TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja tehnoloogiateaduskond
Füüsika instituut

KADRI HILLERMAA

ÜLDISTATUD HÉNON-HEILES'I VÕRRANDITE LIIKUMISINTEGRAALID

Magistritöö

Juhendja: teadur, füüs.-mat.kand. LEMBIT SOSSI

TARTU 2010

SISUKORD

Sissejuhatus 3

I Mõisted teooriast 5

1.1 Dünaamiliste süsteemide liikumisintegraalid 5

1.2 Poincaré lõige 8

II Üldistatud Hénon-Heiles'i võrrandid 9

III Üldistatud Hénon-Heiles'i võrrandite teisendamine kaheks võrrandiks 13

IV Liikumisintegraali leidmine 23

V Lahendite käitumine liikumisintegraali ümbruses 32

Kokkuvõte 41

Viited 42

Summary 45

Lisad 46

SISSEJUHATUS

Mittelineaarne dünaamika on kujunenud tänapäeva teaduse üheks huvitavamaks valdkonnaks, osutudes ülimalt oluliseks meid ümbritseva maailma mitmekesisuse seletamisel. Interdistsiplinaarse valdkonnana seovad mittelineaarse dünaamika meetodid ühtse matemaatilise kirjeldusega keerukaid nähtusi nii füüsikast, bioloogiast, keemiast kui ka majandusest, meditsiinist ja paljudest teistest teadusharudest [1]. Nende protsesside kirjeldamiseks kasutatavate matemaatiliste mudelite koostamine on väga keerukas ja enamasti võib juba vajaliku võrrandi või võrrandsüsteemi kirjapanekut lugeda suureks saavutuseks. Mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamine numbriliste meetoditega ei ole tänapäeva arvutitele probleem, kuid sageli annavad parema tulemuse kvalitatiivsed meetodid, mis aitavad koguda materjali mittelineaarsete võrrandite struktuuri ja võimalike efektide kohta kõige üldisemal tasemel. Lähtutakse põhiliselt lihtsatest matemaatilistest mudelitest ja nendest saadud informatsioon üldistatakse keerukamatele (eri)-juhtudele .

Mittelineaarses dünaamikas on mitmeid klassikalisi mudeleid, mis ammugi ei ole enam seotud ainult esialgse probleemiga, vaid on hakkanud elama nn iseseisvat elu, muutudes puhtalt matemaatilisteks uurimisobjektideks ja leides rakendust paljudes erinevates valdkondades. Teiste seas on näiteks popultasioonidünaamika aluseks olev Lotka-Volterra kiskja-saaklooma mudel [2] mitmekülgset rakendust leidnud meditsiinis [3, 4] ja majanduses [5, 6] ning Duffingi ostsillaatoril põhinev mudel [7] on lisaks mehaanikale kasutusel keemias [8, 9] ja bioloogias [10]. Üheks selliseks klassikaliseks mudeliks on ka käesolevas töös vaatluse all olev Hénon-Heiles'i galaktilise dünaamika mudel [11], mis on muutunud omamoodi prototüüp-võrrandiks kaose uurimisel [12, 13, 14] ning mille rakendused ulatuvad gravitatsioonilaineteni välja [15]. Ühelt poolt Hénon-Heiles'i mudeli lihtsus (sarnasus harmoonilisele ostsillaatorile) ja teisalt piisav keerukus (teist järku mittelineaarsused) ning populaarsus tingisidki selle valimise antud magistritöö uurimisobjektiks.

Magistritöö eesmärgiks on Hénon-Heiles'i võrrandite näitel uurida, millistel tingimusel on võimalik neljalt Hamiltoni võrrandilt neljamõõtmelises faasiruumis minna üle kahele võrrandile, kust võib teatud juhtudel leida liikumisintegraale [16], millede leidmine võrrandite algkujust on komplitseeritud, ja pakkuda välja metoodika liikumisintegraalide leidmiseks. Töö alguses tutvustatakse lühidalt liikumisintegraali mõistet ja sellega seonduvat probleemistikku ning esitatakse esmane analüüs Hénon-Heiles'i võrrandile liikumisintegraalide leidmise võimalikkusest. Edasi kirjeldatakse lühidalt Poincaré lõike olemust, millele järgneb detailsem ajalooline ülevaade Hénon-Heiles'i üldistatud võrranditest. Kolmandas osas tuletatakse baasmaterjal üleminekuks Hénon-Heiles'i üldistatud võrranditelt kahele võrrandile, kust leitud parameetrite väärtused rahuldavad Hénon-Heiles'i võrrandite ühte tuntud integreeritavat juhtu. See loob eeldused, et liikumisintegraali leidmine on võimalik. Neljandat peatükki võib lugeda töö põhiosaks, kus pakutakse välja üldine liikumisintegraali kuju ning leitakse liikumisintegraal. Töö viimases osas vaadeldakse Poincaré lõike abil lahendite käitumist liikumisintegraalide ümbruses, kuid võimaliku bifurkatsioonijoone olemuse tõsisem analüüs jääb antud töö raamistikust välja.

I MÕISTED TEOORIAST

1.1 Dünaamiliste süsteemide liikumisintegraalid

Liikumisintegraali mõistega puutume kokku juba algtasemel dünaamikast rääkides. Teame, et töö on integraal jõust ja tee pikkusest. See integraal on võrdeline liikumise käigus tekkiva energiate vahega ning energia muutus (lõpp- ja algenergia vahe) on seega liikumise integraalne (summeeruv) muutus ning seepärast võib energiat nimetada liikumisintegraaliks. Lisaks energia integraalile tunneb klassikaline Newtoni dünaamika veel impulsimomendi integraali. Minnes Hamiltoni formalismi, muutub liikumisintegraali mõiste mõneti üldisemaks.

Olgu meil n vabadusastmega süsteem, mille hamiltoniaan on $H(q, p)$. Formuleerime klassikalise dünaamika põhiküsimuse, milleks on üldistatud koordinaatide (q) ja impulsside (p) väärtuste leidmine mistahes ajahetkel t. Selleks tuleb lahendada diferentsiaalvõrrandid

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} q_i &= \frac{\partial}{\partial p_i} H\left(q, p\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} p_i &= -\frac{\partial}{\partial q_i} H\left(q, p\right), \text{ kus } i = 1, 2, \ldots n \end{aligned} \tag{1.1}$$

algtingimuste $t = 0$ korral

$$\begin{aligned} q_i(0) &= q_{i0} \\ p_i(0) &= p_{i0}\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Kuna dünaamika võrrandid on aja suhtes pööratavad, siis võtame uuteks algtingimusteks q ja p ja lahendame võrrandid $(-t)$ suhtes

$$\begin{aligned} q_{i0} &= q_i(-t; q, p) \\ p_{i0} &= p_i(-t; q, p)\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Viimaste võrranditega (1.3) on leitud 2 n faasimuutujate p, q ja aja t funktsiooni, mis jäävad faasitrajektooril konstantseteks (q_{i0} ja p_{i0} on etteantud ääretingimused). Avaldame ühest sobivast võrrandist aja t ja asendame teistesse võrranditesse. Nüüd saame $2\,n - 1$ ainult faasiruumi koordinaatidest q ja p sõltuvat funktsiooni

$$\Phi_j(q,p) = \Phi_j \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, 2\,n - 1, \tag{1.4}$$

mis jäävad faasitrajektooril konstantseteks. Selliseid funktsioone nimetatakse liikumisintegraal-ideks. Liikumisintegraalide leidmist saab lugeda ekvivalentseks diferentsiaalvõrrandite lahendamisega.

Esitatud liikumisintegraalide leidmise algoritm on teoreetilises plaanis küll üldine, kuid konkreetsetes arvutustes harva realiseeritav.

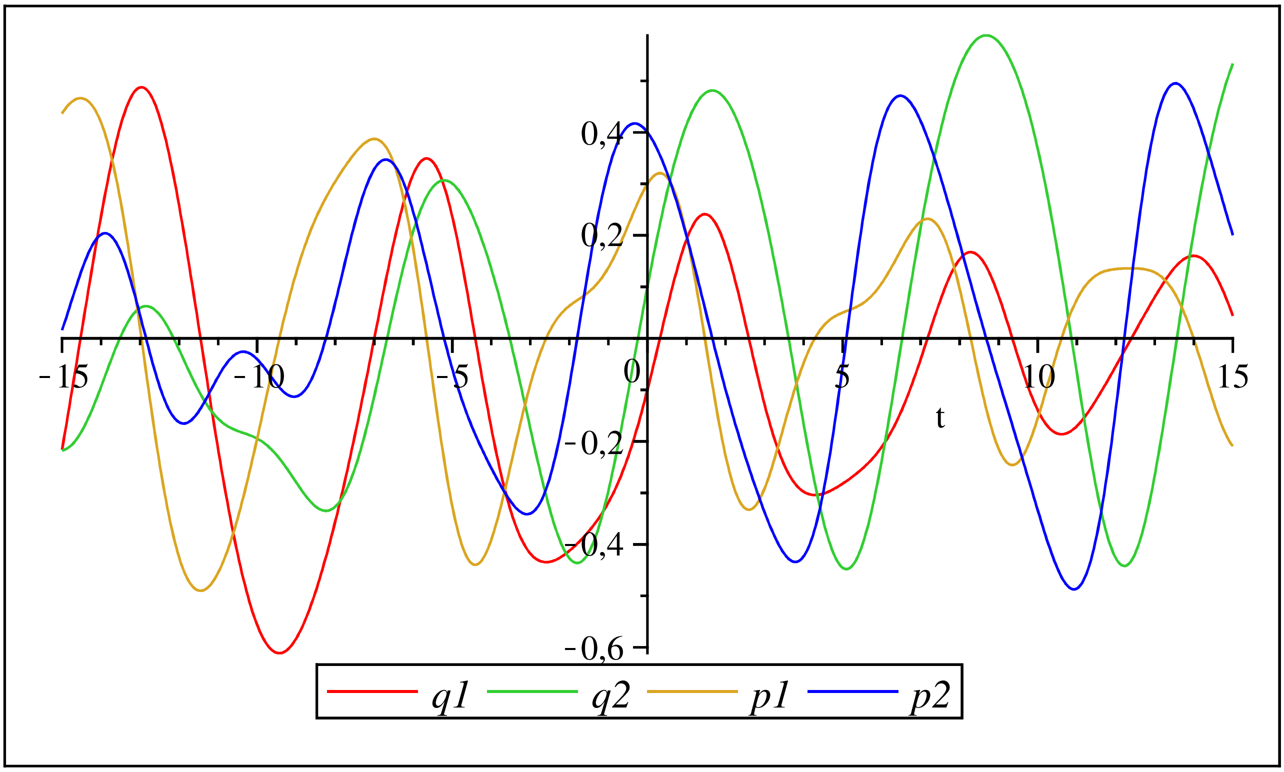
Vaatame näitena Hénon-Heiles'i võrrandi

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left(p_1^{\ 2} + p_2^{\ 2}\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2}\right) + q_1^{\ 2} q_2 - \frac{1}{3} q_2^{\ 3} \tag{1.5}$$

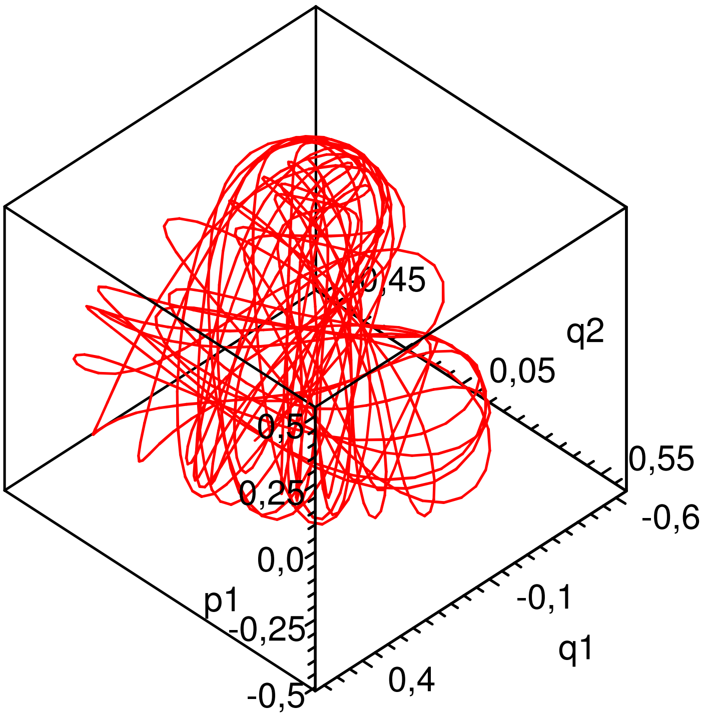
lahendite käitumist (Joonis 1), siis vähemalt vahemikus $t = -15 \ldots 15$ on funktsioonid päris siledad. Kasutades näiteks q_1 tunduks mõeldav ka teatud lähendusena avaldada aeg t ja asendada see teistesse lahenditesse. Saaksime kolm liikumisintegraali. Selle idee teeb kaheldavaks aga q_1, q_2, p_1 kooskäitumise kolmemõõtme-line pilt (Joonis 2), mis sarnaneb kaosega.

Seetõttu kasutatakse liikumisintegraalide leidmiseks harilikult kaudseid meetodeid ja spetsiifilisi võtteid, mis sõltuvad konkreetsest ülesandest. Näiteks kuna jäävad suurused vastavad sümmeetriatele saab nende tuletamiseks kasutada Noether'i teoreemi [17]. Tihti kasutakse ka Gaussi (divergentsi) teoreemi, sest divergents liikumisintegraalist on võrdne nulliga, ning eriti kvantmehaanikas Poissoni sulge, kuna jääva suuruse Poissoni sulg hamiltoniaaniga on null.

Joonis 1. Henon-Heilesi võrrandite lahendid algtingimuste $q_{10} = -0.1$, $q_{20} = 0.1$, $p_{10} = 0.3$, $p_{20} = 0.4$ korral.



Joonis 2. Neljamõõtmelise faasijoone projektsioon kolme mõõtmesse.



1.2 Poincaré lõige

Ruumi, mille määravad dünaamilise süsteemi üldistatud koordinaadid ja impulsid, nimetatakse faasiruumiks. Faasiruumi dimensioon on võrdne kahekordse üldistatud koordinaatide arvuga. Igale süsteemi hetkelisele seisundile vastab üks faasiruumi punkt ja liikumise käigus moodustavad need punktid faasitrajektoorid. Lõigates ruumis (x, x′, t) kulgevaid trajektoore tasandiga $t = mT$, kus T on periood, ja projekteerides punktid tasandile (x, x′) saame Poincaré lõike. Üldistatult Poincaré lõige on punktide hulk faasiruumis, mis on saadud n-mõõtmelise faasiruumi lõikamisel (n - 1)-mõõtmelise hüperpinnaga. Seda võtet võib kasutada korduvalt ning igal korral ruumi dimensioo-nide arv väheneb ühe võrra.

