

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut
Matemaatika- ja informaatikaõpetaja õppekava

Maret Tark
Põhikooliõpilastele harilike ja algebraliste murdude
käsiraamatu loomine ning õpetajate ja õpilaste
tagasiside loodud käsiraamatule
Magistritöö (15 EAP)

Juhendaja:
Kerli Orav-Puurand, PhD

Põhikooliõpilastele harilike ja algebraliste murdude käsiraamatu loomine ning õpetajate ja õpilaste tagasiside loodud käsiraamatule

Lühikokkuvõte:

Matemaatika on Eesti põhikooli riiklikus õppekavas üks mahukamaid õppeaineid, mistõttu on olemas mitmeid õppematerjale matemaatika õppimiseks ja õpetamiseks. Samas on puudu selline matemaatika õppematerjal, mis oleks kõikehaarav ja ajakohane. Käesoleva magistritöö üks eesmärk oli luua matemaatika käsiraamat harilike ja algebraliste murdude teemadel ning teine eesmärk oli saada sellele käsiraamatule tagasisidet õpilastelt ja õpetajatelt. Arendusuuringuna läbiviidud magistritöö raames koostati matemaatika käsiraamat. Käsiraamatule andsid küsimustikule vastates tagasisidet viis matemaatikaõpetajat ja 58 põhikooliõpilast. Tagasiside oli valdavalt positiivne. Kõige kõrgemad hinnangud anti käsiraamatu kujundusele ja kvaliteedile ning kõige madalamad hinnangud motiveerivusele ja kaasahaaravusele. Uuringus leiti, et käsiraamatu kvaliteeti hindasid kõrgemalt õpilased, kelle matemaatikaoskuse hinnang oli väga kõrge ning õpilased, kes kasutasid käsiraamatut paberkujul. Uuringus osalenud õpilased nimetasid käsiraamatu meeldivateks osadeks sisu arusaadavust ja näidislahendusi ning negatiivseks küljeks käsiraamatu suurt mahtu.

Võtmesõnad: harilikud murrud, algebralised murrud, õppematerjal, käsiraamat, arendusuuring

CERCS: S270 Pedagoogika ja didaktika

The Creation of a Handbook on Common and Algebraic Fractions for Basic School Students and Feedback from Teachers and Students on the Created Handbook

Abstract:

Mathematics is one of the most extensive subjects in the Estonian national basic school curriculum, which is why there are multiple educational materials available for learning and teaching mathematics. However, there is a lack of material that is comprehensive and up to date. One of the aims of this master's thesis was to create a mathematics handbook on the topics of common and algebraic fractions. The second aim was to gather feedback on the created handbook from students and teachers. This master's thesis was conducted as design research, during which a mathematics handbook was compiled. Five mathematics teachers and 58 basic school students provided feedback on the handbook by answering a questionnaire. The feedback was predominantly positive. The highest ratings were given to the design and quality of the handbook, and the lowest ratings to its ability to motivate and engage readers. This study found that the quality of the handbook was rated higher by students who gave a very high rating to their own mathematical skills and by students who used the handbook in printed format. The students who participated in this study cited the easily understandable content and the worked examples as pleasant elements of the handbook, and its long length as a negative feature.

Keywords: common fractions, algebraic fractions, learning material, handbook, design research

CERCS: S270 Pedagogy and didactics

Sisukord

Sissejuhatus.....	5
1. Teoreetiline ülevaade.....	6
1.1 Käsiraamatu definitsioon ja selle roll õppetöös.....	6
1.2 Uurimisprobleem, töö eesmärgid ja uurimisküsimused.....	7
1.3 Arendusuuringu põhimõtted.....	9
1.4 Õppematerjali hindamise mudelid.....	10
1.5 Soovitused murdude õpetamiseks.....	13
1.5.1 Harilikud murrud.....	13
1.5.2 Algebralised murrud.....	15
2. Metoodika.....	17
2.1 Protseduur.....	17
2.2 Valim.....	19
2.3 Andmete kogumine.....	20
2.4 Andmeanalüüs.....	22
3. Tulemused.....	24
3.1 Käsiraamat.....	24
3.2 Ekspertide parandusettepanekud ja käsiraamatus tehtud muudatused.....	27
3.2.1 Harilikud murrud.....	27
3.2.2 Üksliikmed.....	29
3.2.3 Hulkliikmed.....	30
3.2.4 Tegurdamine.....	30
3.2.5 Algebralised murrud.....	31
3.2.6 Ratsionaalavaldised.....	32
3.3 Ekspertide hinnangud käsiraamatule.....	33
3.4 Õpilaste hinnangud käsiraamatule.....	35
4. Arutelu.....	40
Kokkuvõte.....	42
Viidatud kirjandus.....	43
Lisad.....	48
Lisa 1. Esimene ekspertidele saadetud e-kiri.....	48
Lisa 2. Küsimustik ekspertidele.....	49
Lisa 3. Teine ekspertidele saadetud e-kiri.....	53
Lisa 4. Nõusoleku registreerimisvorm lapsevanematele.....	54
Lisa 5. Küsimustik õpilastele.....	55
Lisa 6. Põhikooli matemaatika käsiraamat: harilikud ja algebralised murrud.....	59

Sissejuhatus

Eesti põhikooli riikliku õppekava (Põhikooli riiklik õppekava, 2011) alusel on matemaatika ainevaldkond nädalatundide arvu poolest keele ja kirjanduse järel teine valdkond, millega kogu põhikooli vältel kõige rohkem tegeletakse. Järelikult on matemaatika üks põhikooli mahukamaid õppeaineid. Matemaatika õpitulemused, mida õpilane peab põhikooli jooksul omandama, on samuti sätestatud riiklikus õppekavas (Ainevaldkond „Matemaatika“, 2025). Matemaatika õppeaine suure mahu katmiseks on koostatud hulganisti erinevaid õppematerjale, sh õpikuid, tööraamatuid, ülesannetekogumikke jm. Siiski ei leidu nende hulgas sellist õppematerjali, mis selgitaks kõiki põhikoolis õpitavaid matemaatika teemasid, oleks mõeldud kasutamiseks mitme õppeaasta jooksul ning vastaks kehtivale õppekavale. Magistritöö esimene eesmärk on luua selline õppematerjal ehk matemaatika käsiraamat harilike ja algebraliste murdude teemadel. Magistritöö teine eesmärk on saada loodud käsiraamatule tagasisidet põhikooliõpilastelt ja matemaatikaõpetajatelt.

Käsiraamat võib olla nii paberkujul kui ka digitaalne. Mõlemal vormil on oma eelised, paberkujul nt efektiivsem teksti mõistmine (Lee *et al.*, 2024) ning digitaalsel dünaamilisus ja interaktiivsus (Djono *et al.*, 2024). Käsiraamat võib muuhulgas sisaldada näidislahendusi. Näidislahenduse efektiks (*worked example effect*) nimetatakse õppetöös näidislahenduste rõhutamist, mis soosib paremate õpitulemuste saavutamist (Sweller *et al.*, 1998). Käsiraamat võib ühtaegu sisaldada mitme õppeaasta jooksul õpitavaid teemasid, võimaldades seda kauem järjest kasutada, mis võib tõsta õpilaste õpimotivatsiooni (Dinçer, 2020).

Magistritöö puhul on tegemist arendusuuringuga. Töö kirjalik osa koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis antakse ülevaade töö teoreetilistest alustest. Sealhulgas kirjeldatakse käsiraamatu võimalikke rakendusi õppetöös, esitatakse uurimisküsimused, selgitatakse arendusuuringu olemust ja hindamismudeleid LORI (*Learning Object Review Instrument*), LOES-S (*Learning Object Evaluation Scale for Students*) ning tuuakse välja metoodilised soovitusel murdude õpetamiseks. Teises peatükis kirjeldatakse töö metoodikat, sh arendusuuringu läbiviimise protsessi, hindamismudelite rakendamist, uuringu valimit ning andmete kogumise ja analüüsimise meetodeid. Kolmandas peatükis esitatakse magistritöö tulemused, kus kirjeldatakse koostatud käsiraamatut ning sellele saadud tagasisidet. Neljas ja viimane peatükk on arutelu teoreetiliste aluste, tulemuste ja järelduste kohta. Töö lõpus on lisadena esitatud töö käigus saadud e-kirjad, koostatud ja kasutatud küsimustikud, lapsevanemate nõusoleku registreerimisvorm ning viimasena ka loodud käsiraamat.

1. Teoreetiline ülevaade

Käesolevas peatükis antakse ülevaade käsiraamatu koostamisega seotud teaduskirjandusest. Kõigepealt esitatakse käsiraamatu definitsioon ning kirjeldatakse matemaatika käsiraamatu võimalikku rakendust ja mõju õppetöös. Seejärel kirjeldatakse uurimisprobleemi ning esitatakse töö eesmärgid ja uurimisküsimused. Järgmisena selgitatakse arendusuuringu olemust ja protsessi ning kirjeldatakse LORI ja LOES-S mudeleid. Viimaks tuuakse välja meetodilised soovitused harilike ja algebraliste murdude õpetamisel.

1.1 Käsiraamatu definitsioon ja selle roll õppetöös

Käsiraamat on teatud valdkonna kõige olulisemaid andmeid sisaldav teos (Sõnaveeb, 2026). Põhikooli matemaatika käsiraamat sisaldab seega kõige tähtsamat infot põhikoolis õpitava matemaatika kohta, näiteks mõisteid, valemeid, reegleid, omadusi, näidislahendusi jm. Sellist käsiraamatut saab kasutada õppematerjalina matemaatika õppimisel ja õpetamisel.

Õppematerjalid võivad olla nii digitaalsel kui ka paberkujul, kusjuures mõlemal vormil on oma eelised ja puudused. Digitaalse õppematerjali eelised on näiteks õpilaste kaasahaaratus suurendamine (Ageev *et al.*, 2025; Oppmann & Reinhold, 2023), õpilaste huvi ja õppimise efektiivsuse suurendamine, dünaamiliste visuaalide ja interaktiivsete tegevuste võimaldamine (Djono *et al.*, 2024) ning õpilaste parem akadeemiline edukus (Ageev *et al.*, 2025; Djono *et al.*, 2024). Digitaalse õppematerjali puudused on näiteks tähelepanu hajumine kõrvalistele tegevustele nagu sõnumite saatmine-saamine, muusika kuulamine vms (Shen, 2025) ning kehvem teksti mõistmine juhul, kui loetav tekst pole jaotatud lehekülgedeks, vaid seda peab ülevalt alla kerima (Clinton-Lisell & Litzinger, 2026). Paberkujul õppematerjali üheks eeliseks ongi efektiivsem teksti mõistmine (Lee *et al.*, 2024). Lisaks hõlmab paberkujul õppematerjali kasutamine sageli ka käsitsi kirjutamist, mis aktiveerib ajus õppimisega seotud mustreid (Askvik *et al.*, 2020). Samas on paberkujul õppematerjali puudusteks näiteks õpilaste vähesem kaasatus ja materjali staatilisus (Ageev *et al.*, 2025; Djono *et al.*, 2024; Oppmann & Reinhold, 2023).

Matemaatika käsiraamat võib lisaks teooriale sisaldada ka tüüpülesannete näidislahendusi. Näidislahenduste kasutamist matemaatika õpetamisel on uurinud Austraalia hariduspsühholoog John Sweller kognitiivse koormuse teooria (*Cognitive Load Theory*) raames (Sweller *et al.*, 1998). Näidislahenduse efekt (*worked example effect*) seisneb selles, et ulatuslikum näidislahenduste kasutamine õppetöös parandab õpitulemusi. Sweller jt (1998) toovad esile, et sageli piirduakse uue teema tutvustamisel üksikute näidetega, mille järel

suunatakse õpilased iseseisvalt ülesandeid lahendama, mis võib liigselt koormata töömälu. Kognitiivse koormuse vähendamiseks pakuvad Sweller jt (1998) välja pikaajalisema ja põhjalikuma näidislahenduste kasutamise. Mitmed hilisemad uuringud on näidislahenduste efekti kinnitanud, s.t leidnud, et näidislahenduste põhjal matemaatika õpetamise ja õppimise puhul saavutasid õpilased paremaid tulemusi kui traditsioonilise, lihtsalt ülesannete lahendamisele tugineva õppimise korral (Adeniji & Baker, 2023; Barbieri *et al.*, 2023; Chen *et al.*, 2023).

Põhikooli matemaatika käsiraamat võib korraga sisaldada kõiki põhikooli jooksul õpitavaid teemasid. Kui ühes raamatus on koos teemad, mida õpitakse mitmes erinevas klassis ja kooliastmes, siis saab õpilane ühte ja sama raamatut õppematerjalina kasutada kauem, kasvõi mitmete õppeaastate jooksul. Ühe konkreetse õppematerjaliga põhjalikum tutvumine ja selle pikem järjepidev kasutamine võib õpilastele kasulik olla. Seda mõtet toetab õpimotivatsiooni-teemaliste uuringute meta-analüüs, kus leiti, et õppematerjali pikaajalisem rakendamine tõstis õpilaste õpimotivatsiooni (Dinçer, 2020). Lisaks toetab terviklik käsiraamat varem õpitud teemade kordamist, näiteks enne kontrolltöid, eksameid või uue teema õppimist. Seda kinnitab uuring, mille kohaselt saavutasid tudengid paremaid tulemusi, kui neil oli kursuse jooksul kättesaadav kõiki vajalikke teadmisi koondav õppematerjal (Raver & Maydosz, 2010).

Käsiraamatud, mis koondavad õpitava teema põhiteadmised, võivad olla eriti kasulikud õpiraskustega õpilastele. Selliste õpilaste toetamisel soovitatakse kasutada abimaterjale, mis sisaldavad kõige olulisemat teavet, nagu mõisted, valemid ja näidisülesanded (Kivirähk, 2018).

1.2 Uurimisprobleem, töö eesmärgid ja uurimisküsimused

Eestikeelseid matemaatika õppematerjale, mis koondavad kogu põhikooli matemaatika olulisima teabe ning sisaldavad näidislahendusi, on piiratud arv. Käesoleva töö raames tuvastati kolm sellist õppematerjali. Esiteks on Mauruse kirjastuse igal aastal välja antavad tööraamatud „Valmistu põhikooli matemaatika lõpueksamiks“, mille kõige värskem väljaanne magistritöö kirjutamise ajal oli „Valmistu põhikooli matemaatika lõpueksamiks 2026“ (Veelmaa, 2025). Teiseks on olemas Avita kirjastuse raamat „Valmistu iseseisvalt põhikooli matemaatika lõpueksamiks: valemid, tähtsad laused, testid vastustega, proovieksamiülesanded lahendustega“ (Afanasjeva, 2006). Mõlemad nimetatud materjalid on suunatud põhikooli lõpueksamiks valmistumisele ning seetõttu eelkõige 9. klassi õpilastele.

Kui õpilased kasutavad neid õppematerjale ainult 9. klassi kevadel vahetult enne lõpueksamit, siis ei saa nad materjalide kasutamisest sellist kasu, mida võib saada ühte ja sama raamatu kasutamisest pikema aja (nt mitme aasta) jooksul. Mõlemad nimetatud raamatud sisaldavad lisaks teooriale ja näidislahendustele ka lugejale lahendamiseks mõeldud ülesandeid. Need muudavad raamatud mahukamaks, mistõttu võtab vajaliku info üles leidmine kauem aega ning raamatu struktuuris orienteerumine on keerulisem. Samuti ei käsitleta kummaski nimetatud raamatutest kõiki põhikooli matemaatika teemasid põhjalikult, näiteks puudub nendes hariliku murru ja kümnendmurru seose üksikasjalik käsitus.

Kolmandaks on olemas „Matemaatika käsiraamat V–IX klassile“, mis on teadaolevalt ainus õppematerjal, mis on mõeldud kasutamiseks mitme õppeaasta jooksul ning sisaldab ainult teooriat ja näidislahendusi. Samas on tegemist aegunud raamatuga: selle esialgne versioon ilmus 1982. aastal ning viimane ümbertöötatud trükk 1997. aastal (Kasema & Lind, 1982, 1997). Seetõttu ei vasta see kehtivale õppekavale (Ainevaldkond „Matemaatika“, 2025), ei lähtu tänapäevastest kujunduspõhimõtetest ning sisaldab keelekasutust, mis võib tänapäeva õpilastele olla raskemini mõistetav.

Eelnevast tulenevalt seisnes uurimisprobleem ajakohase, tervikliku ja mitme õppeaasta jooksul kasutatava põhikooli matemaatika käsiraamatu puudumises. Magistritöö esimene eesmärk oli luua põhikooli matemaatika käsiraamat, mis on mõeldud mitme õppeaasta jooksul kasutamiseks, sisaldab ainult teooriat ja näidislahendusi ning vastab kehtivale õppekavale. Koostatud käsiraamat on eeskätt mõeldud 6.-9. klassi õpilastele iseseisvaks kasutamiseks juba õpitud teemade kordamisel, nt enne kontrolltööd või uue teema õppimist. Samas saavad ka õpetajad seda tundides õppematerjalina kasutada. Käesoleva töö raames oli fookus harilike ja algebraliste murdude teemadel, kuna nendega seotud teadmised on vajalikud 6.-9. klassis igal aastal. Lisaks võib harilikke ja algebralisi murde korraga sisaldav õppematerjal toetada õppijal nende teemade vaheliste seoste tekkimist. Magistritöö teine eesmärk oli loodud käsiraamatule tagasiside saamine 6.-9. klassi õpilastelt ja matemaatika-õpetajatelt.

Töö eesmärkide saavutamiseks püstitati järgmised uurimisküsimused:

- 1) Millistele põhimõtetele tuginedes põhikooli matemaatika käsiraamat loodi?
- 2) Milline on 6.-9. klassi õpilaste tagasiside loodud käsiraamatule?
- 3) Milline on 6.-9. klassi matemaatikaõpetajate tagasiside loodud käsiraamatule?

Magistritöö eesmärkidest ja uurimisküsimustest lähtuvalt valiti töö uurimisviisiks arendusuuring.

1.3 Arendusuuringu põhimõtted

Arendusuuring (*Design Research*) on uurimisviis, millel on mitmeid erinevaid definitsioone ja käsitlusi. McKenney ja Reeves (2014) kirjeldavad arendusuuringut kui lähenemist, mis põhineb hariduslike probleemide lahendamisel läbi tsüklilise arendusprotsessi, mille käigus luuakse ja täiustatakse praktilisi lahendusi, nagu õppematerjalid, õpistrateegiad või koolitused. Bakker (2018) käsitleb arendusuuringut sarnaselt, rõhutades seejuures arendus- ja uurimisprotsessi tihedat seotust. Arendustegevus tugineb varasematele teaduslikele teadmistele ning samal ajal panustab ka uute teadmiste loomisse. Ka McKenney ja Reeves (2014) toovad esile, et arendusuuringul on kaks paralleelset eesmärki: lahendada praktilisi probleeme olemasolevate teadmiste abil ning samal ajal luua uusi teaduslikke teadmisi. Arendusuuringu konkreetse definitsiooni on välja pakkunud Easterday jt (2018, lk 151): „Hariduslik arendusuuring on haridusuurijate läbiviidav meta-metoodika praktiliste lahenduste ja teoreetiliste arendusmudelite loomiseks, kasutades arendusprotsessi, mis koosneb fookuse seadmisest, mõistmisest, määratlemisest, lahenduse ideeloomest, teostamisest, katsetamisest, ja tulemuste esitamisest, kusjuures protsessi osad sisaldavad üksteist rekursiivselt, et otsida iteratiivselt empiirilisi lahendusi inimõppe praktilistele probleemidele“.

Arendusuuringul on teatavaid sarnasusi tegevusuuringuga ja eksperimendiga, mistõttu on arendusuuringu läbiviimisel oluline teada, kuidas see teistest uurimisviisidest erineb (Hunt & Karm, 2025). Bakker (2018) ning Easterday jt (2018) toovad arendusuuringu ja tegevusuuringu sarnasustena välja õppetöösse sekkumise ja uuringuprotsessi tsüklilisuse. Erinevusteks nimetab Bakker (2018) uurija rolli uuringuprotsessis ning arendustegevuse tähtsust. Nimelt arendusuuringus võib uurijal olla ka vaatlev roll, kuid tegevusuuringus saab uurija ise olla ainult õppetegevuses osaleja ja mitte vaatleja. Samas arendusuuringu käigus peab toimuma uue õppematerjali vms arendamine, kuid tegevusuuringus võib kasutada ka ainult olemasolevaid õppematerjale ja -tegevusi. Lisaks kirjeldavad Bakker (2018) ning McKenney ja Reeves (2014), et arendusuuringu fookus on õpetamise teooria teaduslikul uurimisel ja parendamisel, kuid tegevusuuringu fookus on ühe konkreetse situatsiooni parendamisel. Arendusuuringu ja eksperimendi sarnasusena toob Bakker (2018) välja õppematerjali või -meetodi testimise. Erinevuseks on see, et arendusuuring testib parasjagu

arendatavat õppematerjali vms ning uurib, kuidas ja miks see töötab, kuid eksperiment testib olemasolevaid õppemeetodeid vms ning uurib, milline neist töötab kõige paremini (Bakker, 2018; Easterday *et al.*, 2018).

Arendusuuringu läbiviimise protsess ei ole rangelt samm-sammuliselt fikseeritud (Bakker, 2018; McKenney & Reeves, 2014) ning erinevad autorid pakuvad välja erinevaid võimalusi selle protsessi liigendamiseks ja kirjeldamiseks. McKenney ja Reeves (2014) jaotavad arendusuuringu protsessi kolmeks faasiks: analüüs ja suuna leidmine, arendamine, hindamine ja refleksioon. Ka Bakker (2018) nimetab kolm faasi: ettevalmistus ja arendus, rakendamine, analüüs ja muudatuse tegemine. Need kirjeldused on sisult küllaltki sarnased, kuid erinevad liigenduse poolest, näiteks McKenney ja Reeves'i (2014) käsitluses on analüüs ja suuna leidmine üks faas ning arendamine omaette faas, kuid Bakker (2018) käsitleb ettevalmistust ja arendust ühe faasina. Easterday jt (2018) pakuvad välja täpsema arendusuuringu protsessi kirjelduse, jaotades selle seitsmeks faasiks: fookuse seadmine, mõistmine, määratlemine, lahenduse ideeloomine, teostamine, katsetamine, tulemuste esitamine. Kõikides nimetatud kirjeldustes on esimene faas mingil kujul **ettevalmistus** (analüüs ja suuna leidmine; fookuse seadmine, mõistmine, määratlemine), mis sisaldab asjakohase teaduskirjandusega ja olemasolevate lahendustega tutvumist ning uurimisprobleemi, -eesmärkide ja -küsimuste sõnastamist. Teisena esineb kõikides jaotustes **arenduse** faas (lahenduse ideeloomine, teostamine), mille käigus arendatakse välja teatud praktiline lahendus, näiteks uus õppematerjal, -meetod vms. Kõikides käsitlustes on järgmine faas **katsetamine ja muudatuste tegemine** (hindamine ja refleksioon; rakendamine, analüüs), mis hõlmab arendatud lahenduse rakendamist õppetöös, selle hindamist ehk tagasiside kogumist ja analüüsimist ning saadud tagasiside põhjal arendatud lahenduse täiendamist. Viimane faas on **tulemuste esitamine**, mille käigus tutvustatakse arendatud lahendust ning analüüsi käigus leitud uusi teaduslikke teadmisi. Kõikide käsitluste puhul toonitatakse, et nimetatud faasid ei ole rangelt piiritletud ega järjestatud. Selle asemel on arendusuuringu protsessis rõhk justnimelt tsüklilisusel ja rekursiivsusel, s.t erinevaid faase läbitakse arendusuuringu käigus korduvalt ning üksteises sisalduvalt. (Bakker, 2018; Easterday *et al.*, 2018; McKenney & Reeves, 2014)

1.4 Õppematerjali hindamise mudelid

Arendusuuringu üks oluline osa on arendatava praktilise lahenduse, nt õppematerjali hindamine. Õppematerjalide hindamiseks on olemas erinevaid uuringuinstrumente ja

hindamismudeleid. Üks levinumaid vahendeid õpiobjekti (*Learning Object, LO*) kvaliteedi hindamiseks on LORI (*Learning Object Review Instrument*) mudel (Gordillo *et al.*, 2014). Käesolevas töös kasutatakse termineid „õppematerjal“ ja „õpiobjekt“ samaväärsetena. LORI mudel on digitaalsete õpiobjektide hindamiseks mõeldud tööriist ning see sisaldab üheksat hindamiskriteeriumit: sisu kvaliteet, õpieesmärkide kooskõlastatus, tagasiside ja kohandumine, motivatsioon, kujundus, interaktsioon, ligipääsetavus, taaskasutatavus, vastavus standarditele (Leacock & Nesbit, 2007). Järgnevalt selgitatakse nimetatud hindamiskriteeriumite sisu Leacock ja Nesbit (2007) alusel.

