
N. TARASSOV

**KÕRGEMA MATEMAATIKA
KURSUS TEHNIKUMIDELE**

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“ • 1948



N. TARASSOV

**KÕRGEMA
MATEMAATIKA KURSUS**

TEHNIKUMIDELE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1948

Lubatud NSVL RKN-i juures oleva Üleliidulise Kõrgemate Koolide
Komitee poolt õpikuna tehnikumidele.



14256
A-17333

EESSÕNA.

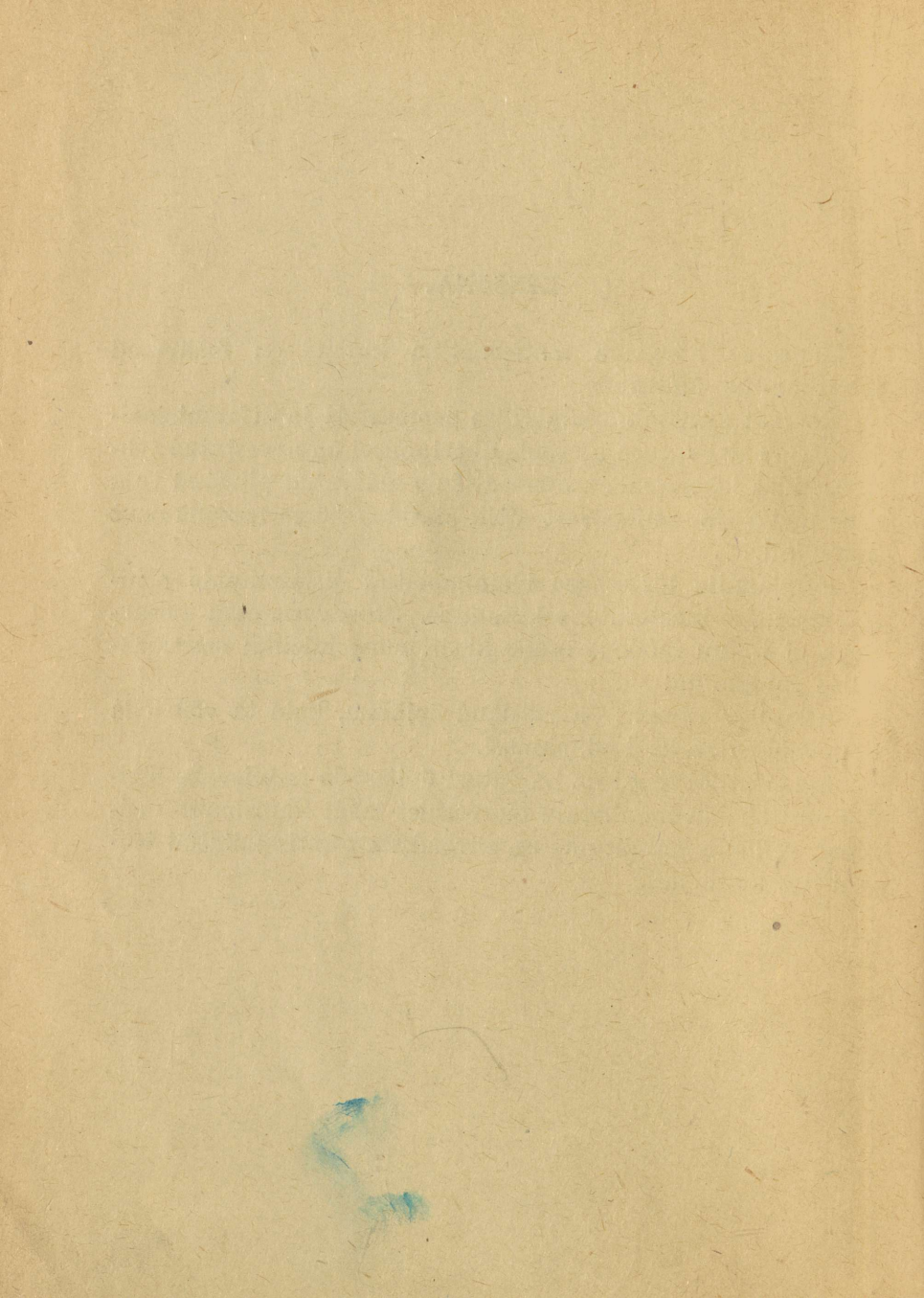
Käesolev kõrgema matemaatika kursus on määratud tehnikumide õpilastele.

Raamat sisaldab analüütilise geomeetria ja diferentsiaal- ja integraalarvutuse aluseid. Koostamisel on arvestatud tehnikumides kõrgemale matemaatikale määratud piiratud tundide arvu ja sellepärast õpik sisaldab kõige tarvilikumat materjali.

Esiplaanile tõstetakse üldnimetatud distsipliinide põhimõistete ja meetodite selgitamine. Seoses raamatu ülesandega ei toimu mõnede osade käsitlemine täieliku matemaatilise rangusega.

Käesolev raamat on mõeldud õpikuna, kuid ta võib olla õppevahendiks ka iseõppimisel.

Iga peatüki lõpul on harjutusi õpilastele iseseisvaks läbitöötamiseks ja mõningaid teoreetilist laadi lihtsamaid küsimusi, millede eesmärgiks on süvendada tekstis esitatud teoreetilist materjali.



I OSA.

TASAPINNALISE ANALÜÜTILISE GEOMETRIA ALGED.

Sissejuhatus.

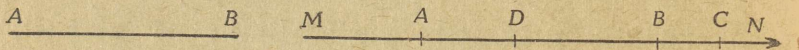
Analüütilise geomeetria uurimisaineks on geomeetriliste kujundite (joonte, pindade jne.) tundmaõppimine algebra kaasabil.

Juba elementargeomeetrias tutvume algebra ärakasutamisege geomeetriliste ülesannete lahendamisel, näiteks niinimetatud algebra rakendamisega geomeetrias, ja vaatleme geomeetrilisi suurusi (pindalasid, ruumalasid jms.), mida võib väljendada arvudega. Kuid elementargeomeetria ei lahenda küsimust, kuidas väljendada arvude abil kõige olulisemat geomeetriliste objektide omadust, mis on matemaatika objektide hulgas omane ainult neile, — nende kuju ja vastastikust asendit.

Seda küsimust õpitakse tundma analüütilises geomeetrias nõndanimetatud koordinaatide meetodi abil. Koordinaatide meetodi olemus seisab selles, et see meetod annab võimaluse punkti asendi määramiseks (tasapinnal ja ruumis) arvude (koordinaatide) abil ja joone määramiseks joone punktide koordinaate siduva võrrandi abil ning sel viisil võimaldab uurida geomeetrilisi kujundeid algebra abil, ja ümberpöörduvalt — illustreerida algebra küsimusi geomeetria abil. Analüütilise geomeetria loojaks on prantsuse matemaatik ja filosoof Descartes (1596—1650).

Ristkoordinaadid. Lihtsamaid ülesandeid koordinaatide meetodi rakendamiseks.

§ 1. **Suunatud sirglõigud.** Võtame sirglõigu AB (joonis 1). Vaatleme seda sirglõiku kui pidevalt liikuva punkti teed sirglõigu ühest otsast, mida nimetame alguseks, teise otsani, mida nimetame lõpuks. Üheaegselt punkti poolt läbikäidud tee pikkuse vaatlemisega vaatleme ka punkti liikumise suunda. Niiviisi jõuame **s u u n a t u d** sirglõigu mõis-



Joonis 1.

Joonis 2.

teni. Suunatud sirglõigu märkimisel lepime kokku kirjutada esimesele kohale täht, mis märgib sirglõigu algust, ja teisele kohale täht, mis märgib sirglõigu lõppu. Näiteks punkti liikumisel A -st B -ni moodustunud sirglõiku märgime AB (joonis 1). Sama sirglõiku, kui see on moodustunud vastasuunalise liikumise poolt, märgime BA . Vaatleme mitut sirgel MN asetsevat sirglõiku (joonis 2). Olgu sirge MN suund M -st N -ni. Siis mõned sellel sirgel asetsevad sirglõigud, näiteks AB , BC , DC , suunalt ühtivad MN suunaga, kuna teistel, nagu BA , CD , DA , on suund vastupidine. Esimesel juhul nimetame sirglõike positiivseiks ja nende suunda iseloomustame märgiga pluss (+), teisel juhul aga negatiivseiks ja nende suunda iseloomustame märgiga miinus (—). Seega, kui sirglõigu AB pikkus, ehk teisiti absoluutväärtus¹ on a , siis lähtudes öeldust,

$$AB = +a,$$

¹ Siit järgneb, et sirglõigu pikkus väljendub alati positiivse arvuna, kuna sirglõik ise võib väljenduda nii positiivse kui negatiivse arvuna.

sest sirglõigu AB suund ühtib sirge MN suunaga, aga sirglõik

$$BA = -a,$$

sest sirglõigu BA suund on vastupidine MN suunale.

Toodud võrdustest järgnevad põhilised seosed

$$BA = -AB, \quad (1)$$

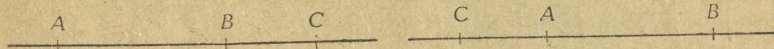
$$AB + BA = 0. \quad (2)$$

Siit järgneb, et kui elementargeomeetrias sirglõigud on absoluutsuurusteks ja sirglõik $AB = BA$, siis analüütilises geomeetrias vaatleme neid kui relatiivseid suurusi: nad võivad olla nii positiivsed kui negatiivsed. Sellepärast on AB ja BA juba erinevad sirglõigud, mis on võrdsed absoluutväärtuse poolest, kuid märgilt vastupidised. Näiteks, võttes pikkuse ühikuks sentimeetri, leiame, et sirglõigu AB absoluutväärtus on 3 cm, siis sirglõik $AB = +3$, aga sirglõik $BA = -3$, ja seosed (1) ja (2) antud arvude puhul väljenduvad samasustega

$$+3 = -(-3) \text{ ja } +3 + (-3) = 0.$$

§ 2. **Suunatud sirglõikude liitmine.** Vaadeldes sirglõike relatiivsete suurustena, väljendame nende liitmise reegli.