Meetodi kasutamine on soovitatav ja tulemuslik kui tegemist on süsteemiga, kus väga väikesed erinevused algtingimustes põhjustavad suuri muutusi ebakorrapärastes liikumisgraafikutes. Poincaré lõige aitab siis selgitada, kas selles ebakorrapärases liikumises on mingeid seaduspärasusi. Käesolevas töös on kasutatud arvutiprogrammi Maple'i *poincare* paketti, mis pakub lihtsat võimalust leida etteantud Hamiltoni süsteemi Poincaré lõiget. Analüütilise lähenemise asemel kõrvutatakse graafiku ehitamisel iga graafikule kantava punkti energiat konkreetse H(0) algväärtusega. Energia hälbe arvutamiseks protsentides kasutatakse valemit:

$$\frac{H(0) - H(punkt)}{H(0) \cdot 100} \tag{1.6}$$

Punktis $H(0) = 0$ näidatakse ainult suurimat absoluutset hälvet. Kuigi kõik numbrilised algoritmid viivad H väärtusteni, mis on erinevad esialgsest H(0)-st, kuvab Maple ainult suurimaid väärtusi.

II ÜLDISTATUD HÉNON-HEILES'I VÕRRANDID

Prantsuse astronoomid M. Hénon ja C. Heiles uurisid tähe liikumist galaktika tsentri suhtes. Klassikalises stellaardünaamikas on tähtede orbiitide jaoks teada kaks liikumisintegraali: energia integraal ja impulsimomendi integraal. Ainult nende integraalide abil ei ole võimalik aga kirjeldada kogu galaktika dünaamikat, kuna klassikalistest integraalidest tulenevalt peaks kiiruste dispersiooni ellipsoid olema kaheteljeline. Otsestest vaatlustest Linnutees Päikese ümbruses on saadud aga, et kiiruste ellipsoid on kolmeteljeline. Reaalse kiiruste ellipsoidi seletamiseks tuleb eeldada kolmanda integraali olemasolu. Nähtuse kirjeldamiseks koostasid M. Hénon ja C. Heiles ligikaudse nelja vabadusastmega mudeli ja tegid vastavad arvutused. Hamiltoni funktsioonile anti kuju

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^{2} + p_2^{2}\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^{2} + q_2^{2}\right) + q_1^{2}q_2 - \frac{1}{3}q_2^{3} \tag{2.1}$$

kus q_1 ja q_2 on üldistatud koordinaadid ning p_1 ja p_2 vastavad impulsid. Hamiltoni võrrandid on

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}q_1 &= \frac{\partial}{\partial p_1}H = p_1 \\
\frac{d}{dt}q_2 &= \frac{\partial}{\partial p_2}H = p_2 \\
\frac{d}{dt}p_1 &= \frac{\partial}{\partial q_1}H = -q_1 - 2\,q_1q_2 \\
\frac{d}{dt}p_2 &= \frac{\partial}{\partial q_2}H = -q_2 - q_1^{2} + q_2^{2}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Juba esialgses publikatsioonis [11] eralduti märgatavalt uuritavast füüsikalisest objektist, põhjuseks asjaolu, et 4-mõõtmelise faasiruumi korral peaks leiduma kolm liikumisintegraali, kuid kolmas liikumisintegraal ei olnud mõistlikul viisil avaldatav. Selgus, et mõningate arvutieksperimentide tulemuste graafilised esitused olid kaosega väga sarnased. Seda demonstreeriti Poincare' lõike abil, leides energiate $\left\{H=\frac{1}{24}, H=\frac{1}{18}, H=\frac{1}{12}, H=\frac{1}{8}, H=\frac{1}{7}, H=\frac{1}{6}\right\}$ juures punktid, kus faasijoon lõikab $p_2 q_2$ -tasandit. Järgnevatel piltidel näeme, et mida suurem on energia, seda segasemaks muutub pilt, jõudes suuremate energiate korral kaose sarnaseks (Joonis 3).

Varsti probleemi astronoomiline taust unustati ja võrrandsüsteemile hakati lähenema puhtalt analüütilise mehaanika vaatenurgast, põhitähelepanu koondus kaos-kord üleminekute uurimisele. Hénon-Heiles'i võrrandit modifitseeriti ja saadi üldistatud Hénon-Heiles'i hamiltoniaan:

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_1^{\;2}+\mathrm{p}_2^{\;2}\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}\,\mathrm{q}_1^{\;2}+\mathrm{B}\,\mathrm{q}_2^{\;2}\right)+\mathrm{G}\,\mathrm{q}_1^{\;2}\mathrm{q}_2-\frac{1}{3}\mathrm{C}\,\mathrm{q}_2^{\;3}, \tag{2.3}$$

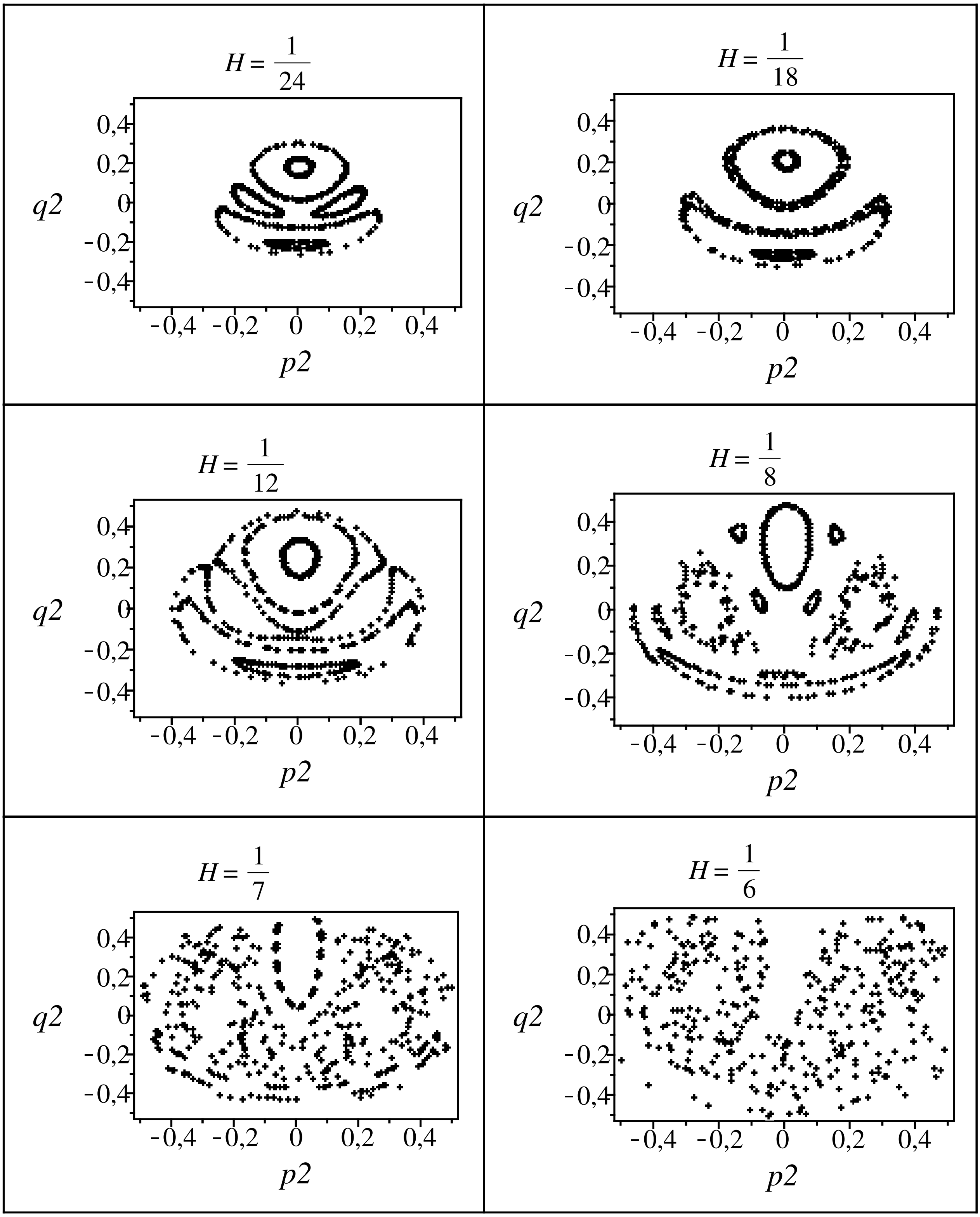
mis koos vastavate võrranditega muutus matemaatiliseks uurimisobjektiks. Leiti sellised parameetrite A, B, C ja G kombinatsioonid, mille korral kolmas liikumisintegraal on mõistlikul viisil avaldatav [18, 19, 20, 21]. Praeguseks on välja pakutud neli kombinatsiooni:

$$\begin{gathered}\frac{G}{C}=0\\ \frac{G}{C}=-1, \quad \frac{A}{B}=1\\ \frac{G}{C}=-\frac{1}{6}\\ \frac{G}{C}=-\frac{1}{16}, \quad \frac{A}{B}=\frac{1}{6}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Kui $\frac{G}{C}=0$, siis neli Hamiltoni võrrandit moodustavad kaks autonoomset võrrandite paari

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}q_1=p_1\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}q_2=p_2\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}p_1=-Aq_1\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}p_2=-Bq_2+Cq_2^{\;2}\end{gathered} \tag{2.5}$$

Joonis 3. Hénon-Heiles'i süsteemi Poincaré lõiked. Energia kasvades ilmnevad punktide hulgaga tihedalt kaetud alad, mis laienevad üle kogu piirkonna. Kaootilise liikumise piiriks loetakse tavaliselt energiataset H = 1/12.



Esimene ja kolmas võrrand sisaldavad q_1 ja p_1, teine ja kolmas aga q_2 ja p_2. Mõlematel paaridel on analüütiliselt avaldatavad üldlahendid, olgugi et teise paari lahend näeb väga kohmakas välja. Lahendid sisaldavad integreerimiskonstante ja seega on võimalik leida ka süsteemi (2.5) liikumisintegraalid. Lisaks on leitud, et kombinatsioonide (2.4) esimene ja kolmas variant on omavahel seotud kanooniliste teisenduste kaudu [22].

Ühest küljest on hamiltoniaan (2.3) lihtne mudel, sisaldades harmoonilise ostsillaatori komponenti, võrrandi (2.3) kaks esimest liiget, ja sundivat jõudu, võrrandi (2.3) kaks viimast liiget, kuid just viimaste liikmete kuju muudab süsteemi käitumise piisavalt keerukaks. Väikestel energiatel on süsteemi liikumine domineeritud harmoonilise ostsillaatori komponendi poolt ja on kvaasiperioodiline, aga eelnevalt näidatud (Joonis 3) kõrgematel energiatel muutub olukord kardinaalselt.

Lisaks kaos-kord üleminekule kitsas energiavahemikus on Hénon-Heiles'i mudeli juures veel mitmeid huvipakkuvaid aspekte, näiteks on tegemist nn imeliku atraktoriga ning kvantiseeritud hamiltoniaan annab spektri, kus toimuvad sarnased üleminekud eelpool mainitutele, mis võimaldab uurida kaost kvantsüsteemides [23].

III ÜLDISTATUD HÉNON-HEILES'I VÕRRANDITE TEISENDAMINE KAHEKS VÕRRANDIKS

Tähistame üldistatud Hénon-Heilesi võrrandi Hamiltoni funktsioonis

$$H=\frac{1}{2}\,p_1^2+\frac{1}{2}\,p_2^2+\frac{1}{2}\,A\,q_1^2+\frac{1}{2}\,B\,q_2^2+G\,q_1^2\,q_2-\frac{1}{3}\,C\,q_2^3 \tag{3.1}$$

üldistatud koordinaadid

$$q_1=w_1,\ q_2=w_2 \tag{3.2}$$

ja impulsid

$$p_1=w_3,\ p_1=w_4 \tag{3.3}$$

Siis saame Hamiltoni võrranditeks:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}w_1&=w_3\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}w_2&=w_4\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}w_3&=-Aw_1-2\,Gw_1w_2\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}w_4&=-Bw_2-Gw_1^{\,2}+Cw_2^{\,2}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Moodustame kaks funktsiooni

$$\begin{aligned}z_1&=A_0+A_1\,w_1+A_2\,w_2+A_3\,w_3+A_4\,w_4\\ z_2&=B_0+B_1\,w_1+B_2\,w_2+B_3\,w_3+B_4\,w_4\end{aligned} \tag{3.5}$$

ja uurime millistel tingimustel saame moodustada kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,z_1&=A_{00}+A_{10}\,z_1+A_{01}\,z_2+A_{20}\,z_1^{\,2}+2\,A_{11}\,z_1z_2+A_{02}\,z_2^{\,2},\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,z_2&=B_{00}+B_{10}\,z_1+B_{01}\,z_2+B_{20}\,z_1^{\,2}+2\,B_{11}\,z_1z_2+B_{02}\,z_2^{\,2}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Asetame z_1 ja z_2 avaldised võrranditesse (3.6). Tuletistes

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,z_1}{\mathrm{d}\,t} &= A_1\frac{\mathrm{d}\,w_1}{\mathrm{d}\,t} + A_2\frac{\mathrm{d}\,w_2}{\mathrm{d}\,t} + A_3\frac{\mathrm{d}\,w_3}{\mathrm{d}\,t} + A_4\frac{\mathrm{d}\,w_4}{\mathrm{d}\,t},\\ \frac{\mathrm{d}\,z_2}{\mathrm{d}\,t} &= B_1\frac{\mathrm{d}\,w_1}{\mathrm{d}\,t} + B_2\frac{\mathrm{d}\,w_2}{\mathrm{d}\,t} + B_3\frac{\mathrm{d}\,w_3}{\mathrm{d}\,t} + B_4\frac{\mathrm{d}\,w_4}{\mathrm{d}\,t};\end{aligned} \tag{3.7}$$

asendame $\frac{\mathrm{d}\,w_1}{\mathrm{d}\,t}$, $\frac{\mathrm{d}\,w_2}{\mathrm{d}\,t}$, $\frac{\mathrm{d}\,w_3}{\mathrm{d}\,t}$, $\frac{\mathrm{d}\,w_4}{\mathrm{d}\,t}$ nende avaldistega võrranditest (3.4)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,z_1}{\mathrm{d}\,t} &= A_1w_3 + A_2w_4 + A_3\left(-Aw_1 - 2\,Gw_1w_2\right) + A_4\left(-Bw_2 - Gw_1^{\,2} + Cw_2^{\,2}\right)\\ \frac{\mathrm{d}\,z_2}{\mathrm{d}\,t} &= B_1w_3 + B_2w_4 + B_3\left(-Aw_1 - 2\,Gw_1w_2\right) + B_4\left(-Bw_2 - Gw_1^{\,2} + Cw_2^{\,2}\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Nii et valemis (3.6) saame peale asendusi (3.5) ja (3.8):