- 1) Õpiobjekti sisu kvaliteet koosneb akadeemilisest täpsusest ja korrektsusest, sobilikust rõhuasetusest ning parajast detailsuse astmest. Maksimaalse hinnangu saamiseks ei tohi õpiobjektis olla vigu ega asjakohase informatsiooni väljajätmist ning see ei tohi olla kallutatud.
- 2) Õpiobjekti õpieesmärkide kooskõlastatus tähendab õpieesmärkide, õppetegevuste ning sihtgrupi vahelist kooskõla. Maksimaalse hinnangu saamiseks peavad õpiobjekti metaandmetes olema esitatud õpieesmärgid ning õpiobjektis sisalduvad õppetegevused peavad sobima ettenähtud sihtgrupile nende õpieesmärkide saavutamiseks.
- 3) Õpiobjekti tagasiside ja kohandumine sisaldab õppija sisendi põhjal talle antavat tagasisidet ja kohanduvat õppesisu. Maksimaalse hinnangu saamiseks peab õpiobjekt andma õppija esitatud vastustele tagasisidet ja sealhulgas selgitama, mis oli õige või vale, ning analüüsima õppija edenemist ja pakkuma talle personaliseeritud õppesisu.
- 4) Õpiobjekti motivatsioon viitab võimele õppijaid motiveerida ja sihtgrupile huvi pakkuda. Maksimaalse hinnangu saamiseks peab õpiobjekt tunduma oma sihtgrupile oluline, pakkuma õppijatele eduelamuse võimalust ning suutma nende tähelepanu hoida.
- 5) Õpiobjekti kujundus koosneb visuaalse ja auditoorse informatsiooni esitusviisidest. Maksimaalse hinnangu saamiseks peab õpiobjekti kujundus olema sisutihe, arusaadav ja esteetiline ning ühendama efektiivselt teksti, graafikat jm multimeediat.
- 6) Õpiobjekti interaktsioon sisaldab navigatsiooni lihtsust ja kasutajaliidese kvaliteeti. Maksimaalse hinnangu saamiseks peab õpiobjektis navigeerimine olema intuitiivne ja etteaimatav ning kõik kasutajaliidese elemendid peavad olema tehniliselt töökorras.
- 7) Õpiobjekti ligipääsetavus viitab ülesehitusele, mis sobib ka puudega ja/või erivajadustega õppijatele. Maksimaalse hinnangu saamiseks peab õpiobjekt olema kohandatav vastavalt vajadustele (aktiivsuse- ja tähelepanuhäirega õppijale ühtmoodi, autismispektri häiretega õppijale teistmoodi jne) ning võrdväärselt kasutatav erinevate

seadmetega (tahvelarvuti, sülearvuti jm), abistavate tehnoloogiatega (teksti ettelugemine, subtiitrite näitamine jm) ja sisendseadmetega (klaviatuur, mikrofon jm).

- 8) Õpiobjekti taaskasutatavus tähendab võimalust seda kasutada erinevates õpituatsioonides ja erineva taustaga õpilastega. Maksimaalse hinnangu saamiseks peab õpiobjekt sisaldama õppetegevusteks vajalikke eelteadmisi, olema kasulik erinevate oskustega õpilastele ja kasutatav erinevates kontekstides ning ei tohi sisaldada ühekordset informatsiooni nagu esitamise tähtaeg, õpetaja nimi vms.
- 9) Õpiobjekti vastavus standarditele viitab tehnilistele standarditele ja spetsifikatsioonidele. Maksimaalse hinnangu saamiseks peab õpiobjekt vastama W3C (*World Wide Web Consortium*) standarditele (*Wide Web Consortium, s.a.*), 1EdTech standarditele (*1EdTech Consortium, s.a.*), SCORM (*Sharable Content Object Reference Model*) standarditele (*Rustici Software, s.a.*) jm relevantsetele standarditele ning sisaldama kasutajatele kättesaadavaid metaandmeid õpiobjekti autori, loomiskuupäeva jms kohta.

Seega võimaldab LORI mudel hinnata õppematerjali nii pedagoogilisest kui ka tehnilisest aspektist. Lisaks on õpiobjekti kvaliteedi hindamiseks olemas LOES-S (*Learning Object Evaluation Scale for Students*) mudel (Kay & Knaack, 2009). LOES-S erineb teistest õpiobjektide hindamismudelitest selle poolest, et see on mõeldud kasutamiseks õpilastega. LOES-S mudel sisaldab hindamiskriteeriumeid: õppimine, kvaliteet, kaasahaaravus. Kriteeriumid sisaldavad kokku 14 väidet või küsimust (Kay & Knaack, 2009). Järgnevalt esitatakse nimetatud hindamiskriteeriumid koos nende alla kuuluvate väidete ja küsimustega Kay ja Knaack (2009) alusel.

- Õppimine
 1. Õpiobjektiga töötamine aitas mul õppida.
 2. Õpiobjektist saadud tagasiside aitas mul õppida.
 3. Õpiobjekti graafika ja animatsioonid aitasid mul õppida.
 4. Õpiobjekt aitas mulle uut teadmist õpetada.
 5. Üldiselt oli õpiobjekt mulle õppimisel abiks.
- Kvaliteet
 6. Õpiobjekti abifunktsioonid olid kasulikud.
 7. Õpiobjekti juhiseid olid lihtsasti arusaadavad.
 8. Õpiobjekti oli lihtne kasutada.
 9. Õpiobjekt oli hästi üles ehitatud.

- Kaasahaaravus

10. Mulle meeldis õpiobjekti üldine teema.
11. Õpiobjekt motiveeris mind õppima.
12. Ma tahaksin seda õpiobjekti tulevikus veel kasutada.
13. Kas ja mis sulle õpiobjekti juures meeldis?
14. Kas ja mis sulle õpiobjekti juures ei meeldinud?

Seega võimaldab LOES-S mudel õpilastel hinnata õppematerjali kasulikkust ja kasutusmugavust.

1.5 Soovitused murdude õpetamiseks

Käesoleva magistritöö üks eesmärk on luua käsiraamat, mille fookus on harilike ja algebraliste murdude teemadel. Järgnevalt antakse ülevaade õpitulemustest, mida õpilased peavad nendes teemades omandama ning metoodilistest soovitustest ja tähelepanekutest nende teemade õpetamisel.

1.5.1 Harilikud murrud

Põhikooli riiklikus õppekavas (Ainevaldkond „Matemaatika“, 2025) on ette nähtud, et harilike murdude teemas peavad õpilased saavutama kooliastmete kaupa järgmised õpitulemused:

I kooliastme lõpetaja:

- leiab $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$ arvust;
- selgitab murdude $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$ tähendust osana kujundist ja osana hulgast;

II kooliastme lõpetaja:

- loeb ja kirjutab harilikke murde kuni nimetajaga 1000;
- järjestab ja võrdleb harilikke murde, mille vähim ühiskordne on kuni 100;
- teab hariliku murru mõistet ning kujutab harilikke murde arvkiirel;
- kujutab joonisel harilikku murdu osana tervikust;
- teisendab hariliku murru kümnendmurruks, lõpliku kümnendmurru harilikuks murruks ning leiab hariliku murru kümnendlähendi;
- arvutab kirjalikult positiivsete harilike murdudega, mille nimetajate vähim ühiskordne on kuni 100;
- kasutab harilike murdudega tehteid tehes mõisteid *kordne* ja *tegur*;

III kooliastme lõpetaja:

- liidab, lahutab, korrutab, jagab ja astendab naturaalarvulise astendajaga ratsionaalarve peast, kirjalikult ja taskuarvutiga ning rakendab tehete järjekorda;
- teisendab protsendi harilikuks murruks ning vastupidi.

Eelnevast selgub, et valdav osa harilike murdudega seotud oskustest tuleb õpilastel omandada II kooliastmes. Metoodilisi soovitusi II kooliastmes matemaatika õpetamiseks leidub Kaasiku ja Lepmanni (2002) raamatus „Väike metoodikaraamat II kooliastme matemaatikaõpetajale“ ning Haridus- ja Teadusministeeriumi veebilehel „Õppekava materjalide veeb“ (Haridus- ja Teadusministeerium [HTM], *s.a.*). Käesolevas alapeatükis esitatakse nimetatud allikates välja toodud soovitused harilike murdude õpetamiseks.

Harilike murdude tähenduse selgitamisel tuleb rõhutada, et nad on osa mingisugusest tervikust. Seejuures on oluline, et harilik murd tekib terviku jaotamisel võrdseteks osadeks. Hariliku murru tähenduse kinnistumiseks peaksid õpilased ise tooma elulisi näiteid. Õpilasi tuleb suunata alati tähele panema, millisest suurusest osa võetakse, kuna võib juhtuda, et erineva osamääraga osad – nt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{5}$ – on võrdsed (kui need on osad erinevatest tervikutest). Oluline on käsitleda ülesandeid, kus erinevatest tervikutest leitakse sama osamääraga osad ning ülesandeid, kus samast tervikust leitakse erineva osamääraga osad. Lisaks terviku osadeks jaotamisele on harilikul murrul ka jagamistehte tähendus ning suhte (osamäär) tähendus, mis on samuti vaja õpilastele esile tuua. Veel tuleb rõhutada, et naturaalarvul on ainult üks võimalik kuju, aga harilikul murrul on lõpmatult palju erinevaid kujusid.

Segaarvudega arvutamisel ja nende teisendamisel on oluline toonitada, et segaarv on täisosa ja murdosa summa ning esialgu tasub nende vahel olev plussmärk ka välja kirjutada. Segaarvu liigmurruks teisendamisel tuleb õpilastele sisuliselt selgitada, et täisosas kujutatud terved teisendatakse osadeks (neljandikeks, seitsmendikeks vms). Murdude taandamisel on oluline, et seda võib teha ka järk-järgult. Murdude laiendamisel saab kasutada erinevat tüüpi ülesandeid, nt murru laiendamine juhul, kui antud on laiendaja või juhul, kui antud on vastuseks saadava murru nimetaja; ette antud murdude võrduses laiendaja leidmine; kahe murru laiendamine nii, et neil oleks ühesugune nimetaja. Murdude võrdlemisel tuleb selgitada erinevaid võimalusi: võrdlemine juhul, kui lugejad on võrdsed; juhul, kui nimetajad on võrdsed; juhul, kui nii lugejad kui ka nimetajad on erinevad. Viimasel juhul on sageli abi erinevatest arutluskäikudest, nt uurida kui palju on mõlemas murrus tervikust puudu ning võrrelda puudu olevaid suuruseid või võrrelda mõlemat murdu kõigepealt murruga $\frac{1}{2}$ või

arvuga 1. Hariliku murru kümnendmurruks teisendamisel tuleb selgitada erinevaid võimalusi: teisendamine juhul, kui nimetaja on järguühik; juhul, kui nimetaja on laiendatav või taandatav järguühikuks; juhul, kui nimetaja ei ole järguühik ja seda ei saa järguühikuks teisendada.

Kõiki murdudega tehtavaid tehteid tuleks õpilastele põhjendada jooniste abil. Liitmisel ja lahutamisel on kasulik murde alguses sõnades kirjutada (nt 2 viiendikku + 1 viiendik). Tüüpvigade vältimiseks tuleb võrrelda samade murdudega tehtavat liitmistehet korrutustehetega ning liitmistehet jagamistehetega. Lisaks on oluline selgitada, miks ei või näiteks lugejas olevat liidetavat ja nimetajat taandada. Eraldi tuleb tähelepanu pöörata naturaalarvust hariliku murru või segaarvu lahutamisele. Harilike murdude korrutamisel ja jagamisel on vaja lisaks kahe hariliku murru korrutamisele-jagamisele käsitleda ka naturaalarvu(ga) ja segaarvu(ga) korrutamist-jagamist. Samuti tuleb tähelepanu juhtida sellele, et arvu korrutamisel naturaalarvuga arv alati suureneb, murruga korrutamisel võib ka väheneda ning jagamisel vastupidi. Lisaks on korrutamisel-jagamisel oluline rõhutada, et murdu saab taandada ainult juhul, kui tehe on kirjutatud ühisele murrujoonele. Tüüpvigade vältimiseks tuleb võrrelda samade murdudega tehtavat korrutustehet jagamistehetega.

1.5.2 Algebralised murrud

Põhikooli riiklikus õppekavas (Ainevaldkond „Matemaatika“, 2025) on ette nähtud, et algebraliste murdude teemas peavad õpilased saavutama kooliastmete kaupa järgmised õpitulemused:

III kooliastme lõpetaja:

- üldistab harilike murdude arvutusreeglid algebralistele murdudele;
- taandab ja laiendab algebralist murdu ning liidab, lahutab, korrutab ja jagab kaht algebralist murdu;
- lihtsustab kahetehtelisi ratsionaalavaldisi.

Eelnevast selgub, et algebraliste murdudega seotud oskused tuleb õpilastel omandada III kooliastmes. Metoodilisi soovitusi III kooliastmes matemaatika õpetamiseks leidub samuti veebilehel „Õppekava materjalide veeb“ (HTM, *s.a.*). Käesolevas lõigus esitatakse nimetatud veebilehel välja toodud soovitused algebraliste murdude õpetamiseks. Selleks, et algebraliste murdudega tehete tegemine ei jääks õpilastele elukaugeks, tuleb neile tutvustada algebraliste murdude sidet eluliste situatsioonidega. Tüüpvigade vältimiseks on oluline õpilastele meelde tuletada harilike murdude arvutamise reeglid. Seejuures tuleb taaskord rõhutada, mis

tingimustel saab murdu taandada ning mida tähendab murru laiendamine. Ratsionaalavaldiste lihtsustamisel on oluline tähelepanu pöörata tehete järjekorrale. Õpiraskustega õpilasel tuleb tõenäoliselt lubada kasutada valemilehte, kus on kirjas abivalemid ja näidislahendused.

Veebilehel „Õppekava materjalide veeb“ (HTM, *s.a.*) on välja toodud, et ratsionaalavaldiste lihtsustamisel (algebraaliste murdudega tehete tegemisel) on sageli takistuseks vajalike eelteadmiste puudumine. Nimetatud vajalikud eelteadmised on esiteks harilike murdudega seotud oskused, mis on esitatud eelmises alapeatükis, ning lisaks veel hulkliikmete koondamine ja tegurdamine. Hulkliikmetega seotud teemadest arusaamiseks on omakorda eelteadmisena vajalik üksliikmetega tehete tegemine. (HTM, *s.a.*)

Käesolevas peatükis esitatud metoodiliste soovitude põhjal loodud käsiraamatu koostamise protsessi kirjeldatakse järgmises peatükis.

2. Metoodika

Käesoleva magistritöö puhul oli tegemist arendusuuringuga. Järgnevas peatükis kirjeldatakse protseduuri, kuidas arendusuuring läbi viidi, sh kuidas käis käsiraamatu kui õppematerjali arendamine ning kuidas rakendati LORI ja LOES-S mudeleid õppematerjalile tagasiside kogumisel. Lisaks iseloomustatakse uuringu valimit ning kirjeldatakse andmete kogumise protseduuri ja kasutatud uuringuinstrumente. Viimaks selgitatakse, kuidas kogutud andmeid analüüsiti.

2.1 Protseduur

Arendusuuring viidi läbi mitmes etapis. Esimene etapp oli ettevalmistus. Ettevalmistuse raames seati paika uuringu fookus, tutvuti teemakohase teaduskirjandusega ning sõnastati uurimisprobleem, -eesmärgid ja -küsimused. Ülevaade teoreetilistest alustest esitati käesoleva magistritöö esimeses peatükis.

Uuringu teine etapp oli arendamine. Selle käigus koostati käsiraamatu esialgne versioon. Käsiraamatu koostamisel arvestati murdude õpetamise metoodiliste soovitustega, mis esitati eelmises peatükis. Lisaks võeti käsiraamatu sisu kavandamisel aluseks riiklik õppekava (Ainevaldkond „Matemaatika“, 2025) ning erinevate kirjastuste matemaatikaõpikud ja -tööraamatud. Sisu otsustati jaotada kuueks peatükiks: harilikud murrud, üksliikmed, hulkliikmed, tegurdamine, algebralised murrud, ratsionaalavaldised. Peatükid jaotati omakorda alateemadeks, mida kirjeldatakse täpsemalt tulemuste peatükis. Igas alateemas pandi lisaks mõistete defineerimisele ning omaduste ja reeglite kirjeldamisele rõhku ka näidislahenduste esitamisele.

Arendusuuringu kolmas etapp oli katsetamine ja muudatuste tegemine. Lisaks kuulusid selle etapi alla ka hindamine ja refleksioon, rakendamine ning analüüs. Käsiraamatu hindamiseks kasutati ekspertide abi. Magistritöö kontekstis nimetati eksperdiks Eesti põhikooli matemaatikaõpetajat, kes õpetas magistritöö kirjutamise ajal matemaatikat vähemalt ühele klassile vahemikus 6.-9. klass, kes vastas riiklikult sätestatud õpetaja kvalifikatsiooninõuetele (Põhikooli- ja..., 2010) ning kes oli selleks ajaks õpetajana töötanud vähemalt kümme aastat. Ekspertidele saadeti käsiraamatu esialgne versioon ning paluti neil see läbi lugeda ja esitada parandusettepanekuid. Ekspertide antud ettepanekute põhjal tehti käsiraamatus vastavad muudatused. Käsiraamatu täiendatud versioon saadeti uuesti ekspertidele koos küsimustikuga, kus eksperdid hindasid valminud käsiraamatut. Küsimustik koostati LORI mudeli põhjal. Kuna kõik selle mudeli hindamiskriteeriumid ei olnud magistritöö raames

koostatud käsiraamatu jaoks rakendatavad, siis kohandati kriteeriumeid vastavalt vajadusele. Küsimustikust jäeti välja neli LORI mudeli kriteeriumit. Esiteks jäeti välja 3. ja 7. kriteerium: tagasiside ja kohandumine ning ligipääsetavus, kuna koostatud käsiraamat oli staatiline ning ei reageerinud kasutaja sisendile. Teiseks jäeti välja 6. ja 9. kriteerium: interaktsioon ja vastavus standarditele, kuna käsiraamatut ei koostatud eraldi tarkvarana. Lisaks kohandati 2. kriteeriumi – õpieesmärkide kooskõlastatus – sisu käsiraamatule vastavaks. Kuna käsiraamat ei sisaldanud konkreetseid õpieesmärke ega õppetegevusi, siis sõnastati nende asemel selle kriteeriumi hindamiseks väited: „Õppematerjal toetab juba õpitud teemade kordamist“, „Õppematerjali saab efektiivselt õppetöös kasutada“ ja „Õppematerjal sobib ettenähtud sihtgrupile“.

Käsiraamatu täiendatud versiooni katsetati 6.-9. kl õpilastega. Katsetamiseks viidi õpilastega läbi kaks matemaatikatundi. Esimese tunni alguses anti õpilastele ette nimekiri kordamisülesannetest, mida õpilased pidid alguses nii palju, kui oskasid, iseseisvalt lahendama. Ülesanded olid sellise teema kohta, mida õpilased olid varem juba õppinud: 6.-7. klassis harilike murdude teemal, 8. klassis hulkliikmete ja tegurdamise teemal ning 9. klassis algebraliste murdude ja ratsionaalavaldiste teemal. Esimese matemaatikatunni teises pooles anti igale õpilasele käesoleva magistritöö raames koostatud käsiraamat. Eelnevalt olid iga klassi õpilased loosi teel kahte rühma jaotatud, kus ühe rühma õpilased said tunnis kasutamiseks paberkujul käsiraamatu ning teise rühma õpilased kooli sülearvuti ning käsiraamatu PDF-failina. Käsiraamatu fail avati sellises rakenduses, kus on võimalik lehekülgede vahel edasi-tagasi liikuda ka nooleklahvidega mitte ainult kerides. Edasi lahendasid kõik õpilased samu ülesandeid, mis tunni alguses anti, aga samal ajal võisid nad käsiraamatust abi otsida. Teises matemaatikatunnis lahendasid õpilased samast nimekirjast ülesandeid edasi ja kasutasid sama käsiraamatut, aga tunni lõpus paluti neil vastata küsimustikule, kus nad hindasid tunnis kasutatud käsiraamatut. Küsimustik koostati LOES-S mudeli põhjal. Kuna kõik väited, mida selle mudeli raames hinnatakse, ei olnud magistritöö raames koostatud käsiraamatu jaoks rakendatavad, siis kohandati neid vastavalt vajadusele. Küsimustikust jäeti välja kolm LOES-S mudeli väidet. Esiteks jäeti välja 2. ja 4. väide: „Õpiobjektist saadud tagasiside aitas mul õppida“ ja „Õpiobjekt aitas mulle uut teadmist õpetada“, kuna koostatud käsiraamat ei anna kasutajale tagasisidet ning see ei ole mõeldud uute teemade õppimiseks. Teiseks jäeti välja 7. väide: „Õpiobjekti juhiseid olid lihtsasti arusaadavad“, kuna käsiraamat ei sisalda konkreetseid tööjuhiseid. Lisaks kohandati 3. ja 6. väidet: sõnad „graafika ja animatsioonid“ asendati sõnaga „joonised“ ning sõna

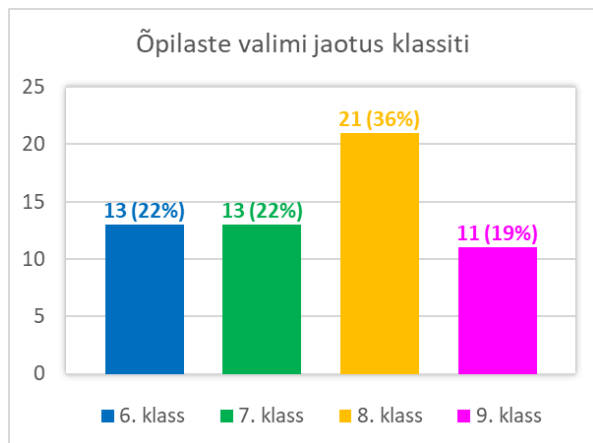
„abifunktsioonid“ asendati sõnaga „näidislahendused“. Ekspertidelt ja õpilastelt andmete kogumist ja nende analüüsimist kirjeldatakse täpsemalt alapeatükkides: „2.3 Andmete kogumine“ ja „2.4 Andmeanalüüs“.

Uuringu neljas ja viimane etapp oli tulemuste esitamine. Koostatud käsiraamatut ning andmeanalüüsi käigus leitud teadmisi tutvustatakse käesoleva magistritöö järgmistes – tulemuste ja arutelu peatükkides.

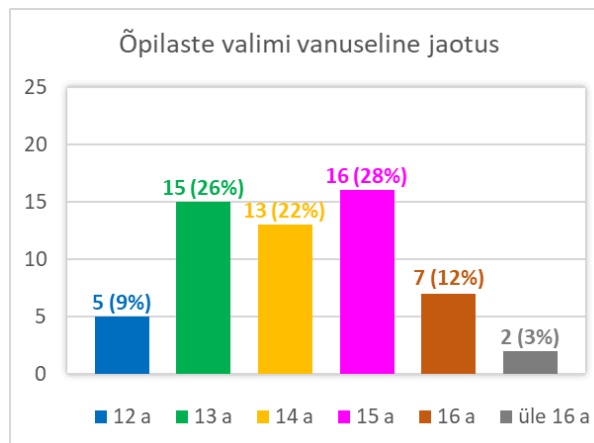
2.2 Valim

Ekspertide töösse kaasamiseks võttis töö autor ühendust oma tutvusringkonna matemaatikaõpetajatega, kes vastasid eksperdiks olemise tingimustele – matemaatika õpetamine 6.-9. klassile, kvalifikatsiooninõuetele vastamine, vähemalt kümneaastane tööstaaž – ning küsis neilt nõusolekut magistritöösse panustamiseks. See tähendab, et ekspertide valimi puhul oli tegemist mugavusvalimiga (Beilmann & Rämmer, 2025). Ekspertide valimi moodustasid viis õpetajat, kes andsid oma nõusoleku uuringus osalemiseks. Valimist kaks eksperti olid (40%) vanusevahemikus 40-49 aastat, üks ekspert (20%) vanusevahemikus 50-59 aastat, üks (20%) vahemikus 60-69 aastat ja üks ekspert (20%) vanusega 70 a või rohkem. Valimist kahe eksperdi (40%) tööstaaž oli vahemikus 20-29 aastat, kahe eksperdi (40%) tööstaaž vahemikus 30-39 aastat ning ühe eksperdi (20%) staaž 50 a või rohkem. Valimist neli eksperti (80%) õpetasid sellel ajal, kui magistritööd kirjutati matemaatikat 6. klassile, kolm eksperti (60%) õpetasid matemaatikat 7. klassile, neli eksperti (80%) õpetasid 8. klassile ning neli eksperti (80%) 9. klassile. Kõik viis eksperti on eelneva viie aasta jooksul matemaatikat õpetanud igale klassile vahemikus 6.-9. klass.

Lisaks ekspertidele koguti andmeid ka õpilastelt. Selleks küsitleti 6.-9. klassi õpilasi selles koolis, kus töö autor ise magistritöö kirjutamise ajal õpetajana töötas ning lisaks veel ühes koolis, kus töötas samal ajal õpetajana üks töö autori tuttav. Seega ka õpilaste valimi puhul on tegemist mugavusvalimiga (Beilmann & Rämmer, 2025). Õpilaste osalemiseks magistritöö uurimuses küsiti nõusolekut nii lapsevanematelt kui ka õpilastelt endalt. Arvestades antud nõusolekutega ning õpilaste kohaloluga küsitluse läbiviimise päeval moodustasid valimi 58 õpilast. Valimis oli 26 meessoost õpilast (45%), 30 naissoost õpilast (52%) ning kaks õpilast (3%), kes ei soovinud oma sugu avaldada. Valimi jaotus klassiti ja vanuseline jaotus on kujutatud vastavalt joonistel 1 ja 2.



