

4995.

Legendre's

G e o m e t r i e.

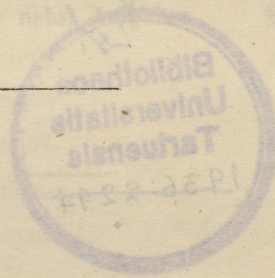
ESTICA

A-5747

Legendre's

G e o m e t r i e.

Ein Compendium für den Unterricht in der
Planimetrie und Stereometrie.



Erster Theil.

Planimetrie.

Riga.

J. Schnakenburg's litho- & topograph. Anstalt.

1857.

Legendre's

Geometrie

Der Druck wird gestattet unter der Bedingung, dass nach Vollendung desselben die gesetzlich bestimmte Anzahl von Exemplaren dem Rigaschen Censur-Comité vorgestellt werde.

Riga, den 11. Juni 1857.

Censor C. Kästner.



6150

Erster Theil.

Planimetrie

Riga.

Verlag von J. Neumann, Neudruck des Verlags von J. Neumann, Neudruck des Verlags von J. Neumann.

1857.

I n h a l t.

I. Die Principien	§ 1 bis § 40.
II. Vom Kreise und dem Masse der Winkel	§ 41 „ § 61.
III. Aufgaben	§ 62 „ § 79.
IV. Vom Verhältnisse der geradlinigen Figuren	§ 80 „ § 118.
V. Aufgaben	§ 119 „ § 137.
VI. Von den regelmässigen Vielecken und der Ausmessung des Kreises nebst Aufgaben	§ 138 „ § 157.

Erklärung der Zeichen.

$=$	bedeutet	gleich.
$<$	"	kleiner als.
$>$	"	grösser als.
\parallel	"	parallel.
$\#$	"	gleich und parallel.
\triangle	"	Dreieck.
\approx	"	ähnlich.
\cong	"	congruent.
\sphericalangle	"	Winkel.
\perp	"	senkrecht.
\frown	"	Bogen.

I. Die Principien.

§ 1. *Erklärungen.* 1) Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Raumgrössen, deren es drei Arten giebt, Körper, Flächen und Linien. Ein geometrischer Körper ist ein nach allen Seiten begränkter Raum, und hat eben so wie dieser drei Abmessungen oder Dimensionen: Länge, Breite und Höhe. Eine Fläche ist die Gränze des Körpers und hat nur Länge und Breite. Eine Linie ist die Gränze der Fläche und kann nur Länge haben. Ein Punkt ist die Gränze der Linie und hat daher gar keine Ausdehnung.

2) Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern; eine krumme Linie ist eine solche, an der kein Theil gerade ist. Eine Fläche wird eine Ebene genannt, wenn die geraden Linien, welche je zwei ihrer Punkte verbinden, ganz in der Fläche liegen. Eine krumme Fläche ist eine solche, an der kein Theil eben ist.

3) Wenn sich zwei gerade Linien begegnen, so heisst die Grösse, um welche sie in ihren Richtungen von einander abweichen, ein Winkel. Die geraden Linien, welche den Winkel bilden, heissen seine Schenkel, und der Durchschnittspunkt beider Schenkel wird der Scheitel des Winkels genannt. Man nennt Nebenwinkel zwei solche Winkel, welche einen Schenkel gemein haben, und deren beide andern Schenkel eine gerade Linie bilden. Durchschneiden sich zwei gerade Linien in einem Punkte, so bilden sie um diesen Punkt herum vier Winkel, von denen je zwei am Scheitel einander entgegengesetzte, Scheitelwinkel heissen. Wenn zwei Nebenwinkel einander gleich sind, so heisst jeder von ihnen ein rechter Winkel. Der rechte Winkel wird gewöhnlich durch R bezeichnet. Jede der beiden Linien, welche einen rechten Winkel bilden, nennt man eine Senkrechte oder ein Perpendikel auf der andern. Wenn ein Winkel kleiner als ein rechter ist, so heisst er spitz; ist er aber grösser als ein rechter, so wird er stumpf genannt.

4) Zwei gerade Linien heissen parallel, wenn sie in einer und derselben Ebene liegen und sich nie begegnen, so weit man sie auch verlängert.

5) Eine ebene Figur ist eine von allen Seiten durch Linien begränzte Ebene. Wenn die begränzenden Linien gerade sind, so heisst eine ebene Figur geradlinig oder ein Vieleck (Polygon). Die Linien, welche eine Figur begränzen, heissen die Seiten derselben, und alle Seiten zusammen genommen bilden ihren Umfang. Nach der Anzahl ihrer Seiten werden die geradlinigen Figuren Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. benannt.

6) Ein Dreieck mit drei gleichen Seiten heisst gleichseitig; mit zwei gleichen Seiten gleichschenkelig, und mit drei ungleichen Seiten ungleichseitig. Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen rechten, ein stumpfwinkliges einen stumpfen Winkel, und ein spitzwinkliges einen spitzen Winkel. In einem rechtwinkligen Dreieck heisst die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse; die den rechten Winkel einschliessenden Seiten werden Katheten genannt.

7) Bei den Vierecken unterscheidet man das Trapez, von dessen Seiten nur zwei parallel sind (Fig. 1); das Parallelogramm, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind (Fig. 2); das Rechteck, dessen Winkel rechte sind, ohne dass alle Seiten gleich wären (Fig. 3); den Rhombus, dessen Seiten gleich, die Winkel aber nicht rechte sind (Fig. 4); das Quadrat, dessen Seiten gleich, und dessen Winkel rechte sind (Fig. 5).



8) Jede gerade Linie, welche die Scheitel zweier, nicht aneinander liegenden Winkel einer Figur verbindet, heisst eine Diagonale.

9) In einem gleichseitigen Vieleck sind alle Seiten, in einem gleichwinkligen alle Winkel, und in einem regelmässigen alle Seiten und eben so alle Winkel unter einander gleich. Zwei Vielecke heissen unter einander gleichseitig, wenn die Seiten des einen einzeln den Seiten des andern gleich sind und in derselben Ordnung auf einander folgen. In ähnlicher Weise sind Vielecke unter einander gleichwinklig. Die gegenseitig gleichen Seiten oder Winkel werden gleichliegende (homologe) Seiten oder Winkel genannt.

10) Zwei Raumgrössen heissen einander congruent, wenn sie auf oder in einander gelegt in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen fallen.

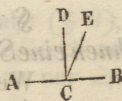
§ 2. Grundsätze. 1) Zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich. 2) Das Ganze ist grösser als sein Theil. 3) Das Ganze ist der Summe der Theile gleich, in welche es getheilt worden. 4) Von einem Punkte zum andern kann nur eine gerade Linie gezogen werden. 5) Zwei congruente Raumgrössen sind einander gleich.

§ 3. Alle rechten Winkel sind einander gleich. Ist $\angle C$

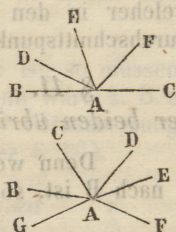
$\perp AD$, und $FG \perp EH$, so ist $\angle ABC \neq \angle EFG$. Macht man $AB = BD = FE = FH$, und legt EH auf AD , so dass E auf A , also H auf D , F auf B fällt, so wird FG auf BC fallen; denn fiel FG auf eine von BC verschiedene Linie BK , so müsste, (weil nach der Voraussetzung $\angle EFG = \angle HFG$ ist, $\angle ABK = \angle DBK$ sein. Aber es ist $\angle ABK > \angle ABC$ und $\angle DBK < \angle DBC$. Da nun nach der Voraussetzung $\angle ABC = \angle DBC$, also $\angle ABK > \angle DBK$ ist, so kann FG nicht auf eine von BC verschiedene Linie BK fallen, und fällt somit auf BC , so dass also $\angle ABC = \angle EFG$ ist.

§ 4. Die Summe zweier Nebenwinkel ACE und ECB beträgt immer zwei rechte Winkel.

Man denke sich auf AB in C die Linie $CD \perp AB$, so ist $ACE + ECB = ACD + DCE + ECB = ACD + DCB = 2R$.

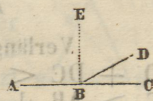


§ 5. Zusätze. 1) Wenn der eine von zwei Nebenwinkeln ein rechter ist, so ist es der andere ebenfalls. 2) Sind zwei Winkel gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel gleich. 3) Alle Winkel BAD, DAE, EAF, FAC, an einer und derselben Seite einer geraden Linie BC, machen zusammen zwei Rechte aus; denn ihre Summe ist der Summe zweier Nebenwinkel BAD und DAC gleich. 4) Alle Winkel BAC, CAD, DAE ..., welche um einen Punkt herum liegen, betragen zusammen genommen vier rechte Winkel.



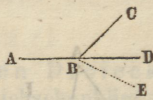
§ 6. Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen.

Denn angenommen, dass die beiden Linien, welche die Punkte A und B gemein haben, in B auseinander liefen, so dass sowohl ABC als ABD eine gerade Linie wäre, so sei auf AB in B die Senkrechte BE errichtet; alsdann wäre $\angle EBC = R = \angle EBD$, was nicht möglich ist; folglich können diese zwei geraden Linien in B nicht auseinander laufen, sondern müssen eine und dieselbe gerade Linie bilden.

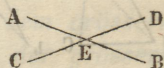


§ 7. Wenn zwei Winkel ABC und CBD den Scheitelpunkt und einen Schenkel BC gemein haben und zusammen zwei rechte Winkel betragen, so bilden die beiden andern Schenkel AB und BD eine gerade Linie.

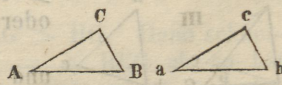
Denn wäre nicht BD, sondern etwa BE die Verlängerung von AB, so würde $ABC + CBD = 2R = ABC + CBE$, also auch $CBD = CBE$ sein, was unmöglich ist; folglich ist BD die Verlängerung von AB.



§ 8. Scheitelwinkel sind einander gleich, z. B. $AEC = BED$. Denn es ist $AEC + AED = 2R = BED + AED$, also auch $AEC = BED$.



§ 9. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind.



Es sei $AB = ab$, $AC = ac$, $\angle A = a$. Legt man $\triangle abc$ so auf $\triangle ABC$, dass A auf a, ab auf AB zu liegen kommt, so muss b auf B, ac auf AC, und c auf C fallen. Da nun auch die dritte Seite bc genau die dritte Seite BC deckt, so ist $\triangle ABC \cong abc$.

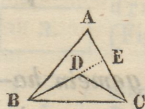
Zusatz. In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel, und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

§ 10. (Fig. § 9). Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegenseitig gleich sind.

Wenn $AB = ab$, $\sphericalangle A = a$, $\sphericalangle B = b$ ist, und man ab auf AB legt, so dass Punkt a auf A , also Punkt b auf B fällt, so müssen die Seiten ac und bc die Richtungen AC und BC nehmen, folglich wird der Punkt c , welcher in den beiden Linien AC und BC zugleich liegen muss, in ihren Durchschnittspunkt C fallen, so dass mithin $\triangle ABC \cong abc$ ist.

§ 11. In einem Dreieck ist jede Seite kleiner als die Summe der beiden übrigen.

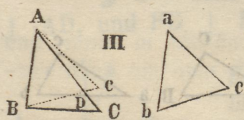
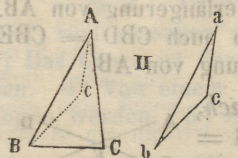
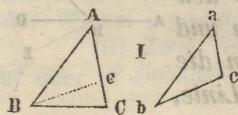
Denn weil die gerade Linie AB (Fig. § 12) der kürzeste Weg von A nach B ist, so muss $AB < AC + CB$ sein.



§ 12. Zieht man von einem Punkte D innerhalb eines Dreiecks ABC nach den Endpunkten einer Seite BC gerade Linien BD und DC , so ist die Summe derselben kleiner, als die der beiden übrigen Seiten des Dreiecks, also $BD + DC < BA + AC$.

Verlängert man BD bis E , so ist $DC < ED + EC$, also auch $BD + DC < BE + EC$; weil aber $BE < BA + AE$, also auch $BE + EC > AB + AC$, so ist um so mehr $BD + DC < BA + AC$.

§ 13. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich sind, aber die von ihnen eingeschlossenen Winkel ungleich sind, so steht dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüber. Wenn also $AB = ab$, $BC = bc$, $\sphericalangle ABC > b$, so ist $AC > ac$.



Legt man das $\triangle abc$ so auf das $\triangle ABC$, dass AB und ab sich genau decken, so kann der Punkt c entweder auf die Seite AC , oder innerhalb des Dreiecks ABC , oder endlich ausserhalb desselben fallen.

I. Im ersten Falle ist offenbar $AC > ac$ oder ac .

II. Im zweiten Falle ist (§ 12) $AC + CB > ac + cB$, und weil $CB = cB$, so ist $AC > ac$ oder ac .

III. Im dritten Falle ist $AD + Dc > ac$ und $BD + DC > BC$, also $AD + Dc + BD + DC > ac + BC$ oder $AC + Bc > ac + BC$, und weil $Bc = BC$, so ist $AC > ac$ oder ac .

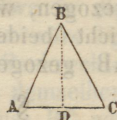
§ 14. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, so steht der grössern Seite auch der grössere Winkel gegenüber. Wenn also (Fig. § 13) $AB = ab$, $BC = bc$, $AC > ac$, so ist $\sphericalangle ABC > b$.

Wäre nämlich $\sphericalangle ABC = b$, so müsste $\triangle ABC \cong abc$ (§ 9), also auch $AC = ac$ sein, und wäre $\sphericalangle ABC < b$, so würde $AC < ac$ sein (§ 13); da aber beides gegen die Voraussetzung ist, so kann nur $\sphericalangle ABC < b$ sein.

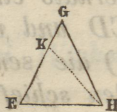
§ 15. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen die drei Seiten gegenseitig gleich sind.

Wenn (Fig. § 9) $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$ ist, so müssen auch die Winkel der Dreiecke gegenseitig gleich sein. Denn wäre z. B. $a < A$, so müsste auch $bc < BC$ sein (§ 13), was der Voraussetzung widerspricht. Die Dreiecke sind daher congruent (§ 9 oder § 10).

§ 16. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich; und umgekehrt, wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten gleich.



1) Wenn $AB = BC$, und aus B nach der Mitte D der ungleichen Seite eine Linie gezogen ist, so ist $\triangle ADB \cong CDB$ (§ 15), also $\sphericalangle A = C$. 2) Es sei $\sphericalangle E = GHE$. Gesetzt nun, dass $EG > GH$ ist, so mache man $EK = GH$ und ziehe HK ; dann wäre dass $\triangle EKH \cong EGH$ (indem $EK = GH$, $EH = EH$, $\sphericalangle KEH = GHE$), was unmöglich ist, also können auch die Seiten EG und GH nicht ungleich sein.



§ 17. Zusätze. 1) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel einander gleich. 2) In einem gleichschenkligen Dreieck nimmt man immer die ungleiche Seite als Grundlinie an, und nennt den Winkel, welcher ihr gegenüber liegt, den Winkel an der Spitze. 3) Die aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zur Mitte der Grundlinie gezogene Linie steht auf dieser senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

§ 18. (Fig. § 16). In einem Dreieck liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber; und umgekehrt: der grössern Seite liegt der grössere Winkel gegenüber.

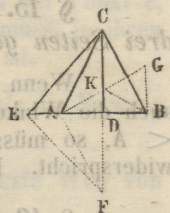
1) Wenn $\sphericalangle EHG > HEG$, so ist auch $EG > HG$. Denn schneidet man von dem grössern Winkel ein Stück $EHK = \sphericalangle HEG$ ab, so hat man $EK = HK$ (§ 16, 2). Da nun $HK + KG > HG$, so ist auch $EK + KG > HG$ oder $EG > HG$. 2) Wenn umgekehrt $EG > HG$, so ist auch $\sphericalangle EHG > HEG$. Denn wäre $\sphericalangle EHG = HEG$, so müsste $EG = HG$ sein, und wäre $\sphericalangle EHG < HEG$, so würde $EG < HG$ sein. Beides widerspricht der Voraussetzung; also ist $\sphericalangle EHG > HEG$.

§ 19. (Fig. § 4). Aus einem Punkte C innerhalb einer Linie AB kann man nur eine Senkrechte auf diese errichten.

②) Denn wären CD und CE zwei Senkrechte, so würde $\angle ACD = R = \angle ACE$ sein, was unmöglich ist (§ 2, 2).

§ 20. Von einem Punkte C ausserhalb einer Linie AB kann man nur eine Senkrechte auf diese ziehen.

Angenommen, dass man zwei Senkrechte CD und CA auf AB ziehen könne. Man verlängere nun CD um $DF = CD$, und ziehe AF , so ist $\triangle CDA \cong FDA$ (§ 9), also $\angle CAD = \angle FAD$, und weil nach der Voraussetzung $\angle CAD = R$, so ist auch $\angle FAD = R$. Da mithin die Linie CAF gerade sein muss (§ 7), so wären zwischen zwei Punkten C und F zwei verschiedene gerade Linien CF und CAF gezogen, was unmöglich ist (§ 2, 4), folglich können auch nicht beide Linien CD und CA zugleich senkrecht auf AB gezogen werden.