$$\begin{aligned}&A_1w_3 + A_2w_4 + A_3\left(-Aw_1 - 2\,Gw_1w_2\right) + A_4\left(-Bw_2 - Gw_1^{\,2} + Cw_2^{\,2}\right) = A_{00} + A_{10}\,\left(A_0 + A_1w_1\right.\\ &\left.+ A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4\right) + A_{01}\,\left(B_0 + B_1w_1 + B_2w_2 + B_3w_3 + B_4w_4\right) + A_{20}\,\left(A_0 + A_1w_1\right.\\ &\left.+ A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4\right)^2 + 2\,A_{11}\,\left(A_0 + A_1w_1 + A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4\right)\left(B_0 + B_1w_1 + B_2w_2\right.\\ &\left.+ B_3w_3 + B_4w_4\right) + A_{02}\,\left(B_0 + B_1w_1 + B_2w_2 + B_3w_3 + B_4w_4\right)^2\\ &\\ &B_1w_3 + B_2w_4 + B_3\left(-Aw_1 - 2\,Gw_1w_2\right) + B_4\left(-Bw_2 - Gw_1^{\,2} + Cw_2^{\,2}\right) = B_{00} + B_{10}\,\left(A_0 + A_1w_1\right.\\ &\left.+ A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4\right) + B_{01}\,\left(B_0 + B_1w_1 + B_2w_2 + B_3w_3 + B_4w_4\right) + B_{20}\,\left(A_0 + A_1w_1\right.\\ &\left.+ A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4\right)^2 + 2\,B_{11}\,\left(A_0 + A_1w_1 + A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4\right)\left(B_0 + B_1w_1 + B_2w_2\right.\\ &\left.+ B_3w_3 + B_4w_4\right) + B_{02}\,\left(B_0 + B_1w_1 + B_2w_2 + B_3w_3 + B_4w_4\right)^2.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Viime mõlemas võrrandis (3.9) kõik liikmed ühele poole ja grupeerime need w_1, w_2, w_3, w_4 astmete järgi, tähistades esimese võrrandi kordajad lihtsuse mõttes $U_1\,..U_{15}$ ja teise võrrandi kordajad $V_1\,..V_{15}$:

$$U_1 + U_2\,w_1 + U_3\,w_2 + U_4\,w_3 + U_5\,w_4 + U_6\,w_1^{\;2} + U_7\,w_1w_2 + U_8\,w_1w_3 + U_9\,w_1w_4 + U_{10}\,w_2^{\;2}$$

$$+\,U_{11}\,w_2w_3 + U_{12}\,w_2w_4 + U_{13}\,w_3^{\;2} + U_{14}\,w_3w_4 + U_{15}\,w_4^{\;2} = 0$$

$$(3.10)$$

$$V_1 + V_2\,w_1 + V_3\,w_2 + V_4\,w_3 + V_5\,w_4 + V_6\,w_1^{\;2} + V_7\,w_1w_2 + V_8\,w_1w_3 + V_9\,w_1w_4 + V_{10}\,w_2^{\;2}$$

$$+\,V_{11}\,w_2w_3 + V_{12}\,w_2w_4 + V_{13}\,w_3^{\;2} + V_{14}\,w_3w_4 + V_{14}\,w_4^{\;2} = 0.$$

Selleks, et võrrandid (3.10) kehtiksid iga w_1, w_2, w_3, w_4 korral, peavad kõikide $w_1^{\;m} \cdot w_2^{\;n}$, kus $n, m = 0\,..2$, kombinatsioonide kordajad võrduma nulliga. Nendest tingimustest saame kolmekümnest võrrandist koosneva süsteemi muutujate

$$A_{00}, A_{10}, A_1, A_{20}, A_{11}, A_2, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_{00}, B_{10}, B_1, B_{20}, B_{11}, B_2, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 \qquad (3.11)$$

suhtes (Tabel 1).

Mõlemates võrrandite massiivides U ja V on seitse võrrandit, mis on kas muutujate A_{20}, A_{11}, A_{02} või B_{20}, B_{11}, B_{02} suhtes linaarsed ja homogeensed. Esimeses masiivis U on nendeks võrranditeks U_8, U_9, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15} ja teises masiivis V võrrandid V_8, V_9, V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{15}. Antud seitsmest võrrandist saab moodustada 35 muutujate A_{20}, A_{11}, A_{02} või B_{20}, B_{11}, B_{02} suhtes lineaarset ja homogeenset võrrandite kolmikut

$$C(7, 3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35.$$

Homogeensetel võrrandsüsteemidel on nullidest erinevad lahendid ainult siis, kui nende determinant võrdub nulliga ja nii peavad kõigi 35 kolmiku determinandid võrduma nulliga [24]. See tingimus realiseerub kõikide kolmikute korral, kui

$$A_3\,B_4 - A_4\,B_3 = 0. \qquad (3.12)$$

Determinandid on välja kirjutatud töö lõpus toodud lisas (Lisa 1).

Tabel 1. Võrrandite massiivid U ja V.

	Süsteemi (3.10) esimese võrrandi liikmete kordajad (masiiv U)	Süsteemi (3.10) teise võrrandi liikmete kordajad (masiiv V)
vabaliige	$U_1 = A_{00} + A_0 A_{10} + B_0 A_{01} + A_0^2 A_{20} + 2 A_0 B_0 A_{11} + B_0^2 A_{02} = 0$	$V_1 = B_{00} + A_0 B_{10} + B_0 B_{01} + A_0^2 B_{20} + 2 A_0 B_0 B_{11} + B_0^2 B_{02} = 0$
w_1	$U_2 = A_1 A_{10} + B_1 A_{01} + 2 A_0 A_1 A_{20} + \left(2A_1 B_0 + 2 A_0 B_1\right) A_{11} + 2 B_1 B_0 A_{02} + A_3 A = 0$	$V_2 = A_1 B_{10} + B_1 B_{01} + 2 A_0 A_1 B_{20} + \left(2 A_1 B_0 + 2 A_0 B_1\right) B_{11} + 2 B_1 B_0 B_{02} + B_3 A = 0$
w_2	$U_3 = A_2 A_{10} + B_2 A_{01} + 2 A_0 A_2 A_{20} + \left(2 A_2 B_0 + 2 A_0 B_2\right) A_{11} + 2 B_2 B_0 A_{02} + A_4 B = 0$	$V_3 = A_2 B_{10} + B_2 B_{01} + 2 A_0 A_2 B_{20} + \left(2 A_2 B_0 + 2 A_0 B_2\right) B_{11} + 2 B_2 B_0 B_{02} + B_4 B = 0$
w_3	$U_4 = A_3 A_{10} + B_3 A_{01} + 2 A_0 A_3 A_{20} + \left(2 A_3 B_0 + 2 A_0 B_3\right) A_{11} + 2 B_3 B_0 A_{02} - A_1 = 0$	$V_4 = A_3 B_{10} + B_3 B_{01} + 2 A_0 A_3 B_{20} + \left(2 A_3 B_0 + 2 A_0 B_3\right) B_{11} + 2 B_3 B_0 B_{02} - B_1 = 0$
w_4	$U_5 = A_4 A_{10} + B_4 A_{01} + 2 A_0 A_4 A_{20} + \left(2A_4 B_0 + 2 A_0 B_4\right) A_{11} + 2 B_4 B_0 A_{02} - A_2 = 0$	$V_5 = A_4 B_{10} + B_4 B_{01} + 2 A_0 A_4 B_{20} + \left(2 A_4 B_0 + 2 A_0 B_4\right) B_{11} + 2 B_4 B_0 B_{02} - B_2 = 0$
$w_1 w_1$	$U_6 = A_1^2 A_{20} + 2 A_1 B_1 A_{11} + B_1^2 A_{02} + A_4 G = 0$	$V_6 = A_1^2 B_{20} + 2 A_1 B_1 B_{11} + B_1^2 B_{02} + B_4 G = 0$
$w_1 w_2$	$U_7 = A_1 A_2 A_{20} + \left(A_2 B_1 + A_1 B_2\right) A_{11} + B_2 B_1 A_{02} + A_3 G = 0$	$V_7 = A_1 A_2 B_{20} + \left(A_2 B_1 + A_1 B_2\right) B_{11} + B_2 B_1 B_{02} + B_3 G = 0$
$w_1 w_3$	$U_8 = A_1 A_3 A_{20} + \left(A_3 B_1 + A_1 B_3\right) A_{11} + B_3 B_1 A_{02} = 0$	$V_8 = A_1 A_3 B_{20} + \left(A_3 B_1 + A_1 B_3\right) B_{11} + B_3 B_1 B_{02} = 0$
$w_1 w_4$	$U_9 = A_1 A_4 A_{20} + \left(A_4 B_1 + A_1 B_4\right) A_{11} + B_4 B_1 A_{02} = 0$	$V_9 = A_1 A_4 B_{20} + \left(A_4 B_1 + A_1 B_4\right) B_{11} + B_4 B_1 B_{02} = 0$
$w_2 w_2$	$U_{10} = A_2^2 A_{20} + 2 A_2 B_2 A_{11} + B_2^2 A_{02} - A_4 C = 0$	$V_{10} = A_2^2 B_{20} + 2 A_2 B_2 B_{11} + B_2^2 B_{02} - B_4 C = 0$
$w_2 w_3$	$U_{11} = A_2 A_3 A_{20} + \left(A_3 B_2 + A_2 B_3\right) A_{11} + B_3 B_2 A_{02} = 0$	$V_{11} = A_2 A_3 B_{20} + \left(A_3 B_2 + A_2 B_3\right) B_{11} + B_3 B_2 B_{02} = 0$
$w_2 w_4$	$U_{12} = A_2 A_4 A_{20} + \left(A_4 B_2 + A_2 B_4\right) A_{11} + B_4 B_2 A_{02} = 0$	$V_{12} = A_2 A_4 B_{20} + \left(A_4 B_2 + A_2 B_4\right) B_{11} + B_4 B_2 B_{02} = 0$
$w_3 w_3$	$U_{13} = A_3^2 A_{20} + 2 A_3 B_3 A_{11} + B_3^2 A_{02} = 0$	$V_{13} = A_3^2 B_{20} + 2 A_3 B_3 B_{11} + B_3^2 B_{02} = 0$
$w_3 w_4$	$U_{14} = A_3 A_4 A_{20} + \left(A_4 B_3 + A_3 B_4\right) A_{11} + B_4 B_3 A_{02} = 0$	$V_{14} = A_3 A_4 B_{20} + \left(A_4 B_3 + A_3 B_4\right) B_{11} + B_4 B_3 B_{02} = 0$
$w_4 w_4$	$U_{15} = A_4^2 A_{20} + 2 A_4 B_4 A_{11} + B_4^2 A_{02} = 0$	$V_{15} = A_4^2 B_{20} + 2 A_4 B_4 B_{11} + B_4^2 B_{02} = 0$

Võrrandis (3.12) võib valida kõik parameetrid nullist erinevateks:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{A_4 B_3}{B_4}, B_4 \neq 0 \\
A_4 &= \frac{A_3 B_4}{B_3}, B_3 \neq 0 \\
B_3 &= \frac{A_3 B_4}{A_4}, A_4 \neq 0 \\
B_4 &= \frac{A_4 B_3}{A_3}, A_3 \neq 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

kuid kuna ülesanne muutub komplitseerituks jäeti antud variant käesolevas töös esialgu kõrvale.

Valides ühe parameeteri nulliks järeldub automaatselt, et vähemalt veel üks parameeter peab võrduma nulliga

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A_4 = 0 \\
B_3 &= B_4 = 0 \\
B_3 &= A_3 = 0 \\
B_4 &= A_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Kaks viimast võimalust ülesande püstitusega ei sobi, kuna põhjustaks osade funktsioonide (w_3 või w_4) kadumise valemist (3.5). Seetõttu jätkatakse valikuga $A_3 = A_4 = 0$ (sobiks ka $B_3 = B_4 = 0$), mis tagab, et kõik funktsioonid w_1, w_2, w_3, w_4 on võrrandites (3.5) esindatud

$$
\begin{aligned}
z_1 &= A_0 + A_1 w_1 + A_2 w_2 \\
z_2 &= B_0 + B_1 w_1 + B_2 w_2 + B_3 w_3 + B_4 w_4.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Selle valikuga edasi minnes järeldub võrranditest U_{13}, U_{14}, U_{15}, V_{13}, V_{14}, V_{15} koheselt, et

$$
\begin{aligned}
A_{02} &= 0 \\
B_{02} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

ning omakorda võrranditest U_8, U_9, U_{11}, U_{12}, V_8, V_9, V_{11}, V_{12}, et

$$A_{11} = 0$$
$$B_{11} = 0 \qquad (3.17)$$

ja lõpuks võrranditest U_6, U_7, U_{10}, et

$$A_{20} = 0. \qquad (3.18)$$

Pärast sundvalikuid (3.16), (3.17,) ja (3.18) jääb lahendada veel kolmteist võrrandit

U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_{10} (Tabel 2). Need võrrandid sisaldavad viit kahe võrrandi paari, kus kaks suurust rahuldavad homogeenset lineaarset võrrandisüsteemi. Sellisel süsteemil on nullist erinevad lahendid vaid siis, kui süsteemi determinant võrdub nulliga. Võrrandipaarid ja suurused, mis seda homogeenset lineaarset võrrandsüsteemi rahuldavad, koos vastavate determinantidega, on võetud kokku järgmisel lehel toodud tabelis (Tabel 3).

Võrrandi V_4 ja determinandi D_2 võrdlemisel:

$$D_2 = A_{10} B_3 + B_1 = 0$$

$$V_4 = B_3 B_{01} - B_1 = 0$$

näeme, et

$$B_{01} = -A_{10}. \qquad (3.19)$$

Arvestades (3.19) ja determinandi nullidest tulenevaid tingimusi saame võrrandsüsteemi (Tabel 4), millel on väga palju lahendeid. Ühe võimaliku lahendi leiame avaldades A_1, A_2, B_1 ja B_2 võrranditest U_4, U_5, V_4 ja V_5 ning asetades vastavad väärtused ülejäänud võrranditesse. Võrrandid V_6, V_7 ja V_{10} on kooskõlalised kui

$$G = -C$$
$$B_3 = B_4. \qquad (3.20)$$

Tabel 2. Võrrandite massiivid U ja V peale sundvalikuid (3.16), (3.17) ja (3.18).

	Süsteemi (3.10) esimese võrrandi järelejäänud liikmete kordajad	Süsteemi (3.10) teise võrrandi järelejäänud liikmete kordajad
vabaliikme kordaja	$U_1 = A_{00} + A_0 A_{10} + B_0 A_{01} = 0$	$V_1 = B_{00} + A_0 B_{10} + B_0 B_{01} + A_0^2 B_{20} = 0$
w_1 kordaja	$U_2 = A_1 A_{10} + B_1 A_{01} = 0$	$V_2 = A_1 B_{10} + B_1 B_{01} + 2 A_0 A_1 B_{20} + B_3 A = 0$
w_2 kordaja	$U_3 = A_2 A_{10} + B_2 A_{01} = 0$	$V_3 = A_2 B_{10} + B_2 B_{01} + 2 A_0 A_2 B_{20} + B_4 B = 0$
w_3 kordaja	$U_4 = B_3 A_{01} - A_1 = 0$	$V_4 = B_3 B_{01} - B_1 = 0$
w_4 kordaja	$U_5 = B_4 A_{01} - A_2 = 0$	$V_5 = B_4 B_{01} - B_2 = 0$
$w_1 w_1$ kordaja		$V_6 = A_1^2 B_{20} + B_4 G = 0$
$w_1 w_2$ kordaja		$V_7 = A_1 A_2 B_{20} + B_3 G = 0$
$w_2 w_2$ kordaja		$V_{10} = A_2^2 B_{20} - B_4 C = 0$

Tabel 3. Homogeenseid lineraarseid võrrandsüsteeme moodustavate võrrandite paarid ja nende determinandid.

