ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ КОНФЕРЕНЦИИ „МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА"

ТАРТУ 1983

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ КОНФЕРЕНЦИИ „МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА"

28-30 сентября 1983

ТАРТУ 1983

Настоящая конференция посвящена 70-летию со дня рождения проф. Г.Кангро.

Гуннар Кангро (1913 - 1975) окончил Тартуский ун-т, работал ассистентом в Таллинском политехн. ин-те в 1936-1941, во время Великой Отечественной войны работал стипендиатом Совнаркома ЭССР в Челябинском ин-те механ. сельск. хоз-ва и в Московском госуниверситете. С ноября 1944 года до конца жизни он работал в Тартуском госуниверситете, доцент (1946), д-р физ.-матем. наук (1948), профессор (1951), зав. каф. матем. анализа (1959-1975), член-корр. АН ЭССР (1961), засл. деятель науки ЭССР (1965).

Г.Кангро был научным руководителем более 20 аспирантов, которые защитили диссертации по алгебре, теории суммируемости, методам вычислений, рядам Фурье, теории приближения функций и др. Им написаны учебники по алгебре и математическому анализу.

ОБ ОДНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

М. Абель

1. Пусть A – секвенциально полная отделимая локально m-выпуклая алгебра с единицей e_A над C, топология которой определена системой $\{p_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ непрерывных полунорм, и $\Gamma(A)$ – множество всех бесконечных матриц $\mathfrak{A}=(a_{nk})$ над A, удовлетворяющих условиям

1) $q_\lambda(\mathfrak{A}) = \sup\limits_n \sum\limits_k^\infty p_\lambda(a_{nk})<\infty$ при всех $\lambda\in\Lambda$;

2) последовательность $(a_{nk})_{n\in N}$ сходится в A для каждого $k\in N$;

3) последовательность $(\sum\limits_k a_{nk})$ сходится в A.

Для каждого $k\in N$ пусть a_k обозначает предел последовательности $(a_{nk})_{n\in N}$ в алгебре A. Множество тех матриц $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ над A, которые удовлетворяют условиям 1),2) и

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k p_\lambda(a_{nk}-a_k) = 0$ при всех $\lambda\in\Lambda$

обозначим через $\Lambda(A)$. Нетрудно заметить, что $\Lambda(A)\subset\Gamma(A)$.

Пусть, далее,

$$\Delta(A)=\{(a_{nk})\in\Gamma(A): a_{nk}=\theta_A \text{ при } k>n\},$$

где θ_A – нулевой элемент алгебры A, $\mathcal{B}_A$ – одно из алгебр $\Gamma(A)$ или $\Delta(A)$ и

$$\chi_A(\mathfrak{A}) = \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} - \sum a_k$$

для каждой матрицы $\mathfrak{A}=(a_{nk})\in\Gamma(A)$.

Определяя алгебраические операции на $\mathcal{B}_A$ как обычно в случае матриц и топологию семейством полунорм $\{q_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$, множество $\mathcal{B}_A$ является отделимой локально m-выпуклой некоммутативной $\mathcal{B}_C$-алгеброй над C с единицей $\mathcal{E}=(\delta_{nk}e_A)$, где $\delta_{nk}=0$ при $k\neq n$ и $\delta_{nn}=1$ при всех $n\in N$ (см. [2]).

Для каждой топологической алгебры A над C и каждой топологической A-алгебры B над C через $hom(B,A)$ обозначим пространство всех нетривиальных непрерывных A-гомоморфизмов B на A, наделенное слабой топологией. Кроме того, через μ обозначим вложение A в $\mathcal{B}_A$, определяемое равенством $\mu(a)=(\delta_{nk}a)$ при всех $a\in A$. Если, кроме вышеуказанного, алгебра A обладает свойствами

(I) алгебра A коммутативна,

(2) представление Гельфанда алгебры A является топологическим изоморфизмом A на $C(hom(A,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ в топологии равномерной сходимости на конечных множеств, покрывающих $hom(A,\mathbb{C})$.

(3) пространство $hom(A,\mathbb{C})$ локально равностепенно непрерывно,

то (см. [2]) алгебра $\mathcal{B}_A$ удовлетворяет следующим условиям :

(а) $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-подмодуль, порожденный подалгеброй $\mu(A)$, всюду плотен в $\mathcal{B}_A$;

(б) для каждого $\varphi\in hom(A,\mathbb{C})$ существует $\Phi_\varphi\in hom(\mathcal{B}_A,\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ такой, что $\Phi_\varphi(\mu(a))=\gamma\varphi\circ\mu(a)$ при всех $a\in A$.

Для каждой топологической алгебры A через $rad A$ обозначим радикал алгебры A, через $\mathfrak{M}_\ell(A)$ ($\mathfrak{M}_z(A)$ и $\mathfrak{M}(A)$) — множество всех максимальных замкнутых левых (соответственно, правых и двусторонних) идеалов алгебры A, а через $\mathfrak{M}_1(A)$ - подмножество тех идеалов из $\mathfrak{M}(A)$, коразмерность которых равна единице. Пусть, далее, $a^\wedge(\varphi)=\varphi(a)$ для каждых $a\in A$ и $\varphi\in hom(A,\mathbb{C})$, и $\mathfrak{A}^\wedge$- функция $hom(A,\mathbb{C})$ в $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, определяемая равенством $\mathfrak{A}^\wedge(\varphi)=(a_{nk}{}^\wedge(\varphi))$ при всех $\varphi\in hom(A,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{A}=(a_{nk})\in\mathcal{B}_A$. Пусть $\mathfrak{N}_A$ обозначает одно из множеств $\mathfrak{M}_\ell(\mathcal{B}_A)$, $\mathfrak{M}_z(\mathcal{B}_A)$ или $\mathfrak{M}(\mathcal{B}_A)$.

Как известно (см. [4], стр. I79-I80), множества $\Gamma(\mathbb{C})$ и $\Delta(\mathbb{C})$ являются некоммутативными банаховыми алгебрами с единицей над $\mathbb{C}$. Однако эти алгебры имеют различные алгебраические структуры. Например, алгебра $\Gamma(\mathbb{C})$ полупроста, а алгебра $\Delta(\mathbb{C})$ таковой не является (см. [5], теорема I). В статье [5], теорема 2, показано, что

$$rad\,\Delta(A)=\{(c_{nk})\in\Lambda(A)\cap\Delta(A):\ c_{nn}=0\ \forall n\in\mathbb{N}\}.$$

Кроме того, $hom(\Gamma(\mathbb{C}),\mathbb{C})=\{\chi_{\mathbb{C}}\}$ (см. [3], стр. I3), а множество $hom(\Delta(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ содержит, кроме гомоморфизма $\chi_{\mathbb{C}}$, все гомоморфизмы φ_n, определенные равенством $\varphi_n(C)=c_{nn}$ при всех $C=(c_{nk})\in\Delta(\mathbb{C})$.

Учитывая вышеуказанное и результаты статей [I,2], справедлива

<u>Теорема.</u> Пусть A - секвенциально полная отделимая локально m-выпуклая алгебра с единицей над $\mathbb{C}$, обладающая свойствами (I),(2) и (3). Тогда справедливы следующие ут-

верждения:

I) алгебра $\Gamma(A)$ полупроста;

2) $\mathrm{rad}\,\Delta(A) =$

$$= \{(a_{nk}) \in \Delta(A) : a_{nk}\hat{\ }(\varphi) \in \Lambda(\mathbb{C})\ \forall \varphi \in \hom A,\ a_{nn} = \theta_A\ \forall n \in \mathbb{N}\};$$

3) каждый $\Phi \in \hom(\Gamma(A), \mathbb{C})$ определяет $\varphi \in \hom(A, \mathbb{C})$ такой, что $\Phi = \varphi \circ \chi_A$ и пространства $\hom(\Gamma(A), \mathbb{C})$ и $\hom(A, \mathbb{C})$ гомеоморфны;

4) каждый $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_1(\Gamma(A))$ определяет $\varphi \in \hom(A, \mathbb{C})$ такой, что

$$\mathcal{M} = \{(a_{nk}) \in \Gamma(A) : \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk}\hat{\ }(\varphi) = \sum_k a_k\hat{\ }(\varphi)\};$$

5) каждый $\Phi \in \hom(\Delta(A), \mathbb{C})$ определяет $\varphi \in \hom(A, \mathbb{C})$ и $\psi \in \hom(\Delta(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ такие, что $\Phi(\mathfrak{A}) = \psi[\mathfrak{A}\hat{\ }(\varphi)]$ при всех $\mathfrak{A} \in \Delta(A)$ и пространства $\hom(\Delta(A), \mathbb{C})$ и $\hom(\Delta(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \times \hom(A, \mathbb{C})$ гомеоморфны;

6) каждый $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}_A$ определяет $\varphi \in \hom(A, \mathbb{C})$ и $M \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ так, что

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{M,\varphi} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_A : \mathfrak{A}\hat{\ }(\varphi) \in M\},$$

причем отображение $(M, \varphi) \to \mathcal{M}_{M,\varphi}$ есть биекция

$$\mathfrak{N}_{\mathbb{C}} \times \hom(A, \mathbb{C}) \to \mathfrak{N}_A.$$

В заключение отметим, что $\mathcal{B}_A$ является некоммутативной банаховой $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-алгеброй с единицей, если A – банахова алгебра с единицей. Кроме того, алгебры $\mathcal{B}_A$ и $C(\hom A, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ (всех $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-значных непрерывных функций на $\hom A$) изоморфны, если A – коммутативная B^*-алгебра с единицей.

Литература

I. Абель М., Топологические A-алгебры (в печати).

2. Абель М., Об одной топологической алгебре матриц, сохраняющих сходимость. Уч. зап. Тартуск. ун-та (в печати).

3. Brown H.I., Kerr D.R., Stratton H.H., The structure on B[c] and extensions of the consept of conull matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 22, №1, 7-14.

4. Maddox I.J., Elements of functional analysis. Cambridge, 1970.

5. Wilansky A., Zeller K., Banach algebras and summability. Illinois J. Math. 1958, 2, 378-385.

О ЗАМКНУТОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ В МЕТРИЗУЕМЫХ Q-АЛГЕБРАХ

М. Абель и В. Киппер

I. Топологическая алгебра A над $\mathbb{F}$ (где $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) называется Q-алгеброй, если множество квазиобратимых элементов алгебры A открыто (в топологии алгебры A). Хорошо известно (см., например, [I], стр. I7), что банахова алгебра является Q-алгеброй, но существуют Q-алгебры, которые не являются банаховыми (см. [3,6,7]).

В статье [3] приведен пример такой банаховой алгебры, которая содержит максимальные идеалы, не являющиеся замкнутыми. В той же статье при помощи теоремы Варапоулоса (см. [I], следствие I2, или [8], теорема 6.4) показано, что все максимальные левые (правые) идеалы банаховой алгебры замкнуты, если она содержит ограниченную правую (левую) аппроксимативную единицу.

Известно, (см. [4], стр. 77), что регулярные максимальные односторонние и двусторонние идеалы в Q-алгебрах замкнуты. При этом существуют (см. выше) Q-алгебры, в которых не все максимальные идеалы замкнуты. Чтобы описать условия замкнутости всех максимальных идеалов в метризуемых Q-алгебрах, через $c_0(A)$ обозначим множество всех последовательностей $(a_n)\subset A$, которые стремятся к нулю в топологии алгебры A.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть A – метризуемая Q-алгебра над $\mathbb{F}$. Если выполнено условие

(α) для каждой $(a_n)\in c_0(A)$ существуют $(b_n)\in c_0(A)$ и $b\in A$ такие, что $a_n=b_nb$ ($a_n=bb_n$) при всех $n\in\mathbb{N}$, то каждый максимальный левый (правый) идеал алгебры A замкнут.

Доказательство. Пусть L – максимальный левый идеал алгебры A и a_0 – любой элемент замыкания идеала L в топологии алгебры A. Тогда (ввиду метризуемости алгебры A) существует последовательность $(a_n)\subset L$, которая сходится к a_0 в топологии алгебры A. Пусть, далее, $b_1 = a_0$ и $b_n = a_0 - a_n$ при $n>1$. Поскольку $(b_n) \in c_0(A)$, то по условию (α) существуют последовательность $(c_n) \in c_0(A)$ и $c \in A$ такие, что $b_n = c_n c$ при всех $n \in N$.

Пусть $L_c = \{a \in A : ac \in L\}$. Если $c \in L$, то $L_c = A$. В этом случае множество L_c замкнуто в топологии алгебры A. Пусть, теперь, $c \in A \setminus L$. Тогда L_c образует левый идеал алгебры A. Поскольку множество $A_1 = \{ac + l : a \in A, l \in L\}$ содержит L, то $A_1 = A$. Поэтому $c = a'c + l'$ для некоторых $a' \in A$ и $l' \in L$. Значит, $(aa' - a)c = -al' \in L$ для каждого $a \in A$. Таким образом, идеал L_c регулярен (см. [4]) и $a' \in A$ является правой единицей по модулю L_c.

Чтобы показать максимальность идеала L_c, предположим, что существует левый идеал M алгебры A, содержащий L_c и некоторый элемент $m \in A \setminus L_c$. Так как $mc \notin L$ и множество $A_2 = \{amc + l : a \in A, l \in L\}$ содержит L, то $A_2 = A$. Поэтому $c = a''mc + l''$ при некоторых $a'' \in A$ и $l'' \in L$. Учитывая это, получим $(a' - a'a''m)c = a'l'' \in L$. Поэтому $a' - a'a''m \in L_c$ и $a' = (a' - a'a''m) + a'a''m \in M$, что не возможно. Таким образом L_c является регулярным максимальным левым идеалом алгебры A и поэтому L_c замкнут в топологии алгебры A.

Нетрудно заменить, что $a_n = z_n c$ при всех $n \in N$, где $z_1 = c_1$ и $z_n = c_1 - c_n$ при $n > 1$. Поскольку последовательность $(z_n) \in L_c$ и сходится к c_1 в топологии алгебры A, то $c_1 \in L_c$. Отсюда ясно, что $a_0 \in L$.

Доказательство для правых идеалов проводится аналогично.

2. Пусть A - локально m-выпуклая алгебра над F (см. [4]), топология которой определена системой $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ непрерывных полунорм. Сеть $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A$ называется ограниченной левой аппроксимативной единицей алгебры A, если

1) $\lim_\lambda p_\alpha(e_\lambda a - a) = 0$ при всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $a \in A$

и

2) $\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \sup_{\lambda \in \Lambda} p_\alpha(e_\lambda) < \infty$.

Ограниченная правая аппроксимативная единица алгебры A определяется аналогично.

В статье [2] (см. также [5]) показано, что каждая пол-

ная метризуемая локально m-вынуклая алгебра A над C удовлетворяет условию (α), если A содержит ограниченную правую (левую) аппроксимативную единицу. Учитывая это, имеет место

Следствие I. Пусть A – полная метризуемая локально m-выпуклая Q-алгебра над C, содержащая ограниченную правую(левую) аппроксимативную единицу. Тогда каждый максимальный левый (правый) идеал алгебры A замкнут.

3. В [8], стр. 34, отмечено (без доказательства), что теорема факторизации банаховых алгебр остается справедливой и для полных локально ограниченных алгебр над C. Поэтому такие алгебры удовлетворяют условию (α). Кроме того, полные локально ограниченные алгебры являются метризуемыми Q-алгебрами (по лемме 3.6 из [7]). Следовательно, по теореме I, справедливо

Следствие 2. Пусть A – полная локально ограниченная алгебра над C, содержащая ограниченную правую(левую) аппроксимативную единицу. Тогда каждый максимальный левый (правый) идеал алгебры A замкнут.

Литература

1. Bonsall F.F., Duncan J., Complete normed algebras. Berlin - N.Y., 1973.
2. Crow I.G., Factorization in Frechet algebras. J. London Math. Soc., 1969, 44, 607-611.
3. Green M.D., Maximal one-sided ideals in Banach algebras. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1976, 80, 109-111.
4. Michael E., Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc., 1952, 11, 1-79.
5. Summer M.K., Factorization in Frechet modules. J. London Math. Soc., 1972, 5, №2, 243-248.
6. Želazko W., Metric generalizations of Banach algebras. Rozprawy Matematyczne 47, Warzawa, 1965.
7. Želazko W., Selected topics in topological algebras. Lecture Notes Series № 31, Aarhus Univ., 1971, 1-176.
8. Želazko W., Banach algebras. Warszawa, 1973.

$\mathcal{J}_0$ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ РАДИКАЛОМ КУРОША-АМИЦУРА

К. Каарли

В настоящей заметке строится контрпример, показывающий, что известный в теории почти-колец радикал $\mathcal{J}_0$ не является радикалом в смысле Куроша-Амицура. Необходимые сведения о почти-кольцах читатель найдет в [I].

Пусть $A = \langle a_0 \rangle$ – циклическая группа порядка 4 и B – счетная группа экспоненты 2. Представим элементы B как 0,I-последовательности с конечным числом единиц и пусть C – подгруппа в B, состоящая из последовательностей с четным числом единиц. Положим $G = A \dotplus B$ и отождествим A и B с их каноническими образами в G.

Зададим на B преобразование φ правилом

$$\varphi(0) = (I,0,0,\dots),$$

$$\varphi(\underbrace{0,\dots,0}_{k},I, x_1, x_2,\dots) = (\underbrace{0,\dots,0}_{k+1},I, x_1, x_2,\dots)$$

и определим на G преобразование s_0 формулой

$$(a+b)s_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a \neq a_0 \\ a_0 + \varphi(b), & \text{если } a = a_0 . \end{cases}$$

Пусть S – почти-кольцо преобразований на G, порожденное единственным элементом s_0. Отметим, что фактически S состоит из всех "полиномов" $n_1 s_0 + \dots + n_k s_0^k$. Кроме S рассмотрим почти-кольцо T, состоящее из всех преобразований t на G, удовлетворяющих условиям:

I) t постоянно на $C \setminus \{0\}$, причем $(C \setminus \{0\})t \in \{0, 2a_0\}$;

2) t постоянно на $B \setminus C$, причем $(B \setminus C)t \in 2A + B$;

3) $g \in G$ и $gt \neq 0 \Rightarrow g \in B \setminus \{0\}$.

Теорема. Пусть N – почти-кольцо преобразований группы G, порожденное почти-кольцами S и T. Тогда

I) S является идеалом, а T – правым идеалом в N и $N = S \dotplus T$;

2) $S = \mathcal{J}_0(N)$;

3) B является S-идеалом в G и G/B – 0-неприводимый S-модуль. Следовательно, $S \neq \mathcal{J}_0(S)$.

Литература

I. Каарли К., Минимальные идеалы в почти-кольцах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, № 366, 105-142.

О СВОБОДЕ ПОЛУГРУППЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ

У. Кальюлайд

I. Известна роль сплетений групп при доказательстве свободно-порожденности неразложимыми многообразиями полугруппы нетривиальных групповых многообразий; теор. 23.4 (Шмелькина и Нейманов) в [4]. Конструкция треугольного произведения позволила автору доказать, что свободна также полугруппа многообразий представлений (над любым полем) полугрупп, [2]. Для теоремы Шмелькина-Нейманов имеется, однако, и другой путь доказательства, использующий иную технику, [6]. Руководствуясь этим, приведем здесь еще одно доказательство отмеченной выше теоремы из [2], основанное на рассуждениях работы [5]. При этом уместно сформулировать этот результат в следующей форме.

2. <u>Теорема</u>. Пусть K - поле, а F - свободный моноид с элементами счетного множества $X=\{x_1, x_2, \dots\}$ в качестве системы свободных образующих. Полугруппа собственных специальных идеалов полугруппового кольца $K[F]$ свободна.

<u>Доказательство</u>. В [5] отмечается, что кольцо $R=K[F]$ является левым и правым FI-кольцом без нетривиальных инвариантных справа элементов. Следовательно, можно воспользоваться теоремой 5 из той же [5]; согласно этой теореме, полугруппа $\mathcal{R}$ всех ненулевых двусторонних идеалов кольца R свободна с множеством всех неразложимых собственных идеалов R в качестве системы свободных образующих. Далее, заметим, что произведение собственных специальных идеалов кольца R будет снова собственным специальным идеалом в R, и этим в $\mathcal{R}$ выделяется подполугруппа γ^{ν} таких идеалов. Теорема будет доказана, если для любых идеалов A и B из $\mathcal{R}$ таких, что $AB\in\gamma^{\nu}$ мы покажем $A\in\gamma^{\nu}$ и $B\in\gamma^{\nu}$. Это последнее утверждение и будем доказывать теперь.

Заметим, что из однозначности разложения идеала $A\in\gamma^{\nu}$ на неразложимые множители вытекает инвариантность всех этих множителей относительно всякого специального автоморфизма кольца R. Название "специальные" носят те автоморфизмы (эндоморфизмы) кольца R, которые индуцированы автоморфизмами (эндоморфизмами) моноида F.

Далее, удобно ввести следующее понятие. Эндоморфизм кольца R назовем особым, если он индуцирован таким эндоморфизмом η моноида F, что $X \subset X^{\eta}$. Покажем, что для любого особого эндоморфизма $\eta : R \to R$ имеем $A \subset A^{\eta}$. Действительно, пусть u - любой элемент в A, а подмножество $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ такое, что $u \in K[x_1, \dots, x_n]$. В силу особости η существуют такие $x_{i'} \in X$, что $x_{i'}{}^{\eta} = x_i$, $i \in n$. Рассмотрим подстановку γ на X такую, что $x_i^{\gamma} = x_{i'}$, $i \in n$, и продолжим ее до автоморфизма R. Ясно, что γ является специальным автоморфизмом R и согласно сделанному выше замечанию имеем поэтому $A^{\gamma} = A$. По нашей конструкции $u^{\gamma\eta} = u$; следовательно, $u = u^{\gamma\eta} \in A^{\gamma\eta} = A^{\eta}$. Этим $A \subset A^{\eta}$ доказано.

Завершаем теперь доказательство основного утверждения. Из особости η и специальности идеала AB вытекает

$$AB \supset (AB)^{\eta} = A^{\eta} B^{\eta} \supset A^{\eta} B \supset AB,$$

а тем самым и соотношение $AB = A^{\eta} B$. Особость η влечет также $R^{\eta} = R$. Поэтому A^{η} - идеал в R и теперь из свободы полугруппы $\mathcal{R}$ следует, в частности, что $A = A^{\eta}$. Далее, пусть μ - любой специальный эндоморфизм кольца R. Для всякого $u \in A$ можно построить особый эндоморфизм $\eta : R \to R$, совпадающий с μ на элементе u. Действительно, для всех $x_i \in S$ полагаем $x_i{}^{\eta} = x_i{}^{\mu} \in F$, а на дополнении $X \setminus S$ определяем η как произвольную сюръекцию $X \setminus S \twoheadrightarrow X$. Полученное таким образом отображение $\eta : X \to F$ продолжим до специального эндоморфизма $\eta : R \to R$, который будет особым по построению. Имеем $u^{\mu} = u^{\eta} \in A^{\eta} = A$, что доказывает специальность идеала A. Аналогично доказывается специальность B. Теорема доказана.

3. В кольце $K[F]$ можно построить свободное дифференциальное исчисление Фокса [3] и вывести, в частности, все результаты, которые реферируются на первых двух страницах работы [I]; опускаем детали этого перевода свободного исчисления в полугрупповую ситуацию. Имея это, можно доказать

следующее утверждение.

Предложение I. Пусть многообразие Θ линейных представлений полугрупп задается битождествами вида $y \circ u \equiv 0$, где в запись элементов $u \in K[F]$ входят лишь n элементов из X. Тогда равенство $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2 \cdot \ldots \cdot \Theta_m$ при $m > n$ невозможно.

Из нее немедленно вытекает

Предложение 2. Если в условиях и обозначениях предложения I дополнительно имеем $n = 1$, то многообразие Θ неразложимо.

Доказательство предложения I проводится параллельно соответствующему доказательству в групповом случае, [I]. Несколько видоизменить надо лишь начало доказательства леммы I на стр. I209-I2I0 работы [I], где выводится определенного вида выражение для элемента u. Но это выражение имеется для элемента u также в кольце $K[F]$; следует учесть соотношения

$$x_i x_j \equiv x_j x_i \,(mod\, \Delta^2) \quad \text{и} \quad x_i^t - 1 \equiv t(x_i - 1)(mod\, \Delta^2),$$

которые выполнены для любых $x_i, x_j \in X$ и любого $t \in \mathbb{N}$. Дальнейшие подробности опускаем.

Литература

I. Гринберг А.С., Об умножении многообразий пар. Сибирск. матем. ж., I973, 6, I207-I2I5.

2. Кальюлайд У., Треугольные произведения представлений полугрупп и ассоциативных алгебр. Успехи матем. наук, I977, 4, 253-254.

3. Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов. Москва, I967.

4. Нейман Х., Многообразия групп. Москва, I969.

5. Bergman G., Lewin J., The semigroup of ideals of a fir is (usually) free. J. London Math. Soc., 1975, 11, 21-31.

6. Dunwoody M., On product varieties. Math. Zeitschr., 1968, 104, 91-97.

СИЛЬНАЯ ПЛОСКОСТНОСТЬ ПЛОСКИХ ФАКТОРПОЛИГОНОВ РИСА

М. Кильп

Пусть S -моноид. Левый S-полигон М называется слабо плоским, если функтор $\otimes M$ сохраняет все включения $I\subseteq S$ где I – правый идеал моноида S. Левый S-полигон М называется плоским, если $\otimes M$ сохраняет все мономорфизмы правых S-полигонов (см. [I]). Левый S-полигон М называется сильно плоским, если $\otimes M$ сохраняет все уравнители и коуниверсальные квадраты правых S-полигонов (см. [2]). В [I] показано, что факторполигон Риса S/I моноида S по левому идеалу I является слабо плоским тогда и только тогда, когда S/I является плоским.

<u>Теорема</u>. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

(I) все плоские левые факторполигоны моноида S являются сильно плоскими,

(2) либо в S существуют элементы x,y такие, что $xS\cap yS=\emptyset$, либо S удовлетворяет следующим трем условиям:

а) для произвольных $x,y\in S$ существует $z\in S$ такой, что $xz=yz$,

б) из $I\neq e=e^2\in S$ следует $e=0$,

в) для любой последовательности

$$a_I, a_2, \ldots, a_n, a_{n+I}, \ldots$$

элементов моноида S, где $a_n=a_na_{n+I}$ для всех натуральных n, существует такое натуральное число N, что $a_N=a_{N+I}=\ldots=I$.

Литература

I. Кильп М., Классификация моноидов по свойствам их факторполигонов Риса. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1983, <u>640</u>, 29-36.

2. Stenström,B., Flatness and localization over monoids. Math. Nachr., 1972, 315-334.

О ПОЛУГРУППЕ ЭНДОМОРФИЗМОВ ДЕЛИМОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

П.Пуусемп

Для произвольной группы G обозначим через $\mathrm{End}\,G$ полугруппу всех ее эндоморфизмов. Имеет место

Теорема. Если полугруппа всех эндоморфизмов некоторой группы G изоморфна полугруппе $\mathrm{End}\,\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ – непериодическая делимая абелева группа, то группы G и $\mathfrak{D}$ изоморфны.

Прежде чем доказать теорему, докажем три леммы.

Лемма I. Если $\mathrm{End}\,G \simeq \mathrm{End}\,Q$ или $\mathrm{End}\,G \simeq \mathrm{End}\,C(p^\infty)$, то группа G коммутативна (Q – аддитивная группа всех рациональных чисел, $C(p^\infty)$ – группа типа p^∞).

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Тогда в полугруппе $\mathrm{End}\,G$ всегда из равенства $\alpha\cdot\beta=\beta$ следует $\beta=0$ или $\alpha=1$, ибо аналогичным свойством обладают полугруппы $\mathrm{End}\,Q$ и $\mathrm{End}\,C(p^\infty)$. Полугруппа $\mathrm{End}\,G$ является коммутативной. Поэтому группа всех внутренних автоморфизмов группы G также коммутативна. Следовательно, коммутант G' группы G содержится в центре $Z(G)$ группы G и отображение $h^*: G \to G$, определяемое равенством $gh^*=[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh$, является эндоморфизмом группы G при каждом $h\in G$. Если $a\in G$, то внутренний автоморфизм $\hat{a}$, порожденный элементом a, удовлетворяет равенствам $g(h^*\cdot\hat{a})=[g,h]\hat{a}=[g,h]=gh^*$, т.е. $h^*\cdot\hat{a}=h^*$. Из последнего равенства следует, что $h^*=0$ или $\hat{a}=1$. Так как h, a – произвольные элементы из группы G, то отсюда следует коммутативность группы G. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $\mathrm{End}\,G \simeq \mathrm{End}\,Q$, где G – некоторая группа, то $G \simeq Q$.

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{End}\,G \simeq \mathrm{End}\,Q$. Тогда по лемме I группа G является абелевой. Каждый ненулевой эндоморфизм группы G является автоморфизмом, ибо аналогичным свойством обладает группа Q. Поэтому $G \simeq Q$ или $G \simeq C_p$, p – простое число, где C_p – циклическая группа порядка p (см. [4], предложение). Но группа C_p определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп (см. [I], теорема 4.2). Следовательно, $G \simeq Q$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если $End\,G \simeq End\,D$, где G – некоторая группа и D – делимая абелева группа, то группа G коммутативна.

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Тогда $D = \oplus_{i\in J} D_i$, где $D_i \simeq Q$ или $D_i \simeq C(p^\infty)$. Обозначим через π_i проекцию группы D на подгруппу D_i, а через α^* образ элемента $\alpha \in End\,D$ при изоморфизме $End\,D \simeq End\,G$. Пусть $G_i = Im\,\pi_i^*$. Тогда $End\,G_i \simeq End\,D_i$ (см. [I], лемма I.6) и по лемме I группы G_i коммутативны. Идемпотенты π_i^*, $i \in J$, попарно ортогональны и суммируемы (см. [2], лемма 2). Поэтому группа $H = \langle G_i \mid i \in J \rangle$, порожденная подгруппами G_i группы G, является коммутативной.

Пусть $h \in G$. Тогда $\hat{h}$ обладает в $End\,G$ свойством $\pi_i^* \cdot \hat{h} = \pi_i^*$ ($i \in J$). Если $\hat{h} = \alpha^*$, то $\pi_i \cdot \alpha = \pi_i$ ($i \in J$). Ясно, что $\alpha = 1$. Следовательно, $\hat{h} = 1$, $h \in Z(G)$ и $H \subset Z(G)$. В силу включения $H \subset Z(G)$ теперь ясно, что $\pi_i^* \hat{g} = \pi_i^*$ для каждого $g \in G$. Аналогично равенству $\hat{h} = 1$ получим $\hat{g} = 1$, т.е. $g \in Z(G)$. Поэтому $G \subset Z(G)$ и группа G коммутативна. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $End\,G \simeq End\,D$, где D – непериодическая делимая абелева группа. По лемме 3 группа G является коммутативной. Тогда

$$D = (\oplus_{i\in J} A_i) \oplus (\oplus_{j\in \mathcal{J}} B_j),$$

где $A_i \simeq Q$ ($i \in J$) и $B_j \simeq C(p_j^\infty)$ ($j \in \mathcal{J}$). Отметим, что $J \neq \emptyset$ в силу непериодичности группы D. Обозначим через π_i проекцию группы D на подгруппу A_i и через τ_j проекцию группы D на подгруппу B_j. Образы элементов π_i и τ_j при изоморфизме $End\,D \simeq End\,G$ обозначим соответственно через π_i^* и τ_j^*. Так как $\{\pi_i^*, \tau_j^* \mid i \in J, j \in \mathcal{J}\}$ – совокупность попарно ортогональных и суммируемых идемпотентов, то

$$D^* = \langle A_i^*, B_j^* \mid i \in J, j \in \mathcal{J} \rangle = (\oplus_{i\in J} A_i^*) \oplus (\oplus_{j\in \mathcal{J}} B_j^*),$$

где $A_i^* = Im\,\pi_i^*$ и $B_j^* = Im\,\tau_j^*$.

В силу леммы I.6 из [I] $End\,A_i^* \simeq End(Im\,\pi_i) \simeq End\,Q$. Тогда по лемме 2 $A_i^* \simeq Q$. Аналогично получим, что $End\,B_j^* \simeq End\,C(p_j^\infty) \not\simeq End\,Q$ и $B_j^* \not\simeq Q$. Так как группы $C(p_j^\infty)$ неразложимы (в прямое произведение), то группы B_j^* также неразложимы (см. [I], следствие I.I4).

Докажем, что $B_j^* \simeq C(p_j^\infty)$ для каждого $j \in J$. Для этого заметим, что $Hom(A_i, B_j) \neq 0$, ибо группа $C(p_j^\infty)$ изоморфна некоторой факторгруппе группы Q. Тогда также $Hom(A_i^*, B_j^*) \neq 0^*$ (см. [3], лемма I). Отсюда следует, что $B_j^* \simeq C(q_j^\infty)$ для некоторого q_j, ибо $A_i^* \simeq Q$, $B_j^* \not\simeq Q$, гомоморфный образ делимой группы делим, делимая подгруппа выделяется в виде прямого слагаемого в самой группе и группа B_j^* неразложима. Поэтому $End\, C(p_j^\infty) \simeq End\, C(q_j^\infty)$ и $p_j = q_j$ (см. [3], лемма 7). Следовательно, $B_j^* \simeq C(p_j^\infty)$ для каждого $j \in J$ и $D \simeq D^*$.

Так как группа D^* делима, то $G = D^* \oplus C$ для некоторой подгруппы C группы G. Обозначим через π^* проекцию группы G на подгруппу C. Тогда $\pi_i^* \pi^* = 0^*$ и $\tau_j^* \pi^* = 0^*$ для каждых $i \in J$, $j \in J$. Поэтому $\pi_i \pi = 0$ и $\tau_j \pi = 0$ для каждых $i \in J$, $j \in J$. Ясно, что такой π является нулевым. Следовательно, $\pi^* = 0^*$ и $G = D^* \simeq D$. Теорема доказана.

Отметим, наконец, что в работе [5] рассматриваются кольца эндоморфизмов непериодических делимых абелевых групп. Там доказано, что если D, D^* - делимые абелевы группы, причем D - непериодическая, и кольца всех эндоморфизмов групп D и D^* изоморфны (пусть $*$ - указанный изоморфизм), то существует такой групповой изоморфизм $\tau: D \longrightarrow D^*$, что $\alpha^* = \tau^{-1}\alpha\tau$ для каждого эндоморфизма α группы D.

Литература

I. Пуусемп П., Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I975, 366, 76-I04.

2. Пуусемп П., Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов. Изв. АН ЭССР, Физ., Матем., I980, 29, № 3, 24I-245.

3. Пуусемп П., Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп. Изв. АН ЭССР, Физ., Матем., I980, 29, № 3, 246-253.

4. Szele, T., Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen. Acta sci. math. Szeged, 1950, 13, 54-56.

5. May, W., Endomorphism rings of abelian groups with ample divisible subgroups. Bull. London Math. Soc., 1978, 10, Nr. 3, 270-272.

$\mathscr{D}$- и $\mathscr{R}$-КЛАССЫ В ПОЗИЦИОННОЙ АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ

Э. Реди

Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел (без нуля), $E_k = \{0; 1; \ldots; k-1\}$ и $\mathbb{E} = (E_k; k \in I)$, где $I \subset \mathbb{N}$. Через $\mathfrak{S}(\mathbb{E})$ обозначается симметрическая поликатегория [2] над системой $\mathbb{E}$ и над полным полиграфом (без нульмерных граней). При $I = \{2\}$ соответствующая система $\mathfrak{S}(E_2)$ называется позиционной алгеброй [1, с. 127] логики.

Определение 1. Функции $f \in S^k_{k_1^n}$ и $g \in S^k_{\ell_1^n}$ называются $\mathscr{L}$-эквивалентными, если существуют функции $c_1 \in S^{\ell_1}_{k_1}, \ldots, c_n \in S^{\ell_n}_{k_n}$, $d_1 \in S^{k_1}_{\ell_1}, \ldots, d_n \in S^{k_n}_{\ell_n}$ такие, что

$$f = c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g, \quad g = d_1 \overset{1}{\times} \ldots d_n \overset{n}{\times} f.$$

Определение 2. Функции $f \in S^k_{k_1^n}$ и $g \in S^k_{\ell_1^n}$ называются $\mathscr{R}$-эквивалентными, если существуют функции $c \in S^k_\ell, d \in S^\ell_k$ так, что

$$f = g \overset{1}{\times} c, \quad g = f \overset{1}{\times} d.$$

Определение 3. Функции $f \in S^k_{k_1^n}$ и $g \in S^\ell_{\ell_1^n}$ называются $\mathscr{D}$-эквивалентными, если существует функция $h \in S^k_{\ell_1^n}$ так, что f и h являются $\mathscr{L}$-эквивалентными, а h и g – $\mathscr{R}$-эквивалентными.

Функции из $S^2_{2,2,2}$ нумерируем соответственно таблице 1.

Таблица 1

$x_1x_2x_3 \backslash f_p$	0	1	2	3	4 ...	8 ...	16 ...	32 ...	64 ...	128 ...	255
111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
110	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
101	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
100	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
011	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
010	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
001	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
000	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Поскольку отношения $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ коммутируют, то отношение $\mathscr{D}$ является их объединением, причем $\mathscr{R}$-класс и $\mathscr{L}$-класс пересекаются тогда и только тогда, когда они содержатся в одном $\mathscr{D}$-классе.

Теорема 1. В позиционной алгебре логики $\mathfrak{S}(E_2)$ множества трех- и двухместных функций разбиваются на $\mathscr{D}$-классы, изображенные в таблицах 2 и 3, соответственно.

Таблица 2

I	254
2	253
4	25I
8	247
I6	239
32	223
64	I9I
I28	I27

7	248
II	244
I3	242
I4	24I
II2	I43
I76	79
208	47
224	3I

I9	236
35	220
49	206
50	205
76	I79
I40	II5
I96	59
200	55

2I	234
42	2I3
69	I86
8I	I74
84	I7I
I38	II7
I62	93
I68	87

22	233
4I	2I4
73	I82
97	I58
I04	I5I
I34	I2I
I46	I09
I48	I07

25	230
38	2I7
70	I85
98	I57
I00	I55
I37	II8
I45	II0
I52	I03

26	229
37	2I8
74	I8I
82	I73
88	I67
I33	I22
I6I	94
I64	9I

28	237
44	2II
52	203
56	I99
67	I88
I3I	I24
I93	62
I94	6I

3	252
I2	243
48	207
I92	63

5	250
I0	245
80	I75
I60	95

6	249
9	246
96	I59
I44	III

I7	238
34	22I
68	I87
I36	II9

I8	237
33	222
72	I83
I32	I23

20	235
40	2I5
65	I90
I30	I25

24	23I
36	2I9
66	I89
I29	I26

23	232
43	2I2
77	I78
II3	I42

27	228
39	2I6
78	I77
II4	I4I

29	226
46	209
7I	I84
II6	I39

30	225
45	2I0
75	I80
I20	I35

53	202
58	I97
83	I72
92	I63

54	202
57	I98
99	I56
I08	I47

86	I69
89	I66
I0I	I54
I06	I49

I5	240

5I	204

60	I95

85	I70

90	I65

I02	I53

I05	I50

0	255

Таблица 3

0	15

1	14
2	13
4	11
8	7

3	12

5	10

6	9

В этих таблицах большие прямоугольники означают $\mathcal{D}$-классы, маленькие означают $\mathcal{H}$-классы (как обычно, $\mathcal{H}=\mathcal{L}\cap\mathcal{R}$), $\mathcal{H}$-классы, стоящие в одном столбце (в одной строке), образуют $\mathcal{L}$-классы (соответсвенно, $\mathcal{R}$-классы).

<u>Теорема 2</u>. В поликатегории $S(E)$ $\mathcal{R}$-класс, содержащий функцию f, состоит из $\sum \ell!/(\ell-s)!$ элементов, где s есть число элементов в образе функции f и сумма берется по всем ℓ $(\ell \geqslant s)$ из I.

<u>Следствие 1</u>. В позиционной алгебре логики $S(E_2)$ всякий $\mathcal{R}$-класс содержит два элемента: функцию и ее отрицание.

<u>Следствие 2</u>. В позиционной алгебре трехвалентной логики $S(E_3)$ все $\mathcal{R}$-классы содержат либо 3, либо 6 элементов.

Совокупность двухместных функций в позиционной алгебре трехвалентной логики разбивается на один трехэлементный класс (состоящий из постоянных функций), 255 шестиэлементных классов, состоящих из функций с двухэлементными образами, и 3025 шестиэлементных классов, состоящие из функций с трехэлементными образами.

<u>Следствие 3</u>. В поликатегории $S(E_2, E_3)$ все $\mathcal{R}$-классы содержат либо 5, либо 8, либо 6 элементов. Они состоят из функций с одно-, двух- и трехэлементными образами, соответственно.

Литература

1. Белоусов В.Д., n-арные квазигруппы. Кишинёв, 1972.
2. Реди Э., Односторонние идеалы симметрических поликатегорий. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, <u>336</u>, 31-61.

ОБ АФФИННОЙ ПОЛНОТЕ МОДУЛЕЙ

А. Сакс

Рассматриваются унитарные модули над кольцом с единицей R. Если модуль М порождается подмножеством $\{a_1,\ldots,a_n\}$, то обозначаем этот факт через $M = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$. Функция $f: M^n \to M$ называется согласованной, если для произвольных $a_i, b_i \in M$ $(i = 1,\ldots,n)$ имеем

$$f(a_1,\ldots,a_n) - f(b_1,\ldots,b_n) \in \langle a_1-b_1,\ldots,a_n-b_n\rangle .$$

Функция $f: M^n \to M$ вида

$$f(a_1,\ldots,a_n) = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n + b ,$$

где $r_1,\ldots,r_n \in R$, $b \in M$, называется полиномиальной. Множество всех n-арных согласованных (полиномиальных) функций на модуле М обозначим через $C^n(M)$ $(P^n(M))$. Модуль М называется аффинно полным, если $C^n(M) = P^n(M)$ для всех $n \geq 1$.

Получены следующие результаты.

Теорема I. Пусть А и В модули над дуо-кольцом без делителей нуля. Если А непериодический и В точный, то их прямая сумма аффинно полная.

Следствие. Векторное пространство аффинно полно тогда и только тогда, когда его размерность не меньше двух.

Теорема 2. Нециклический свободный модуль над любым кольцом является аффинно полным.

Теорема 3. Пусть R - кольцо квадратных матриц над телом. R-модуль М является аффинно полным тогда и только тогда, когда он имеет не меньше двух простых прямых слагаемых.

Отметим, что теорема I является обобщением одного результата Нёбауэра [1], а утверждение следствия впервые получено Вернером [2].

Литература

1. Nöbauer, W., Affinvollständigen Moduln. Math. Nachr., 1978, 86, 85-96.
2. Werner, H., Produkte von Kongruenzklassengeometrien universeller Algebren. Math. Z., 1971, 121, 111-140.

К ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ МАЛЫХ КАТЕГОРИЙ

В. Фляйшер

В работе [1] автором была доказана определяемость свободного полигона над моноидом своей полугруппой эндоморфизмов. Обобщению этого результата посвящена работа Л.А. Скорнякова [3], в которой рассматриваются сплетения моноидов.

В настоящем сообщении мы дадим другое обобщение результата работы [1] на случай малых категорий. Пусть $\mathcal{K}$ произвольная малая категория, т.е. категория, объекты которой составляют множество. Через $Ob\,\mathcal{K}$ будем обозначать множество объектов категории $\mathcal{K}$. Для произвольных $A,B\in Ob\,\mathcal{K}$ множество морфизмов из объекта A в объект B в категории $\mathcal{K}$ обозначим через $\mathcal{K}(A,B)$. Категорию $\mathcal{K}$ назовем сильно связанной, если $\mathcal{K}(A,B)\neq\phi$ для любых $A,B\in Ob\,\mathcal{K}$.

Известно ([2], следствие 5.I.2), что всякая малая категория конкретна, т.е. изоморфна подкатегории категории множеств. Поэтому в дальнейшем объекты малой категории $\mathcal{K}$ мы будем считать некоторыми множествами.

Пусть $\mathcal{K}$ - произвольная сильно связанная малая категория и пусть $Ob\,\mathcal{K}=\{A_i\mid i\in\mathcal{I}\}$. Через A обозначим попарно - непересекающееся объединение множеств $A_i\,(i\in\mathcal{I})$, т.е. $A=\dot{\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}}}A_i$ На множестве A рассмотрим множество $S_A(\mathcal{K})$ отображений в себя, определяемое следующим образом. Отображение $\varphi: A\to A$ принадлежит $S_A(\mathcal{K})$ в том и только том случае, если для любого $i\in\mathcal{I}$ найдется морфизм $\alpha\in\mathcal{K}(A_i,A_j)$ при некотором $j\in\mathcal{I}$ такой, что

$$\varphi(a_i)=\alpha(a_i)$$

для любого $a_i\in A_i$. Ясно, что множество $S_A(\mathcal{K})$ является полугруппой.

Теорема I. Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ - произвольные сильно связанные малые категории, $Ob\,\mathcal{K}=\{A_i\mid i\in\mathcal{I}\}$, $Ob\,\mathcal{L}=\{C_j\mid j\in\mathcal{J}\}$ причем $|\mathcal{I}|\geq 2$, $|\mathcal{J}|\geq 2$, и пусть $A=\dot{\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}}}A_i$, $C=\dot{\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}}}C_j$. Полугруппы $S_A(\mathcal{K})$ и $S_C(\mathcal{L})$ изоморфны тогда и только тогда, если категории $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ изоморфны.

Покажем теперь, как из теоремы I следует определяемость свободного полигона над моноидом своей полугруппой эндоморфизмов ([1], следствие 2). Пусть R - произвольный моноид и F - свободный правый R- полигон с базой $\mathfrak{X}=\{x_i \mid i\in \mathfrak{J}\}$. Пусть $\mathfrak{K}$ полная подкатегория категории $pol\text{-}R$ всех правых R-полигонов, объекты $Ob\,\mathfrak{K}$ которой суть свободные циклические полигоны $x_i R$ ($i\in\mathfrak{J}$). Ясно, что в этом случае категория $\mathfrak{K}$ является сильно связанной. Теперь остается заметить, что $S_F(\mathfrak{K})=End_R F$ и применить теорему I.

Аналогичным образом теорема I позволяет полностью решить вопрос об изоморфизме полугрупп эндоморфизмов произвольных проективных полигонов. Известно, что всякий проективный правый R-полигон P представим в виде объединения попарно-непересекающихся правых идеалов $e_i R$ ($i\in\mathfrak{J}$), порожденных идемпотентами $e_i\in R$. Пусть теперь $\mathfrak{K}$ - полная подкатегория категории $pol\text{-}R$, объекты которой $Ob\,\mathfrak{K}=\{e_i R \mid i\in\mathfrak{J}\}$. Заметим, что категория $\mathfrak{K}$ сильно связанная, поскольку для любых $i,j\in\mathfrak{J}$ отображение $\varphi: e_i R\to e_j R$ такое, что $\varphi(e_i r)=e_j e_i r$ для любого $r\in R$, является R-гомоморфизмом. Теперь легко убедиться, что $S_P(\mathfrak{K})=End_R P$ Применяя теорему I, нетрудно получить необходимые и достаточные условия изоморфизма полугрупп эндоморфизмов проективных полигонов. Отметим однако, что проективный полигон своей полугруппой эндоморфизмов, вообще говоря, не определяется.

Из теоремы I очевидным образом вытекают также результаты об определяемости свободных топологических или упорядоченных полигонов (см. [4]).

Литература

1. Флейшер В.Г., Определяемость свободного полигона его полугруппой эндоморфизмов, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 27-41.
2. Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г., Основы теории категорий. Наука, 1974.
3. **Skornjakov L.A. On the wreath product of monoids, Universal algebra and applications, Banach Center publications, Vol. 9, 1982, 181-185.**
4. Knauer U., Mikhalev A.V. Endomorphism monoids of acts over monoids, Semigroup Forum, Vol. 6, 1973, 50-58.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ГРОТЕНДИКА

А. Аасма

Пусть $X=(\mathfrak{X},\Sigma,\mu)$ – пространство с положительной мерой, F – поле R или C, A – локально выпуклое пространство над F, топология которого определена семейством $\{p_\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}\}$ непрерывных полунорм, и $\mathcal{L}(X,A)$ – множество всех (классов эквивалентностей) A-значных μ-измеримых функций f на X, для которых

$$\bar{p}_\alpha(f)=\int_X p_\alpha(f(x))\,d\mu<\infty$$

при всех $\alpha\in\mathfrak{A}$. Множество $\mathcal{L}(X,A)$ наделим локально выпуклой топологией, определенной системой полунорм $\{\bar{p}_\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}\}$. Пополнение множества $\mathcal{L}(X,A)$ в этой топологии обозначим через $L(X,A)$. Алгебраические операций на $L(X,A)$ определим поточечно. Таким образом $L(X,A)$ есть локально выпуклое пространство над F.

Пусть $A\otimes B$ – тензорное произведение локально выпуклых пространств A и B, наделенное проективной топологией, а $A\hat{\otimes}B$ – его пополнение в этой топологии. Как показал Гротендик [1], пространства $L(X,F)\hat{\otimes}A$ и $L(X,A)$ топологически изоморфны. В данной заметке дается аналогичное описание пространства $L(X,A)\hat{\otimes}B$ в случае, когда A и B – локально выпуклые пространства над F.

Для этого нужны

<u>Лемма 1.</u> Пусть A, B, C и D – локально выпуклые пространства над F, а $\rho:A\to C$ и $\nu:B\to D$ – топологические изоморфизмы. Если множества $\rho(A)$ и $\nu(B)$ всюду плотны в C и D соответственно, то продолжение изоморфизма

$$\rho\otimes\nu: A\otimes B\to C\otimes D$$

на $A\hat{\otimes}B$ является топологическим изоморфизмом пространств $A\hat{\otimes}B$ и $C\hat{\otimes}D$.

<u>Лемма 2.</u> Пусть A, B и C – локально выпуклые пространства над F. Тогда пространства $A\hat{\otimes}(B\hat{\otimes}C)$ и $(A\hat{\otimes}B)\hat{\otimes}C$ топологически изоморфны.

По леммам 1 и 2 справедливо следующее обобщение теоремы Гротендика [1].

Теорема. Пусть A и B - локально выпуклые пространства над $\mathbb{F}$ и $X=(\mathfrak{X},\Sigma,\mu)$ - пространство с положительной мерой. Тогда пространства $L(X,A)\hat{\otimes}B$ и $L(X,A\hat{\otimes}B)$ топологически изоморфны.

Поскольку пространства $L(X_1\times X_2)$ и $L(X_1, L(X_2))$ топологически изоморфны (см. [2],), то имеет место

Следствие I. Пусть A и B - локально выпуклые пространства над $\mathbb{F}$ и $X_k=(\mathfrak{X}_k,\Sigma_k,\mu_k)$ при к=I,2 - пространства с положительными мерами. Тогда пространства $L(X_1,A)\hat{\otimes}L(X_2,B)$ и $L(X_1\times X_2, A\hat{\otimes}B)$ топологически изоморфны.

Нетрудно заметить, что пространства $L(X,A)$ и $L(X,B)$ топологически изоморфны, если топологически изоморфны пространства A и B. Учитывая это и выше сказанное, справедливо следующее обобщение результата из [2].

Следствие 2. Пусть A - локально выпуклое пространство над $\mathbb{F}$ и $X_k=(\mathfrak{X}_k,\Sigma_k,\mu_k)$ с к=I,2 - пространства с положительными мерами. Тогда пространства $L(X_1,L(X_2,A))$ и $L(X_1\times X_2, A)$ топологически изоморфны.

Литература

1. Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc., 1955,16,1-178.
2. Willcox A.B., Note on certain group algebras. Proc.Amer. Math. Soc., 1956,7,874-879.

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И РАЗМЕРНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПАРАКОМПАКТОВ, БЛИЗКИХ К МЕТРИЗУЕМЫМ

Ю.Х.Брегман

Определение I. Обратный спектр $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha,\beta\in A\}$ называется жестким, если все пространства X_α являются паракомпактами, все проекции π^α_β – уплотнения, $\mathcal{F}_\alpha$ – σ-дискретная сеть в X_α и $\pi^\alpha_\beta(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{F}_\beta$ для любых $\alpha > \beta$.

Теорема I. Предельное пространство жесткого спектра является паракомпактным σ-пространством (т.е. пространством с σ-дискретной сетью) и каждое паракомпактное σ-пространство гомеоморфно пределу жесткого спектра из метризуемых пространств.

Теорема 2. Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

I/ X является паракомпактным σ-пространством и $\dim X \leq n$;

2/ X гомеоморфно пределу жесткого спектра из пространств размерности $\dim$ не более n;

3/ X гомеоморфно пределу жесткого спектра из метризуемых пространств размерности $\dim$ не более n.

Теорема 3. Пусть $f: X \to Y$ является уплотнением регулярного пространства X на паракомпакт Y и пусть $\mathcal{F}$ является такой σ-дискретной сетью в Y, что $f^{-1}(\mathcal{F})$ будет сетью в X. Тогда существует паракомпактное σ-пространство Z и уплотнения $g: X \to Z$ и $h: Z \to Y$ такие, что $\dim Z \leq \dim X$, $w(Z) \leq w(Y)$ и $f = h \circ g$.

Теорема 4. Для произведения бесконечной системы пространств со счетной сетью $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ имеет место неравенство $\dim \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\} \leq n$, если все конечные подпроизведения этого произведения имеют размерность не более n.

В докладе будет также дана спектральная характеристика класса M_I-пространств (т.е. регулярных пространств с σ-консервативной сетью).

КРИТЕРИИ СУММИРУЕМОСТИ РАСХОДЯЩЕЙСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ К КРАЙНЕЙ ТОЧКЕ ЕЕ ЯДРА РЕГУЛЯРНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

Н.А. Давыдов

Говорят, что последовательность $\{z_k\}$ комплексных чисел суммируется к числу z матрицей $A=((a_{nk}))$ $(n,k=0,1,2,\dots)$, если ряды

$$t_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k \qquad (1)$$

сходятся для каждого $n=0,1,2,\dots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=z$. Матрица A называется регулярной, если она суммирует каждую сходящуюся последовательность к ее пределу.

Точка ζ называется крайней точкой ядра в смысле Кноппа (1. с.77) расходящейся последовательности $\{z_k\}$, если она не является внутренней точкой никакого отрезка прямой, целиком лежащего в ядре этой последовательности.

Справедливы следующие теоремы 1-4:

<u>Теорема 1</u>. Для того чтобы регулярная положительная матрица $A=((a_{nk}))$ суммировала хотя бы одну ограниченную расходящуюся последовательность к крайней точке ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \max_{0\le n<\infty} a_{nk}=0. \qquad (2)$$

Эту теорему можно сформулировать иначе: для того чтобы регулярная положительная матрица $A=((a_{nk}))$ не суммировала ни одной расходящейся последовательности к крайней точке ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{k\to\infty} \max_{0\le n<\infty} a_{nk}>0. \qquad (3)$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть $A=((a_{nk}))$ - регулярная положительная матрица и $\{z_k\}$ - расходящаяся последовательность комплексных чисел, ядро $K(z)$ которой имеет по крайней мере одну крайнюю точку, и пусть ряды (1) сходятся для каждого $n=0,1,2,\dots$

Для того чтобы матрица A суммировала последовательность $\{z_k\}$ к крайней точке ζ ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы точка ζ была единственным A -частичным пределом второго рода*) этой последовательности.

<u>Теорема 3.</u> Если регулярная положительная матрица $A=((a_{nk}))$ суммирует расходящуюся последовательность $\{z_k\}$ к крайней точке ζ ее ядра, то для любого $\delta>0$ в δ -окрестность точки ζ попадают члены $z_{k_i(\delta)} (i=1,2,\dots)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i(\delta)} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i(\delta)} z_{k_i(\delta)} = \zeta.$$

<u>Теорема 4.</u> Для того чтобы регулярная положительная матрица $A=((a_{nk}))$ суммировала расходящуюся ограниченную последовательность $\{z_k\}$ к крайней точке ζ ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta>0$ в δ -окрестность точки ζ попадали члены $z_{k_i(\delta)} (i=1,2,\dots)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i(\delta)} = 1.$$

При доказательстве теорем приходится пользоваться леммой I (2, с.29), следствием теоремы I работы [3], а также леммой:

Пусть $A=((a_{nk}))$ положительная матрица, для которой $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \leq H < \infty \ (n=0,1,2,\dots)$, и $\{z_k\}$ - расходящаяся последовательность комплексных чисел, ядро которой имеет по крайней мере одну крайнюю точку. Тогда из сходимости рядов (I) для всех $n=0,1,2,\dots$ следует их абсолютная сходимость для всех $n=0,1,2,\dots$

Литература

1. Харди Г., Расходящиеся ряды. М., ИЛ., 1951, 504 с.
2. Давыдов Н.А., Суммирование ограниченных последовательностей регулярными матрицами. Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", выпуск 23, 1975, с. 24-31.
3. Давыдов Н.А., О ядре в смысле Кноппа регулярного положительного преобразования. Изв. вузов, Математика, № 2(249), 1983, с. 30-40.

*) Определение конечного и бесконечного A -частичного предела первого и второго рода последовательности $\{z_k\}$ см. в работе [3], с. 31.

О НЕРАВЕНСТВАХ СЛАБОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

А.Забулёнис, К.Адомайтис

Пусть R^2_+ – полуплоскость $\{\Im z>0\}$, $H^p\ (0<p<\infty)$ – классическое пространство Харди функций, аналитических в R^2_+. Положительная мера μ в R^2_+ называется мерой Карлесона порядка α ($\mu\in C_\alpha$) [3], если для всех $x_0\in R^2_+$, $h>0$ справедливо

$$\mu\{z=x+iy\in R^2_+: |x-x_0|\le h,\ y<h\}\le \mathrm{Const.}\, h^\alpha.$$

Теорема вложения Карлесона-Дарена [2] утверждает, что $\mu\in C_\alpha$ $(1\le\alpha<\infty)$ равносильно оценке

$$\int_{R^2_+}|f(z)|^{p\alpha}d\mu(z)\le \mathrm{Const.}\,\|f\|^{p\alpha}_{H^p}\qquad (0<p<\infty)$$

Пусть $0<\delta<1$, $z_0=x_0+iy_0$,

$$S_\delta(z_0)=\{z=x+iy\in R^2_+: |x-x_0|\le\delta y_0,\ |y-y_0|\le\delta y_0\}.$$

Определим следующее условие, налагаемое на меру μ ($\mu\in\tilde C_\alpha$),

$$\mu(S_\delta(z_0))\le \mathrm{Const.}\, y_0^\alpha\qquad (\forall z_0\in R^2_+)$$

/условие $\tilde C_\alpha$ не зависит от δ /.

Справедливы следующие утверждения:

Лемма I. Пусть $-\infty<\alpha,\beta<\infty$. Тогда $\mu\in\tilde C_\alpha$ равносильно тому, что $\mu_\beta\in\tilde C_{\alpha+\beta}$ $(\mu_\beta: d\mu_\beta(z)=(\Im z)^\beta d\mu(z))$.

Теорема I. Если $1<\alpha<\infty$, то условия C_α и $\tilde C_\alpha$ эквивалентны.

Следствие. Пусть $1<\alpha<\infty$. Тогда $\mu\in C_\alpha$ равносильно тому, что $d\mu(z)=(\Im z)^\alpha d\mu_0(z)$, где $\mu_0\in\tilde C_0$.

Теорема 2. Пусть $0<p<\infty$, $\alpha\ne1$. Тогда $\mu\in\tilde C_\alpha$ эквивалентно неравенству слабого типа

$$\mu\{z\in R^2_+: |f(z)|(\Im z)^{(1-\alpha)/p}>t\}\le \mathrm{Const.}\left\{\frac{\|f\|_{H^p}}{t}\right\}^p\ (\forall f\in H^p).$$

Пусть $l^{p,\infty}$ – пространство Марцинкевича последовательностей $\{c_k\}$, для которых $\mathrm{card}\{c_k: |c_k|>t\}\le \mathrm{Const.}\, t^{-p}$,

$Z=\{z_k\}$ – последовательность точек полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$,

T^p_Z – оператор в пространстве Харди H^p ;

$$T^p_Z(f)=\{f(z_k)(\operatorname{Im} z_k)^{1/p}\} \qquad (f\in H^p).$$

Последовательность Z называется редкой, если

$$\inf_{i,k:\, i\neq k}\left|\frac{z_i-z_k}{z_i-\bar z_k}\right|>0 .$$

Из теоремы 2 следует обобщение результатов [I] :

Теорема 3. Следующие утверждения эквивалентны:

I. Последовательность Z можно разбить в конечное объединение редких подпоследовательностей.

2. $T^p_Z(H^p)\subseteq \ell^{p,\infty}$;

3. $\sup_i t \operatorname{card}\left\{z_k : \dfrac{\operatorname{Im} z_k \operatorname{Im} z_i}{|z_i-\bar z_k|^2}>t\right\}<\infty .$

Аналогичные утверждения справедливы и для пространства Харди в круге.

Литература

I. Забулёнис А.Р., Об одном операторе вложения в пространствах Харди. Лит.матем.сб., 1982, 22, № 3, 93-97.

2. Duren P.L., Theory of H^p spaces. N.Y., Academic Press, 1970.

3. Amar E., Bonami A., Measures de Carleson d ordre α et solutions au bord de l equation $\bar\partial$. Bull. Soc. math. France, 1979, 107, 23-48.

ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ НОРМАЛЬНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДА ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЕВА

А.Кивинукк

Пусть X – пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций или пространство L_p с нормой

$$\| f \| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} | f(u) |^p (1-u^2)^{-1/2} du \right\}^{1/p}.$$

Тогда для $f \in X$ имеем ее ряд Фурье-Чебышева

$$f(x) \sim \hat{f}(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) T_k(x),$$

где $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ – полиномы Чебышева, $\hat{f}(k)$ – коэффициенты Фурье-Чебышева. П.Л.Бутцер, Р.Л.Стенс [1] рассмотрели модуль непрерывности

$$\omega^T(f; \delta) = \sup_{\delta \le h < 1} \| f - \mathcal{N}_h f \|,$$

где оператор сдвига определяется рядом

$$\mathcal{N}_h f(x) \sim \hat{f}(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) T_k(h) T_k(x).$$

Пусть $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами. Тогда из результатов [2] следует для нормальных средних Зигмунда второго порядка

$$Z_n^2 f(x) = \hat{f}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2\right) \hat{f}(k) T_k(x)$$

<u>Теорема</u>. Для всех $f \in X$, $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$(12 \operatorname{ch} \pi - 10)^{-1} \omega^T\left(f; \cos \frac{\pi}{n}\right) \le \| f - Z_n^2 f \| \le$$
$$\le 5 E_n(f) + \frac{1}{2} \omega^T\left(f; \cos \frac{\pi}{n}\right).$$

Литература

1. Butzer, P.L., Stens, R.L., Chebyshev transfom methods in the theory of best algebraic approximation. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1976, 45, 165–190.
2. Kivinukk, A., Comparison theorems of summation methods with estimations of constants. ENSV TA Toimetised, füüs., matem., 1982, 31, N1, 17–24.

К ОБОБЩЕНИЮ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЦЕЛЛЕРА

Э. Кольк

Приведенное в данной заметке обобщение одной теоремы Целлера позволяет, в частности, с единой точки зрения получить две теоремы Г.Кангро ([2], теоремы 3 и 4).

В теории суммируемости числовых последовательностей важную роль играет понятие BK-пространства, т.е. банахова пространства последовательностей, в котором имеет место сходимость по координатам. Пусть φ – множество всех последовательностей, имеющих только конечное число ненулевых элементов. Говорят, что в BK-пространстве α имеет место сходимость по отрезкам, если $\alpha \supset \varphi$ и[1] $\lim \overset{m}{x} = x$ в α для всех[2] $x = (\xi_k) \in \alpha$, где $\overset{m}{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, 0, \dots)$.

Для числовой матрицы $A = (a_{nk})$ и последовательности $x = (\xi_k)$ матричное преобразование A определяется равенствами $Ax = (A_n x)$,

$$A_n x = \sum_k a_{nk} \xi_k \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (\text{I})$$

в предположении, что ряды в (I) сходятся. Запись $T: \lambda \to \mu$ означает, что преобразование T отображает пространство λ в пространство μ. Исвестна (см.[I], стр. 28) следующая

Теорема Целлера. Если α и β являются BK-пространствами и в α имеет место сходимость по отрезкам, то

$$A: \alpha \to \beta \iff A\overset{m}{x} \in \beta, \ \|A\overset{m}{x}\| \leq M \|\overset{m}{x}\| \quad (M > 0, x \in \alpha, m \in \mathbb{N}).$$

Пусть $e_k = (\delta_{ki})$, где δ_{ki} – символ Кронекера. Положив в теореме Целлера $\alpha = l$, где $l = \{x = (\xi_k): \|x\| = \sum |\xi_k| < \infty\}$, приходим к следующему результату (см.[I], стр. 28).

Следствие I. В случае BK-пространства β

$$A: l \to \beta \iff Ae_k \in \beta \ (k \in \mathbb{N}), \ \|Ae_k\| = O(1).$$

При изучении суммируемости абстрактных последовательностей BK-пространства числовых последовательностей за-

---

[1] Вместо $\lim\limits_{k\to\infty} f(k)$ пишем коротко $\lim f(k)$.

[2] Свободные индексы и индексы суммирования, если пределы их изменения не указаны, принимают все значения из множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

меняются BK-пространствами абстрактных последовательностей или т. н. обобщенными BK-пространствами.

Пусть E – банахово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда множество $s(E)$ всех последовательностей $x=(x_k)$, $x_k \in E$, является векторным пространством относительно покоординатных операций. Линейное подпространство $\alpha(E) \subset s(E)$ с локально выпуклой топологией называется обобщенным K-пространством, если вложение $\alpha(E) \to s(E)$ непрерывно, где $s(E)$ наделено топологией покоординатной сходимости. В частности, банахово обобщенное K-пространство называется обобщенным BK-пространством. Говорят, что в обобщенном K-пространстве $\alpha(E)$ имеет место сходимость по отрезкам, если $\alpha(E) \supset \supset \varphi(E)$ и $\lim \overset{n}{x} = x$ в $\alpha(E)$ для всех $x \in \alpha(E)$, где $\varphi(E)$ – множество последовательностей $x \in s(E)$, имеющих только конечное число отличных от нуля в E элементов.

Известными обобщенными BK-пространствами, рассмотренными также в работах [2,3], являются при $1 \le p < \infty$

$$c(E)=\{x=(x_k) \in s(E) : \exists \lim x_k \in E,\ \|x\|=\sup\|x_k\|\},$$

$$\ell^p(E)=\{x \in s(E) : \|x\|=(\sum \|x_k\|^p)^{1/p}<\infty\},$$

$$w_p(E)=\{x \in s(E) : \exists \ell \in E, \lim n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-\ell\|^p=0,\ \|x\|=\sup\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p\right)^{1/p}\}.$$

Нетрудно доказать, что таковыми являются и пространства

$$bv(E)=\{x \in s(E) : \|x\|=\sum\|x_k-x_{k-1}\|<\infty, x_0=\theta\},$$

$$ces_p(E)=\{x \in s(E) : \|x\|=[\sum(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|)^p]^{1/p}<\infty\},$$

если $1 \le p < \infty$. Пространство $ces_p(E)$ при $E=\mathbb{C}$ введено в работе [4] и затем исследовано разными авторами.

Для банаховых пространств E и F пусть $\mathfrak{A}=(A_{nk})$ – матрица, элементами которой являются линейные непрерывные операторы A_{nk} из E в F. Рассмотрим матричное преобразование $\mathfrak{A}$, определенное равенствами $\mathfrak{A}x=(\mathfrak{A}_n x)$, $\mathfrak{A}_n x = =\sum_k A_{nk}x_k$ ($n \in \mathbb{N}$), если эти ряды сходятся. Обобщив теорему Целлера, получаем следующий результат.

Теорема I. Если $\alpha(E)$ и $\beta(F)$ являются обобщенными BK-пространствами и в $\alpha(E)$ имеет место сходимость по отрезкам, то

$$\mathfrak{A}: \alpha(E) \to \beta(F) \Longleftrightarrow \mathfrak{A}\bar{x} \in \beta(F),\ \|\mathfrak{A}\bar{x}\| \leq M\|\bar{x}\| \quad (M>0,\ x \in \alpha(E),\ m \in \mathbb{N}).$$

Пусть $S = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ и $e_k(x) = (\delta_{ki} x)$, $x \in E$. Так как в $\ell(E)$ имеет место сходимость по отрезкам, то из теоремы I вытекает

Следствие 2. Для обобщенного BK-пространства $\beta(F)$

$$\mathfrak{A}: \ell(E) \to \beta(F) \Longleftrightarrow \mathfrak{A}e_k(x) \in \beta(F)\ (x \in S),\ \sup_{x \in S} \|\mathfrak{A}e_k(x)\| = O(1).$$

Применяя теперь следствие 2 к описанным выше обобщенным BK-пространствам, получаем следующие теоремы.

Теорема 2 (ср. [2], теоремы 3 и 4). Для банаховых пространств E и F при $1 \leq p < \infty$

$$\mathfrak{A}: \ell(E) \to c(F) \Longleftrightarrow \exists \lim_k A_{ki} x\ (x \in S, i \in \mathbb{N}),\ \|A_{ki}\| = O(1);$$

$$\mathfrak{A}: \ell(E) \to \ell^p(F) \Longleftrightarrow \sup_{x \in S} \sum_k \|A_{ki} x\|^p = O(1).$$

Теорема 3. При $1 \leq p < \infty$

$$\mathfrak{A}: \ell(E) \to w_p(F) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \ell_i \in F,\ \lim n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \|A_{ki} x - \ell_i\|^p = 0 \quad (x \in S, i \in \mathbb{N}), \\ \sup_{x \in S} \sup_n \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \|A_{ki} x\|^p\right)^{1/p} = O(1); \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}: \ell(E) \to bv(F) \Longleftrightarrow \sup_{x \in S} \sum_k \|A_{ki} x - A_{k-1,i} x\| = O(1) \quad (A_{0i} x = \theta);$$

$$\mathfrak{A}: \ell(E) \to ces_p(F) \Longleftrightarrow \sup_{x \in S} \sum \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \|A_{ki} x\|\right)^p = O(1).$$

Литература

I. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.

2. Кангро Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН Эст.ССР. Сер. тенх. и физ. матем. наук, 1956, 5, №2, 108–128.

3. Nanda, S., On Banach sequence spaces. Tamkang J. Math., 1980, 11, N°1, 53-58.

4. Schiue, J.-S., On the Cesaro sequence spaces. Tamkang J. Math., 1970, 1, 19-25.

СУММИРУЕМЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. Контус, В. Рэйнерт, Т. Сырмус

I. Рассматривается неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$Ly = q(x), \tag{I}$$

где оператор $L = \sum_{j=0}^{m} p_{m-j} D^j$, $p_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, $m+1 \in \mathbb{N}$, а D - оператор дифференцирования. Функция $q = q(x)$ считается либо представимой, либо заданной функциональным рядом[1]

$$q(x) = \sum \alpha_k \varphi_k(x) \tag{2}$$

по некоторой системе функций[2] $\{\varphi_k(x)\}$, определенной в промежутке X, а коэффициенты $\alpha_k \in \mathbb{R}$. В качестве системы функций $\{\varphi_k(x)\}$ рассматривается система степенных или же тригонометрических функций.

Нахождение общего решения дифференциального уравнения (I) сводится к разыскиванию одного частного решения $y = y_*(x)$ этого уравнения, поскольку его общее решение имеет вид

$$y = y_h(x) + y^*(x),$$

где $y_h(x)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения $Ly = 0$ и оно считается известным. Частное же решение уравнения (I) разыскивается в виде

$$y^* = \sum c_k \varphi_k(x) \tag{3}$$

с неопределенными коэффициентами $c_k \in \mathbb{R}$.

Допустимы следующие случаи: а) ряд (2) сходится в определенном смысле в области X и в этой же области X существует сходящееся решение (3); б) ряд (2) расходится, но суммируем в области X в определенном смысле некоторым методом A и существует в этой же области X сходящееся решение (3); в) ряд (2) удовлетворяет предположению из а) и решение (3) предполагается расходящимся, но суммируемым в области X в определенном смысле некоторым методом A; г) ряды (2) и (3) удовлетворяют соответственно условиям случаев б) и в).

---

[1]Вместо $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ будем всюду писать $\sum u_k$, а иногда $\sum_k u_k$.
[2]Предполагаем всюду далее $k = 0, 1, \ldots$.

Далее ограничиваются случаями б) – г), приводят понятие суммируемого решения уравнения (I) и необходимые условия для существования таких решений.

2. Пусть $A=(\alpha_{nk})$ – треугольный регулярный метод суммирования рядов, заданный в виде преобразования ряда в последовательность. В таком случае имеем для ряда (3)

$$\mathcal{U}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}c_k\varphi_k(x). \tag{4}$$

Ряд (3) называют A-суммируемым в точке $x=x_0$ к сумме $\mathcal{U}(x_0)$, если существует[I]

$$\lim \mathcal{U}_n(x_0)=\mathcal{U}(x_0). \tag{5}$$

Функциональный ряд (3) считают A-суммируемым (равномерно A-суммируемым) к сумме $\mathcal{U}=\mathcal{U}(x)$ в области X, если равенство(5) справедливо (выполняется равномерно) в области X. При этом пишут

$$\mathcal{U}(x)=A\left(\sum c_k\varphi_k(x)\right).$$

Имея в виду теорему (см.[I], гл.I, §3) о перемене порядка почленного дифференцирования и предельного перехода по индексу n в последовательности (4), дадим для уравнения (I) первого порядка следующее

Определение I. Ряд (3) называют A-суммируемым решением уравнения (I), где $m=1$, в области X, если в этой области I) имеется точка $x=x_0$, в которой существует предел (5),2)последовательность $\{\mathcal{U}_n'(x)\}$сходится равномерно и 3)выполняется тождество

$$p_0A\left(\sum c_k\varphi_k'(x)\right)+p_1A\left(\sum c_k\varphi_k(x)\right)=A\left(\sum\alpha_k\varphi_k(x)\right).$$

Отметим, что суммируемые решения уравнения первого порядка вида (I) на основании указанной выше теоремы удовлетворяют условию

$$A\left\{p_0\sum c_k\varphi_k'(x)+p_1\sum c_k\varphi_k(x)\right\}=p_0\left\{A\left(\sum c_k\varphi_k(x)\right)\right\}'+p_1A\left(\sum c_k\varphi_k(x)\right).$$

Аналогично определяется понятие суммируемого решения для общего уравнения (I).

Определение 2. Ряд (3) называют A-суммируемым решением уравнения (I) в области X, если в этой области I) имеется точка $x=x_0$, в которой существуют пределы

[I] Вместо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ будем писать $\lim u_n$, а иногда $\lim\limits_{n}u_n$.

$$u^{(j)}(x_0) = A\left(\sum_k c_k \varphi_k^{(j)}(x_0)\right) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1),$$

2) последовательность $\{u_n^{(m)}(x)\}$ сходится равномерно и 3) выполняется тождество

$$\sum_{j=0}^{m} P_{m-j} A\left(\sum_k c_k \varphi_k^{(j)}(x)\right) = A\left(\sum \alpha_j \varphi_j(x)\right).$$

3. Относительно необходимых условий существования суммируемых решений уравнения (I) приведем теоремы 2 и 3, в доказательствах которых применяется

Теорема I. Если ряд

$$\sum c_k x^k \tag{6}$$

является в точке $x = x_0 \neq 0$ (C, α)-суммируемым при $\alpha \geqslant 0$, то этот ряд абсолютно (C, α)-суммируем для всех $|x| \leq |x_0|$.

Теорема 2. Если ряд (6) является (C, α)-суммируемым решением уравнения (I) при $\alpha \geqslant 0$, $m = 2$ и $q(x_0) = \sum a_k x_0^k$, где $x_0 \neq 0$, также (C, α)-суммируем, то выполняется условие

$$k^2 c_k = O(a_k),$$

а если $k^2 c_k \neq O(a_k)$, то условие

$$k^2 c_k a_k^{-1} = o(k^{\alpha} a_k^{-1} x_0^{-k}).$$

Теорема 3. Если ряд (6) является $(C, 1)$-суммируемым решением уравнения (I) при $m = 2$ и $q(x_0) = \sum a_k x_0^k$, где $x_0 \neq 0$, также $(C, 1)$-суммируем, то ряд (6) сходится в точке $x = x_0$.

Замечание I. При доказательстве теоремы 3 используются тауберова и лимитирующая теоремы метода $(C, 1)$ (см. [2] или [3]).

Замечание 2. Имеются аналоги теорем 2 и 3 для остальных случаев б) – г), а также таких уравнений (I), в которых свободный член $q(x) = \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

Литература

1. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А., Курс математического анализа. II. Москва, 1957.
2. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
3. Zeller, K. Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin, 1958.

ОПЕРАТОРЫ ЗАМЫКАНИЯ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.Лиепиньш

Исследуется существование неподвижных точек отображений, основываясь на понятии непрерывности вещественных функций на множестве с некоторым оператором замыкания (необязательно топологического замыкания). Для таких функций получен аналог теоремы Вейерштрасса. Ситуация, изучаемая в основных теоремах существования неподвижных точек, для случая топологических пространств рассмотрена в [1] .

1. Пусть X - непустое множество. Отображение $S: PX \mapsto PX$, где $PX := \{A / A \subset X\}$, назовем оператором замыкания на X , если для любых $A, B \in PX$ выполнено: 1) $A \subset B \Rightarrow S(A) \subset S(B)$; 2) $A \subset S(A)$; 3) $S(S(A)) = S(A)$.

Пусть S - оператор замыкания на X , $t: X \mapsto R$ и $f: X \mapsto X$. Скажем, что: 1) $A \in PX$ замкнуто, если $S(A) = A$; 2) X компактно, если для любой центрированной системы $\mathfrak{A}$ замкнутых подмножеств множества X пересечение множеств системы $\mathfrak{A}$ непусто; 3) t непрерывно, если $t(S(A)) \subset \overline{t(A)}$ для любого $A \in PX$; 4) t полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху), если $\sup t(S(A)) \leqslant \sup \overline{t(A)}$ ($\inf t(S(A)) \geqslant \inf \overline{t(A)}$) для любого $A \in PX$; 5) f непрерывно, если $f(S(A)) \subset S(f(A))$ для любого $A \in PX$.

Пусть $x \in X$. Для любого $n \in N$ положим $f^n(x) := f(f^{n-1}(x))$ ($f^0(x) := x$). Через $O(x)$ обозначим множество $\{f^n(x) / n = 0, 1, 2, \ldots\}$, через $L(x)$ - множество $\bigcap_{n=0}^{\infty} S(O(f^n(x)))$ и через $L_t(x)$ - множество $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{t(O(f^n(x)))}$.

2. <u>Предложение</u>. Пусть X - непустое множество, S - оператор замыкания на X и $t: X \mapsto R$.

Предположим, что X компактно и t полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху).

Тогда существует такое $x \in X$, что $t(x) = \inf t(X)$ $(t(x) = \sup t(X))$.

Доказательство. Пусть $z \in R$ и $A := t^{-1}(]-\infty, z])$. Предположим, что $A \neq \emptyset$. В силу полунепрерывности снизу отображения t множество A тогда замкнуто. Для любого $n \in N$ положим $A_n := t^{-1}(]-\infty, n])$. Допустим, что $\inf t(X) = -\infty$. Тогда $\{A_n / n \in N\}$ центрированная система замкнутых подмножеств в X. Следовательно, $\bigcap_{n \in N} A_n \neq \emptyset$, что невозможно. Поэтому $\inf t(X) =: t_0 \in R$. Для любого $n \in N$ положим $B_n := t^{-1}(]-\infty, t_0 + \frac{1}{n}])$. Тогда $\{B_n / n \in N\}$ центрированная система замкнутых подмножеств множества X. Следовательно, $\bigcap_{n \in N} B_n \neq \emptyset$. Пусть $x \in \bigcap_{n \in N} B_n$. Имеем: $t(x) = t_0$.

3. Теорема 1. Пусть X - непустое множество, S - оператор замыкания на X, $f : X \mapsto X$ и $t : X \mapsto R$.

Предположим, что X компактно, t полунепрерывно снизу и выполнено условие:

$$\forall x \in X \ \exists y \in S(O(x)): \\ x \neq f(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow t(y) < t(x).$$

Тогда f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Существует такое $x \in X$, что $t(x) = \inf t(X)$. Для любого $y \in S(O(x))$ имеем: $t(y) \geq t(x)$. Следовательно, $x = f(x)$.

4. Теорема 2. Пусть X - непустое множество и отображение $f : X \mapsto X$ имеет неподвижную точку.

Тогда существует такой оператор замыкания S на X и такое отображение $t : X \mapsto R$, что

1) X - компактно;
2) t - полунепрерывно снизу;
3) $\forall x \in X \ \exists y \in S(O(x)):$

$$x \neq f(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t(y) < t(x).$$

Доказательство. Пусть $y = f(y)$. Положим $S(A) := A \cup \{y\}$ для любого $A \in PX$, $t(y) := 0$ и $t(x) := 1$ для любого $x \in X$, $x \neq y$.

5. Теорема 3. Пусть X - непустое множество, S - оператор замыкания на X и отображения $f: X \mapsto X$ и $t: X \mapsto R$ непрерывны.

Предположим, что выполнены условия

1) $\forall x \in X \ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} t(f^n(x))$;

2) $\forall x \in X \ \exists y \in S(O(x))$:
$$x \neq f(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t(y) < t(x).$$

Пусть $x_0 \in X$ и $x \in \mathcal{L}(x_0)$. Тогда $f(x) = x$.

Доказательство. Допустим, что $x \neq f(x)$. Тогда существует такое $y \in S(O(x))$, что $t(y) < t(x)$. Следовательно, в силу непрерывности отображения t существует такое $n \in N$, что $t(f^n(x)) < t(x)$. Тем самым: $t(x) \neq t(f^n(x))$. Но $\mathcal{L}_t(x_0)$ одноэлементно, а в силу непрерывности отображений f и t имеем $f^n(x) \in \mathcal{L}(x_0)$ и $t(x), t(f^n(x)) \in \mathcal{L}_t(x_0)$.

Литература

1. Wong J.S.W., Mappings of contractive type on abstract spaces. J.Math.Anal.Appl, 1972, 37, 331-340.

ЯДЕРНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ, ОПРЕДЕЛЕННОГО МЕТОДОМ ЧЕЗАРО

Л. Лооне

Пусть m – пространство ограниченных последовательностей с обычной нормой. Пусть $A_m = (a_{mnk})$ матричные методы суммирования для любого $m = 0, 1, \dots$ с $A_m: m \to m$. Говорят, что последовательность $x = (\xi_k)$ суммируема последовательностным методом (A_m) к числу a, если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_m \sum_k a_{mnk} \xi_k = a.$$

Пусть K^0 – множество, определяющее ядро Кноппа (см. [1]). Ядром последовательностного метода (A_m) называется ядро, определяемое множеством

$$K_\alpha = \operatorname{clco} \bigcup \{ {}^t B_q (K^0) : q \in Q \}. \tag{1}$$

Тут Q – множество всевозможных операторов $q: N \to N$ и $B_q = (a_{mq(m)k})$ причем $\operatorname{clco} B$ обозначает замкнутую оболочку множества B.

Последовательностный метод суммирования называется эргодическим, если множество (1), которое определяет его ядро, имеет вид

$$L_T = \{ f : \langle Tx - x, f \rangle = 0 : f \in K^0 \} \tag{2}$$

(см. [2]). Пусть P – некоторый оператор выделения подпоследовательности, т.е. $P = (p_{nk})$ с $p_{nk} = \delta_{p(n)k}$, где $n < p(n) < p(n+1)$ $\forall n \in N$. Последовательностный метод $\left(\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} P^i\right)$ является эргодическим, причем множеством (2), определяющим ядро, является множество L_P (см. [2]).

Рассмотрим последовательностный метод суммирования (A_m) определенный методом Чезаро следующим образом:

$$a_{mnk} = \begin{cases} \dfrac{A^{\alpha-1}_{m-k+n}}{A^{\alpha}_m}, & \text{если } n \le k \le n+m, \\ 0, & \text{если } n > k \text{ или } k > n+m. \end{cases} \tag{3}$$

<u>Теорема 1</u>. Для метода (3) имеет место включение

$$K_\alpha(x) \subset K^0(x) \quad \forall x \in m$$

тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$.

Доказательство основывается на теореме 7 из статьи [1].

Теорема 2. Для метода (3), при, $\alpha>0$, имеет место включение

$$K_\alpha(x) \subset L_p(x) \quad \forall x \in m$$

тогда и только тогда, когда

$$\sup_n [p(n)-n] = m_0 < \infty . \tag{4}$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 4 статьи [2].

Пусть $F(x)$ - множество банаховых пределов элемента x.

Следствие 2.I. Для метода (3), при, $\alpha>0$, верно включение

$$K_\alpha(x) \subset F(x) \quad \forall x \in m ,$$

Теорема 3. Условие (4) является необходимым и достаточным для того, чтобы

$$F(x) \subset L_p(x) \quad \forall x \in m .$$

Доказательство следует из теоремы 4 статьи [2].