Suunatud sirglõiku AB võime vaadelda kui punkti liikumise tulemust algseisust A lõppseisuni B . Kaks üksteisele järgnevat liikumist: punktist A punktini B ja



Joonis 3.

Joonis 4.

punktist B punktini C , mis asuvad samal sirgel (joonis 3), moodustavad nende liikumiste summa ehk kahe suunatud sirglõigu AB ja BC summa, — summa, mis on ekvivalentne

ühe liikumisega esimese sirglõigu algpunktist teise sirglõigu lõpp-punktini.

Niisuguse kahe suunatud sirglõigu summa definitsiooni puhul on õige võrdus:

$$AB + BC = AC, \quad (3)$$

mis jääb kehtivaks punktide A , B ja C igasuguse vastastikuse asendi puhul sirgel.

Võrduse (3) kehtivus on silmanähtav, kui punktid A , B ja C asetsevad üksteise suhtes nii, nagu see on näidatud joonisel 3.

On kerge veenduda võrduse (3) kehtivuses punktide mistahes teise vastastikuse asendi puhul. Nii joonis 4 näitab juhtu, kus punkt A on punktide B ja C vahel. Jooniselt nähtub, et

$$AB + BC = AB + BA + AC = AC,$$

sest $AB + BA = 0$ võrduse (2) põhjal. Järelikult summa väljendub jälle sirglõiguna AC .

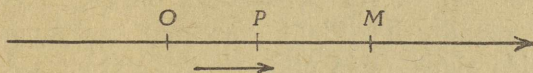
Siit järgneb kahe suunatud sirglõigu liitmise reegel:

Kahe suunatud sirglõigu liitmiseks tuleb esimese sirglõigu lõpp asetada kokku teise sirglõigu algusega; siis esimese sirglõigu alguspunkt on summalõigu alguseks ja teise sirglõigu lõpp-punkt summalõigu lõpuks.

Seost (3) on kerge laiendada suunatud sirglõikude igasugusele arvule ja näidata, et ühel ja samal sirgel asetsevate sirglõikude AB , BC , CD , ..., KZ summa on $AB + BC + CD + \dots + KZ = AZ$ punktide A , B , C , ..., Z igasuguse vastastikuse asendi puhul sirgel.

§ 3. Sirgjoone punkti koordinaat. Lähtudes suunatud sirglõigu mõistest, võime punkti asendi sirgel määrata

arvuga. Selleks võtame sirgel vabalt valitava punkti O (joonis 5) ja loeme selle algpunktiks. Määrame sirgel positiivse suuna, näiteks vasemalt paremale. Siis iga punkti M asend sirgel määratakse täiesti sirglõiguga OM , kusjuures algpunktist O paremal asetsevaile punktidele vastavad positiivsed ja vasemal asetsevaile punktidele negatiivsed sirglõigud. Ümberpöörduvalt, igale suunatud sirglõigule OM vas-



Joonis 5.

tab sirgel ainult üks kindel punkt M — sirglõigu OM lõpp. Niisiis igale punktile sirgel vastab kindel suunatud sirglõik ja ümberpöörduvalt, igale suunatud sirglõigule — kindel punkt sirgel.

Nüüd võime määrata punkti M asendi arvuga. Selleks võtame sirgel positiivse sirglõigu OP pikkuse ühikuks (joonis 5) ja leiame sirglõigu OM ja OP suhte. See suhe on võrdne mingi arvuga x , s. o.

$$x = \frac{OM}{OP}, \quad (4)$$

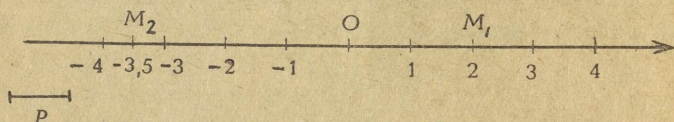
mis on positiivne või negatiivne, olenevalt sirglõigu OM suunast. Niisiis igale sirge punktile M vastab üks kindel relatiivne (s. o. positiivne või negatiivne) arv ja järelikult punkti asendile sirgel vastab kindel arv. Seda arvu nimetatakse punkti koordinaadiks. Ümberpöörduvalt, igale arvule x vastab kindel punkt M sirgel, nimelt sirglõigu OM lõpp, määratud võrdusega $OM = OP \cdot x$, mis järgneb võrdusest (4).

Koordinaadi x kuuluvust punktile M märgitakse $M(x)$. Algpunkti O nimetatakse koordinaatide alguseks ja alguse koordinaati loetakse nulliks. Seega sirge punkti koordinaat

oleneb koordinaatide algusest, sirge suunast ja pikkusühiku valikust. Koordinaatide alguse ümberpaigutamisel, sirge suuna muutmisel või uue pikkusühiku valikul omandab antud punkti koordinaat uue arvulise väärtuse.

Kui ütleme, et on antud punkt, siis see tähendab, et on antud punkti koordinaat. Leida punkt — tähendab leida punkti koordinaat. Selleks, et ehitada koordinaadi kaudu antud punkt, on tarvis joonestada sirge, määrata selle positiivne suund (harilikult vasemalt paremale), valida koordinaatide algus O ja pikkusühik. Pärast seda asetada sirgele, alates punktist O , sirglõik, mille pikkus valitud mõõduühikus vastab antud punkti koordinaadile. Kui antud punkti koordinaat on positiivne, siis sirglõik võtta alates punktist O , sirge positiivses suunas, kui negatiivne, siis vastassuunas. Sirgele paigutatud sirglõigu lõpp määrab punkti asendi sirgel.

Näide 1. Sirgel on antud punktid M_1 ja M_2 (joonis 6). Leida nende punktide koordinaadid.



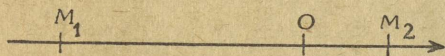
Joonis 6.

Lahendus. Valime sirgel positiivse suuna (näidatud noolega), koordinaatide alguse O ja pikkusühiku p . Kuna pikkusühik p mahub sirglõigusse OM_1 täpselt kaks korda ja punkt asub paremal pool algusest O , siis punkti M_1 koordinaat on $+2$, mida kirjutatakse: $M_1(+2)$.

Kuna p mahub sirglõigusse OM_2 3,5 korda ja punkt M_2 asub vasemal pool algusest O , siis punkti M_2 koordinaat on $-3,5$, mida kirjutatakse: $M_2(-3,5)$.

Näide 2. Ehitada punktid $M_1(-4)$ ja $M_2(\sqrt{2})$.

Lahendus. Valides sirgel positiivse suuna, koordinaatide alguse O ja pikkusühiku ja märkides vasemal algusest O sirglõigu $OM_1 = -4$, leiame otsitava punkti M_1 (joonis 7). Punkti $M_2(+\sqrt{2})$ ehitamiseks joonestame algul ruudu, mille külg võrdub valitud pikkusühikuga (joonis 8). Niisuguse ruudu diagonaal, kooskõlas Pythagorase teoreemiga, võrdub $\sqrt{2}$. Asetades nüüd sirgele algusest O paremale sirglõigu, mis on võrdne ruudu diagonaaliga, leiame otsitava punkti M_2 (joonis 7).



Joonis 7.



Joonis 8.

Ülesanne. Leida kahe punkti vaheline kaugus.

Teades kahe punkti koordinaate, võime määrata nende vahelise kauguse.

Olgu antud kaks punkti $M_1(x_1)$ ja $M_2(x_2)$ (joonis 9).

On tarvis leida nende punktide vaheline kaugus.

Seose (3) põhjal kirjutame:

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2, \quad M_1M_2 = M_1O + OM_2.$$

Väljendades sirglõigud M_1O ja OM_2 punktide M_1 ja M_2 koordinaatide kaudu, saame:

$$OM_1 = x_1, \quad M_1O = -x_1, \quad OM_2 = x_2.$$

Siit leiame:

$$M_1M_2 = M_1O + OM_2 = -x_1 + x_2$$

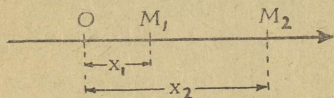
ehk

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

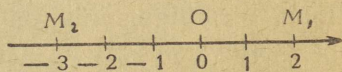
Tähistades sirglõigu M_1M_2 pikkuse sümboliga $\overline{M_1M_2}$ ja võttes arvesse, et punktidevaheline kaugus on positiivne suurus, saame valemi

$$\overline{M_1M_2} = |x_2 - x_1|, \quad (5)$$

kus, nagu see on üldiselt viisiks, $|x_2 - x_1|$ tähistab vahe $x_2 - x_1$ absoluutväärtust.



Joonis 9.



Joonis 10.

Kuna seos (3) on kehtiv punktide O , M_1 ja M_2 igasuguse asendi puhul sirgel, siis valem (5) jääb õigeks punktide M_1 ja M_2 mistahes asendi puhul sirgel. Joonisel 10 näiteks $x_1 = +2$, $x_2 = -3$. Järelikult

$$\overline{M_1M_2} = |(-3) - (+2)| = |-5| = 5.$$

§ 4. Tasapinna punkti koordinaadid. Ristkoordinaatide ehk Descartes'i koordinaatide süsteem. Kui punkt asetseb kusagil tasapinnal, siis ei ole võimalik määrata tema asendit üheainsa koordinaadiga.

