Auhinnatöö

Riemanni tõendamata hüpotees ζ funktsiooni nullpunktide kohta.

Auhinnatöö (II. a. h.)

Aavakivi, Wiktoria

Viktooria Aavakivi

1. dets. 1921 a. teise auhinna vääriliseks tunnistatud.

[illegible]

Riemann:i tõendamata hüpotees ζ-funktsiooni nullpunktide kohta.

Mundum regunt numeri.

Sissejuhatus.

Juba kauemat aega on nõnda nimetatud Riemann:i ζ-funktsioon äratanud tähelpanu matemaatikute seas: ühelt poolt, kui iseenesest lõpmata huvitav funktsiooniteooria probleem, teiselt, selle tähtsuse tõttu, mis on ta arvuteoreetilistel rakendustel: ζ-funktsiooni tarvitatakse algarvude probleemi harutamisel, ja just viimase probleemi uurimine on väljaviinud ta juure Riemanni, ta esimese uurija, kelle nime ta kannab.

Riemann seadis, nimelt, üles 5 hüpoteesi ζ-funktsiooni kohta ja ühendas teda algarvude probleemiga nõnda nimetatud „Riemann:i algarvuvalemi" näol

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\rho'\rho''} \left(\left(Li(x^{\rho'}) + Li(x^{\rho''}) \right) \right) + \int_x^\infty \frac{1}{(y^2-1)\, y \log y}\, dy - \log 2,$$

kus $Li(x) = \int^x \frac{du}{\log u}$ ja ρ', ρ'' kulgevad kõik $\zeta(s)$:i mitte-reaalsed nullpunktid

$$\rho' = \beta + \gamma i, \quad \rho'' = 1 - \rho' = 1 - \beta - \gamma i,$$

kasvava positiivse γ järele korraldatult. Tähtime nüüd $\pi(x)$:ga niisuguste algarvude arvu, mis $\leqq x$, siis võrdub $f(x)$ $\pi(x)$:ga, kui jätta arve võtmata vea, mille järg palju vähem, kui $\pi(x)$:i järg. See näitab, kui tähtis juba ainult algarvude probleemi suhtes on ζ-funktsiooni nullkohtade küsimus. Sellepärast on täitsa loomulik, et seda funktsiooni uuritakse Riemann:ist saadik peaaegu vahetpidamata. Üks teise järele on tõendatud Riemann:i hüpoteesid ta kohta, tõendamata on jäänud neist ainult üks.

See kuulus seni tõendamata hüpotees on järgmine:

Kõik $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ imaginaar-juured on sirgel $\sigma = 1/2$.

Seame enesele ülesandeks vaadelda siinkohal seda, mis seni on saavutatud ζ-funktsiooni nullkohtade uurimisel, näidata, kui kaugele on jõutud teel selle hüpoteesi tõendusele ja tähelpanna kõige uuemad seaduset selle probleemi kohta.

Enne aga kui asuda selle küsimuse otsekohesele harutusele, vaatleme lühidalt ζ-funktsiooni peaomaduset.

I. ζ-funktsiooni definitsioon ja peaomaduset.

Definitsioon: ζ-funktsiooniks nimetame Dirichlet rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pooltasapinnal $\sigma > 1$ ($s = \sigma + it$) defineeritud analüütilise funktsiooni.

Dirichlet rida defineerib seega ζ-funktsiooni ainult pooltasapinnal $\sigma > 1$.

Samal pooltasapinnal maksab ka ζ-funktsiooni korrutisesitus

$$(1) \qquad \zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

kus p kulgeb kõik algarvud.

Edasi olgu siin veel ülesloetud järgmised ζ-funktsiooni omaduset, mis hästi tuttavad ta üldteooriast:

1). ζ-funktsiooni võib analüütiliselt jätkata tervele tasapinnale, väljaarvatud punkt $s = 1$, kus $\zeta(s)$:il on ühekordne naba. Teiste sõnadega: võime näidata, et

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \quad \text{ja} \quad (s-1)\,\zeta(s)$$

on täisfunktsioonid.

2). Pooltasapinnal $\sigma > 1$ on alati

$$|\zeta(s)| \leqq \zeta(\sigma).$$

Seega on $|\zeta(s)|$ $\sigma \geqq \sigma_0 \; (>1)$ puhul allpool kindlat tõket. Piirkonnas $0 \leqq \sigma \leqq \sigma_0, |t| > t_0 \; (>0)$ on jälle $\left|\frac{\zeta(s)}{t^2}\right|$ allpool kindlat tõket. Seega on terrel pooltasapinnal $\sigma \geqq 0$ alati maksev võrrand

$$\zeta(s) = O(t^2).$$

Märkus: Landau poolt tarvitusele võetud tähtimisviis

$$f(x) = O g(x)$$

tähendab, et reaal-muutuja $x > x_0$ puhul on

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \kappa,$$

kus κ on mis tahte positiivne konstant.

$$f(x) = o\, g(x)$$

aga tähendab, et

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On meil

$$f(x) = o\, g(x),$$

siis on muidugi veel suuremal põhjusel ka

$$f(x) = O g(x).$$

3).

$$(2) \qquad \xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s)$$

on täisfunktsioon ja rahuldab funktsioon-võrrandit

$$(3) \qquad \xi(s-1) = \xi(s).$$

4).

$$(4) \quad (s-1)\zeta(s) = ae^{bs} \frac{1}{\Gamma(s/2+1)} \prod \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

kus ρ kulgeb $\zeta(s)$:i imaginaarsed nullpunktid.

II. ζ-funktsiooni nullpunktid.

Asume oma peaülesande, ζ-funktsiooni nullpunktide küsimuse juure.

On selge, et funktsioonil on reaalsed ja imaginaarsed nullpunktid ja seega tuleb meil vaadelda esiteks, ζ-funktsiooni reaalseid, teiseks, ta imaginaarseid nullpunkte.

1. ζ-funktsiooni reaalsed nullpunktid.

Lause: $\zeta(s)$:i reaalsed nullpunktid on: $s = -2, -4, -6$ ..... ja nad on ühekordsed. Imaginaarsed nullpunktid on kõik ribas

$$0 \leqq \sigma \leqq 1.$$

1). $\sigma > 1$. Siis maksab võrrand (1) ja, et

$$\left|\frac{1}{1-p^{-s}}\right| \geq \frac{1}{1-p^{-\sigma}} > 0,$$

siis on $\Pi \neq 0$ ja järelikult ka $\zeta(s) \neq 0$, s. t. paremal pool sirget $\sigma = 1$ pole ühtegi $\zeta(s)$:i nullpunkti.

2). $\sigma < 0$. Siis on $1-\sigma > 1$. Kirjutades nüüd funktsioon-võrrandi (3) täieli-

kult, leiame

$$\frac{1-s}{2} \cdot -s\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s),$$

$$\frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s),$$

$$(5) \quad \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s) = \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s).$$

Näitame, et selle avalduse (5) pahem külg on meie piirkonnas (lõplikuses) alati lõplik ja $\neq 0$.

a) $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \neq 0$, sest Γ-funktsioon on $\neq 0$ tervel tasapinnal. Et Γ-funktsiooni ainsad nabad on punktid $0, -1, -2, -3$ ..... ja meil on praegusel juhusel $\Re\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{1-\sigma}{2} > 0$, siis on $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$ lõplik.

b). $\pi^{-\frac{1-s}{2}} \neq 0$ ja lõplik.

c). $\zeta(1-s)$ on $\neq 0$ ja lõplik, sest $\Re(1-s) = 1-\sigma > 1$, mis juhusel, nagu teada, $\zeta(s)$ on $\neq 0$ ja lõplik.

Parema poole suhtes võime tähelepanna järgmist:

a). $\Gamma(s/2)$ on $\neq 0$ ja lõplik, peale punktide $-2, -4, -6, \ldots$, mis on ta ühekordsed nabad.

b). $\pi^{-s/2}$ on $\neq 0$ ja lõplik.

Nagu nägime, on (5):e pahem külg $\neq 0$ ja lõplik, võrduse järele on samad omadused ka paremal küljel. Et aga parema külje esimese teguri ainsad ja sealjuures ühekordsed nabad on punktid $-2, -4, -6, \ldots$ ja teine tegur on $\neq 0$ ja lõplik, siis on kolmanda teguri ainsad nullkohad mainitud punktid paremal pool imaginaar-telge ja need nullkonad on ühekordsed.

3). $\underline{s=0}$. Nüüd on võrduse (5) pahema külje kaks esimest tegurit $\neq 0$, kuna kolmandal teguril on ühekordne naba. Et, edasi, paremal pool esimesel teguril on kõnealusel juhusel ühekordne naba, kuna teine tegur on lõplik, siis peab kolmas tegur olema $\neq 0$, s. o. $\zeta(0) \neq 0$. Seega pole punkt 0 ζ-funktsiooni nullpunktiks.

4). $\underline{0 < \sigma < 1,\ t = 0}$. Korrutame ζ-funktsiooni vahega $\left(1 - \frac{2}{2^s}\right)$. Oletades esialgu $s > 1$, leiame

$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) = \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\right)\left(1-\frac{2}{2^s}\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots$$

$$\quad -\frac{2}{2^s} \qquad -\frac{2}{4^s} \qquad -\frac{2}{6^s}$$

$$(6) \qquad 1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{6^s}+\cdots$$

Saime niisuguse vahelduva rea, mille kohta Dirichlet ridade teooriast teame, et ta koondub absoluutselt imaginaar-telje paremalpool ja tingimisi sirgete $\sigma = 0$ ja $\sigma = 1$ vahel. Rida (6) langeb paremal pool sirget $\sigma = 1$ ühte funktsiooniga $\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)$ ja esitab korrapärase analüütilise funktsiooni pooltasapinnal $\mathfrak{R}(s) > 0$, ta esitab siis mainitud funktsiooni analüütilise jätku piirkonnas $0 < \sigma \leqq 1$. Meie võrrand maksab järelikult, kui s on 1 ja 0 vahel.

Olgu nüüd $0 < s < 1$. Võime kirjutada

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)+\left(\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}\right)+\left(\frac{1}{5^s}-\frac{1}{6^s}\right)+\cdots,$$

s on reaal-arv; ühendades rea liikmed kaheti, saame positiivsed vahed: rea väärtus

on positiivne ja seega on $\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)$ ehk $\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)$ positiivne. Tegur $\left(1-2^{1-s}\right)$ saab nulliks, kui $s=1$, kuid $s \neq 1$, tähendab $\left(1-2^{1-s}\right) \neq 0$ ja seega peab olema ka $\zeta(s) \neq 0$, sest terve korrutis $\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) \neq 0$.

5). $\underline{s=1}$. See punkt on $\zeta(s)$:i naba ja nii siis $\zeta(1) \neq 0$.

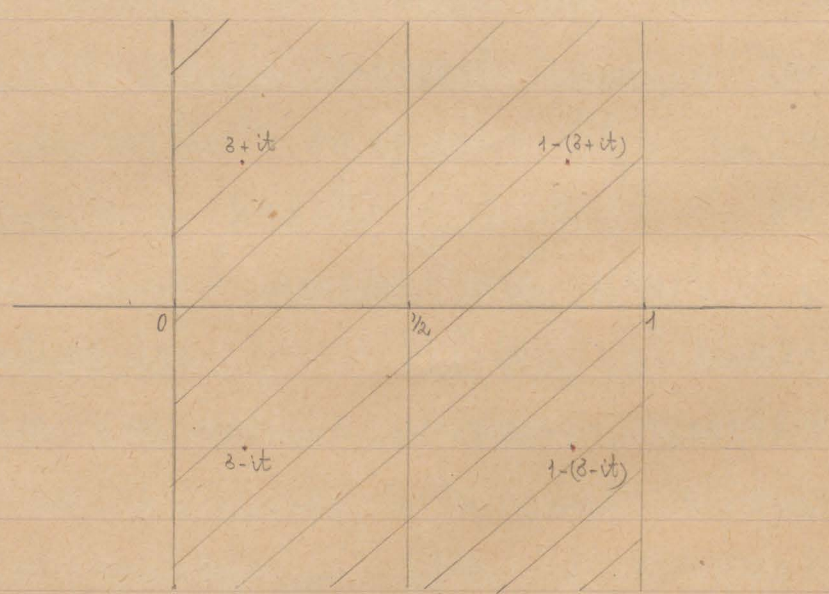
Seega on lause täielikult tõendatud.

2. ζ-funktsiooni imaginaarsed nullkohad.

Tõendame imaginaarsete nullpunktide kohta

Lause: $\zeta(s)$:i imaginaarsed nullpunktid asetsevad sümmeetriliselt reaal-telje ja sirge $\sigma = 1/2$ suhtes.

[Märkus: Ühe antud nullpunktiga on meil seega kohe käes neli; on aga antud nullpunkt sirgel $\sigma = 1/2$, siis muidugi ainult kaks].



Vaatame, kuidas asetsevad $\zeta(s)$:i nullpunktid reaal-telje suhtes.

Et $\zeta(s)$ on reaalne, kui $s > 1$ ja korrapärane peale punkti $s = 1$, siis on tuntud funktsioon-teooria lause järele $\zeta(\sigma + it)$ ja $\zeta(\sigma - it)$ ikka kaasarvud. On $(\sigma + it)$ ζ-funk-

tsiooni nullpunkt, siis on

$$\zeta(\sigma + it) = A + iB = 0,$$

mis võimalik ainult, kui $A = 0$ ja $B = 0$. On aga $A = 0$ ja $B = 0$, siis on ka

$$\zeta(\sigma - it) = A - iB = 0.$$

Nullpunktid asetsevad sümmeetriliselt reaal-telje suhtes.

Vaatame, kuidas asetsevad nullpunktid sirge $\sigma = 1/2$ suhtes.

Teame, et (2) on täisfunktsioon ja rahuldab funktsioon-võrrandit (3). Olgu nüüd $\sigma + it$ ζ-funktsiooni juureks, siis on ka

$$\xi(\sigma + it) = 0,$$

langevad ju, nagu teada, ξ- ja ζ-funktsiooni nullpunktid ühte. On $\zeta(\sigma + it) = 0$, siis on ka $\zeta(\sigma - it) = 0$ ja seega ka

$$\xi(\sigma - it) = 0.$$

Tarvitades siin funktsioon-võrrandit (3), leiame

$$\xi(1 - \sigma - it) = 0,$$
$$\xi(1 - \sigma + it) = 0.$$

Ka need punktid peavad olema ζ-funktsiooni nullpunktideks. Punktid $\sigma + it$, $\sigma - it$, $1 - \sigma - it$ ja $1 - \sigma + it$ aga on sirge $\sigma = 1/2$ suhtes sümmeetrilised. Seega asetsevad ζ-funktsiooni nullpunktid ka sirge $\sigma = 1/2$ suhtes sümmeetriliselt ja nii siis on lause tõendatud.