Следствие 3.I. Для метода (3) имеет место включение

$$K_\alpha(x) \subset L_p(x) \quad \forall x \in m$$

лишь тогда, когда

$$F(x) \subset L_p(x) \quad \forall x \in m .$$

Литература

I. Лооне Л., Ядро α-суммируемости Питерсена. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I978, 448, 46-5I.

2. Лооне Л., Эргодический класс методов суммирования Питерсена. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I982, 596, I55-I60.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С ОСТАТКОМ ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ТИПА МЕТОДОВ ГЕЛЬДЕРА И ЧЕЗАРО

Г.А.Михалин

Пусть $P_n^{(0)}=p_n>0\,(\forall n)$, $P_n^{(\alpha)}=\sum_{k=0}^{n} p_k P_k^{(\alpha-1)}$, $p_n/P_n^{(1)}\to 0\,(n\to\infty)$, $S_n^{(0)}=H_n^{(0)}=S_n$, $S_n^{(\alpha)}=\sum_{k=0}^{n} p_k S_k^{(\alpha-1)}$, $H_n^{(\alpha)}=\sum_{k=0}^{n} p_k H_k^{(\alpha-1)}/P_n^{(1)}$, $C_n^{(\alpha)}=S_n^{(\alpha)}/P_n^{(\alpha)}\,(n=0,1,2,\cdots;\alpha=1,2,\cdots)$, (S_n) – заданная последовательность с элементами из отделимого локально выпуклого пространства F.

Будем говорить, что бесконечно удаленная точка (∞) является (P,μ,σ)-точкой последовательности (S_n), если $\exists (n_k)$, (m_k), замкнутые гиперплоскости $G_k\,(k=1,2,\cdots)$, определяемые непрерывными линейными формами $\varphi_k: F\to R$, и элементы $x_k\in F$: $\varphi_k(x_k)=1\,(k=1,2,\dots)$ такие, что $(\forall k)(\forall n)(\exists \alpha_n\in R, y_n\in G_k: \mu_n S_n=\alpha_n x_k+y_n$, причем $x_k\cdot\min\limits_{n_k\le n\le m_k}\alpha_n^{+}G_k\to\infty\,(k\to\infty)$ и $\underline{\lim}_{k\to\infty}\sum_{\nu=n_k+1}^{m_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu^{(1)}>0)$.

Здесь $\mu_n,\sigma_n\in R\,(\forall n)$ наперед заданы.

Теорема I. Пусть $\lambda_n>0$, $\sigma_n\ge\gamma>0\,(\forall n)$, $0<c_1\le\lambda_m/\lambda_n$, $\sigma_m/\sigma_n\le c_2<\infty$, когда $0<c_1^*\le P_m^{(1)}/P_k^{(1)}\le c_2^*<\infty$, $\mu_n^{(\alpha)}=\lambda_n/\sigma_n^{\alpha}\,(\alpha=0,1,2,\cdots;n=0,1,2,\cdots)$.
Если (∞) – $(P,\mu^{(\alpha)},\sigma)$-точка (S_n) и $\alpha\ge 1$, то (∞) – $(P,\mu^{(\alpha-1)},\sigma)$-точка $(H_n^{(1)})$.

Следствие I. При условиях теоремы I (∞) – (P,λ,σ)-точка $(H_n^{(\alpha)})$ и $(C_n^{(\alpha)})$. В частности $\lambda_n H_n^{(\alpha)}$, $\lambda_n C_n^{(\alpha)}\ne O(1)$.

Выделим некоторые классы, принадлежность которым $S_n\ne O((\mu_n^{(\alpha)})^{-1})$ обеспечивает, что (∞) – $(P,\mu^{(\alpha)},\sigma)$-точка (S_n):

I/ для любой абсолютно выпуклой окрестности нуля $\mathcal{U}(0)$ существуют $\nu_k\uparrow\infty$ и $\delta>0$ такие, что $\mu_n^{(\alpha)}(S_m-S_n)\in\mathcal{U}(0)$ $(n_k\le\nu_k\le n\le m<\nu_{k+1}\le m_k)$, $\sum_{\nu=\nu_k}^{\nu_{k+1}}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu^{(1)}\ge\delta>0\,(\forall k)$;

2/ существует элемент $t_0\in F$ такой, что $(\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_k\uparrow\infty$, $\delta>0: \mu_n^{(\alpha)}(S_m-S_n)=k_{mn}t_0$, где $k_{mn}>-\varepsilon\,(n_k\le\nu_k\le n\le m\le\nu_{k+1}\le m_k=n_{k+1})$, причем $\sum_{\nu=\nu_k}^{\nu_{k+1}}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu^{(1)}\ge\delta>0\,(\forall k))$;

3/ $\alpha_n \equiv \mu_n^{(\alpha)}(S_n - S_{n-1})P_n^{(1)}/\sigma_n p_n = O(1)\ (n_k \le n \le m_k\ (\forall k))$;

4/ α_n определена в 3/, $\alpha_n = k_n t_o$, где $t_o \in F$ – фиксировано, $k_n \ge -H\ (H \ge 0)\ (n_k \le n \le m_k = n_{k+1}\ (\forall k))$;

5/ для любой абсолютно выпуклой окрестности нуля $\mathcal{U}(0)\ \exists n_0$, $\delta > 0: \sum_{\nu=n}^{m} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} < \delta\ (n_0 < n_k \le n \le m \le m_k) \Rightarrow \mu_n^{(\alpha)}(S_m - S_n) \in \mathcal{U}(0)$;

6/ $\exists t_0 \in F$ такой, что $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0, n_0 > 0: \sum_{\nu=n}^{m} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} < \delta\ (n_k \le n \le m \le m_k = n_{k+1}, n_k > n_0) \Rightarrow \mu_n^{(\alpha)}(S_m - S_n) = k_{mn} t_o,\ k_{mn} > -\varepsilon$.

Последовательности (n_k), (m_k) наперед заданы и такие, что $\sum_{\nu=n_k}^{m_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \ge \delta_1 > 0\ (\forall k)$. Самыми общими из отмеченных будут условия I/ и 2/.

Теорема 2. Если для (S_n) выполнено одно из условий I/-6/ и $\exists \alpha > 0: \lambda_n H_n^{(\alpha)} = O(1)$ или $\lambda_n C_n^{(\alpha)} = O(1)$, то $\mu_n^{(\alpha)} S_n = O(1)$, когда $n_k \le n \le m_k\ (\forall k)$.

Теорема 3. Если в условиях теоремы 2 $\sigma_n = \ln^2 P_n^{(1)}$, $\mu_n^{(\alpha)} = \ln P_n^{(1)}$ и $\exists \gamma > 0, \alpha > 0$: $P_n^{(1)\gamma} H_n^{(\alpha)} = O(1)$ или $P_n^{(1)\gamma} C_n^{(\alpha)} = O(1)$, то $S_n \ln P_n^{(1)} = O(1)\ (n_k \le n \le m_k\ (\forall k))$. Например, если $(S_n - S_{n-1})P_n^{(1)}/p_n \ln P_n^{(1)} = O(1)$ и $P_n^{(1)\gamma} H_n^{(\alpha)} = O(1)$, то $S_n \ln P_n^{(1)} = O(1)\ (n_k \le n \le m_k\ (\forall k))$.

Теорема 4. Если в условиях теоремы 2 $\sigma_n = \mu_n^{(\alpha)}$ и $\exists \alpha > 0$: $\lambda_n H_n^{(\alpha)} = O(1)$ или $\lambda_n C_n^{(\alpha)} = O(1)$, то $\lambda_n^{\frac{1}{\alpha+1}} S_n = O(1)(n_k \le n \le m_k (\forall k))$. Например, если $(S_n - S_{n-1})P_n^{(1)}/p_n = O(1)$ и $\lambda_n H_n^{(\alpha)} = O(1)$, то $\lambda_n^{\frac{1}{\alpha+1}} S_n = O(1)\ (n_k \le n \le m_k\ (\forall k))$.

Теоремы I – 4 обобщают известные результаты, отмеченные в работах [1] – [3] и др.

Литература

I. Давыдов Н.А. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов.-Мат.сб.,1956,38/80/,вып.4,с.509-524.

2. Кангро Г. Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Риса.-Уч.запис.Тарт.ун-та,1971,277,с.155-160.

3. Кангро Г. Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Риса.-Уч.запис.Тарт.ун-та,1972,305,с.156-166.

РЕЗОНАНСНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Л. Паллас

Пусть $M=M_{[0,1]}$ - пространство измеримых по Лебегу конечных почти всюду на отрезке $[0,1]$ функций. Через ℓ^r_+ обозначим множество последовательностей[I]

$$\ell^r_+=\{\lambda=(\lambda_k)\in\ell^r:\lambda_k>0\}.$$

Будем говорить, что ряд

$$\sum \xi_k$$

с $\xi_k\in M$ является абсолютно p-сходящимся, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся последовательность $(\lambda_k)\in\ell^r_+$ такая, что

$$\inf_{\alpha>0}(\alpha+\mu\{t:|\xi_k(t)|>\lambda_k\alpha\})<\varepsilon.$$

Множество всех абсолютно p-сходящихся рядов обозначим через $\ell^r(M)$. Пространство ограниченных по мере последовательностей обозначим через $\ell^\infty(M)$. Множество $\ell^r(M)$ с $0<p\le\infty$ является FK-пространством.

Пусть $\varphi=\{\varphi_k(t)\}$ с $\varphi_k\in M$ - некоторая система функций. Говорят, что система φ является системой абсолютной n-сходимости для ℓ^r, если ряд

$$\sum \xi_k\varphi_k(t) \tag{I}$$

является абсолютно n-сходящимся для любого $x=(\xi_k)\in\ell^r$.

<u>Теорема I.</u> Пусть $n>0$. Для того, чтобы система φ была системой абсолютной n-сходимости для ℓ^r с $p>n$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(\varphi_k)\in\ell^q(M)$ с $1/p+1/q=1/n$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $p>0$. Для того, чтобы система φ была системой абсолютной p-сходимости для ℓ^r, необходимо и достаточно, чтобы $(\varphi_k)\in\ell^\infty(M)$.

В случае абсолютной сходимости в смысле сходимости поч-

[I] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все целочисленные значения от 0 до ∞.

ти всюду такие резонансные теоремы получены Никишиным [I].

Пусть, далее, $A=(a_{nk})$ - бесконечная числовая матрица, удовлетворяющая для некоторой $(v_n)\in l_+$ условиям

$$\lim_n \frac{a_{nk}}{v_n}=0 \tag{2}$$

и

$$\left|\frac{a_{nk}}{v_n}\right|\leq N. \tag{3}$$

Рассмотрим матричное преобразование ряда (I)

$$\tau_n(x,t)=\sum_k a_{nk}\xi_k\varphi_k(t).$$

Система φ называется системой $|A|$-суммируемости для l^p, если последовательность $(\tau_n)\in l^1(M)$ для всех $(\xi_k)\in l^p$.

Теорема 3. Если матрица A удовлетворяет условиям (2) и (3), то система φ является системой $|A|$-суммируемости для l^p $(1\leq p<\infty)$ в точности тогда, когда она система сходимости по мере для l^p.

Условия (2) и (3) очень сильны. Например, единичная матрица $E=(a_{nk})$, где

$$a_{nk}=\begin{cases}1 \text{ при } n=k\\ 0 \text{ при } n\neq k\end{cases}$$

им не удовлетворяет. Но, как показывает непосредственная проверка, в случае единичной матрицы теорема 3 не имеет места.

Литература

I. Никишин Е.М., Резонансные теоремы и надлинейные операторы. Успехи матем. наук, 1970, 25, №I, 129-191.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СУММИРУЕМОСТИ СО СКОРОСТЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

К.Пааюс, А.Тали

Пусть X и Y - банаховы пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), а $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ - направленные по отношению $>$ множества. Рассмотрим обобщенные последовательности $x=(\xi_u)$ с $\xi_u \in X$, $u\in\mathcal{U}$ и $\lambda=(\lambda_u)$ с $0<\alpha<\lambda_u\nearrow$. Воспользуемся обозначениями работы [3] для множеств обобщенных последовательностей x :

$c(\mathcal{U},X)$ - множество сходящихся последовательностей,
$c_0(\mathcal{U},X)$ - множество последовательностей, сходящихся к нулю $\theta\in X$,
$m(\mathcal{U},X)$ - множество ограниченных последовательностей,
$mc_0(\mathcal{U},X)=m(\mathcal{U},X)\cap c_0(\mathcal{U},X)$,
$c^\lambda(\mathcal{U},X)$ - множество λ -сходящихся последовательностей,
$m^\lambda(\mathcal{U},X)$ - множество λ -ограниченных последовательностей.

Дополним список обозначений еще двумя символами:

$mc(\mathcal{U},X)=m(\mathcal{U},X)\cap c(\mathcal{U},X)$,
$mc^\lambda(\mathcal{U},X)=m^\lambda(\mathcal{U},X)\cap c^\lambda(\mathcal{U},X)$.

Будем, далее, считать множества $mc(\mathcal{U},X)$ и $mc_0(\mathcal{U},X)$ банаховыми пространствами с нормой $\|x\|=\sup_u\|\xi_u\|$ (см. 2).

Пусть A_v ($v\in\mathcal{V}$) - некоторые линейные непрерывные операторы из пространства $mc^\lambda(\mathcal{U},X)$ в Y . Тогда оператор $A=(A_v)$ переводит последовательность $x\in mc(\mathcal{U},X)$ в последовательность $(A_v x)$, где $A_v x\in Y$. Сформулируем, далее, две теоремы, обобщающие, с одной стороны, теорему I работы[1], а с другой стороны, теорему 5 работы [2].

<u>Теорема I</u>. Преобразование A является преобразованием типа $mc^\lambda(\mathcal{U},X)\to mc(\mathcal{V},Y)$ тогда и только тогда, когда

I° для каждого $b\in X$ существует $\lim_v A_v\bar{b}$, где $\bar{b}=(b_u)$, $b_u=b$ ($u\in\mathcal{U}$), и последовательность $(A_v\bar{b})$ ограничена,

2° для каждого $b\in X$ существует $\lim_v (A_v\circ\frac{1}{\lambda})\bar{b}$,

I $(A\cdot\frac{1}{\lambda})x=A(\frac{1}{\lambda}x)$ $\frac{1}{\lambda}x=(\xi_u/\lambda_u)$.

3° для каждого $x=(\xi_u)\in mc(\mathcal{U},X)$ и неконфинального[2] в $\mathcal{U}$ множества E существует $\lim_v (A_v\circ\frac{1}{\lambda}\circ\varphi_E)x$, где $\varphi_E x=(\xi'_u)$ с $\xi'_u=\xi_u$ при $u\in E$ и $\xi'_u=\theta\in X$ при $u\in\mathcal{U}\setminus E$,

4° $\sup_v \|A_v\circ\frac{1}{\lambda}\|_{mc}<\infty$.

Наряду со скоростью $\lambda=(\lambda_u)$ $(u\in\mathcal{U})$ рассмотрим другую числовую последовательность $\mu=(\mu_v)$, где $v\in\mathcal{V}$ и $0<\beta<\mu_v\nearrow$.

Теорема 2. Преобразование A является преобразованием типа $mc^\lambda(\mathcal{U},X)\to mc^\mu(\mathcal{V},Y)$ тогда и только тогда, когда[3]

1° для каждого $b\in X$ имеет место соотношение $A\bar{b}\in mc^\mu(\mathcal{V},Y)$, где $\bar{b}=(b_u)$ и $b_u=b$ $(u\in\mathcal{U})$,

2° $(A\circ\frac{1}{\lambda})\bar{b}\in mc^\mu(\mathcal{V},Y)$ для каждого $b\in X$,

3° $\sup_v \|A_v\circ\frac{1}{\lambda}\|_{mc}<\infty$,

4° $(A\circ\frac{1}{\lambda}\circ\varphi_E)x\in mc^\mu(\mathcal{V},Y)$ для каждого $x\in mc(\mathcal{U},X)$ и неконфинального в $\mathcal{U}$ множества E,

5° $\sup_v \mu_v\|A_v\circ\frac{1}{\lambda}-\lim_u\lim_v A_v\circ\frac{1}{\lambda}\circ\varphi_{\mathcal{U}\setminus E_u}\|_{mc_0}<\infty$,

где $E_u=\{u'\in\mathcal{U}\mid u'>u\}$.

В частности, когда $\mu_v=1$ $(v\in\mathcal{V})$, теорема 2 превращается в теорему I. Если, к тому же $\lambda_u=1$ $(u\in\mathcal{U})$, то получаем теорему 5 работы [2]. Теоремы I и 2 применяются, например, к матричным и к полунепрерывным методам суммирования. Остановимся подробнее на случае матричного метода, определенного числовой матрицей $A=(a_{nk})$. Обозначим $X=Y$, $\mathcal{U}=\mathcal{V}=\mathbb{N}$, $u=k$ и $v=n$. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Матричное преобразование $A=(a_{nk})$ является преобразованием типа $c^\lambda(\mathbb{N},X)\to c^\mu(\mathbb{N},X)$ тогда и только тогда, когда

1° существуют $\lim_n\sum_k a_{nk}=a$ и $\lim_n\mu_n(\sum_k a_{nk}-a)$,

2° существуют $\lim_n\sum_k(a_{nk}/\lambda_k)=a^\lambda$ и $\lim_n\mu_n[\sum_k(a_{nk}/\lambda_k)-a^\lambda]$,

3° существуют $\lim_n a_{nk}=a_k$ и $\lim_n\mu_n(a_{nk}-a_k)$ $(k=0,1,\ldots)$,

4° $\sum_k(|a_k|/\lambda_k)<\infty$,

5° $\sup_n\mu_n\sum_k(|a_{nk}-a_k|/\lambda_k)<\infty$.

---

[2] Подмножество E направленного множества $\mathcal{U}$ называется конфинальным в $\mathcal{U}$, если для любого $u\in\mathcal{U}$ существует $u'\in E$ такой, что $u'>u$. Операторы $A_v\circ\frac{1}{\lambda}$ рассматриваются в пространстве $mc(\mathcal{U},X)$, поэтому их нормы снабжаются индексом mc.

[3] Оператор φ_E определяется здесь также, как в теореме I.

В частности, когда $X = \mathbb{R}$, теорема 3 является теоремой I работы [I].

Пусть, далее, A – полунепрерывный метод, определенный при помощи преобразования последовательности $X = (\xi_k)$ в последовательность (η_v) с

$$\eta_v = \sum_k a_k(v)\xi_k, \tag{I}$$

где $v \in [0;\infty[= \mathcal{V}$ и $a_k(v)$ – некоторые числа. Здесь $X = Y$, $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ и $u = k$. Из теоремы 2 вытекает теперь

Теорема 4. Преобразование A, определенное соотношением (I), является преобразованием типа $c^\lambda(\mathbb{N}, X) \to c^\mu([0;\infty[, X)$ тогда и только тогда, когда

I° существуют пределы

$$\lim_v \sum_k a_k(v) = a, \quad \lim_v \mu_v[\sum_k a_k(v) - a]$$

и

$$\mu_v[\sum_k a_k(v) - a] = O(1),$$

2° существуют пределы

$$\lim_v \sum_k \frac{a_k(v)}{\lambda_k} = a^\lambda, \quad \lim_v \mu_v[\sum_k \frac{a_k(v)}{\lambda_k} - a^\lambda]$$

и

$$\mu_v[\sum_k \frac{a_k(v)}{\lambda_k} - a^\lambda] = O(1),$$

3° существуют пределы

$$\lim_v a_k(v) = a_k, \quad \lim_v \mu_v[a_k(v) - a_k] \quad (k = 0, 1, \dots)$$

и

$$\mu_v[a_k(v) - a_k] = O_k(1),$$

4° $$\sum_k \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty,$$

5° $$\sup_v \mu_v \sum_k \frac{|a_k(v) - a_k|}{\lambda_k} < \infty.$$

Литература

1. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора-Харди.I. Изв. АН ЭстССР, Физ.мат., 1969, 18, №2, 137-146.
2. Ламп Ю., Преобразования обобщенных последовательностей. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 67-83.
3. Тали А., Выпуклые семейства методов суммирования обобщенных последовательностей в локально выпуклых пространствах. Настоящий сборник, стр.61.

О СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИХ СУММ ФУРЬЕ

В.Г. Пономаренко

Пусть $\tilde{C}$ - пространство непрерывных на всей плоскости функций $f(x,y)$ с периодом 2π по каждой переменной и ряд

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)}, \tag{1}$$

где $c_{mn} = \pi^{-2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-i(mx+ny)} dx dy$,

является рядом Фурье функции $f(x,y) \in \tilde{C}$.

Обозначим через $\sigma_N(f;x,y)$ средние арифметические сферических частных сумм ряда (1):

$$\sigma_N(f;x,y) = N^{-1} \sum_{k=1}^{N} S_k(f;x,y), \tag{2}$$

где

$$S_k(f;x,y) = \sum_{m^2+n^2 \le k^2} c_{mn} e^{i(mx+ny)}.$$

В работе А.Н. Подкорытова [1] приведена следующая оценка сверху уклонения функции $f(x,y)$ от сумм вида (2):

$$\| f(x,y) - \sigma_N(f;x,y) \|_{\tilde{C}} \le A\, \omega(f; N^{-1/3}), \tag{3}$$

где A - константа, не зависящая от f и N, а

$$\omega(f;t) = \sup_{|h| \le t} \| f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) \|_{\tilde{C}}, \quad h^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

В настоящей заметке доказывается теорема, из которой следует более точная по порядку оценка, чем приведенная в [1].

<u>Теорема 1</u>. Если $f(x,y) \in \tilde{C}$, то справедлива оценка:

$$R_N(f;\sigma) = \| f(x,y) - \sigma_N(f;x,y) \|_{\tilde{C}} \le B N^{-1} \sum_{k=1}^{N} E_k(f)_{\tilde{C}}, \tag{4}$$

где B - константа, не зависящая от f и N, а

$$E_K(f)_{\tilde{C}} = \inf_T \| f(x,y) - T_K(x,y) \|_{\tilde{C}} , \qquad (5)$$

$T_K(x,y)$ - тригонометрические полиномы вида:

$$T_K(x,y) = \sum_{m^2+n^2 \le K^2} d_{mn} e^{i(mx+ny)} .$$

Неравенство (4) является аналогом известного для функций одной переменной неравенства С.Б.Стечкина (см.[2]).

Из неравенства (4) вместо оценки (3) вытекает следующая оценка:

$$R_N(f;\sigma) \le A\,\omega(f; N^{-1}\ln N).$$

Оценка (4) в смысле порядка не может быть улучшена.

Представление о точности, в этом смысле, оценки (4) даёт следующая

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{M}(\alpha_N)$ - класс функций $f(x,y)$, принадлежащих $\tilde{C}$, для которых

$$E_N(f)_{\tilde{C}} = O(\alpha_N),$$

где $E_N(f)_{\tilde{C}}$ определено в (5), а $\{\alpha_N\}$ - произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность чисел*). Тогда

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}(\alpha_N)} R_N(f;\sigma) \asymp N^{-1} \sum_{K=1}^{N} \alpha_K .$$

---

*) Соотношение $u \asymp v$ означает, что $M_1 v \le u \le M_2 v$, где $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ - некоторые константы.

Литература

1. Подкорытов А.Н., Средние Фейера сферических сумм Фурье. Вестник Ленингр. ун-та, № 1, вып.1, 1978, 146-149.
2. Стечкин С.Б., О приближении периодических функций суммами Фейера. Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 62, 1962, 48.

О РАВНОМЕРНО (d)-СУММИРУЕМЫХ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Е.В.Рабец

Продолжая начатое в [2] изучение (d)-сходимости двойных последовательностей, назовем множество E двойных последовательностей равномерно (d)-суммируемым к s (ad)-регулярной матрицей $A=(a_{ikmn})$, если существует последовательность $\{\varepsilon_{ik}\}$, $\varepsilon_{ik}\searrow 0$, такая, что

$$\Big|\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{ikmn}s_{mn}-s\Big|<\varepsilon_{ik}\quad (i,k\in G) \qquad /\,1\,/$$

для всех $\{s_{mn}\}\in$ E. Здесь G – область (d)-сходимости последовательностей $A(s_{mn}),\{s_{mn}\}\in E$. Множество E назовем равномерно ограниченным, если существует такое число H, что $|s_{mn}|\le H\,(m,n=1,2,\ldots)$ для всех $\{s_{mn}\}\in$ E.

Использование равномерной (d)-суммируемости двойных последовательностей (ad)-регулярными матрицами позволяет доказать ряд теорем о структуре их полей сходимости /т. 3,4 /. В одномерном случае аналогичные вопросы исследовались в работах Мазура, Орлича, Брудно /см. [1]/. Методы доказательства приводимых нами теорем 1 - 4 позаимствованы у Питерсена [3].

Необходимые понятия и факты из теории суммирования двойных последовательностей изложены в статье [2].

Теорема 1. Пусть $A=(a_{ikmn})$ – (ad)-регулярная матрица и $\{s^j_{mn}\}(j=1,2,\ldots)$ – счетное множество равномерно ограниченных последовательностей, каждая из которых (d)-суммируема к 0 матрицей A. Тогда существует множество ограниченных последовательностей $\{t^j_{mn}\}$, равномерно (d)-суммируемых к 0 матрицей A и таких, что

$$s^j_{mn}=t^j_{mn}\quad (m\wedge n\ge N(j),\ j=1,2,\ldots),$$

$$|t^j_{mn}|\le|s^j_{mn}|\quad (m,n,j=1,2,\ldots).$$

Пусть $\{u_r\}$ – ограниченная последовательность, не стремящаяся к 0, такая, что $u_{r(r+1)}=0,\ u_{r^2}=1,\ (u_{r+1}-u_r)\to 0\ (r\to\infty)$; $\nu(i,k)=\nu(q)$ и $\rho(i,k)=\rho(q)$ – последовательности такие, что $\nu(q)-\nu(q-1)\le 1\ (q=2,3,\ldots)$; $\lim\limits_{(d)}\sum\limits_{m,n:p=1}^{\nu(q)}|a_{ikmn}|=\lim\limits_{(d)}\sum\limits_{m,n:\bar p=\rho(q)}^{\infty}|a_{ikmn}|=0$,

где $p=\min(m,n),\ \bar p=\max(m,n);\ q=\min(i,k),\ \bar q=\max(i,k)$.

Теорема 2. Если $\{s^j_{mn}\}$ $(j=1,2,\dots)$ – счетное множество равномерно ограниченных последовательностей, равномерно (d)-суммируемых к 0 (ad)-регулярной матрицей $A=(a_{ikmn})$, а $\nu(q_{r+1})\geq \geq \rho(q_r)$ для некоторой последовательности $\{q_r\}$ $(r=1,2,\dots)$, то ограниченная последовательность $\{s_{mn}\}$ (d)-суммируется матрицей A к 0, где

$$s_{mn}=u_r\, s^j_{mn}\ (\nu(q_{j(j-1)})\leq \nu(q_r)\leq \rho\leq \nu(q_{r+1})<\nu(q_{j(j+1)})\ (j=2,3,\dots),$$

$$s_{mn}=s^1_{mn}\ (\rho<\nu(q_2)).$$

Используя описанную в теореме 2 операцию сплетения последовательностей $\{s^j_{mn}\}$, могут быть доказаны

Теорема 3. Пусть $\{A^h\}$ $(h=1,2,\dots)$ – счетное множество (ad)-регулярных матриц таких, что

$$A_0^1\supseteq A_0^2\supseteq\dots\supseteq A_0^h\supseteq\dots$$

и каждая матрица (d)-суммирует хотя бы одну ограниченную расходящуюся последовательность. Тогда существует ограниченная расходящаяся последовательность, (d)-суммируемая всеми A^h $(h=1,2,\dots)$.

Теорема 4. Пусть $\{A^h\}$ – счетное множество (ad)-регулярных матриц, каждая из которых $(A^h\ (h\geq 2))$ (d)-суммирует ограниченную последовательность $\{s^h_{mn}\}$ $(h=2,3,\dots)$, не являющуюся (d)-суммируемой матрицами A^r $(1\leq r<h)$. Если $A=(a_{ikmn})$ ограниченно сильнее каждой матрицы множества, то A (d)-суммирует ограниченную последовательность, не суммируемую по области G ни одной из матриц множества.

Литература

1. Кангро Г.Ф., Теория суммируемости последовательностей и рядов.– В сб."Математический анализ. т.12, Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР". М: 1974, с.5 – 70.

2. Рабец И.В., Об ограниченной регулярности и совместности методов узкого суммирования двойных последовательностей. В сб."Прикл. Методы мат. анализа". Киев: КГПИ, 1981, с. 106 – 115.

3. Petersen G.M., Regular Matrix Transformations. Mc. Graw-Hill, 1966, ch. 4.

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Э. Реймерс

В этой работе выводятся теоремы о среднем значении для матричных методов суммирования, аналогичные теоремам о среднем значении Юрката и Пейеримхоффа [I], [2] , но выполнение ние которых зависит от последовательностей к которым эти теоремы применяются.

Пусть $A = (a_{nk})$ - треугольный матричный метод суммирования, преобразующий последовательность $x = (x_k)$ в последовательность $\{A_n(x)\}$, где

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k .$$

Предположим, что $a_{nk} \neq 0$ и $x_k \neq 0$ при всех индексах. Будем также считать, что в преобразованиях встречающиеся члены с отрицательными индексами равны нулю и что

$$\bar{\Delta}_n a_n = a_n - a_{n-1}, \quad \Delta_n a_n = a_n - a_{n+1} .$$

Теорема I. Если последовательность $x = (x_k)$ удовлетворяет условию

$$\bar{\Delta}_\nu \left| \frac{a_{n\,\nu+k}\, x_{\nu+k}}{a_{n-k\,\nu}\, x_\nu} \right| = \left| \bar{\Delta}_\nu \frac{a_{n\,\nu+k}\, x_{\nu+k}}{a_{n-k\,\nu}\, x_\nu} \right| , \qquad (I)$$

то выполняется оценка

$$\left| \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} x_\nu \right| \leq \left| \frac{a_{nn} x_n}{a_{k'k'} x_{k'}} \right| \left| A_{k'}(x) \right| \qquad (2)$$

при некотором k', где $0 \leq k' \leq n-k$.

Доказательство. Из-за условия (I) мы имеем при некотором ℓ, что

$$\left| \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} x_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{n-k} a_{n\,\nu+k} x_{\nu+k} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\nu=0}^{n-k} \frac{a_{n\,\nu+k}\, x_{\nu+k}}{a_{n-k\,\nu}\, x_\nu}\, a_{n-k\,\nu} x_\nu \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{n-k} \left| \bar{\Delta}_\nu \frac{a_{n\,\nu+k} x_{\nu+k}}{a_{n-k\,\nu} x_\nu} \right| \left| \sum_{i=\nu}^{n-k} a_{n-k\,i} x_i \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{i=\ell}^{n-k} a_{n-k\,i} x_i \right| \sum_{\nu=0}^{n-k} \left| \bar{\Delta}_\nu \frac{a_{n\,\nu+k} x_{\nu+k}}{a_{n-k\,\nu} x_\nu} \right| =$$

$$= \left| \frac{a_{nn} x_n}{a_{n-k\,n-k} x_{n-k}} \right| \left| \sum_{i=\ell}^{n-k} a_{n-k\,i} x_i \right| .$$

Применяя к последней сумме ещё раз такие же преобразования мы приходим в конце концов к неравенству (2).

Из доказательства видно, что оценка (2) будет выполнятся в виде

$$\left| \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} x_\nu \right| \leq K \left| A_{k'}(x) \right|$$

если

$$\sum_{\nu=0}^{n-k} \left| \bar{\Delta}_\nu \frac{a_{n\,\nu+k}\, x_{\nu+k}}{a_{n-k\,\nu}\, x_\nu} \right| \leq K .$$

Теорема 2. Если последовательность $x = (x_k)$ удовлетворяет условию

$$\Delta_k |a_{k\,k-\nu} x_{k-\nu}| = |\Delta_k a_{k\,k-\nu} x_{k-\nu}|, \tag{3}$$

то выполняется оценка

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{nk} x_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |\bar{\Delta}_k A_k(x)| . \tag{4}$$

Доказательство. Из-за условия (3) мы имеем

$$\bar{\Delta}_k \sum_{\nu=0}^{k} |a_{k\nu} x_\nu| = |a_{k0} x_0| - \sum_{\nu=1}^{k} \left(|a_{k-1\,\nu-1} x_{\nu-1}| - |a_{k\nu} x_\nu| \right) =$$

$$= |a_{k0} x_0| - \sum_{\nu=1}^{k} |a_{k-1\,\nu-1} x_{\nu-1} - a_{k\nu} x_\nu| \leq$$

$$\leq \left| a_{k0}x_0 - \sum_{\nu=1}^{k} a_{k-1\,\nu-1}x_{\nu-1} - a_{k\nu}x_\nu \right| =$$

$$= \left| \bar{\Delta}_k A_k(x) \right| .$$

Суммируя полученное неравенство по k, получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}x_\nu| = \sum_{k=0}^{n} \bar{\Delta}_k \sum_{\nu=0}^{k} |a_{k\nu}x_\nu| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \bar{\Delta}_k A_k(x) \right| .$$

Пусть метод Вороного-Нёрлунда (WN, p_n) определен последовательностью $p_n > 0$ и пусть $P_n = p_0 + \ldots + p_n$. Метод (WN, p_n) удовлетворяет оценке (2), если $x_k > 0$ и $\frac{x_{k+1}}{x_k}$ монотонно возрастает (тогда выполнено условие (I)) или если

$$\frac{P_{n-k}}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n-k} \left| \bar{\Delta}_\nu \frac{x_{\nu+k}}{x_\nu} \right| \leq K .$$

Метод (WN, p_n) удовлетворяет оценке (4), если $x_k > 0$ и $x_{k-\nu}/P_k$ монотонно убывает при каждом ν, если $k \to \infty$.

Пусть метод средних Рисса (R, p_n) определен последовательностью $p_n > 0$. Метод (R, p_n) удовлетворяет оценке (2), если $x_k > 0$ и $p_{k+1}x_{k+1}/p_k x_k$ монотонно возрастает (тогда выполнено условие (2)). Метод (R, p_n) удовлетворяет оценке (4), если $p_{k-\nu}x_{k-\nu}/P_k$ монотонно убывает при каждом ν, если $k \to \infty$ (тогда выполнено условие (3)).

Л и т е р а т у р а

1. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Z., 1951, 55, 92-108.
2. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute summierbarkeit. Math. Z., 1953,57,265-290.

МНОЖИТЕЛИ СХОДИМОСТИ СО СКОРОСТЬЮ В ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Я. Сикк

Множители сходимости со скоростью, которые мы называем K-мультипликаторами типа $(E_o^{\lambda}, E_o^{\mu})$, были определены и полностью изучены в работах Кангро. Ему принадлежит следующий результат (см. [1], лемма 5 и примечание 3).

<u>Теорема 1</u>. Для того, чтобы $\varepsilon \in (E_o^{\lambda}, E_o^{\mu})$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\Delta\varepsilon_k|}{\lambda_k} = O(1) \tag{1}$$

и

$$\mu_n \varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n) \tag{2}$$

причем в случае $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$ следует заменить O на o.

Оказывается, что теорему 1 можно использовать для изучения мультипликаторов пространств Липшица. Для этого мы используем методику T^{λ}-конструктивных пространств, которая была выработана автором . В результате получена полная характеристика мультипликаторов классов $(L^p, W^l Lip(\alpha, p))$, $(W^l Lip(\alpha, p), L^p)$ и $(W^l Lip(\alpha, p), W^{\delta} Lip(\beta, p))$ при $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1)$ и $p \in (1, \infty)$. Последовательность ε является мультипликатором класса:

а) $(L^p, W^l Lip(\alpha, p))$ тогда и только тогда, когда (1) и (2) выполнены при $\lambda = (1)$ и $\mu = (k^{l+\alpha})$;

б) $(W^l Lip(\alpha, p), L^p)$ тогда и только тогда, когда (1) и (2) выполнены при $\lambda = (k^{l+\alpha})$ и $\mu = (1)$;

в) $(W^l Lip(\alpha, p), W^{\delta} Lip(\beta, p))$ тогда и только тогда, когда (1) и (2) выполнены при $\lambda = (k^{l+\alpha})$ и $\mu = (k^{\delta+\beta})$.

Литература

1. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов λ-ограниченных методами Рисса и Чесаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 130-154.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ МЕТОД АЛЕКСИЧА В КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И $\mathcal{K}$-МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ

Я. Сикк

В своих последних исследованиях проф. Г. Ф.Кангро значительно дополнил методику теории суммируемости. Новые понятия, как A^λ-суммируемость и A^λ-ограниченность рядов и последовательностей, множители суммируемости со скоростью (мы используем термин $\mathcal{K}$-мультипликаторы) и т. д. создали основание теории суммируемости со скоростью (см. [1, 2]). Роль этой теории огромна ибо классическая теория суммируемости является ее частным случаем и большинство результатов этой теории верны и в том случае, когда рассматриваемые последовательности и ряды принадлежат к любому банахову пространству X. Одним из основных понятий в теории суммируемости со скоростью является понятие $\mathcal{K}$-мультипликатора (мультипликатор Кангро). $\mathcal{K}$-мультипликатор, это последовательность, которая преобразует каждый A-суммируемый ряд, который сходится с данной скоростью, в B-суммируемый ряд, сходящийся с другой определенной скоростью.

В настоящем докладе мы хотим указать на один определенный способ применения $\mathcal{K}$-мультипликатора в теории функций. Точнее, мы применяем $\mathcal{K}$-мультипликаторы для расширения и уточнения метода Алексича (см. [4]).

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементы банахого пространства X а $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ последовательность, $T = (\tau_{nk})$ – метод суммирования. Пусть

$$\sigma_n x = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{nk} x_k$$

и

$$\sigma_n \varepsilon x = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{nk} \varepsilon_k^{-1} x_k .$$

Метод Алексича основывается на сравнении скоростей сходимости последовательностей $\|\sigma_n x\|_X$ и $\|\sigma_n \varepsilon x - \sigma\|_X$ если $\lim_n \sigma_n \varepsilon x = \sigma$ существует. Применяя такое сравнение, Алексич и Кралик получили многие существенно новые результаты в теории функций. Например, Алексич доказал: для того, чтобы $f \in Lip(1, p)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\| \sigma_n f - f \|_p = O(1)$$

при $T = C^1$.

Оказывается, что последовательность ε, которая играет решающую роль при этой методике, является ничем иным как $\mathcal{K}$-мультипликатором типа (T_0, T^λ_0), при котором $\varepsilon^{-1} = (\varepsilon_k^{-1})$ является $\mathcal{K}$-мультипликатором типа (T^λ_0, T_0). Такое обстоятельство позволяет: во-первых, существенно сокращать доказательства результатов типа Алексича, ибо рассматриваемые $\mathcal{K}$-мультипликаторы полностью изучены в работах Кангро; во вторых, станет ясным, какие конкретные методы T пригодны и при каких случаях T можно заменить наиболее простым методом E. Некоторые аспекты этих проблем изучены автором. Получена следующая теорема, которую мы приводим в терминологии и обозначении автора (см. [3]).

Теорема. Пусть X - одно из пространств L_Φ или L^p при $p \in (1, \infty)$, $\lambda = (n^i)$, $\mu = (n^{j+\alpha})$ и Z^i - метод Зигмунда порядка i, где $i, j = 1, 2, \ldots$ и $\alpha \in (0, 1)$. Для того, чтобы i-тая производная $f^{(i)} \in X_{Z^1 \mu}$ необходимо и достаточно, чтобы $f \in X_{Z^{i+1} \lambda\mu}$.

Литература

1. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов λ-ограниченных методами Рисса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277. 130-154.
2. Кангро Г., В множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости, 1. Изв. АН Эст. ССР. Физ. матем. 1969. 18, № 2, 137-146.
3. Сикк Я., О T^λ-дополнительных пространствах рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975. 355, 222-235.
4. Kralik D., Elementary methods of the theory of series in approximation theory. Mat. Lapok. 1980, 28, 27-33.

ВКЛЮЧЕНИЕ ПОЛЕЙ СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ

В. Соомер, Э. Эрит

Пусть метод суммирования A определен матрицей $A=(a_{nk})$ преобразования последовательности в последовательность. Последовательность $x=(x_k)$ называется A-суммируемой, если существует конечный предел $\lim\limits_n y_n$, где

$$y_n = \sum_k a_{nk} x_k .$$

Последовательность $x=(x_k)$ называется сильно A-суммируемой со степенью p (здесь $p=(p_k)$, $p_k>0$) к числу ℓ, если

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}||x_k-\ell|^{p_k}=0 .$$

Через c_0 обозначим множество всех сходящихся к нулю последовательностей. Если $(y_n)\in c_0$ для всех $(x_k)\in c_0$, то мы скажем, что метод A является методом типа $c_0\to c_0$. Рассмотрим теперь такие методы $A=(a_{nk})$ и $B=(b_{nk})$, где $a_{nk}\geqslant 0, b_{nk}\geqslant 0$. Пусть $[c_A]^p=\{(x_k): \exists\, \ell, \lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk}|x_k-\ell|^{p_k}=0\}$.

Теорема 1. Пусть метод A - нормален и метод B - треуголен и выполнены следующие условия:

1° $\sup\limits_n \sum\limits_k b_{nk} < \infty$,

2° $0<p_k\leqslant q_k$,

3° $q_k/p_k = O(1)$,

тогда для того, чтобы $[c_A]^q\subset[c_B]^p$, достаточно, чтобы метод $G=BA^{-1}$ был методом типа $c_0\to c_0$. (Здесь A^{-1} - обратная матрица матрицы A).

Пусть $\alpha=(A_i)$ - последовательность матриц $A_i=(a_{nik})$. Последовательность $x=(x_k)$ называется сильно α-суммируемой со степенью p к числу ℓ, если

$$\lim_n \sum_k |a_{nik}||x_k-\ell|^{p_k}=0$$

равномерно по i (Здесь, как и раньше, $p=(p_k)$, $p_k>0$). Множество всех сильно α-суммируемых последовательностей обозначим через $[c_\alpha]^p$. Рассмотрим методы α, где $a_{nik}\geqslant 0$. Имеет место следующее обобщение теоремы 6 из статьи [2].

Теорема 2. Пусть $0<p_k\leqslant q_k$ и $q_k/p_k=O(1)$, а $\sup\limits_{n,i}\sum\limits_k a_{nik}<\infty$. Тогда $[c_\alpha]^q\subset[c_\alpha]^p$.

Замечание 1. Можно доказать, что если существуют пределы $\lim_n \sum_k a_{nik} = a \neq 0$ и $\lim_n a_{nik} = 0$ (равномерно по i), то при $0 < p_k \leq q_k \leq H$ и $q_k/p_k \to \infty$ включение $[c_\alpha]^q \subset [c_\alpha]^p$ не имеет место.