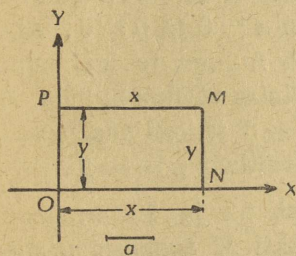
Punkti asendi määramiseks tasapinnal on vaja kahte arvu (kahte koordinaati) ja kõige lihtsamalt võib seda määrata niinimetatud ristkoordinaatide ehk Descartes'i koordinaatide süsteemis. Määramine toimub järgnevalt.

Võtame tasapinnal kaks ristiolevat suunatud sirget OX ja OY (joonis 11), ja nende lõikepunkti O võtame neile asetatavate sirglõikude alguseks. Loeme sirgel OX positiivseks suunaks suuna vasemalt paremale, aga sirgel OY — alt üles. Lõpuks valime nendel sirgetel pikkusühikuks

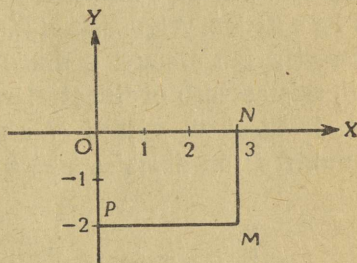
(mõõduühikuks) ¹ näiteks sirglõigu a . Nüüd nende sirgete abil võime määrata iga punkti M asendi tasapinnal. Selleks joonestame punktist M ristsirged sirgetele OX ja OY . Need ristsirged märgivad sirgetel OX ja OY täiesti kindlad punktid N ja P , millede koordinaadid olgu x ja y , s. o.

$$x = \frac{ON}{a} \quad \text{ja} \quad y = \frac{OP}{a}.$$

Ümberpöördult, kaks koordinaati määravad täiesti punkti M asendi; tõepoolest, kui on antud x -i ja y -i kindlad väärtused ja asetame sirgetele OX ja OY neile vastavad sirglõigud ning sirglõikude lõppudes joonestame sirgetele OX ja OY ristsirged, siis need lõikuvadki ühes kindlas punktis.



Joonis 11.



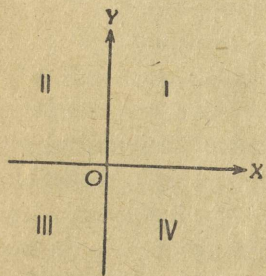
Joonis 12.

Nii, võttes $x = +3$, $y = -2$ ja teostades kirjeldatud ehituse, leiame ühe kindla punkti M (joonis 12). Sellesama punkti M leiame, kui määrame punkti N sirgel OX , mis vastab arvule x , püstitame sellest ristsirge OX -le ja asetame sellele sirglõigu, mida väljendab arv y : selle sirglõigu lõpp määrab ainsa punkti M (joonis 11). Punkti M leidmist antud arvude x ja y põhjal nimetatakse lühidalt punkti ehitamiseks (konstrueerimiseks). Kokku võttes, tasa-

¹ Mõõduühikud telgedel OX ja OY võivad olla ka erinevad, kuid harilikult võetakse üks ja sama mõõduühik.

pinna igale punktile vastab ainult üks paar relatiivseid arve (koordinaate) x ja y , ja ümberpöörduvalt — igale arvude x ja y paarile vastab tasapinnal üksainus punkt.

Arve x ja y nimetatakse punkti koordinaatideks. Koordinaati x nimetatakse punkti abstsissiks ja koordinaati y — punkti ordinaadiks. Seda tõsiasi, et punkt M on määratud koordinaatidega x ja y , kirjutatakse $M(x, y)$, kusjuures sulgudes esimesel kohal on abstsiss ja teisel ordinaat. Suunatud sirgeid OX ja OY nimetatakse koordinaattelgedeks. Esimest nimetatakse abstsisssteljeks ehk X -teljeks (iksteljeks), teist ordinaatteljeks ehk Y -teljeks (igreksteljeks). Punkti O nimetatakse koordinaatide alguseks. Alguse koordinaadid on $x = 0$ ja $y = 0$. Abstsissstelje iga punkti ordinaat võrdub nulliga ja igal punktil, mis asetseb ordinaatteljel, on abstsiss võrdne nulliga. Nii on joonisel 12 punkti N abstsiss $x = 3$ ja ordinaat $y = 0$, punktil P on abstsiss $x = 0$, aga ordinaat $y = -2$.



Joonis 13.

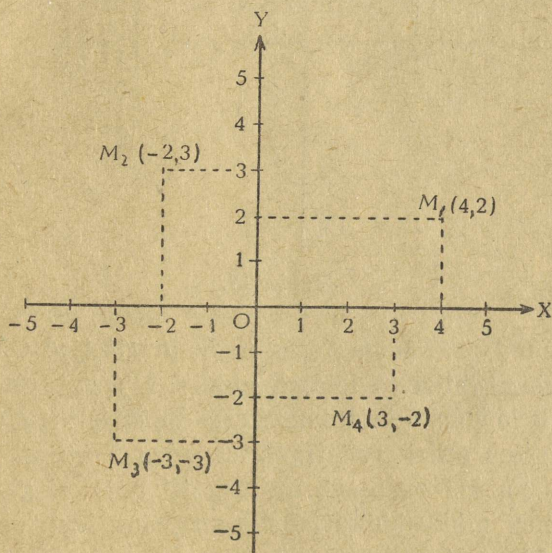
Joonistest 11 ja 12 on samuti näha, et punkti M abstsissi x absoluutväärtuseks on punkti M kaugus ordinaatteljest, kusjuures abstsissi märk näitab, kas punkt M asetseb ordinaatteljest paremal või vasemal, aga ordinaadi y absoluutväärtuseks on punkti kaugus abstsisssteljest, kusjuures ordinaadi märk näitab, kas punkt M asetseb ülal- või allpool abstsissstelge. Telgede OX ja OY süs-

teemi nimetatakse lühidalt XOY süsteemiks. See süsteem jagab tasapinna neljaks osaks, mida nimetatakse veeranditeks ehk kvadrantideks, millede loetelu vastavate andmetega on toodud rooma numbrite järjekorras jooni-

sel 13. Erinevates kvadrantides asetsevate punktide koordinaatidel on erinevad märgid, ja nimelt:

Kvadrant	Abstsissi märk	Ordinaadi märk
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Joonisel 14 on näidatud punktid $M_1(4, 2)$, $M_2(-2, 3)$, $M_3(-3, -3)$ ja $M_4(3, -2)$, mis asetsevad erinevates kvadrantides.

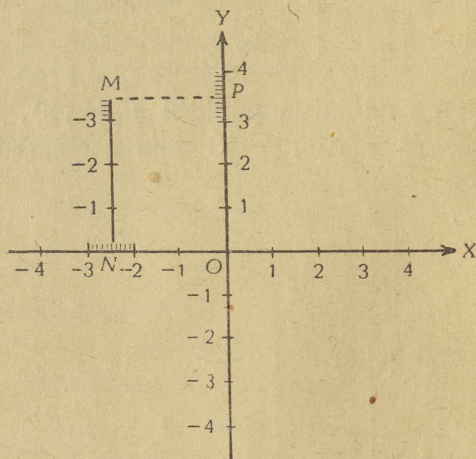


Joonis 14.

Näide 1. Tasapinnal on antud punkt M (joonis 15). Leida selle punkti koordinaadid.

L a h e n d u s. Püstitades punktist M ristsirge MN teljele OX ja mõõtes sirglõigud ON ja MN , leiame: $x = ON = -2,5$; $y = NM = 3,4$. Sama leiame, kui joonestame punktist M koordinaattelgedele ristsirged MN ja MP ja mõõdame telgede sirglõigud ON ja OP .

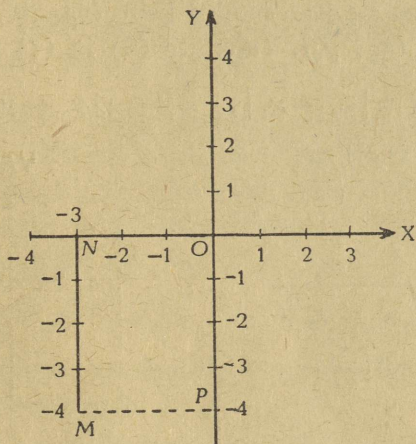
N ä i d e 2. Ehitada punkt $M(-3, -4)$.



Joonis 15.

L a h e n d u s. Joonestame koordinaatteljed OX ja OY , valime pikkusühiku ja leiame punkti N , mis on sirglõigu $ON = -3$ lõpuks. Püstitame selles punktis ristsirge X -teljele, märgime sellel ristsirgel, lugedes X -teljest allapoole (otsitava punkti ordinaat on negatiivne), sirglõigu, mis sisaldab neli pikkusühikut. Selle sirglõigu lõpp ongi otsitavaks punktiks M (joonis 16). Sama punkti M leiame, kui võtame koordinaattelgedel sirglõigud $ON = -3$ ja $OP = -4$ ja joonestame läbi punktide N ja P sirged, mis on paralleelsed telgedega, kuni nende lõikumiseni üksteisega (punktis M).

M ä r k u s. Kirjeldatud meetod punkti asendi leidmiseks tasapinnal arvude abil on kõige lihtsam, kuid ei ole ain-saks; peale selle meetodi on lugemata hulk teisi võimalikke meetodeid.



Joonis 16.