§ 21. (Fig. § 20). Zieht man von einem Punkte C ausserhalb einer geraden Linie EB auf diese eine senkrechte Linie CD und verschiedene schiefe Linien CB , CA , CE, so ist 1) die senkrechte Linie kürzer als jede schiefe; 2) sind die beiden schiefen Linien CA und CB in gleichen Abständen DA und DB von der Senkrechten, einander gleich; 3) ist von zwei schiefen Linien CA und CE diejenige die grössere, welche sich weiter von der Senkrechten entfernt.

1) Man verlängere die Senkrechte CD um $DF = CD$, und ziehe FA und FE , so ist $\triangle ACD \cong AFD$ (§ 9), also auch $CA = FA$. Nun ist $CF < CA + FA$, oder $2CD < 2CA$, also auch $CD < CA$.

2) Wenn $DA = DB$, so ist $\triangle CAD \cong CBD$ (§ 9), also $CA = CB$,

3) Es ist $CE + EF > CA + AF$ (§ 12), oder $2CE > 2CA$, also $CE > CA$.

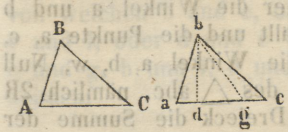
Zusätze. 1) Die Entfernung eines Punktes von einer Linie ist die Senkrechte, welche aus jenem Punkte auf diese gezogen wird. 2) Von einem Punkte lassen sich nicht mehr als zwei gleich lange Linien nach einer Linie ziehen. 3) Die kürzeste Linie von allen, welche man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, steht auf dieser letztern senkrecht.

§ 22. (Fig. § 20). Errichtet man aus der Mitte D einer Linie AB auf diese eine Senkrechte DC , so ist jeder Punkt z. B. C , der Senkrechten gleich weit, dagegen jeder Punkt ausserhalb der Senkrechten z. B. G , ungleich weit von den Endpunkten der Linie AB entfernt.

Da $AD = BD$, so sind die Linien CA und CB einander gleich (§ 21), folglich ist C von A und B gleich weit entfernt. Zieht man ferner

GA, GB und KB, so ist $KA = KB$, und da $GK + KB > GB$, so ist auch $GK + KA > GB$, d. h. $GA > GB$, also ist G von A und B ungleich weit entfernt.

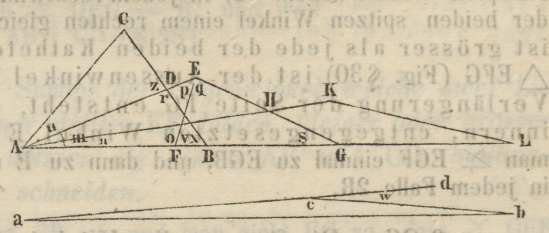
§ 23. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der der grössern von diesen Seiten gegenüberliegende Winkel gegenseitig gleich sind.



Es sei $AB = ab$, $BC = bc$, $BC > AB$, also auch $bc > ab$, endlich $\sphericalangle A = a$. Legt man $\triangle ABC$ so auf $\triangle abc$, dass A auf a, B auf b fällt, so muss AC in der Richtung ac liegen. Fiele nun BC nicht auf bc, sondern etwa in die Richtung bg, so dass also das $\triangle abg$ das $\triangle ABC$ vorstellte, so wäre $bg = BC = bc$. Dies ist aber nicht möglich; denn fället man die Senkrechte bd, so sieht man, dass $bg < bc$ ist (§ 21, 3). Da ferner aus demselben Grunde BC nicht ausserhalb des Dreiecks abc fallen kann, so muss BC auf bc fallen, so dass also beide Dreiecke sich vollkommen decken.

§ 24. In jedem Dreieck ist die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten.

Es sei AB die grösste, BC die kleinste Seite des $\triangle ABC$, mithin C der grösste, A der kleinste Winkel desselben. Aus A ziehe man durch die Mitte D der Seite BC die Gerade AE = AB, mache AF = AD und ziehe EF, verlängere endlich



AB bis G, so dass $FG = AF$, und ziehe EG. Nun ist $\triangle EAF \cong BAD$ (§ 9, da $m = m$, $AE = AB$, $AF = AD$), also $EF = BD$, $p = x$, $o = r$. Ferner ist $\triangle FEG \cong ACD$ (da $v = z$, nach § 5, 2, $EF = BD = CD$, $FG = AF = AD$), also $EG = AC$, $q = C$, $s = u$. Hieraus folgt, dass $p + q + s + m = x + C + u + m$, d. h. die Summe der drei Winkel des $\triangle AEG$ ist gleich der Summe der drei Winkel des $\triangle ABC$. Da nun nach der Voraussetzung $AC < AB$, also auch $EG < AE$, so ist $m < s$, und weil $m + s$ gleich CAB , so ist $m < \frac{1}{2}CAB$. Construirt man auf gleiche Weise aus dem $\triangle AEG$ ein drittes AKL , so wird die Summe der Winkel dieses letztern derjenigen des $\triangle AEG$, also auch derjenigen des $\triangle ABC$ gleich und dabei $n < \frac{1}{2}m < \frac{1}{4}CAB$ sein. Setzt man die Construction dieser Dreiecke lange genug fort, so wird man zu einem Dreieck (welches wir uns entsprechend dem $\triangle ABC$ mit $A'B'C'$ bezeichnet denken wollen) gelangen, worin der $\sphericalangle A'$, während die Summe seiner drei Winkel die nämliche ist wie im $\triangle ABC$, kleiner ist als ein beliebiges Glied der abnehmenden Reihe $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$, ... oder kleiner als irgend ein gegebener Winkel. Construirt man nun aus dem $\triangle A'B'C'$ das folgende abc

so wird die Summe der Winkel a und b gleich A' , also kleiner als irgend ein gegebener \sphericalangle sein, so dass sich die Summe der drei Winkel des $\triangle abc$ beinahe auf den $\sphericalangle c$ allein reducirt. Um das genaue Mass dieser Summe zu haben, verlängere man ac nach d , so ist $c + w = 2R$, also $c = 2R - w$, folglich die Summe der drei Winkel, nämlich $a + b + c = 2R + a + b - w$. Nun kann man annehmen, dass das $\triangle abc$ in seinen Winkeln und Seiten sich verändernd, zugleich alle auf einander folgenden, aus nämlichen Construction hervorgehenden Dreiecke vorstelle, die sich immer mehr der Gränze nähern, in welcher die Winkel a und b Null sind, oder die Gerade acd mit ab zusammenfällt und die Punkte a, c, b in einer geraden Linie liegen. Indem aber die Winkel a, b, w , Null werden, reducirt sich die Summe der drei Winkel des $\triangle abc$, nämlich $2R + a + b - w$ auf $2R$. Folglich ist in jedem Dreieck die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten.

§ 25. *Zusätze.* 1) Sind zwei Winkel eines Dreiecks oder ihre Summe bekannt, so findet man den dritten Winkel, wenn man diese jene Summe von $2R$. abzieht. 2) Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zwei Winkeln eines andern Dreiecks gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des ersten Dreiecks dem dritten Winkel des andern gleich. 3) Kein Dreieck kann mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel haben. 4) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden spitzen Winkel einem rechten gleich, und die Hypotenuse ist grösser als jede der beiden Katheten (§ 18). 5) In jedem $\triangle EFG$ (Fig. §30) ist der Aussenwinkel EGB , welcher durch die Verlängerung der Seite FG entsteht, der Summe der beiden innern, entgegengesetzten Winkel E und F gleich; denn legt man $\sphericalangle EGF$ einmal zu EGB , und dann zu E und F hinzu, so erhält man in jedem Falle $2R$.

§ 26. *Die Summe aller Winkel eines Vielecks ist gleich so viel mal zwei Rechten, als es Seiten hat weniger zwei.*

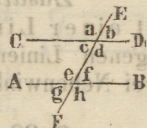
Zieht man an seiner Ecke A des Vielecks die Diagonalen AC, AD, AE , so wird dasselbe in so viele Dreiecke getheilt, als Seiten hat weniger zwei; denn über jeder Seite des Vielecks steht ein Dreieck, mit Ausnahme der beiden Seiten, welche den Winkel A einschliessen. Da nun die Winkel aller Dreiecke die Winkel des Vielecks ausmachen, so ist die Summe der Winkel des Vielecks gleich so viel mal $2R$, als es Dreiecke giebt; mithin gleich so viel mal $2R$, als das Vieleck Seiten hat weniger zwei.

§ 27. *Zusätze.* 1) Die Summe der Winkel eines Vierecks ist gleich $(4-2)2R = 4R$. Sind alle Winkel eines Vierecks gleich gross, so ist jeder ein Rechter. 2) Die Summe der Winkel eines Fünfecks ist $(5-2)2R = 6R$. Hat ein Fünfeck lauter gleiche Winkel, so ist jeder gleich $\frac{6}{5}R$. 3) Die Summe der Winkel eines Sechsecks ist gleich $(6-2)2R = 8R$. Jeder Winkel eines gleichwinkligen Sechsecks beträgt $\frac{8}{6}$ oder $\frac{4}{3}R$.

§ 28. Zwei gerade Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

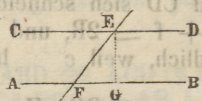
Denn begegneten sie sich in irgend einem Punkte, so gäbe es aus diesem Punkte zwei Senkrechte auf einer Linie, was unmöglich ist (§ 20).

§ 29. Erklärung. Werden zwei Linien AB, CD von einer dritten EF geschnitten, so entstehen acht Winkel, von welchen c und e, oder d und f Gegenwinkel, ferner c und f, oder d und e Wechselwinkel, endlich a und e, c und g, b und f, d und h correspondirende Winkel heissen.



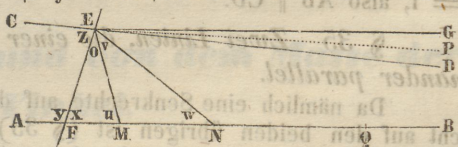
§ 30. Wenn die Summe der Gegenwinkel BFE und DEF, welche zwei Linien AB und CD mit einer dritten EF bilden, zwei Rechte beträgt, so sind die Linien AB und CD parallel.

Sind beide Winkel BFE und DEF gleich, so ist jeder ein Rechter, also $AB \parallel CD$ (§ 28). Sind sie aber ungleich, so ziehe man aus dem Scheitel des grössern Winkels $EG \perp AB$; dann ist nach der Voraussetzung $\angle DEG + \angle GEF + \angle EFG = 2R$, und (§ 25, 4) $\angle GEF + \angle EFG = R$, folglich $\angle DEG = R$, und weil auch $\angle BGE = R$, so ist $AB \parallel CD$ (§ 28).



§ 31. Wenn die Summe der Gegenwinkel, welche zwei Linien AB und CD mit einer dritten EF bilden, kleiner oder grösser als zwei Rechte ist, so müssen die Linien AB und CD, hinlänglich verlängert, einander schneiden.

Wenn $x + \angle DEF < 2R$ ist, und man zieht EG so, dass $\angle GEF = y$ ist, so ist $x + \angle GEF = x + y = 2R$, und da $x + \angle DEF < 2R$, so muss DE innerhalb des $\angle GEF$ fallen. Man ziehe nun durch E eine schräge Linie EM, so ist $u = \angle GEM$, weil, wenn man zu beiden Winkeln $x + o$ hinzulegt, beide Summen gleich $2R$ sind.



Macht man ferner $MN = EM$ und zieht EN, so ist $u = v + w$ und zwar ist $v = w$ (§ 16), also ist $v = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\angle GEM$, so dass mithin EN den $\angle GEM$ halbirt. Wenn man ferner $NQ = EN$ macht, so würde die Linie EQ den $\angle GEN$ halbiren und $\angle GEQ = \frac{1}{4}\angle GEM$ sein. Auf dieselbe Weise kann man $\frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$ des $\angle GEM$ nehmen, und die Theilungslinien werden die AB in Punkten begegnen, welche sich immer weiter von M entfernen, so dass man durch fortgesetzte Halbiring zu einem $\angle GEP$ gelangen muss, der kleiner ist als der $\angle GED$, und dessen Schenkel EP genugsam verlängert AB in einem bestimmten Punkte schneidet; um so mehr also muss die Linie ED, welche innerhalb des $\angle FEP$ liegt, die AB schneiden.

Wenn aber die Summe der Gegenwinkel $y + z > 2R$ ist, so verlängere man AF nach B und CE nach D, und es wird $y + x + z + DEF = 4R$ sein. Zieht man davon $y + z$, welche Summe $> 2R$ ist, ab, so bleibt $x + DEF < 2R$ übrig, folglich müssen sich, dem ersten Falle gemäss, die Linien AB und CD schneiden.

Zusatz. Durch einen Punkt E kann nur eine Parallele mit einer Linie AB gezogen werden; denn unter mehreren aus E gezogenen Linien kann nur eine einzige mit AB an der schneidenden EF zwei Nebenwinkel bilden, deren Summe $2R$ beträgt.

§ 32. (Fig. § 29). Werden zwei Parallellinien AB und CD von einer Linie EF geschnitten, so beträgt die Summe zweier Gegenwinkel zwei Rechte, und es sind jede zwei Wechselwinkel und ebenso jede zwei correspondirende Winkel einander gleich.

Wäre nämlich $d + f$ kleiner oder grösser als $2R$, so müssten AB und CD sich schneiden (§ 31), was gegen die Voraussetzung ist. Da nun $d + f = 2R$, und ebenso $d + c = 2R$ ist, so muss ferner $c = f$, und endlich, weil $c = b$ ist, auch $b = f$ sein.

§ 33. **Zusatz.** Wenn $\sphericalangle d = R$, so ist auch $\sphericalangle f = R$; also ist jede Linie, die auf der einen von zwei Parallelen senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht.

§ 34. (Fig. § 29) Wenn zwei Linien AB und CD mit einer dritten sie durchschneidenden Linie EF gleiche Wechselwinkel oder gleiche correspondirende Winkel bilden, so sind sie parallel.

Wenn $c = f$ ist, so ist, weil $e + f = 2R$, auch $c + e = 2R$, also $AB \parallel CD$ (§ 30). — Ist dagegen $b = f$, so ist, weil $b = c$, auch $c = f$, also $AB \parallel CD$.

§ 35 Zwei Linien, die einer dritten parallel sind, sind auch einander parallel.

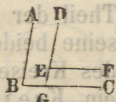
Da nämlich eine Senkrechte auf dieser dritten Linie zugleich senkrecht auf den beiden übrigen ist (§ 33), so müssen diese, weil sie auf einer und derselben Linie senkrecht stehen, parallel sein (§ 28).

§ 36. Parallele Linien AB, CD, sind überall gleich weit von einander entfernt.

Man errichte auf AB in zwei beliebigen Punkten die Senkrechten EF und GH, so sind diese auch auf CD senkrecht (§ 33) und einander parallel (§ 28). Zieht man EH, so ist $\triangle FEH \cong \triangle GHE$ (§ 10), also ist die Entfernung EF der Parallelen im Punkte E ihrer Entfernung GH im Punkte G gleich.

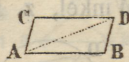


§ 37. Zwei Winkel DEF und B sind gleich, wenn ihre Schenkel nach der nämlichen Seite hin parallel sind.



Verlängert man DE bis G, so ist $\angle DEF = \angle DGC = \angle B$ (§ 32).

§ 38. In einem Parallelogramm ABDC sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich.



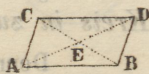
Zieht man AD, so ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (§ 10 und § 32), also $AB = CD$, $BD = AC$, ferner $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB$.

Zusatz. Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

§ 39 (Fig. § 38). Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten gleich, oder nur zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

1) Wenn $AB = CD$, $AC = BD$, so ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (§ 15), also $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA$, folglich $AC \parallel BD$ und $AB \parallel CD$ (§ 34). 2) Wenn $AB \parallel CD$, so ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (§ 9), also $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAD$, folglich auch $AC \parallel BD$ (§ 34).

§ 40. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms ABDC halbiren einander.

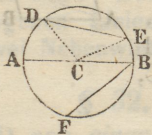


Da $\triangle AEC \cong \triangle BED$, indem $AC = BD$ (§ 38), ferner $\sphericalangle ACE = \sphericalangle DBE$ und $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BDE$ ist (§ 32), so ist $AE = DE$ und $CE = BE$.