Võrrandid	Homogeenseid linaarseid võrrandeid rahuldavate suuruste paar	Determinant
U_2, U_3	A_{10} A_{01}	$D_1 = A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$
U_2, U_4	A_1 A_{01}	$D_2 = A_{10} B_3 + B_1 = 0$
U_3, U_5	A_2 A_{01}	$D_3 = A_{10} B_4 + B_2 = 0$
U_4, V_7	A_1 B_3	$D_4 = G + A_2 A_{01} B_{20} = 0$
V_6, V_{10}	B_4 B_{20}	$D_5 = -C A_1^2 - G A_2^2 = 0$

Tabel 4. Võrrandite massiivid U ja V koos homogeensete lineaarsete võrrandsüsteemi paaride determinantidega.

	Süsteemi (3.10) esimese võrrandi järelejäänud liikmete kordajad	Süsteemi (3.10) teise võrrandi järelejäänud liikmete kordajad	Determinandid
vabaliige	$U_1 = A_{00} + A_0 A_{10} + B_0 A_0 = 0$	$V_1 = B_{00} + A_0 B_{10} - B_0 A_{10}$ $+ A_0^2 B_{20} = 0$	$D_1 = A_1 B_2 - A_2 B_1$ $= 0$
w_1	$U_2 = A_1 A_{10} + B_1 A_{01} = 0$	$V_2 = A_1 B_{10} - B_1 A_{10}$ $+ 2 A_0 A_1 B_{20} + B_3 A = 0$	$D_2 = A_{10} B_3 + B_1 = 0$
w_2	$U_3 = A_2 A_{10} + B_2 A_{01} = 0$	$V_3 = A_2 B_{10} - B_2 A_{10}$ $+ 2 A_0 A_2 B_{20} + B_4 B = 0$	$D_3 = A_{10} B_4 + B_2 = 0$
w_3	$U_4 = B_3 A_{01} - A_1 = 0$	$V_4 = -B_3 A_{10} - B_1 = 0$	$D_4 = G + A_2 A_{01} B_{20}$ $= 0$
w_4	$U_5 = B_4 A_{01} - A_2 = 0$	$V_5 = -B_4 A_{10} - B_2 = 0$	$D_5 = -C A_1^2 - G A_2^2$ $= 0$
$w_1 w_1$		$V_6 = A_1^2 B_{20} + B_4 G = 0$	
$w_1 w_2$		$V_7 = A_1 A_2 B_{20} + B_3 G = 0$	
$w_2 w_2$		$V_{10} = A_2^2 B_{20} - B_4 C = 0$	

Osutub, et neid tingimusi arvestades peab

$$B = A. \tag{3.21}$$

Edasi avaldame võrrandist V_3

$$B_{20} = -\frac{1}{2}\,\frac{B_{10}A_{01} + A_{10}^{2} + A}{A_0 A_{01}} \tag{3.22}$$

ja võrrandist V_6

$$B_4 = -\frac{2\,C\,A_0}{A_{01}\left(B_{10}A_{01} + A_{10}^{2} + A\right)} \tag{3.23}$$

ning lõpuks võrranditest U_1 ja V_1

$$\begin{gathered} A_{00} = -A_0 A_{10} - B_0 A_{01} \\ B_{00} = -\frac{1}{2}\,\frac{A_0 B_{10} A_{01} - 2\,B_0 A_{10} A_{01} - A_0 A_{10}^{2} - A_0 A}{A_{01}}. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Nüüd on kõik võrrandid, kaasa arvatud determinantide nullid, rahuldatud. Esitame tulemused kokkuvõtlikult järgmisel leheküljel toodud tabelis (Tabel 5).

Saadud tulemuste põhjal omandab võrrandsüsteem (3.6) kuju:

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,z_1 = -A_0 A_{10} - B_0 A_{01} + A_{10}\,z_1 + A_{01}\,z_2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,z_2 = \frac{\mathrm{A_0\,B_{10}\,A_{01} - 2\,B_0\,A_{10}\,A_{01} - A_0\,A_{10}^{2} - A_0\,A}}{2\,\mathrm{A_{01}}} + B_{10}\,z_1 - A_{10}\,\mathrm{z}_2 - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{B_{10}\,A_{01} + A_{10}^{2} + A}}{\mathrm{A_0\,A_{01}}}\,z_1^{2} \end{gathered} \tag{3.25}$$

kus

$$\begin{gathered} z_1 = A_0 - \frac{2\,C\,A_0}{B_{10}A_{01} + A_{10}^{2} + A}\left(w_1 - w_2\right) \\ z_2 = B_0 + \frac{2\,C\,A_0 A_{10}}{A_{01}\left(B_{10}A_{01} + A_{10}^{2} + A\right)}\left(w_1 + w_2\right) - \frac{2\,C\,A_0}{A_{01}\left(B_{10}A_{01} + A_{10}^{2} + A\right)}\left(w_3 + w_4\right). \end{gathered} \tag{3.26}$$

Tabel 5. Võrrandisüsteemide (3.6) ja (3.5) kordajad.

Süsteemi (3.6) esimese võrrandi kordajad	Süsteemi (3.6) teise võrrandi kordajad	Süsteemi (3.5) esimese võrrandi kordajad	Süsteemi (3.5) teise võrrandi kordajad
$A_{00} = -A_0 A_{10} - B_0 A_{01}$	$B_{00} = -\frac{1}{2}\frac{A_0 B_{10} A_{01} - 2 B_0 A_{10} A_{01} - A_0 A_{10}^2 - A_0 A}{A_{01}}$	A_0 vaba parameeter	B_0 vaba parameeter
A_{10} vaba parameeter	B_{10} vaba parameeter	$A_1 = -\frac{2 C A_0}{B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A}$	$B_1 = \frac{2 C A_0 A_{10}}{A_{01}\left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A\right)}$
A_{01} vaba parameeter	$B_{01} = -A_{10}$	$A_2 = -\frac{2 C A_0}{B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A}$	$B_2 = \frac{2 C A_0 A_{10}}{A_{01}\left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A\right)}$
$A_{20} = 0$	$B_{20} = -\frac{1}{2}\frac{B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A}{A_0 A_{01}}$	$A_3 = 0$	$B_3 = -\frac{2 C A_0}{A_{01}\left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A\right)}$
$A_{11} = 0$	$B_{11} = 0$	$A_4 = 0$	$B_4 = -\frac{2 C A_0}{A_{01}\left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A\right)}$
$A_{02} = 0$	$B_{02} = 0$		

IV LIIKUMISINTEGRAALI LEIDMINE

Otsime võrrandite (3.25) liikumisintegraali kujul

$$J = C_{10}z_1 + C_{01}z_2 + C_{20}z_1^2 + C_{11}z_1z_2 + C_{02}z_2^2 + C_{30}z_1^3 + C_{21}z_1^2z_2 + C_{12}z_1z_2^2 + C_{03}z_2^3 \qquad (4.1)$$

Tuletis liikumisintegraalist võrdub nulliga

$$C_{10}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\,t} + C_{01}\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\,t} + 2\,C_{20}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\,t}z_1 + C_{11}\left(\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\,t}z_2 + \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\,t}z_1\right) + 2\,C_{02}\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\,t}z_2 + 3\,C_{30}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\,t}z_1^2$$

$$+ C_{21}\left(2\,\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\,t}z_1z_2 + z_1^2\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\,t}\right) + C_{12}\left(\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\,t}z_2^2 + 2\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\,t}z_1z_2\right) + 3\,C_{03}\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\,t}z_2^2 = 0 \qquad (4.2)$$

Asendame tuletised $\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\,t}$ ja $\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\,t}$ võrranditest (3.6):

$$C_{10}\left(A_{00} + A_{10}\,z_1 + A_{01}\,z_2 + A_{20}\,z_1^2 + 2\,A_{11}\,z_1z_2 + A_{02}\,z_2^2\right) + C_{01}\left(B_{00} + B_{10}\,z_1 + B_{01}\,z_2\right.$$

$$\left.+ B_{20}\,z_1^2 + 2\,B_{11}\,z_1z_2 + B_{02}\,z_2^2\right) + 2\,C_{20}\left(A_{00} + A_{10}\,z_1 + A_{01}\,z_2 + A_{20}\,z_1^2 + 2\,A_{11}\,z_1z_2\right.$$

$$\left.+ A_{02}\,z_2^2\right)z_1 + C_{11}\left(\left(A_{00} + A_{10}\,z_1 + A_{01}\,z_2 + A_{20}\,z_1^2 + 2\,A_{11}\,z_1z_2 + A_{02}\,z_2^2\right)z_2 + \left(B_{00} + B_{10}\,z_1\right.\right.$$

$$\left.\left.+ B_{01}\,z_2 + B_{20}\,z_1^2 + 2\,B_{11}\,z_1z_2 + B_{02}\,z_2^2\right)z_1\right) + 2\,C_{02}\left(B_{00} + B_{10}\,z_1 + B_{01}\,z_2 + B_{20}\,z_1^2\right.$$

$$\left.+ 2\,B_{11}\,z_1z_2 + B_{02}\,z_2^2\right)z_2 + 3\,C_{30}\left(A_{00} + A_{10}\,z_1 + A_{01}\,z_2 + A_{20}\,z_1^2 + 2\,A_{11}\,z_1z_2 + A_{02}\,z_2^2\right)z_1^2$$

$$+ C_{21}\left(2\,\left(A_{00} + A_{10}\,z_1 + A_{01}\,z_2 + A_{20}\,z_1^2 + 2\,A_{11}\,z_1z_2 + A_{02}\,z_2^2\right)z_1z_2 + z_1^2\left(B_{00} + B_{10}\,z_1\right.\right.$$

$$\left.\left.+ B_{01}\,z_2 + B_{20}\,z_1^2 + 2\,B_{11}\,z_1z_2 + B_{02}\,z_2^2\right)\right) + C_{12}\left(\left(A_{00} + A_{10}\,z_1 + A_{01}\,z_2 + A_{20}\,z_1^2 + 2\,A_{11}\,z_1z_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+ A_{02}\,z_2^2\right)z_2^2 + 2\left(B_{00} + B_{10}\,z_1 + B_{01}\,z_2 + B_{20}\,z_1^2 + 2\,B_{11}\,z_1z_2 + B_{02}\,z_2^2\right)z_1z_2\right) + 3\,C_{03}\left(B_{00}\right.$$

$$\left.+ B_{10}\,z_1 + B_{01}\,z_2 + B_{20}\,z_1^2 + 2\,B_{11}\,z_1z_2 + B_{02}\,z_2^2\right)z_2^2 = 0 \qquad (4.3)$$

Grupeerime võrrandis (4.3) kõik liikmed z_1 ja z_2 astmete järgi, tähistades kordajad W_1 ..W_{15}:

$$W_1 + W_2 z_1 + W_3 z_2 + W_4 z_1^2 + W_5 z_1 z_2 + W_6 z_2^2 + W_7 z_1^3 + W_8 z_1^2 z_2 + W_9 z_2^2 z_1 + W_{10} z_2^3 + W_{11} z_1^4$$

$$+ W_{12} z_1^3 z_2 + W_{13} z_1^2 z_2^2 + W_{14} z_2^3 z_1 + W_{15} z_2^4 = 0 \qquad (4.4)$$

Selleks, et avaldis (4.4) kehtiks iga z_1 ja z_2 korral, peavad kõikide $z_1^m \cdot z_2^n$, kus $n, m = 0..4$, kombinatsioonide kordajad võrduma nulliga. Saame viieteistkümnest võrrandist koosneva süsteemi muutujate

$$C_{01}, C_{10}, C_{11}, C_{20}, C_{02}, C_{30}, C_{21}, C_{12}, C_{03}, A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{02}, A_{11}, A_{20}, B_{00}, B_{10}, B_{01}, B_{20}, B_{11}, B_{02} \qquad (4.5)$$

suhtes (Tabel 6).

Viis võrrandit W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14} ja W_{15} on muutujate C_{30}, C_{21}, C_{12} ja C_{03} suhtes lineaarsed ja homogeensed. Antud võrranditest saab moodustada viis muutujate C_{30}, C_{21}, C_{12} ja C_{03} suhtes lineaarset ja homogeenset võrrandite nelikut

$$C(7, 3) = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5.$$

Nagu eelnevas peatükis juba mainitud, on homogeensetel võrrandisüsteemidel nullist erinevad lahendid ainult siis, kui nende determinant võrdub nulliga ja nii peavad kõigi viie neliku determinandid võrduma nulliga (Lisa 2). See tingimus realiseerub kõikide nelikute korral kaheteistkümnel juhul (Tabel 7), millest vähemalt üks nendest tingimustest peab kehtima. Kõik ülejäänud parameetrid A_{02}, A_{11}, A_{20}, B_{20}, B_{11}, B_{02}, millele tingimusi ei anta, on vabalt valitavad.

Näiteks 10-ndas tingimuses, kus

$$A_{20} = -4\, B_{11}, A_{02} = \frac{B_{02}\,(A_{11} + B_{02})}{B_{11}}, B_{20} = 0$$

on vabalt valitavad A_{11}, B_{11} ja B_{02}.

Võrreldes saadud tingimusi W-dele eelnevalt leitud A_{ij} ja B_{ij} komplektiga (Tabel 5) näeme, et need rahuldavad isegi mitut tingimust kaheteistkümnest (rahuldatud tingimused on 5, 7 ja 11). Järelikult

Tabel 6. Võrrandite massiiv W.

