi(\{x_n\}) = \psi(\{x_n\})$. Но тогда любой оператор A_n является (q, Φ)-ограниченным, так как, если $X = \{x_k\}$ и $\|x_k\|$ ограничены в совокупности, то

$$\Phi(A_n X) = \psi(\{U(\xi_n, x_k): k=1, 2, \ldots\}) \leqslant q\psi(\{x_k\}) = q\Phi(X).$$

Поэтому в силу теоремы 2 выполнено требование (A^{II}).

Покажем теперь, что любая подпоследовательность $\{A_{n(k)}\}$ уплотняет по совокупности переменных с константой q относительно меры некомпактности Φ. Действительно, если $X = \{x_k\}$ — ограниченная последовательность, то

$$\Phi(\{A_{n(k)}x_k\}) = \psi[\{U(\xi_{n(k)}, x_k): k=1, 2, \ldots\}] \leqslant$$
$$\leqslant \psi[\{U(\xi, x): \xi \in \Xi, x \in \Omega = \{x_k\}\}] \leqslant$$
$$\leqslant q\psi[\{x_k\}] = q\Phi(X).$$

Перейдем теперь к изучению оператора сдвига по траекториям уравнений с малым отклонением аргумента.

Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = f(t, V(t, \omega(\xi), x), V(t, \omega(\xi), x'), \xi), \qquad (1)$$

где оператор f действует из $\mathbf{R}^1 \times C([-h, 0], \mathbf{R}^m) \times C([-h, 0], \mathbf{R}^m) \times [0, \xi_0]$ в $\mathbf{R}^m$, функция ω, характеризующая величину отклонения аргумента, непрерывна на отрезке $[[0, \xi_0]$ и неотрицательна, а V задается формулой

$$V(t, \omega(\xi), y)(s) = y(t + \omega(\xi)s), \quad s \in [-h, 0].$$

Обозначим через l величину $h \max\{\omega(\xi) : \xi \in [0, \xi_0]\}$, а через C и C^1 пространства $C([-l, 0], \mathbf{R}^m)$ и $C^1([-l, 0], \mathbf{R}^m)$ соответственно. Как хорошо известно, для разрешимости уравнения (1) с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-l, 0], \qquad (2)$$

необходимо выполнение условия «склейки»

$$\varphi'_-(0) = f(0, V(0, \omega(\xi), \varphi), V(0, \omega(\xi), \varphi'), \xi).$$

Поэтому для того, чтобы в дальнейшем оператор сдвига мог быть определен на всем пространстве C^1, мы, следуя [8], будем вместо уравнения (1) рассматривать уравнение

$$x'(t) = f(t, V(t, \omega(\xi), x), V(t, \omega(\xi), x'), \xi) +$$
$$+ \nu_\eta(t)(x'_-(0) - f(0, V(0, \omega(\xi), x), V(0, \omega(\xi), x'), \xi)), \qquad (3)$$

для которого условие «склейки» выполнено для любых начальных функций из C^1. Функция $\nu_\eta(t)=0$ при $t\in[\eta,\infty)$, $\nu_\eta(0)=1$ и $\nu_\eta(t)$ линейна на отрезке $[0,\eta]$, где η — некоторое положительное число, меньшее l.

Зафиксируем $T>l$ и обозначим через $D(T)$ множество всех $\varphi\in C^1$, для которых уравнение (3) с начальным условием (2) при любом $\xi\in[0,\xi_0]$ имеет единственное решение, принадлежащее пространству $C^1([-l,T],\mathbf{R}^m)$.

Если $\varphi\in D(T)$, то через $u(\xi,\varphi)$ будем обозначать непрерывно дифференцируемое решение задачи (3), (2) на $[-l,T]$.

Оператор сдвига $U_T(\xi,\varphi)$, как и в [6], определим формулой

$$U_T(\xi,\varphi)(s)=[u(\xi,\varphi)](T+s),\qquad s\in[-l,0].$$

Введем в пространстве C^1 меру некомпактности ψ, задаваемую равенством

$$\psi(\Omega)=\chi(\Omega'),\tag{4}$$

где $\chi(\Omega')$ — мера некомпактности Хаусдорфа в C множества производных функций из Ω, обозначаемого Ω'.

Мы будем предполагать, что выполнено требование:

($\mathrm{f^I}$): *оператор f непрерывен по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица с константой $k<1$ по третьей переменной.*

Рассмотрим величину

$$q=k^p\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{1-k^i},\tag{5}$$

где p — некоторое число.

Теорема 5. *Пусть выполнено требование* ($\mathrm{f^I}$) *и целая часть T/l равна p.*

Тогда для любого ограниченного множества $\Omega\subseteq D(T)$ с

$$Q=\{u(\xi,\varphi):\xi\in[0,\xi_0],\ \varphi\in\Omega\},\tag{6}$$

ограниченным в $C^1([-l,T],\mathbf{R}^m)$, выполнено неравенство

$$\psi[U_T([0,\xi_0]\times\Omega]\leqslant q\psi(\Omega),$$

где ψ и q определяются равенствами (4) *и* (5), *соответственно.*

Пусть $a<b$. Для любых функций $x,y\in C([a-l,b],\mathbf{R}^m)$ и числа $\xi\in[0,\xi_0]$ определим оператор $H(x,y,\xi)$ следующей формулой $H(x,y,\xi)(t)=f(t,\ V(t,\omega(\xi),x),\ V(t,\omega(\xi),y),\ \xi)$. Для $z\in C^1([a-l,b],\mathbf{R}^m)$ и $\xi\in[0,\xi_0]$ положим

$$F(z,\xi)(t)=H(z,z',\xi)(t).\tag{7}$$

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть выполнено требование* ($\mathrm{f^I}$). *Тогда оператор H действует из $C([a-l,b],\mathbf{R}^m)\times C([a-l,b],\mathbf{R}^m)\times[0,\xi_0]$ в $C([a,b],\mathbf{R}^m)$ и непрерывен по совокупности переменных, а оператор F действует из $C^1([a-l,b],\mathbf{R}^m)\times[0,\xi_0]$ в $C([a,b],\mathbf{R}^m)$ и на каждом ограниченном множестве $\Delta\subset\subset C^1([a-l,b],\mathbf{R}^m)$ удовлетворяет неравенству*

$$\chi_{a,b}[F(\Delta\times[0,\xi_0])]\leqslant k\chi_{a-l,b}(\Delta').\tag{8}$$

Доказательство. Тот факт, что оператор H действует из $C([a-l,b],\mathbf{R}^m)\times C([a-l,b],\mathbf{R}^m)\times[0,\xi_0]$ в $C([a,b],\mathbf{R}^m)$, непосредственно вытекает из непрерывности оператора f. Докажем теперь, что оператор H непрерывен по совокупности переменных. Как нетрудно видеть, если $\xi_n\to\xi^0$, $t_n\to t_0$, $w_n\to w_0$,

$$V(t_n,\omega(\xi_n),w_n)\to V(t_0,\omega(\xi^0),w_0).$$

Пусть теперь $\xi_n\to\xi^0$, $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ и нет сходимости

$$H(x_n,y_n,\xi_n)\to H(x_0,y_0,\xi^0).$$

Тогда для некоторой последовательности $\{n(p)\}$ будет выполнено неравенство

$$\|H(x_{n(p)},y_{n(p)},\xi_{n(p)})-H(x_0,y_0,\xi^0)\|\geqslant\varepsilon_0>0. \tag{9}$$

Неравенство (9) означает, что

$$\|f(t_p,\ V(t_p,\omega(\xi_{n(p)}),x_{n(p)}),\ V(t_p,\omega(\xi_{n(p)}),y_{n(p)}),\ \xi_{n(p)})-$$
$$-f(t_p,\ V(t_p,\omega(\xi^0),x_0),\ V(t_p,\omega(\xi^0),\ y_0),\ \xi^0)\|\geqslant\varepsilon_0, \tag{10}$$

причем последовательность $\{t_p\}$ можно без ограничения общности считать сходящейся к некоторой точке $t_0\in[a,b]$. Переходя в (10) к пределу при $p\to\infty$, мы получаем противоречивое неравенство $0\geqslant\varepsilon_0>0$. Пусть теперь $\Delta\subset C^1([a-l,b],\mathbf{R}^m)$ — ограниченное множество, S — конечная ε-сеть множества Δ' в $C([a-l,b],\mathbf{R}^m)$. Рассмотрим множество

$$P=\{w\colon\ w\in C([a,b],\mathbf{R}^m),\ w=H(x,y,\xi),\ x\in\Delta,\ y\in S,$$
$$\xi\in[0,\xi_0]\}$$

и покажем, что P является $k\varepsilon$-сетью множества $F(\Delta\times[0,\xi_0])$, вполне ограниченной в $C([a,b],\mathbf{R}^m)$. Отсюда будет вытекать (8). Поскольку множество Δ ограничено в $C^1([a-l,b],\mathbf{R}^m)$, то это множество относительно компактно в $C([a-l,b],\mathbf{R}^m)$ и, следовательно, множество $\Delta\times[0,\xi_0]$ относительно компактно в $C([a-l,b],\mathbf{R}^m)$. Поэтому и его образ $H(\Delta,\ y,\ [0,\xi_0])$ при непрерывном отображении $H(\cdot,\ y,\ \cdot)$ относительно компактен.

Пусть $v\in F(\Delta\times[0,\xi_0])$, т. е. $v=F(z,\xi)$, $z\in\Delta$, $\xi\in[0,\xi_0]$. Найдем элемент $y\in S$ такой, что $\|z'-y\|\leqslant\varepsilon$ и построим $w=H(z,y,\xi)$, $w\in P$. Тогда

$$\|z-w\|=\|F(z,\xi)-H(z,y,\xi)\|=\|H(z,z',\xi)-H(z,y,\xi)\|=$$
$$=\max_{t\in[a,b]}|f(t,\ V(t,\omega(\xi),z),\ V(t,\omega(\xi),z'),\ \xi)-$$
$$-f(t,\ V(t,\omega(\xi),z),\ V(t,\omega(\xi),y),\ \xi|\leqslant$$
$$\leqslant k\max_{t\in[a,b]}\|V(t,\omega(\xi),z')-V(t,\omega(\xi),y)\|\leqslant k\|z'-y\|\leqslant k\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Отметим, что если $a=0$ и мы вместо оператора F рассмотрим оператор F_1, определяемый равенством

$$F_1(z,\xi)(t)=F(z,\xi)(t)+ \\ +\nu_\eta(t)(z'_-(0)-f(0,\ V(0,\omega(\xi),z),\ V(0,\omega(\xi),z'),\ \xi)),\qquad(11)$$

то, поскольку для любого ограниченного в $C^1([a-l,b],\ \mathbf{R}^m)$ множества Δ множество

$$K=\{\nu_\eta(\cdot)(z'_-(0)-f(0,\ V(0,\omega(\xi),z),\ V(0,\omega(\xi),z'),\xi)): \\ z\in\Delta,\ \xi\in[0,\xi_0]\}$$

вполне ограничено в $C([a,b],\ \mathbf{R}^m)$, то для оператора F_1 выполнено неравенство

$$\chi_{a,b}[F_1(\Delta\times[0,\xi_0])]\leqslant k\chi_{a-l,b}(\Delta').\qquad(12)$$

Доказательство теоремы 5. Положим

$$\Delta[a,b]=\{u(\xi,\varphi)\,|_{[a,b]}:\ \xi\in[0,\xi_0],\ \varphi\in\Omega\},$$

здесь $[a,b]\subseteq[-l,T]$. Тогда $U_T([0,\xi_0]\times\Omega)=\Delta[T-l,\ T]$ и

$$\psi(\Delta[T-l,\ T])\leqslant\psi(\Delta[(p-1)l,\ T]),\qquad(13)$$

(напомним, что p — целая часть T/l). Оценим величину $\psi(\Delta[p-1)l,T])$. Пусть $[jl,d]\subseteq[0,T]$, где $j=0,1,\ldots,p-1$. Тогда обозначим через $\mathfrak{F}[jl,d]$ множество, определяемое следующими равенствами:

$$\mathfrak{F}[jl,d]=\{z\colon\ z\in C([jl,d],\mathbf{R}^m),z= \\ =F(x,\xi),\ x\in\Delta[(j-1)l,d],\ \xi\in[0,\xi_0]\}, \\ \text{если } j\neq0,$$

$$\mathfrak{F}[jl,d]=\{z\colon\ z\in C([0,d],\mathbf{R}^m),z= \\ =F_1(x,\xi),\ x\in\Delta[-l,d],\ \xi\in[0,\xi_0]\}, \\ \text{если } j=0,$$

где F и F_1 определяются соответственно формулами (7) и (11).

Заметим, что так как $u(\xi,\varphi)$ — решения уравнений (3), $\xi\in[0,\xi_0]$, $\varphi\in\Omega$, то для любого $d\in(0,T)$ выполнено включение

$$(\Delta[jl,d])'\subseteq\mathfrak{F}[jl,d],\qquad jl\leqslant d.\qquad(14)$$

Из леммы 1 вытекает следующее неравенство

$$\chi(\mathfrak{F}[jl,d])\leqslant k\chi\{(\Delta[(j-1)l,d])'\}.\qquad(15)$$

Соединяя (14) и (15), получим

$$\chi\{(\Delta[jl,d])'\}\leqslant k\chi\{(\Delta[(j-1)l,d])'\}.\qquad(16)$$

Продолжая аналогично j раз, получим

$$\chi\{(\Delta[jl,d])'\}\leqslant k^{j+1}\chi\{(\Delta[-l,d])'\}.\qquad(17)$$

Возьмем $j=p-1$, а $d=T$. Тогда в силу неравенства (17) имеем

$$\psi(\Delta[(p-1)l,T])=\chi\{(\Delta[(p-1)l,T])'\}\leqslant k^p\chi\{(\Delta[-l,T])'\}.\qquad(18)$$

Заметим, что из неравенств (17) вытекает, что если $j \geqslant 1$, то

$$\chi\{(\Delta[(j-1)l, jl])'\} \leqslant k^j \chi\{(\Delta[-l, jl])'\}. \qquad (19)$$

Оценим величину $\chi\{(\Delta[-l, T])'\}$. Для этого заметим, что

$$\chi\{(\Delta[-l, T])'\} \leqslant \chi\{(\Delta[-l, (p-1)l])'\} + \chi\{(\Delta[(p-1)l, T])'\},$$

и воспользовавшись (18), получим

$$\chi\{(\Delta[-l, T])\} \leqslant (1-k^p)^{-1}\chi\{(\Delta[-l, (p-1)l])'\}. \qquad (20)$$

Заметим также, что если $j \geqslant 1$, то

$$\chi\{(\Delta[-l, jl])'\} \leqslant \chi\{(\Delta[(j-1)l, jl])'\} + \chi\{(\Delta[-l, (j-1)l])'\},$$

воспользовавшись теперь неравенством (19), получим

$$\chi\{(\Delta[-l, jl])'\} \leqslant (1-k^j)^{-1}\chi\{(\Delta[-l, (j-1)l])'\}.$$

Продолжая аналогично, получим

$$\chi\{(\Delta[-l, jl])'\} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{j} (1-k^i)^{-1}\right)\chi\{(\Delta[-l, 0])'\}. \qquad (21)$$

Положив в (21) $j = p-1$ и соединив получившееся с (20), (18) и (13), получим

$$\psi(U_T([0, \xi_0] \times \Omega)) \leqslant \left(k^p \prod_{j=1}^{p} (1-k^j)^{-1}\right)\chi\{(\Delta[-l, 0])'\} = q\psi(\Omega).$$

Теорема 5 полностью доказана.

Если теперь оператор f линеен по пространственным переменным, т. е.

$$f(t, \alpha u_1 + \beta u_2, \alpha v_1 + \beta v_2, \xi) = \alpha f(t, u_1, v_1, \xi) + \beta f(t, u_2, v_2, \xi),$$

и удовлетворяет требованию ($\mathrm{f^I}$), то из результатов [6, 7] вытекает: для любого $T > l$ и $\varphi \in C^1$ определено решение $u(\xi, \varphi)$ на отрезке $[-l, T]$, причем если множество Ω ограничено, то и множество Q, определяемое равенством (6), ограничено. Поэтому выполнены условия теоремы 5. Очевидно, что в этом случае оператор $U_T(\xi, \varphi)$ линеен и непрерывен.

Итак, для оператора $U = U_T$ выполнены все условия теоремы 5 с константой q, определяемой равенством (5).

Перейдем теперь к изучению семейства операторов, возникающих при изучении устойчивости периодических решений в принципе усреднения для уравнений нейтрального типа.