Joonis 1. Õpilaste valimi jaotus klassiti.



Joonis 2. Õpilaste valimi vanuseline jaotus.

Lisaks soovis töö autor teada saada ka õpilaste hinnangut oma matemaatikaoskusele, kuna see võib mõjutada nende hinnangut matemaatika õppematerjalile. Selle jaoks olid õpilaste seas läbi viidud küsitluses kolm väidet hea matemaatikaoskuse kohta ning õpilased pidid iga väite kohta viiepalliskaalal märkima, mil määral nad sellega nõustuvad. Õpilaste valimi jaotus matemaatikaoskuse hinnangu alusel oli järgmine: viie õpilase (9%) matemaatikaoskuse mediaanhinnang oli „1“, kuue õpilase (10%) matemaatikaoskuse mediaanhinnang oli „2“, 25 õpilase (43%) mediaanhinnang oli „3“, 15 õpilase (26%) mediaanhinnang oli „4“ ning seitsme õpilase (12%) mediaanhinnang oli „5“. Samuti kasutasid 28 õpilast (48%) uuringu käigus käsiraamatut paberkujul ning 30 õpilast (52%) arvutis PDF-failina.

2.3 Andmete kogumine

Esmalt koguti andmeid ekspertidelt, kui neil paluti käsiraamatu esialgne versioon läbi lugeda ning sellele parandusettepanekuid esitada. Selleks saadeti ekspertidele e-kiri (Lisa 1), mille manuses oli käsiraamatu fail. E-kirjas anti muuhulgas ekspertidele teada, et neilt kogutud andmeid kasutatakse anonüümselt ja ainult käesoleva magistritöö raames ning andmed kustutatakse pärast magistritöö kaitsmist. See vastab heale teadustavale ja andmekaitse nõuetele (Juurik *et al.*, 2023). Ekspertidel paluti saata parandusettepanekud töö autorile vabas vormis e-kirja teel. Mõned eksperdid kirjutasid oma ettepanekud käsiraamatu faili kommentaaridena ning mõned saatsid oma ettepanekud lihttekstina.

Pärast käsiraamatu täiendamist vastavalt ekspertide parandusettepanekutele koguti ekspertidelt uuesti andmeid. Seekord oli andmete kogumise eesmärk teada saada, mida arvavad eksperdid valminud käsiraamatust. Eesmärgi täitmiseks kasutati andmekogumismeetodina küsitlusuuringut. Uuringuinstrument oli küsimustik (Lisa 2), mille koostas töö

autor rakenduses *Microsoft Forms*. Küsimustiku koostamisel järgiti Beilmanni (2020) küsimustiku koostamise juhiseid, nt eituste vältimine küsimustes, küsimustiku sissejuhatuse komponendid jms. Küsimustik koosnes kokku 26 küsimusest, mis olid jagatud kahte teemaplokki. Vastavalt Beilmanni (2020) soovitudele olid esimeses teemaplokis LORI mudeli põhjal koostatud küsimused ning teises teemaplokis isikuandmetega seonduvad küsimused. Esimeses plokis oli kokku 22 küsimust, millest 17 olid esitatud väitena. Väited jagunesid viie LORI mudeli kriteeriumi vahel. Kõikide väidete puhul oli vastajal kohustuslik hinnata oma nõusolekut antud väitega. Nõusoleku hindamiseks kasutati Likerti viiepalliskaalat: „1“ - „ei ole üldse nõus“, „2“ - „pigem ei ole nõus“, „3“ - „nii ja naa“, „4“ - „pigem nõustun“, „5“ - „nõustun täielikult“, kuna see on haridusvaldkonnas laialdaselt kasutatav viis inimeste arvamuse või hinnangu määramiseks (Kusmaryono *et al.*, 2022). Lisaks oli iga kriteeriumi järel vabatahtlik avatud küsimus, kus vastaja sai soovi korral täpsustada oma valitud hinnanguid eelmistele väidetele. Küsimustiku teises plokis oli neli kohustuslikku küsimust vastaja isikuandmete kohta. Kinniste küsimustega küsiti vastaja vanust, tööstaaži, mis klassidele vahemikus 6.-9. klass vastaja käesoleval õppeaastal matemaatikat õpetab ning mis klassidele samas vahemikus on vastaja viimase viie aasta jooksul matemaatikat õpetanud. Uurimisinstrumendi valiidsuse tõstmiseks arutas töö autor küsimustiku küsimused läbi juhendajaga. Andmete kogumiseks saadeti ekspertidele e-kiri (Lisa 3), mille manuses oli käsiraamatu täiendatud versiooni fail ning käsiraamatus tehtud muudatuste nimekiri. Lisaks oli e-kirjas link küsitlusele ja analoogselt esimese ekspertidele saadetud e-kirjaga info andmete töötlemise kohta.

Lisaks koguti andmeid 6.-9. klassi õpilastelt. Kuna nende puhul oli tegemist alaealistega, kes ei saa piiratud teovõime tõttu ise oma isikuandmete töötlemiseks nõusolekut anda (Juurik *et al.*, 2023), siis küsiti uuringus osalemise nõusolekut lapsevanematelt. Selleks koostati Stuudiumis nõusoleku registreerimise vorm (Lisa 4) ning saadeti see lapsevanematele. Registreerimise vormis selgitati, et uuringus osalemine on anonüümne, kogutud andmeid kasutatakse ainult käesoleva magistritöö raames ja need kustutatakse pärast magistritöö kaitsmist, ning et nõusolekut on võimalik igal ajal tagasi võtta. Õpilastelt andmete kogumise viis oli samuti küsitlusuuring, kus kasutati uuringuinstrumendina töö autori koostatud küsimustikku (Lisa 5). Ka see küsimustik koostati rakenduses *Microsoft Forms* ning koostamisel järgiti Beilmanni (2020) juhiseid. Hea teadustava järgi tuleb alaealiste uurimisel ka neilt endilt uuringus osalemise nõusolekut paluda (Juurik *et al.*, 2023). Seetõttu anti õpilaste küsimustikus sissejuhatuses teada, et uuringus osalemine on vabatahtlik ning küsiti

õpilastelt nõusolekut uuringus osalemiseks. Küsimustik koosnes kokku 23 küsimusest, mis olid jagatud teemaplokkidesse. Küsimustiku alguses oli küsimus uuringus osalemise nõusoleku kohta, sellele järgnevalt olid esimeses teemaplokis küsimused matemaatikaoskuse kohta, teises teemaplokis LOES-S mudeli põhjal koostatud küsimused, ning kolmandas teemaplokis isikuandmetega seonduvad küsimused. Esimeses teemaplokis oli kokku neli küsimust, millest kolm olid esitatud väitena. Kõikide küsimustikus esinevate väidete puhul oli vastajal kohustuslik hinnata oma nõusolekut antud väitega Likerti viiepalliskaalal. Esimese teemaploki viimane küsimus oli avatud, kus vastaja sai soovi korral täpsustada oma valitud hinnanguid eelmistele väidetele. Kõikidele küsimustikus esinevatele avatud küsimustele vastamine oli vabatahtlik. Teises teemaplokis oli kokku 15 küsimust, millest üheksa olid esitatud väitena. Ploki esimene küsimus oli käsiraamatu kasutusviisi kohta (arvutis või paberkujul) ning sellele järgnesid LOES-S mudeli küsimused. Lisaks oli iga kriteeriumi järel vabatahtlik avatud küsimus, kus vastaja sai soovi korral täpsustada oma valitud hinnanguid eelmistele väidetele. Küsimustiku teises plokis oli kolm kohustuslikku küsimust vastaja isikuandmete kohta. Kinniste küsimustega küsiti vastaja vanust, sugu ja klassi. Uurimisinstrumendi valiidsuse tõstmiseks arutas töö autor küsimustiku küsimused läbi juhendajaga. Küsitlus viidi õpilaste seas läbi matemaatikatunni ajal, kooli sülearvutites, õpetaja järelevalve all.

Kogutud andmeid hoiustati Tartu Ülikooli kasutajakontoga pilvsalvestusruumis *OneDrive*; kaustas, millele oli ligipääs ainult töö autoril. Andmed kustutatakse pärast magistritöö kaitsmist.

2.4 Andmeanalüüs

Kogutud andmeid analüüsiti erinevatel meetoditel. Ekspertide antud parandusettepanekuid analüüsiti kvalitatiivselt ning nende põhjal tehti käsiraamatus muudatusi. Tehtud muudatusi kajastatakse järgmises, tulemuste peatükis. Ekspertide ja õpilaste antud hinnanguid käsiraamatule analüüsiti kvantitatiivselt, kasutades rakendustarkvara JASP (JASP Team, 2025). Andmeanalüüsi käigus arvutati küsimustike sisemise reliaabluse mõõtmiseks Cronbachi alfa-kordajad (Tooding, 2020) ja hinnangute esmaseks analüüsimiseks kasutati kirjeldavat statistikat (Rootalu, 2014a). Kuna inimeste antud hinnangud on järjestustunnused (Rootalu, 2014b), siis erinevate tunnuste – sugu, vanus jms – alusel hinnangute võrdlemiseks kasutati Mann-Whitney U-testi juhul, kui tunnusel oli kaks erinevat võimalikku väärtust ning Kruskal-Wallise testi ja Dunni *post hoc* testi juhul, kui tunnusel oli rohkem kui kaks erinevat

võimalikku väärtust (Goss-Sampson, 2025). Samal põhjusel arvutati hinnangute vaheliste seoste analüüsimiseks Spearmani korrelatsioonikordajad (Goss-Sampson, 2025). Andmeanalüüsi tulemused esitatakse järgmises peatükis.

3. Tulemused

Käesolevas peatükis esitatakse magistritöö tulemused. Esmalt kirjeldatakse käsiraamatut, mis arendusuuringu raames koostati. Seejärel tuuakse välja ekspertide esitatud parandusettepanekud ning muudatused, mida käsiraamatus tehti. Viimaks kirjeldatakse ekspertide ja õpilaste hinnanguid valminud õppematerjalile ning esitatakse andmeanalüüsi käigus selgunud tunnustevahelised erinevused ja seosed.

3.1 Käsiraamat

Magistritöö raames koostati matemaatika käsiraamat (Lisa 6), mis sisaldab kuut peatükki, mis omakorda koosnevad kuni 12 alateemast. Käsiraamatu fookus on harilike ja algebraliste murdude teemadel, mis moodustavad põhiosa teose mahust. Vahepealsed peatükid sisaldavad eelteadmisi, mida on vaja algebralistest murdudest arusaamiseks. Nende eesmärk on võimaldada käsiraamatu kasutajal enne algebraliste murdude õppimist selleks vajalikke eelteadmisi meelde tuletada. Viimase, ratsionaalavaldiste peatüki eesmärk on kajastada peamist konteksti, kus algebraliste murdudega tehete tegemise oskust vaja läheb.

Käsiraamatu esimese peatüki teema oli harilikud murrud. Selle peatüki kavandamisel võeti lisaks riiklikule õppekavale aluseks ka Koolibri ja Avita kirjastuste 6. klassi õpikud ning Mauruse kirjastuse 6. klassi tööraamat (Kaasik & Saks, 2013; Kaljas *et al.*, 2013; Viil & Remmet, 2022). Harilike murdude peatükk jaotati omakorda 12 alateemaks.

- 1) Definiitsioon. Hariliku murru definiitsioon ja tähendus. Tähendus nii tervikust osade võtmisena kui ka jagamistehtena.
- 2) Liigid. Lihtmurru ja liigmurru definiitsioonid, omadused ja näited.
- 3) Segaarvud. Definiitsioon ja näited. Täisosa ja murdosa vahelise plussmärgi olulisus ning segaarvu tähendust selgitavad joonised. Näidislahendused segaarvu liigmurruks ja vastupidi teisendamise kohta.
- 4) Taandamine. Definiitsioon ja näited. Tähelepanek, et murdu võib taandada ka mitu korda järjest.
- 5) Laiendamine. Definiitsioonid ja näited.
- 6) Ühenimelisteks teisendamine. Ühenimeliste ja erinimeliste harilike murdude definiitsioonid. Harilike murdude ühenimelisteks teisendamise algoritm nimetajate VÜK-i leidmise kaudu ning vastavad näidislahendused.

- 7) Võrdlemine. Reeglid ja näidislahendused juhul, kui murrud on ühenimelised, kui on võrdsete lugejatega ning kui on erinevate lugejate ja nimetajatega. Segaarvude omavahel ja liigmurruga võrdlemine.
- 8) Seos kümnendmurruga. Kümnendmurru harilikuks murruks ja vastupidi teisendamine. Näidislahendused juhul, kui nimetaja on järguühik, kui nimetaja on laiendatav järguühikuks ning muul juhul. Perioodilise kümnendmurru ja perioodi definitsioonid.
- 9) Liitmine-lahutamine. Ühenimeliste ja erinimeliste murdude, sh segaarvude liitmine-lahutamine koos näidislahendustega.
- 10) Korrutamine. Definitsioon ja tähelepanek tegurite taandamise kohta. Näidislahendused – harilike murdude ja segaarvude korrutamine omavahel, üksteisega ja naturaalarvuga.
- 11) Pöördarvud. Definitsioon ja näited.
- 12) Jagamine. Definitsioon ja näited.

Kuna algebraliste murdude teemast aru saamiseks on vaja eelteadmisi tegurdamise, hulkliikmete ja üksliikmete kohta (HTM, *s.a.*), siis otsustati käsiraamatus ka need teemad eraldi peatükkidena välja tuua. Seetõttu oli käsiraamatu teise peatüki teema üksliikmed. Selle peatüki kavandamisel võeti lisaks riiklikule õppekavale aluseks ka Koolibri kirjastuse 7. klassi õpik (Kaljas *et al.*, 2023) ning Avita kirjastuste 8. klassi õpik (Kaldmäe *et al.*, 2025). Üksliikmete peatükk jaotati omakorda viieks alateemaks.

- 1) Definitsioon. Üksliikme, üksliikme normaalkuju, tähelise osa ja üksliikme kordaja definitsioonid. Näited iga definitsiooni kohta.
- 2) Sarnased üksliikmed. Definitsioon ja näited nii sarnaste üksliikmete kui ka üksliikmete kohta, mis ei ole sarnased.
- 3) Sarnaste liikmete koondamine. Definitsioon ja näidislahendused.
- 4) Korrutamine-jagamine. Definitsioon ja näidislahendused.
- 5) Astendamine. Definitsioon ja näidislahendused.

Käsiraamatu kolmanda peatüki teema oli hulkliikmed. Selle peatüki kavandamisel võeti lisaks riiklikule õppekavale aluseks ka Koolibri ja Avita kirjastuste 8. klassi õpikud (Kaldmäe *et al.*, 2025; Kaljas *et al.*, 2022). Hulkliikmete peatükk jaotati omakorda kolmeks alateemaks.

- 1) Definitsioon. Hulkliikme, kaksliikme, kolmliikme, korrastatud hulkliikme definitsioonid. Näited iga definitsiooni ja hulkliikme korrastamise kohta.

- 2) Tehted hulkliikmetega. Reeglid ja näidislahendused – hulkliikmete liitmine, lahutamine; hulkliikme korrutamine üksliikmega ja hulkliikmega; hulkliikme jagamine üksliikmega.
- 3) Korrutamise abivalemid. Kahe üksliikme summa ja vahe korrutis, kaksliikme ruut. Valemid ja nende kasutamise näited.

Neljanda peatüki teema oli tegurdamine. Selle peatüki kavandamisel võeti lisaks riiklikule õppekavale aluseks ka Koolibri ja Avita kirjastuste 8. ja 9. klassi õpikud (Kaldmäe *et al.*, 2013; Kaldmäe *et al.*, 2025; Kaljas *et al.*, 2022; Lepmann *et al.*, 2024;). Tegurdamise peatükk jaotati omakorda neljaks alateemaks.

- 1) Teguri toomine sulgudest välja. Näidislahendused.
- 2) Ruutude vahe valem. Valem ja selle kasutamise näidislahendused, sh näited, kus ei saa seda valemit kasutada.
- 3) Kaksliikme ruudu valem. Valem ja selle kasutamise algoritm. Näidislahendused, sh näited, kus ei saa seda valemit kasutada.
- 4) Ruutkolmliige. Ruutkolmliikme ja tema nullkohtade definitsioonid. Ruutkolmliikme tegurdamise valem ja selle kasutamise näited.

Viienda peatüki teema oli algebralised murrud. Selle peatüki kavandamisel võeti lisaks riiklikule õppekavale aluseks ka Koolibri ja Avita kirjastuste 9. klassi õpikud (Kaldmäe *et al.*, 2013; Lepmann *et al.*, 2024). Algebraliste murdude peatükk jaotati omakorda kaheksaks alateemaks.

- 1) Definitsioon. Algebralise murru definitsioon ja näited.
- 2) Taandamine. Reeglid ja näidislahendused, sh näited, kus ei saa murdu taandada.
- 3) Korrutamine. Paralleel harilike murdudega. Korrutamise reegel ja algoritm. Näidislahendused.
- 4) Jagamine. Paralleel harilike murdudega. Jagamise reegel ja näidislahendused.
- 5) Astendamine. Reegel ja algoritm, näidislahendused.
- 6) Laiendamine. Reegel ja näidislahendused.
- 7) Ühenimelisteks teisendamine. Algoritm ja näidislahendus.
- 8) Liitmine ja lahutamine. Algoritm ja näidislahendused.

Käsiraamatu kuuenda ja viimase peatüki teema oli ratsionaalavaldised. Selle peatüki kavandamisel võeti lisaks riiklikule õppekavale aluseks ka Koolibri ja Avita kirjastuste 9.

klassi õpikud (Kaldmäe *et al.*, 2013; Lepmann *et al.*, 2024). Ratsionaalavaldiste peatükk sisaldas ainult ühte alateemat: Lihtsustamine. Algoritm ja näidislahendused.

3.2 Ekspertide parandusettepanekud ja käsiraamatus tehtud muudatused

Järgnevalt esitatakse ekspertide antud parandusettepanekud ning kirjeldatakse nende põhjal käsiraamatus tehtud muudatusi. Ettepanekud tuuakse välja käsiraamatu peatükkide järjekorras. Välja on jäetud need ettepanekud, mis lähevad käsiraamatu olemusega vastuollu. Nimelt on käsiraamatu eesmärk esitada kõik vajalik info võimalikult kompaktselt ning mitte olla liiga mahukas. Seetõttu on välja jäetud ettepanekud, mis kordaksid juba mõnel eelneval leheküljel esitatud infot ning mis selgitaksid näidislahendustena liiga paljusid erijuhte. Teiseks on käsiraamat peamiselt mõeldud varem õpitud teemade kordamiseks, mitte uute teemade õppimiseks. Seetõttu on välja jäetud ettepanekud, mille eesmärk oleks reegleid, omadusi, lahenduskäike jms tõestada või detailselt põhjendada ja selgitada. Välja ei jäetud ühtegi sellist parandusettepanekut, mille esitasid mitu eksperti.

3.2.1 Harilikud murrud

- 1) Hariliku murru lugeja definitsioon oli algselt selline: „murru lugeja näitab, mitu osa on võetud“. Üks ekspert soovitas definitsioonis täpsustada: „... mitu võrdset osa ...“. Käsiraamatus tehti vastav muudatus, nii et uueks definitsiooniks sai: „murru lugeja näitab, mitu võrdset osa on võetud“.
- 2) Üks ekspert soovitas lihtmurru ja liigmurru definitsiooni ja näidete järele lisada lause: „Liigmurru saab teisendada segaarvuks või täisarvuks.“ Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.
- 3) Hariliku murru taandamise peatükis oli algselt kirjas lause: „Taandamisel murru kuju muutub, aga väärtus jääb samaks.“ Üks ekspert soovitas sellest lausest sõnad „kuju muutub, aga“ eemaldada. Käsiraamatus tehti vastav muudatus, nii et uueks lauseks sai: „Taandamisel jääb murru väärtus samaks.“
- 4) Ühenimeliste harilike murrude definitsiooni juures oli algselt näide: „ $\frac{3}{7}$ ja $\frac{3}{10}$ ei ole ühenimelised“. Üks ekspert soovitas „ei ole ühenimelised“ asemel kirjutada „on erinimelised“. Käsiraamatusse lisati definitsioon: „Harilikud murrud on erinimelised, kui nende nimetajad ei ole võrdsed.“ ning asendati kõikides kohtades sõnastus „ei ole ühenimelised“ sõnastuseks „on erinimelised“.

- 5) Hariliku murru teisendamist kümnendmurruks oli algselt kujutatud kahel viisil. Esiteks peast teisendamine juhul, kui nimetaja on järguühik ning teiseks kirjaliku jagamise teel teisendamine juhul, kui nimetaja ei ole järguühik. Kaks eksperti soovitasid lisada ka vahepealse lahenduskäigu: laiendamise teel teisendamine juhul, kui nimetaja on võimalik laiendada järguühikuks. Käsiraamatusse lisati algsete teisendamisviiside vahele ka laiendamise teel teisendamise viis koos näidislahendustega.
- 6) Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks, kus hariliku murru nimetaja ei ole järguühik, olid algselt järjest näidislahendused, kus vastuseks tuli lõplik kümnendmurd ning näidislahendused, kus vastuseks tuli lõpmatu kümnendmurd. Üks ekspert kirjutas lõpmatute kümnendmurdude juurde soovitusel seal välja tuua perioodi mõiste. Käsiraamatus lisati lõplike ja lõpmatute kümnendmurdude vahele järgmised laused: „Perioodiline kümnendmurd on lõpmatu kümnendmurd, mille murdosas mingi number või numbrite rühm kordub nii, et korduste vahel ei ole muid numbreid. Periood on perioodilise kümnendmurru murdosas korduv number või numbrite rühm. Periood kirjutatakse sulgudesse.“
- 7) Ühenimeliste harilike murdude liitmise-lahutamise esimene näidislahendus oli algselt selline: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Kõik järgmised näidislahendused olid analoogse vormistusega. Üks ekspert soovitas, et ühes näites võiks välja tuua vahevastuse, kus lugejas on tehe $1 + 1$. Käsiraamatus muudeti esimene näidislahendus selliseks: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$ ning ka teise näidislahenduse vormistus muudeti analoogseks.
- 8) Harilike murdude liitmise-lahutamise peatükis oli algselt selline lause: „Kui liitmisel tuleb murdosaks liigmurd, siis peab sellest täisosa välja eraldama.“ Üks ekspert soovitas sellest lausest sõna „välja“ eemaldada. Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.
- 9) Segaarvude lahutamisel, kus tuleb väiksemast murdosast lahutada suuremat, oli esimese näidislahenduse juures algselt selline selgitus: $9 + \frac{2}{5} = 8 + 1\frac{2}{5} = 8 + \frac{7}{5}$. Üks ekspert arvas, et see on õpilaste jaoks segane ning soovitas selgituse

kirja panna niimoodi: $9 + \frac{2}{5} = 8 + 1 + \frac{2}{5} = 8 + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 8\frac{7}{5}$. Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.

- 10) Harilike murdude liitmise-lahutamise peatükis oli algselt kaks nädislahendust erinimeliste murdude liitmise kohta. Üks ekspert soovitas, et vähemalt üks näide võiks olla ka erinimeliste murdude lahutamise kohta. Käsiraamatus muudeti teine erinimeliste murdude liitmise nädislahendus lahutamise nädislahenduseks.
- 11) Harilike murdude korrutamise peatükis oli algselt selline lause: „Võimalusel saab tegureid taandada!“ Üks ekspert soovitas selles lauses täpsustada, et taandada saab ainult ühisel murrujoonel. Käsiraamatus muudeti algne lause selliseks: „Võimalusel saab ühisel murrujoonel tegureid taandada!“

3.2.2 Üksliikmed

- 1) Üksliikme definitsioon oli algselt selline: „Üksliige on normaalkujul, kui kõige esimesena on kirjas arv (kõigi arvuliste tegurite korrutis) ning sellele järgnevad muutujad tähestikulises järjekorras oma astmetega.“ Lisaks olid sarnaste üksliikmete teemas sellised laused: „Üksliikmed on sarnased, kui nende täheline osa on täpselt sama.“ ning „Liikmete koondamisel peab liitma või lahutama liikmete arvkoordajad, aga täheline osa jääb täpselt samaks.“ Üks ekspert juhtis tähelepanu, et käsiraamatus ei ole defineeritud, mis on üksliikme täheline osa. Käsiraamatus lisati tähelise osa definitsioon üksliikme definitsiooni sisse: „Üksliige on normaalkujul, kui kõige esimesena on kirjas arv (kõigi arvuliste tegurite korrutis) ning sellele järgneb täheline osa ehk muutujad tähestikulises järjekorras oma astmetega.“
- 2) Üksliikme kordaja definitsioon oli algselt selline: „Üksliikme kordaja on esimesel kohal olev arv.“ Üks ekspert kirjutas, et see definitsioon ei ole arusaadav. Käsiraamatus täpsustati definitsiooni: „Üksliikme kordaja on see arv, mis on üksliikme normaalkujus esimesena kirjas.“
- 3) Sarnaste liikmete koondamise peatükis oli algselt kaheksa erinevat nädislahendust koondamise kohta. Üks ekspert soovitas, et vähemalt üks näide võiks olla selline, kus koondamise tulemusel on ühe liikme kordaja 1 või -1 . Käsiraamatus muudeti viimane koondamise nädislahendus selliseks, et ühe liikme kordajaks tuli -1 .

- 4) Üksliikmete korrutamise esimene näidislahendus oli algselt selline: $-6x^2 \cdot 2x^4 = -12x^6$. Kõik järgmised näidislahendused olid analoogse vormistusega. Üks ekspert soovitas, et ühes näites võiks välja tuua vahevastuse, kus on arvkoordajate korrutis ning muutuja astendajate summa tehtena kirjas. Käsiraamatus muudeti korrutamise esimene näidislahendus selliseks: $-6x^2 \cdot 2x^4 = -6 \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -12x^6$. Analoogne muudatus tehti ka jagamise esimese näidislahendusega.

3.2.3 Hulkliikmed

- 1) Hulkliikme jagamisel üksliikmega oli algselt viimase näidislahenduse vastus järgmine: $3st + 0,5t^4 - 2s^3t^2$. Üks ekspert juhtis tähelepanu, et selles vastuses ei ole hulkliige korrastatud kujul. Käsiraamatus lisati algse vastuse järele uus vastus, kus hulkliige on korrastatud: $-2s^3t^2 + 0,5t^4 + 3st$.

3.2.4 Tegurdamine

- 1) Teguri sulgudest välja toomise peatükis oli esimene näidislahendus algselt selline: $12x^3 - 4x^2 + 8x = 4x(3x^2 - x + 2)$, kusjuures näite juures olid skeemina välja toodud lisaselgitused: $12x^3 : (4x) = 3x^2$, $-4x^2 : (4x) = -1x^1 = -x$ ja $8x : (4x) = 2$. Kõik järgmised näidislahendused olid ka analoogse vormistusega. Üks ekspert soovitas, et ühe näidislahenduse võiks vormistada selliselt, kus on kõigepealt hulkliikme liikmed kirjutatud kõigi nendes leiduvate tegurite korrutisena ja seejärel näidatud, kuidas tekib see avaldis, mis tuuakse sulgude ette. Käsiraamatus muudeti esimene näidislahendus selliseks: $12x^3 - 4x^2 + 40x =$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x =$
 $= 2 \cdot 2 \cdot x \cdot (3 \cdot x \cdot x - x + 2 \cdot 5) = 4x(3x^2 - x + 10)$
- 2) Tegurdamise peatükis kaksliikme ruudu valemis oli algselt ühe näidislahenduse juures põhjendatud, miks seda kolmliiget ei saa tegurdada, selliselt: „sest ruutliikme 64 ees on miinusmärk“. Üks ekspert soovitas selles põhjenduses sõna „ruutliikme“ asendada sõnadega „arvu ruudu“. Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.
- 3) Kaksliikme ruudu valemi kasutamise näidete järel oli algselt eraldi välja toodud omadus: $(a - b)^2 = (b - a)^2$. Üks ekspert soovitas, et selle juures võiks lisaks

välja tuua ka omaduse: $(-a - b)^2 = (a + b)^2$. Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.

- 4) Ruutkolmliikme definitsioon oli algselt selline: „Ruutkolmliige on hulkliige, mis sisaldab ruutliiget.“ Üks ekspert tõi välja, et see definitsioon pole korrektne, kuna ruutliige võib sisalduda ka hulkliikmetes, kus on ka muutuja kõrgemaid astmeid. Ekspert soovitas definitsiooni sõnastada järgmiselt: „Ruutkolmliige on hulkliige, mille korrastatud kujul on esimesel kohal ruutliige.“ Käsiraamatusse kirjutati ruutkolmliikme definitsioon täpselt sellises sõnastuses.
- 5) Ruutkolmliikme tegurdamise kohta oli algselt kolm näidislahendust. Üks neist oli lahendatud Viète'i teoreemiga, üks taandatud ruutvõrrandi lahendivalemiga ning üks üldise ruutvõrrandi lahendivalemiga. Kaks eksperti soovitasid, et iga näidislahenduse juures võiks olla välja toodud ka üldkujul valem, mida selles lahenduses kasutati. Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.

3.2.5 Algebralised murrud

- 1) Algebraliste murdude taandamise kohta oli käsiraamatus algselt selline lause: „Taandada saab ainult tegurit, s.t. avaldist, mis on kogu ülejäänud lugejaga korrutatud ja kogu ülejäänud nimetajaga korrutatud.“ Üks ekspert soovitas selle lause järele lisada veel ühe lause: „Lugeja ja nimetaja peavad olema enne taandamist tegurdatud!“ Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.
- 2) Algebraliste murdude korrutamise näidetes olid algselt ruutkolmliikme $m^2 + m - 12$ tegurdamisel nullkohtadena kirjas: $m_1 = \dots = 3$ ja $m_1 = \dots = -4$. Üks ekspert juhtis tähelepanu sealsele trükiveale. Käsiraamatus parandati viga, nii et teise nullkohana pandi kirja: $m_2 = \dots = -4$.
- 3) Algebraliste murdude ühenimelisteks teisendamise algoritmis oli algselt 2. sammuna kirjas: „kirjuta ühisesse nimetajasse kõik tegurid esimese murru nimetajast ning lisa sinna teise murru nimetajast need tegurid, mida seal veel pole“. Üks ekspert juhtis tähelepanu, et sellest sammust ei tule välja, milline arvuline kordaja tuleb ühisesse nimetajasse, kui algsetes nimetajates on ühest suuremad kordajad ja peaks leidma VÜK-i. Käsiraamatus muudeti 2. sammu kirjeldus selliseks: „kirjuta ühisesse nimetajasse algsete murdude nimetajate arvkorrajate VÜK ja kõik ülejäänud tegurid

esimese murru nimetajast ning lisa sinna teise murru nimetajast need tegurid, mida seal veel pole“.

- 4) Algebraaliste murdude ühenimelisteks teisendamine algoritmis oli algselt 3. sammuna kirjas: „leia laiendajad – need tegurid, mis on murdude nimetajatest puudu“. Üks ekspert soovitas sinna juurde lisada täpsustuse, kuidas laiendajat saab jagamistehtega leida. Käsiraamatus lisati 3. sammu lõppu sulgudes: „laiendaja leidmiseks jaga ühine nimetaja algse murru nimetajaga“.
- 5) Algebraaliste murdude liitmise ja lahutamise selgitus oli algselt kirjutatud sellises sõnastuses, mis kehtis kahe murru liitmise/lahutamise kohta. Üks ekspert soovitas, et sõnastust saaks üldistada nii, et see kehtiks ka rohkem kui kahe murru korral. Käsiraamatus tehti vastavad muudatused.
- 6) Algebraaliste murdude liitmise ja lahutamise algoritmis oli algselt 4. sammuna kirjas: „kirjuta lugejate summa või vahe uue murru lugejaks“. Üks ekspert soovitas sõnad „uue murru“ asendada sõnadega „ühisele murrujoonele“. Käsiraamatus tehti täpselt selline muudatus.

3.2.6 Ratsionaalavaldised

- 1) Ratsionaalavaldiste lihtsustamise algoritmi 2. samm oli algselt selline: „kirjuta uuele reale eraldi välja ainult esimene tehe, kusjuures esimese asjana tegurda, soovitatavalt juba tehte ümberkirjutamise ajal!“ Üks ekspert kirjutas selle kohta, et tema ei luba õpilastel niimoodi teha – hooletusvigade vältimiseks nõuab ta algtehte täpselt samal kujul välja kirjutamist ja alles seejärel tegurdamist. Käsiraamatus kirjutati algne 2. samm lahti kaheks eraldi sammuks, millest esimene oli: „kirjuta uuele reale eraldi välja ainult esimene tehe“ ning teine oli: „kui on võimalik, siis tegurda mõlema murru lugejad ja nimetajad ning seejärel, kui on võimalik, siis taanda murde“.
- 2) Ratsionaalavaldiste lihtsustamise algoritmi 3. samm oli algselt selline: „soorita esimese tehte nii, et...“. Kaks eksperti juhtisid tähelepanu, et selles lauses on trükiviga. Käsiraamatus parandati viga nii, et uus 3. samm on selline: „soorita tehe nii, et ...“.

3.3 Ekspertide hinnangud käsiraamatule

Ekspertid andsid hinnangud viit erinevat kriteeriumit kirjeldavatele väidetele viiepalliskaalal. Kõikidele väidetele antud hinnangute sagedustabel koos mediaanhinnangutega esitati tabelis 1. Iga kriteeriumi järel põhjendas oma hinnanguid ainult üks ekspert, mistõttu tuuakse käesolevas lõigus välja kõik küsimustiku vastustes esitatud põhjendused. Tabelist 1 selgus, et kõige kõrgema hinnangu andsid eksperdid koostatud käsiraamatu kujundusele. Kõik viis eksperti andsid maksimaalse võimaliku hinnangu kõikidele kujunduse kohta käivatele väidetele. Seega oli valimisse kuulunud ekspertide hinnangul valminud käsiraamat suurepäraselt kujundatud.

Tabel 1. Ekspertide hinnangute sagedustabel ning mediaanhinnangud.

Väide	Hinnang				Me
	1 - 2 <i>ei nõustu</i>	3 <i>nii ja naa</i>	4 <i>pigem nõustun</i>	5 <i>nõustun täielikult</i>	
Õppematerjal on matemaatiliselt korrektne.	0	0	1	4	5
Õppematerjal on keeleliselt korrektne.	0	0	2	3	5
Õppematerjalis on ideed esitatud sobiva rõhuasetusega.	0	0	1	4	5
Õppematerjal on parajalt detailne.	0	0	2	3	5
Õppematerjal vastab riiklikule õppekavale.	0	0	0	5	5
Õppematerjal toetab õpilastel juba õpitud teemade kordamist.	0	0	0	5	5
Õppematerjali saab efektiivselt õppetöös kasutada.	0	0	1	4	5
Õppematerjal sobib ettenähtud sihtgrupile.	0	0	0	5	5
Õppematerjal motiveerib õpilasi õppima.	0	1	3	1	4
Õppematerjal suudab hoida õpilaste tähelepanu.	0	0	4	1	4
Õppematerjal on õpilaste jaoks huvitav.	0	0	3	2	4

Õppematerjali kujundus on arusaadav.	0	0	0	5	5
Õppematerjali kujundus on esteetiline.	0	0	0	5	5
Õppematerjal seob efektiivselt teksti ja graafikat.	0	0	0	5	5
Õppematerjali on lihtne korduvalt kasutada.	0	0	0	5	5
Õppematerjali saab kasutada erinevate matemaatikaoskustega õpilastega.	0	0	2	3	5
Õppematerjali saab kasutada erinevates õpituatsioonides.	0	0	1	4	5

Üks ekspert põhjendas oma hinnangut järgnevalt: „Üldpilt on ilus, selgitused kenasti arusaadavalt välja toodud. Töö esimeses osas kasutatud värvid on palju abiks materjali läbitöötamisel ja erinevate seaduspärasuste väljatoomisel.“ Peaaegu sama kõrge hinnangu andsid eksperdid käsiraamatu õpiesmärkide kooskõlastatuse kohta. Kõikide ekspertide hinnangul toetas käsiraamat varem õpitud teemade kordamist ja sobis ettenähtud sihtgrupile. Peaaegu kõik eksperdid on täiesti nõus väitega, et õppematerjali saab efektiivselt õppetöös kasutada. Üks ekspert põhjendas oma hinnangut: „Õppematerjal on kompaktne ja minu arvates ettenähtud sihtgrupile piisavalt arusaadavalt sõnastatud.“ Veidi madalama, aga ka kõrge hinnangu andsid valimisse kuulunud eksperdid käsiraamatu taaskasutatavusele ja sisu kvaliteedile. Ühe eksperdi põhjendused nende kriteeriumite hinnangutele olid järgnevad: „Täiesti toredasti kasutusele võetav materjal.“ ja „Õppematerjal on kirjutatud ladusalt ja erinevad teemakohased näited õppijale arusaadavalt lahti seletatud.“ Kõige madalama hinnangu andsid eksperdid käsiraamatu motiveerivusele. Siiski oli nende hinnangul käsiraamat õpilaste jaoks pigem tähelepanu hoidev ja huvitav. Üks ekspert põhjendas oma hinnangut: „Eks see sõltub paljuski õppijast, aga ma arvan, et see õppematerjal võiks olla pigem õppima motiveeriv, õpilaste tähelepanu hoidev ja huvitav, kuna pole liialt laialivalgus.“ Üldiselt oli ekspertide tagasiside käsiraamatule väga positiivne, kuna peaaegu kõikide kriteeriumite mediaanhinnang oli „5“ - nõustun täielikult ning ainult motivatsiooni kriteeriumi mediaanhinnang oli „4“ - pigem nõustun.

3.4 Õpilaste hinnangud käsiraamatule

Uuringus osalenud õpilased andsid viiepalliskaalal hinnangu nelja erinevat kriteeriumit kirjeldavate väidete kohta. Iga kriteeriumi alla kuuluvate väidete komplekti nimetati tunnusrühmaks. Kõigi nelja tunnusrühma kohta arvutati Cronbachi alfa-kordaja väärtus. Vastaja enda matemaatikaoskuse, õppematerjaliga õppimise, selle kvaliteedi, ja kaasahaaravuse tunnusrühmad sisaldasid igaüks kolme väidet ning Cronbachi alfa-kordaja väärtused olid vastavalt 0,908; 0,864; 0,626 ja 0,845. Matemaatikaoskuse, õppematerjaliga õppimise ja selle kaasahaaravuse tunnusrühmade Cronbachi kordaja väärtus ei kasvanud ühegi väite väljajätmise korral. Samas õppematerjali kvaliteedi tunnusrühma Cronbachi kordaja väärtus suurenes juhul, kui väide „Käsiraamatus sisalduvad näidislahendused olid kasulikud.“ jäeti rühmast välja. Seetõttu käsitleti nimetatud väidet edaspidi eraldiseisva tunnusena. Kahe allesjäänud väitega õppematerjali kvaliteedi tunnusrühma Cronbachi kordaja väärtus oli 0,838. Lõpuks jäi kõikide tunnusrühmade Cronbachi kordaja väärtus vahemikku 0,80...0,95, mida sageli nimetatakse heaks või kõrgeks sisemiseks reliaabluseks (Taber, 2018). Kõrge sisereliaablus annab aluse iga tunnusrühma summaarse näitaja kasutamisele (Tooding, 2020).

Tunnusrühmade summaarseks näitajaks arvutati rühma kuuluvatele väidetele antud hinnangute mediaanid. Mediaanide ning käsiraamatu näidislahenduste kasulikkuse hinnangute sagedustabel koos nendest omakorda arvutatud mediaanidega esitati tabelis 2. Mediaanide tabelis esitamiseks ümardati murdarvulised mediaanid täisarvudeks.

Tabel 2. Õpilaste hinnangute mediaanide sagedustabel ja nende mediaanide mediaanid.

Tunnusrühm	Tunnusrühma hinnangute mediaan					Me
	1 <i>üldse ei nõustu</i>	2 <i>pigem ei nõustu</i>	3 <i>nii ja naa</i>	4 <i>pigem nõustun</i>	5 <i>nõustun täielikult</i>	
Õpilase matemaatikaoskus	5	6	25	15	7	3
Õppematerjaliga õppimine	4	4	19	22	9	4
Üksikväide: „Käsiraamatus sisalduvad näidislahendused olid kasulikud.“	0	4	7	31	16	4
Õppematerjali kvaliteet	0	0	9	24	25	4
Õppematerjali kaasahaaravus	4	11	20	20	3	3

Tabelist 2 selgub, et kõige kõrgema hinnangu andsid õpilased koostatud käsiraamatu kvaliteedile. Valimisse kuulunud õpilaste hinnangul on käsiraamat pigem kvaliteetne. Peaaegu sama kõrge hinnangu andsid õpilased käsiraamatus sisalduvate näidete kasulikkusele. Nende hinnangul olid näidislahendused pigem kasulikud. Veidi madalama hinnangu andsid õpilased käsiraamatuga õppimisele. Siiski oli valimisse kuulunud õpilaste hinnangul õppimise käigus käsiraamatust pigem abi. Kõige madalama hinnangu andsid õpilased käsiraamatu kaasahaaravusele. Nende hinnangul oli käsiraamat keskmiselt meeldiv ja motiveeriv.

Järgnevas andmeanalüüsis käsitleti murdarvulisi mediaane täpse väärtusena mitte täisarvuks ümardatult. Valimisse kuulunud õpilaste käsiraamatule antud hinnanguid võrreldi järgmiste tunnuste alusel: matemaatikaoskuse mediaanhinnang, käsiraamatu kasutusviis, vanus, sugu, klass. Matemaatikaoskuse mediaanhinnangu alusel võrdlemiseks kasutati Kruskal-Wallise testi. Erineva matemaatikaoskuse hinnanguga õpilaste hinnangud käsiraamatuga õppimisele ($H(4) = 2,100$; $p = 0,717$), näidislahenduste kasulikkusele ($H(4) = 0,975$; $p = 0,914$) ning käsiraamatu kaasahaaravusele ($H(4) = 6,696$; $p = 0,153$) ei olnud statistiliselt oluliselt erinevad. Erineva matemaatikaoskuse hinnanguga õpilaste hinnangud käsiraamatu kvaliteedile aga olid statistiliselt oluliselt erinevad ($H(4) = 10,16$; $p = 0,038$). Erinevuste väljaselgitamiseks kasutati Dunni *post hoc* testi, millest ilmnes, et matemaatikaoskuse hinnanguga „5“ õpilased hindasid käsiraamatu kvaliteeti statistiliselt oluliselt kõrgemalt ($Me = 5$) kui hinnanguga „4“, „3“ või „1“ õpilased (kõigil $Me = 4$, vastavalt $p = 0,013$; $p = 0,014$; $p = 0,003$). Muude rühmade vahel ei olnud statistiliselt olulisi erinevusi (vt tabel 3).

Tabel 3. Erineva matemaatikaoskuse mediaanhinnanguga õpilaste rühmade antud käsiraamatu kvaliteedi hinnangute vaheline võrdlus Dunni *post hoc* testiga.

Dunn

Dunn's Post Hoc Comparisons - matemaatikaoskuse mediaanhinnang

Comparison	z	W_i	W_j	r_{rb}	p	P_{bonf}	P_{holm}
1 - 2	-1.305	17.10	30.08	0.367	.192	1.000	.959
1 - 3	-1.436	17.10	28.66	0.424	.151	1.000	.906
1 - 4	-1.187	17.10	27.17	0.373	.235	1.000	.959
1 - 5	-2.989	17.10	45.86	0.914	.003	.028	.028
2 - 3	0.191	30.08	28.66	-0.047	.849	1.000	1.000
2 - 4	0.368	30.08	27.17	-0.100	.713	1.000	1.000
2 - 5	-1.726	30.08	45.86	0.476	.084	.844	.591
3 - 4	0.278	28.66	27.17	-0.051	.781	1.000	1.000
3 - 5	-2.448	28.66	45.86	0.611	.014	.144	.117
4 - 5	-2.485	27.17	45.86	0.667	.013	.129	.117

Note. Rank-biserial correlation based on individual Mann-Whitney tests.

Hinnangute võrdlemiseks käsiraamatu kasutusviisi alusel kasutati Mann-Whitney U-testi. Paberkujul käsiraamatut kasutanud õpilaste ja arvutis käsiraamatut kasutanud õpilaste hinnangud käsiraamatuga õppimisele ($U = 353,5$; $p = 0,281$), näidislahenduste kasulikkusele ($U = 375,5$; $p = 0,451$) ning käsiraamatu kaasahaaravusele ($U = 333,5$; $p = 0,161$) ei olnud statistiliselt oluliselt erinevad. Küll aga olid statistiliselt oluliselt erinevad paberkujul ja arvutis käsiraamatut kasutanud õpilaste hinnangud käsiraamatu kvaliteedile ($U = 261,5$; $p = 0,012$). Paberkujul käsiraamatut kasutanud õpilased hindasid käsiraamatu kvaliteeti kõrgemalt ($Me = 4,5$) kui arvutis käsiraamatut kasutanud õpilased ($Me = 4$).

Vanuse alusel võrdlemiseks kasutati Kruskal-Wallise testi. Kuna üle 16 a vanuses õpilasi oli valimis vähem kui viis, siis see rühm jäeti testist välja. Erinevas vanuses õpilaste hinnangud käsiraamatuga õppimisele ($H(4) = 5,424$; $p = 0,247$), näidislahenduste kasulikkusele ($H(4) = 2,125$; $p = 0,713$), käsiraamatu kvaliteedile ($H(4) = 2,171$; $p = 0,704$) ning kaasahaaravusele ($H(4) = 2,240$; $p = 0,692$) ei olnud statistiliselt oluliselt erinevad.

Soo alusel võrdlemisel jäeti välja rühm, kes ei soovinud oma sugu avaldada, kuna neid oli valimis vähem kui viis. Seejärel kasutati võrdlemiseks Mann-Whitney U-testi. Meessoost ja naissoost õpilaste hinnangud käsiraamatuga õppimisele ($U = 412,5$; $p = 0,704$), näidislahenduste kasulikkusele ($U = 351,0$; $p = 0,489$), käsiraamatu kvaliteedile ($U = 400,5$; $p = 0,866$) ning kaasahaaravusele ($U = 378,0$; $p = 0,843$) ei olnud statistiliselt oluliselt erinevad.

Klassi alusel võrdlemiseks kasutati Kruskal-Wallise testi. Erinevates klassides käivate õpilaste hinnangud käsiraamatuga õppimisele ($H(3) = 4,117$; $p = 0,249$), näidislahenduste kasulikkusele ($H(3) = 2,046$; $p = 0,563$), käsiraamatu kvaliteedile ($H(3) = 1,218$; $p = 0,749$) ning kaasahaaravusele ($H(3) = 1,257$; $p = 0,739$) ei olnud statistiliselt oluliselt erinevad.

Valimisse kuulunud õpilaste antud hinnangute vaheliste seoste leidmiseks kasutati Spearmani korrelatsioonanalüüsi. Analüüsiti matemaatikaoskuse, käsiraamatuga õppimise, näidislahenduste kasulikkuse, käsiraamatu kvaliteedi, ja käsiraamatu kaasahaaravuse hinnangute vahelisi seoseid. Matemaatikaoskuse mediaanhinnangu ja käsiraamatu kvaliteedile antud hinnangu vahel on statistiliselt oluline, nõrk positiivne seos ($\rho = 0,273$; $p = 0,038$). Õpilane andis oma matemaatikaoskusele kõrgema hinnangu parajasti siis, kui ta andis käsiraamatu kvaliteedile kõrgema hinnangu. Käsiraamatuga õppimisele antud hinnangu ja näidislahenduste kasulikkusele antud hinnangu vahel on statistiliselt oluline, mõõdukas positiivne seos ($\rho = 0,616$; $p < 0,001$). Õpilane andis käsiraamatuga õppimisele kõrgema hinnangu

parajasti siis, kui ta andis näidislahenduste kasulikkusele kõrgema hinnangu. Käsiraamatuga õppimise hinnangu ja käsiraamatu kvaliteedi hinnangu vahel on statistiliselt oluline, nõrk positiivne seos ($\rho = 0,383$; $p = 0,003$). Õpilane hindas käsiraamatuga õppimist kõrgemalt parajasti siis, kui ta hindas käsiraamatu kvaliteeti kõrgemalt. Käsiraamatuga õppimise hinnangu ja käsiraamatu kaasahaaravuse hinnangu vahel on statistiliselt oluline, mõõdukas positiivne seos ($\rho = 0,457$; $p < 0,001$). Õpilane hindas käsiraamatuga õppimist kõrgemalt parajasti siis, kui ta hindas käsiraamatu kaasahaaravust kõrgemalt. Näidislahenduste kasulikkuse hinnangu ja käsiraamatu kaasahaaravuse hinnangu vahel on statistiliselt oluline, nõrk positiivne seos ($\rho = 0,392$; $p = 0,002$). Õpilane hindas näidislahendusi kasulikumaks parajasti siis, kui ta hindas käsiraamatut kaasahaaravamaks. Käsiraamatu kvaliteedi hinnangu ja käsiraamatu kaasahaaravuse hinnangu vahel on statistiliselt oluline, mõõdukas positiivne seos ($\rho = 0,476$; $p < 0,001$). Õpilane hindas käsiraamatut kvaliteetsemaks parajasti siis, kui ta hindas käsiraamatut kaasahaaravamaks. Ülejäänud hinnangupaaride vahel ei olnud statistiliselt olulisi seoseid (vt tabel 4).

Tabel 4. Spearmani korrelatsioonanalüüs matemaatikaoskuse, käsiraamatuga õppimise, näidislahenduste kasulikkuse, käsiraamatu kvaliteedi, ja kaasahaaravuse hinnangute vahel.

Correlation

Spearman's Correlations

		Spearman's rho	p
matemaatikaoskuse mediaanhinnang	- käsiraamatuga õppimine	-0.102	.445
matemaatikaoskuse mediaanhinnang	- näidislahenduste kasulikkus	0.063	.638
matemaatikaoskuse mediaanhinnang	- käsiraamatu kvaliteet	0.273*	.038
matemaatikaoskuse mediaanhinnang	- käsiraamatu kaasahaaravus	0.103	.443
käsiraamatuga õppimine	- näidislahenduste kasulikkus	0.616***	< .001
käsiraamatuga õppimine	- käsiraamatu kvaliteet	0.383**	.003
käsiraamatuga õppimine	- käsiraamatu kaasahaaravus	0.457***	< .001
näidislahenduste kasulikkus	- käsiraamatu kvaliteet	0.250	.059
näidislahenduste kasulikkus	- käsiraamatu kaasahaaravus	0.392**	.002
käsiraamatu kvaliteet	- käsiraamatu kaasahaaravus	0.476***	< .001

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Iga kriteeriumi järel põhjendas oma hinnanguid keskmiselt viis õpilast (9%). Käesolevas lõigus esitatakse iga kriteeriumi kohta kaks põhjendust võimalikult erinevate mediaanhinnangutega õpilastelt. Üks õpilane, kelle mediaanhinnang oma matemaatikaoskusele oli „3“, põhjendas oma hinnangut järgnevalt: „*Matemaatika on minu jaoks pigem raske ning selle aru saamiseks on mul tihti vaja seletust.*“ Õpilane, kelle matemaatikaoskuse mediaanhinnang oli „5“, põhjendas seda: „*Mul on head hinded ja saan matemaatikaga*

hakkama. Ma pole see aasta ühtegi nelja matemaatikas saanud. Enda arvates saan hästi hakkama.“ Üks õpilane, kelle mediaanhinnang käsiraamatuga õppimisele oli „1“, põhjendas oma hinnangut järgnevalt: *„Ma oskasin ja mäletasin neid teemasid juba varasemast.*“ Õpilane, kelle mediaanhinnang käsiraamatuga õppimisele oli „4“, põhjendas seda: *„See aitas aga mõned asjad selle lõppus oli minu jaoks rasked.*“ Kaks õpilast, kelle mediaanhinnang käsiraamatu kvaliteedile oli „4“, põhjendasid oma hinnangut järgnevalt: *„Mul praegu seda vaja ei läinud, aga kui peaksin üksinda uue teema selgeks saama, oleks see mulle väga abiks.*“ ja *„See oli väga tore aga võiks rohkem ülesande tegemise kirjeldust mitte ainult tehteid.*“ Üks õpilane, kelle mediaanhinnang käsiraamatu kaasahaaravusele oli „3“, põhjendas oma hinnangut: *„Pigem ei haaranud kaasa. Üpris tavaline oli.*“ Õpilane, kelle mediaanhinnang kaasahaaravusele oli „4“, põhjendas: *„See tuletas meelde mida olin ära unustanud.*“

Küsimustiku teise teemaploki lõpus oli kaks avatud küsimust selle kohta, mis õpilastele käsiraamatu juures meeldis ja mis ei meeldinud. Nendele küsimustele vastas keskmiselt 34 õpilast (59%). Näiteks nimetasid 12 meeldivaks selle, et sisust oli lihtne aru saada ning teemad olid hästi seletatud, nt *„Seda oli lihtne lugeda ja teemadest oli lihtne aru saada“* ja *„Et see seletas kuidas asju teha arusaadaval viisil.*“ Samuti tõid kaheksa õpilast välja näidislahenduste kasulikkuse, nt *„Näidislahendused aitasid näha, kuidas lahendada“* ja *„Mulle meeldis kuidas see näitas negatiivset vastust mis pole tõene ja kohe kõrval näitas positiivset vastust mis on tõene.*“ Aspektina, mis ei meeldinud, esitasid näiteks seitse õpilast käsiraamatu pikkuse ning et vajalikku kohta oli raske üles leida, nt *„Seal oli väga palju mitte vajalike asju“* ja *„Ei leidnud kiiresti üles teemasid“*. Lisaks tõid neli õpilast välja, et sisust oli raske aru saada, nt *„ma väga ikka ei saanud aru mõndadest asjatest“* ja *„Mulle ei meeldinud käsiraamatu juures see, et ma ise algul ei saanud käsiraamatust aru aga kui õpetaja tuli appi siis sain paremini aru.*“ Teisalt kirjutas kümme õpilast selle küsimuse vastuseks, et kõik oli hea ja ei olnud midagi sellist, mis ei meeldinud. Üldiselt oli õpilaste tagasiside käsiraamatule pigem positiivne, kuna peaaegu kõikide kriteeriumite mediaanhinnang oli „4“ ja ainult kaasahaaravuse kriteeriumi mediaanhinnang oli „3“ ning rohkem oli neid õpilasi, kes tõid avatud küsimuste vastustes välja midagi positiivset, kui neid, kes midagi negatiivset.

Käesolevas peatükis esitatud tulemusi tõlgendatakse järgmises peatükis teooriast ja uurimisküsimustest lähtuvalt.

4. Arutelu

Magistritöö esimesele uurimisküsimusele – millistele põhimõtetele tuginedes põhikooli matemaatika käsiraamat loodi – saadi vastuseid erinevatest allikatest. Peamiselt tugineti käsiraamatu koostamisel metoodilistele soovitudele, nt hariliku murru erinevate tähenduste väljatoomine, vajalike eelteadmiste esitamine jne (HTM, *s.a.*; Kaasik & Lepmann, 2002). Lisaks võeti käsiraamatu koostamisel aluseks põhikooli riiklik õppekava ning definitsioonide sõnastamisel ja näidislahenduste valimisel ka mitmed matemaatikaõpikud ja -tööraamatud.

Magistritöö teisele uurimisküsimusele – milline on 6.-9. klassi õpilaste tagasiside loodud käsiraamatule – saadi mitmeid vastuseid. Käesoleva uuringu andmeanalüüsist selgus, et väga kõrge matemaatikaoskuse hinnanguga õpilased hindasid käsiraamatu kvaliteeti (ülesehitust ja kasutamise lihtsust) kõrgemalt kui ülejäänud õpilased. Põhjuseks võib olla see, et väga hea matemaatikaoskusega õpilased said käsiraamatu sisust paremini aru ja neile tundus seetõttu käsiraamatu ülesehitus parem ja kasutamine lihtsam. Lisaks selgus, et paberkujul käsiraamatut kasutanud õpilased hindasid käsiraamatu kvaliteeti kõrgemalt kui arvutis käsiraamatut kasutanud õpilased. Sellise erinevuse üheks põhjuseks võib olla asjaolu, et teksti mõistmine on efektiivsem, kui lugeda seda paberilt mitte ekraanilt (Lee *et al.*, 2024). Digitaalse õppematerjali eelised, nt kaasahaaravuse suurendamine (Ageev *et al.*, 2025; Oppmann & Reinhold, 2023), selles uuringus ei ilmnunud. Põhjuseks võib olla käsiraamatu ülesehitus PDF-failina, mis ei ole interaktiivne ega dünaamiline. Valimisse kuulunud õpilaste hinnangul on käsiraamat pigem kvaliteetselt koostatud ning see on õppimisel pigem kasulik abivahend. Käesolevas uuringus tõid õpilased positiivse tagasiside põhjustena välja neile arusaadavalt esitatud sisu ning näidislahenduste suurt hulka käsiraamatus. Näidislahenduste kasulikkust toetab ka Sweller jt (1998) sõnastatud näidislahenduse efekt (Adeniji & Baker, 2023; Barbieri *et al.*, 2023; Chen *et al.*, 2023). Käsiraamatu kaasahaaravusele, sh õpimotivatsioonile, andsid õpilased madalama hinnangu. Madala õpimotivatsiooni põhjuseks võib olla lühike kokkupuude käsiraamatuga, kuna õpilased said seda kasutada ainult kahe koolitunni vältel. Dinçeri (2020) meta-analüüs viitab sellele, et ühe ja sama õppematerjali pikemaajalisem kasutamine võib õpilaste õpimotivatsiooni suurendada. Etteheiteina tõid mitmed õpilased välja käsiraamatu suurt mahtu ning et vajaliku info üles leidmine võttis kaua aega. Ka selle probleemi lahenduseks võib olla põhjalikum käsiraamatuga tutvumine.

Magistritöö kolmandale uurimisküsimusele – milline on 6.-9. klassi matemaatikaõpetajate tagasiside loodud käsiraamatule – saadi samuti vastus. Valimisse kuulunud õpetajad andsid

käsiraamatule väga positiivset tagasisidet. Seejuures käsiraamatu kujundusele andsid kõik ning õpieesmärkide kooskõlastatusele peaaegu kõik vastajad maksimaalse võimaliku hinnangu. Kõige madalama, kuid siiski pigem positiivse hinnangu andsid õpetajad käsiraamatu motiveerivusele.

Magistritöö üks piirang on ekspertide ehk õpetajate väike valim. Seetõttu ei saa uuringus kogutud õpetajate hinnangute põhjal teha üldistavaid järeldusi. Lisaks oleks koostatud käsiraamatu kvaliteet olnud veelgi kõrgem, kui valimis oleks olnud rohkem eksperte ning neilt oleks saadud rohkem parandusettepanekuid. Lisaks on magistritöö üks piirang valimite moodustamine mugavusvalimi põhimõttel. Valimi tüübi tõttu ei saa magistritöö tulemusi üldistada kõigile Eesti õpetajatele ja õpilastele.

Magistritöö raames koostatud käsiraamatut saavad 6.-9. klassi õpilased kasutada iseseisva õppimise toetamiseks ning ka põhikooli matemaatikaõpetajad saavad seda rakendada õppematerjalina matemaatikatundides. Uuringu tulemusi saab rakendada, eelistades käsiraamatu kasutamist paberkujul mitte arvutis, pöörates võimalikult palju tähelepanu käsiraamatus sisalduvatele näidislahendustele ning kasutades käsiraamatut pikema aja, kasvõi mitme õppeaasta vältel.

Edaspidi võiks käsiraamatut täiendada nii, et see sisaldaks ka muid põhikooli matemaatika teemasid, mitte ainult harilikke ja algebralisi murde ning nendega seonduvaid teemasid. Lisaks võiks läbi viia laialdase eksperimendi, mille raames võiks käsiraamatu kasutamise mõju õpilaste õppeedukusele uurida testitulemuste põhjal, kuna käesolevas uuringus piirduti ainult õpilaste enda antud hinnangutega. Samuti võiks läbi viia eraldi uuringu õpiraskustega õpilastega, et välja selgitada, kas ja kuidas matemaatika käsiraamat neid õppetöös aitab ja toetab.

Kokkuvõte

Magistritöö esimene eesmärk – luua põhikooli matemaatika käsiraamat harilike ja algebraliste murdude teemal – sai täidetud. Töö raames loodi käsiraamat, mis sisaldas kuut teemat, millest peamised olid harilikud murrud ja algebralised murrud. Magistritöö teine eesmärk – saada käsiraamatule tagasisidet õpilastelt ja õpetajatelt – sai samuti täidetud. Õpilased katsetasid käsiraamatu kasutamist matemaatikatundides ning vastasid tagasisideküsimustikule. Õpilaste tagasiside käsiraamatule oli pigem positiivne. Õpetajad esitasid käsiraamatu esialgse versiooni täiendamiseks parandusettepanekuid ning seejärel vastasid käsiraamatu täiendatud versiooni kohta tagasisideküsimustikule. Õpetajate tagasiside käsiraamatule oli väga positiivne.

Magistritöö viidi läbi arendusuuringuna. Uuringu esimene etapp oli ettevalmistus, mille raames esitati teoreetiline ülevaade. Teine etapp oli arendamine, kus koostati käsiraamatu esialgne versioon. Kolmas etapp oli katsetamine ja muudatuste tegemine, mille raames saadi ekspertidelt käsiraamatule parandusettepanekuid, täiendati käsiraamatut ning katsetati käsiraamatu rakendamist õpilastega matemaatikatundides. Valimisse kuulus viis eksperti ehk põhikooli matemaatikaõpetajat ning 58 õpilast 6.-9. klassist. Andmekogumismeetodina kasutati küsitlusuuringut, mille uuringuinstrumendid koostati hindamismudelite LORI ja LOES-S põhjal. Kogutud andmeid analüüsiti nii kvalitatiivselt kui ka kvantitatiivselt. Uuringu neljas etapp oli tulemuste esitamine, kus kirjeldati loodud käsiraamatut ning õpilaste ja õpetajate tagasisidet käsiraamatule.

Andmeanalüüsist selgus, et käsiraamatu kvaliteedile andsid kõrgema hinnangu need õpilased, kelle hinnang oma matemaatikaoskusele on väga kõrge ja need õpilased, kes kasutasid käsiraamatut paberkujul. Kõige madalama hinnangu andsid valimisse kuulunud õpilased käsiraamatu kaasahaaravusele. Käsiraamatu meeldivaks aspektiks nimetasid õpilased sisu arusaadavust ja näidislahendusi ning mitte meeldivaks aspektiks materjali suurt mahtu.

Magistritöö piiranguteks on valimi suurus ja tüüp. Vaatamata piirangutele saab loodud käsiraamatut siiski õppematerjalina rakendada. Edaspidi saab käsiraamatut veel täiendada ning läbi viia põhjalikemaid uuringuid selle õppetöös kasutamise kohta.

Viidatud kirjandus

- 1EdTech Consortium. (s.a.) *1EdTech Open Standards Increase Your Market Access*.
<https://www.1edtech.org/standards/details>
- Adeniji, S. M., & Baker, P. (2023). Effects of worked example on students' learning outcomes in complex algebraic problems. *International Journal of Instruction*, 16(2), 229-246. <https://doi.org/10.29333/iji.2023.16214a>
- Afanasjeva, H. (2006). *Valmistu iseseisvalt põhikooli matemaatika lõpueksamiks: valemid, tähtsad laused, testid vastustega, proovieksamiülesanded lahendustega*. Avita.
- Ageev, N. Ya., Dokuchaev, D. A., Dubovik, I. A., & Marchenko, O. P. (2025). The impact of using different types of learning materials on the characteristics of learning activity: a review of current research. *Psychological Science and Education*, 30(6), 105–116.
<https://doi.org/10.17759/pse.2025300606>
- Ainevaldkond „Matemaatika“. Põhikooli riiklik õppekava. Lisa 5 (2025). *Riigi Teataja I*, 25.06.2025, 1.
https://www.riigiteataja.ee/aktilisa/1231/2202/5006/VV2011_m1_lisa5_2025.pdf#
- Askvik, E. O., van der Weel, F. R., & van der Meer, A. L. H. (2020). The importance of cursive handwriting over typewriting for learning in the classroom. *Frontiers in Psychology*, 11, Article 1810. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01810>
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers* (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>
- Barbieri C. A., Miller-Cotto D., Clerjoste S. N., & Chawla K. (2023). A Meta-analysis of the Worked Examples Effect on Mathematics Performance. *Educational Psychology Review*, 35(1), Article 11.
<https://doi.org/10.1007/s10648-023-09745-1>
- Beilmann, M. (2020). Küsimustiku koostamine. M. Beilmann, A. Roots ja K. Rootalu (toim), *Sotsiaalse analüüsi meetodite ja metodoloogia õpibaas*.
<https://samm.ut.ee/kusimustiku-koostamine/>
- Beilmann, M., & Rämmer, A. (2025). Valimi moodustamine. M. Beilmann, S. Opermann ja D. Kutsar (toim), *Sotsiaalse analüüsi meetodite ja metodoloogia õpibaas*.

<https://samm.ut.ee/valimi-moodustamine/>

- Chen O., Retnowati E., Chan B. K. Y., & Kalyuga S. (2023). The effect of worked examples on learning solution steps and knowledge transfer. *Educational Psychology*, 43(8), 914-928. <https://doi.org/10.1080/01443410.2023.2273762>
- Clinton-Lisell, V., & Litzinger, C. (2026). Decoding digital reading: a network meta-analysis of comprehension across devices. *Education and Information Technologies*, 31, 1611–1643. <https://doi.org/10.1007/s10639-025-13843-8>
- Dinçer, S. (2020). The effects of materials based on ARCS Model on motivation: A meta-analysis. *İlköğretim Online*, 19, 1016-1042.
- Djono, Sudiyanto, Sukmawati F., & Salimi M. (2024). Systematic literature review: effects of digital teaching materials on learning achievement. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, 13(4), 2678-2688. <https://doi.org/10.11591/ijere.v13i4.26357>
- Easterday, M. W., Rees Lewis, D. G., & Gerber, E. M. (2018). The logic of design research. *Learning: Research and Practice*, 4(2), 131–160. <https://doi.org/10.1080/23735082.2017.1286367>
- Gordillo, A., Barra E., & Quemada, J. (2014). Towards a Learning Object pedagogical quality metric based on the LORI evaluation model. *2014 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE) Proceedings, Madrid, Spain*, 1-8. <https://doi.org/10.1109/FIE.2014.7044499>
- Goss-Sampson, M. A. (2025). *Statistical Analysis in JASP: A Guide for Students*. <https://jasp-stats.org/wp-content/uploads/2025/07/Statistical-Analysis-in-JASP-A-guide-for-students-2025.pdf>
- Haridus- ja Teadusministeerium. (s.a.) *Õppekava materjalide veeb. 5. PK Ainevaldkond "Matemaatika"*. <https://projektid.edu.ee/x/f4eaD>
- Hunt, P., & Karm, M. (2025). Arendusuuring. M. Beilmann, S. Opermann ja D. Kutsar (toim), *Sotsiaalse analüüsi meetodite ja metodoloogia õpibaas*. <https://samm.ut.ee/arendusuuring/>
- JASP Team (2025). *JASP* (versioon 0.95.4) [Arvutitarkvara]. <https://jasp-stats.org/>

- Juurik, M., Mäesalu, T., & Tarkpea, T. (2023). *Andmekaitse teadustöös: Juhend*. Tartu Ülikool.
https://eetika.ee/sites/default/files/2023-06/Andmekaitse%20teadust%C3%B6%C3%B6s.%20Juhend_2023.pdf
- Kaasik, K., & Lepmann, L. (2002). *Väike metoodikaraamat II kooliastme matemaatikaõpetajale*. Avita.
- Kaasik, K., & Saks, M. (toim). (2013). *Matemaatika õpik 6. klassile. I osa*. Avita.
- Kaldmäe, K., Kontson, A., Matiisen, K., Pais, E., & Erit, E. (toim). (2013). *Matemaatika õpik 9. klassile. I osa*. Avita.
- Kaldmäe, K., Kontson, A., Matiisen, K., Pais, E., & Erit, E. (toim). (2025). *Matemaatika õpik 8. klassile. 1. osa*. Avita.
- Kaljas, T., Nurk, E., Telgmaa, A., & Traks, K. (toim). (2013). *Matemaatika 6. klassile. 1. osa*. Koolibri.
- Kaljas, T., Nurk, E., Telgmaa, A., Undusk, A., & Traks, K. (toim). (2022). *Matemaatika 8. klassile. 1. osa. 2. Ümbertööt*. Tr. Koolibri.
- Kaljas, T., Lepik, M., Telgmaa, A., Nurk, E., Undusk, A., & Traks, K. (toim). (2023). *Matemaatika 7. klassile. 2. osa. 2. Ümbertööt*. Tr. Koolibri.
- Kasema, P., & Lind, A. (1982). *Matemaatika käsiraamat IV-VIII klassile*. Valgus.
- Kasema, P., & Lind, A. (1997). *Matemaatika käsiraamat V-IX klassile. 5. Ümbertööt*. Tr. Koolibri.
- Kay, R. H., & Knaack, L. (2009). Assessing learning, quality and engagement in learning objects: the Learning Object Evaluation Scale for Students (LOES-S). *Educational Technology Research and Development*, 57, 147–168.
<https://doi.org/10.1007/s11423-008-9094-5>
- Kivirähk, T. (2018). Matemaatika õpetamine õpiraskustega ja kerge intellektipuudega õpilastele. E. Krull (toim), *Pedagoogilise psühholoogia käsiraamat* (lk 640–647). Tartu Ülikooli Kirjastus.

- Kusmaryono, I., Wijayanti, D., & Maharani, H. R. (2022). Number of response options, reliability, validity, and potential bias in the use of the likert scale education and social science research: A literature review. *International Journal of Educational Methodology*, 8(4), 625-637. <https://doi.org/10.12973/ijem.8.4.625>
- Leacock, T. L., & Nesbit, J. C. (2007). A Framework for Evaluating the Quality of Multimedia Learning Resources. *Educational Technology & Society*, 10(2), 44-59.
- Lee, S.-A., Hong, J.-H., Kim, N.-Y., Min, H.-M., Yang, H.-M., Lee, S.-H., Choi, S.-J., & Park, J.-H. (2024). Unveiling Neurocognitive Disparities in Encoding and Retrieval between Paper and Digital Tablet-Based Learning. *Brain Sciences*, 14(1), Article 76. <https://doi.org/10.3390/brainsci14010076>
- Lepmann, L., Lepmann, T., Telgmaa, A., Undusk, A., & Traks, K. (toim). (2024). *Matemaatika 9. klassile. 1. osa. 2. Parand. Tr. Koolibri*.
- McKenney, S., & Reeves, T. C. (2014). Educational Design Research. In J. Spector, M. Merrill, J. Elen ja M. Bishop (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (pp. 131-140). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3185-5_11
- Oppmann, M.-M., & Reinhold, F. (2023). Motivational and emotional engagement mediates the effect of features of educational technology in mathematics classrooms. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel ja M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3.* (pp. 435-442). PME 46.
- Põhikooli- ja gümnaasiumiseadus (lühend - PGS). (2010). *Riigi Teataja I 2010*, 41, 240. <https://www.riigiteataja.ee/akt/107012026013>
- Põhikooli riiklik õppekava. (2011). *Riigi Teataja I 14.01.2011*, 1. <https://www.riigiteataja.ee/akt/123122025006>
- Raver, S. A., & Maydosz, A. S. (2010). Impact of the provision and timing of instructor-provided notes on university students' learning. *Active Learning in Higher Education*, 11(3), 189–200. <https://doi.org/10.1177/1469787410379682>

- Rootalu, K. (2014a). Kirjeldav statistika. K. Rootalu, V. Kalmus, A. Masso, ja T. Vihalemm (toim), *Sotsiaalse analüüsi meetodite ja metodoloogia õpibaas*.
<https://samm.ut.ee/kirjeldav-statistika/>
- Rootalu, K. (2014b). Tunnused ja nende tüübid. K. Rootalu, V. Kalmus, A. Masso, ja T. Vihalemm (toim), *Sotsiaalse analüüsi meetodite ja metodoloogia õpibaas*.
<https://samm.ut.ee/tunnused-ja-nende-tyybid/>
- Rustici Software. (s.a.) *SCORM solved and explained*. <https://scorm.com/>
- Shen, Y. (2025). Distractions in digital reading: a meta-analysis of attentional interference effects. *Frontiers in Psychology*, 16, Article 1671214.
<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2025.1671214>
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review*, 10, 251-296.
<https://doi.org/10.1023/A:1022193728205>
- Sõnaveeb. (2026). Käsiraamat. *EKI ühend sõnastik 2026*. Eesti Keele Instituut.
<https://sonaveeb.ee/search/unif/dlall/dsall/k%C3%A4siraamat/1/est>
- Taber, K. S. (2018). The Use of Cronbach's Alpha When Developing and Reporting Research Instruments in Science Education. *Research in Science Education*, 48, 1273–1296.
<https://doi.org/10.1007/s11165-016-9602-2>
- Tooding, L.-M. (2020). Cronbachi kordaja. M. Beilmann, A. Roots ja K. Rootalu (toim), *Sotsiaalse analüüsi meetodite ja metodoloogia õpibaas*.
<https://samm.ut.ee/cronbachi-kordaja/>
- Veelmaa, A., Reinup, R., Siilaberg, T., & Vestrik, I. (toim). (2025). *Valmistu põhikooli matemaatika lõpueksamiks 2026*. 12. Parand. & Täiend. Tr. Maurus.
- Viil, T., & Remmet, C. (toim). (2022). *Matemaatika tööraamat 6. klassile. I osa*. Maurus.
- World Wide Web Consortium. (s.a.) *W3C standards and drafts*. <http://www.w3.org/TR/>

Lisad

Lisa 1. Esimene ekspertidele saadetud e-kiri

Lugupeetud õpetaja!

Mina olen Maret Tark, Tartu Ülikooli magistrant matemaatika- ja informaatikaõpetaja erialal. Ma koostan oma magistritöö raames harilike ja algebraliste murdude käsiraamatut põhikooliõpilastele. See õppematerjal on eeskätt mõeldud õpilastele iseseisvaks kasutamiseks juba õpitud teemade kordamisel, nt enne kontrolltööd või uue teema õppimist. Samas saavad ka õpetajad kasutada seda tunnis õppematerjalina. Olen väga tänulik, kui leiate aega, et panustada minu magistritöö valmimisse.

Saadan Teile käsiraamatu esialgse versiooni selle kirja manuses PDF-failina. Ma palun, et Te loeksite selle käsiraamatu läbi ning paneksite kirja oma mõtted, kui Teie arvates vajab mõni teema või näide, joonis vms muutmist või täiendamist. Seejärel palun, et te saadaksite oma parandusettepanekud mulle e-mailile, võimalusel aprillikuu jooksul.

Teie tehtud ettepanekute põhjal ma täiendan käsiraamatut ning saadan Teile hiljem ka uuendatud versiooni. Sellega koos saadan ka lühikese küsimustiku, kus ma palun, et Te hindaksite valminud käsiraamatu kvaliteeti.

Teilt kogutud andmeid kasutatakse ainult magistritöö raames. Tulemusi kajastatakse töös sellisel kujul, et Teie isik ei ole tuvastatav. Pärast magistritöö kaitsmist kustutatakse Teilt kogutud andmed.

Ette tänades

Maret Tark

Lisa 2. Küsimustik ekspertidele

Lugupeetud õpetaja!

Käesoleva küsimustiku eesmärk on koguda ekspertidelt tagasisidet valminud käsiraamatule. Hinnangute andmisel arvestage palun käsiraamatu täiendatud versiooniga. Küsitluse vastuseid ootan võimalusel neljapäeva, 7. mai õhtuks. Vastamine võtab aega umbes 10 minutit. Olen väga tänulik, kui leiate aega panustada minu magistritöö valmimisse.

Küsimustikule vastamine on anonüümne. Küsimustiku vastuseid kasutatakse ainult käesoleva magistritöö raames ning need kustutatakse pärast magistritöö kaitsmist.

Ette tänades

Maret Tark

Tagasiside käsiraamatule

Selles plokis on 5 erinevat õppematerjali hindamise kriteeriumit. Iga kriteeriumi kohta on esitatud mõned väited, kokku 17 väidet. Palun esitage iga väite kohta hinnang, mil määral Te selle väitega nõustute. Iga kriteeriumi järel on avatud küsimus, kus on võimalik soovi korral oma hinnanguid põhjendada.

1. Sisu kvaliteet

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Õppematerjal on matemaatiliselt korrektne.					
Õppematerjal on keeleliselt korrektne.					
Õppematerjalis on mõtted esitatud sobiva rõhuasetusega.					
Õppematerjal on parajalt detailne.					
Õppematerjal vastab riiklikule õppekavale.					

2. Soovi korral põhjendage siin oma hinnangut õppematerjali sisu kvaliteedile:

3. Õpieesmärkide kooskõlastatus

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Õppematerjal on matemaatiliselt korrektne.					
Õppematerjal on keeleliselt korrektne.					
Õppematerjalis on mõtted esitatud sobiva rõhuasetusega.					

4. Soovi korral põhjendage siin oma hinnangut õppematerjali õpieesmärkide kooskõlastatusele:

5. Motivatsioon

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Õppematerjal motiveerib õpilasi õppima.					
Õppematerjal suudab hoida õpilaste tähelepanu.					
Õppematerjal on õpilaste jaoks huvitav.					

6. Soovi korral põhjendage siin oma hinnangut õppematerjali võimele õpilasi motiveerida:

7. Kujundus

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Õppematerjali kujundus on arusaadav.					
Õppematerjali kujundus on esteetiline.					
Õppematerjal seob efektiivselt teksti ja graafikat.					

8. Soovi korral põhjendage siin oma hinnangut õppematerjali kujundusele:

9. Taaskasutatavus

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Õppematerjali on lihtne korduvalt kasutada.					
Õppematerjali saab kasutada erinevate matemaatikaoskustega õpilastega.					
Õppematerjali saab kasutada erinevates õpituatsioonides.					

10. Soovi korral põhjendage siin oma hinnangut õppematerjali taaskasutatavusele:

Isikuandmed

Selles plokis on küsimused vastajate isikuandmete kohta.

11. Vanus aastates:

- ☐ alla 30
- ☐ 30-39
- ☐ 40-49
- ☐ 50-59
- ☐ 60-69
- ☐ 70 või rohkem

12. Tööstaaž aastates:

- ☐ alla 10
- ☐ 10-19
- ☐ 20-29
- ☐ 30-39
- ☐ 40-49
- ☐ 50 või rohkem

13. Mis klassidele Te käesoleval õppeaastal matemaatikat õpetate?

- ☐ 6. klassile
- ☐ 7. klassile
- ☐ 8. klassile
- ☐ 9. klassile

14. Mis klassidele Te olete viimase 5 a jooksul matemaatikat õpetanud?

- ☐ 6. klassile
- ☐ 7. klassile
- ☐ 8. klassile
- ☐ 9. klassile

Lisa 3. Teine ekspertidele saadetud e-kiri

Lugupeetud õpetaja!

Suur tänu Teie esitatud parandusettepanekute eest. Ma analüüsisin kõikide ekspertide ettepanekuid ning tegin käsiraamatus vastavad täiendused. Saadan Teile nüüd käsiraamatu täiendatud versiooni ning ühe alapeatüki oma magistritööst, kus on täpselt välja kirjutatud, mis muudatusi ma käsiraamatus tegin.

Lisaks saadan Teile ka lingi küsimustikule, kus ma palun, et Te hindaksite valminud käsiraamatu kvaliteeti. Küsimustikule vastamine võtab aega umbes 10 minutit. Vastuseid ootan võimalusel neljapäeva, 7. mai õhtuks.

<https://forms.office.com/e/mx7CwhgRSa>

Küsimustikule vastamine on anonüümne. Küsimustiku vastuseid kasutatakse ainult käesoleva magistritöö raames ning need kustutatakse pärast magistritöö kaitsmist.

Ette tänades

Maret Tark

Lisa 4. Nõusoleku registreerimisvorm lapsevanematele

Lugupeetud lapsevanem!

Mina olen Maret Tark, Tartu Ülikooli magistrant matemaatika- ja informaatikaõpetaja erialal. Ma koostasin oma magistritöö raames harilike ja algebraliste murdude käsiraamatu põhikooliõpilastele. See õppematerjal on eeskätt mõeldud õpilastele iseseisvaks kasutamiseks juba õpitud teemade kordamisel, nt enne kontrolltööd või uue teema õppimist.

Soovin läbi viia küsitluse, kus tahan teada saada, mida arvavad õpilased minu koostatud õppematerjalist. Küsitlusele vastamine on anonüümne ja selle tulemusi kasutatakse ainult magistritöö raames. Palun Teie nõusolekut Teie lapse osalemiseks minu magistritöö uurimuses. Kõik kogutud andmed kustutatakse pärast magistritöö kaitsmist.

Nõusolekut on võimalik igal hetkel tagasi võtta. Selleks tuleb esitada kirjalik avaldus meiliaadressile maret.tark@ut.ee.

Ette tänades

Maret Tark

○ Ei

Ei ole nõus, et minu laps osaleb uurimuses.

○ Jah

Olen nõus, et minu laps osaleb uurimuses.

Lisa 5. Küsimustik õpilastele

Hea 6.-9. klassi õpilane!

Käesoleva küsimustiku eesmärk on koguda õpilastelt tagasisidet matemaatika käsiraamatule.

Küsimustikule vastamine on vabatahtlik ja anonüümne. Küsimustiku vastuseid kasutatakse ainult käesoleva magistritöö raames ning need kustutatakse pärast magistritöö kaitsmist.

Ette tänades

Maret Tark

1. Kas sa oled nõus uuringus osalema?

- ☐ Jah
- ☐ Ei

Matemaatika

Selles plokis on esitatud 3 väidet matemaatikaoskuse kohta. Palun esita iga väite kohta hinnang, mil määral sa selle väitega nõustud. Väidete järel on ka üks avatud küsimus, kus on võimalik soovi korral oma hinnanguid põhjendada.

2. Matemaatikaoskus

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Ma saan matemaatikast hästi aru.					
Matemaatikaülesannete lahendamine on minu jaoks lihtne.					
Ma saan matemaatika-tundides ülesanded lahendatud tavaliselt ilma õpetaja abita.					

3. Soovi korral põhjenda siin oma hinnangut matemaatikaoskusele:

Tagasiside käsiraamatule

Selles plokis on 3 erinevat õppematerjali hindamise kriteeriumit. Iga kriteeriumi kohta on esitatud 3 väidet, kokku 9 väidet. Palun esita iga väite kohta hinnang, mil määral sa selle väitega nõustud. Hinnangute andmisel mõtle sellele käsiraamatule, millega just praegu tunnis tutvusid. Iga kriteeriumi järel on ka avatud küsimus, kus on võimalik soovi korral oma esitatud hinnanguid põhjendada. Ploki lõpus on lisaks veel 2 avatud küsimust.

4. Kas kasutasid käsiraamatut arvutis või paberkujul?

- ☐ Arvutis
- ☐ Paberkujul

5. Käsiraamatuga õppimine

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Käsiraamatuga töötamine aitas mul õppida.					
Käsiraamatus sisalduvad joonised aitasid mul õppida.					
Üldiselt oli mul käsiraamatust õppimisel abi.					

6. Soovi korral põhjenda siin oma hinnangut käsiraamatuga õppimisele:

7. Käsiraamatu kvaliteet

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Käsiraamatus sisalduvad näidislahendused olid kasulikud.					
Käsiraamatut oli lihtne kasutada.					
Käsiraamat oli hästi üles ehitatud.					

8. Soovi korral põhjenda siin oma hinnangut käsiraamatu kvaliteedile:

9. Käsiraamatu kaasahaaravus

	1 - üldse ei nõustu	2 - pigem ei nõustu	3 - nii ja naa	4 - pigem nõustun	5 - nõustun täielikult
Mulle meeldis käsiraamatu üldine teema.					
Käsiraamat motiveeris mind õppima.					
Ma tahaksin seda käsiraamatut tulevikus veel kasutada.					

10. Soovi korral põhjenda siin oma hinnangut käsiraamatu kaasahaaravusele:

11. Mis sulle selle käsiraamatu juures meeldis?

12. Mis sulle selle käsiraamatu juures ei meeldinud?

Isikuandmed

Selles plokis on küsimused vastajate isikuandmete kohta.

11. Vanus:

- ☐ alla 12 a
- ☐ 12 a
- ☐ 13 a
- ☐ 14 a
- ☐ 15 a
- ☐ 16 a
- ☐ üle 16 a

12. Sugu:

- ☐ Mees
- ☐ Naine
- ☐ Ei soovi vastata

13. Klass:

- ☐ 6.
- ☐ 7.
- ☐ 8.
- ☐ 9.

Lisa 6. Põhikooli matemaatika käsiraamat: harilikud ja algebralised murrud

Tartu Ülikool

PÕHIKOO LI MATEMAATI KA
KÄSIRAAMAT
HARILIKUD JA ALGEBRALISED MURRUD

Maret Tark

Tartu 2026

Sisukord

HARILIKUD MURRUD.....	3
Definitsioon.....	3
Liigid.....	3
Segaarvud.....	4
Taandamine.....	5
Laiendamine.....	5
Ühenimelisteks teisendamine.....	6
Võrdlemine	7
Seos kümnendmurruga.....	8
Liitmine-lahutamine.....	10
Korrutamine	11
Pöördarvud.....	11
Jagamine	11
ÜKSLIIKMED	12
Definitsioon.....	12
Sarnased üksliikmed	12
Sarnaste liikmete koondamine	13
Korrutamine-jagamine	13
Astendamine	13
HULKLIKMED.....	14
Definitsioon.....	14
Tehted hulkliikmetega	15
Korrutamise abivalemid.....	18
TEGURDAMINE.....	19
Teguri toomine sulgudest välja	19
Ruutude vahe valem.....	20
Kaksliikme ruudu valem	21
Ruutkolmliige	22
ALGEBRALISED MURRUD.....	23
Definitsioon.....	23
Taandamine.....	23
Korrutamine	24
Jagamine	25
Astendamine	25
Laiendamine.....	26
Ühenimelisteks teisendamine.....	26
Liitmine ja lahutamine	27
RATSIONAALAVALDISED	29
Lihtsustamine.....	29

HARILIKUD MURRUD

Definitsioon

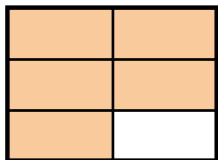
Harilik murd on **murdarv**, mis on kirjutatud kujul $\frac{a}{b}$, kus a ja b on arvud ning $b \neq 0$.

Nt: kolm viiendikku

3 murru **lugeja** näitab, mitu võrdset osa on võetud

5 **murrujoonel** on jagamismärgi tähendus

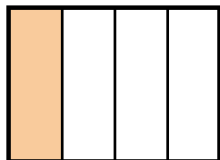
murru **nimetaja** näitab, mitmeks võrdseks osaks on tervik jaotatud



Ristkülikust on
värvitud $\frac{5}{6}$ osa.

(viis kuuendikku)

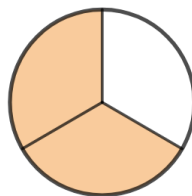
$$\frac{5}{6} = 5 : 6$$



Ristkülikust on
värvitud $\frac{1}{4}$ osa.

(üks neljandik)

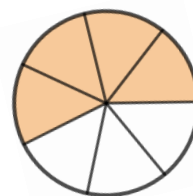
$$\frac{1}{4} = 1 : 4$$



Ringist on
värvitud $\frac{2}{3}$ osa.

(kaks kolmandikku)

$$\frac{2}{3} = 2 : 3$$



Ringist on
värvitud $\frac{4}{7}$ osa.

(neli seitsmendikku)

$$\frac{4}{7} = 4 : 7$$

Liigid

Harilikke murde on 2 erinevat liiki: **lihtmurrud** ja **liigmurrud**.

Lihtmurd on harilik murd, mille **lugeja on väiksem kui nimetaja**.

Iga lihtmurd on **väiksem kui arv 1**.

Nt: $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{13}{24}$ $\frac{8}{9} < 1$ $\frac{16}{17} < 1$ $\frac{1}{6} < 1$

Liigmurd on harilik murd, mille **lugeja on võrdne nimetajaga või suurem nimetajast**.

Iga liigmurd on kas **võrdne arvuga 1** või **suurem arvust 1**.

Nt: $\frac{8}{8}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{10}{7}$ $\frac{13}{13}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{5}{5} = 1$ $\frac{35}{6} > 1$ $\frac{24}{24} = 1$ $\frac{9}{8} > 1$

Omadus: Iga liigmurru saab teisendada kas täisarvuks või segaarvuks.

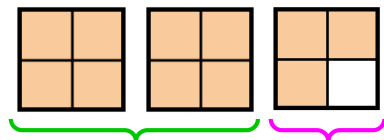
HARILIKUD MURRUD

Segaarvud

Segaarv on arv, mis koosneb täisosast ja murdosast.

Nt: kaks kolm neljandikku

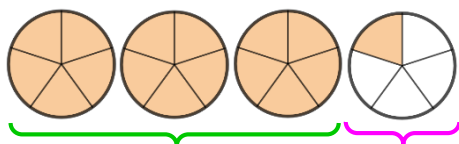
$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$$



täisosa: 2 tervikut murdosa: $\frac{3}{4}$

kolm üks viiendik

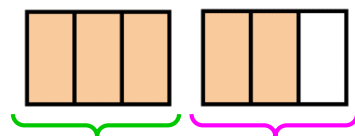
$$3\frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5}$$



täisosa: 3 tervikut murdosa: $\frac{1}{5}$

üks kaks kolmandikku

$$1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$



täisosa: 1 tervik murdosa: $\frac{2}{3}$

Teisendamine

1) segaarv $\rightarrow$ liigmurd

$$2\frac{7}{12} = \frac{31}{12}$$

$$2 \cdot 12 + 7 = 31$$

$$1\frac{3}{8} = \frac{11}{8}$$

$$1 \cdot 8 + 3 = 11$$

$$4\frac{6}{7} = \frac{34}{7}$$

$$4 \cdot 7 + 6 = 34$$

$$10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

$$10 \cdot 2 + 1 = 21$$

2) liigmurd $\rightarrow$ segaarv

$$\frac{52}{9} = 5\frac{7}{9}$$

$$52 : 9 = 5, \text{ jääk } 7$$

$$\frac{45}{7}$$

$$\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

$$13 : 4 = 3, \text{ jääk } 1$$

$$\frac{12}{1}$$

$$\frac{23}{13} = 1\frac{10}{13}$$

$$23 : 13 = 1, \text{ jääk } 10$$

$$\frac{13}{10}$$

HARILIKUD MURRUD

Taandamine

Hariliku murru taandamine on murru lugeja ja nimetaja jagamine ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Taandamisel jääb murru väärtus samaks.

Arvu, millega lugejat ja nimetajat jagada, **võib ise valida** (v.a 0).

Kasulik on valida selline arv, millega lugeja ja nimetaja mõlemad jaguvad.

Vajadusel võib murdu taandada ka **mitu korda** järjest.

$$\text{Nt: } \frac{15}{25} = \frac{15 : 5}{25 : 5} = \frac{3}{5} \qquad \frac{3}{6} = \frac{3 : 3}{6 : 3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{42}{56} = \frac{42 : 7}{56 : 7} = \frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{20}{24} \overset{4}{=} \frac{5}{6}$$

$$\frac{36}{63} \overset{9}{=} \frac{4}{7}$$

$$\frac{42}{48} \overset{6}{=} \frac{7}{8}$$

$$\frac{24}{72} \overset{8}{=} \frac{3}{9} \overset{3}{=} \frac{1}{3}$$

Segaarvu taandamisel jääb täisosa samaks.

$$\text{Nt: } 6\frac{8}{18} \overset{2}{=} 6\frac{4}{9}$$

$$7\frac{42}{63} \overset{7}{=} 7\frac{6}{9} \overset{3}{=} 7\frac{2}{3}$$

$$4\frac{50}{80} \overset{10}{=} 4\frac{5}{8}$$

Laiendamine

Hariliku murru laiendamine on murru lugeja ja nimetaja korrutamine ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Laiendamisel jääb murru väärtus samaks.

Laiendaja on **arv**, millega lugejat ja nimetajat korrutatakse.

$$\text{Nt: } \frac{4}{7} \overset{2}{=} \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{8}{14}$$

$$\frac{3}{5} \overset{8}{=} \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$$

$$\frac{1}{6} \overset{3}{=} \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{3}{18}$$

$$\frac{2}{5} \overset{4}{=} \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{8} \overset{2}{=} \frac{6}{16}$$

$$\frac{1}{4} \overset{9}{=} \frac{9}{36}$$

$$\frac{2}{9} \overset{5}{=} \frac{10}{45}$$

$$\frac{6}{7} \overset{10}{=} \frac{60}{70}$$

Segaarvu laiendamisel jääb täisosa samaks.

$$\text{Nt: } 5\frac{4}{9} \overset{6}{=} 5\frac{24}{54}$$

$$2\frac{5}{8} \overset{3}{=} 2\frac{15}{24}$$

$$9\frac{1}{6} \overset{7}{=} 9\frac{7}{42}$$

HARILIKUD MURRUD

Ühenimelisteks teisendamine

Harilikud murrud on ühenimelised, kui nende nimetajad on võrdsed.

Harilikud murrud on eranimelised, kui nende nimetajad on erinevad.

Nt: $\frac{2}{5}$ ja $\frac{4}{5}$ on ühenimelised $\frac{3}{7}$ ja $\frac{3}{10}$ on eranimelised

Murdude ühenimelisteks teisendamise sammud:
1) kui võimalik, taanda algseid murde;
2) leia ühine nimetaja (nimetajate VÜK);
3) leia laiendajad;
4) laienda.

Nt: Teisenda murrud $\frac{5}{6}$ ja $\frac{3}{8}$ ühenimelisteks.

1) taandada
ei saa

$$\begin{array}{r|rr} 6 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ & 1 & \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

3) $24 : 6 = 4$

$24 : 8 = 3$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5 \overline{) 6} = \frac{20}{24} \\ 3 \\ 3 \overline{) 8} = \frac{9}{24} \end{array}$$

Vastus: $\frac{20}{24}$ ja $\frac{9}{24}$

Teisenda murrud $\frac{7}{42}$ ja $\frac{7}{15}$ ühenimelisteks.

1) $\frac{7}{42} \stackrel{7}{=} \frac{1}{6}$

$$\begin{array}{r|rr} 6 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

3) $30 : 6 = 5$

$30 : 15 = 2$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1 \overline{) 6} = \frac{5}{30} \\ 2 \\ 7 \overline{) 15} = \frac{14}{30} \end{array}$$

Vastus: $\frac{5}{30}$ ja $\frac{14}{30}$

Teisenda murrud $\frac{14}{24}$ ja $\frac{24}{32}$ ühenimelisteks.

1) $\frac{14}{24} \stackrel{2}{=} \frac{7}{12}$

$\frac{24}{32} \stackrel{8}{=} \frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r|rr} 12 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

3) $12 : 12 = 1$

$12 : 4 = 3$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7 \overline{) 12} = \frac{7}{12} \\ 3 \\ 3 \overline{) 4} = \frac{9}{12} \end{array}$$

Vastus: $\frac{7}{12}$ ja $\frac{9}{12}$

HARILIKUD MURRUD

Võrdlemine

1. Kui murrud on ühenimelised, siis **suurem** on murd, millel on **suurem lugeja**.

$$\frac{2}{9} < \frac{7}{9}$$

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{6}$$

$$\frac{6}{13} < \frac{9}{13}$$

$$\frac{3}{8} > \frac{1}{8}$$

2. Kui murdudel on võrdsed lugejad, siis **suurem** on murd, millel on **väiksem nimetaja**.

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{11} < \frac{8}{9}$$

$$\frac{5}{2} > \frac{5}{7}$$

$$\frac{10}{13} > \frac{10}{29}$$

3. Kui murdudel on erinevad nimetajad ja erinevad lugejad:

- 3.1. kui üks murd on lihtmurd ja teine liigmurd, siis **suurem** on **liigmurd**.

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{4} > \frac{8}{9}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{6}{6}$$

$$\frac{12}{7} > \frac{9}{11}$$

- 3.2. kui mõlemad murrud on lihtmurrud või mõlemad on liigmurrud, siis tuleb murrud teisendada ühenimelisteks ning seejärel võrrelda nii nagu punktis 1.

$$\frac{5}{9} \text{ ja } \frac{7}{15} \quad \frac{5}{9} = \frac{25}{45} > \frac{7}{15} = \frac{21}{45}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$45 : 9 = 5$$

$$45 : 15 = 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$$

$$\frac{17}{24} \text{ ja } \frac{15}{20}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{17}{24} = \frac{17}{24} < \frac{3}{4} = \frac{18}{24}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$24 : 24 = 1$$

$$24 : 4 = 6$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Segaarvud

Kahe segaarvu võrdlemisel tuleb kõigepealt võrrelda täisosasid. Kui segaarvude täisosad on võrdsed, siis tuleb võrrelda **murdosasid** – nii nagu punktides 1. kuni 3.

Nt: $3\frac{4}{9} > 1\frac{8}{9}$

$4\frac{2}{3} < 7\frac{2}{3}$

$2\frac{3}{8} < 2\frac{5}{8}$

$5\frac{6}{7} > 5\frac{6}{11}$

Segaarvu ja liigmurru võrdlemisel tuleb kõigepealt teisendada kas segaarv liigmurruks või liigmurd segaarvuks.