II. Vom Kreise und von dem Masse der Winkel.

§ 41. Erklärungen. 1) Die Kreislinie ist eine krumme Linie, deren sämtliche Punkte gleich weit von einem und demselben Punkte, welcher Mittelpunkt (Centrum) heisst, entfernt sind. Der Kreis ist der Theil der Ebene, welcher von der Kreislinie begränzt wird, die mit Bezug auf ihn auch Peripherie oder Kreisumfang heisst. Jede von dem Mittelpunkte nach der Kreislinie gezogene Gerade heisst Radius oder Halbmesser, und jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht, und an beiden Enden von der Kreislinie begränzt ist, wird Durchmesser genannt. In einem und demselben Kreise sind alle Radien gleich, und alle Durchmesser sind einander und dem doppelten Radius gleich. 2) Ein beliebiger

Theil der Peripherie wird Bogen genannt, und die gerade Linie, welche seine beiden Enden verbindet, heisst die Sehne des Bogens. Jedes Stück des Kreises, welches von einem Bogen und einer Sehne begränzt ist, heisst ein Kreisabschnitt oder Segment; dagegen heisst ein Stück des Kreises, welches zwischen einem Bogen und den beiden nach dessen Enden gezogenen Radien liegt, ein Kreisabschnitt oder Sector. 3) Ein Winkel, z. B. ACD, der von zwei Radien gebildet wird, dessen Spitze also



im Mittelpunkte des Kreises liegt, heisst Centriwinkel, während ein Winkel wie ABF, der von zwei Sehnen gebildet wird, und dessen Spitze in der Peripherie des Kreises liegt, ein Peripheriewinkel genannt wird. Der \sphericalangle DCE steht auf dem Bogen DE, und der \sphericalangle ABF auf dem Bogen AF.

4) Jede Gerade, welche den Umfang des Kreises in zwei Punkten schneidet, so dass sie Theile ansserhalb und innerhalb des Kreises hat, wird eine Secante genannt. Hat aber eine gerade Linie nur einen Punkt mit einer Kreislinie gemein, so heisst sie eine Tangente, und der gemeinschaftliche Punkt der Berührungspunkt. Zwei Kreisumfänge berühren sich, wenn sie nur einen Punkt gemein haben. 5) Ein Vieleck heisst eingeschrieben in den Kreis, und dieser heisst umschrieben um jenes, wenn alle Seiten des Vielecks Sehnen des Kreises sind; ein Vieleck heisst umschrieben um den Kreis, und dieser heisst eingeschrieben in jenes, wenn alle Seiten des Vielecks Tangenten des Kreises sind.

§ 42. (Fig. § 41). Jeder Durchmesser AB theilt den Kreis in zwei gleiche Theile.

Denn, legt man die Figur ADEB so auf AFB, dass die Endpunkte des Durchmessers AB unverrückt bleiben, so muss Bog. ADEB genau auf Bog. AFB fallen, weil sonst nicht alle Punkte beider Bogen gleich weit vom Mittelpunkte entfernt wären.

§ 43. (Fig. § 41). Jede Sehne DE ist kleiner als der Durchmesser.

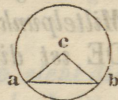
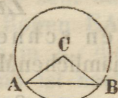
Denn, wenn man die Radien CD und CE zieht, so ist $DE < DC + CE$, also auch $DE < AB$.

§ 44. Eine gerade Linie kann eine Kreislinie höchstens in zwei Punkten schneiden.

Schnitte sie nämlich den Umfang eines Kreises in drei Punkten, so würden sich von dem Mittelpunkte des Kreises drei gleiche Linien nach der Geraden ziehen lassen, was unmöglich ist (§ 21, Z. 2).

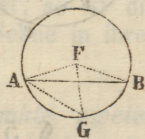
§ 45. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Bogen gleiche Sehnen, und umgekehrt, zu gleichen Sehnen gleiche Bogen.

Es seien die Radien AC und ac einander gleich. Ist nun Bog. $AB = ab$, und legt man die Kreise auf einander, so dass c auf C , a auf A fällt, so muss der Bogen ab genau mit dem Bogen AB , also auch b mit B zusammenfallen, woraus folgt, dass $ab = AB$. Wenn umgekehrt die Sehnen AB und ab einander gleich vorausgesetzt werden, so ist $\triangle ABC \cong abc$ (§ 15), und die Kreise lassen sich so auf einander legen, dass c auf C , a auf A , b auf B fällt, also liegen auch die Bogen AB und ab in einander.

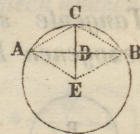


§ 46. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehört zu dem grössern Bogen eine grössere Sehne, und umgekehrt, zu der grössern Sehne ein grösserer Bogen, jedoch vorausgesetzt, dass die Bogen kleiner sind als der halbe Umkreis.

Es sei Bog. $AGB >$ Bog. AG . Man ziehe die Radien FA , FG , FB , so sind in den Dreiecken AFB und AFG zwei Seiten gegenseitig gleich, aber der eingeschlossene $\sphericalangle AFB >$ $\sphericalangle AFG$, folglich ist $AB >$ AG (§ 13). Umgekehrt, wenn Sehne $AB >$ AG , so folgt aus den nämlichen Dreiecken, dass $\sphericalangle AFB >$ $\sphericalangle AFG$ (§ 14), also Bog. $AGB >$ AG .



§ 47. Der Radius EC , welcher auf der Sehne AB senkrecht steht, halbirt diese, so wie den zu ihr gehörigen Bogen.



Da $\triangle ADE \cong BDE$ (§ 23 und § 25, 4), so ist $AD = BD$, also $AC = BC$ (§ 21, 2), folglich Bog. $AC =$ Bog. BC (§ 45).

§ 48. Zusätze. 1) Der Mittelpunkt des Kreises, der Sehne und des ihr zugehörigen Bogens liegen in einer auf der Sehne senkrechten Geraden, so dass eine gerade Linie, welche durch zwei dieser Punkte geht, auch durch den dritten gehen und auf der Sehne senkrecht sein muss. 2) Eine auf die Mitte einer Sehne senkrecht gezogene Gerade geht durch den Mittelpunkt des Kreises und des zu der Sehne gehörigen Bogens.

§ 49. Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte A , B , C , lässt sich immer eine Kreislinie legen, aber nur eine.

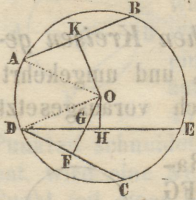
Zieht man AB und BC , und errichtet auf diese Linien in ihrer Mitte die Senkrechten DF und EF , so müssen sich letztere in irgend einem Punkte F schneiden (§ 31), weil, wenn man sich DE gezogen denkt, in $\triangle FDE$ Winkel $D + E <$ $2R$ wäre. Nun ist $FA = FB = FC$ (§ 22), mithin geht die aus F mit FA beschriebene Kreislinie durch



A , B , C . — Könnte ferner noch eine zweite Kreislinie durch diese drei Punkte gehen, so müsste ihr Mittelpunkt sowol in der Geraden DF als in EF liegen (§ 22); zwei Gerade können sich aber nur in einem Punkte schneiden; folglich kann durch A , B , C nur eine Kreislinie gehen.

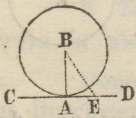
Zusatz. Zwei Kreislinien können sich nur in zwei Punkten schneiden; denn hätten sie drei Punkte gemein, so würden sie den nämlichen Mittelpunkt haben und nur eine und dieselbe Kreislinie ausmachen.

§ 50. Gleiche Sehnen AB und DC sind gleich weit vom Mittelpunkte O entfernt; und von zwei ungleichen Sehnen AB und DE ist die kleinere AB vom Mittelpunkte weiter entfernt.



Errichtet man auf AB und DC in ihrer Mitte die Senkrechten KO und FO, und zieht die Radien OA und OD, so ist $\triangle OAK \cong \triangle ODF$ (§ 23, denn $AK = DF$, $OA = OD$, $\sphericalangle K = \sphericalangle F$), also $OK = OF$, d. h. AB und DC sind gleich weit entfernt von O. — Ferner, wenn $AB < DE$, so ist $\text{Bog. } AB < \text{Bogen } DCE$ (§ 46), und schneidet man von dem Bogen DCE ein Stück $DC = \text{Bogen } AB$ ab, zieht DC, fället $OF \perp DC$, sowie $OH \perp DE$, so ist $OF > OH$ (§ 21), und weil $OF = OK$, da $DC = AB$, so ist auch $OK > OH$, d. h. AB ist von O weiter entfernt als DE.

§ 51. Eine auf dem Radius in seinem Endpunkte senkrechte Gerade ist eine Tangente des Kreises, und umgekehrt: eine Tangente steht senkrecht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Radius.



Wenn $CD \perp BA$, so ist jede schiefe Linie $BE > AB$ (§ 21), folglich liegt der Punkt E ausserhalb des Kreises. Da also die Gerade CD nur einen Punkt A mit dem Kreise gemein hat, so ist sie eine Tangente. — Wenn umgekehrt CD als Tangente nur den Punkt A mit dem Kreise gemein hat, so muss jede vom Radius BA verschiedene aus B zur CD gezogene Linie $BE > BA$ sein; es ist daher BA als kürzeste Linie von B zur CD auf dieser senkrecht (§ 21).

Zusatz. Durch einen gegebenen Punkt der Peripherie lässt sich nur eine einzige Tangente an den Kreis ziehen. Könnte man nämlich noch eine zweite ziehen, so stände dieselbe auf dem Radius schief, und die aus dem Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte würde kleiner als der Radius sein, so dass die vermeintliche zweite Tangente in den Kreis hinein treten müsste.

§ 52. Zwischen zwei Parallelen, welche den Kreis schneiden oder berühren, liegen gleiche Bogen.



1) Wenn die beiden Parallelen BC und DE Sehnen sind, so ziehe man den Radius $KA \perp BC$, so ist KA auch $\perp DE$ (§ 33), folglich ist der Punkt A die Mitte der Bogen BAC und DAE (§ 47), also $\text{Bogen } BA = \text{Bogen } CA$ und $\text{Bogen } DA = \text{Bogen } EA$, daher $\text{Bogen } BD = \text{Bogen } CE$,
 2) Wenn eine von den beiden Parallelen DE und FG eine Sehne, die andere aber eine Tangente ist, so ziehe man

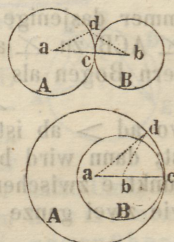
zum Berührungspunkte A den Radius KA. Dieser wird senkrecht sein auf FG (§ 51) und daher auch auf DE, folglich ist Bogen DA = Bogen EA. 3) Wenn beide Parallelen FG und HI Tangenten sind, die eine in A, die andere in L, so ziehe man eine Sehne BC mit ihnen parallel, dann ist nach dem vorhergehenden Falle Bogen BA = Bogen CA und Bogen BL = Bogen CL, also Bogen ABL = Bogen AEL.

§ 53. (Fig. § 75). *Schneiden sich zwei Kreislinien, so steht die gerade Linie durch ihre Mittelpunkte auf der die beiden Durchschnittspunkte verbindenden Sehne senkrecht in deren Mitte.*

Denkt man sich die gerade BD gezogen, und errichtet man auf diese, den beiden Kreisen gemeinschaftliche Sehne, in ihrer Mitte eine Senkrechte, so muss letztere durch beide Mittelpunkte C und E gehen (§ 48, 2); da sich nun durch zwei Punkte nur eine Gerade ziehen lässt, so ist die durch die Mittelpunkte gehende Gerade CE zugleich auf der Sehne in ihrer Mitte senkrecht.

§ 54. *Wenn die Entfernung ab der Mittelpunkte zweier Kreise A und B (die Centrallinie) gleich ist der Summe oder der Differenz ihrer Radien, so berühren sich die Kreise bezüglich äusserlich oder innerlich.*

1) Wenn die Centrallinie ab gleich ist der Summe der Radien, wie in der ersten Figur, so liegt jeder Punkt d der Peripherie A, mit Ausnahme des Punktes c, ausserhalb des andern Kreises; denn es ist $ad + bd > ac + bc$, also $bd > bc$. 2) Ist die Centrallinie ab gleich der Differenz der Radien, wie in der zweiten Figur, so findet für jeden Punkt d der Peripherie A mit Ausnahme eines Punktes c dasselbe statt; denn es ist $ab + bd > ad$, und $ad = ab + bc$, also $ab + bd > ab + bc$ oder $bd > bc$.



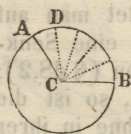
§ 55. *Zusätze.* Wenn sich zwei Kreise berühren, so liegen die Mittelpunkte und der Berührungspunkt in einer geraden Linie. 2) Zwei Kreise schneiden sich, wenn ihre Centrallinie kleiner als die Summe, und zugleich grösser als die Differenz der Radien ist. 3) Alle Kreise, deren Mittelpunkte in einer und derselben Geraden liegen, und welche durch einen und denselben Punkt gehen, berühren sich in diesem Punkte, und eine Senkrechte auf der Centrallinie in diesem Punkte ist eine Tangente für alle diese Kreise.

§ 56. (Fig. § 45.) *In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen, und umgekehrt zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel.*

1) Wenn beide Kreise mit dem nämlichen Radius beschrieben sind, und $\sphericalangle C = c$ ist, so ist $\triangle ABC \cong abc$ (§ 9), also $AB = ab$, und

daher Bogen $AB =$ Bogen ab (§ 45). 2) Wenn dagegen Bogen $AB =$ Bogen ab ist, und man legt die Kreise so auf einander, dass c auf C zu liegen kommt und Bogen ab ab genau mit Bogen AB zusammen fällt, so fallen die drei Winkelspitzen des $\triangle ABC$ mit denen des $\triangle abc$ zusammen, und es ist daher $\sphericalangle C = c$.

§ 57. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Centriwinkel ACB und acb wie die zu ihnen gehörigen Bogen AB und ab .



Es sei $\sphericalangle ACD$ in dem $\sphericalangle ACB$ fünf Mal, und in $\sphericalangle acb$ vier Mal enthalten. Da nun die Theile beider Winkel sämtlich unter sich gleich sind, so sind die Theile der zugehörigen Bogen ebenfalls sämtlich einander gleich (§ 56), und es müssen sich daher nicht bloß die Winkel, sondern auch die zugehörigen Bogen wie 5 zu 4 enthalten, d. h. die Winkel verhalten sich wie ihre Bogen. Es ist klar, dass das Nämliche stattfindet, wenn man auch statt 5 und 4 beliebige andere Zahlen annimmt. Kann man also nur das Verhältniss der Winkel ACB und acb in ganzen Zahlen ausdrücken, so werden sich die Bogen AB und ab stets wie zwei Winkel verhalten.

Es ist aber auch jedes beliebige Verhältniss der Centriwinkel immer dasjenige der Bogen. Denn, fände dieses nicht statt, so würde sich $\sphericalangle ACB$ zu $\sphericalangle acb$ verhalten, wie AB zu irgend einem grössern oder kleinern Bogen als ab . Gesetzt, es verhalte sich

$\sphericalangle ACB : \sphericalangle acb =$ Bogen $AB : \text{Bogen } ad$,
wo $ad > ab$ ist, so theile man AB in gleiche Theile, deren jeder $< bd$ ist; dann wird beim Auftragen dieser Theile auf Bogen ad ein Theilungspunkt e zwischen b und d fallen, und die Bogen AB und ae werden sich wie zwei ganze Zahlen verhalten, so dass

$$\sphericalangle ACB : \sphericalangle ace = \text{Bogen } AB : \text{Bogen } ae.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$\sphericalangle acb : \sphericalangle ace = \text{Bogen } ad : \text{Bogen } ae.$$

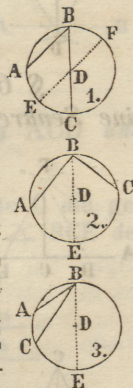
Es ist aber $acb < ace$, dagegen $ad > ae$; also kann sich $\sphericalangle ACB$ zu $\sphericalangle acb$ nicht verhalten, wie Bogen AB zu einem grössern Bogen als ab . Da sich ebenso zeigen lässt, dass das vierte Glied der Proportion nicht kleiner als ab sein könne, so muss sich verhalten $\sphericalangle ACB : \sphericalangle acb =$ Bogen $AB : \text{Bogen } ab$.

§ 58. *Zusätze.* 1) Der rechte Winkel dient als Mass für alle übrigen Winkel. Da aber, wenn der Centriwinkel in irgend einem Verhältnisse zu- oder abnimmt, auch der zugehörige Bogen in dem nämlichen Verhältnisse grösser oder kleiner wird, so kann man den Bogen zum Masse der Winkel annehmen. Vergleicht man den Bogen, welcher zum Masse eines Winkels dient, mit dem vierten Theile des Kreisumfanges, so findet man das Verhältniss des gegebenen Winkels zu einem rechten. 2) Zwei Kreisabschnitte DCB und acb in gleichen Kreisen (Figur § 57),

sind gleich, wenn ihre Winkel am Mittelpunkte gleich sind, und verhalten sich allgemein zu einander, wie diese Winkel; folglich verhalten sich die Kreisabschnitte DCB und acb wie die Bogen DB und ab.
 3) Man theilt den Kreisumfang in 360 gleiche Theile oder Grade, jeden Grad in 50 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden.

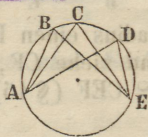
§ 59. Ein Peripheriewinkel $\angle ABC$ hat zum Masse die Hälfte des Bogens AC zwischen seinen Schenkeln.