Рассмотрим уравнение нейтрального типа следующего вида

$$\begin{aligned} x'(t) = \xi f(t, x_t, x'_t) + \\ + \nu_\eta(t)\,(x'_-(0) - \xi f(0, x_0, x'_0)), \end{aligned} \qquad (22)$$

где оператор f действует из $\mathbf{R}^1 \times C([-h, 0], \mathbf{R}^m) \times C([-h, 0], \mathbf{R}^m)$ в $\mathbf{R}^m$, здесь, как обычно, $x_t(s) = x(t+s)$, $x'_t(s) = x'(t+s)$, $s \in [-h, 0]$.

Пусть f удовлетворяет следующему требованию: (f^{II}) *оператор f непрерывен по совокупности переменных, линеен по пространственным переменным и T периодичен по первой переменной.*

Наряду с уравнением (22) рассмотрим усредненное уравнение

$$x'(t) = \xi Bx(t), \tag{23}$$

где оператор $B: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ определяется формулой

$$Bx = T^{-1} \int_0^T f(s, u, \theta)\, ds,$$

здесь $x \in \mathbf{R}^m$, $u \in C([-h, 0], \mathbf{R}^m)$, $u(s) \equiv x$, $s \in [-h, 0]$.

Отметим, что уравнение (23) будет обыкновенным дифференциальным уравнением (B, в силу требования (f^{II}), — линейный ограниченный оператор).

Рассмотрим для уравнения (22) начальную задачу

$$x_0 = \varphi, \tag{24}$$

а для уравнения (23)

$$x(0) = \varphi(0) + \frac{\eta}{2}\varphi'(0). \tag{25}$$

Из результатов Ахмерова [1] вытекает следующая теорема, на доказательстве которой мы не останавливаемся.

Теорема 6. *Пусть выполнено требование* (f^{II}). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех ξ, удовлетворяющих оценке $0 < \xi < \delta$, выполнено неравенство*

$$\| u(\xi, \varphi) - y(\xi) \|_{C^1([\eta, T/\xi], \mathbf{R}^m)} \leqslant \varepsilon,$$

где $u(\xi, \varphi)$ — решение задачи (22), (24), *а $y(\xi)$ — решение задачи* (23), (25).

Обозначим через $U_\tau(\xi)$ оператор сдвига за время τ по траекториям уравнения (23). Рассмотрим оператор $U: [0, 1] \times C^1([-h, 0], \mathbf{R}^m) \to C^1([-h, 0], \mathbf{R}^m)$, определяемый следующей формулой

$$(U(\xi, \varphi)(s) = \begin{cases} (U_{T[\xi^{-1}]}(\xi)\varphi)(s), & \text{если} \quad \xi \neq 0, \\ (\exp B)\left[\varphi(0) + \frac{\eta}{2}\varphi'(0)\right], & \text{если} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

здесь $[\xi^{-1}]$ — целая часть ξ^{-1}.

Теорема 7. *Пусть выполнены требования* (f^{II}). *Тогда для любого $q > 0$ существует $\xi_0 > 0$ такое, что оператор $U(\xi, \varphi)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, где в качестве Ξ берется $[0, \xi_0]$, а в качестве меры некомпактности ψ в $E = C^1([-h, 0], \mathbf{R}^m)$ взята мера некомпактности, задаваемая формулой*

$$\psi(\Omega) = \chi(\Omega').$$

Доказательство. Выполнение требования (U^{I}) вытекает из теоремы 6. Действительно, пусть $\xi_n \to 0$. Тогда

$$\left\| U(\xi_n, \varphi) - \exp B \left[\varphi(0) + \frac{\eta}{2} \varphi'(0) \right] \right\|_{C^1([-h, 0], R^m)} \leqslant$$

$$\leqslant \| u(\xi_n, \varphi) - y(\xi_n) \|_{C^1([2\eta, T/\xi_n], R^m)} +$$

$$+ \left\| y(\xi_n) - (\exp B) \left[\varphi(0) + \frac{\eta}{2} \varphi'(0) \right] \right\|_{C^1([T[\xi^{-1}] - h, T[\xi^{-1}]], R^m)} \to 0.$$

Линейность и непрерывность оператора $U(\xi, \cdot)$ вытекает из требования (f^{II}) и результатов работы [6]. Из теоремы 6 и принципа равномерной ограниченности следует, что величины

$$\| u(\xi, \varphi) |_{[T[\xi^{-1}] - 2h, T[\xi^{-1}]]} \|_{C^1}$$

ограничены некоторой константой M, когда φ принадлежит единичному шару S пространства $C^1([-h, 0], R^m)$. Так как оператор f в силу требования (f^{II}) удовлетворяет оценке

$$| f(t, u, v) | \leqslant N(\|u\| + \|v\|),$$

то при достаточно малом ξ мы имеем

$$| u'(\xi, \varphi)(t) | \leqslant \xi NM, t \in [T[\xi^{-1}] - h, T[\xi^{-1}]].$$

Отсюда

$$\psi(U([0, \xi_0] \times S)) \leqslant \xi_0 NM.$$

Выбрав ξ_0 так, чтобы $\xi_0 NM$ было меньше q, мы получим, что для $\Omega = S$ выполнено неравенство

$$\psi(U(\Xi \times \Omega)) \leqslant q \psi(\Omega),$$

но в силу линейности оператора $U(\xi, \cdot)$ это неравенство выполнено для любого ограниченного Ω.

Теоремы 5 и 7 дают возможность с единой точки зрения посмотреть на вопросы сохранения устойчивости или неустойчивости при малом изменении параметра для уравнений с малым отклонением аргумента и в принципе усреднения. А именно, если известно, что оператор $U(0, \cdot)$ устойчив (неустойчив), то спектр этого оператора лежит в $K(0, \mu)$, $\mu < 1$ (есть собственное значение вне $K(0, 1)$), а тогда в силу теорем 5, 7 и 3 при малых ξ спектр оператора $U(\xi, \cdot)$ устроен так же. Поэтому свойство устойчивости (неустойчивости) сохраняется. На этом пути получаются теоремы, близкие к теоремам из [2, 3].

Автор благодарен своему руководителю Б. Н. Садовскому за постоянное внимание к работе и Г. М. Вайникко за полезные обсуждения работы.

Литература

1. Ахмеров Р. Р., К принципу усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Укр. матем. ж., 1973, **25**, № 5, 575—584.
2. Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., К вопросу об устойчивости состояния равновесия систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с малым отклонением аргумента. Успехи матем. наук, 1975, **30**, № 2, 205—206.
3. Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Об одном подходе к исследованию устойчивости периодических решений в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Comment. math. Univ. carol., 1975, **16**, № 2, 293—313.
4. Гольденштейн Л. С., Маркус А. С., О мере некомпактности ограниченных множеств и линейных операторов. В сб. «Исслед. по алгебре и матем. анализу», Кишинев, 1965, 45—54.
5. Каменский М. И., Меры некомпактности и теория возмущений линейных операторов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, **430**, 112—122.
6. Родкина А. Е., О продолжимости, единственности и непрерывной зависимости от параметра решений уравнений нейтрального типа. Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 2, 268—279.
7. Родкина А. Е., Садовский Б. Н., О дифференцируемости оператора сдвига по траекториям уравнений нейтрального типа. Тр. Мат. фак. Воронеж. ун-т, 1974, **12**, 31—37.
8. Садовский Б. Н., Применение топологических методов в теории периодических решений дифференциально-операторных уравнений нейтрального типа. Докл. АН СССР, 1971, **200**, № 5, 1037—1041.
9. Садовский Б. Н., Предельно компактные и уплотняющие операторы. Успехи матем. наук, 1972, **21**, № 1, 81—146.

Поступило
21 XII 1976

NIHKEOPERAATOR MÖÖDA PARAMEETRIST SÕLTUVA NEUTRAALSET TÜÜPI VÕRRANDI TRAJEKTOORE

M. Kamenski

Resümee

Vaadeldakse nihkeoperaatoreid mööda neutraalset tüüpi mittelineaarse võrrandi trajektoore argumendi väikese hälbe korra ja mööda neutraalset tüüpi lineaarse diferentsiaalvõrrandi trajektoore keskendusprintsiibis. On saadud tingimused, mille korral need operaatorid tihendavad kõigi muutujate järgi. On antud metoodika perioodiliste lahendite stabiilsuse uurimiseks.

THE TRANSLATION OPERATOR ALONG THE TRAJECTORIES OF THE NEUTRAL EQUATIONS DEPENDING ON PARAMETER

M. Kamenski

Summary

The translation operators along the trajetories of nonlinear neutral differential equations with small delay and along the trajectories of linear neutral differential equations in averaging principle are considered. The conditions in which these operators are K-set contractions are obtained. The scheme of stability investigation of periodic solutions is proposed.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 118—126.

ÜBER DIE APPROXIMATION VERALLGEMEINERTER LÖSUNGEN MIT DEM GALERKINVERFAHREN

S. Ludwig
Technishe Hochschule Karl-Marx-Stadt

§ 1. Problemstellung

Die Erweiterung linearer Operatoren ist ein zentraler Untersuchungsgegenstand der Mathematischen Physik. Ein wichtiges Problem ist die Frage nach Existenz und Eigenschaften von Lösungen der Gleichung

$$Au=f, \quad u\in H_1, \quad f\in H_2. \tag{1}$$

Dabei ist oftmals die Beschreibung der Menge aller Lösungen nur möglich, wenn man den natürlichen Definitionsbereich des Operators A durch Hinzunahme sogenannter idealer Elemente erweitert. Allgemein bekannt ist die „Friedrichs-Erweiterung" positiv-definiter Operatoren. Die Methode des energetischen Funktsionals bedient sich eines Zusammenhanges zwischen (1) und einer Minimumaufgabe eines quadratischen Funktionals. Durch Anwendung dieser Methode gelingt die Konstruktion der Friedrichs-Erweiterung. Darüber hinaus steht mit dem Verfahren von Ritz ein Algorithmus zur Approximation für jede beliebige Funktion aus dem Definitionsbereich der Friedrichs-Erweiterung zur Verfügung. Diese Tatsache ist von entscheidender praktischer Bedeutung. Man kann sie wie folgt formulieren:

Sei H ein separabler Hilbertraum und A ein linearer, symmetrischer und positiv-definiter Operator mit dichtem Definitionsbereich $D(A)$ in H, so konvergiert die Ritz'sche Folge $\{u_n\}$,

$$u_n=\sum_{j=1}^{n} a_{j,n}\varphi_j, \quad (Au_n-f, \varphi_k)=0, \qquad k=1, \ldots, n$$

für jedes $f\in H$ und es ist $u^*=\lim u_n\in D(A_F)$. Die Menge aller möglichen Grenzelemente ist mit dem Definitionsbereich $D(A_F)$ der Friedrichs-Erweiterung A_F identisch. Das Galerkinverfahren zur Lösung von Gleichungen (1) ist neben dem Verfahren von Ritz für praktische Anwendungen bedeutsam. Der durch das Galerkinverfahren beschriebene Algorithmus gleicht dem des Ritz-Verfahrens weitestgehend. Es bestehen jedoch wesentliche Unterschiede bezüglich ihrer Anwendungsbreite. Diese resultieren daraus, daß das Galerkinverfahren kein Extremalproblem benötigt und somit nicht an Symmetrie und Positive-Definitheit des Operators A gebunden ist. Andererseits werden Aussagen über die Approximation verallegmeinerter Lösungen, wie sie für das Ritz-Verfahren mittels der Methode des energetischen Funktionals gewonnen werden, sehr erschwert. Dem Verfasser sind derartige Aussagen in der Literatur über das Galerkinverfahren unbekannt.

Die vorliegende Schrift soll zeigen, daß analog zum Ritz-Verfahren auch mit dem Galerkinverfahren verallgemeinerte Lösungen und folglich gewisse Erweiterungen des Operators A approximiert werden können. Es wird gezeigt, daß diese Erweiterung, d. h. wesentliche Eigenschaften der idealen Elemente, allein vom Projektionssystem abhängen.

Die vorgestellten Ergebnisse sind der Dissertation des Verfassers [5] entnommen. Die Veröffentlichung geschieht durch Anregung von Prof. G. Vainikko, dem ich zu herzlichem Dank verpflichtet bin.

§ 2. Konvergenzmannigfaltigkeit des Galerkinverfahrens und gewisse Erweiterungen linearer Operatoren in Hilberträumen

Gochberg und Levcenko [3] führten den Begriff der Konvergenzmannigfaltigkeit von Projektionsverfahren ein. In Analogie zu [3] definiere ich für das in [5] eingeführte Galerkinverfahren

$$(u_n, A^+\psi_k)_1 = (f, \psi_k)_2, \quad k=1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j, \quad \{\psi_j\} \subset D(A^+), \quad \{\varphi_j\} \subset H_1$$

zur Lösung der linearen Operatorgleichung

$$Au = f, \qquad u \in H_1, \qquad f \in H_2 \tag{3}$$

(H_1, H_2 separable Hilberträume, A^+ adjungiert bzgl. des Raumpaares zu A).

Definition: *Die Menge $F=\{f\} \subset H_2$ aller derjenigen Elemente $f \in H_2$, für die das Galerkinverfahren* (2) *mit den linear unabhängigen Systemen $\{\varphi_j\}$ und $\{\psi_j\}$ und dem Operator A konvergiert, d. h. für alle $n \leqslant n_0$ die Folge $\{u_n\}$ existiert und im Raume H_1 in sich konvergent ist, heißt Konvergenzmannigfaltigkeit des Galerkinverfahrens* (2).

In [3] wird gezeigt, daß bei Gültigkeit der Polski-Bedingungen

i) wenigstens eines der beiden Systeme $\{\varphi_j\}$ oder $\{A^+\psi_j\}$ ist in H_1 vollständig,

ii) für die Folge der Öffnungen Θ_n im Raume H_1 gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \Theta_n(L\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, L\{A^+\psi_1, \ldots, A^+\psi_n\}) < 1$$

und den Voraussetzungen bzgl.[1] A:

I) $D(A)^a = H_1$, II) $D(A^+)^a = H_2$, III) $R(A^+)^a = H_1$,

der Bildbereich $R(A)$ des Operators zur Konvergenzmannigfaltigkeit gehört.

Beispiele zeigen (siehe § 5), daß $R(A)$ i. allg. echt in F enthalten ist.

Das Ziel der weiteren Untersuchung besteht in einer Charakterisierung aller Elemente der Konvergenzmannigfaltigkeit und in der Enthüllung von Beziehungen zu gewissen Erweiterungen des Operators A. Die Polski-Bedingungen i) und ii) werden als erfüllt vorausgesetzt.

§ 3. Lösung des Problems für eine spezielle Variante des Galerkinverfahrens, dem Verfahren der besten Approximation

Vorgegeben sei ein linear unabhängiges und vollständiges System $\{\psi_j\} \subset D(A^+)$. Wir nennen es Projektionssystem. Wenn wir $\varphi_j = A^+\psi_j$ wählen, so ist ii) trivial erfüllt und u_n ist die beste Approximation der Lösung u^* (im Falle ihrer Existenz) durch den Teilraum $A^+D_n = L\{A^+\psi_1, \ldots, A^+\psi_n\}$. Diese spezielle Galerkinvariante wird im folgenden untersucht. Die in H_2 dichte Menge $D = L\{\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots\}$ wird mittels

$$[v_1, v_2] := (A^+v_1, A^+v_2)_1 \qquad |v_1| := \|A^+v\|_1, \qquad v_1, v_2 \in D$$

zu einem unitären Raum. Dies ist offensichtlich, weil das System $\{\varphi_j\}$ linear unabhängig vorausgesetzt wurde. Die D umfassende Menge $D(A^+)$ läßt i. allg. diese Normierung nicht zu, weil unter den Voraussetzungen I) bis III) $N(A^+) \neq \{0\}$ sein kann! Die Menge D kann auf übliche Weise durch Bildung von Klassen äquivalenter Fundamentalfolgen zu einem Hilbertraum D^a vervollständigt werden [4]. Sei $\xi \in D^a$ eine Klasse äquivalenter Fundamentalfolgen, so wird vermöge

$$u := T\xi := \lim A^+v_n, \quad \{v_n\} \in \xi, \quad \xi \in D^a$$

eine lineare Isometrie von D^a auf den Raum H^1 definiert. Sei $\Omega(D) \subset D^a$ die Menge aller Klassen $\xi \in D^a$, die stationäre Folgen $\{v, v, \ldots, v, \ldots\}$ als Repräsentanten haben: $\Omega(D) = \{\xi \in D^a : \exists v \in D$, so daß $\{v, v, \ldots, v, \ldots\} \in \xi$ ist$\}$. Offenbar ist

[1] Mit dem Symbol D^a ist die Abschließung von D bezeichnet.

$$T\xi = A^+v, \quad |\xi| = \|A^+v\|_1, \quad \forall \xi \in \Omega(D), \quad \{v, v, \ldots\} \in \xi \tag{4}$$

und mit dem linearen Funktional

$$l_f(\xi) := (f, v)_2, \quad \forall \xi \in \Omega(D), \quad \{v, v, \ldots\} \in \xi, \; f \in H_2 \tag{5}$$

gilt

$$\frac{l_f(\xi)}{|\xi|} = \frac{(f, v)_2}{\|A^+v\|_1}, \quad \forall \xi \in \Omega(D), \; \{v, v, \ldots\} \in \xi. \tag{6}$$

Die folgenden Untersuchungen werden mit der Variationsaufgabe

$$\inf_{\xi \in \Omega(D)} |\xi|^2 - 2\operatorname{Re} l_f(\xi) \tag{7}$$

durchgeführt. Mit $\eta_j = T^{-1}A^+\psi_j$ haben wir ein in D^a linear unabhängiges und vollständiges System $\{\eta_j\} \subset \Omega(D)$.

