Tehniline korrektor M. Bekker.

Trükikoda Ed. Bergmann, Tartus.

Ed. Tamm.
I a kl.

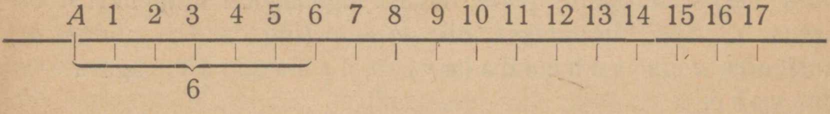
I osa.

Algebraline sümboolika.

§ 1. Arvjoon.

Et ülesandeid lahendada, tuleb teha antud suurustega mitmesuguseid tehteid. Antud suurused võivad avaldatud olla kas numbritena või tähtedena. Numbrid kujutavad loomulikku arvurida, kuna tähtede all mõistetakse teatavat arvu, kas antut või otsitavat, selles loomulikus arvureas.

Arvusid kui ka loomulikku arvurida võime kujutada enesele sirgjoonena selle läbi, et ühest teatavast sirgjoone punktist A (alguspunktist ehk nullpunktist) loeme paremale poole võrdsete lõikude ehk mõõtühikute kaupa:



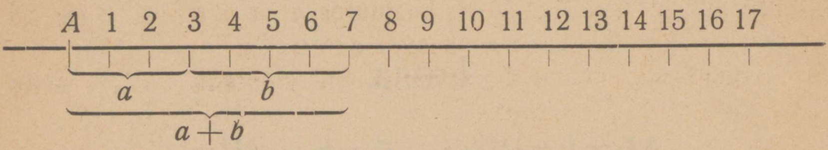
Kaugust alguspunktist mõõtühikusega lugedes saame joone, mis kujutab arvu. Saadud joon on arvjoon. Säärasel viisil arvude kujutamist joonte abil nimetatakse graafiliseks arvude kujutamiseks.

Tehted arvjoonel.

a) Liitmine.

Kui loeme arvjoonel alguspunktist enne 3 mõõtühikust paremale poole ja pärast seda veel 4 mõõtühikust edasi, siis saame arvjoonel punkti juurde, mis kujutab arvu 7. Saadud arv ei olegi muud kui 3 ja 4 summa.

Et liita arv a arvuga b, tuleb arvjoonel a mõõtüksusele juurde lugeda b mõõtüksust. Saadus kujutab a ja b summat.



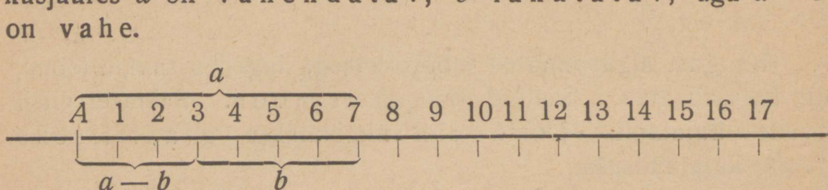
Olgu tähendatud, et iga tehe tähendatakse ise-tehtemärgiga, mis antud arvude või suuruste vahele kirjutatakse. Nii on liitmise märgiks $+$; a ja b summa on

$$a + b.$$

b) Lahutamine.

Kui loeme liitmisel saadud 7 üksusest 4 mõõtüksust vasakule poole tagasi, siis saame arvjoonel punkti, mille kaugus alguspunktist on 3 mõõtüksust ja mis kujutab enesest arvu 3, mis muud ei olegi kui 7 ja 4 vahe: $7 - 4 = 3$. Sellega oleme toimetanud arvjoonel lahutamistehte.

Et arvust a lahutada arv b, tuleb arvjoonel a üksusest nii mitu üksust vasakule poole tagasi lugeda, kui mitu üksust on arvus b. See kirjutatakse nii: $a - b$ (lugeda: a miinus b), kusjuures a on v ä h e n d a t'a v, b l a h u t a t a v, aga $a - b$ on v a h e.

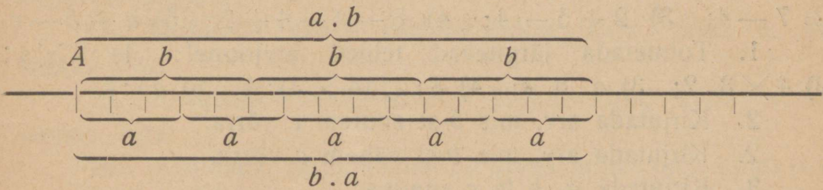


Liitmist ja lahutamist kõrvu seades näeme, et nimetatud tehted on vastupidised tehted, sest et ühe tehte juures on antud arv, mida teise tehte juures otsitakse. Seega on lahutamine tehe, kus antud summa ja ühe liidetava abil otsitakse teist liidetavat.

c) Korrutamine.

Arvuga a korrutada arvu b tähendab võtta b liidetavana nii mitu korda, kui mitu ühelist on arvus a. Korrutamist märgitakse nii: $a \,.\, b$ (a korda b), kusjuures a on korrutaja, b korrutatav arv, kuna $a \,.\, b$ on korrutis.

Graafiliselt võime korrutamist nii kujutada: Olgu tarvis leida a (3) ja b (5) korrutis:



Joonisel näeme, et korrutis $a \,.\, b$ võrdub korrutisega $b \,.\, a$ Nii siis on võimalik arvjoone abil mitte üksi tehteid arvutada, vaid ka tehte omadusi selgitada.

d) Jagamine.

Kui me korrutamisel saadud lõigu ab jagame b ossa, siis saame igasse ossa lõigu a. Siit on näha, et jagamine ja korrutamine on vastupidised tehted, sest korrutamisel otsitakse arvu ehk suurust, mis jagamise korral on antud. Seega on jagamine tehe, kus antud korrutise ja ühe teguri abil otsitakse teist tegurit. Jagamist märgitakse nii: $a : b$ ehk $\frac{a}{b}$, kusjuures a on jagatav, b — jagaja, aga $a : b$ ehk $\frac{a}{b}$ on jagatis.

e) Algebralised avaldused.

Suuruste märkimiseks võetakse harilikult tähed ladina keele tähestikust, kusjuures tähestiku esimesed tähed a, b, $c \ldots e$ jne. võetakse antud ehk teatud suuruste märkimiseks, kuna lõputähtedega x, y, z jne. märgitakse otsitavaid ehk tundmatuid suurusi.

Suuruste kogu, mis on avaldatud tähtede ja numbritega ja ühendatud tehtemärkidega, nimetatakse algebraliseks avalduseks. Iga avaldus on mõne liht- või liit-tehte saadus. Selle järele on ka lihtavaldus liht-tehte, liitavaldus aga liit-tehte saadus. Lihtavaldused on $a+b$, $a-b$, ab, $a:b$ kui ka a, 3 jne., kuna avaldused $a-b+c$, abc, $\frac{2ab}{c}$, $\frac{a}{c+d}$ on liitavaldused.

1. Toimetada järgnevad tehted arvjoonel: 1) $2+4+5$; 2) $7-4$; 3) $2+5-4$; 4) $8-3-4+2$; 5) $a+b-c$.

1. Toimetada järgnevad tehted arvjoonel: 1) 2×4; 2) 4×3.2; 3) $a.b.c$; 4) $8:2$; $(4\times3):4$; 5) $ab:c$.

2. Kirjutada arv, mis b-st suurem c võrra.

2. Kirjutada arv, mis b-st vähem c võrra.

3. Kirjutada a, b ja c summa.

3. Kirjutada x, y ja z summa.

4. Kirjutada c ja d korrutis.

4. Kirjutada jagatis, mis saadud c jagamisest d-ga.

5. Kirjutada b ja c korrutise ning arvu a summa.

5. Kirjutada vahe arvu a ning b ja c korrutise vahel.

6. Kirjutada $^3/_4$, a, b ja c korrutis.

6. Kirjutada $^5/_8$, x, y ja z korrutis.

7. Kirjutada jagatis, mis saadud b ja c korrutise jagamisest m-ga.

7. Kirjutada jagatis, mis saadud n jagamisest p ja q korrutisega.

8. Kirjutada arvu a ja 2 jagamisest b-ga saadud jagatise summa.

8. Kirjutada arvu a ja b jagamisest 2-ga saadud jagatise vahe.

9. Kirjutada a-st m korda suurem arv.

9. Kirjutada b-st m korda vähem arv.

10. Kahe arvu summa on s; üks arvudest on a. Leida teine.

10. Kahe arvu vahe on d; lahutatav on b. Leida vähendatav.

11. Avaldada arv, mis, jagatult 2-ga, annab jagatises n.

11. Kirjutada üldine paarisarvude kuju.

12. Avaldada arv, mis, jagatult 3-ga, annab jagatises m.

12. Avaldada arv, mis on arvu 3 kordne.

13. Avaldada arv, mis, jagatult 2-ga, annab jagatises *n* ning jäägis 1.

13. Kirjutada üldine paarita arvude kuju.

14. Kirjutada nende arvude üldine kuju, mis jagatult 3-ga annavad jäägis 1.

14. Kirjutada nende arvude üldine kuju, mis jagatult 3-ga annavad jäägis 2.

15. Kirjutada nende arvude üldine kuju, mida ei saa jagada 5-ga.

15. Kirjutada nende arvude üldine kuju, mida ei saa jagada 7-ga.

16. Avaldada, mitu ühelist on arvus, milles on *a* kümnelist.

16. Avaldada, mitu ühelist on arvus, milles on *b* sajalist.

17. Mitu ühelist sisaldab arv, milles on *a* kümnelist ja *b* ühelist?

17. Mitu ühelist sisaldab arv, milles on *a* sajalist ja *b* ühelist?

18. Mitu ühelist on arvus, milles on *x* sajalist, *y* kümnelist ja *z* ühelist?

18. Avaldada arv, milles on samad numbrid *x*, *y* ja *z* (vaata eelmine ülesanne), kuid vastupidises järjes.

19. Avaldada arv, milles on *a* tuhandelist, *b* sajalist, *c* kümnelist ja *d* ühelist.

19. Avaldada arv, milles on samad numbrid *a*, *b*, *c* ja *d* (vaata eelmine ülesanne), kuid vastupidises järjes.

20. Mitu ööd-päeva on *a* kuus ja *b* öös-päevas?

20. Mitu ööd-päeva on *a* nädalas ja *b* päevas?

21. Mitu solotnikku on *x* naelas, *y* loodis ja *z* solotnikus?

21. Mitu tolli on *a* süllas, *b* arssinas, *c* jalas ja *d* tollis?

§ 2. **Valem.**

Kahe avalduse ühendust võrdsusmärgiga nimetatakse v õ r d u s e k s; näit.: $a+b=b+a$. Kahe avalduse ühendust võrratusmärgiga nimetatakse v õ r r a t u s e k s; näit.: $ab>a+b$. Niihästi võrdusi kui ka võrratusi nimetatakse valemiks. Avaldust, mis seisab eespool võrdsus- ehk võrratusmärki, nimetatakse valemi esimeseks ehk pahempoolseks osaks, osa aga, mis tagapool märki seisab, valemi teiseks ehk parempoolseks osaks. Näiteks: valemis $ab > a + b$ on osa ab esimene ehk pahempoolne, aga $a + b$ teine ehk parempoolne osa.

Iga valem avaldab antud suuruste vahel teatavat vahekorda. Valem on nii-ütelda matemaatiline lause, kirjutatud matemaatilises keeles. Et seada kokku valem, selleks tuleb antud vahekord avaldada sellekohaste tehtemärkidega, jagades antud suurused kahte ossa ja viimaste vahele panna kas võrdsus- või võrratusmärk.

Avaldada suuruste vahel matemaatiliste märkidega järgnevad vahekorrad:

22. a ja b summa on nende vahest suurem.

22. c ja d vahe on nende summast vähem.

23. a ja b summa võrdub c ja d korrutisega.

23. a ja b vahe võrdub c ja d jagatisega.

24. a ja b jagatis on samade arvude poolsummast vähem.

24. a ja b poolsumma on samade arvude jagatisest vähem.

25. a jagamisest b-ga ja b jagamisest a-ga saadud jagatiste summa on 2-st suurem.

25. 2 on vähem a jagamisest b-ga ja b jagamisest a-ga saadud jagatiste summast.

26. a on b-st suurem c võrra.

26. a on b-st vähem c võrra.

27. a on b-st suurem 10 korrda.

27. a on b-st vähem 7 korda.

28. a on suurem b ja c korrutisest d võrra.

28. a on vähem b ja c korrutisest d võrra.

29. Kui arvu, milles a kümnelist ja b ühelist, liita m-ga, siis saame arvu samade numbritega, kuid vastupidises järjes.

29. Kui arvust, milles c sajalist, b kümnelist, a ühelist, lahutada n, siis saame arvu samade numbritega, kuid vastupidises järjes.

30. Kaup on ostetud a marga eest, müüdud b marga eest ja kasu saadud c marka. Avaldada arvude a, b ja c vahekord.

30. Kaup osteti m marga eest ja müüdi n marga eest, kusjuures p marka kahju saadi. Avaldada arvude m, n ja p vahekord.

31. Reisija sõitis m päevaga ära n km, sõites iga päev d km. Avaldada arvude m, n ja d vahekord.

31. d marga eest on ostetud a naela kaupa, mille naelast maksti c marka. Avaldada arvude a, c ja d vahekord.

32. Vanemal vennal on a marka, nooremal b marka. Kui vanem annaks nooremale c marka, siis oleks mõlemil ühepalju raha. Kirjutada võrdus.

32. Kellelgi on paremas taskus m marka, pahemas n marka. Kui ta paneks paremast pahemasse p marka, siis oleks mõlemas taskus ühepalju raha. Kirjutada võrdus.

33. a-margaline kapital toob aastas p protsendiga c marka kasu. Avaldada a, p ja c vahekord.

33. m-margaline veksel oodustatakse äriliselt k %-ga 1 aasta enne tähtaega. Oodus on r marka. Avaldada m, k ja r vahekord.

34. a-margaline kapital toob 8 kuu jooksul b %-ga c marka kasu. Avaldada a, b, 8 ja c vahekord.

34. m-margaline veksel oodustatakse äriliselt p %-ga 5 kuud enne tähtaega. Oodus on r marka. Avaldada m, p, 5 ja r vahekord.

§ 3. Astmenäitaja tarvitamine.

Kui mingit teatavat arvu võetakse tegurina mõni kord, siis kirjutatakse säärase korrutamise lihtsustamiseks korduv tegur üks kord, kuna paremale poole üles märgitakse tegurite arv; näit., 3.3.3.3 asemel kirjutatakse 3^4 (loe: kolm neljandal astmel). Ühesuguste tegurite korrutist nimetatakse a s t m e k s, korduvat tegurit a s t m e a l u s e k s, aga arvu, mis näitab korduvate tegurite hulka, nimetatakse a s t m e n ä i t a j a k s. Nii on avalduses 3^4 arv 3 alus, 4 — astmenäitaja ja kõik korrutis 3^4, mis võrdub 81-ga, on aste.

Astmeid jagatakse astmenäitaja suuruse järele: iga arv ilma astmenäitajata on sama arv esimesel astmel; näit. a ehk a^1 on a esimesel astmel. 5^2 on 5 teisel astmel, 7^3 on 7 kolmandal astmel; üldse loetakse avaldust a^n nii: a n-astmel. Teist astet nimetatakse veel r u u d u k s ja kolmandat k u u b i k s; näit. 3^2 loetakse 3 teisel astmel ehk ruudus, m^3 loetakse m kolmandal astmel ehk kuubis.

Lihtsustada avaldused:

35. $a.a.a$ $= a^3$
36. $a.a.b.b.b$
37. $2.2.2.2.2$ $= 2^5$
38. $p.p.p.q.q.q.q$
39. $3.k.k.l.l$ $= 3 \cdot k^2 l^2$
40. $4.4.4.a.a.a.a$
41. $a.a.b+a.b.b$ a^2b+ab^2
42. $a.a.a.b+a.b.b.b$
43. $p.p.p.q-p.p.q.q+2p.q.q.q$
44. $3.a.a.a.a.b.b.b-2.2.a.a.a.b.b.b.b$
45. $a.a.a.a$ (m korda). a^m

Seletada avalduste tähendus ja kirjutada nad ilma astmenäitajateta:

46. 2^3 **47.** 5^2 **48.** m^3 **49.** m^2n^3
50. $a^3b^3c^2$ **51.** $3^2a^6b^2$ **52.** $2^4k^2f^3n^2$ **53.** a^2+b^2
54. a^3-b^3 **55.** $3a^4+2b^5$ **56.** a^m

Leida astmete arvsuurused:

57. 2^3 **58.** 4^3 **59.** 5^2 **60.** 10^2
61. 20^3 **62.** 400^2 **63.** $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ **64.** $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
65. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **66.** $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ **67.** $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$ **68.** $\left(3\frac{2}{3}\right)^2$
69. $(0,2)^2$ **70.** $(0,4)^3$ **71.** $(1,1)^2$ **72.** $(2,5)^2$
73. $0,001^2$ **74.** $0,025^3$

Kirjutada järgnevad avaldused:

75. a ja b ruutude summa.
75. p ja q ruutude vahe.
76. c ja d kuupide korrutis.
76. r ja s kuupide jagatis.
77. p ja q n-astmete vahe.
77. a ja b n-astmete summa.

78. r ja s n-astmete jagatis.

78. c ja d n-astmete korrutis.

79. x, y ja z viiendate astmete summa.

79. x, y ja z viiendate astmete korrutis.

80. a, b, c ja d m-astmete korrutis.

80. a, b, c ja d m-astmete summa.

81. Keegi kulutab iga päev ära 7 marka. Kui palju kulutab ta ära 7 nädala jooksul?

81. Mitu tähte on raamatus, milles 20 lehekülge, kui igal leheküljel 20 rida ja igas reas 20 tähte?

82. Keegi andis mõisa rendile tingimusega, et esimesel aastal maksab rentnik a marka, igal järgneval aastal aga r korda rohkem kui eelmisel. Kui palju maksab rentnik 5-nda aasta eest?

82. 5 aasta jooksul saadi igast mahakülvatud rukkisetverdist s setverti. Mitu setverti saadi rukkeid viiendal aastal, kui esimesel aastal oli külvatud b setverti?

83. Poolitati sirgjoon, kumbki pool poolitati jälle omakord, iga veerand jälle jne. Mitmeks osaks jagunes sirgjoon, kui säärast poolitamist toimetati n korda? Kui pikk on iga osa, kui sirgjoone pikkus on a?

83. Sirgjoon on jagatud 3 ühesuurusesse ossa, iga saadud osa jälle 3 ühesuurusesse ossa jne. Mitmeks osaks jagunes sirgjoon, kui säärast jagamist toimetati x korda? Kui pikk on iga osa, kui sirgjoone pikkus on b?

84. Keegi segas ühe tilga piiritust a tilga veega, siis ühe tilga saadud segu jälle a tilga veega jne.; nii toimetas ta 6 korda. Leida, mitmeks osaks jagunes nõnda tilk piiritust ja kui palju on piiritust viimase segu m tilgas.

84. 1 gramm arstirohtu segatakse n g veega, siis 1 g saadud segu uuesti n g veega, ja nõnda toimetatakse 8 korda. Leida, mitmesse ossa jaguneb 1 g rohtu ja kui palju on rohtu viimase segu b grammis.

§ 4. Juuremärgi tarvitamine.

Kui mõni arv, näit. 8, kujutab enesest ühesuguste tegurite korrutist, millede arv antud, näit. 3, siis tarvitatakse teguri, antud korral arvu 2, tähendamiseks märki $\sqrt{\ }$, mida nimetatakse juuremärgiks. Antud korrutis kirjutatakse paremal pool märki rõhtjoone alla ja nimetatakse juurealuseks ehk juuritavaks arvuks. Märgi nurga peale kirjutatakse tegurite arv, mida nimetatakse juurenäitajaks, aga kõik see kokku on teguri avaldus, mida nimetatakse juureks.

Näiteks: $\sqrt[3]{8}$ on kolmanda astme juur 8-st ja võrdub 2-ga.

Juured jagatakse juurenäitaja suuruse järgi; näit. avaldus $\sqrt[2]{25}$ näitab 2-se astme juurt ehk ruutjuurt 25-st, avaldus $\sqrt[3]{27}$ näitab 3-nda astme juurt 27-st jne. Üldse $\sqrt[n]{a}$ näitab n-astme juurt a-st. Ruutjuure tähendamisel jäetakse ära juurenäitaja. Järjelikult $\sqrt{25}=5$, $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[4]{16}=2$, sellepärast et $5^2=25$, $3^3=27$, $2^4=16$.

Järgnevad arvud lahutada kaheks võrdseks teguriks:

85. 4 **86.** 25 **87.** 16 **88.** 64

Lahutada kolmeks võrdseks teguriks:

89. 8 **90.** 125 **91.** 343 **92.** 1000

Lahutada neljaks võrdseks teguriks:

93. 16 **94.** 625 **95.** 1296 **96.** $\frac{256}{625}$

Leida juured:

97. $\sqrt{9}$ **98.** $\sqrt[3]{27}$ **99.** $\sqrt[3]{343}$ **100.** $\sqrt{400}$

101. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **102.** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ **103.** $\sqrt{2^4}$ **104.** $\sqrt[3]{27^2}$

105. $\sqrt{\frac{64}{81}}$ **106.** $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$ **107.** $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ **108.** $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

109. $\sqrt{0{,}09}$ **110.** $\sqrt[3]{0{,}008}$ **111.** $\sqrt[3]{0{,}125}$ **112.** $\sqrt{a^2}$

113. $\sqrt[5]{b^5}$ **114.** $\sqrt[4]{b^8}$

§ 5. Kordaja ehk koeffitsient.

Kui mingisugune avaldus võetakse liidetavaks või lahutatavaks mitu korda, siis kirjutatakse avaldus lüheduse pärast üks kord ja tema ette kirjutatakse tegurina arv, mis näitab, mitu korda on tähendatud avaldus kordunud liidetavana või lahutatavana. Seda arvu nimetatakse kordajaks (koeffitsiendiks). Näit.: $a+a+a$ asemel $3a$, kus 3 on kordaja. Kordaja üldse on arvtegur tähelise avalduse ees. Kordaja kirjutatakse kõikide tegurite ette; näit. $a.b.8.c$ asemel kirjutatakse $8abc$.

Murruline kordaja näitab, et avaldusest tuleb võtta see osa, mida näitab nimetaja, liidetavaks või lahutatavaks nii mitu korda, kui mitu ühelist on lugejas. Näit.: $b-\frac{3}{4}a$ on lühendatud avaldusest $b-\frac{a}{4}-\frac{a}{4}-\frac{a}{4}$; $\frac{5}{7}a^2b$ on lühendatud avaldusest $\frac{a^2b}{7}+\frac{a^2b}{7}+\frac{a^2b}{7}+\frac{a^2b}{7}+\frac{a^2b}{7}$.

Lihtsustada avaldused:

115. $a+a$

116. $ab+ab+ab$

117. a^2b+a^2b

118. $a+a-c-c-c$

119. $\frac{b}{5}+\frac{b}{5}+\frac{b}{5}+\frac{b}{5}$

×**120.** $\frac{m+m+m}{n+n}$

×**121.** $lll+lll+lll$

×**122.** $p+p-ppp$

×**123.** $abb+abb+abb-aab-aab$

×**124.** $x^2+x^2+x^2+\frac{xy}{4}+\frac{xy}{4}+\frac{xy}{4}$

×**125.** $\frac{xxy+xxy+xxy}{zz+zz}$

×**126.** $\frac{mmmm+mmmm+mmmm}{fff+fff+fff+fff}$

Kirjutada ilma kordajateta:

127. $4ab$

128. $\frac{4a^2b}{3}$

129. $3b+2c$

130. $5mn-2pq$

131. $4b^3+3a^4$

132. $2a^3b^2-7a^5b^3$

Kirjutada ilma kordajateta ja astmenäitajateta:

133. $3a^2$

134. $5a^4$

135. $2b^3c$

136. $3b^2c^3$

137. $2a^3+b^2$

138. $3a^2-2b^3$

139. $3a^2bc+2ab^2c-3c$

×**140.** $\frac{4}{5}a^2bc-\frac{2}{3}ab^2c+2abc^3$

§ 6. Sulgude tarvitamine.

Sagedasti on tarvis mõnda tehet teisest ennemini arvutada või tehete järjekorda muuta; siis tuleb tarvitada isesuguseid märke, mida nimetatakse sulgudeks.

Sulud jagunevad oma kuju poolest kolme liiki: (), [] ja {}. Esimest paari märke nimetatakse ümmargusteks sulgudeks, teist paari — nurgelisteks ja kolmandat paari — loogelisteks sulgudeks. Kui on tarvis näidata, et üks tehe tuleb enne teist tehet arvutada, siis tuleb tehe, mis ennemini arvutatakse, ümmargustesse sulgudesse võtta. Näit. $(a+b)c$ tähendab, et esmalt tuleb a ja b liita ning saadud summa korrutada c-ga. Kui on näidatud kolm liht-tehet, mida teatavas kindlas järjekorras peab arvutama, siis tuleb tarviduse korral ka nurgelisi sulgusid tarvitada. Näit.: $[(a+b)c]^n$ tähendab, et enne tuleb leida a ja b summa, saadud summa tuleb siis korrutada c-ga ja korrutis võtta n-astmel. Kui on tarvis rohkem tehteid kindlas järjekorras toime panna, siis tuleb vahel tarvitada ka loogelisi sulgusid. Näit.: $\{[(a+b)c+d]k\}^n$ tähendab, et enne tuleb a ja b summa leida, saadud summa korrutada c-ga, korrutis liita d-ga ja uus summa korrutada k-ga ning saadud korrutis võtta n-astmel.

Sulgusid ei tarvitata juhusel, kui avaldus sulgudeta oma väärtust ei muuda. Näit.: selle asemel, et kirjutada $[(a+b)+ +c]+d$, võib kirjutada $a+b+c+d$. Samuti tuleb $(ab)c$ asemel kirjutada abc.

Sulgude asemel tarvitatakse vahel rõhtjoont, iseäranis jagamise ja juurimise korral. Näiteks: et $a+b^2$ jagada $c+d$-ga, võib kirjutada sulgusid tarvitades nii: $(a+b^2):(c+d)$ ehk sulgude asemel rõhtjoont tarvitades $\frac{a+b^2}{c+d}$. Samuti tuleb rõhtjoont tarvitada, kui tuleb mõnd avaldust, näit. $a+b$, juurida. Et tähendatud avaldusest leida kolmanda astme juurt, siis kirjutatakse nii: $\sqrt[3]{a+b}$.

Seletada avalduste tähendus:

141. $a + b \,.\, c$

142. $(a + b) \,.\, c$

143. $a - (b + c)$

144. $(a - b) + c$

145. $(a - b) + (c - d)$

146. $3(a + b) - 2ab$

147. $5ab + 3(c - d)$

148. $(a + b)\, c - d$

149. $a + b(c - d)$

150. $(a + b)\,(c - d)$

151. $(a - b)^2$

152. $a^2 - b^2$

153. $2a^3$

154. $(2a)^3$

155. $\left(\frac{3}{4}a\right)^2$

156. $\frac{3}{4}a^2$

157. $3(x + y)^2$

158. $(3x + y)^2$

159. $3x + y^2$

160. $[3(x + y)]^2$

161. $\sqrt{a^3 - b^3}$

162. $\sqrt{(a - b)^3}$

163. $\sqrt[3]{a^4 + b^4}$

164. $\sqrt[3]{(a + b)^4}$

165. $\sqrt[3]{(ab)^4}$

166. $\sqrt[3]{2(x + y)}$

167. $\sqrt[3]{2x + y}$

168. $\sqrt[4]{3xy}$

169. $(a - b)\, c + dm$

170. $a - bc + dm$

171. $[(a - b)\, c + d]m$

172. $[a - b\,(c + d)]m$

173. $p^3 + 2m + n^3$

174. $p^3 + (2m + n)^3$

175. $(p + 2m + n)^3$

176. $[p + 2\,(m + n)]^3$

177. $[(m^2 + n^2) : (p - q)] \,.\, r - s$

178. $[(m^2 + n^2) : p - q] \,.\, r - s$

179. $m^2 + n^2 : [(p - q) \,.\, r] - s$

180. $m^2 + n^2 : [(p - q) \,.\, (r - s)]$

Kirjutada järgnevad algebralised avaldused:

181. a korrutis b ja c summaga.

182. m ja n summa ruut.

183. p ja q vahe kuup.

184. r ja s ruutude vahe.

185. b ja c kuupide summa.

186. b ja c summa ja vahe korrutis.

187. m ja n summa kahekordne ruut.

188. b ja c kahekordse summa ruut.

189. a ja b korrutise kolmekordne ruut.

190. a ja b kahekordse vahe kuup.

191. a ja b vahe kahekordne kuup.

192. a ja b kuupide kahekordne vahe.

193. b ja kahekordse a summa ruut.

194. Summade $a+b$ ja $c+d$ ruutude summa.

195. m ja n neljakordse summa ruut.

196. m ja n neljandate astmete summa ja samade suuruste neljandate astmete vahe korrutis.

197. Kuupjuur x ja y kuupide summast.

198. Kuupjuur x ja y kolmekordsest summast.

199. Kuupjuur x ja y summa ruudust.

200. Neljanda astme juur x-i jagatisest y ja z summaga.

201. Viienda astme juur kolmekordsest p ja q ruutude summa jagatisest samade arvude vahe ruuduga.

202. n-astme juur a ja b paarisarvuliste astmete summast.

203. n-astme juur a ja b paarita-arvuliste astmete vahest.

204. Paarisarvulise astme juur a ja b paarisarvuliste astmete summa korrutisest samade arvude paarita-arvuliste astmete vahega.

205. Kolmanda astme juur arvust, milles a sajalist, b kümnelist ja c ühelist.

206. Mitu ühelist on arvus, milles üheliste number on a, kümneliste number kahe võrra suurem ja sajaliste number kolme võrra vähem üheliste numbrist?

207. Avaldada a-le järgneva kolme järjestikuse täisarvu korrutis.

208. Leida $2n$-le järgneva kolme järjestikuse paarisarvu korrutis.

209. Leida arvule $2n+1$ järgneva kolme järjestikuse paarita arvu korrutis.

210. Leida $4n$-le järgneva kolme järjestikuse paarisarvu ruutude summa.

211. Arvus on x kümnelist ja y ühelist. Leida selle arvu korrutis sama arvu numbrite ristsummaga.

212. Avalduses $2a^2b^3$ asetada a asemele $m+n$ ja b asemele mn.

213. Avalduses $3bc^2+4b^2c$ asetada b asemele mnp ja c asemele $m+n$.

214. Avalduses $\frac{a^2+b^2}{3a^3+4b^3}$ asetada a asemele $m-n+p$ ja b asemele $2m+3$.

215. Avalduses $x^3-(2x^2+y^3)^3$ asetada x asemele $4a^3+5a^2b$ ja y asemele $8b^2$.

216. Avalduses $\sqrt[5]{(a^2+b^2)^3}$ asetada a asemele $\frac{3x+2}{2-3x}$ ja b asemele $x+2$.

217. Kaupmees müüs a naela esimest ja b naela teist sorti teed. Iga naela eest sai ta nii mitu marka, kui mitu naela ta müüs. Kui palju sai kaupmees tee eest?

218. a pange piiritust, mille pange hind c marka d penni, on segatud b pange veega. Kui palju maksab üks pang segu?

219. a pange piiritust, mille pange hind d kahekümne- ja f viiemargalist, on segatud b pange veega. Mitme marga eest tuleb pang segu müüa, et k marka kasu saada?

220. Kahest arvust a ja b kokku seada kolmliige, milles on esimese arvu ruut, kahekordne mõlema arvu korrutis ja nende arvude summa kuup.

221. Kahest arvust c ja d kokku seada kolmliige, milles on nende arvude vahe kuup, kolmekordne esimese arvu ruudu korrutis mõlema arvu summaga ja kolmekordne teise arvu kuup.

222. Kolmest arvust x, y ja z kokku seada neliliige, milles on esimese arvu ruut, kahekordne kahe esimese arvu korrutis, kahekordne kahe esimese arvu summa korrutis kolmanda arvuga ja kahe viimase arvu summa ruudu korrutis antud arvude kuupide summaga.

§ 7. Avalduste arvsuuruste leidmine.

Avalduse arvuliseks väärtuseks ehk arvsuuruseks nimetatakse saadust, mis saadakse, kui avalduses esinevate tähtede asemele asetatakse kindlad arvud, milledega arvutatakse avalduses tähendatud tehteid.

Ühel avaldusel võivad olla mitmesugused arvsuurused, selle järele, missugused arvud tähtede asemele paigutame.

Et leida avalduse arvsuurust, tuleb kõigi tähtede asemele asetada vastavad arvud ja toimetada avalduses tähendatud tehted lõpuni.

Leida järgmiste avalduste arvsuurused:

223. x^3+2x^2-5x+6, kui $x=2$

224. $x^3-3x^2+4x+10$, kui $x=\frac{1}{2}$

225. $a^4+7a^3-7a^2-15a$, kui $a=3$

226. $a^4+6a^3-24a^2+10a$, kui $a=\frac{1}{3}$

227. $4x^3-x^2y+3xy^2$, kui $x=3$, $y=1$

228. $2a^4+3a^3x+9a^2x^2$, kui $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{2}{3}$

229. $\frac{1-m+m^2}{1+m-m^2}+\frac{6m^3-4}{1+m-m^2}$, kui $m=1$

230. $\frac{2m^2-n^2}{2m-n}+\frac{2m^2+n^2}{m+2n}$, kui $m=2$, $n=1$

231. $\frac{x^2+y^2-xy}{x^2+xy-y^2}$, kui $x=2$, $y=3$

232. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$, kui $a=6$, $b=4$

233. $\frac{1+a^2}{(1+ab)^2+(a+b)^2}$, kui $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$

234. $x\sqrt{x^2-8y}+y\sqrt{x^2+8y}$, kui $x=5$, $y=3$

235. $\sqrt[3]{(b-a)^2}+\sqrt[3]{(a+d)(c-2a)}-\sqrt[3]{(c-b)^2a}$, kui $a=2$, $b=3$, $c=5$, $d=6$

236. $[(a+2)a+5]a$, kui $a=4$

237. $\{[(a-4)a-3]a+5\}a$, kui $a=5$

238. $((((a+4)a-3)a-7)a+8)a$, kui $a=2$

239. $\{50-[35-(10-a)a]a\}a$, kui $a=4$

240. $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4ab}$, kui $a=1$, $b=\frac{3}{4}$

241. $[(c+d)^2-(2d)^2][c-(3d)^2]$, kui $c=0{,}66\ldots$, $d=0{,}166\ldots$

242. $\{[(c+d)^2-(c-d)^2]:(c^2+d^2)\}.4cd$, kui $c=\frac{5}{8}$, $d=0{,}375$

243. $[a+(a^{3n}-1):(a^n-1)-(a^{2n}-1):(a^n+1)-n]:(n^a-1)$, kui $a=3$, $n=2$

244. $[(a^n+n^n).n+n]:\{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{a}\right).[a^n-(a+n)]\}$, kui $a=2, n=3$

Proovida, kas on valemid õiged:

245. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, kui $a=5$, $b=1$

246. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, kui $a=\frac{3}{4}, b=\frac{2}{3}$

247. $\frac{(a+b)^3}{a^2+2ab+b^2}=a+b$, kui $a=0{,}66.....$, $b=\frac{1}{2}$

248. $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$, kui $a=\frac{5}{8}$, $b=0{,}4166.....$

249. $\sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}=a-b$, kui $a=4$, $b=1$

250. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$, kui $a=2$, $b=5$, $c=3$, $d=4$

251. $\frac{a}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{4a}{a+b}$, kui $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{2}{3}$

252. $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{x+y}+\frac{xy}{x^3+y^3}=\frac{2x^2}{x^3+y^3}$, kui $x=1$, $y=\frac{2}{3}$

253. $(a+b)^4=a^4+4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2+b^4$, kui $a=0{,}2$, $b=0{,}3$

254. $(a^2-2ab+b^2)[a^3+3ab(b-a)-b^3]=a^5+5ab^2(2a^2+b^2)-$ $-5a^2b(2b^2+a^2)-b^5$, kui $a=1$, $b=0{,}33....$

255. $\sqrt[3]{a^6+b^6+6ab(a^4+b^4)+15a^2b^2(a^2+b^2)+20a^3b^3}=$ $=(a+b)^2$, kui $a=b=0{,}1$

II osa.

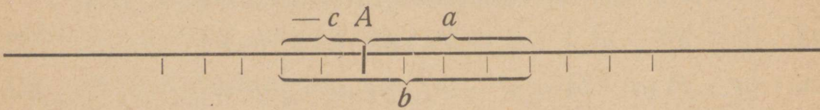
Tehted suurustega.

§ 1. Arvu mõiste laiendamine.

Kui, lahutades $a-b$, b on suurem kui a, näit. $4-6$, siis paistab lahutamine võimatu olevat. Sel korral kujutatakse b (6) kahe arvu $a+c$ $(4+2)$ summana, kusjuures võimalikuks saab vähendatavast osa ühelisi lahutada, kuid jääb veel lahutada c (2) ühelist. Seda võib järgmiselt kirjutada:

$$a-b=-c=(a-a-c=0-c=-c);\ 4-6=-2=(4-4-2=0-2)$$

Et seda graafiliselt kujutada, tuleb punktist A lugeda esiti 4 üksust paremale poole ja siis sealt 6 üksust vasemale poole.



Kuid vasemale poole on meil lugeda ainult 4 ühelist kuni alguspunktini, nii et 6 ühelist on ainult siis võimalik lugeda, kui alguspunktist vasemale poole võtame punktid, kui uue arvudevalla kujutused.

Nende arvude üheliste siht on vasemale poole, tähendab, lahutamisega samasihilised, kuna ühelised paremal pool alguspunkti on liitmisega samasihilised. Sellepärast võib neid kaht arvude rida ehk suuruste liiki teineteisest eraldada, kui liitmissihilisi suurusi tähendame märgiga $+$ ja lahutamissihilisi märgiga $-$. Sellega omavad $+$ ja $-$ peale tehtemärgi ka veel suuruse sihimärgi omadused. Uues arvuvallas märgi miinusega äratähendatud arvusid ehk suurusi nimetatakse *negatiivseteks* suurusteks, kuna harilikke suurusi ehk plussmärgiga tähendatuid nimetatakse *positiivseteks* suurusteks. *Positiivseid ja negatiivseid suurusi nimetatakse* **suhtelisteks** (ehk *relatiivseteks*) **algebralisteks suurusteks.** Nad on *vastupidised suurused*; niisamuti on märgid $+$ ja $-$ *vastupidised märgid.* Lüheduse mõttes jäetakse alati, kui võimalik, positiivsel suurusel eelseisev $+$ ära, kuna *negatiivsel arvul miinus alati ees seisab.* Suurust ilma positiivsust või negatiivsust näitava märgita nimetatakse algebralise suuruse *absoluutseks väärtuseks.* Nii näit. $+8$ absoluutne väärtus on 8, kuna -9 absoluutne väärtus on 9.

Harilikus elus ja looduse nähtuste vaatlemisel tarvitatakse tihti suhtelisi suurusi. Näit. külm ja soojus on suhtelised suurused, esimene neist negatiivne, teine — positiivne; võlg ja varandus — esimene negatiivne, teine — positiivne suurus jne.

1. Kaupmehel on raha a marka, võlga aga b marka. Missugune kapital on kaupmehel, kui ta võla ära tasub? Seletada vastuse tähendus, kui $a = 3600$, $b = 3000$; $a = 4000$, $b = 4500$.

2. Keegi võitis alguses p marka, pärast aga kaotas q marka. Kui palju ta võitis kummalgi korral? Seletada vastuse tähendus, kui $p = 65$, $q = 40$; $p = 35$, $q = 47$.

3. Keegi ostis kaupa a marga eest ja müüs ta ära b marga eest. Kui palju kasu sai ta kauba müügist? Seletada vastuse tähendus, kui $a = 280$, $b = 260$; $a = 250$, $b = 290$.

4. Mängijal oli mängu alguses p marka ja mängu lõpul q marka raha. Kui palju ta võitis? Seletada vastuse tähendus, kui $p = 40$, $q = 70$; $p = 80$, $q = 60$.

5. Paat liikus vastu voolu a jala võrra, veejooks viis teda tagasi b jala võrra. Mitme jala võrra nihkus paat vastu voolu edasi? Seletada vastuse tähendus, kui $a = 77$, $b = 23$; $a = 25$, $b = 68$.

6. Ühte linna tuli aasta jooksul juurde a uut elanikku ja läks ära b elanikku. Mitme võrra kasvas inimeste arv linnas aasta jooksul? Seletada vastuse tähendus, kui $a = 2000$, $b = 3000$; $a = 2500$, $b = 2000$.

7. Poiss on m aastat vana. Mitme aasta pärast on ta n-aastane? Seletada vastuse tähendus, kui $m = 14$, $n = 18$; $m = 12$, $n = 10$.

8. Oktavianus Augustus suri 14. aastal pärast Kristuse sündimist, kui ta oli olnud keisriks 44 aastat. Mitmendal aastal enne Kristuse sündimist sai ta keisriks?

9. Seletada avalduste tähendus: $-p$ marka kasu, $-q$ marka võlga.

10. Seletada avalduste tähendus: $-x$ marka võlga, $-t$ tulevast aastat.

§ 2. Suuruste liitmine.

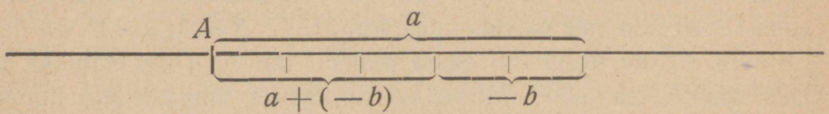
Et anda algebraliste suuruste liitmise juhiseid, selleks tuleb läbi vaadata järgnevad liitmisjuhused: a) positiivsete suuruste liitmine $a+b$; b) positiivse suuruse liitmine negatiivsega $a+(-b)$; c) negatiivse suuruse liitmine positiivsega $(-a)+b$ ja d) negatiivsete suuruste liitmine $(-a)+(-b)$.

Esimest juhust on vaadatud I osa § 1. Et liidetavad positiivsed on, siis on arusaadav, et ka summa on positiivne ja võrdub liidetavate absoluutsete väärtuste summaga. Nii näiteks $(+a)+(+b)=a+b$.

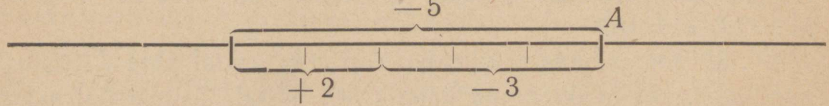
Teiste juhuste seletamiseks olgu ülesanne:

Paat liikus sillast 5 meetrit enne päri voolu, pärast 2 meetrit vastu voolu. Kui kaugel sillast asub paat?

Arusaadav, et paat esiteks liikudes päri voolu 5 meetrit ja pärast vastu voolu tagasi tulles 2 meetri võrra sillale lähenes ning 3 meetri kaugusele jäi. Seda võib järgmiselt kirjutada: $5+(-2)=3=5-2$ ehk tähtedega $a+(-b)=a-b$ ja graafiliselt kujutada:

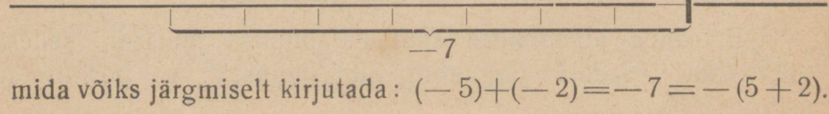


Juhusel, kui paat liigub 5 meetrit vastu voolu ja siis 2 meetrit päri voolu, on graafiliselt kujutades arusaadav, et paat on 3 meetrit vastu voolu.



Seda tehet võiks järgmiselt kirjutada: $(-5)+(+2)=$ $=-3=-(5-2)$.

Neljandal juhusel liigub paat 5 meetrit vastu voolu ja veel 2 meetrit vastu voolu. Arusaadav, et paat on sillast seitsme meetri kaugusel vastu voolu,



mida võiks järgmiselt kirjutada: $(-5)+(-2)=-7=-(5+2)$.

Algebraliste suuruste liitmise juhuseid vaadeldes võime avaldada järgmise suhteliste suuruste liitmise juhise:

Positiivsete liidetavate summa on positiivne, negatiivsete summa — negatiivne. Samasihiliste suuruste summa absoluutne väärtus võrdub liidetavate absoluutsete väärtuste summaga. Vastassuurusi liites tuleb suuremast absoluutsest väärtusest väiksem absoluutne väärtus lahutada ja suurema absoluutse väärtusega suuruse märk saadusele ette kirjutada. Näit.:

$$+\frac{5}{3}+\left(-\frac{12}{5}\right)=+\frac{5}{3}-\frac{12}{5}=\frac{25}{15}-\frac{36}{15}=-\frac{11}{15}.$$

11. Liita 2 ja $+3$, -2 ja $+5$, $+7$ ja -3, -4 ja -6.

12. Liita $\frac{8}{11}$ ja $+\frac{7}{11}$, $-\frac{5}{17}$ ja $+\frac{9}{17}$, $+\frac{2}{3}$ ja $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{4}$ ja $-\frac{4}{5}$.

Arvutada tehted, mis on näidatud märkidega:

13. $+3+(-3)$; $-6+(+6)$; $+\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)$; $-\frac{3}{8}+\left(+\frac{3}{8}\right)$.

14. $+2+(+3)$; $-5+(-4)$; $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)$; $+\frac{5}{6}+\left(+\frac{5}{6}\right)$.

15. $+9+(-6)$; $-10+(-3)$; $+\frac{7}{12}+\left(-\frac{5}{12}\right)$; $-\frac{8}{11}+\left(-\frac{6}{11}\right)$.

16. $-7+(+9)$; $-5+(+8)$; $-\frac{5}{9}+\left(+\frac{7}{9}\right)$; $-\frac{6}{11}+\left(+\frac{9}{11}\right)$.

17. $+\frac{2}{3}+\left(+\frac{5}{9}\right)$; $-\frac{7}{8}+\left(-\frac{5}{12}\right)$; $+0{,}25+(+0{,}053)$; $-0{,}375+(-0{,}52)$.

18. $-\frac{5}{12}+\left(+\frac{7}{20}\right)$; $+\frac{5}{38}+\left(-\frac{7}{19}\right)$; $-0{,}32+(+0{,}827)$; $+2{,}053+(-3{,}21)$.

Kui on tarvis liitmise liit-tehet arvutada, siis tuleb enne liita kaks esimest liidetavat, saadud summaga liita kolmas liidetav jne. Lihtsamatel liitmise liit-tehete arvutamisel toimetatakse gi nii; näit.: $-7+(+4)+(-2)=-3+(-2)=-5$.

Üks liitmisseadus ütleb: Summa ei muutu, kui liidetavad oma kohti muudavad. Selle seaduse põhjal tuleb keerulisemal liitmise liit-tehte arvutamisel enne liita kõik positiivsed, seepeale kõik negatiivsed suurused ja siis saadud summad liita.

Leida liit-tehete saadused:

19. $+14+(-9)+(-2)$; $-10+(+7)+(-5)$; $-5+(-3)+(+10)$.

20. $+\frac{4}{9}+\left(+\frac{5}{9}\right)+\left(-\frac{2}{9}\right)$; $-\frac{7}{11}+\left(+\frac{8}{11}\right)+\left(-\frac{5}{11}\right)$.

21. $8+(-2)+[-3{,}5+(+2{,}5)]$; $[(-11)+(+9)]+[(+6{,}75)+(-2{,}25)]$.

22. $[9+(-2)-5]+(-6)$; $-6+\{3+[5+(-2)]\}+(+11)$.

23. $\left\{\frac{3}{2}+\left[-\frac{3}{4}+\left(+\frac{5}{6}\right)\right]\right\}+\left[-2+\left(-\frac{7}{12}\right)\right]$; $\left[-\frac{7}{10}+\left(+\frac{2}{5}\right)\right]+\left\{-2+\left[-\frac{3}{4}+\left(+\frac{9}{10}\right)\right]\right\}$.

24. $-6+\left\{\left[-\frac{3}{2}+\left(+\frac{5}{3}\right)\right]+\left[+\frac{7}{5}+\left(+2\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$; $-\frac{5}{7}+\left\{\frac{2}{3}+\left[-3+\left(+\frac{3}{2}\right)\right]+\left(-1\frac{5}{14}\right)\right\}$.

25. $\{2{,}15+[-1{,}315+(-7{,}2)]\}+[(-1{,}78)+(+9{,}235)]$.

§ 3. Suuruste lahutamine.

Lahutamine on tehe, milles antud summa ja ühe liidetava abil otsitakse teist liidetavat. Nii on -3 ja $+4$ vahe $(-3)-(+4)=-7$, sest $(+4)+(-7)=-3$.

Et anda algebraliste suuruste lahutamise juhiseid, tuleb läbi vaadata neli lahutamisjuhust: 1) lahutada positiivsest suurusest positiivne: $(+a)-(+b)$; 2) lahutada positiivsest suurusest negatiivne: $(+a)-(-b)$; 3) lahutada negatiivsest suurusest positiivne: $(-a)-(+b)$ ja 4) lahutada negatiivsest suurusest negatiivne: $(-a)-(-b)$.

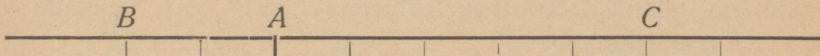
Esimest lahutamisjuhust oleme vaadelnud I ja II osa 1. paragrahvis. Positiivse suuruse lahutamist positiivsest suurusest võiks selle põhjal nii märkida:

$$a-(+b)=a-b.$$

Siin vaatame kolme viimast lahutamisjuhust. Seks lahendame sellekohase ülesande. Paat liikus b (2) meetrit sillast vastu voolu. Peale teiskordset liikumist jäi paat seisma a (5) meetri kaugusel sillast. Mitu meetrit liikus paat teisel korral? Arusaadav, et viimane kaugus, a (5) meetrit, peab sisaldama eneses esimeskordse $-b$ m ja teiskordse x m liikumise. a on seega $-b$ ja tundmata suuruse x summa; tundmata suuruse x leiame, kui summast a lahutame esimeskordse liikumissuuruse $-b$:

$$x = a - (-b).$$

Peale esialgset liikumist $-b$ (-2) meetrit jäi paat peatuma punkti B. Teine liikumine algab punktist B ja lõpeb a (5) meetri kaugusel sillast, s. o. punktis C. Seega liigub paat teisel korral

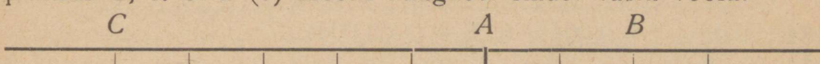


punktist B kuni punktini C, s. o. 7 mõõtüksust paremale poole, seega $x = a - (-b) = 5 - (-2) = 5 + 2 = 7.$

Paat liikus esialgu b (2) meetrit päri voolu; peale teiskordset liikumist jäi paat seisma a (5) meetri kaugusel sillast vastu voolu. Mitu meetrit liikus paat teisel korral?

$$x = (-a) - (+b) = (-5) - (+2).$$

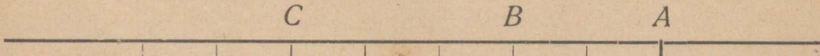
Esimese liikumise tõttu oli paat punktis B, s. o. b (2) meetrit päri voolu. Sellest punktist algas teine liikumine, mis lõppes punktis C, s. o. a (5) meetri kaugusel sillast vastu voolu.



Teiskordse liikumise siht punktist B kuni punktini C on negatiivne ja võrdub 7 mõõtüksusega, seega $x = (-a) - (+b) =$ $= (-5) - (+2) = -7 = (-5) + (-2).$

Paat liigub esiti b (2) meetrit sillast vastu voolu. Peale teiskordset liikumist jääb paat seisma a (5) meetri kaugusel sillast vastu voolu. Mitu meetrit liikus paat teisel korral?

Liikudes esialgu $-b$ (-2) meetrit jõuab paat punkti B, millest algab teiskordne liikumine. Peale teiskordset liikumist jõuab paat $-a$ (-5) meetri kaugusele sillast punkti C, seega liikudes $(-a) - (-b)$, s. o. -3 mõõtüksust.



$$x = (-a) - (-b) = (-5) - (-2) = -3 = (-5) + (+2).$$

Saime järgmised lahutamissaadused:

$$(+5)-(+2)=5-2=3; \quad (+a)-(+b)=a-b.$$
$$(+5)-(-2)=5+2=7; \quad (+a)-(-b)=a+b.$$
$$(-5)-(+2)=(-5)+(-2)=-7; \quad (-a)-(+b)=(-a)+(-b).$$
$$(-5)-(-2)=(-5)+(+2)=-3; \quad (-a)-(-b)=(-a)+(+b).$$

Et algebralist suurust lahutada, tuleb lahutatav vähendatavale juurde kirjutada vastupidise märgiga.

26. 8-st lahutada 5; 6-st lahutada -4; -5-st lahutada 3; -9-st lahutada -5.

27. $\frac{3}{2}$-st lahutada $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$-st lahutada $-\frac{3}{2}$; $-\frac{6}{7}$-st lahutada $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$-st lahutada $-\frac{4}{7}$.

Arvutada tehted, mis on näidatud märkidega:

28. $+9-(+6)$; $+9-(-6)$. **29.** $-9-(+6)$; $-9-(-6)$.

30. $+\frac{7}{12}-\left(+\frac{5}{12}\right)$; $+\frac{7}{12}-\left(-\frac{5}{12}\right)$. **31.** $-\frac{7}{12}-\left(+\frac{5}{12}\right)$; $-\frac{7}{12}-\left(-\frac{5}{12}\right)$.

32. $+\frac{3}{2}-\left(+\frac{4}{5}\right)$; $+\frac{3}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)$. **33.** $-\frac{3}{2}-\left(+\frac{4}{7}\right)$; $+\frac{3}{2}-\left(-\frac{4}{7}\right)$.

34. $0{,}06-(+0{,}004)$; $0{,}06-(-0{,}004)$.

35. $-0{,}32-(+1{,}6)$; $-0{,}32-(-1{,}6)$.

Leida liit-tehete saadused:

36. $8-(-3)-(-7)$; $-10-(+6)-(-13)$.

37. $4-[(-2)-(-5)]$; $4-[-2-(+5)]$.

38. $12-[-7+(2-5)]$; $12+[-7-(2-5)]$.

39. $14-\{10-[8+(7-9)]\}$; $11-\{6+[-8+(3-7)]\}$.

40. $2-(-3)-\{2-[7-(3-4)]\}$;
$+3-(-5)+\{-2+[-7+(3-4)]\}$.

Leida avalduste arvsuurused:

41. $(a+b-c)-[c-(a+c)]$, kui $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{5}{6}$, $c=-\frac{5}{4}$.

42. $m-\{n-[(a-p)+q]\}$, kui $a=\frac{1}{6}$, $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{3}{4}$, $p=-\frac{1}{4}$, $q=-\frac{5}{6}$.

43. $(m-n)-[a-(q-p)]$, kui $a=\frac{5}{6}$, $m=\frac{3}{2}$, $n=-\frac{2}{3}$, $p=-0{,}3$, $q=-0{,}7$.

44. $(m-n)-[a+(p-q)]$, kui $a=0{,}4$, $m=0{,}3$, $n=-0{,}0(3)$ $p=-2{,}6$, $q=-0{,}1(6)$.

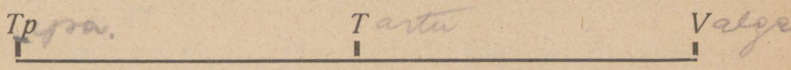
§ 4. Suuruste korrutamine.

Suuruste korrutamisel võib ette tulla 4 juhust; nimelt võib korrutada: 1) positiivset suurust positiivsega: $(+a).(+b)$; 2) positiivset suurust negatiivsega: $(+a).(-b)$; 3) negatiivset suurust positiivsega: $(-a)(+b)$ ja 4) negatiivset suurust negatiivsega: $(-a)(-b)$.

Korrutamisjuhiste leidmiseks lahendame järgneva ülesande:

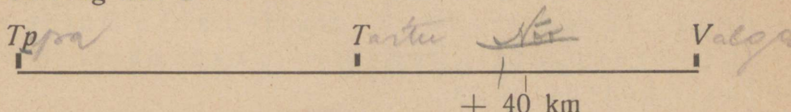
Raudteel liigub rong Tapa-Tartu-Valga vahel 20-km kiirusega tunnis. Keskpäeval kell 12 on rong Tartus. Kus on rong 2 tundi enne ja pärast keskpäeva?