	Võrrandi (4.4) liikmete kordajad (masiiv W)
vabaliikme kordaja	$W_1 = C_{01} B_{00} + C_{10} A_{00} = 0$
z_1 kordaja	$W_2 = C_{10} A_{10} + C_{01} B_{10} + 2\, C_{20} A_{00} + C_{11} B_{00} = 0$
z_2 kordaja	$W_3 = C_{10} A_{01} + C_{01} B_{01} + 2\, C_{02} B_{00} + C_{11} A_{00} = 0$
z_1^2 kordaja	$W_4 = C_{10} A_{20} + C_{01} B_{20} + 2\, C_{20} A_{10} + C_{11} B_{10} + 3\, C_{30} A_{00} + C_{21} B_{00} = 0$
$z_1 z_2$ kordaja	$W_5 = 2\, C_{21} A_{00} + C_{11} A_{10} + 2\, C_{10} A_{11} + 2\, C_{20} A_{01} + 2\, C_{01} B_{11} +$ $C_{11} B_{01} + 2\, C_{02} B_{10} + 2\, C_{12} B_{00} = 0$
z_2^2 kordaja	$W_6 = C_{10} A_{02} + C_{01} B_{02} + 2\, C_{02} B_{01} + 3\, C_{03} B_{00} + C_{11} A_{01} + C_{12} A_{00} = 0$
z_1^3 kordaja	$W_7 = 3\, C_{30} A_{10} + 2\, C_{20} A_{20} + C_{11} B_{20} + C_{21} B_{10} = 0$
$z_1^2 z_2$ kordaja	$W_8 = 4\, C_{20} A_{11} + C_{11} A_{20} + 2\, C_{11} B_{11} + 2\, C_{02} B_{20} + 3\, C_{30} A_{01}$ $+ 2\, C_{21} A_{10} + C_{21} B_{01} + 2\, C_{12} B_{10} = 0$
$z_2^2 z_1$ kordaja	$W_9 = 2\, C_{20} A_{02} + 2\, C_{11} A_{11} + C_{11} B_{02} +$ $4\, C_{02} B_{11} + 3\, C_{03} B_{10} + 2\, C_{21} A_{01} + 2\, C_{12} B_{01} + C_{12} A_{10} = 0$
z_2^3 kordaja	$W_{10} = C_{11} A_{02} + C_{12} A_{01} + 3\, C_{03} B_{01} + 2\, C_{02} B_{02} = 0$
z_1^4 kordaja	$W_{11} = 3\, C_{30} A_{20} + C_{21} B_{20} = 0$
$z_1^3 z_2$ kordaja	$W_{12} = 3\, C_{30} A_{11} + C_{21} A_{20} + C_{21} B_{11} + C_{12} B_{20} = 0$
$z_1^2 z_2^2$ kordaja	$W_{13} = 3\, C_{30} A_{02} + 3\, C_{03} B_{20} + 4\, C_{21} A_{11} + C_{21} B_{02} + 4\, C_{12} B_{11} + C_{12} A_{20} = 0$
$z_2^3 z_1$ kordaja	$W_{14} = 3\, C_{03} B_{11} + C_{21} A_{02} + C_{12} B_{20} + C_{12} A_{11} = 0$
z_2^4 kordaja	$W_{15} = C_{12} A_{02} + 3\, C_{03} B_{02} = 0$

Tabel 7. Tingimused W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14} ja W_{15} lahendite olemasoluks.

	Tingimused parameetritele A_{02}, A_{11}, A_{20}, B_{20}, B_{11}, B_{02}
1	$A_{20}=0,\ A_{02}=\dfrac{B_{02}\,A_{11}}{B_{11}},\ B_{20}=0$
2	$A_{20}=0,\ A_{02}=\dfrac{4\,A_{11}^{\ 2}+5\,B_{02}\,A_{11}+B_{02}^{\ 2}}{B_{11}},\ B_{20}=0$
3	$A_{20}=0,\ A_{11}=0,\ B_{20}=0,\ B_{11}=0$
4	$A_{20}=0,\ A_{11}=-\dfrac{1}{4}\,B_{02},\ B_{20}=0,\ B_{11}=0$
5	$A_{11}=-B_{02},\ B_{11}=-A_{20}$
6	$B_{20}=0,\ B_{11}=0,\ B_{02}=0$
7	$A_{20}=0,\ A_{11}=0,\ A_{02}=0$
8	$A_{20}=-B_{11},\ A_{02}=\dfrac{1}{4}\ \dfrac{B_{02}\,(4\,A_{11}+B_{02})}{B_{11}},\ B_{20}=0$
9	$A_{20}=-B_{11},\ A_{11}=-B_{02},\ B_{20}=0,$
10	$A_{20}=-4\,B_{11},\ A_{02}=\dfrac{B_{02}\,(A_{11}+B_{02})}{B_{11}},\ B_{20}=0$
11	$A_{11}=\dfrac{A_{20}\,B_{11}}{B_{20}},\ A_{02}=\dfrac{B_{02}\,A_{20}}{B_{20}}$
12	$A_{02}:=\dfrac{1}{B_{20}^{\ 2}\,(A_{20}+B_{11})}\Big(-4\,B_{11}\,A_{20}^{\ 3}-7\,A_{20}^{\ 2}\,B_{11}^{\ 2}+A_{20}^{\ 2}\,B_{20}\,A_{11}-A_{20}^{\ 4}$ $+2\,A_{20}^{\ 2}\sqrt{(A_{20}+B_{11})^2\,(-A_{20}\,B_{11}+A_{11}\,B_{20})}-4\,A_{20}\,B_{11}^{\ 3}+5\,A_{20}\,B_{11}\,B_{20}\,A_{11}$ $+4\,A_{20}\,B_{11}\sqrt{(A_{20}+B_{11})^2\,(-A_{20}\,B_{11}+A_{11}\,B_{20})}+4\,B_{20}\,A_{11}\,B_{11}^{\ 2}$ $\pm 2\,A_{11}\,B_{20}\sqrt{(A_{20}+B_{11})^2\,(-A_{20}\,B_{11}+A_{11}\,B_{20})}\Big),$ $B_{02}:=-\dfrac{A_{11}\,B_{20}+A_{20}^{\ 2}+A_{20}\,B_{11}\pm 2\sqrt{(A_{20}+B_{11})^2\,(-A_{20}\,B_{11}+A_{11}\,B_{20})}}{B_{20}}$

on võimalik antud A_{ij} ja B_{ij} komplektiga lahendamist jätkata, kuna see tagab võrrandis (4.1) kolmandat järku liikme olemasolu.

Asendame W-de võrranditesse (Tabel 6) eelnevalt leitud A_{ij} ja B_{ij} komplekti (Tabel 5) ja näeme, et võrrandid W_{14} ja W_{15} on rahuldatud. Võrranditest W_{11}, W_{12} ja W_{13} järgnevad sundvalikud

$$C_{12} = 0$$
$$C_{03} = 0 \tag{4.6}$$

ning võrrandist W_9 tulenevalt peab ka

$$C_{21} = 0. \tag{4.7}$$

Peale valikuid (4.6) ja (4.7) jääb lahendada veel kaheksa võrrandit (Tabel 8).

Võrrandid W_5 ja W_6 on muutujate A_{01} ja C_{02} suhtes homogeensed ja lineaarsed, järelikult nullist erinevate lahendite olemasoluks peab süsteemi determinant võrdub nulliga

$$2\, C_{20} A_{10} + C_{11} B_{10} = 0. \tag{4.8}$$

Avaldame determinandist (4.8)

$$C_{11} = -\frac{2\, C_{20} A_{10}}{B_{10}} \tag{4.9}$$

ja siis võrrandist W_5

$$C_{02} = -\frac{C_{20} A_{01}}{B_{10}}. \tag{4.10}$$

Edasi avaldame võrrandist W_8

$$C_{30} = -\frac{1}{3}\,\frac{C_{20}\left(A_{01} B_{10} + A_{10}^{\;2} + A\right)}{A_0 A_{01} B_{10}} \tag{4.11}$$

ja võrrandist W_4

Tabel 8. Võrrandite massiiv W peale asendusi (Tabel 5) ja sundvalikuid (4.6) ja (4.7).

	Võrrandi (4.4) liikmete kordajad (masiiv W)
vabaliikme kordaja	$W_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{A_{01}}\left(-C_{01}A_0B_{10}A_{01} + 2C_{01}B_0A_{10}A_{01} + C_{01}A_0A_{10}^2 + C_{01}A_0A - 2C_{10}A_{01}A_0A_{10} - 2C_{10}A_{01}^2B_0\right) = 0$
z_1 kordaja	$W_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{A_{01}}\left(-4C_{20}A_{01}A_0A_{10} - 4C_{20}A_{01}^2B_0 - C_{11}A_0B_{10}A_{01} + 2C_{11}B_0A_{10}A_{01} + C_{11}A_0A_{10}^2 + C_{11}A_0A + 2C_{10}A_{01}A_{10} + 2C_{01}B_{10}A_{01}\right) = 0$
z_2 kordaja	$W_3 = \frac{1}{A_{01}}\left(-C_{11}A_{01}A_0A_{10} - C_{11}A_{01}^2B_0 - C_{02}A_{01}B_{10}A_0 + 2C_{02}A_{01}B_0A_{10} + C_{02}A_{10}^2A_0 + C_{02}A_0A + C_{10}A_{01}^2 - C_{01}A_{10}A_{01}\right) = 0$
z_1^2 kordaja	$W_4 = -\frac{1}{2}\frac{1}{A_{01}A_0}\left(-4C_{20}A_{01}A_0A_{10} + 6C_{30}A_0^2A_{10}A_{01} + 6C_{30}A_{01}^2A_0B_0 - 2C_{11}A_0B_{10}A_{01} + C_{01}A_{01}B_{10} + C_{01}A_{10}^2 + C_{01}A\right) = 0$
z_1z_2 kordaja	$W_5 = 2C_{20}A_{01} + 2C_{02}B_{10} = 0$
z_2^2 kordaja	$W_6 = C_{11}A_{01} - 2C_{02}A_{10} = 0$
z_1^3 kordaja	$W_7 = -\frac{1}{2}\frac{-6C_{30}A_{10}A_0A_{01} + C_{11}A_{01}B_{10} + C_{11}A_{10}^2 + C_{11}A}{A_{01}A_0} = 0$
$z_1^2z_2$ kordaja	$W_8 = -\frac{-3C_{30}A_{01}^2A_0 + C_{02}A_{01}B_{10} + C_{02}A_{10}^2 + C_{02}A}{A_{01}A_0} = 0$

$$C_{01} = \frac{2\, C_{20}\, \left(A_0 A_{10} + A_{01}\, B_0\right)}{B_{10}} \tag{4.12}$$

ning võrrandist W_3

$$C_{10} = \frac{C_{20}\, \left(\, -A_0 A_{01}\, B_{10} + 2\, A_{10}\, B_0 A_{01} + A_0 A_{10}^{\ 2} + A_0\, A\right)}{A_{01}\, B_{10}} \tag{4.13}$$

Sellega on kõik võrrandid $W_1 .. W_{15}$ rahuldatud. Esitame tulemused kokkuvõtlikult järgmisel

leheküljel toodud tabelis (Tabel 9).

Kasutades saadud tulemusi kirjutame välja liikumisintegraali (4.1)

$$J = \frac{C_{20}}{3\, A_0 A_{01}\, B_{10}} \left(3\, A_0\left(-\, A_0 A_{01}\, B_{10} + 2\, B_0 A_{01}\, A_{10} + A_0 A_{10}^{\ 2} + A_0\, A\right) z_1 + 6\, A_0 A_{01}\left(A_0 A_{10}\right.\right.$$

$$\left.\left. + A_{01}\, B_0\right) z_2 + 3\, A_0 A_{01}\, B_{10} \cdot z_1^{\ 2} - 6\, A_{10}\, A_0 A_{01} z_1\, z_2 - 3\, A_0 A_{01}^{\ 2}\, z_2^{\ 2} - \left(A_{01}\, B_{10} + A_{10}^{\ 2} + A\right) z_1^{\ 3}\right) \tag{4.14}$$

Läheme üle üldistatud koordinaatidele (3.2) ja impulssidele (3.3) jättes liikumisintegraali avaldisest välja ajast sõltumatu kogu avaldise kordaja ja ajast sõltumatud liidetavad, sest ajast sõltumatu suuruse korrutamine ajast sõltumatu suurusega ja ajast sõltumatu suuruse lisamine on ikkagi ajast sõltumatu suurus ja esitab liikumisintegraali

$$J = 6\, A\, q_1\, q_2 + 6\, p_1\, p_2 + 3\, p_1^{\ 2} + 3\, p_2^{\ 2} - 2\, C\, q_1^{\ 3} - 2\, C\, q_2^{\ 3} - 6\, C\, q_1\, q_2^{\ 2} - 6\, C\, q_1^{\ 2}\, q_2 + 3\, A\, q_1^{\ 2}$$

$$+ 3\, A\, q_2^{\ 2} \tag{4.15}$$

Normeerime liikumisintegraali selliselt, et ta oleks võrreldav Hamiltoni funktsiooniga (3.1)

$$J = \frac{1}{2}\left(\, p_1^{\ 2} + p_2^{\ 2}\right) + \frac{1}{2}\, A\, \left(q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2}\right) - C\, q_1^{\ 2}\, q_2 - \frac{1}{3}\, C\left(q_2^{\ 3} + q_1^{\ 3}\right) - C\, q_1\, q_2^{\ 2} + A\, q_1\, q_2 + p_1\, p_2$$

$$. \tag{4.16}$$

Näeme, et liikumisintegraal (4.16) on tõepoolest teistsugune liikumisintergaal kui Hamiltoni

Tabel 9. Võrrandite (3.6), (3.5) ja (4.2) kordajad.

A_0 vaba parameeter	$A_{00} = -A_0 A_{10} - B_0 A_{01}$	$C_{12} = 0$
A_{10} vaba parameeter	$A_1 = -\dfrac{2\,C\,A_0}{B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A}$	$C_{03} = 0$
A_{01} vaba parameeter	$A_2 = -\dfrac{2\,C\,A_0}{B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A}$	$C_{21} = 0$
$A_{20} = 0$	$B_{01} = -A_{10}$	$C_{11} = -\dfrac{2\,C_{20} A_{10}}{B_{10}}$
$A_{11} = 0$	$B_{20} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A}{A_0 A_{01}}$	$C_{10} = \dfrac{1}{A_{01} B_{10}} \left(C_{20} \left(-A_0 A_{01} B_{10} + 2 A_{10} B_0 A_{01} + A_0 A_{10}^2 + A_0 A \right) \right)$
$A_{02} = 0$	$B_{00} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{A_{01}} \left(A_0 B_{10} A_{01} - 2 B_0 A_{10} A_{01} - A_0 A_{10}^2 - A_0 A \right)$	$C_{01} = \dfrac{2\,C_{20} \left(A_0 A_{10} + A_{01} B_0 \right)}{B_{10}}$
$A_3 = 0$	$B_1 = \dfrac{2\,C\,A_0 A_{10}}{A_{01} \left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A \right)}$	$C_{02} = -\dfrac{C_{20} A_{01}}{B_{10}}$
$A_4 = 0$	$B_2 = \dfrac{2\,C\,A_0 A_{10}}{A_{01} \left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A \right)}$	$C_{30} = -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{C_{20} \left(A_{01} B_{10} + A_{10}^2 + A \right)}{A_0 A_{01} B_{10}}$
B_0 vaba parameeter	$B_3 = -\dfrac{2\,C\,A_0}{A_{01} \left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A \right)}$	C_{20} vaba parameeter
B_{10} vaba parameeter	$B_4 = -\dfrac{2\,C\,A_0}{A_{01} \left(B_{10} A_{01} + A_{10}^2 + A \right)}$	
$B_{11} = 0$	$B_{02} = 0$	

funktsioon (3.1) või suvaline funktsioon sellest. Leitud liikumisintegraalis (4.16) sisaldub siiski ka esialgne Hamiltoni funktsioon ning kuna kahe liikumisintegraali vahe on ka liikumisintegraal, siis järelikult võime võtta uueks liikumisintegraaliks

$$J - H = A\, q1\, q2 + p1\, p2 - \frac{1}{3}\, C\, q1^3 - C\, q1\, q2^2. \tag{4.17}$$

Esitatud liikumisintegraalide leidmiseks kasutatud algoritmi õigsust kinnitab tõsiasi, et leitud integraal (4.17) on kirjandusest tuntud [25, 26, 27, 28]. Meetodid liikumisintegraali leidmiseks viidatud artiklites on olnud käesolevas töös kasutatust erinevad.