Wir stellen fest:

1° *Das Ritzverfahren zur Konstruktion einer Minimalfolge von (7) der Form $\xi_n = \Sigma a_j \eta_j$ ist bzgl. T isometrisches Bild des Verfahrens der besten Approximation, d. h. es gilt $\xi_n = Tu_n$ mit*

$$(u_n, A^+\psi_k)_1 = (f, \psi_k)_2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Beweis: Das Ritz'sche Gleichungssystem hat die Gestalt $[\xi_n, \eta_k] = l_f(\eta_k)$, woraus mit $[\xi_n, \eta_k] = (T\xi_n, T\eta_k)_1$ die Behauptung folgt. q.e.d.

2° *Die Konvergenzmannigfaltigkeit des Verfahrens der besten Approximation ist die Menge*

$$F = \left\{ f \in H_2 : \sup_{v \in D} \frac{|(f, v)_2|}{\|A^+v\|_1} < \infty \right\}.$$

Beweis: Wegen 1° können bekannte Aussagen über das Minimumproblem quadratischer Funktionale (7) hinzugezogen werden. Gemäß [1] konvergiert die Ritz'sche Folge genau dann, wenn $l_f(\xi)$ in D^a beschränkt ist, d.h.

$$\sup_{\xi \in \Omega(D)} \frac{|l_f(\xi)|}{|\xi|} < \infty$$

gilt. Mit (6) folgt die Behauptung. q.e.d.

Sei $f \in R(A)$ (Bildbereich von A), so existier ein Element $u^* \in D(A)$ mit $Au^* = f$, und wir können schreiben

$$(f, v)_2 = (Au, v)_2 = (u^*, A^+v)_1, \quad \forall v \in D(A^+).$$

Mithin ist

$$\frac{|(f, v)_2|}{\|A^+v\|_1} = \frac{|(u^*, A^+v)_1|}{\|A^+v\|_1} \leqslant \|u^*\|_1,$$

also $f \in F$. Wir haben eine wichtige Erkenntnis gewonnen.

3° *Der Bildbereich $R(A)$ des Operators A ist ein Bestandteil der Konvergenzmannigfaltigkeit.*

Da für jedes aus der Differenzmenge $F \cdot R(A)$ auch ein Grenzelement $u^* = \lim u_n$ existiert, soll nun die Frage beantwortet werden, in welchem Sinn u^* als verallgemeinerte Lösung von (3) aufgefaßt werden kann.

4° *Die Abbildung* $f \to u^* = \lim u_n$ *wird durch einen linearen Operator* TG *vermittelt mit* $D(TG) = F$. *Sie ist eineindeutig, wenn das System* $\{\psi_j\}$ *in* H_2 *vollständig ist.*

Beweis: Sei $f \in F$. Dann ist das Funktional $l_f(\xi)$ in D^a beschränkt. Der Darstellungssatz für solche Funktionale besagt die Existenz und Eindeutigkeit eines Elementes $\xi_0 := Gf \in D^a$, so daß

$$l_f(\xi) = [\xi_0, \xi], \qquad \forall \xi \in \Omega(D) \tag{8}$$

gilt. Die Abbildung $f := G\xi_0$ ist linear und auf F definiert.

Der zusammengesetzte Operator TG bildet F in H_1 ab. Sei $TGf = 0$, so ist $Gf = 0 \in D^\alpha$. Offenbar ist $f \in F$, so daß mit (8)

$$l_f(\xi) = [Gf, \xi] = (TGf, T\xi)_1 = 0, \quad \forall \xi \in \Omega\,(D)$$

ist. Benutzen wir die Definition (5) des Funktionals l_f, so folgt $(v, f)_2 = 0$, $\forall v \in D$. Da $\{\psi_j\}$ vollständig in H_2 ist, folgt $f = 0 \in H_2$. q.e.d.

5° *Es gilt, wenn* $\{\psi_j\}$ *in* H_2 *vollständig ist,*

$$(TG)^{-1} = (A^+/D)^+, \tag{9}$$

dabei ist $+$ *die Adjunktion im Raumpaar* $\{H_1, H_2\}$ *und* A^+/D *die Einschränkung von* A^+ *auf* $D = L\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \ldots\}$.

Beweis: Gemäß 4° existiert $(TG)^{-1}$. Sei $B = A^+/D$.

a) Sei $f \in F = D(TG) = R((TG)^{-1})$. Aus (8) folgt

$$(f, v)_2 = [Gf, \xi], \forall \xi \in \Omega(D), \ \{v, v, \ldots\} \in \xi.$$

Mit (4) gilt weiter $(f, v)_2 = (TGf, A^+v)_1$, $\forall v \in D$ und mit $A^+v = Bv$ ist demzufolge $(Bv, TGf)_1 = (v, f)_2$, $\forall v \in D$. Es ist $D(B) = D$ dicht in H_2, deshalb existiert B^+ und per def. ist $B^+TGf = f$. Setzen wir $u = TGf$, so ist $B^+u = f = (TG)^{-1}u$. Daraus folgt $(TG)^{-1} \subset B^+$.

b) Wir zeigen $B^+ \subset (TG)^{-1}$. Der Operator $B \subset A^+$ hat mit A^+ eine abgeschlossene Erweiterung. Folglich existiert die Abschließung $B^\alpha = B^{++}$. Sei $u \in D(B^+)$, $f = B^+u$. Dann ist $B^{++}v = Bv$ für $v \in D$ und

$$(f, v)_2 = (B^+u, v)_2 = (u, B^{++}v)_1 = (u, Bv)_1, \qquad v \in D.$$

Damit können wir abschätzen

$$\sup_{v \in D} \frac{|(f, v)_2|}{\|A^+v\|_1} = \sup_{v \in D} \frac{|(u, Bv)_1|}{\|Bv\|_1} \leqslant \|u\|_1.$$

Die Bedingung 2° bezeugt, daß $f \in F$ ist. Damit ist $R(B^+) \subset F$ gezeigt und zusammen mit a) folgt $R(B) = F$. Wäre $u \in D(B^+)$ nicht aus $D((TG)^{-1})$, so gäbe es wegen

$$R(B^+) = F \text{ ein } u_1 \in D((TG)^{-1}) \text{ mit } B^+u_1 = (TG)^{-1}u_1.$$

Dann ist aber nach a) $B^+u = B^+u_1$, d. h.

$$0 = (B^+(u - u_1), v)_2 = ((u - u_1), Bv), \ \forall v \in D$$

woraus $u - u_1 = 0$ oder $u = u_1$ wegen der Dichtheiz der Menge BD (Vollständigkeit des Systems $\{A^+\psi_j\}$) folgt. q. e. d.

6° *Wenn $R(A) = H_2$ ist, so ist die Erweiterung* (9) *die Abschließung von A.*

Beweis: Im Falle $R(A) = H_2$ ist $N(A^+) = \{0\}$, so daß $D(A^+)$ auf entsprechende Weise zum unitären Raume wird. Wegen der Vollständigkeit von $\{A^+\psi_j\}$ ist D in $D(A^+)$ dicht, so daß alle Aussagen, die bislang i. allg. nur für $D \subset D(A^+)$ möglich waren, für $D(A^+)$ gelten. Insbesondere ist $(TG)^{-1} = B^+ = (A^+/D(A^+))^+ = A^{++} = A^a$. q. e. d.

§ 4. Übertragung auf das allgemeine Galerkinverfahren

Die Übertragung der in § 3 für das Verfahren der besten Approximation erhaltenen Resultate auf die allgemeine Klasse der Galerkinverfahren (2) gelingt, wenn man die Polski-Bedingungen i) und ii) von § 2 voraussetzt.

7° *Verwendet man beim allg. Galerkinverfahren* (2) *und dem Verfahren der besten Approximation das gleiche Projektsionssystem $\{\psi_j\}$, so haben unter den Voraussetzungen von § 2 beide Verfahren die gleiche Konvergenzmannigfaltigkeit.*

a) Sei f in der Konvergenzmannigfaltigkeit des allgemeinen Galerkinverfahrens. Die Folge $\{u_n\}$ ist folglich auch in H_1 beschränkt. Sei $\{v_n\}$ die Folge des Verfahrens der besten Approximation. Es gilt

$$(u_n, v_n)_1 = (v_n, v_n)_1,$$

wie man leicht durch Summation aus (2) über

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} b_j A^+\psi_j$$

erhält, woraus $\|u_n\|_1 \geqslant \|v_n\|_1$ folgt. Ist die Folge des Verfahrens der besten Approximation beschränkt, so konvergiert sie, wie man der Formel

$$|\, \|v_n\|_1^2 - \|v_m\|_1^2 \,| = \|u_n - u_m\|^2$$

entnimmt (siehe auch Petryshyn [2]).

b) Sei f in Konvergenzmannigfaltigkeit des Verfahrens der besten Approximation. Die Folge $\{v_n\}$ konvergiert nach 4° zu dem Element $u^* = \lim u_n$ mit $u^* = (A^+/D)^{+-1}f$. Also ist u^* Lösung von

$(A^+/D)^+u=f$. Der Operator $A^G=(A^+/D)^+$ ist abgeschlossen und invertierbar, genügt also den Voraussetzungen des Abschnittes 2. Die Polski-Bedingungen i) und ii) sind ebenfals für A^G erfüllt, weil

$$A^{G+}=B^{++}=\bar{B}\supset B=A^+/D, \text{ also } A^{G+}\supset A^+/D$$

gilt, woraus $A^{G+}\psi_j=A^+\psi_j$ folgt. Die Anwendung des Konvergenzsatzes (3.1) aus [5] auf den Operator A^G ist möglich und zeigt die Konvergenz der Folge $\{u_n\}$ des allgemeinen Galerkinverfahrens. q. e. d.

8° *Unter den Voraussetzungen von 7° haben die Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ denselben Grenzwert, wenn $f\in F$ ist. Fur $f\notin F$ gilt $\|v_n\|_1\to\infty$ und $\|u_n\|_1\to\infty$.*

Beweis: a) Sei $f\in F$, $z_n=u_n-v_n$. Aus (2) folgt

$$(z_n, A^+\psi_k)_1=0, \quad k=1, \ldots, n.$$

Da $\{z_n\}$ konvergiert, ist mit $z=\lim z_n$

$$(z, A^+\psi_k)=0, \quad k=1, 2, \ldots$$

Die Vollständigkeit von $\{A^+\psi_k\}$ ergibt $z=0$.

b) Sei $f\notin F$. Die monoton steigende Folge $\{\|v_n\|_1\}$ ist unbeschränkt, denn sonst wäre sie konvergent. Wegen $\|u_n\|_1\geqslant\geqslant\|v_n\|_1$ gilt dies auch für $\{\|u_n\|_1\}$. q. e. d.

Zusammenfassung:

Satz (Satz über die Konvergenzmannigfaltigkeit des Galerkinverfahrens). *Unter den Voraussetzungen von § 2 und der Dichtheit von D in H_2 wird behauptet:*

Die Konvergenzmannigfaltigkeit des Galerkinverfahrens (2) *wird durch das Projektionssystem $\{\psi_j\}$ bestimmt:*

$$F=\left\{f\in H_2\colon \sup_{v\in D}\frac{|f, v)_2|}{\|A^+v\|_1}<\infty\right\}, \quad D=L\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \ldots\}.$$

Das Grenzelement u^* einer jeden Folge $\{u_n\}$ des Verfahrens für $f\in F$ ist Lösung der Gleichung

$$A^Gu:=(A^+/D)^+u=f. \tag{10}$$

Für $f\in R(A)$ ist $u^*=A^{-1}f$ die Lösung von (3). *A_G ist* eine *abgeschlossene invertierbare Erweiterung von A. Gilt für den Operator A zusätzlich $R(A)^\alpha=H_2$, so ist die Erweiterung A^G mit der Abschließung identisch und nicht mehr von der Menge D abhängig. Der Bildbereich von A^G ist die Konvergenzmannigfaltigkeit F des Galerkinverfahrens.*

§ 5. Beispiel zur Abhängigkeit der Erweiterung A vom $\{\psi_j\}$

Es wird im Raume $H=H_1=H_2=L_2(0, 1)$ der symmetrische und positiv-definite Operator A betrachtet:

$$Au\equiv-u''(x), \quad u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0.$$

Es ist $R(A)=L_2(0,1)\ominus L\{1,x\}\subset L_2(0,1)$. Die Friedrichs-Erweiterung ist (siehe Michlin [5], S. 95)

$$A_F u \equiv -u''(x), \qquad u(0)=u(1)=0.$$

Nun wird die Galerkinerweiterung $A^G{}_\varepsilon$ von A konstruiert. In [3] wird allgemein gezeigt, daß für $\psi_j \in H_A$, $j=1, \dots$ (energetischer Raum) $A^G=A_F$ ist. Wir wählen nun ψ_1 und $\psi_2 \notin H_A$. Sei $\varepsilon\neq 0$:

$$\psi_1(x)=x^2-2x+1-2/\varepsilon, \qquad \psi_2(x)=x^3-3x+2-3/\varepsilon,$$
$$\psi_k(x)=x^{k-1}(1-x)^2, \; k\geqslant 3.$$

Die gesuchte Erweiterung $A^G{}_\varepsilon$ kann mittels (10) aus der Relation $A^G{}_\varepsilon=(A^*/D)^*$ bestimmt werden. Es ist $A^*v=-v''$ ohne Randbedingungen. Folglich ist

$$A^*\psi_1=-2, \qquad A^*\psi_2=-6x,$$
$$A\psi_k=-x^{k-3}(k(k-1)x-2k(k+1)+(k+1)(k+2)x^2).$$

Beide Systeme $\{\psi_j\}$ und $\{A^*\psi_j\}$ sind vollständig in $L_2(0,1)$, Die Randbedingungen zu $A^G{}_\varepsilon$ sind die adjungierten Randbedingungen des Operators $A^*/D=-v''$, $v\in D$. Jedes $v\in D=L\{\psi_1,\dots\}$ genügt den Randbedingungen

$$v'(0)=\varepsilon\cdot v(1), \qquad v'(1)=0.$$

Mittels partieller Integration ergeben sich leicht die Adjungierten

$$u'(1)=\varepsilon\cdot u(0), \qquad u'(0)=0.$$

Somit ist $A^G{}_\varepsilon u\equiv -u''$ mit diesen Randbedingungen. Die Galerkinerweiterung $A^G{}_\varepsilon$ ist unsymmetrisch, und es gilt $R(A^G{}_\varepsilon)= =L_2(0,1)$. Sei weiterhin $f(x)\equiv 1$, dann ist $u^*(x)=0{,}5x^2+1/\varepsilon$ die Lösung der Gleichung $A^G{}_\varepsilon u=1$. Wegen $\|u^*\|=O(1/\varepsilon)$ und $\|Au^*\|=\|1\|=1$ gilt $\|A_\varepsilon{}^{-1}\|=O(1/\varepsilon)$, insbesondere kann $\|A_\varepsilon{}^{-1}\|$ beliebig groß werden für $\varepsilon\to 0$.

Dieses Beispiel wurde von Prof. Dr. Friedrich aufgestellt.

§ 6. Offene Probleme

Das betrachtete Beispiel lehrt uns, daß die Erweiterung A von der linearen Hülle des Projektionssystems abhängt. Dies geht aus der Beziehung

$$A^G=(A^+/D)^+$$

hervor. Die verallgemeinerten Lösungen genügen den adjungierten Randbedingungen zu D.

Die in der Relation

$$F=\left\{f\in H_2\colon \sup_{v\in D}\frac{|(f,v)_2|}{\|A^+v\|_1}<\infty\right\}$$

zum Ausdruck kommende Abhängigkeit der Konvergenzmannigfaltigkeit von D wurde nicht beobachtet. Es liegt die Vermutung nahe, daß F in praktisch wichtigen Fällen nicht von D abhängt. Diese Frage ist gegenwärtig unbeantwortet.