Ülesanne on seni selguseta, kui ei ole antud liikumise siht. Praegu aga eeldame, et siht Tapalt Tartu-Valga poole on posi-



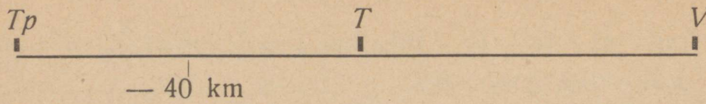
tiivne, vastupidine siht — negatiivne. Kaugus Tartust Valga poole — positiivne, vasakule poole — negatiivne. Peale selle võtame aja enne keskpäeva negatiivseks ja pärast keskpäeva positiivseks. Siis võime antud ülesandest saada 4 järgnevat ülesannet.

Rong liikus Tapalt Valga poole. Kell 12 oli ta Tartus. Kus on rong kell 2?



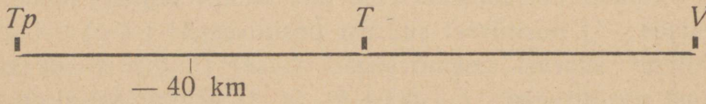
Kell 12 on rong Tartus. Kahe tunniga jõuab rong Valga poole: $(+2)(+20)=+40$ km ehk tähtedega: $(+a)(+b)=+ab$.

Rong liikus Tapalt Valga poole. Kell 12 oli ta Tartus. Kus oli rong 2 tundi enne keskpäeva?



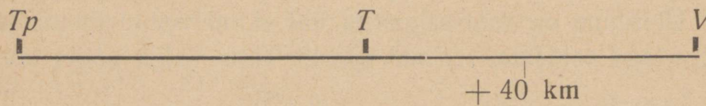
Kell 12 on rong Tartus. Kaks tundi enne keskpäeva ei ole ta Tapalt Tartu jõudnud, vaid on Tartust $(-2)(+20) = -40$ km kaugusel ehk tähtedega: $(-a)(+b) = -ab$.

Rong liikus Valga poolt Tapa poole. Kell 12 oli ta Tartus. Kus on rong kell 2?



Kell 12 on rong Tartus. Kahe tunni pärast on ta Tapa poole edasi sõitnud ja on Tartust $(+2)(-20) = -40$ km kaugusel ehk tähtedega: $(+a)(-b) = -ab$.

Rong liikus Valga poolt Tapa poole. Kell 12 oli ta Tartus Kus oli rong 2 tundi enne keskpäeva?



Kell 12 on rong Tartus. Kaks tundi enne keskpäeva ei ole ta Valgast Tartu jõudnud ja on Tartust $(-2)(-20) = +40$ km kaugusel ehk tähtedega: $(-a)(-b) = +ab$

Saime järgmised korrutamissaadused:

$$(+a)(+b) = +ab; \quad (-a)(+b) = -ab.$$
$$(+a)(-b) = -ab; \quad (-a)(-b) = +ab.$$

Siit järgneb korrutamisjuhis: *Ühesuguste märkidega tegurite korrutis on positiivne, vastasmärkidega — negatiivne. Korrutise absoluutne väärtus võrdub alati tegurite absoluutsete väärtuste korrutisega.*

Toimetada tehted, mis on näidatud märkidega:

45. $(+2)\cdot(+3)$; $(-3)\cdot(+4)$; $(+2)\cdot\left(+\frac{3}{5}\right)$; $(-3)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right)$.

46. $(+5)\cdot(-2)$; $(-4)\cdot(-3)$; $(+5)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$; $(-4)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$.

47. $+6 \cdot -\frac{2}{3}$; $-8 \cdot -\frac{3}{4}$; $-\frac{10}{3} \cdot +12$; $-\frac{5}{7} \cdot -14$.

48. $+\frac{2}{5} \cdot +\frac{5}{2}$; $-\frac{7}{3} \cdot +\frac{3}{7}$; $+\frac{5}{2} \cdot -\frac{6}{5}$; $-\frac{7}{3} \cdot -\frac{6}{7}$.

49. $+\frac{3}{4} \cdot +\frac{2}{9}$; $-\frac{6}{7} \cdot +\frac{14}{9}$; $+\frac{3}{2} \cdot -\frac{2}{9}$; $-\frac{3}{7} \cdot -\frac{14}{9}$.

50. $\left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+1\frac{1}{2}\right)$; $\left(+2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+2\frac{1}{2}\right)$; $\left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$; $\left(+2\frac{1}{3}\right) \cdot (-1)$.

51. $(+0{,}6) \cdot (-0{,}2)$; $(-1{,}2) \cdot (-0{,}5)$; $(+0{,}3) \cdot (+1{,}2)$; $(-1{,}3) \cdot (-0{,}2)$.

52. $(-1{,}2) \cdot (-0{,}05)$; $(-0{,}06) \cdot (+0{,}5)$; $(+2{,}3) \cdot (-0{,}02)$; $(+1{,}06) \cdot (+0{,}03)$.

Liit-korrutamistehte korral tuleb korrutada kaks esimest tegurit, saadud korrutis kolmanda teguriga jne., kusjuures märgijuhis tuleb alati silmas pidada. Näit. $(+a)(-b)(-c) = (-ab)(-c) = +abc$; $(-a)(-b)(-c) = (+ab)(-c) = -abc$.

Eelmise näite põhjal saame järgmise juhise:

Kui negatiivseid tegureid on paarisarv, siis on korrutis positiivne, kui aga paaritu arv, siis negatiivne.

Leida liit-tehete saadused:

53. $(+4) \cdot (-1) \cdot (-2)$; $(-5) \cdot (+2) \cdot (-1)$.

54. $(+0{,}5) \cdot (-1{,}5) \cdot (-4) \cdot (-0{,}1)$.

55. $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (+0{,}2) \cdot [-0{,}(4)] \cdot [-0{,}58(3)] \cdot (-1)$.

56. $[4-(-3)-5] \cdot (5-7)$; $[-2+(+3)] \cdot (-3+8)$.

57. $-5 \cdot \{9-[11+(-8)]\}$; $(7-9) \cdot \{-3+[(-5)+2]\}$.

58. $\left(1\frac{1}{12}-2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{6}{5}\right) \cdot [-3+(-2)]$.

59. $[(-3) \cdot (-2)-(-2)] \cdot (-6) \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)$.

§ 5. Suuruste jagamine.

Jagamine on korrutamise vastupidine tehe, nimelt: jagamine on tehe, milles antud korrutise ja ühe teguri abil otsitakse teist tegurit.

Olgu antud korrutised: $(+a)(+b) = +ab$; $(-a)(+b) = -ab$.
$(+a)(-b) = -ab$; $(-a)(-b) = +ab$.

Kui meil neist snurustest on antud korrutis ja üks tegur, siis võime antud korrutiste järgi kohe leida teise teguri:

$(+ab):(+a) = +b$; $(-ab):(-a) = +b$.
$(-ab):(+a) = -b$; $(+ab):(-a) = -b$.

Juhis: Kui jagatav ja jagaja on samasihilised, siis on jagatis positiivne, vastasel korral aga negatiivne. Jagatise absoluutne väärtus võrdub jagatavaga ja jagaja absoluutsete väärtuste jagatisega. Näit.: $(-15):(-3) = +5$, sellepärast et $(+5).(-3) = -15$.

Arvutada tehted, mis on näidatud märkidega:

60. $(+6):(+3)$; $(+6):(-3)$. **61.** $(-8):(+2)$; $(-8):(-2)$.

62. $(+5):(+3)$; $(-5):(+3)$. **63.** $(+8):(-6)$; $(-8):(-6)$.

64. $\left(+\frac{5}{6}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)$; $\left(-\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{2}{9}\right)$. **65.** $\left(+\frac{3}{8}\right):\left(-\frac{4}{9}\right)$; $\left(-\frac{10}{3}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)$.

66. $\left(+2\frac{1}{2}\right):\left(-2\frac{1}{4}\right)$; $\left(-3\frac{1}{3}\right):\left(+2\frac{1}{2}\right)$.

67. $\left(-1\frac{3}{10}\right):\left(-2\frac{2}{5}\right)$; $\left(+3\frac{3}{4}\right):\left(+4\frac{5}{8}\right)$.

68. $(+0{,}2):(-0{,}1)$; $(-0{,}3):(+0{,}06)$.

69. $(-0{,}04):(-0{,}2)$; $(+1{,}2):(+0{,}003)$.

Leida liit-tehete saadused:

70. $[(-4{,}5):9]:[5:(-2)]$. **71.** $\left(2\frac{3}{5}-4\right):\left[2\frac{1}{5}+\left(-1\frac{7}{15}\right)\right]$.

72. $-3:[-9{,}6+(-4{,}5).(-1{,}2)]$. **73.** $\left[\left(-\frac{5}{2}\right):\left(-\frac{3}{4}\right)\right]:\left[3\frac{1}{4}.\left(-2\frac{2}{3}\right)\right]$

74. $\left[1\frac{5}{6}-\left(-1\frac{2}{3}\right)-(+5)\right]:\left[4+\left(-2\frac{1}{6}\right)\right]$.

Leida avalduste arvsuurused:

75. $[(a+3):a-2].5$, kui $a=-2$.

76. $(x+y:p).x$, kui $x=-2$, $y=3$, $p=-1$.

77. $x-[(y+z):t].y$, kui $x=-2$, $y=5$, $z=-7$, $t=-6$.

78. $\{[(a+3):a-5]:a+1\}.a+8$, kui $a=-1$.

79. $[x:y+z.(t-u)]:t$, kui $x=-6$, $y=2$, $z=-5$, $t=-4$, $u=1$.

80. $\{10-[3-(2-a)a]:a+1\}:a$, kui $a=-3$.

81. $\{[x.y+x:y-z(x-u)]:x\}.y$, kui $x=-2$, $y=-1$, $z=3$, $u=-3$.

§ 6. Suuruste astendamine.

Ühesuguste tegurite korrutist nimetatakse a s t m e k s, kuna tehet ennast nimetatakse astendamiseks.

Et suurust astendada, tuleb teda võtta tegurina nii mitu korda, kui mitu ühelist on astmenäitajas. Kui astme alus on positiivne, siis on aste alati positiivne. Kui astme alus on negatiivne, siis on paarisarvuline aste positiivne, paarituarvuline aste aga negatiivne. Astme absoluutne väärtus võrdub alati tegurite absoluutsete väärtuste korrutisega.

Leida astmete arvsuurused ja sihimärgid:

82. 2^3, $(-3)^4$, $(-3)^3$.

83. $(-1)^5$, $(-1)^4$, $(+6)^3$, $(-6)^3$.

84. $\left(+\frac{1}{2}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$.

85. $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$.

86. $(-0{,}1)^2$, $(-0{,}01)^3$. **87.** $(-0{,}02)^2$, $(-0{,}3)^3$.

88. $(-0{,}03)^4$, $(-0{,}002)^3$. **89.** $(-1{,}2)^3$, $(-2{,}1)^2$.

Leida avalduste arvsuurused:

90. $a^3b^2c^5$, kui $a=-2$, $b=3$, $c=-1$.

91. $4a^3b^2c$, kui $a=-2$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=-8$.

92. $\frac{5}{3}a^3b^2$, kui $a=-1$, $b=-\frac{2}{3}$.

93. $a^4b+a^3b^2$, kui $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{2}{3}$.

94. a^2b-3ab^3, kui $a=-\frac{2}{5}$, $b=-\frac{5}{3}$.

95. $(a^2-b^2)(a+b)$, kui $a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{3}{2}$.

96. $(a^3+8b^3):(a+2b)$, kui $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{3}{4}$.

§ 7. Juurimine.

Kui on teada ühesuguste tegurite korrutis ja tegurite arv, s. o. kui on antud aste ja astmenäitaja, siis nimetatakse tehet, milles otsitakse astme alust, j u u r i m i s e k s; seega on juurimine astendamise vastupidine tehe.

J u u r i m i n e on tehe, milles antud astme ja astmenäitaja abil otsitakse astme alust. Aste on siin j u u r i t a v s u u r u s, astmenäitaja — j u u r e n ä i t a j a k s, astme alus — j u u r e k s.

Olgu antud $5^3 = 125$; siis $\sqrt[3]{125} = 5$.

Juurimisel tuleb tähele panna järgmist juhist: Ü k s i k a r v u l i s e j u u r e n ä i t a j a k o r r a l o n j u u r e m ä r k j u u r i t a v a s u u r u s e m ä r g i g a ü h e s u g u n e. P a a r i s a r v u l i s e a s t m e j u u r p o s i t i v s e s t s u u r u s e s t o n k a s p o s i t i i v n e v õ i n e g a t i i v n e; p a a r i s a r v u l i s e a s t m e j u u r t o n v õ i m a t u l e i d a n e g a t i i v s e s t s u u r u s e s t (sest paarisarvulise astmenäitaja korral on aste alati positiivne, aga mitte negatiivne).

Leida juurte arvsuurused ja sihimärgid:

97. $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt{25}$. **98.** $\sqrt{+49}$, $\sqrt[3]{-64}$, $\sqrt[3]{+125}$.

99. $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{243}$. **100.** $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$, $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$.

101. $\sqrt[3]{\frac{216}{125}}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, $\sqrt[3]{-\frac{343}{64}}$. **102.** $\sqrt[4]{0{,}0001}$, $\sqrt[3]{-0{,}027}$.

103. $\sqrt[5]{0{,}00032}$, $\sqrt[4]{0{,}0256}$.

Leida avalduste arvsuurused:

104. $\sqrt{2a^3b^2}$, kui $a = 2$, $b = -1$.

105. $\sqrt[3]{ab^2c^3}$, kui $a = -3$, $b = -3$, $c = -2$.

106. $\sqrt[3]{4a^3b^2c}$, kui $a = -2$, $b = \frac{3}{2}$, $c = -3$.

107. $\sqrt{a^2 + b(b + 2a)}$, kui $a = -5$, $b = -2$.

108. $\sqrt{6ab} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}b^4}$, kui $a = -3$, $b = -2$.

109. $\sqrt[3]{(a - b)(a^2 - 2ab + b^2)}$, kui $a = -5$, $b = -3$.

110. $\sqrt[3]{a^3 + 3ab(a + b) + b^3}$, kui $a = -5$, $b = +2$.

111. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}a^3b^2} - \sqrt{\frac{5}{3}a^2b^3}$, kui $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{5}$.

§ 8. Logaritmimine.

Üheks astendamise vastupidiseks tehteks on, nagu nägime, juurimine. Teiseks vastupidiseks tehteks on l o g a r i t m i m i n e.

L o g a r i t m i m i n e o n t e h e, m i l l e s a n t u d a s t m e j a a s t m e a l u s e a b i l o t s i t a k s e a s t m e n ä i t a j a t.

Seda tehet märgitakse nii: $\log_2 16 = 4$ (loetakse: 16-ne logaritm alusel 2 on neli), sellepärast, et $2^4 = 16$. 4 on l o g a r i t m, 2 — a l u s ja 16 on l o g a r i t m i t a v a r v.

E t l e i d a l o g a r i t m i, t u l e b l e i d a a r v, m i l l e g a t u l e k s a s t e n d a d a a l u s, e t s a a d a l o g a r i t m i t a v a r v.

Nii $\log_4 64 = 3$, sest $4^3 = 64$ ja

$\log_{10} 10\,000 = 4$, sest $10^4 = 10\,000$ jne.

112. $\log_2 4$; $\log_2 16$; $\log_4 64$. **113.** $\log_3 27$; $\log_3 81$; $\log_5 125$.

114. $\log_6 36$; $\log_{13} 169$; $\log_6 216$. **115.** $\log_{1/2}\frac{1}{4}$; $\log_{1/2}\frac{1}{16}$; $\log_{1/3}\frac{1}{9}$.

116. $\log_2 2^5$; $\log_3 3^2$; $\log_5 5^5$; $\log_a a^n$.

117. Leida arvude 10, 100, 10 000 logaritmid, kui alus on 10.

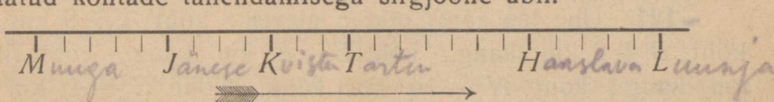
118. Leida arvude $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$ logaritmid, kui alus on $\frac{1}{4}$.

119. Missugusel alusel on: a) 16-ne logaritm 4? b) 16-ne logaritm 2? c) 256-e logaritm 4? d) 256-e logaritm 8?

§ 9. Koordinaadid sirgjoonel.

Olgu meil niisugune ülesanne:

Aurulaeva omanik teeb tihti Tartust sõitusid Emajõel päri ja vastu voolu. Päri voolu on järgmised kohad: Haaslava 7 v., Luunja 12 v., kuna vastu voolu asuvad Kvistental 3 v., Jänese 7 v. ja Muuga 12 v. Tartust. Aurulaeva omanik tahtis omale plaani kokku seada, mille järele tal alati võimalik oleks üksikute kohtade kaugust leida. Selleks kujutas ta Emajõe pikkuse ühes nimetatud kohtade tähendamisega sirgjoone abil.



Kõik kohad Tartust päri voolu märkis ta linna kujutavast punktist T paremale poole, vastu voolu asuvad kohad aga pahemale poole T punkti, iga versta tarvis mõõtüksuseks võttes $1/2$ sm. Nii sai ta rea punkte M, J, K, T, H ja L, mis kujutavad järgmisi jõe ääres asuvaid kohti: Muuga, Jänese, Kvistental, Tartu, Haaslava ja Luunja.

Nimetame antud punktide kauguse linna tähendavast punktist T nende punktide koordinaatideks, linna tähendava punkti T aga koordinaatide alguspunktiks. Paremal pool alguspunkti asuvate kohtade kaugus on positiivne (+, plussmärgiga) ja pahemale poole negatiivsed (—, miinusmärgiga). Säherdune märkimine on sellepärast kasulik, et ütluses: „üks koht on +7 versta Tartust kaugel" seisab mitte üksi koha kaugus, vaid ka siht, s. o. et antud koht on 7 versta Tartust päri voolu. Peale selle ei saa meie, ühe koha kaugust määrates teisest kohast, üksi verstade arvu, vaid ka sihi, s. o. kuspool antud kohast mingi koht asub.

Näit. leiame kauguse Haaslavast Luunjani. Selleks peame päri voolu minema $12 - 7 = 5$ versta. Siin näeme, et esimese koha kauguse leidmiseks teisest kohast peame teise koha kaugusest lahutama esimese koha kauguse. Olgu a_1 esimene ja a_2 teine koht; siis võime kaugust esimesest kohast teise kohani avaldada järgmise valemi abil: $x = a_2 - a_1$.

Näide: Leida kaugus Luunjast Muugani; $a_1 = 12$, $a_2 = -12$; $x = a_2 - a_1 = -12 - 12 = -24$, s. o. Muuga asub Luunjast 24 versta vastu voolu.

Graafiliselt lahendada järgnevad ülesanded.

120. Raudtee-jaamade kaugus Tartust Tapa poole on (arvud on ümmargusemaks tehtud): Kärkna 11 km, Voldi 21,5 km, Kaarepera 35,5 km, Jõgeva 47,3 km jne. ja Valga poole Nõo 15,3 km, Elva 25,3 km, Pritsu 35 km jne. Leida kaugus ühest jaamast teise, sihti näidates.

121. Ühe tee ääres olid L alevist: koht $A + 9$ km kaug., koht $B + 6$ km kaug., koht $E - 8$ km kaug., koht $M + 12$ km kaug., koht $N - 14$ km kaug., koht $S - 4$ km kaug.

Leida graafiliselt kaugus M-st kuni E-ni, kaugus M-st kuni N-ni, kaugus A-st kuni S-ni jne.

122. Täheteadlane nägi esimest langevat meteoori 7 min. enne keskööd, teist 3 min., kolmandat keskööl, neljandat 5 min. ja viiendat 8 min. pärast keskööd. Graafiliselt leida aeg kahe mistahes meteoori langemise vahel.

123. Sõjaväljal valgustati öösi ümbrust raketitega. Keegi märkas, et öösi kella $^1/_2$ 11 kuni kella 11 lasti raketeid kell 10^{30}, 10^{35}, 10^{40}, 10^{43}, 10^{45}, 10^{48}, 10^{55} ja kell 11. Leida aeg kahe mistahes raketilaskmise vahel.

III osa.

Avalduste muutmine.

§ 1. Hulkliikme koondamine.

Algebralised avaldused jagunevad kahte liiki: üksliikmed ja hulkliikmed. Kui algebralisel avaldusel on viimaseks tehteks liitmine või lahutamine, siis nimetatakse seesugust avaldust hulkliikmeks ehk polünoomiks; näit.: $ab+c-d^2$ on hulkliige, sest et viimane tehe on kas liitmine või lahutamine. Kui aga viimane tehe ei ole liitmine ega lahutamine, vaid korrutamine, jagamine, astendamine või juurimine, siis nimetatakse säherdusi avaldusi üksliikmeteks ehk monoomideks; näit.: $2abc^2$, $\sqrt[3]{a+b}$ on üksliikmed. Hulkliikmeid ja üksliikmeid võrreldes näeme, et hulkliige koosneb üksliikmetest, mida nimetatakse hulkliikme ehk polünoomi liikmeteks.

Üksliikmeid nimetatakse sarnasteks, kui nad on kas täitsa ühesugused või erinevad ainult kordajate (koeffitsientide) või sihimärgi poolest. Näit., üksliikmed $2a^2bc$, $-\frac{4}{5}a^2bc$ ja $\frac{2}{3}a^2bc$ on sarnased, sest nad erinevad ainult kordajate ja sihimärkide poolest.

Kui hulkliikmes leiduvad sarnased liikmed, siis võib neid koondada. Polünoomi sarnaste liikmete ühendamist nimetatakse polünoomi **k o o n d a m i s e k s.**

Hulkliikme koondamiseks tuleb sarnaste liikmete kordajad algebraliselt liita ja saadud kordaja võtta samatähelise avalduse kordajaks. Näit. võtame hulkliikme $7a^2b - 3abc - 4a^2b + {}$ $+ 2a^2b - 5abc$. Temas on kaht liiki sarnaseid liikmeid, esiteks: $7a^2b$, $-4a^2b$ ja $+2a^2b$ ja teiseks: $-3abc$ ja $-5abc$. Liites kordajad 7, -4 ja $+2$ näeme, et esimese liigi liikmete koondamine annab $5a^2b$; liites teise liigi kordajad saame teise liigi sarnaste liikmete koondamisest $-8abc$. Hulkliige muutus peale koondamist kaksliikmeks $5a^2b - 8abc$.

1. $7ab+8ab$. **2.** $5a^2b+2a^2b$. **3.** $8ab-2ab$. **4.** $-2a^2b+4a^2b$.
5. $-7a^3-4a^3$. **6.** $-2ab^2-9ab^2$. **7.** $6a^2bc+3a^2bc+a^2bc$.
8. $3(a+b)^2+7(a+b)^2+(a+b^2)$. **9.** $-5m^3-m^3-8m^3$.
10. $3a^nbd^3+a^nbd^3+9a^nbd^3$. **11.** $-2a^3b^m-3a^3b^m-a^3b^m$.
12. $5(a-b)^3+3(a-b)^3+(a-b)^3$. **13.** $3a^3-3a^3+5a^3$.
14. $18a^2b+10a^2b-10a^2b$. **15.** $13ab^4-5ab^4-13ab^4$.
16. $9a^2b^3-4a^2b^3-5a^2b^3$. **17.** $11a^4-7a^4-4a^4$.
18. $5a^4-5a^4+9a^3$. **19.** $17a^3bc^2-11a^3bc^2+3a^2b^2c^2$.
20. $23a^mb^n+11a^nb^m-4a^nb^m$. **21.** $4a^2b-5a^2b+7a^2b-a^2b$.
22. $25a^3b^3+10a^3b^3-8a^3b^3-9a^3b^3+2a^3b^3$.
23. $10m^a-8m^a+13m^a-20m^a-m^a$.
24. $5a^3cx-7a^3cx-13a^3cx-a^3cx+3a^3cx$.
25. $10a(x+y)^5-11a(x+y)^5-7a(x+y)^5-a(x+y)^5+7a(x+y)^5$.
26. $\frac{5}{3}ax+\frac{1}{2}ax-\frac{2}{3}ax-\frac{3}{2}ax$. **27.** $\frac{2}{5}by-\frac{5}{2}by+by+1{,}1by$.
28. $7a^2b-11\frac{2}{3}a^2b+3\frac{1}{2}a^2b-2\frac{5}{6}a^2b$.
29. $-0{,}27ab^2+0{,}23ab^2-\frac{2}{5}ab^2+\frac{1}{2}ab^2$.
30. $-1{,}25a^3+\frac{3}{4}a^3+2{,}5a^3-\frac{2}{3}a^3$.
31. $5ax-6bx+8ax-10ax-15bx+6ax+20bx-ax$.
32. $2a^2b-3ab^2+7a^2b-10ab^2-15a^2b+18ab^2-ab^2$.
33. $5a^3-7a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-11ab^2+3a^2b$.
34. $\frac{5}{3}a^2bc-\frac{3}{4}abc^2-\frac{3}{2}a^2bc-\frac{1}{2}abc^2+abc^2-2a^2bc$.

35. $-\frac{2}{3}ab^3+3b^2-a^5bc^2+4a^2+3a^5bc^2+3ab^3+\frac{1}{2}a^2-7a^4c.$

36. $3a^5-ab^2-\frac{2}{3}a^7b-3c^2+\frac{1}{2}a^5+2a^7b+\frac{1}{3}c^2-4a^5+2ab^2-4c^2-$
$-3a^4-\frac{10}{3}a^7b+3a^4.$

37. $0{,}5a^2(m+n)^3-2{,}7(a-b)^p+1{,}15a^2(m+n)^3+9c^3-$
$-5{,}65a^2(m+n)^3+2{,}25(a-b)^p.$

38. $2(a^2-x^2)+0{,}5(a^2-x^2)-3(a^2-x)^2-1{,}4(a^2-x^2)+$
$+7{,}5(a^2-x)^2-2{,}75(a^2-x^2).$

39. $5\frac{ab}{a-b}-\frac{4}{3}bc^2-2\frac{ab}{a-b}+\frac{3}{2}\cdot\frac{ab}{a-b}-\frac{c^3}{a-b}+2bc^2+\frac{8}{5}\cdot\frac{c^3}{a-b}.$

40. $-3\frac{a^3x}{a+b}+4b^mx+2\frac{a^3x}{a+b}+\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3x}{a+b}-\frac{x^n}{a-b}+3bx^m+4\frac{a^3x}{a+b}+$
$+\frac{1}{3}b^mx-\frac{8}{3}\cdot\frac{a^3x}{a+b}+\frac{4}{5}\cdot\frac{x^n}{a-b}.$

§ 2. Üksliikmete liitmine.

Et märkida üksliikmete liitmist, võetakse üksliikmed, peale esimese, ühes nende märkidega sulgudesse ja ühendatakse isekeskis märgiga $+$ (pluss). Näit. tähendatakse üksliikmete a, $-b$ ja $+c$ summa $a+(-b)+(+c)$.

Et liita üksliikmeid, tuleb nad üksteise järele ühes nende märkidega kirjutada ja saadud hulkliige koondada, kui see on võimalik. Näit. $-8a^2b+(+7a^2b)=-8a^2b+7a^2b=-a^2b$.

41. $a+(+b)$. **42.** $-m+(-n)$. **43.** $-m+(+m)$.

44. $5a+(-5a)$. **45.** $7x+(+3x)$. **46.** $-4x+(-6x)$.

47. $-10y+(+8y)$. **48.** $\frac{1}{3}m+(-\frac{1}{4}m)$. **49.** $\frac{3}{4}n+(-\frac{7}{8}n)$.

50. $-\frac{2}{9}p+(-\frac{5}{6}p)$. **51.** $+\frac{13}{2}a^2+(-\frac{9}{5}a^2)$.

52. $-7a^2b+(+8a^2b)$. **53.** $15a^3bc^2+(-20a^3bc^2)$.

54. $0{,}25a^3x+(-0{,}7a^3x)$. **55.** $0{,}58(3)x^2y+[-0{,}(4)x^2y]$.

56. $-7ab+(+6ab)+(-2ab)$. **57.** $10x^2+(-5x^2)+(-x^2)$.

58. $2an^3+(-7an^3)+(+3an^3)+(-an^3)$.

59. $2xy^4+(-3xy^4)+(-5x^2y^3)+(+3xy^4)+(+3xy^4)$.

60. $-5c^3+(+3c^3)+(-7c)+(+2c^3)+(+6c)+(-c^3)+(+3c)$.

§ 3. Hulkliikmete liitmine.

Et märkida hulkliikmete liitmist, tuleb liidetavad hulkliikmed, peale esimese, võtta sulgudesse, ühendades nad isekeskis märgiga + (pluss).

Et liita hulkliikmeid, on tarvis esimesele liidetavale juurde kirjutada teise liidetava hulkliikme liikmed ühes nende märkidega jne. ja saadud hulkliige koondada. Näit.: $7ab^2+4a^2b+$ $+(3a^2b-10ab^2)=7ab^2+4a^2b+3a^2b-10ab^2=7a^2b-3ab^2$.

61. $a+(b-c)$. **62.** $a+(-d+2f)$. **63.** $-a^2+(2ab-b^2)$.

64. $m^3+(-5n+3n^2)$. **65.** $-a^2b+(-a^2b+b^3)$.

66. $x^3+(y-3x^3)$. **67.** $(a+b)+(c-b)$. **68.** $m-n+(p+n)$.

69. $(6ab^2-3a^2)+(3a^2+3ab^2)$. **70.** $3a^2b-5ab^2+(-3ab^2+2a^2b)$.

71. $(\frac{3}{4}m-\frac{1}{2})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m)$. **72.** $\frac{5}{6}a+\frac{3}{4}b+(-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b)$.

73. $(\frac{1}{5}a^2-\frac{3}{4}b^2)+(\frac{1}{2}a^2+\frac{7}{8}b^2)$.

Liita hulkliikmed:

74. $14a-6b+3c-5d$ ja $9a+7b-4c-9d$.

75. $4x-5y+3z-2u$, $x+y-4z+5u$, $3x-7y+6z+4u$.

76. x^2-ax+a^2, $2x^2+3ax-2a^2$, x^2+2a^2+ax.

77. $3a^4-4a^3b+7a^2b^2+ab^3$, $-2a^4-6ab^3+a^3b+b^4$, $3a^3b-6a^2b^2+5ab^3$.

78. $x^4+3ax^3-bx^2+3cx-d$, $4x^4-6ax^3+5bx^2-3cx+2d$, $-5x^4-6ax^3-5bx^2-3cx-2d$.

79. $\frac{2}{3}a^2-1\frac{1}{4}ab+\frac{5}{12}b^2$, $-\frac{3}{2}a^2-\frac{2}{5}ab+\frac{3}{4}b^2-\frac{2}{5}a^2b^2$.

80. $14\frac{5}{6}a^3-7\frac{2}{3}a^2b+6\frac{4}{5}ab^2+11\frac{1}{3}b^3$, $-7\frac{1}{2}a^3+14\frac{5}{7}a^2b-$ $-3\frac{5}{9}ab^2-17\frac{1}{5}b^3$.

81. $[2(a-b)+3(a-b)^2-5(a-b)^3+c]+[-4(a-b)^3-2(a-b)^2+$ $+(a-b)+c]$.

82. $[3x^4(x^2+2)^n-3x^2(x^2+2)^{2n}+5x(x^2+2)^{3n}]+[-x^2(x^2+2)^{2n}+$ $+5x(x^2+2)^{3n}-2x^4(x^2+2)^n]$.

83. $4{,}8a^3b^2c-0{,}05a^4b^3c^2+2{,}8a^5b^4c^3+[-0{,}4a^3b^2c+0{,}005a^4b^3c^2-$ $-1{,}4a^5b^4c^3]$.

84. $0{,}8a^2-3{,}47ab-17{,}25ac+3{,}75bc+[-\frac{3}{4}a^2+0{,}47ab+12\frac{5}{8}bc]$.

§ 4. Üksliikmete lahutamine.

Et märkida üksliikmete lahutamist, kirjutatakse vähendatav ilma sulgudeta ja temale kirjutatakse juurde teised üksliikmed (lahutatavad), igaüht eraldi ühes märgiga sulgudesse võttes ja ühendades üksteisega märgiga — (miinus). Näiteks: $3x$-st lahutada $-2x$, kirjutatakse $3x-(-2x)$.

Et lahutada üksliikmeid, on tarvis vähendatavale juurde kirjutada iga lahutatav üksliige vastasmärgiga ja saadud hulkliige koondada. Näiteks: $-15a^3b^2-(-8a^3b^2)=-15a^3b^2+$ $+8a^3b^2=-7a^3b^2$.

85. $a-(+b)$. **86.** $m-(-n)$. **87.** $a-(+a)$.
88. $-n-(-n)$. **89.** $-a-(+a)$. **90.** $3x-(+2x)$.
91. $-5a^2-(-7a^2)$. **92.** $10m-(+5m)$. **93.** $-12m^3-(-8m^3)$
94. $15a^3b^2-(+8a^3b^2)$. **95.** $\frac{3}{4}m-\left(-\frac{5}{6}m\right)$.
96. $-\frac{8}{3}m^2-\left(-\frac{7}{6}m^2\right)$. **97.** $-0{,}2x^p-(+0{,}05x^p)$.
98. $6{,}3a^3b^2c-\left(+\frac{11}{2}a^3b^2c\right)$

Lihtsustada avaldused:

99. $[3a^2-(-5a^2)]-[7a^2-(+2a^2)]$.
100. $[-0{,}5x^3-(+0{,}02x^3)]-[-1{,}2x^3-(-5x^3)]$.
101. $3kl^2-(-3k^2l)-0{,}8kl^2-(+5k^2l)$.
102. $3m^2n^3-[2m^3n^2-(-3m^3n^2)]-[(-5m^2n^3)-(-3m^2n^3)]$.

§ 5. Hulkliikmete lahutamine.

Et märkida hulkliikmete lahutamist, tuleb vähendatav kirjutada sulgudeta, aga lahutatav hulkliige võtta sulgudesse ja ühendada vähendatavaga märgi — (miinuse) abil. Näit.: et märkida hulkliikmete $2a^2-5b$ ja $7a+2b$ lahutamist, kirjutame nii: $2a^2-5b-(7a+2b)$.

Et lahutada hulkliige, on tarvis vähendatavale juurde kirjutada kõik lahutatava hulkliikme liikmed vastasmärkidega ja saadud hulkliige koondada. Näit.: $7{,}5a+6{,}3b-(7{,}3a-6{,}5a)=$ $=7{,}5a+6{,}3b-7{,}3b+6{,}5a=14a-b$.

103. $10-(x+2)$. **104.** $10-(-x+2)$. **105.** $x-(2x-5)$.

106. $-1-(x-1)$. **107.** $-6-(5-m)$. **108.** $n-(m-n)$.

109. $2m-(m+n^2)$. **110.** $8n^2-(3n^2-5m^3)$

111. $\left(\frac{4}{5}x-\frac{3}{7}y\right)-\left(\frac{3}{7}y-\frac{4}{5}x\right)$. **112.** $\frac{17}{8}m^5+\frac{5}{9}n-\left(\frac{17}{8}m^5-\frac{2}{3}n\right)$.

113. $(7{,}5a-5{,}6b)-(2{,}3b-0{,}5a)$.

114. $12{,}5m^2-3{,}8n^3-(8{,}75n^3-13{,}4p)$.

115. $a^2+2ab+b^2$ lahutada $a^2-2ab+b^2$.

116. $4x^2-2xy+3y^2$ lahutada $-x^2+xy+2y^2$.

117. $5a-3b+6c-7d$ lahutada $3a-8b+3c-2d$.

118. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ lahutada $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

119. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ lahutada $a^4+4a^3b+6a^2b^2+$
$+4ab^3+b^4$.

120. $3a^4+7a^2b^2-a^3b-6ab^3+4b^4$ lahutada $a^4-4a^3b+6a^2b^2-$
$-7ab^3+b^4$.

121. $\frac{5}{2}x^2+3ax-\frac{7}{3}a^2$ lahutada $2x^2-\frac{1}{2}a^2-ax$.

122. $5{,}65a+7\frac{2}{3}b-24\frac{3}{4}c-5{,}73d$ lahutada $0{,}3a-935b-5\frac{3}{4}d$.

123. $7(a-x)^2-10(a-x)^4+(a-x)^6$ lahutada $-3(a-x)^4+$
$+5(a-x)^6+9(a-x)^2$.

124. $\frac{2}{3}(a+b)^n+\frac{2}{3}(a-b)^{n+1}-\frac{3}{2}(a-b)$ lahutada $-\frac{3}{5}(a+b)^n-$
$-\frac{3}{2}(a-b)^{n+1}+(a-b)$.

§ 6. Tehted sulgudega.

Kui hulkliikme ees, mis võetud sulgudesse, on märk $+$, siis võib sulgusid ühes eesseisva märgiga ära jätta ehk nii-ütelda s u l u d a v a d a ja kirjutada sulgudes seisvad liikmed nende märkidega; näit. $a+(-b+c)=a-b+c$.

Kui hulkliige ehk tema osa on tarvis võtta sulgudesse, mille ees seisab märk $+$, siis jäävad sulgudesse võetavate liikmete ette endised märgid. Näit.: $a-b-c+d-e$ võib kirjutada järgmiselt: $+(a-b-c+d-e)$ ehk $a+(-b-c+d-e)$ ehk $a-b+(-c+d-e)$ jne.

Kui sulgudes seisva hulkliikme ees on märk—, siis tuleb sulgusid avades kõik sulgudes seisvad liikmed kirjutada vastasmärgiga. Näit. $a-(b-c)=a-b+c$.

Kui hulkliige ehk tema osa on tarvis võtta sulgudesse, mille ees seisab märk —, siis tuleb sulgudesse võetavate liikmete ette panna vastasmärgid. Näit. $a-b-c+d-e$ võib kirjutada $-(-a+b+c-d+e)$ ehk $a-(b+c-d+e)$ ehk $a-b-(c-d+e)$.

125. $a+[b-(c-d)]$. **126.** $a-[(b-c)-d]$.

127. $a-\{b-[c-(d+k)]\}$. **128.** $a+\{b-[c+(d-k)]\}$.

129. $2m-\{3m-[4m-(5m+6m)]\}$.

130. $8m-\{5m+[7m-(10m-2m)]\}$.

131. $a-\{5b+[3c-3a-(a+b)]+2a-(b+3c)\}$.

132. $a+\{4b-[a-(3c-3b)+2c+(a-2b-c)]\}$.

133. $x-\{2y+[3z-3x-(x+z)]\}-[2x-(y+3z)]$.

134. $(3x^2+4y^2)+\{(x^2+2xy-y^2)+[2x^2+2xy-(-4xy+3y^2)]\}$.

135. $7a^m-\{2a^m+[a^n-3a^m+(5a^m-2a^n)-4a^m]-2a^n\}$.

136. $6a^m+\{4a^m-[8b^n-(2a^m+4b^n)-22b^n]\}-\{7b^n+[9a^m-(3b^n+4a^m)+8b^n]+6a^m\}$.

137. Antud hulkliikmete $m+n-p$, $m-n+p$ ja $-m+n+p$ kahe esimese summast lahutada kahe viimase vahe.

138. Antud hulkliikmete $m^2+n^2+p^2+q^2$, $q^2+p^2+n^2$, $m^2-p^2+n^2-q^2$, $m^2-n^2+p^2+q^2$, $n^2+p^2+q^2-m^2$ kahe esimese vahest lahutada nelja viimase summa.

Arvutada:

139. $m+n+p+q$, **140.** $m-n-p+q$,

oletades, et $m=a^2+b^2+c^2$, $n=a^2+b^2-c^2$, $p=a^2-b^2+c^2$, $q=b^2+c^2-a^2$.

Arvutada:

141. $x-y+z-t$, **142.** $y-(x+z-t)$,

oletades, et $x=a^2+ab+b^2$, $y=a^2-ab+b^2$, $z=a^2+ab-b^2$, $t=a^2-ab-b^2$.

143. $y-\{z-[x-(y+t)]\}$,

oletades, et $x=3a^2-2ab+5b^2$, $y=7a^2-8ab+5b^2$, $z=9a^2-5ab+3b^2$, $t=11a^2-3ab-4a^2$.

Arvutada:

144. $E-[F-(G-H)]$, 145. $G-\{F-[H-(E+G)]\}$, oletades, et $E=5a^3+3a^2b-7b^3$, $F=8a^3-9a^2b-3b^3$, $G=9a^2b-3a^3-7b^3$, $H=8a^2b-7a^3-2b^3$.

146. Arvutada $2abx-\{3a^2b-[4abx-(5ab^2-3a^2b)+2a^2b-(abx-2ab^2-a^2b)]\}$, kui $a=-1$, $b=2$, $x=-3$.

147. Hulkliikme $x-y+z-u$ väärtust muutmata jättes kirtada ta mitmel viisil, sulgudesse võttes: 1) kõik hulkliige, 2) viimased kaks liiget, 3) esimesed kolm liiget ja 4) viimased kolm liiget.

148. Hulkliikme $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ väärtust muutmata jättes võtta ta sulgudesse, mille ees seisab märk miinus.

149. Avalduse $a+(b-c+d)-(e+k-f)+(-q-h)-(l-m)$ väärtust muutmata jättes, muuta sulgude ees seisvad märgid vastasmärkideks.

150. Avalduses $5a^3+7a^2x-2ax^2-4x^3$ võtta keskmised liikmed sulgudesse, mille ees märk $+$, ja äärmised liikmed sulgudsәse, mille ees — (miinus).

151. Korrutis $(x+y+z)(x-y-z)$ kujutada kahe suuruse summa ja samade suuruste vahe korrutisena.

152. Korrutis $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$ kujutada kahe kaksliikme summa ja vahe korrutisena.

153. Muuta kaksliikme $a(c-b)+(b-c)$ kuju nõnda, et sulgudes olevad liikmed oleksid võrdsed.

154. Muuta kaksliikme $a(b+c-d)-(d-b-c)$ kuju nõnda et sulgudes seisvad kolmliikmed saaksid võrdseteks.

155. Muuta avalduse $3(a^2-x^2)+2(x^2-a^2)$ kuju nõnda, et sulgudes seisvad suurused saaksid võrdseteks.

156. Kolmliige $2(a^3-b^3)+b^3-a^3$ kujutada kaksliikmena, mille liikmed oleksid sarnased.

§ 7. Üksliikmete korrutamine.

Enne vaatame ühe ja sama suuruse astmete korrutamist. Näit. $a^3 . a^5$. Me teame, et $a^3=a.a.a$ ja $a^5=a.a.a.a.a$, sellepärast $a^3 . a^5=(a.a.a.)(a.a.a.a.a)=a.a.a.a.a.a.a.a=$

$= a^8 = a^{3+5}$ ehk $a^m \,.\, a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,\ldots}_{m\ \text{korda}}\ \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,\ldots}_{n\ \text{korda}} = a^{m+n}$ (sellepärast, et tegurite arv on $m+n$).

Juhis: Et korrutada ühe ja sama suuruse astmeid, tuleb astmenäitajad liita. Nii $a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$. Olgu tarvis korrutada järgmised üksliikmed: $(-3a^2bc^3)\,.\,(-4ab^2d^2)$. Kirjutame kõik tegurid ritta: $(-3)\,.\,a^2\,.\,b\,.\,c^3\,.\,(-4)\,.\,a\,.\,b^2\,.\,d^2$. Et korrutis ei muutu tegurite koha muutmisega, siis võime saadud korrutise järgmiselt kirjutada: $(-3)\,.\,(-4)\,.\,(a^2\,.\,a)\,.\,(b\,.\,b^2)\,.\,c^3\,.\,d^2 = +\,12a^3b^3c^3d^2$.

Juhis: Et üksliiget korrutada üksliikmega, tuleb kordajad, märgijuhist silmas pidades, korrutada, ühesuguste suuruste astmenäitajad liita, ülejäänud tähed tuleb oma astmenäitajatega korrutisse kirjutada. Kui on tarvis rohkem üksliikmeid korrutada, siis tuleb eelmise juhise järele toimetada, selle juures üksliikmete märke mitte unustades. Näiteks: $(-0{,}5ab^2c^2)\,(-4abd^2)\,.\,(7bc^2d) = (-0{,}5)\,.\,(-4)\,.\,7\,.\,a\,.\,b^2\,.\,c^2\,.\,a\,.\,b\,.\,d^2\,.\,b\,.\,c^2\,.\,d = 14a^2b^4c^4d^3$.

157. $(+a)\,.\,(-b)$. **158.** $(-c)\,.\,(-d)$. **159.** $(-m)\,.\,(+n)$.
160. $(-a)\,.\,(+b)\,.\,(-c)$. **161.** $(+m)\,.\,(-n)\,.\,(-p)$.
162. $(+x)\,.\,(+y)\,.\,(-z)\,.\,(-t)$. **163.** $(+x)\,.\,(-y)\,.\,(-z)\,.\,(-t)$.
164. $a^3\,.\,a^2$. **165.** $b^7\,.\,b$. **166.** $c^n\,.\,c^2$. **167.** $d^m\,.\,d^m$.
168. $x^a\,.\,y^{2a}$. **169.** $x\,.\,x^2\,.\,x^3$. **170.** $y^a\,.\,y^3\,.\,y^7$. **171.** $z^m\,.\,z^n\,.\,z^p$.
172. $u^m\,.\,u^m\,.\,u^n$. **173.** $a^{2n-1}\,.\,a^{2n+1}$. **174.** $b^{m-4}\,.\,b^{m+3}$. **175.** $b^{4n-2}\,.\,b^2$.
176. $c^{2n-1}\,.\,d^{n+1}$. **177.** $3a^2\,.\,5a^5$. **178.** $7a^2b\,.\,3a^3b^2$.
179. $10a^5bc\,.\,2ab^4d^3$. **180.** $\frac{2}{3}a^2b^3c\,.\,2\frac{1}{3}a^3bcd^3$.
181. $-\frac{1}{2}a^5b^4c^3\,.\,-\frac{3}{4}ab^2c^nd$. **182.** $5a^mb^{n-2}\,.\,-\frac{2}{7}a^nb^{m+2}c^n$.
183. $-4{,}2a^{4n}x^{2m}\,.\,5a^3xy^n$. **184.** $-0{,}(3)c^xd^{y-1}k^3\,.\,-2\frac{1}{4}cd^{2-y}$.
185. $-0{,}(3)y^{2m+n-1}\,.\,-0{,}2y^{n-3m}$. **186.** $0{,}58(3)x^{n+2m-3}\,.\,-\frac{3}{4}x^{1-n}y$.
187. $-3(a-b)^2\,.\,\frac{1}{6}(a-b)^3$. **188.** $5(m+2n)^7\,.\,1\frac{1}{5}(m+2n)$.
189. $-\frac{2}{3}x(y+z)^p\,.\,\frac{3}{2}x^2(y+z)^{p-1}$.
190. $a^2(a^3-b^3)^2\,.\,(a^3-b^3)^6\,.\,a(a^3-b^3)$.
191. $x^5(m-n)^{m-1}\,.\,x(m-n)^{5-2m}\,.\,(m-n)^2$.

192. $a^5 . a^5$. **193.** $x^2 . x^2$. **194.** $3a . 3a$. **195.** $5a^3 . 5a^3 . 5a^3$.
196. $2a^3b^2c . 2a^3b^2c$. **197.** $a^2 . a^2 . a^2$. **198.** $b^5 . b^5 . b^5 . b^5$.
199. $5a^2b . 5a^2b . 5a^2b$. **200.** $(7a^3cx^2)^2$. **201.** $(5ac^2x^3)^3$.
202. $(-\frac{3}{4}x^4y^5)^2$. **203.** $(-2\frac{1}{2}xy^3)^3$. **204.** $(-\frac{3}{5}a^2x^m)^2$. **205.** $(-\frac{3}{4}b^3y^p)^4$.
206. $[3a^2b+(-6a^2b)-(-2a^2b)] . 2ab^4c^3$.
207. $[-7{,}4m^{12}n^4+(-7{,}6m^{12}n^4)] . (0{,}4m^2n^3-2an^3)$.
208. $[3c^3x^4-(5\frac{1}{8}c^3x^4-9\frac{5}{24}c^3x^4)] . (2ac^2x^2-\frac{4}{3}ac^2x^2)$.

§ 8. Hulkliikme korrutamine üksliikmega,

Olgu tarvis üksliikmega korrutada hulkliiget: $m(a+b-c)$. See tähendab, et hulkliige $a+b-c$ tuleb võtta liidetavana m korda: $m(a+b-c)=(a+b-c)+(a+b-c)+ \ldots +(a+b-c) \ldots$ (m korda).

Sulud avades saame:

$$m(a+b-c)=a+b-c+a+b-c+ \ldots +a+b-c \ldots$$

Arusaadav, et parempoolses osas a, b ja $-c$ korduvad m korda:

$$m(a+b-c)=\underbrace{a+a+ \ldots}_{m \text{ korda}}\ \underbrace{b+b+ \ldots}_{m \text{ korda}}\ \underbrace{-c-c- \ldots}_{m \text{ korda}}$$

Et aga sarnaseid liidetavaid võib koondada, liidetavate arvu kordajaga m näidates, saame $m(a+b-c)=ma+mb-mc$.

Juhis: Et üksliikmega korrutada hulkliiget, tuleb igaüht hulkliikme liiget korrutada selle üksliikmega ja korrutised algebraliselt liita.

Et korrutis ei muutu tegurite koha muutmisega, siis võime kirjutada, et $m(a+b-c)=(a+b-c)m=ma+mb-mc$.

Polünoomi iga liikme korrutamisel antud üksliikmega tuleb üksliikmete korrutamise juhist meeles pidada. Näide: $(5a^3b+ + 7a^2b^2 - ab^3) . 3a^3b^2 = 5a^3b . 3a^3b^2 + 7a^2b^2 . 3a^3b^2 - ab^3 . 3a^3b^2 = = 15a^6b^3 + 21a^5b^4 - 3a^4b^5$.

209. $(a+b-c) . 3$. **210.** $(2a-4b+c) . 3$.
211. $(-5x+3y-8z) . -2$. **212.** $(x-y+z) . -\frac{3}{5}$.
213. $2(a+b-c)$. **214.** $-5(-a-b+c+d)$.

215. $(m+n-p)\cdot -\frac{6}{7}$. **216.** $(7a-3b+2c)\,.\,2d$.

217. $(11a+4b-3c+d)\,.\,5k$. **218.** $(3a^2b-2ab^2+b^3)\,.\,2a^2b^2$.

219. $(-5b^2+2bc^3-4cd)\cdot\frac{1}{2}b^2c^3$. **220.** $(\frac{2}{3}a^3-0{,}4ab^2+0{,}6d^4)\cdot\frac{2}{3}a^2d$.

221. $(-2a^2b^2+5ab^3-7b^4)\,.\,-4ab$.

222. $-2a^3x^3\,.\,(-4a^2x+5a^3x^3-3ax^2)$.

223. $1\frac{1}{2}mn^2\,.\,(\frac{5}{3}m^2-\frac{2}{3}m^2n+\frac{3}{4}mn^2)$.

224. $(7a^n-3a^{n-1}b+2a^{n-2}b^m)\,.\,-0{,}4a^{n+2}b^3$.

225. $(-\frac{2}{3}d^{2-m}e^{3-2n}+4{,}8d^me^n-0{,}4e^{5-2n})\,.\,-5d^{2m}e^{2n}$.

226. $-\frac{2}{3}b^pc^q\ (3b^5-4c^3+9b^3c^2-27)$.

227. $(8a^{1-2m}+b^{3-n}-\frac{1}{2}a^{2-3m}b^{5-2n}+2b^4)\,.\,6a^{3m-1}b^{2n-3}$.

228. $(-9x^py^q-4x^{p-1}y^{q-2}+3x^{p-2}y^{q-4}-y^{q-6})\,.\,-0{,}5x^{p+2}y^{p+q}$.

229. $[x^2(x^2+2)^n-2x(x^2+2)^{n+2}+4(x^2+2)^{n+3}]\,.\,-3x^3(x^2+2)^{n-3}$.

230. $[\frac{2}{3}(a+b)^q(a-b)^{q-2}-\frac{5}{6}(a+b)^{p-1}(a-b)^{q-1}-$
$-\frac{4}{9}(a+b)^{p-2}(a-b)^q]\,.\,0{,}6(a+b)^{p+2}(a-b)^{q+2}$.

§ 9. Hulkliikmete korrutamine.

Olgu tarvis korrutada hulkliikmeid: $(a+b-c)$ ja $(m+n)$. Märgime esimese hulkliikme kui üksliikme k abil ja arvutame korrutamise: $k(m+n)=km+kn$. Saadud korrutisse paigutame k asemele tema väärtuse $(a+b-c)$, saame

$$(a+b-c)\,(m+n)=(a+b-c)m+(a+b-c)n$$

Korrutises tuleb hulkliiget korrutada üksliikmega, mida tehes saame:

$$(a+b-c)\,(m+n)=(a+b-c)m+(a+b-c)n=$$
$$=am+bm-cm+an+bn-cn.$$

Juhis: Et hulkliiget korrutada hulkliikmega, tuleb esimese hulkliikme iga liiget korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised algebraliselt liita. Kui on sarnaseid liikmeid, siis tuleb need koondada.

Kui polünoomi liikmetes esinevad ühe ja sama tähe astmed, siis on korrutamisel tähtis korraldada antud hulkliikmed selle tähe tõusvate või alanevate astmete järjekorras.

Näide: Võtame hulkliikme $3a^3+ab^2-2a^2b$. Et teda korraldada näit. tähe b alanevate astmete järjekorras, otsime kõige enne üles liikme, kus esineb b kõige suuremal astmel, ja paneme selle esimeseks liikmeks, siis liikme, kus ta leidub järgneval vähemal astmel jne.; näit. $ab^2-2a^2b+3a^3$. Siit näeme, et hulkliige on korraldatud tähe b alanevate astmete ehk tähe a tõusvate astmete järjekorras.

Niimoodi seatud hulkliikmeid nimetatakse korraldatud hulkliikmeteks.

Liiget, milles antud täht esineb kõige suurema astmenäitajaga, nimetatakse ülemaks liikmeks, kuna kõige väiksema astmenäitajaga liiget nimetatakse alamaks liikmeks. Korraldatud hulkliikmes seisavad nimetatud liikmed kas hulkliikme alguses või lõpus.

Korraldatud hulkliikmeid korrutades tuleb hulkliikmed üksteise alla kirjutada ja üldse tehe nii rakendada:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 3a^3-2a^2b+ab^2 & & & \\
\times & 2a^2-ab-5b^2 & & & \\
\hline
6a^5-4a^4b+ & 2a^3b^2 & & & \\
-3a^4b+ & 2a^3b^2- & a^2b^3 & & \\
 & -15a^3b^2+ & 10a^2b^3- & 5ab^4 & \\
\hline
6a^5-7a^4b- & 11a^3b^2+ & 9a^2b^3- & 5ab^4. &
\end{array}
$$

Niisuguse rakenduse korral kirjutame sarnased liikmed sarnaste alla, mis nende leidmist ja koondamist hõlbustab.

Siin tuleb tähele panna, et korrutise kõrgem aste võrdub korrutaja ja korrutatava kõrgemate astmete korrutisega, alam aste aga korrutaja ja korrutatava alamate astmete korrutisega, kuna vahepealsetes liikmetes saadud sarnased liikmed on saadud üksikutest osakorrutistest. Niiviisi ilmub ainult kõrgem ja alam liige korrutises teatavate liikmete korrutisena.

231. $(a+b)(c+d)$. **232.** $(3a-4b)(2c+5d)$. **233.** $(3a+2b)(a-b)$.

234. $(4b-5c)(3b+4c)$. **235.** $(2a^2+3b^2)(3a^2-2b^2)$.

236. $(6a^3b-5b^2)(2ab^3+3a^2)$. **237.** $(8a^m-3ab^{2n})(2a+a^{2m}b^{n-4})$.

238. $(5c^{m-2}d^n+4cd^{3-n})(2c^{4-m}-cd^{n+4})$.

239. $(x-y+z)(a+b)$. **240.** $(a^2+3ab-2b^2)(2a^2-3b)$.

241. $(3x^2-4x+7)(5x^2-x-4)$.