1) Geht der eine Schenkel des $\angle ABC$ durch den Mittelpunkt D des Kreises, und zieht man den Durchmesser $EF \parallel AB$, so ist $\angle B = \angle EDC = \text{Bogen } CE = \text{Bogen } BF = \text{Bogen } AE$ (§ 56, § 52). Da also $\text{Bogen } CE = \frac{1}{2}AC$, so ist $\angle B = \text{Bogen } \frac{1}{2}AC$. 2) Liegt der Mittelpunkt D zwischen den Schenkeln des $\angle ABC$, und zieht man aus D den Durchmesser BE , so ist $\angle ABE = \text{Bog. } \frac{1}{2}AE$ und $\angle CBE = \text{Bog. } \frac{1}{2}CE$, also $\angle ABC = \text{Bog. } \frac{1}{2}AC$. 3) Liegt D ausserhalb der Schenkeln des $\angle ABC$, und zieht man den Durchmesser BE , so ist $\angle ABE = \text{Bogen } \frac{1}{2}AE$ und $\angle CBE = \text{Bog. } \frac{1}{2}CE$, also $\angle ABC = \angle ABE - \angle CBE = \text{Bogen } \frac{1}{2}AE - \frac{1}{2}CE = \text{Bog. } \frac{1}{2}(AE - CE) = \text{Bog. } \frac{1}{2}AC$.



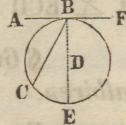
Ex. 111. mit. Theil.

§ 60. Zusätze. 1) Alle Peripheriewinkel wie B, C, D, \dots , welche auf dem nämlichen Bogen AE stehen, sind gleich, weil jeder derselben von $\frac{1}{2}AE$ gemessen wird. 2) Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter, weil er zum Masse den vierten Theil des ganzen Umkreises hat. 3) Jeder Winkel, welcher auf einem Bogen steht, der grösser oder kleiner ist als der halbe Umkreis, ist beziehungsweise stumpf oder spitz. 4) In einem dem Kreise eingeschriebenen Vierecke betragen immer zwei gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechte, denn sie haben die Hälfte des ganzen Umfanges zum Masse. 5) Ein Peripheriewinkel ist halb so gross als ein Centriwinkel, welcher mit ihm auf gleichem Bogen steht.



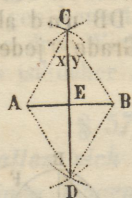
§ 61. Der von einer Tangente und einer Sehne gebildete Winkel ABC hat zum Masse die Hälfte des Bogens BC zwischen seinen Schenkeln.

Zieht man aus dem Berührungspunkte B den Durchmesser BE , so ist der rechte $\angle ABE = \text{Bogen } \frac{1}{2}BCE$ und $\angle CBE = \text{Bogen } \frac{1}{2}CE$, also $\angle ABC = \angle ABE - \angle CBE = \text{Bog. } \frac{1}{2}BCE - \text{Bogen } \frac{1}{2}CE = \text{Bogen } \frac{1}{2}(BCE - CE) = \text{Bog. } \frac{1}{2}BC$. Eben so ist $\angle CBF = \text{Bog. } \frac{1}{2}CEB$.



III. Aufgaben.

§ 62. Eine gerade Linie AB zu halbiren.

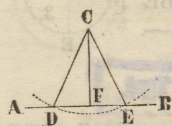


Man beschreibe aus A und B zwei Bogen mit einem Radius, der so gross ist, dass sich jene Bogen in C und D schneiden, und ziehe CD, so ist $AE = BE$. Denn $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (§ 15), also $x = y$, und weil $\triangle ACE \cong \triangle BCE$ (§ 9), so ist $AE = BE$.

§ 63. Aus einem gegebenen Punkte C einer Geraden AB eine Senkrechte auf diese zu errichten.

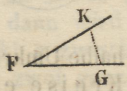


Man nehme zwei Punkte D und E in gleicher Entfernung von C, beschreibe aus ihnen mit einem Radius, der grösser ist als CD, zwei Bogen, die sich in F schneiden, und ziehe FC, so ist diese die gesuchte Senkrechte. Denn weil $\triangle CDF \cong \triangle CEF$ (§ 15), so sind die Winkel bei C einander gleich, also rechte.



§ 64. Aus einem gegebenen Punkte C ausserhalb einer Geraden AB eine Senkrechte auf diese zu fällen.

Aus C beschreibe man mit einem hinreichend grossen Radius einen Bogen, welcher die AB in D und E schneidet, halbire DE in F, und ziehe CF, so ist diese die gesuchte Senkrechte. Denn weil $\triangle CDF \cong \triangle CEF$ (§ 15), so ist $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CFE$, also $CF \perp AB$.



§ 65. In dem Punkte C der Linie AB einen Winkel zu beschreiben, der dem gegebenen Winkel F gleich ist.

Aus F beschreibe man mit einem beliebigen Radius einen Bogen, der die Schenkel des gegebenen Winkels in G und K schneidet, beschreibe darauf aus C mit dem nämlichen Radius einen unbestimmten Bogen, welcher AB in E schneidet, ferner mit einem, der Sehne GK gleichen Radius aus E einen Bogen, welcher den unbestimmten Bogen in D schneidet, und ziehe CD, so ist $\sphericalangle ECD = \sphericalangle F$, weil $\triangle CDE \cong \triangle FKG$ (§ 15).

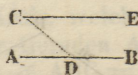
§ 66. (Fig. § 47). Einen gegebenen Bogen oder Winkel zu halbiren.

Um den Bogen ACB zu halbiren, errichte man in der Mitte D seiner Sehne AB eine Senkrechte DC, indem alsdann Bog. AC = Bog. BC ist, (§ 48, 2). Um den Winkel AEB zu halbiren, beschreibe man aus E mit einem beliebigen Radius einen Bogen ACB, suche dessen Mitte C, und ziehe CE, so ist $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BEC$ (§ 56).

Zusatz. Ein gegebener Bogen oder Winkel lässt sich durch fortgesetztes Halbiren in 4, 8, 16 ... gleiche Theile theilen.

§ 67. *Durch einen gegebenen Punkt C eine Parallele mit einer gegebenen Linie AB zu ziehen.*

Man ziehe durch C eine die AB schneidende Gerade CD, lege den \sphericalangle ADC an die Gerade CD auf der entgegengesetzten Seite in C an, so ist der Schenkel CE die verlangte Parallele, weil die Wechselwinkel ADC und DCE gleich sind.



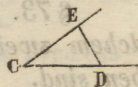
§ 68. (Fig. § 4). *Aus zwei gegebenen Winkeln ACD und DCE eines Dreiecks den dritten Winkel zu finden.*

Man ziehe eine Gerade AB und beschreibe im Punkte C die gegebenen Winkel neben einander, so ist der übrig bleibende \sphericalangle BCE der gesuchte, weil diese drei Winkel zusammen gleich $2R$ sind.

§ 69. *Ein Dreieck zu beschreiben, zu welchem zwei Seiten a und b, und der zwischenliegende Winkel C gegeben sind.*

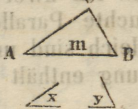


Auf den Schenkeln des \sphericalangle C mache man $CD = a$, $CE = b$ und ziehe DE, so ist CDE das verlangte \triangle .



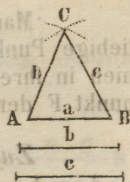
§ 70. *Ein Dreieck zu beschreiben, zu welchem eine Seite m und zwei Winkel x und y gegeben sind.*

Sollen die Winkel x und y der Seite m anliegen, so lege man an diese in ihren Endpunkten den \sphericalangle A = x, und den \sphericalangle B = y an; die verlängerten Schenkel dieser Winkel schneiden sich in C und geben das gesuchte \triangle ABC. Soll dagegen einer der gegebenen Winkel der Seite m gegenüberliegen, so suche man den dritten Winkel des Dreiecks (§ 68). Man hat dann ebenfalls die beiden der Seite m anliegenden Winkel, und verfähre wie vorhin.



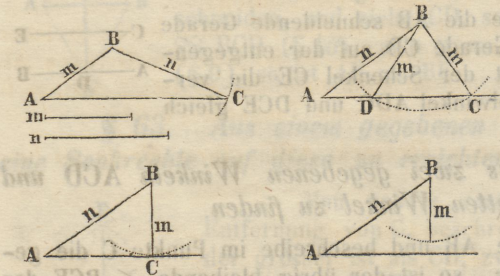
§ 71. *Mit drei gegebenen Seiten a, b, c ein Dreieck zu beschreiben.*

Man beschreibe mit b und c als Radien aus den Endpunkten der Geraden a zwei Bogen, welche sich in C schneiden, und ziehe AC und BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.



§ 72. *Ein Dreieck zu beschreiben, zu welchem zwei ungleiche Seiten m und n, und ein, der einen dieser Seiten gegenüberliegender Winkel A gegeben sind.*

1) Soll $\sphericalangle A$ der grössern Seite n gegenüberliegen, so mache man, wie die erste Figur zeigt, den einen Schenkel AB des $\sphericalangle A$ gleich m , und beschreibe aus B mit n als Radius einen Bogen, welcher den andern Schenkel in einem Punkte C schneiden wird, so dass ABC das verlangte \triangle sein wird. 2) Soll $\sphericalangle A$ der kleinern Seite m gegenüberliegen,



so ändere man die vorige Construction nur darin ab, dass man m mit n vertauscht, und dann können, je nach der jedesmaligen Grösse der Seite m , welche aber immer kleiner als n bleibt, entweder wie in der zweiten Figur zwei Dreiecke ABD und ABC entstehen, welche beide der Aufgabe genügen, oder, wie in der dritten

Figur, nur ein bestimmtes (rechtwinkliges) Dreieck, sobald nämlich m gleich ist der aus B auf AC gefällten Senkrechten, oder endlich, es entsteht gar kein Dreieck, wie in der vierten Figur, wenn nämlich m kleiner als jene Senkrechte gegeben wäre.

§ 73. (Fig. § 38). Ein Parallelogramm zu beschreiben, zu welchem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Man nehme eine Linie AB gleich einer der gegebenen Seiten, lege in A einen $\sphericalangle BAC$ gleich dem gegebenen an, mache den Schenkel AC gleich der andern gegebenen Seite, beschreibe aus B mit AC , und aus C mit AB zwei Bogen, welche sich in D schneiden, so ist $ABDC$ das gesuchte Parallelogramm, weil die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks gleich sind und dieses die gegebenen Stücke in der vorgeschriebenen Ordnung enthält (§ 39).

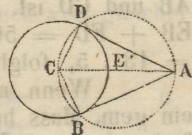
§ 74. (Fig. § 49). Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises oder eines gegebenen Bogens zu finden.

Man nehme in dem gegebenen Kreisumfange oder Bogen drei beliebige Punkte A, B, C , ziehe AB und BC , und errichte auf diese Linien in ihrer Mitte die Senkrechten DF und EF , so wird ihr Durchschnittspunkt F der gesuchte Mittelpunkt sein (§ 48, 2).

Zusatz. Dasselbe Verfahren dient, durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte A, B, C , sowie um ein gegebenes Dreieck eine Kreislinie zu beschreiben.

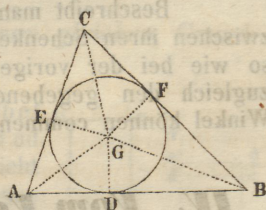
§ 75. Durch einen gegebenen Punkt eine Tangente an einen Kreis zu ziehen.

Liegt der Punkt in dem Kreisumfange selbst, so zieht man zu demselben einen Radius und errichte auf diesen im Endpunkte eine Senkrechte, so wird diese die verlangte Tangente sein (§ 51). Liegt aber der gegebene Punkt A ausserhalb des gegebenen Kreises, so ziehe man von A nach dessen Mittelpunkte C eine Gerade, halbire diese in E und beschreibe aus E mit dem Radius EC einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in B und D schneidet, so ist jede der Geraden AB und AD die verlangte Tangente. Denn zieht man BC, so ist $\sphericalangle ABC = R$ (§ 60, 2), also $AB \perp BC$, folglich ist AB eine Tangente (§ 51).



§ 76. In ein gegebenes Dreieck ABC einen Kreis zu beschreiben.

Man halbire die Winkel A und B mittels der Linien AG und BG, welche sich in G schneiden, und ziehe aus G auf die Seiten des Dreiecks die Senkrechten GD, GE, GF, welche einander gleich sind, weil $\triangle ADG \cong \triangle AEG$ und ebenso $\triangle BDG \cong \triangle BFG$ (§ 25, 2 und § 10). Der mit einer dieser Senkrechten aus G beschriebene Kreis muss folglich die Seiten des Dreiecks berühren, so dass diese an dem beschriebenen Kreise Tangenten sein werden.



Zusatz. Die drei Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

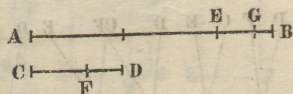
§ 77. Ueber einer gegebenen Linie AB einen Kreisabschnitt zu beschreiben, in welchem ein Peripheriewinkel dem gegebenen Winkel x gleich ist.

Man mache an AB in A einen $\sphericalangle BAD = x$, ziehe aus A die $AC \perp AD$, und aus E, der Mitte von AB, die $EC \perp AB$; aus dem Durchschnittspunkte C beschreibe man mit CA einen Kreis, so ist AFB der verlangte Abschnitt. Denn, weil AD eine Tangente, und ein auf dem Bog. AB stehender Peripheriewinkel $= \sphericalangle BAD$ ist, indem beide von Bog. $\frac{1}{2}AB$ gemessen werden (§ 61, § 59), so ist derselbe auch gleich x , also AFB der gesuchte Kreisabschnitt.



§ 78 Das Verhältniss zwischen zwei gegebenen geraden Linien AB und CD in Zahlen zu finden.

Man trage die kleinere Linie CD, so oft es angeht, auf die grössere AB, z. B. 2 Mal, und es bleibe der Rest EB. Diesen Rest trage man auf die CD so oft es angeht, z. B. ein Mal, und es bleibe der Rest FD. Diesen Rest trage man auf den ersten EB so oft als möglich ist, z. B. ein Mal, und endlich sei der nachbleibende Rest GB in FD genau 2 Mal enthalten, so dass also GB das gemeinschaftliche Mass der Linien



AB und CD ist. Da nun $FD = 2GB$, $EB = FD + GB = 3GB$, $CD = EB + FD = 5GB$, $AB = 2CD + EB = 13GB$, so verhält sich $AB : CD = 13 : 5$, folglich ist $AB = \frac{13}{5}CD$ oder $CD = \frac{5}{13}AB$.

Wenn man nicht wie in diesem Beispiele, wo die beiden Linien ein gem. Mass besitzen und daher commensurabel heissen, einen Rest finden kann, der in dem vorhergehenden genau aufgeht, wie weit man auch das Verfahren fortsetzen mag, so haben beide Linien kein gem. Mass, oder sie sind incommensurabel. Lässt man in diesem Falle endlich einen Rest ganz weg, so erhält man ein genähertes Verhältniss, welches desto genauer sein wird, je weiter man die Operation fortgesetzt hat.

§ 79. Das Verhältniss zwischen zwei gegebenen Winkeln in Zahlen zu finden.

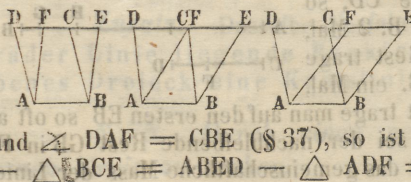
Beschreibt man mit gleichem Radius aus den Scheiteln der Winkel zwischen ihren Schenkeln Kreisbogen, so kann man zwischen diesen, eben so wie bei der vorigen Aufgabe, das Zahlenverhältniss ermitteln, welches zugleich den gegebenen Winkeln zukommt (§ 57). Auch Bogen oder Winkel können commensurabel oder incommensurabel sein.

IV. Vom Verhältnisse der geradlinigen Figuren.

§ 80. Erklärungen. 1) Figuren heissen einander gleich, wenn sie einen gleichen Flächeninhalt haben. Gleiche Figuren können auch eine ungleiche Gestalt haben, es kann z. B. ein Dreieck einem Vierecke gleich sein. 2) Zwei Vielecke nennt man ähnlich, wenn bei gleicher Seitenzahl derselben die Winkel in beiden der Reihe nach gegenseitig gleich, und die homologen oder übereinstimmig liegenden Seiten proportional sind. Congruente Figuren sind immer gleich und ähnlich, aber ähnliche Figuren können sehr ungleich sein. 3) In ungleichen Kreisen heissen Bogen, Abschnitte und Abschnitte ähnlich, wenn sie zu gleichen Mittelpunkts winkeln gehören. 4) Die Höhe eines Dreiecks ist die Senkrechte aus irgend einer Winkelspitze auf die gegenüberliegende Seite, welche alsdann die Grundlinie heisst. Die Höhe eines Parallelogramms ist die Senkrechte zwischen zwei, als Grundlinien angenommenen, gegenüberliegenden Seiten. 6) Die Höhe eines Trapezes ist die Senkrechte zwischen seinen parallelen Seiten.