Des weiteren erscheinen handhabbare Kriterien an das System $\{\psi_j\}$ wünschenswert, bei deren Erfüllung die verallgemeinerten Lösungen bestimmte Eigenschaften haben. Ein Beispiel eines solchen Kriteriums für das Ritzverfahren ist die Forderung $\psi_j = \varphi_j \in H_A$, welche die Zugehörigkeit der idealen Elemente zum energetischen Raum und $\|(A^G)^{-1}\| = \|A^{-1}\|$ garantiert.

Literatur

1. Ludwig, S., Konvergenzuntersuchungen zum Galerkinverfahren in Hilberträumen. Dissertation, TH Karl-Marx-Stadt, 1975.
2. Petryshyn, W. V., Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert-space. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **105**, № 1, 136—175.
3. Гохберг И. Ц., Левченко В. И., О сходимости проекционного метода решения вырожденного дискретного уравнения Винера—Хопфа. Мат. исследования (Кишинев), 1971, **6**, № 4, 20—36.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
5. Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике. Москва, 1970.

Поступило
22 VIII 1976

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

С. Лудвиг

Резюме

Метод Галеркина для линейного операторного уравнения $Au = f$ определяет так называемое галеркинское расширение A^G оператора A, зависящее от координатных систем метода. Областью значений оператора A^G является линеал сходимости метода Галеркина.

ÜLDISTATUD LAHENDITE APROKSIMEERIMISEST GALJORKINI MEETODIL

S. Ludwig

Resümee

Galjorkini meetod lineaarse võrrandi $Au = f$ jaoks määrab operaatori A nn. Galjorkini laiendi A^G, mis sõltub kasutatava meetodi koordinaatsüsteemidest. Operaatori A^G väärtuste piirkonnaks on Galjorkini meetodi koonduvuslineaal.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 127—132.

О ПРАКТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

М. Левин и А. Йыги

Таллинский политехнический институт

Построение наилучших на множествах функций квадратурных формул, не использующих значений производных подынтегральной функции, наталкивается на серьезные трудности. В этом направлении имеется несколько общих результатов [1, 4—5], а также ряд частных, обзор которых можно найти в [6]. В то же время практически основной интерес как раз представляют формулы, не использующие значений производных интегрируемых функций. Один из способов получения таких наилучших формул — приближенный, основанный на использовании теоремы Карлина [7—8]. Этот способ и излагается в работе.

Пусть $W = W_{01}^{(2r)}L_2$ — множество всех функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[0, 1]$ абсолютно непрерывную производную порядка $2r-1$ и удовлетворяющих условиям

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

$$\left[\int_0^1 |f^{(2r)}(x)|^2\, dx\right]^{1/2} \leqslant M.$$

Для этого множества функций рассмотрим задачу построения наилучшей [6] квадратурной формулы [1]

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f). \tag{1}$$

Другими словами, нас будут интересовать значения весов $A_1, \ldots, A_n$ и узлов $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$, для которых величина

$$R_n = \sup_{f \in W} |R_n(f)| \tag{2}$$

принимает наименьшее значение. В случае $r = 1$ эта задача была решена в [2].

---

[1] Считаем $n \geqslant 2(2r-1)$.

Используя интегральное представление для функций рассматриваемого множества, мы легко получим [3, 6] значение величины (2) в виде

$$R_n = \frac{M}{(2r)!}\sqrt{U},$$

где

$$U = \int_0^1 |K(t)|^2\, dt, \tag{3}$$

$$K(t) = t^r(t-1)^r - (2r)!\sum_{k=1}^{n} A_k G(x_k, t), \tag{4}$$

а функция $G(x, t)$ есть функция Грина оператора

$$\begin{cases} y^{(2r)}, \\ y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1), \end{cases}$$

которая в явном виде выписана в [3].

Введем обозначения: A_k^*, x_k^* $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — веса и узлы наилучшей на множестве W формулы (1); $K^*(t)$ — функция (4), соответствующая этой наилучшей формуле, а

$$\varphi_K(x) = \int_0^1 K(t)\, G(x, t)\, dt.$$

На основании свойств функции Грина заключаем, что

$$\varphi_K^{(2r)}(t) = K(t), \tag{5}$$

$$A_j^* = \frac{1}{(2r)!}\left[\varphi_{K^*}^{(4r-1)}(x_j^*-0) - \varphi_{K^*}^{(4r-1)}(x_j^*+0)\right] \tag{6}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а также следующие свойства:

1) $\varphi_K^{(4r-2)}(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$;

2) на каждом из отрезков $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_n, 1]$ функция $\varphi_K(t)$ есть многочлен степени $4r$ со старшим коэффициентом, равным $(2r)!/(4r)!$;

3) $\varphi_K^{(i)}(0) = \varphi_K^{(2r+i)}(0) = \varphi_K^{(i)}(1) = \varphi_K^{(2r+i)}(1) = 0$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Условия $\partial U/\partial A_j = \partial U/\partial x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ минимума величины (3) можно записать в виде

4) $\varphi_K(x_j) = \varphi'_K(x_j) = 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Значит, наилучшая на множестве W формула (1) порождает функцию $\varphi_{K^*}(t)$, обладающую свойствами 1)—4).

С другой стороны, известно [7, 8], что существует единственная функция со свойствами 1)—4), для которой $0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n < 1$. Таким образом, задача построения наилучшей на рассматриваемом множестве формулы (1) сводится к следующему: выбрать значения узлов x_1, x_2, ..., x_n так, чтобы по ним построить функцию $\varphi_K(t)$ со свойствами 1)—4). Если это удастся сделать, то выбранные узлы совпадут с узлами x_k^* наилучщей формулы (1), построенная функция $\varphi_K(t)$ совпадет с функцией $\varphi_{K^*}(t)$ и поэтому веса наилучшей формулы (1) определятся по (5)—(6).

Рассмотрим один подход к решению этой задачи. Пусть $\beta_{4r}(x)$ — многочлен степени $4r$ со старшим коэффициентом, равным 1, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{gathered}\beta_{4r}(-1)=\beta_{4r}(1)=0,\\ \beta_{4r}^{(k)}(-1)=\beta_{4r}^{(k)}(1)\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 4r-2).\end{gathered}\tag{7}$$

Рассматривая (7) как уравнения для нахождения коэффициентов многочлена $\beta_{4r}(x)$, мы замечаем, что такой многочлен для любого целого r существует, единственен и четен. Из последнего свойства и (7) следует, что

$$\beta'_{4r}(-1)=\beta'_{4r}(1)=0. \tag{7a}$$

Обозначим

$$A_1(t)=t^{4r}+a_{4r-1}t^{4r-1}+\ldots+a_{3r}t^{3r}+a_{2r-1}t^{2r-1}+a_{2r-2}t^{2r-2}+\ldots+a_rt^r,$$

$$A_j(t)=A_1(t)+\sum_{k=1}^{j-1}\mu_k(t-x_k)^{4r-1}\qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ 2r-1)$$

и выпишем систему уравнений:

$$\left.\begin{gathered}A_i(x_i)=A_i'(x_i)=0\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r-2),\\ A_{2r-1}^{(k)}(x_{2r-1})-\left(\frac{1-2x_{2r-1}}{2n-8r+6}\right)^{4r-k}\beta_{4r}^{(k)}(1)=0\\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 4r-2)\end{gathered}\right\}\tag{8}$$

относительно неизвестных a_k $(k=r,\ r+1,\ \ldots,\ 2r-1,\ 3r,\ 3r+1,\ \ldots,\ 4r-1)$, μ_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r-2)$, x_k $(k=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ 2r-1)$.

Предположим, что система (8) имеет решение $a_k=a_k^*$ $(k=r,\ r+1,\ \ldots,\ 2r-1,\ 3r,\ 3r+1,\ \ldots,\ 4r-1)$, $\mu_k=\mu_k^*$ $(k=1,2,\ \ldots,\ 2r-2)$, $x_k=\xi_k$ $(k=1,2,\ \ldots,\ 2r-1)$ и $0<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{2r-1}<0{,}5$. Функции $A_j(x)$ $(j=1,2,\ \ldots$ $\ldots,\ 2r-1)$ со значениями a_k, μ_k, x_k, являющимися решением системы (8), обозначим через $A_j^*(x)$. Определим числа

$$\begin{gathered}\xi_{2r-1+l}=\xi_{2r-1}+2lh\qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ n+3-4r),\\ \xi_{n-2r+2+j}=1-\xi_{2r-1-j}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r-2),\\ \xi_0=0,\qquad \xi_{n+1}=1,\\ h=\frac{1-2\xi_{2r-1}}{2n-8r+6},\quad g_{2r-2+i}=\xi_{2r-1}+(2i-1)h\\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-4r+3)\end{gathered}\tag{9}$$

и на отрезке $[0,\ 1]$ построим функцию φ с $\varphi(x)$ равной

$$\begin{aligned}&A_{i+1}^*(x), && x\in[\xi_i,\ \xi_{i+1}] && (i=0,\ 1,\ \ldots,\ 2r-2),\\ &h^{4r}\beta_{4r}\left(\frac{x-g_j}{h}\right), && x\in[\xi_j,\ \xi_{j+1}] && (j=2r-1,\ 2r,\ \ldots,\ n-2r+1),\\ &A_{k+1}^*(1-x), && x\in[\xi_{n-k},\ \xi_{n-k+1}] && (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2r-2).\end{aligned}$$

По построению функция $\varphi(x)$ симметрична относительно прямой $x = 0{,}5$. Учитывая это, (7) и (7а), а также то, что функции $A_i^*(x)$ удовлетворяют системе (8), мы приходим к следующему факту: функция $\varphi(x)$, умноженная на $(2r)!/(4r)!$, удовлетворяет условиям 1)—4) при $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Значит,

$$\frac{(2r)!}{(4r)!}\varphi(x) = \varphi_{K^*}(x), \tag{10}$$

$$x_i^* = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как функция, удовлетворяющая условиям 1)—4) при $0 < x_i < 1$, единственна, а решение системы (8) приводит к конструкции такой функции, то система (8) не может иметь более одного решения.

Итак, мы пришли к следующему утверждению.

Теорема. *Если система* (8) *имеет решение и в этом решении узлы* $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2r-1)$ *такие, что* $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots \ldots < \xi_{2r-1} < 0{,}5$, *то определяемые этими значениями узлы* (9) *являются узлами единственной наилучшей на множестве* W *формулы* (1); *веса этой формулы могут быть определены по* (6) *с учетом* (10).

Замечание 1. Число уравнений и число неизвестных в системе (8) зависит от r (т. е. от рассматриваемого множества функций) и не зависит от n (числа узлов квадратурной формулы).

Замечание 2. Систему (8) можно решать приближенными методами.

В качестве примера рассмотрим вопрос построения наилучшей на множестве W формулы (1) при $n = 10$. В рассматриваемом случае $r = 2$, $3\beta_8(x) = (x^2 - 1)^2(3x^4 - 22x^2 + 51)$. Решая систему (8) приближенно, выберем за критерий точности максимальное значение модулей левых частей системы (8); это значение обозначим через Δ.

Преобразовав систему (8) в новую систему методом наименьших квадратов и решив эту новую систему градиентным методом, имеем при $\Delta = 2 \cdot 10^{-7}$ приближенные значения узлов и весов наилучшей на множестве W формулы (1) при $n = 10$:

k	x_k^*	A_k^*
1	0,15574	0,14685
2	0,26934	0,07353
3	0,30619	0.04594
4	0,38372	0,07752
5	0,46124	0,07752
6	0.53876	0,07752
7	0,61628	0,07752
8	0,69381	0,04594
9	0,73066	0,07353
10	0,84426	0,14685

Для этой формулы оценка имеет вид

$$|R_{10}(f)|\leqslant 0{,}84\cdot 10^{-5}M.$$

Например, для итеграла

$$\int_0^1 x^2(1-x)^2\ln\left(2+\left|x-\frac{1}{7}\right|\left(x-\frac{1}{7}\right)^3\right)dx=0{,}02385405\ldots$$

наша формула дает значение 0,023846 с относительной погрешностью 0,04%.

Замечание. Мы рассмотрели экстремальную задачу для множества W. Аналогично могут быть рассмотрены задачи и для других подобных множеств функций.

Литература

1. Женсыкбаев А. А., О наилучшей квадратурной формуле на классе W^rL_p. Докл. АН СССР, 1976, **227**, № 2, 227—279.
2. Левин М., Одна экстремальная задача для квадратурной формулы Маркова. Изв. АН ЭстССР. Физ.-Матем., 1969, **18**, № 2, 249—252.
3. Левин М., Экстремальные задачи для квадратурных формул на некоторых множествах функций. Изв. АН ЭстССР. Физ.-Матем., 1970, **19**, № 4, 407—414.
4. Левин М. И., Гиршович Ю. М., Арро В. К., О наилучших на множествах функций квадратурных формулах. Докл. АН СССР, 1976, **226**, № 1, 51—54.
5. Моторный В. П., О наилучшей квадратурной формуле вида $\Sigma p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. Докл. АН СССР, 1973, **211**, № 5, 1060—1062.
6. Никольский С. М., Квадратурные формулы. Москва, 1974.
7. Karlin, S., The Fundamental Theorem of Algebra for Monospline. Approximation with Special Emphasis on Spline Functions, New-York—London, 1969, 467—483.
8. Karlin, S., Micchelli, Sh., The fundamental theorem of alegbra for monosplines satisfying boundary conditions. Israel J. Math., 1972, **11**, 405—451.

Поступило
10 I 1977

PARIMATE KVADRATUURVALEMITE PRAKTILISEST KONSTRUEERIMISEST

M. Levin ja A. Jõgi

Resümee

Vaadeldakse parima valemi (1) (minimaalse suurusega (2)) konstrueerimist hulgal W, mis koosneb funktsioonidest $f(x)$, millede tuletised $f^{(2r-1)}(x)$ on absoluutselt pidevad lõigul [0, 1] ja rahuldavad tingimusi

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1), \qquad \|f^{(2r)}(\cdot)\|_{L_2}\leqslant M.$$

Karlini teoreemi [7] abil taandatakse ülesanne mittelineaarse süsteemi (8) lahendamisele, kus võrrandite ja tundmatute arv sõltuvad suurusest r, kuid ei sõltu sõlmede arvust n. Tuuakse näide, kus $r=2$ ja $n=10$ korral on leitud parima valemi (1) sõlmed ja kordajad.

EINE PRAKTISCHE KONSTRUKTION DER BESTEN QUADRATURFORMELN

M. Levin und A. Jõgi

Zusammenfassung

Es wird die beste Quadraturformel (1) (mit dem minimalen Wert der Größe (2)) aut der Menge W, die aus Funktionen $f(x)$ besteht, deren Ableitungen $f^{(2r-1)}(x)$ absolut stetig auf der Strecke $[0, 1]$ sind, und den Bedingungen

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, r-1), \quad \|f^{(2r)}(\cdot)\|_{L_2}\leqslant M.$$

genügt, erläutert.

Mittels des Lehrsatzes von Karlin [7] wird die Aufgabe zur Lösung eines nichtlinearen System reduziert, in dem die Anzahl der Gleichungen und der gesuchten Unbekannten allein von der Größe r, nicht aber von der Anzahl der Knotenpunkte n, abhängt. Im hinzugefügten Beispiel sind im Falle $r=2$, $n=10$ die Knotenpunkten und Koeffiziente für die Formel (1) gefunden.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 133—138.

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИТЕРАЦИОННЫХ ФОРМУЛ

Х. Коппель

Таллинский политехнический институт

В настоящей статье предлагается способ получения итерационных методов порядка выше первого, используя лишь значения оператора и его первой производной.

Для приближенного решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x)=0 \tag{1}$$

в банаховом пространстве рассматривается следующий класс итерационных формул:

$$x_{n+1}=x_n+\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k U_k(x_n), \tag{2}$$

где

$$U_k(x_n)=\Gamma(x_n+\sum_{i=1}^{k-1}\gamma_k{}^i U_i(x_n))\,P(x_n+\sum_{i=1}^{k-1}\beta_{ki}U_i(x_n)),$$

$\Gamma(x)=(P'(x))^{-1}$ и α_k, β_{ki}, γ_{ik} — вещественные параметры, $p=2,3,\ldots,n=0,1,\ldots$.

Придавая соответствующие значения параметрам α_k, β_{ki}, γ_{ki}, получается тот или другой метод типа Ньютона—Канторовича. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) При $\alpha_k=\gamma_{ki}=\beta_{ki}=-1$, $q=2^{p-1}$ $(p=2,3,\ldots)$ имеем итерационную формулу порядка q (здесь $p-1$ шагов метода Ньютона—Канторовича принят за один шаг).