Отметим, что при $\alpha = (A)$, $A = (a_{nk})$, имеем $[c_\alpha]^p = [c_A]^p$. Значит, частным случаем теоремы 2 является следующее

Следствие 1. [1] Пусть $A = (a_{nk})$ - матричный метод суммирования, где $a_{nk} \geq 0$ и $\sup_n \sum_k a_{nk} < \infty$. Тогда при $0 < p_k \leq q_k$ и $q_k/p_k = O(1)$ имеет место

$$[c_A]^q \subset [c_A]^p.$$

Последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ называется мультипликатором множества X, если $(\varepsilon_k x_k) \in X$ для всех $(x_k) \in X$. Теорему 1 можно применить для изучения мультипликаторов множества $[c_A]^p$

Теорема 3. Если метод A - нормален, а $B = (b_{nk})$, где $b_{nk} = a_{nk} |\varepsilon_k|^{p_k}$, то для того, чтобы последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ был мультипликатором множества $[c_A]^p$, достаточно, чтобы $\sum_k a_{nk} |\varepsilon_k|^{p_k} = O(1)$ и метод $G = BA^{-1}$ был методом типа $c_0 \to c_0$.

Литература

1. Maddox, I., Spaces of strongly summable sequences. Quart. Journal of Math. Oxford ser. 2, 1967, 18, 345-355.
2. Nanda, S., Some sequence spaces and almost convergence. J. Austral. Math. Soc. (Series A), 1967, 22, 446-455.

ВЫПУКЛЫЕ СЕМЕЙСТВА МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Тали

I.Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – направленные по отношению $>$ множества, а X и Y – отделимые ЛВП над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), топологии которых определены соответственно семействами полунорм $P'=\{p'\}$ и $P=\{p\}$. Рассмотрим обобщенные последовательности $x=(\xi_u)$, где $\xi_u \in X$ и $u \in \mathcal{U}$. Заметим, что обобщенными последовательностями являются, например, обыкновенные последовательности $x=(\xi_n)$ (где $u=n$ и $\mathcal{U}=\mathbb{N}$), двойные последовательности $x=(\xi_{m,n})$ (где $u=(m,n)$ и $\mathcal{U}=\mathbb{N}^2$) и функции $x=\xi(u)$ с $u\in[0;\infty[=\mathcal{U}$. Пусть, далее, $\lambda=(\lambda_u)$ – числовая последовательность, где $0<\lambda_u\nearrow$.

<u>Определение I</u>. Будем говорить, что последовательность x является сходящейся со скоростью λ (λ -сходящейся), если $\lim\limits_u \xi_u = \xi$ и существует предел $\lim \lambda_u(\xi_u-\xi)$ и что x является ограниченной со скоростью λ (λ -ограниченной), если $\lim\limits_u \xi_u=\xi$ и последовательность $\{\lambda_u(\xi_u-\xi)\}$ ограничена.

Введем для множеств последовательностей x следующие обозначения:

$s(\mathcal{U},X)$ – множество всех последовательностей,

$c(\mathcal{U},X)$ – множество сходящихся последовательностей,

$c_0(\mathcal{U},X)$ – множество последовательностей, сходящихся к нулю $\theta\in X$,

$m(\mathcal{U},X)$ – множество ограниченных последовательностей,

$mc_0(\mathcal{U},X)=m(\mathcal{U},X)\cap c_0(\mathcal{U},X)$,

$c^\lambda(\mathcal{U},X)$ – множество λ -сходящихся последовательностей,

$c_*^\lambda(\mathcal{U},X)$ – множество λ -сходящихся последовательностей, для которых $\lim\limits_u \lambda_u(\xi_u-\xi)=\theta$,

$m^\lambda(\mathcal{U},X)$ – множество λ -ограниченных последовательностей.

Пусть A_v ($v\in\mathcal{V}$) – операторы из некоторого множества $X_A\subset s(\mathcal{U},X)$ в пространство Y. Тогда оператор $A=(A_v)$ переводит последовательность $x\in X_A$ в последовательность $(A_v x)$, где $A_v x\in Y$. Оператор A определяет метод суммирования A. Множество X_A является полем применения метода A. Обозначим поле суммирования метода A символом cA, поле суммирования к нулю - символом c_0A и поле ограниченности - символом mA.

Определение 2. Будем говорить, что метод A суммирует последовательность X со скоростью λ, если $(A_v X) \in c^\lambda(V,Y)$ и ограничивает X со скоростью λ, если $(A_v X) \in m^\lambda(V,Y)$.

2. Рассмотрим, далее, некоторое семейство методов суммирования A_α с непрерывным параметром[1] $\alpha \in]\alpha_0;\beta_0[$, где $\beta_0 - \alpha_0 > 1$.

Определение 3. Будем говорить, что семейство методов A_α является выпуклым, если при любых $\alpha < \beta$ выполняются условия

$$mA_\alpha \subset mA_\beta, \quad cA_\alpha \subset cA_\beta \tag{I}$$

и справедлива импликация

$$x \in mA_\alpha, \; x \in cA_\beta, \; \alpha < \gamma < \beta \Longrightarrow x \in cA_\gamma. \tag{2}$$

Если условия (I) и (2) имеют место с заменой в них символа c на c_0, то будем называть семейство A_α нуль-выпуклым (см. [2]).

Обозначим $A_\alpha X = (\eta_v^\alpha)$, $Y_\alpha = \{(\eta_v^\alpha) \mid X \in X_{A_\alpha}\}$ и сформулируем общие теоремы о нуль-выпуклости и выпуклости.

Теорема I. Рассмотрим семейство методов A_α, предполагая, что $mA_\alpha \subset mA_\beta$ и $c_0A_\alpha \subset c_0A_\beta$ при любых $\alpha < \beta$. Пусть, далее, существуют преобразования $E^{\alpha\delta\varkappa}$ и $G^{\alpha\delta\varkappa}$ с $\alpha \in]\alpha_0;\beta_0 - 1[$, $\delta \in]0;1[$ и $\varkappa \in]a;b[$ такие, что при любых $\alpha \in]\alpha_0;\beta_0-1[$, δ, $\varkappa$ и любой полунорме $p \in P$ выполнены следующие три условия:

I° Преобразования $E^{\alpha\delta\varkappa}$ являются преобразованиями типа $Y_{\alpha+1} \cap mc_0(V,Y) \longrightarrow c_0(V,Y)$.

2° Преобразования $G^{\alpha\delta\varkappa}$ являются преобразованиями типа $Y_\alpha \cap m(V,Y) \longrightarrow s(V,Y)$ и удовлетворяют при каждом $y \in Y_\alpha \cap m(V,Y)$ условию[2]

$$p(G_v^{\alpha\delta\varkappa} y) = O_{py}\{\varphi^{\alpha\delta}(\varkappa)\},$$

где $(G_v^{\alpha\delta\varkappa} y) = G^{\alpha\delta\varkappa} y$ и $\varphi^{\alpha\delta}(\varkappa) \to 0$ при $\varkappa \to b^-$.

3° При любом $x \in mA_\alpha \cap c_0A_{\alpha+1}$ справедливо неравенство

$$p(\eta_{1v}^{\alpha+\delta}) \le K_p \cdot p[E_v^{\alpha\delta\varkappa}(A_{\alpha+1}X)] + L_p \cdot p[G_v^{\alpha\delta\varkappa}(A_\alpha X)],$$

---

[1] Промежуток $]\alpha_0;\beta_0[$ может быть и бесконечным.

[2] В условиях ограниченности постоянные могут зависеть и от α и δ.

где $\{E_v^{\alpha\delta\varkappa}(A_{\alpha+1})\} = E^{\alpha\delta\varkappa}(A_{\alpha+1}x)$ и K_p, L_p – некоторые постоянные. Тогда семейство A_α является нуль-выпуклым с $\alpha \in]\alpha_0; \beta_0 - 1[$.

Общая теорема о выпуклости сводит исследование семейства A_α на выпуклость к исследованию его на нуль-выпуклость.

Теорема 2. Пусть $X = Y$ и A_α – линейные преобразования, переводящие каждую последовательность $x' = (\xi'_u)$ с постоянными членами $\xi'_u = \xi$ $(u \in \mathcal{U})$ в последовательности $(\eta'^{\alpha}_v) \in$ $\in mc(V, Y)$, причем $\lim \eta'^{\alpha}_v = a_\alpha \xi$, где $a_\alpha \neq 0$ – некоторые числа. Если семейство A_α нуль-выпукло, то оно и выпукло.

В основе применения выпуклых семейств A_α к суммированию со скоростью лежит

Теорема 3. Пусть $X = Y$, $\lambda_\alpha = (\lambda_v^\alpha)$ – некоторые последовательности с $0 < \lambda_v^\alpha \uparrow \infty$ и A_α – линейные преобразования, переводящие каждую последовательность $x' = (\xi'_u)$ с $\xi'_u = \xi$ $(u \in \mathcal{U})$ в последовательность (η'^{α}_v) с $\eta'^{\alpha}_v = a_\alpha \xi$, где $a_\alpha \neq 0$ – некоторые числа. а) если семейство методов A'_α, где $A'_\alpha x =$ $= (\lambda_v^\alpha \eta_v^\alpha)$, является нуль-выпуклым, то при любых $\alpha < \beta$ справедливы импликации

$$A_\alpha x \in m^{\lambda_\alpha}(V, X) \Longrightarrow A_\beta x \in m^{\lambda_\beta}(V, X), \tag{3}$$

$$A_\alpha x \in c_*^{\lambda_\alpha}(V, X) \Longrightarrow A_\beta x \in c_*^{\lambda_\beta}(V, X), \tag{4}$$

$$A_\alpha x \in m^{\lambda_\alpha}(V, X),\ A_\beta x \in c_*^{\lambda_\beta}(V, X),\ \alpha < \gamma < \beta \Longrightarrow A_\gamma x \in c_*^{\lambda_\gamma}(V, X). \tag{5}$$

б) Если семейство A'_α является выпуклым, то импликации (3)–(5) справедливы с заменой в них c_* на c.

Теоремы I и 2 являются обобщениями теорем I и I' работы [2], а теорема 3 обобщает теорему I работы [I].

Литература

I. Тали А., О применении теорем выпуклости к суммированию со скоростью. Материалы конференции "Методы алгебры и функционального анализа при исследовании семейств операторов", Тарту, 1978, 27–29.

2. Тали А., О нуль-выпуклых семействах методов суммирования. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1981, 504, 48–57.

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В СМЫСЛЕ ГИББСА

М.Ф. Тиман

Известно (см. [1]), что естественной областью определения ортонормированной на $[0,1]$ системы функций Уолша $\{\varphi_n(x)\}$ в нумерации Пэли является не отрезок $[0,1]$, а группа R точек $x=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k$ (x_k принимает значения либо ноль, либо единицу) с групповой операцией

$$x \dotplus y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k + y_k \pmod 2}{2^k} .$$

Пусть теперь L_p $(1 \le p \le \infty)$ означает пространство измеримых по Лебегу на $[0,1]$ функций $f(x)$, для которых $\|f(x)\|_p = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$, а при $p=\infty$ $\|f(x)\| = \operatorname{vraisup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Функцию $g(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$ называют (см. [2]) производной от функции $f(x)$ в смысле Гиббса и обозначают $f^{[1]}(x) = g(x)$, если

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} 2^k \left[f(x) - f\left(x \dotplus \frac{1}{2^{k+1}}\right) \right] - g(x) \right\|_p = 0 .$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема I. Пусть $f(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\gamma} R^{\gamma}_{2^m}(f)_p < \infty , \qquad (I)$$

где $\gamma = \min(2,p)$ для $1 \le p < \infty$ и $\gamma = 1$ при $p = \infty$,
$R_n(f)_p = \| f(x) - S_n(f;x) \|_p$, $S_n(f;x)$ – частные суммы ряда Фурье-Уолша функции $f(x)$. Тогда у функции $f(x)$ существует производная в смысле Гиббса $f^{[1]}(x) \in L_p$

Существуют примеры функций, показывающие, что при каждом фиксированном p $(1 \le p \le \infty)$ условие (I) не может быть улучшено.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $f(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$. Для того, чтобы у неё существовала производная в смысле Гиббса $f^{[1]}(x) \in L_p$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\| f(x) - \sigma_{2^m}(f;x) \|_p = O\left(2^{-m}\right),$$

где $$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k(f;x).$$

Примером функции $f_0(x) \in L_\infty$, у которой не существует $f^{[1]}(x) \in L_\infty$, может служить, например, функция $f_0(x)$, равная x для $0 \le x \le 1/2$ и $1-x$ для $\frac{1}{2} < x \le 1$.

Литература

I. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Физматгиз, Москва, 1958.

2. Butzer, P.L., Wagner, H.J., Walsh-Fourier series and the concept of a derivative. Appl. Anal. 3, 1973, N°1, 29–46.

О T-БАЗИСАХ В FK-ПРОСТРАНСТВАХ

М. Тыннов

Пусть E — FK-пространство, содержащее все последовательности $e_k=(0,\dots,0,1,0,\dots)$, где на к-ом месте 1. Введем следующие обозначения:

1) $T=(\tau_{nk})$ - матрица, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{nk}=1,\ \tau_{nk}=0 \text{ при } k>n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}|\tau_{nk}-\tau_{n,k+1}|=O(1);$$

2) $$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\tau_{nk}e_k;$$

3) $$\sigma_n\cdot x=\sum_{k=1}^{n}\tau_{nk}x_k e_k,\quad x=(x_k)\in E;$$

4) $$E_{TK}=\{x\in E:\ \lim_{n\to\infty}\sigma_n\cdot x=x\};$$

5) $$E_{TB}=\{x:\ (\sigma_n\cdot x) \text{ ограничена в } E\};$$

6) $$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k;$$

7) $$(m_T,c_T)=$$
$$=\{\varepsilon=(\varepsilon_k):\ s(\sigma_n\cdot x)=O(1)\Rightarrow\exists\lim_{n\to\infty}s(\sigma_n\cdot x\cdot\varepsilon)\}.$$

Если

$$\tau_{nk}=\frac{A^{\alpha}_{n-k}}{A^{\alpha}_{n}},\quad A^{\alpha}_{n}=\binom{n+\alpha}{n},$$

тогда $T=C^{\alpha}$ - метод Чезаро, а при $\alpha=1$ - метод арифметических средних, т.е.

$$\tau_{nk}=1-\frac{k-1}{n},\quad k=1,2,\dots,n.$$

Для метода Чезаро, $T=C^{\alpha}$,

$$(m_{C^{\alpha}},c_{C^{\alpha}})=\{\varepsilon:\ \varepsilon_k=o(1),\sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha}|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k|<\infty\}$$

(см.[3]; [1], стр. 183,171). Если $\alpha=1$, тогда обычно применяется обозначение

$$(m_{C^1},c_{C^1})=q_0.$$

Соответствующий класс последовательностей для метода взвешенных средних Рисса найден Кангро ([2], стр. 223).

Если $E = E_{TK}$, тогда скажем, что в E имеет место T-суммируемость по отрезкам или система последовательностей $\{e_k\}$ является T-базисом в E.

Если $E \subset E_{TB}$, тогда скажем, что в E имеет место T-ограниченность по отрезкам.

Имеет место следующая

Теорема. Для того чтобы в E множество последовательностей $\{e_k\}$ было T-базисом в E необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$(m_T, c_T) \cdot E = E. \tag{I}$$

Для всех FK-пространств верно включение

$$(m_T, c_T) \cdot E_{TB} \subset E_{TK} \subset E.$$

Можно показать, что условие (1) является необходимым и достаточным условием и для того, чтобы

$$E \subset E_{TB},$$

т.е., чтобы в E имело место T-ограниченность по отрезкам. Бунтинасом (см. [4]) доказано, что

$$q_0 \cdot E = E_{C^1K} \Leftrightarrow E = E_{C^1K}.$$

Литература

1. Барон С.А., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191-232.
3. Bosanquet, L.S., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1945, 20, 39-48.
4. Buntinas, M., Convergent and Bounded Cesàro Sections in FK-Spaces. Math. Z., 1971, 121, 191-200.

ВКЛЮЧЕНИЕ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ СО СКОРОСТЬЮ В КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Х. Тюрнпу

Рассмотрим систему $\varphi=\{\varphi_k\}$ интегрируемых по Лебегу на $e=[a,b]$ функций φ_k, для которых ряд

$$\sum \xi_k\varphi_k(t) \tag{I}$$

сходится по мере на e для всех $x\in \ell^2_\lambda=\{(\xi_k): \sum \xi_k^2\lambda_k^2<\infty\}$, где $0<\lambda_k\nearrow\infty$.

Пусть A и B регулярные треугольные методы суммирования. Говорят, что ряд (I) является почти всюду (п.в.) на e A-суммируемым со скоростью λ, или, короче A^λ-суммируемым, если п.в. на e существует предел

$$\lim \lambda_n\Big[\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}\xi_k\varphi_k(t)-f(t)\Big],$$

где f — сумма ряда (I) в смысле сходимости по мере.

В настоящей заметке мы исследуем включение со скоростью методов суммирования в классе рядов (I), т.е. мы найдем такие условия на методы суммирования A и B, чтобы из B^λ-суммируемости ряда (I) с $x_0\in\ell^2_\lambda$ п.в. на $e_0\subset e$ вытекало A^λ-суммируемость ряда (I) для $x_0\in\ell^2_\lambda$ п.в. на e_0 (короче, $A^\lambda\supset B^\lambda$ в классе рядов (I)). Исследованием включения со скоростью методов суммирования в классе ортогональных рядов занимались многие математики, притом большинство из них воспользовались методом $T_{m_n}=(t_{nk})$, где

$$t_{nk}=\begin{cases}1 & \text{при } k\le m_n;\\ 0 & \text{при } k>m_n\end{cases}$$

и (m_n) заданная последовательность натуральных чисел. Мы воспользуемся понятием сильной суммируемости со скоростью λ. Кроме того, мы требуем, чтобы метод A сохранял λ-сходимость, т.е. метод A переводит все λ-сходящиеся последовательности опять в λ-сходящиеся (см. напр.[I] стр.139).

Говорят, что ряд (I) для $x\in\ell^2_\lambda$ является п.в. на e сильно AB-суммируемым со скоростью λ (короче, $[AB]^\lambda$-суммируемым), если п.в. на e существует предел

$$\lim \lambda_m^2\sum_{n=0}^{m}|a_{mn}|\Big|\sum_{k=0}^{n}\beta_{nk}\xi_k\varphi_k(t)-f(t)\Big|^2,$$

где f — сумма ряда (I) в смысле сходимости по мере.

Если B — метод сходимости, то вместо $[AB]^{\lambda}$-суммируемости говорят о $[A]^{\lambda}$-суммируемости. В работе [2] найдены условия для того, чтобы из A^{λ}-суммируемости п.в. на e ортонормального ряда (I) с $x \in \ell_{\lambda}^{2}$ вытекало $[A]^{\lambda}$-суммируемость. Мы получим в некотором смысле более общий результат.

Теорема I. Пусть метод A сохраняет λ^2-сходимость. Если

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{nk}^{2} d_n = O(\lambda_k^2), \tag{2}$$

где $B_{nk}=\beta_{nk-1}$

и

$$d_n = \sup_{m \geq n} \lambda_m^2 |a_{mn}|,$$

то из B^{λ}-суммируемости п.в. на $e_1 \subset e$ ряда (I) с $x_0 \in \ell_{\lambda}^{2}$ вытекает $[A]^{\lambda}$-суммируемость п.в. на e_1, ряда (I) с $x_0 \in \ell_{\lambda}^{2}$.

В частности, если $B=A$, то выполнение условия (2) гарантирует, что из A^{λ}-суммируемости п.в. на e_1 ряда (I) с $x_0 \in \ell_{\lambda}^{2}$ следует его $[A]^{\lambda}$-суммируемость п.в. на e_1.

Далее, пусть ряд (I) для $x_0 \in \ell_{\lambda}^{2}$ является п.в. на e_1 B^{λ}-суммируемым. Если метод A сохраняет λ^2-сходимость и выполнено условие (2), то по теореме I ряд (I) для $x_0 \in \ell_{\lambda}^{2}$ является п.в. на e_1 $[A]^{\lambda}$-суммируемым и, следовательно, подавно A^{λ}-суммируемым п.в. на e_1. Итак, имеет место

Теорема 2. Пусть метод A сохраняет λ^2-сходимость и выполнено условие (2). Тогда в классе рядов (I) $A^{\lambda} \supset B^{\lambda}$.

Например, если A — метод взвешенных средних Рисса P_1 и $B = P_{\varkappa}$, где метод $P_{\varkappa}$ определен треугольной матрицей $\beta_{nk} = (1 - P_{k-1}/P_n)^{\varkappa}$, то условие (2) выполнено, и, следовательно, если метод P_1 сохраняет λ^2-сходимость, то $P_1^{\lambda} \supset P_{\varkappa}^{\lambda}$ в классе рядов (I). Если учесть, что для таких скоростей λ в классе всех рядов $P_{\varkappa}^{\lambda} \supset P_1^{\lambda}$, то получаем, что в классе рядов (I) методы Рисса эквивалентны между собой.

Литература

I. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бара-Харди для заданной скорости. Изв. АН Эст.ССР. Физ. матем.1969, 18,№2,137-146.

2. Кангро Г., Сильная суммируемость ортогональных рядов со скоростью. Изв. АН Эст.ССР Физ. матем. 1979,28,№1,1-8.

ОБ ИЗМЕРИМОСТИ ПРОИЗВОДНОЙ ГАТО

М.М.Чобан

Через P обозначим некоторое частично упорядоченное нормированное тело, для которого:

I. Если $0 \le x \le y$, то $\xi(x) \le \xi(y)$, где ξ – норма на P;

2. Пусть $P^+ = \{x \in P \mid x > 0\}$. Тогда $[P^+] = P^+ \cup \{0\}$, а P есть полное в смысле Чеха пространство со счетной базой.

Пусть X и Y – топологические P-модули без изолированных точек, L – непустое замкнутое в X множество, для которого $0 \notin L$, G – непустое открытое в X множество. Через $\exp Y$ обозначим все подмножества пространства Y. Однозначное отображение $\theta : G \longrightarrow \exp Y$ назовем многозначным отображением. Отображение θ A-измеримо, если $\theta^{-1} U = \{x \in G \mid \theta(x) \cap U \ne \emptyset\}$ есть A-множество пространства G для каждого открытого в Y множества U. Если $\theta^{-1} U$ открыто в G для каждого открытого в Y множества U, то θ называется полунепрерывным снизу отображением.

Рассмотрим однозначное отображение $f : G \longrightarrow Y$. Для каждых $x \in G$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$f_{\varepsilon L}(x) = [\{t^{-1}(f(x+t\ell) - f(x)) \mid 0 < \xi(t) < \varepsilon,\ t \in P^+,\ x+t\ell \in G\}],$$

$$f'_L(x) = \cap \{f_{\varepsilon L}(x) \mid \varepsilon > 0\}.$$

Множество $f_{\varepsilon L}(x)$ называется ε-производной Гато, а множество $f'_L(x)$ – производной Гато в точке x по направлениям L. Отображения $f_{\varepsilon L}$ и f'_L в общем случае многозначны. Отображение f дифференцируемо по Гато по направлениям L в обычном смысле, если отображение f'_L однозначно и для каждой точки $x \in G$ существует такой $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, что множество $f_{\varepsilon L}(x)$ компактно.

Положим $\tilde{G} = \{(t, x, \ell) \in P^+ \times G \times L \mid x, x+t\ell \in G\}$, $\tilde{G}_\varepsilon = \{(t, x, \ell) \in \tilde{G} \mid \xi(t) < \varepsilon\}$. Множества $\tilde{G}$ и $\tilde{G}_\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, открыты в $P^+ \times G \times L$. Рассмотрим непрерывные однозначные отображения $q : \tilde{G} \longrightarrow P^+ \times G \times G$, $\pi : \tilde{G} \longrightarrow G$ и $h : P^+ \times Y \times Y \longrightarrow Y$, где $q(t, x, \ell) = (t, x, x+t\ell)$, $\pi(t, x, \ell) = x$ и $h(t, a, b) = t^{-1}(b - a)$. Отображение $f : G \longrightarrow Y$ порождает отображение $\tilde{f} : P^+ \times G \times G$

$\longrightarrow P^+ \times Y \times Y$, где $\tilde{f}(t,x,y) = (t, f(x), f(y))$. Свойства отображения $\tilde{f}$ определяются свойствами отображения f . По построению, для каждого открытого в Y множества U и любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$f_{\varepsilon L}^{-1} U = \pi(\tilde{G}_\varepsilon \cap (q^{-1}(\tilde{f}^{-1}(h^{-1} U)))) .$$

Это равенство позволяет определить свойства отображений f'_L и $f_{\varepsilon L}$ в зависимости от свойств отображения f . Например, если отображение f непрерывно, то отображения $f_{\varepsilon L}$ полунепрерывны снизу. Если же отображение f А-измеримо, L есть полное сепарабельное метризуемое пространство и пространство X метризуемо, а пространство Y метризуемо и сепарабельно, то отображения $f_{\varepsilon L}$ А-измеримы. Из этих фактов вытекают:

Теорема I. Пусть Y есть локально бикомпактное пространство со счетной базой. Тогда:

I. Если отображение f непрерывно, то $f'^{-1}_L \Phi$ есть G_δ -множество для каждого бикомпактного множества $\Phi \subset Y$.

2. Если отображение f А-измеримо, пространство X метризуемо и L есть полное сепарабельное метризуемое подпространство, то отображение f'_L А-измеримо.

Теорема 2. Пусть X - метризуемое пространство, Y - полное метризуемое пространство со счетной базой, G есть полное сепарабельное подпространство и $f : G \longrightarrow Y$ есть такое отображение, что отображение f'_L однозначно. Тогда:

I. Если f непрерывно, то f'_L есть В-измеримое отображение классаI.

2. Если отображение f В-измеримо, а пространство X сепарабельно, то и отображение f'_L В-измеримо.

Пусть $P = Y$ есть поле действительных чисел, $X = P^2$, $\ell = (1,0)$ и $L = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда существует такое однозначное В-измеримое отображение $f : X \longrightarrow Y$ класса I, для которого отображения f'_ℓ и f'_L однозначны, а отображения $f_{\varepsilon\ell}$ и $f_{\varepsilon L}$ не В-измеримы для всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$.

Аналог производной Гато можно рассматривать и для многозначных отображений. Для них теорема I остается верной.

О СИСТЕМАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ $L^p[0,1], p>0$

В.И. Филиппов

В работах [1] и [2] А.А.Талалян вводит понятие представляющей системы (с.п.) и устанавливает некоторые свойства этих систем в пространствах $L^p[0,1]$, $p>0$.

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — с.п. пространства $L^p[0,1]$, $p\geq 1$. Тогда $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является с. п. в пространствах $L^q[0,1]$, $0<q<1$.

Следствие. Пусть $\varphi(x)$ непрерывна на $(-\infty,\infty)$ монотонновозрастающая функция, $\varphi(0)=0$, $y/\varphi(y)\to+\infty$, $y\to+\infty$, $\varphi(a+b)\leq\varphi(a)+\varphi(b)$, $a>0$, $b>0$. Тогда, если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — с.п. в $L^p[0,1]$, $p\geq 1$, то $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — с.п. в $\varphi(L)$.

Теорема 2. Если $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — с.п. в $C[0,1]$ и она остается с.п. после отбрасывания любых N функций, тогда $\{f_k(x)\}_{k=N}^{\infty}$ — с.п. в пространствах $L^p[0,1]$, $p>0$.

Следствие. Если $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — с.п. в $L^p[0,1]$, $0<p<1$, то $\{f_k(x)\}_{k=N}^{\infty}$, $N=1,2,\ldots$, — с.п. в $L^q[0,1]$, $0<q\leq p$.

Пусть G — произвольная выпуклая область, такая, что отрезок $[0,1]\subset G$. Как следует из работ Ю.Ф.Коробейнака (см. [3], [4]), если $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ ($\lambda_k=\lambda_k'+i\lambda_k''$, $\lambda_k'\in R$, $\lambda_k''\in R$ — с.п. в $A(G)$, то $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=N}^{\infty}$ также является с.п. в $A(G)$. Непосредственно из теоремы 2 следует

Теорема 3. Если выполнены предыдущие условия, то система

$$\{e^{\lambda_k' x}\cos\lambda_k'' x,\ e^{\lambda_k' x}\sin\lambda_k'' x\}_{k=N}^{\infty},\ N=1,2,\ldots,\ x\in R,$$

является с.п. в пространствах $L^p[0,1]$, $p>0$.

Литература

1. Талалян А.А., Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем. - Матем. сб., 1981, т.115(157), №4(8), с. 499-531.
2. Талалян А.А., О системах, ряды по которым представляют любые измеримые функции. - Матем. сб., 1968, т.76(118), с.39-51.
3. Коробейник Ю.Ф., Представляющие системы. Изв. АН СССР Сер. матем., 1978, т.42, №2, с.325-355.
4. Коробейник Ю.Ф., Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше. - Матем. сб. 1975, т.97(139), №2, с.193-229.

О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. И. Шахбазов

Пусть $A(D)$ - банахова алгебра всех функций, голоморфных в относительно компактной области $D \subset \mathbb{C}^n$ и непрерывных в её замыкании $\overline{D}$. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$: $\overline{D} \to D$ - такое отображение, что все $\varphi_i \in A(D)$, и пусть u - фиксированный отличный от 0 элемент $A(D)$. Легко проверить, что линейный оператор $T: A(D) \to A(D)$, $(Tf)(z) = u(z) f(\varphi(z))$, компактен (здесь $f \in A(D)$ и $z \in \overline{D}$). Нашей целью является вычисление спектра $\sigma(T)$ такого оператора T (при $n = 1$ и $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ аналогичная задача решена Камовицем [4]).

Так как $\varphi(\overline{D})$ - компактное подмножество в D, то отображение φ имеет в $\overline{D}$ единственную неподвижную точку z_0, причем $z_0 \in D$ и итерации отображения φ равномерно на $\overline{D}$ сходятся к постоянному отображению $\varphi^\infty \equiv z_0$. (ср. [3], стр. 105). Пусть $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ - множество всех ненулевых собственных значений матрицы Якоби отображения φ в точке z_0 (без учета кратностей); ясно, что $0 < |\lambda_i| < 1$ для всех $i = 1, \dots, s$. Напомним, что собственное значение $\lambda_p \in \Lambda$ называется резонансным, если существуют такие целые неотрицательные числа $m_1, \dots, m_s$, что $\sum m_i \geq 2$ и $\lambda_p = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_s^{m_s}$. Пусть Λ_0 - множество всех нерезонансных $\lambda_p \in \Lambda$ (легко понять, что если $\Lambda \neq \emptyset$, то и $\Lambda_0 \neq \emptyset$); обозначим через $\Pi(\varphi)$ мультипликативную подполугруппу в $\mathbb{C}$, порожденную множеством $\Lambda_0 \cup \{0, 1\}$.

Теорема. $\sigma(T) = u(z_0) \cdot \Pi(\varphi)$. В частности, если $u(z_0) = 0$, то оператор T квазинильпотентен, а если $u(z_0) = 1$, то спектр T совпадает с полугруппой $\Pi(\varphi)$.

Наш подход к доказательству этой теоремы существенно отличается от подхода Камовица [4] и состоит в применении теории возмущений в сочетании с теоремой Пуанкаре о локальной линеаризации (возмущенного) отображения φ в окрестности точки z_0. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда $u \equiv 1$ (общий случай легко сводится к этому). Не ограничивая общности, можем считать, что $z_0 = 0 \in D$. Пусть $\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z) + \Delta_\varepsilon z$, где Δ_ε - диагональная матрица, $\|\Delta_\varepsilon\| < \varepsilon \ll 1$. Отображению φ_ε отвечает возмущение T_ε оператора T, а именно, $(T_\varepsilon f)(z) = f(\varphi_\varepsilon(z))$. Оператор T_ε тоже компактен и при малых ε сколь угодно точно аппроксимирует оператор T (в равномерной операторной топологии). Ясно, что Δ_ε можно выбрать так, что собственные значения матрицы Якоби отображения φ_ε в точке 0 будут все отличны от 0, различны и нерезонансны. Поэтому по теореме Пуанкаре (см., например, [I], с. 176) в малой окрестности точки 0 можно перейти к новым координатам w (биголоморфно связанным с исходными координатами z), в которых росток отображения φ_ε будет иметь вид $A_\varepsilon w$, где A_ε - диагональная матрица (её диагональные элементы - это собственные значения матрицы Якоби отображения φ_ε). Это позволяет найти спектр (и собственные векторы) оператора T_ε в алгебре $\mathbb{C}[[w]]$ сходящихся степенных рядов от переменных w (достаточно переписать уравнение $T_\varepsilon f = \nu f$ для собственных функций в виде системы уравнений для коэффициентов степенного ряда, представляющего f в окрестности начала координат). Оказывается, что спектр оператора T_ε состоит из 0, I и всех чисел $\nu_q = \mu_{1,\varepsilon}^{q_1} \cdots \mu_{n,\varepsilon}^{q_n}$, где $\mu_{1,\varepsilon}, \dots, \mu_{n,\varepsilon}$ - диагональные элементы матрицы A_ε, а $q = (q_1, \cdots, q_n)$ - любой целочисленный вектор с неотрицательными координатами q_i. Если позаботиться о том, чтобы числа $\mu_{1,\varepsilon}, \dots, \mu_{n,\varepsilon}$ были мультипликативно независимы (т.е. чтобы из соотношения вида $\mu_{1,\varepsilon}^{k_1} \cdots \mu_{n,\varepsilon}^{k_n} = 1$, где $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, следовало бы, что все $k_i = 0$; этого всегда можно добиться, выбирая надлежащим образом матрицу Δ_ε), то каждому собственному значению ν_q, $q = (q_1, \dots, q_n)$, будет отвечать в алгебре $\mathbb{C}[[w]]$ единственная с точностью до скалярного множителя собственная функция $f_q(w) = w_1^{q_1} \cdots w_n^{q_n}$. Так как $\varphi_\varepsilon(\bar{D}) \subset D$ при малых ε, то итерации отображения φ_ε "стягивают" $\bar{D}$ к неподвижной точке 0; отсюда легко следует, что все собственные функции оператора T_ε в алгебре $\mathbb{C}[[w]]$ в действительности принадлежат алгебре $A(D)$. Поэтому спектр оператора T_ε в алгебре $A(D)$ тот же, что в алгебре $\mathbb{C}[[w]]$. Для завершения доказательства остается воспользоваться известными результатами теории возмущений (см., например, [2], теорема 3.16 на с. 269), из которых следует, что спектр оператора T в $A(D)$ состоит в точности из предельных точек объединения спектров операторов T_{ε_k}, где $\{\varepsilon_k\}$ - подходящая последовательность положительных чисел, стремящихся к 0. Расшифровка этого утверждения совпадает с формулировкой нашей теоремы (в рассматриваемом сейчас случае $u \equiv 1$).

Описанный приём даёт также рецепт вычисления собственных функций оператора T (при $n \leq 2$ - всех, а при $n > 2$ - хотя бы по одной для каждой ненулевой точки спектра). Аналогичный подход применим и к некоторым другим алгебрам голоморфных функций, например, к алгебре $H^\infty(D)$ всех голоморфных ограниченных функций в области D

Литература

1. Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, 1978.
2. Като Т., Теория возмущений линейных операторов. Москва, 1972.
3. Эрве М., Функции многих комплексных переменных. Москва, 1965.
4. Kamowitz H., Compact operators of the form uC_φ, Pacific J. Math., 1979, 80, N°1, 205-211.

НЕЧЕТКАЯ МОДИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

А.Шостак

В нечеткой топологии важную роль играют нечеткий отрезок $J(L)$, построенный Б.Хаттоном [I], и нечеткая прямая $\mathbb{R}(L)$, определенная в [2] по аналогии с $J(L)$. Исследованию топологических и алгебраических свойств этих пространств посвящено значительное число работ ([I]-[5]и др.). С.Е. Родабаух [5] поставил проблему, унифицировав конструкцию Б.Хаттона, для каждого топологического пространства X построить нечеткую модификацию, которая в категории нечетких топологических пространств $\mathcal{F}uz$ играла бы роль, в определенном смысле аналогичную роли пространства X в категории топологических пространств $\mathcal{T}op$. Мы предлагаем решение этой задачи для случая, когда X - линейно упорядоченное пространство.

<u>Конструкция $\mathcal{F}(X)$.</u> Пусть X - линейно упорядоченное топологическое пространство. Обозначим через $\mathcal{F}(X)$ множество всех невозрастающих полунепрерывных снизу функций $z : X \to J = [0,I]$, и положим $z(t^+) = \sup\{z(s), s>t\}$, $z(t^-) = \inf\{z(s): s<t\}$. Для каждого $t \in X$ рассмотрим отображения $\rho_t : \mathcal{F}(X) \to J$ и $\lambda_t : \mathcal{F}(X) \to J$, определяемые равенствами $\rho_t(z) = z(t^+)$ и $\lambda_t(z) = I - z(t^-)$. Нечеткую топологию τ на $\mathcal{F}(X)$ зададим предбазой $\pi = \{\rho_t, \lambda_t : t \in X\}$. В дальнейшем $\mathcal{F}(X)$ предполагается наделенным τ ; пространство $(\mathcal{F}(X), \tau)$ называется <u>нечеткой модификацией пространства X</u>.

Легко проверяется, что отображение $\varphi : X \to \mathcal{F}(X)$, определяемое равенством $\varphi(a) = z_a$, где $a \in X$ и $z_a(x) = \begin{cases} 0: & x>a \\ I: & x \le a \end{cases}$, является отображением нечетко гомеоморфного вложения.

Имеют место следующие утверждения:

<u>Теорема I.</u> Для каждого линейно упорядоченного пространства X пространство $\mathcal{F}(X)$ нечетко нормально.

<u>Теорема 2.</u> Конструкция $\mathcal{F}$ сохраняет вес, число Линделефа и число Суслина. Точнее говоря, имеют место следующие равенства:

$$w(X) = w_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(X)), \quad c(X) = c_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(X)), \quad \ell(X) = \ell_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(X)).$$

В частности, X компактно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(X)$ нечетко компактно [2], [7].

Теорема 3. X связно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(X)$ нечетко связно.

Теорема 4. Пространство $\mathcal{F}(X)$ имеет нечеткое кружево [6] тогда и только тогда, когда X метризуемо.

Примеры $\mathcal{F}(R)$ ($\mathcal{F}(J)$) естественно изоморфно нечеткой прямой (соответственно, нечеткому отрезку) [1], [2].

Замечание 1. Включив в π все постоянные функции, получим новую конструкцию, которую обозначим $\mathcal{F}_c$. Нетрудно показать, что $\omega(X)\subset\mathcal{F}_c(X)$, где $\omega : \mathcal{T}op \to \mathcal{F}uz$ - функтор Ловена. Теоремы 1 - 4 сохраняют силу и для конструкции $\mathcal{F}_c$.

Замечание 2. Очевидные изменения в конструкции $\mathcal{F}$ позволяют обобщить ее и на случай L-нечетких пространств, где L - произвольная структура.

Литература

1 B.Hutton, Normality in fuzzy topological spaces, J.Math. Anal.Appl. 50 (1975), 74-79

2 T.E.Gantner, R.C.Steinlage, R.W.Warren, Compactness in fuzzy topological spaces, J.Math.Anal.Appl. 62 (1978), 547-562

3. R.Lowen, On $(\mathbb{R}(L), \oplus)$, Thesis. Brussel, 1982.

4. S.E.Rodabaugh, Connectivity and the L-fuzzy unit interval, Rocky Mount.J Math., 12 (1982), 113 - 121.

5. S.E.Rodabaugh, A categorical accomodation of various notions of fuzzy topology, Fuzzy sets and Systems, 9 (1983), 241 - 265.

6. A.P.Šostak, On fuzzy stratifiable spaces - to be printed in J.Math.Anal.Appl., 1984.

7. R.Lowen, Fuzzy topological spaces and fyzzy compactness, J.Math.Anal.Appl., 56 (1976), 621 - 633.

ЗАМЕНИМОСТЬ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Э. Юримяэ

Впервые проблема заменимости методов суммирования встречается в [3], где она поставлена в следующем виде: при каких условиях для данного метода суммирования A, сохраняющего сходимость, найдется регулярный метод B, для которого $c_B = c_A$. Символом c_A обозначается поле суммируемости метода A. Выяснилось, что в данной задаче регулярность можно заменить "регулярностью для нулевых последовательностей" или мультипликативностью метода B. С изучением этой задачи связано изучение различных отличительных подмножеств поля данного метода суммирования (см. [2, 3, 4]).

Для абсолютной суммируемости проблема заменимости рассмотрена в [1], при этом условие $c_B = c_A$ заменено условием $\ell_B \supseteq \ell_A$, где ℓ_A обозначает поле абсолютной суммируемости метода A. Такое изменение проблемы оказывается естественным, так как не известны хорошие условия для соотношения $\ell_A = \ell$ (или $\ell_A = \ell_B$).

Во всех цитированных (и многих других) работах для заменимости (особенно для корегулярных методов) даны различные достаточные и необходимые или только достаточные условия топологического характера. При этом не обращается внимание на то, как найти заменяющий метод B.

В настоящем приведем для заменимости некоторые достаточные условия иного характера, из которых получаем возможность нахождения соответствующего метода B.

Метод суммирования A определяем матричным преобразованием

$$\eta_n = \sum_k a_{nk} \xi_k . \qquad (1)$$

Полем суммируемости c_A данного метода $A = (a_{nk})$ называется множество тех последовательностей $x = (\xi_k)$, для которых $y = (\eta_n) \in c$. Поле суммируемости c_A является некоторым FK-пространством, в котором каждый линейный непрерывный функционал выражается формулой

$$f(x) = \sum_k \beta_k \xi_k + \sum_k \tau_k \eta_k + \tau \lim_A x ,$$

где $(\tau_n)\in l$ и $\lim_A x=\lim_n \eta_n$. Известно, что для каждого f найдется такой метод B, что $f(x)=\lim_B x$, где $c_B\supseteq c_A$. Если $\tau\neq 0$, то метод B можно выбирать таким образом, что $c_B=c_A$.

Если метод $A=(a_{nk})$ сохраняет сходимость, т.е. $c_A\supseteq c$, тогда $e=(1)\in c_A$ и $e_m=(\delta_{mk})\in c_A$, где $\delta_{mm}=1$ и $\delta_{mk}=0$ для $k\neq m$ Пусть $a_k=\lim_A e_k$. Метод A называем нуль-регулярным, если $c_A\supset c_0$ и $a_k=0$ для всех k. Метод A, сохраняющий сходимость, называется заменимым, если найдется такой нуль-регулярный метод B, что $c_B=c_A$.

На основе вышеуказанных фактов получается следующая

Теорема 1. Если система

$$\sum_n a_{nk}\tau_n+\alpha_k\tau=0\ ,\ k=1,2,\ldots, \quad (2)$$

имеет такое решение, что $(\tau_n)\in l$ и $\tau\neq 0$, тогда метод $B=(b_{mk})$, где

$$b_{mk}=\sum_{n<m}\tau_n a_{nk}+\tau a_{mk}\ ,$$

является заменяющим методом для A.

Замечание. Если система (2) имеет нетривиальное решение $(\tau_n)\in l$ и $\tau=0$, то для полученного метода B имеет место соотношение $c_B\supset c_A$. В этом случае мы можем говорить о заменимости в широком смысле.