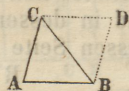
§ 81. Parallelogramme ABCD und ABEF von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Wegen der gleichen Höhe der Parallelogramme müssen die obere Grundlinien in der nämlichen mit AB, parallelen Geraden DE liegen. Da nun $AD = BC$, $AF = BE$ (§ 38) und $\angle DAF = \angle CBE$ (§ 37), so ist $\triangle ADF \cong \triangle BCE$, also $ABCD = ABED$ — $\triangle BCE = ABED$ — $\triangle ADF = ABED$.



Zusatz. Jedes Parallelogramm ist einem Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe gleich.

§ 82. Jedes Dreieck ABC ist die Hälfte eines Parallelogramms oder eines Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe.

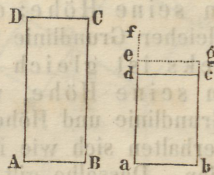


Zieht man aus B die $BD \parallel AC$ und aus C die $CD \parallel AB$, so ist AD ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe mit dem $\triangle ABC$. Da nun $\triangle ABC \cong BCD$ (§ 10), so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}AD$.

Zusatz. Alle Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich gross als Hälften von gleichen Parallelogrammen.

§ 83. Zwei Rechtecke AC und ac von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

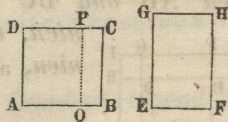
Wenn die Höhen AD und ad commensurabel sind, und ihr gem. Mass m Mal in AD, und n Mal in ad enthalten ist, so verhält sich $AD : ad = m : n$. Zieht man nun in beiden Rechtecken durch die Theilungspunkte, welche durch das Auftragen des gem. Masses auf ihren Höhen entstehen, parallele Linien zur Grundlinie, so theilt man das Rechteck AC in m, und das Rechteck ac in n einander gleiche Rechtecke (§ 81), so dass $AC : ac = m : n$. Aus beiden Proportionen folgt $AC : ac = AD : ad$.



Wenn AD und ad incommensurabel sind, so ist diese letzte Proportion ebenfalls richtig. Denn verhielte sich $AC : ac = AD : af$, wo $af > ad$ wäre, so kann man AD in eine so grosse Anzahl gleicher Theile theilen, dass, wenn man dieselben von a nach f hinträgt, ein Theilungspunkt e zwischen d und f fielen. Zieht man nun $eg \parallel ab$, so würde man für die Rechtecke AC und ag, weil ihre Höhen commensurabel sind, haben $AC : ag = AD : ae$. Aus beiden Proportionen erhielte man $ac : ag = af : ae$, was aber nicht stattfinden kann, indem $ac < ag$, dagegen $af > ae$ ist. Ebenso kann das vierte Glied der Proportion nicht kleiner sein als ad, folglich muss sich immer verhalten $AC : ac = AD : ad$.

§ 84. Zwei beliebige Rechtecke AC und EH verhalten sich zu einander, wie die Produkte ihrer Grundlinien in die Höhen.

Es habe AC eine grössere Grundlinie, aber eine kleinere Höhe als EH. Wenn man nun $AQ = EF$ nimmt und $QP \parallel BC$ zieht, so ist (§ 83) $AP : EH = AD : EG$. Betrachtet man dagegen AD als die Grundlinie der Rechtecke AC und AP, also AB und AQ als ihre Höhen, so ist $AC : AP = AB : AQ$. Multiplicirt man beide Proportionen in einander, den gemeinsamen Factor AP weglassend, und EF statt AQ setzend, so erhält man $AD : EH = AB \times AD : EF \times EG$.

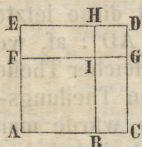


§ 85. *Zusätze.* 1) Zur Einheit des Flächenmasses nimmt man immer das Quadrat, dessen Seite die Einheit des Längenmasses ist. Bezeichnet nun R ein Rechteck, in dessen Grundlinie die Längeneinheit m Mal, und in dessen Höhe sie n Mal enthalten ist, bedeutet ferner Q ein Quadrat, dessen Seite gleich ist der Längeneinheit, so ist

$$R : Q = mn : 1 \cdot 1 \text{ oder } R : Q = mn : 1, \text{ also}$$

$$R = mn \cdot Q, \text{ oder } \frac{R}{Q} = mn, \text{ d. h.}$$

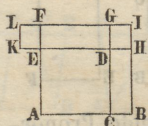
wenn die Grundlinie und die Höhe eines Rechtecks, durch die Längeneinheit gemessen, die Zahlen m und n geben, so giebt das Rechteck durch das Quadrat jener Längeneinheit gemessen die Zahl mn , was man gewöhnlich kurz so ausdrückt: Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte seiner Grundlinie in seine Höhe. 2) Der Inhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz der Zahl, welche die Länge seiner Seite angiebt. 3) Der Inhalt eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Produkte seiner Grundlinie in seine Höhe; denn ein Parallelogramm ist gleich einem Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§ 81. Z). 4) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produkts seiner Grundlinie in seine Höhe, weil ein \triangle die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe ist (§ 82). 5) Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen, und von gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien. Dasselbe gilt von Parallelogrammen.



§ 86. *Das Quadrat AD über der Summe zweier Linien AB und BC ist gleich der Summe der Quadrate beider Linien, nebst dem doppelten Rechteck aus beiden Linien, also $(AB + BC)^2 = AB^2 + 2AB \times BC + BC^2$.*

Macht man über AC das Quadrat AD, ferner AF $= AB$, und zieht $BH \parallel AE$, $FG \parallel AC$, so ist AD oder $(AB + BC)^2 = AI + BG + FH + ID = AB^2 + 2AB \times BC + BC^2$. Bezeichnet man AB und BC mit a und b , so ist der algebraische Ausdruck dieses Satzes $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

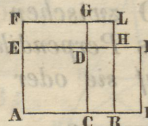
§ 87. *Das Quadrat AD über der Differenz zweier Linien AB und BC ist gleich der Summe der Quadrate beider Linien, weniger dem doppelten Rechteck aus beiden Linien, also $(AB - BC)^2 = AB^2 - 2AB \times BC + BC^2$.*



Man mache über AB das Quadrat BF, nehme $AE = AC$, ziehe $CG \parallel AF$, $HK \parallel AB$, und vollende das Quadrat EL, so ist AD oder $(AB - BC)^2 = BF - BG - DL + EL = AB^2 - 2AB \times BC + BC^2$. Diesem Satze entspricht die algebraische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

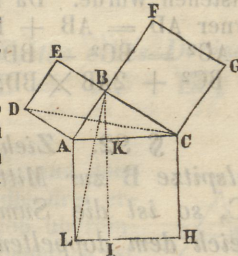
§ 88. Das Rechteck AL aus der Summe und Differenz zweier Linien AB und BC ist gleich dem Unterschiede der Quadrate beider Linien, also $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

Man beschreibe über AB und AC die Quadrate AI und AD, verlängere AB um $BK = BC$ und vollende das Rechteck AL, dessen Grundlinie $AK = AB + BC$, und dessen Höhe $AE = AB - BC$ ist. Da nun $BL = DF$, so ist AL oder $(AB + BC) \times (AB - BC) = AH + DF = AI - DI = AB^2 - BC^2$. Der entsprechende algebraische Ausdruck ist $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.



§ 89. Das Quadrat AH über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate AE und CF über beiden Katheten.

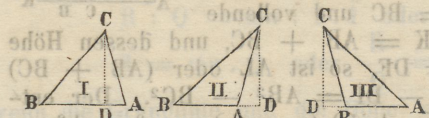
Zieht man aus dem rechten \sphericalangle B die Linie $BI \perp AC$, ferner die Geraden DC und BL, so ist $\triangle DAC = \frac{1}{2}AE$, und $\triangle BAL = \frac{1}{2}AI$ (§ 82). Da aber $\triangle DAC \cong \triangle BAL$ (weil $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAL$, $AD = AB$, $AC = AL$), so ist auch $AE = AI$. Eben so lässt sich beweisen, dass $CF = KH$ ist; folglich ist $AI + KH = AH = AE + CF$ oder $AC^2 = AB^2 + BC^2$.



§ 90. Zusätze. (Fig. § 89). 1) Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Quadrate der Hypotenuse, weniger dem Quadrate der andern Kathete. Bedeutet a die Hypotenuse, b die eine, c die andere Kathete, so ist $a^2 = b^2 + c^2$, also auch $b^2 = a^2 - c^2$ und $c^2 = a^2 - b^2$. 2) Da $AE = AI$ ist und $AH : AI = AC : AK$ (§ 83), so verhält sich $AH : AE = AC : AK$, d. h. das Quadrat der Hypotenuse verhält sich zum Quadrate einer der Katheten, wie die Hypotenuse zu ihrem an dieser Kathete liegenden Abschnitte. 3) Da $AE = AI$, $CF = HK$ und $AI : HK = AK : CK$ (§ 83), so ist auch $AE : CF = AK : CK$, d. h. die Quadrate der Katheten verhalten sich, wie die anliegenden Abschnitte der Hypotenuse. 4) (Fig. § 137). Wenn ABCD ein Quadrat und AC dessen Diagonale ist, so ist $\triangle ABC$ rechtwinklig und gleichschenkelig, also $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \cdot AB^2$, d. h. das Quadrat der Diagonale eines Quadrats ist doppelt so gross als dieses letztere. Weil $AC^2 : AB^2 = 2 : 1$, also auch $AC : AB = \sqrt{2} : 1$, aber $\sqrt{2}$ irrational ist, so ist die Diagonale eines Quadrats mit der Seite desselben incommensurabel.

§ 91. In einem Dreieck ABC ist das Quadrat irgend einer Seite AC, je nachdem sie einem spitzen oder stumpfen Winkel B gegenüber liegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten AB und BC, vermindert oder vermehrt um das dop-

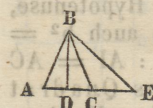
pelte Rechteck aus einer dieser Seiten AB und dem Abschnitte BD zwischen dem Scheitel des Winkels B und dem Fusspunkte des Perpendikels CD, welcher von der ihr gegenüberliegenden Spitze auf sie oder ihre Verlängerung gefällt ist.



1) Wenn $\sphericalangle B$ spitz ist, wie in Figur I. und II, so ist $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (§ 89). Da aber $AD = AB - BD$ (Fig. I.), oder $AD = BD - AB$ (Fig. II), so ist $AD^2 = AB^2 - 2AB \times BD + BD^2$ (§ 87), und weil ferner $CD^2 = BC^2 - BD^2$ ist (§ 90, 1), so ist $AC^2 = AB^2 - 2AB \times BD + BD^2 + BC^2 - BD^2$, oder $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD$.

2) Wenn $\sphericalangle B$ stumpf ist, wie in Figur III, so muss CD ausserhalb des Dreiecks fallen, weil sonst ein Dreieck mit einem rechten und stumpfen \sphericalangle entstehen würde. Da nun $AC^2 = CD^2 + AD^2$, aber $CD^2 = BC^2 - BD^2$, ferner $AD = AB + BD$, also $AD^2 = AB^2 + 2AB \times BD + BD^2$ (§ 86), so ist $AC^2 = BC^2 - BD^2 + AB^2 + 2AB \times BD + BD^2$, oder $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD$.

§ 92. Zieht man in einem Dreieck ABE aus einer Winkelspitze B zur Mitte C der gegenüberliegenden Seite eine Linie BC, so ist die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich dem doppelten Quadrate der gezogenen Linie nebst dem doppelten Quadrate der halben getheilten Seite.



Zieht man $BD \perp AE$, so giebt das $\triangle ABC$ (§ 91) $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times DC$, und das Dreieck BCE giebt $BE^2 = CE^2 + BC^2 + 2CE \times DC$. Beides addirt giebt, da $AC = CE$ ist, $AB^2 + BE^2 = 2BC^2 + 2AC^2$.

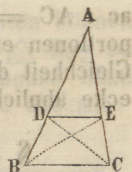
§ 93. (Fig. § 40). In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate aller vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

Da sich die Diagonalen halbiren (§ 40), so ist (§ 92) $AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$
 $BD^2 + DC^2 = 2DE^2 + 2BE^2 = 2AE^2 + 2BE^2$, folglich durch Addition $AB^2 + AC^2 + BD^2 + DC^2 = 4AE^2 + 4BE^2$.
 Es ist aber $4AE^2$ das Quadrat von $2AE$ oder AD , und $4BE^2$ ist das Quadrat von $2BE$ oder BC , also hat man

$$AB^2 + AC^2 + BD^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2.$$

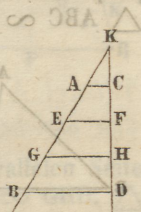
§ 94. Die mit einer Seite BC eines Dreiecks ABC parallele Linie DE theilt die beiden andern Seiten in proportionale Theile.

Zieht man BE und CD, so ist (§ 85, 5) $\triangle ADE : \triangle BDE = AD : DB$ und $\triangle ADE : \triangle CED = AE : EC$. Da aber $\triangle BDE = \triangle CED$ (§ 82, Z.), so verhält sich $AD : DB = AE : EC$. Man kann auch setzen $AD : DB = AD : AE + EC : AE$, d. h. $AB : AD = AC : AE$, oder auch $AB : DB = AC : EC$.



§ 95. Zwei gerade Linien AB und CD werden durch mehrere Parallele AC, EF, GH... in proportionale Theile geschnitten.

Ist K der Durchschnittspunkt der Linien AB und CD, so ist (§ 94) $KE : KF = AE : CF$, ferner $KE : KF = EG : FH$, also auch $AE : CF = EG : FH$. Ebenso wird bewiesen, dass $EG : FH = GB : HD$ u. s. w.



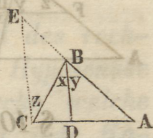
§ 96. Wenn eine Gerade DE zwei Seiten eines Dreiecks ABC proportional schneidet, so dass $AB : DB = AC : EC$, so ist sie zur dritten Seite BC parallel.

Denn wäre DE nicht $\parallel BC$, so sei DF $\parallel BC$, und dann wäre $AB : DB = AC : FC$, in welcher Proportion die drei ersten Glieder mit denen der vorausgesetzten Proportion übereinstimmen, und daher $EC = FC$ sein müsste, was unmöglich ist.



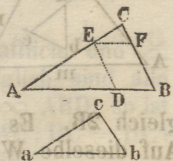
§ 97. Die Linie BD, welche den Winkel B eines Dreiecks ABC halbiert, theilt die gegenüberliegende Seite AC in zwei Abschnitte, welche sich wie die beiden andern Seiten verhalten, also $AD : DC = AB : BC$.

Man ziehe $CE \parallel DB$ und verlängere AB bis zum Durchschnittspunkte E mit CE, so ist $AD : DC = AB : BE$ (§ 94). Da nun $z = x = y = E$ (§ 32), so ist $BE = BC$ (§ 16, 2), und daher $AD : DC = AB : BC$.



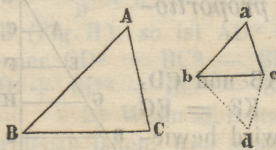
§ 98. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Winkel gegenseitig gleich sind. Wenn also $A = a$, $B = b$, so ist $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Zuvörderst ist auch $\sphericalangle C = c$ (§ 25, 2). Macht man nun $AD = ab$, und zieht aus D die Linie $DE \parallel BC$, so ist $AD : AB = AE : AC$ (§ 94); weil aber $\triangle ADE \cong abc$ (indem $A = a$, $AD = ab$, $\sphericalangle D = B = b$), so ist auch $ab : AB = ac : AC$. Zieht man ferner aus E die Linie $EF \parallel AB$, so ist $AE : AC = BF : BC$, oder



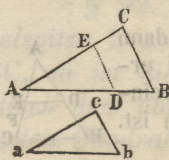
$ac : AC = bc : BC$, da (§ 38) $BF = DE = bc$ ist. Aus diesen Proportionen ergibt sich nun, dass $ab : AB = ac : AC = bc : BC$. Wegen Gleichheit der Winkel und Proportionalität der Seiten sind also die Dreiecke ähnlich (§ 80).

§ 99. *Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre drei Seiten proportional sind.* Wenn also $AB : ab = AC : ac = BC : bc$, so ist $\triangle ABC \sim \triangle abc$.



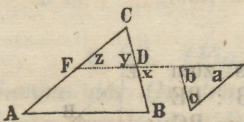
Man mache $\sphericalangle cbd = B$, $\sphericalangle bcd = C$, so ist $\triangle ABC \sim \triangle dbc$ (§ 98), also $AB : db = AC : dc = BC : bc$. Nach der Voraussetzung ist aber $AB : ab = AC : ac = BC : bc$, also muss $db = ab$, $dc = ac$ sein; folglich ist $\triangle abc \cong \triangle dbc$ (§ 15), und weil $\triangle dbc \sim \triangle ABC$, so ist auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

§ 100. *Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel zwischen proportionale Seiten haben.* Wenn $A = a$, $AB : ab = AC : ac$, so ist $\triangle ABC \sim \triangle abc$.