2) При $\gamma_{ki}=0$ или $\beta_{ki}=0$ с $|\gamma_{ki}|+|\beta_{ki}|\neq 0$ получаем обобщение соответствующих формул Трауба [10], построенных для итерационных методов решения обычных алгебраических и трансцендентных уравнений, на случай операторных уравнений в банаховом пространстве.

3) При $\gamma_{ki}=0$ с $\alpha_k=\beta_{ki}=-1$ метод (2) — итерационная формула порядка p (модифицированный метод Ньютона—Канторовича, в котором в течение $p-1$ шагов используется одно и то же значение оператора $\Gamma(x_n)$). В силу обобщенной фор-

мулы Тейлора приходим в этом случае к формуле (ср. [1])

$$x_{n+1}=\omega_p(x_n), \tag{3}$$

где

$$\omega_2=x-\Gamma(x)P(x),$$

$$\omega_p=x-\Gamma(x)P(x)-\Gamma(x)\left(\sum_{k=2}^{p-1}(1/k!)P^{(k)}(x)(\omega_{p-1}-x)^k+R_p\right),$$

$$R_p=1/(p-1)!\int_0^1 P^{(p)}(x+t(\omega_{p-1}-x))(\omega_{p-1}-x)^p(1-t)^{p-1}dt. \tag{4}$$

Итак, вышеупомянутая модификация метода Ньютона—Канторовича «близка» методу (3) (без остаточного члена R_p), который при своей реализации требует вычисление значений производных высших порядков. В работе [1] показано, что порядком этого метода является также p.

Для получения из класса (2) других конкретных итерационных формул, используем следующую теорему.

Пусть имеется некоторая итерационная формула

$$x_{n+1}=\Phi(x_n) \quad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{5}$$

Для того, чтобы оператор $\Phi(x)=\omega(x,P(x),P'(x),\ldots)$ порождал итерационную формулу (5) *порядка p, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(x)$ представлялся в виде*

$$\Phi(x)=x+\sum_{k=1}^{p-1}\mu_k P^k(x)+\Psi(x)P^p(x),$$

где

$$\mu_1=-\Gamma(x), \qquad \mu_k P^k(x)=-(1/k)\mu'_{k-1}P^{k-1}(x)\Gamma(x)P(x)$$
$$(k=2,\ 3,\ \ldots,\ p-1)$$

— коэффициенты Чебышева—Шредера[1] *— симметричные k-линейные операторы, а $\Psi(x)$ — некоторый p-линейный оператор, не имеющий особенностей в корнях уравнения* (1).

Эта теорема приведена в книге Чернышенко ([7], стр. 29, см. также [8]).

Для нахождения коэффициентов μ_k используем обобщенную формулу Тейлора и представим оператор класса (2) в виде[2]

$$\omega_p(x)=x+\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k U_k(x), \tag{6}$$

где

$$U_k(x)=V_k(x)W_k(x),$$

$$V_k(x)=\left(\sum_{j=0}^{m-1}(1/j!)P^{(j+1)}(x)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\gamma_{ki}U_i(x)\right)^j+R'_m\right)^{-1},$$

$$W_k(x)=\sum_{j=0}^{m}(1/j!)P^{(j)}(x)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\beta_{ki}U_i(x)\right)^j+R_{m+1},$$

---

[1] См. [6], стр. 7.

[2] Трауб [10], в частности, для нахождения параметров итерационных формул третьего и четвертого порядков в формулах (6) полагает $m=p-1$.

$m = 2^k - 1$ при любых α_k, β_{ki}, γ_{ki}, а $m = k$ при $\beta_{ki} = 0$ или $\gamma_{ki} = 0$ с $\|\beta_{ki}\| + |\gamma_{ki}| \neq 0$, операторы R'_m, R_{m+1} — остаточные члены формулы Тейлора в форме (4).

Имея в виду практическую целесообразность, ниже рассматривается получение конкретных итерационных формул только для малых порядков ($p \leqslant 4$).

1) При $p = 4$ и $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 0$ получаются итерационные формулы

$$x_{n+1}=x_n+\alpha_1\Gamma(x_n)P(x_n)+\alpha_2\Gamma(x_n)P(x_n+\beta_{21}\Gamma(x_n)P(x_n))+$$
$$+\alpha_3\Gamma(x_n)P(x_n+\beta_{31}\Gamma(x_n)P(x_n)+\beta_{32}\Gamma(x_n)P(x_n+$$
$$+\beta_{21}\Gamma(x_n)P(x_n))). \tag{7}$$

Используя формулу (6), находим

$$\omega_4(x)=x+\alpha_1\Gamma(x)P(x)+$$
$$+\alpha_2\Gamma(x)\Big(\sum_{j=0}^{2}(1/j!)P^{(j)}(x)(\beta_{21}\Gamma(x)P(x))^j+R_3\Big)+$$
$$+\alpha_3\Gamma(x)\Big(\sum_{j=0}^{3}(1/j!)P^{(j)}(x)\Big(\beta_{31}\Gamma(x)P(x)+$$
$$+\beta_{32}\Gamma(x)\Big(\sum_{i=0}^{2}(1/i!)P^{(i)}(x)(\beta_{21}\Gamma(x)P(x))^i+R_3\Big)\Big)^j+\overline{R}_4\Big),$$

откуда следует

$$\omega_4(x)=x+(\alpha_1+\alpha_2(1+\beta_{21})+\alpha_3(1+\beta))\Gamma(x)P(x)+$$
$$+(1/2)(\alpha_2\beta_{21}^2+\alpha_3(\beta_{32}\beta_{21}^2+\beta^2))\Gamma(x)P''(x)(\Gamma(x)P(x))^2+$$
$$+(1/2)\alpha_3\beta_{32}\beta_{21}^2\beta\Gamma(x)P''(x)\Gamma(x)P''(x)(\Gamma(x)P(x))^3+$$
$$+(1/6)\alpha_3\beta^3\Gamma(x)P'''(x)(\Gamma(x)P(x))^3+\Psi(x)P^4(x), \tag{8}$$

где $\beta = \beta_{31} + \beta_{32}(1 + \beta_{21})$, а $\Psi(x)$ зависит от остаточных членов R_3 и $\overline{R}_4$. Для того, чтобы оператор (8) порождал итерационные формулы (7) четвертого порядка, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты оператора (8) были коэффициентами Чебышева—Шредера, т. е. вещественные параметры формулы (7) нужно найти из следующей нелинейной системы уравнений:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2(1+\beta_{21})+\alpha_3(1+\beta)&=-1,\\ \alpha_2\beta_{21}^2+\alpha_3(\beta_{32}\beta_{21}^2+\beta^2)&=-1,\\ \alpha_3\beta_{32}\beta_{21}^2\beta&=-1,\\ \alpha_3\beta^3&=1.\end{aligned} \tag{9}$$

Решение системы (9) зависит от двух параметров, например, от β_{21} и β_{32}, т. е.

$$\alpha_1=(1+\beta_{21})/\beta^2_{21}\pm(1\pm\beta_{21}(-\beta_{32})^{1/2})/(\beta_{32}\beta^3_{21}(-\beta_{32})^{1/2})^{-1}-1,$$
$$\alpha_2=-1/\beta^2_{21},\quad \alpha_3=\mp(\beta_{32}\beta^3_{21}(-\beta_{32})^{1/2})^{-1},$$
$$\beta_{31}=\pm\beta_{21}(-\beta_{32})^{1/2}-\beta_{32}(1+\beta_{21})\quad(\beta_{32}<0).$$

Выбирая $\beta_{21}=\beta_{32}=-1$, найдем $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=\beta_{31}=\mp1$, $\alpha_1=1;3$.

При $p=3$ из системы (9) получим

$$\alpha_1=(1-\beta_{21}-\beta^2_{21})/\beta^2_{21},\qquad \alpha_2=-1/\beta^2_{21}.$$

Соответствующие итерационные формулы третьего порядка рассмотрены в [5].

2) При $p=4$ и $\beta_{21}=\beta_{31}=\beta_{32}=0$ получаются итерационные формулы четвертого порядка

$$x_{n+1}=x_n+\alpha_1\Gamma(x_n)P(x_n)+\alpha_2\Gamma(x_n+\gamma_{21}\Gamma(x_n)P(x_n))P(x_n)+$$
$$+\alpha_3\Gamma(x_n+\gamma_{31}\Gamma(x_n)P(x_n)+\gamma_{32}\Gamma(x_n+\gamma_{21}\Gamma(x_n)P(x_n)))P(x_n),$$

вещественные параметры которых вычисляются из системы

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=-1,\\ \alpha_2\gamma_{21}+\alpha_3\gamma&=1/2,\\ \alpha_3\gamma_{21}\gamma_{32}&=-1/6,\\ \alpha_3\gamma&=-1/3,\\ \gamma&=\gamma_{31}+\gamma_{32}.\end{aligned}\tag{10}$$

Решая систему (10), например, относительно γ_{31} и γ_{32}, получим

$$\alpha_1=(1/(3\gamma^2))(1-3\gamma_{32}-2\gamma_{32}/\gamma)-1,$$
$$\alpha_2=(2\gamma_{32}/\gamma^2)(1/2+1/(3\gamma)),\quad \alpha_3=-1/(3\gamma^2),\quad \gamma_{21}=\gamma^2/(2\gamma_{32}).$$

Одним из решений системы (10) является

$$\alpha_2=\gamma_{31}=0,\quad \gamma_{32}=-2/3,\quad \alpha_1=-1/4,\quad \gamma_{21}=-1/3,\quad \alpha_3=-3/4.$$

При $p=3$ из системы (10) вытекают уравнения

$$\alpha_1=-(1+\alpha_2),\qquad \gamma_{21}=1/(2\alpha_2).$$

Такие формулы третьего порядка имеются в работе [4].

3) При $p=3$ получаются две итерационные формулы четвертого порядка [3]

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma(x_n)P(x_n)-\Gamma(x_n-\Gamma(x_n)P(x_n))P(x_n-\Gamma(x_n)P(x_n)),$$
$$x_{n+1}=x_n-3/5\Gamma(x_n)P(x_n)-1/5\Gamma(x_n-\Gamma(x_n)P(x_n))P(x_n+$$
$$+\Gamma(x_n)P(x_n)).$$

---

[3] Первый из них известный метод (два шага метода Ньютона—Канторовича приняты за один шаг).

Отметим, что многие известные итерационные формулы получаются из класса (2) как частные случаи. Например, итерационные методы четвертого порядка,

$$x_{n+1}=v_n+\delta(\Gamma(x_n)P'(v_n)-I)(\Gamma(x_n)P'(v_n)-I)\Gamma(x_n)P(x_n)+$$
$$+((2\delta+1)(\Gamma(x_n)P'(v_n)-I)-I)\Gamma(x_n)P(v_n),$$
$$v_n=x_n-\Gamma(x_n)P(x_n),$$

рассмотренные в статье [3], можно получить из класса (2) при $p=5$, положив

$$\gamma_{21}=\gamma_{31}=\gamma_{32}=\gamma_{41}=\gamma_{42}=\gamma_{43}=0, \qquad \beta_{21}=0, \qquad \beta_{31}=\beta_{41}=-1,$$

найдя остальные параметры из системы

$$\alpha_1+\alpha_2=\delta-1,$$
$$\alpha_3+\alpha_4=-2(\delta+1),$$
$$\alpha_3\beta_{32}+\alpha_4\beta_{42}=-2\delta,$$
$$\alpha_4\beta_{43}=2\delta+1,$$
$$\alpha_4\beta_{43}\beta_{32}=\delta.$$

При $\delta=0$ отсюда вытекает итерационный метод

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma(x_n)P(x_n)-2\Gamma(x_n)P(v_n)+\Gamma(x_n)P'(v_n)\Gamma(x_n)P(v_n),$$

рассмотренный в статье [2].

Получение итерационных формул порядка выше четвертого имеет смысл в случае, если их введение не вызывает существенного увеличения объема вычислений. Например, имеет смысл получить из класса (2) формулы пятого порядка при $p=4$ и $\gamma_{ki}=0$ или $\beta_{ki}=0$ с $|\gamma_{ki}|+|\beta_{ki}|\neq 0$, $k=1,2,3$, $i=1,2$. Но, в общем случае, ввиду некоммутативности произведения операторов здесь возникают некоторые трудности при определении параметров.

Отметим, что при помощи выработанной в статье методики можно получить и ряд других известных и новых итерационных формул. Рассмотрим, наконец, один интересный класс итерационных формул четвертого порядка, которые автору не удалось получить из класса (2):

$$x_{n+1}=x_n+a_1\Gamma(x_n)P(x_n)+$$
$$+(a_2P'^2(x_n)+a_3P'(x_n)P'(x_n-2/3\Gamma(x_n)P(x_n))+$$
$$+a_4P'^2(x_n-2/3\Gamma(x_n)P(x_n)))^{-1}P'(x_n)P(x_n),$$

параметры которых вычисляются по формулам

$$a_2=-a_4-a_3-(1+a_1)^{-1},$$
$$a_3=-2a_4-(3/4)(1+a_1)^{-2}, \quad a_4=(9/16)(1+2a_1)(1+a_1)^{-3}.$$

В частности, при $a_1=-1/2$, $a_4=0$, $a_2=1$, $a_3=-3$, получается метод из [9]. Интересен еще случай

$$a_1=-5/8, \qquad a_2=a_3=0, \qquad a_4=-8/3.$$

Литература

1. Каазик Ю. Я., О сходимости итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 80—98.
2. Коган Т. И., Об одной модификации метода Ньютона для функциональных уравнений. Научн. тр. Ташкентск. ун-та, 1968, **320**, 54—57.
3. Лисихина Н. П., О сходимости некоторых итерационных процессов. Иссл. по соврем. пробл. суммиров. и приближ. функц. и прилож., Днепропетровск, 1969, 42—48.
4. Роозе А., Об использовании методов Рунге—Кутта для решения нелинейных уравнений. Изв. АН ЭстССР. Физ., Матем., 1973, **22**, № 4, 431—434.
5. Фоканова А. А., Обобщение одного метода решения нелинейных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, **12**, № 1, 218—222.
6. Чебышев П. Л., Вычисление корней уравнений. Пол. собр. соч., т. 5, Москва—Ленинград, 1951.
7. Чернышенко В. М., Общая теория итерационных методов решения нелинейных функциональных уравнений. Днепропетровск, 1970.
8. Чернышенко В. М., Одноточечные итерационные формулы для решения функциональных уравнений. Материалы Межвузовск. конференции молодых ученых-матем., Харьков, 1966, 16—18.
9. Чернышенко В. М., Лисихина Н. П., Обобщение метода Джаратта на нелинейные функциональные уравнения. Вычисл. и прикл. матем., 1974, **23**, 13—19.
10. Traub, I. F., Iterative Methods for the Solution of Equations. New York, 1964.

Поступило
15 I 1977

ITERATSIOONIMEETODITE KLASSIDE MÕNED KONSTRUKTSIOONID

H. Koppel

Resümee

Artiklis esitatakse mittelineaarsete operaatorvõrrandite lahendamiseks Banachi ruumis mõned reaalseid parameetreid sisaldavaid iteratsioonimeetodite klassid. Nende klasside meetodid nõuavad ainult vastava operaatori ja selle esimese tuletise väärtuste arvutamist. Põhiliselt konsrueeriakse kolmandat ja neljandat järku koonduvuskiirusega meetodeid.

CONSTRUCTION OF SOME FAMILIES OF ITERATION FORMULAS

H. Koppel

Summary

In this paper some families of iteration formulas in Banach space are studied. These families depend on a number of parameters and require the calculating of the values of the operator and its first derivative. Some third and fourth order cases of the family of these iteration formulas are constructed.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 139—148.