3. Von Mangoldti valem.

ζ-funktsiooni imaginaarsete nullpunktide arvu kohta jõuame selgusele nõnda nimetatud von Mangoldti valemi abil. See valem lubab, nimelt, oletada, et ζ-funktsiooni imaginaarsete nullpunktide arv on lõpmata suur. Riemanni poolt hüpoteesina ülesseatud, leidis see valem esimese tõendaja von Mangoldt:is[1]. Hiljem on sama valemi tõendanud veel R. J. Backlund[2].

Esitame siin Backlundi tõenduse.

Von Mangoldti valem:

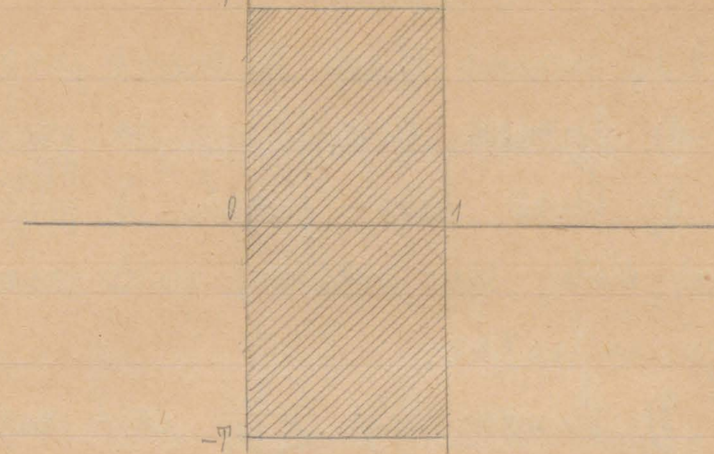
$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

($N(T)$ tähendab siin $\zeta(s)$:i imaginaarsete nullpunktide arvu, millest igal nullpunktil kuju $\beta + \gamma i$ ja kus γ on vahemikus $0 < \gamma < T$).

---

[1] Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$ (Math. Annalen, Bd. 60, 1905).

[2] Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion (Väitekiri, Helsingi, 1916).



Tähtides

$$(8) \qquad \chi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s),$$

võime kirjutada (5) järele

$$\chi(s) = \chi(1-s).$$

Logaritmime (8).

$$\log\chi(s) = -s/2\,\log\pi + \log\Gamma(s/2) + \log\zeta(s).$$

Differentsiides seda s:i suhtes, kiame

$$(9) \qquad \frac{\chi'(s)}{\chi(s)} = -\frac{\log\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

$\xi(s)$ on, nagu teada, täisfunktsioon, $\chi(s)$ aga pole seda mitte: tal on, nimelt, ühekordsed nabad punktides $s=0$ ja $s=1$. $\chi(s)$ on kindlasti korrapärane mitte reaalse s:i korral, asuvad ju ta tegurite $\zeta(s)$:i ja $\Gamma(s/2)$:i iseäralised punktid kõik reaal-teljel. Oletame, et s pole reaalteljel, s. o., et

$$\mathfrak{I}(s) \neq 0.$$

Vaadeldes (9), paneme tähele ta suhtes järgmist:

1). Esimene liige (9):s on konstant.

2). Teine liige, jagatis $\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}$, on korrapärane alati, kui avaldus, mille nimetajal pole ühtegi nullkohta.

3). Viimane liige $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ saab korrapäratuks ainult, kui nimetaja nulliks muutub, s.o. kui $\zeta(s) = 0$.

Olgu nüüd s_0 $\zeta(s)$:i nullpunkt, see tähendab

$$\zeta(s_0) = 0.$$

Võime kirjutada

$$\zeta(s) = (s-s_0)^{\alpha} f(s).$$

Moodustame $\zeta'(s)$ ja leiame

$$\zeta'(s) = \alpha(s-s_0)^{\alpha-1} f(s) + (s-s_0)^{\alpha} f'(s).$$

Seega on

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\alpha(s-s_0)^{\alpha-1} f(s) + (s-s_0)^{\alpha} f'(s)}{(s-s_0)^{\alpha} f(s)} =$$

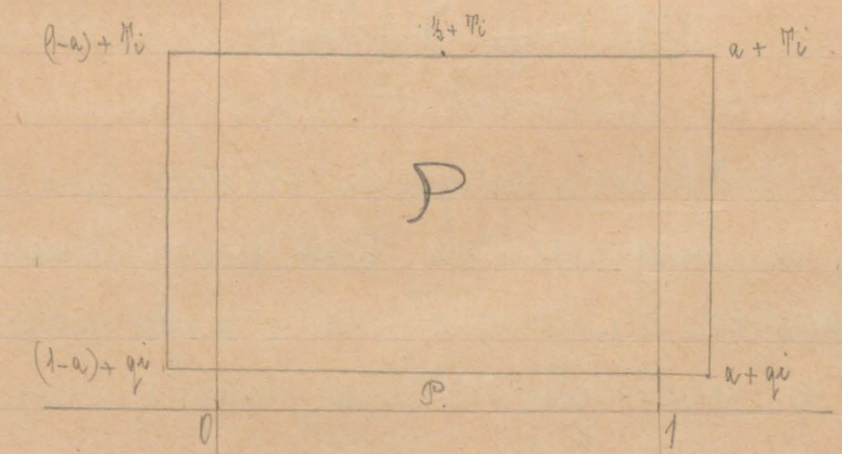
$$= \frac{\alpha}{s-s_0} + \frac{f'(s)}{f(s)}.$$

$\frac{f'(s)}{f(s)}$ on korrapärane, kui $f(s) \neq 0$, mis punktis s_0 tõesti nii on; $f(s)$:i tuletis on muidugi ka korrapärane ja seega on korrapärane terve jagatis. Nii siis on s_0 $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$:i ühekordne naba ja α on temu residiiks punktis s_0. Võime kirjutada

$$\frac{\chi'(s)}{\chi(s)} = \frac{\alpha}{s-s_0} + \text{korrapärane funktsioon } s_0\text{:is}.$$

Järeldus: s_0 on $\frac{\chi'(s)}{\chi(s)}$:i ühekordne naba ja α tema residiid punktis s_0.

Rakendame nüüd residiid-lauset. Võtame integreerimis-piirkonnaks püstkülikut P (joonistus 1.).



Joon. 1.

Märkus: Püstküliku pealmine külg on joon, mis läheb läbi nullpunktide vahelt.

Oletame q nii väikeseks, et ribas P pole ühtegi ζ-funktsiooni nullpunkti, mis täiesti võimalik: funktsioonil pole ju nullpunkte reaalteljel ja, tähendab, korrapärasuse tõttu on reaalteljel olemas ümbrus, kus ka nullpunkte pole: on aga P küllalt kitsas, siis võib ta väga hästi alla seks ümbruseks. Seega: P:s ja ta rajal on $\zeta(s) \neq 0$. Tarvitades residiid-lauset, leiame

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\square} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)}\,ds = \sum_{\square} \alpha = N(T).$$

Märkus 1.: s_0 kulgeb seejuures kõik nullpunktid, mis olemas püstkülikus.

<u>Märkus</u>: $N(T)$ ei tähenda siin isesuguste nullpunktide arvu: loeme igat mitmekordset nullpunkti just nii mitu korda, kui järg näitab.

$N(T)$ on muidugi reaalne positiivne täisarv, seega

$$(11) \qquad N(T) = \frac{1}{2\pi}\, \mathfrak{I} \int_{\square} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds .$$

<u>Seletus</u>: Integraali väärtus peab olema reaalne, ta imaginaar-osa peab seega olema 0: tuleb vaadelda ainult reaal-osa; kuid mõne avaldise $\frac{1}{i}k$ reaal-osa on sama, kui k imaginaar-osa:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{i}k\right) = \mathfrak{I}(k),$$

sest

$$k = a + ib$$

ja

$$\frac{1}{i}k = \frac{1}{i}a + b.$$

Näitame esiteks, et

$$(12) \qquad \mathfrak{I}\int_{a+qi}^{a+Ti} = \mathfrak{I}\int_{1-a+Ti}^{1-a+qi} .$$

Võttes uue muutuja $a + it = s$, leiame

$$\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{a+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds = \mathfrak{I}\, i\int_q^T \frac{\xi'(a+it)}{\xi(a+it)}\, dt = \mathfrak{R}\int_q^T \frac{\xi'(a+it)}{\xi(a+it)}\, dt .$$

Kasutades funktsioon-võrrandit, saame edasi

$$\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{a+Ti} = \mathfrak{R}\int - \frac{\xi'(1-a-ti)}{\xi(1-a-ti)}\, dt = \mathfrak{R}\int - \frac{\xi'(1-a+it)}{\xi(1-a+it)}\, dt$$

<u>Seletus</u>: 1) $\xi'(s) = \xi'(1-s) \cdot -1 = -\xi'(1-s)$.

2) $\mathfrak{R}\int = \int \mathfrak{R}$, sest integreerimis-tee on reaalne; reaal-osad aga on $\frac{\xi'(1-a+it)}{\xi(1-a+it)} : l$ ja $\frac{\xi'(1-a-it)}{\xi(1-a-it)} : l$ samad, sest need avaldused on kaasarvud.

Võtame uueks muutujaks $1-a+it = s$. Tähelpannes, et $i(\alpha + i\beta) = i\alpha - \beta$, leiame

$$\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{a+Ti} = \mathfrak{R}\, i\int_{1-a+qi}^{1-a+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds = \mathfrak{I}\left(-\int_{1-a+qi}^{1-a+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds\right) =$$

$$= \mathfrak{I}\int_{1-a+Ti}^{1-a+qi} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds ,$$

millega (12) on tõendatud.

Edasi näitame, et

$$(13) \qquad \int_{a+Ti}^{1/2+Ti} = \int_{1/2+Ti}^{(1-a)+Ti} .$$

Pannes $s = \sigma + iT$, saame esiteks

$$\mathfrak{I}\int_{a+Ti}^{1/2+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds = \mathfrak{I}\int_a^{1/2} \frac{\xi'(\sigma+it)}{\xi(\sigma+it)}\, d\sigma ,$$

millest funktsioon-võrrandi abil leiame

$$\mathfrak{I}\int_{a+Ti}^{1/2+Ti} = \mathfrak{I}\int_a^{1/2} - \frac{\xi'(1-\sigma-Ti)}{\xi(1-\sigma-Ti)}\, d\sigma = -\int_a^{1/2} \mathfrak{I}\, \frac{\xi'(1-\sigma-Ti)}{\xi(1-\sigma-Ti)}\, d\sigma,$$

viimane määratud integraali definitsiooni järele. Nüüd on aga $\frac{\xi'(1-\sigma-Ti)}{\xi(1-\sigma-Ti)}$ ja $\frac{\xi'(1-\sigma+Ti)}{\xi(1-\sigma+Ti)}$ kaasarvud ja seega nende imaginaar-osadel vastas-märgid, nii siis

$$\mathfrak{I}\int_{a+Ti}^{1/2+Ti} = \mathfrak{I}\int_a^{1/2} \frac{\xi'(1-\sigma+Ti)}{\xi(1-\sigma+Ti)}\, d\sigma = -\mathfrak{I}\int_{1-a+Ti}^{1/2+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds =$$

$$= \mathfrak{I}\int_{1/2+Ti}^{1-a+Ti} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)}\, ds,$$

millega (13) on tõendatud.

(14) $$\mathfrak{I}\int_{1-a+qi}^{a+qi} = O(1),$$

sest integrimis-tee pikkus on lõplik, integritav funktsioon on korrapärane integrimis-teel ja seega integraal lõplik.

Ühendades (12), (13) ja (14), leiame (11) järele

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\,\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{1/2+Ti} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)}\, ds + O(1).$$

Edasi võime kirjutada (9) põhjal

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\left(\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{1/2+Ti} -\frac{\log\pi}{2}\, ds + \frac{1}{2}\,\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{1/2+Ti}\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}\, ds + \mathfrak{I}\int_{a+qi}^{1/2+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds\right) + O(1).$$

Arvutame siin esinevaid integraale.

a). $$\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{1/2+Ti} -\frac{\log\pi}{2}\, ds = \mathfrak{I}\Big|_{a+qi}^{1/2+Ti} -\frac{\log\pi}{2}\cdot s =$$

$$= \mathfrak{I}\left(-\log\frac{\pi}{2}(1/2+Ti) + \frac{\log\pi}{2}(a+qi)\right) = -\frac{T}{2}\log\pi +$$

$$+ \frac{q}{2}\log\pi = -\frac{T}{2}\log\pi + O(1),$$

viimane sellepärast, et $\frac{q}{2}\log\pi$ on lõplik.

b)

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{I}\int_{a+qi}^{1/2+Ti}\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}\, ds = \frac{1}{2}\,\mathfrak{I}\Big|_{a+qi}^{1/2+Ti} 2\log\Gamma(s/2) =$$

$$= \mathfrak{I}\log\Gamma\left(1/4+\frac{T}{2}i\right) - \mathfrak{I}\log\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{q}{2}i\right).$$

Märkus: Siin tuleb meelespidada, et $\log\Gamma(s)$ on mitmene funktsioon ja et meil on tarvis võtta mõni määratud selle funktsiooni haru. Võtame selle haru, mis on reaalne, kui s on reaalne.

Γ-funktsiooni õpetusest teame, et

$$\log\Gamma(s) = (s-1/2)\log s - s + K + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

mis maksab ühtlaselt mõnes vahemikus. Olgu selleks vahemikuks

$$1/2 \le \sigma \le a.$$

Teame, et üldse

$$\log z = \log|z| + i\arg z,$$

ja seega võime kirjutada, kui $s = \sigma + it$

$$\log s = \log|s| + i\arg s = \log\sqrt{\sigma^2+t^2} + i\,\mathrm{arc\,tg}\frac{t}{\sigma} =$$

$$= \log t\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{t}\right)^2} + i\,O(1) = \log t +$$

$$+ i\,O(1) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Seletus: 1) $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arc\,tg}\frac{t}{\sigma} < \frac{\pi}{2}$ ja nii siis

$\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sigma} = O(1)$. 2). $\log \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{t}\right)^2} = \frac{1}{2} \log\left(1+\left(\frac{\sigma}{t}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{t}\right)^4 + \dots\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\left(\sigma^2 - \frac{1}{2}\frac{\sigma^4}{t^2} + \dots\right) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, sest on $f(x) = o\,g(x)$, siis on, nagu juba öeldud, veel suuremal põhjusel $f(x) = O\,g(x)$.

Pannes $s = \sigma + it$, leiame $s - \frac{1}{2} = \sigma - \frac{1}{2} + it$ ja võime kirjutada

$$(s-\tfrac{1}{2}) \log s = (\sigma - \tfrac{1}{2}) \log t + i(\sigma-\tfrac{1}{2})\,O(1) + it \log t - t\,O(1) + (\sigma - \tfrac{1}{2})\,O\left(\tfrac{1}{t^2}\right) + it\,O\left(\tfrac{1}{t^2}\right).$$

Nüüd on aga

$$i(\sigma-\tfrac{1}{2})\,O(1) = O(1)$$

ja

$$it\,O\left(\tfrac{1}{t^2}\right) = o(1) = O(1).$$

Seega leiame

$$\mathfrak{I}(s-\tfrac{1}{2}) \log s = t \log t + O(1)$$

ja

$$(15) \qquad \mathfrak{I} \log \Gamma(s) = t \log t - t + O(1),$$

kus k ja teised konstandid esinevad $O(1)$ all. Muutub nüüd t $\frac{q}{2}$-st $\frac{T}{2}$-ni, siis muutub (15) pidevalt; pannes t asemele $\frac{q}{2}$, saame konstandi ja, kirjutades kõik saadusses esinevad konstandid $O(1)$ all, leiame

$$\frac{1}{2}\, \mathfrak{I} \int_{a+qi}^{a+Ti} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}\, ds = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(1).$$

c) Arvutame kolmanda integraali, jagades ta kaheks järgmiseks integraaliks:

$$\mathfrak{I} \int_{a+qi}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = \mathfrak{I} \int_{a+qi}^{a+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds + \mathfrak{I} \int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds.$$

Arvutame kõigepealt esimest siin esinevat integraali.

$$\mathfrak{I} \int_{a+qi}^{a+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = \mathfrak{I} \Big|_{a+qi}^{a+Ti} \log \zeta(s) =$$
$$= \mathfrak{I}\{\log \zeta(a+Ti) - \log \zeta(a+qi)\} =$$
$$= \arg \zeta(a+Ti) - \arg \zeta(a+qi)$$

Väidame, et viimane võrdub $O(1)$:ga. Meil on $a>1$, olgu $a=2$. On ζ-funktsiooni reaal-osa positiivne, siis ei läbi ζ-funktsioon, muutudes, imaginaar-telje: ta argumendi muutus on lõplik, on kõige rohkem võrdne π:ga. Näitame, et meie juhusel ζ-funktsiooni reaal-osa on tõesti positiivne. Võime esitada ζ-funktsiooni rea abil (on ju $\mathfrak{R}(s) > 1$)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (s = 2+ti),$$

$$\mathfrak{R}\zeta(s) > 1 - \mathfrak{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

$$\frac{1}{n^s} = n^{-s} = n^{-2-it} = n^{-2}\cdot n^{-it} =$$
$$= \frac{1}{n^2} e^{-it\log n} = \frac{1}{n^2}\{\cos(-t\log n) + i \sin(-t \log n)\},$$

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n^2} \cos(-t\log n) \leq \frac{1}{n^2},$$

(cosinus on kõige rohkem $=1$).

Seega võime kirjutada

$$\mathfrak{R}\zeta(s) > 1 - \mathfrak{R}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$
$$= \frac{3}{4} - \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0.$$

$\mathfrak{R}\zeta(s)$ on seega positiivne, kui s on sirgel $a>1$; argumendi alg- ja lõpp-väärtuste vahe on nii siis $<\pi$, võime kirjutada:

$$\mathfrak{I} \int_{a+qi}^{a+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1).$$

Ühendades leitud seatused, kirjutame

$$(16)\qquad N(T) = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{T}{2}\log\pi + \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{I}\int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right\} + O(1) =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\mathfrak{I}\int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + O(1).$$

Näitame, et

$$(17)\qquad \mathfrak{I}\int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = O(\log T).$$

(Siin on $a = 2$).

Võime kirjutada

$$\mathfrak{I}\int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \arg\zeta(\tfrac{1}{2}+Ti) - \arg\zeta(2+Ti).$$

Uurime $\zeta(s)$:i reaal-osa. Praegusel juhusel võib $\zeta(s)$, muutudes, minna ümber algpunkti ja seega pole $\mathfrak{R}\zeta(s)$ positiivne. On $\mathfrak{R}\zeta(s) = 0$, siis on $\zeta(s)$:i väärtus imaginaar-teljel. Kasvab $\zeta(s)$:i argument π võrra, siis tuleb $\mathfrak{R}\zeta(s)$:ile kõige vähemalt üks nullpunkt juure. Kui $\arg\zeta(s)$ kasvab veel π võrra, siis tuleb $\mathfrak{R}\zeta(s)$:ile jälle kõige vähemalt üks nullpunkt juure j. n. e. Kui n on $\mathfrak{R}\zeta(s)$:i nullpunktide arv vahemikus $(2+Ti, \frac{1}{2}+Ti)$, siis on $|\arg\zeta(\frac{1}{2}+Ti) - \arg\zeta(2+Ti)| < (n+1)\pi$, s. o.

$$\left|\mathfrak{I}\int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| < (n+1)\pi.$$

Tõestame nüüd abilause nullpunktide hindami-

seks.

<u>Abilause</u>: <u>Kui $G(s)$ on korrapärane ringis $|s-s_0| \leq R$ ja $|G(s_0)| = \mu \neq 0$ (s. o. keskpunkt pole nullpunktiks), siis on ringis $|s-s_0| \leq \frac{R}{4}$ $G(s)$:i nullpunktide arv</u>

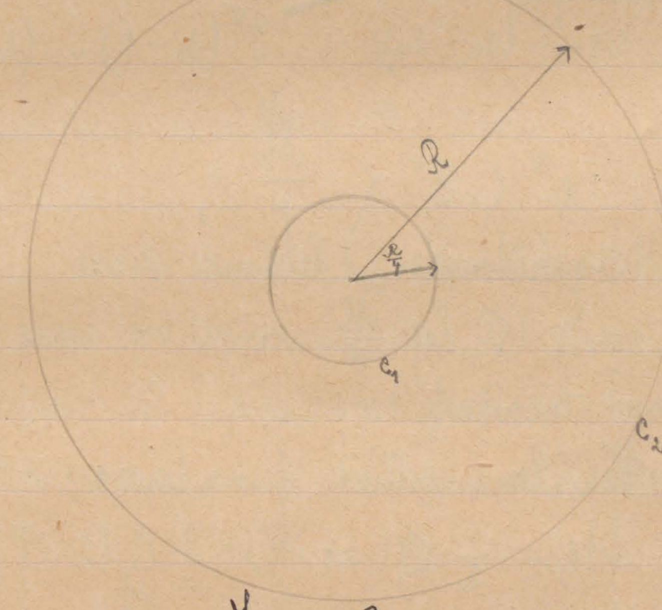
$$\nu \leq \log\frac{M}{\mu},$$

<u>kus $M = \max.|G(s)|$, kui $|s-s_0| \leq R$.</u>

<u>Tõendus</u>:

1). Kui $\nu = 0$, on lause õige, sest mooduli maksimum on muidugi suurem, kui mooduli väärtus keskpunktis.

2). Olgu $\nu > 0$. Meil on kaks ringi C_1 ja C_2 (joon. 2), millede raadiused $\frac{R}{4}$ ja R.



Joon. 2.

Olgu nüüd nullpunktid C_1:s : $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_\nu$. Moodustame funktsiooni

$$\frac{G(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots\ldots(s-s_\nu)} = g(s).$$

See funktsioon on korrapärane C_2:s : $G(s)$ on, nimelt, oletuse järele korrapärane suures ringis, nimetaja aga saab nullics ainult korraga lugejaga, seega on võimalik lühendada ja üle jääb korrapärane funktsioon. Oletame, et s on piirdel C_2 ja leiame

$$|s-s_r| = |(s-s_0)-(s_r-s_0)| \leqq |s-s_0| - |s_0-s_r| =$$
$$= R - |s_r-s_0| > \frac{3R}{4} > 3|s_r-s_0|,$$

(s_r on väikese ringi sees: $|s_r-s_0| < \frac{R}{4}$). $R > 4|s_r-s_0|$.
Seega on piirdel C_2

$$|g(s)| \leqq \frac{M}{3^\nu (s-s_0) \ldots\ldots (s_0-s_\nu)} .$$

Keskpunktis $s=s_0$ on

$$|g(s)| = \frac{\mu}{(s_0-s_1)\ldots\ldots(s_0-s_\nu)} .$$

Teame, et funktsiooni mooduli väärtus keskpunktis on vähem, kui mooduli maksimum rajal, seega on

$$\frac{\mu}{(s_0-s_1)\ldots\ldots(s_0-s_\nu)} < \frac{M}{3^\nu (s_0-s_1)\ldots\ldots(s_0-s_\nu)},$$

$$e^\nu < 3^\nu < \frac{M}{\mu},$$

sest $e < 3$. Logaritmides, leiame

$$\nu < \log \frac{M}{\mu} .$$

Abilause on tõendatud.

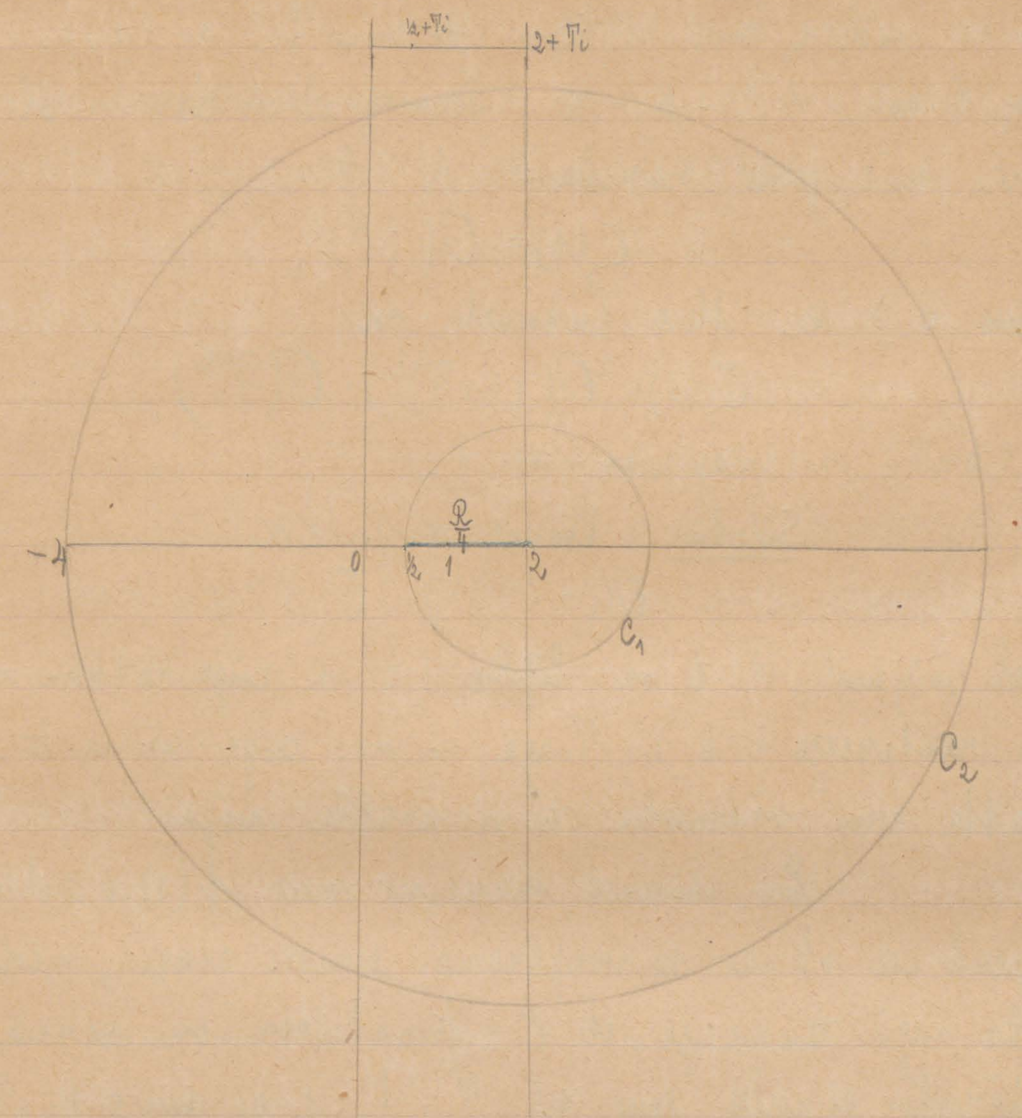
Vaatleme nüüd funktsiooni

$$f(s) = \frac{1}{2}\zeta(s+iT) + \frac{1}{2}\zeta(s-iT) .$$

Kui $s = \sigma$, siis on

$$f(s) = \Re\zeta(\sigma+iT),$$

sest siis on meil 2 kaasarvu, mille imaginaarosad kaovad, nii et üle jääb kahekordne reaalosa. Olgu n $\Re\zeta(s)$:i nullpunktide arv vahemikus: $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2$, $t = T$, kus nad kõik on kujul $(\sigma+iT)$; n on $f(s)$:i nullpunktide arv vahemikus $\frac{1}{2} \leqq s \leqq 2$.



Joon. 3.

Meil on $R = 6$; $\frac{R}{4} = 1\frac{1}{2}$. Määrame nullpunktide arvu vahemikus $(\frac{1}{2}, 2)$. Selge, et nullpunktide arv sel (sinisega joonistatud) sirgel on vähem ehk sama, kui nullpunktide arv C_1:s:

$$n \leqq \nu,$$

kui ν on nullpunktide arv C_1:s.

$$\mu = f(2) = \Re\zeta(2+iT) = \Re\sum \frac{1}{n^{2+Ti}} \leqq$$
$$\leqq \left|\sum \frac{1}{n^{2+iT}}\right| \leqq \sum \frac{1}{n^2} = \zeta(2),$$

viimane aga on lõplik konstant.

<u>Märkus</u>: 2 on keskpunkt.

Seega: μ on lõplik konstant, $\neq 0$ ja võrdne $\Re\zeta(2+iT)$:ga, sest $\sigma = 2 = a$, $\Re\zeta(s) > \frac{1}{4} > 0$.

Määrame $M = \max. |f(s)|$ C_2:l.

$$M < \max. |\zeta(s+iT)| + \max. |\zeta(s-iT)|.$$

C_2:l on : $\sigma \geq -4 = k$. Teame, et üldse on olemas niisugune konstant h, et

$$\zeta(s) = O(t^h),$$

kui $\sigma \geq k$. Meie juhusel on

$$\zeta(s) = O((t+T)^h) = O(T^h).$$

[$(t+T)$ on imaginaar-osa].

<u>Seletus</u>: Võime kirjutada

$$O((t+T)^h) = O(T^h)$$

sel põhjusel, et t on lõplik (t on kõige rohkem = = raadiusega = 6), T aga $\to \infty$; seega võime t jätta arve võtmata, ta ei avalda mõju.

Et abilause maksaks meie $f(s)$:i suhtes, peab see olema korrapärane suures ringis, mida ta ongi: teame ju, et ζ-funktsioon on korrapäratu ainult, kui $s \pm iT = 1$, s. o. kui $s = 1 \mp iT$, need punktid aga on mõlemad väljaspool ringi, kui T on küllalt suur. Tarvitame abilauset ja leiame, kirjutades M asemele eelmise põhjal $O(T^h)$

$$\nu < \log \frac{O(T^h)}{\zeta(2)} = h \log T + O(1).$$

$h \log T = O(\log T)$ ja $O(1)$ on lõplik, seega

$$\nu = O(\log T),$$

$$(n+1)\pi = O(\log T).$$

(17) on tõendatud.

Arve võttes seda viimast, leiame (16) järele

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

See aga ongi tõendatav von Mangoldti valem.

Selle valemi järele saab $N(T)$ ühes T:ga lõpmatuks ja seega on $\zeta(s)$:il tõesti lõpmata mitu imaginaarset nullkohta.

4. $\zeta(s)$:i imaginaarsete nullpunktide riba kitsendamine.

Seni saavutatud resultaatide järele on $\zeta(s)$:il imaginaarseid nullkohti ainult ribas $0 \leqq \sigma \leqq 1$. Kitsendame nüüd selle $\zeta(s)$:i imaginaarsete nullpunktide riba.

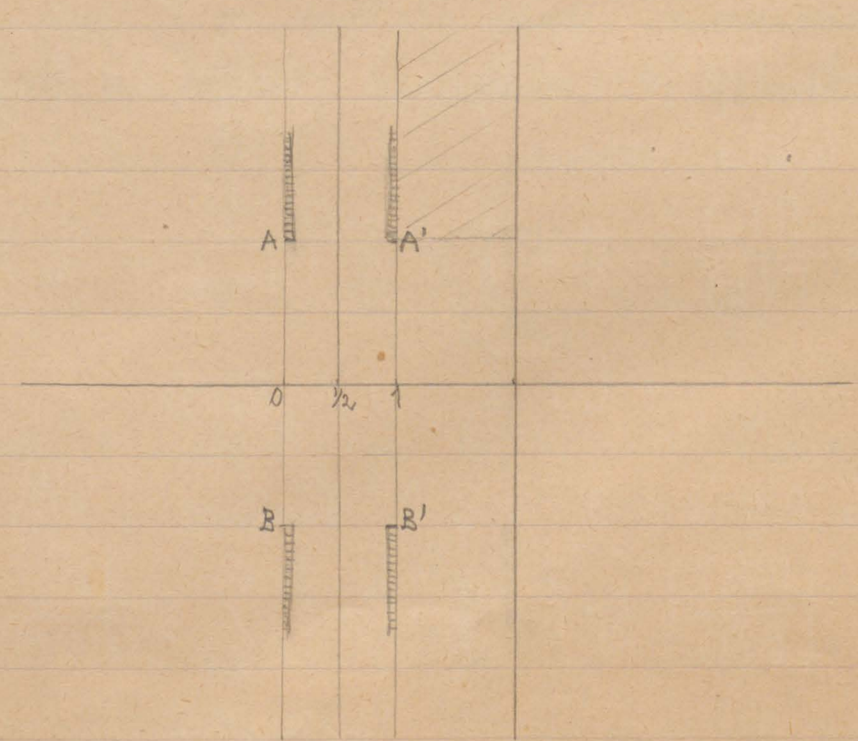
Tõendame

Lause: On olemas positiivne konstant a niisugune, et piirkonnas

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a}\frac{1}{\log t}\quad,\quad t \geqq 2\,,$$

on

$$\zeta(s) \neq 0\,.$$



Joon. 4.

Märkus: On selge, et selle lause järele

$\zeta(s)$:il nullpunkte pole sirgel $\sigma = 1$ ja imaginaar-teljel, peale joonlõikude AB ja $A'B'$, millest meie mitte midagi ei tea (joon. 4).

Tõendame kõigepealt abilause, mida pärastpoole tuleb tarvitada.

Abilause: Kui $0 \leqq \sigma \leqq 2$ ja $t \geqq 2$, siis on

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} < c_1 + \log t$$

ja järelikult

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < c_2 \log t\,.$$

Sooritame tõenduse Γ-funktsiooni korrutis-esituse abil.

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs}\, s \prod \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right) e^{-\frac{s}{\lambda}}\,,$$

kus C on Euleri konstant: $0 < C < 1$. Moodustame $\Gamma(s)$:i logaritmilise tuletise. Logaritmides, leiame

$$-\log \Gamma(s) = Cs + \log s + \sum \left(\log\left(\frac{1}{1-\frac{s}{\lambda}}\right) - \frac{s}{\lambda}\right).$$

Võttes tuletise, saame

$$-\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = C + \frac{1}{s} + \sum \left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{1+\frac{s}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= C + \frac{1}{s} - s\sum \frac{1}{(s+\lambda)\lambda}\,.$$

Oletame $0 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \leqq 2$. Hindame $\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right|$.

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < C + \frac{1}{2} + (2+t)\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda\sqrt{(\sigma+\lambda)^2 + t^2}} <$$

$$< 2 + (2+t)\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda^2+t^2}} <$$

$$< 2 + (2+t)\sum_{\lambda=1}^{t} \frac{1}{\lambda\sqrt{t^2}} +$$

$$+(2+t)\sum_{\lambda=t+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda^2}} = 2+\frac{2+t}{t}\sum_{\lambda=1}^{t}\frac{1}{\lambda}+(2+t)\sum_{\lambda=t+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$= 2+\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(\log t+O(1)\right)+$$

$$+O\left(t\cdot\frac{1}{t}\right) = \log t+O(1),$$

millest väide järgnebki.

Asume nüüd leheküljel 28 formuleeritud lause tõendusele.

Olgu meil seejuures lähtekohaks (1). Logaritmime seda ja leiame

$$\log\zeta(s) = -\sum\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

kust, diferentseerides, saame

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\frac{1}{p^s}\log p}{1-\frac{1}{p^s}} =$$

$$= -\sum_p \frac{1}{p^s}\log p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right)=$$

$$= -\sum_p \log p\left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\dots\right)=$$

$$= -\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ms}} = -\sum_{p^m}\frac{\log p}{p^{ms}}.$$

Märkus: Viimane avaldus $-\sum_{p^m}$ on kokkuleppel tarvitatav tähtimisviis eelmisele kahekordsele summale; siinjuures kulgeb m kõik arvud 1:st kuni ∞:ni, p kõik algarvud kuni ∞:ni.

Kasutades (4), võime kirjutada

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

kus ρ kulgeb $\zeta(s)$:i imaginaarseid nullpunkte. Seega on

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum\frac{\log p}{p^{ms}} = -b+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}+$$

$$-\sum\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right).$$

Arvutame ülemise funktsiooni reaal-osa.

$$\Re\frac{\log p}{p^{ms}} = \Re\frac{\log p}{p^{m(\sigma+it)}} = \Re\frac{\log p}{p^{m\sigma}}\cdot e^{-imt\log p} =$$

$$= \frac{\log p}{p^{m\sigma}}\cos(mt\log p).$$

$$\Re\frac{1}{s-1} = \Re\frac{1}{\sigma-1+it} = \Re\frac{\sigma-1-it}{(\sigma-1)^2+t^2} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$

$$\Re\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) = \Re\left(\frac{1}{(\sigma-\beta)+i(t-\gamma)}+\frac{1}{\beta+i\gamma}\right) =$$

$$= \Re\left(\frac{(\sigma-\beta)-i(t-\gamma)}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}+\frac{\beta-i\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\right)=$$

$$= \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}.$$

Märkus: $\zeta(s)$:i nullpunkt $\rho=\beta+i\gamma$.

$$-\Re\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum\frac{\log p\cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}} = -\Re b+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})}{\Gamma(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})}-\sum_{\rho'}\left(\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right).$$

Märkus: ρ' tähendab, et muutuvad β ja γ.

Hindame $\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})}{\Gamma(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})}$. Teisendame teda nii, et ta muutuks lihtsamaks, kuid seejuures ei väheneks. Kirjutame

$$\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})}{\Gamma(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})} \le \frac{1}{2}\left|\frac{\Gamma'(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})}{\Gamma(\sigma/2+1+i\frac{t}{2})}\right|.$$

Üleval tõendatud abilause järele oli meil

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < c_2\log t,$$

kui $1\le\sigma\le 2$, $t\ge 2$. Nähtavasti võime teda tarvitada, kui

$$1 < \frac{\sigma}{2}+1 \leqq 2, \quad \underline{0 < \sigma \leqq 2},$$
$$\frac{t}{2} \geqq 2, \quad \underline{t \geqq 4}.$$

Oletame, et nii on. Et maksaks ζ-funktsiooni korrutis-esitus, peab olema $\sigma > 1$. Seega on tarvis, et

$$1 < \sigma \leqq 2,$$
$$2 \leqq t < 4.$$

Nii määratud püstkülikus on meie funktsioon lõplik, tal on seal mõni maksimum:

$$\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma} \leqq C_2',$$

kui C_2' on mainitud maksimum. Võime kirjutada C_2' asemele

$$C_2' = \left(\frac{C_2'}{\log 2}\right).\log 2 \leqq C_2'' \log t.$$

<u>Märkus</u>: $\frac{C_2'}{\log 2} = C_2''$.

Olgu $C_3 = \max.(C_2, C_2'')$. Siis on

$$\tfrac{1}{2}\Re\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right) \leqq C_3 \log t,$$

kui $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$. Oletame, et küsimuses on piirkond

$$\begin{cases} 1 < \sigma \leqq 2, \\ t \geqq 2. \end{cases}$$

Teame, et:

1). $\Re b$ on lõplik. 2). $\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}$ on lõplik (nimetaja pole kunagi 0). 3) $\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'(\frac{\sigma}{2}+1+i\frac{t}{2})}{\Gamma(\frac{\sigma}{2}+1+i\frac{t}{2})} \leqq$ $\leqq C_3 \log t$.

Võime kirjutada

$$(18) \quad \sum_{p,m}\frac{\log p\cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}} \leqq C_4\log t - \sum_{\rho'}\left(\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right),$$

kus $\sum\limits_{\rho'}$ on positiivne ja $C_4 \log t$ sisaldab kõik ebavõrrandi paremalepoole kuuluvad lõplikud summused.

<u>Märkus</u>: $(\sigma-\beta) > 0$, sest oletuse järele on

$\sigma > 1$ ja $0 \leqq \beta \leqq 1$, kui ζ-funktsiooni imaginaarse nullkoha reaal-osa. Seda arvesse võttes, on muidugi selge, et terve $\sum\limits_{\rho'}$ on positiivne.

Ärajättes $\sum\limits_{\rho'}$, suurendame sellega ebavõrrandi paremat poolt veelgi ja võime veel suuremal põhjusel kirjutada

$$(19) \quad -\Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum\frac{\log p\cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}} \leqq$$
$$\leqq C_4 \log t.$$

Valime nüüd ühe ζ-funktsiooni nullpunktidest, näituseks: $\rho_r = \beta_r + i\gamma_r$, $(\gamma_r \geqq 2)$, $t = \gamma_r$. (18) järele võime siis kirjutada

$$\sum_{p,m}\frac{\log p\cos(m\gamma_r\log p)}{p^{m\sigma}} < C_4\log\gamma_r - \left(\frac{\sigma-\beta_r}{(\sigma-\beta_r)^2+0}+\frac{\beta_r}{\beta_r^2+\gamma_r^2}\right) <$$
$$< C_4\log\gamma_r - \frac{1}{\sigma-\beta_r} - \frac{\beta_r}{\beta_r^2+\gamma_r^2}.$$

Ärajättes selle avaldise paremal pool $-\frac{\beta_r}{\beta_r^2+\gamma_r^2}$, suurendame sellega funktsiooni ja leiame, siirates

$$\frac{1}{\sigma-\beta_r} < C_4\log\gamma_r - \sum_{p,m}\frac{\log p\cos(m\gamma_r\log p)}{p^{m\sigma}}.$$

Teame, et mis tahte nurga φ kohta võib kirjutada

$$0 \leqq 2(1+\cos\varphi)^2 = 2+4\cos\varphi+2\cos^2\varphi = 3+4\cos\varphi+2\cos^2\varphi -$$
$$-1 = 3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi,$$
$$-\cos\varphi \leqq \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\varphi.$$

Seega võime kirjutada

$$\frac{1}{\sigma-\beta_r} < C_4\log\gamma_r + \sum\frac{\log p\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(2m\gamma_r\log p)\right]}{p^{m\sigma}} =$$
$$= C_4\log\gamma_r + \frac{3}{4}\sum\frac{\log p}{p^{m\sigma}} + \frac{1}{4}\sum\frac{\log p\cos(2m\gamma_r\log p)}{p^{m\sigma}}.$$

Edasi leiame

$$\frac{1}{\sigma-\beta_r} < C_4\log\gamma_r - \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{4}\Re\frac{\zeta'(\sigma+i2\gamma_r)}{\zeta(\sigma+i2\gamma_r)},$$

sest $-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum\frac{\log p}{p^{m\sigma}}$ ja (19) järele on

$$\frac{1}{4}\sum \frac{\log p \cos(2m\gamma_r \log p)}{p^{ms}} = \frac{1}{4}\Re\frac{\zeta'(s+2i\gamma_r)}{\zeta(s+2i\gamma_r)} <$$

$$< \frac{1}{4} C_4 \log 2\gamma_r =$$

$$= \frac{1}{4} C_4 (\log \gamma_r + \log 2) <$$

$$< C_5 \log \gamma_r ,$$

kui C_5 on küllalt suur.

Nagu teada, on ζ-funktsioonil üks ainus isearaline punkt: ühekordne naba $s=1$. Seega võime kirjutada, arendades $\zeta(s)$ Laurenti reaks

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + \ldots .$$

Differentseerides seda, leiame

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + c_1 + 2c_2(s-1) + \ldots ,$$

ja edasi

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{(s-1)^2}\left[1 - c_1(s-1)^2 - 2c_2(s-1)^3 + \ldots\right]}{\frac{1}{s-1}\left[1 + c_0(s-1) + c_1(s-1)^2 + \ldots\right]} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{s-1}\left(1 - c_1(s-1)^2 - 2c_2(s-1)^3 + \ldots\right)}{\left(1 + c_0(s-1) + c_1(s-1)^2 + \ldots\right)} =$$

$$= -\frac{1}{s-1}\left[1 + d_1(s-1) + d_2(s-1)^2 \ldots\right] =$$

$$= -\frac{1}{s-1} + \left[-d_1 - d_2(s-1) - \ldots\right]_1 .$$

Rida $[\ ]_1$ koondub igalpool. s on vahemikus $(1,2)$; rida on seal lõplik, tal on seal maksimum, mida tähtime C_6:ga. Siis võime kirjutada

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leq -\frac{1}{s-1} + C_6 = -\frac{1}{s-1} + O(1).$$

Seega on

$$\frac{1}{s-\beta_r} < C_4 \log \gamma_r - \frac{3}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{4} O(1) +$$

$$+ C_5 \log \gamma_r ;$$

$$\frac{1}{s-\beta_r} < \frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + C_7 \log \gamma_r ,$$

kus konstant C_7 sisaldab ka teised eelmises avaldises esinevad konstandid.

Oletasime: $1 < s \leq 2$. γ_r oli mis tahes ($\gamma_r \geq 2$), kuid, juba kord valitud, siis kindel ζ-funktsiooni nullpunkt. Paneme

$$s = 1 + \frac{g}{\log \gamma_r} ,$$

kus $\log 2 \geq g > 0$, millest järgneb $1 < s \leq 2$. Leiame

$$\frac{1}{s-\beta_r} = \frac{1}{1 + \frac{g}{\log \gamma_r} - \beta_r} <$$

$$< \frac{3}{4}\frac{1}{\frac{g}{\log \gamma_r}} + C_7 \log \gamma_r =$$

$$= \log \gamma_r \left(\frac{3}{4g} + C_7\right),$$

ja, võttes ümberpööratud väärtused, võime kirjutada

$$1 - \beta_r + \frac{g}{\log \gamma_r} > \frac{1}{\frac{3}{4g} + C_7} \cdot \frac{1}{\log \gamma_r} ,$$

$$1 - \beta_r > \left[\frac{1}{\frac{3}{4g} + C_7} - g\right] \cdot \frac{1}{\log \gamma_r} ,$$

$$1 - \beta_r > \frac{\frac{1}{4} - C_7 g}{\frac{3}{4g} + C_7} \cdot \frac{1}{\log \gamma_r} .$$

On g küllalt väike, siis on

$$\frac{\frac{1}{4} - C_7 g}{\frac{3}{4g} + C_7} = \frac{1}{a} > 0 ,$$

sest siis on nii hästi $(\frac{1}{4} - C_7 g)$, kui $(\frac{3}{4g} + C_7)$ positiivne. Võime kirjutada

$$\beta_r < 1 - \frac{1}{a}\frac{1}{\log \gamma_r} .$$

On nullpunkti imaginaar-osa suurem kui 2, siis on $\beta_r < 1$. Kõik nullpunktid on seega kõvera $1 - \frac{1}{a}\frac{1}{\log \gamma_r}$ pahemalpool; poleks nad seda, siis oleks

$$\beta_r > 1 - \frac{1}{a}\frac{1}{\log \gamma_r} ,$$

mis tõeolule ei vasta.

Lause on tõendatud: imaginaarsete nullpunktide riba on kitsendatud.

<u>Märkus</u>: Konstanti a on katsutud arvutada nii mitmelgi viisil ja muu seas on Landau:le[1] korda läinud leida, et a:ks võib olla iga arv, mis $> 18,52\ldots\ldots$.

---

[1] Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (S. 321-324).

5. ζ-funktsiooni nullpunktide arv sirgel $\sigma = 1/2$.

Oleme tõendanud, et ζ-funktsiooni imaginaarsed nullpunktid asuvad kõik ribas $0 < \sigma < 1$ ja et neid on seal lõpmata mitu. Peale selle teame, et $\zeta(s)$:i nullpunktid ses ribas asetsevad reaal-telje ja sirge $\sigma = 1/2$ suhtes sümmeetriliselt ja et on olemas niisugune positiivne konstant a, et piirkonnas

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a}\frac{1}{\log t}, \quad t \geqq 2,$$

ühtegi $\zeta(s)$:i nullpunkti pole.

Täpsamad teated imaginaarsete nullpunktide seisu üle aga puuduvad seni. Selle kohta on olemas ainult hüpotees, mis, nagu juba öeldud, ülesseatud Riemanni poolt ja mille järele need nullpunktid asuvad kõik sirgel $\sigma = 1/2$.

See hüpotees on seni tõendamata, kuid ta lahendusele sihitud uurimistel on saavutatud nii mõnigi huvitav ja väga tähtis resultaat. Nii tõendas, näituseks, Hardy[1] esimesena, et sirgel $\sigma = 1/2$ on lõpmata mitu $\zeta(s)$:i nullpunkti. Tõendust on pärastpoole lihtsustanud Landau[2] ja Mellin[3].

---

[1] Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (Comptes rendus, T. 158, 1914).

[2] Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit dem reellen Teil 1/2 (Math. Annalen, Bd. 76, 1914).

[3] Bemerkungen im Anschluss an den Beweis eines Satzes von Hardy über die Zetafunktion (Annales Acad. scient. Fennicae, T. XI, 1918).

Tõestame selle lause, kasutades θ-rida.

<u>Lause</u>: Sirgel $\sigma = 1/2$ on lõpmata mitu $\zeta(s)$:i nullpunkti.

<u>Tõestus</u>: Teame, et

(19)' $$\eta(s) = \Gamma(s/2)\, \pi^{-s/2} \zeta(s)$$

rahuldab funktsioon-võrrandit

$$\eta(s) = \eta(1-s).$$

Olgu $s = 1/2 + it$. Tähtime

$$\eta(s) = \eta(1/2 + it) = \varrho(t).$$

Võime kirjutada

$$\eta(1/2 + it) = \eta(1/2 - it).$$

$\eta(1/2+it)$ ja $\eta(1/2-it)$ on kaasarvud, sest kõik η-funktsiooni tegurite, s.o. nii tähti Γ-funktsiooni kui ζ-funktsiooni ja ka elementaar-funktsiooni $\pi^{-s/2}$ väärtused on kaasarvud, kui muutujad on kaasarvud, on ju need funktsioonid reaalsed reaalteljel. Kaks kaasarvu on võrdsed aga ainult siis, kui imaginaar-osad on $= 0$, seega on $t = 0$, arvud peavad olema reaalsed.

$$\eta(1/2 + it) = \varrho(t)$$

on reaalne.

$$\eta(1/2 + it) = \eta(1/2 - it),$$
$$\varrho(t) = \varrho(-t).$$

ϱ on paaris-funktsioon.

Väidame, et $\zeta(s)$:i nullpunktile sirgel $\sigma = 1/2$ vastab $\varrho(t)$ reaalne nullpunkt ja ümberpöördult.

On $\zeta(s) = 0$, siis on ka korrutis

$$\Gamma(s/2)\, \pi^{-s/2} \zeta(s) = 0,$$

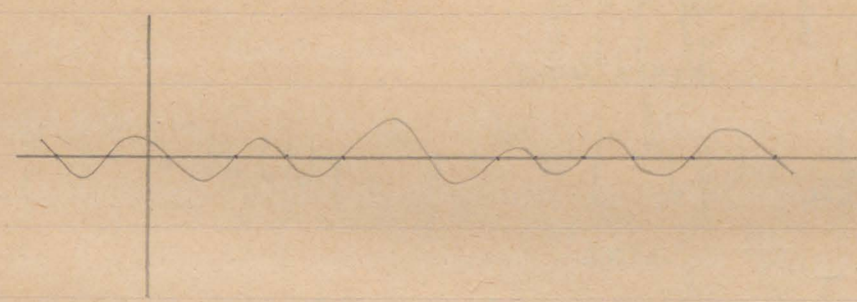
seega $\eta(s) = 0$, s. o. $\varrho(t) = 0$.

On nüüd ümberpöördult t ϱ-funktsiooni nullpunkt, siis on $\varrho(t) = \eta(1/2 + it) = 0$,

seega $\Gamma(1/4 + i\frac{t}{2})\, \pi^{-1/4 - i\frac{t}{2}} \zeta(1/2 + it) = 0$. Et aga $\Gamma(s/2) \neq 0$ ja $\pi^{-s/2} \neq 0$, siis peab olema $\zeta(1/2 + it) = 0$. Igale ϱ-funktsiooni reaalsele nullpunktile (t on reaalne) vastab ζ-funktsiooni nullpunkt sirgel $\sigma = 1/2$. Tähendab, tarvis uurida ϱ-funktsiooni reaalseid nullpunkte.

Tõestame, et reaalsel funktsioonil $\varrho(t)$ on lõpmata mitu nullpunkti.

Graafiliselt esineks siis $\varrho(t)$ nii:



Nähtavasti on tarvis, et ϱ-funktsiooni märk muutuks lõpmata mitu korda: $\varrho(t)$ on, nimelt, pidev ja ei muuda seega märki teisiti, kui saades enne seda nulliks.

Kasutame Mellini valemit. Kirjutame

(19)' järele
$$\int_{1/2 - i\infty}^{1/2 + i\infty} \Gamma(s/2)\, y^{-s/2} \zeta(s)\, ds = \int_{1/2 - i\infty}^{1/2 + i\infty} \left(\frac{\pi}{y}\right)^{s/2} \eta(s)\, ds =$$

$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{y}\right)^{1/4 + i\frac{t}{2}} \eta(1/2 + it)\, dt =$$

$$= i \left(\frac{\pi}{y}\right)^{1/4} \left\{ \int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{y}\right)^{i\frac{t}{2}} \varrho(t)\, dt - \int_0^{-\infty} \left(\frac{\pi}{y}\right)^{i\frac{t}{2}} \varrho(t)\, dt \right\} =$$

$$= i \left(\frac{\pi}{y}\right)^{1/4} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\pi}{y}\right)^{i\frac{t}{2}} + \left(\frac{\pi}{y}\right)^{-i\frac{t}{2}} \right] \varrho(t)\, dt.$$

<u>Seletus</u>: Oleme siin 1) võtnud uueks muutujaks $s = \frac{1}{2} + it$ ja 2) kasutanud seda, et $\xi(t) = \xi(-t)$.

Paneme

$$y = \pi e^{2\alpha i},$$

kus $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. $2\alpha = \arg y$ ja, et α on ülevalt tähendatud vahemikus, siis võime, nagu teada, kasutada Mellini valemit, mis on järgmine:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 y} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{y}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2 - i\infty}^{1/2 + i\infty} \Gamma(s/2) y^{-s/2} \zeta(s)\, ds,$$

kui $-\frac{\pi}{2} < \arg y < \frac{\pi}{2}$.

Kirjutame

$$\frac{1}{2\pi i}\, i \left(\frac{\pi}{y}\right)^{1/4} \int (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})\, \xi(t)\, dt = -1 - \frac{\pi}{y} +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi e^{2\alpha i}}.$$

Korrutame $2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}}$:ga ja leiame

$$\int_0^\infty (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})\, \xi(t)\, dt = -2\pi \left(e^{\frac{\alpha i}{2}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\alpha i}{2}} + 2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \right) \sum e^{-n^2 \pi e^{2\alpha i}}.$$

Euleri valemi järele on

$$e^{\pm \frac{\alpha i}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2} \pm i \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Seega võime kirjutada

$$\int_0^\infty (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})\, \xi(t)\, dt = -4\pi \cos\frac{\alpha}{2} + 2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi e^{2\alpha i}}.$$

Näitame nüüd, et

$$(20) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi e^{2\alpha i}} \to 0,$$

kui $\alpha \to \frac{\pi}{4}$, s. o., näitame, et

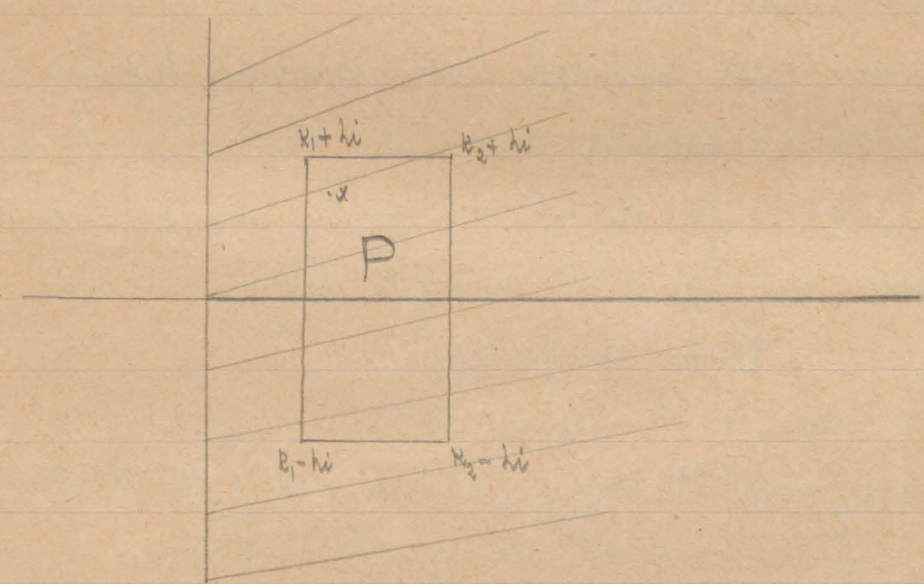
$$(21) \qquad \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{4}} \int_0^\infty (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})\, \xi(t)\, dt = 4\pi \cos\frac{\pi}{8}.$$

Kasutame Θ-rida:

$$(22) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{x}},$$

kui $x > 0$ ja reaalne.

Tõendame, et see valem maksab ka siis, kui x on kompleks-arv ja $R(x) > 0$.



Joon. 5.

Konstrueime püstküliku, millesse jääb x. Näitame, et mõlemad read koonduvad ühtlaselt ses püstkülikus. Koondub mõni rida ühtlaselt, siis on, nagu teada, tema esitatud funktsioon korrapärane. Langevad aga korrapäraste funktsioonide väärtused mõnel sirgetükil (käesoleval juhusel reaal-teljel) ühte, siis langevad nad analüütilise jätkamise põhjusmõtte järele ühte ka terves püstkülikus, seega ka x:is.

Olgu tõendatud, et read koonduvad ühtlaselt P:s. Siis on nad korrapärased püstkülikus

P ja seega ka pooltasapinnal $\mathfrak{R}(x) > 0$, sest püstkiilu võime konstrueida kui tahte suure. Et aga nende ridade väärtused reaal-teljel ühte langevad, siis on analüütilise jätkamise põhjusmõtte järele nende esitatud funktsioonid tervel mainitud pooltasapinnal samad. (22) maksab tervel pooltasapinnal $\mathfrak{R}(x) > 0$. Võime kirjutada

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi(x-i)},$$

pole see ju muud, kui lihtne samasus: on, nimelt, n paaris-arv, siis on $(-1)^n = +1$ ja $e^{-n^2\pi i} = +1$, seega on need paremal pool esinevad tegurid mõjuta; on n paarita arv, siis on $(-1)^n = -1$ ja $e^{-n^2\pi i} = -1$ ja et $-1 . -1 = +1$, siis pole ka sel juhusel neil teguritel mingit mõju.

Võime kirjutada

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi(x-i)} + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2n)^2\pi(x-i)}.$$

Kasutame nüüd θ-valemit, oletades: $\mathfrak{R}(x-i) > 0$ ja leiame

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x} = -\frac{1}{\sqrt{x-i}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x-i}} + 2\,\frac{1}{2\sqrt{x-i}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{4(x-i)}} =$$

$$= 2\left\{-\frac{1}{\sqrt{x-i}}\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x-i}} + \frac{1}{\sqrt{x-i}}\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{4(x-i)}}\right\} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x-i}}\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{2(x-i)}} . e^{-\frac{n^2\pi}{2(x-i)}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{x-i}}\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{8(x-i)}} . e^{-\frac{n^2\pi}{8(x-i)}} .$$

Harutame

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right).$$

$$x = e^{2\alpha i}.$$

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{1}{e^{2\alpha i} - i}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{1}{\cos 2\alpha + i(\sin 2\alpha - 1)}\right) =$$

$$= \mathfrak{R}\left(\frac{\cos 2\alpha - i(\sin 2\alpha - 1)}{\cos^2 2\alpha + \sin^2(2\alpha - 1)}\right) =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{2(1 - \sin 2\alpha)}.$$

$$\lim_{\alpha = \frac{\pi}{4}} \mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \lim_{\alpha = \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\alpha}{2(1-\sin 2\alpha)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{\alpha = \frac{\pi}{4}} \frac{\pm 2\sin 2\alpha}{\mp 2 . 2\cos 2\alpha} = \frac{2}{0} = \infty.$$

Olgu $n = 1$.

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x}\right| < \frac{2}{|\sqrt{x-i}|} e^{-\frac{\pi}{2}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)} \sum_{n=1}^{\infty}{}_{\mathrm{I}}\, e^{-\frac{n^2\pi}{2}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)} +$$

$$+ \frac{2}{|\sqrt{x-i}|} e^{-\frac{\pi}{8}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)} \sum_{n=1}^{\infty}{}_{\mathrm{II}}\, e^{-\frac{n^2\pi}{8}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)}.$$

Esimene rida $\sum_{\mathrm{I}}$ koondub ja on väiksem kui mõni konstant L_1, kui α on $\frac{\pi}{4}$:le küllalt lähedal. Samuti koondub $\sum_{\mathrm{II}}$ ja on väiksem mõnest konstandist L_2. Edasi leiame

$$\frac{1}{|\sqrt{x-i}|} e^{-\frac{\pi}{2}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)} = \left|\frac{1}{x-i}\right|^{1/2} e^{-\frac{\pi}{2}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)}.$$

Kui nüüd võtame arve, et üldse $|a+ib| \leq |a| + |b|$.

ja et

$$\mathfrak{J}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{-(\sin 2\alpha - 1)}{2(1-\sin 2\alpha)} = \frac{1-\sin 2\alpha}{2(1-\sin 2\alpha)} = \frac{1}{2},$$

siis võime edasi kirjutada

$$\left|\frac{1}{x-i}\right|^{1/2} e^{-\frac{\pi}{2}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)} \leq \left(\left|\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)\right| + \left|\mathfrak{J}\left(\frac{1}{x-i}\right)\right|\right)^{1/2} e^{-\frac{\pi}{2}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)} <$$

$$< 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right) e^{-\frac{\pi}{2}\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)},$$

viimane aga $\to 0$, kui $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right) \to \infty$, $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x-i}\right)$ aga $\to \infty$, kui $\alpha \to \frac{\pi}{4}$.

Samuti võime näidata, et ka

$$\frac{1}{|x-i|}\, e^{-\frac{\pi}{8}\Re\left(\frac{1}{x-i}\right)} \to 0,$$

Seega läheneb nullile terve summa, kui ainult $\alpha \to \frac{\pi}{4}$.

(20), millest järgneb otsekohe (21), on tõendatud.

Tõendame nüüd kord juba ülesseatud väite.

<u>Väide</u>: $\varrho(t)$ muudab märki lõpmata mitu korda.

<u>Vastuoletus</u>: $\varrho(t)$ märk ei muutu, kui $t > t_0$ ja t kasvab (s. o. märgivahetusi on lõplik arv).

(21):st näeme, et on olemas $\int\limits^{\infty}\ldots$, tähendab, on olemas ka $\int\limits_{t_0}^{\infty}$, kuid praeguse oletuse järele jääb ta märk t_0:st saadik muutmata.

Hindame integreeritavat funktsiooni.

$$\varrho(t) = \eta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = \Gamma\left(\tfrac{1}{4}+i\tfrac{t}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right).$$

Stirlingi valemi järele on

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{4}+i\tfrac{t}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{t}{2}}\cdot t^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\,K_1\left(1+o(1)\right),$$

$$\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{4}+i\tfrac{t}{2}\right)\right| > e^{-\frac{\pi}{2}t}\cdot t^{-\frac{1}{4}}\cdot 2K_1,$$

kui t on küllalt suur, kui $t > t_1$.

$$\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{4}+i\tfrac{t}{2}\right)\right| > e^{-\frac{\pi}{2}t}\cdot t^{-\frac{1}{4}}\,K_2,$$

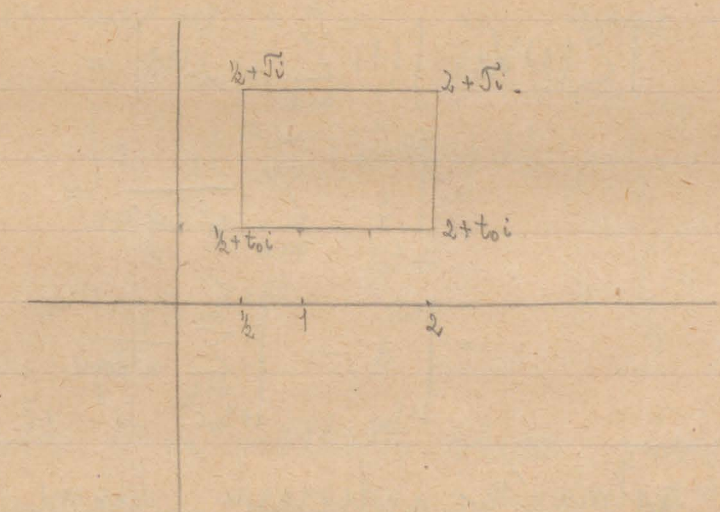
kui $t > t_0$.

Paneme $\alpha = \frac{\pi}{4} - \delta$. Kirjutame

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)t}\,|\varrho(t)|\,dt > \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\delta t}\, t^{-\frac{1}{4}} K_2 \pi^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| dt.$$

Esimesel neist integraalidest on olemas limes, tähendab, teisel, mis temast väiksem, on olemas limes veel suuremal põhjusel.

$\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\delta t}\, t^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| dt$ on olemas. Väidame, et seda limes't olemas pole.



Joon. 6.

Võime kirjutada Cauchy integraal-lause põhjal

$$\int\limits_{\square}\zeta(s)\,ds = 0, \quad (\square \text{ joon. } 6).$$

Jaotame selle integraali neljaks integraaliks.

$$\int\limits_{\square} = \int\limits_{\frac{1}{2}+t_0 i}^{\frac{1}{2}+Ti}\zeta(s)\,ds + \int\limits_{\frac{1}{2}+Ti}^{2+Ti}\zeta(s)\,ds + \int\limits_{2+Ti}^{2+t_0 i}\zeta(s)\,ds + \int\limits_{2+t_0 i}^{\frac{1}{2}+t_0 i}\zeta(s)\,ds.$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}+t_0 i}^{\frac{1}{2}+Ti}\zeta(s)\,ds = \int\limits_{\frac{1}{2}+t_0 i}^{2+t_0 i}\zeta(s)\,ds + \int\limits_{2+t_0 i}^{2+Ti}\zeta(s)\,ds + \int\limits_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\zeta(s)\,ds =$$

$$= \overline{\underline{I}} + \overline{\underline{II}} + \overline{\underline{III}}.$$

Võttes uueks muutujaks $s = \frac{1}{2} + ti$, leiame

$$\int_{\frac{1}{2}+t_0 i}^{\frac{1}{2}+Ti} \zeta(s)\,ds = i \int_{t_0}^{T} \zeta(\tfrac{1}{2}+ti)\,dt.$$

ζ-funktsioon on esimesel integreerimis-teel lõplik, see tee ka lõplik, tähendab integraal $\underline{I}$ on lõplik.

$$\overline{\underline{I}} = O(1).$$

Integraalis $\underline{II}$ on $\sigma > 1$ ja seega võime kirjutada

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Võime integreerida liigeti, sest ülemine rida koondub ühtlaselt. Kirjutame

$$\int \zeta(s)\,ds = \int \Big(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}\Big)\,ds =$$

$$= \Big| _{2+t_0 i}^{2+Ti} s - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n} =$$

$$= \Big| _{2+t_0 i}^{2+Ti} s - \Big| _{2+t_0 i}^{2+Ti} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n}.$$

Arvutades kolmanda integraali, leiame

$$\zeta(\sigma + iT) = O(T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) = o(T),$$

sest $\frac{T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}}{T} \to 0$, kui $n \to \infty$.

Seega on

$$\zeta(s) = o(T).$$

$$\int \zeta(s) = \int_2^{\frac{1}{2}} o(T)\,d\sigma.$$

$$i \int_{t_0}^{T} \zeta(\tfrac{1}{2}+it)\,dt = O(1) + \Big| _{2+t_0 i}^{2+Ti} \Big(s - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n}\Big) +$$

$$+ \int_2^{\frac{1}{2}} O(T)\,d\sigma =$$

$$= O(1) + Ti + O(1) + o(T).$$

Siit paistab selgesti, et ülemise avalduse moodul on suurem kui $\frac{T}{2}$. Võime kirjutada

$$\frac{T}{2} < \Big| \int_{t_0}^{T} \zeta(\tfrac{1}{2}+ti)\,dt \Big| \leqq$$

$$\leqq \int_{t_0}^{T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+ti)|\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} e^{-\delta t} t^{-\frac{1}{4}} |\zeta(\tfrac{1}{2}+ti)| e^{\delta t} t^{\frac{1}{4}}\,dt <$$

$$< e^{\delta t} T^{\frac{1}{4}} \int_{t_0}^{T} e^{-\delta t} t^{-\frac{1}{4}} |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|\,dt,$$

ja jagades saaduse $e^{\delta T} T^{\frac{1}{4}}$:ga, leiame

$$\int_{t_0}^{T} e^{-\delta t} t^{-\frac{1}{4}} |\zeta(\tfrac{1}{2}+ti)|\,dt > \frac{T^{\frac{3}{4}}}{2} \cdot e^{-\delta T} >$$

$$> \frac{T^{\frac{3}{4}}}{4},$$

kui ainult δ on küllalt väike, võrreldes T:ga. Meie integraal on seega suurem kui $\frac{T^{\frac{3}{4}}}{4}$, viimane aga võib saada kui tahte suureks, on ju T kui tahte suur. Meie integraal ei olene T:st ja võib saada kui tahte suureks. Ta on väiksem, kui $\int_{t_0}^{\infty}$ ja seega on viimane veel suuremal põhjusel $> \frac{T^{\frac{3}{4}}}{4}$ ja nii siis pole olemas $\lim_{\delta=0} \int_{t_0}^{\infty} \ldots$. Sel kombel oleme leidnud ühelt poolt, et on olemas $\lim_{\delta=0} \int_{t_0}^{\infty}$, teiselt poolt aga leidsime, et teda olemas pole. Seega viib meid oletus, et $g(t)$ märgivahetuste arv on lõplik, vastolule. Selge, et see oletus on vale. $g(t)$ märk muutub lõpmata mitu korda. Muutub aga lõpmata mitu korda $g(t)$ märk, siis tähendab see, nagu juba eespool ütlesime, et <u>$\zeta(s)$:il on singel</u>

$\sigma = 1/2$ lõpmata mitu nullkohta.

6. Sirgel $\sigma = 1/2$ asuvate nullkohtade numeeriline arvutus.

Nagu eelpool esitatud andmetest selgesti paistab, pole seni veel suudetud täpsalt äramäärata $\zeta(s)$:i imaginaarsete nullpunktide seisu. Teooria ei anna vastust sellele küsimusele.

Niisugusel korral on, iseenesest mõista, suur tähtsus numeerilistel arvutustel.

Neid arvutusi on sooritatud nii mitmegi uurija poolt, vaatamata sellest, et see töö nõutava täpsuse tõttu pikk ja väsitav.

1887 a. leidis Stieltjes[1], et esimesele $\zeta(s)$:i nullpunktile sirgel $\sigma = 1/2$ vastav ordinaat on umbes 14.5.

Samal 1887 a. määras Jensen[2] selle ordinaadi alumiseks piiriks 8.4.

1895 a. tõendas von Mangoldt[3], et $\xi(s)$:il ($\xi(s)$:i ja $\zeta(s)$:i nullkohad on, nagu teada, samad), pole ühtegi nullpunkti, mille ordinaat oleks absoluutselt vähem kui 12.

---

[1] Lettres de Stieltjes à Mittag-Leffler sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (Lettre 4, 1887; Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris 1905, T. II, lehek. 449).

[2] Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (Comptes rendus, T. 104, 1887).

[3] Zu Riemanns Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (Crelles Journal, Bd. 114, 1895).

Edasi leidis J.-P. Gram[1], et sirgel $\sigma = 1/2$ on 3 nullpunkti, mille ordinaadid on umbes 14.135, 20.82 ja 25.1 ja De la Vallée Poussin[2] tõendas, et väljaspool sirget $\sigma = 1/2$ pole ühtegi nullkohta, mille ordinaat oleks absoluutselt $< 28,588$.

Kõik eelpool nimetatud uurimistööd põhjenesid muu seas ζ-funktsiooni korrutis-esitusel.

Ühes hilisemas töös arvutab Gram[3] suure täpsusega 10 $\zeta(s)$:i nullpunkti vahemikus $0 < t < 50$, ($\sigma = 1/2$) ja annab viie teise nullpunkti umkaudset väärtused, mille ordinaadid on 50 ja 65 vahel. Tema metood seisab peaasjalikult otsekoheses numeerilises nullkohtade leidmises.

Samal ajal kui Gram leidis E. Lindelöf[4] lihtsama metoodi nullpunktide arvutamiseks sirgel $\sigma = 1/2$ ja näitas, et sel sirgel asub vahemikus $0 < t < 50$ 10 nullkohta.

---

1) Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1895).

2) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Academie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Tome LIX, 1899-1900).

3) Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1902).

4) Quelques applications d'une formule sommatoire générale (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Bd. 31, 1902).

Lindelöfi metoodi tarvitab ja arendab Backlund[1]. Sel metoodil, mille juures leitakse resultaadid residi-arvutuse abil ja mis esitakse selle töö lõpul, on Backlund leidnud, et $\zeta(s)$:il on vahemikus $0 < t < 100$ 29 sirgel $\sigma = 1/2$ asuvat nullpunkti ja, et neile 29:le juure tulevad nendele sümmeetrilised punktid, siis oleks seega kokku leitud 58 $\zeta(s)$:i nullpunkti.

Pärast laiendas Backlund vahemikku ja leidis, et vahemikus

$$0 < t < 200$$

on 79 nullpunkti ja need nullpunktid on kõik sirgel $\sigma = 1/2$.

See oleks peajoontes kõik, mis on saavutatud ζ-funktsiooni nullpunktide küsimuse uurimisel. Riemanni hüpoteesi lõpulikule lahendusele ei ole, nagu näha, need uurimised viinud, lõpusõna selle probleemi kohta on alles ütlemata; jääb ainult loota et seni saavutatud resultaadid kord võimaldavad probleemi lõpuliku otsustamise.

---

1) Einige numerische Rechnungen die Nullpunkte der Riemannschen ζ-Funktion betreffend (Öfversigt af Finska Vetenskapssocietetens Förhandlingar, Bd. LIV, 1912).

7. $\zeta(s)$:i imaginaarsete nullpunktide arvutamine Backlundi meetodil.

Lõpetame töö sellega, et siinkohal esitame meetodi, mille abil Backlund[1] arvutab $\xi(s)$:i nullpunktid sirgel $\sigma = 1/2$.

Nagu teada, on $\xi(s)$ reaalne sirgel $\sigma = 1/2$. Seega võime eraldada sel sirgel asuvad (ühekordsed) $\xi(s)$:i nullkohad, määrates selle funktsiooni märgi küllalt tihedalt valitud punktides, s. o. tehes kindlaks, kas ülejääk 2π järele ~~arg~~ $\xi(1/2 + it)$:st on 0 või π.

Selleks määrame kõigepealt $\arg \xi(1/2 + it)$, võttes selle ta väärtuse, mis tekib, kui s liigub punktist $s = 2$ rööbiti imaginaar-teljega punktini $(2 + ti)$ ja sealt edasi, rööbiti reaal-teljega punktini $(1/2 + ti)$.

Paneme nüüd

(23) $\quad \arg \xi(1/2 + ti) = \vartheta(t) + \arg \zeta(1/2 + ti)$

ja määrame $\vartheta(t)$.

Lähtekohaks on meil avaldus (2), mille järele

$$\arg \xi(s) = \arg s + \arg(s-1) + \arg \pi^{-s/2} + \arg \Gamma(s/2) + \arg \zeta(s).$$

Meil on $s = 1/2 + ti$. Määrame $\arg s$ ja $\arg(s-1)$.

$$\arg s = \arg(1/2 + ti) = \arg\left\{\left(1 - \frac{1}{2t} i\right) \cdot ti\right\} = \arg\left\{e^{\log(1 - \frac{1}{2t} i)} \cdot e^{\log ti}\right\} =$$
$$= \arg e^{\log(1 + \frac{1}{4t^2}) + i \operatorname{arc tg}(-\frac{1}{2t})} \cdot e^{\log t^2 + i \operatorname{arc tg} \frac{t}{0}} =$$

[1] Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion (Academische Abhandlung, Helsingfors, 1916).

$$= \arg e^{\log(1 + \frac{1}{4t^2}) t^2 + i(\operatorname{arc tg} \infty - \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t})} =$$
$$= \operatorname{arc tg} \infty - \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t}.$$

Märkus: log:st võtame peaharu.

$$\arg(s-1) = \arg\left(-\frac{1}{2} + ti\right) = \arg\left\{\left(1 + \frac{1}{2t} i\right) \cdot ti\right\} =$$
$$= \arg\left\{e^{\log(1 + \frac{1}{2t} i)} \cdot e^{\log(ti)}\right\} =$$
$$= \arg e^{\log(1 + \frac{1}{4t^2}) + i \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t}} \cdot e^{\log t^2 + i \operatorname{arc tg} \frac{t}{0}} =$$
$$= \arg e^{\log(1 + \frac{1}{4t^2}) \cdot t^2 + i(\operatorname{arc tg} \infty + \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t})} =$$
$$= \operatorname{arc tg} \infty + \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t}.$$

Edasi leiame $\arg \pi^{-s/2}$.

$$\arg \pi^{-s/2} = \arg \pi^{-1/4 - \frac{t}{2} i} = \arg e^{(-1/4 - \frac{t}{2} i) \log \pi} =$$
$$= -\frac{t}{2} \log \pi.$$

Lõpuks tuleb veel leida $\arg \Gamma(s/2)$. Teame, et

(24) $\quad \log \Gamma(s) = (s - 1/2) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + J(s),$

kus

(25) $\quad J(s) = -\int_0^\infty \frac{P_1(u)}{s+u} du,$

misjuures

(25') $\quad P_1(u) = u - [u] - 1/2.$

Märkus: $[u]$ on kõige suurem täisarv, mis $\leq u$.

Tasapinna lahti lõigates reaal-telge mööda 0:st kuni ∞:ni, leiame, et nii lõigatud tasapinnal $\log \Gamma(s)$ ja $\arg \Gamma(s) = \mathfrak{I} \log \Gamma(s)$ on ühesed ja võime kirjutada

$$\arg \Gamma(s/2) = \mathfrak{I} \log \Gamma\left(1/4 + \frac{t}{2} i\right).$$

(24):st saame

$$\mathfrak{I} \log \Gamma(s/2) = \frac{t}{2} \log \frac{|s|}{2} + \frac{\sigma - 1}{2} \arg s - \frac{t}{2} +$$
$$+ \mathfrak{I} J(s).$$

Siit leiame $s = 1/2 + ti$ puhul, arendades t järele

$$\mathfrak{I} \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2} i\right) = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + R(t),$$

kus

(26) $\quad R(t) = \mathfrak{I} J\left(1/4 + \frac{t}{2} i\right) + \frac{t}{4} \log\left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{arc tg} \frac{1}{2t}.$

<u>Seletus</u>: 1) $\frac{t}{2}\log\frac{|s|}{2} = \frac{t}{2}\log\frac{|1/2+ti|}{2} =$
$= \frac{t}{2}\log\left\{\frac{|\frac{1}{2t}+i|}{\frac{2}{t}}\right\} = -\frac{t}{2}\log\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\log\sqrt{\frac{1}{4t^2}+1} =$
$= \frac{t}{2}\log\frac{t}{2} + \frac{t}{4}\log\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)$; 2) $\frac{s-1}{2}\arg s =$
$= \frac{1/2-1}{1/2}\arg(1/2+ti) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2t}\right) =$
$= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2t}$, sest $s = \frac{1}{2}+ti$ ja $\arg s =$
$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2t}$, nagu juba leidsime eelmisel lehekül-
jel.

Need saadused aga annavad

(27) $\vartheta(t) = \frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} + \frac{7}{8}\pi + R(t)$,

kus $R(t)$ on määratud (26) põhjal. Edasi paneme

(28) $\vartheta(t) = \lambda_1 \cdot 2\pi + \omega_1$,

$\arg\zeta(1/2+ti) = \lambda_2 \cdot 2\pi + \omega_2$,

kusjuures määrame täisarvud λ_1 ja λ_2 nii, et maksaksid ebavõrrandid

(29) $-\pi < \omega_1 \leq \pi$, $-\pi \leq \omega_2 < \pi$.

Siis on

$$|\omega_1 + \omega_2| < 2\pi.$$

$(\omega_1 + \omega_2)$ peab olema π täiskordne, seega

(30) $\omega_1 + \omega_2 = 0$

ehk

(31) $\omega_1 + \omega_2 = \pm\pi$.

Esimesel juhusel on

$$\xi(1/2+ti) > 0.$$

Teisel juhusel on

$$\xi(1/2+ti) < 0.$$

Nagu teame, on

$$\Re\zeta(1/2+ti) = |\zeta(1/2+ti)|\cos\omega_2$$

ja seega võib kirjutada juhusel (30)

(32) $\Re\zeta(1/2+ti) = +|\zeta(1/2+ti)|\cos\omega_1$;

juhusel (31) aga on

(33) $\Re\zeta(1/2+ti) = -|\zeta(1/2+ti)|\cos\omega_1$.

Samuti näeme, et juhusel (30) on

(34) $\Im\zeta(1/2+ti) = -|\zeta(1/2+ti)|\sin\omega_1$

ja juhusel (31)

(35) $\Im\zeta(1/2+ti) = +|\zeta(1/2+ti)|\sin\omega_1$.

Ümberpööratult, kui rahuldub üks võrranditest (32) ja (34), siis võib sellest järeldada, et on tegemist juhusega (30) ja et nii siis on: $\xi(1/2+ti) > 0$. Kui aga maksab üks võrranditest (33) ja (35), siis on tegemist juhusega (31) ja meil on: $\xi(1/2+ti) < 0$. $\xi(1/2+ti)$ märgi määrame järelikult, määrates kindlaks: 1) ω_1:e kvadrandi ja 2) $\Re\zeta(1/2+ti)$ ehk $\Im\zeta(1/2+ti)$ märgi.

ω_1:e määramiseks on meil olemas $\vartheta(t)$, mida arvutame (27) järele, kinnates selleks kõigepealt jääkliiget $R(t)$. Ositi integreides, saame (25):st $J(s)$:i jaoks[1]

$$J(s) = \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{s^3} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{s^{2k-1}} + J_k(s),$$

kus $B_1, B_2, \dots$ on Bernoulli arvud, mis avalduvad kujul

(36) $$B_k = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}.$$

Siin on

$$J_k(s) = -\frac{1}{2k+2}\int_0^{\infty}\frac{\overline{P}_{2k+2}(u)}{(s+u)^{2k+2}}\,du,$$

---

[1] E. Lindelöf. Le calcul des residus (p. 95-97).

misjuures

$$\bar{P}_{2\kappa+2}(u) = \bar{\varphi}_{2\kappa+2}(u) + (-1)^{\kappa+1} B_{\kappa+1} .$$

$\sigma > 0$ puhul aga maksab siin Stieltjes:i[1] järele hindamine

$$|J_\kappa(s)| < 2^{\kappa+2} \frac{B_{\kappa+1}}{(2\kappa+1)(2\kappa+2)} \frac{1}{|s|^{2\kappa+1}} .$$

Peatades esimese liikme juures, leiame

$$J(s/2) = \frac{1}{6s} + J_1(s/2).$$

ja siin oleks meil, oletades $t > 0$,

$$|J_1(s/2)| < \frac{4}{45} \frac{1}{|s|^3} \leqq \frac{4}{45t^3} .$$

Kui nüüd tähtime $\{x\}$:ga positiiv-suuruse, mis väiksem x:st, siis on meil $s = \frac{1}{2} + ti$, $t > 0$ puhul

$$\mathfrak{I} \frac{1}{6s} = -\frac{1}{6t} + \left\{\frac{1}{24t^3}\right\},$$

$$\frac{t}{4} \log\left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) = \frac{1}{16t} - \left\{\frac{1}{128t^3}\right\},$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2t} = \frac{1}{8t} - \left\{\frac{1}{96t^3}\right\},$$

kust järgneb

$$\mathfrak{R}(t) = \frac{1}{48t} + \left(\frac{1}{t^3}\right),$$

misjuures

$$\left|\left(\frac{1}{t^3}\right)\right| < \frac{1}{24t^3} + \frac{4}{45t^3} < 0.2\,t^{-3}.$$

Jääb kindlaks teha $\mathfrak{R}\zeta(s)$:i ehk $\mathfrak{I}\zeta(s)$:i märk, milleks tuleb määrata need suurused. Nagu teada, võib kirjutada

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_0^\infty \frac{\bar{\varphi}_1(u)}{u^{s+1}} du,$$

kus $\bar{\varphi}_1(u)$ on (25)'.

Selle avalduse teisendamise läbi metoodil,

---

[1] Lindelöf. Le calcul des residus (p. 99, form. 5).

mis tuttav Euleri liitmis-valemi teooriast, võime leida

(37) $$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{\nu=1}^{\kappa} T_\nu + R_\kappa ,$$

kus

(38) $$T_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \cdot \frac{s(s+1)\dots(s+2\nu-2)}{n^{s+2\nu-1}}$$

ja

(39) $$R_\kappa = -\frac{s(s+1)\dots(s+2\kappa-1)}{(2\kappa)!} \int_n^\infty \frac{\bar{\varphi}_{2\kappa}(u)}{u^{s+2\kappa}} du .$$

Kirjutades siin

$$\bar{P}_{2\kappa}(u) = \bar{\varphi}_{2\kappa}(u) + (-1)^\kappa B_\kappa ,$$

leiame (39):st, integreerides ositi kaks korda

$$R_\kappa = -\frac{s(s+1)\dots\dots(s+2\kappa+1)}{(2\kappa+2)!} \int_n^\infty \frac{\bar{P}_{2\kappa+2}(u)}{u^{s+2\kappa+2}} du .$$

Valemi (37):e abil määramegi suurused $\mathfrak{R}\zeta(s)$ ja $\mathfrak{I}\zeta(s)$, valides neist arvutamiseks muidugi selle, mille absoluut-väärtus suurem, mis kerge ära-näha, kui on arvutatud ω_1.

Valemi (37):e tarvitamisel tuleb hinnata kõigepealt jääkliiget (39).

Kui kirjutada

$$U = \int_n^\infty \frac{\bar{P}_{2\kappa+2}(u)}{u^{s+2\kappa+2}} du$$

ja tähelpanna, et $\bar{P}_{2\kappa+2}(u)$:l on alati märk $(-1)^{\kappa+1}$, siis saame

$$|U| \leqq (-1)^{\kappa+1} \int_n^\infty \frac{\bar{P}_{2\kappa+2}(u)}{u^{\sigma+2\kappa+2}} du .$$

Asetades selle ebavõrrandisse

$$\bar{P}_{2\kappa+2}(u) = \bar{\varphi}_{2\kappa+2}(u) + (-1)^{\kappa+1} B_{\kappa+1} ,$$

leiame tema kujul

$$|U| \leqq \frac{B_{\kappa+1}}{\sigma+2\kappa+1} \frac{1}{n^{\sigma+2\kappa+1}} + (-1)^{\kappa+1} \int_n^\infty \frac{\bar{\varphi}_{2\kappa+2}(u)}{u^{\sigma+2\kappa+2}} du .$$

Paremapoole integraali ositi integreerides, leiame edasi, arve võttes, et $\bar{Q}_{2k+3}(n) = 0$

$$|U| \leqq \frac{B_{k+1}}{\sigma+2k+1} \cdot \frac{1}{n^{\sigma+2k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{\sigma+2k+2}{2k+3} \int_n^\infty \frac{\bar{Q}_{2k+3}(u)}{u^{\sigma+2k+3}} du.$$

Veel kord ositi integreerides ja võttes arve võrrandid:

$$\bar{P}'_{2k+4}(u) = (2k+4)\,\bar{Q}_{2k+3}(u);$$
$$P_{2k+4}(n) = 0,$$

leiame

$$|U| \leqq \frac{B_{k+1}}{\sigma+2k+1} \frac{1}{n^{\sigma+2k+1}} +$$
$$+ (-1)^{k+1} \frac{(\sigma+2k+2)(\sigma+2k+3)}{(2k+3)(2k+4)} \int_n^\infty \frac{\bar{P}_{2k+4}(u)}{u^{\sigma+2k+4}} du.$$

Et $\bar{P}_{2k+4}(u)$:l on märk $(-1)^k$, siis on teine liige paremal pool negatiivne ja meie võime kirjutada veel suuremal põhjusel

$$|U| \leqq \frac{B_{k+1}}{\sigma+2k+1} \cdot \frac{1}{n^{\sigma+2k+1}},$$

millest järgneb (39) ja (38) järele

(40) $$|R_k| < \frac{|s+2k+1|}{\sigma+2k+1} |T_{k+1}|:$$

Täpsamalt võib hinnata $|R_k|$ ebavõrrandi

$$|R_k| < |T_{k+1}| + |T_{k+2}| + \dots + |T_{k+l}| + |R_{k+l}|$$

abil, kui l vastavalt valida ja $|R_{k+l}|$ hinnata (40) järele.

Nüüd ripuvad aga T-liikmed nii hästi n:st kui k:st ja seega oleneb kõik nende arvude otstarbekohasest valikust.

Meil on (38) järele

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = -\frac{B_{k+1}}{B_k} \frac{(s+2k-1)(s+2k)}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{n^2}$$

ja kui arve võtta (36), siis võime kirjutada

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = -\frac{(s+2k-1)(s+2k)}{(2\pi n)^2} \frac{\zeta(2k+2)}{\zeta(2k)}.$$

Kui nüüd paneme

$$\left|\frac{T_{k+1}}{T_k}\right| = \rho_k \left(\frac{t}{2\pi n}\right)^2,$$

siis erineb ρ_k väärtus 1:st ainult vähe, kui t on, võrreldes σ ja k:ga, küllalt suur. Siit näeme, et ebavõrrand

$$n > \frac{t}{2\pi}$$

annab ligikaudse tingimuse, et liikmete $T_1, T_2, T_3 \dots$ absoluut-väärtused peavad alguses vähenema.

Läheb aga tarvis arvutada suurema hulga $\zeta(s)$:i väärtusi, siis on T-liikmete arvutamiseks kasulik panna

$$|T_r| = \frac{\alpha_r}{\sqrt{n}} \left(\frac{t}{n}\right)^{2r-1},$$
$$(r = 1, 2, 3 \dots).$$
$$\arg T_r = \varphi_r - t \log n.$$

Siis on meil $s = \frac{1}{2} + ti$ puhul

$$\alpha_r = \frac{B_r}{(2r)!} \frac{|s(s+1)\dots(s+2r-2)|}{t^{2r-1}} =$$
$$= \frac{B_r}{(2r)!} \sqrt{\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)\dots\left(1+\frac{(4r-3)^2}{4t^2}\right)},$$

kuna φ_r on võrdne summa $[(r-1)\pi + \arg s + \arg(s+1) + \dots + \arg(s+2r-2)]$ ülejäägiga modulo 2π, ehk nii siis

$$\varphi_r = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2t} - \operatorname{arctg} \frac{3}{2t} - \dots - \operatorname{arctg} \frac{4r-3}{2t}.$$

Neid suurusi α_r ja φ_r aga võib kergesti tabuleerida, võttes argumendiks t, sest nad muutuvad ainult pikkamisi.

Nii oleks kõik valmis ζ-funktsiooni nullpunktide arvutamiseks.

Backlund sooritab esitatud metoodil omi arvutusi järgmiselt:

Esiteks, arvutab ta iga täis-arvulise t jaoks (27) järele $\vartheta(t)$ ja siis ω, täpsusega 1°. Edasi arvutab ta $\Re\zeta(s)$ ehk $\Im\zeta(s)$ punktides, millest arvata võib, et nad lahutavad $\xi(s)$:i nullkohad. Nende punktide ülesotsimisel on tale $\vartheta(t)$ käik juhatuseks. Laseb nüüd saadus oletada, et mõni $\xi(\frac{1}{2}+ti)$ märgivahetus on jäänud vahele, siis arvutab ta $\Re\zeta(s)$ ehk $\Im\zeta(s)$ uutes endistele vahele seatud punktides. Arvu n valemis (37) määrab ta sel kombel, et ta teeb $50 \leqq t \leqq 200$ vahemikkudeks jagab, mille pikkus 10 ja vahemikus $10(m-1) < t \leqq 10m$ n:i väärtuseks valib $2m$. Seega on tal alati

$$n \geqq \frac{t}{5},$$

mille puhul T-liikmed püsavalt koonduvad. Lõ-vaks k võtab Backlund 2.

Hinnates ülejääki ebavõrrandi

$$|R_2| < \sum_{\nu=1}^{10} |T_\nu| + |R_{10}|$$

abil, leiab ta $t = 50, 100, 200$ jaoks vastavalt

$$|R_2| < 0.095,\ 0.067,\ 0.049.$$

Arvutuse sooritab ta kolmekohaliselt. Kui nüüd arvutuste juures arve võtta vea 0.001 suuruses igas liikmes avalduses (37), siis teeb ülemistele arvudele vastavalt juure

$$0.012,\ 0.022,\ 0.042,$$

ja terve viga on seega $t = 50, 100, 200$ jaoks vastavalt vähem, kui

$$0.107,\ 0.089,\ 0.091.$$

$t < 50$ jaoks võtab Backlund $n = 10$, mille läbi

viga väiksemaks saab kui see, mille hindasime ülevalpool $t = 50$ jaoks. Selge, et niiviisi arvutatud $\Re\zeta(s)$:i ja $\Im\zeta(s)$:i väärtustes viga vähem on kui 0,11, millest on küllalt, sest arvutuste sihiks on ju käesoleval juhusel ainult nullpunktide loetlus ja seega oli ka võimalik hoiduda punktidest, kus mainitud suuruse väiksemaks saavad. Ainult ühes punktis, nimelt, punktis $t = 193$ pidi Backlund suurendame arvutuse täpsust: $n = 40$ ja $k = 10$:ga leidis ta $\Im\zeta(\frac{1}{2}+193i) = -0.07$, $|R_{10}| < 0.05$.

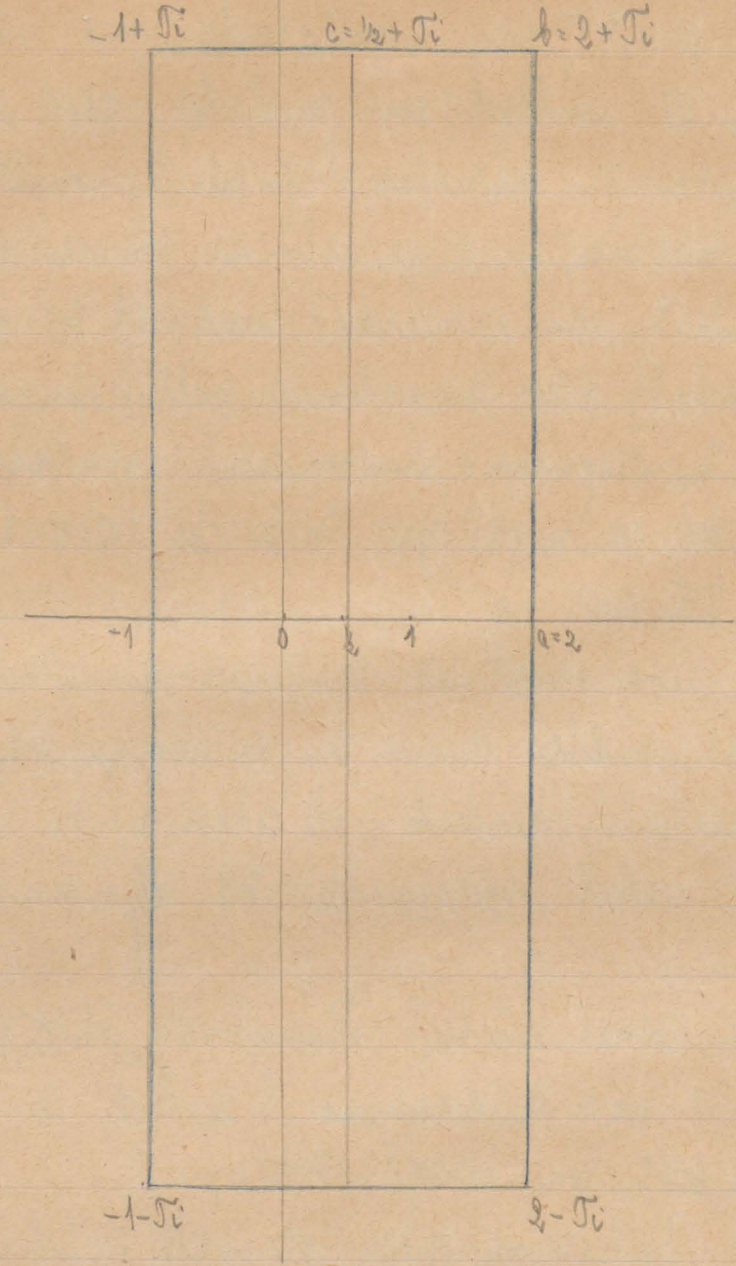
Oma arvutuste saaduset korraldas Backlund tabelis, mille leiame ta väikekirja 21. leheküljel. See tabel näitab, et sirgel $\sigma = \frac{1}{2}$ on $t = 0$ ja $t = 200$ vahel <u>vähemalt</u> 79 ζ-funktsiooni nullkohta.

Edasi näitab Backlund, et $\zeta(s)$:i nullkohtade arv piirkonnas $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $0 < t < 200$ on tõesti 79.

Sellest järgneb, et igale tabelis ülestähendatud $\xi(s)$:i märgivahetusele sirgel $\sigma = \frac{1}{2}$ vastab üks ainus, ühekordne nullkoht ja edasi, et $\zeta(s)$:il selle sirge väljaspool pole ühtegi imaginaarset nullkohta, mille ordinaat oleks absoluutselt vähem kui 200.

Tõenduse käik on järgmine: Tähtime $N(T)$:ga $\xi(s)$:i nullpunktide arvu, kusjuures iga nullpunkti ordinaat olgu positiivne ja iga k-kordne nullpunkt saagu loetud k-korda; T ärgu langegu ühte ühegi nullpunkti ordinaadiga. Sinisega joonistatud püstkülikus (joon. lehek. 62) on siis $\xi(s)$:il

$2N(T)$ nullkohta



Liikugu nüüd s püstküliku raja mööda positiivses sihis; selle juures tekkinud $\xi(s)$:i argumendi juurekasv olgu $\Delta_R \arg \xi(s)$. Siis on tuntud funktsiooni-teooria lause järele

$$4\pi N(T) = \Delta_R \arg \xi(s).$$

Edasi teame, et $\xi(s)$:i väärtused punktides, mis on sümmeetrilised reaal-telje ehk sirge $\sigma = 1/2$ suhtes on kaasarvud ja seega $\Delta_R \arg \xi(s)$ võrdne selle 4 korda võetud $\xi(s)$:i argumendi juurekasvuga, mis tekib, kui s, väljaminnes punktist $s=2$ kulgeb $1/4$ piirdejoonest (s.o. abc).

See juurekasv olgu $\Delta_{abc} \arg \xi(s)$. Siis võime kirjutada

(41) $$N(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_{abc} \arg \xi(s).$$

Kui aga selle valemi (41) juure minnes, laseme tee ab minna mitte punkti $s=2$, vaid mõne teise reaal-telje punkti kaudu, mis punktist $s=1$ paremal pool, siis ei muutu selle läbi midagi.

Kui valime seekord

$$a = 3/2, \quad b = 3/2 + 200i, \quad c = 1/2 + 200i,$$

siis annab meile valem (41)

(42) $$N(200) = \frac{1}{\pi} \Delta_{abc} \arg \xi(s).$$

Samuti saame valemi (23) järele

(43) $$\Delta_{abc} \arg \xi(s) = \vartheta(200) + \Delta_{abc} \arg \zeta(s).$$

Arvutades (27) järele ϑ, leiame

$$\vartheta(200) = 80\pi + \omega_1,$$

kusjuures tabeli järele ω_1:s on $-145°$. Pannes $\pi + \omega_1 = \omega$, saame

(44) $$\vartheta(200) = 79\pi + \omega,$$

kus $|\omega| < \frac{\pi}{2}$.

Edasi näitab Backlund, et ka

$$|\Delta_{abc} \arg \zeta(s)| < \pi/2,$$

tõendades, et $\Re \zeta(s)$ abc:l kunagi ei kao. On, nimelt, $\sigma > 1$, siis võime, nagu teada, tarvitada (1) ja kergesti leida, et

$$|\log \zeta(s)| = \Big|\sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}}\Big| \leq$$

(45) $$\leq \sum \frac{1}{mp^{m\sigma}} = \log \zeta(\sigma).$$

Siit järgneb

$$|\arg \zeta(3/2 + ti)| = |\Im \log \zeta(3/2 + ti)| <$$
$$< \log \zeta(3/2) = 0.96.$$

Ja iga t jaoks on meil nii siis

$$|\arg \zeta(3/2 + ti)| < \frac{\pi}{2},$$

ja terves teel ab on seega

$$\Re\zeta(s) \neq 0.$$

Edasi paneme

$$\Re\zeta(\sigma+i200) = K(\sigma) + C(\sigma),$$

kus $K(\sigma)$ võrdub rea (37) n esimese liikme summa reaal-osaga, nii et

$$K(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{-\sigma}\cos(200\log\nu) + \tfrac{1}{2}n^{-\sigma}\cos(200\log n),$$

kuna $C(\sigma)$ on summa

$$S(s) = \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{\nu=1}^{k} T_\nu + R_k$$

reaal-osa $s = \sigma + 200i$ puhul.

$K(\sigma)$ üksikute liikmete märgid ei olene σ:st ja nende absolut-väärtused kahanevad σ kasvamisel. Tähistame positiivsete liikmete summa $A(\sigma)$:ga, negatiivsete liikmete absolut-väärtuste summa $B(\sigma)$:ga, nii et

$$K(\sigma) = A(\sigma) - B(\sigma).$$

Väheneb σ, siis suureneb nii hästi $A(\sigma)$ kui $B(\sigma)$. $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{2}$ puhul on meil seega

$$A(\sigma) > A(3/2)$$
$$B(\sigma) < B(1/2),$$

ja nii siis

$$K(\sigma) > A(3/2) - B(1/2).$$

Arvutuste abil leitakse nüüd, võttes $n = 40$

$$A(3/2) > 1.86, \quad B(1/2) < 1.40.$$

Seega

$$K(\sigma) > 0.46.$$

Edasi leitakse $s = \frac{1}{2} + 200i$, $n = 40$ jaoks, kui võtta $k = 10$ ja R_k hinnata (40) järele

$$|S(s)| < \left|\frac{n^{1-s}}{s-1}\right| + \sum_{\nu=1}^{k}|T_\nu| + |R_k| < 0.15.$$

Nüüd on kerge näha, et vahemikus $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$ liikmete $\frac{n^{1-s}}{s-1}$ ja T_ν absolut-väärtused kasvavad, kui σ kahaneb; samuti on lugu (40)

järele saadud jääkliikme R_k ülema piiriga. Mainitud vahemikus on nii siis:

$$|S(\sigma + 200i)| < 0.15$$

ja seega ka

$$|C(\sigma)| < 0.15,$$

kust järgneb, et

$$\Re\zeta(\sigma + 200i) < 0.46 - 0.15 = 0.31.$$

Seega on ka bc:l $\Re\zeta(s) \neq 0$. Nii siis ei kao $\Re\zeta(s)$ abc:l ja sellepärast on kindlasti

$$|\Delta_{abc}\arg\zeta(s)| < \pi/2.$$

(43) ja (44) järele aga peab summa $(\omega + \Delta_{abc}\arg\zeta(s))$:i väärtus olema π täiskordne. Oleme näidanud, et selle summa liikmed numeeriliselt on vähemad kui $\pi/2$; seega on tarvilik, et

$$\omega + \Delta_{abc}\arg\zeta(s) = 0$$

ja järelikult saame

$$\Delta_{abc}\arg\zeta(s) = 79\pi,$$

kust lõpuks (42) järele võime kirjutada

$$\underline{N(200) = 79},$$

mida väitsimegi.

Seega oleks siis Backlundi töö saadus järgmine:

<u>$\zeta(s)$:il on vahemikus $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 < t < 200$ 79 nullpunkti, mis kõik asuvad sirgel $\sigma = 1/2$.</u>