Liikumisintegraali (4.14) avaldisest on näha, et vabaliikmed B_{00}, A_{00}, A_0 ja B_0 koonduvad liikumisintegraali ajast sõltumatutesse kordajatesse ja liidetavatesse ning samuti vaadates tähelepanelikumalt võrrandite (3.6), (3.5) kordajaid (Tabel 9) näeme, et vabaliikmed on kõik vabalt valitavad. Sellest tulenevalt tehti uus katse liikumisintegraali leidmiseks võttes B_{00}, A_{00}, A_0 ja B_0 kohe nullideks. Saadi küll uus A_{ij} ja B_{ij} komplekt, kuid see sisaldas tingimust $G = -C$, $B = A$ ning leitud liikumisintegraal jäi samaks. Lisaks tehti liikumisintegraali leidmise protseduur läbi ka valemi (3.13) variandi $A_3 = \dfrac{A_4 B_3}{B_4}$, $B_4 \neq 0$ jaoks ja jõuti samuti tingimuseni $G = -C$, $B = A$ ning liikumisintegraalini (4.17). Töö kompaktsuse huvides detailseid arvutusi nendest katsetest siinkohal ei esitata.

V LAHENDITE KÄITUMINE LIIKUMISINTEGRAALI ÜMBRUSES

Uurime, kuidas käituvad lahendid Hamiltoni funktsiooni (3.1) liikumisintegraalide ümbruses

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_1^{\,2} + \mathrm{p}_2^{\,2}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}\,\mathrm{q}_1^{\,2} + \mathrm{B}\,\mathrm{q}_2^{\,2}\right) + \mathrm{G}\,\mathrm{q}_1^{\,2}\mathrm{q}_2 - \frac{1}{3}\mathrm{C}\,\mathrm{q}_2^{\,3}, \tag{5.1}$$

kus

$$\frac{G}{C} = -1 \text{ ja } \frac{A}{B} = 1 \tag{5.2}$$

Selleks valime kordaja $C = 1$ ja varieerime kordaja G väärtusi natuke ühele $G = -0.97$ ja teisele poole $G = -1.03$ ning võrdleme neid variante liikumisintegraali juhuga $G = -1$. Vaatleme kõigepealt üldistatud Hénon-Heilesi Hamiltoni võrrandite

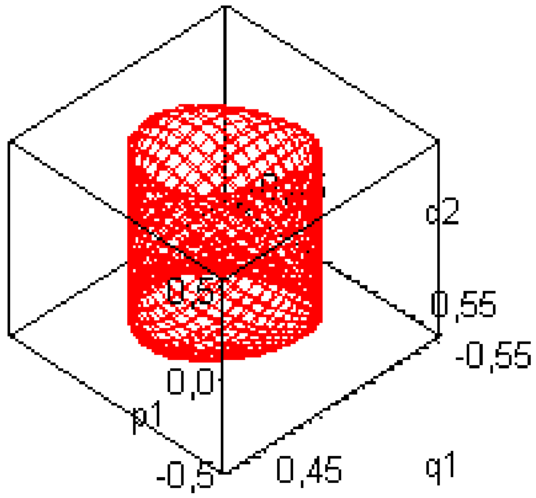
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} q_1 &= p_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} q_2 &= p_2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} p_1 &= -q_1 + 2\,q_1 q_2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} p_2 &= -q_2 + q_1^{\,2} + q_2^{\,2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

parameetrite *q1*, *q2* ja *p1* koosmõju erinevatel G väärtustel etteantud algtingimuste korral, projekteerides neljamõõtmelise faasiruumi kolmemõõtmelisele hüperpinnale (Joonis 4). Erilisi varieerimisest tingitud efekte joonisel märgata ei ole, väärtustel $G = -0.97$ ja $G = -1.03$ on võrgud vaid tihedamad.

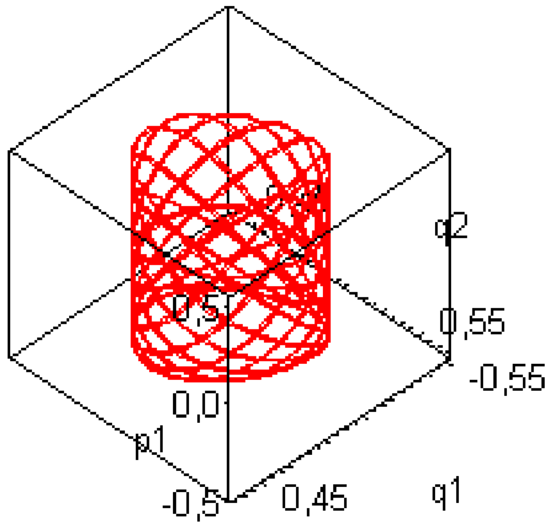
Mõnevõrra olulisemad muutused tekivad aga liikumisintegraalide Poincaré lõigete korral. Leiame esmalt juba eelnevalt teada olnud integraali

Joonis 4. Muutujate $q1$, $q2$ ja $p1$ koosmõju erinevatel G väärtustel, algtingimuste $q1(0)=-0.1$, $q2(0)=-0.1$, $p1(0)=0.489$, $p2(0)=0$ korral.

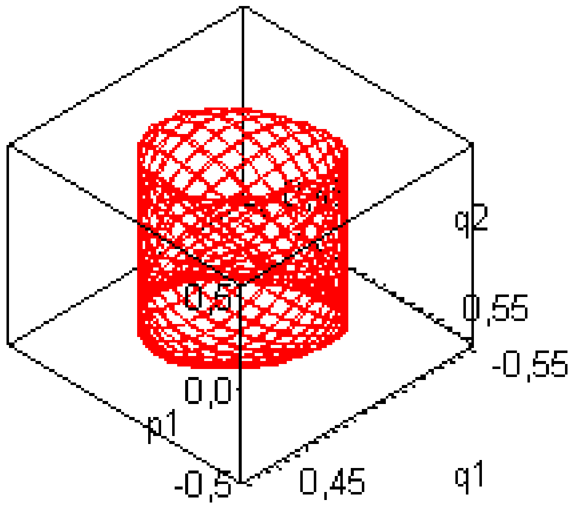
$G=-0.97$



$G=-1$



$G=-1.03$



$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^{\,2} + p_2^{\,2}\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^{\,2} + q_2^{\,2}\right) - q_1^{\,2}q_2 - \frac{1}{3}\,q_2^{\,3}, \tag{5.4}$$

Poincaré lõiked kolmel erineval H väärtustel $\left\{H = \frac{1}{12}, H = \frac{1}{10}, H = \frac{1}{7}\right\}$ G variatsioonide $G = -0.97$ ja $G = -1.03$ korral (Joonis 5). Näeme, et kordaja $G = -0.97$ korral on Poincaré lõike ulatus tunduvalt kitsam ja $G = -1.03$ korral mõnevõrra laiem kui liikumisintegraaliga hamiltoniaani $G = -1$ korral. Tehtud väike variatsioon põhjustab lahendite käitumises küll olulisi muutusi, kuid kaost veel ei paista. Võib arvata, et tegemist on teatud tüüpi bifurkatsioonijoonega.

Järgnevalt võtame vaatluse alla leitud liikumisintegraali (4.17)

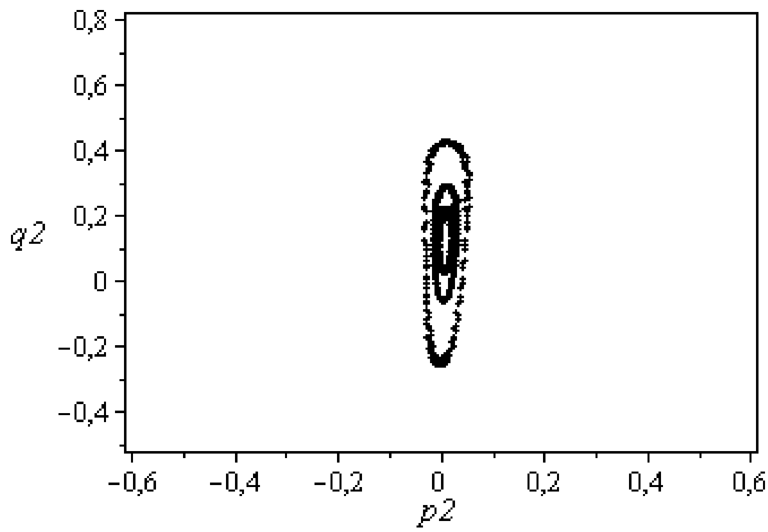
$$J = A\; q1\; q2 + p1\; p2 - \frac{1}{3}\; q1^3 - q1\; q2^2 \tag{5.5}$$

leides Poincaré lõiked samuti kolmel erineval J väärtustel $\left\{J = \frac{1}{28}, J = \frac{1}{20}, J = \frac{1}{14}\right\}$ G variatsioonide $G = -0.97$ ja $G = -1.03$ korral (Joonis 6). Variatsioonid lahendite käitumist ei mõjuta ning võib eeldada, et süsteem on liikumisintegraali ümbruses stabiilne.

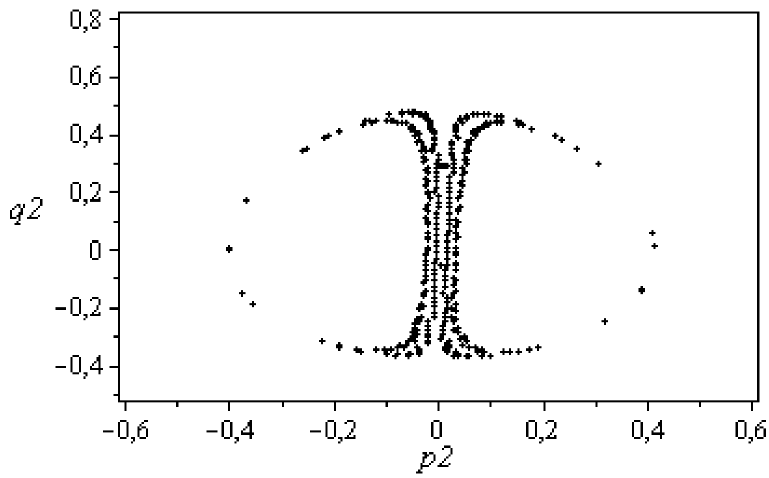
Joonis 5. Integraali (5.4) Poincaré lõiked kolmel H väärtusel variatsioonidel $G=-0.97$ ja $G=-1.03$.