На основе следующего примера получаем, что условие теоремы 1 является действительно только достаточным. Пусть $\sum_k|\alpha_k|<\infty$ и $\alpha_k\neq 0$ для всех k. Нормальный метод $A=(a_{nk})$, где $a_{nk}=\alpha_k$, если $n\geq k$, является заменимым, так как $\sum\alpha_k\xi_k=\sum a_k\xi_k$ сходится при всех $x=(\xi_k)\in c_A$ (см. [1], стр. 228), но для этого метода система (2) имеет только тривиальное решение.

Преобразование (1) определяет метод абсолютного суммирования, если $y=(\eta_n)\in l$. Поле абсолютной суммируемости l_A является FK-пространством, в котором каждый линейный непрерывный функционал выражается формулой

$$f(x)=\sum_k\beta_k\xi_k+\sum_n\mu_n\eta_n\ ,$$

где $(\mu_n)\in m$. Для каждого f найдется такой метод B, что

$$f(x)=\sum_n\sum_k b_{nk}\xi_k$$

и $\ell_B \geq \ell_A$.

Метод B называется абсолютного регулярным, если $\sum_n \sum_k b_{nk} \xi_k = \sum_k \xi_k$ для всех $(\xi_k) \in \ell$.

Метод A, для которого $\ell_A \geq \ell$, называется абсолютно заменимым, если найдется такой абсолютно регулярный метод B, что $\ell_B \geq \ell_A$.

На основе вышеуказанных фактов можно получить следующую теорему.

Теорема 2. Если система

$$\sum_n a_{nk} \mu_n = 1 \quad , \quad k = 1, 2, \dots ,$$

имеет нетривиальное решение $(\mu_n) \in m$, тогда метод $B = (b_{mk})$, где

$$b_{mk} = \mu_m a_{mk} ,$$

является абсолютно заменяющим методом для A.

Аналогичными рассуждениями можно получить и другие "заменимости", при которых данный метод A заменяется методом B, более подходящим для данного вопроса. Например, заменить данный метод треугольным, данный метод трансдативным, данный метод секционно-ограниченным методом и т.д. При этом надо учесть, что некоторые хорошие свойства методов суммирования (как, например, секционно-ограниченность) являются инвариантами, т.е. зависят не от метода, а от его поля суммируемости. В этих случаях надо рассматривать заменимость в широком смысле.

Литература

1. Bennett, G., Distinguished subsets and summability invariants, Stud. math., 1971,40,N°3,225-234.
2. Brown, H.I., Replaceability of 1-1 methods of summation, Mich. math. J., 1967,14,N°4,467.
3. Wilansky, A., Summability: the inset, replaceable matrices, the basis in summability space, Duke Math. J., 1952,19,647-660.
4. Wilansky, A., Distinguished subsets and summability invariants, J. d'Analyse Math., 1964,12,327-350.

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ЛАГРАНЖА-ЛАГЕРРА И РЯДОВ ФУРЬЕ-ЛАГЕРРА

Л.В.Борисова

Пусть $\{P_n^{(\alpha)}(x)\}$ – последовательность многочленов Лагерра, ортонормальных на промежутке $[0;+\infty)$ с весом $w(x)=e^{-x}x^{\alpha}$, $\alpha>-1$. Матрицу $\mathfrak{M}^{\alpha}=\{x_{k,n}\}$, $1\le k\le n$, $n=1,2,3,\dots$, узлов интерполирования, n -я строка которой $x_{1,n}<x_{2,n}<\dots<x_{k,n}<\dots<x_{n,n}$ состоит из корней многочлена Лагерра $P_n^{(\alpha)}(x)$, назовем матрицей Лагерра.

Для любой действительной, непрерывной, ограниченной на $[0;+\infty)$ функции f такой, что $f(x^2)$ равномерно непрерывна на $[0;+\infty)$, и любого натурального n положим

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}^{\alpha},f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})\,\ell_{k,n}(\mathfrak{M}^{\alpha},x),\qquad (1)$$

где $\ell_{k,n}(\mathfrak{M}^{\alpha},x)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа.

Обозначим через $\omega(f,\delta)$ модуль непрерывности функции $f\in C$ на отрезке $[a,b]\subset(0;+\infty)$, а через Ω – множество вещественных, непрерывных на $[0;+\infty)$, неубывающих, полуаддитивных функций ω, $\omega(0)=0$. Для любой функции ω введем класс функций C_{ω}. Если $\omega(\delta)\in\Omega$ и $\omega(f,\delta)=\underline{\underline{O}}\{\omega(\delta)\}$ для любого отрезка $[a,b]\subset(0;+\infty)$, то говорим, что $f(x)\in C_{\omega}$.

Пусть $\mathcal{E}(\mathfrak{M}^{\alpha},f)$ – множество точек расходимости интерполяционного процесса Лагранжа, построенного по матрице $\mathfrak{M}^{\alpha}$ для функции f.

Рассмотрим $(n-1)$ -ую частную сумму ряда Фурье-Лагерра. По определению

$$S_{n-1}^{(\alpha)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k^{(\alpha)}(x)=\int_0^{\infty} f(t)K_{n-1}(t,x)\,d\alpha(t),\qquad (2)$$

где $d\alpha(t)=w(t)dt$, $K_{n-1}(t,x)=\sum_{k=0}^{n-1}P_k^{(\alpha)}(t)P_k^{(\alpha)}(x)$

Следуя П.Л.Чебышеву, запишем (I) в виде

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}^{\alpha},f,x)=\int_0^{\infty} f(t)K_{n-1}(t,x)\,d\alpha_n(t),\qquad (3)$$

где $\alpha_n(t)$ функция ограниченной вариации на $\langle a,b\rangle, a<b$ с бесконечным множеством точек роста.

Преимущество интегрального выражения (3) для интерполяционного многочлена в том, что оно устанавливает формальную аналогию между интерполяционным многочленом для f и $(n-1)$-ой частной суммой ряда Фурье.

Из работ И.Марцинкевича и Г.Грюнвальда по тригонометрическому интерполированию и работ Л.Карлесона по рядам Фурье следует, что интерполяционный процесс Лагранжа и ряды Фурье могут вести себя по-разному, т.е. существует непрерывная функция такая, что ее ряд Фурье почти всюду сходится, а интерполяционный процесс Лагранжа расходится всюду. Поэтому интересно было бы получить ответ на следующие вопросы:

I.Пусть $\exists f(x)\in C$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}^\alpha, f, x)| = \infty$ (4)
почти везде на $[0;+\infty)$.

Что можно сказать о поведении разности
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_0^\infty [|f(x)-\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}^\alpha, f, x)| e^{-x/2} x^{\alpha/2}]^p dx$, т.е. о сходимости в среднем с порядком p с весом $e^{-x/2} x^{\alpha/2}$ интерполяционного процесса Лагранжа-Лагерра?

2.Пусть верно (4) для некоторой непрерывной функции. Что можно сказать о поведении (2), т.е. о сходимости ряда Фурье-Лагерра?

3.Пусть $\omega\in\Omega$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})\ln n > 0$.
Является ли это условие необходимым для расходимости в точке интерполяционного процесса Лагранжа-Лагерра функции $f\in C_\omega$.

4.Что можно сказать о характеристике $\mathcal{E}(\mathfrak{M}^\alpha, f)$ с точки зрения меры и категории?

Частичный ответ на поставленные вопросы дают следующие утверждения:

<u>Теорема I</u>. Пусть $\mathfrak{M}^\alpha$ -матрица Лагерра и $\alpha > -1$. Существует функция $f\in C([0;+\infty))$ такая, что

I) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}^\alpha, f, x)| = \infty$ п.в.,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty [|f(x)-\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}^\alpha, f, x)| e^{-x/2} x^{\alpha/2}]^p dx = 0$, $\forall p > 1$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(\alpha)}(f,x) = f(x)$ всюду на $[0;+\infty)$;

равномерно на каждом $[a,b]\subset(0;+\infty)$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $\mathfrak{M}^{\alpha}$ - матрица Лагерра, $\alpha>-1$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln n>0,$$

то существуют функция $f\in C_{\omega}$ и множество $\mathcal{E}$ второй категории на $[0;+\infty)$ такие, что везде на $\mathcal{E}$

$$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}^{\alpha},f,x)-f(x)|>0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов А.А. О расходимости интерполяционных процессов на множествах второй категории. Мат.заметки, 18, вып.2, 1975 с.179-183.

2. Повчун Л.П. О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по узлам Лагерра. Мат.заметки, том.21, вып.3, 1977, с.443-448.

3. Повчун Л.П. Интерполяционные многочлены Лагранжа и ортогональные ряды Фурье-Лагерра. Материалы Всесоюзного симпозиума по теории аппроксимации функций в комплексной области Из-во Б.Ф.АН СССР, Уфа, 1976, с.67-68.

ВЛОЖЕНИЕ ЯДЕР РЕГУЛЯРНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

А.В.Ревенко

Пусть S и T множества действительных чисел с конечными или бесконечно удаленными предельными точками соответственно α и β. Через $F(S)$ / $F(T)$ / обозначим какие-нибудь линейные пространства комплекснозначных функций определенных на S / T /, причем $F(S)$ содержит все постоянные на S функции. Линейные операции в $F(S)$/ $F(T)$/ определяются обычным образом. Также естественно можно определить операцию умножения функций.

Всюду ниже рассматриваются линейные операторы $A: F(S)\to F(T)$ такие, что $A(x)$ ограниченная на T функция если x ограничена на S.

Оператор A назовем регулярным, если для всякой $x\in F(S)$ такой, что существует $\lim\limits_{s\to\alpha} x(s)$, существует также $\lim\limits_{t\to\beta} A(x)(t)$ и оба предела равны.

Будем считать две функции $x_1, x_2 \in F(S)$ тождественными, если $\lim\limits_{s\to\alpha}(x_1(s)-x_2(s))=0$. Аналогично для $F(T)$. Тогда нормой ограниченной функции $x \in F(S)$ / $y \in F(T)$ / назовем число $\|x\| = \overline{\lim\limits_{s\to\alpha}}|x(s)|$/ $\|y\| = \overline{\lim\limits_{t\to\beta}}|y(t)|$ /. Нормой оператора $A: F(S)\to F(T)$ /в случае существования/ назовем норму его сужения на подпространстве ограниченных из $F(S)$ функций.

Обозначим через $K(u)$ ядро /в смысле Кноппа/ функции $u \in F(S)$ / $u \in F(T)$ / и будем говорить, что оператор $A: F(S)\to F(T)$ осуществляет вложение ядер /вложение ограниченных ядер/, если для любой $x \in F(S)$ /любой ограниченной $x \in F(T)$/ справедливо включение $K(A(x))\subset K(x)$.

Назовем оператор $A: F(S)\to F(T)$ сильно регулярным, если из равенства $K(x)=\{a\}$ следует равенство $K(A(x))=\{a\}$, где a – конечная или бесконечно удаленная точка комплексной плоскости.

Определение. Оператор $A: F(S)\to F(T)$ обладает свойством /I/, если для любой $x \in F(S)$ такой, что $K(A(x)) \ni 0$, существует функция $z(s)\to+\infty$ $(s\to\alpha)$ такая, что $z\cdot x \in F(S)$ и $K(A(z\cdot x))\ni 0$.

Теорема 1. Линейный регулярный оператор $A: F(S)\to F(T)$ осуществляет вложение ограниченных ядер тогда и только тогда, когда $\|A\|=1$.

Теорема 2. Всякая регулярная матрица $A=(a_{nk})$ обладает свойством /I/.

Теорема 3. Всякий сильно регулярный оператор $A: F(S)\to F(T)$, обладающий свойством /I/, осуществляет вложение ядер.

Теорема 4. Для того, чтобы регулярная матрица $A=(a_{nk})$ осуществляла вложение ядер для любой последовательности, к которой она применима, необходимо и достаточно, чтобы A была сильно регулярной.

Теорема 5. Если для произвольных регулярных матриц A и B из равенства $K(B(x))=\{\infty\}$ следует, что $A(x)$ расходится к бесконечности, то для любой ограниченной последовательности z имеет место включение $K(A(z))\subset K(B(z))$.

О ПЛОТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБР

В.Ф. Емельянов

Определение 1. Множество A функций называется алгеброй, если $f_1+f_2\in A$, $f_1\cdot f_2\in A$, $\lambda f_1\in A$ всякий раз, как только $f_1\in A$, $f_2\in A$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Пусть S есть метрическое пространство всех функций, измеримых и конечных почти всюду на отрезке $[0,1]$.

Теорема 1. Алгебра A, состоящая из непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, плотна в пространстве S тогда и только тогда, когда существует множество Z нулевой меры такое, что для любых точек $x_1\neq x_2$ из множества $[0,1]\setminus Z$ можно указать функцию f из алгебры A, для которой $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Требование непрерывности функций алгебры A для справедливости теоремы 1 по существу. Чтобы сформулировать теорему в общем случае, дадим

Определение 2. Алгебра A называется алгеброй Реньи на отрезке $[0,1]$, если существует последовательность функций (f_n) из алгебры A и множество Z нулевой меры такие, что для любых точек $x_1\neq x_2$ из множества $[0,1]$ можно указать номер $n=n(x_1,x_2)$, при котором $f_n(x_1)\neq f_n(x_2)$.

Теорема 2. Алгебра A, состоящая из измеримых, конечных почти всюду функций, плотна в пространстве S тогда и только тогда, когда она является алгеброй Реньи.

Теорема 3. Алгебра A, состоящая из существенно ограниченных, измеримых на отрезке $[0,1]$ функций, плотна в пространстве $L^p(0,1)$ $(1\leq p<+\infty)$ тогда и только тогда, когда она является алгеброй Реньи.

Теорема 4. Алгебра A функций из $L^p(0,1)$ плотна в пространстве $L^p(0,1)$ $(1\leq p<+\infty)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1) алгебра A является алгеброй Реньи, 2) для любой функции $f\in A$ функция $x^n f\in A$ принадлежит замыканию алгебры A по норме пространства $L^p(0,1)$.

Определение 3. Множество A функций называется $*$-алгеброй, если $f_1+f_2\in A$, $f_1*f_2\in A$, $\lambda f_1\in A$ всякий раз, как только $f_1\in A$, $f_2\in A$, $\lambda\in\mathbb{R}$ ($*$ обозначает операцию свертки функций).

Будем говорить, что множество функций A различает косинус коэффициенты Фурье, если для любых значений n и m при $n \neq m$ можно указать функцию $f \in A$ такую, что

$$\int_0^1 f(x) \cos \pi n x \, dx \neq \int_0^1 f(x) \cos \pi m x \, dx.$$

Если для любого $n = 0, 1, \ldots$ можно указать функцию $f \in A$, для которой левая часть предыдущего соотношения отлична от нуля, то говорят, что косинус-коэффициенты Фурье множества функций A не исчезают.

Теорема 5. $*$-алгебра функций плотна в пространстве $L^2(0,1)$ тогда и только тогда, когда она различает косинус коэффициенты Фурье и все они не исчезают.

О ПЛОТНОСТИ КОЛЬЦА, СОДЕРЖАЩЕГО ЗАДАННУЮ ФУНКЦИЮ

Л.А. Шведенко

Определение 1. Множество функций K называется кольцом, если для любых функций $f \in K$ и $g \in K$, $f + g \in K$, $f \cdot g \in K$.

Определение 2. Если на $[0,1]$ задана существенно ограниченная функция, то величина $\underset{0 \le x \le 1}{\mathrm{vrai\,sup}}\, \varphi(x) - \underset{0 \le x \le 1}{\mathrm{vrai\,inf}}\, \varphi(x)$ называется существенным колебанием и обозначается $\omega(\varphi(x))$.

Определение 3. Функция φ называется взаимно-однозначной почти всюду на $[0,1]$, если существует множество E, нулевой меры Лебега, так что сужение функции φ на множество $[0,1] \setminus E$ есть взаимнооднозначная функция.

Теорема 1. Пусть φ - измеримая, взаимно однозначная почти всюду на $[0,1]$ и ее существенное колебание < 4, то кольцо с 1 содержащее φ плотно в пространстве $L^p(0,1)$, $(1 \le p < +\infty)$. Существуют примеры, показывающие, что в теореме нельзя отбросить требование взаимной однозначности почти всюду на $[0,1]$ и ограничение, наложенное на существенное колебание.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Й.МАРЦИНКЕВИЧА

Л.Ю.Ермакова

$C_{2\pi}$-пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычным определением нормы $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$ и модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$. Ω -множество всех действительных, полуаддитивных, непрерывных, неубывающих на $[0,2\pi]$ функций $\omega(\delta)$, $\omega(0)=0$; $\Omega_0 \subset \Omega$ -множество функций $\omega(\delta)$, для которых
$$\lim_{\delta\to 0+} \frac{\delta}{\omega(\delta)} = 0.$$

Если $\omega \in \Omega_0$ и $\omega(f,\delta) = \underline{O}\{\omega(\delta)\}$, то говорим, что $f \in C_\omega$. Если же $\omega(f,\delta) = \bar{o}\{\omega(\delta)\}$, то $f \in C^*_\omega$.

Пусть $\mathcal{M} = \{x_{kn}\}$, $x_{kn} = 2\pi k/2n+1$, $k=0,1,\dots,2n$; $n=0,1,\dots$ -матрица равноотстоящих узлов интерполирования. $A = \{a_{ki}\}$, $k=0,1,2,\dots$; $i=0,1,2,\dots$, - матрица, удовлетворяющая условиям Теплица. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ положим

$$I_n(A,\mathcal{M},f,x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}\, L_n(\mathcal{M},f,x),\quad n=0,1,2,\dots \qquad (1),$$

где

$$L_n(\mathcal{M},f,x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_{kn})\cdot\Big[\prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{x-x_{kn}}{2} \Big/ \Big(2\prod_{k=0}^{2n}{}' \sin\frac{x-x_{kn}}{2}\cdot \sin\frac{x-x_{kn}}{2}\Big)\Big].$$

Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A,f)$ множество точек расходимости линейного метода (1) для $f \in C_\omega$.

Й.Марцинкевич показал, [1], что существует $f \in C_{2\pi}$, для которой $(C,1)$ -метод суммирования последовательности интерполяционных полиномов Лагранжа расходится хотя бы в одной точке.

Один из основных вопросов линейных методов суммирования интерполяционных процессов Лагранжа состоит в выяснении для заданных функций ω и матрицы A характеристических множеств $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A,f)$.

Справедливы теоремы

<u>Теорема I.</u> Пусть $\omega \in \Omega_0$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

а/ либо для любой Т-матрицы A и для всех $f \in C_\omega$ линейный интерполяционный процесс $I_n(A,\mathcal{M},f,x)$ сходится равномерно на $[0,2\pi]$;

в/ либо существует $f \in C_\omega$ и множество второй категории

$\mathcal{E}$ такие, что интерполяционный процесс $\{I_n(A, \mathcal{M}, f, x)\}$ расходится везде на $\mathcal{E}$.

Теорема 2. Если $a_{ni} = 1/n$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ и $\omega \in \Omega$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln \ln n > 0,$$

то существует функция $f \in C_\omega$ и множество $\mathcal{E}$ второй категории такие, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; | I_n (A, \mathcal{M}, f, x) - f(x) | > 0$$

везде на $\mathcal{E}$; если же $\omega \in \Omega_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln \ln n = \infty$, то существует функция $f \in C_\omega^*$ и множество $\mathcal{E}$ второй категории такие, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; | I_n (A, \mathcal{M}, f, x) | = \infty .$$

Следствие/Й.Марцинкевич, [1] /.Существует точка $x = x_0$ и функция $f \in C_{2\pi}$ такие, что в предположении выполнения условий теоремы 2 о матрице суммирования

$$\lim_{n\to\infty} | I_n (A, \mathcal{M}, f, x) | = \infty .$$

В основу доказательства этих теорем положены следующие леммы.

Лемма I. Пусть функция $\omega \in \Omega_0$ и пусть $\{\mathcal{U}_n(f, x)\}$ -последовательность линейных операций из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$,для которых можно указать счётное множество $\{x_i\}$ точек,плотное на $[0, 2\pi]$,последовательность функций $\{f_i\}$, $f_i \in C_\omega$,и положительную постоянную С такие, что С вполне определяется через $\omega \in \Omega_0$ и для любого $i = 1, 2, 3, \dots$ справедливы соотношения:

$$\| f_i \| \le \omega(\pi) \qquad (2),$$

$$\omega(f_i, \delta) \le \omega(\delta) \qquad (3),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; | \mathcal{U}_n (f_i, x_i) - f_i(x_i) | > C > 0 \qquad (4).$$

Тогда существует функция $f \in C_\omega$ и множество $\mathcal{E}$ второй категории такие,что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; | \mathcal{U}_n (f, x) - f(x) | > 0 .$$

Лемма 2.Пусть функция $\omega \in \Omega_0$ и пусть $\{\mathcal{U}_n(f, x)\}$ - последовательность операций из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$,определённая в леммеI. Тогда если можно указать последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и последовательность $\{\varphi_n\}$ функций такие,что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \| \varphi_n \| \le \omega(\varepsilon_n), \quad \omega(\varphi_n, \delta) \le \frac{\omega(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \cdot \delta,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(\varphi_n, x_i)| \geq C_1 > 0,$$

где C_1 зависит только от ω и точка $x_i \in [0, 2\pi]$.

Тогда существует функция $f_i \in C_\omega$ и постоянная $c \geq \frac{c_1}{2}$ такие, что выполняются соотношения $(2)-(4)$ леммы I.

Литература

I. Marcinkiewicz J., Collected Papers, Warszawa, 1964, p.171-185.

2. Привалов А.А., О расходимости интерполяционных процессов в фиксированной точке. Мат.сборник, 66/ 108/, №2, с.272 - 286.

3. Ионисян С.И., Привалов А.А., О расходимости последовательности линейных операций на множестве второй категории. Изв. высш.уч.завед., сер. матем., 1978, 6 /193/, с.89-97.

СУММИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С НАПЕРЁД ЗАДАННЫМ МНОЖЕСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДЕЛОВ РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

Н.В. Третьяк

Целью настоящей работы является установление для регулярных матриц, удовлетворяющих требованию $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = 1$, / I / необходимых и достаточных условий, чтобы они могли суммировать последовательности с любым наперёд заданным множеством частичных пределов к наперёд заданному числу $\alpha \in \mathbb{C}$, подчинённому некоторым естественным ограничениям.

Определение I. Будем говорить, что T-матрица $A = (a_{nk})$ обладает свойством $(\mathcal{P}_0)$, если существует возрастающая последовательность $\{K_i\}$ натуральных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nK_i} = 0 .$$

Определение 2. Будем говорить, что T-матрица $A = (a_{nk})$ обладает свойством $(\mathcal{P})$, если для любого числа $p \in [0,1]$ существует возрастающая последовательность $\{K_i\}$ натуральных чисел такая, что $\lim\limits_{K\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{nK_i} = p$.

Определение 3. Будем говорить, что T-матрица $A=(a_{nk})$ обладает свойством $(\mathcal{P},Q)$, если для любых чисел p и q / $p,q\in[0,1]$, $0\leq p+q\leq 1$ / существуют возрастающие без общих членов последовательности $\{K_i'\}$ и $\{K_i''\}$ натуральных чисел такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{nK_i'}=p$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{nK_i''}=q$.

Теорема I. Пусть $A=(a_{nk})$ - T-матрица, удовлетворяющая условию / I /. Для того чтобы для любого наперёд заданного замкнутого множества $F\subset\overline{\mathbb{C}}$ / $F\neq\{\infty\}$ / и любого числа $\alpha\in F\cap\mathbb{C}$ существовала последовательность $\{s_k\}$, имеющая F в качестве множества всех своих частичных пределов и суммируемая матрицей A к числу α, необходимо и достаточно, чтобы матрица A обладала свойством $(\mathcal{P}_0)$.

Теорема 2. Пусть $A=(a_{nk})$ - T-матрица, удовлетворяющая условию / I /. Для того чтобы для любого наперёд заданного замкнутого множества $F\subset\overline{\mathbb{C}}$ / $F\neq\{\infty\}$ / и любого числа $\alpha\in\mathbb{C}$ такого что $\alpha\in[z_1,z_2]$ / $z_1, z_2\in F\cap\mathbb{C}$ / существовала последовательность $\{s_k\}$, имеющая F в качестве множества всех своих частичных пределов и суммируемая матрицей A к числу α, необходимо и достаточно, чтобы матрица A обладала свойством $(\mathcal{P})$.

Теорема 3. Пусть $A=(a_{nk})$ - T-матрица, удовлетворяющая условию / I /. Для того чтобы для любого наперёд заданного замкнутого множества $F\subset\overline{\mathbb{C}}$ / $F=\{\infty\}$ / и любого числа $\alpha\in\mathbb{C}$ такого, что α принадлежит треугольнику $\Delta_{z_1z_2z_3}$ с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 / $z_1, z_2, z_3\in F\cap\mathbb{C}$ /, существовала последовательность $\{s_k\}$, имеющая F в качестве множества всех своих частичных пределов и суммируемая матрицей A к числу α, необходимо и достаточно, чтобы матрица A обладала свойством $(\mathcal{P},Q)$.

Литература

I. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.-М., Физматгиз, 1960, 471 с.

2. Давыдов Н.А., О ядре в смысле Кноппа регулярного положительного преобразования.- Казань, Известия вузов, Математика, 1983, №2 / 249 /, с.30-40.

3. Давыдов Н.А., Суммирование ограниченных последовательностей регулярными матрицами.- Сб. "Теория функций,функциональный анализ и их приложения", вып. 23, 1975, с.24-31.

4. Давыдов Н.А., Критерии суммируемости расходящейся последовательности к крайней точке её ядра регулярной положительной матрицей. / находится в печати /

О МНОЖИТЕЛЯХ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ю. Липпус

Настоящая работа является продолжением работ [1] и [2] по рассмотрению мультипликаторов между классами рядов Фурье, сходящихся по разным последовательностям индексов.

Наведём во множестве $\mathbb{N}_2$ всевозможных пар $n=(n_1,n_2)$ неотрицательных целых чисел частичный порядок. Будем писать $n\le m=(m_1,m_2)$, если $n_1\le m_1$ и $n_2\le m_2$. Пусть L обозначает пространство интегрируемых функций двух переменных, 2π-периодичных по обеим переменным. Для каждого $f\in L$ пусть

$$s_n f(x)=\sum_{\substack{|k|\le n\\ k\in\mathbb{Z}_2}} c(k)\,e^{i(k\cdot x)} \qquad (|k|=(|k_1|,|k_2|))$$

обозначает прямоугольную частную сумму порядка n его ряда Фурье. Пусть $\mathcal{N}=\{n(\iota)\}_{\iota=1}^{\infty}$ - некоторая последовательность точек $n(\iota)\in\mathbb{N}_2$, удовлетворяющих условию $n(\iota)\le$ $\le n(\iota+1)$, $n(1)=0$. Определим класс $L_F(\mathcal{N})$ таких $f\in L$, частные суммы ряда Фурье которых сходятся по норме по последовательности $\mathcal{N}$, т.е. $\|f-s_{n(\iota)}f\|_L=o(1)$ при $\iota\to\infty$.

Пусть $\mathcal{M}=\{m(\varkappa)\}_{\varkappa=1}^{\infty}$ некоторая другая последовательность индексов $m(\varkappa)\in\mathbb{N}_2$, $m(\varkappa)\le m(\varkappa+1)$, и пусть $\lambda=$ $=\{\lambda(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_2}$ - некоторая двумерная числовая последовательность. Будем говорить, что λ принадлежит классу $(L_F(\mathcal{N}),$ $L_F(\mathcal{M}))$, если при любой $f\in L_F(\mathcal{N})$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_2} \lambda(k)\, c(k)\, e^{i(k\cdot x)} ,$$

где $c(k)$ – коэффициенты Фурье функции f, является рядом Фурье некоторой функции f_λ из $L_F(\mathfrak{M})$.

Рассмотрим здесь только вещественные множители, т.е. пусть $\lambda(n)=\lambda(k)\in\mathbb{R}$ при $|n|=|k|$, и пусть последовательность λ – выпукла по обоим индексам, $\Delta_1^2\lambda(k_1,k_2)=\lambda(k_1,k_2)-2\lambda(k_1+1,k_2)+\lambda(k_1+2,k_2)\geqslant 0$ и $\Delta_2^2\lambda(k_1,k_2)\geqslant 0$.

Определим при каждом $\varkappa = 1, 2, \ldots$ числа $R_\varkappa(\lambda)$ следующим образом.

Находим индексы $n(\iota)$ и $n(\iota+\tau)$ такие, что $n(\iota)\leqslant m(\varkappa)\leqslant n(\iota+\tau)$ и $n(\iota+1)\nleq m(\varkappa)\nleq n(\iota+\tau-1)$. Если такого $n(\iota+\tau)$ не существует, то полагаем $n(\iota+\tau)=(\infty,\infty)$.

Если $m_2(\varkappa)<n_2(\iota+1)$, то пусть

$$Q_{\nu\varkappa}(\lambda)=\lambda(n_1(\iota+\nu-1),m_2(\varkappa))\cdot\log(1+\min\{n_2(\iota+\nu)-m_2(\varkappa),m_2(\varkappa)\})$$

$(\nu=1,2,\ldots,\tau)$, и пусть

$$R_\varkappa(\lambda)=\max\Big\{\max_{1\leqslant\nu\leqslant\tau}Q_{\nu\varkappa}(\lambda),\ \lambda(0,m_2(\varkappa))\cdot\log(1+\min\{n_2(\iota+1)-m_2(\varkappa),\ m_2(\varkappa)-n_2(\iota)\}),\ [\lambda(m_1(\varkappa),0)+\lambda(m(\varkappa))\cdot\log(1+\min\{n_2(\iota+\tau)-m_2(\varkappa),\ m_2(\varkappa)\})]\cdot\log(1+\min\{n_1(\iota+\tau)-m_1(\varkappa),\ m_1(\varkappa)-n_1(\iota+\tau-1)\})\Big\}.$$

Если $m_2(\varkappa)\geqslant n_2(\iota+1)$ и $m_1(\varkappa)<n_1(\iota+1)$, то пусть

$$Q_{\nu\varkappa}(\lambda)=\lambda(m_1(\varkappa),n_2(\iota+\nu-1))\cdot\log(1+\min\{n_1(\iota+\nu)-m_1(\varkappa),m_1(\varkappa)\})$$

$(\nu=1,2,\ldots,\tau)$, и

$$R_\varkappa(\lambda)=\max\Big\{\max_{1\leqslant\nu\leqslant\tau}Q_{\nu\varkappa}(\lambda),\ \lambda(m_1(\varkappa),0)\cdot\log(1+\min\{n_1(\iota+1)-m_1(\varkappa),\ m_1(\varkappa)-n_1(\iota)\}),\ [\lambda(0,m_2(\varkappa))+\lambda(m(\varkappa))\cdot\log(1+\min\{n_1(\iota+\tau)-m_1(\varkappa),\ m_1(\varkappa)\})]\cdot\log(1+\min\{n_2(\iota+\tau)-m_2(\varkappa),\ m_2(\varkappa)-n_2(\iota+\tau-1)\})\Big\}.$$

<u>Теорема.</u> Пусть $\lambda=\{\lambda(k)\}\ (k\in\mathbb{N}_2)$ – двумерная выпуклая последовательность. Тогда необходимым и достаточным условием принадлежности λ к классу $(L_F(\mathfrak{N}),L_F(\mathfrak{M}))$ явля-

ется (при условии, что $\tau = \tau(\varkappa) = O(1)$)

$$R_{\varkappa}(\lambda) = O(1) \qquad (\varkappa \to \infty) .$$

Отсюда можно выделить некоторые частные случаи в качестве следствий.

Следствие I. Если последовательности индексов $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ лакунарны ($n_j(\iota+1)/n_j(\iota) \geq C > 1$) и связаны следующим образом: $n(\iota) \leq m(\varkappa) \leq n(\iota+1)$, $m_j(\varkappa)/n_j(\iota) \geq C_{1j} > 1$ и $n_j(\iota+1)/m_j(\varkappa) \geq C_{2j} > 1$ $(j = 1, 2)$ (C, C_{1j}, C_{2j} обозначают абсолютные положительные постоянные), то выпуклая последовательность λ принадлежит классу $(L_F(\mathfrak{n}), L_F(\mathfrak{m}))$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $(L, L_F(\mathfrak{m}))$, т.е. когда $\lambda(m_1(\varkappa), 0) \cdot \log(1 + m_1(\varkappa)) + \lambda(0, m_2(\varkappa)) \cdot \log(1 + m_2(\varkappa)) + \lambda(m(\varkappa)) \cdot \log(1 + m_1(\varkappa)) \cdot \log(1 + m_2(\varkappa)) = O(1) \quad (\varkappa \to \infty)$.

Следствие 2. Если последовательности $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ связаны следующим образом: $n(\iota) \leq m(\varkappa) \leq n(\iota+1)$, $n_2(\iota) = m_2(\varkappa)$, $m_1(\varkappa) = n_1(\iota+1)$ и $m_2(\varkappa) = O(n_2(\iota+1) - m_2(\varkappa))$, то выпуклая последовательность λ принадлежит классу $(L_F(\mathfrak{n}), L_F(\mathfrak{m}))$ в том и только в том случае, когда

$$\lambda(n_1(\iota), m_2(\varkappa)) \cdot \log(1 + m_2(\varkappa)) = O(1) \qquad (\varkappa \to \infty) .$$

Литература

I. Липпус Ю. О множителях сходимости рядов Фурье. - В: 350 лет математики в Тартуском университете тезисы докладов , Тарту, 1982, с. 96-98.

2. Lippus, J. On multipliers of convergence of some classes of Fourier series. - ENSV TA Toimetised. Füüs., Matem. (in print).

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

А.А.Привалов

Пусть $\mathcal{D}$ - односвязная область с гладкой границей Γ, удовлетворяющей условию Келлога-Альпера [1], то есть угол $\theta(s)$, образованный касательной к Γ с вещественной осью, как функция длины дуги s имеет на Γ модуль непрерывности $\omega(\theta, h)$, удовлетворяющий условию

$$\int_0^c \frac{\omega(\theta,h)}{h} |\ln h| dh < \infty.$$

Через $z = \varphi(w)$ обозначим функцию, которая однолистно отображает область $|w| > 1$ на дополнение к $\mathcal{D}$ так, что бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу. Далее, пусть $AC(\mathcal{D})$ - пространство всех комплексных аналитических в $\mathcal{D}$ и непрерывных на $\overline{\mathcal{D}}$ функций f с обычным определением нормы $\|f\| = \max\limits_{z \in \overline{\mathcal{D}}} |f(z)|$ и модулем непрерывности

$$\omega(f,\delta) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq \delta,\ z_1, z_2 \in \overline{\mathcal{D}}} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

Если $\Pi_n = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ – упорядочное конечное подмножество множества Γ такое, что $\operatorname{card} \Pi_n \leq n$ и при обходе кривой Γ в положительном направлении точка z_{k+1} следует за точкой z_k кроме точек z_1 и z_n, то модулем изменения функции $f \in AC(\mathcal{D})$ назовем функцию $v(f,n)$ натурального аргумента определяемую равенствами $v(f,0) = 0$ и

$$v(f,n) = \sup_{\Pi_n} \sum_{k=1}^{n} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|,\ n \in N,\ z_{n+1} \overset{def}{=} z_1.$$

Через Ω обозначим множество непрерывных полуаддитивных неубывающих на $[0,\infty)$ функций ω таких, что $\omega(0)=0$, а через $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ - подмножество выпуклых вверх функций $\widetilde{\omega} \in \Omega$. Если $\omega \in \Omega$ и $\omega(f,\delta) = \underline{\underline{O}}\{\omega(\delta)\}$, то говорим $f \in AC(\omega, \mathcal{D})$; если же $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ и $v(f,n) = \underline{\underline{O}}\{\widetilde{\omega}(n^{-1})\}$, то говорим $f \in V(\widetilde{\omega})$. Пусть теперь задана матрица $\mathfrak{M} = \{z_{kn}\},\ 1 \leq k \leq n,\ n = 1,2,3,\ldots,$

узлов интерполирования, принадлежащая Γ .

Определение. Матрицу $\mathfrak{M}$ называем правильной, если для любого $n \in \mathbb{N}$ точки z_{kn}, $1 \leq k \leq n$, образующие n -ю строку матрицы $\mathfrak{M}$ при отображении с помощью функции $z = \varphi(w)$ области $|w| > 1$ на дополнение к $\mathcal{D}$ переходят в вершины правильного n -угольника, вписанного в единичный круг.

Для любой функции $f \in AC(\mathcal{D})$ по матрице $\mathfrak{M}$ можно построить последовательность $\{\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}, f, z)\}$ интерполяционных многочленов Лагранжа.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема I. Пусть $\mathfrak{M}$ -правильная матрица, функция $f \in AC(\mathcal{D})$ и

$$T_n(f) = \sup_{1 \leq p \leq n} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(z_{k+1,n}) - f(z_{k,n})|}{|k-p|+1}, \quad z_{n+1,n} \stackrel{def}{=} z_{1,n}.$$

Если $\lim\limits_{n \to \infty} T_n(f) = 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}, f, z) - f(z)\| = 0. \qquad \text{(I)}$$

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{M}$ -правильная матрица. Если функции $\omega \in \Omega$ и $\tilde{\omega} \in \Omega$ такие, что

$$\lim_{n \to \infty} \min_{1 \leq m \leq [\frac{n}{2}]-1} \left\{ \omega\left(\frac{1}{m}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\tilde{\omega}(k)}{k^2} \right\} = 0,$$

то для любой функции $f \in AC(\omega, \mathcal{D}) \cap V(\tilde{\omega})$ верно (I).

Следствие (С.Я.Альпер [I]). Если $\mathfrak{M}$ -правильная матрица, $\omega \in \Omega$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \omega(\frac{1}{n}) \ln n = 0$, то для любой функции $f \in AC(\omega, \mathcal{D})$ верно (I).

Теорема 3. Пусть правильная матрица $\mathfrak{M} = \{z_{kn}\}$ такая, что $z_{kn} = \varphi(w_{kn})$, $w_{kn} = exp(\frac{2k-1}{n} i\pi)$, $1 \leq k \leq n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть функция $\omega \in \Omega$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0.$$

Тогда существует функция $f \in AC(\omega, \mathcal{D})$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \mathcal{L}_n(\mathfrak{M}, f, z) - f(z) \right| > 0$$

почти везде на Γ;

если же

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = \infty,$$

то существует $f \in AC(\mathcal{D})$, $\omega(f, \delta) = \bar{\bar{O}}\{\omega(\delta)\}$, такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \mathcal{L}_n(\mathfrak{M}, f, z) \right| = \infty$$

везде на Γ.

ЛИТЕРАТУРА

I.Альпер С.Я. О сходимости интерполяционных полиномов Лагранжа в комплексной области. - УМН,1956,т.XI,вып.5,с.44-50.

2.Герман А.Х. Об интерполировании в комплексной области. - Analysis Math.,1980, т.6,вып.2,с.121-135.

3.Privalov A.A. (Привалов А.А.)-Addition to the article "On the divergence of interpolaition processes at a fixed point".-"Amer.Math. Soc. Trausl.",1970,91, 2,pp.79-98.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ КАЛЬДЕРОНА-ЗИГМУНДА

Ю.И. Пелешенко

Анизотропные классы функциональных пространств, являющиеся аналогами классов $T^p_u(x)$, $t^p_u(x)$ Кальдерона-Зигмунда, рассматривались рядом авторов [1],[2]. В настоящей работе получена характеристика анизотропных классов Кальдерона-Зигмунда с помощью локальных приближений функций. В изотропном случае такая характеристика получена в работе Ю.А.Брудного [3].

Пусть $\mu(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n)$ – вектор с положительными координатами и суммой $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. Через $\{\Pi x,\tau\}$ обозначим семейство n-мерных прямоугольных параллелепипедов с центром в точке x, имеющие рёбра длины τ^{μ_i}, $i = 1, 2, \cdots n$, параллельные осям координат.

Для заданного μ рассмотрим множество чисел

$G_\mu \{ \nu = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \mu_i$, $\beta(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n)$ – целочисленные неотрицательные векторы$\}$. Упорядочим множество этих чисел по их возрастанию

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots$$

Обозначим $\mathcal{P}^{\mu}_{a_m}$ множество полиномов вида $p(y) = \sum\limits_{(\beta\cdot\mu) \le a_m} c_\beta \cdot y^\beta$

где $(\beta\cdot\mu) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \mu_i$, $y^\beta = y_1^{\beta_1} \cdot y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}$.

Далее рассматриваются функции $f \in L_p(\Omega)$, где $1 \le p \le \infty$ и Ω – измеримое, ограниченное подмножество R^n.

Определение I. Функция f принадлежит классу $T^{p}_{\lambda,\mu}(x)$, если существует такой полином $p(y) \in \mathcal{P}^{\mu}_{a_m}$, $a_m < \lambda \le a_m$, что для любого параллелепипеда $\Pi_{x,\tau}$, $0 < \tau \le 1$ справедливо неравенство

$$\Big\{ \int\limits_{\Omega \cap \Pi x,\tau} |f(y) - P(y)|^p dy \Big\}^{\frac{1}{p}} \le M \cdot \tau^{\lambda + \frac{1}{p}}.$$

Определение 2. Функция $f \in t^{p}_{\lambda,\mu}(x)$, если $f \in T^{p}_{\lambda,\mu}(x)$ и существует такой полином $p(y) \in \mathcal{P}^{\mu}_{a_m}$, $a_m \le \lambda < a_{m+1}$, что

$$\Big\{ \int\limits_{\Omega \cap \Pi x,\tau} |f(y) - P(y)|^p dy \Big\}^{\frac{1}{p}} = o(\tau^{\lambda + \frac{1}{p}}), \ \tau \to 0$$

Для функции f определим локальное приближение

$$E^{\mu}_{a_m,p}(f, x, \tau) = \inf_{g \in \mathcal{P}^{\mu}_{a_m}} \| f - g \|_{L_p(\Omega \cap \Pi x,\tau)}.$$

Точку x множества Ω назовём μ-регулярной, если

$$\inf_{0 < \tau \le 1} \frac{mes(\Omega \cap \Pi x,\tau)}{\tau} > 0.$$

В ниже формулируемых теоремах точка x является μ -регулярной точкой измеримого, ограниченного множества.

Теорема I. Для принадлежности функции f классу $T^p_{\lambda,\mu}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при $a_m < \lambda \le a_{m+1}$ $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{E^{\mu}_{a_m,p}(f,x,\tau)}{\tau^{\lambda+\frac{1}{p}}}$ существовал.

Теорема 2. Для принадлежности функции f классу $t^p_{\lambda,\mu}(x)$ при $0<\lambda<a_m$ и $\lambda\ne a_s$, $s<m$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{E^{\mu}_{a_m,p}(f;x,\tau)}{\tau^{\lambda+\frac{1}{p}}}=0. \tag{I}$$

Теорема 3. Для принадлежности функции f классу $t^p_{\lambda,\mu}(x)$ при $0<\lambda<a_m$, $\lambda=a_s$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (I) и существовали пределы $\lim\limits_{\tau\to 0}\partial^{\beta}P_\tau(y)\big|_{y=x}$ $((\alpha\cdot\mu)=a_s)$ производных многочленов $P_\tau(y)\in\mathcal{P}^{\mu}_{a_s}$, наименее уклоняющихся от f в пространстве $L_p(\Omega\cap\Pi_{x,\tau})$.