242. $(5a^3-2a^2x+ax^2)(2a^2-ax+x^2)$. #242 tegin tahvli peal valmis matemaatika tunni ajal—

243. $(a^2-2bx+x^2)(a^2+2bx-x^2)$.

244. $(8x^3-4x^2y+2xy^2-y^3)(2x-3y)$.

245. $(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$.

246. $(a^6+3a^4b^2+9a^2b^4+27b^6)(a^2-3b^2)$.

247. $(x^3-6ax^2+12a^2x-8a^3)(x^2-4ax+4a^2)$.

248. $(a^2-2a+1)(a^4+2a^3+3a^2+2a+1)$.

249. $(x^4-7x^3y+6x^2y^2+8xy^3-2y^4)(x^2-3xy+2y^2)$.

250. $(2a^5-b^3+1)\,.\left(a^5-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{2}\right)$.

251. $\left(\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}\right)$.

252. $\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)$.

253. $(0{,}02a+2a^3-0{,}4a^5)\,.\,(-0{,}1a^2+0{,}03a^4-0{,}5a^6)$.

254. $[0{,}(3)a^3+0{,}6a^2x-\frac{5}{6}ax^2+0{,}5x^3]\,.\,[\frac{1}{2}x^2-0{,}(72)ax-0{,}(5)a^2]$.

§ 10. Lühendatud korrutamine valemite abil.

On tarvilik korrutamise lühendamiseks teada mõned järgnevad korrutamisvalemid:

I. Kahe liikme summa korrutis nende vahega võrdub samade liikmete ruutude vahega:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

sellepärast, et $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

II. Kahe liikme ~~summa~~ ruut võrdub esimese liikme ruuduga, pluss kahekordne liikmete korrutis, pluss teise liikme ruut:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

sellepärast, et

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

III. Kahe liikme vahe ruut võrdub esimese liikme ruuduga, miinus kahekordne liikmete korrutis, pluss teise liikme ruut:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \text{ (tõestada!)}.$$

IV. Kahe liikme summa kuup võrdub esimese liikme kuubiga, pluss kolmekordne esimese liikme ruudu korrutis teise liikmega, pluss kolmekordne esimese liikme korrutis teise liikme ruuduga, pluss teise liikme kuup:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

sellepärast, et $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

V. Kahe liikme vahe kuup võrdub esimese liikme kuubiga, miinus kolmekordne esimese liikme ruudu korrutis teise liikmega, pluss kolmekordne teise liikme ruudu korrutis esimese liikmega ja miinus teise liikme kuup:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \text{ (tõestada!)}.$$

Peale selle tuleks tähele panna järgnevaid valemeid, mis korrutamist kergendavad ja lühendavad:

$(a+b)(b-a)=b^2-a^2,$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,\quad (x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab,$

$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab,\quad (x-a)(x+b)=x^2-(a-b)x-ab,$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,\quad (a+b)(a^2-ab+b)=a^3+b^3,$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$

Antud valemite abil lahendada järgnevad ülesanded:

255. $(x+y)^2$. **256.** $(2x-a)^2$. **257.** $(3x+5y)^2$.
258. $(7c-4d)^2$. **259.** $(1+2x^2)^2$. **260.** $(a^2-b^2)^2$.
261. $(a^3+b^3)^2$. **262.** $(5a^2-2b^4)^2$. **263.** $(2x^2+5x)^2$.
264. $(4a-3a^2)^2$. **265.** $(9m^3+5p^2n)^2$. **266.** $(1+a)(1-a)$.
267. $(y+3)(y-3)$. **268.** $(3ab-1)(3ab+1)$.
269. $(3x-2y)(3x+2y)$. **270.** $(5x^2-2y^3)(5x^2+2y^3)$.
271. $(3ab^2+5a^2b)(3ab^2-5a^2b)$. **272.** $(5-bx^3)(bx^3+5)$.
273. $(a^4x+ax^4)(ax^4-a^4x)$. **274.** $(7n^4-6m)(6m+7n^4)$.

275. $(2a^2-\frac{1}{4}b^3)^2$. **276.** $(3x^3+\frac{1}{6}y^2)^2$. **277.** $(\frac{2}{3}xy-\frac{3}{4}x^2)^2$.

278. $(5y^5+0,1)^2$. **279.** $(1,2-5y^6)^2$.

280. $(a^p+\frac{3}{2}ax^4)^2$. **281.** $(a^{n+1}-\frac{1}{2}a^{n-1}c^5)^2$.

282. $(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3+\frac{3}{4}x^{m+1}y)^2$. **283.** $(\frac{3}{5}np^3x^{2z-2}-\frac{5}{6}c^4n^sx^{3-z})^2$.

284. $(2a+0,3)(2a-0,3)$. **285.** $(2\frac{1}{2}-7ax^3)(2\frac{1}{2}+7ax^3)$.

286. $[2\frac{1}{2}a^{n-3}-0,41(6)]\,[2\frac{1}{2}a^{n-3}+0,41(6)]$.

287. $(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$. **288.** $(3+x)(3-x)(9-x^2)$.

289. $(x+y-z)(x+y+z)$. **290.** $(a-b+c)(a-b-c)$.

291. $(2x-y+3z)(2x+y-3z)$. **292.** $(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$.

293. $(a^3b^3+a^6+b^6)(a^3b^3-a^6-b^6)$. **294.** $(a-2b-3c)(a+2b-3c)$.

295. $(a+2b+3c+d)(a+2b-3c-d)$.

296. $(2+a^2+3a^3+d^2)(2-a^2+3a^3-d^2)$.

297. $(1-x-3x^3+2x^2)(1-x+3x^3-2x^2)$.

298. $(y+2z)^3$. **299.** $(2u+v)^3$. **300.** $(5-a)^3$.

301. $(b-3a)^3$. **302.** $(7d^2-2)^3$. **303.** $(10-x^2)^3$.

304. $(x^2+y^3)^3$. **305.** $(9m^3-5n^2)^3$. **306.** $(m^2n+pn^2)^3$.

307. $(8z^4+9)^3$. **308.** $(3-10x^5)^3$. **309.** $(4xy^2+3xyz)^3$.

310. $(\frac{2}{3}m^2-\frac{3}{4}pn^2)^3$. **311.** $(2a+\frac{1}{2}b^2c)^3$. **312.** $(0,1a-5n^3)^3$.

313. $(a+1)(a+2)$. **314.** $(x-2)(x-3)$. **315.** $(x-2)(x+5)$.

316. $(3a+7)(3a-4)$. **317.** $(4x-3)(4x+9)$.

318. $(2a+11)(2a-5)$. **319.** $(b^2+3)(b^2+4)$.

320. $(c^3-2)(c^3-6)$. **321.** $(3y^2+8)(3y^2+12)$.

322. $(1+3a)(1+b)$. **323.** $(1+3a)(1-b)$.

324. $(10-5b)(10+c)$. **325.** $(10-5b)(10-c)$.

326. $(m+2)(m+n)$. **327.** $(x-3)(x-a)$.

328. $(3x^2-m)(3x^2+p)$. **329.** $(5y^3-a)(5y^3-b)$.

330. $(ay^m+b)(ay^m-c)$. **331.** $(x^2+xy+y^2)\,.\,(x-y)$.

332. $(m^2-mn+n^2)(m+n)$. **333.** $(2^2+2a+a^2)\,.\,(2-a)$.

334. $(d^2-5d+25)(d+5)$. **335.** $(y^2+3yz+9z^2)(y-3z)$.

336. $(9m^2-3am+a^2)(3m+a)$. **337.** $(a^6+3a^3+9)(a^3-3)$.

338. $(16m^4-4m^2y^4+y^8)(4m^2+y^4)$.

339. $(49x^6+56x^3y+64y^2)(7x^3-8y)$.

340. $[2a+4b+(-5c)]^2$. **341.** $[2x+(-3y)+5z]^2$.

342. $(3m+2n-p)^2$. **343.** $\left(\frac{1}{2}x^2-4y-\frac{2}{3}y^2\right)^2$.

344. $\left(\frac{3}{4}a^3-8ab+\frac{1}{3}b^2\right)^2$. **345.** $(x+y+3)^3$.

346. $[x+(-y)+z]^3$. **347** $[a+b+(-c)]^3$.

348. $(a-b-c)^3$. **349.** $(2a-b+1)^3$. **350.** $(3a^2+ab-1)^3$.

351. $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)^3$. **352.** $\left(\frac{m}{4}+\frac{1}{5}-\frac{n}{2}\right)^3$.

353. $\left(2a^2-\frac{1}{3}ab+b^2\right)^3$. **354.** $\left(3a^3+a^2b-\frac{1}{3}ab^2\right)^3$.

Korrutada valemite abil, enne tegurid vastavalt rühmitades:

355. $(a+2)(a-2)(a^2+4)$. **356.** $(a-3)(a+2)(a-2)$.

357. $(x+a)(x-a)^2$. **358.** $(x+a)^3(x-a)$.

359. $(m+2)(m-2)(m-2)(m+2)$.

360. $(m+3)^2(m-3)^2$. **361.** $(a+b)^2(a-b)^3$.

362. $(a+b)(a-5)(a-b)(a+5)$.

363. $(x^2y-xy^2)(x^4y^2+x^2y^4)(x^2y+xy^2)$.

364. $(xy+2x^2)(x^2y^2-4x^4)(xy-2x^2)$.

365. $(a-b)(a+3c)(a+b)(a-3c)$.

366. $(2a+b)(a-c)(2a-b)(a-c)$.

367. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

368. $(x-2y)(x^2-2xy+4y^2)(x+2y)(x^2+2xy+4y^2)$.

369. $(m^2-mn+n^2)(m^2+mn+n^2)(m^4-m^2n^2+n^4)$.

370. $(m^2+mn-2n^2)(m^2-mn-2n^2)(m^4+5m^2n^2+4n^4)$.

371. $(a^2-a+1)(a^2+a+1)(a^4+a^2+1)$.

372. $(a^2+2a-1)(a^2-2a-1)(a^4-6a^2+1)$.

373. $(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(x-y-z)$.

374. $(x+y+z)(x+z-y)(y+x-z)(x-z-y)$.

Järgnevates ülesannetes arvutada tehted, tarvitades lühendatud korrutamise valemeid:

375. $21^2=(20+1)^2$. **376.** $49^2=(50-1)^2$.

377. 87^2. **378.** 102^2. **379.** 58^2. **380.** 25^2.

381. 55^2. **382.** 105^2. **383.** $47 \cdot 33=(40+7)(40-7)$.

384. $24 \cdot 16$. **385.** $84 \cdot 76$. **386.** $97 \cdot 103$. **387.** $88 \cdot 112$.

388. $125 \cdot 115$. **389.** $209 \cdot 191$. **390.** $42 \cdot 43=(40+2)(40+3)$.

391. $62 \cdot 57 = (60 + 2)(60 - 3)$. **392.** $101 \cdot 98$. **393.** $29 \cdot 27$.
394. $89 \cdot 87$. **359.** $205 \cdot 206$. **396.** $12^3 = (10 + 2)^3$.
397. $29^3 = (30 - 1)^3$. **398.** 41^3. **399.** 98^3.
400. 112^2. **401.** 408^2. **402.** 999^2. **403.** 1003^2.
404. $25^2 - 15^2 = (25 + 15)(25 - 15)$. **405.** $43^2 - 33^2$. **406.** $18^2 - 12^2$.
407. $88^2 - 12^2$. **408.** $323^2 - 77^2$. **409.** $565^2 - 35^2$. **410.** $984^2 - 26^2$.

§ 11. Üksliikmete jagamine.

Enne üksliikmete jagamist tuleb vaadelda ühe ja sama suuruse astmete jagamist.

Et jagamine on korrutamise vastupidine tehe, siis võime antud korrutise ja ühe teguri abil leida teise teguri, korrutist jagades antud teguriga.

Et $a^4 \cdot a^3 = a^7$, siis $a^7 : a^3 = a^4 = a^{7-3}$ ehk et $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, siis $a^{m+n} : a^m = a^n = a^{m+n-m}$.

Et ühe ja sama suuruse astmeid jagada, tuleb jagatava astmenäitajast jagaja astmenäitaja lahutada. Siin võib peale ülemaltoodud juhuse tekkida veel kaks juhust: 1) kui astmenäitajad on võrdsed või 2) kui jagaja astmenäitaja on jagatava astmenäitajast suurem. Näit.: $a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$ ehk $a^2 : a^2 = 1$, sellepärast $a^0 = 1$. $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$ ehk, tarvitades jagamiseks murrujoont, saame:

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

Et samade suuruste jagatised on võrdsed, siis $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Iga suuruse nulline aste on 1.

Iga suurus negatiivse astmenäitajaga võrdub ühelisega, mis on jagatud sama suurusega, ainult positiivse astmenäitajaga.

Jagamine on korrutamise vastupidine tehe. Korrutamisel saame:

$$(5ab^2c) \cdot (-2abc^2d) = -10a^2b^3c^3d.$$

Jagades korrutist $-10a^2b^3c^3d$ ühe teguriga $-2abc^2d$, saame jagatises teise teguri: $(-10a^2b^3c^3d):(-2abc^2d)=5ab^2c$. Jagatist vaadeldes näeme, et jagatise kordaja võrdub jagatava ja jagaja kordajate jagatisega, kuna jagatise tähtede astmenäitajad saame, kui jagatava tähtede astmenäitajatest lahutame jagaja samade tähtede astmenäitajad.

Juhis: Et üksikliiget jagada üksikliikmega, tuleb jagatava kordaja jagada jagaja kordajaga (märgijuhist mitte unustada!) ja jagatava tähtede astmenäitajatest lahutada jagaja samade tähtede astmenäitajad, ülejäänud jagatava tähed kanda jagatisse muutmata.

411. $-2a:2$. **412.** $5a:(-5)$. **413.** $7b:(-7)$.
414. $-9a:(-9)$. **415.** $4a:a$. **416.** $-8a:a$.
417. $5d:(-d)$. **418.** $-10c:(-c)$. **419.** $6mn:3n$.
420. $-3mn:2n$. **421.** $8abc:(-2b)$. **422.** $-9abc:(-3b)$.
423. $-5xyz:5xz$. **424.** $7xyz:-7xz$. **425.** $-14cd:(-7cd)$.
426. $-12a^2:4a$. **427.** $a^5:a^2$. **428.** $b^7:b^4$.
429. $x^{12}:-x^7$. **430.** $-x^{10}:x^9$. **431.** $m^{15}:m$.
432. $n^{13}:n^{12}$. **433.** $m^5:m^5$. **434.** $m^8:m^{10}$.
435. $x^m:x^n$. **436.** $-x^{2m}:x^m$. **437.** $x^m:x^m$.
438. $x^{5m}:x^{6m}$. **439.** $-a^n:a^{4n}$. **440.** $-a^{2n}:-a^{8n}$.
441. $a^{n+2}:a^n$. **442.** $b^m:b^{m-5}$. **443.** $x^k:x^{k+2}$.
444. $y^{l-3}:y^l$. **445.** $x^{k+3}:x^{k-2}$. **446.** $y^{k+l}:y^{k-2l}$.
447. $16a^3b^2:8a^2b$. **448.** $35a^5b^3c:7a^4b$. **449.** $24x^8y^3z:3x^5yz$.
450. $48x^my^4zu:6x^nz$. **451.** $42a^mb^3d:\frac{2}{3}a^2b$. **452.** $2a^mb^n:9a^3b$.
453. $6a^8b^mc^n:-4ab^5$. **454.** $-12a^mb^3c^p:-9ac^q$.
455. $-22ab^md^3:2\frac{3}{4}ab^2d$. **456.** $0{,}6b^7c^{m+1}:-3b^6c^{m-1}$
457. $-3a^{m+n}b^{m-n}c:-1{,}5a^mb^n$. **458.** $6m^2(n+2p)^5q:-3m(n+2p)$.
459. $\frac{1}{2}a^5(b-c)^3(b+c)^5:\frac{3}{4}a(b-c)^2$.
460. $-10(a-1)^{m+n}(a+b)^{n+2}c^p:-3\frac{3}{4}(a-1)^{m-n}(a+b)^{n-3}c^q$

§ 12. Hulkliikme jagamine üksliikmega.

Olgu tarvis hulkliiget $5a^3b^3-35a^2b^2c^2+20a^5bc^4$ jagada üksliikmega $-5a^2b$. Otsitavat jagatist korrutades jagajaga peame saama kolmeliikmelise jagatava; sellepärast peab ka jagatises kolmliige olema, sest kaksliikme korral oleks jagatise ja jagaja korrutis ka kaksliige.

Jagatise iga liikme korrutisele jagajaga vastab liige jagatavas; sellepärast saame jagatise liikmed, kui jagatava liikmed üksikult jagame jagajaga:

$$(5a^3b^3-35a^2b^2c^2+20a^5bc^4):(-5a^2b)=-ab^2+7bc^2-4a^3c^4.$$

Juhis: Et hulkliiget jagada üksliikmega, tuleb hulkliikme iga liige jagada üksliikmega. Viimaste jagamisel üksliikmete jagamise juhise järele toimetada.

461. $(6a+8b-2c):2$. **462.** $(-am-bm+cm):-m$.

463. $(ax+ay-az):a$. **464.** $(15a^2-9a^5+18a^9):3a^2$.

465. $-(6x^2y-4x^2z-6xyz):2x$.

466. $(3a^3b^2-15a^2b^4-12ab^6c):-3ab^2$.

467. $(a^3x^3y-3a^2x^2y+3ab^2xy^2):axy$.

468. $(-35x^3+15x^2y-x^2y^2):-5x^2y$.

469. $(42a^4b^3-9a^3b^4+16a^2b^5):6a^2b^3$.

470. $(-4a^2b+6ab^2-12a^3b^5):-\frac{3}{4}ab$.

471. $(6a^3b^4-9a^{10}b^6+2a^2b^2):3a^5b^5$.

472. $(4m^5n^2+\frac{2}{9}m^4n^5-\frac{6}{7}m^3n^6):-\frac{2}{3}m^3n$.

473. $(0{,}5x^8y^7-0{,}32x^7y^8-\frac{1}{3}x^6y^9+\frac{4}{5}x^5y^8):-0{,}(6)x^5y^7$.

474. $(2m^2n^3-3n^2p^3+4p^2q^3-5q^2r^3):-3m^2n^2p^2q^2$.

475. $(46c^{3m-1}-23c^{3m}+20c^{3m+1}-0{,}2c^{3m+2}):23c^{3m-n}$.

476. $[0{,}7a^px^{3q}+\frac{1}{3}a^{p-2}x^{q+3}-0{,}(27)a^{p-3}bx^{q+5}-\frac{5}{6}a^{p-4}x^{2q}]:$
$:-\frac{3}{4}a^{p-5}x^{2q-7}$.

477. $[2x^2(a+b)^4-2xy(a+b)^3+(a+b)^2x]:4x(a+b)^2$.

478. $[10x^3(a-b)-7x^2(a-b)^3+5x(a-b)^4]:-5x^2(a-b)^2$.

479. $[-7ab(x-y^2)^3+8a^2(x-y^2)^6-9a^3b(x-y^2)^5]:-12a(x-y^2)^3$.

480. $[4(a-b)^m-3(a-b)^n+2(a-b)^p]:6(a-b)^n$.

§ 13. Hulkliikmete jagamine.

Korraldatud hulkliikmete korrutamisel on ainult ülemal ja alamal liikmel teatav kindel saamisviis, kuna vahepealsetes liikmetes on koondatud mitmed sarnased liikmed. Kui on tarvis hulkliiget jagada hulkliikmega, siis on kerge leida jagatise ülemat ja alamat liiget.

Olgu tarvis hulkliiget $9a^2b^3-7a^4b-11a^3b^2-5ab^4+6a^5$ jagada hulkliikmega $2a^2-ab-5b^2$. Enne korraldame mõlemad hulkliikmed näiteks tähe a alanevate astmete järjekorras. Jagatise ülema ehk esimese liikme saame, kui jagatava ülema liikme jagame jagaja ülema liikmega. Esimest jagatise liiget, mis võrdub $3a^3$, korrutades jagajaga, saame esimese osakorrutise. Viimast jagatavast lahutades saame e s i m e s e j ä ä g i.

Rakendus: $(9a^2b^3-7a^4b-11a^3b^2-5ab^4+6a^5):(2a^2-ab-5b^2)=$

$$
\begin{array}{r|l}
=6a^5-7a^4b-11a^3b^2+9a^2b^3-5ab^4 & 2a^2-ab-5b^2 \\ \cline{2-2}
-6a^5\mp 3a^4b\mp 15a^3b^2 \qquad\qquad\qquad & 3a^3 \\ \cline{1-1}
-4a^4b+4a^3b^2+9a^2b^3-5ab^4 &
\end{array}
$$

Esimene jääk sisaldab eneses jagaja korrutise jagatise ülejäänud liikmetega, alates teisest liikmest; järjelikult on jäägi ülem liige jagaja esimese liikme korrutis jagatise teise liikmega. Sellepärast tuleb jagatise teise liikme leidmiseks esimese jäägi ülem liige jagada jagaja ülema liikmega.

Antud juhusel võrdub teine jagatise liige:

$$-4a^4b:2a^2=-2a^2b.$$

Korrutades jagatise teist liiget jagajaga saame niinimetatud teise osakorrutise, mille lahutame esimesest jäägist, ja siis saame teise jäägi:

$$
\begin{array}{r|l}
6a^5-7a^4b-11a^3b^2+9a^2b^3-5ab^4 & 2a^2-ab-5b^2 \\ \cline{2-2}
-6a^5\mp 3a^4b\mp 15a^3b^2 \qquad\qquad\qquad & 3a^3-2a^2b \\ \cline{1-1}
-4a^4b+4a^3b^2+9a^2b^3-5ab^4 & \\
\mp 4a^4b\pm 2a^3b^2\pm 10a^2b^3 \qquad & \\ \cline{1-1}
2a^3b^2-a^2b^3-5ab^4 &
\end{array}
$$

Teine jääk on jagaja korrutis jagatise ülejäänud liikmetega, alates kolmandast, ja jäägi ülem liige $2a^3b^2$ on jagaja ülema liikme ja jagatise kolmanda liikme korrutis; järjelikult on jagatise kolmas liige $2a^3b^2:2a^2=ab^2$. Jagatise kolmandat liiget korrutades jagajaga, saame kolmanda osakorrutise, mille jällegi lahutame jäägist jne., kuni jäägis saame nulli.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6a^5 & -7a^4b & -11a^3b^2 & +9a^2b^3 & -5ab^4 & 2a^2-ab-5b^2 \\
-6a^5 & \pm 3a^4b & \mp 15a^3b^2 & & & \overline{3a^3-2a^2b+ab^2} \\
\hline
& -4a^4b & +4a^3b^2 & +9a^2b^3 & -5ab^4 & \\
& \mp 4a^4b & \pm 2a^3b^2 & \pm 10a^2b^3 & & \\
\hline
& & 2a^3b^2 & -a^2b^3 & -5ab^4 & \\
& & -2a^3b^2 & \mp a^2b^3 & \mp 5ab^4 & \\
\hline
& & & 0 & &
\end{array}
$$

Et hulkliiget jagada hulkliikmega, tuleb peale seda, kui jagatav ja jagaja on korraldatud mingi tähe astmete järjekorras, jagada jagatava esimene liige jagaja esimese liikmega, — saame jagatise esimese liikme. Saadud jagatise liiget korrutame jagajaga ja korrutise lahutame jagatavast, — saame esimese jäägi; esimese jäägi esimest liiget jagades jagaja esimese liikmega, saame jagatise teise liikme. Saadud teist jagatise liiget korrutame jagajaga ja korrutise lahutame esimesest jäägist, — saame teise jäägi; teise jäägi esimest liiget jagades jagaja esimese liikmega, saame jagatise kolmanda liikme jne.

Ülesanded, mille jagamisel saadakse jääk, on tähendatud märgiga *.

Jagada:

481. $(x^2+2ax-8a^2):(x-2a)$. **482.** $(6x^2+ax-a^2):(2x+a)$.

483. $(a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3):(a^2-b^2)$.

484. $(a^5-a^3b^2+a^2b^3-b^5):(a^3+b^3)$

485. $(3+8x+x^2-2x^3):(1+2x-x^2)$.

486. $3-6x^2+4x^4-x^6):(3-3x^2+x^4)$.

487. $(6a^2b+9a^3-6ab^2-4b^3):(3a+2b)$.

488. $(2a^3+6ab^2-15b^3-5a^2b):(2a-5b)$.

489. $(-6+13x-2x^3-3x^2):(2-x^2-3x)$.

490. $(15-3x^3+5x^2-9x):(5-3x)$.

491. $(8p^3-27q^3):(4p^2+6pq+9q^2)$.

492. $(27p^9+64q^6):(9p^6-12p^3q^2+16q^4)$.

493. $^*(2x^3+5x^2+13x+2):(x^2+2x+3)$.

494. $^*(1-5x+11x^2-3x^3):(1-3x+2x^2)$.

495. $\left(\frac{8}{27}x^3-\frac{27}{64}y^6\right):\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{2}xy^2+\frac{9}{16}y^4\right)$.

496. $\left(\frac{27}{125}x^6+\frac{8}{27}y^3\right):\left(\frac{9}{25}x^4-\frac{2}{5}x^2y+\frac{4}{9}y^2\right)$.

497. $(3a^4-8a^3+7a^2-2a):(3a^2-2a)$. a^2-2a+1

498. $(10a^6-9a^4-14a^2-3):(5a^2+3)$. $2a^4+3a^2-1$

499. $(6a^{2n-2}+a^{2n+4}-a^{2n}):(a^4+2a^2)$.

500. $(a^{m+n}+a^{m+n-3}):(a^{n-1}+a^n)$.

501. $(a^4+a^3b+19ab^3-15b^4-8a^2b^2):(a^2+3ab-5b^2)$.

502. $\left(m^4+\frac{3}{16}m-\frac{3}{8}m^2-\frac{1}{32}\right):\left(m^2+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}m\right)$.

503. $\left(4-\frac{13}{2}m^2+\frac{3}{4}m^4+\frac{m}{3}+\frac{m^3}{12}\right):\left(\frac{3m^2}{4}-1-\frac{5m}{6}\right)$.

504. $^*(3x^4-8x^3-10x^2+10x-2):(3x^2-2x+1)$.

505. $^*(1-4x-4x^2+15x^3-6x^4+x^5):(1-5x+3x^2+x^3)$.

506. $^*(x^5+3x^4+8x^3+10x^2+3x+6):(x^3+2x^2+5x+1)$.

507. $(1-2m^4-m^2-m^5-m^3):(1-m^2-m)$.

508. $(81m^4-16n^4):(3m+2n)$.

509. $(16p^{12}-81q^8):(2p^3-3q^2)$.

510. $32x^{10}+y^5):(y+2x^2)$.

511. $243p^{10}-q^5):(3p^2-q)$.

512. $(x^6-2x^3+1):(x^2-2x+1)$.

513. $(x^6-y^6):(x^2+xy+y^2)$.

514. $(1+15x^2+15x^4+x^6-6x-20x^3-6x^5):(-3x-x^3+1+3x^2)$.

515. $\left(\frac{3}{4}m^5+\frac{77}{8}m^3-4m^4-10\frac{3}{4}m^2+27-\frac{33}{4}m\right):\left(-m-\frac{1}{2}m^2+3\right)$.

516. $^*(a^5-2a^3b^2-ab^4):(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$.

517. $^*(a^5-2a^4b-4a^3b^2+b^5):(a^3+3ab^2+b^3)$.

518. $^*(6+7a^2+31a^6+10a^{10}):(2+3a^2-a^4+6a^6)$.

519. $(5a^3-26a^2-11a^4+2a^6-5a^5-12+7a):(4a^2-a^3-a+3)$.

520. $(6x^8+10\frac{1}{2}x^4y^4+36x^2y^6+16y^{10}-50xy^8-8x^5y^4):(4\frac{1}{2}xy^2-$
$-4y^4+3x^3)$.

521. $(a^8+a^6+a^4+a^2+1):(a^4-a^3+a^2-a+1)$.

522. $(x^8+x^6y^2+x^4y^4+x^2y^6+y^8):(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$.
523. $(m^6+2m^3n^3+n^6):(m^2+2mn+n^2)$.
524. $(m^6-54m^3+729):(m^2-6m+9)$.
525. $(x^8-2x^4y^4+y^8):(x^2+2xy+y^2)$.
526. $(x^8-32x^4+256):(x^2-4x+4)$.

§ 14. Lühendatud jagamine valemite abil*).

Selle paragrahvi ülesanded lahendatakse lühendatud korrutamise valemite abil, võttes viimaseid ainult vastupidiselt.

527. $(a^2-b^2):(a+b)$.
528. $*(a^2+b^2):(a-b)$.
529. $(a^3+b^3):(a+b)$.
530. $*(a^3-b^3):(a+b)$.
531. $(a^4-b^4):(a^2-b^2)$.
532. $*(a^4+b^4):(a^2+b^2)$.
533. $(a^6-b^6):(a^2-b^2)$.
534. $*(a^6+b^6):(a^2-b^2)$.
535. $(a^2+2ab+b^2):(a+b)$.
536. $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3):(a-b)$.
537. $(a^4-2a^2b^2+b^4):(a^2-b^2)$.
538. $(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6):(a^2+b^2)$.
539. $*(a^2+2ab-b^2):(a-b)$.
540. $*(a^4+2a^2b^2+b^4):(a^2-b^2)$.
541. $*(a^3+3a^2b-3ab^2-b^3):(a+b)$.
542. $*(a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6):(a^2+b^2)$.
543. $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3):(a^2-2ab+b^2)$.
544. $(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6):(a^4+2a^2b^2+b^4)$.
545. $*(a^3+3a^2b+3ab^2-b^3):(a^2-2ab+b^2)$.
546. $*(a^3-3a^2b-3ab^2+b^3):(a^2+2ab+b^2)$.
547. $(x^2-1):(x-1)$.
548. $(x^3+1):(x+1)$.
549. $(x^4-1):(x^2+1)$.
550. $(x^6-1):(x^2-1)$.
551. $(n^4-4):(n^2+2)$.
552. $(n^6+8):(n^2+2)$.
553. $(n^4-9):(n^2-3)$.
554. $(n^6-27):(n^2-3)$.
555. $(x^3-y^3):(x^2+xy+y^2)$.
556. $(x^3+8y^3):(x^2-2xy+4y^2)$.
557. $(n^3+1):(n^2-n+1)$.
558. $(n^3-27):(n^2+3n+9)$.
559. $(a^6+b^6):(a^4-a^2b^2+b^4)$.
560. $(a^6-8b^6):(a^4+2a^2b^2+4b^4)$.
561. $*(x^3+27):(x^2-2x+9)$.
562. $*(27x^3-8y^3):(3x^2+6xy+9)$.
563. $(x^2+5x+6):(x+2)$.
564. $(x^2+10x+21):(x+7)$.

*) Ülesanded, tähendatud * märgiga, annavad jagamisel jäägi.

565. $(x^2+3x+2):(x+1)$.

566. $(x^2+7x+12):(x+3)$.

567. $(y^2-7y+10):(v-2)$.

568. $(y^2-8y+15):(y-3)$.

569. $(y^2-6y+5):(y-5)$.

570. $(y^2-11y+18):(y-9)$.

571. $(z^2+z-6):(z+3)$.

572. $(z^2+4z-21):(z+7)$.

573. $(z^2+z-2):(z-1)$.

574. $(z^2+z-12):(z-3)$.

575. $(u^2-3u-10):(u+2)$.

576. $(u^2-4u-5):(u+1)$.

577. $(u^2-4u-5):(u-5)$.

578. $(u^2-7u-18):(u-9)$.

579. $(a^4-b^4):(a-b)$.

580. $^*(a^4+b^4):(a+b)$.

581. $(a^5+b^5):(a+b)$.

582. $^*(a^5-b^5):(a+b)$.

583. $(32x^5-y^5):(2x-y)$.

584. $^*(32x^5+y^5):(2x-y)$.

585. $(x^5+32y^5):(x+2y)$.

586. $^*(x^5+32y^5):(x-2y)$.

587. $(16-x^4):(2+x)$.

588. $(81-x^4):(3-x)$.

589. $(16-9x^4):(4-3x^2)$.

590. $(81-4x^4):(9+2x^2)$.

591. $(a^6-b^6):(a-b)$.

592. $(a^6b^6-c^6):(ab+c)$.

593. $(1+a^5y^5):(1+ay)$.

594. $(a^6+b^3):(a^2+b)$.

595. $(y^4-z^{12}):(y-z^3)$.

596. $(x^8-y^{12}z^4):(x^2-y^3z)$.

597. $(a^3b^6-8c^6d^3):(ab^2-2c^2d)$.

598. $(81a^8-16c^{12}):(3a^2+2c^3)$.

599. $(x^2+7ax+10a^2):(x+2a)$.

600. $(x^2+10ax+21a^2):(x+3a)$.

601. $(y^2-5by+6b^2):(y-3b)$.

602. $(y^2-9by+14b^2):(y-7b)$.

603. $(z^2+cz-6c^2):(z+3c)$.

604. $(z^2+4cz-21c^2):(z+7c)$.

605. $(u^2-3du-10d^2):(u-5d)$.

606. $(u^2-2du-15d^2):(u-5d)$.

607. $[(a+b)^2-c^2]:[(a+b)-c]$.

608. $[x^2-(a-b)^2]:(x+a-b)$.

609. $[(a-b)^2-(c-d)^2]:(a-b-c+d)$.

610. $[(m+n)^3+p^3]:(m+n+p)$.

611. $[(x^3-(b-c)^3]:(x-b+c)$.

612. $[(m-n)^4-p^4]:(m-n+p)$.

613. $[a^4-(x-y)^4]:(a+x-y)$.

614. $[x^4-(b+c)^4]:(x-b-c)$.

615. $\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{9}b^4\right):\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2\right)$.

616. $\left(\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{8}y^6\right):\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y^2\right)$.

617. $\left(\frac{27}{8}n^6-\frac{1}{27}p^3\right):\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{3}p\right)$.

618. $\left(1+\frac{8}{27}z^6\right):\left(1+\frac{2}{3}z^2\right)$.

619. $\left(\frac{27}{125}-\frac{1}{8}z^6\right):\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}z^2\right)$.

620. $\left(\frac{16}{81}x^4-\frac{81}{16}y^4\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)$.

621. $[(a-b)^3-(c+d)^3]:(a-b-c-d)$.

622. $[(a+b)^3+(a-b)^3]:2a$.

623. $[(a^2-bc)^3+8b^3c^3]:(a^2+bc)$.

624. $[(x^2+xy)^4-(x^2-xy)^4]:2xy$.

§ 15. Täheliste kordajatega hulkliikmete korrutamine ja jagamine.

Korrutada hulkliikmed:

625. $(ax+b)(bx+a)$.
626. $(ax+b)(bx-a)$.
627. $(x^2+ax-a^2)(x+b)$.
628. $(x^3+abx+b^2)(x-b)$.
629. $(x^3-ax^2+a^2x-a^3)(x+b)$.
630. $(x^3+bx^2-b^2x-b^3)(x-a)$.
631. $(x^2-bx+a^2)(x^2+cx-d^2)$.
632. $(x^2+bx+a^2)(x^2-cx-d^2)$.
633. $[x^2+(a+b)x+ab].(x+c)$.
634. $[x^2+(a-b)x-ab].(x-c)$.
635. $[x^2+(n-1)x+1].(x-1)$.
636. $[x^2+(a+b)x-b].(x+1)$.
637. $[ax^2-(2a-b)x+b^2].(x+c)$.
638. $[ax^2+(2ab-1)x-b].(x-c)$.
639. $[(a+b)x^2+(a-b)x+2].[(a-b)x-1]$.
640. $[(2a-b)x^2-a(a+b)x+a^3].[(a+b)x-a(a-b)]$.
641. $[x^2+(a+b)x+(a^2-b^2)].[x^2-(a-b)x-(a-b)^2]$.
642. $[ax^2-b(a-2b)x+a^2+b^2].[bx^2-b(2a-b)x-a^2-b^2]$.
643. $[2x^3-(a+b)x^2+abx-a+b].[(a-b)x^2+abx+a+b]$.
644. $[(a+b)x^3+(a-b)x^2-2(a-b)x].[(a+b)x^2-2(a-b)x-2a]$.

Jagada hulkliikmed:

645. $(x^3+bx-ax^2-abx-a^2x-a^2b):(x+b)$.
646. $(x^4+ax^3-a^2x^2-cx^3-acx^2-a^3x+a^2cx+a^3c):(x-c)$.
647. $[x^4+(b-c)x^3-(a^2+bc-d^2)x^2+(a^2c+bd^2)x-a^2d^2]:$
$:(x^2-cx+d^2)$.
648. $[x^5+2ax^4+(a^2-b^2-c^2)x^3-(c^3+ab^2+ac^2)x^2-$
$-c^2(ac-b^2)x+c^5]:(x^2+ax-c^2)$.
649. $[(a^4-b^4)x^2+(a^3-b^3)x+a^2-b^2]:(a-b)$.
650. $[(a^2+4a-5)x^2+(a^2+8a+15)x+a^2+3a-10]:(a+5)$.
651. $[2x^3-(a+3b)x^2-(5a^2+7ab+2b^2)x+3(a+b)^3]:[2x-3(a+b)]$
652. $[(a-b)x^3+(2b^2-a^2)x^2-(a^2b+b^3)x-ab^3]:[(a-b)x+b^2]$.
653. $[(3a^3-2a^2-8a+5)x^3+(4a^3-22a+17)x^2+(10a^2-34a+$
$+29)x+8a^2-26a+21]:[(a^2+a-1)x^2+(a-2)x+2a-3]$.
654. $[(4a^2-9c^2)x^4-2acx^3+(16ac-a^2+c^2)x^2+2(2a^2+c^2)x-4a^2+$
$+c^2]:[(2a+3c)x^2+(a+c)x-2a+c]$.

IV osa.

Avalduste teguriteks lahutamine.

§ 1. Hulkliikmete muutmine korrutiseks ilma lühendatud korrutamis- ja jagamisvalemite abita.

Kui hulkliikme igas liikmes on ühine tegur, siis võib teda sulgudest välja viia; näit.: $am+bm-cm=m(a+b-c)$.

Et leida need liikmed, mis sulgudesse jäävad, selleks tuleb hulkliikme iga liige jagada ühise teguriga ja saadud jagatised võtta sulgudesse: $2a-ax+3ay=a(2-x+3y)$.

1. $5a-5b$. **2.** $ab+bc$. **3.** $6a-9b$.
4. $3ax+6ay$. **5.** $2x-2$. **6.** $6+3x$.
7. a^2+ab. **8.** a^5-a^3. **9.** $a^2b^2+b^4$.
10. $a^3b^4-a^6$. **11.** $a^2x^5+x^6$. **12.** $a^2x^6+x^4y^2$.
13. $4ab-2bc$. **14.** $9a^4--6a^3b$. **15.** $10a^4x^2+35a^2x^4$.
16. $12a^6x^4-4a^3x^2$. **17.** $6a^{n+1}+-12a^n$. **18.** $3a^{n-2}-6a^n$.
19. $a^{m+n}-a^n$. **20.** $b^{3n}+b^{2n}$. **21.** $b^{3n-1}-b^{2n-1}$.
22. $a^{2n}b^n+a^{5n}b^{2n}$. **23.** $ax-bx+cx$ **24.** $-2a+ax-ay$.
25. $3ab-6a^2b^2+9a^3b^3$. **26.** $-8a^3b+12a^2b^2-20a^4b^3$.
27. $8a^4c^3-6a^4c^2+16a^3c^4$. **28.** $-15a^5c^7+5a^8c^6-10a^9c^5$.
29. $54a^3b^5-42a^5c^6-24a^4b^7$. **30.** $42a^5b^4-35a^3b^5+56b^3c^4$.

Kui hulkliikme liikmetes ei leidu ühist tegurit, siis on liikmeid osavalt rühmitades mõnikord võimalik igas rühmas leida ühist hulkliikmelist tegurit. Vahel on küllalt, kui osa liikmeid sulgudesse võtta, mille ette tuleb kirjutada $+$ või $-$ tarviduse järgi. Näit.: kolmliikmel $a(b+c)+b+c$ kaks viimast liiget sulgudesse võttes saame avalduse $a(b+c)+(b+c)$; seda võime vaadata kui kaksliiget, millel on ühine tegur $b+c$, mispärast kaksliiget võib lahutada teguriteks $(b+c)(a+1)$.

Eelmise näite sarnaselt tuleb toimetada järgmise hulkliikmega $a(b-c)-b+c$, millel kaks viimast liiget tuleb võtta sulgudesse, pannes sulgude ette miinuse: $a(b-c)-(b-c)$. Viimase avalduse võime järgmiselt teguriteks lahutada: $(b-c)(a-1)$.

31. $a^2(a+x)+x^2(a+x)$.
32. $2p(p-q)+3q(p-q)$.
33. $a(x+1)-2x(x+1)$.
34. $2(p-1)^2-4q(p-1)$.
35. $mn(m^2+n^2)-n^2(m^2+n^2)$.
36. $4m^2(n^2-2)+2mn(n^2-2)$.
37. $a(x+y)+x+y$.
38. $2b(x-1)+x-1$.
39. $2a(y+1)-y-1$.
40. $b(x-y)-x+y$.
41. $4x(a^n+x^n)-a^n-x^n$.
42. $3a(a^n-y^n)-y^n+a^n$.
43. $m(q-p)-(p-q)$.
44. $6a(2p-q)+3b(q-2p)$.
45. $p(1-a+a^2)-1+a-a^2$.
46. $q(b^3+b^2-b)+b^3+b^2-b$.
47. $2(p-q)^2-5q(q-p)$.
48. $3p(p-q)-5(q-p)^2$.
49. $a(b-1)+c(1-b)-b+1$.
50. $a(2-x^2)+b(x^2-2)-2+x^2$.

Enamail juhuseil ei ole küllalt ühise teguri leidmiseks liikmeid ainult rühmitada, vaid tuleb sellekohaselt enne rühmadest välja tuua üksliikmeline tegur, mis igal rühmal isesugune võib olla. Tarvilikult liikmeid rühmitades ja igast rühmast sellekohast üksliikmelist tegurit välja tuues saame hulkliikmelise ühise teguri. Näit.: hulkliikmes $a^3+a^2b+2ab^2+2b^3$ rühmitades kaks esimest liiget esimesse ja kaks viimast liiget teise ossa ning esimesest rühmast välja tuues sulgude ette a^2 ja teisest rühmast $2b^2$, saame $a^2(a+b)+2b^2(a+b)$ ehk $(a+b)(a^2+2b^2)$. Sama saaduse oleksime saanud, kui oleksime rühmitanud esimese ja kolmanda, teise ning neljanda liikme, sealjuures välja tuues kummastki rühmast sellekohaseid ühiseid tegureid.

Tuleb tähendada, et sellekohased muutused on õige mitmekesised, nii et teades tehte ja sulgude tarvitamise juhiseid võib teguriteks lahutamisel paremaid tagajärgi saavutada.

51. $ac+ad+bc+bd$.
52. $ac-ad-bc+bd$.
53. $x^3-x^2z+2xz^2-2z^3$.
54. $x^3+x^2z-2xz^2-2z^3$.
55. a^3+2a^2+2a+4.
56. a^3+2a^2-2a-4.
57. $a^2b^3-abc^2d+ab^2cd-c^3d^2$.
58. $a^2b^3+abc^2d-ab^2cd-c^3d^2$.
59. $(4a-5b)(3m-2p)+(4b-a)(3m-2p)$.
60. $(5a-2b)(2m+3p)-(2a-7b)(2m+3p)$.
61. $(7a-3x)(5c-2d)-(6a-2x)(5c-2d)$.
62. $(4a-3x)(5c+2d)-(6a-4x)(5c+2d)$.

63. $6x^3-6mx^2-3m^2x+3m^3$. **64.** $56a^2-40ab+63ac-45bc$.
65. $8a^2c-8a^2x-6cx^3+6x^4$. **66.** $32ac^2-15cx^2+48ax^2-10c^3$.
67. $4a^2bc-6ab^2c+8a^2bd-12ab^2d$.
68. $6a^3b^2-12a^3b^3-15a^2b^3+30a^2b^4$.
69. $2a^3b^2-3abc^2d+2a^2bcd-3c^3d^2$.
70. $5a^2b^3-2abc^2d-5ab^2cd+2c^3d^2$.
71. $16a^4b^3c^2-12a^3b^4+8a^2b^2c^2-6ab^3$.
72. $6a^4bc-18a^5b^3c-15a^2b^2+45a^3b^4$.
73. $ax^2+bx^2+bx+ax+a+b$. **74.** $ax^2-bx^2+bx-ax+a-b$.
75. $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx$. **76.** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx$.
77. $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$.
78. $(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$.
79. $x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc$.
80. $x^3-cx^2+acx-ax^2-bcx+bx^2-abx+abc$.

Vahel on enne liikmete rühmitamist tarvilik mõnda liiget kujutada algebralise summana. Saadud liikme osad satuvad rühmitamisel iserühma. Vaatame seda teguriteks lahutamise viisi kolmeliikmelistes avaldustes.

Olgu tarvis kolmliige x^2+5x+6 lahutada teguriteks. Selleks kujutame keskmist liiget $2x$ ja $3x$ summana. Saame $x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)$. Samuti kolmliikme $x^2+2x-15$ teguriteks lahutamiseks kujutame, et $2x$ on $+5x$ ja $-3x$ algebraline summa. Saame $x^2+2x-15=x^2+5x-3x-15=x(x+5)-3(x+5)=(x+5)(x-3)$.

Seesuguste kolmliikmete teguriteks lahutamiseks on üldjuhis. Selle selgitamiseks lahutame järgnevad kolmliikmed $x^2+(a+b)x+ab$ ja $x^2+(a-b)x-ab$ teguriteks, mida sulgude avamisega algame, sellekohaselt rühmitame ja ühise kaksliikmelise teguri leiame. Antud kolmliikmeid vaadeldes näeme, et mõlemad algavad x^2, millele järgneb x eesseisva kordajaga ja siis vabaliige. Vabaliige koosneb kahest tegurist, millede algebraline summa võrdub x-i ehk keskmise liikme kordajaga. Samuti kolmliikmes x^2+5x+6 on 5 arvude 3 ja 2 summa, kusjuures 3 ja 2 on 6 tegurid, ehk kolmliikmes $x^2-2x-15$ seisab kordaja -2 koos -5 ja $+3$ summast, kuna -5 ja $+3$ korrutis on -15.

Siit järgneb: et säherdusi kolmliikmeid lahutada teguriteks, tuleb vabaliige lahutada nii kaheks teguriks, et nende algebraline summa võrduks teise liikme kordajaga. Keskmist liiget tuleb kujutada kaksliikmena, millede kordajad võrduksid saadud vabaliikme teguritega. Siis sellekohaselt rühmitada ja ühised tegurid leida.

Olgu, näit., antud kolmliige $x^2-11x+24$. Et vabaliige 24 on positiivne, siis on tegurid ühise märgiga. Tegurite algebraline summa on aga -11, negatiivne, seega on ka tegurid negatiivsed. Läbi vaadates mitmesugused arv 24 tegurid, leiame, et -8 ja -3 annavad korrutises 24 ja summas -11, sellepärast $x^2-11x+24=x^2-8x-3x+24=x(x-8)-3(x-8)=(x-8)(x-3)$.

Kolmliikme $x^2-7x-30$ lahutamisel lahutub 30 kaheks teguriks -10 ja $+3$, millede summa on -7. Sellepärast $x^2-7x-30=x^2-10x+3x-30=x(x-10)+3(x-10)==(x-10)(x+3)$.

Lõppsaadusi vaadeldes näeme, et teguritena esinevad kaksliikmed, milles esimene liige on x, teine liige aga üks neist kahest saadud vabaliikme tegureist.

$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$; tegurid olid $+5$ ja -1.

81. $x^2+(m+n)x+mn$. **82.** $x^2-(a+2)x+2a$.

83. $x^2+8x+15$. **84.** $x^2+12x+35$. **85.** x^2-5x+6.

86. $x^2-13x+22$. **87.** x^2+5x+4. **88.** $x^2+11x+30$.

89. x^2-3x+2. **90.** $x^2-13x+30$.

91. $x^2+(m-n)x-mn$. **92.** $x^2-(a-3)x-3a$.

93. $x^2+3x-10$. **94.** $x^2-7x-30$. **95.** $x^2+5x-24$.

96. $x^2-10x-24$. **97.** x^2+2x-3. **98.** $x^2-9x-10$.

99. x^2+x-42. **100.** $x^2-5x-36$. **101.** $a^2+7ab+12b^2$.

102. $a^2-3ab-10b^2$. **103.** $a^2-12ab-35b^2$.

104. $a^2+4ab-45b^2$. **105.** $a^2-7ab-18b^2$.

106. $a^2+ab-20b^2$. **107.** $6a^2+13ab+6b^2$.

108. $10a^2-29ab+10b^2$. **109.** $6a^2+7ab-5b^2$.

110. $10a^2-13ab-3b^2$.

Vaatame veel niisuguseid hulkliikmeid, mis lahutuvad kaksliikmelisteks teguriteks. Oletame, et mingi hulkliige sisaldab eneses teguri $x+a$. Et aga kaksliige $x+a$ muutub nulliks, kui x asemele paneme $-a$, siis peab ka hulkliige muutuma nulliks. Samuti muutub hulkliige, mis sisaldab tegurina kaksliikme $x-a$, nulliks, kui x asemele paneme $+a$. Siit järgneb, et kui hulkliige muutub nulliks, x asemele $-a$ pannes, siis ta sisaldab tegurina $x+a$ ja on järjelikult jagatav $x+a$-ga. Samuti sisaldab hulkliige eneses teguri $x-a$ ja on jagatav teguriga $x-a$, kui ta x asemele $+a$ pannes muutub nulliks. Jagades hulkliiget kas $x+a$ või $x-a$-ga, saame teise teguri, kuna esimeseks teguriks on kaksliikmeline jagaja. Saadud hulkliikme teguriga sarnaselt toimetades lahutame antud hulkliikme kaksliikmelisteks teguriteks. Võtame, näit., hulkliikme $x^3+6x^2+11x+6$. Hulkliige muutub nulliks, kui asetame x asemele -1; seepärast on ta jagatav $x+1$-ga. Selle teguri teadmine annab võimaluse hulkliiget nii seada ja ta liikmed niisuguste summadena kujutada, et kui me nad paaristikku rühmitame ja igast rühmast sellekohase üksliikmelise teguri välja toome, sulgudesse jääks ühine kaksliikmeline tegur $x+1$. Saame $x^3+6x^2+11x+6=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6=x^2(x+1)+ +5x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3)$.

Samuti muutub hulkliige $x^3-4x^2-11x+30$ nulliks, kui x asemele 2 panna; seepärast saab hulkliiget jagada $x-2$-ga, mis on üks hulkliikme teguritest.

Eeelmise näite sarnaselt toimetades saame: $x^3-4x^2- -11x+30=x^3-2x^2-2x^2+4x-15x+30=x^2(x-2)-2x(x-2)- -15(x-2)=(x-2)(x^2-2x-15)=\underline{(x-2)(x+3)(x-5)}$.

Vaadeldes hulkliikme teguriteks lahutamise lõppsaadusi näeme, et $-2, +3$ ja -5 korrutises on viimane liige $+30$, kuna samade arvude algebraline summa on teise liikme kordaja -4. Sellepärast on lihtne asi sääraseid hulkliikmeid teguriteks lahutada. Tuleb viimane liige lahutada nii mitmeks teguriks, kui mitmendal astmel on esimene (ülem) liige. Tegurite algebraline summa peab võrduma teise liikme kordajaga.

111. $x^3+8x^2+17x+10$. **112.** $x^3+10x^2+31x+30$.
113. x^3-2x^2-5x+6. **114.** $x^3-9x^2+23x-15$.
115. $x^3-9x^2+26x-24$. **116.** $x^3-4x^2-11x+30$.
117. $x^4+11x^3+38x^2+40x$. **118.** $x^4-4x^3-17x^2+60x$.
119. $x^4-11x^3+38x^2-40x$. **120.** $x^4-6x^3-7x^2+60x$.

§ 2. Teguriteks lahutamine valemite abil.

Järgnevates ülesannetes ettetulevad avaldused lahutuvad teguriteks lihtsate valemite abil, mida lühendatud korrutamise ja jagamise puhul tarvitasime.

Järgnevates ülesannetes võib teguriteks lahutamiseks tarvitada valemit ilma avalduse muutmiseta.

121. $4-x^2$. **122.** y^2-9. **123.** $25-a^2$. **124.** b^2-36.
125. a^2b^2-100. **126.** $1-4c^2$. **127.** $9x^2-1$.
128. m^2-16n^2. **129.** $49x^2-y^2$. **130.** $4m^2-9n^2$.
131. a^2+6a+9. **132.** $m^2-10m+25$. **133.** $p^2+4pq+4q^2$.
134. $x^2-8xy+16y^2$. **135.** $z^2+14z+49$. **136.** $25a^2-36b^2$.
137. $16c^2-81d^2$. **138.** $\frac{4}{9}m^2-100n^2$. **139.** $\frac{25}{36}p^2-\frac{4}{49}q^2$.
140. $\frac{64}{81}x^2y^2-\frac{1}{25}z^2$. **141.** $a^4-2a^2x+x^2$. **142.** $b^2+2bc^3+c^6$.
143. $m^8-6m^4y^3+9y^6$. **144.** $k^{16}+10k^8l^5+25l^{10}$.
145. $4p^{12}-20p^6z^5+25z^{10}$. **146.** a^3-b^3.
147. m^3+1. **148.** n^3-8. **149.** $27+c^3$. **150.** $(2p)^3+q^3$.
151. $27x^3-8y^3$. **152.** x^5-y^5. **153.** x^7+y^7.
154. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. **155.** $n^3-6n^2p+12np^2-8p^3$.
156. $27p^3+27p^2y+9py^2+y^3$. **157.** $8x^3-60x^2z+150xz^2-125z^3$.
158. $125a^3x^6+216b^6y^3$. **159.** $243m^5y^5-32n^{10}z^{10}$.
160. $32p^5z^{10}+243q^{10}u^5$.

Järgnevates ülesannetes on valemite tarvitamine ühenduses mitmesuguste avalduste teisendamisega, nagu rühmitamisega, üksliikmelise teguri sulgude ette viimisega jne. ning järjestikku mitme valemi tarvitamisega.

161. $10a^4b^2-40a^2b^4$. **162.** $75a^6b-12a^2b^5$.
163. $2ab^2-4ab+2a$. **164.** $a^3b^4+4a^3b^2+4a^3b^3$.
165. $-8a^3x-18ax^3+24a^2x^2$. **166.** $-16a^3x^8+72a^4x^7-81a^5x^6$.
167. $(2a-3b)^2-4b^2$. **168.** $16c^2-(3c+5d)^2$.
169. $9(5m-4p)^2-64m^2$. **170.** $(n+3q)^2-4(q-n)^2$.
171. $5a^{11}x^5-20a^8x^4y+20a^5x^3y^2$. **172.** $3a^6x^{10}+30a^4x^5y^2+75a^2y^4$.
173. $a^{2m+3}-2a^{m+6}b^n+a^9b^{2n}$. **174.** $36a^{n+2}+16a^{n-2}b^2+48a^nb$.
175. $x^2+2xy+y^2-z^2$. **176.** $9-y^2-6yz-9z^2$.
177. $25z^2-4x^2+12xy-9y^2$. **178.** $4y^2-20yz-25z^2-36$.
179. $a^3+a^2b-ab^2-b^3$. **180.** $ac^2-ab^2+b^2c-c^3$.
181. $(a-b)(a^2-c^2)-(a-c)(a^2-b^2)$.
182. $a^2b^4c^2-a^2b^2c^4+a^4b^2c^2-a^4c^4$. **183.** $a^4-b^2(2a-b)^2$.
184. $a^4-16c^2(c-a)^2$. **185.** $(a-b)^2+2b(b-a)+b^2$.
186. $(2a-b)^2-2b(b-2a)+b^2$. **187.** $(m^2+1)^2-4m^2$.
188. $36m^2-(m^2+9)^2$. **189.** $(m^2+4m)^2-4$. **190.** $9-(m^2+6m)^2$.
191. $(p+q)^3-3(p+q)^2(p-q)+3(p+q)(p-q)^2-(p-q)^3$.
192. $(p-2q)^3+3(p-2q)^2(p+q)+3(p-2q)(p+q)^2+(p+q)^3$.
193. a^5-9ab^4. **194.** $4n^6-m^4n^2$. **195.** a^3b-b^4.
196. $2m^4+2mn^3$. **197.** $3a^4-12$. **198.** $16-2a^6$.
199. $24a^4+3ab^3$. **200.** $81a^4b-36b^5$.