§ 5. **Kahe punkti vaheline kaugus.** Olgu antud kaks punkti: $M_1(x_1, y_1)$ ja $M_2(x_2, y_2)$. Eeldame esiteks, et neid punkte läbiv sirge on paralleelne teljega OX (joonis 17). Järelikult $y_2 = y_1$ ja $\overline{M_1M_2} = \overline{N_1N_2}$. Kooskõlas valemiga (5) sirglõik $\overline{N_1N_2} = x_2 - x_1$. Siit järgneb, et

$$\overline{M_1M_2} = |x_2 - x_1|. \quad (6)$$

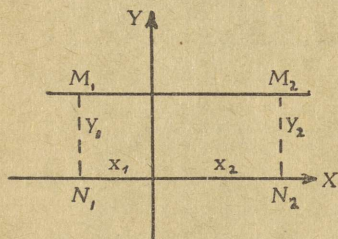
Samuti, kui $x_2 = x_1$, s. o. kui punkte M_1 ja M_2 läbiv sirge on paralleelne teljega OY , leiame, et

$$\overline{M_1M_2} = |y_2 - y_1|. \quad (7)$$

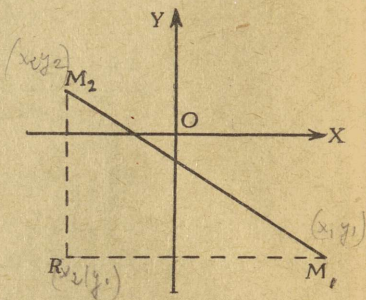
Kui $x_2 \neq x_1$ ja $y_2 \neq y_1$, siis punkte M_1 ja M_2 läbiv sirge ei ole paralleelne ei ühe ega teise koordinaatteljega (joonis 18).

Joonestame läbi punktide M_1 ja M_2 sirged, mis on vastavalt paralleelsed telgedega OX ja OY . Nende sirgete lõikepunkti tähistame R ; selle punkti koordinaadid, nagu seda on kerge näha, on (x_2, y_1) . Valemite (6) ja (7) põhjal leiame:

$$\overline{M_1R} = |x_2 - x_1|, \quad \overline{RM_2} = |y_2 - y_1|.$$



Joonis 17.



Joonis 18.

Täisnurksest kolmnurgast M_1RM_2 saame:

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{\overline{M_1R}^2 + \overline{RM_2}^2};$$

asetades $\overline{M_1R}^2$ ja $\overline{RM_2}^2$ väärtused, leiame lõpuks:

$$\overline{M_1M_2} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (8)$$

Valemis (8) esineva juuremärgi all on vahede $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$ absoluutväärtuste ruutude asemel võetud vahede endi ruudud, sest absoluutväärtuse ruut on võrdne arvu enda ruuduga.

Valemis (8) juur väljendab kaugust kahe punkti vahel ja seda kui positiivset arvu võetakse märgiga +.

Kui üheks punktiks on koordinaatide algus, s. o. punkt $O(0, 0)$, ja teise koordinaadid tähistame (x, y) , siis saame valemi punkti kauguse jaoks koordinaatide algusest:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8^*)$$

Näide. Leida punkt, mis on võrdseil kaugusel kolmest antud punktist: $M_1(1, 2)$; $M_2(-1, -2)$; $M_3(2, -5)$.

Lahendus. Leida punkt — tähendab leida punkti koordinaadid. Tähistame otsitava punkti tähega M ja selle koordinaadid — x, y . Tähendab, meil on tarvis leida kaks tundmatut: x ja y , milleks ülesande tingimuste kohaselt tuleb koostada kaks võrrandit:

$$\overline{M_1M} = \overline{M_2M} \quad \text{ja} \quad \overline{M_2M} = \overline{M_3M}$$

(me arvestame, arusaadavalt, kaugusi väljendavate sirglõikude absoluutväärtusi).

Valemi (8) põhjal kirjutame:

$$\overline{M_1M} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$\overline{M_2M} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$$

$$\overline{M_3M} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}$$

Nii saame kaks võrrandit tundmatutega x ja y :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2},$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}.$$

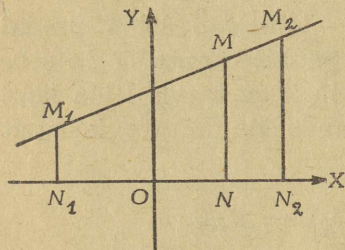
Nende võrrandite lahendena leiame: $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{4}{3}$.

Järelikult otsitav punkt on $P(\frac{3}{8}, -\frac{4}{3})$.

Märkus. Otsitav punkt on punkte M_1 , M_2 ja M_3 läbiva ringjoone keskpunkt.

§ 6. Sirglõigu jaotamine antud suhtes. Selle all mõistetakse järgmist ülesannet:

On antud kaks punkti: $M_1(x_1, y_1)$ ja $M_2(x_2, y_2)$ (joonis 19). Oletame, et kolmas punkt M , mille asend (s. o. koordinaadid) ei ole teada, jaotab sirglõigu M_1M_2 nii, et suhe $\frac{M_1M}{MM_2}$ on võrdne antud arvuga λ .



Joonis 19.

On tarvis leida punkt M , s. o. tema koordinaadid x, y .

Elementargeomeetriast teame, et sirglõigud M_1M , MM_2 , N_1N ja NN_2 on võrdelised. Seepärast võime kirjutada:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2} = \lambda$$

(tingimuse põhjal).

Valemi (5) põhjal on:

$$N_1N = x - x_1 \quad \text{ja} \quad NN_2 = x_2 - x.$$

Siit järgneb:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

millest leiame punkti M abstsissi x :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (9)$$

Analoogiliselt leiame punkti M ordinaadi y :

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (10)$$

Eri juhul, kui punkt M jagab sirglõigu M_1M_2 pooleks, siis $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 1$, ja valemid (9) ja (10) esinevad siis kujul

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (9^*) \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (10^*)$$

Näide 1. Leida punkt $M(x, y)$, mis jagab punktide $M_1(2, 3)$ ja $M_2(3, -3)$ vahelise sirglõigu suhtes $\frac{2}{5}$.

Lahendus. Antud juhul $\lambda = \frac{2}{5}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_1 = 3$, $y_2 = -3$. Valemitest (9) ja (10) saame:

$$x = \frac{2 + \frac{2}{5} \cdot 3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{16}{7}, \quad y = \frac{3 + \frac{2}{5} \cdot (-3)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{9}{7}.$$

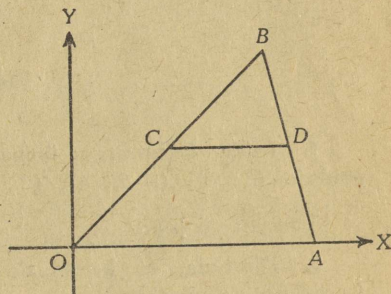
Niisiis otsitav punkt on $M\left(\frac{16}{7}, \frac{9}{7}\right)$.

Näide 2. Tõestada, et sirglõik, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte, on paralleelne kolmanda küljega.

Lahendus. Asetame koordinaatteljed nii, et koordinaatide algus ühtiks kolmnurga ühe tipuga ja telg OX kolmnurga selle tipu lähisküljega (joonis 20). Kolmnurga tipudeks on punktid $O(0, 0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_2, y_2)$. Sirglõik CD ühendab külgede OB ja AB keskpunkte. On tarvis tõestada, et CD on paralleelne sirgega OA ehk teljega OX . Kuid selleks on tarvis, et punktide C ja D ordinaadid oleksid võrdsed. Punktide C ja D ordinaadid y_C ja y_D määratakse valemi (10*) järgi:

$$y_C = \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}, \quad y_D = \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

Järelikult $y_C = y_D$, s. o. sirge CD on paralleelne küljega OA .



Joonis 20.

Näide 3. Kahele materiaalsele punktile $M_1(x_1, y_1)$ ja $M_2(x_2, y_2)$, millede massid on vastavalt m_1 ja m_2 , mõjub raskustung. Leida selle süsteemi raskuskeskme koordinaadid.

Lahendus. Nagu mehaanikast on teada, asub raskuskese sirglõigu M_1M_2 niisuguses punktis $N(x, y)$, mis jagab selle sirglõigu osadeks, mis on pöördvõrdelised punktidele M_1 ja M_2 mõjuvate tungidega, s. o. suhtes $\frac{m_2g}{m_1g} = \frac{m_2}{m_1}$, kus g on raskuskiirendus. Arvestades seda asjaolu, saame:

$$x_1 = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad y = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1}y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

ehk

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Harjutusi.

1. Leida kolmnurga ümbermõõt, kui kolmnurga tippudeks on punktid $(3, 4)$, $(-2, 4)$, $(2, 2)$.

Vastus: $5 + 3\sqrt{5}$.

2. Tõestada, et kolmnurk tippudega $(-3, -2)$, $(1, 4)$ ja $(-5, 0)$, on võrdhaarne.

3. Näidata, et kolmnurk tippudega $(-1, 1)$, $(1, 3)$ ja $(-\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ on võrdkülgne.

4. Näidata, et kolmnurk, mille tipud asuvad punktides $(1, 2)$, $(3, 4)$ ja $(-1, 4)$, on täisnurkne.

5. Näidata, et punktid $(8, 0)$, $(0, -6)$, $(7, -7)$ ja $(1, 1)$ asuvad ringjoonel, mille keskpunktiks on punkt $(4, -3)$. Millega võrdub selle ringjoone raadius?