С помощью метода вещественной интерполяции [4] при $0<\lambda=a_s$ определим анизотропные классы функций, полагая

$$\bar t^p_{\lambda,\mu}(x)=\left(t^p_{\lambda-\varepsilon,\mu}(x),\ t^p_{\lambda+\varepsilon}(x)\right)_{\frac{1}{2},\infty}$$

для $0<\varepsilon<a_s$.

Определение не зависит от выбора числа ε, а при $\lambda\ne a_s$, $\bar t^p_{\lambda,\mu}(x)=t^p_{\lambda,\mu}(x)$.

Теорема 4. Для принадлежности функции f классу $\bar t^p_{a_s,\mu}(x)$ при $0<a_s<a_m$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (I).

Литература

I. Ильин В.П., Функциональные пространства $\mathcal{L}^{\lambda,a,b_s}_{r,p,\theta}(G)$, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 30(1972),51-75.

2. Ахмеджанов А., Некоторые свойства анизотропных классов Кальдерона-Зигмунда. Теоремы вложения и их приложения, Алма-Ата, 1976, 10-14.

3. Брудный Ю.А., Локальная теория полиномиальной аппроксимации. Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1981, №36, 3-12.

4. Берг Й., Лёфстрём Й., Интерполяционные пространства. Введение. Москва, 1980.

О МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

К.Адомайтис

Пусть $f \in L^1$, $\varphi \in L^1 \cap L^\infty$. Обозначим

$$F(x,y) = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-t}{y}\right) f(t)\,dt .$$

Угловой максимальной функцией называется

$$M_\varphi f(x) = \sup\{|F(z,y)| : |z-x| < y\}.$$

Пусть H_φ - пространство функций f, для которых

$$\|f\|_{H_\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} M_\varphi f(x)\,dx < \infty .$$

Известно, что при некоторых условиях на гладкость и убывание в бесконечности функции φ $H_\varphi = H^1$, где H^1 пространство Харди. (см.[I]).

Положительная мера μ в $R^2_+ = \{(x,y) : y>0\}$ называется Карлесоновой ($\mu \in C$), если для всех $x_0 \in R$, $h>0$ справедливо

$$\mu\{(x,y) \in R^2_+ : |x-x_0| < h,\ y<h\} \leqslant \text{Const}\cdot h. \qquad (I)$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема I. Пусть $\mu \in C$. Тогда

$$\int_{R^2_+} |F(x,y)|\,d\mu \leq \mathrm{Const.}\, \|f\|_{H_\varphi} .$$

Теорема 2. Если $g(r) = \sup\{ |\varphi(x)| : |x| < r\} \in L^1(0,\infty)$ и существует $f \in H_\varphi$ такая, что $\|f\|_{H_\varphi} \neq 0$, то из (2) следует $\mu \in C$.

Теорема 3. Пусть $g(r) \in L^1(0,\infty)$, то каждый непрерывный линейный функционал $\Lambda(\cdot)$ на H_φ имеет вид

$$\Lambda(f) = \int_{R^2_+} F(x,y)\,d\mu , \text{ где } |\mu| \in C$$

Имеют место аналоги теорем I и 3 для радиальной максимальной функции

$$M_\varphi f(x) = \sup\{ |F(x,y)| : y > 0\},$$

если условие (I) заменить условием

$$\mu\{(x,y) \in R^2_+ : |x - x_0| < h\} \leq \mathrm{Const.}\, h .$$

Л и т е р а т у р а

1. **Fefferman C., Stein E.M., H^p spaces of several variables. Acta Math., 1972, 129, 137-193.**
2. **Garnett J.B., Bounded analytic functions. Academic press, 1981.**

ЗАМЕЧАНИЕ В СВЯЗИ С ОДНОЙ ЗАДАЧЕЙ О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Е.А.Горин, С.Т.Норвидас

Задача, о которой пойдет речь, была сформулирована Марком Кацем в его лекции [4] и заключается в описании всех тех функций f двух переменных, для которых суперпозиция $f(\varphi_1, \varphi_2)$ является характеристической функцией вероятностного распределения при любом выборе пары φ_1, φ_2 характеристических функций. М.Кац высказал предположение (оправдывающееся не полностью), что такие функции f должны обладать некоторой специальной симметрией.

Введем несколько обозначений. Если G – локально компактная абелева группа, то $P = P(G)$ – совокупность всех непрерывных положительно определенных функций на G, а $P_0 = P_0(G)$ – совокупность характеристических функций на G. По теореме Бохнера P совпадает с множеством преобразований Фурье положительных борелевских мер на двойственной группе, P_0 выделяется из P условием $\varphi(0)=1$. При $G=\mathbb{R}$ (вещественная ось) множество P_0 совпадает с классом обычных характеристических функций. Сиволом G_d будем обозначать группу, алгебраически изоморфную G, но дискретную. В частности, $P(G_d)$ – это множество всех (не обязательно непрерывных) положительно определенных функций на G. При натуральном n через Δ^n будем обозначать замкнутый единичный полидиск $|z_\nu| \leq 1$ $(1 \leq \nu \leq n)$ в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$.

Далее, $K = K(G,n)$ – класс таких функций $f : \Delta^n \to \mathbb{C}$, что $f \circ \varphi \in P(G)$, если $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\varphi_\nu \in P_0(G)$ $(1 \leq \nu \leq n)$. Аналогично, $K_0 = K_0(G,n)$ определяется условием $f \circ \varphi \in P_0(G)$. В этих обозначениях исходная задача М.Каца заключается в конструктивном описании класса $K_0(\mathbb{R},2)$. Разумеется, ее можно рассматривать для произвольных групп, но здесь мы ограничимся серией $\mathbb{R}^m$ евклидовых пространств; соответствующий класс функций будет обозначаться $K_0(m,n)$ или кратко K_0.

Для точек $\lambda, z \in \mathbb{C}^n$ через $\bar{z}$ обозначается точка с комплексно-сопряженными координатами, $\mathbb{1}$ – точка, все координаты которой равны 1, $\lambda \times z$ – точка, координаты которой суть произведения координат λ и z. Если α – мультииндекс, то z^α имеет координаты $z_\nu^{\alpha_\nu}$.

Теорема. Функция f тогда и только тогда принадлежит классу $K_0(m,n)$, когда она допускает представление

$$f(z) = \sum c_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

где суммирование производится по всем мультииндексам, числа $c_{\alpha,\beta}$ неотрицательные, с конечной суммой (равной 1).

Такое представление единственно. Ответ, как мы видим, не зависит от m. Достаточность, конечно, очевидна. В частном случае, когда $m=1$, $n=1$ сформулированное утверждение было установлено Герцем, Кохенхеймом и Вайсом еще в середине 60-х годов (точную ссылку можно найти, например, в [I]). В общем случае доказательство может быть основано на индукции по n и теоремах о крайних точках, и ниже мы приводим схему такого доказательства (имея в виду установить необходимость).

(I) Легко убедиться, что функции класса $K(m,n)$ непрерывны в Δ^n, что для них $|f(z)| \leq f(1)$ при всех z и, кроме того, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

(2) Если f – непрерывная функция на Δ^n, то для нее принадлежность к классу $K(G,n)$ или $K(G_d,n)$ – равносильные свойства. В одну сторону – от G_d к G – это очевидно. С другой стороны, согласно замечанию Хьюитта-Цукермана (см. [3], стр.545), характеры G_d поточечно аппроксимируется характерами G. В сочетании с теоремой Бохнера это дает аналогичную аппроксимацию для функций класса P, что ввиду непрерывности f и позволяет установить равносильность.

(3) Так как группы R_d^m при всех m изоморфны между собой (ввиду равномощности базисов Хамеля над полем рациональных чисел), из (I) и (2) вытекает, что классы $K(m,n)$ совпадают при всех m.

(4) Пусть $f \in K(m,n)$ и $\varphi_\nu \in P_0(R^m)$ $(1 \leq \nu \leq n)$. Фиксируем конечный набор точек $x_p \in R^m$ и $\xi_p \in C$ и для $\lambda \in \Delta^n$ положим

$$F(\lambda) = \sum_{p,q} f(\lambda \times \varphi(x_p - x_q))\xi_p \bar{\xi}_q.$$

Согласно (3) имеем $f \in K(2m,n)$, а отсюда легко следует, что $F \in K(m,n)$.

(5) При $f \in K(m,n)$, $\theta \in [-1/2, 1/2]$ и $\lambda \in \Delta^n$ положим

$$u(z) = f(z) + \theta[f(\lambda \times z) + f(\bar{\lambda} \times z)],\ v(z) = f(z) - i\theta[f(\lambda \times z) - f(\bar{\lambda} \times z)].$$

Согласно (I) и (4) имеем $|F(\lambda)| \leqslant F(1)$ и $F(\bar{\lambda}) = \overline{F(\lambda)}$, а отсюда легко вытекает, что $u, v \in K(m,n)$.

(6) Обозначим через $\widetilde{K}$ замыкание в поточечной топологии на Δ^n класса K . Аналогичный смысл имеет $\widetilde{K}_0$. Утверждение (5) сохраняется с заменой K на $\widetilde{K}$. Вместе с тем, $\widetilde{K}_0$ есть компакт. Пусть q - крайняя точка этого (выпуклого) компакта. Тогда $q(\lambda \times z) = q(\lambda)q(z)$. Действительно, если в этом случае воспользоваться соотношениями (5), то получится, что функции $u_\pm$, $v_\pm$, отвечающие значениям $\theta = \pm 1/2$, кратны $q(z)$, а потому это верно в отношении $q(\lambda \times z) \pm q(\bar{\lambda} \times z)$ и, следовательно, $q(\lambda \times z)$.

(7) Из известного описания класса $K_0(m,1)$ вытекает, что $\widetilde{K}_0(m,1)$ принадлежит замкнутой выпуклой оболочке системы $\{\zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta\}$. Отсюда и из (6) вытекает, что крайние точки множества $\widetilde{K}_0(m,n)$ принадлежат замкнутой выпуклой оболочке системы $S_0 = \{z^\alpha \bar{z}^\beta\}$. В силу обратной теоремы Крейна-Мильмана (см., например,[2], стр. I6) фактически они принадлежат замыканию S системы S_0 . Легко видеть, что S , кроме S_0, содержит лишь функции, тождественно равные 0 внутри Δ^n . Пусть теперь $f \in K_0(m,n)$ (в частности, f непрерывна). По теореме Крейна-Мильмана в интегральной форме ([2], стр. I3) существует такая вероятностная борелевская мера μ на S, что f есть центр тяжести этой меры. Обозначим через $c_{\alpha,\beta}$ μ-меры точек $z^\alpha \bar{z}^\beta$. Тогда разность между левой и правой частями равенства, утверждаемого теоремой, будет представлять функцию, равную 0 внутри Δ^n. Однако эта функция непрерывна на Δ^n , чем доказательство завершается.

Отметим, что функции $f \in K_0(m,n)$ имеют характер положительно определенных, и на этом может быть основан другой подход к теме.

Литература

I. Лукач Е., Характеристические функции. М.: "Наука",I979.

2. Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке. М.: "Мир",I968.

3. Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ.М.: "Наука", I975.

4. Kac M., A personal history of Scottish book. В кн. Mauldin R.D.(ed). The Scottish book: mathematics from the Scottish Café. Boston: Basel; Stuttgart: Birkhäser,1981.

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

В. Ваатманн

Пусть в системе

$$z = Ax + e \quad ,$$
$$y = Cx + v \quad , \tag{I}$$

A, C – матрицы порядка $m\times k$ и $n\times k$; x – k-мерный случайный вектор с математическим ожиданием $\bar{x}$ и ковариационной матрицей D; e, v – векторы случайных возмущений с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами R_1, R_2, причем $R_2 > 0$. Предположим, что x, e, v взаимно некоррелированные векторы; матрицы C, D, R_1, R_2 и вектор $\bar{x}$ считаем заданными.

По наблюдению за вектором y требуется оценить вектор z. В работах [1,2] рассмотрен случай неточно заданного детерминированного вектора x ($x^T H x \le 1$, $H > 0$ – матрица порядка $k\times k$) и получены линейные минимаксные оценки для z.

Мы рассмотрим случай, когда информация относительно матрицы A ограничивается заданием условия $A \in K$, где K – ограниченное замкнутое выпуклое множество и наидена для вектора z линейная минимаксная оценка $\hat{z} = Ly + c$ относительно критерии

$$\max_{A\in K} E\,\|\hat{z} - z\|^2 \xrightarrow[L,c]{} \min \quad , \tag{2}$$

где L – матрица порядка $m\times n$, c – m-мерный вектор, E – – оператор математического ожидания, норма эвклидова.

Оказывается, что задача минимизации по L, c максимальной по $A \in K$ среднеквадратической ошибки оценивания в (2) можно свести к задаче максимизации некоторой функции.

Теорема. Линейная минимаксная оценка для вектора z в системе (I) относительно критерия (2) и множества $K \ni A$ имеет следующий вид:

$$\hat{z} = A_0 \bar{x} + A_0 D C^T (C D C^T + R_2)^{-1} (y - C \bar{x}) \quad ,$$

где A_0 удовлетворяет условию

$$tr\, A_0 P A_0^T = \max_{A \in K} tr\, A P A^T$$

и

$$P = D - D C^T (C D C^T + R_2)^{-1} C D \quad .$$

При этом

$$\min_{z} \max_{A \in K} E \| \hat{z} - z \|^2 = tr\, (A_0 P A_0^T + R_1) \quad .$$

Литература

I. Кукс Я., Олман В., Минимаксная линейная оценка коэффициентов регрессии, I, 2. Изв. АН ЭССР, физ.-мат., I97I, 20,№4,480-482, I972, 2I, №I,66-72.

2. Läuter, H., A minimax linear estimator for linear parameters under restrictions in form of inequalities. Math. Operationsforsch. Statist., 1975,6, 689-695.

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Г. Вайникко

При практическом решении некорректно поставленных задач, например интегральных уравнений первого рода, следует разумно соединить регуляризацию и дискретизацию задачи. Результат легче интерпретируется, если дискретизацию провести на "функциональном" уровне, позаботившись о близости по норме дискретизированного (конечномерного) оператора к исходному.

Пусть нужно решить уравнение

$$A_0 u = f_0, \tag{I}$$

где $A_0 \in \mathcal{L}(H,F)$ вполне непрерывный оператор, H, F – гильбертовы пространства, $f_0 \in \mathcal{R}(A)$. Как правило, вместо A_0 и f_0 нам известны некоторые их приближения $A \in \mathcal{L}(H,F)$ и $f \in F$, $\|A-A_0\| \leq \eta$, $\|f-f_0\| \leq \delta$, так что в действительности мы располагаем не уравнением (I), а уравнением

$$Au = f. \tag{2}$$

Опишем основные методы регуляризации: метод Тихонова

$$(\alpha I + A^*A) u_\alpha = A^* f \quad (\alpha > 0 \text{ - параметр}); \tag{3}$$

неявная итерационная схема

$$(\alpha I + A^*A) u_k = \alpha u_{k-1} + A^* f \quad (k=1,2,\ldots;\ \alpha = const > 0); \tag{4}$$

явная итерационная схема

$$u_k = u_{k-1} - \mu A^*(A u_{k-1} - f) \quad (k=1,2,\ldots;\ \mu \in (0, \tfrac{2}{\|A\|^2})). \tag{5}$$

В методе Тихонова параметр α подбирают по принципу невязки так, чтобы $\|A u_\alpha - f\| \approx b(\delta + \|u_\alpha\| \eta)$; итерации (4) и (5) останавливают на первом k, для которого $\|A u_k - f\| \leq b(\delta + \|u_k\| \eta)$; параметр $b \geq 1$ задается. Подробнее об этом см. [I,2].

Для практического применения методов (3)–(5) следует провести дискретизацию оператора A. Есть, однако, некоторые соображения в пользу того, чтобы проводить дискретизацию не после регуляризации, а до нее. Пусть P_n и Q_m – ортопроекторы в H и F соответственно; их разумно выбрать так, чтобы сумма погрешностей $\|Q_m f - f\|$ и $\|Q_m A P_n - A\| \leq \|Q_m A - A\| + \|P_n A^* - A^*\|$ была сравнима с $\delta + \eta$. Огрубляя уравнение (2) до уравнения

$$Q_m A P_n u = Q_m f, \tag{2'}$$

применим к нему методы (3)–(5):

$$(\alpha I + P_n A^* Q_m A P_n) u_\alpha = P_n A^* Q_m f, \qquad (3')$$

$$(\alpha I + P_n A^* Q_m A P_n) u_k = \alpha u_{k-1} + P_n A^* Q_m f \quad (k=1,2,\dots), \qquad (4')$$

$$u_k = u_{k-1} - \mu (P_n A^* Q_m A P_n u_{k-1} - P_n A^* Q_m f \quad (k=1,2,\dots). \qquad (5')$$

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и $\psi_1, \dots, \psi_m$ – базисы подпространств $P_n H$ и $Q_m F$; обозначим

$$G_\varphi = (\varphi_{j'}, \varphi_j)_{j,j'=1}^n, \quad G_\psi = (\psi_{i'}, \psi_i)_{i,i'=1}^m \text{ (матрицы Грама)},$$

$$B = (A\varphi_j, \psi_i)_{i,j=1}^{m,n}, \quad \underline{f} = ((f,\psi_1), \dots, (f,\psi_m))^T.$$

Метод (3') реализуется так: $u_\alpha = \sum_{j=1}^n u_j^\alpha \varphi_j$; вектор $\underline{u}^\alpha = (u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha)^T$ определяется из системы уравнений

$$\alpha G_\varphi \underline{u}^\alpha + B^T G_\psi^{-1} B \underline{u}^\alpha = B^T G_\psi^{-1} \underline{f}. \qquad (3'')$$

В методах (4') и (5') $u_k = \sum_{j=1}^n u_j^k \varphi_j$ и пересчет векторов коэффициентов $\underline{u}^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)^T$ проводится так:

$$\alpha G_\varphi \underline{u}^k + B^T G_\psi^{-1} B \underline{u}^k = \alpha G_\varphi \underline{u}^{k-1} + B^T G_\psi^{-1} \underline{f} \quad (k=1,2,\dots); \qquad (4'')$$

$$G_\varphi \underline{u}^k = G_\varphi \underline{u}^{k-1} - \mu (B^T G_\psi^{-1} B \underline{u}^{k-1} - B^T G_\psi^{-1} \underline{f}) \quad (k=1,2,\dots). \qquad (5'')$$

Принцип невязки выбора α (останова итераций) приобретает форму

$$(G_\psi^{-1}(B\underline{u} - \underline{f}), B\underline{u} - \underline{f})_{R^m}^{1/2} \approx b\{\delta + \|f - Q_m f\| + (\underline{u}, G_\varphi \underline{u})_{R^n}^{1/2} [\eta + \|Q_m A - A\| + \|P_n A^* - A^*\|]\} \quad (\underline{u} = \underline{u}^\alpha \text{ или } \underline{u}^k). \qquad (6)$$

Проиллюстрируем сказанное на интегральном уравнении

$$(Au)(t) \equiv \int_a^b \mathcal{K}(t,s) u(s) ds = f(t) \quad (c \le t \le d). \qquad (7)$$

Будем считать, что оператор A вполне непрерывен из $H = W_2^1(a,b)$ в $F = L_2(c,d)$; скалярное произведение в H примем в виде $(u,v)_H = \int_a^b (uv + u'v') ds$. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ – стандартный базис пространства кусочно-линейных на $[a,b]$ функций с сеткой $s_j = a + jh$ $(j=0,1,\dots,n)$, $h = (b-a)/n$, т.е. $\varphi_j(s_{j'}) = \delta_{jj'}$, $(j,j' = 0,1,\dots,n)$. Далее, пусть $\psi_1, \dots, \psi_m$ – стандартный базис пространства кусочно-постоянных на $[c,d]$ функций с сеткой $t_i = c + i\tau$ $(i=0,1,\dots,m)$, $\tau = (d-c)/m$, т.е. $\psi_i(t)$ равна I на $[t_{i-1}, t_i]$ и нулю в остальных точках. Тогда в схемах (3")–(5") $G_\psi = \tau I_m$ (I_m – единичная матрица порядка m),

$$G_\varphi = \frac{1}{h}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{Vmatrix} + \frac{h}{6}\begin{Vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{Vmatrix};$$

в случае гладких $f(t)$ и $\mathcal{K}(t,s)$ имеем также

$$(f,\psi_i)\approx \tau f(t_{i-\frac{1}{2}}),\quad (A\varphi_j,\psi_i)\approx \sigma_j\tau h\,\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}},s_j), \tag{8}$$

где $\sigma_j=1$ при $j=1,\dots,n-1$ и $\sigma_j=1/2$ при $j=0,n$. После умножения первого и последнего уравнения системы (3") на $2/h$, а остальных на $1/h$, система (3") в приближении (8) приобратает хорошо известный в вычислительной практике вид

$$\alpha\left[-\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^2}+\frac{u_{j-1}+4u_j+u_{j+1}}{6}\right]+$$

$$+h\sum_{j'=0}^{n}\sigma_{j'}\left[\tau\sum_{i=1}^{m}\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}},s_j)\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}},s_{j'})\right]u_{j'}= \tag{9}$$

$$=\tau\sum_{i=1}^{m}\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}},s_j)f(t_{i-\frac{1}{2}}),\quad j=0,1,\dots,n;\quad u_{-1}=u_1,\ u_{n+1}=u_{n-1}.$$

Аналогично запишутся системы (4") и (5"). К системе (9) обычно приходят квадратурно-разностным методом в применении к уравнению (3), которое в данном случае имеет вид

$$\alpha[-u''(s)+u(s)]+\int_a^b\left[\int_c^d\mathcal{K}(t,s)\mathcal{K}(t,s')dt\right]u(s')ds'=$$

$$=\int_c^d\mathcal{K}(t,s)f(t)dt,\quad a\le t\le b,\quad u'(a)=u'(b)=0.$$

Оценим нормы в правой части (6). Имеем $A^*=J^{-1}A^T$, где $Ju=-u''+u$, $\mathcal{D}(J)=\{u\in W_2^2(a,b):\ u'(a)=u'(b)=0\}$, $(A^Tf)(s)=\int_c^d\mathcal{K}(t,s)f(t)dt$. Известные оценки кусочно-линейной аппроксимации дают $\|P_nA^*-A^*\|\le ah/2$, где $a=\|A^T\|_{L_2\to L_2}$. Если $f(t)$ и $\mathcal{K}(t,s)$ дифференцируемы по t, то $\|f-Q_mf\|\le\|f'\|\tau/2$, $\|Q_mA-A\|\le a_1\tau/2$, где $a_1=\|A_1\|_{W_2^1\to L_2}$, $(A_1u)(t)=\int_a^b\frac{\partial\mathcal{K}(t,s)}{\partial t}u(s)ds$.

Очевидны обобщения с использованием сплайнов более высокого порядка как для (7) так и для многомерных интегральных уравнений первого рода. Второй подход основан на сплайновой аппроксимации ядра и последующей регуляризации методами (3)-(5).

Допустим, что ядро и свободный член уравнения (7) уже проаппроксимированы,

$$\mathcal{K}(t,s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varkappa_{ij}\,\psi_i(t)\chi_j(s),\quad f(t)=\sum_{i=1}^{m}d_i\,\psi_i(t),$$

где $\psi_1,\ldots,\psi_m$ – некоторые функции из $L_2(c,d)$, $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ – из $\mathcal{D}(J)$, а $\chi_1,\ldots,\chi_n$ – некоторые линейные комбинации функций $J\varphi_1,\ldots,J\varphi_n$. Пространство $H=W_2^1(a,b)$ теперь целесообразно снабдить скалярным произведением $(u,v)_{W_2^1}= =\int_a^b u'v'ds+\int_a^b u(s)ds\int_a^b v(s)ds$, соответственно, $Ju=-u''+ +(u,1)_{L_2}\cdot 1$, $u'(a)=u'(b)=0$. (В таком случае, например, линейные сплайны χ_j соответствуют кубическим φ_j, удовлетворяющим краевым условиям $\varphi_j'(a)=\varphi_j'(b)=0$.) Метод (3) примет вид

$$u_\alpha=\sum_{j=1}^{n}u_j\varphi_j,\quad \alpha G_\varphi\underline{u}+\Gamma^TK^TG_\psi K\Gamma\underline{u}=\Gamma^TK^TG_\psi\underline{d},$$

$$G_\varphi=\left((\varphi_{j'},\varphi_j)_{W_2^1}\right)_{j,j'=1}^{n},\quad G_\psi=\left((\psi_{i'},\psi_i)_{L_2}\right)_{i,i'=1}^{m},\quad K=(\varkappa_{ij})_{i,j=1}^{m,n},$$

$$\Gamma=\left((\varphi_{j'},\chi_j)_{L_2}\right)_{j,j'=1}^{n},\quad \underline{d}=(d_1,\ldots,d_m)^T,\quad \underline{u}=(u_1,\ldots,u_n)^T.$$

Аналогично запишутся методы (4) и (5). При этом $\|Au_\alpha-f\|= =(G_\psi(K\Gamma\underline{u}-\underline{d}),\,K\Gamma\underline{u}-\underline{d})_{R^m}^{1/2}$, $\|u_\alpha\|=(G_\varphi\underline{u},\underline{u})_{R^n}^{1/2}$.

Литература

1. Вайникко Г.М. Принцип невязки для одного класса регуляризационных методов. – Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1982, т. 22, № 3, с. 499–515.
2. Вайникко Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. – Тарту: Тартуск. ун-т, 1982, – 110 с.

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ УДЗАВЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИН

С.Н. Волошановская

Рассматривается задача о малых упругопластических прогибах тонкой пластинки в предположении применимости закона пластичности Генки.

Уравнения равновесия пластинки записываются в виде

$$\mathcal{L}_1(\sigma) \equiv -\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} = P_1$$

$$\mathcal{L}_2(\sigma) \equiv -\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} = P_2 \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_3(\sigma) \equiv \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} = P_3,$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

где Ω – срединная поверхность пластинки,

P_1 , P_2 , P_3 – составляющие внешней нагрузки,

$$T_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij}\, dz, \qquad M_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij} z\, dz,$$

t – толщина пластинки.

Считаются выполненными соотношения деформационной теории пластичности, связывающие компоненты деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} (см., напр., [1])

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \lambda_{ij}, \tag{2}$$

где

$$e_{ii} = \frac{1}{2G}(\sigma_{ii} - \sigma) \quad , \ i=1,2,$$

λ_{ij} – пластическая составляющая деформации:

$$\lambda_{ij}(\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0, \ i,j=1,2. \quad \forall \varphi_{ij}, \ \mathcal{F}(\varphi) \leq 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{F}(\sigma_{ij})$ заданная непрерывная выпуклая функция $\mathcal{F}(\sigma_{ij}) \leq 0$.

Принимаются обычные в теории тонких пластин соотношения между деформациями и перемещениями [1] .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - z\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j} \qquad i,j=1,2 \tag{4}$$

Перемещения u_1 , u_2 , u_3 подчиним граничным условиям жесткой заделки

$$u_i \Big|_\Gamma = 0, \quad i=1,2,3, \quad \frac{\partial u_3}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \tag{5}$$

Пусть M - множество напряжений $\sigma_{ij} \in L_2$, удовлетворяющих уравнениям равновесия,

$$K = \left\{ \sigma_{ij} \in L_2, \ \mathcal{F}(\sigma) \le 0 \right\}$$

Задача (1) - (5) может быть сформулирована в виде задачи поиска седловой точки Лагранжиана

$$\inf_{\sigma \in L_2} \sup_{\substack{u \in V \\ q \in L_+}} \mathcal{L}(\sigma, u, q)$$

где

$$V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)} \times \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)} \times \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}, \quad L_+ = \left\{ q \in L_2, \ q \ge 0 \right\},$$

$$\mathcal{L}(\sigma, u, q) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma, \sigma) + \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} q \mathcal{F}(\sigma) \, d\Omega \, dz + \int_{\Omega} (u_i P_i - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u)) \, d\Omega$$

Для поиска седловой точки предлагается использовать алгоритм Удзавы [2]. Сходимость алгоритма Удзавы установлена для весьма широкого класса функций $\mathcal{F}(\sigma)$ и, в частности, для функций соответствующих условиям пластичности Мизеса.

Литература

1. Г.Дюво, Ж.-Л.Лионс. Неравенства в механике и физике. Москва, "Наука", 1980.

2. Гловински, Лионс, Тремольер. Численное исследование вариационных неравенств. Москва, "Мир", 1979.

О СХОДИМОСТИ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Л.Л. Глазырина

Рассматривается модель, описывающая неустановившееся движение воды в открытом русле реки, когда расход потока в нем сравним с притоками из грунтовых вод.

Пусть $\bar{\Omega}=\{0\le x_i\le 1,\ i=1,2\}$,

$\Gamma_1=\{0\le x_2\le 1,\ x_1=0,1\}$, $\Gamma_2=\{0\le x_1\le 1,\ x_2=0,1\}$,

$\Pi=\{x_2=a\,(0<a<1),\ 0\le x_1\le 1\}$ – разрез в области $\bar{\Omega}$.

Рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f(x,t),\quad x\in\Omega_\Pi=\Omega\setminus\Pi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Psi(x_1,u)\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right)+\left[a\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Pi=f(x,t),\ [u]_\Pi=0,\quad x\in\Pi, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma_1}=g(x,t),\ u(x,t)|_{\Gamma_2}=0,\ u(x,0)=u_0(x), \tag{3}$$

где $[\cdot]_\Pi$ – скачок функции при переходе через разрез Π.

Функции $f(x,t)$, $g(x,t)$, $u_0(x)$, $a(x,u)$, $\Psi(x,u)$ – заданы, причем предполагается, что

$\varphi(\xi)=|\xi|^{1/2}\operatorname{sign}\xi$; $a(x,p)$, $\Psi(x,p)$ – положительны, ограничены и непрерывны по p.

Задача (1) – (3) описывает совместное движение русловых и фильтрационных вод в области Ω. Разрез Π соответствует руслу реки. Искомая функция $u(x,t)$ определяет высоту свободной поверхности жидкости.

Случай более общей модели рассматривался в работе [1], где дано определение обобщенного решения задачи, исследованы вопросы существования и единственности обобщенного решения.

Для задачи (1) - (3) строится неявная разностная схема. Доказано существование решения разностной схемы и при некоторых условиях на шаги сетки h и τ его единственность. При условии положительности функций $f(x,t)$, $g(x,t)$ и $U_0(x)$ доказана положительность решения разностной схемы. Получены априорные оценки в сеточных аналогах норм соболевских пространств, которые существенно используются при доказательстве сходимости построенной разностной схемы.

Доказана сильная сходимость кусочно-постоянных восполнений решений разностной схемы к обобщенному решению исходной дифференциальной задачи. Техника доказательства сильной сходимости основана на получении оценки кусочно-постоянных восполнений разностной производной по времени в специальном соболевском пространстве и применении одной теоремы о компактности [2]. Близкая методика была использована в [3] при доказательстве сходимости разностной схемы для квазилинейного параболического уравнения.

Литература

1. Антонцев С.И.,Мейрманов А.М., Математическая модель совместного движения поверхностных и подземных вод. Новосибирск, 1979.

2. Дубинский Ю.А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Матем.сб.,1965. 69 (109).

3. Масловская Л.В. О сходимости разностных методов для некоторых вырождающихся квазилинейных уравнений параболического типа. ЖВМ и МФ, т.12, №6, 1972.

О КОРРЕКТНОСТИ И СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

А.Г. Каменский

В работе изучаются два вопроса: устойчивость решений эллиптической системы уравнений в ограниченной области при малых негладких возмущениях коэффициентов и границы области и сходимость решений разностной схемы. Рассматривается третья краевая задача для нелокальных операторов (см.[I]).

Пусть для каждого $n=0,1,2,\dots$ задано гильбертово пространство H_n с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и плотное в H_n линейное многообразие H_n^1, наделенное структурой гильбертова пространства с нормой $\|\cdot\|_1$ и скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$. Предположим, что оператор естественного вложения $j_n: H_n^1 \to H$ компактен и $\|j_n\| \le 1$. Пусть ℓ_n – ограниченная полуторалинейная форма на H_n^1, а $L_{(n)}$ – ассоциированный с ней оператор в H_n^1. Назовем фридрихсовым расширением формы ℓ_n неограниченный оператор $L_n = (j_n^{-1})^* L_{(n)} j_n^{-1}$ в H_n с естественной областью определения. Предположим, далее, что для каждого $n \geqslant 1$ заданы связывающие линейные ограниченные операторы $I_n: H_n \to H_0$, $\Psi_n: H_0 \to H_n$, $F_n: H_0 \to H_n$, $\Pi_n: H_n^1 \to H_0^1$, равномерно ограниченные в совокупности, обладающие следующими свойствами: $\|I_n x\| \geqslant c_I \|x\| \ (x \in H_n)$, $\|\Pi_n x\|_1 \le C_\Pi \|x\|_1 \ (x \in H_n^1)$, $\|I_n^* x\|_1 \le$

$\le C_I \|x\|_1 \ (x \in H_1^0)$, $\Psi_n \Pi_n = 1$, $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} F_n^* \Psi_n = 1$, где константы $C_I, c_I, C_\Pi > 0$ не зависят от n.

<u>Теорема I</u>. Пусть существуют такие $C_\ell, c_\ell > 0$, что для любого $n \geqslant 0$ и $x_n, y_n \in H_n^1$

$$\operatorname{Re} \ell_n(x_n, x_n) \geqslant c_\ell \|x_n\|_1^2 - C_\ell \|x_n\|^2, \quad |\ell_n(x_n, y_n)| \le C_\ell \|x_n\|_1 \|y_n\|_1,$$

а для любых $x \in H_0^1$ и $z_n \in H_n^1$ таких, что $\|z_n\|_1 \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} |\, l_n(I_n^* x, z_n) - l_0(x, \Pi_n z_n)| = 0,$$

и аналогичное равенство справедливо для сопряженных форм $\overline{l_n}$. Тогда фридрихсовы расширения форм l_n операторы L_n имеют компактные резольвенты и если L_0 инъективен, то L_0 и все L_n при достаточно больших n обратимы и

$$\lim_{n\to\infty} \| j_n^{-1}(L_n^{-1} F_n - I_n^* L_0^{-1})\| = 0 .$$

Пусть $\Omega_n \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное открытое множество, Γ_n – граница Ω_n, причем $\Omega_n \subset \Omega_0$ при $n \geqslant 1$, V – конечномерное гильбертово пространство, $H^1(\Omega_n, V)$ – соболевское пространство функций $u : \Omega_n \to V$, квадратично суммируемых вместе с градиентом; скалярное произведение и норму в $H^1(\Omega_n, V)$ мы обозначаем $[\cdot,\cdot]$ и $\|\cdot\|_1$, резервируя символы $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ для $L_2(\Omega_n, V)$. Пусть $\nabla: H^1(\Omega_n, V) \to L_2^m(\Omega_n, V)$ – оператор градиента, а P_n – оператор ограничения функции на Γ, $P_n : H^1(\Omega_n, V) \to L_2(\Gamma_n, V)$.

Предположим теперь, что заданы линейные ограниченные операторы Q_n в $L_2^m(\Omega_n, V)$, S_n в $L_2(\Omega_n, V)$ и $R_n : L_2^m(\Omega_n, V) \to L_2(\Omega_n, V)$, и ограниченная функция σ_n на Γ_n. Определим форму l_n на $H^1(\Omega_n, V)$ равенством

$$l_n(x,y) = (Q_n \nabla x, \nabla y) + (R_n \nabla x, y) + (S_n x, y) + \int_{\Gamma_n} \sigma_n(s)(x(s), y(s))\, d\Gamma_n(s)$$

и пусть L_n – фридрихсово расширение l_n. Интерпретируя теорему I применительно к данному случаю, введем операторы естественного вложения $I_n : L_2(\Omega_n, V) \to L_2(\Omega, V)$ и будем говорить, что последовательность Ω_n равномерно наполняет Ω, если: $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_n) \to 0$; существуют равномерно ограниченные в совокупности операторы продолжения $\Pi_n : H^1(\Omega_n, V) \to$

$\to H^1(\Omega,V)$ (явные оценки для норм таких операторов см. [2]); и наконец если для любого $\varepsilon>0$ существует C_ε такое, что для любого n и $u\in H^1(\Omega_n,V)$ $\|P_n u\|^2\le \varepsilon\|u\|_1^2+C_\varepsilon\|u\|^2$.

Теорема 2. Пусть последовательность Ω_n равномерно наполняет Ω и существует такое c_Q, что $Re\,(Q_n x,x)\geqslant \geqslant c_Q(x,x)$. Предположим, что последовательности S_n, Q_n, R_n, σ_n аппроксимируют S_0, Q_0, R_0, σ_0 в том смысле, что $s\text{-}\lim I_n S_n I_n^* = S_0$, $s\text{-}\lim I_n S_n^* I_n^* = S_0^*$ и аналогично для Q_n, R_n,

и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma_n}\sigma_n(s)\alpha(s)d\Gamma_n(s)=\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(s)\alpha(s)d\Gamma(s)$ для любой непрерывной на $\overline{\Omega}$ функции α. Тогда L_0 и L_n имеют компактные резольвенты, и если L_0 инъективен, то L_0 и L_n при достаточно больших n обратимы и

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n^{-1}I_n^*-I_n^*L_0^{-1}\|_{L_2(\Omega,V)\to H^1(\Omega_n,V)}=0$$

Аналогичным образом интерпретируется теорема I для разностной схемы. В качестве H_n^1 берется пространство сеточных функций $\xi:\omega_n\to V$, где ω_n – некоторое множество точек дискретной решетки с шагом $h=1/n$. Оператор продолжения Π_n строится так: сначала функция ξ продолжается на множество Ω_n, составленное из кубов с ребром h, а затем уже на Ω.

Л и т е р а т у р а

I. Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л., Прикладная механика, 1979, т.XУ, №5.

2. Гольдштейн В.М., Сибирский математический журнал, 1982, т.XXШ, №I.

О СРАВНИТЕЛЬНОМ ТЕСТИРОВАНИИ ПРОГРАММ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.Керге

В последнее время возрос интерес к сравнительному тестированию программ общематематического назначения (ОМН),т.е. к вопросам исследования программ с целью определения их качества, в первую очередь, корректности, надежности и робастности, в целях упорядочения программ по установленным показателям. Для того чтобы оценить различные характеристики качества программ ОМН, необходимо разрабатывать наборы тест-задач, запрограммировать для них тест-программы и обеспечить автоматический прогон на ЭВМ этих тест-программ при соблюдении единых условий тестирования. В докладе описывается автоматический прогон с помощью диалоговой системы тестирования, работающей в системе разделения времени.

Каждая тест-задача обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями должна иметь явное определение уравнений задачи, ее начальных условий и точное решение задачи или какую-нибудь процедуру, которая дает возможность измерить погрешность получаемых приближенных решений. Созданный комплект тест-задач для задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений включает наборы Фокса [I], Кроха [2], Халла с соавторами [3] и многие другие тест-задачи из литературы. Комплект классифицирован по трем независимым признакам. Во-первых,

- линейные задачи,
- нелинейные задачи,

во-вторых,

- однородные задачи,
- неоднородные задачи,

в-третьих,

- уравнения I порядка,
- уравнения II порядка,
- уравнения высших порядков,

- системы I порядка небольшой размерности (размерность меньше или равно десяти),

- системы I порядка большой размерности,

- специальные задачи для проверки робастности,

- задачи с некоторыми особенностями.

При этом системы I порядка имеют подклассификацию, которая учитывает число обусловленности якобиана в начальной точке

$$\rho(s) = \frac{\max\limits_i |\lambda_i|}{\min\limits_i |\lambda_i|}$$

и расположение собственных чисел λ_i на комплексной плоскости, а именно:

-- число обусловленности $\rho(s) \leq 10$,

-- все по модулю "большие" собственные числа λ_i имеют отрицательную вещественную часть и $10 < \rho(s) \leq 1000$,

-- все по модулю "большие" собственные числа λ_i имеют отрицательную вещественную часть и $\rho(s) > 1000$,

-- среди собственных чисел λ_i найдется "большое" по модулю число с положительной вещественной частью, $\rho(s) > 10$,

-- найдется нулевое собственное значение.

В докладе приводятся результаты сравнительного тестирования ряда программ решения систем I порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. Fox,P., A comparative study of computer programs for integrating differential equations. "CACM", 1972, 15, 941-948.
2. Krogh,F., On testing a subroutine for the numerical integration of ordinary differential equations. "J.Assoc. Comput.Mach.", 1973, 20, 545-562.
3. Hull,T.E., Enright,W.H., Fellen,B.M., Sedgwick,A.E., Comparing numerical methods for ordinary differential equations. "SIAM J. Numer. Anal.", 1972, 9, 603-637.

АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Р. Лепп

Пусть в пространстве $L_p[0,1]$ требуется минимизировать функционал

$$\int_0^1 F_0(x(t),t)\,dt \tag{I}$$

при ограничениях

$$\int_0^1 F_k(x(t),t)\,dt \le 0, \quad k=1,\dots,m, \tag{2}$$

или при ограничении

$$\{x(t):\ H(x(t),t)\le 0 \ \text{ при почти всех } t\in[0,1]\}. \tag{3}$$

Задаче $\{(\mathrm{I}),(2)\}$ или $\{(\mathrm{I}),(3)\}$ поставим в соответствие последовательность экстремальных задач в пространствах ℓ_p^n с нормой для элемента $x_n=(x_{0n},\dots,x_{nn})$

$$\|x_n\|^p=\sum_{i=0}^n h_i^n|x_{in}|^p,$$

где $h_i^n=t_i^n-t_{i-1}^n$, $\{t_i^n\}_0^n$ – разбиение отрезка $[0,1]$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{0\le i\le n} h_i^n=0$. Итак, в пространстве ℓ_p^n требуется минимизировать функцию

$$\sum_{i=0}^n h_i^n F_0(x_{in},t_i^n) \tag{I_n}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=0}^n h_i^n F_k(x_{in},t_i^n)\le 0,\quad k=1,\dots,m, \tag{2_n}$$

или при ограничении

$$H(x_{in},t_i^n)\le 0. \tag{3_n}$$

За связывающие операторы $p_n: L_p[0,1]\to\ell_p^n$ примем операторы сноса на сетку $\{t_i^n\}_0^n$ с обычными условиями.

Приведем условия, гарантирующие сходимость оптимальных значений задач $\{(\mathrm{I}_n),(2_n)\}$ (или задач $\{(\mathrm{I}_n),(3_n)\}$ к оптимальному значению задачи $\{(\mathrm{I}),(2)\}$ (задачи $\{(\mathrm{I}),(3)\}$ и сходимость соответствующих оптимальных множеств X_n^* к X^*.