a) $H=\dfrac{1}{12}$

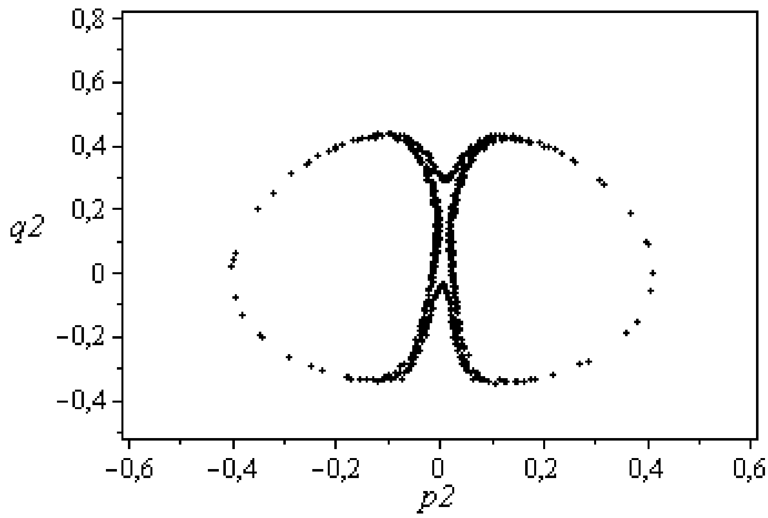
$G=-0.97$



$G=-1$

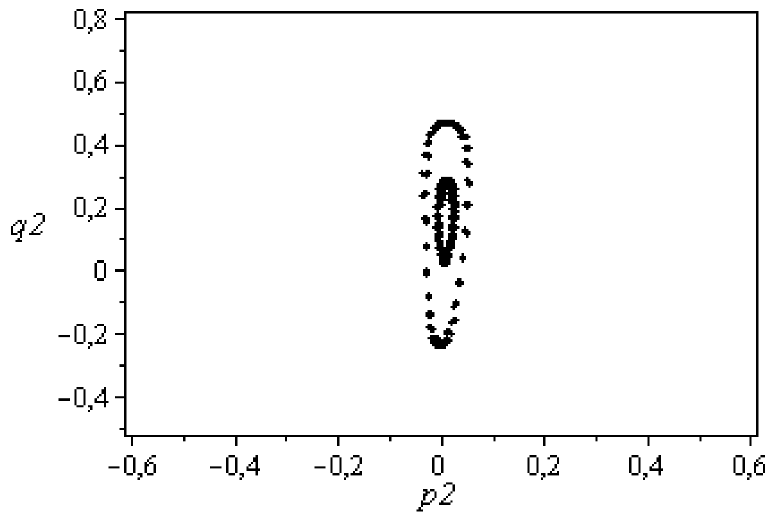


$G=-1.03$

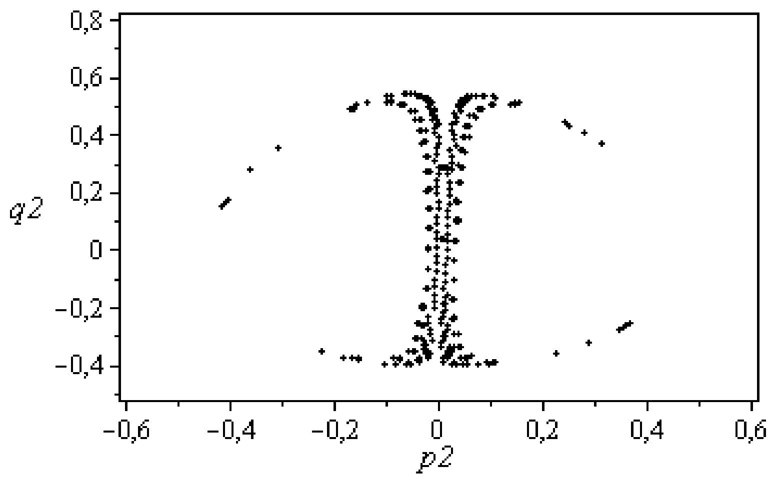


b) $H = \frac{1}{10}$

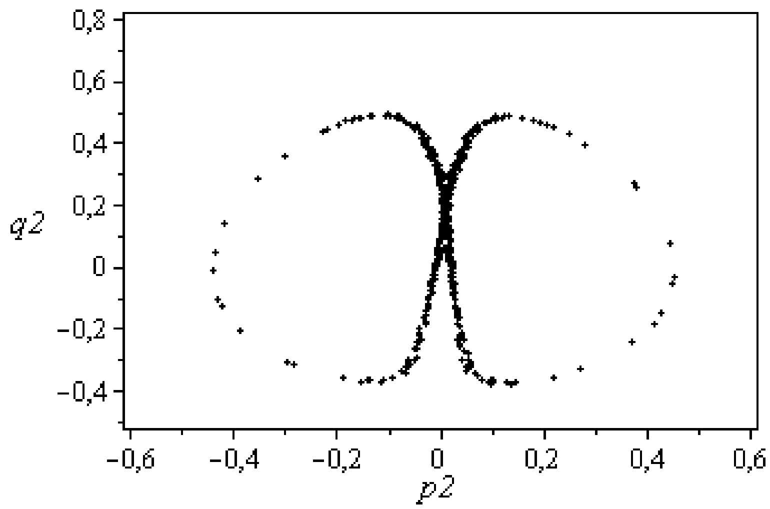
$G = -0.97$



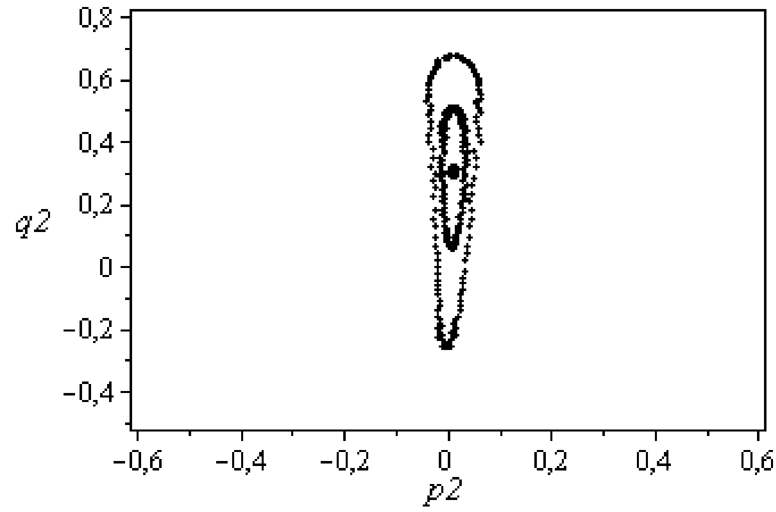
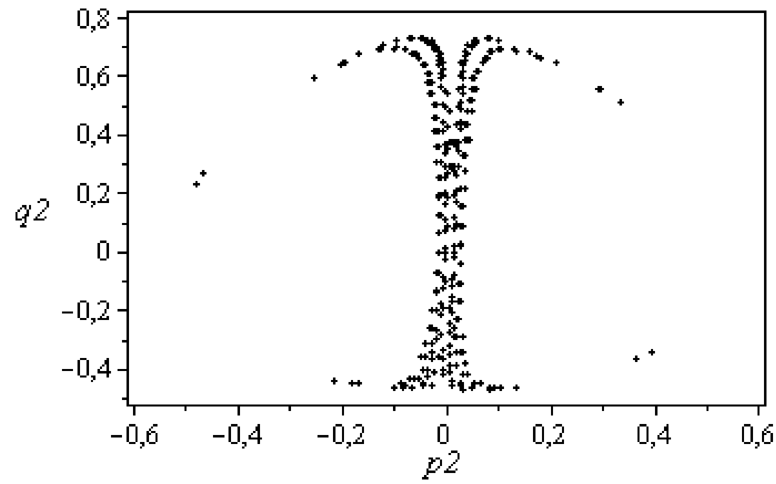
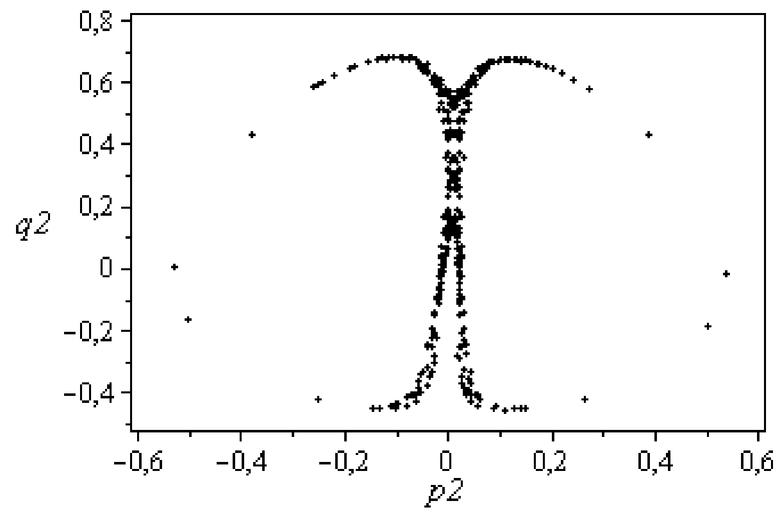
$G = -1$



$G = -1.03$

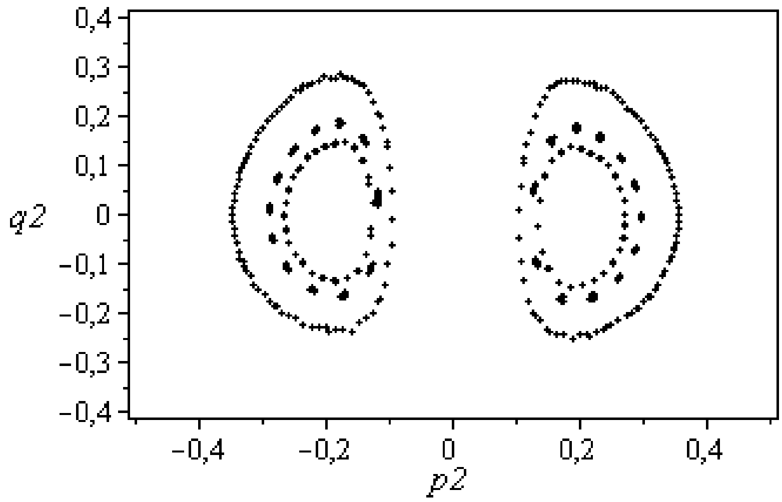
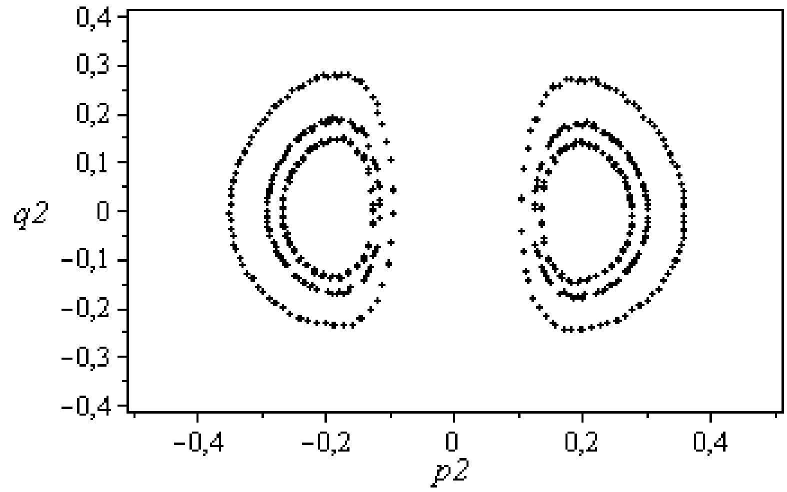
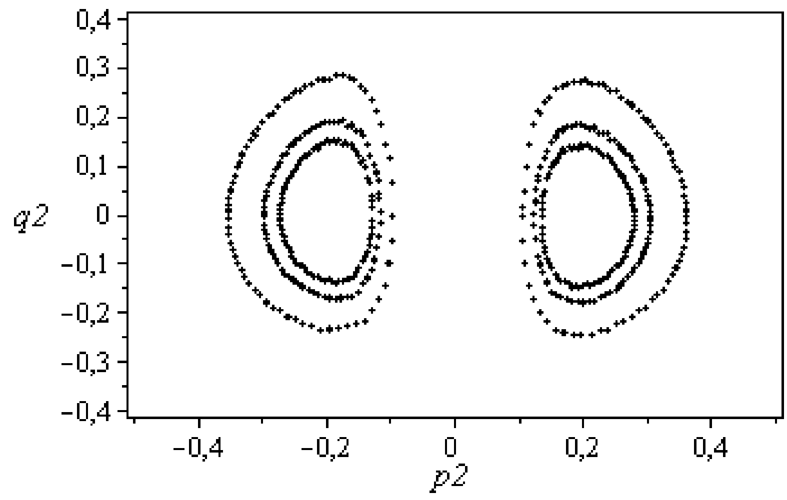


c) $H = \frac{1}{7}$

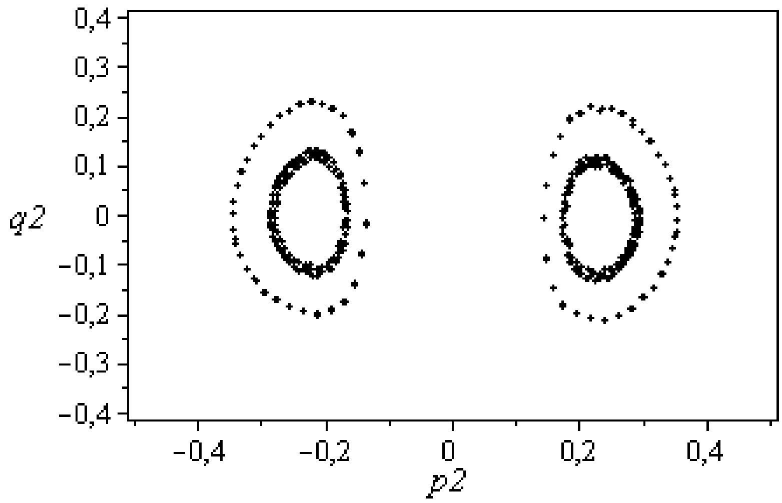
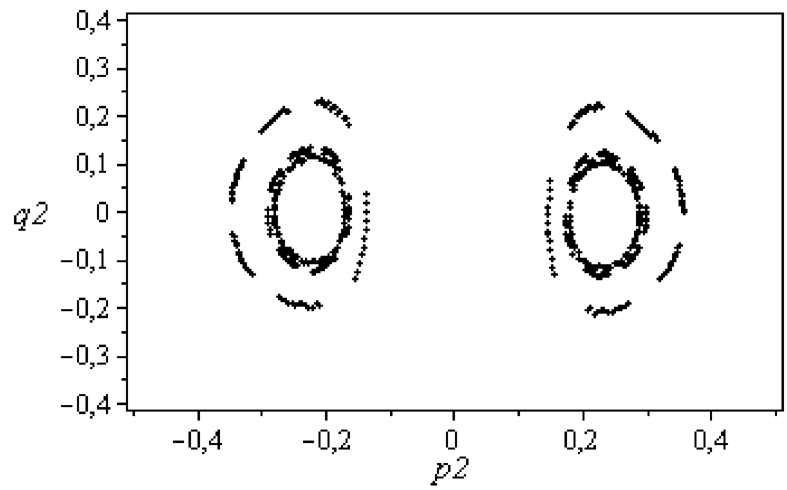
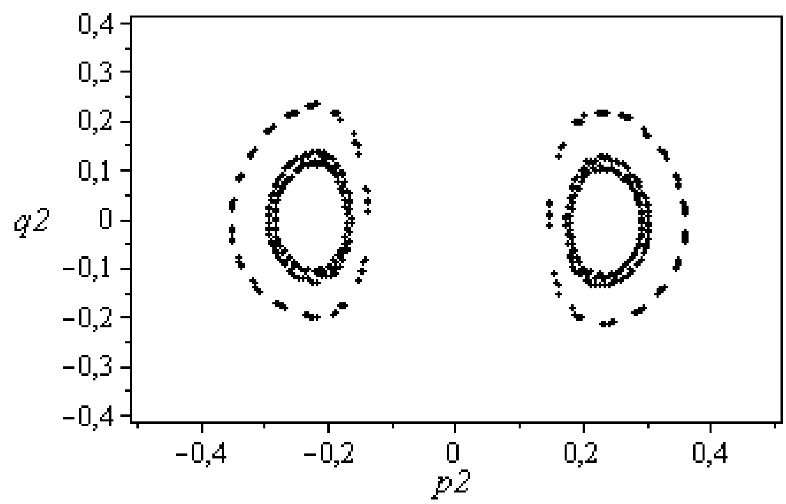
<table>
<tr><td>$G = -0.97$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$G = -1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$G = -1.03$</td><td>
</td></tr>
</table>

Joonis 6. Integraali (5.5) Poincaré lõiked kolmel J väärtusel variatsioonidel $G = -0.97$ ja $G = -1.03$.

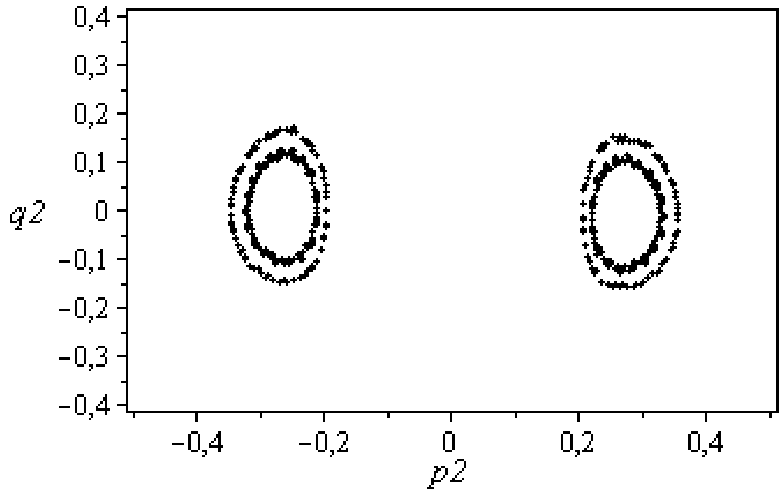
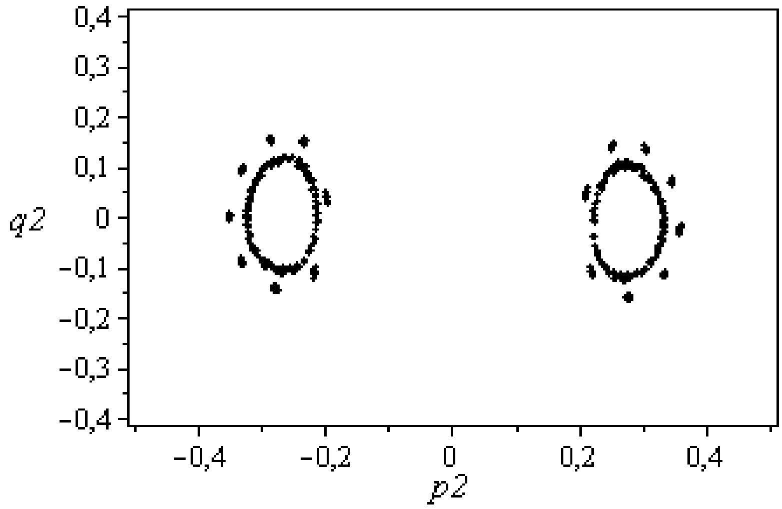
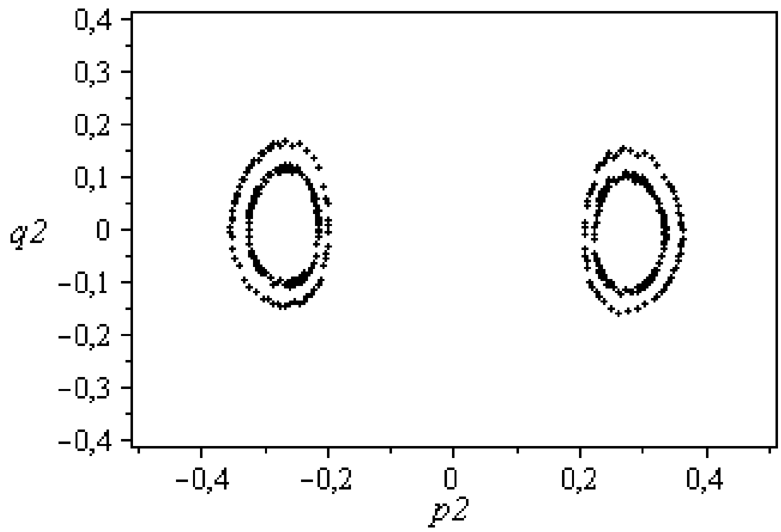
a) $J = \dfrac{1}{28}$

$G = -0.97$	
$G = -1$	
$G = -1.03$	

a) $J = \frac{1}{20}$

$G = -0.97$	
$G = -1$	
$G = -1.03$	

a) $J = \frac{1}{14}$

$G=-0.97$	
$G=-1$	
$G=-1.03$	

KOKKUVÕTE

Magistritöö "Üldistatud Hénon-Heiles'i võrrandite liikumisintegraalid" sissejuhatavas osas on esitatud üldine motivatsioon tegelemaks Hénon-Heiles'i võrrandite ja mittelineaarse dünaamikaga laiemalt. Järgneb põgus ülevaade liikumisintegraalidega seotud mõistetest ja probleemidest nende leidmisel Hénon-Heiles'i võrrandite näitel. Lühidalt on kokku võetud Hénon-Heiles'i võrrandite ajalooline taust. Töö kolmandas osas moodustatakse kaks faasimuutujate lineaarset funktsiooni ja uuritakse, kuidas saab neist moodustada kaks teise astme mittelineaarsustega differentsiaalvõrrandit, ning neljandas osas leitakse, millisel viisil saab nendele võrranditele vastavusse seada kuni kolmanda astme mittelineaarsustega liikumisintegraale. Väljapakutud metoodikat võibki lugeda töö põhitulemuseks, mille kasutatavust tõestab Hénon-Heiles'i võrranditele leitud liikumisintegraal. Lõpuks uuritakse, kuidas käituvad lahendid liikumisintegraalide ümbruses.