6. Leida punkt, mis on ühekaugusel punktidest $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 2)$.

$$\text{Vastus: } \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

7. Leida punkt, mis on ühekaugusel punktidest $(-4, 3)$, $(4, 2)$ ja $(1, -1)$.

$$\text{Vastus: } \left(\frac{1}{18}, 2\frac{17}{18}\right).$$

8. Leida punkte $(0, 0)$, $(4, 2)$ ja $(6, 4)$ läbiva ringjoone keskpunkt.

$$\text{Vastus: } (-3, 11).$$

9. Leida teljel OX punkt, mis on ühekaugusel punktidest $(0, 5)$ ja $(4, 2)$.

$$\text{Vastus: } \left(-\frac{5}{8}, 0\right).$$

10. Leida punktid, millede kaugused punktist $(1, 3)$ on 5 pikkusühikut ja teljest OY 4 pikkusühikut.

$$\text{Vastus: } (4, 7), (4, -1), (-4, 3).$$

11. Leida punkt, mis jaotab punktide $P_1(-2, 3)$ ja $P_2(4, 6)$ vahelise sirglõigu suhtes $2:3$.

$$\text{Vastus: } \left(\frac{2}{5}, 4\frac{1}{5}\right).$$

12. Leida punktid, mis jaotavad punktide $P_1(-3, -7)$ ja $P_2(10, 2)$ vahelise sirglõigu kolmeks võrdseks osaks.

$$\text{Vastus: } \left(1\frac{1}{3}, -4\right), \left(5\frac{2}{3}, -1\right).$$

13. Sirglõigu keskpunktiks on punkt $(-1, 2)$ ja üheks otspunkti punkt $(2, 5)$. Leida sirglõigu teise otspunkti koordinaadid.

$$\text{Vastus: } (-4, -1).$$

14. Leida mediaanide pikkused kolmnurgal, mille tipud asuvad punktides $(3, 4)$, $(-1, 1)$ ja $(0, -3)$.

$$\text{Vastus: } \frac{5}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, \frac{1}{2}\sqrt{149}.$$

15. Tõestada, et igas täisnurkses kolmnurgas pikkus mediaanil, mis ühendab täisnurga tippu hüpotenuusi keskpunktiga, on pool hüpotenuusi pikkusest.

16. Trapetsil $OABC$ on paralleelküljed OA ja CB risti küljega OC . Külje AB keskpunktiks on punkt D . Tõestada, et $OD = CD$.

17. Punktidesse $A(4, 6)$ ja $B(-2, 7)$ on asetatud koormad suurusena vastavalt 60 g ja 40 g. Leida selle süsteemi raskuskeskme koordinaadid.

Vastus: $(1, 6; 6, 4)$.

18. Kolme punkti $A(-1, 0)$, $B(-2, 4)$ ja $C(4, -5)$ on asetatud koormad suurusena vastavalt 30 g, 50 g ja 70 g. Leida selle süsteemi raskuskeskese.

Vastus: $(1, -1)$.

J u h i s. Algul leida raskuskeske M süsteemil, mis koosneb mingist kahest antud punktist, näiteks A ja B , ja siis raskuskeske punktide süsteemil, mis koosneb punktidest M ja C .

19. Tõestada, et kui süsteem koosneb n punktist $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, millede on koondatud vastavalt massid m_1, m_2, \dots, m_n , siis selle süsteemi raskuskeskme koordinaadid määratakse järgmiste avaldistega:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

20. Teades, et ühtlase kolmnurkse plaadi raskuskeske asub mediaanide lõikepunktis, väljendada raskuskeskme koordinaadid kolmnurga tippude koordinaatide (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) kaudu.

$$\text{Vastus: } x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

II peatük k.

Sirgjoon.

§ 7. Sirgjoone võrrandi mõiste. Sirgjoone võrrand tõusuga (nurgateguriga). Eelmises peatükis vaadeldi küsimust, kuidas määrata punkti asendit tasapinnal arvude abil. Peale selle lahendati seal mõned lihtsamad ülesanded, millede lahendamine toetus eranditult nimetatud põhimõtte rakendamisele.

Kuid koordinaatide meetodit ei rakendata ainult üksikute punktide asendi määramisega seotud küsmustes. Selgub, et selle põhimõtte — määrata punkti asend tasapinnal koordinaatide abil — laiendamine annab võimaluse teostada algebra meetodite abil ka punktist keerulisemate geomeetriste kujundite — joonte tundmaõppimist. Sellele ülesandele asume alates lihtsaimast joonest, s. o. sirgest. Sirgjoone asend tasapinnal on täielikult määratav kahe sellel sirgel asuva punkti kaudu: kahte antud punkti läbib ainult üks sirge. Kuid sirge asendit võib kahe sellel sirgel asuva punkti asemel määrata mõne teise kahe andmega. Koordinaadistikus sirge asendi määramise mitmesuguste viiside hulgas osutub väga sobivaks sirge tundmaõppimise otstarbel laialt rakendatav sirge asendi määramine järgmistel andmetel:

- 1) sirge lõikab ära teljel OY sirglõigu b ,
- 2) moodustab teljega OX nurga φ .

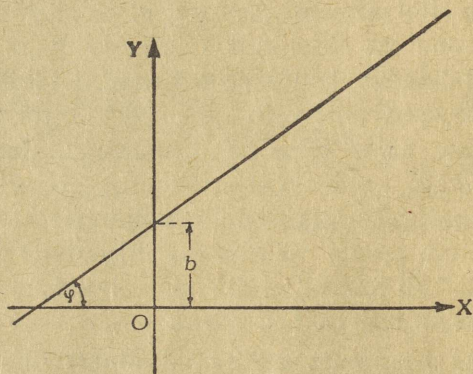
Need kaks tingimust määravad ainult ühe sirge. Sest sirgeid, mis lõikavad ära teljel OY sirglõigu b , võib joonestada kuipalju tahes, aga neist ainult üks moodustab teljega OX nurga φ .

Samuti võib joonestada kuipalju tahes sirgeid, mis moodustavad teljega OX nurga φ — kõik need sirged on üksteisega paralleelsed. Kuid neist sirgetest ainult üks lõikab ära teljel OY sirglõigu, mis on võrdne b -ga.

Olgu meil antud sirge, mis lõikab teljel OY b -ga võrdse sirglõigu ja mille tõusunurk telje OX suhtes on φ (joonis 21). Seejuures sirge tõusunurgaks φ telje OX suhtes (ehk lihtsalt tõusunurgaks φ) loeme nurka, mis tekib telje OX positiivse suuna pöörlemisel vastu kellaosuti liikumise suunda kuni ühtimiseni sirgega.

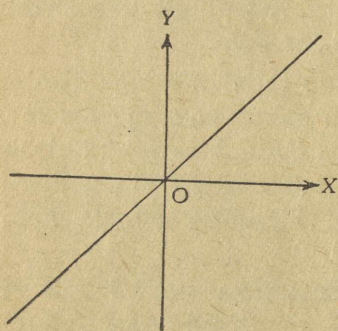
Kujutleme endile sirget moodustatuna punkti pideval liikumisel. Selle punkti liikumisel muutuvad tema koordinaadid, omandades punkti iga kindla asendi puhul kindlaid

arvulisi väärtusi. Tähistame selle liikuva punkti $M(x, y)$. Järelikult koordinaadid (x, y) muutuvad punkti M liikumisel mööda sirget. Kuna punkt liigub, jäädes kogu aeg sirgele, s. o. liigub geomeetriliste tingimustega määratud seaduse järgi, siis ka koordinaadid (x, y) peavad muutuma kindla seaduse järgi.



Joonis 21.

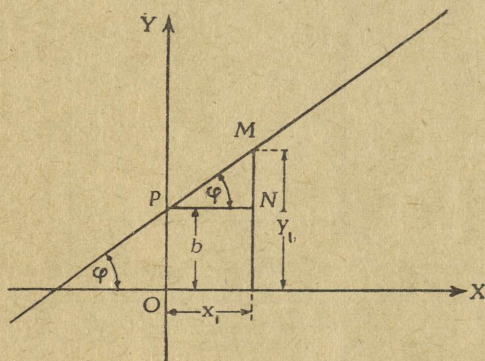
Näiteks kui antud sirge on koordinaattelgede-vahelise nurga XOY poolitaja (joonis 22), siis nurgapoolitajal liikuva punkti M koordinaadid x ja y muutuvad, kuid punkti M iga asendi puhul abstsiss x ja ordinaat y on võrdsed.



Joonis 22.

Kui ühele koordinaadile, näiteks abstsissile x , anda mingi arvuline väärtus, siis ordinaat y omandab juba kindla arvilise väärtuse, mis vastab vabalt võetud abstsissi x väärtusele, ja nimelt niisuguse, mis vastab punkti M asendile sirgel sel momendil (s. o. valitud x väärtusel).

Järelikult y -i muutumine sõltub x -i muutumisest või ümberpöördult, kui muudame vabalt ordinaadi y väärtust, siis x -i muutumine sõltub y -i muutumisest. Seega sirgel liikuva punkti M muutuvad ehk, nagu neid nimetame edaspidi, jooksvad koordinaadid (x, y) peavad olema kindlakujuliselt vastastikku seotud. Et kindlaks määrata nimetatud vastastikust seost, vaatleme punkti M mõnda asendit sirgel. Olgu sel puhul koordinaatide (x, y) arvulisteks väärtusteks



Joonis 23.

(x_1, y_1) (joonis 23). Täisnurksest kolmnurgast PMN saame:

$$NM = PN \operatorname{tg} \varphi$$

ehk, kuna $NM = y_1 - b$ ja $PN = x_1$,

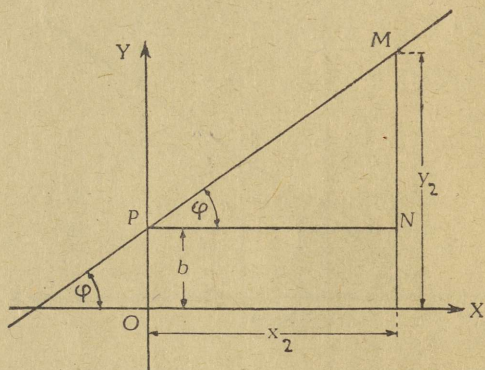
$$y_1 - b = kx_1, \quad (1)$$

kus $k = \operatorname{tg} \varphi$.