<u>Теорема I.</u> Пусть функции $F_j(x,t)$, $j=0,\dots,m$, непрерывны по (x,t), выпуклы по x при всех $t\in[0,1]$ и пусть для всех $x\in R$, почти всех $t\in[0,1]$, всех $j=0,\dots,m$, и некоторого p, $1\le p<\infty$,

$$|F_j(x,t)|\le a_j(t)+\beta_j|x|^p, \quad a_j(t)\in L_1[0,1],$$

причем $\beta_{\bar{k}}>0$ для некоторого $\bar{k}$, тогда оптимальные значения задач $\{(\mathrm{I}_n), (2_n)\}$ сходятся к оптимальному значению задачи $\{(\mathrm{I}), (2)\}$ и любая ограниченная последовательность (x_n^*), где $x_n^* \in X_n^*$, содержит дискретно слабо сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}^* - \to x^* \in X^*$.

Теорема 2. Пусть для функции $F_0(x,t)$ выполнены условия теоремы I и пусть функция $H(x,t)$ непрерывна и выпукла по x для почти всех $t \in [0,1]$ и измерима по t для всех $x \in R$. Тогда утверждение теоремы I верно для задач $\{(\mathrm{I}_n), (3_n)\}$ и $\{(\mathrm{I}), (3)\}$.

Замечание I. Условия теорем I и 2 (и более слабые условия) гарантируют существование решения задачи $\{(\mathrm{I})-(3)\}$ даже при бесконечном числе ограничении (см. [I]).

Замечание 2. Доказательства теорем I и 2 опираются на проверку условий теоремы 4 из [2].

Замечание 3. Аппроксимировать задачу (I)-(3) по схеме [2] нельзя, так как множество $\{x(t) : H(x(t),t) \leq 0$ при почти всех $t \in [0,1]\}$ не имеет внутренних точек в $L_p[0,1]$.

Замечание 4. Если имеется бесконечное число ограничений, то теорема I справедлива при следующих дополнительных ограничениях:

I. $F_j(x,t)$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены.

2. Субградиенты $\hat{F}_{jx}(x,t)$ равномерно ограничены.

Литература

I. Поляк Б.Т., Полунепрерывность интегральных функционалов и теоремы существования в задачах на экстремум. Матем. сб., 1969, 78(120), № I, 65-84.

2. Васин В.В., Дискретная аппроксимация и устойчивость в экстремальных задачах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, 22, № 4, 824-839.

16

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХЭТАПНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р. Лепп

Пусть даны борелевская вероятностная мера μ на (Ξ,Σ), $\Xi\subset R^r$ такая, что $\mu(\Xi)=1$, случайный вектор $\xi\in L_p(\Xi,\Sigma,\mu)$, множество $X\subset R^s$, функции $f:X\to R$, $h:R^l\times R^r\to R$, $g:R^l\times X\times R^r\to R$, $Q:X\times R^r\to R$. Рассмотрим задачу нелинейного двухэтапного стохастического программирования

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\int Q(x,\xi)\,d\mu(\xi)\}, \tag{I}$$

где $Q(x,\xi)=\inf\{h(y,\xi):\ g(y,x,\xi)\le 0,\ y\ge 0\}$.

Нетрудно показать, что если Q липшицева по $x\in X$ с константой Липшица $K(\xi)\in L_1(\Xi,\Sigma,\mu)$ и если $Q(x,\xi)$ дифференцируема по $x\in X$ при почти всех $\xi\in\Xi$, то и функция $\varphi(x)=\int Q(x,\xi)\,d\mu(\xi)$ дифференцируема. Но вычисление значений функции $\varphi(x)$ ее градиента в общем случае очень затруднительно. Поэтому представляют интерес приближенные методы решения задачи (I).

Если вектор ξ принимает конечное число значений $\xi_1,\dots,\xi_m$ с положительными вероятностями $p_1,\dots,p_m$, $\sum_{i=1}^m p_i=1$, то задача (I) преобразуется к следующей задаче детерминированного нелинейного программирования:

$$\min_{x\in X,\,y\ge 0}\{f(x)+\sum_{i=1}^m p_i h(y^i,\xi_i):\ g(y^i,x,\xi_i)\le 0,\ i=1,\dots,m\},$$

которую можно решать любым известным методом. Исходя из этого представления, дискретизируем задачу (I) следующим образом.

<u>Определение</u>. Сеткой $[\Xi_n, B_n]$ для задачи (I) назовем множество узлов $\Xi_n\subset\Xi$ вместе с многозначным отображением $B_n:\Xi_n\to\Xi$ таким, что

1) $\xi_{in}\in B_n(\xi_{in})$, $B_n(\xi_{in})\in\Sigma$ $\forall\,\xi_{in}\in\Xi_n$

2) $B_n(\Xi_n)=\Xi$,

3) $B_n(\xi_{in})\cap B_n(\xi_{jn})=\emptyset$, $\xi_{in}\ne\xi_{jn}$.

Пусть $[\Xi_n, B_n]$ сетка и пусть σ- алгебра $\mathcal{S}_n$ состоит из всех подмножеств множества Ξ_n. Определим меру μ_n на $\mathcal{S}_n$ следующим образом: $\mu_n(\xi_{in})=\mu(B_n(\xi_{in}))$. Вместо задачи (I) рассмотрим задачу (I_n):

$$\min_{x\in X,\, y_n^i\geq 0}\Big\{f(x)+\sum_{\xi_{in}\in\Xi_n} h(y_n^i,\xi_{in})\mu_n(\xi_{in}) : g(y_n^i,x,\xi_{in})\leq 0,\ \xi_{in}\in\Xi_n\Big\} \qquad (I_n)$$

Основной трудностью при решении задачи (I_n) при фиксированном n является ее большая размерность по y_n^i. В настоящем докладе предложим для решения этой задачи комбинированный метод стохастических градиентов и штрафных функций.

Фиксируем сетку $[\Xi_n, B_n]$ с узлами $\{\xi_{in}, i\in I\}$, которой мы здесь не конкретизируем. Вычисляем вероятности $\mu_n(\xi_{in})$, $i\in I$. Обозначим через ω_k реализацию случайной величины ω, принимающей значения из множества I с положительными вероятностями $\alpha_i=\mu_n(\xi_{in})$ в к-ом независимым испытании. Итеративный процесс для решения задачи (I_n) представим в следующем виде:

$$x_{k+1}=\pi_X(x_k-\gamma_k\,\eta(x_k, y_{nk}^i, c_k, \omega_k)), \qquad (2)$$

$$y_{n,k+1}^i=\pi_+(y_{nk}^i-\gamma_k\,\zeta_i(x_k, y_{nk}^i, c_k, \omega_k)), \qquad (3)$$

где $\eta(x_k, y_{nk}^i; c_k, \omega_k)=$

$$=f_x(x_k)+c_k\max(0,g(y_{nk}^i,x_k,\xi_{in}))\,g_x(y_{nk}^i,x_k,\xi_{in}), \qquad \omega_k=i,$$

$$\zeta_i(x_k, y_{nk}^i, c_k, \omega_k)=$$

$$=h_y(y_{nk}^i,\xi_{in})\alpha_i+c_k\max(0,g(y_{nk}^i,x_k,\xi_{in}))\,g_y(y_{nk}^i,x_k,\xi_{in}), \qquad \omega_k=i,$$

$$\zeta_i(x_k,y_{nk}^i,c_k,\omega_k)=h_y(y_{nk}^i,\xi_{in})\alpha_i, \qquad \omega_k\neq i.$$

Здесь π_X и π_+ операторы проектирования на множества X и R_+ соответственно.

<u>Теорема</u>. Пусть функции $f(x)$, $h(y,\xi)$, $g(y,x,\xi)$ непрерывны вместе со своими производными и выпуклы по x, y и (y,x) соответственно при всех $\xi\in\Xi$, X - выпуклый компакт, числовые последовательности (γ_k), (c_k) удовлетворяют условиям:

$$\gamma_k\to 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k=\infty,\ c_k\to\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\gamma_k^2<\infty,$$

тогда для любого начального приближения $\{x_1, y_{n1}^i, i\in I\}$ последовательность, определенная процессом $\{(2), (3)\}$, с вероятностью единица сходится к множеству решений задачи (I_n).

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА РАВЕНСТВ

Р. Лепп

Рассмотрим следующую проблему минимизации:

$$\min_x \{ f(x) : g(x) = 0 \},\ x \in R^r,\ f: R^r \to R,\ g: R^r \to R^m,\ m \le r. \quad (1)$$

Важным классом алгоритмов для решения задачи (1) являются методы, базирующиеся на последовательной минимизации модифицированной функции Лагранжа (см.напр. [1]). Параллельно с этими методами исследовались и методы, где множитель Лагранжа ищется зависимыми от x и которые не требуют минимизации модифицированной функции Лагранжа на каждом итерационном шаге (см. напр.[2]), но требуют минимизацию нормы квадрата градиента по λ функции Лагранжа. В последнее время (см.,напр. [3],[4]) появились работы, в которых эта квадратичная форма добавляется к модифицированной функции Лагранжа, т.е.

$$S(x,\lambda,c) = f(x) + \lambda^T g(x) + \sum_{i=1}^{m} c^i g_i^2(x) + \| f_x(x) + \nabla_x g^T(x)\lambda \|^2 \quad (2)$$

и затем минимизируется $S(x,\lambda,c)$ по (x,λ). Здесь через $\nabla_x g(x)$ обозначена матрица производных функции ограничений $g_i(x)$, $i = 1,\dots,m$. Метод минимизации, предложенный в [4], требует довольно точной минимизации функции (2) по (x,λ) на каждом итерационном шаге и дает лишь эвристические правила для увеличения штрафных множителей c^i на следующей итерации.

В настоящем докладе предлагается итеративный метод нахождения стационарной точки задачи (1), где по x делается один шаг по направлению уменьшения значений модифицированной функции Лагранжа $L(x,\lambda,c) = f(x) + \lambda^T g(x) + \sum_{i=1}^{m} c^i g_i^2(x)$, по λ шаг по направлению уменьшения значения квадратичной формы $\| f_x(x) + \nabla_x g^T(x)\lambda \|^2$, а значения штрафных множителей c^i выбираются зависимыми от нарушения ограничений $g_i(x) = 0$, $i = 1,\dots,m$. Метод имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \gamma_n \Big[f_x(x_n) + \nabla_x g^T(x_n)\lambda_n + \sum_{i=1}^{m} c_n^i \nabla_x g^T(x_n) g(x_n) \Big], \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n - \delta_n \nabla_x g(x_n)\big(f_x(x_n) + \nabla_x g^T(x_n)\lambda_n \big), \\ c_{n+1}^i &= c_n^i + \rho_n |g_i(x_n)|,\ i = 1,\dots,m. \end{aligned} \quad (3)$$

Наложим ограничения на функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1,\dots,m$, и на шаговые множители $\gamma_n, \delta_n, \rho_n$:

I) функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i=1,\ldots,m$, непрерывно дифференцируемы,

2) матрица $\nabla_x g(x)$ имеет полный ранг при всех $x \in R^n$,

3) градиенты $f_x(x)$, $g_{ix}(x)$, $i=1,\ldots,m$, удовлетворяют условию Липшица,

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, $\gamma_n \delta_n^{-1} \to 0$.

<u>Теорема</u> Если выполнены условия I)-4), то предельные точки последовательности (x_n, λ_n), полученные методом (3), принадлежат множеству стационарных точек Z^* задачи (I), где

$$Z^* = \{(x^*, \lambda^*) : \| f_x(x^*) + \nabla_x g^T(x^*)\lambda^* \|^2 = 0,\ \| g(x^*) \|^2 = 0 \}.$$

Приведенная теорема гарантирует сходимость метода (3) лишь теоретически. При численном реализации метода возникает проблема конкретного выбора шаговых множителей γ_n и δ_n. Например, можно γ_n и δ_n выбирать так:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n a^{L_x(x_{n+1}, \lambda_n, c_n)^T (x_n - x_{n+1}) - \nu\gamma_n} \qquad (4)$$

$$\delta_{n+1} = \| \nabla_x g(x_n)(f_x(x_n) + \nabla_x g^T(x_n)\lambda_n)\|^2 / \| \nabla_x g^T(x_n) \nabla_x g(x_n)(f_x(x_n) + \nabla_x g^T(x_n)\lambda_n)\|^2 \qquad (5)$$

где $a > 1$, $0 < \nu < 1$. Можно доказать, что выбранные по формулам (4) и (5) шаговые множители γ_n и δ_n удовлетворяют условии 4) теоремы. При практической реализации метода (3) требуются еще некоторые дополнительные эвристические ограничения на γ_n, δ_n, ρ_n.

Литература

1. Hestenes, M., Optimization Theory. Wiley & Sons, 1975.
2. Miele, A., Cragg, E., Iyer, R., Levy, A., Use of the augmented penalty function in mathematical programming problems. J. Optimiz. Theory Appl., 1971, <u>8</u>, 115-130.
3. Di Pillo, G., Grippo, L., A new class of augmented Lagrangians in nonlinear programming. SIAM J. Control and Optimiz., 1979, <u>17</u>, 618-628.
4. Di Pillo, G., Grippo, L., Lampariello, F., A method for solving equality constrained optimization problems by unconstrained minimization. Lect. Notes in Contr. Inf. Sci., v. 23, Optimization Techniques, Proc. 9th IFIP Conf., Springer-Verlag, Berlin, 1980, pp. 96-105.

МЕТОД ЛЕВЕНБЕРГА-МАРКВАРТА В ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

М. Ломп, В. Ольман

Рассматривается задача оценивания параметра $p \in R^m$ ($m \geq 1$), определяющего одномерное распределение $F(x,p)$ по заданным экспериментальным частотам q_k, попадания в интервалы $[A_k, A_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, s$. Задача решается минимизацией либо функционала

$$\varphi(p) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\{q_k - [F(A_k,p) - F(A_{k-1},p)]\}^2}{F(A_k,p) - F(A_{k-1},p)} \to \min_p,$$

т.е. методом χ -квадрат, либо функционала

$$\psi(p) = -\sum_{k=1}^{s} q_k \ln[F(A_k,p) - F(A_{k-1},p)] \to \min_p,$$

т.е. методом максимального правоподобия.

Минимизация производится методом Левенберга-Маркварта [2], т.е.

$$p^{k+1} = p^k + (F'^T(p^k)F'(p^k) + \lambda I)^{-1} F'^T(p^k)F(p^k),$$

где $F(p) = (f_1(p), f_2(p), \ldots, f_s(p))^T$ в случае минимизации функционала $f(p) = \sum_{i=1}^{s} f_i^2(p)$. Параметр λ, определяющий метод, выбирается в соответствии с [I].

Метод реализован на языке ФОРТРАН-IУ. Для описания параметрического распределения $F(x,p)$ допустимо представление как в виде плотности, так и в виде функции распределения.

Так как во многих практических задачах на параметр наложены ограничения в виде прямоугольных параллелепипедов то в метод внесены простые модификации. Необходимые производные вычисляются приближенным дифференцированием.

Получены хорошие численные результаты для смеси треугольных распределений.

Литература

I. Круг Г.К. и др., Планирование эксперимента в задачах нелинейного оценивания и распознавания образов. Москва, 1981.

2. Donald W.Marquart, An algorithm for Least-Squares Estimation of nonlinear Parameters.SIAM,1963,11,N°2,431-441.

О РОСТЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОПЕРАТОРНЫХ ИТЕРАЦИЯХ

А. Минц

Операторное уравнение

$$Au = f, \tag{I}$$

где A – самосопряжённый неотрицательный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, решается методом операторных итераций

$$B_k = B_{k-1}(2I - AB_{k-1}), \quad B_0 = g(A). \tag{2}$$

Здесь $g(\lambda) \in C[0, \|A\|], \; 0 \leq g(\lambda) \leq 2/\lambda$,

причем приближение к решению (I) вычисляется следующим образом:

$$u_n = (I - AB_k)u_0 + B_k f, \text{ где } u_0 \in H, \; n = 2^k.$$

Предполагается, что при вычислении B_0 была сделана ошибка с нормой ε, а дальнейшие вычисления выполнялись без ошибок. Обозначим $\varepsilon_k = \|B_k - \widetilde{B}_k\|$, где $\widetilde{B}_k$ – приближённое значение B_k. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) при $k < -\lg_2 \varepsilon + 1$

$$\varepsilon_k \leq c \cdot \varepsilon \cdot 2^k, \; c = const > 0 \tag{3}$$

выполняется для не слишком больших c;

б) в случае вполне непрерывного A, при выполнении некоторого условия на спектр A,

$$\varepsilon_k \geqslant e \cdot 2^{2^k}, \; e = const > 0$$

при достаточно больших c.

Доказательство первого утверждения основано на неравенстве

$$\varepsilon_k \leq \varepsilon_{k-1}(2 + \varepsilon_{k-1}), \tag{4}$$

полученном из очевидного равенства

$$\widetilde{B}_k - B_k = (I - AB_{k-1})(\widetilde{B}_{k-1} - B_{k-1}) + (\widetilde{B}_{k-1} - B_{k-1})(I - A\widetilde{B}_{k-1}).$$

Учитывая, что $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$, из (4) легко получить неравенство

$$\varepsilon_k \leq 2^k \varepsilon \left(1 + C_1^k \varepsilon + C_2^k \varepsilon^2 + \ldots + C_{2^k-1}^k \varepsilon^{2^k-1}\right), \tag{5}$$

где C_i^k – некоторые коэффициенты. Для них выполняются следующие соотношения, полученные из (4) и (5):

$$C_i^{k+1}=C_i^k+2^{k-1}\left((C_{(i-1)/2}^k)^2+2(C_{i-1}^k+C_{i-2}^kC_1^k+\ldots+C_{(i-1)/2-1}^k\cdot C_{(i-1)/2+1}^k\right) \qquad (6)$$

при нечётном i, $2^k-1\geqslant i>1$,

$$C_i^{k+1}=C_i^k+2^k(C_{i-1}^k+C_{i-2}^kC_1^k+\ldots+C_{i/2}^k\cdot C_{i/2-1}^k) \qquad (6')$$

при чётном i, $2^k-1\geqslant i>0$,

причём при $i>2^k-1$ положим $C_i^k=0$. Легко вычислить C_0^k и C_1^k:

$$C_0^k=1, C_1^k=(2^k-1)/2. \qquad (7)$$

Используя (6), (6'), (7), можно доказать по индукции, что $C_i^k\leq 2^{i(k-1)}$. Таким образом,

$$\varepsilon_k\leq 2^k\varepsilon\left(1-(\varepsilon\cdot 2^{k-1})^{2^k}\right)/(1-\varepsilon\cdot 2^{k-1}). \qquad (8)$$

Очевидно, что для выполнения оценки (3) достаточно выполнения неравенства

$$\varepsilon\cdot 2^k\left(1-(\varepsilon\cdot 2^{k-1})^{2^k}\right)/(1-\varepsilon\cdot 2^{k-1})\leq C\cdot\varepsilon\cdot 2^k. \qquad (9)$$

Отсюда получаем

$$C\geqslant\left(1-(\varepsilon\cdot 2^{k-1})^{2^k}\right)/(1-\varepsilon\cdot 2^{k-1}). \qquad (9')$$

Предположим для простоты, что $\varepsilon=2^{-m}$ и рассмотрим $k<-lg_2\varepsilon+1$, т.е. $k<m+1$. Очевидно, что если (9') выполняется для некоторого K_0 то оно выполняется и для всех $k<K_0$. Положив в (9') $k=m$, получаем $C\geqslant 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^m}\right)$, поэтому (9), а, следовательно, и (3) выполняется при $C\geqslant 2$, т.е. при достаточно малых C. Утверждение а) доказано.

Рассмотрим теперь только два первых члена в (5). Очевидно, что, если не выполняется оценка

$$2^k\varepsilon+2^k(2^k-1)\varepsilon^2/2\leq C\cdot\varepsilon\cdot 2^k, \qquad (10)$$

то не выполняется и (3). Из (10) получаем

$$k>-lg_2\varepsilon+lg_2(2(C-1)+\varepsilon).$$

При таких к оценка (3) не имеет места.

Исследуем теперь случай $g=1/(1+\lambda)$. Пусть сначала $A=\lambda I$, где $\lambda>0$. Тогда $g(A)=g(\lambda)I$, можно рассматривать скалярный случай:

$$h_k = h_{k-1}(2-\lambda h_{k-1}),\ h_0 = g(\lambda),$$

где $(h_k)_{k=0}^{\infty}$ – числовая последовательность. В этом случае

$$h_k = \sum_{j=1}^{2^k} (g(\lambda))^j,$$

$$\varepsilon_{k+1} = -\lambda \varepsilon_k^2 + (3g^{2^k} - 1)\cdot \varepsilon_k, \qquad \text{(II)}$$

где $\varepsilon_k = \tilde{h}_k - h_k$. Исследуем поведение $|\varepsilon_{k+1}|$ при достаточно больших K.

Предположим, что $|\varepsilon_k|$ возрастает неограниченно. Тогда при достаточно больших K имеем $|\varepsilon_{k+1}| = -\varepsilon_{k+1}$, и по индукции можно доказать, что при достаточно больших K имеет место неравенство

$$|\varepsilon_{k+1}| \geq e\cdot 2^{2^{k+1}},\ e = const > 0.$$

Пусть теперь A – вполне непрерывный оператор. В базисе своих собственных элементов он представляется в виде диагональной матрицы:

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots),$$

где λ_i – собственные значения A.

Тогда $B_k = \sum_{j=1}^{2^k} (g(A))^j$, а

$$\tilde{B}_k - B_k = diag(\varepsilon_k^1, \varepsilon_k^2, \dots, \varepsilon_k^i, \dots), \text{ и}$$

$$\varepsilon_k = \|\tilde{B}_k - B_k\| = \max_{1\leq i<\infty} |\varepsilon_k^i|.$$

Если существует такое $\lambda_i > 0$ – собственное значение A, что $|\varepsilon_k^i|$ возрастает неограниченно, то

$$|\varepsilon_k^i| \geq e_i\cdot 2^{2^k}, \text{ и, следовательно,}$$

$$\varepsilon_k \geq e_i\cdot 2^{2^k}, \text{ где } e_i > 0.$$

Таким образом доказано и второе утверждение.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ С ЯДРОМ ПЛОТНОСТЬЮ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

В. Ольман

Рассматривается уравнение свертки

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2}\right] dy \qquad (I)$$

в пространстве $M = \{ f(x) : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-\alpha x^2} dx < \infty, \forall \alpha > 0 \}$.
Доказана

Теорема. Между решениями уравнения (I) в классе M и парами аналитических на комплексной плоскости функций $(V_1(z), V_2(z))$, имеющих период I, т.е. $V_i(z) = V_i(z+1)$, $i = 1, 2$, есть взаимозначное соответствие, а именно,

$$\mathcal{L}\left(\frac{f_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} V_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{f_2'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} V_2\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $\mathcal{L}(\cdot)$ - преобразование Лапласа, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ четная и нечетная составляющие какого-либо решения уравнения (I).

Данная задача решает проблему описания преобразований оценки среднего Θ нормального закона, сохраняющих допустимость (байесовость) в случае обобщенного априорного распределения $d\Theta$.

ТОЧНЫЙ ТРЕХЭТАПНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИЕРАРХИИ

Т. Рийсмаа

В некоторых случаях задачу оптимизации иерархии можно преобразовать к виду

$$\min_{k_1,\dots,k_\alpha,\alpha}\left\{\sum_{j=1}^{\alpha} h(k_j)\;\Big|\;\sum_{j=1}^{\alpha} k_j = n-1+\alpha,\ \alpha\in N,\ k_j\in N\ (j=1,\dots,\alpha)\right\}, \quad (\mathrm{I})$$

где $h: N\to R$, h – d-выпукла, $N=\{0,1,\dots\}$. Множество решений этой задачи индуцирует множество оптимальных иерархий. Определим $\hat{h}: R_+\to R$ так, что $\hat{h}$ – выпукла и $\hat{h}(k)=h(k)$ при $k\in N$.

Для решения поставленной задачи разработан следующий метод.

1° Решается уравнение $k\hat{h}(k)-(k-1)\hat{h}(k+1)=0$. Пусть $\tilde{k}$ некоторое решение этого уравнения.

2° Вычисляются натуральные числа k_1^0, k_2^0 ближайшие к $\tilde{k}$, $k_1^0\leqslant\tilde{k}<k_2^0$ такие, что ограничения $(k_i^0-1)m_1+k_i^0 m_2=n-1$ ($i=1,2$) были бы удовлетворены для некоторых $m_1=m_1^i\in N$, $m_2=m_2^i\in N$ $(i=1,2)$.

3° Решаются две линейные задачи

$$\min_{m_1,m_2}\left\{m_1 h(k_i^0)+m_2 h(k_i^0+1)\;\Big|\;(k_i^0-1)m_1+k_i^0 m_2=n-1,\ m_1\in N,\ m_2\in N\right\}=\varphi(k_i^0)\quad (i=1,2). \quad (2)$$

Оптимальное значение k^* для k выбирается из условия $\varphi(k^*)=\min\{\varphi(k_1^0),\varphi(k_2^0)\}$.

Пусть минимум в (2), когда $k_i^0=k^*$ реализуется при $m_1=\bar{m}_1$, $m_2=\bar{m}_2$. Тогда $\bar{m}_1, \bar{m}_2$ – решение задачи (2), $k_i=k^*$ $(i=1,\dots,\bar{m}_1)$, $k_i=k^*+1$ $(\bar{m}_1+1,\dots,\bar{m}_1+\bar{m}_2)$, $\alpha=\bar{m}_1+\bar{m}_2$ – решение задачи (I).

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

В.А. Рукавишников

В работах [1] - [2] установлены необходимые и достаточные условия, при которых решение задач Дирихле, Неймана и со смешанными граничными условиями для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике принадлежит классу $C_{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. В [3] - [5] исследован вопрос гладкости решения выше перечисленных задач для уравнения Лапласа в произвольном многоугольнике с прямолинейными сторонами. В книге [6] даны условия, при которых решение задачи Дирихле с однородными граничными условиями для уравнения Гельмгольца на прямоугольнике принадлежит классу $C_{5,\alpha}(\bar{\Omega})$. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия регулярности решений задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в прямоугольнике и второй краевой задачи для однородного эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в прямоугольнике, которая после приведения уравнения к каноническому виду сводится к задаче Неймана для уравнения Гельмгольца в параллелограмме.

I. Рассмотрим задачу

$$-\Delta v + a v = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta_i} = \varphi_i(x), \qquad x \in \partial\Omega^{(i)}, \; i = 1,2,3,4, \tag{2}$$

где $\bar{\Omega} = \Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{4} \partial\Omega^{(i)}\right)$ - прямоугольник со сторонами $\partial\Omega^{(1)}$ и $\partial\Omega^{(2)}$, лежащими соответственно на координатных осях x_2 и x_1, и с вершиной $\partial\Omega^{(1,2)}$, находящейся в начале координат; η_i - единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega^{(i)}$.

Предположим, что $a > 0$, а правые части граничных условий и уравнения гладкие, т.е.

$$f(x) \in C_{k-2,\alpha}(\bar{\Omega}),\; \varphi_i \in C_{k-1,\alpha}(\partial\Omega^{(i)}),\; k \geq 2,\; 0<\alpha<1,\; i=1,2,3,4 \tag{3}$$

и в углах прямоугольника выполняются условия согласования

$$\varphi_{i+1}^{(2\nu-1)} - (-1)^{\nu}\varphi_i^{(2\nu-1)} + \sum_{n=1}^{[\nu/2]} (-1)^n a_{n,2\nu}\, a^n \left(\varphi_{i+1}^{(2\nu-2n-1)} - \right.$$

$$-(-1)^{\nu}\varphi_i^{(2\nu-2n-1)}\Big) = (-1)^{i+1}\Big[\sum_{n=1}^{\nu-2}(-1)^n\frac{\partial^{2\nu-2}f}{\partial x_1^{2\nu-2n-3}\partial x_2^{2n+1}} +$$

$$(4)\qquad \sum_{n=1}^{[\nu/2]-1}(-1)^n a^n\Big(\sum_{j=0}^{\nu-n-2}\big((-1)^j a_{n,(2\nu-4j-4)}+(-1)^{j+n}a_{n,(4j+4n+4-2\nu)}\big)$$

$$\frac{\partial^{2\nu-2-2n}f}{\partial x_1^{2\nu-3-2n-2j}\partial x_2^{2j+1}}\Big)\Big] \quad \text{на} \quad \partial\Omega^{(i,i+1)},$$

$i=1,2,3,4$, $\partial\Omega^{(5,4)}\equiv\partial\Omega^{(1,4)}$, производные φ_i и φ_{i+1} взяты по дуге границы $\partial\Omega$, началом отсчета которой является угол $\partial\Omega^{(1,4)}$ В (4) $\nu=1,\dots,[\frac{k}{2}]$, $a_{n,\ell}=0$ при $\ell<4$, а при $\ell\geqslant 4$

$$a_{1,\ell}=\frac{\ell}{4}-\frac{1}{2},$$

$$a_{n,\ell}=\sum_{\ell_1=1}^{[\ell/4]+1-n}\ \sum_{\ell_2=1}^{\ell_1}\dots\sum_{\ell_{n-1}=1}^{\ell_{n-2}} b_{\ell_{n-1}},\ n=2,3,\dots,$$

здесь

$$b_{\ell_{n-1}}=\begin{cases}\ell_{n-1}, & \text{для } \nu \text{ - нечетных,}\\ \ell_{n-1}-1/2, & \text{для } \nu \text{ - четных.}\end{cases}$$

Кроме того, в (4) $\sum_{a=b}^{c}w_n=0$ при $c<b$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема I. Для того чтобы решение задачи (I) - (2) $v(x)\in C_{k,\alpha}(\bar\Omega)$, $\alpha\in(0,1)$ необходимо и достаточно выполнение условий (3) - (4). При этом имеет место оценка

$$\|v\|_{C_{k,\alpha}(\bar\Omega)}\le\delta_0\Big(\|f\|_{C_{k-2,\alpha}(\bar\Omega)}+\sum_{i=1}^{4}\|\varphi_i\|_{C_{k-1,\alpha}(\partial\Omega^{(i)})}\Big),$$

где δ_0 - постоянная, не зависящая от $v(x)$.

2. В прямоугольнике Ω рассмотрим задачу

$$(5)\qquad Bv\equiv-\sum_{\ell,s=1}^{2}b_{\ell s}\frac{\partial^2 v}{\partial x_\ell\partial x_s}+b\,v(x)=0,\quad x\in\Omega,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial v}{\partial N_i}\equiv\sum_{\ell,s=1}^{2}b_{\ell s}\frac{\partial v}{\partial x_s}\cos(\eta_i\widehat{,}x_\ell)=\varphi_i^*(x),\ x\in\partial\Omega^{(i)},\ i=1,2,3,4.$$

Предположим, что оператор B – строго эллиптичен, коэффициент $b > 0$.

После приведения уравнения (5) к каноническому виду исходная задача сводится к задаче Неймана для уравнения Гельмгольца, т.е.

(7) $\quad -\Delta v + a v(x) = 0, \qquad x \in G,$

(8) $\quad \dfrac{\partial v}{\partial \eta_j} = \varphi_j(x), \quad x \in \partial G^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, 4$

Заметим, что в новой системе координат область G является параллелограммом с углом между сторонами $\partial G^{(1)}$ и $\partial G^{(2)}$ равным $\gamma_1 \pi$, где

$$\gamma_1 \pi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}}{b_{12}^2}\right)$$

Очевидно, что $0 < \gamma < 1$.

Сформулируем основную теорему.

<u>Теорема 2</u>. Для того, чтобы решение $v(x)$ задачи (7) – (8) принадлежало классу $C_{k,\alpha}(\bar{G})$ при $k \geq 2,\ 0 < \alpha < 1,\ \{\gamma_j (k+\alpha)\} \neq 0,\ j = 1, 2, 3, 4$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_i \in C_{k-1,\alpha}(\partial G^{(i)}),\ i = 1, 2, 3, 4$ при $\gamma_1 = p_1/q_1$, p_1/q_1 – несократимая дробь, в угловых точках $\partial G^{(i,i+1)}$ выполнялись условия согласования

(9) $$\sum_{n=0}^{\left[\frac{(\nu-1)}{2} q_i\right] - \left[\frac{\nu-1}{2}\right]} (-1)^n a^n a_{n,\nu q_i} \left(\varphi_1^{(\nu q_i - 2n - 1)} + (-1)^{\nu p_i} \varphi_2^{(\nu q_i - 2n - 1)}\right) = 0,$$

где $1 \leq \nu \leq [k/q_i],\ i = 1, 2, 3, 4,$

$$a_{0,\nu q_i} = 1, \quad a_{n,\nu q_i} = 2^{(\nu q_i - 2n)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m a_{m,\nu q_i} (\nu q_i - 2m)!}{(n - m + b_n)!\,(\nu q_i - n - m - b_n)!\, 2^{(\nu q_i - 2m)}}$$

$$b_n = \left[\frac{n + b_{n-1}}{q_i}\right], \quad b_1 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

производные от φ_i и φ_{i+1} взяты в направлении от вершины угла, кроме того при $\gamma_j (k+\alpha) > 1,\ \{1/\gamma_j\} = 0,\ j = 1, 2, 3, 4$ выполнялись условия интегрального типа

(10) $\quad \beta_n^j = 0, \qquad 0 \leq n \leq [\gamma_j (k+\alpha)],\ \gamma_j$ – иррационально,

$\quad \beta_n^j = 0$ для 1) $n = 0$,

2) $1 \leq n \leq [\gamma_j (k+\alpha)], \quad n \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p_j)$,

3) $1 \leq n \leq \gamma_j k - 2,\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p_j),\ p_j \neq 2,\ \gamma_j = \frac{p_j}{q_j}$

При этом

$$\|v\|_{C_{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \delta_1 \sum_{i=1}^{4} \|\varphi_i\|_{C_{k-1,\alpha}(\partial G^{(i)})},$$

где δ_1 - постоянная, не зависящая от $v(x)$.

Заметим, что дифференциальные свойства решения задачи (7) - (8) в параллелограмме $\overline{G}$ при условии регулярности правых частей граничных условий, заданных на сторонах $\partial G^{(i)}$ $(i=1,2,3,4)$, зависят от величины угла, а также при $\gamma_i = \frac{p_i}{q_i}$ и $\gamma_i(k+\alpha)>1$ от выполнения в угловых точках условий согласования (9), и, кроме того, при $\{1/\gamma_i\} \neq 0$, $\gamma(k+\alpha)>1$ от выполнения условий интегрального типа (10), которые в свою очередь определяются интегральными свойствами правых частей граничных условий и предельными значениями функций φ_i $(i=1,2,3,4)$ в угловых точках параллелограмма (более подробно см. [7]).

Литература

1. Никольский С.М. Граничные свойства функций, определенных на областях с угловыми точками. - Матем. сб., 1957, т. 43, №1, с. 127-144.
2. Волков Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике. - Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1965, т. 77, с. 89-112.
3. Волков Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках. - Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1965, т. 77, с. 113-142.
4. Фуфаев В.В. К задаче Дирихле для областей с углами. - Докл. АН СССР, 1960, т. 131, №1, с. 37-39.
5. Фуфаев В.В. О комформных преобразованиях областей с углами и о дифференциальных свойствах решений уравнения Пуассона в областях с углами. - Докл. АН СССР, 1963, т. 152, №4, с. 838-840.
6. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. - М.: Наука, 1979. - 320 с.
7. Рукавишников В.А. О дифференциальных свойствах решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами на прямоугольнике. - Деп. в ВИНИТИ АН СССР, 1983, с. 34 (в печати).

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЛУЧАЙНОГО РЕШЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Э. Тамм

Рассматривается случайная экстремальная задача

$$\min_x \{ f(x,\omega) \mid x \in \Gamma(\omega) \}, \tag{I}$$

где (Ω, Σ, P) - вероятностное пространство, $\omega \in \Omega$, R^n - n-мерное евклидово пространство, $x \in R^n$, $f : R^n \times \Omega \to R$ и Γ - точечно-множественное отображение из Ω в R^n. Случайным решением задачи (I) называется селектор [I] отображения Γ такой, что

$$P[\omega \mid f(y(\omega),\omega) \leq f(x,\omega) \quad \forall x \in \Gamma(\omega)] = 1. \tag{2}$$

<u>Теорема.</u> Если задача (I) имеет при каждом $\omega \in \Omega$ как детерминированная задача решение, $f(x,\omega)$ непрерывна по x при каждом ω и измерима при каждом $x \in R^n$, а отображение Γ измеримо [2] и его значения замкнуты, то задача (I) имеет случайное решение.

<u>Следствие.</u> Если функции $f : X \times \Omega \to R$ и $g : X \times \Omega \to R^m$ непрерывны по x при каждом $\omega \in \Omega$ и измеримы при каждом $x \in X$ и задача

$$\min_x \{ f(x,\omega) \mid g(x,\omega) \leq 0,\ x \in X \}, \tag{3}$$

где $X \subset R^n$ замкнуто, имеет при каждом $\omega \in \Omega$ как детерминированная задача решение, то она имеет и случайное решение.

Литература

1. Castaign, C., Sur les multi-applications mesurables. Rev. Franç. Inform. et Rech., 1967, No 1, 91-126.
2. Himmelberg, C., Van Vleck, F., Multifunctions on abstract measurable spaces and applications to stochastic decision theory. Annali di Matematica pura ed Applicata, 1974, 101, 229-236.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА СЕТОК В СИЛЬНОЙ НОРМЕ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Э. Тамме

Во многих работах исследована сходимость метода сеток в норме W_2^2 при решении уравнения четвертого порядка (см., напр. [I–4]). В настоящей работе получена оценка скорости сходимости этого метода в норме W_2^4.

В прямоугольной области $\Omega = \{ x = (x_1, x_2):\ 0 < x_\alpha < l_\alpha;\ \alpha = 1, 2\}$ с границей Γ рассмотрим задачу

$$p_{11}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + p_{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + p_{22}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f,\quad u|_\Gamma = 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\Big|_\Gamma = \mu, \qquad (I)$$

где p_{11}, p_{12}, p_{22} – заданные положительные постоянные, f, μ – заданные функции и $\partial^2 u/\partial \nu^2$ – вторая производная по нормами к границе .

Введем прямоугольную сетку

$$\bar\Omega_h = \{ x_i = x_{i_1 i_2} = (i_1 h_1, i_2 h_2):\ i_\alpha = -1, 0, \dots, N_\alpha + 1;\ \alpha = 1, 2\}$$

с шагами $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$. Задачу (I) аппроксимируем разностной задачей

$$\begin{aligned} L_h y_i \equiv p_{11}\partial_1^2\bar\partial_1^2 y_i + p_{12}\partial_1\bar\partial_1\partial_2\bar\partial_2 y_i + p_{22}\partial_2^2\bar\partial_2^2 y_i = f_i,\quad x_i \in \Omega_h,\\ y_i = 0,\quad x_i \in \Gamma_h,\quad \partial_\nu\bar\partial_\nu y_i = \mu_i,\quad x_i \in \Gamma_{h0}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\partial_\alpha y_i = y_{x_\alpha, i}$ и $\bar\partial_\alpha y_i = y_{\bar x_\alpha, i}$ – правая и левая разностные производные, $f_i = f(x_i)$, $\mu_i = \mu(x_i)$, $\Omega_h = \Omega \cap \bar\Omega_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \bar\Omega_h$,

$$\Gamma_{h0} = \Gamma_h \setminus \{(0,0), (0,l_2), (l_1,0), (l_1,l_2)\},$$

а $\nu = 1$ на сторонах $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ прямоугольника и $\nu = 2$ на сторонах

Обозначим $z_i = u_i - y_i$, где $u_i = u(x_i)$ – значение решения задачи (I) и y_i – его приближение, найденное как решение задачи (2). Из (I) и (2) вытекает, что погрешность z_i является решением задачи

$$L_h z_i = \psi_i,\ x_i \in \Omega_h,\ z_i = 0,\ x_i \in \Gamma_h,\ \partial_\nu\bar\partial_\nu z_i = \varphi_i,\ x_i \in \Gamma_{h0}, \qquad (3)$$

где $\psi_i = L_h u_i - f_i$, $\varphi_i = \partial_\nu\bar\partial_\nu u_i - \mu_i$

Введем пространство $H_+(\Omega_h)$ сеточных функций z_i, определенных на сетке $\bar{\Omega}_h \setminus \{(-h_1,-h_2),(-h_1,(N_2+1)h_2),((N_1+1)h_1,-h_2),$ $((N_1+1)h_1,(N_2+1)h_2)\}$ и удовлетворяющих условию $z_i=0$ при $i_1=0,\ i_1=N_1,\ i_2=0,\ i_2=N_2$. В $H_+(\Omega_h)$ пользуемся нормой пространства Соболева

$$\|z\|_4=\Big\{\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big[(\partial_1^2\bar{\partial}_1^2 z_i)^2+(\partial_1\bar{\partial}_1\partial_2\bar{\partial}_2 z_i)^2+(\partial_2^2\bar{\partial}_2^2 z_i)^2\Big]h_1h_2+$$

$$+\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=0}^{N_2-1}\Big[(\partial_1^2\bar{\partial}_1\partial_2 z_i)^2+(\partial_1\partial_2^2\bar{\partial}_2 z_i)^2\Big]h_1h_2+\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big[(\partial_1^2\bar{\partial}_1 z_i)^2+$$

$$+(\partial_1\partial_2\bar{\partial}_2 z_i)^2\Big]h_1h_2+\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=0}^{N_2-1}\Big[(\partial_2^2\bar{\partial}_2 z_i)^2+(\partial_1\bar{\partial}_1\partial_2 z_i)^2\Big]h_1h_2+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big[(\partial_1\bar{\partial}_1 z_i)^2+(\partial_2\bar{\partial}_2 z_i)^2\Big]h_1h_2+\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=0}^{N_2-1}(\partial_1\partial_2 z_i)^2h_1h_2\Big\}^{1/2}.$$

Для решения задачи (3) выводится априорная оценка, из которой следует, что, если решение задачи (I) $u\in C^6(\bar{\Omega})$, то имеем место оценки погрешности

$$\|z\|_4=\|u-y\|_4\le M(h_1^2+h_2^2),$$

где M – постоянная.

Литература

I. Лазаров Р.Д., О сходимости разностных решений к обобщенным решениям в прямоугольнике. Дифф. ур., I98I, I7, № 7, I295–I303.

2. Ляшко А.Д., Разностные схемы для задачи об изгибе тонких пластин. Сб. "Численные методы мех. сплошн. среды". Новосибирск, I973, 4, № I, 7I–83.

3. Самарский А.А., Андреев В.Б., Разностные методы для эллиптических уравнений. Москва, I976.