Nt: $2\frac{5}{6} \text{ ja } \frac{19}{6}$

$2\frac{5}{6} = \frac{17}{6} < \frac{19}{6}$

$3\frac{1}{4} \text{ ja } \frac{13}{5}$

$3\frac{1}{4} > \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

HARILIKUD MURRUD

Seos kümnendmurruga

Kümnendmurd → harilik murd

$$0,\underline{59} = \frac{\underline{59}}{100}$$

↑ ↑
2 nulli
2 kümnendkohta

$$0,\underline{007} = \frac{\underline{7}}{1000}$$

↑ ↑
3 nulli
3 kümnendkohta

$$0,\underline{8} = \frac{\underline{8}}{10} = \frac{4}{5}$$

↑ ↑
1 null
1 kümnendkoht

$$0,\underline{205} = \frac{\underline{205}}{1000} = \frac{41}{200}$$

↑ ↑
3 nulli
3 kümnendkohta

$$\underline{5},\underline{617} = \frac{\underline{5617}}{1000}$$

↑ ↑
3 nulli
3 kümnendkohta

$$\underline{9},\underline{9} = \frac{\underline{99}}{10}$$

↑ ↑
1 null
1 kümnendkoht

$$\underline{4},\underline{05} = \frac{\underline{405}}{100} = \frac{81}{20}$$

↑ ↑
2 nulli
2 kümnendkohta

$$\underline{35},\underline{5} = \frac{\underline{355}}{10} = \frac{71}{2}$$

↑ ↑
1 null
1 kümnendkoht

$$\underline{2},\underline{3} = 2\frac{\underline{3}}{10}$$

$$\underline{8},\underline{09} = 8\frac{\underline{9}}{100}$$

$$\underline{7},\underline{5} = 7\frac{\underline{5}}{10} = 3\frac{1}{2}$$

$$\underline{1},\underline{86} = 1\frac{\underline{86}}{100} = 1\frac{43}{50}$$

Harilik murd → kümnendmurd

1. Kui nimetaja on järguühik (10, 100, 1000 vms):

$$\frac{\underline{61}}{100} = 0,\underline{61}$$

↑ ↑
2 nulli
2 kümnendkohta

$$\underline{6}\frac{\underline{29}}{1000} = \underline{6},\underline{029}$$

↑ ↑
3 nulli
3 kümnendkohta

$$\frac{\underline{83}}{10} = \underline{8},\underline{3}$$

↑ ↑
1 null
1 kümnendkoht

$$\frac{\underline{7}}{100} = 0,\underline{07}$$

↑ ↑
2 nulli
2 kümnendkohta

2. Kui nimetaja saab laiendada järguühikuks (2, 5, 25, 50 vms):

$$\frac{\overset{2}{4}}{5} = \frac{\underline{8}}{10} = 0,\underline{8}$$

$$3\frac{\overset{4}{6}}{25} = \underline{3}\frac{\underline{24}}{100} = \underline{3},\underline{24}$$

$$\frac{\overset{5}{9}}{2} = \frac{\underline{45}}{10} = \underline{4},\underline{5}$$

$$\frac{\overset{5}{1}}{20} = \frac{\underline{5}}{100} = 0,\underline{05}$$

$$\frac{\overset{2}{713}}{50} = \frac{\underline{1426}}{100} = \underline{14},\underline{26}$$

$$9\frac{\overset{2}{3}}{5} = \underline{9}\frac{\underline{6}}{10} = \underline{9},\underline{6}$$

HARILIKUD MURRUD

Seos kümnendmurruga

Harilik murd → kümnendmurd

3. Kui nimetaja ei ole järguühik:

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 20 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 20 \\ \hline 16 \\ \hline 40 \\ \hline 40 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{7}{4} = 1,75$$

$$\frac{7}{4} = 1,75$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 30 \\ \hline 28 \\ \hline 20 \\ \hline 20 \\ \hline \end{array}$$

$$5\frac{9}{25} = 5,36$$

$$9 : 25 = 0,36$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \hline 150 \\ \hline 150 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{9}{20} = 0,45$$

$$9 : 20 = 0,45$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \hline 100 \\ \hline 100 \\ \hline \end{array}$$

$$6\frac{1}{4} = 6,25$$

$$1 : 4 = 0,25$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 20 \\ \hline 20 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{406}{5} = 81,2$$

$$406 : 5 = 81,2$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 06 \\ \hline 5 \\ \hline 10 \\ \hline 10 \\ \hline \end{array}$$

$$1\frac{3}{8} = 1,375$$

$$3 : 8 = 0,375$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 60 \\ \hline 56 \\ \hline 40 \\ \hline 40 \\ \hline \end{array}$$

Perioodiline kümnendmurd on lõpmatu kümnendmurd, mille murdosas mingi number või numbrite rühm kordub nii, et korduste vahel ei ole muid numbreid.

Periood on perioodilise kümnendmurru murdosas korduv number või numbrite rühm. Periood kirjutatakse **sulgudesse**.

$$\frac{8}{11} = 0,(72)$$

$$8 : 11 = 0,7272...$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ \hline 30 \\ \hline 22 \\ \hline 80 \\ \hline 77 \\ \hline 30 \\ \hline 22 \\ \hline \vdots \end{array}$$

$$\frac{14}{3} = 4,(6)$$

$$14 : 3 = 4,66...$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 20 \\ \hline 18 \\ \hline 20 \\ \hline 18 \\ \hline \vdots \end{array}$$

$$2\frac{5}{6} = 2,8(3)$$

$$5 : 6 = 0,833...$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 20 \\ \hline 18 \\ \hline 20 \\ \hline 18 \\ \hline \vdots \end{array}$$

HARILIKUD MURRUD

Liitmine-lahutamine

1. Kui murrud on ühenimelised, peab murdude **lugejad liitma/lahutama** ning murdude **nimetaja jääb samaks**.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{6}{11} - \frac{4}{11} = \frac{6-4}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Segaarvude korral peab murdude **täisosad omavahel liitma/lahutama** ja murdosad omavahel liitma/lahutama.

$$2\frac{1}{8} + 3\frac{5}{8} = 5\frac{6}{8} = 5\frac{3}{4}$$

$$7\frac{5}{9} - 7\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{4}{7} + 4\frac{2}{7} = 4\frac{6}{7}$$

Kui liitmisel tuleb murdosaks **liigmurd**, siis peab sellest **täisosa eraldama**.

$$3\frac{6}{7} + 5\frac{4}{7} = 8\frac{10}{7} = 9\frac{3}{7}$$

$$\downarrow \quad \uparrow$$

$$8 + \frac{10}{7} = 8 + 1\frac{3}{7}$$

$$6\frac{8}{11} + \frac{5}{11} = 6\frac{13}{11} = 7\frac{2}{11}$$

$$\downarrow \quad \uparrow$$

$$6 + \frac{13}{11} = 6 + 1\frac{2}{11}$$

Kui lahutamisel tuleb **väiksemast murdosast lahutada suuremat**, peab **täisosast murdosasse juurde laenama**.

$$9\frac{2}{5} - \frac{4}{5} = 8\frac{7}{5} - \frac{4}{5} = 8\frac{3}{5}$$

$$\downarrow \quad \swarrow$$

$$9 + \frac{2}{5} = 8 + 1 + \frac{2}{5} = 8 + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 8\frac{7}{5}$$

$$6 - 3\frac{5}{8} = 5\frac{8}{8} - 3\frac{5}{8} = 2\frac{3}{8}$$

$$\downarrow \quad \nwarrow$$

$$6 = 5 + 1 = 5 + \frac{8}{8}$$

2. Kui murrud on erinimelised, siis peab need kõigepealt **ühenimelisteks teisendama**.

$$\frac{7}{10} + \frac{8}{15} = \frac{21+16}{30} = \frac{37}{30} = 1\frac{7}{30}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 30 : 10 = 3 \\ 30 : 15 = 2 \end{array}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$$

$$6\frac{27}{45} - 2\frac{11}{20} = 6\frac{3}{5} - 2\frac{11}{20} = 4\frac{12-11}{20} = 4\frac{1}{20}$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 9 \\ 45 & 5 \end{array} = 6\frac{3}{5} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & 10 \\ & 5 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 20 : 5 = 4 \\ 20 : 20 = 1 \end{array}$$

$$5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$$

HARILIKUD MURRUD

Korrutamine

Harilike murdude **korrutamisel** peab lugejad omavahel korrutama ja nimetajad omavahel korrutama. Võimalusel saab **ühisel murrujoonel** tegureid taandada!

$$\text{Nt: } \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} = \frac{35}{48} \qquad \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{11} = \frac{\overset{3}{\cancel{3}} \cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{4 \cdot 11} = \frac{9}{22} \qquad \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{1}{3}$$

Naturaalarvu(ga) korrutamisel tuleb arvestada, et: $9 = \frac{9}{1}$ $2 = \frac{2}{1}$ $10 = \frac{10}{1}$ jne.

$$\text{Nt: } 4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 9} = \frac{8}{9} \qquad \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1 \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}} \cdot 1} = \frac{1}{2} \qquad 7 \cdot \frac{5}{7} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot 5}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{5}{1} = 5$$

Segaarvu(ga) korrutamisel peab segaarvu kõigepealt **liigmurruks teisendama!**

$$\text{Nt: } 4\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10} \qquad 9 \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 8}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{24}{1} = 24 \qquad 3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{2}{9} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{3}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{55}{12}$$

Pöördarvud

Kaks arvu on **pöördarvud**, kui nende **korrutis on 1**. Hariliku murru pöördarvu leidmiseks tuleb murru lugeja ja nimetaja omavahel ära vahetada.

$$\text{Nt: } \text{Arvud } \frac{2}{5} \text{ ja } \frac{5}{2} \text{ on pöördarvud.} \qquad \text{Arvud } \frac{1}{4} \text{ ja } \frac{4}{1} = 4 \text{ on pöördarvud.}$$

Naturaalarvu või segaarvu pöördarvu leidmisel kehtivad samad reeglid nagu korrutamisel.

$$\text{Nt: } \text{Arvu } 6 = \frac{6}{1} \text{ pöördarv on } \frac{1}{6}. \qquad \text{Arvu } 12 = \frac{12}{1} \text{ pöördarv on } \frac{1}{12}. \\ \text{Arvu } 3\frac{5}{8} = \frac{29}{8} \text{ pöördarv on } \frac{8}{29}. \qquad \text{Arvu } 1\frac{2}{9} = \frac{11}{9} \text{ pöördarv on } \frac{9}{11}.$$

Jagamine

Harilike murdude **jagamisel** peab **jagatava** korrutama **jagaja pöördarvuga**.

$$\text{Nt: } \frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21} \qquad 6 : 2\frac{1}{4} = \frac{6 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{1 \cdot \underset{3}{\cancel{4}}} = \frac{8}{3} \qquad 1\frac{3}{5} : 8 = \frac{\overset{1}{\cancel{8}} \cdot \overset{1}{\cancel{1}}}{5 \cdot \underset{1}{\cancel{8}}} = \frac{1}{5}$$

ÜKSLEIKMED

Definitsioon

Üksliige on avaldis, mis sisaldab ainult arve, muutujaid ning korrutustehteid.

Nt: $5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot (-3) \cdot x$ $a \cdot c \cdot 2,5 \cdot b \cdot 4 \cdot 1,7$ $\frac{1}{6} \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$

$s \cdot 3,25 \cdot t \cdot t \cdot \frac{4}{5}$ $x \cdot y \cdot x \cdot z \cdot z \cdot x$ $-4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5$

Üksliige on **normaalkujul**, kui kõige esimesena on kirjas arv (kõigi arvuliste tegurite korrutis) ning sellele järgneb tähteline osa ehk muutujad tähestikulises järjekorras oma astmetega.

Üksliikme normaalkujule viimine:

$$\begin{aligned} 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot (-3) \cdot x &= -15x^3y & a \cdot c \cdot 2,5 \cdot b \cdot 4 \cdot 1,7 &= 17abc \\ \frac{1}{6} \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n &= \frac{1}{6}m^2n^4 & s \cdot 3,25 \cdot t \cdot t \cdot \frac{4}{5} &= 2,6st^2 \\ x \cdot y \cdot x \cdot z \cdot z \cdot x &= x^3yz^2 & -4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 &= -\frac{44}{3} \end{aligned}$$

Üksliikme **kordaja** on see arv, mis on üksliikme normaalkujus esimesena kirjas. Kui üksliikme kordaja on 1, siis seda ei kirjutata:

$$1ab = ab \quad 1p^2q = p^2q \quad 1xy^6z^4 = xy^6z^4$$

Kui üksliikme kordaja on -1, siis kirjutatakse ainult miinusmärk:

$$-1uv = -uv \quad -1xy^2 = -xy^2 \quad -1a^3b^5c = -a^3b^5c$$

Sarnased üksliikmed

Üksliikmed on **sarnased**, kui nende tähteline osa on täpselt sama.

Üksliikmed $3x$ ja $-5x$ **on** sarnased

$4ab$ ja $4ab^2$ ei ole sarnased

$2st^3$ ja $2st^3$ **on** sarnased

$-7mn$ ja mn **on** sarnased

xyz^4 ja $x^4y^4z^4$ ei ole sarnased

$-9a^5bc$ ja $-9ab^5c$ ei ole sarnased

-13 ja $6,8$ **on** sarnased

ÜKSLEIKMED

Sarnaste liikmete koondamine

Sarnaste liikmete koondamine on nende liikmete liitmine ja lahutamine.

Liikmete koondamisel peab liitma või lahutama liikmete arvkoordajad, aga tähteline osa jääb täpselt samaks.

Nt: $3x^2y + 5x^2y = 8x^2y$ $9a^3 - 2a^3 = 7a^3$ $-6u + 4u = -2u$

$$\underline{-2ab + 7a - 6ab} = -8ab + 7a$$

$$\underline{5m^2n - 3mn^2 + 9mn^2 - 1} = 5m^2n + 6mn^2 - 1$$

$$\underline{-3x + 5y + 3x + 2y} = 7y$$

$$\underline{7 + 4s^2 - 3s + s^2 - 5} = 2 + 5s^2 - 3s$$

$$\underline{-p - 5pq + 9p - 4q + 4pq} = 8p - pq - 4q$$

Korrutamine-jagamine

Üksliikmete korrutamisel-jagamisel peab korrutama või jagama eraldi liikmete arvkoordajad ning vastavad muutujad omavahel.

Nt: $-6x^2 \cdot 2x^4 = -6 \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -12x^6$ $4k^2 \cdot 7l^3 = 28k^2l^3$
 $9y \cdot (-5) = -45y$ $ab \cdot 6bc = 6ab^2c$ $-rs^2 \cdot (-rt^3) = r^2s^2t^3$

$$21x^7 : (-3x^2) = 21 : (-3) \cdot x^{7-2} = -7x^5$$

$$8k^6l^3 : (2k^4) = 4k^2l^3$$

$$-32y : 4 = -8y$$

$$a^3b : (3a^2b) = \frac{1}{3}a$$

$$-r^2s^3 : (-s) = r^2s^2$$

Astendamine

Üksliikme astendamisel peab astendama eraldi arvkoordaja ning kõik muutujad.

Nt: $(2mn^5)^4 = 2^4 \cdot m^4 \cdot (n^5)^4 = 16m^4n^{20}$ $\left(\frac{1}{4}x^3\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (x^3)^2 = \frac{1}{16}x^6$

$$(a^2bc^7)^0 = 1$$

$$\left(\frac{3s^3t}{2}\right)^3 = \frac{27s^9t^3}{8}$$

$$(pr^8)^5 = p^5r^{40}$$

HULKLIKMED

Definitsioon

Hulkliige on üksliikmete summa.

Nt: $4a + b$ $a^2 - b^2 + c^2$ $ab - 1$ $8ab^2 - 5a^2b - a + 2$

Kui hulkliige koosneb **kahest** üksliikmest, siis seda nimetatakse **kaksliikmeks**.

Nt: $2x - 5$ $-3x^2y + 7x$ $ax + b$ $4 - ab^2$

Kui hulkliige koosneb **kolmest** üksliikmest, siis seda nimetatakse **kolmliikmeks**.

Nt: $2x^3 - 3x + 5$ $a^3 - ab + b^2$ $-x^2 + 2y^2 + z$

Hulkliige on **korrastatud**, kui

1. kõik üksliikmed on normaalkujul;
2. kõik sarnased liikmed on koondatud;
3. liikmed on kirjutatud sellises järjekorras, et **esimesel kohal** on see üksliige, milles muutujate **astendajate summa on kõige suurem** ning igal järgmisel liikmel läheb astendajate summa järjest väiksemaks.

Hulkliikmete korrastamise näited:

Nt: $-a + 8ab^2 + 2 - 5a^2b = 8ab^2 - 5a^2b - a + 2$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 1 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 1 + 2 = 3 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 0 \\ \text{(pole ühtegi} \\ \text{tähte)} \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 2 + 1 = 3 \end{array}$

$5x - 3x^3 + 7x^2 - 10x^5 + 7 = 10x^5 - 3x^3 + 7x^2 + 5x + 7$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 1 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 3 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 2 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 5 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{astendajate} \\ \text{summa:} \\ 0 \end{array}$

$4s^2 + 2st^2 - t^4 + 6 = -t^4 + 2st^2 + 4s^2 + 6$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 1 + 2 = 3 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 4 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 0 \end{array}$

$-3k^2l^2 + 7k^4 + 3l - k^2l^4 - 9kl^2 = -k^2l^4 - 3k^2l^2 + 7k^4 - 9kl^2 + 3l$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2 + 2 = 4 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 4 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 2 + 4 = 6 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 1 + 2 = 3 \end{array}$

HULKLIIKMED

Tehted hulkliikmetega

LIITMINE

Reegel: Kui sulu ees ei ole miinusmärki (on plussmärk), siis võib sulud lihtsalt kirjutamata jätta.

Hulkliikmete liitmise näited:

Nt: Hulkliikmete $5a - 6b + 7$ ja $2a - 9b - 5$ summa:

$$(5a - 6b + 7) + (2a - 9b - 5) = 5a - 6b + 7 + 2a - 9b - 5 = 7a - 15b + 2$$

Hulkliikmete $2p - 5 - r$ ja $15 - 9p$ summa:

$$(2p - 5 - r) + (15 - 9p) = 2p - 5 - r + 15 - 9p = -r + 10$$

Hulkliikmete $3x + 4y$ ja $8x - 7 - y + 3z$ summa:

$$(3x + 4y) + (8x - 7 - y + 3z) = 3x + 4y + 8x - 7 - y + 3z = 11x + 3y + 3z - 7$$

LAHUTAMINE

Reegel: Miinusmärk sulu ees muudab KÕIK märgid sulu sees!

Nt: $-(3k + 6l - m) = -3k - 6l + m$

$$-(-s - 4t) = s + 4t$$

$$-(5a - b + 8c - 7d) = -5a + b - 8c + 7d$$

Hulkliikmete lahutamise näited:

Nt: Hulkliikmete $5a - 6b + 7$ ja $2a - 9b - 5$ vahe:

$$(5a - 6b + 7) - (2a - 9b - 5) = 5a - 6b + 7 - 2a + 9b + 5 = 3a + 3b + 12$$

Hulkliikmete $2x - 5 - y$ ja $15 - 9x$ vahe:

$$(2x - 5 - y) - (15 - 9x) = 2x - 5 - y - 15 + 9x = 11x - y - 20$$

Hulkliikmete $3x + 4y$ ja $8x - 7 - y + 3z$ vahe:

$$(3x + 4y) - (8x - 7 - y + 3z) = 3x + 4y - 8x + 7 + y - 3z = 5y - 3z + 7$$

HULKLIIKMED

Tehed hulkliikmetega

KORRUTAMINE

Reegel 1: Üksliige tuleb korrutada hulkliikme iga liikmega ning tulemused liita.

Üksliikme ja hulkliikme korrutamise näited:

Nt: Üksliikme $-2x^2$ ja hulkliikme $8x^5 - x + 6$ **korrutis:**

$$-2x^2(8x^5 - x + 6) = -16x^7 + 2x^3 - 12x^2$$

$-2x^2 \cdot 8x^5 = -16x^7$
 $-2x^2 \cdot (-x) = 2x^3$
 $-2x^2 \cdot 6 = -12x^2$

Hulkliikme $4k^2 - 7l$ ja üksliikme $5kl^2$ **korrutis:**

$$(4k^2 - 7l) \cdot 5kl^2 = 20k^3l^2 - 35kl^3$$

$4k^2 \cdot 5kl^2 = 20k^3l^2$
 $-7l \cdot 5kl^2 = -35kl^3$

Reegel 2: Ühe hulkliikme iga liige tuleb korrutada teise hulkliikme iga liikmega ning tulemused liita.

Hulkliikmete korrutamise näited:

Nt: Hulkliikmete $2a - 3$ ja $a + 6$ **korrutis:**

$$(2a - 3)(a + 6) = 2a^2 + 12a - 3a - 18 = 2a^2 + 9a - 18$$

$2a \cdot a = 2a^2$
 $2a \cdot 6 = 12a$
 $-3 \cdot a = -3a$
 $-3 \cdot 6 = -18$

Hulkliikmete $4s - t$ ja $s^2 - 3s + 5t$ **korrutis:**

$$(4s - t)(s^2 - 3s + 5t) = 4s^3 - 12s^2 + 20st - s^2t + 3st - 5t^2 = 4s^3 - s^2t - 12s^2 + 23st - 5t^2$$

$-t \cdot s^2 = -s^2t$
 $-t \cdot (-3s) = 3st$
 $-t \cdot 5t = -5t^2$
 $4s \cdot s^2 = 4s^3$
 $4s \cdot (-3s) = -12s^2$
 $4s \cdot 5t = 20st$

HULKLIKMED

Tehted hulkliikmetega

JAGAMINE üksliikmega

Reegel: Kõik hulkliikme liikmed tuleb üksliikmega läbi jagada.

Hulkliikme üksliikmega jagamise näited:

Nt: Hulkliikme $-6x^3 + x^2 - 4x$ ja üksliikme $-2x$ jagatis:

$$(-6x^3 + x^2 - 4x) : (-2x) = 3x^2 - 0,5x + 2$$

$-6x^3 : (-2x) = 3x^2$

$x^2 : (-2x) = -0,5x^1 = -0,5x$

$-4x : (-2x) = 2x^0 = 2$

Hulkliikme $8x^5y^2 - 12x^3y^4 + 6x^4y^3$ ja üksliikme $4x^3y^2$ jagatis:

$$(8x^5y^2 - 12x^3y^4 + 6x^4y^3) : (4x^3y^2) = 2x^2 - 3y^2 + 1,5xy$$

$8x^5y^2 : (4x^3y^2) = 2x^2y^0 = 2x^2$

$-12x^3y^4 : (4x^3y^2) = -3x^0y^2 = -3y^2$

$6x^4y^3 : (4x^3y^2) = 1,5x^1y^1 = 1,5xy$

Hulkliikme $5a^2b - 10ab$ ja üksliikme $5ab$ jagatis:

$$\frac{5a^2b - 10ab}{5ab} = \frac{5a^2b}{5ab} - \frac{10ab}{5ab} = a - 2$$

$5a^2b : (5ab) = 1a^1b^0 = a$

$10ab : (5ab) = 2a^0b^0 = 2$

Hulkliikme $12s^3t^2 + 2s^2t^5 - 8s^5t^3$ ja üksliikme $4s^2t$ jagatis:

$$\frac{12s^3t^2 + 2s^2t^5 - 8s^5t^3}{4s^2t} = \frac{12s^3t^2}{4s^2t} + \frac{2s^2t^5}{4s^2t} - \frac{8s^5t^3}{4s^2t} = 3st + 0,5t^4 - 2s^3t^2 = -2s^3t^2 + 0,5t^4 + 3st$$

$12s^3t^2 : (4s^2t) = 3s^1t^1 = 3st$

$2s^2t^5 : (4s^2t) = 0,5s^0t^4 = 0,5t^4$

$8s^5t^3 : (4s^2t) = 2s^3t^2$

HULKLIKMED

Korrutamise abivalemid

KAHE ÜKSLEIKME SUMMA JA VAHE KORRUTIS

Valem: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Selgitus: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Nt: $(2a - 3b)(2a + 3b) = 4a^2 - 9b^2$

$(2a)^2 = 4a^2$ $(3b)^2 = 9b^2$

$(5x^2 + 2)(5x^2 - 2) = 25x^4 - 4$

$(5x^2)^2 = 25x^4$ $(2)^2 = 4$

$(4p + 7r^3)(4p - 7r^3) = 16p^2 - 49r^6$

$(4p)^2 = 16p^2$ $(7r^3)^2 = 49r^6$

$(s - 6)(s + 6) = s^2 - 36$

$(s)^2 = s^2$ $(6)^2 = 36$

KAKSLEIKME RUUT

Valem: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Selgitus: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Nt: $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

$(3x)^2 = 9x^2$ $2 \cdot 3x \cdot 2y = 12xy$ $(2y)^2 = 4y^2$

$(a^2 - 5)^2 = a^4 - 10a^2 + 25$

$(a^2)^2 = a^4$ $2 \cdot a^2 \cdot 5 = 10a^2$ $(5)^2 = 25$

$(7 - 4k)^2 = 49 - 56k + 16k^2$

$(7)^2 = 49$ $2 \cdot 7 \cdot 4k = 56k$ $(4k)^2 = 16k^2$

$(6s + s^3)^2 = 36s^2 + 12s^4 + s^6$

$(6s)^2 = 36s^2$ $2 \cdot 6s \cdot s^3 = 12s^4$ $(s^3)^2 = s^6$

$(t^2 + 8)^2 = t^4 + 16t^2 + 64$

$(t^2)^2 = t^4$ $2 \cdot t^2 \cdot 8 = 16t^2$ $(8)^2 = 64$

$(2p - 9)^2 = 4p^2 - 36p + 81$

$(2p)^2 = 4p^2$ $2 \cdot 2p \cdot 9 = 36p$ $(9)^2 = 81$

TEGURDAMINE

Hulkliikme **tegurdamine** tähendab selle korrutiseks teisendamist. Tegurdamisel alustatakse hulkliikmest, nt $12x^3 - 4x^2 + 8x$ ning tulemuseks saadakse korrutis, nt $4x \cdot (3x^2 - x + 2)$.

Teguri toomine sulgudest välja

Hulkliikme tegurdamisel tuleb alati **esimese asjana** kontrollida, kas on võimalik rakendada **sulgude ette toomist**. S.t. kas leidub mõni ühine tegur, mida saab tuua sulgude ette.

Sulgude ette toomise näited:

$$\begin{aligned} \text{Nt: } 12x^3 - 4x^2 + 40x &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot x \cdot (3 \cdot x \cdot x - x + 2 \cdot 5) = 4x(3x^2 - x + 10) \end{aligned}$$

$$6a^2b^2 + 8a^3 - 2a^2 = 2a^2(3b^2 + 4a - 1)$$

$6a^2b^2 : (2a^2) = 3a^0b^2 = 3b^2$

$8a^3 : (2a^2) = 4a^1 = 4a$

$-2a^2 : (2a^2) = -1a^0 = -1$

$$3k - 12l + 6m = 3(k - 4l + 2m)$$

$3k : 3 = k$

$-12l : 3 = -4l$

$6m : 3 = 2m$

$$7s^2 + 9s^5 = s^2(7 + 9s^3)$$

$7s^2 : s^2 = 7$

$9s^5 : s^2 = 9s^3$

$$4t - 8st = 4t(1 - 2s)$$

$4t : (4t) = 1$

$-8st : (4t) = -2s$

NB!