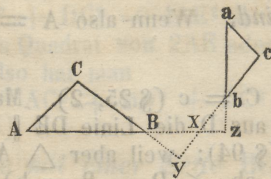
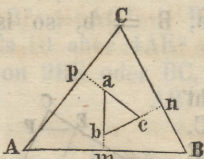
Man mache $AD = ab$ und ziehe $DE \parallel BC$, so ist $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (§ 98), also $AB : AD = AC : AE$. Nach der Voraussetzung ist aber $AB : ab = AC : ac$, und weil $AD = ab$ ist, so ist auch $AE = ac$, folglich ist $\triangle ADE \cong \triangle abc$ (§ 9). Es war aber $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, also ist auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

§ 101. *Zwei Dreiecke ABC und abc sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise parallel sind.*



Wenn $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $AC \parallel ac$, und man ab bis F verlängert, so ist $\sphericalangle b = x = y = B$ und $\sphericalangle a = z = A$ (§ 32), also $\triangle ABC \sim \triangle abc$ (§ 98).

§ 102. *Zwei Dreiecke ABC und abc sind ähnlich, wenn ihre Seiten senkrecht auf einander stehen.*



Es sei $ab \perp AB$, $ac \perp AC$, $bc \perp BC$. Verlängert man, in der ersten Figur die Seiten des $\triangle abc$, so sind die vier Winkel im Viereck $Amap$ gleich $4R$ (§ 27), und weil $\sphericalangle p + m = 2R$, so ist $A + p + m$ gleich $2R$. Es ist aber auch $\sphericalangle p + a + m + bac = 2R$, folglich ist $A = bac$. Auf dieselbe Weise lässt sich beweisen, dass $B = abc$ ist, folglich ist \triangle

$ABC \sim abc$ (§ 98). Durch die Verlängerung der Dreiecksseiten können auch Dreiecke entstehen, wie in der zweiten Figur. Hier ist $\triangle Bxy \sim bxz$, also $\sphericalangle yBx = zbx$, und daher auch $\sphericalangle ABC = abc$; ebenso kann man zeigen, dass $\sphericalangle A = a$ ist, woraus folgt, dass $\triangle ABC \sim abc$ ist.

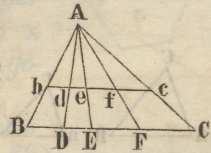
§ 103. Der Inhalt eines Trapezes ABCD ist gleich seiner Höhe EF, multiplicirt mit der halben Summe seiner parallelen Seiten.



Zieht man BD, so ist $\triangle ABD = \frac{1}{2}AB \times EF$, und $\triangle BCD = \frac{1}{2}CD \times EF$ (§ 85, 4), also $ABCD = \frac{1}{2}AB \times EF + \frac{1}{2}CD \times EF = \frac{1}{2}(AB + CD) EF$.

Zusatz. Zieht man aus der Mitte G der nicht parallelen Seite AD die Gerade $GK \parallel AB$, so ist $CK = BK$ (§ 95), $\triangle ABD \sim GHD$, $\triangle CBD \sim KBH$, also $GH = \frac{1}{2}AB$ und $KH = \frac{1}{2}CD$, folglich $GK = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Also ist $ABCD = GK \times EF$, d. h. der Inhalt eines Trapezes ist gleich seiner Höhe, multiplicirt mit der Linie, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet.

§ 104. Zieht man aus der Spitze eines Dreiecks ABC auf die Grundlinie BC beliebige gerade Linien, so theilen diese die Grundlinie und jede mit ihr parallele Linie bc in proportionale Theile.



Denn es ist $\triangle ABD \sim Abd$, $\triangle ADE \sim Ade \dots$ (§ 98), also $BD : bd (= AD : Ad) = DE : de (= AE : Ae) = EF : ef$ u. s. w.

Zusatz. Wenn BC in gleiche Theile getheilt ist, so wird auch bc in gleiche Theile getheilt.

§ 105. (Fig. § 121.) Wenn man von dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ADC auf die Hypotenuse eine Senkrechte DB zieht, so entstehen 1) zwei Dreiecke, welche dem ganzen Dreieck und einander ähnlich sind; 2) ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte derselben; 3) ist die Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

1) Es ist $\triangle ADC \sim ABD$, weil $\sphericalangle A$ gemeinschaftlich, und $\sphericalangle ADC = R = \sphericalangle ABD$ ist. Ebenso ist $\triangle ADC \sim DBC$, folglich sind alle Dreiecke gleichwinklig und daher ähnlich. 2) Da $\triangle ADC \sim ABD$, so ist $AC : AD = AD : AB$, und weil $\triangle ADC \sim DBC$, so ist $AC : DC = DC : BC$. 3) Weil $\triangle ABD \sim DBC$, so ist $AB : BD = BD : BC$.

§ 106. *Zusatz. (Fig. § 121).* 1) Zieht man aus einem Punkte D eines Kreisumfangs eine Senkrechte DB auf den Durchmesser AC und zwei Sehnen DA und DC an die Endpunkte desselben, wodurch ein rechtwinkliges $\triangle ADC$ entsteht (§ 60, 2), so ist die Senkrechte DB die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers, und 2) jede Sehne ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und dem anliegenden Abschnitte desselben.

§ 107. *Zwei Dreiecke ABD und AEC, welche einen gleichen Winkel A haben, verhalten sich wie die Produkte der Seiten, die den gleichen Winkel einschliessen.*

Zieht man BC, so verhält sich (§ 85, 5) $\triangle ABC$: $\triangle ABD = AC : AD$, und $\triangle AEC : \triangle ABC = AE : AB$. Multiplicirt man beide Proportionen mit einander und lässt das gemeinschaftliche Glied $\triangle ABC$ weg, so ist $AEC : ABD = AC \times AE : AD \times AB$.

§ 108. *Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.*

Es sei der $\sphericalangle A = a$, $\sphericalangle B = b$. Nun ist (§ 107) $ABC : abc = AB \times AC : ab \times ac$; ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $AB : ab = AC : ac$. Multiplicirt man diese Proportion mit der offenbar richtigen $AC : ac = AC : ac$, so erhält man $AB \times AC : ab \times ac = AC^2 : ac^2$, folglich auch $ABC : abc = AC^2 : ac^2$.

§ 109. *Aehnliche Vielecke ABCDE und abcde sind aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender Dreiecke zusammengesetzt.*

Zieht man aus den ähnlich liegenden Winkelspitzen A und a die Diagonalen AC, AD, ac, ad, so zerlegt man beide Vielecke in gleich viel Dreiecke. Wegen Aehnlichkeit der Vielecke ist $\sphericalangle B = b$ und $AB : ab = BC : bc$, folglich $\triangle ABC \sim abc$ (§ 100), und deshalb $\sphericalangle BCA = bca$, und $BC : bc = CA : ca$, und weil $\sphericalangle BCD = bcd$, und $BC : bc = CD : cd$, so ist $\sphericalangle ACD = acd$, und $CA : ca = CD : cd$, also $\triangle ACD \sim acd$. Auf diese Weise kann man die Aehnlichkeit aller Dreiecke beweisen.

§ 110. (Fig. § 109). *Wenn zwei Vielecke aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender Dreiecke zusammengesetzt sind, so sind sie ähnlich.*

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ist $\sphericalangle B = b$, $\sphericalangle BCA = bca$, $\sphericalangle ACD = acd$, also auch $\sphericalangle BCD = bcd$, und ebenso ist $\sphericalangle CDE = cde$ u. s. w. Ferner ist $AB : ab = BC : bc (= CA : ca) = CD : cd (= DA : da) = DE : de$ u. s. w., also sind die Vielecke ähnlich (§ 80).

§ 111. (Fig. 109). Die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke $ABCDE$ und $abcde$ verhalten sich wie zwei beliebige homologe Seiten derselben; ihre Flächen aber wie die Quadrate dieser Seiten.

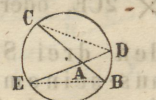
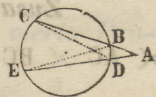
1) Da wegen Aehnlichkeit der Vielecke $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae$, so verhält sich auch $AB + BC + CD \dots$, d. h. Umfang $ABCDE$ zu $ab + bc + cd \dots$ d. h. Umfang $abcde$, wie z. B. $AB : ab$. 2) Wegen Aehnlichkeit der einzelnen Dreiecke hat man (§ 108) $ABC : abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$; also auch $ACD : acd = AC^2 : ac^2$, also auch $ABC : abc = ACD : acd$. Auf gleiche Weise ist $ACD : acd = ADE : ade$, folglich verhält sich auch $ABC + ACD + ADE$, d. h. Vieleck $ABCDE$ zu $abc + acd + ade$, d. h. Vieleck $abcde$, wie $ABC : abc$, also auch wie $AB^2 : ab^2$.

§ 112. Wenn die homologen Seiten von drei ähnlichen Figuren y, x, z den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC gleich sind, so ist die Figur z über der grössten Seite so gross, als die Figuren x und y über den beiden andern Seiten zusammen genommen.



Dem (§ 111) $z : x + y = AC^2 : AB^2 + BC^2$, also $z : x + y = AC^2 : AB^2 + BC^2$, und weil $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§ 89), so ist $z = x + y$.

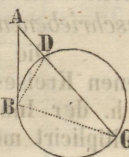
§ 113. Wenn zwei in einem Punkte A sich schneidende gerade Linien von einer Kreislinie in je zwei Punkten B und C, D und E geschnitten werden; so sind die Entfernungen ihres Durchschnittspunktes A von den Durchschnittspunkten mit der Kreislinie verkehrt proportionirt, so dass $AB : AD = AE : AC$.



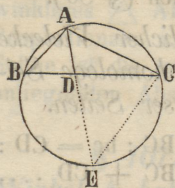
Der Punkt A kann ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegen. Zieht man BE und CD , so ist $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ (weil $\sphericalangle A = A$ und $\sphericalangle E = C$ nach § 60), also ist $AB : AD = AE : AC$.

Zusatz. Das Rechteck $AB \times AC$ ist dem Rechteck $AD \times AE$ gleich.

§ 114. Die von einem Punkte A ausserhalb eines Kreises an letzteren gezogene Tangente AB ist die mittlere Proportionale zwischen der von demselben Punkte ausgehenden Secante AC und ihrem ausserhalb liegenden Stücke AD .



Zieht man BC und BD, so ist $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (denn $\sphericalangle A = A$, $\sphericalangle ABD = C$ nach § 64 und § 59), also $AC : AB = AB : AD$ oder $AB^2 = AC \times AD$.



§ 115. Wird ein Winkel A eines Dreiecks ABC halbiert, so ist das Produkt der den Winkel A einschliessenden Seiten dem Produkte aus beiden Abschnitten BD und DC der gegenüberliegenden Seite und dem Quadrate der Halbierungslinie AD gleich, also $AB \times AC = BD \times DC + AD^2$.

Man beschreibe um das $\triangle ABC$ einen Kreis, verlängere AD bis zur Peripherie in E und ziehe CE, so ist $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (denn $\sphericalangle BAD = CAE$, $\sphericalangle B = E$ nach § 60, 1), also $AB : AE = AD : AC$ oder $AB \times AC = AE \times AD = (AD + DE) \times AD = AD^2 + DE \times AD$. Ferner ist (§ 113, Z.) $DE \times AD = BD \times DC$, folglich $AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$.



§ 116. In jedem Dreieck ABC ist das Produkt aus zwei Seiten AB und AC gleich dem Produkte aus dem Durchmesser CE des umgeschriebenen Kreises und dem auf die dritte Seite aus der gegenüberliegenden Winkelspitze gefällten Perpendikel AD.

Zieht man AE, so ist $\sphericalangle ADB = EAC$ (§ 60, 2), $\sphericalangle E = B$ (§ 60, 1), also $\triangle ABD \sim \triangle AEC$, folglich $AB : CE = AD : AC$ oder $AB \times AC = CE \times AD$.

Zusatz. Multiplicirt man die letzte Gleichung mit BC, so ist $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC = \frac{AD \times BC}{2} \times 2CE = \triangle ABC$

$\times 2CE$, oder $\frac{AB \times AC \times BC}{2CE} = \triangle ABC$, d. h. das Produkt aus

den drei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Produkte aus seinem Flächeninhalte und dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises, und der Flächeninhalt eines Dreiecks wird erhalten, wenn man das Produkt aus seinen drei Seiten durch den doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises dividirt.

§ 117. (Fig. § 76). Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC ist gleich dem Produkte seines Umfanges in den halben Radius des eingeschriebenen Kreises.

Die Dreiecke AGB, AGC, BGC haben den Radius des eingeschriebenen Kreises zur gemeinschaftlichen Höhe; die Summe dieser Dreiecke, d. h. der Inhalt des $\triangle ABC$, ist also gleich den Grundlinien AB, AC, BC, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ RD.

§ 118. In einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck ABCD ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten, also $AC \times BD = AD \times BC + AB \times CD$.

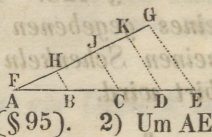
Man mache den Bogen $CE = AD$ und ziehe BE, so ist $\sphericalangle ABD = CBE$ und $\sphericalangle ADB = BCA$ (§ 60), also $\triangle ABD \sim \triangle BCE$, folglich $AD : CE = BD : BC$ oder $AD \times BC = BD \times CE$. Ferner ist $\sphericalangle ABE = DBC$ (weil Bogen AE = Bogen CD), und $\sphericalangle BAC = BDC$, also $\triangle ABC \sim \triangle BDE$, folglich $AB : BE = AC : DE$ oder $AB \times DE = AC \times BE$. Die Addition beider Resultate giebt $AD \times BC + AB \times CD = BD \times CE + AC \times BE = (BD + AC) \times BE = AC \times BD$.



V. Aufgaben.

§ 119. Eine gegebene gerade Linie AE in mehrere Theile zu theilen, die entweder sich verhalten, wie gegebene Linien, oder einander gleich sind.

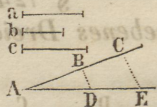
1) Man ziehe durch den Endpunkt A der AE eine unbestimmte Gerade FG, und trage auf diese die gegebenen Linien FH, HI, IK und KG nach einander auf, ziehe GE, und aus K, I, H Parallele zu GE, so verhalten sich die Theile der AE, wie die gegebenen Linien (§ 95).



2) Um AE etwa in vier gleiche Theile zu theilen, trage man auf die unbestimmte Gerade FG vier beliebig grosse, aber gleiche Theile auf, verbinde den Endpunkt des vierten Theils mit E, und verfähre wie vorhin.

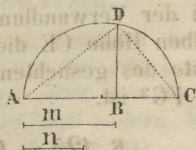
§ 120. Zu drei gegebenen Linien a, b, c die vierte Proportionale zu finden.

Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels A nehme man $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, ziehe BD und aus C die $CE \parallel BD$, so ist DE die gesuchte Proportionale. Denn es ist (§ 94) $AB : BC = AD : DE$ oder $a : b = c : DE$.

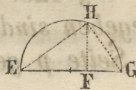


§ 121. Zwischen zwei gegebenen Linien m und n die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auf einer unbestimmten Geraden nehme man $AB = m$, $BC = n$, beschreibe über AC als Durchmesser einen Halbkreis, so ist die in B auf AC errichtete und bis zur Peripherie verlängerte Senkrechte BD die gesuchte Proportionale, weil (§ 106, 1) $AB : BD = BD : BC$ oder $m : BD = BD : n$.

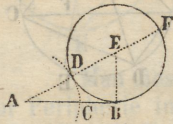


Eine andere Auflösung ist folgende. Man schneide von der grössern Linie $EG = m$ ein Stück $EF = n$ ab, beschreibe über EG einen Halbkreis, und



ziehe aus F die $FH \perp EG$, so ist EH die gesuchte Proportionale, weil (§ 106, 2) $m : EH = EH : n$.

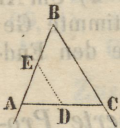
§ 122. Eine gegebene gerade Linie AB nach dem äussern und mittlern Verhältnisse zu theilen, d. h. so in zwei Theile zu theilen, dass der grössere Theil die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Theile sei.



Man errichte auf AB in B die Senkrechte $BE = \frac{1}{2}AB$, beschreibe aus E mit EB einen Kreis, ziehe aus A durch E die Gerade AF, und beschreibe aus A mit AD den Bogen DC, so ist C der gesuchte Theilungspunkt. Denn weil AB eine Tangente ist, so hat man (§ 114) $AF : AB = AB : AD$, also auch $AF - AB : AB = AB - AD : AD$, oder $AF - DF : AB = AB - AC : AC$, oder $AC : AB = BC : AC$, oder $AB : AC = AC : BC$.

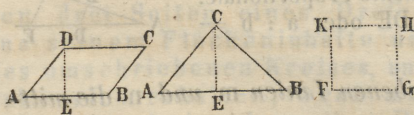
Zusatz. Die Secante AF wird in D nach dem äussern und mittlern Verhältnisse getheilt. Denn, weil $AB = DF$, so ist $AF : DF = DF : AD$.