Võtame punktile M teise asendi. Olgu selles uues asendis punkti M koordinaatide (x, y) väärtusteks (x_2, y_2) . Joonisest 24 saame seose

$$y_2 - b = kx_2. \quad (2)$$

Vaadeldes võrdusi (1) ja (2), näeme, et jooksvate koordinaatide (x, y) arvuliste väärtuste seosed on mõlemal juhul ühe ja sama kujulised. Kui võtaksime punktile M veel kolmanda, neljanda jne. asendi, siis seos punkti koordinaatide arvuliste väärtuste vahel säilitaks oma kuju. Sellepärast selle seose kindlaks määramiseks, mis on üks ja sama sirge punkti M iga asendi puhul, oleks tegelikult olnud küllaldane vaadelda punkti M ainult ühte vabalt valitud asendit meie



Joonis 24.

sirgel. Sel teel saadav seos oleks üldiselt kehtiv punkti M mistahes asendite puhul, s. o. üldiselt kehtiv jooksvate koordinaatide (x, y) kõigi arvuliste väärtuste puhul. Seega meie arutlused võib kokku võtta järgmiselt. Võtame sirgel liikuvale punktile M mingi vaba asendi (ehk, mis on sama, võtame sirgel mingi punkti M). Tähistame selle punkti koordinaadid (x, y) . Arvestades geomeetrilisi andmeid, mis määravad sirge, määrame kindlaks seose x -i ja y -i vahel. Antud juhul leiame:

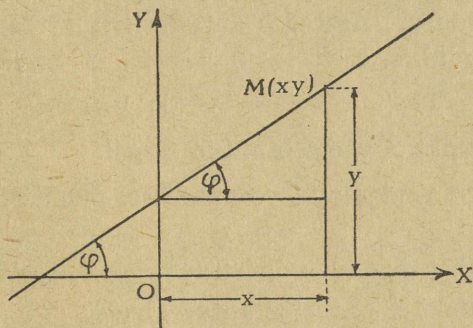
$$y - b = kx$$

ehk

$$y = kx + b. \quad (3)$$

Kuna punkt $M(x, y)$ sirgel on võetud vabalt, siis kõik selle punkti suhtes öeldu jääb kehtivaks selle sirge iga teise punkti kohta, s. o. seost (3) peavad rahuldama antud sirge mistahes punkti koordinaadid.

Öeldust järgneb, et kui võtame antud sirgel kindla punkti ja asetame selle punkti koordinaadid jooksvate koordinaatide asemele seosesse (3), siis see seos peab muutuma arvuliseks samasuseks.



Joonis 25.

Võtame nüüd punkti väljaspool sirget. Kui võtta, kasutades joonist 25, kaks niisugust punkti — üks sirgest kõrgemal, teine madalamal, siis lihtsa ehituse põhjal on kerge veenduda, et kõrgema punkti puhul $\frac{y-b}{x} > k$, aga madalama punkti puhul $\frac{y-b}{x} < k$. See näitab, et antud sirgel mitteasetsevate punktide koordinaadid ei rahulda võrrandit (3). Seost (3) nimetatakse sirge võrrandiks.

Seega kui punkti koordinaadid rahuldavad sirge võrrandit, siis see punkt asetseb antud sirgel. Kui nad aga ei rahulda sirge võrrandit, siis punkt ei asetse antud sirgel.

Tähendab, selleks et määrata, kas antud punkt asetseb antud sirgel või ei, tuleb sirge võrrandis jooksivad koordinaadid asendada antud punkti koordinaatidega. Kui võrrand muutub samasuseks, siis punkt asetseb sirgel; kui aga asendamine viib võrratusele, siis punkt ei asetse sirgel.

N ä i d e. On antud sirge $y = 2x + 3$ ja punktid $A(-1, 1)$, $B(-3, 4)$, $C(2, 7)$, $D(0, 2)$, $O(0, 0)$. Määrata, missugused neist punktidest asetsevad antud sirgel.

L a h e n d u s. Asetades antud sirge võrrandisse punkti A koordinaadid, s. o. võttes $x = -1$, $y = 1$, saame:

$$1 = 2 \cdot (-1) + 3; 1 = -2 + 3; 1 = 1 - \text{samusus.}$$

Järelikult punkt A asetseb antud sirgel.

Asetades antud sirge võrrandisse punkti B koordinaadid, saame:

$$4 = 2 \cdot (-3) + 3; 4 = -6 + 3; 4 = -3 - \text{ebaõige võrdus.}$$

Järelikult punkt B ei asetse antud sirgel.

Uurides samuti punkte C , D ja O , selgub, et antud sirgel asetseb punkt C , aga punktid D ja O ei asetse sel sirgel.

Pöördume nüüd tagasi võrrandi (3) juurde. Sellest võrrandist (3) nähtub, et võrrand (1) on x ja y suhtes esimese astmeline, 2) sisaldab jooksivaid koordinaate x ja y , mis on muutuvad suurused ja 3) sisaldab suurusi k ja b , mis määravad sirge asendi tasapinnal valitud koordinaatide süsteemi XOY suhtes, kusjuures k ja b on jäävad (konstantsed) suurused.

Igale kindlale sirgele vastavad suuruste k ja b kindlad väärtused ja ümberpöörduvalt, igale k ja b kindlale väärtuste paarile vastab kindel sirge. Suurused k ja b kannavad sirge võrrandi (3) parameetrite nimetust. Parameetrit $k = \operatorname{tg} \varphi$ nimetatakse sirge tõusuks ehk nurgateguriks ja parameetrit b algkoordinaadiks. Võrrandit (3)

nimetatakse sirge võrrandiks tõesuga ehk nurgateguriga. Kui sirge tõus k on positiivne, siis sirge tõusunurk φ on terav, sest teravnurga tangens on positiivne arv; negatiivse k puhul sirge tõusunurk φ on nüri.

Kirjeldatust on näha, et sirge võrrandi määravad parameetrite k ja b väärtused ja et leida sirge võrrand — see tähendab leida võrrandi parameetrite väärtused.

Näide 1. Sirge algordinaat on -3 ja sirge moodustab teljega OX nurga 30° . Leida sirge võrrand.

Lahendus. Tingimuse kohaselt on meil: $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $b = -3$. Võrrandis (3) on siis $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $b = -3$ ning sirge võrrand on $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 3$.

Näide 2. Leida punkti $(2, -5)$ läbiva sirge võrrand, kui sirge moodustab teljega OX nurga 45° .

Lahendus. Sirge võrrandil on kuju: $y = kx + b$. Leida sirge võrrand — see tähendab leida parameetrite k ja b väärtused, s. o. leida kaks tundmatut ülesande andmete najal.

Kuna ülesandes on öeldud, et sirge moodustab teljega OX nurga 45° , siis saame esimese võrrandi:

$$k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1,$$

mis antud juhul osutub juba lahendatuks.

Peale selle on teada, et otsitav sirge läbib punkti $(2, -5)$; see tähendab, et koordinaadid $(2, -5)$ peavad rahuldama otsitavat võrrandit, s. o. peab olema õige võrdus

$$-5 = 2k + b.$$

Nii saime võrrandsüsteemi:

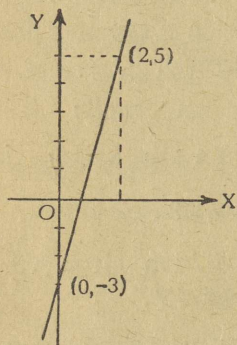
$$\left. \begin{array}{l} k = 1, \\ -5 = 2k + b \end{array} \right\}$$

Võrrandsüsteemi lahendamine annab $k = 1$, $b = -7$.
Seega otsitav võrrand on: $y = x - 7$.

M ä r k u s. Selle asemel, et öelda „leida sirge võrrand“, öeldakse õige sageli „leida sirge“.

N ä i d e 3. Joonestada sirge, mille võrrand on

$$y = 4x - 3.$$



Joonis 26.

L a h e n d u s. Võrrandist nähtub, et algordinaat on -3 , s. o. sirge läbib punkti $(0, -3)$. Selle asemel, et ehitada nurk, mille tangens oleks 4 või leida see nurk tabelite järgi (mis käesoleval juhul annaks vaid nurga ligikaudse väärtuse), on lihtsam määrata sirge ehitamise otstarbel veel üks punkt, mida läbib sirge. Selleks anname abstsissile x mõne väärtuse, näiteks 2 , ja määrame ordinaadi y vastava väärtuse:

$$y = 4 \cdot 2 - 3 = 5.$$

Ehitades nüüd punktid $(0, -3)$ ja $(2, 5)$, joonestame läbi nende sirge (joonis 26).

§ 8. Koordinaattelgedega paralleelsete sirgete ja koordinaattelgede võrrandid. Nagu oli selgitatud § 7-ndas, olenevalt sirge asendist tasapinnal, nurgateguriga sirge võrrandi

$$y = kx + b$$

parameetrid k ja b omavad neid või teisi arvulisi väärtusi. Vaatleme eri juhul teljega OX paralleelset sirget, mis asetseb teljest kaugusel b (joonis 27), ja määrame selle sirge võrrandi, kusjuures b loeme positiivseks, kui sirge asetseb

teljest OX kõrgemal ja negatiivseks, kui sirge on teljest OX madalamal.

On silmanähtav, et sellel juhul sirge lõikab ära teljel OY sirglõigu b ; seega algordinaat on b . Teljega OX paralleelne sirge moodustab selle teljega nurga 0° . Seepärast $k = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$ ja võrrand (3) omandab kuju:

$$y = 0 \cdot x + b$$

ehk lihtsamalt:

$$y = b. \quad (4)$$

Järelikult võrrand (4) on lühendatud kuju võrrandist $y = 0 \cdot x + b$, ja x -i sisaldava liikme puudumine tekkis selle tagajärjel, et k muutus nulliks. Jooksev koordinaat x on muutuv suurus ja sirge erinevaile punktidele vastavad erinevad x -i väärtused. Nii näiteks punktis M_1 abstsiss $x = x_1$, punktis M_2 abstsiss $x = x_2$ ja eri juhul punktis O abstsiss $x = 0$. Võrrand (4) näitab, et x -i kõikide väärtuste juures ordinaat y jääb võrdseks b -ga ja see iseloomustabki sirget, mis on paralleelne teljega OX ja on sellest teljest kaugusel b .

Seega teljega OX paralleelse ja sellest teljest kaugusel b asetseva sirge võrrand omab kuju:

$$y = b. \quad (5)$$

Analoogiliselt teljega OY paralleelse ja sellest teljest kaugusel l asetseva sirge võrrand omab kuju:

$$x = l, \quad (6)$$

s. o. $x = l$ ordinaadi y kõikide väärtuste juures (joonis 28), mis on iseloomustav teljega OY paralleelse sirge kohta. Teljega OY paralleelse sirge võrrandit ei ole võimalik esitada kujul (3), sest käesoleval juhul $\varphi = 90^\circ$ ja tõusu $k = \operatorname{tg} \varphi$ ei ole olemas, ei ole olemas ka sirglõiku b .

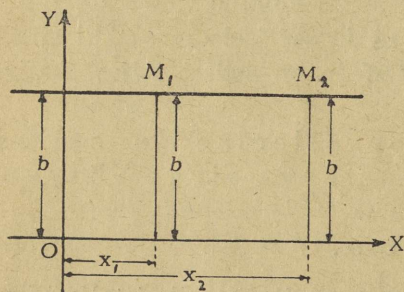
Kui võrrandis (4) ja (6) hakkame vähendama parameetrite b ja l absoluutväärtusi, siis saame sirgeid, mis on paralleelsed telgedega OX ja OY ja millede kaugused neist telgedest muutuvad ikka ja ikka väiksemaks. Lõpuks, kui $b = 0$ ja $l = 0$, need sirged ühtivad vastavalt telgedega OX ja OY . Niisiis telje OX enda võrrand on

$$y = 0, \quad (7)$$

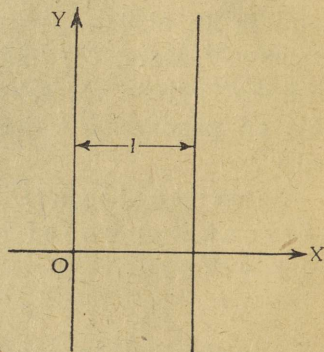
ja telje OY võrrand on

$$x = 0. \quad (8)$$

Võrrand (7) näitab, et abstsissi x kõikide väärtuste puhul ordinaat y jääb võrdseks nulliga. Aga see ongi telje OX punktide omadus.



Joonis 27.



Joonis 28.

Võrrand (8) näitab, et ordinaadi y kõikide väärtuste puhul abstsiss x jääb võrdseks nulliga. See ongi telje OY punktide omadus.

§ 9. Sirge võrrandi üldkuju ja selle eri juhud. §§-des 7 ja 8 vaatlesime sirge kõiki võimalikke asendeid valitud koordinaatide süsteemi XOY suhtes ja tegime kindlaks, et

iga sirge väljendub esimese astme võrrandiga jooksvate koordinaatide (x, y) suhtes. Näitame nüüd, et on maksev ka ümberpööratud lause:

Iga jooksvate koordinaatide suhtes esimese astme võrrand

$$Ax + By + C = 0, \quad (9)$$

kus A, B ja C on konstantsed kordajad, väljendab sirgjoont (s. o. punktid, millede koordinaadid rahuldavad seda võrrandit, moodustavad sirge).

Tõepoolest, eeldades, et $B \neq 0$ ¹ ja lahendades võrrandi (9) y suhtes, saame:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (9')$$

Tähistades $-\frac{C}{B} = b$ ja $\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \varphi = k$, mis alati on võimalik, sest iga arvu võime vaadelda mingisuguse nurga tangensina, võime määrata nurga φ ja ehitada sirge, mis moodustab teljega OX nurga φ ja mille algordinaat on võrdne b -ga.

Koostades öeldu põhjal selle sirge võrrandi, saame:

$$y = kx + b,$$

s. o. võrrandi (3), mis väljendab sirgjoont. Järelikult võrrand (9') või sellega identne võrrand (9) väljendab sirgjoont, kui $B \neq 0$.

Vaatleme nüüd juhtu, kui $B = 0$. Sel juhul võrrand (9) omandab kuju: $Ax + C = 0$ ehk $x = -\frac{C}{A}$.

Tähistades $-\frac{C}{A} = l$, saame võrrandi

$$x = l, \quad (6)$$

¹ See tingimus on tarvilik, sest võrrandi (9) lahendamisel y suhtes tuleb jagada B -ga, nulliga aga jagada ei saa.

s. o., kooskõlas § 8-ndaga, teljega OY paralleelse sirge võrrandi. Seega võrrandit (9) võib kordajate igasuguste väärtuste puhul teisendada mõneks meie poolt vaadeldud sirge võrrandiks. Järelikult iga jooksvate koordinaatide x ja y suhtes esimese astme võrrand väljendab sirgjoont.

Võrrandit (9) nimetatakse üldkujuliseks sirge võrrandiks.

Vaatleme nüüd üksikasjalisemalt võrrandi (9) mõnd eri juhtu.

$$\text{I.} \quad C = 0, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Võrrand (9) omandab kuju:

$$Ax + By = 0. \quad (10)$$

Punkti $(0, 0)$, s. o. koordinaatide alguse koordinaadid rahuldavad võrrandit (10). Järelikult kui sirge võrrandis puudub vaba liige, siis sirge läbib koordinaatide algust.

$$\text{II.} \quad A = 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0.$$

Võrrand (9) omandab kuju:

$$By + C = 0 \quad \text{ehk}$$

$$y = -\frac{C}{B}. \quad (11)$$

Tähistades $-\frac{C}{B} = b$, saame:

$$y = b, \quad (4)$$

see aga on teljega OX paralleelse sirge võrrand (§ 8).

Niisiis kui $A = 0$, võrrand (9) väljendab sirget, mis on paralleelne teljega OX .

III. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$. Nagu juba nägime, omandab võrrand (9) sel juhul kuju: $Ax + C = 0$ ehk $x = -\frac{C}{A}$ ehk, lõpuks,

$$x = l, \quad (6)$$

ja väljendab sirget, mis on paralleelne teljega OY .

Niisiis kui $B = 0$, võrrand (9) väljendab sirget, mis on paralleelne teljega OY .

Kokku võttes, kui võrrandis puudub x -i sisaldav liige, siis sirge on paralleelne teljega OX . Kui võrrandis puudub y -t sisaldav liige, siis sirge on paralleelne teljega OY .

IV. $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$.

Võrrand (9) omandab kuju: $By = 0$ ehk

$$y = 0, \quad (7)$$

mis, nagu nägime § 8-ndas, on telje OX võrrandiks.

V. $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$.

Võrrand (9) omandab kuju: $Ax = 0$ ehk

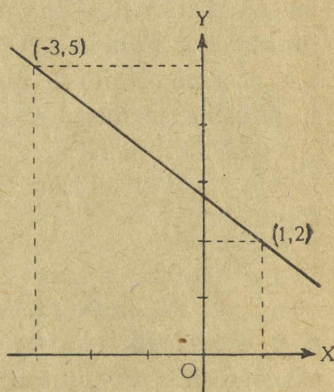
$$x = 0, \quad (8)$$

mis, nagu nägime § 8-ndas, on telje OY võrrandiks.

Näide 1. Sirge $3x + 5y = 0$ läbib koordinaatide algust, sest antud võrrandis puudub vaba liige.

Sirge $2x - 5 = 0$ on paralleelne teljega OY , sest antud võrrandis puudub ordinaati y sisaldav liige.

Võrrandit $3x = 0$ võib kirjutada kujul $x = 0$, mis on telje OY võrrand.



Joonis 29.

Näide 2. Ehitada sirge, mis on antud võrrandiga

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Lahendus. Leiame esiteks kaks punkti, mis asetsevad sel sirgel. Selleks anname abstsissile x kaks mingisugust arvulist väärtust ja leiame ordinaadi y vastavad väärtused. Olgu näiteks $x = 1$. Siis ordinaadi y väärtus on $y = 2$. Võtame nüüd $x = -3$, saame $y = 5$. Nii leidsime kaks punkti $(1, 2)$ ja $(-3, 5)$, mis asetsevad ehitataval sirgel. Ehitades need punktid, joonestame läbi nende sirge (joonis 29).

§ 10. **Lineaarfunktsioon.** Õppijad on tutvunud funktsiooni mõistega üksikasjaliselt juba algebra ja trigonomeetria õppimisel. Tuletame siin meelde funktsiooni definitiooni. Kui ühe suuruse muutumine sõltub teise suuruse muutumisest, siis esimest nimetatakse funktsiooniks ehk sõltuvaks muutujaks ja teist argumentiks ehk sõltumatuks muutujaks.