VIITED

[1] J. Engelbrecht, Ü.Lepik. Kaoseraamat. Teaduste Akadeemia Kirjastus, Tallinn, (1999).

[2] C. H. Choi. Generalizations of the Lotka-Volterra population ecology model: theory, simulation, and applications. Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences, Vol. 1, No. 4, 263-273 (1997).

[3] G. J. Pettet, D. L. S. McElwain, J. Norbury. Lotka-Volterra equations with chemotaxis: walls, barriers and travelling waves. Math. Med. Biol. Vol. 17, No. 4, 395-413 (2000).

[4] R. W. McCarley. Neurobiology of REM and NREM sleep. Sleep Med. Vol. 8, No. 4, 302-330 (2007).

[5] S. P. Gorman , R. G. Kulkarni et al. A predator prey approach to the network structure of cyberspace. Proceedings of the winter international synposium on Information and communication technologies, Cancun, Mexico, January 05-08, (2004).

[6] S. Solomon. Generalized Lotka Volterra (GLV) models of stock markets. In: G. Ballot, G. Weisbuch (Eds.), Applications of Simulation to Social Sciences, Hermes Science Publications, 301–322 (2000).

[7] Y. Ueda. The Road to Chaos. Aerial Press, (1992).

[8] P. Wang, S. Tang et al. Pattern Selection in a Reaction-diffusion Equation. Acta Mech. Sinica 18(6), 652-660 (2002).

[9] W. Zhang, B.-R. Xiang. A Duffing oscillator algorithm to detect the weak chromatographic signal. Analytica Chimica Acta , Vol. 585, No. 1, 55-59 (2007).

[10] E. C. Zeeman. Duffing's equation in brain modeling. J. Inst. Math. Appl., No. 2, 207–214 (1976).

[11] M. Hénon, C. Heiles. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. Astron. J. 69, 73-79 (1964).

[12] R. H. G. Helleman. In: Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Ed. E. G. D. Cohen, North-Holland, Amsterdam (1980).

[13] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. Regular and Stochastic Motion. Springer, New York

(1983).

[14] H. G. Schuster. Deterministic Chaos. VHC, Weinheim (1988).

[15] F. Kokubun. Gravitational waves from the Hénon-Heiles system. Phys. Rev. D 57, 2610 (1998).

[16] L. D Landau, E. M. Lifshitz. Mechanics. Course of Theoretical Physics. Vol. 1 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann (1982).

[17] M. A. Tavel's English translation of E. Noether. "Invariante Variationsprobleme," Nachr. d. König. Gesellsch.d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235–257 (1918), [arXiv:physics/0503066v1].

[18] W.-H. Steeb, N. Euler. Nonlinear Evolution Equations and Painlevé Test. World Scientific, Singapore (1988).

[19] T. Bountis, H. Segur, F. Vivaldi. Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property. Phys. Rev. A25, 1257 (1982).

[20] H. Yoshida. Necessary Condition for the Existence of Algebraic First Integrals, Part 1 : Kowalevski Exponents.Cel. Mech. 31, 363 (1983).

[21] H. Yoshida. Necessary Condition for the Existence of Algebraic First Integrals, Part 2 : Condition for Algebraic Integrability. Cel. Mech. 31, 381 (1983).

[22] M. Salerno, V. Z. Enol'skii, D. V. Leykin. Canonical transformation between integrable Hénon-Heiles systems. Phys. Rev. E 49, 5897–5899 (1994)

[23] N. Moiseyev and P. R. Certain. Quantum chaos and the decay of vibrational excitation in the Hénon-Heiles system. J. Phys. Chem., 86 (7), 1149–1152(1982).

[24] D. Niinepuu. Dünaamiliste süsteemide liikumisintegraalidest. Tartu Ülikool, Füüsika-keemiateaduskond, Tartu (2006).

[25] Y. F. Chang, M. Tabor and J. Weiss. On the analytic structure of the Henon-Heiles system. J. Math. Phys. 23, 531 (1982).

[26] L. S. Hall. A theory of exact and approximate configurational invariants. Physica 8D, 90 (1983).

[27] B. Grammaticos, B. Dorizzi, R. Padjen. Painleve property and integrals of motion for the

Hénon-Heiles system. Phys. Lett. A89, 111 (1982).

[28] G. Baumann, M. Freyberger. Generalized symmetries and integrals of motion for the Hénon-Heiles model. ZAMP. Vol. 43, No. 3, (1992).

INTEGRALS OF MOTION FOR THE HÉNON-HEILES MODEL

KADRI HILLERMAA

SUMMARY

Interdiciplinarity of nonlinear dynamics and the universality of the models there motivate this study about integrals of motion for Hénon-Heiles system. A brief theoretical insight into the basic concepts related to integrals of motion clearly brings out one of the fundamental issues in classical dynamics and shows that finding integrals of motions cannot be considerd a trivial task. Next a historical background and an overview of Hénon-Heiles problem in general is presented.

The main aim of the thesis was to convert four Hamilton equations in a four dimensional phase space into two second order nonlinear differential equations, by using two linear functions, from which integrals of motion can be found in an easier way than otherwise possible from the initial equations. A method was proposed for finding the integrals of motion with up to third order nonlinearities. Applicability of the algorithm proposed was confirmed with the integral of motion obtained for Hénon-Heiles equations. Finally the behaviour of solution in the vicinity of integrals of motion was examined.

LISA 1: U_8, U_9, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14} ja U_{15} determinandid. Indeksid {1...7} tähistavad vastavaid võrrandeid U_8, U_9, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14} ja U_{15}.

$$M_{567} = \begin{bmatrix} A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)^3$$

$$M_{742} = \begin{bmatrix} A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B4\,B1 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{642} = \begin{bmatrix} A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B4\,B1 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{526} = \begin{bmatrix} A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B4\,B1 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)^2(A3\,B1 + A1\,B3)$$

$$M_{527} = \begin{bmatrix} A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B4\,B1 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)^2(A4\,B1 - A1\,B4)$$

$$M_{457} = \begin{bmatrix} A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)^2(A4\,B2 - A2\,B4)$$

$$M_{452} = \begin{bmatrix} A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B4\,B1 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)^2(A2\,B1 - A1\,B2)$$

$$M_{356} = \begin{bmatrix} A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{357} = \begin{bmatrix} A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)^2(A3\,B2 - A2\,B3)$$

$$M_{346} = \begin{bmatrix} A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B2 - A2\,B3)\,(A4\,B2 - A2\,B4)$$

$$M_{347} = \begin{bmatrix} A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(-A2\,B4 + A4\,B2)^2$$

$$M_{236} = \begin{bmatrix} A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B1 - A1\,B3)\,(A4\,B2 - A2\,B4)$$

$$M_{237} = \begin{bmatrix} A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)\,(A4\,B1 - A1\,B4)\,(A4\,B2 - A2\,B4)$$

$$M_{235} = \begin{bmatrix} A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B1 - A1\,B3)\,(A3\,B2 - A2\,B3)$$

$$M_{156} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{157} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -(A3\,B1 - A1\,B3)\,(A3\,B4 - A4\,B3)^2$$

$$M_{146} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A4\,B1 - A1\,B4)\,(A3\,B2 - A2\,B3)$$

$$M_{147} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -(A3\,B4 - A4\,B3)\,(A4\,B2 - A2\,B4)\,(A4\,B1 - A1\,B4)$$

$$M_{145} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B2 - A2\,B3)\,(A3\,B1 - A1\,B3)$$

$$M_{125} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B1 - A1\,B3)^2$$

$$M_{124} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A2\,B1 - A1\,B2)\,(A4\,B1 - A1\,B4)$$

$$M_{126} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B1 - A1\,B3)\,(A4\,B1 - A1\,B4)$$

$$M_{127} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A4\,B1 - A1\,B4)^2$$

$$M_{135} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{136} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{137} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -\,(A3\,B4 - A4\,B3)^2(A2\,B1 - A1\,B2)$$

$$M_{134} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \end{bmatrix} = -\,(A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B2 - A2\,B3)\,(A2\,B1 - A1\,B2)$$

$$M_{167} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -\,(A3\,B4 - A4\,B3)^2(A4\,B1 - A1\,B4)$$

$$M_{267} = \begin{bmatrix} A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{367} = \begin{bmatrix} A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = -\,(A3\,B4 - A4\,B3)^2 (A4\,B2 - A2\,B4)$$

$$M_{467} = \begin{bmatrix} A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \\ A4^2 & 2\,A4\,B4 & B4^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{456} = \begin{bmatrix} A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \\ A4\,A3 & A3\,B4 + A4\,B3 & B4\,B3 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)^2 (A3\,B2 - A2\,B3)$$

$$M_{345} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \\ A3^2 & 2\,A3\,B3 & B3^2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B2 - A2\,B3)^2$$

$$M_{234} = \begin{bmatrix} A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \\ A2\,A4 & A4\,B2 + A2\,B4 & B4\,B2 \end{bmatrix} = -\,(A3\,B4 - A4\,B3)\,(A4\,B2 - A2\,B4)\,(A2\,B1 - A1\,B2)$$

$$M_{123} = \begin{bmatrix} A1\,A3 & A1\,B3 + A3\,B1 & B3\,B1 \\ A1\,A4 & A1\,B4 + A4\,B1 & B1\,B4 \\ A2\,A3 & A3\,B2 + A2\,B3 & B3\,B2 \end{bmatrix} = (A3\,B4 - A4\,B3)\,(A3\,B1 - A1\,B3)\,(A2\,B1 - A1\,B2)$$

LISA 2: W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14} ja W_{15} determinandid. Indeksid {1...5} tähistavad vastavaid võrrandeid W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14} ja W_{15}.

$$M_{1234} = \begin{bmatrix} 3\cdot A20 & B20 & 0 & 0 \\ 3\cdot A11 & A20+B11 & B20 & 0 \\ 3\cdot A02 & 4\cdot A11+B02 & A20+4\cdot B11 & 3\cdot B20 \\ 0 & A02 & A11+B02 & 3\cdot B11 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = 9\,A20^2(B11\,A20 + 5\,B11^2 - B20\,A11 - B20\,B02) + 18\,B11(2\,A20\,B11^2 - 3\,A20\,B20\,A11 - A20\,B20\,B02 - 2\,B20\,A11\,B11) + 9\,B20^2(A20\,A02 + A11^2 + A11\,B02 + A02\,B11)$$

$$M_{1235} := \begin{bmatrix} 3\cdot A20 & B20 & 0 & 0 \\ 3\cdot A11 & A20+B11 & B20 & 0 \\ 3\cdot A02 & 4\cdot A11+B02 & A20+4\cdot B11 & 3\cdot B20 \\ 0 & 0 & A02 & 3\,B02 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = 9\,A20^2(B02\,A20^2 + 5\,B02\,B11 - B20\,A02) + 9\,A20(4\,B02\,B11^2 - B11\,B20\,A02 - 5\,B20\,B02\,A11 - B20\,B02^2) - 36\,B20\,A11\,B02\,B11 + 9\,B20^2(A11\,A02 + A02\,B02)$$

$$M_{1245} = \begin{bmatrix} 3\cdot A20 & B20 & 0 & 0 \\ 3\cdot A11 & A20+B11 & B20 & 0 \\ 0 & A02 & A11+B02 & 3\cdot B11 \\ 0 & 0 & A02 & 3\,B02 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = 9\,A20^2(B02\,A11 + B02^2 - B11\,A02) + 9\,A20(B11\,B02\,A11 + B11\,B02^2 - B11^2\,A02 - A02\,B20\,B02) + 9\,A11\,B20(B11\,A02 - A11\,B02 - B02^2)$$

$$M_{1345} = \begin{bmatrix} 3\cdot A20 & B20 & 0 & 0 \\ 3\cdot A02 & 4\cdot A11+B02 & A20+4\cdot B11 & 3\cdot B20 \\ 0 & A02 & A11+B02 & 3\cdot B11 \\ 0 & 0 & A02 & 3\,B02 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = 9\,A20(4\,B02\,A11^2 + 5\,A11\,B02^2 - 4\,A11\,B11\,A02 + B02^3 - 5\,B02\,B11\,A02 + A02^2\,B20 - A02\,B02\,A20) + 9\,A02(A02\,B20\,B11 - B20\,B02\,A11 - B20\,B02^2)$$

$$M_{2345} = \begin{bmatrix} 3\cdot A11 & A20+B11 & B20 & 0 \\ 3\cdot A02 & 4\cdot A11+B02 & A20+4\cdot B11 & 3\cdot B20 \\ 0 & A02 & A11+B02 & 3\cdot B11 \\ 0 & 0 & A02 & 3\,B02 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = 9\,A11^2(4\,B02\,A11 + 5\,B02^2 - 4\,B11\,A02) + 9\,A11\,B02(B02 - 6\,B11\,A02 - 2\,A02\,A20) + 9\,A02(A11\,A02\,B20 - A20\,B02^2 + A20\,B11\,A02 - B11\,B02^2 + B11^2\,A02 + A02\,B20\,B02)$$