НЕКОТОРЫЕ КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОТЫСКАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

П. Мийдла

Тартуский государственный университет

§ 1. Метод коллокации

Отыскание автоколебаний автономного дифференциального уравнения

$$z^{(m)}(\tau)-g(z(\tau),\ z'(\tau),\ \ldots,\ z^{(m-1)}(\tau))=0 \tag{1}$$

можно свести к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, например, следующим образом. Проделаем замену переменных $t=\lambda\tau$, где $\lambda=2\pi/\omega$ и ω — неизвестный период искомого решения $z^*(\tau)$ уравнения (1). Тогда приходим к нелинейной задаче собственных значений

$$f(x,\lambda):=\lambda^m x^{(m)}(t)-g(x(t),\ \lambda x'(t),\ \ldots,\ \lambda^{m-1}x^{(m-1)}(t))=0, \tag{2}$$

где искомыми являются 2π-периодическая функция x и значение параметра λ. Рассмотрим операторное уравнение

$$A\{(x,\lambda)\}=A\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}f(x,\lambda)\\ x(0)-\alpha\end{pmatrix}=0, \tag{3}$$

$A:U\times\mathbf{R}\to V\times\mathbf{R}$, где U и V — некоторые банаховы пространства, $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел. Норма в $U\times\mathbf{R}$ определена так: $\|(x,\lambda)\|_{U\times\mathbf{R}}=\|x\|_U+|\lambda|$. Приближенными решениями этого уравнения рассматриваем тригонометрические полиномы

$$x_n(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos kt+d_k\sin kt). \tag{4}$$

Для нахождения коэффициентов c_0, c_k, d_k и значений параметра λ используем метод коллокаций и построим приближенные уравнения к (3):

$$A_n\begin{pmatrix}x_n\\ \lambda\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\lambda^m x_n^{(m)}-P_n g(x_n,\ \ldots,\ \lambda^{m-1}x_n^{(m-1)})\\ x_n(0)-\alpha\end{pmatrix}=0, \tag{5}$$

где P_n — проекторы Лагранжа проектирования на пространство многочленов вида (4) с равноотстоящими узлами $t_i=ih$ $(i=0,\ldots 2n+1)$, $h=2\pi/(2n+1)$.

Примем следующие условия:

1° уравнение (2) имеет решение $\{x^*(t), \lambda^*\}$, $x^*(t) \neq \text{const}$;

2° функция $f(z_0, z_1, \ldots, z_m) = z_m - g(z_0, \ldots, z_{m-1})$ непрерывно дифференцируема по всем переменным $z_0, \ldots, z_m$ в $\mathbf{R}^{m+1}$;

3° число α принадлежит области значений $x^*(t)$;

4° линеаризированное уравнение

$$Bu := \sum_{k=0}^{m} b_k(t) u^{(k)}(t) = 0, \qquad b_k = \lambda^{*k} \frac{\partial f(x^*, \lambda^*)}{\partial z_k},$$

имеет в классе 2π-периодических функций лишь одно линейно независимое решение [1] $u^*(t) = x^{*\prime}(t)$;

5° $y \notin R(B)$, где $y = \dfrac{d}{d\lambda} f(x^*, \lambda^*)$.

В работе [1] показано, что при условиях 1°—5° уравнение (5) при почти всех n определяет изолированное приближенное решение $\{x_n{}^*, \lambda_n{}^*\}$ задачи (2), причем

$$|\lambda^* - \lambda^*_n| \leqslant c \cdot \varepsilon_n \to 0, \qquad \|x^* - x^*_n\|_{H^m} \leqslant c \cdot \varepsilon_n \to 0, \ n \to \infty, \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_n = \|x^{*(m)} - P_n x^{*(m)}\|_{L_2(0,2\pi)},$$

а H^m — пространство 2π-периодических $m-1$ раз абсолютно непрерывно дифференцируемых функций, таких, что $x^{(m)} \in H^0 = L_2(0, 2\pi)$;

$$\|x\|_{H^m} = \Big(\sum_{k=0}^{m} \|x^{(k)}\|^2_{L_2(0,2\pi)}\Big)^{1/2}.$$

Возникает вопрос о том, как решаются системы нелинейных алгебраических уравнений, задаваемые операторными уравнениями (5):

$$\begin{gathered} \lambda^m x_n{}^{(m)}(t_i) - g(x_n(t_i), \ldots, \lambda^{m-1} x_n{}^{(m-1)}(t_i)) = 0, \qquad i = 0, \ldots, 2n. \\ x_n(0) = \alpha. \end{gathered} \tag{7}$$

Из условия 2° вытекает непрерывная дифференцируемость оператора A в точке $\{x^*, \lambda^*\}$, а условия 4° и 5° равносильны непрерывной обратимости оператора

$$A'\{(x^*, \lambda^*)\} \in L(H^m \times \mathbf{R}, H^0 \times \mathbf{R})$$

(см. [1], § 3). Поэтому в условиях 1°—5° будут в случае достаточно хорошего начального приближения $\{x_0, \lambda_0\}$ сходиться метод Ньютона

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} - \left[A' \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} \right]^{-1} A \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а также модифицированный метод Ньютона

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} - \left[A' \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \right]^{-1} A \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}. \tag{9}$$

[1] Оно всегда является решением уравнения $Bu = 0$.

Поскольку (см. [1], § 3)

$$\left\| A'_n \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} - A' \begin{pmatrix} x^{*} \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right\| \to 0, \ n \to \infty, \tag{10}$$

то при достаточно хорошем начальном приближении $\{x_{n,0}, \lambda_{n,0}\}$ и при достаточно большом n будут сходиться указанные методы, примененные и к уравнению (5). Схемы итераций метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} x_{n,k+1} \\ \lambda_{n,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n,k} \\ \lambda_{n,k} \end{pmatrix} - \left[A'_n \begin{pmatrix} x_{n,k} \\ \lambda_{n,k} \end{pmatrix} \right]^{-1} A \begin{pmatrix} x_{n,k} \\ \lambda_{n,k} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,k+1} \\ \lambda_{n,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n,k} \\ \lambda_{n,k} \end{pmatrix} - \left[A'_n \begin{pmatrix} x_{n,0} \\ \lambda_{n,0} \end{pmatrix} \right]^{-1} A \begin{pmatrix} x_{n,k} \\ \lambda_{n,k} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Каждая итерация схемы (11) и (12) представляет собой линейную систему из $2n+2$ уравнений относительно $2n+2$ неизвестных $c_0, c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n, \lambda$.

Количественные условия сходимости метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона хорошо известны (см. [2]). Напомним их, например, для модифицированного метода Ньютона (формулировку приведем для рассматриваемой нами ситуации). Пусть в некотором шаре

$$S_r(x_{n,0}, \lambda_{n,0}) = \{(x_n, \lambda_n) \in U \times \mathbf{R} : \|x_{n,0} - x_n\| + |\lambda_{n,0} - \lambda_n| \leqslant r\} \tag{13}$$

производная оператора A_n удовлетворяет соотношениям

$$\left\| A'_n \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ \lambda_{n,1} \end{pmatrix} - A'_n \begin{pmatrix} x_{n,2} \\ \lambda_{n,2} \end{pmatrix} \right\| \leqslant L \cdot (\|x_{n,1} - x_{n,2}\| + |\lambda_{n,1} - \lambda_{n,2}|), \tag{14}$$

$$\left\| \left[A'_n \begin{pmatrix} x_{n,0} \\ \lambda_{n,0} \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\| \leqslant M, \tag{15}$$

$$\left\| \left[A'_n \begin{pmatrix} x_{n,0} \\ \lambda_{n,0} \end{pmatrix} \right]^{-1} A_n \begin{pmatrix} x_{n,0} \\ \lambda_{n,0} \end{pmatrix} \right\| \leqslant K. \tag{16}$$

Тогда, если $h = KLM < 1/4$, то в шаре $S_{K \cdot T_0}(x_{n,0}, \lambda_{n,0})$, где где T_0 — меньший корень уравнения $hT^2 - T + 1 = 0$, уравнение (5) имеет единственное решение $\{x_n^*, \lambda_n^*\}$ и последовательность $\{x_{n,k}, \lambda_{n,k}\}$, определяемая формулой (12), сходится к решению со скоростью

$$\|x_{n,k} - x_n^*\| + |\lambda_{n,k} - \lambda_n^*| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \cdot K,$$

где $q = (1 - (1-4h)^{1/2})/2$.

§ 2. Уравнения второго порядка

Рассмотрим случай $m = 2$, т. е. уравнение

$$\lambda^2 x'' = g(x, \lambda x'). \tag{17}$$

При выполнении условий 1° и 2° существует эффективный способ проверки выполнения условий 4° и 5°. Именно, покажем, что условия 4° и 5° выполнены, если

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})}{\partial z_1} dt \neq 0. \tag{18}$$

Допустим, что не выполнено требование 4°, т. е. существует 2π-периодическая функция $x_1 = x_1(t) \not\equiv 0$, не зависящая линейно от производной $x^{*\prime}(t)$, такая, что $Bx_1 = 0$.

Рассмотрим вронскиан

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x^{*\prime} & x_1 \\ x^{*\prime\prime} & x_1{}' \end{pmatrix}$$

линеаризированного уравнения

$$Bu := \lambda^{*2} u'' + p(t) u' + q(t) u = 0, \tag{19}$$

где $p(t) = -[\partial g(x^* \lambda^* x^{*\prime})/\partial z_1] \cdot \lambda^*$, $q(t) = -\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})/\partial z_0$. Как известно (см., например, [3]), $\Phi(t)$ можно выразить через коэффициент $p(t)$:

$$\Phi(t) = c \cdot \exp\left(-\int_0^t p(s)\, ds\right). \tag{20}$$

По предположению о периодичности x_1 имеем $\Phi(t) = \Phi(t + 2\pi)$, что ввиду 2π-периодичности x_1 равносильно условию

$$\int_0^{2\pi} p(s)\, ds = 0. \tag{21}$$

Но это противоречит предположению (18).

Допустим теперь, что не выполнено условие 5°, т. е. что уравнение $Bu = y$ имеет 2π-периодическое решение $u^* = u^*(t) = u^*(t + 2\pi)$. Рассмотрим общее решение $u(t) = u_1(t) + c_1 x^{*\prime} + c_2 x_1$ уравнения $Bu = y$, где c_1, c_2 — константы, x_1 — решение уравнения $Bx = 0$, линейно независимая от $x^{*\prime}$ и непериодичная по рассуждению, проведенному выше; u_1 — некоторое частное решение уравнения $Bu = y$. Покажем, что в качестве u_1 можно взять функцию $u_1 = tx^{*\prime}/\lambda^*$. Для этого выпишем Bu и y:

$$Bu = \lambda^{*2} u'' - \frac{\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})}{\partial z_1} \lambda^* u' - \frac{\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})}{\partial z_0} u,$$

$$y = 2\lambda^* x^{*\prime\prime} - \frac{\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})}{\partial z_1} x^{*\prime}.$$

Далее,

$$Bu_1 = \lambda^* (2x^{*\prime\prime} + tx^{*\prime\prime\prime}) - \frac{\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})}{\partial z_1} (x^{*\prime} + tx^{*\prime\prime}) -$$

$$- \frac{\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})}{\partial z_0} \cdot \frac{tx^{*\prime}}{\lambda^*} =$$

$$= \frac{t}{\lambda^*} Bx^{*\prime} + 2\lambda^* x^{*\prime\prime} - \frac{\partial g(x^*, \lambda^* x^{*\prime})}{\partial z_1} x^{*\prime} = y,$$

так как $Bx^{*\prime}=0$. Теперь можем общее решение уравнения $Bu=y$ написать в виде $u(t)=(t+c_1)x^{*\prime}(t)+c_2x_1(t)$. Если предполагать, что $u(t)=u(t+2\pi)$, то получим

$$(t+c_1)x^{*\prime}(t)+c_2x_1(t)=(t+2\pi+c_1)x^{*\prime}(t)+c_2x_1(t+2\pi),$$

т. е. существует константа $c_2\neq 0$ такая, что

$$x_1(t)-x_1(t+2\pi)=\frac{2\pi}{c_2}x^{*\prime}(t) \qquad \forall\, t\in[0,2\pi]. \tag{22}$$

С помощью представления (20) фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ проверим условие (22) в точке $t_0\in[0,2\pi]$, где $x^{*\prime}(t_0)=0$ (здесь $x^{*\prime\prime}(t_0)\neq 0$, так как $x^{*\prime}(t)\not\equiv 0$). Имеем

$$\Phi(t_0)=-x_1(t_0)x^{*\prime\prime}(t_0)=c\cdot\exp\left(-\int_0^{t_0}p(s)\,ds\right).$$

По соотношению (22)

$$0=\frac{2\pi}{c_2}x^{*\prime}(t_0)=x_1(t_0)-x_1(t_0+2\pi)=$$

$$=\frac{-\Phi(t_0)}{x^{*\prime\prime}(t_0)}\left(1-\exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+2\pi}p(s)\,ds\right)\right).$$

Равенство, как видно, имеет место только при условии (21), которое противоречит предположению (18).

Итак, установлено, что условие (18) достаточно для выполнения условий 4° и 5°, и нами доказана следующая

Теорема. *Пусть для уравнения* (17) *выполнены предположения* 1°—3° *и условие* (18). *Тогда метод коллокации* $\{(4),(7)\}$ *при почти всех* n *определяет изолированное приближение* $\{x_n,\lambda_n\}$ *решения* $\{x^*,\lambda^*\}$ *уравнения* (16). *При этом приближения сходятся со скоростью* (6).

Заметим, что условие 3° выполнено с $\alpha=0$, если

$$\int_0^{2\pi}x^*(t)\,dt=0. \tag{23}$$

Аналогичные теоремы можно сформулировать и для сходимости метода Галеркина и разностного метода, как это сделано в [1].

§ 3. Численные примеры

При достаточно хорошем начальном приближении из 1°—5° следуют соотношения (14), (15) и (16). Тем самым обосновывается использование для решения задачи (2) следующей итерационно-аппросимационной схемы. Выберем начальное значение $n=n_0$ и начальное приближение $\{x_{n,0},\lambda_{n,0}\}$ и решим уравнение (5) модифицированным методом Ньютона по схеме (12). Итерационный процесс продолжим до тех пор, пока в точках коллокации будет достигнута заданная точность. Затем проделаем аппроксимационный шаг, заменяя n на $2n$ и беря начальным приближением результат предыдущего (итерационного) шага, и перейдем опять к итерационному шагу.

Приведем пример о применении этого алгорифма для решения уравнения второго порядка вида (17). Рассмотрим т. н. осциллятор Ван дер Поля

$$\lambda^2 x'' - \varepsilon\lambda(1-x^2)x' + x = 0, \tag{24}$$

где ε — малый параметр уравнения, фиксированный в каждом отдельном случае. В первую очередь проверим состоятельность условий теоремы из § 2.

Существование у уравнения (24) изолированного периодического решения подробно изучено в литературе (например, в книге [5]) с помощью различных качественных методов. Тем самым ясно и существование у уравнения (24) решения $\{x^*(t), \lambda^*\}$, т. е. выполнено условие 1°. Ясно также, что функция $f(z_0, z_1, z_2) = z_2 - \varepsilon(1-z_0)z_1 + z_0$ непрерывно дифференцируема, т. е. выполнено и 2°. Условие 3° выполнено с $\alpha = 0$, так как имеет место (23), в чем убеждаемся интегрированием уравнения (24).

Для установления неравенства (18) обращаемся к разложению решения уравнения (24) по параметру ε, которое получено в литературе различными методами возмущения (см. [4, 6]). Выпишем первые члены этого разложения

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= 2\cos(t+\theta) + \left(\frac{3}{4}\sin(t+\theta) - \frac{1}{4}\sin 3(t+\theta)\right)\varepsilon + \\ &+ \left(-\frac{1}{8}\cos(t+\theta) + \frac{3}{16}\cos 3(t+\theta) - \right. \\ &\left. - \frac{5}{96}\cos 5(t+\theta)\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \frac{1}{\lambda_\varepsilon^2} &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{25}$$

Вычислим

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial g(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)}{\partial z_1}\,dt = -\varepsilon\lambda_\varepsilon \int_0^{2\pi} (1 - x_\varepsilon^2)\,dt = \varepsilon\cdot 2\pi + O(\varepsilon^2) \neq 0,$$

т. е. условие (18) выполнено, по крайней мере при малых ε. Тем самым установлены и неравенства (14), (15) и (16) для уравнения (24). Например, (14) выполнено с

$$L = \max\{c_1,\ \varepsilon(1+c_2^2),\ \varepsilon c_1 c_2\},$$

где $c_1 = 2(|\lambda_{n,0}| + r)$, $c_2 = \|x_{n,0}\|_{L_2} + r$, а r — радиус шара (13).

В заключение приведем некоторые результаты численных расчетов приложения описанного метода для некоторых значений ε. Вычисления проведены на ЭВМ «Минск-32».

Обозначения, принятые в таблицах, следующие:

ε — значение параметра в уравнений (24);

n — «размерность» приближения (4);

T_n — узлы коллокации; $T_n = (0, h, 2h, \ldots, 2nh, 2\pi)$, $h = 2\pi/(2n+1)$;

$x_n(T_n)$ — значения приближения (4) в узлах коллокации:

$$x_n(T_n) = (x_n(0), x_n(h), \ldots, x_n(2nh), x_n(2\pi));$$

$x_\varepsilon(T_n)$ — значения разложения (25) в узлах коллокации:

$$x_\varepsilon(T_n) = (x_\varepsilon(0), x_\varepsilon(h), \ldots, x_\varepsilon(2nh), x_\varepsilon(2\pi));$$

$K_n = (c_0, c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n)$ — коэффициенты полинома (4);

λ — значения искомого параметра;

N — количество итерационных шагов для достижения точности 0.0005 в узлах;

θ — сдвиг аргумента в (25) такой, что $x_\varepsilon(0) = 0$.