Keerulisematel ülesannete lahendamise juhustel tuleb kõige pealt vaadata, kas on üksliikmelist ühist tegurit, kas saab mõnda valemit kogu avalduse kohta tarvitada, kas saab avaldust rühmitada, ühiseid tegureid välja tuues, või mõnda rühma valemi abil muuta, või enne rühmitamist mõnda liiget algebralise summana kujutada, või mõnele rühmale liiget juurde lisada, teisest rühmast seda aga lahutada.

Kui avaldus niiviisi on teguriteks lahutatud, siis tuleb iga tegurit vaadelda, kas teda ei saa veel omakord teguriteks lahutada.

201. $m^2+2mn+n^2-mp-np$. **202.** $mp-np-m^2+2mn-n^2$.
203. $x^6z^2-2x^4y^2z^2+x^2y^4z^2$.
204. $x^2y^4z^2-x^4y^2z^2-x^2y^2z^4+x^4z^4$.
205. $u^2+3u^3-u^4-3u$. **206.** u^4+u^3+u+1.
207. $x^2+2xy+y^2-z^2+2zu-u^2$.
208. $(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2$.

209. $2a^2b-18b^7+12b^4-2b$.
210. $(a^3+1)^2-(b^3-1)^2$.
211. m^3+8+6m^2+12m.
212. m^3-8+6m^2-12m.
213. $(a^2+3a+1)^2-1$.
214. $(a^2-2a+2)^2-1$.
215. $a^5-a^3+a^2-1$.
216. $a^5+a^2-a^3-1$.
217. $x^3-27a^3-9ax^2+27a^2x$.
218. $(a+x)^3-(a-x)^3$.
219. $x^4+2ax^3-a^4-2a^3x$.
220. $(a+x)^4-(a-x)^4$.
221. $(a^6+b^2)^2-4a^6b^2$.
222. $4a^6b^4-(a^6+b^4)^2$.
223. x^4-y^4 (kolmel viisil).
224. $x^4+x^2y^2+y^4$.
225. $3x^4y^4-x^8-y^8$.
226. x^8+x^4+1.
227. $3x^6-x^{12}-1$.
228. x^6-y^6 (neljal viisil).
229. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$.
230. $(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2$.
231. $a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-4abcd$.
232. $a^2c^2+b^2d^2-b^2c^2-a^2d^2+4abcd$.
233. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.
234. $(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$.
235. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.
236. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.
237. $a^6-a^5-a^2+a$.
238. $a^{12}+a^{10}-a^7+2a^6-a^5-2a^{11}$.
239. $x(x^3-a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x-a)$.
240. $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$.

§ 3. Kõige suurema ühise jagaja leidmine.

Avaldusi, mida ei saa teguriteks lahutada, nimetatakse algavaldusteks. Näit.: a, $a-b$, a^2+b^2 on algavaldused.

Avaldusi, mida võib teguriteks lahutada, nimetatakse liitavaldusteks, näit. a^2, ab, a^2-b^2.

Mõned avaldused võivad nii antud olla, et neil ühised tegurid puuduvad; seesuguseid avaldusi nimetatakse ühistegurita avaldusteks. Näit.: a ja bc, $a+b$, $a-b$ ja a^2+b^2 on ühistegurita avaldused.

Teisel juhusel võivad aga antud avaldustel ühised tegurid olla. Siis nimetatakse neid avaldusi vastastikku liitavaldusteks. Näit.: a^2 ja ab; $6a^3b$, $4a^2b$ ja $10a^2c$. Viimasel salgal on järgmised ühised tegurid: 2, a, $2a$, a^2, $2a^2$.

Mitme avalduse kõige suuremaks ühiseks jagajaks ehk teguriks nimetatakse seda tegurit, milles ~~on ühendatud~~ kõik ühised algtegurid. Nii on avaldustel a^2 ja ab ühine ja nimelt kõige suurem ühine jagaja ehk tegur a, kuna avaldustel $6a^3b$, $4a^2b$ ja $10a^2c$, nagu nägime, oli 5 tegurit, kõige suuremaks ühiseks teguriks (ehk jagajaks) on aga ikkagi $2a^2$.

Et leida üksliikmelistele avaldustele kõige suuremat ühist jagajat, tuleb leida kordajate kõige suurem ühine jagaja ja välja kirjutada kõik ühised tähelised tegurid, neid võttes kõige alamal ettetuleval astmel.

Et leida hulkliikmeliste avalduste kõige suuremat ühist jagajat, tuleb lahutada hulkliikmelised avaldused algteguriteks ja neist siis kokku seada kõige suurem ühine jagaja.

Leida järgmistele avaldustele kõige suurem ühine jagaja:

241. ab ja ac. **242.** abc ja abd.
243. $5ab$ ja $10bc$. **244.** $18abd$ ja $27bcd$.
245. $4x^3y^2$ ja $18x^2y$. **246.** $32x^3y^4$ ja $48x^2y^3$.
247. $35x^4y^4z^6$ ja $49x^6y^5z^4$. **248.** $21x^2y^4z^8$ ja $32x^5y^3z^4$.
249. $6a^3b^2c$, $12a^2bc^3$ ja $18a^4b^3c^2$. **250.** $9a^2b^7c^3$, $12a^3bc^4$ ja $21a^2c^5$.
251. $32a^mb^{2n}$, $8a^{2m}b^n$ ja $26a^{2m}b^{2n}$.
252. $6a^{2n}b^{2m-1}$, $12a^{n+1}b^{m+2}$ ja $9a^5b^m$.
253. $4(m+n)^2$ ja $6(m+n)$.
254. $10a(m-n)^3$ ja $15ab(m-n)^2$.
255. $(m+n)^2$ ja $3a^2(m-n)^2$. **256.** $5a(m^2+n^2)$ ja $7b(m^2-n^2)$.
257. $ab+bp$ ja bc. **258.** n^2-np ja abn^3.
259. $a^3b^2c-a^2bc^3+a^4b$ ja a^2b^3cd.
260. $8a^4n^3+6a^4n^2-16a^5n^7$ ja $8a^3n^6p^2$.
261. $18a^7b^4-12a^6b^5c^2+30a^9b^{10}d$ ja $5a^9b^{11}$.
262. $20a^4b^3+15a^3n^6-35b^6n^5$ ja $5a^2b^2n^4$.
263. $10ab-5a$ ja $34bc+17c$.

264. $18a^3b+4a^2c$ ja $27a^4b^2-6a^3bc$.
265. $24a^6b^4c^2-28a^4b^3c^4$ ja $36a^4b^4c^4-42a^2b^3c^6$.
266. $24a^2+36ab-48ac$ ja $30a^3+45a^2b-60a^2c$.
267. $9a^4b-27a^3b^2+18a^2b^3$ ja $24a^7b^3-72a^6b^4+48a^5b^5$.
268. $10a^2b^3-75a^3b^4+25a^4b^2$ ja $14a^3b^2-35a^4b^4-49a^2b^4$.
269. $4(a+1)^2$ ja $6(a^2-1)$.
270. $18(x^2-y^2)$ ja $27(x-y)^2$.
271. $4(a+1)^3$ ja $6(a^2-1)$.
272. $12(x-y)^3$ ja $18(x^2-y^2)$.
273. a^6-b^6 ja a^2-b^2.
274. a^5-b^5 ja a^3-b^3.
275. $9(x^2-y^2)^2$ ja $6(x^4-y^4)$.
276. $12(x^2+y^2)^2$ ja $8(x^4-y^4)$
277. $4x^2-12xy+9y^2$ ja $4x^2-9y^2$.
278. $25x^2+60xy+36y^2$ ja $36y^2-25x^2$.
279. a^2-1 ja a^2+4a+3. **280**. a^2-4 ja a^2-5a+6.
281. $x^2+8x+15$ ja $x^2+9x+20$.
282. $x^2-9x+14$ ja $x^2-11x+28$.
283. $x^2+2x-120$ ja $x^2-2x-80$.
284. $x^2+15x+36$ ja $x^2+9x-36$.
285. x^3-4x^2-5x ja x^3-9x^2+5x.
286. x^3+4x^2-5x ja x^3-6x^2+5x.
287. $x^4+2a^2x^2+a^4+ax^3+a^3x$ ja x^3-a^3.
288. $x^4-a^4+ax^3-a^3x$ ja x^3+a^3.
289. $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$ ja $4x^3-x^2y-3xy^2$.
290. $x^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4$ ja $x^4+2x^3y-2xy^3-y^4$.
291. a^2-b^2, $(a-b)^2$ ja a^3-b^3.
292. $4a^2-9b^2$, $(2a+3b)^2$ ja $8a^3+27b^3$.
293. a^4-b^4, a^3+b^3 ja a^2-b^2. **294.** a^5-b^5, a^4-b^4 ja a^3-b^3.
295. x^2+5x+6, x^2+x-6 ja x^2+2x-3.
296. $x^2-7x+10$, x^2-4x-5 ja $x^2-8x+15$.
297. x^3+3x^2-10x, $x^4+4x^3-12x^2$ ja $x^4-9x^3+14x^2$.
298. $x^5+10x^4+24x^3$, $x^4-4x^3-32x^2$ ja x^3-3x^2-28x.
299. $a^3+a^2x-ax^2-x^3$, $a^3-3ax^2+2x^3$ ja $a^3-2a^2x-ax^2+2x^3$.
300. x^2-2a^2-ax, x^2-6a^2+ax ja $x^2+2ax-8a^2$.

§ 4. Kõige väiksema ühise kordse leidmine.

Kui üks avaldus on jagatav kõigi teiste antud avaldustega, siis on ta antud avalduste kordne avaldus; näit.: avaldus $6a^2b^2$ on avalduste $2a^2b$ ja $6b$ kordne avaldus.

Kui seda kordset avaldust korrutada mingi suurusega, siis jääb ta ikkagi antud avalduste kordseks avalduseks. Nii on ka $6a^2b^3$ samade avalduste kordne.

Kõige väiksemaks ühiseks kordseks nimetatakse niisugust avaldust, mis kordsetest avaldustest on kõige väiksem. Näit.: $6a^2b$ on avalduste $2a^2b$ ja $6b$ kõige väiksem ühine kordne.

Et üksliikmelistele avaldustele leida kõige väiksemat ühist kordset, tuleb leida kordajate kõige väiksem ühine kordne ja välja kirjutada kõik ettetulevad tähelised tegurid, neid võttes kõige kõrgemas ettetulevas astmes.

Et leida hulkliikmeliste avalduste kõige väiksemat ühist kordset, tuleb nad lahutada algteguriteks ja neist siis kõige väiksem ühine kordne kokku seada.

Leida järgmiste avalduste kõige väiksem ühine kordne:

301. ab ja bc. **302.** a^2 ja $3ab$. **303.** $4ab$ ja $6ac$.
304. $8a^3$ ja $12a^4$. **305.** $12a^3b^2$ ja $18ab^3$.
306. $25a^3b^4c^5$ ja $20a^5b^2c^6$. **307.** $6a^3bd^2$ ja $5ac^3e^2$.
308. $4ab^2c^3$ ja $21bc^2d^3$. **309.** $a(a+b)$ ja $b(a+b)$.
310. $4a^2(b-1)$ ja $6a^3(b-1)$. **311.** $15b^5(a+b)$ ja $18b^3(a-b)$.
312. $36a^3b^2(a-2)$ ja $24a^2b^3(a-1)$.
313. $(a+b)(c+d)$ ja $(a+b)(c-d)$.
314. $(a-b)(c-d)$ ja $(a+b)(c-d)$.
315. a^2-x^2 ja $(a-x)^2$. **316.** $3(a+x)$ ja $4(a^2-x^2)$.
317. x^2-4y^2 ja $x^2-4xy+4y^2$. **318.** x^2-16y^2 ja $x^2+8xy+16y^2$.
319. a^3-b^3 ja a^2-b^2. **320.** $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ ja a^3+b^3.

321. $2a^3-2a^2b+ab^2-b^3$ ja $3a^2-4ab+b^2$.
322. $2a^4+3a^2b^2-2a^2b-3b^3$ ja $2a^4-3a^2b^2-2a^2b+3b^3$.
323. $x^2-7x+12$ ja x^2+x-12. **324.** x^2-8x+7 ja x^2-6x-7.
325. $2x^2-7x+6$ ja $2x^2+x-6$.
326. $3x^2+11x+6$ ja $3x^2+7x-6$. **327.** x^2-4 ja x^3+2x^2+4x+8.
328. x^2-9y^2 ja $x^3-3x^2y+9xy-27y^2$.
329. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ ja x^3+x^2+x+1.
330. $x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4$ ja $x^4-2x^3y+2xy^3-y^4$.
331. ab, ac ja cd. **332.** $4a^2b$, $2ab^2$ ja $3ax$.
333. $8a^2b^3$, $30a^3b^3$ ja $4a^2b^4$. **334.** $4a^2b^2x$, $6ab^3x^2$ ja $18a^2bx^3$.
335. $20a^2x^n$, $15a^3x^{n-1}$ ja $10ax^{n+1}$.
336. $42a^mx^{2n}$, $35a^{m-1}x^{n+1}$ ja $14a^{m-2}x^{n-3}$.
337. $x+y$, $(x-y)^2$ ja x^2-y^2. **338.** x^2-y^2, $(x+y)^2$ ja x^3+y^3.
339. $6a$, $2(a+1)$ ja $3(a+2)$. **340.** a^4, $2a-1$, $4a^2-1$.
341. a^2-9b^2, $(a+3b)^2$ ja $(a-3b)^2$.
342. $8ab+16b^2$, $a^2b+4ab^2+4b^3$ ja a^3.
343. $x-1$, x^2+x+1 ja x^3+1.
344. x^2-1, x^2+1, x^4+1 ja x^8-1.
345. $x^2+(a+b)x+ab$, $x^2+(a+c)x+ac$ ja $x^2+(b+c)x+bc$.
346. $x^2-(a-b)x-ab$, $x^2+(b-c)x-bc$ ja $x^2-(a+c)x+ac$.
347. x^2+3x+2, x^2+4x+3 ja x^2+5x+6.
348. x^2+x-6, x^2-3x+2 ja x^2+2x-8.
349. x^2-2x-3, x^3+3x^2-x-3 ja x^3+4x^2+x-6.
350. $x^2-3x-10$, $x^3-5x^2-9x+45$ ja $x^3+4x^2-11x-30$.
351. a^3-a^2+a-1, a^3+a^2+a+1 ja a^4-1.
352. a^3-1, a^3+1 ja a^4+a^2+1.
353. a^2-2b^2-ab, a^2-6b^2+ab ja a^2-8b^2+2ab.
354. a^2-9b^2, a^2-3b^2+2ab ja a^2-15b^2-2ab.
355. x^2-4, x^3+8 ja x^2+2x+4.
356. x^3-27, x^3+27 ja x^4+9x^2+81.
357. x^4-2x^3+2x-1, $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ ja x^3-x^2+x-1.
358. x^3+x^2-x-1, x^3-3x-2 ja x^3-2x^2-x+2.
359. x^3-7x+6, x^3+2x^2-5x-6 ja $x^3-3x^2-10x+24$.
360. x^3-2x^2-5x+6, x^3-7x-6 ja $x^3+10x^2+31x+30$.

V osa.

Murruliste avalduste muutmine.

§ 1. Murdude koondamine.

Juhis: Et murdu koondada, tarvis tema liikmed, s. o. lugeja ja nimetaja, jagada nende ühise teguriga. Tahame aga koondamise saadusena leida koondumatu murru, siis tarvis murru lugeja ja nimetaja jagada nende kõige suurema ühise teguriga.

$$\text{Näit.: } \overbrace{\frac{18a^2b}{30ab^2}}^{6ab}=\frac{3a}{5b}.$$

Kui murru liikmed mõlemad või üks nendest on hulkliige, siis tarvis hulkliikmelised murruliikmed enne murru koondamist teguriteks lahutada:

$$\text{näit.: } \frac{a^3+b^3}{a^4-b^4}=\overbrace{\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}}^{a+b}=\frac{a^2-ab+b^2}{(a^2+b^2)(a-b)}.$$

Koondada murrud:

1. $\frac{6}{2a}$ **2.** $\frac{ab^2}{abc}$ **3.** $\frac{9ax}{15a^2}$ **4.** $\frac{15ax^2}{35bx^3}$

5. $\frac{12a^4b^2x}{18a^2b^2y}$ **6.** $\frac{20a^3b^4c^8}{48a^4b^7c^6}$ **7.** $\frac{a^n b^{m-n}}{a^{m+n}b^n}$ **8.** $\frac{30a^{2n-1}b^{2n+2}}{25a^{n+2}b^{3n+2}}$

9. $\frac{a^2-2ab}{ab-2b^2}$ **10.** $\frac{2x^2+4xy}{3xy+6y^2}$ **11.** $\frac{42a^3-30a^2b}{35ab^2-25b^3}$

12. $\frac{12x^4+27x^3y}{16x^3y+36x^2y^2}$ **13.** $\frac{20a^3b+12a^2b-24a^2c}{25ab^2+15b^2-30bc}$

14. $\frac{3x^4c+5x^3yc-2x^3c^2}{2xy^2c^2-3x^2y^2c-5xy^3c}$ **15.** $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ **16.** $\frac{2a+1}{4a^2-1}$

17. $\frac{x^2-y^2}{xz+yz}$ **18.** $\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}$ **19.** $\frac{4a^2-2ab}{12a^2-3b^2}$ **20.** $\frac{7a^3b+7ab^3}{a^4-b^4}$

21. $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$ **22.** $\frac{(a+1)^3}{a^3-a}$ **23.** $\frac{x^3+y^3}{2(x+y)^2}$ **24.** $\frac{y^4-x^4}{xy^2+x^3}$

25. $\frac{x^5-y^5}{x^3-y^3}$ **26.** $\frac{2x+4}{3x^3+24}$ **27.** $\frac{16a^3-36ab^2}{6ab-9b^2}$

28. $\frac{243a^6b^6-675a^4b^8}{9a^2b^2-15ab^3}$ 29. $\frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}$ 30. $\frac{12x^2-8xy}{9x^2-12xy+4y^2}$

31. $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^4-b^4}$ 32. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2x+abx}$ 33. $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}$

34. $\frac{20a^5x^2+16a^3bx^2}{75a^4b+120a^2b^2+48b^3}$ 35. $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}$

36. $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$ 37. $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2-6bc^2-6ab^2+6b^3}$

38. $\frac{a^5-ba^4-ab^4+b^5}{a^4-ba^3-a^2b^2+ab^3}$ 39. $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$

40. $\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$ 41. $\frac{(x+a)^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2}$

42. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$ 43. $\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$ 44. $\frac{x^2-x-20}{x^2+x-30}$

45. $\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}$ 46. $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$ 47. $\frac{2x^3+5x^2+3x}{x^3-2x^2-3x}$

48. $\frac{x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-b^4}$ 49. $\frac{x^2+(a+b+c)x+(a+b)c}{a^2+2ab+b^2-x^2}$

50. $\frac{a^3c-2a^2c^2+ac^3-ab^2c}{(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2}$

§ 2. Murdude samanimelisteks tegemine.

Juhis: Et mitu antud murdu teha samanimelisteks, tarvis leida nende murdude kõige väiksem ühine nimetaja, jagada ta kordamööda iga antud murru nimetajaga ja saadud jagatistega (mida nimetatakse täiendusteguriteks) korrutada vastavate murdude lugejad; saadud korrutised võtta otsitavate murdude lugejateks, aga nimetajateks — leitud kõige väiksem ühine nimetaja.

Näit.: $\frac{\overbrace{5a}^{2y^2}}{6x^2y}=\frac{10ay^2}{12x^2y^3}$; $\frac{\overbrace{3b}^{3x}}{4xy^3}=\frac{9bx}{12x^2y^3}$.

Kui antud murdudel on hulkliikmelised nimetajad, siis tarvis nad, kui võimalik, enne murdude samanimeliseks tegemist algteguriteks lahutada.

Näit.: $$\frac{x-a}{x^2+2ax+a^2}=\overbrace{\frac{x-a}{(x+a)^2}}^{a(x-a)}=\frac{a(x-a)^2}{a(x+a)^2(x-a)}.$$

$$\frac{x}{ax^2-a^3}=\overbrace{\frac{x}{a(x+a)(x-a)}}^{x+a}=\frac{x(x+a)}{a(x+a)^2(x-a)}.$$

Teha murrud samanimelisteks:

51. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ **52.** $\frac{a}{2b}, \frac{c}{3d}$ **53.** $\frac{a}{c^2}, \frac{1}{b}$

54. $\frac{b}{a^2}, \frac{c}{2ab}$ **55.** $\frac{x}{y}, \frac{z}{u}, \frac{v}{t}$ **56.** $\frac{2a^2}{b^3}, \frac{3b^2}{a^2}, \frac{5ab}{c^3}$

57. $\frac{5a}{c^3}, \frac{2b^2}{ac}, \frac{b^3}{a^3c}$ **58.** $\frac{7a}{4x^3}, \frac{4bx}{7a^2}, \frac{2ac}{b^2}$ **59.** $\frac{3c^2}{4b^3d^2}, \frac{2a}{6b^2d^3}, \frac{5x}{b^5d}$

60. $\frac{3c^2}{2a^2b^2}, \frac{2b^2}{3c^2d^2}, \frac{a^2}{5e^2f^2}$ **61.** $a, \frac{b^2}{a}$ **62.** $2b, \frac{c}{a^2b}$

63. $\frac{b}{a}, a^2, \frac{c}{2a^2b^2}$ **64.** $\frac{2a}{3b}, \frac{3b}{2c}, bc$ **65.** $\frac{x}{6a^2b}, \frac{1}{8b^3c^2}, \frac{3d}{4a^5c^3}$

66. $\frac{5ab}{12b^4d^3}, \frac{7a^4c}{8b^3d^4}, \frac{b^3d^3}{18a^5c^5}$ **67.** $\frac{7a}{48b^5d^4}, \frac{3c^2}{8b^3d}, \frac{2x^3}{3bd^2}$

68. $\frac{5y^2}{6a^3x}, \frac{1}{30a^5b^4x^3}, \frac{7x^3}{10a^2b^3}$ **69.** $\frac{3a}{4b^4c^2}, \frac{b}{6a^4c^3}, \frac{c}{2a^2b^2}, \frac{1}{8abc}$

70. $\frac{x}{28a^5b^4c^3}, \frac{y}{42a^3b^4c^5}, \frac{z}{12a^6b}, \frac{u}{7ac^8}$ **71.** $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a-b}, \frac{ab}{a^2-b^2}$

72. $\frac{a}{a-b}, \frac{b^2}{a^2+ab}, \frac{a^3}{a^2b-b^3}$ **73.** $\frac{3a}{x^3-ax^2}, \frac{2x}{x+2a}, \frac{5a}{x^3+ax^2-2a^2x}$

74. $\frac{ab}{a^2-4}, \frac{a^2}{ab+2b}, \frac{b^2}{2a^2-a^3}$ **75.** $\frac{2ax}{a^4-x^4}, \frac{a^2}{x^2(x^2-a^2)}, \frac{x^2}{a^3(x-a)}$

76. $\frac{A}{6a^3+6a^2b}, \frac{B}{4a^2b-4ab^2}, \frac{C}{12b(a^2+2ab+b^2)}$

77. $\frac{A}{a^2+5a+6}, \frac{B}{a^3+4a^2+3a}, \frac{C}{(a+1)^2+(a+1)}, \frac{D}{a^2+3a}$

78. $\frac{A}{(a-b)(a-c)}, \frac{B}{(b-a)(b-c)}, \frac{C}{(c-a)(c-b)}$

79. $\frac{A}{(a+b)(a+d)}, \frac{B}{a^2+ac+cd+ad}, \frac{C}{a^2+bc+ab+ac}$

80. $\frac{A}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{B}{(c-b)(ad-bd-a^2+ab)}, \frac{C}{(a-d)(a-c)(b-a)(c-b)}$

§ 3. Segamurru muutmine lihtmurruks ja vastupidi.

Kui murdu moodustab ainult lugeja ja nimetaja jagatis ilma täisarvulise liidetavata või lahutatavata, näit. $\frac{a-b}{a+b}$, siis nimetatakse seesugust murdu liht- ehk üksliikmeliseks murruks. Avaldust aga, mis on moodustatud lihtmurru ja täisarvulise avalduse summa või vahe kujul, näit. $a+\frac{b^2}{a-b}$ või $a-\frac{b^2}{a-b}$, nimetatakse sega- ehk hulkliikmeliseks murruks.

Iga segamurdu võib muuta lihtmurruks. Selleks tarvis segamurru täisarvuline osa korrutada murru nimetajaga, saadud korrutisega liita või temast lahutada (murru-eelset märki silmas pidades) murru lugeja ja kõik saadus võtta uue murru lugejaks, nimetajat endiseks jättes.

Näit.:

$$a-2b-\frac{a^2-ab}{a+b}=\frac{(a-2b)(a+b)-(a^2-ab)}{a+b}=\frac{a^2-2ab+ab-2b^2-a^2+ab}{a+b}=$$
$$=\frac{-2b^2}{a+b}=-\frac{2b^2}{a+b}.$$

Mõnikord muudetakse ka lihtmurde segamurdudeks. Selleks tarvis lihtmurru lugeja jagada sama murru nimetajaga ja saadud jagatise täisarvuline osa liita murruga, mille lugejaks on jagatise jääk, nimetaja aga endine. Säärane muutmine kergendab sagedasti murru lühendamist.

Näit.:

$$\frac{6a^3-5a^2b-ab^2}{3a^2-4ab+b^2}=2a+\frac{3a^2b-3ab^2}{3a^2-4ab+b^2}=2a+\frac{3ab(a-b)}{3a^2-4ab+b^2}=2a+\frac{3ab}{3a-b}.$$

Järgnevad segamurrud muuta lihtmurdudeks:

81. $a+\frac{b}{c}$ **82.** $2a-\frac{ax+a}{x}$ **83.** $b_2+\frac{3a^3-b^3}{b}$

84. $x-\frac{a+x}{2}$ **85.** $x+\frac{1-x}{x}$ **86.** $a-\frac{b-a}{2}$

87. $1+\frac{x}{1-x}$ 88. $3-\frac{3}{a^2-1}$ 89. $m-n-\frac{m-n}{2}$

90. $5-\frac{7(m+3n)}{2m}$ 91. $\frac{(a+b)^2}{2a}-2b$ 92. $2a-\frac{2b^2}{a+2b}$

93. $\frac{a^2+b^2}{a+b}+2(a-b)$ 94. $a+b-\frac{a^2-3b^2}{a-b}$ 95. $ax+4-\frac{ax^2-y}{x+y}$

96. $\frac{a+x+y}{x-y}-1$ 97. $x^2-xy+y^2+\frac{2y^3}{x+y}$ 98. $1-\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

99. $\frac{5n-1}{n^2-2n+3}+2n+1$ 100. $2-3n-\frac{3-2n}{2-n+n^2}$

Muuta järgnevad murrud segamurdudeks:

101. $\frac{25a}{7}$ 102. $\frac{36ac+4b}{9}$ 103. $\frac{12a^2-5b}{6a}$

104. $\frac{a^2-c^2}{a}$ 105. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 106. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

107. $\frac{x^2+x}{x-1}$ 108. $\frac{x^3-2}{x+2}$ 109. $\frac{25a^3-3b+2c}{5a^2}$

110. $\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}$ 111. $\frac{2x^3-15xy^2-12y^3}{3y^2}$ 112. $\frac{x^2+2xy+3y^2}{x+3y}$

113. $\frac{4ab-2b^2-a^2}{2a+b}$ 114. $\frac{2(a^3-b^3)+a^2b}{a^2+b^2}$ 115. $\frac{a^3+b^3-2ab^2}{a-2b}$

116. $\frac{a^4+b^4-3a^2b^2}{a+b}$ 117. $\frac{n^3+7n^2-13n-21}{n^2+2n-3}$

118. $\frac{1-5n+11n^2-3n^3}{1-3n+2n^2}$ 119. $\frac{3m^4+m^3n-40n^4}{m^2+mn-2n^2}$ 120. $\frac{m^4-2m^3n+n^4}{m^2-nm+2n^2}$

§ 4. Lihtmurdude liitmine ja lahutamine.

Juhis: Et samanimelisi murde liita või lahutada, tarvis vastavalt liita või lahutada antud murdude lugejad, kuna nimetaja endiseks jääb.

Näited: 1) $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

2) $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

Kui liitmiseks või lahutamiseks antud murdude nimetajad on isesugused, siis tarvis murrud esialgu samanimelisteks teha.

Näiteks: $\overset{dg}{\frown}\frac{2a}{bc}+\overset{cd}{\frown}\frac{8a}{bg}-\overset{cg}{\frown}\frac{2c}{bd}=\frac{2adg+8acd-2c^2g}{bcdg}$.

121. $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}$ **122.** $\frac{x}{m}-\frac{y}{m}$ **123.** $\frac{a}{5}+\frac{9a}{5}$ **124.** $\frac{xy}{n}-\frac{yz}{n}$

125. $\frac{3x}{m}-\frac{2x}{m}+\frac{x}{m}$ **126.** $\frac{3x}{n}+\frac{5x}{n}-\frac{12x}{n}$ **127.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$ **128.** $\frac{a}{x}-\frac{b}{mx}$

129. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ **130.** $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$ **131.** $\frac{x}{15a}+\frac{y}{3}$ **132.** $\frac{a}{bc}-\frac{a}{bd}$

133. $\frac{2}{m^2}+\frac{5}{mn}$ **134.** $\frac{m}{p^3q^2}-\frac{1}{p^2q^3}$ **135.** $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^4}$

136. $\frac{ab}{10c^3d}-\frac{2c}{15d^2k^3}$ **137.** $\frac{m}{a}+\frac{m}{b}+\frac{m}{c}$ **138.** $\frac{a}{xy}-\frac{b}{xz}-\frac{c}{yz}$

139. $\frac{n}{2b}+\frac{n}{3b}\quad\frac{n}{4b}$ **140.** $\frac{3a}{bc}-\frac{5a}{bd}+\frac{4d}{bf}$ **141.** $\frac{3b}{5a^2}-\frac{a}{6b^2}-\frac{8c}{15ab}$

142 $\frac{5a}{12y^3z^2}-\frac{b}{15yz^4}+\frac{3c}{10y^5}$ **143.** $\frac{c^2y^8}{a^3b^5x^2}-\frac{x^5y^6}{a^4b^2c^4}-\frac{a^8c^3}{bc^2x^7}$

144. $\frac{a^{n-1}}{c^2x^{n-3}}-\frac{b^4z^n}{c^4x^{n-2}}-\frac{1}{acx^n}$ **145.** $\frac{9a^n}{12b^6c^4}-\frac{5b^{n-2}}{15ab^5}+\frac{2c^{n-1}}{24ac^2}$

146. $\frac{a^{n-1}}{4bc^{m-n}}+\frac{b^n}{3a^mc}-\frac{c^{m+1}}{2ab^{m+n}}$ **147.** $\frac{a+b}{b}+\frac{a-b}{b}$

148. $\frac{c+d}{3c}-\frac{c-d}{4c}$ **149.** $\frac{5a-2b}{2}+\frac{3a-5b}{3}$

150. $\frac{15a+4b}{12}-\frac{3b-22a}{9}$ **151.** $\frac{3a+2b}{a}+\frac{2a^2-2b^2}{ab}$

152. $\frac{b^2+3ac}{bc}-\frac{ab+4bc}{ac}$ **153.** $\frac{4a-23b}{4}-\frac{4a-25b}{6}+\frac{19b-4a}{12}$

154. $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}-\frac{a-4b}{21}$

155. $\frac{5a^2-ab+c}{12}-\frac{2ab-a^2-3c}{18}-\frac{-2a^2+2ab}{24}$

156. $\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2}+2ab^2-\frac{3}{2ab}$ **157.** $\frac{6-a^2}{6a}+\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)$

158. $\frac{5a-7b}{3b}-\frac{c-3a}{a}+\frac{a+5c}{5a}-\frac{11a}{6b}$

159. $\frac{5a+3c}{9c}-\frac{a^2-bc}{2ac}-\frac{2a}{b}+\frac{4a-b}{2b}-\frac{3b-a}{6a}$

160. $\frac{6c+5b}{6bc}+\frac{3a-5b}{15ab}-\frac{a-7c}{12ac}-\frac{4c-5b}{20bc}+\frac{3}{4a}$

Eespool-toodud murdude liitmise ja lahutamise juhised on maksvad ka 1) murdude kohta, millede nimetajad on hulkliikmed, ja 2) avalduste kohta, milledes liidetavate ja lahutatavate seas on mõned täisarvulised suurused.

Näited:

$$1)\ \frac{3}{a+1}+\frac{1}{1-a}-\frac{2a}{1-a^2}=\overbrace{\frac{3}{1+a}}^{1-a}+\overbrace{\frac{1}{1-a}}^{1+a}-\overbrace{\frac{2a}{(1+a)(1-a)}}^{1}=$$

$$=\frac{3(1-a)+(1+a)-2a}{(1+a)(1-a)}=\frac{4-4a}{(1+a)(1-a)}=\frac{4}{1+a}.$$

$$2)\ a+\frac{b}{c}=\overbrace{\frac{a}{1}}^{c}+\overbrace{\frac{b}{c}}^{1}=\frac{ac+b}{c}.$$

Mõnikord tuleb murdude samanimelisteks tegemisel säärane juhus, et lahendamise kergendamiseks tarvis mõne murru nimetaja või tema üksiku teguri märk vastupidiseks muuta. Seesugust märgimuutmist võib alati ette võtta, kuid tingimusega, et ka sama murru lugeja või mõne tema üksiku teguri märk muudetaks, ehk jättes lugeja märk muutmata, peab murru enese ees olev märk vastupidiseks muudetama.

Näit.:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{b-a}-\frac{b}{b+a}=\overbrace{\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}}^{1}-\overbrace{\frac{b}{a-b}}^{a+b}-\overbrace{\frac{b}{a+b}}^{a-b}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-b(a+b)-b(a-b)}{(a+b\,(a-b)}=\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

161. $\frac{b}{a-b}+\frac{a}{a+b}$

162. $\frac{x}{1-a^2}-\frac{x}{a^2+1}$

163. $\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

164. $\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{3x-2a}$

165. $\frac{a^3}{2(a+1)^3}-\frac{a^2}{(a+1)^2}+\frac{a}{2(a+1)}$

166. $\frac{a}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$

167. $\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$

168. $\frac{2}{4a-3}+\frac{3}{4a+3}-\frac{16a-6}{16a^2-9}$

169. $\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$

170. $\frac{a(16-a)}{a^2-4}+\frac{3+2a}{2-a}-\frac{2-3a}{a+2}$

171. $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}+\frac{2x}{(x+2)^2}$

172. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

173. $\frac{5}{2a+2}-\frac{1}{10a-10}-\frac{24}{10a+15}$

174. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

175. $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}$

176. $\frac{2}{a+4}-\frac{a-3}{a^2-4a+16}-\frac{a^2-9a}{a^3+64}$

177. $\frac{1}{2a-3b}-\frac{2a+3b}{4a^2+6ab+9b^2}-\frac{6ab}{8a^3-27b^3}$

178. $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}+\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\frac{2}{x^4+x^2y^2+y^4}$

179. $\frac{2}{(x-a)(b-a)} - \frac{2}{(b-x)(a-b)} + \frac{3}{(x-a)(x-b)}$

180. $\frac{a+2x}{3a-3x} - \frac{3c-a}{2a-2c} + \frac{a^2-cx}{a^2-ac+cx-ax}$

181. $\frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{2a-1}{a^2-4a+3} - \frac{2a-5}{(a^2-5a+4)(a-3)}$

182. $\frac{a+1}{a^2-a-12} + \frac{a+4}{a^2+4a+3} - \frac{2(a-3)}{a^2-3a-4}$

183. $\frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2} + \frac{a-b-c}{a+b-c} - \frac{a+b+c}{a-b+c}$

184. $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2} + \frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2} + \frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$

185. $\frac{1}{(m-n)(m-p)} + \frac{1}{(n-m)(n-p)} + \frac{1}{(p-m)(p-n)}$

186. $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc} + \frac{b^2}{b^2-ab+ac-bc} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

187. $\frac{m+n}{(n-p)(p-m)} + \frac{n+p}{mp-m^2+mn-np} + \frac{p+m}{mn+np-n^2-mp}$

188. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

189. $\frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1} + \frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \frac{2a^3}{a^4-1}$

190 $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

§ 5. Murdude korrutamine.

Juhis: Et murdusid korrutada, tarvis korrutada lugejad ja nimetajad isekeskis ja võtta lugejate korrutis uue murru lugejaks, kuna aga nimetajate korrutis võetakse uue murru nimetajaks.

Näit.: 1) $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$.

2) $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = \frac{abc}{mnp}$.

Sama juhis on maksev ka juhusel, kui mõni tegur on täisarvuline avaldus; näit.: $a \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{1} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{y}$.

Saadud korrutised tulevad, kui võimalik, koondada.

191. $\frac{a}{b} \cdot c.$ **192.** $m \cdot \frac{x}{y}$ **193.** $\frac{1}{x} \cdot x$ **194.** $m^2 \cdot \frac{n}{m^2}$

195. $\frac{4a^2}{b^2} \cdot 3b^2c^3$ **196.** $2a^2b^3 \cdot -\frac{5c^2d}{a^2b^3}$ **197.** $\frac{4x^2y^2}{15p^4q^9} \cdot 45p^2q^2$

198. $4m^2x^3 \cdot -\frac{3a^2m^3}{8x^5}$ **199.** $5(a+b)^6(a+b)^n \cdot \frac{3b}{10(a+b)^3(a-b)^{n-2}}$

200. $-2b^nc^3(x-1)^n \cdot \frac{3c}{b^p(x-1)^{n-2}}$ **201.** $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u}$ **202.** $\frac{3a}{5b} \cdot -\frac{b}{a}$

203. $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6bc}{5a^2}$ **204.** $\frac{a^3c^2d}{pqm} \cdot \frac{pm^3}{a^4c^3}$ **205.** $\frac{4a^nb^4}{9c^5d^3} \cdot -\frac{15c^2d^m}{2ab^2}$

206. $-\frac{4a^{2n-1}b^2}{c^{p-n}d^3} \cdot \frac{3c^{n+p}d^m}{2a^3b^5}$ **207.** $\frac{x^2}{yz} \cdot \frac{y^2}{xz} \cdot \frac{z^2}{xy}$

208. $\frac{5a^2b}{3cd} \cdot \frac{4b^2c}{15a^2} \cdot \frac{9c^2d}{16b^3}$ **209.** $\frac{a^{2n+2}}{b^{m-n}} \cdot \frac{b^{m+n}}{a^{2n+3}} \cdot \frac{a^{3n-2}}{b^{mn}}$

210. $\frac{x^{m+n}y^{n+p}}{z^{n+p}u^{p+m}} \cdot \frac{z^{n-1}u^m}{x^{n-p}y^p} \cdot \frac{z^p}{y^n}$ **211.** $\frac{3bx^2}{8(x+y)^4c^3} \cdot -6(x+y)^2c^4x^3$

212. $4(a-b)^5x^3y^n \cdot -\frac{3(a+c)^2}{14(a-b)^3x^ny^3}$

213. $-\frac{12a^{n-2}(a+x)^2c^5}{d^3} \cdot \frac{5c^2}{3a^{n-4}(a+x)^5}$

214. $\frac{4a^2b(n-2)^3}{9c^nd^3} \cdot -\frac{3b^2d^3}{10a^m(n-2)^2}$ **215.** $\frac{2}{3c^r} \cdot -\frac{3c^nx^{p-1}}{10y^n} \cdot -\frac{5x^{p+2}}{7y^2}$

216. $\frac{d^p}{16x^3y^4} \cdot -\frac{10x^5c^{n-3}}{f^{n-1}} \cdot -\frac{d^{p-2n}f^{n-4}}{5c^nx^p}$

Kui murru liikmed on hulkliikmelised avaldused, siis tuleb enne murdude korrutamist hulkliikmelised murru liikmed algteguriteks lahutada; näit.:

$$\frac{x^2-xy}{y(x+y)} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = \frac{x(x-y)}{y(x+y)} \cdot \frac{(x+y)\overbrace{(x^2-xy+y^2)}^{(x+y)\,(x-y)}}{(x+y)\,(x-y)} = \frac{x(x^2-xy+y^2)}{y(x+y)}$$

217. $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1}$ **218.** $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{3x}{x-y}$

219. $-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot -\frac{3a^2}{4a-4b}$ **220.** $\frac{ab+ac}{bd-cd} \cdot \frac{ab-ac}{bd+cd}$

221. $-\frac{(x-y)^2}{(x+y)y^3} \cdot \frac{y}{x(x+y)}$ **222.** $\frac{x^3+y^3}{x-y} \cdot \frac{x+y}{x^3-y^3}$

223. $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{ab(a+b)}$ **224.** $\frac{b^4-a^4}{a^2+2ab+b^2} \cdot \frac{a+b}{b^2-ab}$

225. $\frac{b(a-c)}{a^2+2ac+c^2} \cdot \frac{a(c+a)}{a^2-2ac+c^2}$ **226.** $\frac{2a(p^2-q^2)^2}{bp} \cdot \frac{p^3}{(p-q)(p+q)^2}$

227. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+3xy(x+y)+y^3}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$ **228.** $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{a^3+b^3}{a-b}$

229. $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac}\cdot\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$ **230.** $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}\cdot\frac{x+x^2}{1-x}$

231. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ **232.** $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)$

233. $\left(a+\frac{a^2}{c}\right)\cdot\left(a+\frac{bc}{a}\right)$ **234.** $\left(\frac{a+x}{2x}\right)^2-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2$

235. $\frac{ab}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$ **236.** $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$

237. $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}$ **238.** $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

239. $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)$ **240.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)$

241. $\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}$ **242.** $\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\frac{x}{ax+ay}+\frac{3}{2x+2y}\right)$

243. $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)\left(1-a^2\right)$ **244.** $\left(\frac{a^2+1}{2a-1}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{3-a}{a+2}-1\right)$

245. $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$ **246.** $\frac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot\left(a+\frac{ax}{a-x}\right)$

247. $\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)$ **248.** $\left(\frac{2x}{x-y}+\frac{x-y}{y}\right)\left(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)$

249. $\left(\frac{x}{yz}-\frac{y}{xz}-\frac{z}{xy}-\frac{2}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{2z}{x+y+z}\right)$

250. $\left(\frac{4xy}{z^2-x^2-y^2+2xy}-1\right)\cdot\left(1-\frac{2x}{x+y+z}\right)$

§ 6. Murdude jagamine.

Juhis: Et murdu murruga jagada, tarvis korrutada esimese murru lugeja teise murru nimetajaga ja esimese murru nimetaja teise murru lugejaga; esimene korrutis võtta uue murru lugejaks, aga teine korrutis murru nimetajaks.

Näit.: $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{an}{bm}$.

Sama juhis jääb maksvaks juhusel, kui jagatav või jagaja on täisarvulised avaldused; näit.:

1) $a:\frac{b}{n}=\frac{a}{1}:\frac{b}{n}=\frac{an}{b}$.

2) $\frac{a}{m} : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{1} = \frac{a}{bm}$.

Saadud jagatis tarvis koondada, kui võimalik.

251. $\frac{a}{b} : a$ **252.** $a^3 : \frac{a^2}{c}$ **253.** $\frac{x}{y} : z$ **254.** $x : \frac{y}{z}$

255. $\frac{1}{b} : a$ **256.** $m : \frac{1}{n}$ **257.** $\frac{ab}{cd} : abc$ **258.** $x^3y^2z : \frac{xy}{m}$

259. $\frac{9m^3n^2}{8pq} : 8n^2$ **260.** $10a^2b^3 : \frac{50a^3b^4}{7c^2}$ **261.** $49x^2y^3 : \frac{7x^2y^2}{11pq}$

262. $9x^4y^5z^6 : \frac{27x^6y^9z^7}{4m^3n^2}$ **263.** $\frac{a}{b} : \frac{1}{b}$ **264.** $\frac{x}{y} : \frac{x}{z}$

265. $\frac{1}{c} : \frac{6ab}{c}$ **266.** $\frac{ab}{xy} : \frac{3}{xy}$ **267.** $\frac{24xy}{7ab} : \frac{16z}{9ab}$

268. $\frac{18x^2y}{25zu} : \frac{6x^2y}{35pz}$ **269.** $\frac{7ab}{3mn} : \frac{5pq}{11xy}$ **270.** $\frac{42mp}{65nq} : \frac{15a^2}{26b^2}$

271. $\frac{14a^2b^3c}{39d^5s^7} : \frac{35a^4b^5}{9d^7s}$ **272.** $\frac{a^{3n+2}}{b^{m-1}} : \frac{a^{2n+3}}{b^{1+m}}$

273. $\frac{a^2b^4}{x^3y^n} : \frac{b^{m+3}y^{m-n}}{a^{n-1}x^{n+2}}$ **274.** $\frac{a^{m+n}b^{n+p}}{x^{n+p}y^{p+n}} : \frac{a^{n-p}b^{p-m}}{x^{p-1}y^{m-2}}$

On jagamiseks antud murdude liikmed hulkliikmelised avaldused, siis on tarvis nad enne jagamist algteguriteks lahutada, et võimalik oleks murru koondamine.

275. $\frac{a+b}{a-b} : \frac{b+a}{b-a}$ **276.** $\frac{3p-3q}{5p+5q} : \frac{9q-9p}{10q+10p}$

277. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} : \frac{3x^2+3y^2}{x+y}$ **278.** $\frac{6ab-6b^2}{a(a+b)} : \frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}$

279. $\frac{y^2-4x^2}{y^2+4xy} : \frac{y^2-2xy}{xy+4x^2}$ **280.** $\frac{6p^3}{p^3-q^3} : \frac{2p^2}{p^2+pq+q^2}$

281. $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2} : \frac{a-b}{a^3+b^3}$ **282.** $\frac{a^2+b^2}{1+x+x^2} : \frac{a^4-b^4}{1+x^2+x^4}$

283. $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac} : \frac{x^2-a^2}{x^2-c^2}$ **284.** $\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy} : \frac{x+y+z}{y+z-x}$

285. $\frac{a^2+2a-3}{a^2+4a+4} : \frac{a^2-9}{a^2+3a+2}$ **286.** $\frac{a^2-2a-15}{a^2-8a+16} : \frac{a^2-8a+15}{a^2-a-12}$

287. $\frac{x^6+1}{x^2-1} : \frac{(x^2-1)^2+x^2}{x^2-2x+1}$ **288.** $\frac{x^4-3x^2+1}{x^3-27} : \frac{x^2+x-1}{x^2+3x+9}$

289. $\frac{25p^4+10p^2+4}{25p^2-10p+4} : \frac{125p^6-8}{125p^3+8}$

290. $\frac{6p^2q^3}{m+n} : \left\{\frac{3(m-n)q}{7(r+s)} : \left[\frac{4(r-s)}{21p^2q^2} : \frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right]\right\}$

291. $\dfrac{\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m}}{\dfrac{c}{m}}$ **292.** $\dfrac{\dfrac{m}{x}-\dfrac{n}{y}}{\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{x}}$ **293.** $\dfrac{\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{xy}}{\dfrac{c}{xy^2}}$ **294.** $\dfrac{\dfrac{p}{yz}-\dfrac{q}{x^2}}{\dfrac{p}{xz}+\dfrac{q}{y^2}}$

295. $\left(m+\dfrac{mn}{m-n}\right):\left(m-\dfrac{mn}{m+n}\right)$ **296.** $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

297. $\left(\dfrac{x^2}{2a^2}-4+\dfrac{6a^2}{x^2}\right):\left(\dfrac{x}{2a}-\dfrac{3a}{x}\right)$ **298.** $\left(x+\dfrac{y-x}{1+xy}\right):\left(1+\dfrac{y-x}{1-xy}\cdot x\right)$

299. $\left(\dfrac{m+n}{m-n}-\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right):\left(\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m^3-n^3}{m^3+n^3}\right)$

300. $\left[\dfrac{9m^2-3n^2}{4mn}-\dfrac{m-4n}{5n}\right]:\left[\dfrac{2m+n}{3m}-\dfrac{5n^2-3m^2}{16m^2}\right]$

301. $\dfrac{1+\dfrac{1}{a-1}}{1-\dfrac{1}{a+1}}$ **302.** $\dfrac{a-\dfrac{b^2}{a+b}}{b-\dfrac{a^2}{a+b}}$ **303.** $\dfrac{p+2-\dfrac{1}{p+2}}{p+2+\dfrac{p}{p+2}}$

304. $\dfrac{q-p-\dfrac{16p^2}{q+p}}{q-p+\dfrac{4p^2}{q-6p}}$ **305.** $\left[\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}-a\right):\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\right]\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$

306. $\left[\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right]:\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ **307.** $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{z}{yz+1}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$

308. $\dfrac{3abc}{bc+ac-ab}-\dfrac{\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b-1}{b}+\dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}}$ **309.** $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

310. $\dfrac{\left[\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-1\right]\left[\dfrac{(a-b)^2}{4ab}+1\right]}{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}\cdot\dfrac{[(a+b)^2-ab]\,[(a-b)^2+ab]}{(a-b)^3+3ab(a-b)}$

§ 7. Negatiivsete astmenäitajate tarvitamine.

Nagu murdarvulisi avaldusi võib muuta täisarvuliste avalduste jaoks kokkuseatud juhiste järele, nii võib samu juhiseid muutmata tarvitada astmenäitaja mõiste laiendamisel.

Astmenäitajad võivad olla positiivsed, nullised ja negatiivsed. Nagu teada, tähendab positiivne täisarvuline astmenäitaja n, et aste a^n pole midagi muud, kui n ühesuguse teguri korrutis, kusjuures iga tegur võrdub astme alusega a, s. o. $a^n = a \,.\, a \ldots a$ (n korda). Negatiivse astmenäitajaga astmel a^{-n} on aga sootuks isesugune tähendus, nimelt $a^{-n} = \frac{1}{a}$, s. o. niisugune aste moodustab suuruse, mis on endisele astmele a^n vastupidine. Näit., $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{27}\right)$, kuna aga $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 : \frac{8}{27} = \frac{27}{8}$.

Igasuguse suuruse nulline aste võrdub ühelisega; näit., $a^0 = 1$, $(-2)^0 = 1$, $(100)^0 = 1$ jne.

311. Arvutada: 2^0, 3^2, 2^{-3}, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^0$, $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$, $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$, $2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

312. Arvutada: $(-5)^2$, $(-3)^{-3}$, $(-4)^0$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}$, $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(-1\frac{1}{4}\right)^{-3}$.

Leida tõelikud väärtused:

313. $\left[3-2\left(\frac{2}{5}\right)^0\right]^{-3}$ **314.** $\frac{3 \,.\, 5^{-1} - 2^0}{3^{-2}}$ **315.** $\left[\frac{2}{3} - \left(\frac{4}{7}\right)^{-1}\right]^0$

316. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} - \frac{4}{5}\right]^{-1}$ **317.** $\left[2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^{-2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

318. $\frac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot \left(5^0-\frac{2}{7}\right)$ **319.** $[(1-3^{-2})^{-2}-2]^{-1} \,.\, \left(\frac{2}{3}\right)^0$

320. $\left\{\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-1} - \left(\frac{5}{7}\right)^0\right\}^{-2} \left(\frac{2}{13}\right)^3$

Negatiivsed ja nullised astmenäitajad ära kaotada ja saadused lihtsustada:

321. $a^{-3} \,.\, b^0$ **322.** $\frac{b^0}{a^{-m}}$ **323.** $x^{-a} \,.\, \frac{1}{a^0}$ **324.** $a^{-5} \,.\, \frac{1}{x^{-3}}$

325. $(x+y)^0$ **326.** $x^0 - y^0$ **327.** $\frac{a^{-5}}{a^{-3}}$ **328.** $\frac{a^{-x}}{a^{-y}}$

329. $\frac{a^{n-4}}{a^{-5}}$ **330.** $\frac{(1-m)^{-1}}{m^{-2}}$ **331.** $\frac{-2a^{-4}b^0}{3c^0x^{-2}}$

332. $\frac{5a^{-3} \,.\, -3^0}{3a^{-5} \,.\, 5^{-1}}$ **333.** $\frac{(a^0+b^0)^{-2}x^{-5}}{4^{-1}x^{-3}}$ **334.** $(1-a^{-2})^{-1}$

335. $\frac{2^0(x^0+y^0+z^0)^{-2}}{6^{-1}a^{-3}}$ **336.** $\frac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}{ab+ac+bc}$ **337.** $\frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$

338. $\frac{a^{-3}+a^{-2}\,b^{-2}}{a^{-1}b^{-1}}$ 339. $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$ 340. $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}$

341. $\left(1-\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{-2}$ 342. $\left[\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}\cdot\left(\frac{1}{b^{-n}}-\frac{1}{a^{-n}}\right)\right]^{-1}$

Negatiivseid astmenäitajaid tarvitades kujutada järgnevad murrud täisarvude näol:

343. $\frac{1}{9}$ 344. $\frac{1}{2^3}$ 345. $\frac{1}{a^m}$ 346. $\frac{a^m}{b^n}$

347. $5a\frac{1}{b^2}$ 348. $\frac{m}{x^6}$ 349. $\frac{a^5}{2b^2}$ 350. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

351. $\frac{1}{2^3}-\frac{1}{x^2}$ 352. $\frac{x^m}{x^5}+\frac{y^3}{y^n}$ 353. $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{q^2}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{y}}$

354. $\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^3}\right)^m}$ 355. $\frac{\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^4}\right)^3}{\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{y^2}\right)^2}$ 356. $\frac{\frac{1}{x+y}}{x-y}$

Nagu eespool nägime, on $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; nõnda ka vastupidiselt $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$, s. o. igasuguse suuruse negatiivne aste võrdub murruga, mille lugejaks on 1 ja nimetajaks samasugune aste, ainult positiivse astmenäitajaga, ja vastupidi: igasuguse suuruse positiivne aste võrdub murruga, mille lugejaks on 1 ja nimetajaks samasugune aste, ainult negatiivse astmenäitajaga.

Järgnevais avaldusis järgmised neli muutust ette võtta: 1) nimetaja ära kaotada, 2) lugejasse ainult üheline jätta, 3) kõik negatiivsed astmenäitajad ära kaotada ja 4) kõik positiivsed astmenäitajad ära kaotada:

357. $\frac{a^2b^{-3}}{x^{-4}}$ 358. $\frac{4a^4b^{-2}}{9c^2d^{-4}}$ 359. $\frac{a^m}{b^{-n}x^p}$ 360. $\frac{2}{3^3a^{-q}b^p}$

361. $\frac{8a^{-3}b^4(c-d)^4}{5^{-1}c^2(c+d)^{-4}}$ 362. $\frac{(c+d)^m\,d^{-3}}{2^{-3}a^n\,b^{-m}}$

363. $\frac{27a^{-2n}(a-c)^{-3}x^2}{4c^{-n}(x-z)^{-6n}z^3}$ 364. $\frac{a^{-2n+1}(x+z)^3}{8b^{-n}(a-b)^{-n+2}z^{3-n}}$

365. $\dfrac{a^{-3} \cdot \dfrac{1}{b^{-n}} \cdot (m-n)^p \cdot \dfrac{1}{(y-z)^2}}{c^{-m} d^{-n} \cdot \dfrac{1}{m^p} \cdot \dfrac{1}{(x+y)^3}}$ **366.** $\dfrac{\dfrac{(m+n)^{-p}}{(m-n)^q} \cdot a^{2n+1} \cdot \dfrac{x^{-\alpha}}{(y-z)^b}}{b^{-1-n} \cdot \dfrac{(p-q)^m}{(p+q)^{-n}} \cdot z^{2-n}}$

Negatiivsete astmenäitajatega suuruste kohta on maksvad samad juhised, mis positiivsete astmenäitajatega suuruste kohta, sellepärast ei ole tarvis enne arvutamist negatiivseid astmenäitajaid ära kaotada. Ainult lõppsaaduses kaotatagu negatiivsed astmenäitajad ära.