4. О решении квазилинейной краевой задачи четвертого порядка методом конечных разностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I970, 253, 258–275.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЫ

Т. Тобиас

Рассмотрим процесс распространения одномерной волны деформации в наследственной среде. Пусть $u(x,t)$ – перемещение, c – скорость волны, $\varphi_0(t)$ – начальная деформация и $K(t)$ – функция ядра, характеризующая физические свойства среды. Будем считать, что $K(t)$ – непрерывная, монотонно убывающая и интегрируемая на интервале $[0,\infty)$ функция. Известно, что тогда $u(x,t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \int_0^t K(t-\tau)\, u_{tt}\, d\tau = 0, \tag{I}$$

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=\varphi_0(t).$$

Пусть имеется возможность измерить деформацию $u_x(x,t)$ в точке $x=\ell$, т.е. пусть задана

$$u_x(\ell,t)=\varphi_\ell(t),\quad 0<t<\infty. \tag{2}$$

Отметим, что $u_x(\ell,t)=0$ при $t\in[0,\ell c^{-1}]$,

Обратная задача определения ядра $K(t)$ состоит в следующем: задано измерение $\varphi_\ell(t)$, требуется по функции $\varphi_\ell(t)$ определить ядро $K(t)$.

Применяем к уравнению (I) преобразование Лапласа. Обозначая $\bar K(s)=\mathcal{L}K(t)$, $\bar\varphi_0(s)=\mathcal{L}\varphi_0(t)$ и $\bar\varphi_\ell(s)=\mathcal{L}\varphi_\ell(t)$, получим для преобразования Лапласа неизвестного ядра $K(t)$ следующее выражение:

$$\bar K(s) = c^2\ell^{-2}s^{-2}\,[\ln \bar\varphi_0(s)/\bar\varphi_\ell(s)]^2 - 1. \tag{3}$$

Если измерение $\varphi_\ell(t)$ таково, что выражение (3) определяет функцию $\bar K(s)$, являющую преобразованием Лапласа, то $\varphi_\ell(t)$ определяет однозначно ядро $K(t)=\mathcal{L}^{-1}\bar K(s)$.

Рассмотрим другой подход к задаче определения ядра $K(t)$, основанный на методах оптимизации. Пусть $K(t)=K(t,\alpha)$, где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ неизвестный параметр, принадлежащий ограниченному замкнутому выпуклому множеству $M\subset R^n$. Допустим, что $K(t,\alpha)$ и $u=u(x,t;\alpha)$ вместе со своими производными первого и второго порядка непрерывны по α.

Пусть
$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_0^T [u_x(l,t;\alpha) - \varphi_l(t)]^2 dt. \tag{4}$$
Требуется определить $\alpha = \bar{\alpha}$ **так, чтобы** $\mathcal{J}(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in M} \mathcal{J}(\alpha)$.

Поставленную задачу можно решить, например, методом проекции градиента. Выпишем выражение для градиента функции $\mathcal{J}(\alpha)$ **через решение сопряженного к (I) уравнения.**

Пусть $p = p(x,t;\alpha)$ **– решение уравнения**
$$p_{tt} - c^2 p_{xx} + \int_t^T K(\tau - t;\alpha) p_{tt}\, d\tau = \tag{5}$$
$$= -2[u_x(l,t;\alpha) - \varphi_l(t)]\,\delta'(x-l),$$
$$p(x,T;\alpha) = 0, \quad p_t(x,T;\alpha) = 0, \quad p_x(0,t;\alpha) = 0,$$
где δ **– дельтафункция, т.е.** $\int_0^\infty f(x)\,\delta'(x-l)\,dx = -f'(l)$.

Тогда
$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha_i} = -\int_0^\infty \int_0^T p(x,t;\alpha) \int_0^t \frac{\partial K(t-\tau;\alpha)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial^2 u(x,\tau;\alpha)}{\partial \tau^2}\, d\tau\, dt\, dx. \tag{6}$$

Отметим еще один подход к решению поставленной обратной задачи. А, именно, сперва можно дискретизировать исходную задачу методом Галеркина, а затем, как и выше, рассмотреть задачу определения ядра в виде задачи минимизации с ограничениями. Упрощение, получаемое в результате дискретизации, состоит в том, что вместо двух интегро-дифференциальных уравнений в частных производных на каждом шаге нужно решать две системы обыкновенных дифференциальных уравнений, также содержащих интегральные члены. Метод особенно упрощается в том важном частном случае, когда $K(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e^{-\beta_j t}$, **где** α_j **и** β_j **– неизвестные параметры. Тогда задача сводится к задаче минимизации, в которой ограничения заданы в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для таких задач существуют хорошо разработанные численные методы.**

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. Финер

Используя приведенную в работах [1,2] методику, изучается сходимость разностных схем для нелинейного параболического уравнения в двух- и трехмерном случае. При этом существенную роль играет неравенство коэрцитивности для нелинейного разностного эллиптического оператора второго порядка, входящего в рассматриваемое уравнение.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u = u(x,t) \in H_0^2(\Omega), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $f \in L^2(\Omega)$, $A(t)u \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, $m=2$ или 3,

$a_{ij}(x,t,u) = a_{ji}(x,t,u)$, $H_0^2(\Omega) = \{v, v \in H^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$,

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ - пространство Соболева;

$\Omega = \{0 < x_i < 1, i=1,\dots,m\}$, $\partial\Omega$ - граница, $\bar{\Omega}$ - замыкание.

Предположим, что:

1. для каждого $a>0$ существует такое число $\varkappa_a > 0$, что при всех $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\xi_i \in R$, $u \in [-a,a]$

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t,u)\xi_i\xi_j \geqslant \varkappa_a \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$$

(условие локальной эллиптичности оператора $A(t)$);

2. функции $a_{ij}(x,t,u)$ дифференцируемы и

$$|a_{ij}(x,t,u)|, \left|\frac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial x_l}\right|, \left|\frac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial^2 a_{ij}(x,t,u)}{\partial x_l \partial u}\right|, \left|\frac{\partial^2 a_{ij}(x,t,u)}{\partial u^2}\right| \leq d_a,$$

$\forall x \in \Omega$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall u \in [-a,a]$, $l=1,\dots,m$.

Построим на области $\bar{\Omega}$ равномерную сетку Ω_h с шагом $h = 1/n$, $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h$, где $\partial\Omega_h$ - узлы сетки, лежащие на $\partial\Omega$. Пусть $\omega_\tau = (\tau, 2\tau, \dots, T)$ сетка шага $\tau = T/N$ на $(0,T]$. Задачу (1), (2), (3) аппроксимируем неявной разностной схемой

$$y_{\bar{t}} + A_{h\tau}(t)y = f_{h\tau}, \quad x \in \Omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{4}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{5}$$

$$y = y(t) = y(x,t) \in H_0^2(\Omega_h), \quad t = 0,\tau,\dots,T, \tag{6}$$

где $f_{h\tau} \in L_2(\Omega_h)$,

$$A_{h\tau}(t)y \equiv -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}[\partial_i(a_{ij}(x,t,y)\bar\partial_j y)+\bar\partial_i(a_{ij}(x,t,y)\partial_j y)],$$

$H_0^2(\Omega_h)=\{v,\ v\in H^2(\Omega_h),\ v|_{\partial\Omega_h}=0\}$, $H^k(\Omega_h)=W^{k,2}(\Omega_h)$ – пространство Соболева сеточных функций $v:\bar\Omega_h\to R$ с нормой

$$\|v\|_k=\Big(\sum_{|\alpha|\le k}h^m\sum_{x\in\Omega_h^\alpha}|\partial^\alpha v(x)|^2\Big)^{1/2},\ k\geq 0,$$

где Ω_h^α такая максимальная подсетка сетки Ω_h что $\partial^\alpha v=$ $=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m}v$ не использует значения v вне $\bar\Omega_h$.

<u>Теорема I</u>. Пусть выполнены условия I, 2. Тогда для любых $y_1(t), y_2(t)\in H_0^2(\Omega_h)$, таких что $\|y^1(t)\|_2, \|y^2(t)\|_2\le a$ $(\forall t\in\omega_\tau)$ при достаточно малых τ (при $2\tau c_a<1$) имеет место неравенство

$$\max_{t\in\omega_\tau}\|y^1(t)-y^2(t)\|_1^2\le e^{2c_a(1+\varepsilon_1)T}\Big[\|y^1(0)-y^2(0)\|_1^2+$$
$$\frac{\tau}{\varkappa_a}\sum_{t=\tau}^{T}\|y_{\bar t}^1+A_{h\tau}(t)y^1-y_{\bar t}^2-A_{h\tau}(t)y^2\|_0^2\Big],$$

где $c_a=c\cdot d_a^{\frac{2}{2-k'}}\cdot a^{\frac{4}{2-k'}}\cdot\varkappa_a^{\frac{k'}{k'-2}}$, $k'=3/2$ при $m=2$, $k'=7/4$ при $m=3$, $c>0$.

<u>Доказательство</u>. Введем обозначения $z=y^1-y^2$, $J_h=-\sum_{i=1}^{m}\partial_i\bar\partial_i$, $\check z=z(t-\tau)$. Оценим скалярное произведение

$$2\tau(z_{\bar t}+A_{h\tau}y^1-A_{h\tau}y^2, J_h z)=2\tau(z_{\bar t},J_h z)+2\tau(A_{h\tau}y^1-A_{h\tau}y^2,J_h z)$$

Пользуясь равенством $z=0{,}5(z+\check z)+0{,}5\tau z_{\bar t}$ будем иметь

$$2\tau(z_{\bar t}+A_{h\tau}y^1-A_{h\tau}y^2,J_h z)=(z,J_h z)-(\check z,J_h\check z)+$$
$$+\tau^2(z_{\bar t},J_h z_{\bar t})+2\tau(A_{h\tau}y^1-A_{h\tau}y^2,J_h z).$$

При выполнении условий I, 2, имеет место неравенство коэрцитивности (см. [5]):

$$(A_{h\tau}y^1-A_{h\tau}y^2,J_h z)\geq\frac{\varkappa_a}{2}\|y^1-y^2\|_2^2-c_a\|y^1-y^2\|_1^2$$

для любых $y^1,y^2\in H_0^2(\Omega_h)$, $\|y^1\|_2, \|y^2\|_2\le a$.

Значит,

$$2\tau(z_{\bar t}+A_{h\tau}y^1-A_{h\tau}y^2,J_h z)\geq\|z\|_1^2-\|\check z\|_1^2+$$
$$+\tau^2\|z_{\bar t}\|_1^2+\varkappa_a\tau\|z\|_2^2-2c_a\tau\|z\|_1^2.$$

Оценим левую часть последнего неравенства, применяя неравенство Коши и ε-неравенство:

$$(1-2\tau c_a)\|z\|_1^2+\tau^2\|z_{\bar t}\|_1^2+\tau(\varkappa_a-\epsilon)\|z\|_2^2\le$$
$$\le\|\check z\|_1^2+\frac{\tau}{\varepsilon}\|z_{\bar t}+A_{h\tau}y^1-A_{h\tau}y^2\|_0^2\,. \qquad (7)$$

Выбирая $\varepsilon = \varkappa_a$, получим

$$(1-2\tau c_a)\|z\|_1^2 \le \|\check{z}\|_1^2 + \frac{\tau}{\varkappa_a}\|z_{\bar t} + A_{h\tau}y^1 - A_{h\tau}y^2\|_0^2 ,$$

откуда

$$\|z\|_1^2 \le \frac{1}{1-2\tau c_a}\left[\|\check{z}\|_1^2 + \frac{\tau}{\varkappa_a}\|z_{\bar t} + A_{h\tau}y^1 - A_{h\tau}y^2\|_0^2\right].$$

Так как $2\tau c_a < 1$, то найдется такая $\varepsilon_1 > 0$, что

$$\frac{1}{1-2\tau c_a} = 1 + 2\tau c_a + (2\tau c_a)^2 + \cdots < 1 + 2\tau c_a(1+\varepsilon_1) ,$$

и значит

$$\|z\|_1^2 \le [1 + 2\tau c_a(1+\varepsilon_1)]\left(\|\check{z}\|_1^2 + \frac{\tau}{\varkappa_a}\|z_{\bar t} + A_{h\tau}y^1 - A_{h\tau}y^2\|_0^2\right).$$

Используя последнее неравенство неоднократно, получим

$$\|z\|_1^2 \le e^{2c_a(1+\varepsilon_1)T}\left[\|z(0)\|_1^2 + \frac{\tau}{\varkappa_a}\sum_{t=\tau}^{T}\|z_{\bar t} + A_{h\tau}y^1 - A_{h\tau}y^2\|_0^2\right],$$

откуда следует утверждение теоремы.

Отметим, что если в соотношений (7) выбрать $\varepsilon = \varkappa_a/2$, то можно вывести следующее неравенство

$$\max_{t\in\omega_\tau}\|y^1(t) - y^2(t)\|_1^2 + \tau\sum_{t=\tau}^{T}\|y^1(t) - y^2(t)\|_2^2 \le$$
$$\le L_a\left[\|z(0)\|_1^2 + \tau\sum_{t=\tau}^{T}\|z_{\bar t} + A_{h\tau}y^1 - A_{h\tau}y^2\|_0^2\right]$$

где L_a – положительная постоянная, зависящая от a.

Замечание I. Допустим, что решение u^* задачи (I), (2), (3) и решение y^* задачи (4), (5), (6) (с $y_0 = u_0$) удовлетворяют условиям $\|u^*\|_2, \|y^*\|_2 \le a$, причем u^* достаточно гладкое. Тогда из неравенства (8) следует оценка

$$\max_{t\in\omega_\tau}\|y^*(t) - u^*(t)\|_1 + \tau\sum_{t=\tau}^{T}\|y^*(t) - u^*(t)\|_2 = O(h^2+\tau).$$

Замечание 2. Проблема сходимости в метрике соболевского пространства H^1 (при ограничении на шаги h и τ) изучались и в [3], где рассматривается разностная схема (построенная на базе сумматорного тождества) для многомерного квазилинейного параболического уравнения.

Для явной разностной схемы

$$y_t + A_{h\tau}y = f_{h\tau} , \quad x\in\Omega_h,\ t = 0,\tau,\dots,T-\tau ,$$
$$y(x,0) = y_0(x), \quad x\in\Omega_h ,$$
$$y = y(t) = y(x,t) \in H_0^2(\Omega_h),\ t = 0,\tau,\dots,T ,$$

аппроксимирующей задачу (I), (2), (3) имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия I, 2. Тогда для любых $y^1(t), y^2(t) \in H_0^2(\Omega_h)$, таких, что $\|y^1(t)\|, \|y^2(t)\| \le a$ ($t = 0,\tau,\dots,T$) при ограничении вида $\varepsilon_h \ge \tau(\varepsilon + M_a^2/(\varkappa_a - \varepsilon))$, $M_a = c\cdot a\cdot d_a$, $\varepsilon < \varkappa_a$ имеет место неравенство

$$\max_{t=0,\tau,\dots,T-\tau} \|y^1(t)-y^2(t)\|_1^2 \le e^{2c_a T}\Big[\|y^1(0)-y^2(0)\|_1^2 + \\ + \frac{2\tau}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau}\|y_t^1+A_{h\tau}y^1-y_t^2-A_{h\tau}y^2\|_0^2\Big],$$

где $c_a = c\,d_a^{\frac{2}{2-\kappa'}}\cdot a^{\frac{4}{2-\kappa'}}\cdot \varkappa_a^{\frac{\kappa'}{\kappa'-2}}$, $\kappa'=\frac{3}{2}$ при $m=2$, $\kappa'=\frac{7}{4}$ при $m=3$, $c>0$.

Отметим, что при выполнении условий теоремы 2 имеет место и следующее неравенство

$$\max_{t=0,\tau,\dots,T-\tau} \|y^1(t)-y^2(t)\|_1^2 + \tau\sum_{t=0}^{T-\tau}\|y^1(t)-y^2(t)\|_2^2 \le \\ \le L_a'\Big[\|y^1(0)-y^2(0)\|_1^2 + \tau\sum_{t=0}^{T-\tau}\|y_t^1+A_{h\tau}y^1-y_t^2-A_{h\tau}y^2\|_0^2\Big],$$

где L_a' – положительная постоянная, зависящая от a. Отсюда уже следует аналогичный результат, полученный в замечании I.

Литература

I. Лапин А.В., О корректности нелинейной двухслойной разностной схемы с весами. Исследования по прикладной математике. Вып. I. Изд. Казанского ун-та, 1973, 82-89.

2. Лапин А.В., О корректности в сильной норме разностных схем для квазилинейных параболических уравнений. I. Изв. вузов. Математика, 1974, № 4, 42-52.

4. Ляшко А.Д., Федотов Е.М., О корректности нелинейных двухслойных операторно разностных схем. Дифференциальные уравнения. 1981, т.17, № 7, 1304-1316.

5. Фишер М., О сходимости разностного метода в сильной норме для нелинейной задачи эллиптического типа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 633, 55-66.

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

У. Хямарик

Пусть H и F гильбертовы пространства. Рассмотрим уравнение

$$Au = f \qquad (\mathrm{I})$$

с вполне непрерывным оператором $A \in \mathcal{L}(H, F)$; $\mathcal{N}(A)$ в общем нетривиально. Пусть $f \in \mathcal{R}(A)$, но вместо f и A известны приближения $f_\Delta \in F$ и $A_\Delta \in \mathcal{L}(H,F)$ такие, что $\|f_\Delta - f\| \le \Delta$, $\|A_\Delta - A\| \le \Delta$.

Рассмотрим двухпараметрическую регуляризацию уравнения (I). Первый этап регуляризации осуществляется проекционным методом: выбором n-мерных подпространств $H_n \subset H$ и $F_n \subset F$ с соответствующими ортопроекторами P_n и Q_n получается спроектированное уравнение $A_n u_n = Q_n f_\Delta$, $A_n = Q_n A_\Delta P_n$ с решением $u_n \in H_n$. Параметром регуляризации является $h = \|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n\|^{-1}$. Отметим, что $h \to 0 \iff n \to \infty$. Введем ортопроекторы $P: H \to \overline{R(A^*)}$, $Q: F \to \overline{R(A)}$ и обозначения $p_1 = \max\{p \mid \|(I - P_n)(A^*A)^{p/2}\| \le C h^p\}$,

$$p_2 = \max\{p \mid \|(I - Q_n)(AA^*)^{p/2}\| \le C h^p\}.$$

На втором этапе регуляризации используем однопараметрическое семейство функции $\{g_\alpha\}$, $\alpha \ge 0$ с условиями

$$\sup_{0 \le \lambda \le \|B_n\|} |g_\alpha(\lambda)| \le C\alpha^{-1} \ (\alpha > 0), \qquad \sup_{0 \le \lambda \le \|B_n\|} \lambda^p |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le C\alpha^p \ (0 \le p \le p_0)$$

и вычисляем

$$u_{n,\alpha} = (I - g_\alpha(B_n)\Pi_n A_\Delta u_0 + g_\alpha(B_n)\Pi_n f_\Delta. \qquad (2)$$

Здесь u_0 начальное приближение к u_n (можно положить $u_0 = 0$); при $H = F$, $A = A^* \ge 0$ выбираем $B_n = A_n$, $\Pi_n = P_n$; в случае несамосопряжённой задачи (I) $B_n = A_n^* A_n$, $\Pi_n = P_n A_\Delta^* Q_n$. Обозначим через u_* ближайшее к u_0 решение уравнения (I).

<u>Теорема I</u>. Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\Delta = A_\Delta^* \ge 0$ и уравнение (I) проектируется методом Галеркина $(F_n = H_n)$, причем предполагаем, что $H_n \cap \mathcal{N}(A) = 0$, $P_n \to P$, $p_1 \ge 1$.

Если параметры α и $h = \inf\{(Au_n, u_n)/\|u_n\|^2,\ u_n \in H_n\}$ выбрать так, что $h + \alpha \to 0$, $(h+\alpha)^{-1}\Delta \to 0$ при $\Delta \to 0$, то $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \to 0$ при $\Delta \to 0$.

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = (A^*A)^{p/2} w, \quad \|w\| \le \varrho, \quad p > 0 \quad , \tag{3}$$

то справедлива оптимальная по порядку на классе (3) оценка $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \le C\,\Delta^{p/(p+1)}$, если

1) при $p \le p_0$, $p \le p_1$ выбрать $h + \alpha \asymp \Delta^{1/(p+1)}$,

2) при $p_0 < p \le p_1$ выбрать $h \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p/p_0(p+1)})$,

3) при $p_1 < p \le p_0$ выбрать $\alpha \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $h = O(\Delta^{p/p_1(p+1)})$.

В случае $p_0 \le p_1 \le p$ при выборе $h \asymp \Delta^{1/(p_1+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p_1/p_0(p_1+1)})$ справедлива оценка $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \le C\,\Delta^{p_1/(p_1+1)}$.

В случае $p_1 \le p_0 \le p$ при выборе $\alpha \asymp \Delta^{1/(p_0+1)}$, $h = O(\Delta^{p_0/p_1(p_0+1)})$ справедлива оценка $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \le C\,\Delta^{p_0/(p_0+1)}$.

Теорема 2. Пусть уравнение (I) проектируется методом наименьших квадратов ($F_n = A_\Delta H_n$), причем предполагается, что $H_n \cap \mathcal{N}(A) = 0$, $P_n \to P$, $p_1 \ge 2$. Если выбрать α и $h = \inf\{\|Au_n\|/\|u_n\|,\ u_n \in H_n\}$ так, что $\alpha + h \to 0$, $\Delta^2(\alpha + h^2)^{-1} \to 0$ при $\Delta \to 0$, то $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \to 0$ при $\Delta \to 0$.

При начальной погрешности (3) справедлива оценка $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \le C\,\Delta^{p/(p+1)}$, если

1) при $p \le 2p_0$, $p \le p_1$ выбрать $h^2 + \alpha \asymp \Delta^{2/(p+1)}$,

2) при $2p_0 < p \le p_1$ выбрать $h \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p/p_0(p+1)})$,

3) при $p_1 < p \le 2p_0$ выбрать $\alpha \asymp \Delta^{2/(p+1)}$, $h = O(\Delta^{p/p_1(p+1)})$.

В случае $2p_0 \le p_1 \le p$ при выборе $h \asymp \Delta^{1/(p_1+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p_1/p_0(p_1+1)})$ справедлива оценка $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \le C\,\Delta^{p_1/(p_1+1)}$.

В случае $p_1 \le 2p_0 \le p$ при выборе $\alpha \asymp \Delta^{2/(p_0+1)}$, $h = O(\Delta^{p_0/p_1(p_0+1)})$ справедлива оценка $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \le C\,\Delta^{p_0/(p_0+1)}$.

Теорема 3. Пусть уравнение (I) проектируется методом наименьшей ошибки ($H_n = A_\Delta^* F_n$), причем предполагается, что $F_n \cap \mathcal{N}(A^*) = 0$, $Q_n \to Q$.

Если параметры α и $h = \inf\{\|A^* f_n\|/\|f_n\|,\ f_n \in F_n\}$ выбрать так, что $\alpha + h \to 0$, $\Delta^2(\alpha + h^2)^{-1} \to 0$ при $\Delta \to 0$, то $\|u_{n,\alpha} - u_*\| \to 0$ при $\Delta \to 0$.

При начальной погрешности (3) справедлива оценка

$\| u_{n,\alpha} - u_* \| \leq C \, \Delta^{p/(p+1)}$, если

I) при $p \leq 2p_0$, $p \leq p_2+1$, $p_2 \geq 1$ выбрать $h^2+\alpha \asymp \Delta^{2/(p+1)}$,

2) при $2p_0 \leq p \leq p_2+1$, $p_2 \geq 1$ выбрать $h \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p/p_0(p+1)})$,

3) при $p_2+1 \leq p \leq 2p_0$ выбрать $\alpha \asymp \Delta^{2/(p+1)}$, $h = O(\Delta^{p/(p+1)p'})$, $p' = \min(2p_2, p_2+1, p_2 p)$,

4) при $p \leq 2p_0$, $p \leq p_2+1 \leq 2$ выбрать $\alpha \asymp \Delta^{2/(p+1)}$, $h = O(\Delta^{1/p_2(p+1)})$.

Частными случаями двухпараметрической регуляризации являются регуляризация проекционными методами $(\alpha = 0)$ или вычисление приближении по (2), где проекторы P_n и Q_n опущены $(h = 0)$.

Отметим, что класс методов (2) включает итерационные методы $(p_0 = \infty)$, метод Тихонова $(p_0 = 1)$, в случае $H = F$, $A = A^* > 0$ метод Лаврентьева $(p_0 = 1)$ и прочие.

Методы Галеркина и Лаврентьева коммутируют: независимо от последовательности применения их найдём приближения $u_{n,\alpha}$ из уравнений $(\alpha I + P_n A_\Delta P_n) u_{n,\alpha} = P_n f_\Delta$. Применение метода наименьших квадратов и метода Тихонова эквивалентно применением метода Тихонова и Галеркина, приближения $u_{n,\alpha}$ находятся из уравнений $(\alpha I + P_n A_\Delta^* A_\Delta P_n) u_{n,\alpha} = P_n A_\Delta^* f_\Delta$. Метод наименьшей ошибки – Тихонова эквивалентно нахождением приближении $f_{n,\alpha}$ из уравнений $(\alpha I + Q_n A_\Delta A_\Delta^* Q_n) f_{n,\alpha} = Q_n f_\Delta$, а затем $u_{n,\alpha} = A_\Delta^* f_{n,\alpha}$. Если использовать базис H_n или F_n, матрица Грама которой имеет ограниченное число обусловленности, то число обусловленности в первом из приведенных трех уравнений возрастает не быстрее чем $(\alpha + h)^{-1}$, в двух последних уравнений не быстрее чем $(\alpha + h^2)^{-1}$.

В заключение приведем некоторые результаты об уравнении Вольтерра $\int_0^t \mathcal{K}(t,s) u(s) ds = f(t)$, которое трактуем как операторное уравнение $Au = f$ с $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$. Пусть функции $\mathcal{K}(t,s)$ и $f(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\mathcal{K}(t,t) > 0$. Если в методе наименьших квадратов $H_n = S_n^\kappa$, где S_n^κ – подпространство сплайнов порядка $\kappa - 1$ с узлами $t_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$, то $h \asymp 1/n$ и $p_1 = \kappa$. Если в методе наименьшей ошибки $F_n = S_n^\kappa$, то $h \asymp 1/n$ и $p_2 = \kappa$.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ СХЕМА С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Б. Шифрин

I. Постановка задачи и проекционная схема. В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset R^2$ ищутся функции $u = (u_1; u_2)$ (скорость жидкости) и p (давление) такие, что*

$$-\nu \Delta u + u_k u_{x_k} + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad (x \in \Omega); \tag{I}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Обобщенная постановка задачи (I) - (2) такова ([2]):

$$u \in J, \quad a_0(u,w) + b(u,u,w) = (f,w) \quad \forall w \in J \subset \mathcal{H}. \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{H} = \{v \in (W_2^1(\Omega))^2 : v|_{\partial\Omega} = 0\}$, $J = \{w \in \mathcal{H} : \operatorname{div} w = 0\}$,

$$a_0(u,w) = \nu [u,w]_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\, dx, \quad b(u,v,w) = \int_\Omega u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} w_i\, dx,$$

$(f,w) = \int_\Omega f_i w_i\, dx \quad (f = (f_1; f_2) \in \mathcal{H}^*)$. Трилинейная форма $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ ограничена и обладает свойствами

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v) - (\operatorname{div} u, v_i w_i) \quad (u,v,w \in \mathcal{H}), \tag{4}$$

$$b(u,u,u) = -\tfrac{1}{2} (\operatorname{div} u, u_i u_i). \tag{4'}$$

Пусть $\alpha \in [0,1]$. Положим

$$k^\alpha(u,v,w) := \alpha\, b(u,v,w) - (1-\alpha)\, b(u,w,v). \tag{5}$$

Ясно, что $k^\alpha(u,v,w) = b(u,v,w) \quad \forall u \in J, \ \forall v,w \in \mathcal{H}$.

В работе мы анализируем следующую проекционную схему:

$$u_h \in J_h, \quad a_0(u_h,w_h) + k^\alpha(u_h,u_h,w_h) = (f,w_h) \quad \forall w_h \in J_h \subset \mathcal{H}. \tag{3$_h$}$$

Схема считается нестандартной ([4]): вообще говоря, $J_h \not\subset J$.

---

*) Ниже договоримся о суммировании по повторяющимся индексам.

2. Некоторые свойства схемы (3). I) Схема имеет в окрестности нуля единственное решение, коль скоро

$$N_{6,\mathcal{J}_h}\nu^{-2}\|f\|_{\mathcal{J}_h^*}\le\frac{1}{4}\ ,\quad N_{6,\mathcal{J}_h}:=\sup_{u_h,v_h,w_h\in\mathcal{J}_h\setminus\{0\}}\frac{|b(u_h,v_h,w_h)|}{\|u_h\|_{\mathcal{H}}\|v_h\|_{\mathcal{H}}\|w_h\|_{\mathcal{H}}}\ .$$

К указанному решению сходятся итерации стоксовского и озиновского типа (подробнее см. в [3]).

2) Известно, что исходная задача (3) разрешима при $\forall f\in\mathcal{J}^*$ благодаря свойству $b(u,u,u)\equiv 0\ \forall u\in\mathcal{J}$. Это свойство при дискретизации не сохраняется: $\tilde{b}(u_h,u_h,u_h)\neq 0$ при $u_h\in\mathcal{J}_h\not\subset\mathcal{J}$ (кроме случая $\alpha=1/2$). Однако результат о разрешимости при $\forall f\in\mathcal{J}_h^*$ схемы (3_h) с $h\le h_0(f)$ все же имеет место, коль скоро функции из $\mathcal{J}_h$ "соленоидальны в среднем". Мы показываем это в п.3.

3) Пространства $\mathcal{J}_h$ того же типа удается строить так, что удовлетворяется условие внешней аппроксимации [4]:

$$P_{\mathcal{J}_h}w\xrightarrow[h\to 0]{\mathcal{H}}P_{\mathcal{J}}w\quad\forall w\in\mathcal{H}\quad(P_{\mathcal{J}},P_{\mathcal{J}_h}\text{ – ортопроекторы из }\mathcal{H}\text{ на }\mathcal{J},\mathcal{J}_h).$$

В этой ситуации схема (3_h) позволяет аппроксимировать (в $\mathcal{H}$) несингулярные решения задачи (3). Это следует из [4]. Можно указать и оценки точности схемы. Если в области $G\subset\mathcal{H}$ и в ее ε-окрестности G_ε содержится одно и то же число $l<\infty$ решений задачи (3), причем все они несингулярны, то столько же решений имеет в G схема (3_h) с $h<\bar{h}$.

3. Разрешимость схемы при условии соленоидальности в среднем. Пусть задано регулярное семейство $\sigma=\sigma_h$ разбиений области Ω на конечные элементы K ($h=\max_{K\in\sigma}\operatorname{diam}K$, $h\in]0,h_{max}]$). Введем подпространства $\mathcal{J}_h\subset\mathcal{H}$, $\dim\mathcal{J}_h<\infty$ так, чтобы для всех $v_h\in\mathcal{J}_h$ выполнялось условие (см., например, [1,2]):

$$\int_K \operatorname{div}v_h\,dx=0\qquad\forall K\in\sigma\quad\Big(\Omega=\bigcup_{K\in\sigma}K\Big)\qquad(6)$$

Лемма. Для любого $\varepsilon>0$, любых $\varphi,\psi\in W_2^1(\Omega)$ справедлива оценка (ниже $(\bar\varphi)^h,(\bar\psi)^h$ – кусочно-постоянные усреднения по $K\in\sigma$):

$$\|\varphi\psi-(\bar\varphi)^h(\bar\psi)^h\|_{L_2(\Omega)}\le c\,h^{1-\varepsilon}\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}\cdot\|\psi\|_{W_2^1(\Omega)}\quad(c=c(\varepsilon))\ .\qquad(7)$$

<u>Следствие.</u> Для любого $\varepsilon>0$ найдется $\tilde c=\tilde c(\varepsilon)$ такое, что

$$|(\mathrm{div}\,u_h, v_i w_i)|\le \tilde c\, h^{1-\varepsilon}\|u_h\|_{\mathcal H}\|v\|_{\mathcal H}\|w\|_{\mathcal H}\quad \forall u_h\in J_h,\ \forall v,w\in\mathcal H \qquad (8)$$

Действительно, в силу (6) для $q_h:=(\bar v_i)^h\cdot(\bar w_i)^h$ имеем $(\mathrm{div}\,u_h, q_h)=0$ $\left(q_h|_K=const\ \ \forall K\in\mathcal T\right)$, а потому

$$|(\mathrm{div}\,u_h, v_iw_i)|=|(\mathrm{div}\,u_h, v_iw_i-q_h)|\le\|\mathrm{div}\,u_h\|_{L_2(\Omega)}\|v_iw_i-(\bar v_i)^h(\bar w_i)^h\|_{L_2(\Omega)}.$$

Далее применяем (7) и учитываем, что $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}\sim\|\cdot\|_{\mathcal H}$ в $\mathcal H$, $\|\mathrm{div}\,u_h\|_{L_2(\Omega)}\le\sqrt2\,\|u_h\|_{\mathcal H}$.

<u>Теорема.</u> Пусть выполнено условие

$$\lambda:=\nu^2-4\tilde c\,|\alpha-\tfrac12|\,h^{1-\varepsilon}\|f\|_{J_h^*}\ge 0 \quad (\tilde c=\tilde c(\varepsilon) \text{ из } (8))$$

Тогда задача (3_h) имеет по крайней мере одно решение u_h^*, $\|u_h^*\|_{\mathcal H}\le\rho:=(2\|f\|_{J_h^*})/(\nu+\sqrt\lambda)$.

Доказательство теоремы на основе известного следствия теоремы Брауэра (см. [2], стр. 134) сводится к проверке неравенства $a_0(u_h,u_h)-k^\alpha(u_h,u_h,u_h)-(f,u_h)\ge 0\quad\forall u_h:\|u_h\|_{\mathcal H}=1$. Решающую роль при этом играет оценка (8).

Литература

1. Ривкинд В.Я., Шифрин Б.Ф., Применение метода конечных элементов в некоторых задачах для уравнений Навье-Стокса. Учен.зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 38-51.
2. Темам Р., Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Москва, 1981.
3. Шифрин Б.Ф., Метод итераций и условия разрешимости для уравнений типа Навье-Стокса. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат., 1982, т. 31, №3, 249-259.
4. Шифрин Б.Ф., О внешней аппроксимации одного класса нелинейных задач. В сб.: Численное решение краевых задач и интегральных уравнений. Тарту, 1981, 39-41.

ОБ ОДНОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ

Я. Янно

Рассматривается существование и единственность решения смешанной задачи

$$\left.\begin{aligned}&v_{tt}(x,t)+\int_0^t \mathcal{K}(t-s)\,v_{tt}(x,s)\,ds=a^2 v_{xx}(x,t)+G(x,t),\\ &\qquad 0\le x\le \ell,\ 0\le t<\infty,\\ &v(x,0)=v_0(x),\ v_t(x,0)=v_1(x),\ 0\le x\le \ell,\\ &v(0,t)=v(\ell,t)=0,\ 0\le t<\infty.\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{I})$$

Здесь $G(x,t)$, $\mathcal{K}(t)$, $v_0(x)$, $v_1(x)$ – заданные функции, $v(x,t)$ – искомая.

Если предполагать, что существуют производные $v_0^{IV}(x)$, $v_1''(x)$, $G_{xx}(x,0)$, то с помощью замены переменных можно перейти к более простой задаче

$$\left.\begin{aligned}&u_{tt}(x,t)+\int_0^t \mathcal{K}(t-s)\,u_{tt}(x,s)\,ds=a^2 u_{xx}(x,t)+F(x,t),\\ &u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u(\ell,t)=0.\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

При этом функция $F(x,t)$ удовлетворяет условию $F(x,0)=0$

С применением преобразования Лапласа для задачи (2), решением краевой задачи в пространстве изображений и затем применением обратного преобразования Лапласа получается формальный вид решения задачи (2). Исследование свойств этого решения дает следующий результатам.

Если функции $\mathcal{K}(t)$, $F(x,t)$, $F_t(x,t)$, $F_{tt}(x,t)$, $F_x(x,t)$, $F_{xt}(x,t)$, $F_{xtt}(x,t)$ непрерывны и экспоненциально ограничены, т.е. абсолютно ограничены функцией Me^{at} где M и a постоянные, не зависящие от x, а изображение $k(p)$ функции $\mathcal{K}(t)$ удовлетворяет условию найдется такая α, что при $Re\,p>\alpha$ $\left|Re\,\frac{p}{a}\sqrt{k(p)+1}\right|>c>0$ (3) то задача (I) имеет единственное классическое решение, которое можно найти методом преобразования Лапласа.

Достаточном условием для того, чтобы имело место (3), является непрерывность и экспоненциальная ограниченность функций $\mathcal{K}(t)$, $\mathcal{K}'(t)$, $\mathcal{K}''(t)$, причем $\mathcal{K}(0)=0$.

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДОВ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

О. Ваарманн

Рассмотрим задачу решения уравнения

$$F(x) = 0, \tag{I}$$

где $F: \mathcal{D} \subset R^n \to R^m$. В случае дифференцируемости $F(x)$ для решения уравнения (I) часто применяются методы вида

$$x_{k+1} = x_k - Q(x_k, A_k, F(x_k)), \; k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где $Q(x_k, A_k, F(x_k))$ - некоторое отображение, действующее из R^n в R^n, а A_k - линейное отображение из $R^m \to R^n$.

Метод Ньютона $(Q(x_k, A_k, F(x_k)) = A_k F(x_k), R^m = R^n, A_k = \Gamma_k = [F'(x_k)]^{-1})$ в практических расчетах обычно реализуется в виде

$$F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k), \tag{3}$$

поскольку решение системы линейных уравнений более экономная операция, чем обращение матрицы, а методы типа Ньютона вида

$$x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k), \tag{4}$$

где A_k - инверсия Якобиана или некоторая ее аппроксимация, используются в основном в теоретических исследованиях.

В данном сообщении описываются некоторые случаи, когда не существует значительного различия между "стоимостью" обоих вариантов методов вида (2) или когда по некоторым основаниям даже предпочтительнее использовать варианты, в которых A_k используется в явном виде.

При $Q(x_k, A_k, F(x_k)) = A_k F(x_k) + 2A_k F(v_k) - \frac{1}{\rho}[F(v_k + \rho A_k F(v_k)) - F(v_k)]$, (5)

где $v_k = x_k - A_k F(x_k)$, ρ - произвольный вещественный параметр (не равный нулю), получим класс методов четвертого порядка скорости сходимости, если $\|I - F'(x_k) A_k\| = O(\|F(x_k)\|)$ [I]. Применение метода (5) эквивалентно решению трех линейных систем с той же матрицей, но с различными правыми частями. Обращение матрицы и решение трех систем методом Гаусса требуют соответственно n^3 и $n^3 + 3n^2 - n$ умножений и делений. К тому же, в методах, где используются инверсия Якобиана или ее аппроксимация, легко проводить итерационное уточнение решения для достижения требуемой точности.

Одним из способов уменьшить объем вычислений в среднем на одну итерацию является следующий: Γ_k вычисляется не на каждом шаге, а через шаг или несколько шагов, а на промежуточных шагах аппроксимируется Γ_k по некоторой итерационной формуле (например по формуле Шульца), вычисляя $A_k F(x_k)$ в виде произведений матриц на вектор (ср.[3]).

Знание точной или приближенной (псевдо-) инверсии якобиана полезно во многих случаях. Например, она позволяет вычислять число обусловленности или оценку для него, облегчает оценивать погрешности для приближенного решения и т.д.

Если вычисления проводятся в не обычной арифметике, а интервальной арифметике, то предпочтение отдается интервальным аналогам метода Ньютона с использованием инверсии якобиана или ее аппроксимации. Интервальный аналог метода исключения Гаусса дает очень пессимистические оценки для ошибок вычислений [4]. Интервальные аналоги имеют большое значение при автоматической проверке (с помощью ЭВМ) существования решения уравнения (I) в данной области и получения строгих оценок погрешностей[5]

Пусть $F'(x)$ не является обратимой, а она имеет лишь псевдообратную матрицу $[F'(x)]^+$, то метод

$$x_{k+1} = [F'(x_k)]^+ F'(x_k) x_k - [F'(x_k)]^+ F(x_k) \qquad (6)$$

позволяет отыскивать псевдорешение уравнения (I) с минимальной нормой (по крайней мере в линейном случае).

Если положить $Q(x_k, A_k, F(x_k)) = M_k^{-1}[F'(x_k)]^* F(x_k)$, где $M_k = [F'(x_k)]^* F'(x_k) + \lambda_k I$ и $\lambda_k \geq 0$, то (2) превращается в метод Левенберга-Марквардта. Известно, что $\lim\limits_{\lambda_k \to 0} M_k^{-1}[F'(x_k)]^* = [F'(x_k)]^+$ и поэтому его также можно привести к виду (6). С другой стороны, при определении подходящего параметра λ_k иногда возникает необходимость многократно обращать матрицы или решать соответствующие линейные системы на одном шаге итерации. К преодолению этой трудности можно применять вариант метода Левенберга-Марквардта, где

$M_k^{-1}(\lambda)$ вычисляется в явном виде, причем для уточнения λ_k^i $(i=0,1,\ldots)$ вектор $M_k^{-1}g(x_k)$ $(g(x_k)=[F'(x_k)]^+F(x_k))$ аппроксимируется по формуле

$$M_k^{-1}(\lambda_k^i)g(x_k) \approx \Big\{M_{k-1}^{-1}(\lambda_{k-1})\sum_{i=0}^{q-1}\big(I - M(\lambda_k^i)M_{k-1}^{-1}(\lambda_{k-1})\big)^i\Big\}g(x_k), \quad q \geq 2$$

т.е. применяя матрицу на вектор.

После определения приемлемого λ_k^i полагается $\lambda_k = \lambda_k^i$ и только тогда вычисляется $M_k^{-1}(\lambda_k)$.

Аналогично можно построить параллельные варианты методов вида (2), сохраняющие порядки скорости сходимости, присущие соответствующим последовательным методам [2].

Литература

I. Ваарманн О., Полль В., О решении нелинейных уравнений методами высокого порядка сходимости и их устойчивости. Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1977, 26, № 2, 123-127.

2. Ваарманн О., О некоторых параллельных итерационных методах для решения нелинейных уравнений. Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1982, 32, № I, I-6.

3. Hald O.H., On a Newton-Moser-type method. Numer. Math., 1975, 23, N° 5, 411-426.

4. Nickel K., Interval Mathematics. Academic Press, 1980.

5. Rall, L B., Automatic Differentiation; Techniques and Applications. -In: Lecture Notes in Computer Science, N° 120, Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981

СОДЕРЖАНИЕ

Методы вычислений

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ "МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА".
28–30 сентября 1983.
На русском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Реймерс.
Подписано к печати 21.07.1983.
МВ 06055.
Формат 60х84/16.
Бумага ротаторная.
Машинопись. Ротапринт.
Условно-печатных листов 9,3.
Учетно-издательских листов 7,6.
Печатных листов 10,0.
Тираж 290.
Заказ № 765.
Бесплатно.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.