В качестве самого первого приближения взято решение уравнения (24) при $\varepsilon = 0$, т. е. $\{2\sin t, 1\}$.

Из таблиц 1—4 видно, что при малой ε имеется хорошее совпадение ε-приближения x_ε с приближением x_n, найденным итерационно-коллокационным методом. Большое расхождение x_ε и x_n при $\varepsilon = 1.1$ (таблица 5) вызвано неточностью приближения (25). Значения λ_ε в разложений (25) для $\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 1.1$ соответственно 1.000, 0.998 и 0.932 (не учтен член $O(\varepsilon^4)$).

Таблица 1: $\varepsilon = 0.1$, $n = 2$, $\Theta = 1.6208$, $\lambda = 1.0067$, $N = 4$.

K_n	T_n	$x_n(T_n)$	$x_\varepsilon(T_n)$	$\lvert x_n(T_n) - x_\varepsilon(T_n)\rvert$
0.0022	0	0	0	0
0.0677	1.257	1.9796	1.9288	0.0508
2.0054	2.513	1.1045	1.1493	0.0448
—0.0666	3.770	—1.2576	—1.2055	0.0521
—0.0024	5.027	—1.8321	—1.8732	0.0411
	6.283	0	—0.0001	0.0001

Таблица 2: $\varepsilon = 0.1$, $n = 4$, $\Theta = 1.6208$, $\lambda = 0.9994$, $N = 4$.

K_n	T_n	$x_n(T_n)$	$x_\varepsilon(T_n)$	$\lvert x_n(T_n) - x_\varepsilon(T_n)\rvert$
0	0	0	0	0
0.0251	0.6981	1.3193	1.3191	0.0002
2.0000	1.3163	1.9842	1.9527	0.0315
0	2.0944	1.6953	1.7206	0.0253
0	2.7925	0.6738	0.6741	0.0003
—0.0250	3.4907	—0.6959	—0.6989	0.0030
—0.0019	4.1888	—1.7703	—1.7678	0.0025
0.0001	4.8870	—1.9507	—1.9509	0.0002
0.0003	5.5851	—1.2557	—1.2556	0.0001

Таблица 3: $\varepsilon = 0.1$, $n = 1$, $\Theta = 1.6208$, $\lambda = 0.9994$, $N = 3$.

K_n	T_n	$x_n(T_n)$	$x_\varepsilon(T_n)$	$\lvert x_n(T_n) - x_\varepsilon(T_n)\rvert$
0	0	0	0	0
0.0250	0.3696	0.7359	0.7359	0
2.0000	0.7392	1.3827	1.3828	0.0001
0	1.1088	1.8259	1.8259	0
0	1.4784	1.9983	1.9983	0
—0.0249	1.8480	1.8971	1.8971	0
0.0019	2.2176	1.5589	1.5588	0.0001
0	2.5872	1.0309	1.0309	0
0	2.9568	0.3647	0.3648	0.0001
—0.0001	3.3264	—0.3714	—0.3713	0.0001
—0.0005	3.6960	—1.0781	—1.0783	0.0002
0	4.0656	—1.6355	—1.6356	0.0001
0	4.4352	—1.9475	—1.9475	0
0	4.8048	—1.9801	—1.9801	0
0	5.1744	—1.7547	—1.7547	0
0	5.5440	—1.3156	—1.3155	0.0001
0	5.9136	—0.7114	—0.7115	0.0001
	6.2832	0	0	0

При $n = 8$ (таблицы 3—5) отмечается «хорошая периодичность» приближения $x_n(t)$, т. е. $x_n(0) = x_n(2\pi) = 0$ даже при $\varepsilon = 1.1$ (таблица 5). Это совпадает с результатами главы 17 книги [5], где изучена асимптотика решения уравнения Ван дер Поля. Для вычисления периода ω решения уравнения

$$z''(\tau) - \varepsilon[1 - z^2(\tau)]z'(\tau) + z(\tau) = 0$$

при больших значениях параметра ε в [5] выведена формула $\omega = 1.614\,\varepsilon$ (при значениях ε, близких к нулю, $\omega = 2\pi$). Там же можно найти график предельного цикла при $\varepsilon \to \infty$.

Таблица 4: $\varepsilon = 0.2$, $n = 8$, $\Theta = 1.0713$, $\lambda = 0.9975$, $N = 4$.

K_n	T_n	$x_n(T_n)$	$x_\varepsilon(T_n)$	$\lvert x_n(T_n) - x_\varepsilon(T_n)\rvert$
0.	0	0	0	0
0.0498	0.3696	0.7517	0.7531	0.0014
2.0000	0.7392	1.4215	1.4231	0.0016
0	1.1088	1.8606	1.8612	0.0006
0	1.4784	2.0004	2.0004	0
—0.0493	1.8480	1.8688	1.8682	0.0006
0.0074	2.2176	1.5245	1.5232	0.0013
0	2.5872	1.0122	1.0110	0.0012
0	2.9568	0.3631	0.3631	0
—0.0005	3.3264	—0.3765	—0.3771	0.0006
—0.0020	3.6960	—1.1069	—1.1087	0.0018
0	4.0656	—1.6769	—1.6780	0.0011
0	4.4352	—1.9677	—1.9680	0.0003
0.0001	4.8048	—1.9647	—1.9645	0.0002
0	5.1744	—1.7200	—1.7190	0.0010
0	5.5440	—1.2874	—1.2859	0.0015
0	5.9136	—0.7024	—0.7021	0.0005
	6.2832	0	0	0

Таблица 5: $\varepsilon = 1.1$, $n = 8$, $\Theta = 2.11$, $\lambda = 0.9327$, $N = 8$.

K_n	T_n	$x_n(T_n)$	$x_\varepsilon(T_n)$	$\lvert x_n(T_n) - x_\varepsilon(T_n)\rvert$
—0.0049	0	0	0.0003	0.0003
0.2435	0.3696	1.0240	1.1734	0.1494
2.0028	0.7392	1.8522	1.8953	0.0431
0.	1.1088	2.0034	2.0062	0.0028
0	1.4784	1.8763	1.8466	0.0297
—0.1871	1.8480	1.6439	1.5542	0.0897
0.1787	2.2176	1.3512	1.3032	0.0480
0.0002	2.5872	0.9580	1.1126	0.1546
—0.0004	2.9568	0.3926	0.5258	0.1330
—0.0564	3.3264	—0.4784	—0.6040	0.1256
—0.0117	3.6960	—1.5255	—1.6130	0.0875
0.0015	4.0656	—1.9852	—1.9977	0.0125
—0.0003	4.4352	—1.9581	—1.9488	0.0093
—0.0062	4.8048	—1.7668	—1.7093	0.0575
—0.0150	5.1744	—1.5067	—1.3928	0.1139
0.0042	5.5440	—1.1688	—1.2217	0.0529
0.0034	5.9136	—0.7045	—0.8969	0.1924
	6.2832	0	0.0004	0.0003

Литература

1. Вайникко Г. М., Мийдла П. Х., О сходимости приближенных методов отыскания автоколебаний. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, **430**, 75—88.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва, 1977.
3. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, 1958.
4. Найфэ А., Методы возмущения. Москва, 1976.
5. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва, 1974.
6. Розо М., Нелинейные колебания и теория устойчивости. Москва, 1971.

Поступило
13 VI 1977

MÕNED KOLLOKATSIOONI-ITERATSIOONIALGORITMID OMAVÕNKUMISTE LEIDMISEKS

P. Miidla

Resümee

Artiklis käsitletakse kollokatsioonimeetodil ja Newtoni iteratsioonimeetodil baseeruvate algoritmide koonduvust autonoomsete diferentsiaalvõrrandite perioodiliste lahendite leidmisel. Teoreetilised tulemused on illustreeritud Van der Pol'i võrrandi lahendamisel saadud numbriliste tulemustega.

Veel on artiklis näidatud, et teist järku võrrandite korral saab kollokatsiooniiteratsioonialgoritmi koonduvustingimusi väga ülevaatlikult kontrollida.

SOME COLLOCATION-ITERATION ALGORITHMS FOR THE FINDING OF SELF-OSCILLATIONS

P. Miidla

Summary

In this paper we study the convergence of the algorithms for finding of the periodic solutions of the autonomous differential equations. Those algorithms are based on the method of the collocations and on the Newton method of iteration. Theoretical results are illustrated with numerical, which are got for the equation of Van der Pol.

One more result in this paper is the possibility of the effective control of the conditions of convergence of the collocation-iteration algorithm for the equations of the second order.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 149—158.

ВЫДЕЛЯЕМЫЕ ОБЛАСТИ В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Керге

Тартуский государственный университет

В последнее время много работ посвящено проблемам глобальной оптимизации в нелинейном программировании. Но в большинстве работ предполагается, что допустимая область является выпуклой (многогранником, n-мерным прямоугольным параллелепипедом) и вся сложность задачи состоит в невыпуклой или в невогнутой целевой функции. Мы будем рассматривать случай, где допустимая область является невыпуклой. Упрощенные варианты такого подхода рассмотрены в [5], где невыпуклость допустимой области вызывается вогнутой функцией, или в [7], где все функции квадратичные. Более общие случаи рассмотрены в [8], однако, там является сложным вопросом нахождение опорных плоскостей для общих функций и при каждом ветвлении получается 2^n новых подмножеств, и в [6], но там не доказана сходимость к глобальному решению.

В данной работе рассматривается задача сепарабельного программирования с линейной целевой функцией. Многие задачи математического программирования могут быть сведены к задачам сепарабельного программирования с линейной целевой функцией добавлением новых переменных и ограничений (см. [4—5]). При выработке алгоритма использованы идеи ветвления, предложенные в [7], а при нахождении выделяемых областей использованы идеи из [2].

§ 1. Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу математического программирования: найти точку $x=(x_1, \ldots, x_n)$, которая с точностью до заданной величины $\varepsilon > 0$ максимизирует функцию

$$(c,x) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$f_i(x) \geqslant 0, \qquad i=1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$a_j \leqslant x_j \leqslant b_j \quad j=1, \ldots, n. \tag{3}$$

Как известно из [5], к задаче (1)—(3) всегда можно свести задачу с произвольной целевой функцией $f_0(x)$, при условии ограниченности $f_0(x)$ сверху в n-мерном прямоугольном параллелепипеде

$$P=\{x \mid a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, \ j=1, \ldots, n\}.$$

О функциях $f_i(x)$ будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы, сепарабельны, т. е.

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j), \quad i=1, \ldots, m,$$

и что все функции $f_{ij}(x_j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, имеют ограниченную производную, т. е. существуют

$$m_{ij}=\min_{x_j \in [a_j, b_j]} f'_{ij}(x_j), \quad M_{ij}=\max_{x_j \in [a_j, b_j]} f'_{ij}(x_j).$$

Для глобальной оптимизации одномерной функции существуют разные методы (см., например, [1—3]).

§ 2. Выделяемые области

Допустим, что мы решили задачу (1)—(3) локальными методами в заданном n-мерном прямоугольном параллелепипеде

$$P_k=\{x \mid a_j^k \leqslant x_j \leqslant b_j^k, \ j=1, \ldots, n\},$$

где $a_j^k \geqslant a_j$, $b_j^k \leqslant b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Это значит, что вместо ограничений (3) используем ограничения

$$a_j^k \leqslant x_j \leqslant b_j^k, \quad j=1, \ldots, n. \tag{4}$$

Обозначаем локальное решение задачи $\{(1), (2), (4)\}$ через x^k и наилучшее известное до сих пор локальное решение через x^*, т. е.

$$(c, x^*)=\max_{1 \leqslant s \leqslant k} \{(c, x^s)\}.$$

Обозначим через I_k множество индексов активных ограничений в точке x^k и уточняем границы на производные:

$$m_{ij}^k=\min_{x_j \in [a_j^k, b_j^k]} f_{ij}'(x_j), \ M_{ij}^k=\max_{x_j \in [a_j^k, b_j^k]} f_{ij}'(x_j), \ i \in I_k, \ j=1, \ldots, n.$$

Известно, что при линейной целевой функции каждое локальное решение задачи $\{(1), (2), (4)\}$ является граничной точкой, поэтому всегда $I_k \neq \varnothing$.

Нашей целью является нахождение такой максимальной окрестности U_k точки x^k, в которой нет допустимых точек, лучших, чем уже известное локальное решение x^*.

Определение. *Выделяемой областью задачи* (1)—(3) *будем называть область U, такую что при $x \in P \cap U$ выполняется одно из следующих условий:*

1) $(c, x) < (c, x^*) + \varepsilon$

или

2) *найдется индекс $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, при котором $f_{i_0}(x) < 0$.*

Обозначаем

$$N_{ij}^k(h_j)=\begin{cases} M_{ij}^k & \text{при} \quad h_j \geqslant 0, \\ m_{ij}^k & \text{при} \quad h_j<0, \quad i \in I_k, \quad j=1, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда при наших предположениях

$$\begin{aligned} f_i(x^k+h) &= \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j^k+h_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j^k) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}'(x_j^k+\theta_{ij}h_j)\,h_j = \\ &= \sum_{h_j \geqslant 0} f_{ij}'(x_j^k+\theta_{ij}h_j)\,h_j + \sum_{h_j<0} f_{ij}'(x_j^k+\theta_{ij}h_j)\,h_j \leqslant \\ &\leqslant \sum_{h_j \leqslant 0} M_{ij}^k h_j + \sum_{h_j<0} m_{ij}^k h_j = \sum_{j=1} N_{ij}^k(h_j)\,h_j, \quad i \in I_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь использован факт, что $f_i(x^k)=0$ при $i \in I_k$.

Покажем, что для нахождения выделяемой области в виде шара

$$V_k=\{x \mid \|x-x^k\|^2<R^2_{\max}\},$$

можно решить следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \|h\|^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} h_j^2 \tag{6}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} N_{ij}^k(h_j)\,h_j \geqslant 0, \qquad i \in I_k, \tag{7}$$

$$(c,h) \geqslant (c, x^*-x^k)+\varepsilon. \tag{8}$$

Эта задача имеет строго выпуклую целевую функцию, но ограничения (7) имеют меняющиеся коэффициенты у переменных. Обозначаем решение задачи (6)—(8) через h^k и рассматриваем всевозможные векторы $h \in E^n$, при которых $\|h\|<\|h^k\|$. Тогда и $\|h\|^2<\|h^k\|^2$, и, следовательно, вектор h является недопустимой точкой задачи (6)—(8). Если не удовлетворено одно из условий (7), например, при $i_0 \in I_k$

$$\sum_{j=1}^{n} N_{i_0 j}^k(h_j)\,h_j<0,$$

то ввиду неравенства (5) имеем

$$f_{i_0}(x^k+h)<0,$$

и реализуется случай 2) в определении выделяемой области.

Если не удовлетворяется условие (8), то

$$(c,h)<(c,x^*-x^k)+\varepsilon, \qquad (c,x^k+h)<(c,x^*)+\varepsilon$$

и в точке $x=x^k+h$ реализуется случай 1) в определении выделяемой области. Следовательно, шар V_k с центром в x^k и радиусом $R_{\max}=\|h^k\|$ является выделяемой областью задачи (1)—(3).

Для решения задачи (6)—(8) заметим, что абсолютный минимум целевой функций (6), находящийся в точке $h=0$, удовлетворяет всем ограничениям (7). Следовательно, решение задачи (6)—(8) находится на гиперплоскости

$$(c, h) = (c, x^* - x^k) + \varepsilon. \tag{9}$$

Допустим, что все переменные задачи (1)—(3) нумерованы так, что

$$|c_1| \leqslant |c_2| \leqslant \ldots \leqslant |c_n|. \tag{10}$$

Постараемся найти ортант пространства E^n, в котором достигается наименьшее растояние точек гиперплоскости (9) от начала координат. Для этого находим вектор h^*, при котором достигается

$$\min \|h\|^2$$

при условии (9). При помощи метода Лагранжа эта задача сводится к решению системы

$$2h + \lambda c = 0$$

$$(c, h) = (c, x^* - x^k) + \varepsilon,$$

откуда

$$h^* = \frac{(c, x^* - x^k) + \varepsilon}{\|c\|^2} c = Dc.$$

Так как $D > 0$, то наименьшее расстояние точек гиперплоскости (9) от начала координат

$$d = [(c, x^* - x^k) + \varepsilon] / \|c\| \tag{12}$$

достигается в ортанте, который содержит градиент этой гиперплоскости. Если ввести обозначения

$$J^+ = \{j \mid c_j \geqslant 0\}, \qquad J^- = \{j \mid c_j < 0\}, \tag{13}$$

то расстояние d достигается в ортанте, где $h_j \geqslant 0$ при $j \in J^+$ и $h_j \leqslant 0$ при $j \in J^-$.