$(a - b) = -(b - a)$

Nt: $(4 - x) = -(x - 4)$

$(mn - 7n) = -(7n - mn)$

$(3u - v) = -(v - 3u)$

TEGURDAMINE

Ruutude vahe valem

Valem: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Ruutude vahe valemi kasutamise näited:

Nt:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{9b^2 = (3b)^2} \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 9b^2 - 4a^2 = (3b + 2a)(3b - 2a) \\
 \swarrow \quad \nearrow \\
 \boxed{4a^2 = (2a)^2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{49 = 7^2} \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 49 - x^2 = (7 + x)(7 - x) \\
 \swarrow \quad \nearrow \\
 \boxed{x^2 = x^2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{25k^2 = (5k)^2} \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 25k^2 - 81 = (5k + 9)(5k - 9) \\
 \swarrow \quad \nearrow \\
 \boxed{81 = 9^2}
 \end{array}$$

$$m^2 - 4n^2 = (m + 2n)(m - 2n)$$

$$25y^6 - x^2 = (5y^3 + x)(5y^3 - x)$$

$$16 - u^{10} = (4 + u^5)(4 - u^5)$$

$$p^2 + 36 \rightarrow \text{ei saa tegurdada}$$

(reaalarvude hulgal)

$$9 - 64t^4 = (3 + 8t^2)(3 - 8t^2)$$

$$24 - s^2 \rightarrow \text{ei saa tegurdada}$$

(täisarvude hulgal)

TEGURDAMINE

Kaksliikme ruudu valem

Valem: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

1. Kontrolli, kas hulkliige on kolmeliige
2. Leia kaks liiget, mis on millegi ruudud
3. Kontrolli, et kummagi ruudu ees ei ole miinusmärk
4. Kontrolli, kas kolmas liige on $2ab$

Kaksliikme ruudu valemi kasutamise näited:

Nt: $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

$$x^2 = x^2 \quad 10x = 2 \cdot x \cdot 5 \quad 25 = 5^2$$

$$k^2 - 12kl + 36l^2 = (k - 6l)^2$$

$$k^2 = k^2 \quad 12k = 2 \cdot k \cdot 6l \quad 36l^2 = (6l)^2$$

$$p^4 - 16p^2 + 64 = (p^2 - 8)^2$$

$$p^4 = (p^2)^2 \quad 16p^2 = 2 \cdot p^2 \cdot 8 \quad 64 = 8^2$$

$$4x^6 + 4x^3y + y^2 = (2x^3 + y)^2$$

$$4x^6 = (2x^3)^2 \quad 4x^3y = 2 \cdot 2x^3 \cdot y \quad y^2 = y^2$$

$$81 - 9t + t^2 \rightarrow \text{ei saa tegurdada}$$

$$81 = 9^2 \quad 9t \neq 2 \cdot 9 \cdot t \quad t^2 = t^2$$

$$4u^2 + 10u + 25 \rightarrow \text{ei saa tegurdada}$$

$$4u^2 = (2u)^2 \quad 10u \neq 2 \cdot 2u \cdot 5 \quad 25 = 5^2$$

$$56x + 16x^2 + 49 = (4x + 7)^2$$

$$56x = 2 \cdot 4x \cdot 7 \quad 16x^2 = (4x)^2 \quad 49 = 7^2$$

$$r^2 + 9s^2 - 6rs = (r - 3s)^2$$

$$r^2 = r^2 \quad 9s^2 = (3s)^2 \quad 6rs = 2 \cdot r \cdot 3s$$

$$36 - 12k - k^2 \rightarrow \text{ei saa tegurdada}$$

$$(\text{sest ruutliikme } k^2 \text{ ees on miinusmärk})$$

$$p^2 - 64 + 16p \rightarrow \text{ei saa tegurdada}$$

$$(\text{sest arvu ruudu } 64 \text{ ees on miinusmärk})$$

NB! $(a - b)^2 = (b - a)^2$

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

Nt: $(k - 6l)^2 = (6l - k)^2$

$$(-x - 5)^2 = (x + 5)^2$$

TEGURDAMINE

Ruutkolmliige

Ruutkolmliige on hulkliige, mille korrastatud kujul on esimesel kohal ruutliige.

Ruutkolmliikme üldkuju: $ax^2 + bx + c$

Nt: $2x^2 + 5x - 7$ $4x - 3x^2 + 6$ $6t^2 - 4t$ $19 + 8k^2$

Ruutkolmliiget on võimalik tegurdada järgmise valemiga: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Selles valemis kirjutatud x_1 ja x_2 on antud ruutkolmliikme **nullkohad**.

Ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ **nullkohad** on **võrrandi** $ax^2 + bx + c = 0$ **lahendid**.

Ruutkolmliikme tegurdamise näited:

Nt: $x^2 + x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

$$x^2 + x + 12 = 0 \rightarrow p = 1, \quad q = 12$$

Viete'i teoreemist:

$$x_1 + x_2 = -1 \quad x_1 x_2 = 12$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$4x^2 - 16x - 48 = 4(x - 6)(x + 2)$$

$$4x^2 - 16x - 48 = 0 \quad | :4$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$p = -4, \quad \frac{p}{2} = -2, \quad q = -12$$

$$\text{Taandatud ruutvõrrandi lahendivalem: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 12} = 2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm \sqrt{16} = 2 \pm 4$$

$$x_1 = 2 + 4 = 6 \quad x_2 = 2 - 4 = -2$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x - 0,5)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2)$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -2$$

$$\text{Lahendivalem: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$x_2 = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

ALGEBRALISED MURRUD

Definitsioon

Algebraalne murd on avaldis kujul $\frac{a}{b}$, kus a ja b on hulkliikmed või üksliikmed ning $b \neq 0$.

Nt: $\frac{5x}{7y+z}$ $\frac{7a^2+b-3c}{2(3b+c)}$ $\frac{8m^3n}{2mn^3}$ $\frac{s-t}{s+t}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{u-3v}{3v}$ $\frac{9x^3y}{x^2-2xy+6y^4}$

Taandamine

Algebraalse murru **taandamine** on murru lugeja ja nimetaja jagamine ühe ja sama nullist erineva avaldisega.

NB! Taandada saab ainult **tegurit**, s.t. avaldist, mis on **kogu ülejäänud lugejaga korrutatud** ja **kogu ülejäänud nimetajaga korrutatud**. Seega lugeja ja nimetaja peavad olema enne taandamist tegurdatud!

Nt: $\frac{x-6y}{3y} \leftarrow$ ei saa midagi taandada! $\frac{3(a-b)+4a}{a-b} \leftarrow$ ei saa midagi taandada!

$\frac{(x-1) \cdot 6y}{3y} \leftarrow$ saab taandada $3y$ $\frac{3(a-b)}{a-b} \leftarrow$ saab taandada $a-b$

Mõnikord saab algebraalist murdu kohe taandada.

Nt: $\frac{5\cancel{g}^g}{3\cancel{g}h^2} = \frac{5g}{3h^2}$ $\frac{1}{\frac{(m+n)(m-n)}{m+n}} = \frac{m-n}{1} = m-n$ $\frac{3\cancel{6x}^z}{4\cancel{8y}^6\cancel{z}^3} = \frac{3xz^4}{4y^6}$

Kui algebraalises murrus ei saa esialgu midagi taandada, siis peab **nii lugejat kui ka nimetajat tegurdama**, kui seda on võimalik teha. Võib juhtuda, et pärast tegurdamist saab taandada.

Nt: $\frac{4ab+a}{6ac} = \frac{1}{\cancel{a}(4b+1)} = \frac{4b+1}{6c}$ $\frac{3s-t}{t^2-6st+9s^2} = \frac{3s-t}{(t-3s)^2} = \frac{\cancel{3s-t}^1}{(\cancel{3s-t})^2} = \frac{1}{3s-t}$

$\frac{5u^2-45}{21+7u} = \frac{5(u^2-9)}{7(3+u)} = \frac{5\cancel{(u+3)}^1(u-3)}{7\cancel{(u+3)}^1} = \frac{5(u-3)}{7}$

$\frac{54x^2-6xy}{3y-27x} = \frac{6x(9x-y)}{3(y-9x)} = \frac{2\cancel{6x}^1\cancel{(9x-y)}^1}{\cancel{3}^1 \cdot (-1)\cancel{(9x-y)}^1} = \frac{2x}{-1} = -2x$

ALGEBRALISED MURRUD

Korrutamine

Algebraliste murdude korrutamise põhimõte on sama, mis harilike murdude korrutamisel – lugejad peab omavahel korrutama ja nimetajad omavahel korrutama.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Algebraliste murdude korrutamiseks:

- 1) **tegurda** mõlema murru lugejad ja nimetajad (kui seda on võimalik teha);
- 2) kirjuta **ühele murrujoonele** lugejate korrutis ja nimetajate korrutis;
- 3) **taanda** murdu (kui seda on võimalik teha);
- 4) kirjuta **vastus**.

$$\text{Nt: } \frac{s^2 t}{u^4} \cdot \left(-\frac{st^3}{uv} \right) = -\frac{s^2 t \cdot st^3}{u^4 \cdot uv} = -\frac{s^3 t^4}{u^5 v}$$

$$\frac{2x+2y}{9x} \cdot 27x^2 = \frac{2(x+y)}{9x} \cdot \frac{27x^2}{1} = \frac{2(x+y) \cdot \overset{3}{\cancel{27}} \overset{x}{\cancel{x^2}}}{\underset{1}{\cancel{9}} \underset{1}{\cancel{x}}} = \frac{6x(x+y)}{1} = 6x(x+y)$$

$$\frac{16-a^2}{a^2+6a+9} \cdot \frac{15+5a}{4-a} = \frac{(4+a)(4-a)}{(a+3)^2} \cdot \frac{5(3+a)}{4-a} = \frac{(4+a) \overset{1}{\cancel{(4-a)}} \cdot 5 \overset{1}{\cancel{(a+3)}}}{\underset{a+3}{\cancel{(a+3)^2}} \cdot \underset{1}{\cancel{(4-a)}}} = \frac{5(4+a)}{a+3}$$

$$-(6h-12) \cdot \frac{7g+3h}{8gh^2-32g} = \frac{-6(h-2)}{1} \cdot \frac{7g+3h}{8g(h^2-4)} = -\frac{\overset{3}{\cancel{6}} \overset{1}{\cancel{(h-2)}} \cdot (7g+3h)}{\underset{4}{\cancel{1}} \cdot \underset{1}{\cancel{8g(h+2)(h-2)}}} = -\frac{3(7g+3h)}{4g(h+2)}$$

$$\frac{3m-m^2}{m^2+25} \cdot \frac{8m+m^2+16}{m^2+m-12} = \frac{m(3-m)}{m^2+25} \cdot \frac{\overset{m+4}{\cancel{(m+4)^2}}}{\underset{1}{\cancel{(m-3)(m+4)}}} = \frac{-m \overset{1}{\cancel{(m-3)}} \cdot (m+4)}{\underset{1}{\cancel{(m^2+25)}} \cdot \underset{1}{\cancel{(m-3)}}} =$$

$$m^2 + m - 12 = 0 \quad \quad \quad = -\frac{m(m+4)}{m^2+25}$$

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -12$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$m_1 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad m_2 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Jagamine

Algebraliste murdude jagamise põhimõte on sama, mis harilike murdude jagamisel – **jagatava peab korrutama jagaja pöördväärtusega**.

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

$$\text{Nt: } -\frac{ab^3}{cd} : \left(-\frac{d^5}{a^2}\right) = \frac{ab^3 \cdot a^2}{cd \cdot d^5} = \frac{a^3b^3}{cd^6}$$

$$\frac{p^2 - 9q^2}{p^2} : (p + 3q) = \frac{(p + 3q)(p - 3q)}{p^2} : \frac{p + 3q}{1} = \frac{\overset{1}{(p + 3q)}(p - 3q) \cdot 1}{p^2 \cdot \underset{1}{(p + 3q)}} = \frac{p - 3q}{p^2}$$

$$12v : \frac{8uv^2 - 16v^2}{u^2 - 4u + 4} = \frac{12v}{1} : \frac{8v^2(u - 2)}{(u - 2)^2} = \frac{\overset{3}{12} \overset{1}{v} \overset{u-2}{(u-2)^2}}{\underset{2}{1} \cdot \underset{v}{8} \underset{1}{(u-2)^2}} = \frac{3(u - 2)}{2v}$$

Astendamine

Algebraliste murdude **astendamiseks**:

- 1) **tegurda** murru lugeja ja nimetaja (kui seda on võimalik teha);
- 2) **taanda** murdu (kui seda on võimalik teha);
- 3) rakenda **jagatise astendamise** valemit: $(a : b)^n = a^n : b^n$.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$\text{Nt: } \left(\frac{x^4}{2y^3z}\right)^5 = \frac{(x^4)^5}{(2y^3z)^5} = \frac{x^{20}}{32y^{15}z^5}$$

$$\left(-\frac{s^2 - 25}{st}\right)^8 = \left[-\frac{(s + t)(s - t)}{st}\right]^8 = (-1)^8 \cdot \frac{[(s + t)(s - t)]^8}{(st)^8} = \frac{(s + t)^8(s - t)^8}{s^8t^8}$$

$$\left(-\frac{3m + 9n}{m^2 + 6mn + 9n^2}\right)^3 = \left[-\frac{\overset{1}{3(m + 3n)}}{\underset{m + 3n}{(m + 3n)^2}}\right]^3 = (-1)^3 \cdot \frac{3^3}{(m + 3n)^3} = -\frac{27}{(m + 3n)^3}$$

ALGEBRALISED MURRUD

Laiendamine

Algebralise murru **laiendamine** on murru lugeja ja nimetaja **korrutamine** ühe ja sama nullist erineva avaldisega.

Nt: Laienda antud murdu avaldisega pr $\rightarrow \frac{3q}{pr^4} = \frac{3q \cdot \overbrace{pr}^{pr}}{pr^4 \cdot pr} = \frac{3pqr}{p^2r^5}$

Laienda antud murdu avaldisega $a+b$ $\rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b) \cdot \overbrace{(a+b)}^{a+b}}{(a-b) \cdot (a+b)} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

Laienda antud murdu avaldisega $2(m-3)$ $\rightarrow \frac{4}{m-3} = \frac{4 \cdot \overbrace{2(m-3)}^{2(m-3)}}{(m-3) \cdot 2(m-3)} = \frac{8(m-3)}{2(m-3)^2}$

Ühenimelisteks teisendamise

Algebraliste murrude ühenimelisteks teisendamiseks:

- 1) **tegurda** algsete murrude nimetajad ja võimalusel taanda murde;
- 2) kirjuta **ühisesse nimetajas** algsete murrude nimetajate **arvkordajate VÜK** ja kõik ülejäänud tegurid esimese murru nimetajast ning lisa sinna teise murru nimetajast need tegurid, mida seal veel pole;
- 3) leia **laiendajad** – need tegurid, mis on murrude nimetajatest puudu (laiendaja leidmiseks jaga ühine nimetaja algse murru nimetajaga);
- 4) **laienda** (sealhulgas lugejas ava sulud, aga nimetajas mitte).

Nt: Teisenda murrud $\frac{s-9}{4s^2-4}$ ja $\frac{st}{6s^2-6s}$ ühenimelisteks.

1) $\frac{s-9}{4s^2-4} = \frac{s-9}{4(s^2-1)} = \frac{s-9}{4(s+1)(s-1)}$ ja $\frac{st}{6s^3-6s^2} = \frac{1}{\cancel{6s^2}} \frac{st}{s(s-1)} = \frac{t}{6s(s-1)}$

2) ühine nimetaja: $12 \cdot (s+1)(s-1) \cdot s$ ehk $12s(s+1)(s-1)$

3) nimetajast $4(s+1)(s-1)$ on puudu $3s$ ja nimetajast $6s(s-1)$ on puudu $2(s+1)$

4) $\frac{s-9}{4(s+1)(s-1)} = \frac{(s-9) \cdot \overbrace{3s}^{3s}}{4(s+1)(s-1) \cdot 3s} = \frac{3s^2-27s}{12s(s+1)(s-1)}$

$$\frac{t}{6s(s-1)} = \frac{t \cdot \overbrace{2(s+1)}^{2(s+1)}}{6s(s-1) \cdot 2(s+1)} = \frac{2t(s+1)}{12s(s-1)(s+1)} = \frac{2st+2t}{12s(s-1)(s+1)}$$

ALGEBRALINE MURD

Liitmine ja lahutamine

Algebraliste murdude liitmise ja lahutamise põhimõte on sama, mis harilike murdude liitmisel ja lahutamisel.

Algebraliste murdude liitmiseks või lahutamiseks:

- 1) **tegurda** kõikide murdude lugejad ja nimetajad (kui seda on võimalik teha);
- 2) **taanda** algseid murde (kui seda on võimalik teha);
- 3) kui murrud ei ole ühenimelised, siis:
 - 3.1) leia murdudele **ühine nimetaja** ning kirjuta see uue murru nimetajaks;
 - 3.2) leia igale murrule **laiendaja**;
 - 3.3) **laienda** murrud;
- 4) kirjuta **lugejate summa või vahe** ühisele murrujoonele lugejaks;
- 5) saadud murru **lugejas ava kõik sulud** ning **koonda** sarnased liikmed;
- 6) **tegurda** saadud lugejat (kui seda on võimalik teha);
- 7) **taanda** vastust (kui seda on võimalik teha).

Näited:

ühise nimetaja leidmine: $\frac{s}{6t} + \frac{5v}{8s} - \frac{7}{24st} = \frac{\quad}{24st}$

laiendajate leidmine: $\frac{s}{6t} + \frac{5v}{8s} - \frac{7}{24st} = \frac{\quad}{24st}$

laiendamine: $\frac{s}{6t} + \frac{5v}{8s} - \frac{7}{24st} = \frac{s \cdot 4s + 5v \cdot 3t - 7 \cdot 1}{24st} = \frac{4s^2 + 15tv - 7}{24st}$

tegurdamine: $\frac{2}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a^2 + ab} = \frac{2}{(a-b)(a+b)} - \frac{1}{a(a+b)}$

ühise nimetaja leidmine: $\frac{2}{(a-b)(a+b)} - \frac{1}{a(a+b)} = \frac{\quad}{a(a-b)(a+b)}$

laiendajate leidmine: $\frac{2}{(a-b)(a+b)} - \frac{1}{a(a+b)} = \frac{\quad}{a(a-b)(a+b)}$

laiendamine: $\frac{2}{(a-b)(a+b)} - \frac{1}{a(a+b)} = \frac{2 \cdot a - 1 \cdot (a-b)}{a(a-b)(a+b)} =$

sulgude avamine, koondamine: $= \frac{2a - a + b}{a(a-b)(a+b)} = \frac{a + b}{a(a-b)(a+b)}$

taandamine: $\frac{\frac{1}{\cancel{a+b}}}{a(a-b)\cancel{(a+b)}} = \frac{1}{a(a-b)}$

ALGEBRALINE MURD

Liitmine ja lahutamine

Näited:

tegurdamine, taandamine:
$$\frac{a}{a-2b} + \frac{2a+4b}{a^2-4b^2} = \frac{a}{a-2b} + \frac{\overset{1}{2(a+2b)}}{(a-2b)\underset{1}{(a+2b)}} = \frac{a}{a-2b} + \frac{2}{a-2b}$$

liitmine:
$$\frac{a}{a-2b} + \frac{2}{a-2b} = \frac{a+2}{a-2b}$$

tegurdamine:
$$a - \frac{2ab-b^2}{a} = \frac{a}{1} - \frac{b(2a-b)}{a}$$

ühise nimetaja leidmine:
$$\frac{a}{1} - \frac{b(2a-b)}{a} = \frac{\quad}{a}$$

laiendajate leidmine:
$$\frac{\overset{\vee a}{a}}{1} - \frac{b(2a-b)\overset{\vee 1}{1}}{a} = \frac{\quad}{a}$$

laiendamine, sulgude avamine:
$$\frac{\overset{\vee a}{a}}{1} - \frac{b(2a-b)\overset{\vee 1}{1}}{a} = \frac{a \cdot a - b(2a-b) \cdot 1}{a} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a}$$

tegurdamine:
$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} = \frac{(a-b)^2}{a}$$

tegurdamine, taandamine:
$$\frac{x+3}{x^2-9} + \frac{6}{3-x} = \frac{\overset{1}{x+3}}{(x-3)\underset{1}{(x+3)}} + \frac{6}{3-x} = \frac{1}{x-3} + \frac{6}{3-x}$$

ühine nimetaja ja laiendajad:
$$\frac{\overset{\vee 1}{1}}{x-3} + \frac{6\overset{\vee -1}{-1}}{3-x} = \frac{\quad}{x-3}$$

laiendamine, liitmine:
$$\frac{\overset{\vee 1}{1}}{x-3} + \frac{6\overset{\vee -1}{-1}}{3-x} = \frac{1 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)}{x-3} = \frac{1-6}{x-3} = -\frac{5}{x-3}$$

RATSIONAALAVALDISED

Lihtsustamine

Mitmetehtelise avaldise lihtsustamiseks:

1. määra **tehete järjekord!**
2. **kirjuta uuele reale** eraldi välja ainult esimene tehe;
3. kui on võimalik, siis **tegurda** mõlema murru lugejad ja nimetajad ning seejärel, kui on võimalik, siis **taanda** murde;
4. **soorita tehe**, nii nagu seda tehet tegema peab (nt leia ühine nimetaja, jagaja pöördväärtus vms);
 - **kui tegemist on liitmise või lahutamisega**, siis:
 1. vii tehe ühele murrujoonele (leia ühine nimetaja ja laiendajad ning laienda)
 2. ava lugejas kõik sulud; (NB! nimetajaga ära tee midagi, see jääb lihtsalt samaks!)
 3. koonda sarnased liikmed;
 4. kui on võimalik, siis tegurda lugejat;
 5. kui on võimalik, siis taanda;
 - **kui tegemist on korrutamise, jagamise või astendamisega**, siis:
ära ava ühtegi sulgu, ei lugejas ega ka nimetajas;
5. **kirjuta uuele reale** välja järgmine tehe;
6. korda samme **3.** – **5.** nii mitu korda kui vaja, et kõik tehted saaksid tehtud;
7. **kirjuta lõppvastus** algse esimese rea lõppu.

RATSIONAALAVALDISED

Lihtsustamine

Näited:

$$1. \frac{1}{a+b} + \frac{b^2}{a^2-b^2} : \frac{ab}{a-b} = \frac{1}{a}$$

$$1) \frac{b^2}{(a-b)(a+b)} : \frac{ab}{a-b} = \frac{\overset{b}{\cancel{b^2}} \cdot \overset{1}{\cancel{(a-b)}}}{\underset{1}{\cancel{(a-b)}}(a+b) \cdot \underset{1}{\cancel{ab}}} = \frac{b}{a(a+b)}$$

$$2) \frac{\overset{\vee a}{1}}{a+b} + \frac{b}{a(a+b)} = \frac{1 \cdot a + b}{a(a+b)} = \frac{\overset{1}{\cancel{a+b}}}{a \underset{1}{\cancel{(a+b)}}} = \frac{1}{a}$$

$$2. \left(\frac{6a}{6a^2+12a-18} + \frac{5}{4a+12} \right) \cdot \frac{a^2+6a+9}{a+3} = \frac{9a-5}{6(a-1)}$$

$$1) \frac{\overset{1}{\cancel{6a}}}{\underset{1}{\cancel{6(a-1)(a+3)}}} + \frac{5}{4(a+3)} = \frac{\overset{\vee 4}{a}}{(a-1)(a+3)} + \frac{\overset{\vee a-1}{5}}{4(a+3)} = \frac{a \cdot 4 + 5 \cdot (a-1)}{4(a-1)(a+3)} = \frac{4a + 5a - 5}{4(a-1)(a+3)} =$$

$$6a^2 + 12a - 18 = 0 \quad | :6 \qquad \qquad \qquad = \frac{9a-5}{4(a-1)(a+3)}$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$a_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad a_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$2) \frac{9a-5}{4(a-1)(a+3)} \cdot \frac{\overset{a+3}{\cancel{(a+3)^2}}}{\underset{1}{\cancel{a+3}}} = \frac{(9a-5) \cdot \overset{1}{\cancel{(a+3)}}}{4(a-1)\underset{1}{\cancel{(a+3)}}} = \frac{9a-5}{4(a-1)}$$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Maret Tark,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Põhikooliõpilastele harilike ja algebraliste murdude käsiraamatu loomine ning õpetajate ja õpilaste tagasiside loodud käsiraamatule“, mille juhendaja on Kerli Orav-Puurand, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada Tartu Ülikooli digitaalarhiivi kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
2. annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi kaudu Creative Commons litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
3. olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Maret Tark
19.05.2026