Järgnevais avaldusis arvutada näidatud tehted ja lõppsaadustes negatiivsed astmenäitajad ära kaotada:

367. $a^{-2} \cdot a^7$ **368.** $a^{-10} \cdot a^{-7}$ **369.** $a^{-m} \cdot a^{2m}$ **370.** $a^{m+1} \cdot a^{-3}$

371. $a^{-7} : a^4$ **372.** $a^{-5} : a^{-2}$ **373.** $a^{-m} : a^{-2m}$ **374.** $a^{-5n} : a^{8n}$

375. $2^{-5} \cdot 2^3$ **376.** $2^{-3} : 2^{-2}$ **377.** $3^{-1} : 3^{-4}$ **378.** $5^{-1} \cdot 5^{-3}$

379. $a^{-3} \cdot a^5 \cdot a^{-7}$ **380.** $a^{-2} \cdot a^{-3} \cdot a$ **381.** $a^{-m} \cdot a^{-n} \cdot a^{2m}$

382. $a^{-3m} \cdot a^{2m} \cdot a^{-m}$ **383.** $8a^{-4}b \cdot 3a^{-2}b^{-2}c^{-1}$

384. $\frac{2}{3}a^{-5}b^4c^{-2} : \frac{2}{15}a^{-2}c^2d^{-3}$ **385.** $2^{-2}a^{-m}b^pc^{-q} \cdot 2^{-4}a^{-m}b^{-p}c^q$

386. $-\,6a^{-m}b^2c^p : -3a^{-n}b^{-4}c^{-p-1}d^{-n}$

387. $(m^{-5}-m^{+3}+m^{-1}) \cdot m^4$ **388.** $(m^{-8}+m^7-m^{-3}) : -m^{-7}$

389. $(p^{-4}-p^{-3}q+p^{-2}q^2-p^{-1}q^3+q^4) \cdot p^4q^{-4}$

390. $(p^{-10}+p^{-8}q^4+p^{-6}q^6+p^{-4}q^8) : -p^{-6}q^8$

391. $(a^{-3}+b^{-5})(a^{-3}-b^{-5})$ **392.** $(a^{-2m}-b^{-2m}) : (a^{-m}+b^{-m})$

393. $(a^{-m}+b^{-m}) \cdot (a^{-n}-b^{-n})$ **394.** $(a^{-3m}-b^{-3m}) : (a^{-m}-b^{-m})$

395. $(x^{-2}+x^{-1}+x^0)(x^{-1}-x)$

396. $(x^{-2}-a^{-1}x^{-1}+a^{-2})(x^{-1}+a^{-1})$

397. $(x^{-4}+a^2x^{-2}+a^4)(x^2-a^{-2})$

398. $(6x^2+11+4x^{-2}) : (2x+x^{-1})$

399. $(2x+3+3x^{-1}+x^{-2}) : (x+1+x^{-1})$

400. $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}x^{-2}+x^{-4}\right) : \left(4x-2x^{-1}\right)$

VI osa.

Võrduste muutmine.

A. Võrded (proportsioonid).

§ 1. Võrrete liigid ja võrrete lahendamine.

Kahe suuruse vahet $a-b$ nimetatakse veel a ja b aritmeetiliseks suhteks. Kahe suuruse jagatist $a:b$ nimetakse a ja b geomeetriliseks suhteks. Kummalgi juhusel nimetatakse suurust a suhte eesliikmeks ja suurust b suhte tagaliikmeks.

Leida järgnevate suuruste aritmeetiline suhe:

1. $a+b$ ja $a-b$ **2.** a^2-b^2 ja a^2+b^2 **3.** $(m-n)^2$ ja m^2-n^2

4. $\frac{p+1}{p-1}$ ja $\frac{p^2+1}{p^2-1}$ **5.** $\frac{x^3-1}{x^3+1}$ ja $\frac{x-1}{x+1}$

6. Leida $a-x$ ja $x-b$ aritmeetiline suhe, teades, et $x=\frac{2ab}{a+b}$

Leida järgnevate suuruste geomeetriline suhe:

7. a^2-b^2 ja $a+b$ **8.** a^3-1 ja $a-1$ **9.** $\frac{m^2+9}{m^2-9}$ ja $\frac{m+3}{m-3}$

10. $\frac{p^3-8}{p^3+8}$ ja $\frac{p-2}{p+2}$ **11.** $\frac{a+b+x}{a+b-x}$ ja $\frac{a-b+x}{a-b-x}$

12. Leida $a+x$ ja $b-x$ geomeetriline suhe, kui $x=\frac{2ab}{a-b}$.

Kui kaks võrdset aritmeetilist suhet on ühendatud võrdsusmärgiga, siis moodustavad nad aritmeetilise võrde (proportsiooni); näit., $a-b=c-d$.

Ühendades kaks võrdset geomeetrilist suhet võrdsusmärgiga, saame geomeetrilise võrde (proportsiooni); näit., $a:b=c:d$.

Suurused a, b, c ja d on kummalgi juhusel võrde liikmed: a ja d äärmised ja b ja c keskmised liikmed.

Aritmeetilise võrde peaomadus on, et tema äärmiste liikmete summa võrdub tema keskmiste liikmete summaga. Vastupidi, võrduses $a+d=b+c$ on suurused a, b, c ja d aritmeetiliselt proportsionaalsed, s. o. neist suurustest võib kokku seada aritmeetilise võrde.

Geomeetrilise võrde pea-omadus on, et tema äärmiste liikmete korrutis võrdub tema keskmiste liikmete korrutisega. Vastupidi, võrduses $ad=bc$ on suurused a, b, c ja d geomeetriliselt proportsionaalsed, s. o. neist suurustest võib kokku seada geomeetrilise võrde.

Nimetatud omadustel põhjeneb muu seas võrrete proovimine.

Aritmeetilise võrde iga äärmine liige võrdub keskmiste liikmete summaga ilma teise äärmise liikmeta; iga keskmine liige võrdub äärmiste liikmete summaga ilma teise keskmise liikmeta.

Geomeetrilise võrde iga äärmine liige võrdub keskmiste liikmete korrutise ja teise äärmise liikme jagatisega; iga keskmine liige võrdub äärmiste liikmete korrutise ja teise keskmise liikme jagatisega.

Eelmistel omadustel põhjeneb võrrete lahendamine, s. o. otsitava liikme määramine antud kolme liikme järele.

Järgnevad võrded proovida:

13. $2a^2-(a+2)^2=(2-a)^2-8$

14. $(a^3+27)-(a+3)^3=(a-3)^3-(a^3-27)$ parandada

15. $\frac{3m}{m+n}-\frac{2mn}{m^2-n^2}=\frac{4m}{m+n}-\frac{m}{m-n}$

16. $\frac{x+y}{x-y}-\frac{y+2x}{x+y}=\frac{x-y}{x+y}-\frac{2x^2-5xy-y^2}{x^2-y^2}$

17. $(a^3-b^3):(a^2+ab+b^2)=(a^2-b^2):(a+b)$

18. $(a^3-b^3):(a^2+b^2)=(a^2-b^2):(a+b)$ parandada

19. $\frac{m^2+n^2}{m-n}:\left[\frac{(m+n)^2}{2mn}-1\right]=2mn:(m-n)$

20. $\frac{x}{x-3y}:\frac{y}{x-y}=\left(\frac{x}{x-3y}-\frac{x}{x-2y}\right):\left(\frac{y}{x-2y}-\frac{y}{x-y}\right)$

Järgnevad võrded lahendada:

21. $a-b=x-d$ **22.** $x-a=c-d$

23. $(a+b)^2-(a^2-b^2)=(a-b)^2-x$

24. $\frac{a^2}{a-b}-x=(a+b)-\frac{2ab}{a-b}$ **25.** $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=\frac{a^2}{a^2-b^2}-x$

26. $\frac{a^2+b^2}{a-b}-x=\frac{2a^2b}{a^2-b^2}-(a+b)$ **27.** $a:b=x:d$ **28.** $x:a=b:c$

29. $3a^2b:x=5a^3b^4:3\frac{1}{3}a^2b^5$ **30.** $\frac{4}{5}a^3b:\frac{2}{3}ab^2=\frac{6}{5}a^4b^3:x$

31. $\frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{(a-b)^2}{a}=x:(a^2-b^2)$ **32.** $\left(b-\frac{ab}{a+b}\right):x=a^2b^2:\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)$

33. $x:(a^3-b^3)=(a+b):a^2b^2\left[\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right]$

34. $\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-a-b\right]:[(a-b)^2+ab]=\left[\frac{(a-b)^2}{4ab}+1\right]:x$

Iga võrduse, järjelikult ka võrde üldomadused on: **võrduse kumbagi poolt võib võrdsete suuruste võrra suurendada või vähendada ja võrduse kumbagi poolt võib ühe ja sama arvuga korrutada või jagada, ilma et võrdus seejuures rikneks.** Neist omadustest järgnevad praktiliselt tähtsad juhised:

1) Kui võrduse osi moodustavad algebralised hulkliikmed, siis võib võrduse kummaltki poolt iga liiget viia sama võrduse teisele poole vastupidise märgiga.

Näiteks, paigutades võrdes $a-b=c-d$ liikmed b ja c ümber, saame võrde $a-c=b-d$, või paigutades ümber liikmed a ja d, leiame $d-b=c-a$ ja paigutades lõpuks ümber teises võrdes liikmed a ja d või kolmandas võrdes liikmed b ja c, saame võrde $d-c=b-a$.

Saadud neli võrret, milledest igaühes on maksev aritmeetilise võrde pea-omadus $a+d=b+c$, näitavad, et igas aritmeetilises võrdes võib isekeskis ümber paigutada kas keskmised liikmed või äärmised liikmed või keskmised ja äärmised liikmed üheskoos.

2) Kui võrduse osi moodustavad üksliikmelised korrutised või jagatised, siis võib võrduse kummastki osast viia iga korrutaja ja iga jagaja sama võrduse teise ossa, võttes korrutaja

jagajaks ja jagaja korrutajaks. Näit., viies geomeetrilises võrdes $a:b=c:d$ liikmed b ja c teise ossa, saame võrde $a:c=b:d$, paigutades aga liikmed a ja d ümber, leiame võrde $d:b=c:a$ ja viimaks a ja d ümberasendamisel teises võrdes või b ja c ümberasendamisel kolmandas võrdes saame võrde $d:c=b:a$.

Saadud neli võrret, milledest igaühes on maksev geomeetrilise võrde pea-omadus $ad=bc$, näitavad, et igas geomeetrilises võrdes võib isekeskis ümber paigutada kas keskmised liikmed või äärmised liikmed või keskmised ja äärmised liikmed üheskoos.

Ülemaltoodud näited on ainult erijuhused võrrete muutmisest üldse. Võrduste üldomaduste põhjal on võimalik võrdes palju rohkem muutmisi ette võtta. Iga võrret, mis antud võrdest viimase muutmise läbi on saadud, nimetatakse t u l e t u s v õ r d e k s.

Järgnevais ülesandeis kasutatakse ülemaltoodud seletusi ainult geomeetriliste võrrete muutmise suhtes.

Anda võrdustele võrrete kuju:

35. $2a=3b$

36. $x^2=ab$

37. $(a-b)b=(c+d)d$

38. $9n^2=5m$

39. $(a+b)^2=mp$

40. $(a+b)^2c^2=(a^2+b^2)d^2$

41. Suurendades võrde $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ kumbagi poolt ühelise võrra, näidata, et antud võrde esimese suhte liikmete summa suhtub oma tagaliikmesse nõnda, kui teise suhte liikmete summa suhtub oma tagaliikmesse. Avaldada sõnas need uued võrded, mis saadakse nimetatud esimesest tuletusvõrdest liikmete ümberpaigutamise läbi.

42. Asetades võrdes $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ keskmised liikmed ümber, näidata, et antud võrde eesliikmete summa suhtub eesliikmesse nõnda, kui tagaliikmete summa suhtub tagaliikmesse. Avaldada sõnas teised tuletusvõrded, mis liikmete ümberpaigutamisel saadakse.

43. Näidata, et kui antud on võrre $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, siis on õige ka võrre $\frac{am+bn}{b}=\frac{cm+dn}{d}$, s. o. esimese suhte vabalt valitud suurustega korrutatud liikmete summa suhtub oma tagaliikmesse nõnda, kui samade suurustega korrutatud teise suhte liikmete summa suhtub oma tagaliikmesse.

44. Näidata, et võrdest $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ tuletatakse võrre $\frac{am+cn}{bm+dn}=\frac{a}{b}$, s. o. vabalt valitud suurustega korrutatud eesliikmete summa suhtub samade suurustega korrutatud tagaliikmete summasse nõnda, kui mingisugune eesliige suhtub oma tagaliikmesse.

45. Ülesande nr. 42. vastust järjekindlalt tarvitades näidata, et kui on antud rida võrdseid suhteid $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}$, siis on õige ka võrre $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{b_1+b_2+b_3+b_4}=\frac{a_1}{b_1}$. Viimane võrre avaldada sõnas.

46. Ülesande nr. 44. vastust järjekindlalt tarvitades näidata, et võrdsete suhete reast $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}$ järgneb võrre $\frac{k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4}{k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3+k_4b_4}=\frac{a_1}{b_1}$.

47. Võrde pea-omaduse põhjal näidata, et kui on antud võrre $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, siis suurused a, b, c ja d on võrdelised (proportsionaalsed).

48. Näidata, et kui on antud võrre $\frac{2a-3b}{2b-3c}=\frac{5a+7b}{5b+7c}$, siis suurus b on suuruste a ja c keskmine võrdeline.

49. Näidata, et võrdus $\frac{a^2+2b^2}{2a^2+3b^2}=\frac{c^2+2d^2}{2c^2+3d^2}$ kindlustab suuruste a, b, c ja d võrdelisuse.

50. Näidata, et võrdus $\frac{3a^2+2b^2}{3b^2+2c^2}=\frac{a^2-5b^2}{b^2-5c^2}$ kindlustab pideva võrde, mille liikmeteks on a, b ja c.

Võrdusi, näit. võrdeid, võib osade kaupa liita ja lahutada.

N ä i d e. Olgu antud kaks aritmeetilist võrret $a-b=c-d$ ja $m-b=n-d$, millede tagaliikmed vastavalt võrdsed. Teist võrret esimesest võrdest lahutades leiame uue võrde $a-m=c-n$, mis näitab, et antud võrrete eesliikmed on aritmeetiliselt võrdelised. Samuti võib tõestada, et kui kahe aritmeetilise võrde eesliikmed on vastavalt võrdsed, siis tagaliikmed on võrdelised.

Võrdusi, muu seas ka võrdeid, võib osade kaupa korrutada ja jagada.

Näide. Olgu antud kaks võrret $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ja $\frac{m}{b}=\frac{n}{d}$, millede tagaliikmed vastavalt võrdsed; esimest võrret teisega jagades saame uue võrde $\frac{a}{m}=\frac{c}{n}$, mis näitab, et antud võrrete eesliikmed on võrdelised. Samuti võib tõestada, et kui kahe võrde eesliikmed on vastavalt võrdsed, siis on tagaliikmed võrdelised.

Võrre, mis saadakse ülemalnäidatud alustel kahest või mitmest antud võrdest, on l i i t v õ r r e.

Antud võrretest tuletus- ja liitvõrdeid kokku seades võib saada õige mitmekesised võrded.

Võrded on võrduste kõige lihtsam liik.

51. Näidata, et iga võrde esimese suhte liikmete summa suhtub esimesse eesliikmesse nõnda, kui teise suhte liikmete summa suhtub teise eesliikmesse.

52. Näidata, et kui on antud kaks võrret, siis on nende võrrete vastavate liikmete korrutised võrdelised.

53. Näidata, et iga võrde esimese suhte liikmete summa suhtub samade liikmete vahesse nõnda, kui teise suhte liikmete summa suhtub samade liikmete vahesse.

54. Näidata, et iga võrde eesliikmete ruutude summa suhtub samade liikmete ruutude vahesse nõnda, kui tagaliikmete ruutude summa suhtub samade liikmete ruutude vahesse.

Järgnevad võrded muuta nõnda, et x oleks ainult ühes liikmes; peale selle leida x:

55. $\frac{a}{b}=\frac{c-x}{x}$ **56.** $\frac{a}{b}=\frac{x}{c+x}$ **57.** $\frac{a}{b}=\frac{c+x}{c-x}$

58. $\frac{a}{x+b}+\frac{c}{x-b}$ **59.** $\frac{x+a}{x}=\frac{x+b}{x-b}$ **60.** $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{b-x}$

Järgnevates võrretes leida x ja y väärtused.

61. $\frac{x}{y}=\frac{7}{8}$, kui $x+y=30$ **62.** $\frac{x}{y}=\frac{4^1/_2}{3^3/_4}$, kui $x-y=2\frac{1}{2}$

63. $\frac{x}{y}=\frac{a+b}{a-b}$, kui $x+y=2a$ **64.** $\frac{x}{y}=\frac{a-b}{a+b}$, kui $x-y=2b$

65. $\frac{x}{y}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$, kui $x-y=a-b$ **66.** $\frac{x}{y}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$, kui $x+y=a^2+b^2$

Tuletus- ja liitvõrrete kokkuseadmise teel tuletada antud võrdest $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ järgnevad uued võrded:

67. $\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{b^2-c^2}{c}$ **68.** $\frac{a^2+2b^2+c^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2}$

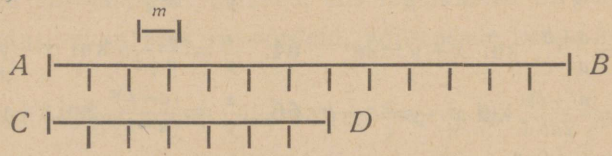
Tuletus- ja liitvõrrete kokkuseadmise teel tuletada antud võrdest $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ järgnevad uued võrded:

69. $\frac{a(a+c)}{c^2}=\frac{b(b+d)}{d^2}$ **70.** $\frac{(a-b)^2}{ab}=\frac{(c-d)^2}{cd}$

B. Graafilise kujutamise ja funktsioonide sissejuhatus.

§ 2. Graafilise kujutamise mõiste.

Kui on tarvis võrrelda jõgede pikkust, mägede kõrgust, sademete rohkust jne., siis on selleks isesugune viis, mida nimetatakse tähendatud suuruste piltlikuks ehk graafiliseks kujutamiseks. Et näiteks jõgede pikkusi võrrelda, selleks võetakse sirglõigud, millede pikkused suhtuvad nagu jõgede pikkused. Olgu antud võrrelda Pärnu jõe pikkus (130 km) Narva jõe pikkusega (70 km). Et nende jõgede pikkustele leida vastavalt sirglõike ehk arvjooni, millede pikkused oleksid samas vahekorras kui jõgede pikkused, tuleb valida mõõtühikus, mis antud juhusel olgu näit. iga 10 km peale $^1/_2$ sm. Pärnu jõe arvjoone leidmiseks asetame $^1/_2$ sm 13 korda sirgjoonele, kuna Narva jõe arvjoone leidmiseks on tarvis mõõtühksust asetada sirgjoonele ainult 7 korda (1. joon.). Siis saame jõgede pikkusi kujutavad arvjooned.



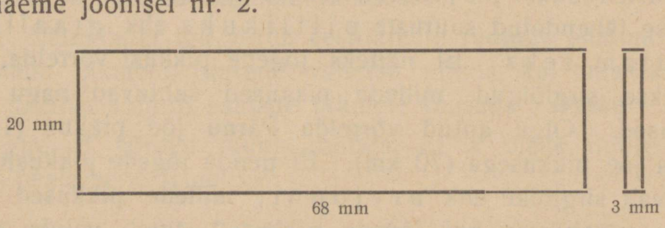
1. joonis.

1. joonise arvjoon *AB* kujutab graafiliselt Pärnu jõe pikkust, *CD* aga — Narva jõe pikkust; lõik *m* on mõõtüksuseks võetud.

Mitte üksi arvjoonte abil ei ole võimalik mitmesuguseid suurusi graafiliselt ehk piltlikult kujutada, vaid selleks võetakse mõõtüksuseks mingi ruut või kuup ja konstrueeritakse püstkülikud või kehad.

Näiteks vaatame suuruste võrdlemise juhust püstkülikute abil. On teada, et maikuul 1921. a. oli Eesti Vabariigi laiarööpalisel raudteel sõitjaid (arvud on ümmargusemaks tehtud): 340000, kuna kitsarööpalisel raudteel samal ajal oli sõitjaid 15000. Võrrelda antud sõitjatehulki püstkülikute abil.

Kui võtame iga tuhande sõitja kohta mõõtüksuseks 4 ruutmillimeetrit, siis peab laiarööpalise raudtee sõitjate arvu tähendav püstkülik sisaldama 1360 mm^2, kuna kitsarööpalise raudtee sõitjate arvu tähendav püstkülik aga sisaldab vastavalt 60 mm^2. Seda näeme joonisel nr. 2.



2. joonis.

Seesugust piltlikku kujutamisviisi tarvitatakse õige tihti võrdleva geograafia kursustes.

Järgnevad ülesanded lahendada graafiliselt:

a) Graafiliselt kujutada järgmiste jõgede pikkus: Keila jõgi 70 v., Kasari jõgi 75 v., Kunda jõgi 55 v., Väike Emajõgi (Pühajärvest Virtsjärveni) 60 v. ja Suur Emajõgi 80 v.

b) Samuti kujutada järgnevate jõgede pikkusi: Mississippi 7000 km, Leena 4600 km, Aamur 4500 km ja Niilus 6000 km.

c) Graafiliselt püstjoonte abil võrrelda järgnevate mägede kõrgus: Väike Munamägi 244 m., Meegaste mägi 209 m.

d) Samuti võrrelda järgnevate mägede kõrgus: Ebavere mägi 480 jalga, Emumägi 544 j. ja Kellavere m. 510 j.

e) Püstkülikute abil võrrelda Eesti vabrikutööliste arvu tööstusalade järele 1. jaan. 1920. a., iga 100 töölise peale üht ruutu millimeeter-paberil mõõtühikuseks võttes, kui teada on, et nimetatud ajal oli tekstiiltööstuses 6000 töölist, puutööstuses 1000 t., paberitööstuses 1300 t., nahatööstuses 200 t., metallitööstuses 1800 t., keemiatööstuses (ilma viinavabrikuteta) 500 t., mineraalide ümbertööstuses 1200 t., toidu- ja maitseainete tööstuses 400 töölist.

f) Maakondade järele jagunevad Eesti raudteed järgmiselt:

	Riigi-raudtee		Era-raudtee
Maakond	Laiarööp.	Kitsarööp.	Kitsarööp.
Harju	138,3	31,3	94,0
Viru	191,3	7,5	—
Järva	15,0	48,6	46,0
Lääne	44,6	—	—
Pärnu	—	—	145,0
Viljandi	—	—	56,7
Tartu	126,2	—	—
Võru	119,4	—	—

Kujutada graafiliselt: 1) riigi laia- ja kitsarööpalise ja era-raudtee üldine pikkus; 2) sedasama üksikute maakondade järele.

g) Riigi- ja era-raudteede kilomeetrite üldarv iga 10 000 elaniku kohta on Eestis järgmine:

Harjumaal	13,25	Pärnumaal	15,69
Viru „	15,13	Viljandi „	6,36
Järva „	20,46	Tartu „	6,89
Lääne „	5,77	Võru „	14,13

h) Ookeanidel on järgnevad pinnasuurused:

Suur ookean	175	miljonit	ruutkm.
Atlandi „	90	„	„
Lõuna-Jäämeri	19	„	„
Põhja „	15	„	„

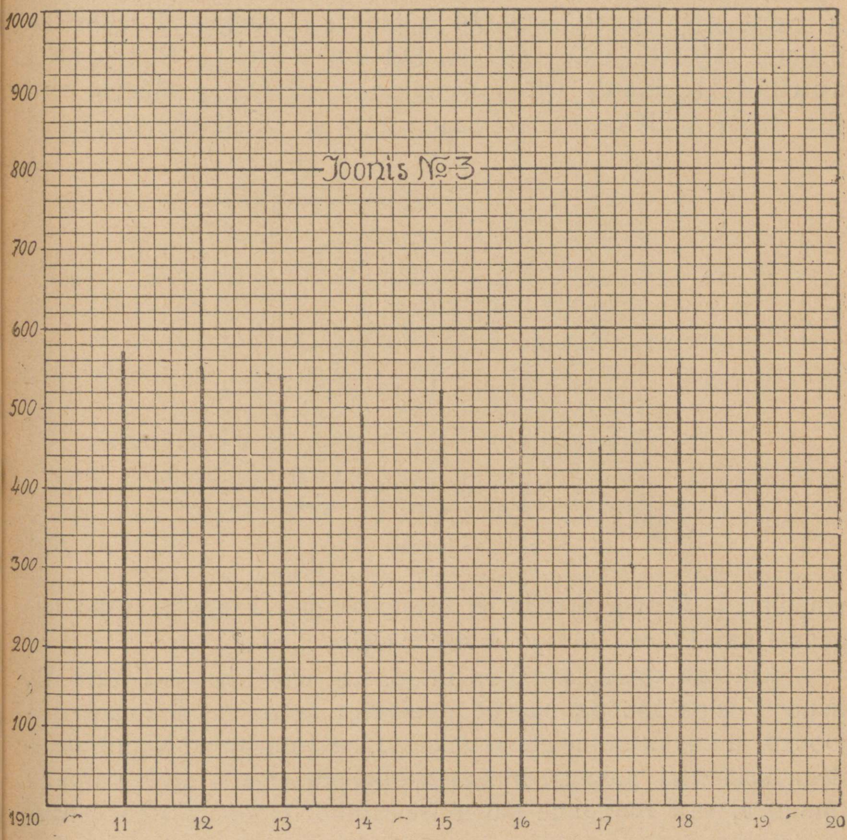
Võrrelda neid pinnasuurusi graafiliselt.

§ 3. Koordinaatide teljed.

Vaatame läbi järgmise ülesande. H. Treffneri asut. gümnaasiumis õppis 1910. a. kuni 1920. a. ümmargustes arvudes õpilasi: 590, 570, 550, 540, 590, 520, 470, 450, 550, 900 ja 990. Seada kokku graafiline kujutus õpilaste arvu muutuvustest nimetatud gümnaasiumis.

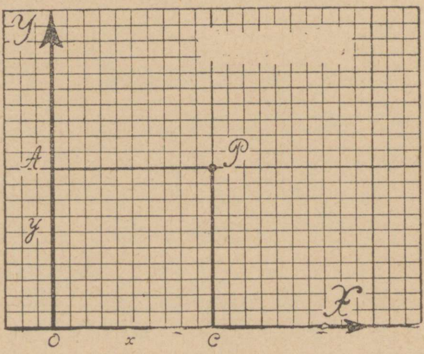
Ülesannet võib lahendada sarnaselt jõgede pikkuse võrdlemisega. Kuid siin katsume teisiti toimetada. Kõige pealt paigutame antud aastad sirgjoonele, neid alguspunktist *O* paremale poole seades, võttes iga aasta jaoks mõõtühsuseks 1 sm. Õpilaste arvu võrdlemiseks aga tarvitame arvjoont, mille saame nii, kui seda nägime jõgede pikkuste võrdlemisel. Ainuke vahe, et me neid ei sea enam rõhtsalt üksteisega kõrvuti, vaid asendame igaühe vastava aasta kohta aastate joonele risti tõmmatud joontele. Siis saame jooned, mis kohati tõusevad aastate joonest kõrgemale, kohati aga lähenevad viimasele (v. 3. joon.). Kohad, kus ristjooned kõige kõrgemale tõusevad, satuvad ühte õpilaste arvu kõige suurema rohkusega koolis, kuna lühemad ristjooned õpilaste arvu vähenemist kujutavad.

Õpilaste hulka näitavaid ristjooni võime õige lihtsalt teisiti leida. Seks tõmbame aastate joonele alguspunktist ristjoone. Sellele joonele märgime õpilaste arvu, võttes mõõtühsuseks $^1/_{10}$ mm iga õpilase kohta, otsime ristjoonel vastava punkti välja ja viime rööbiti rõhtjoonele vastava aasta kohta üle, kuhu me ta siis ka ära märgime. Sel punktil on alati üks ja sama asend, üks ja sama kaugus kahest vastastikku risti seisvast joonest, kui aga mõõtüksused on võetud vastavalt võrdsed.



Neid kaht vastastikku risti seisvat joont, millede abil saab tasapinnal kindlasti ära määrata punkti asendi, nimetatakse k o o r d i n a a t i d e t e l g e d e k s. Punkti, milles lõikuvad koordinaatide teljed, nimetatakse koordinaatide a l g u s p u n k t i k s.

Ülemalpool otsitavad punktid asuvad koordinaatide telgede vahel kindlas kauguses niihästi ühest kui ka teisest teljest. Kaugust rõhtsast ehk X-teljest loetakse temale risti olevat ehk Y-telge mööda, kuna kaugust Y-teljest loetakse X-telge mööda, alguspunktist alates. Näit. 4. joonisel on punkti P kaugus X-teljest ristjoon PC või OA ja punkti P kaugus Y-teljest — ristjoon AP või OC. OC ja OA on punkti P koordinaadid, kusjuures OC märgitakse x ja OA y tähega. Nii siis on punktil kaks koordinaati: x ja y. Teisi koordinaate ei



4. joonis.

või punktil P olla, sest tal ei ole teissugust kaugust antud telgedest kui $PC = OA = y$ ja $AP = OC = x$.

Kui aga koordinaadid on antud, siis tuleb üks neist võtta X-, teine Y-telge mööda, saadud punktidest telgedele tõmmata ristjooned, ja kus need teineteist lõikavad, seal on antud koordinaatidega määratud punkt. Millimeeterpaberil ei ole tarvis ristjooni tõmmata, sest ruuduline paber ise näitab ristjoonte sihti. Teist punkti olla ei või, sest kaks sirgjoont lõikuvad ainult ühes punktis.

Siit järgneb, et igal punktil tasapinnal on ainult kaks koordinaati antud telgede suhtes või, ümberpöördult, kaks koordinaati määravad tasapinnal ainult ühe punkti.

Nii kui sirgjoonel koordinaadid võivad olla positiivsed või negatiivsed, võivad ka koordinaadid, mis määravad punkti tasapinnal, olla + või — märgiga. Koordinaat x võib olla + või — märgiga, selle järele, kas määrab ta punkti paremal või pahemal pool Y-telge, kuna y koordinaat võib olla positiivne või negatiivne, selle järele, kas ta määrab punkti üleval- või allpool X-telge.

Et punkti P määravad kaks koordinaati, siis märgime seda nii: $P(x, y)$, kus x ja y sulgudes tähendavad punkti P koordinaate.

i) Koordinaatide tasapinnal leida punktid, millede koordinaadid oleksid järgmised: 1) 3 ja 4; 2) —4 ja 7; 3) +3 ja —5; 4) —2 ja —7; 5) 0 ja 2; 6) 0 ja —4; 7) 6 ja 0; 8) —6 ja 0 ja 9) 0 ja 0.

j) Konstrueerida kolmnurk, mille tippude koordinaadid oleksid järgmised: 1) P_1 (2; 4), P_2 (—2; 5), P_3 (0; 8); 2) P_1 (6; —2), P_2 (—3; +2) ja P_3 (0; 5) jne.

k) Konstrueerida nelinurk, mille tippude koordinaadid oleksid järgmised: 1) P_1 (0; 4), P_2 (3; 2), P_3 (3; —3), P_4 (0; 0); 2) P_1 (7; 7), P_2 (3; 2), P_3 (—4; —3), P_4 (—6; 4) jne.

Järgnevate ülesannete tarvis kokku seada graafik:

l) Ühel päeval näitas termomeeter järgmiselt: kell 6 homm. —5°, kell 9 —2°, kell 12 +4°, kell 15 +7°, kell 18 +5°, kell 21 +2°.

m) 1914. a. olid Tartus järgmised kuu keskmised temperatuurid: —7,80°; —0,97°; —1,33°; 4,76°; 11,23°; 15,51°; 20,91°; 13,57°; 9,94°; 2,41°; —1,17°; 0,01°.

n) 1915. a. olid kuu keskmised temperatuurid: —7,09°; —5,91°; —7,87°; 3,66°; 8,94°; 12,71°; 17,13°; 14,76°; 10,06°; 2,56°; —2,44°; —9,38°.

o) 1914. a. olid järgmised kuu keskmised õhurõhumised: 749,61; 751,32; 747,66; 753,31; 755,18; 755,07; 753,22; 753,08; 750,63; 759,76; 753,41; 753,12.

p) 1915. a. olid kuu keskmised õhurõhumised: 747,69; 754,53; 749,46; 753,19; 754,62; 753,18; 751,46; 750,89; 749,99; 763,15; 750,36 ja 749,61.

q) Loomulik juurdekasv tuhande inimese kohta oli üksikutel aastatel 1892. kuni 1901 Järvamaal (N. Köstner: Rahvaarvu kasvamine Eestimaal): 10,4; 10,4; —1,1; 6,5; 11,2; 10,7; 13,1; 9,2; 9,9 ja 8,2.

r) H. Treffneri asut. gümnaasiumi lõpuklassis õppis aastast 1910—1920 õpilasi: 36, 34, 36, 40, 33, 44, 33, 33, 41, 40 ja 45.

s) Sarlakihaigusega poisi keha temperatuur oli esimesel päeval 40,3° C. Järgnevail päevil muutus keha temperatuur +1,4°; —1,9;° +0,3°; —0,8°; —0,7°; +1,2°; —0,6°; —1,1°; —0,7° ja —0,8° võrra.

§ 4. Funktsiooni môiste.

Meid ümbritsevas looduses on mitmesugused suurused üksteisega nii seotud, et ühe suuruse muutmine enesega kaasa toob teise suuruse muutmise. Et suuruste sidusust ja vastastikku muutuvust tundma õppida, selleks vaatame järgnevat näidet.

Olgu püstküliku üks külg a meetrit, teine külg b meetrit pikk. Vaatame, missuguses sidususes muutuvad antud püstküliku külje- ja pinnasuurused.

Püstküliku pindala $x = a \, . \, b$.

Jäägu üks külg a muutmata ja võrdugu 4 meetriga. Anname teisele küljele järgemööda väärtused 1, 2, 3, 4... meetrit.

Vaatame, missuguseid muutusi pindala suuruses toob ühe külje muutmine kaasa.

Kui $b = 1$, siis $x = 4 \, . \, 1 = 4$
„ $b = 2$, „ $x = 4 \, . \, 2 = 8$
„ $b = 3$, „ $x = 4 \, . \, 3 = 12$ jne.

Antud tingimustel on meil tegemist kolme suurusega. Üks neist suurustest on muutmata ehk jääv suurus, kuna kaks suurust muutuvad nii, et ühe suuruse muutmisega ka teine suurus vastavalt muutub. Need suurused on muutuvad suurused.

Suurust, mis oleneb teiste suuruste muutuvusest, nimetatakse olenevaks suuruseks ehk funktsiooniks, kuna seda muutuvat suurust, millest oleneb funktsioon, nimetatakse põhisuuruseks ehk argumendiks. Sidusust argumendi ja funktsiooni vahel nimetatakse funktsionaalseks sidususeks.

Et suurus y on teise suuruse x funktsioon, seda võime nii kirjutada: $y = f(x)$ või $y = F(x)$ jne., kus $f()$ ja $F()$ tähendavad y ja x funktsionaalset sidusust. Ühel juhusel on see sidusus ühe juhise abil korraldatud, teisel juhusel teise juhise abil. Ühel juhusel saame sidususe ühe algebralise valemi abil, teisel juhusel teise valemi abil. Näitena võime vaadata ringjoone pikkuse ja raadiuse ning ringi pindala ja raadiuse funktsionaalset sidusust. Esimesel juhusel on üks sidusus $y = f(x)$, teisel juhusel teine $y_1 = F(x)$. Funktsionaalne sidusus ringjoone pikkuse ja raadiuse vahel on korraldatud ühe juhise järele, kuna teine sidusus ringi pindala ja raadiuse vahel on koguni teine. Seda lahkuminevat sidusust tähendamegi isesuguselt. Kui tahame aga sidusust algebralise valemi abil avaldada, siis saame $y = 2\pi r$ ja $y_1 = \pi r^2$, kus 2π ja π on jääv suurus, kuna r on argument.

Ühes funktsioonis on argument esimesel astmel, teises aga — teisel astmel.

Funktsiooni, milles argument on esimesel astmel (esimese astme avaldus), nimetatakse esimese astme funktsiooniks. Kui aga argument on teisel astmel, siis nimetatakse teda teise astme funktsiooniks.

§ 5. Funktsiooni graafiline kujutamine.

Olgu antud ülesanne: Osteti x õuna, 2 marka õun. Kui palju maksti õunte eest?

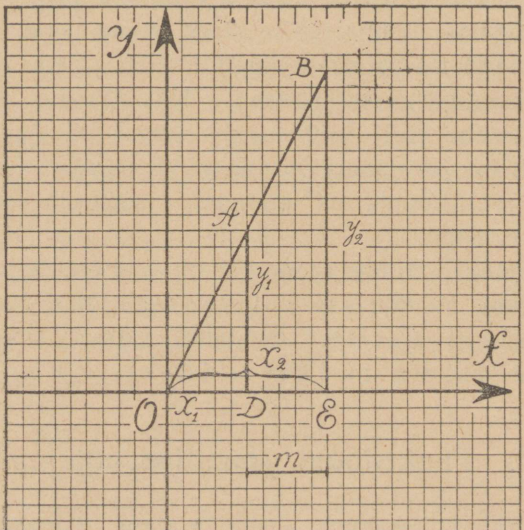
Maksti $y = 2x$ marka.

Suurus 2 on jääv suurus, kuna x ja y on muutuvad, kusjuures y suurus oleneb täitsa x suurusest, sest kui õunu ostetakse rohkem, siis tuleb ka rohkem maksta. Sellepärast on x — argument, y — funktsioon, kuna $y = 2x$ on funktsionaalne sidusus ülesandes antud suuruste vahel.

Vaatame y muutuvust, kui x-le anname väärtused $x=0$, 1, 2, 3 jne., ja seame sellekohase tabeli kokku.

x	0	1	2	3	4	.	.
y	0	2	4	6	8	.	.

Et nüüd funktsiooni $y=2x$ graafiliselt kujutada, selleks vaatame tabelis antud x ja y väärtusi paaristikku, kui terve rea punktide koordinaate. Need punktid tuleb millimeeter-paberil märkida, nagu seda eespool nägime. Kui me need punktid



5. joonis.

ühendame järjestikku sirgjoonega, siis on punkte ühendav joon sirgjoon. Seda võib järgmiselt tõestada: 5. joonisel näeme, et punktide A ja B koordinaadid on vastavalt $AD=y_1$, $OD=x_1$ ja $BE=y_2$, $OE=x_2$. Et $y=2x$, sellepärarst $y_1=2x_1$, $y_2=2x_2$ jne.

Esimest võrdust teise võrdusega jagades saame: $y_1:y_2=x_1:x_2$.

Siis näeme, et $\triangle OAD$-l ja $\triangle OBE$-l on kaks vastavat külge proportsionaalsed, kuna nende vahelnurgad on võrdsed kui täisnurgad. Sellepärast on kolmnurgad sarnased ja $\angle BOE = \angle AOD$ ning sirgjoon BO satub ühte AO-ga, s. o. punktid O, A, B jne. asuvad ühel sirgjoonel.

§ 6. Mõnede funktsioonide graafiline kujutamine.

Näide: Üks arv võrdub kahekordse teise arvuga plus 3. Olgu esimene arv y, teine arv x; siis võime kirjutada, et $y=2x+3$. Saadud funktsiooni võime üldisemal kujul kirjutada: $y=ax+b$, kus antud juhusel $a=2$ ja $b=3$.

Et graafiliselt kujutada saadud funktsiooni $y=2x+3$, tuleb kõige pealt seada tabel kokku, kus x-i väärtuste —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3 jne. järele on leitud y väärtused.

x	. .	—3	—2	—1	0	1	2	3	. .
y	. .	—3	—1	+1	3	5	7	9	. .

Tabelis antud x ja y väärtusi paaristikku vaatame kui terve rea punktide koordinaate, millede järele me millimeeter-paberil nõutavad punktid leiame ja sirgjoontega ühendame. Saadud joon on jällegi sirgjoon (v. 6. joon.).

Samuti kujutatakse graafiliselt kõiki esimese astme funktsioone. Sirgjoone asendi määramiseks on tarvis ainult kaks punkti. Et graafiliselt kujutada esimese astme funktsiooni, mis sirgjoone annab, on tarvis ainult kaks punkti koordinaatide järgi üles leida ja sirgjoonega ühendada. Saadud sirgjoon kujutabki graafiliselt esimese astme funktsiooni.

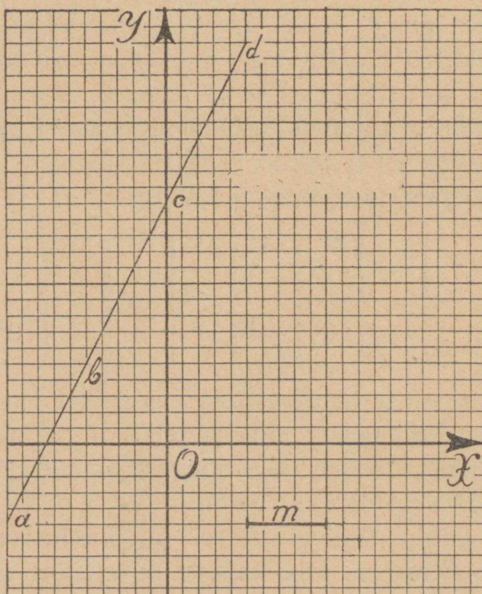
t) Kujutada graafiliselt funktsioonid: 1) $y=-x$; 2) $y=3x$; 3) $y=\frac{1}{3}x$, 4) $y=x+2$, 5) $y=2x-3$, 6) $y=\frac{1}{2}x+2$, 7) $y=\frac{2}{3}x+4$.

u) Kujutada graafiliselt funktsioonid: $y=2x+3$, $y=3x+5$ ja $y=4x-7$. Leida joonte lõikepunktide koordinaadid.

v) Eelmise ülesande taoliselt toimetada funktsioonidega: $y=3x-2$, $y=x+3$.

w) Joonistada sirged: $y=2x+3$, $y=3x+3$, $y=\frac{1}{2}x+3$ ja $y=\frac{2}{3}x+3$. Missuguses punktis lõikavad need jooned Y-telge?

x) Joonistada sirged: $y=x-4$, $y=2x-6$, $y=\frac{1}{2}x+2$. Leida joonte ja X-telje lõikepunktide koordinaadid.



6. joonis.

y) Konstrueerida kolmnurgad, millede külgedeks on sirged: 1) $y=-0{,}25x$, $y=\frac{2}{3}x$ ja $y=\frac{2}{3}x+4$; 2) $y=\frac{2}{3}x+2\frac{1}{2}$, $y=2\frac{2}{5}x-$ -6 ja $y=-x+1$. Leida kolmnurga tippude koordinaadid.

z) Konstrueerida kolmnurgad, millede külgedeks on sirged: 1) $y=1{,}25x$, $y=0{,}5x+3$ ja $y=-0{,}5x-5$. Leida kolmnurga tippude koordinaadid.

C. Esimese astme võrrandite lahendamine ja kokkuseadmine.

§ 7. Arvuliste esimese astme võrrandite lahendamine.

Peale võrrete kuuluvad võrduste liiki veel samasused ja võrrandid.

Samasuseks nimetatakse niisugust võrdust, mille osad on võrdsed temas ettetulevate tähtede igasuguse väärtuse puhul. Näiteks, võrdused $x+1=1+x$, $2(x+3)=2x+6$, $(x-2)^2=x^2-4x+4$, $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ on õiged, s. o. nende osad on võrdsed, kui me x asemele asetame vabalt valitavad väärtused.

Võrrandiks nimetatakse võrdust, mille osad üldse ei ole võrdsed, kuid nad saavad võrdseteks, kui neis esinevate tähtede asemele teatav väärtus panna. Võrdustest $x+1=3-x$, $2(x+3)=10$, $(x-2)^2=2x-4$, $(x-1)(x-2)=x-1$, näiteks, on esimene õige, kui $x=1$, teine, kui $x=2$, kolmas, kui $x=2$ või kui $x=4$, ja neljas, kui $x=1$ või kui $x=3$. Tähte, mille jaoks otsitakse teatavat väärtust, nimetatakse tundmatuks. Harilikult märgitakse tundmatut tähestiku mõne lõputähega; toodud näidetes tähendab tundmatut täht x.

Tundmatu teatavat väärtust, mis teeb võrrandi osad võrdseteks, nimetatakse võrrandi juureks. Võrrandi juurt leida tähendab võrrandit arvutada. Nagu eelmistest näidetest nägime, võib võrrandil olla üks või mitu juurt. Võrrandi juure kohta üteldakse, et ta rahuldab võrrandit.

Võrrandit nimetatakse ratsionaalseks, kui temas esinevast tundmatust pole tarvis leida juurt, näit. $\frac{x-3}{2}=5$, $\frac{1}{x}-3=\frac{4}{y}-1$, $xy=a^2$ jne., vastasel korral on võrrand irratsionaalne, näiteks, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=10$ ehk $\frac{a}{\sqrt{x}}-b=c$.

Kaks või mitu võrrandit on ekvivalentsed ekk samaväärsed, kui nad sisaldavad endis ühed ja samad otsitavad ja kui nad on õiged nende otsitavate ühe ja sama väärtuse korral. Näit., võrrandid $\frac{x}{3}+4=\frac{x}{4}+5$ ja $(15-x).2=\frac{1}{2}x$ on samaväärsed, sest et neil on ühine juur $x=12$, kuna võrrandid $x^2+6=5x$ ja $x+4=7$ ei ole samaväärsed, sest et esimese juured on: $x=2$ või $x=3$, teise juur aga: $x=3$.

Et võrrand pole muud midagi kui võrdus, aiis on võrduste üldomadused ka võrranditele omased:

1) Kui võrrandi kumbagi osa suurendada või vähendada ühe ja sama suuruse võrra, siis saame uue võrrandi, mis samaväärne esimesega.

2) Kui võrrandi kumbagi osa korrutada või jagada ühe ja sama suurusega, mis ei võrdu nulliga ja mis eneses ei sisalda tundmatut, siis saame uue võrrandi, mis samaväärne esimesega.

Neist omadustest võib tuletada:

I järeldus: Võrrandi iga liiget võib võrrandi ühest osast viia teise ossa vastasmärgiga.

II järeldus: Kui võrrandi kummaski osas sisalduvad täiesti ühesugused liikmed, siis võib need võrrandist välja jätta.

III järeldus: Võrrandi kõigil liikmeil võib ühel ja samal ajal märgid vastupidiseks muuta.

IV järeldus: Võrrandi võib tarbekorral murrulistest liikmetest vabastada.

V järeldus: Võrrandit võib t a a n d a d a, jagades kõiki tema liikmeid nende ühise jagajaga.

Võrrandid võib lahendada kahel viisil: a l g e b r a l i s e l t ja g r a a f i l i s e l t.

Algebralisel lahendusel võivad ette tulla järgmised muutused:

a) avada võrrandis ettetulevad sulud;

b) vabastada võrrand murrulistest liikmetest;

c) tundmatut sisaldavad liikmed viia võrrandi ühte, vabad (ilma tundmatuta) liikmed võrrandi teise ossa;

d) sarnased üksliikmed koondada ja

e) võrrandi kumbki pool jagada tundmatu koeffitsiendiga.

Näited:

1) Olgu antud võrrand:

$$\frac{7(x-5)}{6}-\frac{3x-8}{12}=\frac{5(4-x)}{9}-\frac{3x}{8};$$

avame sulud:

$$\frac{7x-35}{6}-\frac{3x-8}{12}=\frac{20-5x}{9}-\frac{3x}{8};$$

vabastame võrrandi murrulistest liikmetest:

$$\frac{\overbrace{7x-35}^{12}}{6}-\frac{\overbrace{3x-8}^{6}}{12}=\frac{\overbrace{20-5x}^{8}}{9}-\frac{\overbrace{3x}^{9}}{8};$$

$$84x-420-18x+48=160-40x-27x;$$

kogume tundmatut sisaldavad liikmed ühele (pahemale) ja vabad liikmed teisele (paremale) poole:

$$84x-18x+40x+27x=160+420-48;$$

peale koondamist saame:

$$133x=532;$$

jagades võrrandi kummagi poole arvulise kordajaga 133, leiame:

$$x=4.$$

2) Olgu antud võrrand:

$$\frac{x-c}{c-d}-\frac{x+d}{c+d}=\frac{2cx}{c^2-d^2}.$$

Analoogiliselt esimesega toimetades saame:

$$\frac{\overbrace{x-c}^{c+d}}{c-d}-\frac{\overbrace{x+c}^{c-d}}{c+d}=\frac{\overbrace{2cx}^{1}}{c^2-d^2};$$

$$(x-c)(c+d)-(x+c)(c-d)=2cx;$$

$$cx-c^2+dx-cd-cx-c^2+dx+cd=2cx;$$

$$2dx-2c^2=2cx;$$

$$dx-c^2=cx;$$

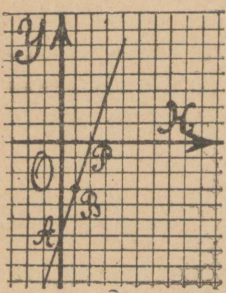
$$dx-cx=c^2;$$

$$(d-c)x=c^2;$$

$$x=\frac{c^2}{d-c}.$$

Graafiliselt lahendatakse esimese astme võrrandid järgmiselt:

Olgu antud esimese astme võrrand ühe tundmatuga: $3x+7=13$. Viime 13 pahemale poole võrrandi ossa ja võrrutame saadud osa y-ga. Saame funktsiooni $y=3x-6$. Saadud funktsiooni kujutav joon on sirgjoon; ta peab minema läbi punktide A $(0; -6)$ ja B $(1; -3)$. Funktsiooni kujutava joone leidmisega (7. joon.) on meil teada ka võrrandi juur x. Tuleb ainult antud mõõtühikusega leida funktsiooni kujutava joone ja X-telje lõikepunkti P kaugus koordinaatide alguspunktist. See kaugus on 2. Seega antud võrrandi juur $x=2$.



7. joonis.

J u h i s. Et esimese astme võrrandit lahendada graafiliselt, selleks tuleb võrrand muuta kõige lihtsamaks, kõik liikmed viia ühele poole võrdsusmärki ja saadus võrrutada y-ga. Saadud funktsiooni kujutada graafiliselt ja leida funktsiooni kujutava joone ning X-telje lõikepunkti kaugus koordinaatide alguspunktist. Saadud kaugus ongi võrrandi juur.

Lahendada:

71. $4+x=10$ **72.** $x-8=2$ **73.** $18-x=6$

74. $13-x=15$ **75.** $3x=12$ **76.** $x \cdot 5=15$

77. $x : 4=8$ **78.** $18 : x=6$ **79.** $5x+3=28$

80. $9x-5=31$ **81.** $28+3x=7x$ **82.** $42-5x=2x$

83. $3y+18=5y$ **84.** $19z-14=12z$

85. $5y+18=3y+38$ **86.** $7z-5=3z+3$

87. $16x+10-21x=35-10x-5$ **88.** $7x-9-8x=23-15x-18$

89. $7u-9-3u+5=11u-6-4u$

90. $27u+36-18u-39+6u-24=0$

91. $3(x+5)=36$ **92.** $7(y-3)=14$ **93.** $5(35-x)=15$

94. $8(2y+5)=72$ **95.** $8(7x-61)=16$ **96.** $2(10-7z)=28$

97. $3(x-5)+8=17$ **98.** $5(z-2)-9=11$ **99.** $6(u+5)-8u=u$

100. $5u+(7-2u)=11$ **101.** $8(10-x)=5(x+3)$

102. $5(x+1)+6(x+2)=9(x+3)$

103. $7(3y-6)+5(y-3)-2(y-7)=5$

104. $8(3y-1)-9(5y-11)+2(7-2y)=30$

105. $7(6z-1)+3(2z+1)-5(12z-7)=23$

106. $5(8z-1)-7(4z+1)+8(7-3z)=29$

107. $\frac{x}{5}=2$ **108.** $\frac{2}{3}x=12$ **109.** $2\frac{1}{2}x=5$

110. $3\frac{3}{5}x=18$ **111.** $x+\frac{1}{4}x=15$ **112.** $3x-\frac{3}{4}x=18$

113. $8y-\frac{5}{6}y=3y+25$ **114.** $9y+6=10\left(9-\frac{1}{2}y\right)$

115. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=10$ **116.** $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$ **117.** $\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}x=38$

118. $\frac{7}{8}x-\frac{5}{12}x=11$ **119.** $\frac{z}{2}+\frac{z}{3}-\frac{z}{4}=7$

120. $2z+\frac{3}{4}z-\frac{5}{7}z=57$ **121.** $5x-0,3x=4,5x+2$

122. $0,1x-0,1=0,15x-5,1$

123. $5(5x-1)-2,7x+0,2=6,6-0,5x$

124. $0,36x-3,4=0,3(0,4x-1,2)$

125. $1,2x-5,375=0,125x-0,765x-5,425+1,85x$

126. $5,7x+7,2-0,855x=34,1885+3,45x-18,2$

127. $3,5(0,4x-1)=0,777\ldots x+4,277\ldots$

128. $1,166\ldots x-0,2x-0,266\ldots x=6+0,5x$

129. $x-1=\frac{2x+1}{3}$ **130.** $3-2x=\frac{1-3x}{5}$ **131.** $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}$

132. $\frac{5-x}{8}=\frac{18-5x}{12}$ **133.** $x+\frac{12-x}{4}=\frac{26-x}{2}$

134. $2-\frac{3x-7}{4}=-\frac{x+17}{5}$ **135.** $\frac{3x-2}{3}-\frac{9-2x}{3}=\frac{x+2}{2}$

136. $\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}=\frac{x-5}{2}+\frac{x+1}{8}$ **137.** $\frac{5x-1}{2}-\frac{7x-2}{10}=6\frac{3}{5}-\frac{x}{2}$

138. $\frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}=\frac{x+6}{2}$ **139.** $\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}=\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$

140. $\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$ **141.** $\frac{3x-11}{4}-\frac{28-9x}{8}=4x-14\frac{3}{4}$

142. $\frac{7+9x}{4}-\left(1-\frac{2-x}{9}\right)=7x$

143. $\frac{3(x-1)}{4}-\frac{3x-4}{3}=5\frac{1}{3}-\frac{27+4x}{9}$

144. $\frac{3x+4}{7}-\frac{9x+44}{5}+\frac{3(3x+10)}{4}=\frac{5x+12}{3}$

145. $\frac{4x-21}{7}+\frac{47}{6}+\frac{7x-28}{3}=\frac{4x+15}{4}-\frac{9-7x}{8}+\frac{1}{12}$

146. $\frac{x+10}{3}+\frac{16x-3}{20}-\frac{7x-6}{4}=\frac{x-3}{2}+\frac{3(x-3)}{10}$

147. $\frac{3x+2}{18}-\frac{5x-8}{24}=\frac{3(2x+1)}{36}-\frac{x-1}{6}-\frac{2}{9}$

148. $\frac{26x-51}{52}-\frac{2(1-3x)}{13}=x-\frac{20x-(10-3x)}{156}$

149. $\frac{5(3x-2)}{4}+\frac{3x}{2}-23\frac{5}{6}=\frac{x-\frac{4x-9}{3}}{6}+x-1$

150. $\frac{2\frac{1}{3}x-2}{4}-\frac{\frac{10x-1}{2}-\frac{1}{3}}{3}=\frac{\frac{x}{4}-2}{5}-3\frac{2}{9}$

§ 8. Täheliste esimese astme võrrandite lahendamine.

151. $x+a=b$ **152.** $a-x=b$ **153.** $mx=n$ **154.** $\frac{x}{n}=m$

155. $ax+bx=c$ **156.** $\frac{x}{a}+b=c$ **157.** $m(x+n)=p$

158. $mx-p=nx$ **159.** $\frac{ay}{b}=c$ **160.** $z+\frac{z}{b}=c$

161. $y-\frac{ny}{m}=q$ **162.** $\frac{nz}{p}+\frac{nz}{pq}=r$ **163.** $ax+b=cx+d$

164. $mx-p=nx+q$ **165.** $\frac{py}{q}-\frac{qy}{p}=a$

166. $\frac{p+z}{p}+q=\frac{q+z}{q}+m$ **167.** $abc-a^2x=x-a^2b$

168. $(b+1)x+ab=b(a+x)+a$ **169.** $(p-y)(q+y)=p^2-y^2$

170. $(p+z)(p-z)=2p(p+z)-z^2$

171. $\frac{a+bx}{a+b}=\frac{c+dx}{c+d}$ **172.** $\frac{a-bx}{a+2b}=\frac{c-dx}{c+2d}$

173. $2ac-(b+c)x=(c-b)x+2bx$

174. $(a+c)^2x-c^3=(a^2-c^2)c+c^2x$

175. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=\frac{d}{ab}$ **176.** $\frac{ax}{c}+\frac{cx}{a}+2x=a^3+c^3$

177. $y(y+m)+y(y+n)-2(v+m)(y+n)=0$

178. $(3m-y)(m-n)+2my=4n(m+y)$

179. $p^2-4pz+z^2+(z+2q)^2-2(z-2n)^2=0$

180. $(z+3p)(z-3q)+3(z-3p)(z+3q)=4(z-3p)(z-3q)$

181. $\frac{x}{b^2}+\frac{x}{a^2}+\frac{x}{ab}=a^3-b^3$

182. $\frac{x}{ab^4}+\frac{3x}{a^2b^3}+\frac{3x}{a^3b^2}+\frac{x}{a^4b}=\frac{1}{b^4}-\frac{1}{a^4}$

183. $\frac{5cx}{c-d}-3c=8x$

184. $\frac{x}{c}+\frac{x}{d-c}=\frac{c}{c+d}$

185. $\frac{x}{c-d}-\frac{5c}{c+d}=\frac{2dx}{c^2-d^2}$

186. $\frac{c-x}{d-c}-\frac{x+c}{c+d}=\frac{2cx}{c^2-d^2}$

187. $\frac{2x+k}{l}+\frac{x-l}{k}=\frac{3kx-(k-l)^2}{kl}$

188. $\frac{kx}{l}+\frac{l-x}{2k}+\frac{k(l-x)}{3l}=k$

189. $\frac{3n(x-m)}{5m}+\frac{x-n^2}{15n}=-\frac{(4m+px)n}{6m}$

190. $\frac{n-2x}{3m}-\frac{5m^2}{2n^2}=\frac{x}{m}-2+\frac{m(x-m)}{n^2}$

191. $a-\frac{y+ac}{b}+\frac{y+bc}{a}=\frac{ab-y}{c}-a$

192. $\frac{6a+5b}{6a}-\frac{4by}{3a^2}=1-\frac{by}{a^2+ab}$

193. $2b^2-\frac{(3c^2-5b^2)az}{bc^3}=\frac{2az}{c}-3b+\frac{5abz}{c^3}$

194. $\frac{c+3z}{4c^2+6cd}-\frac{2z-c}{6cd-9d^2}=\frac{2c+z}{4c^2-9d^2}$

195. $\frac{u+l}{k+l}+\frac{u-l}{k-l}=\frac{1}{k+l}-\frac{u-l}{k^2-l^2}+\frac{2u}{k}$ *)

196. $\frac{u}{k}(3kl+1)=\frac{3kl}{k+1}+\frac{(2k+1)u}{k^3+2k^2+k}+\frac{k^2}{(k+1)^3}$

197. $\frac{m^2+n^2}{m+n}\cdot\left[2(m+n)-\frac{n^2v}{m+n}\right]=\left[2m+n\left(\frac{m}{n}-1\right)^2\right]\left(n-\frac{nv}{m-n}\right)$

198. $\frac{mn}{m+n}\left[3p+\frac{mn}{(m+n)^2}\right]+\frac{(2m+n)n^2v}{m(m+n)^2}=3pv+\frac{nv}{m}$

199. $\left(\frac{p}{1-p^2}+\frac{1}{1-p+p^2-p^3}\right)\left(1-w\right)=4-\frac{1-w}{1+p}-\frac{1-w}{1+p^2}-\frac{1-w}{1+p+p^2+p^3}$

200. $\left(w+2pq\right)\left(\frac{1}{p+q-r}-\frac{1}{p+q+r}\right)=\left(2pq-w\right)\left(\frac{1}{q+r-p}+\frac{1}{p-q+r}\right)$

---

*) Siit peale järgnevais ülesandeis otsitavaiks arvata tähestiku viimaseid tähti.

§ 9. Täiendusseletused võrrandite lahendamise kohta.

Võrrandite 2. omanduses on öeldud, et võrrandi kumbagi osa võib ühe ja sama suurusega korrutada ja jagada, kui see suurus ei võrdu nulliga ja kui ta eneses ei sisalda tundmatut. Püüame näidete varal selgeks teha, miks säärane kitsendus on tehtud.

Olgu antud võrrand $x = 2$, mille ainus juur on 2. Korrutades selle võrrandi osi x-ga, saame võrrandi $x^2 = 2x$, mis endisega samaväärne (ekvivalentne) ei ole, sest et temal on peale endise juure 2 veel juur 0, mida asemelepanemise kaudu võib proovida. Samuti, korrutades võrrandi $x = 2$ osi otsitavat sisaldava avaldusega $x - 1$, saame uue võrrandi $x^2 - x = 2x - 2$, millel on kaks juurt: endine juur 2 ja uus juur 1. Üldiselt võib öelda, et võrrandi korrutamisel tundmatut sisaldava avaldusega võivad tekkida niisugused lisajuured, mis muudavad korrutaja nulliks. Et aga võrrandi osi nulliga ei või korrutada, järgneb juba sellest, et selle korrutamise tagajärjena saame võrrandi asemel iga kord võrduse $0 = 0$, mis enam võrrand ei ole.

Vastupidi, olgu antud võrrand $x^2 = 3x$, mille juured on 0 ja 3; jagades antud võrrandit x-ga, saame uue võrrandi $x = 3$, mis oma ainsa juure 3-ga ei ole samaväärne endise võrrandiga. Ehk antagu võrrand $(x - 2)^2 = 2x - 4$, mille juured on 2 ja 4; jagades tema osi avaldusega $x - 2$, saame võrrandi $x - 2 = 2$, mille juur on 4, kuna juur 2 läks kaduma. Üldiselt tähendame, et võrrandi osade jagamisel tundmatut sisaldava ühise jagajaga võivad kaotsi minna need juured, mis muudavad jagaja nulliks. Igasuguse suuruse jagamine nulliga on aga mõttetus (absurd).

Algebra teoorias tõestatakse, et võrrandi osi võib ainult siis korrutada tundmatut sisaldava avaldusega, kui see avaldus sisaldub võrrandis ettetulevate murruliste liikmete koonduse nimetajas peale koonduses saadud murru lühendamist. Näit., kui võrrandile anda kuju $A + \frac{B}{C} = 0$, kus A on võrrandi täisarvuliste liikmete koondus, aga $\frac{B}{C}$ on koondumata murd, ja võrrandi iga liige korrutada C-ga, saame võrrandi $AC+B=0$, mis endisega samaväärne. On aga murd $\frac{B}{C}$ koonduv, siis tuleb koondamine enne tema nimetaja kaotamist ära teha, et võrrandile lisajuurt mitte tekitada.

Vastupidi, võrrandi osi võib ainult siis jagada tundmatut sisaldava avaldusega, kui sellest jagamisest saadakse niisugused murrud, mis koondatult annavad võrrandi ühele osale murru, mis ei koondu ühegi tundmatut sisaldava jagajaga. Vastasel korral tarvis võrrandi taandamisel tähele panna seda juurt, mis koondamisel kaotsi läheb, ja teda otsekohe lugeda võrrandi üheks juureks.

Järgnevate näidete seas on märgikesega * tähendatud need, millede lahendusel tarvis silmas pidada ülemaltoodud seletusi. Teisi näiteid võib harilikkude juhiste järgi lahendada.

201. $\frac{8}{x}+\frac{2}{5}=\frac{9}{x}-\frac{1}{10}$ **202.*** $7-\frac{2(x-3)}{x}=\frac{30x+x^2}{x^2}$

203. $\frac{10+7x}{6+7x}=\frac{5x+4}{5x}$ **204.*** $\frac{x}{3}-\frac{2x}{3x}=\frac{x^2-5x}{3x-7}$ **205.** $\frac{5+8x}{3+2x}=\frac{45-8x}{13-2x}$

206. $\frac{3x}{x+2}+\frac{2x}{x+1}=5$ **207.** $\frac{2+x}{x-1}-\frac{5}{2x-2}=\frac{8}{3x-3}+\frac{5}{18}$

208. $\frac{2x-3}{2x-4}-6=\frac{x+5}{3x-6}-5\frac{1}{2}$ **209.*** $\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{2(x-1)}$

210.* $\frac{3x^2+2}{x^2-1}+\frac{2(x-2)}{x+2}=\frac{5(x^2-x-1)}{x^2-1}$

211. $\frac{4x+17}{x+3}+\frac{3x+10}{x-4}=7$ **212.*** $\frac{5+3x}{5+2x}=\frac{7+x}{7-x}$

213. $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}$ **214.*** $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2(x+3)}{x-3}$

215. $\frac{4}{1+x}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^2-3}{1-x^2}$ **216.** $\frac{6}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}+\frac{x^2}{x^2-4}=0$

217. $\frac{2}{(1+x)^2}-\frac{5}{(1-x)^2}=\frac{3}{1-x^2}$

218. $\frac{3}{(2x+5)^2}+\frac{4}{(2x+1)^2}=\frac{7}{(2x+5)(2x+1)}$

219.* $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$ **220.*** $\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}$

221. $\frac{x+a}{2}-\frac{2}{x+a}=\frac{x-a}{2}$ **222.** $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-4}=\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a-8}$

223. $\frac{1}{c}+\frac{c}{c+y}=\frac{c+y}{cy}$ **224.** $\frac{c+1}{c+2}-\frac{c+2}{c+3}=\frac{c+4}{c+5}-\frac{c+5}{c+6}$

225. $\frac{y-2a}{y+3a}=3-\frac{2y^2-13a^2}{y^2-9a^2}$ **226.** $\frac{z}{3c+z}-\frac{z}{z-3c}=\frac{c^2}{9c^2-z^2}$

227. $\frac{3}{k^2+3k+2}+\frac{4}{k^2+5k+6}=\frac{3}{k^2+4k+3}$

228. $\frac{2(k^2+2kly-l^2)}{l^4-y^2}=\frac{k^2+y}{l^2-y}-\frac{k^2-y}{l^2+y}$

229. $\frac{1}{m^2+m-12}+\frac{1}{m^2+9m+20}=\frac{1}{m^2+2m-15}$

230. $\frac{(m+n)(mnz+nz^2+z^3)}{z^3+nz^2-m^2z-m^2n}=\frac{nz^2}{z^2-m^2}+\frac{mz}{z+n}+\frac{mn}{z-m}$

§ 10. Ühe tundmatuga võrrandite kokkuseadmine.

Antud ülesande järele võrrandit kokku seades tuleb kõige pealt ülesande otsitav suurus ära tähendada x, y või mõne teise tundmatuga. On aga ülesandes otsitavaid suurusi mitu, siis valitakse nende seast üks võrrandi tundmatuks. Mõnikord on siiski kasulik võrrandi tundmatuks võtta mitte ülesande otsitav, vaid mõni teine suurus, millest ülesande otsitav oleneb. Seda aluseks võttes seatakse võrrand ülesande kohaselt kokku. Võrrandi juur on alati nimetu arv; et ülesande küsimust vastata, tarvis juurt tähendavale arvule vastav nimetus juurde kirjutada. Võtame näiteks ülesande:

Vaksalist sõitis välja postirong, mis 28 km tunnis sõidab. $1\frac{1}{4}$ tunni pärast sõitis samast vaksalist samas sihis välja kiirrong, mis 40 km tunnis edasi jõudis. Kui kaua peab kiirrong sõitma, et postirongi kätte saada?

Oletame, et kiirrong saab postirongi kätte x tunni pärast; sõites igas tunnis 40 km jõuab kiirrong x tunnis $40x$ km edasi; postirong on teel $1\frac{1}{4}$ tunni võrra kauemini kui kiirrong, s. o. $\left(x+1\frac{1}{4}\right)$ tundi, ja sõidab selle aja sees $28\left(x+1\frac{1}{4}\right)$ km; et rongid ühest ja samast kohast välja sõitsid ja teataval ajal teineteist kohtasid, siis peavad rongide ärasõidetud kaugused võrdsed olema; saame võrrandi:

$$40x=28\left(x+1\frac{1}{4}\right);$$

lahendades viimase saame võrrandi juure:

$40x=28x+35$; $12x=35$; $x=2\frac{11}{12}$.

Vastus: Kiirrong peab sõitma $2\frac{11}{12}$ tundi.

231. Kahel isikul on kokku 38 marka, esimesel 6 mk. rohkem kui teisel. Kui palju raha on kummalgi?

231. Kahel isikul on kokku 114 mk., esimesel 18 mk. rohkem kui teisel. Kui palju raha on kummalgi?

232. Kahel majal on kokku 51 akent; ühel majal on 15 akent vähem kui teisel. Mitu akent on kummalgi majal?

232. Kahel majal on kokku 62 akent; ühel majal on 6 akent vähem kui teisel. Mitu akend on kummalgi majal?

233. Kahes kotis on kokku 81 mk. raha. Esimeses kotis on kaks korda vähem kui teises. Kui palju raha on kummaski kotis?

233. Kahes kotis on kokku 72 mk. raha. Esimeses kotis on 5 korda vähem kui teises. Kui palju raha on kummaski kotis?

234. Isa on pojast 3 korda vanem, aga mõlemate vanadusaastate summa on 48. Leida kummagi vanadus.

234. Isa on pojast 2 korda vanem, aga mõlemate vanadusaastate summa on 63. Leida kummagi vanadus.

235. Poeg on isast 4 korda noorem; nende vanadusaastate vahe on 27. Leida kummagi vanadus.

235. Poeg on isast 5 korda noorem; nende vanadusaastate vahe on 32. Leida kummagi vanadus.

236. Kolmes korvis on kokku 47 õuna; esimeses ja teises korvis on neid ühepalju, aga kolmandas 2 õuna rohkem kui kummaski eelmises. Mitu õuna on igas korvis?

236. Kolmes korvis on kokku 110 õuna; esimeses ja kolmandas korvis on ühepalju, aga teises 4 õuna vähem kui kummaski ülejäänud korvis. Mitu õuna on igas korvis?

237. Kolm tükki hõbedat kaalub kokku 48 kg. Esimene on teisest 12 kg võrra raskem, kolmas aga esimesest 9 kg võrra raskem. Kui palju kaalub iga tükk hõbedat?

237. Kolm tükki hõbedat kaalub kokku 33 kg. Esimene tükk on teisest 5 kg võrra kergem, kolmas aga esimesest 2 kg võrra kergem. Kui palju kaalub iga tükk hõbedat?

238. Poeg on isast 20 a. võrra noorem, aga õest 5. a. võrra vanem. Kõigi kolme vanadusaastate summa on 60. Kui vana on igaüks?

238. Ema on pojast 21 a. võrra vanem, aga oma mehest 7 a. võrra noorem. Kõigi kolme vanadusaastate summa on 64. Kui vana on igaüks?

239. Kolme riiuli peal on kokku 66 raamatut; alumisel riiulil on neid kolm korda rohkem ja keskmisel kaks korda rohkem kui ülemisel. Mitu raamatut on igal riiulil?

239. Kolme riiuli peal on kokku 60 raamatut; alumisel riiulil on neid 6 korda rohkem ja ülemisel 5 korda rohkem kui keskmisel. Mitu ranmatut on igal riiulil?

240. Mets, aed ja heinamaa maksavad kokku 10 800 mk. Heinamaa on aiast 2 korda kallim, mets aga on heinamaast 3 korda kallim. Kui palju maksab igaüks neist eraldi?

240. Mets, aed ja heinamaa maksavad kokku 17 600 mk. Mets on aiast 3 korda kallim, heinamaa aga metsast 4 korda kallim. Kui palju maksab igaüks neist eraldi?

241. Jagada 21 kahte ossa nõnda, et esimese ja teise osa geomeetriline suhe oleks $\frac{3}{4}$.

241. Jagada 48 kahte ossa nõnda, et teise ja esimese osa geomeetriline suhe oleks $\frac{5}{3}$.

242. Jagada 88 kahte niisugusesse ossa, et jagades esimest osa 5-ga ja teist osa 6-ga saaksime võrdsed jagatised.

242. Jagada 55 kahte ossa nõnda, et jagades esimest osa 7-ga ja teist osa 4-ga saaksime võrdsed jagatised.

243. Kahe arvu summa on 85, nende vahe aga 15. Leida arvud.

243. Kahe arvu summa on 72, nende vahe aga 8. Leida arvud.

244. Kahe arvu vahe on 8; nende arvude geomeetriline suhe aga $\frac{3}{2}$. Leida arvud.

244. Kahe arvu vahe on 12; samade arvude geomeetriline suhe aga $\frac{5}{3}$. Leida arvud.

245. Jagada 46 kahte ossa nõnda, et kui esimest osa jagada 3-ga ja teist osa 7-ga, siis oleks jagatiste vahe 2.

245. Jagada 59 kahte ossa nõnda, et kui esimest osa jagada 3-ga ja teist osa 5-ga, siis oleks jagatiste vahe 1.

246. Jagada 75 kahte ossa nõnda, et suurem osa oleks osade vahest 3 korda suurem.

246. Jagada 56 kahte ossa nõnda, et väiksem osa oleks osade vahest 3 korda suurem.

247. Kahe arvu summa on 64. Suuremat arvu väiksemaga jagades saame jagatises 3 ja jäägis 4. Leida arvud.

247. Kahe arvu summa on 45. Suuremat arvu väiksemaga jagades saame jagatises 5 ja jäägis 3. Leida arvud.

248. Kahe arvu vahe on 35. Suuremat arvu väiksemaga jagades saame jagatises 4 ja jäägis 2. Leida arvud.

248. Kahe arvu vahe on 23. Suuremat arvu väiksemaga jagades saame jagatises 2 ja jäägis 11. Leida arvud.

249. Kahest tundmata arvust on üks teisest 5 võrra suurem. Kui väiksem arv jagada 4-ga ja suurem 3-ga, siis on esimene jagatis 4 võrra teisest vähem. Leida arvud.

249. Kahest tundmata arvust on üks teisest 15 võrra suurem. Kui suurem arv jagada 9-ga ja väiksem 2-ga, siis on esimene jagatis teisest 3 võrra vähem. Leida arvud.

250. Kahest tundmata arvust on üks teisest 6 võrra vähem. Kui suurema arvu jagame pooleks, siis on saadav jagatis väiksemast arvust 3 võrra vähem. Leida arvud.

250. Kahest tundmata arvust on üks teisest 18 võrra vähem. Kui suurema arvu jagame 3-ga, siis on saadav jagatis teisest arvust 2 võrra suurem. Leida arvud.

251. Ühes vesistus on vett 2 korda rohkem kui teises. Kui esimesest valada teise 16 pange, siis on kummaski vesistus ühepalju vett. Kui palju vett oli kummaski?

251. Ühes vesistus on vett 3 korda rohkem kui teises. Kui esimesest valada teise 22 pange, siis on kummaski vesistus ühepalju vett. Kui palju vett oli kummaski?

252. Kahel korvinaisel on kokku 220 muna. Kui teine annaks esimesele 14 muna, siis oleks kummalgi ühepalju. Kui palju mune oli kummalgi?

252. Kahel korvinaisel oli kokku 186 muna. Kui teine annaks esimesele 10 muna, siis oleks kummalgi ühepalju. Kui palju mune oli kummalgi?

253. Kellelgi on parempoolses taskus 4 korda rohkem raha kui pahempoolses. Kui parempoolsest taskust asetada pahempoolsesse 6 mk., siis jääb parempoolsesse tasku ainult 3 korda rohkem raha kui pahempoolsesse. Kui palju raha on kummaski taskus?

253. Kellelgi on parempoolses taskus 3 korda rohkem raha kui pahempoolses. Kui pahempoolsest taskust asetada parempoolsesse 5 mk., siis saab parempoolsesse tasku 5 korda rohkem raha kui pahempoolsesse. Kui palju raha on kummaski taskus?

254. Üks tööline sai töö eest 12 mk. rohkem kui teine. Peale selle sai ta teise käest veel 2-margalise võla kätte. Kodus selgus, et esimesel töölisel oli raha 3 korda rohkem kui teisel. Kui suur oli kummagi teenistus?

254. Üks tööline sai töö eest 20 mk. vähem kui teine; ka sai ta teise käest 2-margalise võla kätte. Pärast selgus, et esimene viis 2 korda vähem raha koju kui teine. Kui suur oli kummagi teenistus?

255. Ühel poisil on 30 mk., teisel 11 mk. Mitu korda tuleb anda 1 mark kummalegi poisile, et esimesel oleks 2 korda rohkem raha kui teisel?

255. Ühel poisil on 48 mk., teisel 22 mk. Mitu korda peab kumbki neist 1 mk. ära raiskama, et esimesel jääks järele 3 korda rohkem raha kui teisel?

256. Isa on 40 aastat, poeg 12 a. vana. Mitu aastat tagasi oli isa pojast 5 korda vanem?

256. Isa on 49 aastat, poeg 11 a. vana. Mitme aasta pärast on isa pojast 3 korda vanem?

257. Ühel maapidajal on lambaid 4 korda rohkem kui teisel. Kui kumbki ostaks omale juurde 9 lammast, siis oleks esimesel 3 korda rohkem lambaid kui teisel. Mitu lammast on kummalgi?

257. Ühel maapidajal on lambaid 3 korda vähem kui teisel. Kui kumbki müüks ära 10 lammast, siis jääks esimesel järele 5 korda vähem lambaid kui teisel. Mitu lammast on kummalgi?

258. Isa on pojast 39 a. vanem, aga 7 a. pärast on ta pojast 4 korda vanem. Kui vana on kumbki?

258. Isa ja poeg on kokku 88 a. vanad. 8 aastat tagasi oli isa pojast 7 korda vanem. Kui vana on kumbki?

259. Ühes vesistus on 48 pange, teises 22 p. vett. Esimesest valati välja 2 korda rohkem kui teisest, siis jäi esimesse 3 korda rohkem vett kui teise. Mitu pange vett valati kummastki välja?

259. Ühes vesistus on 42 p. vett, teises 8 p. Esimesse vesistusse valati juurde 3 korda rohkem vett kui teise, ja siis selgus, et esimeses on vett 4 korda rohkem kui teises. Kui palju vett valati kumbagi vesistusse?

260. Kaks õnnemängijat hakkasid mängima. Mängu alul oli esimesel 72 mk., teisel 21 mk. raha. Esimene nendest kaotas 3 korda rohkem kui teine võitis. Mängu lõpul oli esimesel 2 korda rohkem raha kui teisel. Kui palju kaotas esimene ja kui palju võitis teine?

260. Kaks õnnemängijat hakkasid mängima. Mängu alul oli esimesel 25 mk., teisel 12 mk. raha. Esimene võitis kaks korda rohkem kui teine kaotas. Mängu lõpul oli esimesel 5 korda rohkem raha kui teisel. Kui palju võitis esimene ja kaotas teine?

261. Kaupleja müüs esimesel korral $\frac{2}{7}$ kõigist õuntest, teine kord $\frac{3}{5}$; siis jäi veel järele 8 õuna. Kui palju oli õunu?

261. Kaupleja müüs esimesel korral $\frac{1}{9}$ kõigist temal olevatest õuntest, teine kord $\frac{5}{6}$; peale seda jäi talle järele 4 õuna. Kui palju oli õunu?

262. Vesistust valati välja $\frac{1}{3}$ kõigest seesolevast veest, teine kord $\frac{5}{6}$ ülejäänud veest; siis jäi vesistusse veel 6 pange vett. Kui palju vett oli vesistus esialgu?

262. Vesistust valati välja $\frac{3}{5}$ kõigest seesolevast veest, teine kord $\frac{3}{4}$ ülejäänud veest; siis jäi vesistusse veel 5 pange vett. Kui palju vett oli vesistus esialgu?

263. Seltskonnas on naisi, mehi ja lapsi kokku 40 inimest. Naiste arv on $\frac{3}{5}$ meeste arvust, aga laste arv on $\frac{2}{3}$ meeste ja naiste koguarvust. Kui palju on mehi, naisi ja lapsi?

263. Seltskonnas on mehi, naisi ja lapsi kokku 72 inimest. Meeste arv on $\frac{2}{3}$ naiste arvust, aga laste arv on $\frac{4}{5}$ meeste ja naiste koguarvust. Kui palju on mehi, naisi ja lapsi?

264. 30 meetri kaht sorti kalevi eest maksti 12 800 marka. Meeter esimest sorti maksis 450 mk., meeter teist sorti 400 mk. Kui palju osteti kumbagi sorti kalevit?

264. 27 meetri kaht sorti kalevi eest maksti 12 000 mk. Esimest sorti kalevi meeter maksis 500 mk. ja teist sorti 375 mk. Kui palju osteti kumbagi sorti kalevit?

265. Tee-kaupmees müüs 38 naela kaht sorti teed. Esimese sordi naelast sai ta 30 mk., teise sordi naelast 16 mk. Esimese sordi tee eest sai ta 220 mk. rohkem kui teise sordi tee eest. Kui palju müüdi kumbagi sorti teed?

265. Tee-kaupmees müüs 110 naela kaht sorti teed. Esimese sordi tee naelast sai ta 45 mk., teise sordi naelast 22,5 mk. Esimese sordi tee eest sai ta 450 mk. vähem kui teise sordi tee eest. Kui palju müüdi kumbagi sorti teed?

266. Kümnik kauples töölised; ta lubas neile iga tööpäeva eest maksta 90 mk., aga iga viidetud päeva eest kinni pidada 40 mk. 12 päeva pärast sai tööline 690 mk. Mitu päeva ta töötas?

266. Kümnik kauples töölised; ta lubas neile iga tööpäeva eest maksta 80 mk., aga iga viidetud päeva eest kinni pidada 50 mk. 50 päeva pärast sai tööline 2180 mk. Mitu päeva ta puudus töölt?

267. *A* ja *B* mängisid piljardit, tingimusega, et partii kaotaja maksab võitjale 75 marka. 20 partii järele selgus, et *B* oli võitnud 450 mk. Mitu partiid ta võitis?

267. *A* ja *B* mängisid piljardit, tingimusega, et partii kaotaja maksab võitjale 50 marka. 12 partii järele selgus, et *A* oli võitnud 200 marka. Mitu partiid ta kaotas?

268. Kahest linnast, millede vahemaa on 300 km, sõitsid ühel ajal teineteisele vastu kaks kullerit. Esimene sõidab tunnis 12 km, teine 13 km. Millal kohtavad nad teineteist?

268. Kahest linnast, millede vahemaa on 280 km, sõitsid ühel ajal teineteisele vastu kaks kullerit. Esimene sõidab tunnis 11 km, teine 17 km. Millal kohtavad nad teineteist?

269. Kahest jaamast, millede vahemaa 77 km, sõidavad välja ühel ajal kaks rongi ühes sihis. Esimene sõidab tunnis $31^1/_2$ km, teine $18^2/_3$ km, kusjuures esimene sõidab teise järel. Millal saab esimene rong teise kätte?

269. Kahest jaamast, millede vahemaa 38 km, sõidavad välja ühel ajal kaks rongi ühes sihis. Esimene sõidab tunnis $25^1/_4$ km, teine $20^1/_2$ km, kusjuures esimene sõidab teise järel. Millal saab esimene rong teise kätte?

270. Päeval kell 12 sõidab välja reisijaterong, mis sõidab 32 km tunnis. 45 minutit peale seda sõidab samast jaamast välja kiirrong, mis sõidab 42 km tunnis. Mis kella ajal saab kiirrong reisijaterongi kätte?

270. Kell 9 hommikul sõidab välja reisijaterong, mis sõidab 28 km tunnis. $1^1/_4$ tundi peale seda sõidab samast jaamast välja kiirrong, mis sõidab 40 km tunnis. Mis kella ajal saab kiirrong reisijaterongi kätte?

271. Missugune kapital tuleb 6%-ga kasvama panna, et tast 1 aasta ja 2 kuu pärast võiks saada 224 mk. kasu?

271. Missugune kapital tuleb 8%-ga kasvama panna, et tast 7 kuu pärast võiks saada 182 mk. kasu?

272. Mitme protsendiga tuleb 4400-margaline kapital kasvama panna, et tast 1 a. 5 kuu pärast võiks saada 280 mk. 50 p. kasu?

272. Mitme protsendiga tuleb 1800-margaline kapital kasvama panna, et tast 11 kuu pärast võiks saada 93,5 mk. kasu?

273. Kaupmees müüs kauba 299 marga eest ja sai 15% kasu. Kui palju maksis see kaup tal enesel?

273. Kaupmees müüs kauba 161 marga eest ja sai $7\frac{1}{3}\%$ kasu. Kui palju maksis see kaup tal enesel?

274. 429 marga eest kaupa müües saadi $2\frac{1}{2}\%$ kahju. Kui palju maksab kaup?

274. 366 marga eest kaupa müües saadi $8\frac{1}{2}\%$ kahju. Kui palju maksab kaup?

275. Veksli eest maksti 10 kuud enne tähtaega, 8%-ga äriliselt oodustades, 1120 marka. Kui suur on veksli valuut?

275. Veksli eest maksti 1 aasta 3 kuud enne tähtaega, 7%-ga äriliselt oodustades, 839 mk. 50 p. Kui suur on veksli valuut?

276. Vesistu täitub ühe toru kaudu 3 tunniga ja teise kaudu 5 tunniga. Mitme tunniga täitub vesistu mõlema toru kaudu?

276. Vesistu täitub ühe toru kaudu $7\frac{1}{2}$ tunniga ja teise kaudu 5 tunniga. Mitme tunniga täitub vesistu mõlema toru kaudu?

277. Vesistu täitub ühe toru kaudu 4 tunniga, aga teise toru kaudu tühjub ta 6 tunniga. Mitme tunniga täitub vesistu mõlema toru kaudu?

277. Vesistu täitub ühe toru kaudu $2\frac{1}{3}$ tunniga, aga teise toru kaudu tühjub ta 2 tunni 48 minutiga. Mitme tunniga täitub vesistu mõlema toru kaudu?

278. Kaks töölist teevad töö ära 3 t. 36 min. Esimene tööline teeks selle töö 6 tunniga. Mitme tunniga teeks teine tööline sama töö ära?

278. Kaks töölist teevad töö ära 12 tunniga. Esimene tööline teeks selle töö 20 tunniga. Mitme tunniga teeks teine tööline sama töö ära?

279. Vesistusse läheb kolm toru; kaht esimest toru mööda jookseb vesi sisse, kolmandat mööda aga välja. Esimene toru täidab vesistu 3 tunniga, teine toru 2 tunniga, kolmas aga tühjendab ta 6 tunniga. Mitme tunniga täitub vesistu kolme toru koostöötamisel?

279. Vesistusse läheb kolm toru; kaht esimest toru mööda jookseb vesi sisse, aga kolmandat mööda välja. Esimene toru täidab vesistu 2 tunniga, teine toru 5 tunniga, kolmas aga tühjendab ta 10 tunniga. Mitme tunniga täitub vesistu kolme toru koostöötamisel?

280. Kolmest torust täidab esimene vesistu 5 tunniga, teine 15 tunniga, kolmas aga tühjendab ta 3 tunniga. Mitme tunniga tühjub täidetud vesistu, kui korraga avada kõik torud?

280. Kolmest torust täidab esimene vesistu 6 tunniga, teine 18 tunniga, kolmas aga tühjendab ta 3 tunniga. Mitme tunniga tühjub veega täidetud vesistu, kui kõik kolm toru on lahti?

281. Rong läheb *A*-st *B*-sse 30-km kiirusega tunnis ja tuleb tagasi *B*-st *A*-sse 28-km kiirusega tunnis. Kõigeks selleks edasi-tagasi sõiduks kulub $14^1/_2$ tundi. Mitu km on *A*-st *B*-sse?

—281. Rong läheb *A*-st *B*-sse 24-km kiirusega tunnis ja tuleb tagasi *B*-st *A*-sse 30-km kiirusega tunnis. Kõigeks selleks edasi-tagasi sõiduks kulub $11^1/_4$ tundi. Mitu km on *A*-st *B*-sse?

282. Rong läks *M*-st *N*-i 20-km kiirusega tunnis. 8 tunni pärast tuleb *N*-st välja rong ja läheb *M*-i 30-km kiirusega tunnis. *M* ja *N* vahemaa on 350 km. Kui kaugel *M*-st kohtuvad rongid?

282. Rong läks *M*-st *N*-i 24-km kiirusega tunnis. 5 tunni pärast tuleb *N*-st välja rong ja läheb *M*-i 28-km kiirusega tunnis. *M* ja *N* vahemaa on 380 km. Kui kaugel *N*-st kohtuvad rongid?

283. Kolme arvu summa on 70. Teise arvu jagatis esimesega on 2 ja jääk 1, aga kolmanda arvu jagatis teisega on 3 ja jääk 3. Leida arvud.

283. Kolme arvu summa on 60. Teise arvu jagatis esimesega on 3 ja jääk 2, aga kolmanda arvu jagatis teisega on 2 ja jääk 4. Leida arvud.

284. Leida arv, mis 5-ga jagatult annab jäägis 2, aga 8-ga jagatult annab jäägis 5, kusjuures esimene jagatis on teisest 3 võrra suurem.

284. Leida arv, mis 7-ga jagatult annab jäägis 2, aga 9-ga jagatult annab jäägis 4, kusjuures esimene jagatis on teisest 2 võrra suurem.

285. Keegi tahtis enda raha jagada vaestele ja arvas, et kui igaühele anda 15 marka, siis tuleb 10 marka puudu, aga kui igaühele anda 13 marka, siis jääb 6 mk. üle. Kui palju oli vaeseid ja kui palju raha?

285. Keegi tahtis enda raha jagada vaestele ja arvas, et kui igaühele anda 8 mk., siis jääb 4 mk. üle, aga kui igaühele anda 9 mk., siis tuleb 2 mk. puudu. Kui palju oli vaeseid ja kui palju raha?

286. Insener laseb telegraafipostid üksteisest teatavasse kaugusesse üles panna. Kui postid pandaks üksteisest 25 sülla kaugusesse, siis tarvis veel 150 posti valmistada, kui aga postide vahemaad suurendada 5 sülla võrra, siis jääks 70 posti üle. Kui pika maa peale asetati postid ja mitu posti oli?

286. Insener laseb telegraafipostid üksteisest teatavasse kaugusesse üles panna. Kui postid pandaks üksteisest 30 sülla kaugusesse, siis jääks valmistatud postidest 100 tükki üle, kui aga postide vahemaad vähendada 4 sülla võrra, siis tarvis veel 180 posti valmistada. Kui pika maa peale asetati postid ja mitu posti oli?

287. Keegi palkas teenija 14 400 marga ja ühe ülikonna riiete eest aastas. Teenija lõpetas teenistuse 7 kuu pärast ja sai palgaks 5400 marka raha ja ülikonna riideid. Kui palju maksab ülikond?

287. Keegi lubas oma teenijale 7 kuu teenistuse eest 7500 marka raha ja ülikonna. Teenija lõpetas teenistuse 5 kuu pärast

ja sai peremehelt 4500 marka raha ja ülikonna. Kui palju maksab ülikond?

288. 46 puuda suhkru eest maksti 19 500 marga võrra rohkem kui 73 naela tee eest; 9 puuda suhkrut maksab 3000 marka vähem kui 37 naela teed. Kui palju maksab nael teed ja puud suhkrut?

288. 21 naela tee eest maksti 23 800 marka vähem kui 40 puuda suhkru eest; 15 naela teed maksab 200 marga võrra rohkem kui 4 puuda suhkrut. Kui palju maksab nael teed ja puud suhkrut?

289. Maaomanik palkas kaks põllutöölist ühesuguse päevapalgaga. Ühele neist maksis ta 40 tööpäeva eest 750 mk. rahas ja $3^1/_2$ setverti kaeru, teisele 24 tööpäeva eest 480 mk. rahas ja 2 setverti kaeru. Kui palju maksab setvert kaeru?

289. Maaomanik palkas kaks põllutöölist ühesuguse päevapalgaga. Ühele neist maksis ta 56 tööpäeva eest 1400 mk. rahas ja 8 setverti kaeru, teisele 88 tööpäeva eest 1350 mk. rahas ja 15 setverti kaeru. Kui palju maksab setvert kaeru?

290. 25 arss. kalevi ja 21 arss. sameti eest maksti 24 700 mk. Kui palju maksab arss. seda ja teist riiet, kui teada on, et 10 arss. sametit maksab 1800 mk. rohkem kui 13 arss. kalevit?

290. 15 arss. sameti ja 52 arss. kalevi eest maksti 27 600 mk. Kui palju maksab arss. seda ja teist riiet, kui teada on, et 2 arss. sametit maksab 1700 mk. vähem kui 11 arss. kalevit?

291. Tundmatu kahekümnendise (kahekohase) arvu ristsumma on 12. Kui sellest arvust lahutada 18, siis saab arv, milles esinevad tundmatu arvu numbrid, kuid vastupidises järjes. Leida see arv.

291. Tundmatu kahekümnendise arvu ühelisi ja kümnelisi moodustavate numbrite vahe on 3. Kui see arv liita 27-ga, siis saab arv, milles esinevad tundmatu arvu numbrid, kuid vastupidises järjes. Leida see arv.

292. Tundmatu kahekümnendise arvu kümnelisi on 2 korda rohkem kui sama arvu ühelisi. Kui selle arvu numbrid vastupidiselt järjestada, siis saadakse arv, mis on tundmatust 36 võrra vähem. Leida see arv.

292. Tundmatu kahekümnendise arvu kümnelisi on kolm korda vähem kui sama arvu ühelisi. Kui selle arvu numbrid vastupidiselt järjestada, siis saadakse arv, mis on tundmatust 36 võrra suurem. Leida see arv.

293. *A* mängis *B*-ga malet ja võitis igast neljast partiist kolm; peale selle mängis *A* veel *C*-ga ja võitis igast kolmest partiist kaks. Üldse mängis *A* 21 partiid, milledest 15 partiid võitis. Mitu partiid mängis ta *B*-ga ja mitu *C*-ga?

293. *A* mängis *B*-ga malet ja kaotas igast kaheksast partiist kolm; peale selle mängis *A* veel *C*-ga ja kaotas igast viiest partiist kaks. Üldse mängis *A* 26 partiid ja kaotas neist 10. Mitu partiid mängis ta *B*-ga ja mitu partiid *C*-ga?

294. Mis näitab kell praegu, kui $\frac{1}{5}$ tundide arvust, mis keskpäevast möödunud, võrdub $\frac{1}{3}$-ga tundide arvust, mis keskööni üle jäänud?

294. Mis näitab kell praegu, kui $\frac{1}{11}$ tundide arvust, mis keskpäevast möödunud, võrdub $\frac{1}{13}$-ga tundide arvust, mis keskööni üle jäänud?

295. Leida kala raskus, kui teada on, et tema saba kaalub 2 naela, pea kaalub sama palju kui saba ja pool keha, ja keha sama palju kui pea ja saba.

295. Leida kala raskus, teades, et tema pea kaalub 7 naela, saba kaalub sama palju kui pea ja pool keha ja keha sama palju kui saba ja pea.

296. Tundmatu summa tarvis jagada kahe isiku vahel nii, et esimese ja teise osad suhtuksid nõnda kui 5 : 3 ja et esimese osa oleks 50 marga võrra suurem kui $\frac{5}{9}$ tervest summast. Kui suur on iga osa?

296. Tundmatu summa tarvis jagada kahe isiku vahel nii, et esimese ja teise osad suhtuksid nõnda kui 7 : 4 ja et teise osa oleks 21 marga võrra väiksem kui $\frac{5}{12}$ tervest summast. Kui suur on iga osa?

297. Kaup müüdi kahjuga 420 marga eest. Oleks sama kauba eest saadud 570 mk., siis oleks kasu 5 korda suurem olnud kui saadud kahju. Mis maksab kaup?

297. Kaup müüdi kasuga 520 marga eest. Oleks sama kauba eest saadud 320 mk., siis oleks kahjusumma moodustanud $\frac{3}{7}$ saadud kasusummast. Mis maksab kaup?

298. Kolmes tükis oleva sitsiriide arssinate arvud suhtuvad nõnda kui 2 : 3 : 5. Kui esimesest tükist 4, teisest 6 ja kolmandast 10 arss. ära lõigata, siis moodustab üldine ülejäänud sitsi hulk $\frac{5}{6}$ endisest sitsist. Mitu arss. sitsi on igas tükis?

298. Kolmes tükis oleva sitsiriide arssinate arvud suhtuvad nõnda kui 3 : 5 : 8. Kui esimesest tükist 10, teisest 20 ja kolmandast 30 arss. ära lõigata, siis moodustab üldine ülejäänud sitsi hulk $\frac{5}{8}$ endisest sitsist. Mitu arss. sitsi on igas tükis?

299. Vesistust valati välja pool temas olevast veest ja $^1/_2$ pange, pärast veel pool ülejäänud veest ja $^1/_2$ pange ja lõpuks veel pool ülejäänud veest ja $^1/_2$ pange; peale seda jäi vesistusse 6 pange vett. Kui palju vett oli vesistus alguses?

299. Vesistust valati välja kolmandik temas olevast veest ja $^1/_3$ pange, pärast veel kolmandik ülejäänud veest ja $^1/_3$ pange ja lõpuks veel kolmandik ülejäänud veest ja $^1/_3$ pange; peale seda jäi vesistusse 7 pange vett. Kui palju vett oli vesistus alguses?

300. Mitu isikut jagavad teatava summa eneste vahel järgmiselt: esimene saab 100 mk. ja $^1/_5$ jäägist, teine 200 mk. ja $^1/_5$ uuest jäägist, kolmas 300 mk. ja $^1/_5$ kolmandast jäägist jne. Pärast selgus, et terve summa oli jagatud võrdseteks osadeks. Kui suur oli jagatav summa, mitu isikut võtsid jagamisest osa ja kui palju sai igaüks?

300. Mitu isikut jagavad teatava summa eneste vahel järgmiselt: esimene saab 50 mk. ja $^1/_6$ jäägist, teine 100 mk. ja $^1/_6$ uuest jäägist, kolmas 150 mk. ja $^1/_6$ kolmandast jäägist jne. Pärast selgus, et terve summa oli jagatud võrdseteks osadeks.

Kui suur oli jagatav summa, mitu isikut võtsid jagamisest osa ja kui palju sai igaüks?

Järgnevad ülesanded erinevad eelmistest selle poolest, et neis esinevad suurused on tähtedega avaldatud, mitte numbritega. Nende ülesannete tõlkimine algebra keelde, s. o. võrrandite kokkuseadmine järgnevate ülesannete järele ei lähe eelmiste kokkuseadmisest millegi poolest lahku.

301. Kahe arvu summa on s, esimese ja teise arvu geomeetriline suhe aga q. Leida need arvud.

301. Kahe arvu vahe on d, kuna aga suurema ja väiksema arvu geomeetriline suhe on q. Leida need arvud.

302. Arv a jagada kolmeks osaks nõnda, et esimene osa oleks teisest suurem m võrra ja kolmandast vähem n korda.

302. Arv a jagada kolmeks osaks nõnda, et esimene osa oleks teisest vähem m võrra ja kolmandast suurem n korda.

303. Üks arv on teisest a korda vähem. Kui esimene arv liita m-ga ja teine n-ga, siis on esimene summa teisest summast b korda vähem. Leida need arvud.

303. Üks arv on teisest a korda vähem. Kui esimesest arvust lahutada m ja teisest n, siis on esimene vahe teisest vahest b korda suurem. Leida need arvud.

304. Murru lugeja on nimetajast a võrra vähem. Kui aga kummastki murru liikmest lahutada b, siis võrdub saadud murd murruga $\frac{m}{n}$. Leida murru liikmed.

304. Murru lugeja on nimetajast a võrra suurem. Kui aga kumbagi murru liiget liita b-ga, siis võrdub saadud murd murruga $\frac{m}{n}$. Leida murru liikmed.

305. Jagada arv a kolmeks osaks nõnda, et esimene osa oleks teisest osast p korda suurem ja kolmandast osast q korda vähem.

305. Jagada arv a kolmeks osaks nõnda, et esimene osa oleks teisest osast p korda vähem ja kolmandast osast q korda suurem.

306. Murru nimetaja on lugejast a korda suurem. Kui lugeja liita arvuga b ja nimetajast lahutada arv c, siis võrdub saadud murd murruga $\frac{k}{l}$. Leida murru liikmed.

306. Murru nimetaja on lugejast a korda vähem. Kui lugejast lahutada arv b ja nimetajaga liita arv c, siis saab murd, mis võrdub murruga $\frac{k}{l}$. Leida murru liikmed.

307. Jagada arv m kaheks osaks nõnda, et esimese osa ja a ja teise osa ja b jagatiste vahe võrduks r-ga.

307. Jagada arv m kaheks osaks nõnda, et esimese osa ja a ja teise osa ja b jagatiste summa võrduks s-ga.

308. Töömees saab iga tööpäeva eest a mk., kuid iga viidetud päevaga kaotab ta teenitud summast b mk. tööandja kasuks. n päeva pärast saab töömees s mk. Kui palju oli tööpäevi ja mitu viidetud päeva?

308. Töömees saab iga tööpäeva eest a mk., kuid iga viidetud päeva eest maksab ta peremehele b mk. tagasi. n päeva pärast peab töömees peremehele s mk. juurde maksma. Kui palju oli tööpäevi ja mitu viidetud päeva?

309. Kahe arvu vahe on d. Vähendatavat lahutatavaga jagades saame jagatises q ja jäägis poole antud vahest. Leida need arvud.

309. Kahe arvu vahe on d. Vähendatavat lahutatavaga jagades saame jäägis r ja jagatises poole antud vahest. Leida need arvud.

310. Mõne arssina kalevi eest maksti a mk. Kui teda oleks ostetud c arss. võrra rohkem, siis oleks tulnud maksta b mk. Mitu arssinat kalevit osteti?

310. Mõne arssina kalevi eest maksti a mk. Kui teda oleks ostetud c arss. võrra vähem, siis oleks tulnud maksta b marka. Mitu arss. kalevit osteti?

311. Missugune arv suureneb m võrra, kui teda a-ga korrutada?

311. Missugune arv väheneb m võrra, kui teda a-ga jagada?

312. m marga eest maja müües saadi p protsenti kahju. Kui palju maksis maja müüjal enesel?

312. m marga eest maja müües saadi p protsenti kasu. Kui palju maksis maja müüjal enesel?

313. Kaks kullerit sõidavad ühel ajal välja A-st ja B-st ja sõidavad AB sihis edasi. Esimene sõidab tunnis a km, teine b km, A ja B vahe aga on d km. Millal ja kui kaugel A-st saab esimene kuller teise kätte?

313. Kaks kullerit sõidavad ühel ajal A-st ja B-st teineteisele vastu. Esimene sõidab tunnis a km, teine b km, A ja B vahe aga on d km. Millal ja kui kaugel A-st saavad nad kokku?

314. Sõiduriista esimese ratta ümbermõõt on a jalga, tagumise ratta ümbermõõt b jalga. Kui palju maad on tarvis ära sõita, et esimene ratas teeks n tiiru tagumisest rohkem?

314. Sõiduriista esimese ratta ümbermõõt on tagumise ratta omast a jalga väiksem. Kui palju maad tarvis ära sõita, et esimene ratas teeks m tiiru ja tagumine n tiiru?

315. Vesistusse on juhitud kaks toru, milledest esimene võib tühja vesistu täita a tunniga, teine aga b tunniga. Kui ruttu saab vesistu täis, kui torud ühel ajal töötavad?

315. Vesistusse on juhitud kaks toru, milledest esimene üksi võib tühja vesistu täita a tunniga, teine aga üksi täie vesistu tühjendada b tunniga. Kui ruttu saab vesistu täis, kui mõlemad torud ühel ajal avada?

316. Sõiduriista tagumise ratta ümbermõõt on sama sõiduriista esimese ratta ümbermõõdust a korda suurem. Sõideti ära m jalga maad ja selle maa peal tegi esimene ratas k võrra rohkem tiirusid kui tagumine ratas. Leida kummagi ratta ümbermõõt ja kummagi ratta tiirude arv.

316. Sõiduriista esimese ratta ümbermõõt on sama sõiduriista tagumise ratta ümbermõõdust a jala võrra vähem. Sõideti ära m jalga maad ja selle maa peal tegi tagumine ratas k korda vähem tiirusid kui esimene ratas. Leida kummagi ratta ümbermõõt ja kummagi ratta tiirude arv.

317. Linna elanikkude arv tõuseb iga aasta p protsendi võrra, võrreldes eelmise aasta elanikkude arvuga. Praegu on selles linnas m elanikku. Mitu elanikku oli seal 3 aasta eest?

317. Linna elanikkude arv alaneb iga aasta p protsendi võrra, võrreldes eelmise aasta elanikkude arvuga. Praegu elab selles linnas m elanikku. Mitu elanikku oli seal 3 aasta eest?

318. Kaks töömeest lõpetavad töö üheskoos töötades a tunni jooksul. Esimene töötab h korda kiiremini kui teine. Kui pika aja sees lõpetab kumbki töömees üksinda töötades töö?

318. Kaks töömeest lõpetavad töö üheskoos töötades a tunni jooksul. Esimene töötab h korda aeglasemalt kui teine. Kui pika aja sees lõpetab kumbki töömees üksinda töötades töö?

319. Aerutades päri vett jõuab paadimees t tunni jooksul n meetrit edasi; vastu vett aerutades tarvitab ta aga sama maa ärasõudmiseks u tunni võrra rohkem aega. Leida vee jooksu kiirus tunnis.

319. Aerutades vastu vett jõuab paadimees t tunnis n meetrit edasi; päri vett aerutades tarvitab ta aga sama maa ärasõudmiseks u tunni võrra vähem aega. Leida vee jooksu kiirus tunnis.

320. Keha A liikumise kiirus on v meetrit sekundis. Missuguse kiirusega peab liikuma teine keha B, mis samast kohast t sekundit varemini liikuma hakkas, et keha A ta kätte saaks u sekundi pärast peale enese liikumise algust?

320. Keha A liikumise kiirus on v meetrit sekundis. Missuguse kiirusega peab liikuma teine keha B, mis samast kohast t sekundit hiljemini liikuma hakkas, et ta keha A kätte saaks u sekundi pärast peale enese liikumise algust?

321. Kaht sorti aineist, a mk. ja b mk. nael, segati d naela segu. Müües seda segu m mk. nael saadakse s mk. kahju. Mitu naela kummastki sordist võeti seguks?

321. Kaht sorti aineist, a mk. ja b mk. nael, segati d naela segu. Müües seda segu m mk. nael saadakse s mk. kasu. Mitu naela kummastki sordist võeti seguks?

322. m-pangelisse vesistusse on juhitud 2 toru. Esimese toru kaudu jookseb tunnis vesistusse a pange vett, teise kaudu jookseb täidetud vesistu b tunni jooksul tühjaks. Mitme tunni vältusel saab tühi vesistu täis, kui avada mõlemad torud korraga?

322. m-pangelisse vesistusse on juhitud 2 toru. Esimene neist täidab tühja vesistu a tunni jooksul, kuna aga teise kaudu tunnis b pange vett välja jookseb. Mitme tunni vältusel täitub tühi vesistu, kui avada mõlemad torud korraga?

323. Jagada arv a kolmeks osaks nõnda, et esimene osa suhtuks teise nõnda kui $m:n$, aga teine kolmandasse kui $p:q$.

323. Jagada arv a kolmeks osaks nõnda, et teine osa suhtuks esimesse nõnda kui $m:n$ ja kolmas teise nõnda kui $p:q$.

324. Jõe kaldal asuvatest kohtadest A ja B, millede vahemaa on n meetrit, ujuvad teineteisele vastu kaks samajõuliselt juhitavat paati. Esimene paat, mis sõitis päri vett, sõidab kõik maa AB ära t tunniga; teine, vastu vett ujuv paat tarvitab sama maa sõitmiseks u tunni võrra rohkem aega. Leida vee jooksu kiirus tunnis.

324. Jõe kaldal asuvatest kohtadest A ja B, millede vahemaa on n meetrit, ujuvad teineteisele vastu kaks samajõuliselt juhitavat paati. Vastu vett ujuv paat sõidab kõik maa AB t tunniga ära; päri vett ujuv paat tarvitab sama maa sõitmiseks u tunni võrra vähem aega. Leida vee jooksu kiirus tunnis.

325. Leida kolme isiku kapitalid, teades, et esimesel ja teisel kokku on m mk., teisel ja kolmandal kokku n mk. ja et esimese kapital on p korda vähem kui kolmanda kapital.

325. Leida kolme isiku kapitalid teades, et esimesel ja teisel kokku on m mk., teisel ja kolmandal kokku on n mk. ja et esimese kapital on teise kapitalist p korda suurem.

326. Kaks keha liiguvad kahest teineteisest d meetri kaugusel olevast kohast teineteisele vastu. Esimene neist liigub v-meetrilise kiirusega sekundis. Missuguse kiirusega peab liikuma teine keha, kui ta hakkas liikuma h sekundit esimesest hiljemini ja kui ta n sekundi pärast peale enese liikumise algust peab esimesega kokku puutuma?

326. Kaks keha liiguvad kahest teineteisest d meetri kaugusel olevast kohast teineteisele vastu. Esimene neist liikus

v-meetrilise kiirusega sekundis. Missuguse kiirusega peab liikuma teine keha, kui ta hakkas liikuma h sekundit esimesest varemini ja kui ta n sekundi pärast peale enese liikumise algust peab esimesega kokku puutuma?

327. Veksel, mis oodustati äriliselt $p\,^0/_0$-ga n aastat enne tähtaega, annab ooduse, mis a marga võrra suurem kui sama veksli matemaatiline oodus $p\,^0/_0$-ga n aastat enne tähtaega. Leida veksli valuut.

327. $p\,^0/_0$-ga n aastat enne tähtaega äriliselt oodustatud veksel maksab m mk. vähem kui sama veksel $p\,^0/_0$-ga n aastat enne tähtaega matemaatiliselt oodustatult. Missuguse summa peale oli veksel antud?

328. Kaks kullerit sõidavad kohtadest A ja B, millede vahemaa d km, teineteisele vastu; esimene sõidab tunnis u km, teine v km ja esimene sõitis A-st h tundi varemini välja kui teine B-st. Millal ja kus nad kohtuvad?

328. Kaks kullerit sõidavad kohtadest A ja B, millede vahemaa d km, ühes sihis, kusjuures esimene u km ja sõidab teine v km tunnis. Esimene neist sõitis A-st h tundi varemini välja kui teine B-st. Millal ja kus kohtab esimene teist?

329. Jagada arv a kolmeks osaks nõnda, et kui esimest osa liita m-ga, teisest esmalt lahutada m, saadus korrutada n-ga ja kolmandat jagada n-ga, siis saadused on võrdsed.

329. Jagada arv a kolmeks osaks nõnda, et kui esimesest osast lahutada m, teisega esmalt liita m, saadus korrutada n-ga ja kolmandat jagada n-ga, siis saadused on võrdsed.

330. Vesistusse on juhitud kolm toru A, B ja C. A ja C kaudu jookseb vesi sisse, B kaudu välja. Kui ühel ajal avada torud A ja B, siis saab vesistu m tunni jooksul täis, avame aga A ja C, siis n tunni jooksul, ehk avame B ja C, siis p tunni jooksul. Kui pika aja pärast saab vesistu täis, kui avada korraga kõik torud?

330. Vesistusse on juhitud kolm toru A, B ja C. A kaudu jookseb vesi sisse, B ja C kaudu välja. Kui avada torud A ja B, siis saab vesistu täis m tunni pärast, avame aga torud A ja

C, siis täitub vesistu n tunni pärast, ehk avades torud B ja C võime täidetud vesistu p tunni jooksul tühjendada. Kui pika aja pärast saab täidetud vesistu tühjaks, kui avada kõik kolm toru korraga?

§ 11. Vôrrandsüsteemide lahendamine.

Olgu antud mingisugune esimese astme võrrand kahe tundmatuga, näiteks $\frac{3(x-1)}{4} - 2y = \frac{y-5}{6}$. Sellekohaste juhiste põhjal võime temale järgneva lihtkuju anda:

$$\frac{\overset{3}{\smile}\;\;3x-3}{4} - \overset{12}{\smile}\;2y = \frac{\overset{2}{\smile}\;\;y-5}{6};$$
$$9x - 9 - 24y = 2y - 10;$$
$$9x - 24y - 2y = -10 + 9;$$
$$9x - 26y = -1 \text{ või } 26y - 9x = 1.$$

Ettevõetud muutuste lõpul saadud võrrand $26y - 9x = 1$ või tema eelmine $9x - 26y = -1$ moodustavad kahe tundmatuga esimese astme võrrandi n o r m a a l k u j u. Nagu näha, on normaalkujus kolm liiget: pahemal pool kaks liiget, milledest üks ühe (x) ja teine teise (y) tundmatu sisaldab, ja paremal pool ainus vaba liige (-1 või 1); vaba liige võrdub sagedasti nulliga, näiteks: $3x - 4y = 0$. Tähendades kordajaid tähtede a ja b kaudu ja vaba liiget c kaudu, saame kahe tundmatuga esimese astme võrrandi ü l d - n o r m a a l k u j u $ax + by = c$. Säärast kuju võib anda igale kahe tundmatuga esimese astme võrrandile.

Püüame lahendada mingisuguse kahe tundmatuga esimese astme võrrandi, näiteks: $2x + 3y = 11$. Andes x-i avalduses $x = \frac{11-3y}{2}$ seisvale y-le väärtused: $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$ leiame vastavalt: $x = 4, 2\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

Nagu näeme, on antud võrrandil $2x + 3y = 11$ lõpmata palju juurtepaare (1 ja 4; 2 ja $2\frac{1}{2}$; 3 ja 1; 4 ja $-\frac{1}{2}$; . . .), s. o. ü k s v õ r r a n d k a h e t u n d m a t u g a o n m ä ä r a m a t u.

Et lahendada kahe tundmatuga esimese astme võrrandit, selleks on tarvis võtta kaks isesugust, kuid samaväärset (ekvivalentset), samu tundmatuid sisaldavat esimese astme võrrandit.

Olgu antud lahendada kaks isesugust, kuid samaväärset kahe tundmatuga esimese astme võrrandit:

$$2x+5y=25 \text{ ja } 3x-2y=9$$

s. o. leida x ja y niisugused väärtused, mis samal ajal rahuldaksid mõlemaid võrrandeid. Säärasel korral moodustavad antud kaks võrrandit kahe esimese astme võrrandsüsteemi ja x ja y otsitavad väärtused on võrrandsüsteemi juured. Võrrandsüsteemi märgina tarvitatakse sagedasti märki: $\{$, nii et ülemalantud süsteemi võiksime üles tähendada järgmiselt:

$$\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 3x-2y=9. \end{cases}$$

Võrrandsüsteeme lahendatakse mitmel viisil. Enne lahendamist tulevad süsteemis esinevad võrrandid normaalseteks teha.

Liitmise või lahutamise meetod. Antud on võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 3x-2y=9, \end{cases}$$

mille lahendamise järgmiselt rakendame:

$$\left\{\begin{array}{l|l|r} 2x+5y=25 & .\,3 & 6x+15y=75 \\ 3x-2y=9 & .\,2 & \underline{{}^{-}6x\pm\ 4y\mp18} \\ & & 19y=57 \\ & & y=3 \end{array}\right.$$

Asetades ühte võrrandisse (näiteks teise) y asemele tema väärtuse, saame:

$$3x-6=9;\ 3x=15;\ x=5.$$

Nõnda on antud võrrandsüsteemi juured: $x=5$ ja $y=3$.

Asemelepanemise meetod. Avaldame ülemalantud võrrandsüsteemi ühest võrrandist (näit. esimesest) mingisuguse tundmatu (näit. x) teise tundmatu (y) kaudu: $x=\frac{25-5y}{2}$. Asetades teise võrrandisse x asemele tema avalduse, saame:

$$3\left(\frac{25-5y}{2}\right)-2y=9;$$
$$75-15y-4y=18;$$
$$-19y=-57;$$
$$19y=57;$$
$$y=3.$$

Et üks tundmatu (y) leitud, võime ükskõik kummast võrrandist leida ka teise tundmatu (x); leiame ta näit. teisest võrrandist:

$$3x-6=9;\ 3x=15;\ x=5.$$

Võrrandsüsteemi juured on endiselt: $x=5$ ja $y=3$.

Võrdlusmeetod seisab selles, et võrreldakse ühe ja sama tundmatu väärtust kummastki võrrandist. Endist süsteemi

$$\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$$

lahendades avaldame näit. x kummastki võrrandist y kaudu:

$$x=\frac{25-5y}{2};\ x=\frac{9+2y}{3}.$$

Võrrandsüsteemi omaduse põhjal on ühe ja sama tundmatu väärtused mõlemates võrrandites võrdsed, sellepärast saame kahe võrrandi asemele ühe võrrandi

$$\frac{25-5y}{2}=\frac{9+2y}{3},$$

millest leiame y:

$$75-15y=18+4y;\ -19y=-57;\ 19y=57;\ y=3.$$

Pärast seda on kerge ka ükskõik kummast x-i avaldusest leida tema väärtus; näit.:

$$x=\frac{9+2y}{3};\quad x=\frac{9+6}{3}=\frac{15}{3}=5.$$

Ka selle meetodiga leidsime, nagu see teisiti ei või ollagi, endised juured: $x=5$ ja $y=3$.

Abiotsitavate meetod lihtsustab sagedasti võrrandite lahendamist. Olgu antud võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \frac{39}{3x+2y}+\frac{24}{2x+3y}=5 \\ \frac{65}{3x+2y}-\frac{36}{2x+3y}=2 \end{cases}$$

Võtame tarvitusele abiotsitavad a ja b. Selleks oletame, et:

$$\frac{1}{3x+2y}=a; \quad \frac{1}{2x+3y}=b$$

Võime kirjutada süsteemi:

$$\begin{cases} 39a+24b=5 \\ 65a-36b=2, \end{cases}$$

millest leiame, et $a=\frac{1}{13}$ ja $b=\frac{1}{12}$. Pannes a ja b asemele nende väärtused saame uue süsteemi:

$$\begin{cases} \frac{1}{3x+2y}=\frac{1}{13} \\ \frac{1}{2x+3y}=\frac{1}{12} \end{cases} \text{ ehk: } \begin{cases} 3x+2y=13 \\ 2x=3y=12 \end{cases}$$

Lahendades viimase süsteemi leiamegi juured:

$$x=3 \text{ ja } y=2.$$

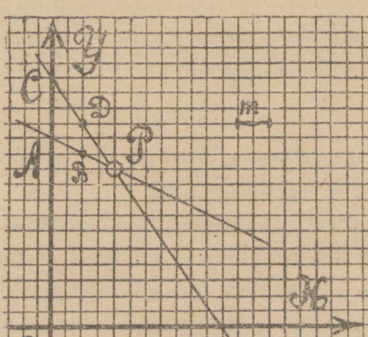
Graafiline meetod.

Olgu antud järgmine võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} x+2y=12 \\ 3x+2y=16 \end{cases}$$

Määrame kummastki võrrandist y: $y=\frac{12-x}{2}$; $\quad y=\frac{16-3x}{2}$

Niiviisi saame kaks funktsiooni, mis graafiliselt tuleb lahendada. Esimest funktsiooni kujutav sirgjoon peab kulgema punktid A $(0;6)$ ja B $(1;5{,}5)$ ning teist funktsiooni kujutav sirgjoon punktid C $(0;8)$ ja D $(1;6{,}5)$.

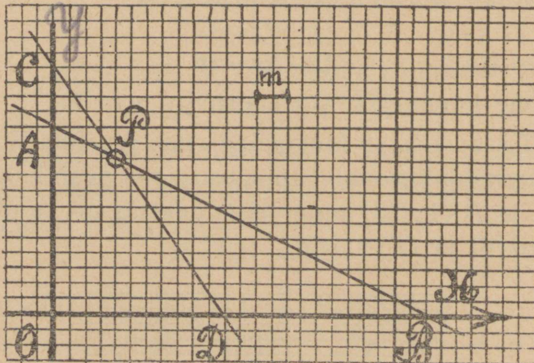


8. joon.

Saadud funktsioone kujutavaid jooni vaadeldes näeme, et need lõikuvad ühes punktis P. Tuleb ainult punkti P koordinaadid määrata ja käes ongi meil antud võrrandsüsteemi juured: $x=2$ ja $y=5$.

Sama võrrandsüsteemi võib lahendada, ilma kummastki võrrandist y määramata. Antud võrrandeid võib vaadata kui funktsioone, kus y on ilmutamata kujus. Seesuguseid funktsioone nimetatakse ilmutamata funktsioonideks.

Et ilmutamata funktsiooni graafiliselt kujutada, selleks tuleb kummastki funktsioonist leida y väärtus, kui $x=0$, ja x väärtus, kui $y=0$. Saame: 1) $x=0$, $y=6$ ja $x=12$, $y=0$ ja 2) $x=0$, $y=8$ ja $x=5^1/_3$, $y=0$. Esimest ilmutamata funktsiooni kujutav joon peab kulgema punktid A (0; 6) ja B (12; 0) ning teist kujutav joon punktid C (0; 8) ja D ($5^1/_3$; 0).



9. joonis*).

Funktsioone kujutavate joonte lõikepunkti P koordinaadid ongi antud võrrandsüsteemi juured.

Juhis. Et esimese astme võrrandsüsteemi graafiliselt lahendada, selleks võib kummastki võrrandist y määrata, s. o. ilmutatud funktsioonid leida ehk antud võrrandid võtta ilmutamata funktsioonideks. Saadud funktsioonid tulevad graafiliselt kujutada ja funktsioone kujutavate joonte lõikepunkti koordinaadid määrata. Saadud lõikepunkti koordinaadid ongi võrrandsüsteemi juured.

*) Püsttelje juures puudub Y, mis on eksikombel välja jäänud.

Lõpuks olgu tähendatud, et võivad olla võrrandsüsteemid, mida on võimatu lahendada.

331. $x+y=50,\ x-y=20$ **332.** $x+5y=47,\ x+y=15$

333. $3x+8y=19,\ 3x-y=1$ **334.** $x+5y=35,\ 3x+2y=27$

335. $3x+8y=59,\ 6x+5y=107$ **336.** $14x-9y=24,\ 7x-2y=17$

337. $5y+4x=13,\ 3y+5x=13$ **338.** $3x-5y=13,\ 2x+7y=81$

339. $2x-7y=8,\ 4y-9x=19$ **340.** $3y-4x=1,\ 3x+4y=18$

341. $6x-4y=5,\ 8x-3y=2$ **342.** $12x+15y=8,\ 16x+9y=7$

343. $5x+14y=24,\ 19x-21y=17$

344. $8x-33y=19,\ 12x+55y=19$

345. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7,\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{4}=1$ **346.** $\frac{7x}{6}+\frac{5y}{3}=34,\ \frac{7x}{8}+\frac{y}{8}=12$

347. $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=3\frac{1}{2},\ \frac{x}{3}-\frac{y}{8}=\frac{1}{2}$ **348.** $\frac{x+y}{3}+x=15,\ y-\frac{y-x}{5}=6$

349. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1,\ \frac{2x-1}{2}-\frac{3y-1}{3}=\frac{5}{6}$

350. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8,\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$

351. $\frac{3x-1}{5}+3y-4=15,\ \frac{3y-5}{6}+2x-8=7\frac{2}{3}$

352. $\frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5},\ 8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$

353. $\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5,\ \frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}=18-5x$

354. $x+2-\frac{5x+3y}{7}=y-\frac{9y+11}{14},\ y+2-\frac{4y-3x}{2}=x-\frac{2y-5}{5}$

355. $\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5},\ \frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5}$ **356.** $\frac{5}{x+4}=\frac{2}{y-1},\ \frac{3}{x+2}=\frac{4}{y+1}$

357. $x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2},\ 3x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3}$ **358.** $\frac{8}{x}+3y=19,\ \frac{12}{x}-y=1$

359. $\frac{x}{y-2}=\frac{x+8}{y+1},\ 5x-6y=10$ **360.** $\frac{x+1}{y-1}-\frac{x-1}{y}=\frac{6}{y},\ x-y=1$

361. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{11}{30},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$ **362.** $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=10,\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=20$

363. $x-\frac{2y-x}{23-x}=\frac{2x-19}{2},\ 11x-6y=111$

364. $\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=3,\ \frac{15}{x}-\frac{4}{y}=4$

365. $\frac{2y+3}{4}=\frac{7+2y}{4}-\frac{3y+5x}{6(2y-3)},\ 11x-5y=64$

366. $\frac{5}{3x}+\frac{2}{5y}=7,\ \frac{7}{6x}-\frac{1}{10y}=3$

367. $\frac{4x+7}{3}+\frac{5x-4y}{2x+1}=\frac{17+8x}{6},\ 6x-5y=9$

368. $\frac{18}{x-y}+\frac{20}{x+y}=5,\ \frac{24}{x-y}-\frac{30}{x+y}=1$

369. $\frac{2(5-11x)}{11(x-1)}+\frac{11-7y}{3-y}=5,\ 25x+9y=9$

370. $\frac{18}{3x-2y}+\frac{11}{2x-3y}=13,\ \frac{27}{3x+2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$

371. $x+y=a,\ x-y=2b$

372. $2x-3y=5b-a,\ 3x-2y=a+5b$

373. $ax+by=1,\ a^2x+b^2y=a$ **374.** $ax+by=c,\ bx-ay=d$

375. $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=b+d,\ \frac{x}{b}+\frac{y}{d}=a+c$ **376.** $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{5a}+\frac{y}{8b}=\frac{3}{2}$

377. $ax-by=a^2+b^2,\ bx+ay=a^2+b^2$

378. $\frac{x-a}{b}+\frac{y-b}{a}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ **379.** $x+y=1,\ bcx+acy=ab$

380. $\frac{bx+1}{a+y}=1,\ \frac{x+y}{x-y}=\frac{a+b}{a-b}$ **381.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a,\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=b$

382. $\frac{dy}{bx}=\frac{a}{c},\ bx+dy=a+c$ **383.** $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c,\ \frac{b}{x}+\frac{a}{y}=c$

384. $bx-dy=a-c,\ \frac{x-1}{y-1}=\frac{d(a-b)}{b(c-d)}$

385. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c,\ \frac{c}{x}-\frac{d}{y}=e$

386. $c(bx+ay)=axy,\ c(ax-by)=bxy$

387. $(x+a)(y-b)+2c=(x-a)(y+b),\ (x+b)(y-a)=(x+a)(y-b)$

388. $a(x+y)-b(x-y)=2a^2,\ (a^2-b^2)(x-y)=4a^2b$

389. $(2a+b)x-(2a-b)y=8ab,\ (2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2$

390. $\frac{x}{y}=\frac{c+d-\frac{cd}{c+d}}{c-d+\frac{cd}{c-d}},\ x+y=2c^3$

Kolme tundmatuga esimese astme võrrandi üldnormaal-kuju on $ax+by+cz=d$, kus a, b, c ja d on täisarvud. Igale kolme tundmatuga võrrandile võib säärase kuju anda.

Et kolm tundmatut leida, peab ka kolm võrrandit olema, sest üks võrrand kolme tundmatuga või kaks võrrandit kolme tundmatuga on määramatud.

Olgu antud kolme tundmatuga esimese astme võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} 5x+2y-6z=-35 \\ 7x-3y+4z=56 \\ 6x+9y+5z=49, \end{cases}$$

mille võime lahendada tuttavate meetodite abil. Olgu meetod missugune tahes, eesmärk on ikka üks: et kolme tundmatuga võrrandsüsteemi asemele leida kahe tundmatuga võrrandsüsteem.

Liitmise või lahutamise meetod. Kõrvaldame näit. süsteemi

$$\begin{cases} \text{I. } 5x+2y-6z=-35 \\ \text{II. } 7x-3y+4z=56 \\ \text{III. } 6x+9y+5z=49 \end{cases}$$

võrranditest mingisuguse tundmatu, näit. y:

$$\begin{array}{ll|l|l} \text{I.} & 5x+2y-6z=-35 & \cdot 3 & 15x+6y-18z=-105 \\ \text{II.} & 7x-3y+4z=56 & \cdot 2 & 14x-6y+8z=112 \\ \hline & & A. & 29x \quad - \quad 10z=7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l|l} \text{II.} & 7x-3y+4z=56 & \cdot 3 & 21x-9y+12z=168 \\ \text{III.} & 6x+9y+5z=49 & \cdot 1 & 6x+9y+5z=49 \\ \hline & & B. & 27x \quad +17z=217 \end{array}$$

Ühendades võrrandid A ja B saame kahe tundmatuga esimese astme võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} A.\ 29x-10z=7 \\ B.\ 27x+17z=217, \end{cases}$$

mille lahendamist tunneme. Siit saadud juured: $x=3$ ja $z=8$ asetame mingisugusesse antud võrrandisse, näit. III, ja leiame ka y:

$$18+9y+40=49;\ y=-1.$$

Nõnda on antud võrrandsüsteemi juured: $x=3$, $y=-1$ ja $z=8$.

Asemelepanemise meetod. Endises võrrandsüsteemis määrame mõnest võrrandist (näit. I) mingisuguse tundmatu, näit. x-i, teistest tundmatutest olenevalt: $x=\frac{-35-2y+6z}{5}$ ja asetame saadud avalduse II ja III võrrandisse x asemele, saame:

$$\text{II. } 7\left(\frac{-35-2yz+6}{5}\right)-3y+4z=56$$

$$\text{III. } 6\left(\frac{-35-2y+6z}{5}\right)+9y+5z=49.$$

Saadud süsteem on kahe tundmatuga; tema lahendamine on meile juba tuttav; $y=-1$ ja $z=8$. x jaoks on aga juba avaldus olemas:

$$x=\frac{-35-2y+6z}{5};\quad x=3.$$

Nõnda on juured endiselt: $x=3$, $y=-1$ ja $z=8$.

Võrdlusmeetodis määrame antud süsteemi igast võrrandist ühe ja sama tundmatu, näit. x, saame:

$$\text{I.}\quad x=\frac{-35-2y+6z}{5}$$

$$\text{II.}\quad x=\frac{56+3y-4z}{7}$$

$$\text{III.}\quad x=\frac{49-9y-5z}{6}$$

Ühendades x-i mingisuguse avalduse tema ülejäänud kahe avaldusega, saame jälle võrrandsüsteemi kahe tundmatuga:

$$\begin{cases} A.\quad \dfrac{-35-2y+6z}{5}=\dfrac{56+3y-4z}{7} \\ B.\quad \dfrac{56+3y-4z}{7}=\dfrac{49-9y-5z}{6} \end{cases}$$

Viimase süsteemi lahendamisel leiame, et $y=-1$ ja $z=8$, kuna aga x jaoks on kolm avaldust. Asetades ühte neist y ja z väärtused, leiame:

$$\text{III.}\quad x=\frac{49-9y-5z}{6};\quad x=3.$$

On olemas erijuhused, mis kolme tundmatuga võrrandsüsteemide lahendamise palju kergemaks teevad. Iseäranis lüheneb süsteemi lahendus, kui üks või rohkem sellesse süsteemi kuuluvat võrrandit on ebatäielikud, s. o. kui nad sisaldavad enestes kas kaks või koguni ühe tundmatu, aga mitte kõiki kolme.

391. $x+y=5,\ y+z=7,\ x+z=6$

392. $2x+y=5,\ x+3z=16,\ 5y-z=10$

393. $x+y+z=36,\ 2x-3z=-17,\ 6y-5z=7$

394. $x+y-z=17,\ x+z-y=13,\ y+z-x=7$

395. $x+y+z=6,\ x+2y+3z=10,\ 2x+3y-4z=8$

396. $x+2y+z=4,\ 3x-5y+3z=1,\ 2x+7y-z=8$

397. $x-2y+3z=6,\ 2x+3y-4z=20,\ 3x-2y-5z=6$

398. $2x-4y+9z=28,\ 7x+3y-6z=-1,\ 7x+9y-9z=5$

399. $12x-9y+5z=22,\ 8x+6y+7z=23,\ 4x-12y-3z=3$

400. $7x+2y+3z=15,\ 5x-3y+2z=15,\ 10x-11y+5z=36$

401. $x+6={}^7/_3y,\ y+1={}^7/_2z,\ z+8={}^5/_4x$

402. ${}^1/_2x+{}^1/_3y=12,\ {}^1/_5z-{}^1/_6y=4,\ {}^1/_{12}x+{}^1/_7z=6$

403. $x+y+z=36,\ x:z=3:5,\ y:z=12:15$

404. $2x+3y-z=156,\ x:y=2:5,\ x:z=2:7$

405. $0{,}1x+0{,}2y+0{,}3z=14,\quad 0{,}4x+0{,}5y+0{,}6z=32,\quad 0{,}7x-0{,}8y+$
$+0{,}9z=18$

406. $0{,}25x+0{,}125y=3{,}25,\ 0{,}9z-0{,}3y=7{,}5,\ 1{,}4x+1{,}2z=25{,}8$

407. $1{,}5x-2{,}5y+2z=2{,}5,\ 3{,}5x+y-1{,}5z=1,\ 2x+1{,}5y-0{,}5z=3{,}5$

408. $0{,}25x-0{,}375y=2{,}25,\ 2y+0{,}25z=-3,\ 0{,}1x-0{,}6y=1{,}8$

409. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=23,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=29,\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{}z=28$

410. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=62,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=47,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=38$

411. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{2}{3},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2\frac{2}{15},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\frac{2}{15}$

412. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{5}{z}=-\frac{1}{24},\ \frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{20},\ \frac{2}{3x}-\frac{1}{z}=\frac{13}{45}$

413. $xz=x+z,\ 5xy=6(x+y),\ 5yz=6(y+z)$

414. $2xz=3(x-z),\ 5xy=6(x-y),\ 17yz=6(z+y)$

415. $xy=12,\ yz=24,\ xz=18$

416. $xz=4,\ (7-z)y=9,\ yz=12$

417. $2x+\frac{3}{y}-\frac{4}{z}=4,\ \frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{17}{12},\ x+\frac{4}{y}=3\frac{1}{3}$

418. $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=\frac{1}{20},\ \frac{xz}{2x-3z}=15,\ \frac{yz}{4y-5x}=12$

419. $\frac{15}{x+y}-\frac{4}{x-2z}=\frac{1}{2},\ \frac{6}{x+y}+\frac{5}{y+3z}=2,\ \frac{10}{y+3z}-\frac{7}{x-2z}=-\frac{3}{2}$

420. $\frac{12}{2x+3y}-\frac{7{,}5}{3x+4z}=1,\ \frac{30}{3x+4z}+\frac{37}{5y+9z}=3,\ \frac{222}{5y+9z}-\frac{8}{2x+3y}=5$

421. $x+y=a,\ x-z=b,\ y-z=c$

422. $x+y+z=a,\ x-y+z=b,\ x+y-z=c$

423. $ax+by=2c,\ cz+ax=2b,\ by+cz=2a$

424. $ax+by-cz=b^2, bx-cy+az=a^2,\ cx+ay-bz=c^2$

425. $a^2x+b^2y+c^2z=3abc,\ abx-bcy=bc^2-ac^2,\ bcy-acz=ac^2-$
$-a^2b.$

426. $ay+bx=c,\ cx+az=b,\ bz+cy=a.$

427. $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0,\ \ cx-ay=b(c-a),\ \ bz-cx=$ $=a(b-c)$

428. $x+ay+a^2z=-a^3,\ x+by+b^2z=-b^3,\ x+cy+c^2z=-c^3.$

429. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=c,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=b,\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=a.$

430. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1,\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1.$

Samade meetoditega, kui kahe ja kolme tundmatuga võrrandsüsteeme lahendatakse, lahendatakse ka nelja ja suurema hulga tundmatutega võrrandsüsteeme. Eesmärgiks jääb ikka ja alati, et antud võrrandsüsteemi asemele leida järgemööda niisugune võrrandsüsteem, milles eelmise süsteemiga võrreldes ühe võrrandi ja ühe tundmatu võrra vähem oleks kui eelmises võrrandsüsteemis. Et süsteem oleks lahendatav, on muidugi tingimuseks, et võrrandsüsteemis esineks nii mitu võrrandit, kui mitu tundmatut on seal.

Ka siin on üsna sagedasti erijuhuseid, mis võrrandsüsteemi harilikku lahenduskäiku lühendavad.

431. $x+2y=9,\ 3y+4z=20,\ 7z+u=17,\ 2u+5x=11.$

432. $4x-3y+2u=9,\ 2x+3z=16,\ 4u-2y=14,\ 3x+4u=26.$

433. $x+3y+10,\ y+3z=15,\ z+3u=10,\ u+3x=5.$

434. $x+y+z=6,\ y+z+u=9,\ z+u+x=8,\ u+x+y=7.$

435. $x+y+z+u=6,\ \ x-y+z-u=2,\ \ x+y-z+u=2,\ \ x-y+$ $+z+u=4.$

436. $2x-y+z+2u=8,\ 4x-2y+z-4u=-3,\ 5x-4y+3z-u=8$ $x+y+z+u=7.$

437. $x-2y+3z-u=5,\ \ \ y-2z+3u-x=0,\ \ \ z-2u+3x-y=0$ $u-2x+3y-z=5.$

438. $x+2y=8,\ \ y+3z=15,\ \ z+4u=24,\ \ u+5t=10,\ \ x+y+z+$ $+u+t=15.$

439. $2u-3v=3,\ \ v+2z=7,\ \ 3z+y=12,\ \ 2y-x=8,\ \ 5u-3x=18$

440. $2x-3y+z=5,\ 2u-3x+y=5,\ 5y-2z+3t=6,\ 4z-5t+u=6$ $2t-3u-4x=-17.$

§ 12. Ülesanded võrrandsüsteemide kokkuseadmiseks.

441. Kahe arvu summa on 47; kui esimest arvu jagada teisega, siis saadakse jagatises 2 ja jäägis 5. Leida need arvud.

441. Kahe arvu summa on 46; kui esimest arvu jagada teisega, siis saadakse jagatises 3 ja jäägis 2. Leida need arvud.

442. Kahes karbis on kokku 140 mk. raha. Kui esimesest karbist asetada teise karpi 15 mk., siis oleks kummaski karbis ühepalju raha. Kui palju raha on kummaski karbis?

442. Kahes karbis on kokku 300 mk. Kui teisest karbist asetada esimesesse 30 mk., siis oleks kummaski karbis ühepalju raha. Kui palju raha on kummaski karbis?

443. Kahes aamis on vett. Kui esimesest valada teise 6 pange, siis oleks kummaski ühepalju; kui aga valada teisest esimesesse 4 pange, siis saaks esimesesse vett 2 korda rohkem kui teise. Kui palju vett on kummaski aamis?

443. Kahes aamis on vett; kui esimesest valada teise 10 pange, siis oleks kummaski ühepalju; kui aga teisest aamist valada esimesesse 5 pange, siis saab esimesesse aami vett 3 korda rohkem kui teise. Kui palju vett on kummaski aamis?

444. Rahakotis on viie- ja kolmemargalised rahamärgid. Mitu rahamärki kummastki liigist on tarvis võtta, et ära tasuda 95-margaline võlg, tarvitades kokku ainult 25 rahamärki?

444. Rahakotis on viie- ja kolmemargalised rahamärgid. Mitu rahamärki kummastki liigist on tarvis võtta, et ära maksta 105 mk. võlga, tarvitades kokku ainult 27 rahamärki?

445. 270 marga eest osteti 2 meetrit üht ja 3 m teist sorti riiet; oleks ostetud 4 m üht ja 5 m teist sorti riiet, siis oleks tulnud maksta 490 mk. Kui palju maksab meeter kumbagi sorti riiet?

445. 310 marga eest osteti 2 meetrit üht ja 5 m teist sorti riiet; oleks ostetud 3 m üht ja 8 m teist sorti, siis oleks tulnud maksta 490 mk. Kui palju maksab meeter kumbagi sorti riiet?

446. Leida murd, mis muutub $^1/_2$, kui tema kummagi liikmega liita 3, ja mis muutub $^1/_3$, kui tema nimetajast lahutada 1.

446. Leida murd, mis muutub $^2/_3$, kui tema kummastki liikmest lahutada 3, ja mis muutub $^1/_2$, kui tema nimetajaga liita 2.

447. Leida kaks arvu tingimustel: kui esimest neist suurendada 3 võrra, siis on summa teisest arvust 3 korda suurem, aga kui teist arvu suurendada 2 võrra, siis on summa esimesest arvust 2 korda vähem.

447. Leida kaks arvu tingimustel: kui esimest neist suurendada 4 võrra, siis on summa teisest arvust 3 korda suurem, aga kui teist arvu suurendada 1 võrra, siis on summa esimesest arvust 2 korda vähem.

448. Leida arv, mille jagades 3-ga ja 5-ga saame jäägis vastavalt 2 ja 4, kusjuures saadud jagatistel on omadus, et kui esimest neist suurendada 1 võrra, siis summa on teisest 2 korda suurem.

448. Leida arv, mille jagades 4-ga ja 7-ga saame jäägis vastavalt 1 ja 2, kusjuures saadud jagatised on niisugused, et kui esimest neist suurendada 1 võrra, siis summa on teisest 2 korda suurem.

449. Kahekümnendise arvu ristsumma on 9. Kui selle arvu numbrid ümber paigutada, siis moodustab saadud arv $^4/_7$ otsitavast. Leida see arv.

449. Kahekümnendise arvu numbrite vahe võrdub 1. Kui selle arvu numbrid ümber paigutada, siis moodustab saadud arv $^5/_6$ otsitavast. Leida see arv.

450. Otsitav kahekümnendine arv on 21 korda tema kümneliste ja üheliste vahest suurem. Kui selle arvu numbrid ümber asetada ja saadud arvust lahutada 12, siis on leitud vahe otsitava arvu ristsummast 3 korda suurem. Leida see arv.

450. Otsitava kahekümnendine arv on tema üheliste ja kümneliste vahest 12 korda suurem. Kui selle arvu numbrid ümber asetada ja saadud arvuga liita 9, siis on leitud summa otsitava arvu ristsummast 8 korda suurem. Leida see arv.

451. Kellelgi on kaks hõbedast vaasi ja üks 900-margaline hõbedast kaas. Esimene vaas ühes kaanega maksab $1^1/_2$ korda rohkem kui teine vaas; teine vaas ühes kaanega maksab esimesest vaasist $1^1/_{12}$ korda rohkem. Kui palju maksab kumbki vaas?

451. Kellelgi on kaks hõbedast vaasi ja üks 800-margaline kaas. Esimene vaas ühes kaanega maksab 2 korda vähem kui teine vaas; teine vaas ühes kaanega maksab aga esimesest vaasist 3 korda rohkem. Leida kummagi vaasi hind.

452. Keegi palkas kaks teenijat tingimusega, et kumbki neist saab aastas 16 000 mk. raha, ülikonna ja paari saapaid. Esimene teenis 8 kuud ja sai teenistusest lahkudes 10 600 mk. raha ja ülikonna; teine teenis $9^1/_2$ kuud ja sai ära minnes paari saapaid ja 14 200 mk. raha. Kui kalliks hinnati ülikond ja saapad?

452. Keegi palkas kaks teenijat tingimusega, et kumbki neist saab aastas 15 000 mk. raha, ülikonna ja paari saapaid. Esimene neist lahkus teenistusest 9 kuu pärast ja sai teenistusarve õiendamisel 11 200 mk. raha ja ülikonna, kuna aga teine kõigest $6^2/_3$ kuud teenis ja sai lahkudes paari saapaid ja 9300 mk. raha. Kui kalliks hinnati ülikond ja saapad?

453. *A* ja *B* võlgnevad kumbki 1200 mk. *A* võiks oma võla ära maksta, kui *B* annaks temale $^3/_4$ oma rahast; *B* kustutaks oma võla, kui *A* laenaks temale $^8/_9$ oma rahast. Kui palju raha on kummalgi?

453. *A* võlgneb 1200 mk., *B* aga 2550 mk. *A* võiks oma võla ära maksta, kui *B* annaks temale $^1/_8$ oma rahast; *B* kustutaks oma võla, kui *A* annaks temale $^1/_6$ oma rahast. Kui palju raha on kummalgi?

454. Kellelgi oli 56 000 mk. raha; ta andis selle raha kahele isikule laenuks. Esimeselt saab ta 5%, teiselt $3^1/_2\%$ aastas. Üldine iga-aastane sissetulek on 2440 mk. Kui palju laenas ta kummalegi?

454. Kellelgi oli 150 000 marka raha; ta andis selle summa kahele isikule laenuks. Esimeselt saab ta 6%, teiselt 5% aastas. Üldine iga-aastane sissetulek on 8350 mk. Kui palju laenas ta kummalegi?

455. 3 naela suhkru ja 1 n. tee eest maksti 260 mk. Kui suhkru hind tõuseks 10% võrra, tee hind aga 25% võrra, siis tuleks sama ostangu eest maksta 316 mk. Kui palju maksab nael suhkrut ja nael teed?

455. 2 naela tee ja 5 n. suhkru eest maksti 420 mk. Kui tee hind tõuseks $12\frac{1}{2}$% võrra, suhkru hind aga 15% võrra, siis tuleks sama ostangu eest maksta 475 mk. Kui palju maksab nael teed ja nael suhkrut?

456. Kahes tünnis on vett. Et neis oleks ühepalju vett, tarvis valada esimesest teise niipalju kui seal (teises) oli, siis teisest esimesesse niipalju kui esimesesse üle jäi, ja lõpuks esimesest tünnist teise niipalju kui teise üle jäi. Siis on kummaski tünnis 64 pange vett. Kui palju vett oli kummaski tünnis esialgu?

456. Kahes tünnis on vett. Et neis oleks ühepalju vett, tarvis valada teisest tünnist esimesesse niipalju kui seal (esimeses) oli, siis esimesest teise niipalju, kui teise üle jäi, ja lõpuks teisest esimesesse niipalju, kui esimesesse üle jäi. Siis on kummaski tünnis 80 pange vett. Kui palju vett oli kummaski tünnis esialgu?

457. Kaks õnnemängijat *A* ja *B*, kes mängu olid lõpetanud, loevad oma raha ja leiavad, et *A* on võitnud poole sellest, mis oli *B*-l, ja et temale kogunes nõndaviisi 3 marga võrra rohkem kui *B* kolmekordne mängust ülejäänud summa. Mängimist jätkates võitis *B* 12 mk., ja siis oli tal raha 2 korda rohkem kui *A*-l üle jäi. Kui palju raha oli kummalgi mängu alul?

457. Kaks õnnemängijat *A* ja *B*, kes mängu olid lõpetanud, loevad oma raha ja leiavad, et *B* on võitnud poole sellest, mis oli *A*-l, ja et temale kogunes nõndaviisi 2 marga võrra rohkem kui *A* kolmekordne mängust ülejäänud summa. Mängimist jätkates võitis *A* 8 mk. ja siis oli temal raha 2 korda rohkem, kui *B*-l üle jäi. Kui palju raha oli kummalgi mängu alul?

458. *A*-l ja *B*-l oli mängu alul kokku 55 mk.; esimesel mängul kaotas *A* $\frac{1}{2}$ oma rahast, teisel mängul kaotas *B* $\frac{1}{3}$ rahast, mis tal oli esimese mängu lõpul; kolmandal mängul kaotas *A* $\frac{1}{5}$ rahast, mis tal oli teise mängu lõpul. Lõpuks selgus, et kumbki neist ei võitnud ega kaotanud. Kui palju raha oli kummalgi mängu alul?

458. *A*-l ja *B*-l oli mängu alul kokku 78 mk.; esimesel mängul kaotas *B* $^1/_2$ oma rahast, teisel mängul kaotas *A* $^2/_7$ summast, mis tal oli esimese mängu lõpul, kolmandal mängul kaotas *B* $^1/_{11}$ summast, mis tal oli teise mängu lõpul. Lõpuks selgus, et kumbki neist polnud võitnud ega kaotanud. Kui palju raha oli kummalgi mängu alul?

459. Kui raamatu leheküljel lühendada iga rida 3 tähe võrra ja pärast seda vähendada ridade arvu 2 võrra, siis väheneb tähtede arv sellel leheküljel 145 tähe võrra; kui sama lehekülje iga rea tähtede arvu suurendada 4 tähe võrra ja pärast seda suurendada ridade arvu 3 võrra, siis suureneb tähtede arv sellel leheküljel 224 tähe võrra. Mitu rida on leheküljel ja mitu tähte reas?

459. Kui raamatu leheküljel lühendada iga rida 3 tähe võrra ja pärast seda vähendada ridade arvu 5 rea võrra, siis väheneb tähtede arv sellel leheküljel 270 tähe võrra; kui aga igale reale juurde lisada 5 tähte ja peale selle ridade arvu suurendada 2 rea võrra, siis suureneb tähtede arv leheküljel 295 tähe võrra. Mitu rida on leheküljel ja mitu tähte reas?

460. Kui teekäija käiks tunnis 1 km võrra vähem, siis peaks ta 6 tunni võrra kauemini teel olema, et teatavasse kohta jõuda; käiks ta aga tunnis 2 km võrra rohkem, siis tarvitaks ta oma teekonna lõpetamiseks ainult $\frac{2}{3}$ ajast, mis ta samaks otstarbeks nüüd tarvitab. Leida käimise aeg ja kiirus.

460. Kui teekäija kõnniks tunnis 1 km võrra rohkem, siis tarvitaks ta oma teekonna lõpetamiseks $\frac{4}{5}$ ajast, mis ta samaks otstarbeks nüüd tarvitab; käiks ta aga tunnis 1 km võrra vähem, siis peaks ta 5 tunni võrra kauemini teel olema kui nüüd. Leida käimise aeg ja kiirus.

461. Kaks toru täidavad vesistu 16 tunniga. Kui 4 tunni jooksul töötaksid mõlemad torud, kuid seepeale suletaks esimene nendest, siis peaks teine toru üksinda veel 36 tundi töötama, et vesistut täita. Kui pika ajaga täidab kumbki toru üksinda töötades vesistu?

461. Kaks toru täidavad vesistu 15 tunniga. Kui 5 tunni jooskul töötaksid mõlemad torud, kuid seepeale suletaks teine toru, siia peaks esimene toru üksinda veel 40 tundi töötama, et vesistut täita. Mitme tunniga täidab kumbki toru üksikult vesistu?

462. Hobusekasvanduse omanik arvas, et kui ta müüb 6 hobust ära, siis jätkub ostetud kaeru 10 päeva võrra pikemaks ajaks; ostab ta aga 18 hobust juurde, siis lõpeb kaera-tagavara 15 päeva varemini. Mitu hobust on hobusekasvanduses ja mitmeks päevaks on kaeru ostetud?

462. Hobusekasvanduse omanik arvas, et kui ta müüb ära 15 hobust, siis jätkub ostetud kaeru 20 päeva võrra pikemaks ajaks; ostab ta aga 20 hobust juurde, siis lõpeb kaera-tagavara 10 päeva varemini. Mitu hobust on ja mitmeks päevaks oli kaeru ostetud?

463. Kumbki kahest teekäijast peab 1440 km ära käima, kusjuures nad ühel ajal teele lähevad. Teine lõpetab oma teekonna 20 päeva varemini kui esimene. Kui ajaga, mille kestusel esimene ära käib 56 km, liita aeg, mille kestusel teine käib ära 96 km, siis saadakse 5 päeva. Mitu km käib keskmiselt kumbki teekäija päevas?

463. Kumbki kahest teekäijast peab, minnes ühel ajal teele, 560 km ära käima. Esimene lõpetab teekonna 6 päeva varemini kui teine. Kui ajaga, mille kestusel esimene ära käib 105 km, liita aeg, mille kestusel teine ära käib 100 km, siis saadakse 4 päeva. Mitu km käib kumbki teekäija päevas?

464. Leida kapital ja tema protsent teades, et otsitav kapital ühes protsentidega muutus 8 kuu pärast 2976 margaks, aga 15 kuu pärast 3060 margaks.

464. Leida kapital ja tema protsent teades, et otsitav kapital ühes protsentidega muutus 14 kuu pärast 3368 margaks, aga 8 kuu pärast 3296 margaks.

465. Aurik sõitis 13 tunni jooksul peatamata 140 km pärivett ja 24 km vastu vett; teisel korral sõitis ta 11 tunni jooksul

120 km päri ja 20 km vastu vett. Mitu km sõidab aurik seisvas vees ja kui suure kiirusega jookseb vesi?

465. Aurik sõitis 11 tunni jooksul peatamata 168 km päri vett ja 48 km vastu vett; teisel korral sõitis ta 11 tunni jooksul 144 km päri ja 60 km vastu vett. Mitu km sõidab aurik seisvas vees ja kui suure kiirusega jookseb vesi?

466. Kolm isikut *A*, *B* ja *C* andsid oma kapitalid kasu kandma. *B*-l on 1000 mk. rohkem kui *A*-l, *C*-l aga 1500 mk. rohkem kui *A*-l; *B* saab ühe, *C* kahe protsendi võrra rohkem kui *A*; *B* aastane sissetulek kapitalist on 80 marga võrra, *C* aastane sissetulek aga 150 marga võrra suurem kui *A* aastane sissetulek. Leida need kolm kapitali ja nende protsendi määr.

466. Kolm isikut *A*, *B* ja *C* andsid oma kapitalid kasu kandma. *A*-l on 1200 marga võrra, *C*-l 2000 marga võrra rohkem kui *B*-l; *A* saab ühe, aga *C* kolme protsendi võrra rohkem kui *B*; *A* aastane kasuraha on 112 marga võrra, *C* aastane kasuraha aga 280 marga võrra suurem kui B aastane kasuraha. Leida need kolm kapitali ja nende protsendi määr.

467. Kullasepal on kaks kulla ja hõbeda sulatist. Ühes sulatises suhtuvad nende metallide hulgad nõnda kui 2 : 3, teises nõnda kui 3 : 7. Kui palju peab võtma kummastki sulatisest, et saaks 8 naela uut sulatist, milles kulla ja hõbeda hulk suhtuksid nõnda kui 5 : 11?

467. Kullasepal on kaks kulla ja hõbeda sulatist; ühes sulatises suhtuvad nende metallide hulgad nõnda kui 2 : 3, teises nõnda kui 3 : 5. Kui palju peab võtma kummastki sulatisest, et saada 13 naela uut sulatist, milles kulla ja hõbeda hulk suhtuksid nõnda kui 5 : 8?

468. Viljapeksmiseks kaubeldi teatud hulk töölisi. Oleks neid kolme võrra vähem olnud, siis oleks neil kahe päeva võrra kauemini tulnud töötada; oleks neid aga 4 võrra rohkem kaubeldud, siis oleks võinud töö 2 päeva varemini lõppeda. Mitu töölist kaubeldi ja mitu päeva nad töötasid?

468. Viljapeksmiseks kaubeldi teatud hulk töölisi. Oleks neid viie võrra rohkem olnud, siis oleks töö võinud 4 päeva

varemini lõppeda; oleks aga töölisi 10 võrra vähem kaubeldud, siis oleks neil 20 päeva võrra kauemini tulnud töötada. Mitu töölist kaubeldi ja mitu päeva nad töötasid?

469. Kaks kahekümne-pangelist aami on täidetud piirituse ja vee seguga; esimeses aamis suhtub piirituse ja vee hulk nõnda kui 3 : 2, teises nõnda kui 1 : 4. Mitu pange segu tarvis kummastki aamist ära valada, et äravalatud osad moodustaksid uue segu, milles piiritust ja vett ühepalju, ja et segades ülejäänud osad saaksime segu, milles piirituse ja vee hulk suhtuksid nõnda kui 3 : 7?

469. Kaks kahekümne-pangelist aami on täidetud piirituse ja vee seguga; esimeses aamis suhtub piirituse ja vee hulk nõnda kui 1 : 2, teises nõnda kui 5 : 1. Mitu pange peab kummastki aamist ära valama, et äravalatud osad moodustaksid uue segu, milles piiritust ja vett ühepalju, ja et segades ülejäänud osad saaksime segu, milles piirituse ja vee hulk suhtuksid nõnda kui 13 : 8?

470. Kaks raudtee-rongi seisavad teineteisest 340 km kaugusel; sõidaks esimene rong 5 tundi varemini välja kui teine, siis kohtaksid nad teineteist 3 tunni pärast peale teise rongi liikumise algust; sõidab aga teine rong 5 tundi enne esimest rongi välja, siis kohtavad nad teineteist 3 t. 20 m. peale esimese rongi liikumise algust. Mitu km sõidab kumbki rong tunnis?

470. Kaks raudtee-rongi seisavad teineteisest $366\frac{2}{3}$ km kaugusel; kui esimene neist sõidaks $2\frac{1}{2}$ tundi teisest varemini välja, siis kohtaksid nad teineteist 6 tunni pärast peale teise rongi liikumise algust; sõidaks aga teine rong $2\frac{1}{2}$ tundi enne esimest rongi välja, siis kohtaksid nad teineteist $5\frac{1}{4}$ tunni pärast peale esimese rongi väljasõitu. Mitu km sõidab kumbki rong tunnis?

Järgnevad ülesanded võimaldavad kolme otsitavaga võrrandsüsteemide kokkuseadmist.

471. Jagada arv 226 kolmeks osaks nõnda, et teine osa oleks 7 võrra esimesest suurem ja 22 võrra kolmandast suurem.

471. Jagada arv 192 kolmeks osaks nõnda, et teine osa oleks 16 võrra esimesest vähem ja 20 võrra kolmandast vähem.

472. Kolm kasti teed kaalub kokku 250 kg. Esimene ja teine kast kokku kaaluvad 10 kg vähem kui kolmas kast, aga teine ja kolmas kast kokku kaaluvad 110 kg rohkem kui esimene. Kui raske on iga kast?

472. Kolm kasti teed kaalub kokku 170 kg. Teine ja kolmas kast kokku kaaluvad 86 kg rohkem kui esimene kast, aga esimene ja kolmas kast kaaluvad kokku 48 kg vähem kui teine. Kui raske on iga kast?

473. Leida kolm rahasummat, teades, et esimene summa liidetult $\frac{1}{2}$-ga teisest summast, teine summa liidetult $\frac{1}{3}$-ga kolmandast summast ja kolmas summa liidetult $\frac{1}{4}$-ga esimesest summast võrdub igaüks 1000 margaga.

473. Leida kolm rahasummat, teades, et esimene summa liidetult $\frac{1}{3}$-ga teisest summast, teine liidetult $\frac{3}{4}$-ga kolmandast ja kolmas liidetult $\frac{2}{5}$-ga esimesest moodustab igaüks 600 mk.

474. Jagada arv 49 kolmeks niisuguseks osaks, mis saaksid isekeskis võrdseteks, kui esimesega liita $\frac{1}{3}$, teisega $\frac{1}{4}$ ja kolmandaga $\frac{1}{5}$ kahe ülejäänud osa summast.

474. Jagada arv 232 kolmeks niisuguseks osaks, mis oleksid isekeskis võrdsed, kui esimesega liita $\frac{1}{2}$, teisega $\frac{1}{3}$ ja kolmandaga $\frac{1}{4}$ kahe ülejäänud osa summast.

475. Kolmel isikul on kokku 190 mk. raha. Esimese summa, liidetult teise ja kolmanda poolsummaga, on 120 mk., aga teise summa, liidetult $\frac{1}{5}$-ga kolmanda ja esimese summa vahest, on 70 mk. Kui palju raha on igal isikul?

475. Kolmel isikul on kokku 150 mk. raha. Esimese summa, liidetult $\frac{1}{5}$-ga teise ja kolmanda kogusummast, on 62 mk., aga teise summa, liidetult kolmanda ja esimese isiku rahasumma poolvahega, on 150 mk. Kui palju raha on igal isikul?

476. Kolmes korvis on õunu. Esimeses on 2 võrra rohkem kui teises, teises kolm korda, kolmandas aga $\frac{4}{3}$ korda vähem kui kahes ülejäänud korvis. Mitu õuna on igas korvis?

476. Kolmes korvis on õunu. Esimeses on 4 võrra rohkem kui kolmandas, kolmandas 7 korda, aga esimeses 3 korda vähem kui kahes ülejäänud korvis. Mitu õuna on igas korvis?

477. Leida kolme tõrre mahutis, teades, et kui teisest valada vett esimesesse, siis jääb teise üle $\frac{2}{9}$ veest, mida ta mahutab, kui kolmandast valada vett teise, siis kolmandasse jääb $\frac{1}{4}$ veest, mida ta mahutab, ja lõppeks, kui esimesest valada vett kolmandasse, siis tuleb kolmanda täitmiseks 50 pange vett puudu.

477. Leida kolme tõrre mahutis, teades, et kui esimesest valada vett teise, siis jääb esimesesse $\frac{1}{3}$ veest, mida ta mahutab, kui kolmandast valada vett esimesesse, siis jääb kolmandasse $\frac{1}{7}$ veest, mida ta mahutab, ja lõppeks, kui teisest valada vett kolmandasse, siis tuleb kolmanda täitmiseks 30 pange vett puudu.

478. Kolm linna ei asu mitte ühel sirgjoonel. Kaugus esimesest linnast kolmandasse linna läbi teise linna on 4 korda suurem kui otsene tee nende vahel; kaugus esimesest linnast teise läbi kolmanda linna on 5 km võrra suurem kui otsene tee nende vahel; kaugus teisest linnast kolmandasse läbi esimese linna on 85 km. Leida linnade kaugus üksteisest.

478. Kolm linna ei asu mitte ühel sirgjoonel. Kaugus esimesest linnast teise linna läbi kolmanda on 20 km võrra suurem kui otsene tee nende vahel; kaugus teisest linnast kolmandasse läbi esimese on 3 korda suurem kui nende otsene

vahemaa; kaugus esimesest linnast kolmandasse läbi teise on 95 km. Leida linnade kaugus üksteisest.

479. Leida arv, mille jagades 4-ga, 7-ga ja 11-ga saame jäägid vastavalt 2, 1 ja 6; seejuures on jagatiste summa 2 võrra vähem kui pool otsitavast arvust.

479. Leida arv, mille jagades 6-ga, 7-ga ja 9-ga saame jäägid vastavalt 4, 5 ja 4; seejuures on jagatiste summa 5 võrra vähem kui pool otsitavast arvust.

480. Kolmel rändajal kaupmehel oli kokku 90 sidrunit, mida nad müüsid ühe ja sama hinnaga. Esimene sai müügist üldse 980 mk., teine 560 mk. ja kolmas 140 mk. Igaühel jäi 2 sidrunit müümata. Mitu sidrunit oli igal kaupmehel esialgu?

480. Kolmel rändajal kaupmehel oli kokku 100 sidrunit, mida nad müüsid ühe ja sama hinnaga. Esimene sai müügist üldse 900 mk., teine 800 mk. ja kolmas 600 mk. Esimesel jäi müümata 4 sidrunit, teisel 3 ja kolmandal 1 sidrun. Mitu sidrunit oli igal kaupmehel esialgu?

481. Kolmekümnendise arvu ristsumma on 17. Sajaliste number on üheliste numbrist 2 korda suurem. Kui otsitavast arvust lahutada 396, siis saadakse arv, mis samadest, kuid vastupidi järjestatud numbritest moodustatud. Leida see arv.

481. Kolmekümnendise arvu ristsumma on 19. Üheliste number on sajaliste numbrist kolm korda suurem. Kui otsitava arvuga liita 594, siis saadakse arv, mis samadest, kuid vastupidi järjestatud numbritest moodustatud. Leida see arv.

482. Keegi, andes kapitali ühe osa $4^0/_0$, teise osa $5^0/_0$ ja kolmanda osa $6^0/_0$ kasu kandma, saab neist 530 mk. sissetulekut. Esimese osa kasuraha on 70 marga võrra vähem kui teise osa kasuraha. $5^0/_0$ kogu kapitalist on 30 marga võrra vähem kui saadav kasu. Leida kapitali kolm osa.

482. Andes kapitali ühe osa $5^0/_0$, teise osa $4^0/_0$ ja kolmanda osa $3^0/_0$ kasu kandma, saadakse neist kasu 400 mk. Esimene osa annab 60 marga võrra rohkem kasu kui kolmas osa. $4^0/_0$ kogu kapitalist on sama palju kui saadav kasu. Leida kapitali kolm osa.

483. Kolmekümnendise arvu ristsumma on 9. Üheliste number on 8 korda vähem kui ülejäänud numbritest moodustatud arv; sajaliste number on samuti 8 korda vähem kui ülejäänud numbritest moodustatud arv. Leida see arv.

483. Kolmekümnendise arvu ristsumma on 14. Üheliste number on 3 korda vähem kui ülejäänud numbritest moodustatud arv; kümneliste number on 7 korda vähem kui ülejäänud numbritest moodustatud arv. Leida see arv.

484. Kolmes riistas on vett. Esimesest valatakse kumbagi ülejäänud riista niipalju, kui neis kummaski enne oli; siis valatakse teisest ülejäänud kahte niipalju, kui neis kummaski oli; lõppeks valatakse kolmandast ülejäänud kahte niipalju, kui neis kummaski oli. Peale seda on igas riistas 8 pange vett. Kui palju vett oli igas riistas esialgu?

484. Kolmes riistas on vett. Esimesest valatakse kumbagi ülejäänud riista niipalju, kui neis kummaski enne oli; siis valatakse teisest riistast ülejäänud kahte riista niipalju, kui neis kummaski oli; lõppeks valatakse kolmandast riistast ülejäänud riistadesse niipalju, kui neis kummaski enne oli. Peale seda on igas riistas 24 pange vett. Kui palju vett oli igas riistas esialgu?

485. Kolmekümnendise arvu kümneliste arv on sama arvu sajaliste ja üheliste arvude aritmeetiline keskmine; otsitava arvu ja tema ristsumma jagatis on 48; kui otsitavast arvust lahutada 198, siis saadakse arv, mille moodustavad samad, kuid vastupidi järjestatud numbrid. Leida see arv.

485. Kolmekümnendise arvu üheliste arv on sama arvu sajaliste ja kümneliste arvude aritmeetiline keskmine; otsitava arvu ja tema ristsumma jagatis on 22; kui otsitava arvuga liita 99, siis saadakse arv, mille moodustavad samad, kuid vastupidi järjestatud numbrid. Leida see arv.

486. Kolmes riistas on vett. Kui $\frac{1}{3}$ esimeses riistas olevast veest valada teise, seepeale $\frac{1}{4}$ teise riista kogunenud veest valada kolmandasse ja lõppeks $\frac{1}{10}$ veest, mis oli kolmandas riistas, valada esimesesse, siis on igas riistas 9 pange vett. Mitu pange vett oli igas riistas esialgu?

486. Kolmes riistas oli vett. Kui $\frac{1}{2}$ esimeses riistas olevast veest valada teise, seepeale $\frac{1}{3}$ teise riista kogunenud veest valada kolmandasse ja lõppeks $\frac{1}{4}$ kolmandasse riista kogunenud veest valada esimesesse, siis on igas riistas 6 pange vett. Mitu pange vett oli igas riistas esialgu?

487. Kolm isikut andsid oma isesuurused kapitalid ühe ja sama protsendiga kasu kandma. Esimene sai aastas 80 mk., teine 120 mk. ja kolmas 200 mk. protsentraha. Esimese ja kolmanda kapitalide summa on 5600 mk. Kui suur on iga kapital?

487. Kolm isikut andsid oma isesuurused kapitalid ühe ja sama protsendiga kasu kandma. Esimene sai aastas 240 mk., teine 210 mk. ja kolmas 300 mk. protsentraha. Teise ja kolmanda kapitalide summa on 8500 mk. Kui suur on iga kapital?

488. Kellelgi on kolm tükki hõbedat, mis kokku kaaluvad 34 naela ja millede proov on 84, 72 ja 60. Kui esimene tükk sulatada teisega, siis saab 76-prooviline hõbe; kui aga esimene tükk sulatada kolmandaga, siis on sulatise proov $70\frac{2}{3}$. Kui palju kaalub iga tükk?

488. Kellelgi on kolm tükki hõbedat, mis kokku kaaluvad 45 naela ja millede proov on 90, 80 ja 72. Kui esimene tükk sulatada teisega, siis saab 84-prooviline hõbe; kui aga esimene tükk sulatada kolmandaga, siis on sulatise proov 78. Kui raske on iga tükk?

489. Kooli esimeses ja teises klassis oli 60 õpilast. Kevadel said esimesest klassist teise 25 õpilast, teisest kolmandasse 20 õpilast ja kolmandast neljandasse 35 õpilast. Peale seda oli teises klassis 3 korda rohkem õpilasi kui esimeses ja 5 õpilase võrra rohkem kui kolmandas. Mitu õpilast oli igas klassis?

489. Kooli teises ja kolmandas klassis oli 65 õpilast. Kevadel said esimesest klassist teise 32 õpilast, teisest kolmandasse 30 õpilast ja kolmandast neljandasse 20 õpilast. Peale seda oli kolmandas klassis 5 korda rohkem õpilasi kui esimeses ja kolme õpilase võrra rohkem kui teises klassis. Mitu õpilast oli igas klassis?