Если при $j \in J \subset J^+$ уменьшить переменные h_j со значений h^*_j до выполнения условий

$$h_j \leqslant 0, \qquad j \in J, \tag{14}$$

то значение функции $\|h\|^2$ увеличивается и решение задачи $\{(11), (9), (14)\}$ достигается на границе допустимой области, т. е. выполняется условие

$$\sum_{j \notin J} c_j h_j = (c, x^* - x^k) + \varepsilon.$$

Такое же рассуждение можем провести, если $J \subset J^-$. Следовательно, для каждого ортанта пространства E^n мы можем поставить в соответствие оценку d_J, используя для этого минимальное расстояние от начала координат до гиперплоскости (9) в данном ортанте:

$$d_J = [(c, x^* - x^k) + \varepsilon] / (\sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^{n} c_j^2)^{1/2},$$

где $J = \varnothing$ или любая комбинация индексов $1, \ldots, n$, кроме $J = \{1, \ldots, n\}$. Это значит, что все ортанты, где задача (6)—(8) еще не решена, можно упорядочить по оценкам d_J. Неравенства (10) позволяют вычислять только часть оценок d_J, чтобы найти первый элемент этой последовательности.

Фиксируем ортант, где будем решать задачу (6)—(8):

$$J_1 = \{j \mid h_j \geqslant 0\}, \qquad J_2 = \{j \mid h_j \leqslant 0\}.$$

При решении задачи (6)—(8) в качестве первого ортанта берем тот, для которого $J_1 = J^+$ и $J_2 = J^-$.

Производим замену переменных

$$z_j = \begin{cases} h_j \text{ при } j \in J_1, \\ -h_j \text{ при } j \in J_2, \end{cases} \tag{15}$$

Тогда задача (6)—(8) в рассматриваемом ортанте сводится к следующей задаче: найти

$$\min \|z\|^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \tag{16}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J_1} M^k{}_{ij} z_j - \sum_{j \in J_2} m^k{}_{ij} z_j \geqslant 0, \qquad i \in I_k, \tag{17}$$

$$\sum_{j \in J_1} c_j z_j - \sum_{j \in J_2} c_j z_j \geqslant (c, x^* - x^k) + \varepsilon, \tag{18}$$

$$z_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Задача (16)—(19) — обыкновенная выпуклая задача квадратичного программирования и решается соответствующими методами (например, методом Била). Обозначаем решение задачи (16)—(19) через z^k. Если $\|z^k\|$ меньше оценки следующего ортанта в последовательности, то $z^* = z^k$ является глобальным решением задачи (6)—(8) ввиду того, что не найдется ортанта, где минимальное расстояние до гиперплоскости (9) — следовательно, и до допустимой точки — было бы меньше $\|z^*\|$. Если существуют ортанты с оценками $d_s < \|z^*\|$ или задача (16)—(19) противоречива, то надо решить задачу (6)—(8) в этих ортантах, пока норма текущего наилучшего решения $\|z^*\|$ не будет превосходить оценок в последовательности $\{d_s\}$ $(s = 1, \ldots, 2^n)$. Тогда z^* является глобальным решением задачи (6)—(8) в том смысле, что $\|z^*\| = \|h^k\|$. Это вытекает из того, что замены переменных (15) не изменяют модули переменных. Если все $2^n - 1$ задач типа (16)—(19) противоречивы, то множество P_k является выделяемой областью задачи (1)—(3) ввиду того, что задача (6)—(8) не имеет допустимых точек. Формальное изложение алгоритма решения задачи (6)—(8) приведем в § 4.

§ 3. Ветвление

К выделяемой области принадлежат такие точки, которые в дальнейшем процессе решения задачи (1)—(3) нас не интересуют, их можно удалить и исследовать задачу (1)—(3) в области $P_k \setminus V_k$. Если $P_k \subset V_k$, то задача (1)—(3) уже решена в P_k.

Чтобы облегчить исследование множества P_k после удаления выделяемой области, выбираем вместо шара V_k гиперкуб $K_k \subset V_k$ с центром в x^k и длиной ребра $2R_{\max}/n^{1/2}$, т. е.

$$K_k = \{x \mid \bar{a}_j^k < x_j < \bar{b}_j^k, \quad j=1, \ldots, n\},$$

где

$$\bar{a}_j^k = x_j^k - R_{\max}/n^{1/2}, \tag{20}$$

$$\bar{b}_j^k = x_j^k + R_{\max}/n^{1/2}. \tag{21}$$

Ввиду того, что K_k — тоже выделяемая область для задачи (1)—(3), исключаем K_k из дальнейшего рассмотрения и рассмотрим множество $P_k \setminus K_k$. Чтобы сделать это методом предыдущего параграфа, разобьем множество $P_k \setminus K_k$ на подмножества $K_{k+1,\mu}$ с $\mu = 1, \ldots, 2n$:

$$P_{k+1,2\nu-1} =$$

$$= \{x \mid \bar{a}_j^k \leqslant x_j \leqslant \bar{b}_j^k, 1 \leqslant j < \nu, a_\nu^k \leqslant x_\nu \leqslant \bar{a}_\nu^k, a_j^k \leqslant x_j \leqslant b_j^k, \nu < j \leqslant n\},$$

$$P_{k+1,2\nu} =$$

$$= \{x \mid \bar{a}_j^k \leqslant x_j \leqslant \bar{b}_j^k, 1 \leqslant j < \nu, \bar{b}_\nu^k \leqslant x_\nu \leqslant b_\nu^k, a_j^k \leqslant x_j \leqslant b_j^k, \nu < j \leqslant n\},$$

$\nu = 1, \ldots, n$, или после переобозначения границ для переменных,

$$P_{k+1,\mu} = \{x \mid a_j^{k+1,\mu} \leqslant x_j \leqslant b_j^{k+1,\mu}, \ j=1, \ldots, n\}, \qquad \mu = 1, \ldots, 2n,$$

где

$$a_j^{k+1,\mu} = \begin{cases} \max\{\bar{a}_j^k, a_j^k\}, \text{ если } 1 \leqslant j < \left[\dfrac{\mu+1}{2}\right], \\ \min\{\bar{b}_j^k, b_j^k\}, \text{ если } j = \left[\dfrac{\mu+1}{2}\right] \text{ и } \mu \text{ четное}, \\ a_j^k, \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{22}$$

$$b_j^{k+1,\mu} = \begin{cases} \min\{\bar{b}_j^k, b_j^k\}, \text{ если } 1 \leqslant j < \left[\dfrac{\mu+1}{2}\right], \\ \max\{\bar{a}_j^k, a_j^k\}, \text{ если } j = \left[\dfrac{\mu+1}{2}\right] \text{ и } \mu \text{ нечетное}, \\ b_j^k, \text{ в остальных случаях}. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа.

В области $P_k \setminus K_k$ выбираем для дальнейшего рассмотрения подмножество P_{k+1,μ_0} с максимальной оценкой

$$L_{k+1,\mu_0} = \max_{1 \leqslant \mu \leqslant 2n} L_{k+1,\mu}, \tag{24}$$

где

$$L_{k+1,\mu} = \begin{cases} \sum\limits_{c_j > 0} c_j b_j^{k+1,\mu} + \sum\limits_{c_j < 0} c_j a_j^{k+1,\mu} & \text{при } \operatorname{int} P_{k+1,\mu} \neq \varnothing, \\ -\infty \text{ при } \operatorname{int} P_{k+1,\mu} = \varnothing, \end{cases}$$

т. е. максимальное значение целевой функции (1) в области $P_{k+1,\mu}$.

Далее обозначим $P_{k+1} = P_{k+1,\mu_0}$ и следуем рассуждениям предыдущего параграфа. Если во множестве P_{k+1} не найдутся допустимые решения задачи $\{(1), (2), (4)\}$, то заменяем $L_{k+1,\mu_0} = -\infty$ и выбираем новое подходящее множество для рассмотрения по формуле (24).

Если на каком-нибудь шаге $P_k \subset K_k$ или $L_{k+1,\mu_0} \leqslant \leqslant (c, x^*) + \varepsilon$, то множество P_k является выделяемым, так как P_k не содержит такого подмножества, которое содержало бы допустимую точку, лучшую, чем текущее известное нам наилучшее локальное решение x^*. Если начальный n-мерный прямоугольный параллелепипед $P_1 = P$ является выделяемым, то текущее наилучшее решение x^* является глобальным решением задачи (1)—(3) с точностью ε.

§ 4. Описание алгоритма

В этом параграфе изложим формальное описание алгоритма выделяемых областей. Предположим, что имеют место неравенства (10).

Начальный шаг.

Берем $P_1 = P$, $a_j^1 = a_j$, $b_j^1 = b_j$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1$, $v = 1$. Отметим, что индекс k означает итерацию и v означает уровень ветвления.

Находим локальное решение x^1 задачи (1)—(3). Если не существует допустимой точки задачи (1)—(3), то задача неразрешима. Берем $x^* = x^1$ и выполним шаг 1 первой итерации. Отметим, что k-ая итерация ($k \geqslant 1$) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Этот шаг содержит нахождение выделяемой области K_k и подразделен на следующие пункты.

а) Разделяем индексы переменных на две группы J^+ и J^- по определению (13) и выбираем начальные значения: $R_{\max} = \infty$, $t = 0$.

б) Выбираем самый перспективный ортант для задачи (6)—(8), т. е. ортант с оценкой

$$d^* = \min_{1 \leqslant s \leqslant C} \{d_{s,t-1}, d_t\},$$

где

$$C = \sum_{u=2}^{t-1} C_{t-1}^u, \quad d_t = [(c, x^* - x^k) + \varepsilon] / (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} c_j^2)^{1/2},$$

$$d_{s,t-1} = [(c, x^* - x^k) + \varepsilon] / (\sum_{j \notin N^s_{t-1}} c_j^2)^{1/2},$$

а $N^s{}_{t-1}$ ($1 \leqslant s \leqslant C$) — множества индексов, которые содержат всевозможные комбинации индексов $1, \ldots, t-1$. Определяем $d_{s,t-1} = \infty$, если $t = 0, 1, 2$.

в) Если $d^* \geqslant R_{\max}$, то перейдем к выполнению пункта д).

г) Определяем множества индексов

$$J = \begin{cases} \{t\}, & \text{если } d^* = d_t, \\ N^{s_0}_{t-1}, & \text{если } d^* = d_{s_0,t-1}, \end{cases}$$

$$J_1 = (J^+ \setminus J) \cup (J^- \cap J), \quad J_2 = (J^- \setminus J) \cup (J^+ \cap J).$$

Решаем задачу (16)—(19) и решение этой задачи обозначим через z_k. Если z_k существует и $\|z_k\| < R_{\max}$, то берем $R_{\max} = \|z^k\|$. Если $J = N^{s_0}{}_{t-1}$, то для замечания, что задача (6)—(8) решена в данном ортанте, возьмем $d_{s_0,t-1} = \infty$. Если $J = \{t\}$, то увеличиваем t на единицу. В обоих случаях выполним пункт б).

д) Определим выделяемую область K_k по формулам (20)—(21).

Шаг 2. Разделим множество $P_k \setminus K_k$ на подмножества

$$P^v_{k+1,\mu} = \{x \mid a_j^{k+1,\mu} \leqslant x_j \leqslant b_j^{k+1,\mu}, \ j = 1, \ldots, n\}, \ \mu = 1, \ldots, 2n,$$

где $a_j^{k+1,\mu}$, $b_j^{k+1,\mu}$, $j = 1, \ldots, n$, определяются формулами (22) и (23).

Вычисляем оценки подмножеств $P^v{}_{k+1,\mu}$ ($\mu = 1, \ldots, 2n$):

$$L^v_{k+1,\mu} = \begin{cases} \sum_{c_j > 0} c_j b_j^{k+1,\mu} + \sum_{c_j < 0} c_j a_j^{k+1,\mu} & \text{при } \operatorname{int} P^v{}_{k+1,\mu} \neq \varnothing, \\ -\infty & \text{при } P^v{}_{k+1,\mu} = \varnothing, \end{cases}$$

выполняем шаг 3.

Шаг 3. Находим наилучшую оценку данного уровня ветвления:

$$L^v_{\nu_0+1,\mu_0} = \max_{\substack{1 \leqslant \mu \leqslant 2n \\ 1 \leqslant \nu \leqslant k}} L^v_{\nu+1,\mu}.$$

Выполним шаг 4.

Шаг 4. Проверяем выделяемость областей данного уровня ветвления: если

$$L_{\nu_0+1,\mu_0} \leqslant (c, x^*) + \varepsilon, \tag{25}$$

то уменьшаем v на единицу, а, если при этом $v = 0$, то x^* является глобальным решением задачи (1)—(3) и алгоритм заканчивает работу; в противном случае выполним шаг 3.

Если (25) не выполняется, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Выбираем $P_{k+1} = P^v{}_{\nu_0+1,\mu_0}$ и находим локальное решение x^{k+1} задачи $\{(1), (2), (3)\}$. Если имеется такое решение x^{k+1}, то увеличиваем k и v на единицу и выполним шаг 1. Если задача $\{(1), (2), (4)\}$ противоречива, то выполним шаг 6.

Шаг 6. Возьмем соответствующую оценку $L^v{}_{\nu_0+1,\mu_0} = \infty$ и выполним шаг 3.

§ 5. Конечность метода

Конечность метода выделяемых областей вытекает из того факта, что на каждой итерации освобождается из-под наблюдения гиперкуб с конечной длиной ребра, которая не меньше величины $\varepsilon/(n^{1/2}\|c\|)$. После конечного числа итераций будет выделен весь n-мерный прямоугольный параллелепипед. При вычислении величины выделяемой области используется решение конечного числа ($< 2^n$) задач квадратичного программирования. Следовательно, конечность данного метода сводится к конечности метода локальной оптимизации.

Литература

1. Вилков А. В., Жидков Н. П., Щедрин Б. М., Метод отыскания глобального минимума функции одного переменного. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, **15**, № 4, 1040—1042.
2. Евтушенко Ю. Г., Методы поиска глобального экстремума. Иссл. операций (ВЦ АН СССР), 1974, вып. 4, 39—68.
3. Леонов В. В., Метод покрытий для отыскания глобального максимума функций от многих переменных. В сб. «Исслед. по кибернетике». М., «Сов. радио», 1970, 41—52.
4. Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование. Москва, 1967.
5. Hillestad, R. J., Optimization problems subject to a budget constraint with economies of scale. Oper. Res., 1975, **23**, № 6, 1091—1099.
6. Orban, P., Über ein Verfahren zur globalen Optimierung. Wiss. Z. Techn. Hochsch. O. Guericke Magdeburg, 1974, **18**, № 4, 369—373.
7. Reeves, G. R., Global minimization in nonconvex all-quadratic programming. Manag. Sci., 1975, **22**, № 1, 76—86.
8. Soland, R. M., An algorithm for separable non-convex programming problems II: non-convex constraints. Manag. Sci., 1971, **17**, № 11, 759—773.

Поступило
17 II 1977

MITTEKUMERA PLANEERIMISÜLESANDE ERALDATAVAD PIIRKONNAD HARUDE JA TÕKETE MEETODIS

A. Kerge

Resümee

Artiklis defineeritakse eraldatav piirkond, kuhu kuuluvad punktid ei saa olla lähteülesande globaalseks lahendiks. Kasutades teatud arvu ruutplaneerimise ülesannete lahendamist, leitakse selline piirkond mittekumera planeerimisülesande lokaalse lahendi ümber. Peale eraldatava piirkonna eemaldamist jaotakse lähteülesande lubatavat piirkonda tõkestav n-mõõtmeline risttahukas $2n$ osapiirkonnaks. Edasiseks lahendamiseks sobivaim osapiirkond leitakse harude ja tõkete meetodil.

DISTINGUISHABLE REGIONS IN THE BRANCH-AND-BOUND METHOD FOR NONCONVEX PROGRAMMING

A. Kerge

Summary

Definition of a distinguishable region is introduced. A kind of a distinguishable region around the local solution of the nonconvex program is found by means of quadratic programming. A partition of the permissible region of the program is performed after removing the distinguishable region and the best partial region is found with the branch-and-bound method.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD