TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Helle Kilgi

Asümmeetria ja järsakuse karakteristikud

Bakalaureusetöö

Juhendaja: prof. Tõnu Kollo

Tartu 2005

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse erinevaid jaotuse asümmeetria ja järsakuse mõõtmiseks mõeldud kordajaid.

Esimeses osas tuuakse sisse töös kasutatud mõisted. Teine osa on pühendatud ühemõõtmelistele kordajatele.

Kolmandas osas vaadeldakse erinevaid mitmemõõtmelisi kordajaid ning nende käitumist normaaljaotuse ja Laplace'i jaotuse korral. Vaatluse alla on võetud Mardia kordajad, mis on esimesed ja tänaseni levinuimad asümmeetria ja järsakuse karakteristikud. Mardia kordajad on skalaarsed ja ütlevad jaotuse kuju kohta vähe, mida ka töös demonstreeritakse.

Edasi tutvustatakse Móri, Rohatgi ja Székely kordajaid, kus p-mõõtmelise jaotuse asümmeetriakordaja on p-vektor ning järsakus $p \times p$-maatriks. Parema ülevaate saavutamiseks erinevate kordajate vahekorrast tuletatakse neile esitus momentide kaudu. Seda esitust kasutades leitakse asümmeetriakordaja ja järsakus mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse jaoks.

Lisaks tutvustatakse uusi asümmeetria- ja järsakuskordajaid (T. Kollo käsikiri 2005) ning leitakse nende avaldised mitmemõõtmelise normaaljaotuse ja asümmeetrilise Laplace'i jaotuse jaoks.

Töö lõppeb näitega erinevate kordajate käitumisest Laplace'i jaotuse korral. Karakteristikute arvutamiseks kasutatud programm on esitatud lisas.

1 Tähistused

Töös on kasutatud maatriksite, vektorite ja juhuslike suuruste jaoks järgmisi põhitähistusi:

$\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_p$	ühikmaatriks, p-järku ühikmaatriks;
$\mathbf{1}_{p,q}$	$p \times q$-maatriks, mille kõik elemendid on ühed;
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$	vektorid;
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	maatriksid;
$X, Y, Z, \ldots$	juhuslikud suurused;
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$	juhuslikud vektorid;
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \ldots$	juhuslikud maatriksid;
$\mathbf{A}^T$	transponeeritud maatriks $\mathbf{A}$;
$\\|\mathbf{a}\\|$	vektori $\mathbf{a}$ eukleidiline norm;
$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$	maatriksi $\mathbf{A}$ jälg;
$\mathrm{vec}\mathbf{A}$	vektor maatriksi $\mathbf{A}$ veergudest;
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	maatriksite $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ otsekorrutis;
$\mathbf{A} \star \mathbf{B}$	maatriksite $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ tähtkorrutis.

1.1 Tehted maatriksitega

Järgnevas on antud ülevaade käesoleva töö 3. peatükis kasutatud maatriksalgebrast. Tuginetud on raamatutele Schott (1997) ja Kollo, von Rosen (2005).

Vektori norm

Definitsioon 1.1 *Olgu* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)^T$. *Vektori* $\mathbf{a}$ *eukleidiline norm on määratud võrdusega*

$$\|\mathbf{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kasulik on tähele panna, et

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 = \mathbf{a}^T\mathbf{a}.$$

Maatriksi jälg

Definitsioon 1.2 *Olgu* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $p \times p$*-maatriks. Maatriksi* $\mathbf{A}$ *jälg on antud valemiga*

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}.$$

Jälje põhiomadused on esitatud järgneva loeteluna.

- Ühikmaatriksi jälg on:

$$\operatorname{tr}\mathbf{I}_p = \sum_{i=1}^{p} 1 = p.$$

- Olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ maatriksid ning $a, b \in \mathbb{R}$. Kui vajalikud tehted on defineeritud, siis

$$\operatorname{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\operatorname{tr}\mathbf{A} + b\operatorname{tr}\mathbf{B}, \tag{1}$$
$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}). \tag{2}$$

- Olgu $\mathbf{X}$ juhuslik vektor, millel eksisteerib keskväärtus. Siis

$$E(\operatorname{tr}\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(E\mathbf{X}).$$

Plokkmaatriksid

Definitsioon 1.3 *Öeldakse, et $p \times q$-maatriks $\mathbf{A}$ on plokkmaatriks, kui ta koosneb $p_i \times q_i$-alammaatriksitest $\mathbf{A}_{ij}$, $i = 1, \ldots, u$; $j = 1, \ldots, v$ nii, et*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1v} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{u1} & \mathbf{A}_{u2} & \ldots & \mathbf{A}_{uv} \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{u} p_i = p; \quad \sum_{i=1}^{v} q_i = q.$$

Lühidalt tähistatakse sellist maatriksit

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}], \quad i = 1, \ldots, u; \quad j = 1, \ldots, v.$$

Plokkmaatriksi $\mathbf{A}$ elementidele viitamisel määratakse plokk, kus element asub ning elemendi asukoht selles plokis. Rea (k, l) all mõeldakse k. plokirea $(\mathbf{A}_{k1}, \mathbf{A}_{k2}, \ldots, \mathbf{A}_{kv})$ l. rida ehk maatriksi $(\sum_{i=1}^{k-1} p_i + l)$-ndat rida. Veeru (g, h) all mõeldakse g. plokiveeru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1g} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ug} \end{pmatrix}$$

h. veergu ehk maatriksi $(\sum_{i=1}^{g-1} q_i + h)$-ndat veergu. Plokkmaatriksi $\mathbf{A}$ elementi $(k-l)$-ndas reas ja (g, h)-ndas veerus tähistatakse $a_{(k,l)(g,h)}$ või $(\mathbf{A})_{(k,l)(g,h)}$.

Kehtivad järgmised omadused.

- Olgu $\mathbf{A}$ plokkmaatriks. Siis

$$c\mathbf{A} = [c\mathbf{A}_{ij}], \quad i = 1, \ldots, u; \ j = 1, \ldots, v,$$

  kus $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ ning c konstant.

- Olgu $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ ja $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ij}]$ plokkmaatriksid sama järku plokkidega. Siis

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}], \quad i = 1, \ldots, u; \ j = 1, \ldots, v,$$

Otsekorrutis

Definitsioon 1.4 *Olgu* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $p \times q$*-maatriks ja* $\mathbf{B}$ $r \times s$*-maatriks. Maatriksite* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *otsekorrutiseks nimetatakse* $pr \times qs$*-plokkmaatriksit* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$*, mis on defineeritud võrdusega*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}], \quad i = 1, \ldots, p; \quad j = 1, \ldots, q.$$

Otsekorrutist tuntakse ka Kroneckeri korrutise nime all. Erinevalt tavalisest maatriksite korrutamisest on otsekorrutis defineeritud mistahes kahe maatriksi korral. Üldjuhul pole maatriksite otsekorrutamine kommutatiivne.

Definitsioon 1.5 *Maatriksi* $\mathbf{A}$ k*-kordset otsekorrutist iseendaga nimetatakse* k*-ndaks otseastmeks ning tähistatakse*

$$\mathbf{A}^{\otimes k} = \underbrace{\mathbf{A} \otimes \ldots \otimes \mathbf{A}}_{k}.$$

Kehtivad järgmised omadused.

- Olgu a skalaar ning $\mathbf{A}$ maatriks, siis

$$a \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes a = a\mathbf{A}. \tag{3}$$

- Kui $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ on vektorid, siis

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^T = \mathbf{b}^T \otimes \mathbf{a}. \tag{4}$$

- Olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ $p \times q$-maatriksid ning $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$ $r \times s$-maatriksid. Siis

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}.$$

- Olgu maatriksid $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ sellised, et korrutised $\mathbf{AB}$ ja $\mathbf{CD}$ oleksid defineeritud. Siis

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AB}) \otimes (\mathbf{CD}). \tag{5}$$

- Kui $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ on ruutmaatriksid, siis

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \operatorname{tr}\mathbf{A} \cdot \operatorname{tr}\mathbf{B}. \tag{6}$$

- Mistahes maatriksite $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ korral

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T, \tag{7}$$

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}. \tag{8}$$

- Lihtne on näha, et

$$\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_{p^2}. \tag{9}$$

vec-operaator

Definitsioon 1.6 *Olgu* $\mathbf{A}$ $p \times q$*-maatriks ning* $\mathbf{a}_i$ *maatriksi* $\mathbf{A}$ i*. veerg. Siis*

$$\mathrm{vec}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \end{bmatrix}.$$

Tulemuseks on pq-vektor.

Operaatori vec põhilised omadused on järgmised.

- Olgu $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vektorid. Siis

$$\mathrm{vec}\mathbf{a} = \mathrm{vec}\mathbf{a}^T = \mathbf{a}, \tag{10}$$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}. \tag{11}$$

- Olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ $p \times q$-maatriksid. Siis

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \mathrm{vec}^T\mathbf{A}\mathrm{vec}\mathbf{B}. \tag{12}$$

- Olgu $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ sellised maatriksid, et korrutis $\mathbf{ABC}$ on määratud. Siis

$$\mathrm{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}\mathbf{B}. \tag{13}$$

Kommutatsioonimaatriks

Definitsioon 1.7 *Öeldakse, et* $q \times p$*-plokkidest koosnev* $pq \times pq$*-maatriks* $\mathbf{K}_{p,q}$ *on kommutatsioonimaatriks, kui*

$$(\mathbf{K}_{p,q})_{(k,l)(g,h)} = \begin{cases} 1, \textit{ kui } g = l,\ h = k, & k,h = 1,\dots,p; \quad l,g = 1,\dots,q, \\ 0, \textit{ muidu.} \end{cases}$$

See tähendab, et maatriksi $\mathbf{K}_{p,q}$ (i,j)-ndas plokis on (j,i)-s element 1 ja ülejäänud elemendid nullid. Näiteks $\mathbf{K}_{2,3}$ on 6×6-maatriks,

$$\mathbf{K}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Punktiirjoonega on eraldatud plokid.

Kommutatsioonimaatriks on seotud ühikmaatriksiga:

$$\mathbf{K}_{p,1} = \mathbf{K}_{1,p} = \mathbf{I}_p. \tag{14}$$

Olgu $\mathbf{A}$ $p \times q$-maatriks ja $\mathbf{B}$ $r \times s$-maatriks. Kehtivad järgmised omadused.

$$\mathbf{K}_{p,r}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{K}_{q,s}; \tag{15}$$

$$\mathrm{tr}\,[(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{K}_{p,q}] = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BA}), \tag{16}$$

kui $r = q$, $p = s$.

Positiivselt määratud maatriksid

Definitsioon 1.8 *Sümmeetriline ruutmaatriks* $\mathbf{A}$ *on*

(a) positiivselt määratud, kui $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ *iga vektori* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *korral;*

(b) positiivselt poolmääratud, kui $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ *iga vektori* $\mathbf{x}$ *korral ning leidub* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*, et* $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$*;*

(c) mittenegatiivselt määratud, kui ta on positiivselt määratud või positiivselt poolmääratud.

Tähtkorrutis

Maatriksite tähtkorrutis on sisse toodud artiklis MacRae (1974). Järgnev esitus järgib valdavalt tema artiklit.

Definitsioon 1.9 *Olgu* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $p \times q$*-maatriks ning* $\mathbf{B}$ $pr \times qs$*-maatriks, mis koosneb* $r \times s$*-plokkidest* $\mathbf{B}_{ij}$*,* $i = 1, \ldots, p$*;* $j = 1, \ldots, q$*. Maatriksite* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *tähtkorrutis on* $r \times s$*-maatriks*

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\mathbf{B}_{ij}.$$

Tähtkorrutis on maatriksi jälje üldistus. Kui maatriksid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ on sama järku, siis

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{B}). \tag{17}$$

Kehtivad järgmised omadused.

- Olgu $\mathbf{A}$ $p \times q$-maatriks, $\mathbf{B}$ $pr \times qs$-maatriks ning c ja d skalaarid. Siis

  $$c\mathbf{A} \star d\mathbf{B} = cd(\mathbf{A} \star \mathbf{B}),$$

  sest

  $$c\mathbf{A} \star d\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} ca_{ij}(d\mathbf{B})_{ij} = c\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij}d\mathbf{B}_{ij} = cd(\mathbf{A} \star \mathbf{B}).$$

- Olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ $p \times q$-maatriksid ning $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$ $pr \times qs$-maatriksid. Siis

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \star (\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\star\mathbf{C} + \mathbf{B}\star\mathbf{C} + \mathbf{B}\star\mathbf{D} + \mathbf{A}\star\mathbf{D}.$$

  Tõepoolest,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \star (\mathbf{C}+\mathbf{D}) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_{ij}+b_{ij})(\mathbf{C}+\mathbf{D})_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_{ij}+b_{ij})(\mathbf{C}_{ij}+\mathbf{D}_{ij}) = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}a_{ij}\mathbf{C}_{ij} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}b_{ij}\mathbf{C}_{ij} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}a_{ij}\mathbf{D}_{ij} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}b_{ij}\mathbf{D}_{ij} = \\ &= \mathbf{A}\star\mathbf{C} + \mathbf{B}\star\mathbf{C} + \mathbf{B}\star\mathbf{D} + \mathbf{A}\star\mathbf{D}.\end{aligned}$$

- Olgu $\mathbf{A}$ $p \times q$-maatriks, $\mathbf{B}$ $pr \times qs$-maatriks ning $\mathbf{C}$ mistahes maatriks. Siis

$$(\mathbf{A}\star\mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \star (\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}). \tag{18}$$

- Olgu $\mathbf{A}$ $m \times p$-maatriks, $\mathbf{B}$ $p \times q$-maatriks ja $\mathbf{C}$ $q \times n$-maatriks. Siis

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{B} \star \left(\mathrm{vec}\mathbf{A}\mathrm{vec}^T\mathbf{C}^T\right), \tag{19}$$

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{B}^T \star (\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_m)\mathbf{K}_{m,n}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{I}_n). \tag{20}$$

  Kui võtta viimases võrduses $\mathbf{A} = \mathbf{I}_p$ ning $n = 1$, s.o. viimane tegur on q-vektor $\mathbf{c}$, saame valemi

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{B}^T \star (\mathbf{c}\otimes\mathbf{I}_p)\mathbf{K}_{p,1}(\mathbf{I}_p\otimes 1) = \mathbf{B}^T \star (\mathbf{c}\otimes\mathbf{I}_p) \tag{21}$$

- Olgu $\mathbf{A}$ konstantne maatriks ja $\mathbf{X}$ juhuslik maatriks nii, et $\mathbf{A}\star\mathbf{X}$ ja $E\mathbf{X}$ oleksid määratud. Siis

$$E(\mathbf{A}\star\mathbf{X}) = \mathbf{A}\star E\mathbf{X}. \tag{22}$$

  Tõepoolest,

$$E(\mathbf{A}\star\mathbf{X}) = E(\sum_i\sum_j a_{ij}\mathbf{X}_{ij}) = \sum_i\sum_j a_{ij}E\mathbf{X}_{ij} = \sum_i\sum_j a_{ij}(E\mathbf{X})_{ij} = \mathbf{A}\star E\mathbf{X}.$$

1.2 Momendid ja kumulandid

Olgu X juhuslik suurus ning $k \in \mathbb{N}$. Eeldame, et kõik vajalikud keskväärtused eksisteerivad.

Definitsioon 1.10 *Juhusliku suuruse X k-järku moment on määratud võrdusega*

$$m_k(X) = EX^k.$$

Juhusliku suuruse esimest järku moment on tema keskväärtus.

Definitsioon 1.11 *Juhusliku suuruse X k-järku tsentraalne moment antakse võrdusega*

$$\overline{m}_k(X) = E(X - EX)^k.$$

Juhusliku suuruse X dispersioon DX on X teist järku tsentraalne moment:

$$\overline{m}_2(X) = E(X - EX)^2 = DX.$$

Olgu $\mathbf{x}$ juhuslik p-vektor keskväärtusega $\boldsymbol{\mu}$. Eeldame, et vajalikud keskväärtused eksisteerivad.

Definitsioon 1.12 *Juhusliku vektori $\mathbf{x}$ k-järku moment on kujul*

$$\begin{aligned} m_k(\mathbf{x}) &= E(\underbrace{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^T \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}^T}_{2m}), \quad \text{kui } k = 2m; \\ m_k(\mathbf{x}) &= E(\underbrace{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^T \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}^T}_{2m} \otimes \mathbf{x}), \quad \text{kui } k = 2m+1. \end{aligned}$$

Definitsioon 1.13 *Juhusliku vektori $\mathbf{x}$ k-järku tsentraalne moment on kujul*

$$\begin{aligned} \overline{m}_k(\mathbf{x}) &= E[\underbrace{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \otimes (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \otimes \ldots \otimes (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T}_{2m}], \quad \text{kui } k = 2m; \\ \overline{m}_k(\mathbf{x}) &= E(\underbrace{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \otimes (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \otimes \ldots \otimes (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T}_{2m} \otimes (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})), \quad \text{kui } k = 2m+1. \end{aligned}$$

Definitsioonidest järeldub, et p-vektori k-järku moment ja tsentraalne moment on $p^m \times p^m$-maatriksid, kui $k = 2m$ ning $p^{m+1} \times p^m$-maatriksid, kui $k = 2m+1$.

Mitmemõõtmelise normaaljaotuse momendid

Olgu $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Juhusliku vektori $\mathbf{x}$ neli esimest tsentraalset momenti avalduvad järgmiselt (Kollo, 1991):

$$\begin{aligned} \overline{m}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ \overline{m}_2(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Sigma}, \\ \overline{m}_3(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, && (23) \\ \overline{m}_4(\mathbf{x}) &= (\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) + \mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{vec}^T\boldsymbol{\Sigma}. && (24) \end{aligned}$$

Kumulandid

Lisaks momentidele kasutatakse juhuslike suuruste ja vektorite kirjeldamiseks kumulante, mis avalduvad momentide või tsentraalsete momentide funktsioonidena. Olgu $\mathbf{x}$ juhuslik vektor. Siis avalduvad tema esimesed neli kumulanti tsentraalsete momentide kaudu järgmiselt (Kollo, Srivastava, 2004):

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{x}) &= E\mathbf{x}, \\ c_2(\mathbf{x}) &= \overline{m}_2(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}, \\ c_3(\mathbf{x}) &= \overline{m}_3(\mathbf{x}), \\ c_4(\mathbf{x}) &= \overline{m}_4(\mathbf{x}) - \overline{m}_4(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

kus $\overline{m}_4(\mathbf{z})$ on kovariatsioonimaatriksiga $D\mathbf{x}$ mitmemõõtmelise normaaljaotuse neljas tsentraalne moment, mis on antud valemiga (24).

1.3 Statistika

Cauchy-Schwarzi võrratus

Olgu X ja Y juhuslikud suurused. Siis

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Võrdus kehtib juhul, kui $\exists\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$, et $P(aX = bY) = 1$.

Laplace'i jaotus

Jaotuste defineerimisel on järgitud raamatut Kotz, Kozubowski, Podgorski (2001) ning artiklit Kollo, Srivastava (2004).

Definitsioon 1.14 *Olgu $\theta \in (-\infty, \infty)$ ja $\sigma > 0$. Öeldakse, et juhuslik suurus X on Laplace'i jaotusega asukohaparameetriga θ ja skaalaparameetriga σ, $X \sim L(\theta, \sigma)$, kui X tihedusfunktsioon on*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\sqrt{2}|x-\theta|/\sigma}, \quad -\infty < x < \infty.$$

.

Laplace'i jaotuse keskväärtus on θ ja dispersioon σ^2. *Standardne Laplace'i jaotus* saadakse, kui $\theta = 0$ ja $\sigma = 1$.

Definitsioon 1.15 *Olgu $\boldsymbol{\theta}$ p-vektor ja $\boldsymbol{\Sigma}$ positiivselt määratud sümmeetriline $p \times p$-maatriks. Öeldakse, et juhuslik p-vektor $\mathbf{y}$ on mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotusega, kui $\mathbf{y}$ karakteristlik funktsioon on*

$$\varphi(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} - i\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{t}}$$

ning tähistatakse $\mathbf{y} \sim ML_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Kui $\mathbf{y} \sim ML_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$, siis

$$E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\theta}, \quad D(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T.$$

Et kovariatsioonimaatriks ei sõltuks parameetrist $\boldsymbol{\theta}$, reparametriseeritakse jaotust (Kollo ja Srivastava, 2004) ning vaadeldakse juhuslikku vektorit $\mathbf{y}$ karakteristliku funktsiooniga

$$\varphi(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} - \frac{1}{2}(\mathbf{t}^T\boldsymbol{\theta})^2 - i\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{t}}. \tag{25}$$

Uue reparametrisatsiooni korral peab olema maatriks $\mathbf{\Sigma} - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T$ positiivselt määratud. Keskväärtus ja dispersioon on vastavalt

$$E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\theta}, \quad D(\mathbf{y}) = \mathbf{\Sigma}.$$

Kõrgemat järku tsentraalsed momendid ja kumulandid avalduvad kujul

$$\begin{aligned}
\overline{m}_3(\mathbf{y}) &= c_3(\mathbf{y}) = \mathbf{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{\Sigma} + \mathrm{vec}\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\theta}^T - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta}, && (26)\\
\overline{m}_4(\mathbf{y}) &= c_4(\mathbf{y}) + \overline{m}_4(\mathbf{z}), && (27)\\
c_4(\mathbf{y}) &= \overline{m}_4(\mathbf{z}) - 3\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T + \boldsymbol{\theta}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{\Sigma} + \mathrm{vec}\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}^T)^{\otimes 2} + && (28)\\
&\quad + (\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T)(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p}),
\end{aligned}$$

kus $\mathbf{z}$ on normaaljaotusega juhuslik vektor kovariatsioonimaatriksiga $\mathbf{\Sigma}$. Käesolevas töös kasutatakse uut reparametrisatsiooni (25).

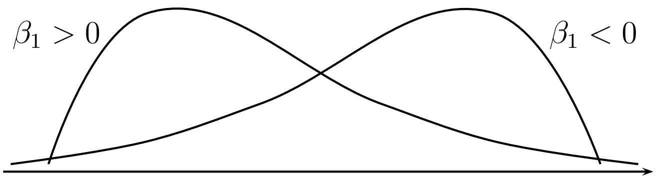
2 Ühemõõtmeline asümmeetria ja järsakus

2.1 Asümmeetria

Olgu X juhuslik vektor. Eeldame, et tal leiduvad neli esimest momenti. Jaotus on asümmeetriline, kui keskväärtus ja mediaan erinevad. Asümmeetriat nimetatakse ka ebasümmeetriaks või kallakuseks. Asümmeetriat mõõdab *asümmeetriakordaja*, mis ühemõõtmelisel juhul defineeritakse võrdusega

$$\beta_1(X) = \frac{\overline{m}_3(X)}{\sqrt{\overline{m}_2(X)^3}},$$

kus $\overline{m}_2(X)$ on teine ja $\overline{m}_3(X)$ kolmas tsentraalne moment. Kordaja võib omandada mistahes reaalseid väärtusi. Kui $\beta_1 = 0$, on tegemist sümmeetrilise jaotusega. Mida suurem on $|\beta_1(X)|$, seda rohkem erineb X jaotus sümmeetrilisest. Kui $\beta_1(X) > 0$, on suurte väärtuste saba pikem kui väikeste väärtuste oma; $\beta_1(X) < 0$ näitab, et pikem on väikeste väärtuste saba.



Mõnikord defineeritakse asümmeetriakordaja suhtena

$$\beta_1^*(X) = \frac{\overline{m}_3(X)^2}{\overline{m}_2(X)^3}.$$

Sel juhul omandab $\beta_1^*(X)$ väärtusi $[0, \infty)$. Mida suurem $\beta_1^*(X)$, seda asümmeetrilisem on jaotus. Kallakuse suuna kohta siis järeldusi teha ei saa.

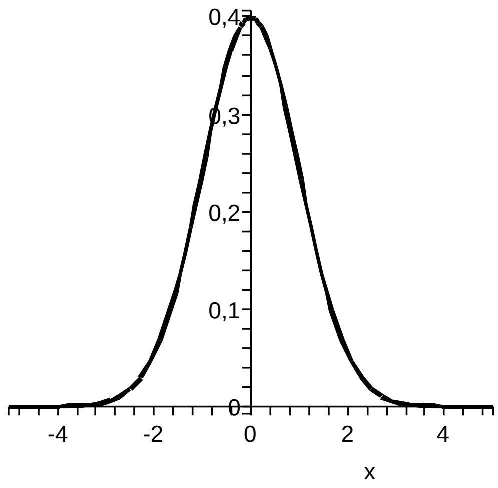
Näide 2.1 Normaaljaotus on sümmeetriline keskväärtuse suhtes. Olgu juhuslik suurus $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Näitame, et $\beta_1(X) = 0$. Juhusliku suuruse X tihedusfunktsioon on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Leiame $\overline{m}_3(X)$:

$$\overline{m}_3(X) = E(X-\mu)^3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x-\mu) = 0,$$

sest funktsioon $g(y) = y^3\, e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}$ on paaritu. Järelikult ka $\beta_1(X) = 0$.

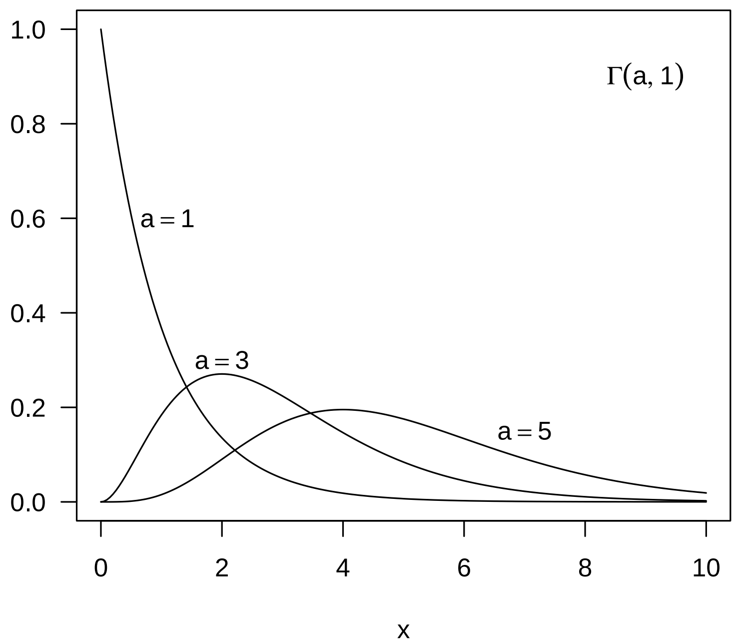


Joonis 1: Standardne normaaljaotus

Näide 2.2 Olgu $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, kus $a > 0$ on kujuparameeter ja $\lambda > 0$ on skaalaparameeter. Siis $\overline{m}_2(X) = \frac{a}{\lambda^2}$ ja $\overline{m}_3(X) = \frac{2a}{\lambda^3}$, järelikult

$$\beta_1(X) = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Kujuparameetri a kasvades $\beta_1(X)$ väheneb, seega jaotus muutub sümmeetrilisemaks, vt. ka joonis 2.



Joonis 2: Gammajaotuse kuju erinevate a väärtuste korral, $\lambda = 1$.

Märkus 1 Olgu X juhuslik suurus keskväärtusega μ ja dispersiooniga σ^2. Olgu $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Siis

$$\beta_1(X) = \frac{\overline{m}_3(X)}{\sqrt{\overline{m}_2(X)^3}} = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = EY^3.$$

Seega saame X asümmeetriakordaja, kui leiame vastava standardiseeritud juhusliku suuruse Y kolmanda momendi.

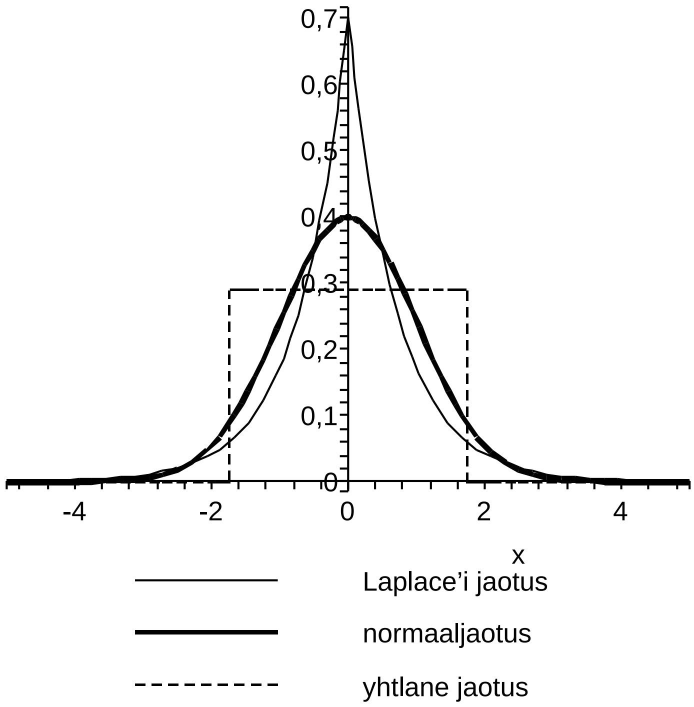
2.2 Järsakus

Jaotuse tipu teravust iseloomustab *järsakus* ehk *ekstsess*. Ühemõõtmelisel juhul defineeritakse juhusliku suuruse X järsakus võrdusega

$$\beta_2(X) = \frac{\overline{m}_4(X)}{\overline{m}_2^2(X)},$$

kus $\overline{m}_2(X)$ ja $\overline{m}_4(X)$ on teine ning neljas tsentraalne moment vastavalt. Normaaljaotuse korral on $\beta_2(X) = 3$. Et normaaljaotuse järsakus oleks 0, lisatakse mõnikord definitsiooni liige -3. Kui $\beta_2(X) < 3$, on jaotuse tipp lamedam kui normaaljaotusel või puudub hoopis. Kui $\beta_2(X) > 3$, on jaotuse tipp teravam ja sabad raskemad kui normaaljaotusel.

Näide 2.3 Joonisel 3 on toodud kolme jaotuse tihedusfunktsioonid: standardne normaaljaotus, standardne Laplace'i jaotus ning ühtlane jaotus $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Kõikide jaotuste keskväärtus on 0 ja dispersioon 1. Normaaljaotuse järsakus on 3, Laplace'i jaotusel 6 ning ühtlasel jaotusel 0,15.



Joonis 3: Erineva järsakusega jaotused

Leiame normaaljaotuse järsakuse. Olgu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, siis

$$\begin{aligned}\overline{m}_2(X) &= E(X-\mu)^2 = DX = \sigma^2;\\ \overline{m}_4(X) &= E(X-\mu)^4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.\end{aligned}$$

Asendame $y = x - \mu$ ning integreerime ositi

$$\begin{aligned}\overline{m}_4(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} dy = -\sigma^2 y^3 e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} 3y^2\sigma^2 e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} dy =\\ &= 0 + 3\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 3\sigma^2 E(X-\mu)^2 = 3\sigma^4.\end{aligned}$$

Seega $\beta_2(X) = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$.

Märkus 2 Olgu X juhuslik suurus keskväärtusega μ ja dispersiooniga σ^2. Olgu $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Siis

$$\beta_2(X) = \frac{\overline{m}_4(X)}{\overline{m}_2(X)^2} = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 = EY^4.$$

Seega saame X järsakuse, kui leiame vastava standardiseeritud juhusliku suuruse Y neljanda momendi.

Juhusliku suuruse X järsakus ja asümmeetria on seotud võrratusega

$$\beta_2(X) \geq 1 + \beta_1^2(X). \tag{29}$$

Seega seab jaotuse asümmeetriakordaja alumise piiri jaotuse järsakusele. Võrratuse tõestas K. Pearson 1916. aastal artiklis *"Mathematical Contributions to the Theory of Evolution, XIX: Second Supplement to a Memoir on Skew Variation."*

3 Mitmemõõtmeline asümmeetria ja järsakus

3.1 Mardia kordajad

K. V. Mardia laiendas asümmeetriakordaja ja järsakuse mõiste mitmemõõtmelisele juhule (Mardia, 1970). Olgu $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ sõltumatud sama jaotusega koopiad juhuslikust p-vektorist $\mathbf{x}$ keskväärtusega $\boldsymbol{\mu}$ ja dispersiooniga $\boldsymbol{\Sigma}$. Mardia (1985) defineeris asümmeetriakordaja valemiga

$$\beta_{1p}(\mathbf{x}) = E\left[(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu})\right]^3 \tag{30}$$

ning järsakuse võrdusega

$$\beta_{2p}(\mathbf{x}) = E\left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]^2. \tag{31}$$

T. Kollo ja M. S. Srivastava esitasid 2004. aastal Mardia kordajad jaotuse momentide kaudu. Olgu $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$, siis

$$\beta_{1p}(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\left[m_3^T(\mathbf{y}) m_3(\mathbf{y})\right] \tag{32}$$

ning

$$\beta_{2p}(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\left[m_4(\mathbf{y})\right]. \tag{33}$$

Vaatleme Mardia kordajaid juhul $p = 1$. Olgu X juhuslik suurus keskväärtusega μ ja dispersiooniga σ^2 ning olgu $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Kasutades esitust (32) ja märkust 1, saame

$$\beta_{11}(X) = m_3^2(Y) = [\beta_1(X)]^2 = \beta_1^*(X).$$

Seega vastab Mardia asümmeetriakordaja definitsioon osas 2.1 toodud alternatiivsele definitsioonile. Esitusest (32) on lihtne näha, et β_{1p} saab omandada ainult mittenegatiivseid väärtuseid. Sarnaselt ühemõõtmelise kordajaga β_1^* ei näita Mardia asümmeetriakordaja kallakuse suunda.

Leiame juhusliku suuruse X Mardia järsakuse. Esituse (33) ja märkuse 2 põhjal

$$\beta_{21}(X) = m_4(Y) = \beta_2(X).$$

Järelikult on Mardia järsakus ühemõõtmelisel juhul sama, mis osas 2.2 defineeritud ühemõõtmeline järsakus.

Näide 3.1 Normaaljaotus. Olgu $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ning $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$. Siis $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$. Kuna $m_3(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, siis ka asümmeetriakordaja $\beta_{1p}(\mathbf{x}) = 0$. Leiame $\mathbf{x}$ järsakuse:

$$\begin{aligned}\beta_{2p}(\mathbf{x}) &= \mathrm{tr}\,(m_4(\mathbf{y})) = \mathrm{tr}\left[(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p) + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p \mathrm{vec}^T \mathbf{I}_p\right] = \\ &= \mathrm{tr}\left[\mathbf{I}_{p^2}(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p)\right] + \mathrm{tr}\left[\mathbf{K}_{p,p}(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p)\right] + \mathrm{tr}\left(\mathrm{vec}\mathbf{I}_p \mathrm{vec}^T \mathbf{I}_p\right).\end{aligned}$$

Liidetavate jäljed leiame eraldi. Jälje omaduse (6) ning otsekorrutise omaduse (9) põhjal

$$\mathrm{tr}\,[\mathbf{I}_{p^2}(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p)] = \mathrm{tr}\,(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p) = \mathrm{tr}\,\mathbf{I}_{p^2} = p^2.$$

Kasutades kommutatsioonimaatriksi omadusi (15) ja (16), saame

$$\mathrm{tr}\,[\mathbf{K}_{p,p}(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p)] = \mathrm{tr}\,[(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p)\mathbf{K}_{p,p}] = \mathrm{tr}\,(\mathbf{I}_p \cdot \mathbf{I}_p) = p.$$

Omaduste (2) ja (12) põhjal

$$\mathrm{tr}\,\left(\mathrm{vec}\mathbf{I}_p \mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right) = \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\right) = \mathrm{tr}\,[\mathrm{tr}\,(\mathbf{I}_p \cdot \mathbf{I}_p)] = p.$$

Seega on p-mõõtmelise normaaljaotuse järsakus $\beta_{2p}(\mathbf{x}) = p^2 + 2p$. Ühemõõtmelisel juhul saame järsakuseks juba tuttava arvu 3.

Kuna karakteristikud on ühemõõtmelised, siis võivad erinevate kujudega jaotused anda sama tulemuse.

Näide 3.2 Kahemõõtmeline asümmeetriline Laplace'i jaotus. Joonisel 4 on pildid erinevate parameetritega Laplace'i jaotustest. Kõigil piltidel on $\beta_{12} = 5,62963$ ning $\beta_{22} = 20$.

Olgu $\mathbf{x}$ juhuslik p-vektor keskväärtusega $\boldsymbol{\mu}$ ja dispersiooniga $\boldsymbol{\Sigma}$ ning $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{y} = (Y_1, \ldots, Y_p)^T$. Kui K. V. Mardia tutvustas mitmemõõtmelist asümmeetriakordajat ja järsakust, siis püüdis ta leida ka seost nende karakteristikute vahel (Mardia, 1970). Ta näitas, et

$$\beta_{2p}(\mathbf{x}) \geq p^2 + \frac{A^2}{p}, \tag{34}$$

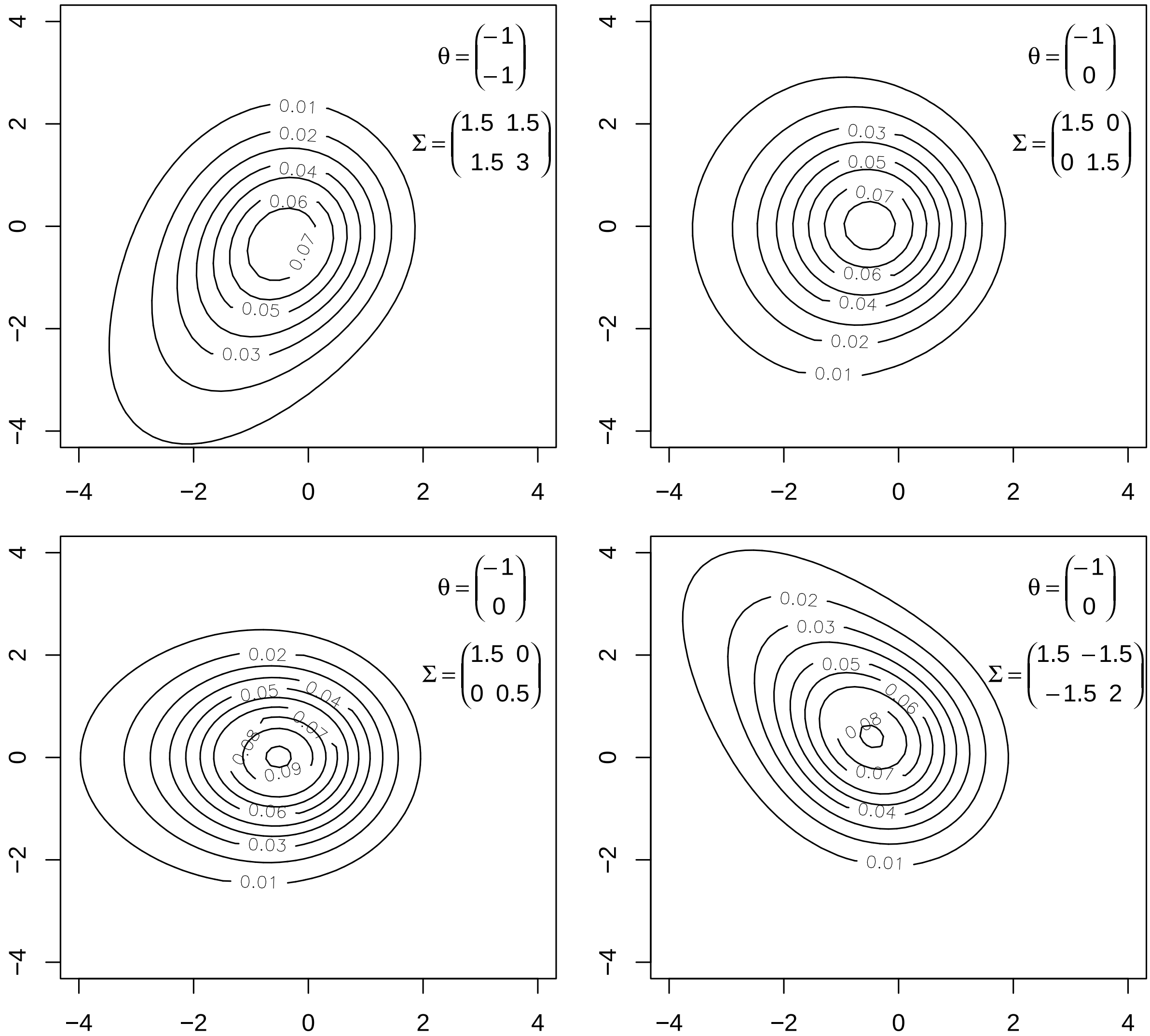
kus

$$A = E\left[(\sum_{i=1}^{p} Y_i)(\sum_{i=1}^{p} Y_i^2)\right].$$

Ühemõõtmelisel juhul taandub võrratus (34) võrratuseks (29).

Artiklis Kollo, Srivastava (2004) on tõestatud, et $\frac{A^2}{p} = \beta_{1p}(\mathbf{x})$, mis viib võrratuseni

$$\beta_{2p}(\mathbf{x}) \geq p^2 + \beta_{1p}(\mathbf{x}).$$



Joonis 4: Asümmeetriline kahemõõtmeline Laplace'i jaotus

3.2 Móri, Rohatgi ja Székely kordajad

Järgnevas tutvustatakse ungari matemaatikute T. F. Móri, V. K. Rohatgi ja G. J. Székely kirjeldatud mitmemõõtmelise asümmeetria ja järsakuse karakteristikuid. Käsitluses järgime nende 1993. aastal ilmunud artiklit, Móri, Rohatgi ja Székely (1993).

Olgu $\mathbf{x}$ juhuslik p-vektor positiivselt määratud kovariatsioonimaatriksiga $\boldsymbol{\Sigma}$ ja olgu

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - E\mathbf{x}).$$

Asümmeetriakordaja defineeritakse võrdusega

$$\mathbf{s} = E(\|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{y}) \tag{35}$$

ning järsakus valemiga

$$\mathbf{K} = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T). \tag{36}$$

Asümmeetriakordaja $\mathbf{s}$ on seega p-vektor, järsakus $\mathbf{K}$ on aga $p \times p$-maatriks.

Näide 3.3 Normaaljaotus. Olgu $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, siis $\mathbf{y} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$. Leiame $\mathbf{s}$ ja $\mathbf{K}$.

$$\mathbf{s} = E(\|\mathbf{y}\|^2 \, \mathbf{y}) = E \begin{pmatrix} \sum_i Y_i^2 Y_1 \\ \vdots \\ \sum_i Y_i^2 Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EY_1^3 \\ \vdots \\ EY_p^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Tähistame $\mathbf{W} = \mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T$, siis $W_{ij} = \sum_{k=1}^p Y_i Y_j Y_k^2$. Kuna $Y_i \sim N(0,1)$, siis

$$\begin{aligned} E(W_{ij}) &= E\left(\sum_{k=1}^p Y_i Y_j Y_k^2\right) = \sum_{\substack{k\neq i \\ k \neq j}} EY_i EY_j EY_k^2 + EY_i^3 EY_j + EY_j^3 EY_i = 0, \\ E(W_{ii}) &= E\left(\sum_{k=1}^p Y_i^2 Y_k^2\right) = \sum_{k \neq i} E(Y_i^2)E(Y_k^2) + E(Y_i^4) = p - 1 + 3 = p + 2. \end{aligned}$$

Järelikult $\mathbf{K} = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = (p+2)\mathbf{I}_p$.

Kordajate omaduste uurimiseks vaatleme nende skalaarseid funktsioone $\alpha = \|\mathbf{s}\|$ ja $\beta = \operatorname{tr} \mathbf{K}$.

Paneme tähele, et $\beta = \beta_{2p}(\mathbf{x})$, kus β_{2p} on Mardia defineeritud järsakus, vt. võrdused (31) ja (33). Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \beta_{2p}(\mathbf{x}) &= \operatorname{tr} \left[E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T \otimes \mathbf{y}\mathbf{y}^T)\right] = E\left[\operatorname{tr}(\mathbf{y}\mathbf{y}^T \otimes \mathbf{y}\mathbf{y}^T)\right] = \\ &= E\left[\operatorname{tr}(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)\right]^2 = E\left[(\mathbf{y}^T\mathbf{y})^2\right], \qquad (37) \\ \beta &= \operatorname{tr} \mathbf{K} = \operatorname{tr}\left[E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T)\right] = E\operatorname{tr}(\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = E\left[(\mathbf{y}^T\mathbf{y})^2\right] = \beta_{2p}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Kordajate α ja β omadusi kirjeldavad järgmised teoreemid.

Teoreem 3.1 *Kehtib võrratus*

$$\alpha^2 \leq \beta - p^2.$$

TÕESTUS: Paneme tähele, et kuna $\mathbf{y}$ on standardiseeritud, siis $E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = \mathbf{I}_p$ ja $E(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = p$. Tõepoolest,

$$\left(E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)\right)_{ij} = E(Y_iY_j) = \begin{cases} EY_i^2, & i = j \\ EY_iEY_j, & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ning $E(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p EY_i^2 = \sum_{i=1}^p 1 = p$.

Tähistame

$$f = \|\mathbf{y}\|^2 - p, \quad g = \mathbf{s}^T\mathbf{y},$$

siis $E(fg) = \|\mathbf{s}\|^2$. Tõepoolest:

$$\begin{aligned} E(fg) &= E[(\|\mathbf{y}\|^2 - p)\,\mathbf{s}^T\mathbf{y}] = E(\|\mathbf{y}\|^2\,\mathbf{s}^T\mathbf{y} - p\,\mathbf{s}^T\mathbf{y}) = E(\|\mathbf{y}\|^2\,\mathbf{y}^T - p\,\mathbf{y}^T)\,\mathbf{s} = \\ &= \left[E(\|\mathbf{y}\|^2\,\mathbf{y}^T) - p\,E(\mathbf{y}^T)\right]\mathbf{s} = \mathbf{s}^T\mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2. \end{aligned}$$

Kasutades Cauchy-Schwarzi võrratust, saame

$$\alpha^4 = \|\mathbf{s}\|^4 = [E(fg)]^2 \leq Ef^2 Eg^2,$$

kus

$$\begin{aligned} Ef^2 &= E(\|\mathbf{y}\|^4 - 2\|\mathbf{y}\|^2 p + p^2) = E\left[(\mathbf{y}^T\mathbf{y})^2\right] - 2pE(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) + p^2 = \\ &= \beta - 2p^2 + p^2 = \beta - p^2, \\ Eg^2 &= E(\mathbf{s}^T\mathbf{y}\mathbf{s}^T\mathbf{y}) = \mathbf{s}^T E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)\mathbf{s} = \mathbf{s}^T\mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2 = \alpha^2. \end{aligned}$$

Seega $\alpha^4 \leq (\beta - p^2)\alpha^2$. Kui $\alpha > 0$, siis saame võrratuse mõlemaid pooli α^2-ga läbi jagades

$$\alpha^2 \leq \beta - p^2.$$

Kui $\alpha = 0$, siis peame näitama, et $\beta - p^2 \geq 0$. Kuna $\beta = E\left[(\mathbf{y}^T\mathbf{y})^2\right]$ ning $p^2 = \left[E(\mathbf{y}^T\mathbf{y})\right]^2$, siis

$$\beta - p^2 = D(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \beta - p^2 \geq 0.$$

□

Definitsioon 3.1 *Öeldakse, et juhuslik suurus* $\mathbf{y}$ *on lõpmatult jagunev, kui* $\forall n \in \mathbb{N}$ *korral leiduvad sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *nii, et*

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \quad .$$

Teoreem 3.2 *Kui juhuslik vektor* $\mathbf{y}$ *on lõpmatult jagunev, siis*

$$\alpha^2 \leq \beta - p(p+2).$$

TÕESTUS: Olgu $\mathbf{y}$ standardiseeritud juhuslik vektor, s.t. $E\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $D\mathbf{y} = \mathbf{I}_p$. Fikseerime vabalt $j \in \mathbb{N}$. Kuna $\mathbf{y}$ on eelduse kohaselt lõpmatult jagunev, siis leiduvad sõltumatud sama jaotusega juhuslikud vektorid $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$ nii, et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{j} \mathbf{x}_i$. Et $\mathbf{y}$ on standardiseeritud, siis $E\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, $D\mathbf{x}_i = \frac{1}{j}\mathbf{I}_p$.

Saame

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}) &= E(\sum_l \mathbf{x}_l \sum_m \mathbf{x}_m^T \sum_n \mathbf{x}_n) = E(\sum_{l,m,n} \mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_n) = E(\sum_l \mathbf{x}_l\mathbf{x}_l^T\mathbf{x}_l + \sum_{\substack{l\neq m \\ l\neq n}} \mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_n) = \\ &= \sum_l E(\mathbf{x}_l\mathbf{x}_l^T\mathbf{x}_l) + \sum_{\substack{l\neq m \\ l\neq n}} E\mathbf{x}_l E(\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_n) = \sum_l E(\mathbf{x}_l\mathbf{x}_l^T\mathbf{x}_l) \end{aligned}$$

Teame, et $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$ on sama jaotusega. Tähistades $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}_i$, $\mathbf{x} = (X^1, \ldots, X^p)^T$, jõuame tulemuseni

$$E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = jE(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}).$$

Tuletame seose $E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T)$ ja $E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$ vahel:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) &= E(\sum_{l,m,n,p} \mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_n\mathbf{x}_p^T) = \\ &= E(\sum_l \mathbf{x}_l\mathbf{x}_l^T\mathbf{x}_l\mathbf{x}_l^T + \sum_{l\neq m}(\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T + \mathbf{x}_l\mathbf{x}_l^T\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T + \mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_m\mathbf{x}_l^T)). \end{aligned}$$

Viimases võrduses on välja jäetud liikmed, mille keskväärtus on $\mathbf{0}$. Paneme tähele, et $\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m^T = \mathbf{x}_l\mathbf{x}_l^T\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T$ ning läheme üle lühematele tähistustele:

$$E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = jE(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T) + j(j-1)\left[2E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) + E(\|\mathbf{x}\|^2)E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\right].$$

Leiame $E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$ ja $E(\|\mathbf{x}\|^2)$.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) &= \begin{pmatrix} E((X^1)^2) & E(X^1X^2) & \dots & E(X^1X^p) \\ E(X^1X^2) & E((X^2)^2) & \dots & E(X^2X^p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X^1X^p) & E(X^2X^p) & \dots & E((X^p)^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{j} \end{pmatrix} = \frac{1}{j}\mathbf{I}_p \\ E(\|\mathbf{x}\|^2) &= \sum_{i=1}^p E[(X^i)^2] = \sum_{i=1}^p \frac{1}{j} = \frac{p}{j} \end{aligned}$$

Tagasi asendades saame

$$E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = jE(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T) + j(j-1)\left(\frac{2}{j^2} + \frac{p}{j^2}\right)\mathbf{I}_p = jE(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T) + \frac{j-1}{j}(p+2)\mathbf{I}_p.$$

Leiame $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{x}$ asümmeetriakordajad $\mathbf{s_y}$ ja $\mathbf{s_x}$.

- Kuna $\mathbf{y}$ on standardiseeritud, siis $\mathbf{s_y} = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y})$.
- Teame, et $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $D\mathbf{x} = \frac{1}{j}\mathbf{I}_p$. Olgu $\mathbf{z} = (D\mathbf{x})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} = \sqrt{j}\mathbf{x}$. Asümmeetriakordaja definitsiooni (35) järgi $\mathbf{s_x} = E(\|\mathbf{z}\|^2\mathbf{z}) = E(\left\|\sqrt{j}\mathbf{x}\right\|^2\sqrt{j}\mathbf{x}) = j\sqrt{j}E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x})$.

Teoreemi väite tõestuseks näitame, et

$$\|\mathbf{s_y}\|^2 \le \operatorname{tr}\mathbf{K_y} - p(p+2) + \frac{2p}{j}. \tag{38}$$

(Kuna $j \in \mathbb{N}$ oli valitud vabalt, siis $\frac{2p}{j}$ võib omandada kuitahes väikeseid väärtusi. Seega $\alpha^2 = \|\mathbf{s_y}\|^2 \le \operatorname{tr}\mathbf{K_y} - p(p+2) = \beta - p(p+2)$.)

Tõestame võrratuse (38).

$$\|\mathbf{s_y}\|^2 = \left\|E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y})\right\|^2 = j\left\|E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x})\right\|^2 = \frac{1}{j}\|\mathbf{s_x}\|^2 \le \frac{1}{j}(\operatorname{tr}\mathbf{K_x} - p^2).$$

Viimane võrratus tugineb teoreemis 3.1 saadud tulemusele $\|\mathbf{s}\|^2 \le \operatorname{tr}\mathbf{K} - p^2$.

Asendades

$$\operatorname{tr}\mathbf{K_x} = \operatorname{tr}E(\mathbf{z}\mathbf{z}^T\mathbf{z}\mathbf{z}^T) = j^2\operatorname{tr}E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T),$$

saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{j}(\operatorname{tr}\mathbf{K_x} - p^2) &= \frac{1}{j}(j^2\operatorname{tr}E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T) - p^2) = \operatorname{tr}\left(jE(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\right) - \frac{p^2}{j} = \\ &= \operatorname{tr}\left(E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) - \frac{j-1}{j}(p+2)\mathbf{I}_p\right) - \frac{p^2}{j} \\ &= \operatorname{tr}E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) - \frac{j-1}{j}p(p+2) - \frac{p^2}{j} = \operatorname{tr}\mathbf{K_y} - p(p+2) + \frac{2p}{j}. \end{aligned}$$

Sellega on võrratus (38) ja teoreem tõestatud. □

Ka selles peatükis defineeritud asümmeetriakordaja ning järsakus on leitavad otse standardiseeritud juhusliku vektori kolmanda momendi kaudu. Järgnev esitus on autoripoolne.

Lause 3.1 *Olgu* $\mathbf{x}$ *juhuslik* p*-vektor ning* $\mathbf{y} = (Y_1, \ldots, Y_p)^T$ *tema standardiseerimisel saadud juhuslik vektor. Siis avalduvad* $\mathbf{x}$ *asümmeetriakordaja ning järsakus vastavalt*

$$\mathbf{s} = \mathbf{I}_p \star m_3(\mathbf{y}) \tag{39}$$

ja

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}_p \star m_4(\mathbf{y}). \tag{40}$$

TÕESTUS: Tõestame võrduse (39). Kasutades tähtkorrutise omadusi (22) ja (18), veendume, et

$$\mathbf{I}_p \star m_3(\mathbf{y}) = \mathbf{I}_p \star E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T \otimes \mathbf{y}) = E(\mathbf{I}_p \star (\mathbf{y}\mathbf{y}^T \otimes \mathbf{y})) = E((\mathbf{I}_p \star \mathbf{y}\mathbf{y}^T) \otimes \mathbf{y}),$$

kus tähtkorrutise definitsiooni põhjal

$$\mathbf{I}_p \star \mathbf{y}\mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^{p} Y_i^2.$$

Arvestades otsekorrutamise omadust (3), saamegi

$$\mathbf{I}_p \star m_3(\mathbf{y}) = E(\sum_{i=1}^{p} Y_i^2 \otimes \mathbf{y}) = E(\|\mathbf{y}\|^2\mathbf{y}) = \mathbf{s}.$$

Võrduse (40) tõestuses saame sarnaselt:

$$\mathbf{I}_p \star m_4(\mathbf{y}) = E((\mathbf{I}_p \star \mathbf{y}\mathbf{y}^T) \otimes \mathbf{y}\mathbf{y}^T).$$

Kuna $\sum_{i=1}^{p} Y_i^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y}$, siis

$$\mathbf{I}_p \star m_4(\mathbf{y}) = E(\mathbf{y}^T\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}\mathbf{y}^T) = E(\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = \mathbf{K}.$$

□

3.3 Uued kordajad

Olgu $\mathbf{x}$ juhuslik p-vektor ning $\mathbf{y} = (D\mathbf{x})^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - E\mathbf{x})$. Koziol (1989) märkas, et Mardia järsakus ei arvesta kõiki neljandat järku segamomente. Tõepoolest, võrduse (37) põhjal

$$\beta_{2p}(\mathbf{x}) = E\left[(\mathbf{y}^T\mathbf{y})^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{p} Y_i^2\right)^2\right].$$

Seega pole esindatud segamomendid kujul $E(Y_i^3Y_j)$ ning $E(Y_iY_jY_kY_l)$. Osa segamomentide välja jätmisega kaob aga osa infot jaotuse kuju kohta.

Ka Móri, Rohatgi ja Székely kordajad jätavad osa segamomente vaatluse alt välja. Asümmeetriakordaja

$$\mathbf{s} = E(\|\mathbf{y}\|^2\mathbf{y}) = E(\sum_{i=1}^{p} Y_i^2\mathbf{y})$$

ei arvesta segamomente kujul $E(Y_iY_jY_k)$, seega $p \geq 3$ puhul jääb osa segamomente välja. Järsakus

$$\mathbf{K} = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = E(\sum_{i=1}^{p} Y_i^2\mathbf{y}\mathbf{y}^T)$$

jätab välja segamomendid kujul $E(Y_iY_jY_kY_l)$, mis tähendab info kadu, kui $p \geq 4$.

Vältimaks sellist kadu, on käsikirjas Kollo (2005) välja pakutud uued definitsioonid. Juhusliku vektori $\mathbf{x}$ asümmeetriakordaja ja järsakus defineeritakse vastavalt võrdustega

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{p,p} \star m_3(\mathbf{y}), \tag{41}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{p,p} \star m_4(\mathbf{y}). \tag{42}$$

Sarnaselt eelmise peatükiga on ka siin asümmeetriakordaja p-vektor ja järsakus $p \times p$-maatriks.

Uued kordajad esituvad $\mathbf{y}$ koordinaatide kaudu

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = E\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} Y_iY_j\mathbf{y}\right], \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = E\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} Y_iY_j\mathbf{y}\mathbf{y}^T\right].$$

Esitatud avaldistest nähtub, et kõik segamomendid on esindatud.

Vaatleme ühemõõtmelist juhtu. Olgu X juhuslik suurus ning $Y = (DX)^{-\frac{1}{2}}(X - EX)$. Märkuste 1 ja 2 põhjal

$$\mathbf{b}(X) = m_3(Y) = \beta_1(X),$$
$$\mathbf{B}(X) = m_4(Y) = \beta_2(X).$$

Seega on uued kordajad ühemõõtmelise asümmeetria ja järsakuse üldistuseks.

Näide 3.4 Mitmemõõtmeline normaaljaotus. Olgu $\mathbf{x}$ juhuslik p-vektor keskväärtusega $\boldsymbol{\mu}$ ja dispersiooniga $\boldsymbol{\Sigma}$ ning $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$. Esitame $\mathbf{y}$ momendid $\mathbf{x}$ tsentraalsete momentide kaudu. Kasutame otsekorrutise omadusi (4), (7) ja (5) ning $\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$ sümmeetrilisust. Saame, et

$$\begin{aligned}
m_3(\mathbf{y}) &= E(\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}^T\otimes\mathbf{y}) = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T\otimes\mathbf{y}) = \\
&= E\left[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\right)\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right] = \\
&= E\left[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{I}_1\right] = \\
&= E\left[(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}})\cdot\left((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\otimes(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)\cdot\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right] = \\
&= \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}E\left[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\otimes(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{m}_3(\mathbf{x})\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Seega

$$m_3(\mathbf{y}) = \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{m}_3(\mathbf{x})\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}. \tag{43}$$

Analoogselt saab näidata, et

$$m_4(\mathbf{y}) = \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{m}_4(\mathbf{x})\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{44}$$

Eeldame, et $\mathbf{x}$ on normaaljaotusega. Mitmemõõtmelise normaaljaotuse tsentraalsed momendid on esitatud valemitega (23) ja (24). Kuna $\overline{m}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, siis ka $m_3(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ ning asümmeetriakordaja $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{p,p}\star\mathbf{0} = \mathbf{0}$. See on ka oodatav tulemus, sest normaaljaotus on sümmeetriline.

Leiame ka $m_4(\mathbf{y})$.

$$\begin{aligned}
m_4(\mathbf{y}) &= \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\left[(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma}) + \mathrm{vec}\mathbf{\Sigma}\mathrm{vec}^T\mathbf{\Sigma}\right]\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) = \\
&= (\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma})\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) + \\
&\quad + \left[\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{vec}\mathbf{\Sigma}\right]\left[\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{vec}\mathbf{\Sigma}\right]^T = \\
&= (\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\otimes\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) + \\
&\quad + \mathrm{vec}\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{vec}^T\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) = \\
&= (\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{I}_p\otimes\mathbf{I}_p) + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p = \\
&= \mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p} + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p.
\end{aligned}$$

Kasutasime kommutatsioonimaatriksi omadust (15), otsekorrutise omadusi (5) ja (9) ning vec-operaatori omadust (13). Kasutame saadud avaldist järsakuse $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ leidmiseks:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{p,p}\star m_4(\mathbf{y}) = \mathbf{1}_{p,p}\star\left(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p}+\mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right).$$

Liidetavate tähtkorrutised leiame eraldi.

- Tähtkorrutise definitsiooni põhjal

$$\mathbf{1}_{p,p}\star\mathbf{I}_{p^2} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(\mathbf{I}_{p^2})_{ij},$$

  kus $(\mathbf{I}_{p^2})_{ij}$, $i = 1,\ldots,p$; $j = 1,\ldots,p$, on $p\times p$-plokid maatriksist $\mathbf{I}_{p^2}$. Nullist erinevad plokid asuvad maatriksi diagonaalil ja moodustavad ise p-järku ühikmaatriksid. Seega

$$\mathbf{1}_{p,p}\star\mathbf{I}_{p^2} = \sum_{i=1}^{p}\mathbf{I}_p = p\cdot\mathbf{I}_p.$$

- Kommutatsioonimaatriks $\mathbf{K}_{p,p}$ on $p^2 \times p^2$-maatriks, mis koosneb $p \times p$-plokkidest $(\mathbf{K}_{p,p})_{ij}$, kus (j,i)-s element on 1 ning ülejäänud nullid, $i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, p$. Kõigi plokkide summeerimisel saame tulemuseks ühtede maatriksi:

$$\mathbf{1}_{p,p} \star \mathbf{K}_{p,p} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (\mathbf{K}_{p,p})_{ij} = \mathbf{1}_{p,p}$$

- Kasutades tähtkorrutise omadust (19) , saame

$$\mathbf{1}_{p,p} \star \left(\mathrm{vec}\mathbf{I}_p \mathrm{vec}^T \mathbf{I}_p \right) = \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{1}_{p,p}.$$

Seega on mitmemõõtmelise normaaljaotusega vektori $\mathbf{x}$ järsakus

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = p\,\mathbf{I}_p + 2 \cdot \mathbf{1}_{p,p}.$$

See erineb Móri, Rohatgi ja Székely järsakusest

$$\mathbf{K} = p\,\mathbf{I}_p + 2 \cdot \mathbf{I}_p.$$

3.4 Mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse asümmeetria- ja järsakuskordajad

Leiame erinevalt defineeritud asümmeetriakordajad ja järsakused mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse jaoks.

Mardia kordajad

Olgu $\mathbf{x} \sim ML_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$. Kollo ja Srivastava (2004) tõestasid, et

$$\begin{aligned} \beta_{1p}(\mathbf{x}) &= a(a^2 - 6a + 3(p+2)), \\ \beta_{2p}(\mathbf{x}) &= 2(p+a)(p+2) - 3a^2, \end{aligned}$$

kus $a = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta}$.

Móri, Rohatgi ja Székely kordajad

Lauses 3.2 on esitatud Laplace'i jaotuse Móri, Rohatgi ja Székely asümmeetriakordaja ning järsakus.

Lause 3.2 *Olgu* $\mathbf{x} \sim ML_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ *ja* $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \theta)$. *Siis avalduvad juhusliku vektori* $\mathbf{x}$ *asümmeetriakordaja ja järsakus vastavalt*

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (p + 2 - a)\mathbf{c}, && (45) \\ \mathbf{K} &= (2p + 4 + a)\mathbf{I}_p + (p + 4 - 3a)\mathbf{c}\mathbf{c}^T, && (46) \end{aligned}$$

kus $a = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta}$ *ja* $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}$.

TÕESTUS: Lause 3.1 põhjal avalduvad $\mathbf{x}$ asümmeetriakordaja ja järsakus momentide kaudu vastavalt

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{I}_p \star m_3(\mathbf{y}), \\ \mathbf{K} &= \mathbf{I}_p \star m_4(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Valemi (43) põhjal

$$m_3(\mathbf{y}) = \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) \overline{m}_3(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}},$$

kus

$$\overline{m}_3(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma}\, \boldsymbol{\theta}^T - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta}$$

valemist (26). Seega

$$m_3(\mathbf{y}) = \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) \left(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma}\, \boldsymbol{\theta}^T - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta}\right) \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}},$$

kus

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}})(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes 1) = \mathbf{I}_p \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}, \\ &(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}})(\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(1 \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{I}_p, \\ &(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}})\mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}) \cdot \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{vec}\mathbf{I}_p \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta})^T, \\ &(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}})(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta})^T \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Asendades $\mathbf{c} = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta}$, saame juhusliku vektori $\mathbf{y}$ kolmanda momendi avaldiseks

$$m_3(\mathbf{y}) = \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{I}_p + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\,\mathbf{c}^T - \mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}. \tag{47}$$

Leiame asümmeetriakordaja

$$\mathbf{s} = \mathbf{I}_p \star \left(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{I}_p + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\,\mathbf{c}^T - \mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}\right).$$

Liidetavate tähtkorrutised on

$$\begin{aligned}
&\mathbf{I}_p \star (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{I}_p \star \mathbf{I}_p) \otimes \mathbf{c} = \mathrm{tr}\,\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c} = p \cdot \mathbf{c},\\
&\mathbf{I}_p \star (\mathbf{c} \otimes \mathbf{I}_p) = \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c},\\
&\mathbf{I}_p \star (\mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathbf{c}^T) = \mathbf{I}_p \star \left(\mathrm{vec}\mathbf{I}_p \cdot \mathrm{vec}^T\mathbf{c}^T\right) = \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{c},\\
&\mathbf{I}_p \star (\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{I}_p \star \mathbf{c}\mathbf{c}^T) \otimes \mathbf{c} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{c}\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Seega on p-mõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse asümmeetriakordaja

$$\mathbf{s} = (p + 2 - \mathbf{c}^T\mathbf{c})\mathbf{c} = (p + 2 - a)\mathbf{c},$$

sest $\mathbf{c}^T\mathbf{c} = \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\theta} = a$.

Järsakuse arvutamiseks on vaja momentide maatriksit $m_4(\mathbf{y})$, mis valemite (27) ja (44) põhjal avaldub

$$\begin{aligned}
m_4(\mathbf{y}) \quad = \quad & \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\left[2\overline{m}_4(\mathbf{z}) - 3\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T + \boldsymbol{\theta}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{\Sigma} + \mathrm{vec}\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}^T)^{\otimes 2} + \right.\\
& \left. + (\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T)(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})\right]\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

kus $\mathbf{z}$ on normaaljaotusega juhuslik vektor kovariatsioonimaatriksiga $\mathbf{\Sigma}$.

Leiame liidetavate korrutised eraldi.

- Näitest 3.4 teame, et

$$\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{m}_4(\mathbf{z})\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p} + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p.$$

- Otsekorrutise omaduse (5) põhjal

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T\right)\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) =\\
&= \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) \otimes \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T.
\end{aligned}$$

- Kasutades vec-operaatori omadust (13) ning otsekorrutise omadusi (5) ja (9), saame

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\left[(\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta})\mathrm{vec}^T\mathbf{\Sigma}\right]\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) =\\
&= \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta}\right) \cdot \mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\left(\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathbf{c}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p) =\\
&= \mathbf{c}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p.
\end{aligned}$$

- Analoogselt

$$\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{vec}\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}^T \otimes \boldsymbol{\theta}^T)\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{vec}\mathbf{I}_p \cdot (\mathbf{c}^T)^{\otimes 2}.$$

- Kommutatsioonimaatriksi omaduse (15) põhjal

$$\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T)(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right) = \\
&= (\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T)\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p}) = \\
&= (\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T)(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p}).
\end{aligned}$$

Seega on juhusliku vektori $\mathbf{y}$ neljas moment

$$\begin{aligned}
m_4(\mathbf{y}) \quad = \quad & 2\left(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p}+\mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right) - 3\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{c}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p + \\
& + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p(\mathbf{c}^T)^{\otimes 2} + (\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T)(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p}).
\end{aligned} \tag{48}$$

Nüüd saame leida juhusliku vektori $\mathbf{x}$ järsakuse:

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}_p \star m_4(\mathbf{y}).$$

Leiame eraldi liidetavate tähtkorrutised:

- Esimene liidetav annab normaaljaotuse järsakuse:

$$\mathbf{I}_p \star \left(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p}+\mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right) = (p+2)\mathbf{I}_p.$$

- $\quad \mathbf{I}_p \star \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T\right) = \left(\mathbf{I}_p \star \mathbf{c}\mathbf{c}^T\right) \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T = \mathrm{tr}\,(\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{c}\mathbf{c}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{c}\mathbf{c}\mathbf{c}^T = a \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T$

- Omaduse (11) põhjal $\mathbf{c}^{\otimes 2} = \mathrm{vec}(\mathbf{c}\mathbf{c}^T)$. Kasutades tähtkorrutise omadust (19), saame

$$\mathbf{I}_p \star \left(\mathbf{c}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right) = \mathbf{I}_p \star \left(\mathrm{vec}(\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right) = \mathbf{c}\mathbf{c}^T.$$

- Analoogselt

$$\mathbf{I}_p \star \left[\mathrm{vec}\mathbf{I}_p\left(\mathbf{c}^T\right)^{\otimes 2}\right] = \mathbf{c}\mathbf{c}^T.$$

- Viimase tähtkorrutise leidmisel kasutame omadusi (20) ja (15).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{I}_p \star (\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T)(\mathbf{I}_{p^2}+\mathbf{K}_{p,p}) = \\
&= \mathbf{I}_p \star \left[\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right)\mathbf{K}_{p,p} + \mathbf{K}_{p,p}\left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right) + \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right)\right] = \\
&= (\mathbf{I}_p \star \mathbf{I}_p) \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{I}_p \star \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right)\mathbf{K}_{p,p}(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p) + \\
&\quad + \mathbf{I}_p \star (1 \otimes \mathbf{I}_p)\mathbf{K}_{p,p}\left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right) + (\mathbf{I}_p \star \mathbf{c}\mathbf{c}^T) \otimes \mathbf{I}_p = \\
&= \mathrm{tr}\,\mathbf{I}_p \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathrm{tr}\,(\mathbf{c}\mathbf{c}^T) \otimes \mathbf{I}_p = (p+2)\mathbf{c}\mathbf{c}^T + a\mathbf{I}_p.
\end{aligned}$$

Seega on p-mõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotusega juhusliku vektori $\mathbf{x}$ järsakus

$$\mathbf{K} = (2p+4+a)\mathbf{I}_p + (p+4-3a)\mathbf{c}\mathbf{c}^T.$$

□

Uued kordajad

Järgnevas leiame uued asümmeetria- ning järsakuskordajad Laplace'i jaotuse jaoks.

Lause 3.3 *Olgu* $\mathbf{x} \sim ML_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ *ja* $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \theta)$. *Siis avalduvad juhusliku vektori* $\mathbf{x}$ *asümmeetriakordaja ja järsakus vastavalt*

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{x}) &= (p - \operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{1}_{p,p}\mathbf{c}, && (49) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= (2p + \operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{I}_p + 4 \cdot \mathbf{1}_{p,p} + 2\mathbf{D}^T + 2\mathbf{D} + (p - 3\operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{c}\mathbf{c}^T, && (50) \end{aligned}$$

kus $a = \boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta}$ *ja* $\mathbf{D} = \mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T$.

TÕESTUS: Juhusliku vektori $\mathbf{x}$ asümmeetriakordaja on antud valemiga

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{p,p} \star m_3(\mathbf{y}).$$

Juhusliku vektori $\mathbf{y}$ kolmanda momendi avaldis on leitud eelmises tõestuses (valem (47)) Seega on vaja leida tähtkorrutis

$$\mathbf{1}_{p,p} \star \left(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{I}_p + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\, \mathbf{c}^T - \mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}\right).$$

Liidetavate tähtkorrutised on

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{p,p} \star (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{1}_{p,p} \star \mathbf{I}_p) \otimes \mathbf{c} = \operatorname{tr}\mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c} = p\,\mathbf{c}, \\ &\mathbf{1}_{p,p} \star (\mathbf{c} \otimes \mathbf{I}_p) = \mathbf{1}_{p,p}\mathbf{c}, \\ &\mathbf{1}_{p,p} \star (\mathrm{vec}\mathbf{I}_p\, \mathbf{c}^T) = \mathbf{1}_{p,p} \star (\mathrm{vec}\mathbf{I}_p \mathrm{vec}^T\mathbf{c}) = \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{1}_{p,p}\mathbf{c}, \\ &\mathbf{1}_{p,p} \star (\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{1}_{p,p} \star \mathbf{c}\mathbf{c}^T) \otimes \mathbf{c} = \operatorname{tr}(\mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Tähistades $\mathbf{D} = \mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T$, saamegi

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (p - \operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{1}_{p,p}\mathbf{c}.$$

Järsakus on antud valemiga

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{p,p} \star m_4(\mathbf{y}),$$

valemi (48) põhjal

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \ & \mathbf{1}_{p,p} \star \Big[2\left(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p} + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\,\mathbf{I}_p\right) - 3\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{c}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p + \\ & + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p(\mathbf{c}^T)^{\otimes 2} + (\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T)(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})\Big]. \end{aligned}$$

Leiame liidetavate tähtkorrutised.

- Esimene liidetav annab normaaljaotuse järsakuse, mis näite 3.4 põhjal on

$$\mathbf{1}_{p,p} \star \left(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p} + \mathrm{vec}\mathbf{I}_p\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right) = p\,\mathbf{I}_p + 2 \cdot \mathbf{1}_{p,p}.$$

- $\mathbf{1}_{p,p} \star \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T\right) = (\mathbf{1}_{p,p} \star \mathbf{c}\mathbf{c}^T) \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T = \operatorname{tr}(\mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{c}\mathbf{c}^T = \operatorname{tr}\mathbf{D}\,\mathbf{c}\mathbf{c}^T$

- Omaduse 11 põhjal

$$\mathbf{1}_{p,p} \star \left(\mathbf{c}^{\otimes 2}\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right) = \mathbf{1}_{p,p} \star \left[\mathrm{vec}(\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathrm{vec}^T\mathbf{I}_p\right] = \mathbf{c}\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{D}^T.$$

- Analoogselt

$$\mathbf{1}_{p,p} \star \left(\mathrm{vec}\mathbf{I}_p\,(\mathbf{c}^T)^{\otimes 2}\right) = \mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T = \mathbf{D}.$$

- Viimase tähtkorrutise leidmisel kasutame omadusi (20) ja (15).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{p,p} \star (\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T)(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p}) = \\
&= \mathbf{1}_{p,p} \star \left[\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right)\mathbf{K}_{p,p} + \mathbf{K}_{p,p}\left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right) + \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right)\right] = \\
&= (\mathbf{1}_{p,p} \star \mathbf{I}_p) \otimes \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{1}_{p,p} \star \left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right)\mathbf{K}_{p,p}(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p) + \\
&\quad + \mathbf{1}_{p,p} \star (1 \otimes \mathbf{I}_p)\mathbf{K}_{p,p}\left(\mathbf{c}\mathbf{c}^T \otimes \mathbf{I}_p\right) + (\mathbf{1}_{p,p} \star \mathbf{c}\mathbf{c}^T) \otimes \mathbf{I}_p = \\
&= \mathrm{tr}\,\mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{c}\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{1}_{p,p} + \mathrm{tr}\,(\mathbf{1}_{p,p} \cdot \mathbf{c}\mathbf{c}^T) \otimes \mathbf{I}_p = \\
&= p\mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathrm{tr}\,\mathbf{D} \cdot \mathbf{I}_p.
\end{aligned}$$

Järsakuseks saame

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= 2(p\,\mathbf{I}_p + 2 \cdot \mathbf{1}_{p,p}) - 3\mathrm{tr}\,\mathbf{D}\,\mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{D}^T + \mathbf{D} + p\mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathrm{tr}\,\mathbf{D} \cdot \mathbf{I}_p \\
&= (2p + \mathrm{tr}\,\mathbf{D})\mathbf{I}_p + 4 \cdot \mathbf{1}_{p,p} + 2\mathbf{D}^T + 2\mathbf{D} + (p - 3\mathrm{tr}\,\mathbf{D})\mathbf{c}\mathbf{c}^T.
\end{aligned}$$

□

Näiteid

Järgnevas on esitatud mõned näited konkreetsete kordajate väärtuste kohta erinevate jaotuse parameetrite korral. Esimene näide on asümmeetrilise Laplace'i jaotuse sümmeetrilisest erijuhust. Teine ja kolmas näide jätkavad näidet 3.2, kus selgus, et võime erinevate jaotuse kujude korral saada samad Mardia kordajad. Näeme, et mitmemõõtmelised kordajad annavad jaotuse kuju täpsemalt edasi. Arvutused on läbi viidud lisas esitatud programmiga.

Olgu $\mathbf{x} \sim ML_2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{\Sigma})$.

1. Valime parameetrid järgmiselt

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siis erinevate asümmeetria- ja järsakuskordajate väärtused on:

- Mardia:

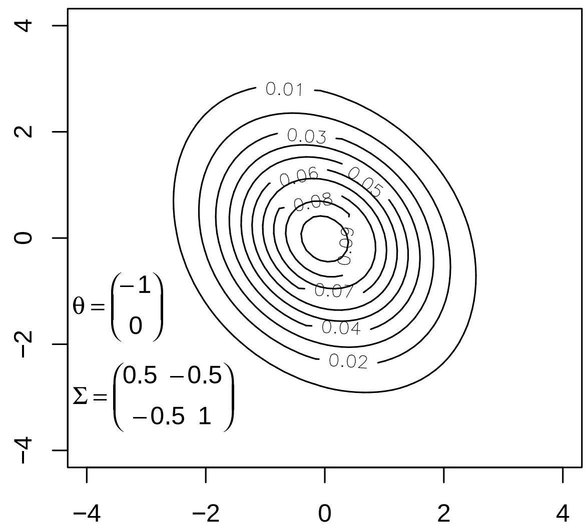
$$\beta_{12}(\mathbf{x}) = 0, \quad \beta_{22}(\mathbf{x}) = 16,$$

- Móri, Rohatgi, Székely:

$$\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

- uued kordajad:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$



Joonis 5: Laplace'i jaotus - näide 1.

2. Võtame

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 3 \end{pmatrix},$$

siis erinevate asümmeetria- ja järsakuskordajate väärtused on:

- Mardia:

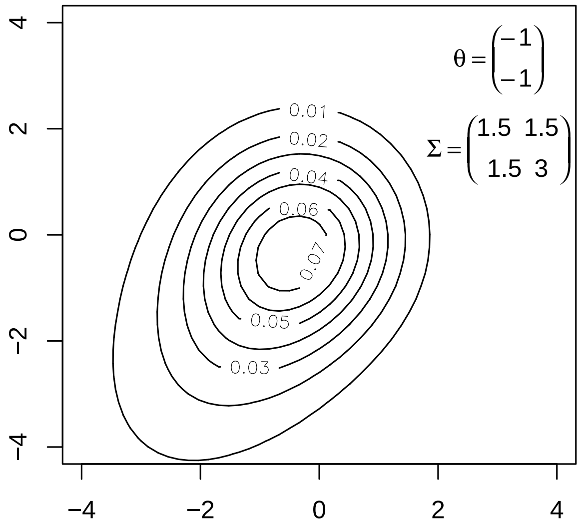
$$\beta_{12}(\mathbf{x}) = 5.63, \quad \beta_{22}(\mathbf{x}) = 20,$$

- Móri, Rohatgi, Székely:

$$\mathbf{s_x} = \begin{pmatrix} -2.43 \\ -1.22 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K_x} = \begin{pmatrix} 10.8 & 1.07 \\ 1.07 & 9.2 \end{pmatrix},$$

- uued kordajad:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2.78 \\ 2.48 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 11.55 & 5.97 \\ 5.97 & 10.59 \end{pmatrix}.$$



Joonis 6: Laplace'i jaotus - näide 2.

3. Olgu parameetrid valitud järgmiselt

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Siis erinevate asümmeetria- ja järsakuskordajate väärtused on:

- Mardia:

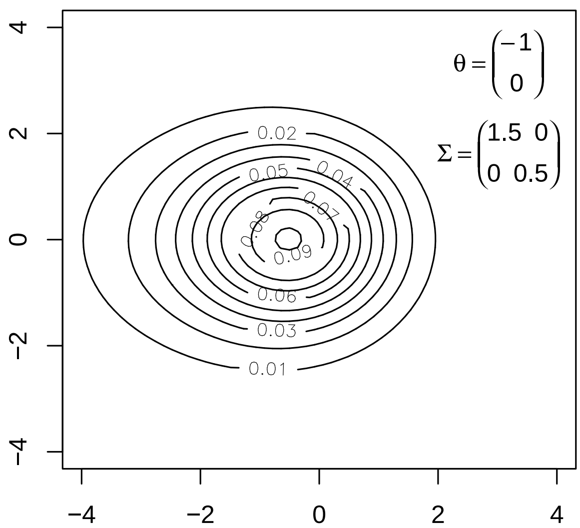
$$\beta_{12}(\mathbf{x}) = 5.63, \quad \beta_{22}(\mathbf{x}) = 20,$$

- Móri, Rohatgi, Székely:

$$\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2.72 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 11.33 & 0 \\ 0 & 8.67 \end{pmatrix},$$

- uued kordajad:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2.73 \\ -1.63 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 11.33 & 5.33 \\ 5.33 & 8.67 \end{pmatrix}.$$



Joonis 7: Laplace'i jaotus - näide 3.

Summary

Characteristics of skewness and kurtosis

In this paper different skewness and kurtosis measures are examined.

First chapter gives overview of notation and matrix algebra in use. In the second chapter univariate skewness and kurtosis measures are introduced.

Third chapter studies multivariate characteristics. We start with Mardia's measures, which were the first multivariate characteristics of skewness and kurtosis and are still the most common in practice.

Since Mardia's coefficients are scalar and non-negative, they do not represent the shape of a distribution well. Móri, Rohatgi and Székely had a different approach, they defined skewness of a p-variate distribution as p-vector and kurtosis as $p \times p$-matrix. We show that these measures are simple functions of moments of the standardized distribution. Using this new representation and reparametrization of Kollo, Srivastava (2004), we find skewness and kurtosis of asymmetric multivariate Laplace distribution.

Both approaches ignore some of the mixed moments. Hence, information of distribution shape is partially lost. New measures introduced in Kollo (2005) take all mixed moments into account. We find expressions of those characteristics for multivariate normal distribution and asymmetric Laplace distribution.

Finally, different measures of skewness and kurtosis are numerically presented for different sets of parameter values of Laplace distribution.

Kirjanduse loetelu

[1] Kollo, T. (1991). *Maatrikstuletis mitmemõõtmelises statistikas.* TÜ Kirjastus, Tartu, 106-107 (vene k.).

[2] Kollo, T.; Srivastava, M. (2004). Estimation and testing on multivariate Laplace distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **33**, 2363-2387.

[3] Kollo, T.; von Rosen, D. (2005). *Advanced Multivariate Statistics with Matrices.* Springer, Dordrecht.

[4] Kollo, T. (2005). Multivariate skewness and kurtosis measures with an application in ICA. TÜ matemaatilise statistika instituut, Tartu (käsikiri).

[5] Koziol, J. A.(1989). A note on measures of multivariate kurtosis. *Biometrical J.*, **31**, 619-624.

[6] Kotz, S.; Kozubowski, T. J., Podgórski, K. (2001). *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance.* Birkhäuser, Boston.

[7] MacRae, E. C. (1974). Matrix derivatives with an application to an adaptive linear decision problem. *The Annals of Statistics*, **2**, 337-346.

[8] Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis. *Biometrika*, **57**, 519-530.

[9] Mardia, K. V. (1985). Mardia's test of multinormality, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Volume 5, 218.

[10] Móri, T. F.; Rohatgi, V. K.; Székely, G. J. (1993). On multivariate skewness and kurtosis. *Theory Probab. Appl.*, **38**, 547-551.

[11] Schott, J. R. (1997). *Matrix Analysis for Statistics.* John Wiley & Sons, New York.

Lisa: programm

Järgneva R programmi abil on arvutatud näidetes toodud asümmeetria- ja järsakuskordajad. Realiseeritud on kommutatsioonimaatriks, otsekorrutis ja tähtkorrutis ning funktsioonid erinevate kordajate arvutamiseks mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse jaoks.

```
############################
# MAATRIKSITE FUNKTSIOONID #
############################

# OTSEKORRUTIS
otse = function(x,y){
m = nrow(x); n = ncol(x)
p = nrow(y); q = ncol(y)
maatriks = matrix(NA,m*p,n*q)
for (i in 1:m){
for (j in 1:n){
maatriks[(p*(i-1)+1):(p*i),
(q*(j-1)+1):(q*j)]=x[i,j]*y
}}
return(maatriks)
}

# TÄHTKORRUTIS
# võrdse suurusega plokid
taht = function(x,y){
m = nrow(x); n = ncol(x)
mr = nrow(y); ns = ncol(y)
r = mr/m; s = ns/n
if (trunc(r)==r & trunc(s)==s){
A = matrix(0,r,s)
for (i in 1:m){
for (j in 1:n){
A = A+x[i,j]*y[(r*(i-1)+1):(r*i),
 (s*(j-1)+1):(s*j)]
}}
return(A)
}
else return ("Viga dimensioonides!")
}

# KOMMUTATSIOONIMAATRIKS
kom = function(p,q){
n = p*q
maatriks = matrix(0,n,n)
for (i in 1:p){
alg1 = (i-1)*q+1
alg2 = i
for (j in 0:(q-1)){
maatriks[alg1+j,alg2+p*j] = 1
}}
return(maatriks)
}

# MAATRIKSI RUUTJUUR
juur = function(x){
vek = eigen(x)$vectors
val = eigen(x)$values
juur = vek%*%diag(sqrt(val))%*%t(vek)
return(juur)
}

# Pöördmaatriks : solve(maatriks)
# vec-operaator : as.vector(maatriks)
# trace : sum(diag(ruutmaatriks))
# p-järku ühikmaatriks : diag(p)

#################
# GENEREERIMINE #
#################

# LAPLACE'I JAOTUS
# n realisatsiooni

laplace = function(m,cov,n){
juurcov = juur(cov)
p=nrow(cov)
vastus = matrix(NA,n,p)
for(i in 1:n){
w = rexp(1)
norm=juurcov%*%rnorm(p)
vastus[i,] = m*w+sqrt(w)*norm
}
return(vastus)
}
###############
# ASÜMMEETRIA #
###############

# 3. MOMENT
m3 = function(teeta,sigma){
p = nrow(teeta)
if(ncol(teeta)==1 & nrow(sigma)==p
 & ncol(sigma)==p){
```

```
i = diag(p)
a = solve(juur(sigma)) %*%teeta
moment = otse(i,a)+otse(a,i)+
 as.vector(i)%*%t(a)-otse(a%*%t(a),a)
return(moment)
}
else {return("Viga dimensioonides!")}
}

# MARDIA ASÜMMEETRIA
as_mardia = function(t,s){
mom3 = m3(t,s)
beeta = sum(diag(t(mom3) %*% mom3))
return(beeta)
}

# MÓRI, ROHATGI JA SZÉKELY ASÜMMEETRIA

as_mrs = function(teeta,sigma){
mom3 = m3(teeta,sigma)
p = nrow(teeta)
vastus = taht(diag(p),mom3)
return(vastus)
}

# UUS ASÜMMEETRIA
as_uus = function(teeta,sigma){
mom3 = m3(teeta,sigma)
p=nrow(teeta)
yhed = matrix(1,p,p)
vastus = taht(yhed,mom3)
return(vastus)
}


############
# JÄRSAKUS #
############

# NORMAALJAOTUSE 4. TSENTRAALNE MOMENT
m_4n = function(s){
p = ncol(s)
if (nrow(s) == p){
m = (diag(p^2)+kom(p,p))%*%otse(s,s)+
 as.vector(s)%*%t(as.vector(s))
return(m)
}
else{
return("Argument olgu ruutmaatriks.")
}}
# 4. MOMENT
m4 = function(t,s){
p = nrow(t)
if(ncol(t)==1&nrow(s)==p&ncol(s)==p){
b = juur(solve(s))%*%t
bb = b %*% t(b)
ik = diag(p^2) + kom(p,p)
vec = as.vector(diag(p))
m = 2*(ik+vec%*%t(vec))-3*otse(bb,bb)+
 otse(b,b)%*%t(vec)+vec%*%otse(t(b),
 t(b))+ik%*%otse(diag(p),bb) %*% ik
return(m)
}
else {return("Viga dimensioonides!")}
}

# UUS JÄRSAKUS
j_uus = function(teeta,sigma){
mom4 = m4(teeta,sigma)
p = nrow(teeta)
yhed = matrix(1,p,p)
return(taht(yhed,mom4))
}

# MARDIA JÄRSAKUS
j_mardia = function(teeta,sigma){
mom4 = m4(teeta,sigma)
return(sum(diag(mom4)))
}

# MÓRI, ROHATGI JA SZÉKELY JÄRSAKUS
j_mrs = function(teeta,sigma){
mom4 = m4(teeta,sigma)
p = nrow(teeta)
return(taht(diag(p),mom4))
}
##############
# ARVUTAMINE #
##############

teeta = matrix(c(0.5,0.5),nrow=2)
sigma = matrix(c(1,0,0,1),nrow=2)
as_mardia(teeta,sigma)
as_mrs(teeta,sigma)
as_uus(teeta,sigma)
j_mardia(teeta,sigma)
j_mrs(teeta,sigma)
j_uus(teeta,sigma)
tt = teeta%*%t(teeta)
y=laplace(teeta,sigma+tt,10000)
library(KernSmooth)
```

```
est = bkde2D(cbind(y[,1],y[,2]),
 gridsize=c(100,100),bandwidth=c(1,1))
```

```
contour(est$x1, est$x2, est$fhat,
 xlim=c(-4,4),ylim=c(-4,4))
```