§ 123. Durch einen gegebenen Punkt D, der innerhalb eines gegebenen Winkels ABC liegt, eine Linie (AC) zwischen seinen Schenkeln so zu ziehen, dass sie durch den Punkt D halbtirt wird.



Man ziehe durch D die $DE \parallel CB$, mache $EA = BE$, und ziehe durch A und D die AC, so ist diese die gesuchte Linie. Denn es ist (§ 94) $AE : EB = AD : DC$, und weil $AE = EB$, so ist auch $AD = DC$.

§ 124. Ein gegebenes Parallelogramm AC, oder ein gegebenes Dreieck ABC in ein Quadrat zu verwandeln.



1) Man suche zwischen der Grundlinie AB und der Höhe DE des Parallelogramms AC die mittlere Proportionale FG, so ist das Quadrat von FG gleich dem Parallelogramme AC, indem $AB : FG = FG : DE$ oder $AB \cdot DE = FG^2$ ist. 2) Nimmt man bei der Verwandlung des Dreiecks zwischen seiner Grundlinie AB und der halben Höhe CE die mittlere Proportionale, welche FG sei, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats, weil $AB : FG = FG : \frac{1}{2}CE$ oder $\frac{1}{2}AB \cdot CE = FG^2$ ist.

§ 125. Ein Rechteck, dessen zwei ungleiche Seiten m und n gegeben sind, in ein anderes Rechteck zu verwandeln, von welchem eine Seite p gegeben ist.

Man suche zu p, m, n die vierte Proportionale x , so ist das Rechteck, welches die Seiten p und x hat, das gesuchte, weil $p : m = n : x$, also $px = mn$ ist.

§ 126. Das Verhältniss zweier Rechtecke, deren Seiten m und n , p und q gegeben sind, in Linien anzugeben.

Man suche zu n, p, q die vierte Proportionale x , so ist das Verhältniss der beiden Linien m und x dasjenige der beiden Rechtecke. Denn weil $n : p = q : x$, oder $pq = nx$, so ist auch $mn : pq = mn : nx = m : x$.

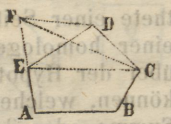
Zusatz. Um das Verhältniss der Quadrate über zwei gegebenen Linien m und n in Linien zu finden, suche man die vierte Proportionale x zu m, n und n ; alsdann ist $m^2 : n^2 = m : x$.

§ 127. Das Verhältniss des Produkts dreier Linien a, b, c zum Produkte dreier andern Linien p, q, r in Linien anzugeben.

Man suche zu p, a, b eine vierte Proportionale x , und zu c, q, r eine vierte Proportionale y , so werden sich x und y wie die Produkte abc und pqr verhalten. Denn weil $p : a = b : x$, so ist $ab = px$, also auch $abc = cpx$. Da ferner $c : q = r : y$, also $qr = cy$, so ist auch $pqr = cpy$; folglich ist $abc : pqr = cpx : cpy = x : y$.

§ 128. Ein gegebenes Vieleck $ABCDE$ in ein Dreieck zu verwandeln.

Man schneide durch die Diagonale EC ein $\triangle CDE$ ab, ziehe durch D die $DF \parallel CE$ bis zum Durchschnittspunkte F mit der verlängerten AE , und ziehe CF , so ist $\triangle CDE = CFE$ (§ 82. Z.), und legt man jedes dieser Dreiecke zum Viereck $ABCE$ hinzu, so ist $ABCDE = ABCF$. Auf dieselbe Weise kann man ferner das Viereck $ABCF$ in ein Dreieck verwandeln.



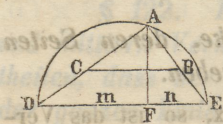
Zusatz. Da man jedes Vieleck in ein Dreieck, und dieses in ein Quadrat verwandeln kann (§ 124), so lässt sich auch jedes beliebige Vieleck in ein Quadrat verwandeln.

§ 129. Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Summe oder der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Man construire ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem beide Katheten, oder die Hypotenuse und eine Kathete den Seiten der gegebenen Quadrate gleich sind, so wird im ersten Falle das Quadrat über der Hypotenuse der Summe, im zweiten Falle das Quadrat über der andern Kathete der Differenz der gegebenen Quadrate gleich sein (§ 89, § 90).

Zusatz. Man kann auf diese Weise ein Quadrat finden, welches der Summe einer beliebigen Anzahl von Quadraten oder Vielecken gleich ist.

§ 130. Ein Quadrat zu zeichnen, welches sich zu einem gegebenen Quadrate P^2 verhält, wie die Linie m zur Linie n .



Man mache eine Linie $DF = m$, ihre Verlängerung $FE = n$, beschreibe über DE einen Halbkreis, errichte auf DE in F die Senkrechte FA , ziehe die Sehne AD und AE , welche man nöthigenfalls verlängern kann, mache auf AE die AB der Seite P des gegebenen Quadrats gleich, und ziehe $BC \parallel ED$; so ist AC die Seite des gesuchten Quadrats. Denn es ist $AD : AE = AC : AB$ oder $AD^2 : AE^2 = AC^2 : AB^2$, und weil (§ 90, 3) $AD^2 : AE^2 = m : n$, so ist auch $AC^2 : AB^2 = m : n$ oder $AC^2 : P^2 = m : n$.

§ 131. (Fig. § 109). Ueber einer gegebenen Linie ab ein Vieleck zu beschreiben, welches einem gegebenen Vieleck $ABCDE$ ähnlich sei.

Man ziehe die Diagonalen AC und AD , mache im Punkte a den $\sphericalangle bac = BAC$, in b den $\sphericalangle abc = ABC$, so ist $\triangle abc \sim \triangle ABC$; eben so zeichne man auf ac ein $\triangle acd \sim \triangle ACD$ u. s. w., alsdann ist $abcde \sim \triangle ABCDE$ (§ 410).

§ 132. Wenn zwei ähnliche Figuren gegeben sind, eine dritte ähnliche Figur zu beschreiben, welche der Summe oder Differenz der beiden ersten gleich ist.

Man beschreibe ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem eine Kathete einer Seite der einen Figur, die andere Kathete oder die Hypotenuse einer homologen Seite der andern Figur gleich ist, so wird man (§ 134) über der Hypotenuse oder über der andern Kathete eine Figur beschreiben können, welche einer jeden der zwei gegebenen ähnlich und (§ 112) ihrer Summe oder ihrer Differenz gleich ist.

§ 133. Eine Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen ähnlich ist, und sich zu ihr verhält, wie sich zwei gegebene Linien m und n verhalten.

Bedeutet a eine Seite der gegebenen Figur, und x eine homologe Seite der gesuchten Figur, so muss sein $x^2 : a^2 = m : n$ (§ 111). Man muss daher ein Quadrat suchen (§ 130), welches sich zum Quadrat von a verhält, wie m zu n , und über der Seite x des gefundenen Quadrats eine Figur beschreiben, welche der gegebenen ähnlich ist (§ 131).

§ 134. Eine Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen Figur P ähnlich und einer andern, Q , gleich ist.

Man suche die Seite m desjenigen Quadrats, welches der Figur P , und die Seite n desjenigen Quadrats, welches der Figur Q gleich ist, ferner suche man zu m , n und einer Seite ab der Figur P die vierte Proportio-

nale x . Beschreibt man nun über x eine Figur F , welche der Figur P ähnlich ist, so wird diese zugleich der Figur Q gleich sein. Denn, weil $m : n = ab : x$ oder $m^2 : n^2 = ab^2 : x^2$, und ferner $P : F = ab^2 : x^2$, so ist auch $m^2 : n^2 = P : F$ oder, weil $m^2 = P$, $n^2 = Q$ ist, $P : Q = P : F$, folglich $Q = F$.

§ 135. Ein Rechteck zu beschreiben, welches so gross ist als ein gegebenes Quadrat Q , und dessen zwei anliegende Seiten zusammen einer gegebenen Linie AB gleich sind.

Man beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte aus irgend einem Punkte A der AB auf diese eine Senkrechte AC , welche der Seite des Quadrats Q gleich ist, ziehe durch C die $CD \parallel AB$, und ziehe aus D die $DE \perp AB$; so ist das Rechteck aus AE und BE das gesuchte. Denn es ist (§ 106) $AE : DE = DE : BE$, also $AE \times BE = DE^2 = Q$.

Damit die Aufgabe möglich sei, darf die Seite des Quadrats nicht grösser sein, als $\frac{1}{2}AB$.

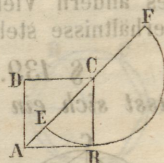
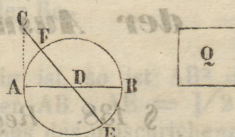
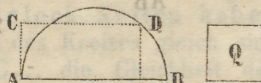
§ 136. Ein Rechteck zu beschreiben, welches so gross ist als ein gegebenes Quadrat Q , und dessen zwei anliegende Seiten um eine gegebene Linie AB von einander verschieden sind.

Man halbiere AB in D , beschreibe aus D mit DA einen Kreis, errichte in A die Tangente AC gleich der Seite des Quadrats Q , und ziehe durch C und D die CE ; so ist das Rechteck aus CE und CF das gesuchte. Denn es ist (§ 114) $CE : AC = AC : CF$, also $CE \times CF = AC^2 = Q$, und ausserdem ist $CE - CF = AB$.

§ 137. Das Verhältniss der Seite eines Quadrats zu der Diagonale desselben zu finden.

Es sei $ABCD$ ein Quadrat und AC dessen Diagonale. Man verlängere AC um $CF = CB$, und beschreibe aus C mit CB einen Halbkreis, der AC in E schneidet, dann ist $AE : AB = AB : AF$ (§ 114), folglich $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$, und weil $AF = 2AB + AE$ ist, so ist $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{2AB + AE}$.

Substituiert man in diesen letzten Ausdruck für $\frac{AE}{AB}$ immer



wieder den Ausdruck $\frac{1}{2 + \frac{AE}{AB}}$, so entsteht der unendliche Kettenbruch

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}, \text{ und weil } \frac{AC}{AB} = \frac{CE + AE}{AB} = 1 + \frac{AE}{AB}$$

folglich $\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$ ist, und dieser Kettenbruch in's

Unendliche fortgeht, so lässt sich der Werth $\frac{AC}{AB}$ nur näherungsweise in Zahlen darstellen, so dass also die Seite eines Quadrats mit der Diagonale desselben incommensurabel ist, was wir auch schon früher (§ 90, 4) auf eine andere Weise gefunden haben. Die Näherungswerthe des Kettenbruches sind $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$ u. s. w. Es verhält sich also die Diagonale zur Seite des Quadrats näherungsweise wie 3 zu 2, oder genauer wie 7 zu 5, oder noch genauer wie 17 zu 12 u. s. w.

VI. Von den regelmässigen Vielecken und der Ausmessung des Kreises nebst Aufgaben.

§ 138. *Regelmässige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.*

Die Winkel zweier solcher Vielecke sind gegenseitig gleich, indem in allen regelmässigen n ecken jeder Winkel $\frac{(n-2) 2R}{n} = 2 - \frac{4}{n}$ Rechte beträgt (§ 27). Da ausserdem die Seiten des einen, so wie die Seiten des andern Vielecks unter sich gleich sind, also zu einander in gleichem Verhältnisse stehen, so sind die Vielecke ähnlich (§ 80, 2).

§ 139. *Um und in jedes regelmässige Vieleck ABCDE lässt sich ein Kreis beschreiben.*



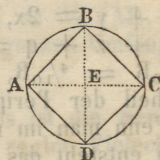
Man beschreibe durch die drei Punkte A, B, C einen Kreis, dessen Mittelpunkt O sei, und ziehe AO, BO, CO... sowie aus O auf die Seiten des Vielecks die Senkrechten OF, OK... Da $AB = DC, BF = CF$ (§ 47), $\sphericalangle ABF = \sphericalangle DCF, \sphericalangle BFO = \sphericalangle CFO$, so muss das Viereck $ODCF \cong OABF$, und daher $OD = OA$ sein, so dass also D ebenfalls in dem durch A, B, C gehenden Kreisumfange

liegt. Ebenso lässt sich zeigen, dass auch Punkt E in demselben Kreisumfang liegt. Da ferner alle Seiten AB, BC, CD... als gleiche Sehnen des Kreises vom Mittelpunkte O gleich weit entfernt sind (§ 50), so muss der aus O mit OF beschriebene Kreis alle Seiten des Vielecks berühren.

§ 140. *Zusätze.* 1) (Fig. § 139) Der Mittelpunkt O des um- und eingeschriebenen Kreises kann auch als Mittelpunkt des Vielecks betrachtet werden. Alle Winkel wie AOB, BOC..., sind einander gleich, und man findet die Grösse eines jeden, wenn man $4R$. durch die Seitenzahl des Vielecks dividirt. 2) Um ein regelm. Vieleck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, muss man den Kreisumfang in so viele gleiche Theile theilen, als das Vieleck Seiten haben soll, weil auch die Seiten des Vielecks als Sehnen des Kreises gleich sind und aus der Congruenz der Dreiecke AOB, BOC..., die Gleichheit der Winkel des Vielecks folgt.

§ 141. *In einen Kreis die regelm. Vielecke von 4, 8, 16... Seiten einzuschreiben.*

Man ziehe zwei Durchmesser AC und BD senkrecht auf einander, und verbinde ihre Endpunkte durch gerade Linien, so ist ABCD ein Quadrat. Denn wegen der Gleichheit der Winkel um E sind auch die Sehnen AB, BC... gleich, und ausserdem sind die Winkel ABC, BCD... rechte (§ 60, 2). Halbirt man die Bogen AB, BC..., so erhält man das eingeschriebene regelm. Seck, durch weitere Halbirtung der Bogen das regelm. 16, 32... eck.



Da $\triangle ABE$ rechtwinklig und gleichschenkelig ist, so ist $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 2AE^2$, also $AB^2 : AE^2 = 2 : 1$ oder $AB : AE = \sqrt{2} : 1$, d. h. die Seite des Quadrats verhält sich zum Radius des umschriebenen Kreises wie $\sqrt{2}$ zu 1. Ist daher der Radius $= 1$, so ist die Seite des eingeschriebenen Quadrats $= \sqrt{2}$.

§ 142. *In einen Kreis die regelm. Vielecke von 3, 6, 12... Seiten einzuschreiben.*

Man trage den Radius AO sechs Mal als Sehne in den Kreisumfang ein und verbinde die Theilungspunkte A, B, C... durch gerade Linien, so ist ABCDEF das eingeschriebene regelm. Sechseck. Denn im gleichseitigen $\triangle AOB$ ist jeder Winkel $= \frac{2}{3}R = \frac{1}{6}R$, also ist der Centriwinkel O der sechste Theil der vier um den Mittelpunkt herumliegenden rechten Winkel, mithin der Radius die Sehne des sechsten Theils der Peripherie. Man findet ferner das eingeschriebene regelm. Dreieck, wenn man im regelm. Sechseck eine Winkelspitze um die andere durch gerade Linien verbindet. Die Sehne des Bogens $\frac{1}{2}AB$ ist die Seite des regelm. 12ecks u. s. w.



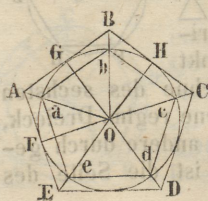
Denkt man sich CO und die Seite AC des regelm. Dreiecks gezogen, so ist das Viereck ABCO gleichseitig und daher ein Parallelogramm (§ 39), folglich ist (§ 93) $AC^2 + BO^2 = AB^2 + BC^2 + CO^2 + OA^2$ oder $AC^2 = 3AO^2$, folglich $AC^2 : AO^2 = 3 : 1$ oder $AC : AO = \sqrt{3} : 1$, d. h. die Seite des regelm. Dreiecks verhält sich zum Radius des umgeschriebenen Kreises wie $\sqrt{3}$ zu 1. Ist also der Radius gleich 1, so ist die Seite des eingeschr. Dreiecks $= \sqrt{3}$.

§ 143. In einen Kreis die regelm. Vielecke von 5, 10, 20... Seiten einzuschreiben.

Man beschreibt das regelm. Zehneck, wenn man das größere Stück CD des nach dem äussern und mittlern Verhältnisse getheilten Radius (§ 122) zehn Mal in den Umfang hereinträgt. Denn ist $AB = CD$ und zieht man CB und BD, so ist nach der Construction $AC : CD = CD : AD$ oder $AC : AB = AB : AD$, folglich, weil ausserdem $\sphericalangle q$ gemeinschaftlich ist, $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ (§ 100), also $\sphericalangle z = x$, und weil $\triangle ACB$ gleichschenkelig ist, so ist auch $\triangle ABD$ gleichschenkelig, also $BD = AB = CD$. Folglich ist $p = q$, $y = x = z$, und weil (§ 25, 6) $p = x + y = 2x$, so ist auch $q = 2x$. Da ferner im $\triangle ACB$ (§ 24) $x + y + z + q = 2R$ oder $x + x + x + 2x = 5x = 2R$, so ist $x = \frac{2}{5}R = \frac{4}{10}R$, also der dem $\sphericalangle x$ entsprechende Bogen AB der zehnte Theil der Peripherie, und somit ist AB die Sehne des regelm. Zehnecks. Wenn man im regelm. Zehneck eine Winkelspitze um die andere verbindet, so entsteht das regelm. Fünfeck. Durch Halbierung des Bogens AB gelangt man zum regelm. 20eck u. s. w.