490. Kullasepal on 3 sulatist. Ühes neist tuleb iga 2 solotniku kulla kohta 3 solotnikku hõbedat ja 1 solotnik vaske, teises sulatises suhtuvad nimetatud metallide hulgad nõnda kui 2 : 4 : 3 ja kolmandas nõnda kui 1 : 2 : 1. Tarvis kokku seada uus sulatis, milles oleks 10 sol. kulda, 18 sol. hõbedat ja 10 sol. vaske. Kui palju peab võtma igast sulatisest?

490. Kullasepal on 3 sulatist. Ühes neist tuleb iga 3 sol. kulla kohta 2 sol. hõbedat ja 1 sol. vaske; teises sulatises suhtuvad nimetatud metallide hulgad nõnda kui 4 : 3 : 5 ja kolmandas nõnda kui 4 : 1 : 1. Tarvis kokku seada uus sulatis, milles oleks 12 sol. kulda, 7 sol. hõbedat ja 5 sol. vaske. Kui palju peab võtma igast sulatisest?

Järgnevad üldkujulised (tähelised) ülesanded võimaldavad kahe tundmatuga võrrandsüsteemide kokkuseadmist.

491. Kui üht kahest otsitavast arvust suurendada a võrra, siis on saadav summa m korda suurem kui teine otsitav; kui aga teist otsitavat suurendada b võrra, siis on saadav summa n korda suurem kui esimene arv. Leida need arvud.

491. Kui üht kahest otsitavast vähendada a võrra, siis on saadav vahe m korda vähem kui teine arv; kui aga teist otsitavat vähendada b võrra, siis on uus vahe n korda vähem kui esimene arv. Leida need arvud.

492. Kaks keha on teineteisest d jala kaugusel. Kui nad hakkaksid teineteisele vastu liikuma, siis kohtaksid nad teineteist m sekundi pärast; kui aga esimene hakkab teist taga ajama, siis sünnib kohtamine n sekundi pärast. Kui suur on kummagi keha liikumise kiirus?

492. Kaks keha on teineteisest d jala kaugusel. Kui nad hakkaksid teineteisele vastu liikuma, siis kohtaksid nad teine-

teist n sekundi pärast; kui aga teine hakkab esimest taga ajama, siis sünnib kohtamine m sekundi pärast. Kui suur on kummagi keha liikumise kiirus?

493. Kaks arvu suhtuvad isekeskis nõnda, kui $m:n$; kui esimest arvu liita a-ga ja teist b-ga, siis suhtuvad nad nõnda kui $p:q$. Leida need arvud.

493. Kaks arvu suhtuvad isekeskis nõnda kui $p:q$; kui esimesest arvust lahutada a ja teisest b, siis suhtuvad nad nõnda kui $m:n$. Leida need arvud.

494. Kaks keha on teineteisest d meetri kaugusel. Kui esimene hakkab liikuma a sekundit varemini kui teine, siis saavad nad vastamisi m sekundi pärast peale teise keha liikumise algust; kui aga teine hakkab liikuma b sekundit enne esimest, siia saavad nad vastamisi n sekundi pärast peale esimese keha liikumise algust. Kui suur on kummagi keha liikumise kiirus?

494. Kaks keha on teineteisest d meetri kaugusel. Kui esimene hakkab liikuma a sekundit hiljemini kui teine, siis saavad nad teineteisele vastu m sekundi pärast peale esimese keha liikumise algust; kui aga teine keha hakkab liikuma b sekundit hiljemini kui esimene, siis saavad nad teineteisele vastu n sekundi pärast peale teise keha liikumise algust. Kui suur on kummagi keha liikumise kiirus?

495. Kaupmehel oli n kg kaupa, millest ta osa a mk. kg, ülejäänud kauba aga b mk. kg ära müüs. Selgus, et ta oleks saanud sama summa, kui ta oleks kõik kauba ära müünud c mk. kg. Mitu kg müüs ta kummagi hinnaga?

495. Kaupmehel oli n kg kaupa, ta ostis kaupa veel juurde, makstes b mk. kg, kuid pärast müüs ta kõik kauba ära a mk. kg. Selgus, et ta oleks saanud sama kasu, kui ta oleks ära müünud ainult oma endise kauba c mk. kg. Mitu kg kaupa ta müüs ja mitu kg ostis?

496. Kullasepal on kaht sorti kulda. Kui võtta a solotnikku esimesest ja b sol. teisest sordist, siis saab sulatis, mille solotnik maksab m mk.; kui aga võtta b sol. esimesest ja a

sol. teisest sordist, siis saab sulatis, mille solotnik maksab n mk. Kui palju maksab solotnik kumbagi sorti kulda?

496. Kullasepal on kaht sorti kulda. Kui sulatada a solotnikku uut sulatist nõnda, et temas oleks b sol. teist sorti kulda, siis maksab selle sulatise solotnik m marka; kui aga sulatada a solotnikku uut sulatist nõnda, et esimest sorti kulda oleks b sol., siis saab sulatis, mille solotnik maksab n mk. Kui palju maksab solotnik kumbagi sorti kulda?

497. Kaks kaarikut, mis teineteisest d meetri kaugusel, sõidavad teineteisele vastu. Nende rataste ümbermõõdud suhtuvad nõnda kui $m:n$ ja nende rataste tiirude arvud suhtuvad nõnda kui $p:q$. Mitu meetrit maad sõidab kumbki sõiduriist kuni teineteisega kohtamiseni?

497. Kaks kaarikut, mis asuvad teineteisest d meetri kaugusel, sõidavad ühes ja samas sihis. Nende rataste ümbermõõdud suhtuvad nõnda kui $m:n$ ja nende rataste tiirude arvud suhtuvad nõnda kui $p:q$. Mitu meetrit maad sõidab kumbki sõiduriist kuni teineteisega kohtamiseni?

498. Vesistust jookseb vett kahe toru kaudu. Esimese toru kaudu jookseb teatud ajal a pange rohkem kui teise kaudu. Torude rist-läbilõigete pindalad suhtuvad nõnda kui $m:n$ ja samade torude väljajooksu kiirused suhtuvad nõnda kui $p:q$. Mitu pange vett jookseb teatava aja jooksul kummagi toru kaudu välja?

498. Vesistust jookseb vett kahe toru kaudu. Teatud aja jooksul jookseb mõlematest torudest kokku a pange vett välja. Torude rist-läbilõigete pindalad suhtuvad nõnda kui $m:n$ ja samade torude väljajooksu kiirused suhtuvad nõnda kui $p:q$. Mitu pange vett jookseb teatava aja jooksul kummagi toru kaudu välja?

499. Kullasepal on kaks kulla ja hõbeda sulatist. Ühes sulatises on need mettallid võetud $m:n$ suhtes, teises samad metallid $p:q$ suhtes. Tarvis on nende sulatiste küljest eraldada tükid nõnda, et nende tükkide raskuste summa oleks a naela ja et nende tükkide sulatises suhtuksid kulla ja hõbeda hulgad nõnda kui $r:s$. Kui rasked on eraldatud tükid?

499. Kullasepal on kaks kulla ja hõbeda sulatist. Ühes sulatises on need metallid võetud $m:n$ suhtes, teises samad metallid $p:q$ suhtes. Tarvis on nende sulatiste küljest eraldada tükid nõnda, et esimesest sulatisest eraldatud tükk kaaluks a naela rohkem kui teine tükk ja et nende tükkide sulatises suhtuksid kulla ja hõbeda hulgad nõnda kui $r:s$. Kui rasked on eraldatud tükid?

500. Kaks aami, kummagi mahutis a pange, on täidetud piirituse ja vee seguga. Esimeses aamis on need vedelikud segatud $m:n$ suhtes, teises $p:q$ snhtes. Mitu pange peab kummastki aamist ära valama, et äravalatud osadest saadud segu sisaldaks piiritust ja vett ühepalju, aga segades aamidesse ülejäänud osad, saaksime segu, milles piirituse ja vee hulgad suhtuksid nõnda kui $r:s$?

500. Kaks aami, kummagi mahutis a pange, on täidetud piirituse ja vee seguga. Esimeses aamis on need vedelikud segatud $m:n$ suhtes, teises $p:q$ suhtes. Mitu pange peab kummastki aamist ära valama, et valatud osadest saadud segu sisaldaks piiritust ja vett $r:s$ suhtes, aga segades aamidesse ülejäänud osad, saaksime segu, milles piiritust ja vett ühepalju?

Vastused.

I osa.

11. $2n$. **13.** $2n+1$. **15.** $5a+1, \ldots$ **26.** $a=b+c$. **29.** $10a+b+m=10b+a$. **30.** $a+c=b$. **33.** $\frac{ap}{100}=c$. **34.** $\frac{8ab}{12.100}=c$. **81.** 3 m. 43 p. **82.** ar^4. **84.** $(1+a)^6$; $\frac{m}{(1+a)^6}$. **187.** $2(a+b)^2$. **188.** $[2(b+c)]^2$. **202.** $\sqrt[n]{a^{2k}+b^{2l}}$. **207.** $(a+1)(a+2)(a+3)$. **212.** $2(m+n)^2(mn)^3$ **218.** $\frac{a(100c+d)}{a+b}$. **220.** $a^2+2ab+(a+b)^3$. **223.** 12. **224.** $11\frac{3}{8}$. **225.** 162. **226.** $\frac{73}{81}$ **227.** 108. **228.** $1\frac{3}{8}$. **229.** 3. **230.** $\frac{55}{12}$. **231.** 7. **232.** 2. **233.** $\frac{45}{74}$. **234.** 26. **235.** 1. **237.** 75. **238.** 60. **239.** 24. **240.** 1. **241.** $\frac{35}{144}$. **242.** $\frac{225}{136}$. **243.** 12. **244.** $43\frac{1}{5}$.

II osa.

21. 5; 2,5. **22.** —4; 11. **23.** —1; $-2\frac{3}{20}$. **24.** $-1\frac{14}{15}$; $-2\frac{19}{21}$. **25.** 1,09. **38.** 22; 8. **39.** 10; 17. **40.** 11; —2. **41.** $1\frac{3}{4}$. **42.** 1. **43.** $\frac{14}{15}$. **44.** 2,7. **55.** $\frac{7}{810}$. **56.** —4; 5. **57.** —30; 12. **58.** 7,5. **59.** 20. **75.** —12,5. **76.** 10. **77.** $-3\frac{2}{3}$. **78.** 0. **79.** —5,5. **80.** $-5\frac{2}{3}$. **81.** $\frac{1}{2}$. **93.** $-\frac{39}{8}$. **94.** $-5\frac{37}{45}$. **95.** $\frac{845}{216}$. **96.** $2\frac{1}{4}$. **106.** 6. **107.** 7. **108.** 4. **109.** —2. **110.** —3. **111.** $-\frac{4}{5}$.

III osa.

79. $-\frac{5}{6}a^2-1\frac{13}{20}ab+1\frac{1}{6}b^2-\frac{2}{5}a^2b^2$. **80.** $7\frac{1}{3}a^3+7\frac{1}{21}a^2b+$ $+3\frac{11}{45}ab^2-5\frac{13}{15}b^3$. **83.** $4{,}4a^3b^2c-0{,}045a^4b^3c^2+1{,}4a^5b^4c^3$.

84. $0{,}05a^2-3ab-17\frac{1}{4}ac+16\frac{3}{8}bc$. **122.** $5{,}35a+17\frac{1}{60}b-24\frac{3}{4}c+$ $+0{,}02d$. **124.** $1\frac{4}{15}(a+b)^n+2\frac{1}{6}(a-b)^{n+1}-\frac{5}{2}(a-b)$. **141.** $4ab$. **143.** $-17a^2+6ab+6b^2$. **144.** $a^3+13a^2b-9b^3$. **145.** $-20a^3+$ $+14a^2b+8b^3$. **146.** 48. **184.** $-\frac{3}{4}c^{x+1}dk^3$. **186.** $-\frac{7}{16}x^{2m-2}y$.

190. $a^3(a^3-b^3)^9$. **191.** $x^6(m-n)^{6-m}$. **203.** $-\frac{125}{8}x^3y^9$.

205. $\frac{81}{256}b^{12}y^{4p}$. **206.** $-2a^3b^5c^3$. **207.** $12am^{14}n^{10}$. **208.** $4\frac{13}{18}ac^5x^6$. **233.** $3a^2-ab-2b^2$. **235.** $6a^4+5a^2b^2-6b^4$. **237.** $16a^{m+1}-6a^3b^n+$ $+8a^{3m}b^{n-4}-3a^{2m+2}b^{2n-4}$. **238.** $10c^2d^n+8c^{5-m}d^{3-n}-5c^{m-1}d^{2n+4}-$ $-4c^2d^7$. **241.** $15x^4-23x^3+27x^2+9x-28$. **242.** $10a^5-9a^4x+$ $+9a^3x^2-3a^2x^3+ax^4$. **243.** $a^4-4b^2x^2+4bx^3-x^4$.

244. $16x^4-32x^3y+16x^2y^2-8xy^3+3y^4$. **245.** a^5+b^5. **246.** a^8-81b^8 **247.** $x^5-10ax^4+40a^2x^3-80a^3x^2+80a^4x-32a^5$. **248.** a^6-2a^3+1. **249.** $x^6-10x^5y+29x^4y^2-24x^3y^3-14x^2y^4+22xy^5-4y^6$.

250. $2a^{10}-2a^5b^3+\frac{1}{2}b^6-\frac{1}{2}$. **251.** $\frac{x^6}{16}-\frac{x^4}{9}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}$.

252. $1+\frac{5x^2}{12}-\frac{5x^4}{36}-\frac{x^6}{16}$. **253.** $-0{,}002a^3-0{,}1994a^5+0{,}09a^7-$ $-1{,}012a^9+0{,}2a^{11}$. **254.** $-\frac{5}{27}a^5-\frac{19}{33}a^4x+\frac{287}{1485}a^3x^2-\frac{311}{495}a^2x^3-$ $-\frac{103}{132}ax^4+\frac{1}{4}x^5$. **272.** $25-b^2x^6$. **275.** $4a^4-a^2b^3+\frac{b^6}{16}$.

277. $\frac{4}{9}x^2y^2-x^3y+\frac{9}{16}x^4$. **280.** $a^{2p}+3a^{p+1}x^4+\frac{9}{4}a^2x^8$.

282. $\frac{1}{9}x^{4m-2}y^6+\frac{1}{2}x^{3m}y^4+\frac{9}{16}x^{2m+2}y^2$. **283.** $\frac{9}{25}n^2p^6x^{4z-4}-$ $-c^4n^{r+1}p^3x^{z+1}+\frac{25}{36}c^8n^{2r}x^{6-2z}$. **286.** $6\frac{1}{4}a^{2n-6}-\frac{25}{144}$. **287.** a^4-x^4.

288. $81-18x^2+x^4$. **289.** $x^2+2xy+y^2-z^2$. **290.** a^2-2ab+ $+b^2-c^2$. **291.** $4x^2-y^2+6yz-9z^2$. **292.** $x^4+x^2y^2+y^4$.

293. $-(a^{12}+a^6b^6+b^{12})$. **295.** $a^2+4ab+4b^2-9c^2-6cd-d^2$.
297. $1-2x+x^2-9x^6+12x^5-4x^4$. **298.** $y^3+6y^2z+12yz^2+8z^3$.
300. $125-75a+15a^2-a^3$. **302.** $343d^6-294d^4+84d^2-8$.
304. $x^6+3x^4y^3+3x^2y^6+y^9$. **306.** $m^6n^3+3m^4n^4p+3m^2n^5p^2+n^6p^3$.
308. $27-270x^5+900x^{10}-1000x^{15}$. **310.** $\frac{8}{27}m^6-m^4n^2p+$
$+\frac{9}{8}m^2n^4p^2-\frac{27}{64}n^6p^3$. **311.** $8a^3+6a^2b^2c+\frac{3}{2}ab^4c^2+\frac{1}{8}b^6c^3$.
312. $0{,}001a^3-0{,}15a^2n^3+7{,}5an^6-125n^9$. **313.** a^2+3a+2.
314. x^2-5x+6. **315.** $x^2+3x-10$. **316.** $9a^2+9a-28$.
318. $4a^2+12a-55$. **320.** c^6-8c^3+12. **322.** $1+3a+b+3ab$.
324. $100-50b+10c-5bc$. **326.** $m^2+2m+mn+2n$. **328.** $9x^4-$
$-3mx^2+3px^2-mp$. **329.** $25y^6-5ay^3-5by^3+ab$. **330.** $a^2y^{2m}+$
$+aby^m-acy^m-bc$. **331.** x^3-y^3. **332.** m^3+n^3. **333.** $8-a^3$.
334. d^3+125. **340.** $4a^2+16b^2+25c^2-20ac+16ab-40bc$.
341. $4x^2+9y^2+25z^2-12xy+20xz-30yz$. **343.** $\frac{1}{4}x^4+16y^2+$
$+\frac{4}{9}y^4-4x^2y-\frac{2}{3}x^2y^2+\frac{16}{3}y^3$. **345.** $x^3+y^3+27+3x^2(y+3)+$
$+3y^2(x+3)+27(x+y)+18xy$. **346.** $x^3-y^3+z^3+3x^2(z-y)+$
$+3y^2(x+z)+3z^2(x-y)-6xyz$. **349.** $8a^3-b^3+1+12a^2(1-b)+$
$+3b^2(2a+1)+3(2a-b)-12ab$. **351.** $\frac{x^3}{8}-\frac{y^3}{27}+\frac{z^3}{94}+\frac{x^2}{16}(3z-4y)+$
$+\frac{y^2}{12}(2x+z)+\frac{z^2}{32}(3x-2y)-\frac{xyz}{4}$. **353.** $8a^6-\frac{1}{27}a^3b^3+b^6+$
$+4a^4(3b^2-ab)+\frac{1}{3}a^2b^2(2a^2+b^2)+b^4(6a^2-ab)-4a^3b^3$. **355.** a^4-16.
356. $a^3-3a^2-4a+12$. **357.** $x^3-a^2x-ax^2+a^3$. **358.** x^4+
$+2ax^3-2a^3x-a^4$. **359.** m^4-8m^2+16. **360.** m^4-18m^2+81.
361. $a^5-2a^3b^2+ab^4-a^4b+2a^2b^5-b^5$. **362.** $a^4-a^2b^2-25a^2+$
$+25b^2$. **363.** $x^8y^4-x^4y^8$. **364.** $x^4y^4-8x^6y^2+16x^8$. **365.** a^4-
$-a^2b^2-9a^2c^2+9b^2c^2$. **366.** $4a^4-8a^3c+4a^2c^2-a^2b^2+2ab^2c-b^2c^2$.
367. x^6-y^6. **368.** x^6-64y^6. **370.** $m^8-17m^4n^4+16n^8$.
371. $a^8+2a^6+3a^4+2a^2+1$. **372.** $a^8-12a^6+38a^4-12a^2+1$.
373. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$. **374.** $x^4+y^4+z^4-$
$-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$. **375.** 441. **376.** 2401. **377.** 7569.
378. 10404. **379.** 3364. **380.** 625. **381.** 3025. **382.** 11025.
383. 1551. **384.** 384. **385.** 6384. **386.** 9991. **387.** 9856.

388. 14375. **389.** 39919. **390.** 1806. **391.** 3534. **392.** 9898. **393.** 783. **394.** 7656. **395.** 42230. **396.** 1728. **397.** 24389. **398.** 68921. **399.** 941192. **400.** 12544. **401.** 166464. **402.** 998001. **403.** 1006009. **404.** 400. **405.** 760. **406.** 180. **407.** 7600. **408.** 98400. **409.** 318000. **410.** 948000. **481.** $x+4a$. **482.** $3x-a$. **483.** a^2+ab. **485.** $3+2x$. **487.** $3a^2-2b^2$. **489.** $-3+2x$. **493.** $2x+1+\frac{5x-1}{x^2+2x+3}$. **494.** $1-2x+\frac{3x^2+x^3}{1-3x+2x^2}$. **495.** $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y^2$. **497.** a^2-2a+1. **499.** $a^{2n}-2a^{2n-2}+3a^{2n-4}$. **500.** $a^m-a^{m-1}+a^{m-2}$. **504.** $x^2-2x-5+\frac{2x+3}{3x^2-2x+1}$. **505.** $1+x-2x^2+\frac{x^3-x^4+3x^5}{1-5x+3x^2+x^3}$. **506.** $x^2+x+1+\frac{2x^2-3x+5}{x^3+2x^2+5x+1}$. **507.** $1+m+m^2+m^3$. **508.** $27m^3-18m^2n+12mn^2+8n^3$. **509.** $8p^9+12p^6q^2+18p^3q^4+27q^6$. **510.** $16x^8-8x^6y+4x^4y^2-2x^2y^3+y^4$. **511.** $81p^8+27p^6q+9p^4q^2+3p^2 2^3+q^4$. **512.** $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$. **513.** $x^4-x^3y+xy^3-y^4$. **514.** $1-3x+3x^2-x^3$. **515.** $\frac{3}{2}m^3-5m^2+\frac{1}{4}m+9$. **516.** $a^2+2ab+\frac{-3a^2b^3+ab^4}{a^3-2a^2b+2ab^2-b^3}$. **517.** $a^2-2ab-7b^2+\frac{5a^2b^3+23ab^4+8b^5}{a^3+3ab^2+b^3}$. **518.** $3-a^2+3a^4+\frac{3a^6+9a^8-8a^{10}}{2+3a^2-a^4+6a^5}$. **519.** $-2a^3-3a^2+a-4$. **520.** $2x^5-3x^3y^2+8xy^4+4y^6$. **528.** Märk b^2 juures. **530.** Märk b^3 või b juures. **532.** Märk b^4 juures. **534.** Märk b^6 või b^2 juures. **587.** $8-4x+2x^2-x^3$. **589.** $4+3x^2$. **593.** $1-ay+a^2y^2-a^3y^3+a^4y^4$. **597.** $a^2b^4+2ab^2c^2d+4c^4d^2$. **599.** $x+5a$. **601.** $y-2b$. **603.** $z-2c$. **605.** $u+2d$. **607.** $a+b+c$. **609.** $a-b+c-d$. **611.** $x^2+(b-c)x+(b-c)^2$. **613.** $a^3-a^2(x-y)+a(x-y)^2-(x-y)^3$. **615.** $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2$. **617.** $\frac{9}{4}n^4+\frac{1}{2}n^2p+\frac{1}{9}p^2$. **619.** $\frac{9}{25}+\frac{3}{10}z^2+\frac{1}{4}z^4$. **621.** $(a-b)^2+(a-b)(c+d)+(c+d)^2$. **622.** a^2+3b^2. **623.** $a^4-4a^2bc+7b^2c^2$. **624.** $4x^6+4x^4y^2$. **625.** $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$. **626.** $abx^2+(b^2-a^2)x-ab$. **627.** $x^3+(a+b)x^2-(a^2-ab)x-a^2b$. **628.** $x^3+b(a-1)x^2+b^2(1-a)x-b^3$. **629.** $x^4-(a-b)x^3+(a^2-ab)x^2-(a^3-a^2b)x-a^3b$. **630.** $x^4+(b-a)x^3-(b^2+ab)x^2-$

$-(b^3-ab^2)x+ab^3$. **631.** $x^4-(b-c)x^3+(a^2-bc-d^2)x^2+(a^2c+bd^2)x-a^2d^2$. **632.** $x^4+(b-c)x^3+(a^2-bc-d^2)x^2-(a^2c+bd^2)x-a^2d^2$. **633.** $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$. **634.** $x^3+(a-b-c)x^2-(ab+ac-bc)x+abc$. **635.** $x^3+(n-2)a^2+(2-n)x-1$. **636.** $x^3+(a+b+1)x^2+ax-b$. **637.** $ax^3-(2a-b-ac)x^2+(b^2-2ac+bc)x+b^2c$. **638.** $ax^3+(2ab-ac-1)x^2-(b+2abc-c)x+bc$. **639.** $(a^2-b^2)x^3+[(a-b)^2-(a+b)]x^2+(a-b)x-2$. **640.** $(2a-b)(a+b)x^3-[a(a+b)^2+a(a-b)(2a-b)]x^2+[a^3(a+b)+a^2(a^2-b^2)]x-a^4(a-b)$. **641.** $x^4+2bx^3-(a-b)^2x^2-2(a-b)^2(a+b)x-(a-b)^3(a+b)$. **642.** $abx^4-2(a^2b-b^3)x^3+[(a^2+b^2)(b-a)+b^2(2a-b)(a-2b)]x^2-b(a+b)(a^2+b^2)x-(a^2+b^2)^2$. **643.** $2(a-b)x^5-(a^2-2ab-b^2)x^4+2(a+b-ab^2)x^3-(2a^2+2b^2-a^2b^2)x^2+2ab^2x-(a^2-b^2)$. **644.** $(a+b)^2x^5-(a^2-b^2)x^4-2[a^2-b^2+(a-b)^2+a(a+b)]x^3+2[2(a-b)^2-a(a-b)]x^2+4a(a-b)x$. **645.** x^2-ax-a^2. **646.** $x^3+ax^2-a^2x-a^3$. **647.** x^2+bx-a^2. **648.** $x^3+ax^2-b^2x-c^3$. **649.** $(a+b)(a^2+b^2)x^2+(a^2+ab+b^2)x+a+b$. **650.** $(a-1)x^2+(a+3)x+a-2$. **651.** $x^2+ax-(a+b)^2$. **652.** $x^2-(a+b)x-ab$. **653.** $(3a-5)x+4a-7$. **654.** $(2a+3c)x^2-(a-c)x+2a-c$.

IV osa.

18. $3a^{n-2}(1-2a^2)$. **20.** $b^{2n}(b^n+1)$. **24.** $-a(2-x+y)$.
43. $(m+1)(q-p)$. **46.** $b(b^2+b-1)(q+1)$. **48.** $(p-q)(5q-2p)$.
52. $(a-b)(c-d)$. **54.** $(x+z)(x^2-2z^2)$. **56.** $(a^2-2)(a+2)$.
58. $(ab-cd)(ab^2+c^2d)$. **60.** $(2m+3p)(3a+5b)$.
63. $3(x-m)(2x^2-m^2)$. **65.** $2(c-x)(4a^2-3x^3)$.
67. $2ab(c+2d)(2a-3b)$. **70.** $(ab-cd)(5ab^2-2c^2d)$.
71. $2ab^2(2a^2b+1)(4ac^2-3b)$. **72.** $3a^2b(1-3ab^2)(2a^2c-5b)$.
75. $x(x+1)(a-b-c)$. **77.** $(x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2)$.
78. $3abxy(a+b)(x+y)$. **79.** $(x+a)(x+b)(x+c)$.
80. $(x-a)(x+b)(x-c)$. **82.** $(x-a)(x-2)$. **92.** $(x-a)(x+3)$
102. $(a-5b)(a+2b)$. **104.** $(a+9b)(a-5b)$.
107. $(3a+2b)(2a+3b)$. **109.** $(2a-b)(3a+5b)$.
111. $(x+1)(x+2)(x+5)$. **113** $(x-1)(x+2)(x-3)$.

117. $x(x+2)(x+4)(x+5)$. **119.** $x(x-2)(x-4)(x-5)$.
161. $10a^2b^2(a+2b)(a-2b)$. **163.** $2a(b-1)^2$.
165. $-2ax(2a-3x)^2$. **167.** $(2a-b)(2a-5b)$.
169. $(23m-12p)(7m-12p)$. **173.** $a^9(a^{m-3}-b^n)^2$.
175. $(x+y+z)(x+y-z)$. **177.** $(5z+2x-3y)(5z-2x+3y)$.
179. $(a-b)(a+b)^2$. **181.** $(a-b)(a-c)(c-b)$.
183. $(a-b)^2(a^2+2ab-b^2)$. **185.** $(a-2b)^2$. **187.** $(m+1)^2(m-1)^2$.
189. $(m^2+4m+2)(m^2+4m-2)$. **191.** $8q^3$.
193. $a(a^2+3b^2)(a^2-3b^2)$. **195.** $b(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
198. $2(2-a^2)(4+2a^2+a^4)$. **199.** $3a(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$.
202. $(m-n)(p-m+n)$. **204.** $x^2z^2(y+x)(y-x)(v+z)(v-z)$.
205. $u(u-3)(1+u)(1-u)$. **206.** $(u+1)^2(u^2-u+1)$.
208. $4x^2y(x-y)$. **210.** $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3+2)$.
211. $(m+2)^3$. **213.** $a(a+1)(a+2)(a+3)$.
215. $(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)$. **218.** $2x(3a^2+x^2)$.
219. $(x-a)(x+a)^3$. **221.** $(a^3+b)^2(a^3-b)^2$.
222. $-(a^3+b^2)^2(a^3-b^2)^2$. **224.** $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
225. $(x^2y^2+x^4-y^4)(x^2y^2-x^4+y^4)$. **226.** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-$ $-x^2+1)$. **227.** $(x^3+x^6-1)(x^3-x^6+1)$. **229.** $(a+b+c)(b+c-$ $-a)(a+c-b)(a+b-c)$. **231.** $(ab+ac+bd-cd)(ab-ac-bd-cd)$.
233. $(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)$.
235. $(a-c)(c-b)(b-a)$. **236.** $(a+b)(b+c)(c-a)$. **237.** $a(a+$ $+1)(a-1)^2(a^2+1)$. **238.** $a^5(a-1)^3(a^4+a^3+a^2+a+1)$. **240.** $(a-$ $-x)(a-y)(x-y)(a+x+y)$. **245.** $2x^2y$. **248.** $x^2y^3z^4$. **249.** $6a^2bc$.
251. $2a^mb^n$. **252.** $3a^5b^m$. **254.** $5(m-n)^2$. **255.** 1. **259.** a^2b.
260. $2a^3n^2$. **262.** 5. **263.** 1. **265.** $2a^2b^3c^2(6a^2b-7c^2)$.
266. $3a(2a+3b-4c)$. **268.** a^2b^2. **269.** $2(a+1)$. **272.** $6(x-y)$.
274. $a-b$. **276.** $4(x^2+y^2)$. **278.** $5x+6y$. **279.** $a+1$.
281. $x+5$. **283.** $x-10$. **285.** $x(x-5)$. **287.** x^2+ax+a^2.
288. $x+a$. **289.** $x-y$. **290.** $(x+y)^2$. **291.** $a-b$.
292. $2a+3b$. **293.** $a+b$. **294.** $a-b$. **295.** $x+3$. **296.** $x-5$.
297. $x(x-2)$. **298.** $x(x+4)$. **299.** $a-x$. **300.** $x-2a$.
303. $12abc$. **305.** $36a^3b^3$. **308.** $84ab^2c^3d^3$. **309.** $ab(a+b)$.
310. $12a^3(b-1)$. **311.** $90b^5(a^2-b^2)$. **312.** $72a^3b^3(a-1)(a-2)$.
313. $(a+b)(c^2-d^2)$. **315.** $(a+x)(a-x)^2$. **318.** $(x-4y)(x+4y)^2$.

319. $(a+b)(a^3-b^3)$. **320.** $(a^2+b^2)(a^3+b^3)$. **321.** $(a-b)(3a-b)(2a^2+b^2)$. **322.** $(a^2-b)(4a^4-9b^4)$. **323.** $(x-3)(x^2-16)$. **324.** $(x^2-1)(x-7)$. **325.** $(2x-3)(x^2-4)$. **326.** $(x+3)(9x^2-4)$. **327.** x^4-16. **328.** $(x^2+9y)(x^2-9y^2$. **329.** $(x^2+1)(x+1)^2$. **330.** $(x-y)^2(x^4-y^4)$. **331.** $abcd$. **333.** $120a^3b^4$. **335.** $60a^3x^{n-1}$. **336.** $210a^mx^{2n}$. **337.** $(x+y)(x-y)^2$. **338.** $(x^3+y^3)(x^2-y^2)$. **341.** $(a^2-9b^2)^2$. **342.** $8a^3b(a+2b)^2$. **343.** x^6-1. **344.** x^8-1. **345.** $(x+a)(x+b)(x+c)$. **347.** $(x+1)(x+2)(x+3)$. **348.** $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$. **349.** $(x^2-1)(x+2)(x^2-9)$. **350.** $(x+2)(x^2-25)(x^2-9)$. **351.** a^4-1. **352.** a^6-1. **353.** $(a+b)(a-2b)(a+3b)(a+4b)$. **354.** $(a-b)(a-5b)(a^2-9b^2)$. **355.** x^6-64. **357.** $(x-1)^3(x^4-1)$. **358.** $(x-1)(x+1)^2(x-2)$. **359.** $(x-2)(x-4)(x+3)(x-1)$. **360.** $(x+2)(x^2-1)(x+5)(x^2-9)$.

V osa.

§ 1. **9.** $\frac{a}{b}$. **11.** $\frac{6a^2}{5b^2}$. **13.** $\frac{4a^2}{5b}$. **19.** $\frac{2a}{3(2a+b)}$. **22.** $\frac{(a+1)^2}{a(a-1)}$. **25.** $\frac{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}{x^2+xy+y^2}$. **28.** $9a^3b^4(3a+5b)$. **30.** $\frac{4x}{3x-2y}$. **33.** $\frac{x+z}{(1-y)^2}$. **35.** $\frac{c+x}{2x+y}$. **36.** $\frac{1}{3a^2-b^2}$. **37.** $\frac{a+b}{2(a-b)}$. **38.** $\frac{a^2+b^2}{a}$. **39.** $\frac{ax+by}{ax-by}$. **40.** $\frac{x-a}{x^2+a}$. **41.** $\frac{x+a-b-c}{x-a+b-c}$. **42.** $\frac{x+2}{x+5}$. **44.** $\frac{x+4}{x+6}$. **46.** $\frac{a+b}{a-b}$. **49.** $\frac{x+c}{a+b-x}$. **50.** $\frac{ac}{(a+c)^2-b^2}$.

§ 2. **66.** $72a^5b^4c^6d^4$. **68.** $30a^5b^4x^3$. **70.** $84a^6b^4c^8$. **74.** $a^2b(a^2-4)$. **76.** $12a^2b(a+b)^2(a-b)$. **77.** $a(a+1)(a+2)(a+3)$. **78.** $(a-b)(b-c)(c-a)$. **80.** $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)$.

§ 3. **91.** $\frac{(a-b)^2}{2a}$. **93.** $\frac{3a^2-b^2}{a+b}$. **95.** $\frac{axy+4x+5y}{x+y}$. **97.** $\frac{x^3+3y^3}{x+y}$. **99.** $\frac{2n^3-3n^2+9n+2}{n^2-2n+3}$ **100.** $\frac{1+5n^2-6n-3n^3}{2-n+n^2}$. **101.** $3a+\frac{4a}{7}$. **105.** $1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}$. **107.** $x+2+\frac{2}{x-1}$. **109.** $5a-\frac{3b-2c}{5a^2}$. **111.** $\frac{2x^3}{3y^2}-5x-4y$. **113.** $2b-\frac{a^2+4b^2}{2a+b}$.

114. $2a+b-\frac{2ab^2+3b^3}{a^2+b^2}$ **117.** $n+5+\frac{6}{n+3}$.

118. $1-2n+\frac{3n^2+n^3}{1-3n+2n^2}$. **119.** $3m^2-2mn+8n^2-\frac{12n^3}{m-n}$.

120. $m^2-mn-3n^2-\frac{mn^3-5n^4}{m^2-mn+2n^2}$.

§ 4. **127.** $\frac{3}{2a}$. **131.** $\frac{x+5ay}{15a}$. **135.** $\frac{9b^3c+10a^2d}{12a^3b^4}$.

137. $\frac{m(ab+ac+bc)}{abc}$. **142.** $\frac{25ay^2z^2-4by^4+18cz^4}{60y^5z^4}$.

144. $\frac{a^n c^2x^3-ab^4x^2z^n-c^3}{ac^4x^n}$.

146. $\frac{3a^{m+n-1}b^{m+n-1}+4b^{m-2n}c^{m-n-1}-6a^{m-1}c^{2m-n+1}}{12a^m b^{m+n} c^{m-n}}$. **150.** $\frac{133a}{36}$.

151. $\frac{2a+3b}{b}$. **152.** $\frac{3a^2-4b^2}{ab}$. **153.** 0. **154.** $\frac{81a-4b}{84}$.

155. $\frac{20a^2-10ab+9c}{36}$. **156.** $\frac{5a^2b+20a^4b^4+c^2}{10a^3b^2}$. **157.** 0.

158. $\frac{26b-5a}{30b}$. **159.** $\frac{a}{18c}$. **160.** $\frac{ab+ac+bc}{abc}$. **161.** $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

162. $\frac{2a^2x}{1-a^4}$ **165.** $\frac{a}{2(a+1)^3}$. **167.** 0. **168.** $\frac{1}{4a-3}$.

169. $\frac{2b^2}{a(b^2-4a^2)}$. **170.** $\frac{1}{a+2}$. **171.** $\frac{6x^2-8}{(x+2)^2(x-2)}$.

173. $\frac{2a-3}{(a^2-1)(2a+3)}$. **174.** $\frac{a^4+6a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}$. **175.** $\frac{a^2-4ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}$.

176. $\frac{44}{a^3+64}$. **177.** $\frac{18b^2}{8a^3-27b^3}$. **178.** $\frac{2(x^3+1)}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

179. $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$. **180.** $\frac{11a+x}{6(a-x)}$. **181.** $\frac{2}{a-3}$.

182. $\frac{2a+3}{(a+1)(a+3)(a-4)}$. **183.** $\frac{a-b-c}{a+b-c}$. **184.** 1. **185.** 0. **186.** 1.

187. 0. **188.** $\frac{1}{abc}$. **189.** $\frac{a}{a^2-1}$. **190.** 0.

§ 5. **197.** $\frac{12x^2y^2}{p^2q^7}$. **199.** $\frac{3}{2}b(a+b)^3(a-b)^2$.

205. $-\frac{10a^{n-1}b^2d^{m-3}}{3c^3}$. **209.** $\frac{a^{3n-3}}{b^{mn-2n}}$. **213.** $-\frac{20a^2c^7}{d^3(a+x)^3}$.

215. $\frac{c^{n-r}x^{2p+1}}{7y^{n+2}}$. **216.** $\frac{d^{2p-2n}}{8c^3f^3x^p-2y^4}$. **217.** $\frac{4b}{a-1}$. **220.** $\frac{a^2}{d^2}$.

223. $\frac{a^2+ab+b^2}{b(a+b)}$. **224.** $\frac{a^2+b^2}{b}$. **226.** $\frac{2ap^2(p-q)}{b}$. **227.** $\frac{1}{(x+y)^2}$

228. a^2-b^2. **229.** $\frac{(x+b)(x-c)}{(x+a)^2}$ **230.** $\frac{x}{(1-x)^2}$. **231.** $\frac{(a+b)^2}{ab}$.

234. $\frac{a}{x}$. **236.** $\frac{4ab}{a^2-b^2}$. **237.** $\frac{a}{x}$. **238.** $\frac{x}{x-y}$. **329.** $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{a^4}$.

240. $\frac{x^6-ax^5+a^5x-a^6}{a^3x^3}$. **241.** $\frac{1}{x}$. **242.** $\frac{3x}{4ay}$. **243.** $-2(1-a)^2$.

244. $-\frac{1}{2}$. **245.** $\frac{1-b}{a}$. **246.** $\frac{a^2(a-b)}{x}$. **247.** 3.

248. $\frac{(x+1)(x^2+y^2)}{x^2y}$. **249.** $\frac{(x-z)^2-y^2}{xyz}$. **250.** $\frac{x+y-z}{x-y+z}$.

§ 6. **257.** $\frac{1}{c^2d}$. **260.** $\frac{7c^2}{5ab}$. **262.** $\frac{4m^3n^2}{3x^2y^4z}$. **267.** $\frac{27xy}{14z}$.

271. $\frac{6cd^2}{65a^2b^2s^6}$. **273.** $\frac{a^{n+1}x^{n-1}}{b^{m-1}y^m}$. **274.** $\frac{a^{m+p}b^{m+n}}{x^{n+1}y^{p+2}}$. **275.** -1.

276. $-\frac{2}{3}$. **277.** $\frac{1}{3(x-y)}$. **278.** $\frac{3(a-b)^2}{b}$. **279.** $\frac{x(2x+y)}{y^2}$.

280. $\frac{3p}{p-q}$. **281.** a^2-b^2. **282.** $\frac{1-x+x^2}{a^2-b^2}$. **328.** $\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$.

284. $\frac{x+y-z}{x-y+z}$. **285.** $\frac{a^2-1}{(a+2)(a-3)}$. **286.** $\frac{(a+3)^2}{(a-3)(a-4)}$.

287. $\frac{(x-1)(x^2+1)}{x+1}$. **288.** $\frac{x^2-x-1}{x-3}$. **289.** $\frac{5p+2}{5p^2-2}$. **290.** $10\frac{2}{3}$.

291. $\frac{a+b}{c}$. **292.** $\frac{my-nx}{(m+n)y}$. **293.** $\frac{(ay-bx)y}{cx}$. **294.** $\frac{y(px^2-qyz)}{x(py^2+qxz)}$.

295. $\frac{m+n}{m-n}$. **296.** $\frac{2xy}{x^2+y^2}$. **297.** $\frac{x^2-2a^2}{ax}$. **299.** $-\frac{m^4+m^2n^2+n^4}{mn(m-n)^2}$

300. $\frac{12m}{5n}$. **301.** $\frac{a+1}{a-1}$. **302.** $\frac{a^2+ab-b^2}{ab+b^2-a^2}$. **303.** $\frac{p+3}{p+4}$.

304. $\frac{(3p+q)(q-6p)}{(q-2p)(q-p)}$. **305.** a. **306.** $\frac{1}{ab}$. **307.** 1.

308. $\frac{ab+ac+bc}{bc+ac-ab}$. **309.** $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. **310.** $\frac{a^2-b^2}{16a^2b^2}$.

§ 7. **314.** $-3\frac{3}{5}$. **316.** $\frac{45}{209}$. **318.** $-\frac{20}{21}$. **320.** $\frac{1}{26}$.

331. $-\frac{2x^2}{3a^4}$. **333.** $\frac{1}{x^2}$. **335.** $\frac{2}{3}a^3$. **339.** $\frac{ab}{a+b}$. **340.** $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$

341. $\frac{(a^n+b^n)^2}{4a^{2n}}$. **343.** $\frac{1}{a^nb^n}$. **353.** $(x^{-2}-q^{-2})(p^{-1}-y^{-1})^{-1}$.

355. $(m^{-3}+n^{-4})^3(x^{-5}-y^{-2})^{-2}$. **384.** $\frac{5b^4d^3}{a^3c^4}$. **386.** $2a^{n-m}b^6c^{2p-1}d^n$.

388. $-m^{14}+m^4-\frac{1}{m}\cdot$ **391.** $\frac{1}{a^6}-\frac{1}{b^{10}}\cdot$ **394.** $\frac{a^{2m}+a^m b^m+b^{2m}}{a^{2m}+b^{2m}}\cdot$

396. $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{a^3}\cdot$ **397.** $a^4-x^2-\frac{1}{a^2x^4}\cdot$ **398.** $3x+\frac{4}{x}\cdot$ **399.** $2+\frac{1}{x}\cdot$

400. $\frac{x}{6}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^3}$.

VI osa.

§ 1. **6.** $\frac{(a-b)^2}{a+b}\cdot$ **12.** $-\frac{a}{b}\cdot$ **23.** $a^2-4ab-b^2$. **26.** $\frac{2a^3}{a^2-b^2}\cdot$

32. $\frac{1}{a^2-b^2}\cdot$ **33.** $\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot$ **34.** $\frac{3}{4}(a+b)$. **57.** $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{x}\cdot$ **59.** $x=\frac{ab}{a-2b}\cdot$

60. $x=\pm\frac{ab}{a+b}\cdot$ **64.** $x=b-a,\ y=-a-b$. **66.** $x=\frac{(a+b)^2}{2},\ y=\frac{(a-b)^2}{2}\cdot$

§ 7. **121.** 10. **123.** $\frac{1}{2}\cdot$ **125.** 5. **126.** 6, 3. **127.** 12, 5.

128. 30. **130.** 2. **132.** 3. **134.** 13. **136.** 7. **139.** 2. **141.** 4.

142. $\frac{1}{5}\cdot$ **143.** 9. **144.** -6. **145.** 7. **146.** 5. **147.** 10.

148. 11. **149.** 6. **150.** 3.

§ 8. **156.** $a(c-b)$. **160.** $\frac{bc}{b+1}\cdot$ **162.** $\frac{pqr}{n(q+1)}\cdot$

165. $\frac{apq}{p^2-q^2}\cdot$ **166.** $\frac{pq(m-q)}{q-p}$, **167.** $\frac{b(a+c)}{a+1}\cdot$ **168.** a. **169.** p.

170. $-\frac{p}{2}\cdot$ **171.** 1. **172.** -2. **173.** $\frac{ac}{b+c}\cdot$ **174.** $\frac{ac}{a+2c}\cdot$

175. $\frac{cd}{ab+ac+bc}\cdot$ **176.** $\frac{ac(a^2-ac+c^2)}{a+c}\cdot$ **177.** $-\frac{2mn}{m+n}\cdot$

178. $\frac{7mn-3m^2}{m-3n}\cdot$ **179.** $\frac{8n^2-p^2-4q^2}{4(q-p+2n)}\cdot$ **180.** $\frac{12pq}{p+3q}\cdot$ **181.** $a^2b^2(a-b)$.

182. $\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{(a+b)^2}\cdot$ **183.** $\frac{3c(c-d)}{8d-3c}\cdot$ **184.** $\frac{c^2(d-c)}{d(c+d)}\cdot$ **185.** $5c$.

186. $\frac{c^2}{d-c}\cdot$ **187.** $2k$. **188.** l. **189.** 0. **190.** $\frac{2n^3+12mn^2-9m^3}{2(5n^2+3m^2)}$

191. $\frac{2a^2bc-a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2}{ac-ab-bc}\cdot$ **192.** $\frac{5a(a+b)}{2(a+4b)}\cdot$ **193.** $\frac{b^2c}{a}\cdot$

194. $\frac{c(4c^2-9d^2)}{8c^2+27d^2}\cdot$ **195.** k. **196.** $\frac{k}{k+1}\cdot$ **197.** $\frac{(m-n)(m+n)^2}{n^2(m-n)-(m+n)^2}$

198. $\frac{mn}{m+n}\cdot$ **199.** p^4. **200.** $p^2+q^2-r^2$.

§ 9. **202.** 6. **203.** —3. **204.** —7. **205.** $\frac{5}{2}$. **206.** $-\frac{5}{4}$. **207.** 4. **208.** 13. **209.** 5. **210.** 6. **211.** 2. **212.** 0, $-\frac{3}{5}$. **213.** 1. **214.** 0, $\frac{4}{3}$. **215.** 4. **216.** 8. **217.** $-\frac{3}{7}$. **218.** $-\frac{17}{2}$. **219.** 2, —3. **220.** 3, —5. **221.** $\frac{2-a^2}{a}$. **222.** 5. **223.** $\frac{c}{c-1}$. **224.** —4. **225.** $4a$. **226.** $-\frac{c}{6}$. **227.** $-\frac{7}{4}$. **228.** $\frac{k+l}{k-l}$. **229.** 2. **230.** $\frac{n^2}{m}$.

§ 10. **231.** 22, 16. **233.** 27, 54. **235.** 9, 36. **237.** 17, 5, 26. **239.** 11, 22, 33. **241.** 9, 12. **243.** 50, 35. **245.** 18, 28. **247.** 15, 49. **249.** 28, 33. **251.** 32, 64. **253.** 24, 96. **255.** 8. **257.** 18, 72. **259.** 36, 18. **261.** 70. **262.** 54. **263.** 15, 9, 16. **264.** 16, 14. **265.** 18, 20. **266.** 9, 3. **267.** 13, 7. **268.** 12. **269.** 6. **270.** 3 t. 9 m. **271.** 3200. **272.** 4, 5. **273.** 260. **274.** 440. **275.** 1200. **276.** $1\frac{7}{8}$ t. **277.** 12. **278.** 9. **279.** $1\frac{1}{2}$ t. **280.** 15. **281.** 210. **282.** 236. **283.** 7, 15, 48. **284.** 37. **285.** 8, 110. **286.** 33000, 1170. **287.** 7200. **288.** 3, 9. **289.** 3. **290.** 400, 700. **291.** 75. **292.** 84. **293.** 12, 9. **294.** $7\frac{1}{2}$. **295.** 16. **296.** 450, 270. **297**. 445. **298**. 24, 36, 60. **299**. 55. **300**. 1600, 4, 400. **301**. $\frac{s}{1+q}$. **302**. $\frac{a+m}{2+n}$. **303**. $\frac{bm-n}{a-b}$. **304**. $\frac{(a-b)m+bn}{n-m}$. **305**. $\frac{ap}{1+p+pq}$. **306**. $\frac{ck+bl}{ak-l}$. **307**. $\frac{a(br+m)}{a+b}$. **308**. $\frac{s+bn}{a+b}$. **309**. $\frac{d}{2(q-1)}$. **310**. $\frac{ac}{b-a}$. **311**. $\frac{m}{a-1}$. **312**. $\frac{100m}{100-p}$. **313.** $\frac{d}{a-b}$. **314.** $\frac{abn}{b-a}$. **315.** $\frac{ab}{a+b}$. **316**. $\frac{(a-1)m}{ak}$. **317.** $\frac{1000000m}{(100+p)^3}$. **318**. $\frac{a(h+1)}{h}$, $a(h+1)$. **319**. $\frac{nu}{2t(t+u)}$. **320.** $\frac{uv}{t+u}$. **321**. $\frac{(m-b)d+s}{a-b}$. **322.** $\frac{bm}{ab-m}$. **323.** $\frac{amp}{mp+np+nq}$. **324.** $\frac{nu}{2t(t+u)}$. **325.** $\frac{n-m}{p-1}$. **326.** $\frac{d-v(h+n)}{n}$. **327.** $\frac{100a(100+pn)}{p^2n^2}$. **328.** $\frac{d-hu}{u+v}$. **329.** $\frac{an-mn^2-mn-m}{n^2+n+1}$. **330.** $\frac{2mnp}{mn+mp+np}$.

§ 11. **332.** 7; 8. **334.** 5; 6. **336.** 3; 2. **338.** 16; 7. **340.** 2; 3. **342.** $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$. **344.** 2; $-\frac{1}{11}$. **345.** 6; 12. **346.** 12; 12. **347.** 6; 12. **348.** 10; 5. **349.** 4; 3. **350.** 18; 6. **351.** 7; 5. **352.** 12; 6. **353.** 3; 2. **354.** 4; 5. **355.** 4; 16. **356.** 1; 3. **357.** 3; 6. **358.** 2; 5. **359.** 8; 5. **360.** 3; 2. **361.** 5; 6. **362.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **363.** 21; 20. **364.** 3; 4. **365.** 9; 7. **366.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$. **367.** $8\frac{3}{8}$; $8\frac{1}{4}$. **368.** 8; 2. **369.** $\frac{3}{5}$; $-\frac{2}{3}$. **370.** 5; 3. **373.** $a+b$; $a-b$. **374.** $\frac{ac+bd}{a^2+b^2}$; $\frac{bc-ad}{a^2+b^2}$ **376.** $5a$; $4b$. **378.** $\frac{a^2}{a-b}$; $\frac{b^2}{b-a}$. **380.** $\frac{a}{b}$; 1. **381.** $\frac{2}{a\pm b}$. **382.** $\frac{c}{b}$; $\frac{a}{d}$. **383.** $\frac{a+b}{c}$. **384.** $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$. **385.** $\frac{ad+bc}{cd+be}$; $\frac{ad+bc}{c^2-ae}$. **386.** $\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$; $\frac{c(a^2+b^2)}{2ab}$. **387.** $\pm\frac{c}{a+b}$. **388.** $\frac{a(a\pm b)}{a\mp b}$. **389.** $2a\pm b$. **390.** $c^3\pm d^3$. **392.** 1; 3; 5. **394.** 15; 12; 10. **396.** 1; 1; 1. **398.** 2; 3; 4. **400.** 2; -1; 1. **402.** 12; 18; 35. **404.** 26; 65; 91. **406.** 9; 8; 11. **407.** 1; 2; 3. **408.** 6; -2; 4. **409.** 12; 24; 36. **410.** 24; 60; 120. **411.** $\frac{3}{4}$; 3; $\frac{5}{4}$. **412.** $1\frac{1}{5}$; $-2\frac{2}{3}$; $3\frac{3}{4}$. **414.** $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$. **416.** 1; 3; 4. **417.** 2; 3; 4. **418.** 5; 4; 3. **419.** 4; 2; 1. **420.** 1; 2; 3. **422.** $\frac{b+c}{2}$; $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a-c}{2}$. **424.** c; b; a. **425.** $\frac{bc}{a}$; $\frac{ac}{b}$; $\frac{ab}{c}$. **426.** $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. **427.** $a+b$. **428.** $-abc$. **429.** $\frac{a(b+c)}{2}$. **430.** $\frac{abc}{ab+bc+ac}$. **431.** 1; 4; 2; 3. **432.** 2; 3; 4; 5. **433.** 1; 3; 4; 2. **434.** 1; 2; 3; 4. **435.** 1; 1; 2; 2. **436.** 1; 1; 3; 2. **437.** 1; 3; 4; 2. **438.** 2; 3; 4; 5; 1. **439.** 4; 6; 2; 6; 3. **440.** 2; 1; 4; 5; 3.

§ 12. **441.** 33; 14. **442.** 85; 55. **443.** 36; 24. **444.** 10; 15. **445.** 60; 50. **446.** $\frac{2}{7}$. **447.** 18; 7. **448.** 29. **449.** 63. **450.** 84. **451.** 3600; 3000. **452.** 2200; 1000. **453.** 900; 400. **454.** 32000; 24000. **455.** 20. mk; 200 mk. **456.** 88; 40. **457.** 15; 12. **458.** 20; 35.

459. 29; 32. **460.** 18; 4. **461.** 24; 48. **462.** 30; 40. **463.** 24; 36. **464.** 2880; 5. **465.** 12; 8. **466.** 3000; 4. **467.** 1; 7. **468.** 24; 14. **469.** 15; 5. **470.** 32; 28. **471.** 78; 85; 63. **472.** 70; 50; 130. **473.** 640; 720; 840. **474.** 13; 17; 19. **475.** 50; 65; 75. **476.** 9; 7; 12. **477.** 70; 90; 120. **478.** 60; 40; 25. **479.** 50. **480.** 51; 30; 9. **481.** 854. **482.** 2000; 3000; 5000. **483.** 324. **484.** 13; 7; 4. **485.** 432. **486.** 12; 8; 7. **487.** 1600; 2400; 4000. **488.** 8; 16; 10. **489.** 35; 25; 40. **490.** 12; 18; 8. **491.** $\frac{a+bm}{mn-1}$; $\frac{an+b}{mn-1}$.

492. $\frac{d(m+n)}{2mn}$; $\frac{d(n-m)}{2mn}$. **493.** $\frac{m(bp-aq)}{mq-np}$; $\frac{n(bp-aq)}{mq-np}$.

494. $\frac{d(b+n-m)}{ab+an+bm}$; $\frac{d(a+m-n)}{ab+an+bm}$. **495.** $\frac{(c-b)n}{a-b}$; $\frac{(a-c)n}{a-b}$.

496. $\frac{am-bn}{a-b}$; $\frac{an-bm}{a-b}$. **497.** $\frac{dmp}{mp+nq}$; $\frac{dnq}{mp+nq}$.

498. $\frac{amp}{mp-nq}$; $\frac{anq}{mp-nq}$. **499.** $\frac{a(m+n)(ps-qr)}{(r+s)(np-mq)}$; $\frac{a(p+q)(nr-ms)}{(r+s)(np-mq)}$.

500. $\frac{a(p-q)[(p+q)(ms-nr)+(m+n)(ps-qr)]}{(p+q)(r-s)(mq-pn)}$; $\frac{a(m-n)[(m+n)(ps-qr)+(p+q)(ms-nr)]}{(m+n)(r-s)(mq-pn)}$

Sisu.

I osa. Algebraline sümboolika.

II osa. Tehted suurustega.

III osa. Avalduste muundamine.

IV osa. Avalduste teguriteks lahutamine.

V osa. Murruliste avalduste muundamine.

VI osa. Võrduste muundamine.

A. Võrded (proportsioonid).

B. Graafilise kujutamise ja funktsioonide sissejuhatus.

C. Esimese astme võrrandite lahendamine ja kokkuseadmine.

Ring = $2\pi r$
Ringi pindala = $\cancel{2}\pi r^2$