§ 144. Zusatz. Trägt man in den Kreisumfang von einem Punkte nach derselben Richtung sowohl die Seite des regelm. 6ecks, als die Seite des regelm. 10ecks als Sehnen ein, so ist der Unterschied der entsprechenden Bogen der fünfzehnte Theil des ganzen Umfangs, indem $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ ist. Man kann also auch die regelm. Vielecke von 15, 30, 60... Seiten in den Kreis einschreiben.

§ 145. Ein Vieleck um den Kreis zu beschreiben, welches einem eingeschriebenen regelm. Vieleck ähnlich ist, und umgekehrt: wenn das umschriebene regelm. Vieleck gegeben ist, das eingeschriebene zu finden.



1) Es sei abcde das gegebene regelm. Vieleck im Kreise. In der Mitte F, G, H... der Bogen ae, ab... ziehe man Tangenten AE, AB..., so bilden diese das verlangte umschriebene Vieleck ABCDE. Denn, weil OG sowol auf AB als auf ab senkrecht steht (§ 48, 1), so ist $AB \parallel ab$, und ebensol $BC \parallel bc$ u. s. w. Es ist also erstlich ABCDE mit abcde gleichwinklig (§ 37). Ferner sieht man leicht, dass die drei Punkte

O, a, A, in gerader Linie liegen, weil (§ 23) $\triangle AOF \cong AOG$ (indem $AO = AO$, $OF = OG$, $\sphericalangle F = R = G$), also $\sphericalangle FOA = GOA$ ist, so dass also OA durch die Mitte a des Bogens FG gehen muss. Eben so ist ObB, eine gerade Linie u. s. w. Nun ist (§ 94) $AB : ab (= BO : bo) = BC : bc \dots$, also sind zweitens die Seiten beider Vielecke einander proportional, woraus folgt, dass $ABCDE \sim abcde$ ist. 2) Ist das regelm. Vieleck ABCDE gegeben, so darf man nur OA, OB, OC... und die Sehnen ab, bc... ziehen, um ein ähnliches eingeschriebenes Vieleck abcde zu erhalten. Man fände übrigens dieses auch durch die Verbindung der Berührungspunkte F, G, H u. s. w.

Zusatz: Es lassen sich um einen Kreis alle regelmässigen Vielecke beschreiben, welche in demselben beschrieben werden können, und umgekehrt.

§ 146. (Fig. § 145). Der Flächeninhalt eines regelm. Vielecks ABCDE ist gleich dem halben Produkte aus seinem Umfange in den Radius OG des eingeschriebenen Kreises.

Es ist $\triangle AOB = \frac{1}{2} AB \times OG$, $\triangle BOC = BC \times OH$ u. s. w., also die Summe aller Dreiecke, d. h. das Vieleck ABCDE $= \frac{1}{2} (AB + BC + \dots) OG$, d. h. gleich dem halben Produkte aus dem ganzen Umfange ABCDEA in den Radius des eingeschriebenen Kreises.

Zusatz. Der Radius des eingeschriebenen Kreises ist die Senkrechte aus dem Mittelpunkte auf eine beliebige Seite des regelm. Vielecks, und wird Apothem genannt.

§ 147. Die Umfänge zweier regelm. Vielecke von gleicher Seitenzahl, ABCDEF und abcdef, verhalten sich, wie die Radien der umschriebenen oder eingeschriebenen Kreise, ihre Flächeninhalte aber wie die Quadrate dieser Radien.

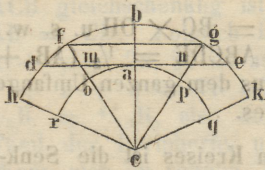
1) Da die Vielecke einander ähnlich sind (§ 138), so verhalten sich ihre Umfänge wie $AB : ab$ (§ 111). Nun seien OA und oa die Radien der umschriebenen Kreise, ferner die Radien der eingeschriebenen Kreise OG und og senkrecht auf AB und ab. Dann ist $\triangle AOB \sim aob$ (weil der $\sphericalangle A = a$, $\sphericalangle B = b$, indem diese Winkel die Hälften von den gleichen Winkeln der Vielecke sind) und $\triangle AOG \sim aog$ (§ 98), folglich $AB : ab = AO : ao = OG : og$, also verhalten sich die Umfänge wie $AO : ao$ oder wie $OG : og$. 2) Die Inhalte der Vielecke verhalten sich (§ 111) wie $AB^2 : ab^2$, also auch wie $AO^2 : ao^2$ oder $OG^2 : og^2$.



§ 148. Eine nur nach einer Seite hin gekrümmte oder gebrochene Linie AB ist zwischen zwei ihrer Punkte kürzer als jede sie umschliessende zwischen denselben Punkten.

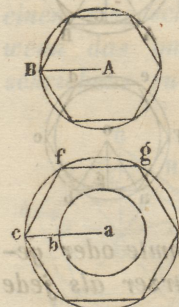
Man versteht unter einer, nur nach der einen Seite hin gekrümmten Linie eine solche, welche von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Wäre nun AB nicht kürzer als alle Linien, welche sie umgeben, so muss es unter den letztern nothwendig eine geben, als welche kürzer keine andere ist. Es sei $ACDEB$ diese kürzeste, umschliessende Linie. Zieht man alsdann zwischen beiden Linien eine Gerade EF , welche die AB nicht schneidet, so ist $EF < FCDE$, folglich auch $AFEB < ACDEB$. Es ist also die Annahme, dass $ACDEB$ die kürzeste umschliessende Linie sei, nicht möglich, und mithin sind alle umschliessenden Linien länger als AB .

§ 149. Sind zwei concentrische Kreise gegeben, so kann man immer ein regelm. Vieleck in dem grössern beschreiben, dessen Seiten nicht den kleinern Kreis, ferner in diesem ein regelm. Vieleck beschreiben, dessen Seiten nicht den grössern Kreis erreichen.



Die Radien der concentrischen Kreise seien ca und cb . Man ziehe durch a die Tangente de , welche den grössern Kreis in d und e trifft, und beschreibe in dem grössern Kreise eines von den regelm. Vielecken, welche sich nach den vorhergehenden Aufgaben beschreiben lassen. Durch fortgesetzte Halbiring der zu den Seiten dieses Vielecks gehörigen Bogen muss man nun zu einem Bogen, wie fg , gelangen, der kleiner ist als de ; dann wird aber auch die Vielecks-Seite fg weiter von c abstehen, als de , und folglich kann das regelm. Vieleck, dessen Seite fg ist, den kleinern Kreis nicht erreichen. Zieht man ferner cf und cg , welche die de in m und n schneiden, so wird mn die Seite eines regelm. Vielecks um den kleinern Kreis sein. Das umschriebene Vieleck, dessen Seite mn ist, erreicht aber den grössern Kreis nicht, weil $cm < cf$ ist.

§ 150. Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser.



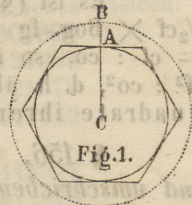
Wenn sich nicht verhielte $Per. AB : Per. ab = AB : ab$, sondern $Per. AB : Per. ab = AB : ac$, wo $ac > ab$ wäre, so beschreibe man in dem Kreise ac ein regelm. Vieleck, dessen Seiten den Kreis ab nicht erreichen (§ 149). Bezeichnet man nun den Umfang dieses Vielecks durch u und beschreibt in dem Kreise AB ein ähnliches Vieleck, dessen Umfang U sei; so hat man (§ 147) $U : u = AB : ac$, und da vorausgesetzt war $Per. AB : Per. ab = AB : ac$, so folgt daraus $Per. AB : U = Per. ab : u$, was unmöglich ist, weil (§ 148) $Per. AB > U$, während $Per. ab < u$ ist. Da sich nun durch ein ähnliches Verfahren beweisen lässt, dass sich nicht verhalten könne $Per. AB$ zur $Per. ab$, wie

AB zu einem kleinern Radius als ab, so muss sich verhalten Per. AB : Per. ab = AB : ab. Hieraus folgt auch, dass Per. AB : Per. ab = 2AB : 2ab.

Zusatz. (Fig. § 147). Die ähnlichen Bögen AB und ab verhalten sich wie ihre Radien AO und ao. Denn es ist $\sphericalangle AOB : 4R = \text{Bog. AB} : \text{Per. AO}$ und $\sphericalangle aob : 4r = \text{Bog. ab} : \text{Per. ao}$; weil aber $\sphericalangle AOB = \sphericalangle aob$ (§ 80, 3), so ist $\text{Bog. AB} : \text{Bog. ab} = \text{Per. AO} : \text{Per. ao} = AO : ao$.

§ 151. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus seiner Peripherie in den Radius, also Kreisfl. CA = $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA}$.

Denn wäre $\frac{1}{2}CA$ nicht gleich der Kreisfl. CA, sondern das Mass eines grössern Kreises, so sei $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA} = \text{Kreisfl. CB}$. Beschreibt man nun um den Kreis CA ein regelm. Vieleck, dessen Seiten den Kreis CB nicht erreichen (§ 149), und bezeichnet man den Umfang desselben mit U, so ist (§ 146) der Inhalt des Vielecks = $\frac{1}{2}CA \times U$. Da nun $\text{Per. CA} < U$ ist (§ 148), so ist auch $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA} < \frac{1}{2}CA \times U$, oder Kreisfl. CB < $\frac{1}{2}CA \times U$, d. h. der Kreis CB ist kleiner als das innerhalb desselben liegende Vieleck. Es kann also nicht sein $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA} > \text{Kreisfl. CA}$. Wäre ferner $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA}$ das Mass eines kleinern Kreises, so sei $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA} = \text{Kreisfl. CD}$. Beschreibt man wie vorhin um den Kreis CD ein regelm. Vieleck, dessen Umfang u sei, so ist der Inhalt dieses Vielecks = $\frac{1}{2}CD \times u$, und weil $\text{Per. CA} > u$ und $\text{Radius CA} > CD$, so ist $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA} > \frac{1}{2}CD \times u$, oder Kreisfl. CD > $\frac{1}{2}CD \times u$, d. h. der Kreis CD ist grösser als das um ihn beschriebene Vieleck. Es kann also nicht sein $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA} < \text{Kreisfl. CA}$. Folglich muss sein $\frac{1}{2}CA \times \text{Per. CA} = \text{Kreisfl. CA}$.



§ 152 Zusatz. (Fig. § 149). Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes fcbg ist gleich dem halben Produkte aus seinem Bogen fbg in den Radius cf.

Denn (§ 58, 2) $fcbg : \text{Kreis cf} = \text{Bog. fbg} : \text{Per. cf}$, und weil $\text{Kreis cf} = \frac{1}{2}cf \times \text{Per. cf}$, so ist $fcbg = \frac{1}{2}cf \times \text{Bog. fbg}$.

§ 153. Zusatz. Das Verhältniss der Peripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser pflegt man durch π zu bezeichnen, so dass also, wenn p die Peripherie eines beliebigen Kreises

und r seinen Radius bedeutet, immer $\frac{p}{2r} = \pi$ ist.

Dieser Ausdruck führt auf die Formel $p = 2r\pi$, welche die Peripherie eines Kreises durch dessen Radius und durch die Verhältnisszahl π ausdrückt.

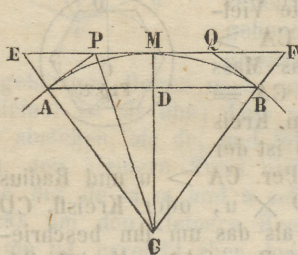
Setzt man in der Formel $p = 2r\pi$ den Durchmesser $= 1$, so entsteht $p = \pi$, d. h. die Peripherie eines Kreises ist gleich π , wenn dessen Durchmesser die Einheit ist.

§ 154. *Zusatz.* Bezeichnet F den Flächeninhalt, r den Radius und p die Peripherie eines Kreises; so ist (§ 151) $F = \frac{1}{2}pr$ und (§ 153) $p = 2r\pi$, folglich ist $F = r^2\pi$, d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate seines Radius in die Verhältnisszahl π .

§ 155. *Zusatz.* Wenn F und f die Flächeninhalte zweier Kreise, $4R$ und r ihre Radien vorstellen, so ist (§ 154) $F = R^2\pi$ und $f = r^2\pi$, also $F : f = R^2 : r^2$, d. h. die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Radien.

Es ist (§ 152) in Fig. § 149 Ausschnitt $fcgb$: Ausschnitt $ocpa = \frac{1}{2}cf \times \text{Bog. fg} : \frac{1}{2}co \times \text{Bog. op}$, und weil (§ 150, z) $\text{Bog. fg} : \text{Bog. op} = cf : co$, so ist auch $fcgb : ocpa = \frac{1}{2}cf \times cf : \frac{1}{2}co \times co = cf^2 : co^2$, d. h. ähnliche Kreisabschnitte verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

§ 156. *Wenn der Inhalt eines regelm. eingeschriebenen und umschriebenen necks gegeben ist, daraus den Inhalt des regelm. eingeschriebenen und umschriebenen 2necks zu finden.*



Es sei AB die Seite des eingeschriebenen n ecks, und die mit AB parallele EF die Seite des umschriebenen n ecks. Zieht man $CM \perp AB$, ferner die Tangenten AP und BQ , endlich AM , so ist AM die Seite des eingeschriebenen, und $PQ = 2PM$ die Seite des umschriebenen $2n$ ecks und $PQ = 2PM$ die Seite des eingeschriebenen $2n$ ecks. Nun sei A der Inhalt des eingeschriebenen, B der Inhalt des umschriebenen n ecks, ferner A' der Inhalt des eingeschriebenen, B' der Inhalt des umschriebenen $2n$ ecks, dann ist (§ 85, 5) $A : A' = 2n \cdot \triangle CAD : 2n \cdot \triangle CAM = \triangle CAD : \triangle CAM = CD : CM = CA : CE = \triangle CMA : \triangle CME = 2n \cdot \triangle CMA : 2n \cdot \triangle CME = A' : B$, also $A' \cdot A = A \cdot B$, und daher $A' = \sqrt{A \cdot B}$.

Ferner ist (§ 85, 5, § 97) $\triangle CPM : \triangle CPE = PM \cdot PE = CM : CE = CD : CA = CD : CM = \triangle CAD : \triangle CAM = A : A'$, also $CPM : CPM + CPE = CPM : CME = A : A + A'$, da aber CPM oder $2CPM : CME = B' : B$, so ist $B' : B = 2A : A + A'$, also $B' = \frac{2A \cdot B}{A + A'}$.

§ 157. *Das Verhältniss π der Peripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser näherungsweise zu finden.*

Setzt man den Radius $= 1$, so ist der Inhalt des eingeschriebenen Quadrats $= 2$ (indem seine Seite $= \sqrt{2}$ ist § 141) und der Inhalt des

umschriebenen Quadrats = 4. Wenn nun in den Formeln (§ 156) $A = 2$, und $B = 4$ gesetzt wird, so ist das eingeschriebene 8 eck $A' = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{2A \cdot B} = \frac{\sqrt{8}}{16} = 2,8284271$, und das umschriebene 8 eck $B' = \frac{16}{A + A'} = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3,3137085$. Setzt man von Neuem $A = 2,8284271$ und $B = 3,3137085$, so erhält man das eingeschriebene und umschriebene 16 eck u. s. w. Führt man auf diese Weise in der Rechnung fort, bei welcher sich die Werthe der eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke immer mehr nähern, so werden sich, wie die Tabelle zeigt, die Vielecke von 32768 Seiten nicht mehr in der siebenten Decimalstelle unterscheiden. Die 8 ersten Ziffern, nämlich 3,1415926, welche beiden gemein sind, werden den Inhalt des Kreises ausdrücken, welcher immer zwischen dem eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke liegt.

Zahl der Seiten.	Eingeschriebenes Vieleck.	Umschriebenes Vieleck.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Da der Inhalt eines Kreises gleich ist dem halben Produkte aus seiner Peripherie in den Radius, so ist 3,1415926 die halbe Peripherie, wenn der Radius 1 ist; folglich ist das durch π bezeichnete Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser = 3,1415926.

Archimedes fand, dass π zwischen $3\frac{10}{70}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt, so dass also $3\frac{1}{7}$ oder $2\frac{2}{7}$ der Zahl π schon sehr nahe kommt. Metius fand den viel genauern Werth $\frac{355}{113}$. Ludolph von Köln berechnete π bis auf 35 Decimalstellen, und neuerdings hat man die Berechnung sogar bis auf 530 Decimalstellen fortgeführt.