Kui võrrandis

$$y = kx + b \tag{3}$$

muutuvat abstsissi x vaadelda kui argumenti, siis y on x -i funktsioon. Funktsiooni kujul (3) nimetatakse lineaarseks, sest et geomeetriliselt teda kujutab sirge. Paljud mehaanika ja füüsika seadused väljenduvad lineaarfunktsiooni kaudu. Nii näiteks punkti sirgjoonelisel ja ühtlasel liikumisel aega ja aja t vältel läbitud tee pikkust siduv seadus on lineaarfunktsioon:

$$s = s_0 + vt,$$

kus s_0 on tee, mille punkt läbis aja arvestamise momendini, s. o. momendiks $t = 0$, v aga on ühtlase liikumise kiirus. Geomeetriliselt kujutab ühtlast liikumist sirge, mille algordinaat on s_0 , aga nurgategur ehk tõus k on arv, mis mõõ-

dab kiirust v . Selle sirge abstsissid näitavad möödunud aega t , aga ordinaadid, vastavalt t väärtusele — läbitud teed.

Eri juhul, kui $b = 0$, lineaarfunktsioon omandab kuju:

$$y = kx$$

ja väljendab võrdelisuse (proportsionaalsuse) seadust. Geomeetriselt kujutab võrrandit $y = kx$ koordinaatide algust läbiv sirgjoon. Sellepärast kõiki seadusi, mis väljendavad võrdelisust, kujutavad koordinaatide algust läbivad sirgjooned.

Nii näiteks Newtoni teist seadust: $f = mw$, kus f on materiaalsele punktile mõjuv tung, m — punkti mass ja w kiirendus, mida tekitab tung, kujutab geomeetriselt koordinaatide algust läbiv sirge. Selle sirge punktide abstsissid annavad kiirenduse w väärtused, ordinaadid aga tungi f vastavad väärtused. Selle sirge tõus on arv, mis mõõdab massi m .

§ 11. Antud punkti läbiva sirge võrrand (sirgete kimbu võrrand). Olgu antud punkt $M(x_1, y_1)$. On tarvis leida seda punkti läbiva sirge võrrand.

Olgu otsitav sirge

$$y = kx + b, \quad (3)$$

kus k ja b on määramisele tulevad kordajad (parameetrid).

Ülesanne sisaldab ainult ühe tingimuse — et sirge läbiks antud punkti, aga üks tingimus ei võimalda kahe tundmatu kordaja määramist. On selge, et antud juhul võime määrata ainult ühe parameetri teise kaudu ja nii siis saada võrrandi, mis sisaldab vabalt valitava kordaja, s. o. kordaja, mis võib omandada ükskõik missuguse arvulise väärtuse. Siit järgneb, et saame võrrandi, mis väljendab mitte ühte kindlat sirget, vaid lõpmatut hulka sirgeid. See asjaolu ei ole vast-

olus ülesandega, sest ühte antud punkti läbib lõpmatu hulk sirgeid.

Asume otsitava võrrandi kuju leidmisele.

Kuna punkt $M(x_1, y_1)$ asetseb otsitaval sirgel, siis koordinaadid (x_1, y_1) peavad rahuldama võrrandit (3), s. o.

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Avaldame sellest võrdusest algordinaadi b tõusu k kaudu: $b = y_1 - kx_1$. Asetame leitud algordinaadi b avaldise võrrandisse (3), saame $y = kx + y_1 - kx_1$ ehk

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (12)$$

Selles võrrandis tõusu k suurus jääb määramatuks ja seepärast võib omandada mitmesuguseid väärtusi. k mitmesuguste väärtuste puhul saame erinevate sirgete võrrandid. Kõik need sirged läbivad punkti $M(x_1, y_1)$, sest (x_1, y_1) asetamine võrrandisse (12) jooksvate koordinaatide asemele annab samasuse $0 = 0$ igasuguste k väärtuste puhul. Seepärast öeldakse, et võrrand (12) on antud punkti läbivate sirgete kimbu võrrand.

Kui võtame otsitava sirge võrrandi üldkujul

$$Ax + By + C = 0, \quad (9)$$

siis pärast koordinaatide (x_1, y_1) asetamist saame võrduse

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Määrame vaba liikme C kordajate A ja B kaudu:

$$C = Ax_1 - By_1.$$

Asetades saadud C väärtuse võrrandisse (9), saame:

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$$

ehk

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (13)$$

Vabalt võetud kordajate A ja B igasuguste väärtuste puhul koordinaatide (x_1, y_1) asetamine muudab võrrandi (13) samasuseks $0 = 0$, s. o. võrrand (13) on sirgete kimbu võrrand.

Näide. Leida punkti $(-3, 5)$ läbiva sirgete kimbu võrrand.

Lahendus. Võttes võrrandis (12) $x_1 = -3$, $y_1 = 5$, saame:

$$y - 5 = k(x + 3),$$

s. o. otsitava kimbu võrrandi, milles k jääb määramatuks.

§ 12. Kahte antud punkti läbiva sirge võrrand. Olgu antud kaks punkti: $M_1(x_1, y_1)$ ja $M_2(x_2, y_2)$. On tarvis koostada neid kahte punkti läbiva sirge võrrand.

Koostame selleks kõigepealt ühte neist kahest punktist, näiteks punkti $M_1(x_1, y_1)$ läbiva sirge võrrand. Selle võrrandi kuju on:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (12)$$

Otsitav sirge on üheks sirgeks kimbust (12), nimelt selleks sirgeks, mis läbib punkti $M_2(x_2, y_2)$, see tähendab, et otsitava võrrandi jaoks peab k suurus võrrandis (12) omama kindlat väärtust, ja nimelt niisugust, mille puhul võrrandit (12) rahuldaksid punkti M_2 koordinaadid (x_2, y_2) . Asetades võrrandi (12) jooksvate koordinaatide asemele (x_2, y_2) väärtused, leiame k otsitava väärtuse:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (13)$$

Järelikult otsitavaks võrrandiks on võrrand

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ehk

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (14)$$

Näide. Leida punkte $(1, 2)$ ja $(-3, 5)$ läbiva sirge võrrand.

Lahendus. Võttes võrrandis (14) $x_1 = 1; y_1 = 2; x_2 = -3; y_2 = 5$, saame:

$$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{-3-1}$$

ehk

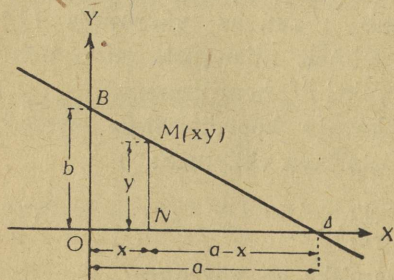
$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Et veenduda lahenduse õigsuses, on tarvis saadud võrrandi jooksivad koordinaadid asendada antud punktide koordinaatidega. Kui asendamise tulemusena saame samasuse, siis ülesanne on lahendatud õieti. Antud punktide koordinaatide asendamise tulemusena leiame:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 11 = 0 \quad \text{ehk} \quad 0 = 0, \\ 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 - 11 = 0 \quad \text{ehk} \quad 0 = 0 \end{array} \right\} \text{ samasused.}$$

Niisiis ülesanne on õigesti lahendatud.

§ 13. Sirge võrrand telglõikudes. Sirge lõikab ära koordinaattelgedel lõigud a ja b (joonis 30). Leida nende andmete järgi sirge võrrand.



Joonis 30.

Kolmnurkade NMA ja OBA sarnasusest järgneb:

$$\frac{NM}{OB} = \frac{NA}{OA}.$$

Kuna $NM = y$, $OB = b$, $NA = a - x$, $OA = a$, siis see võrre väljendub kujul:

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}$$

ehk

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (15)$$

Saadud võrrandit nimetatakse sirge võrrandiks telglõikudes.

Näide. Leida sirge võrrand, kui sirge lõikab ära teljel OX lõigu 5 ja teljel OY lõigu -3 .

Lahendus. Võttes võrrandis (15) $a = 5$, $b = -3$, saame:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$

ehk $3x - 5y - 15 = 0$.

Märkus. Võrrandit (15) võib saada eelmise paragrahvi võrrandist (14), kuna sirget, mis lõikab ära koordinaattelgedel lõigud a ja b , võib vaadelda kui sirget, mis läbib punkte $A(a, 0)$ ja $B(0, b)$ (joonis 30). Siis võrrandi (14) järgi saame:

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$$

ehk

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (15)$$

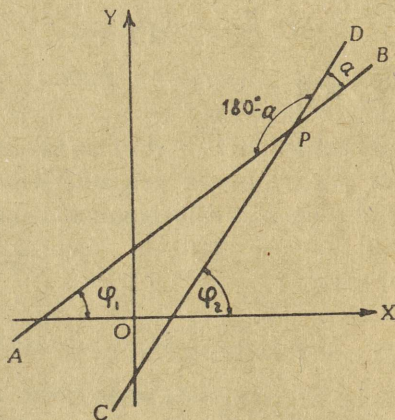
§ 14. **Nurk kahe sirge vahel.** Olgu sirged AB ja CD (joonis 31) antud võrranditega:

$$y = k_1x + b_1 \quad (AB),$$

$$y = k_2x + b_2 \quad (CD).$$

On tarvis määrata nende sirgete vaheline nurk. Need sirged, lõikudes teineteisega punktis P , moodustavad kaks nurka: terava ja nüri (välja arvatud mõlema sirge vastastikuse ristseisu juhtum, mil mõlemad nurgad on täisnurgad). Kuidas vabaneda sellest määramatusest. Selleks anname järgneva definitsiooni: sirgete CD ja AB vahelise nurga all mõistame seda nurka kahest nurgast nende sirgete vahel, mille

võrra on tarvis pöörata sirget AB positiivses suunas (s. o. vastupidiselt kellaosuti liikumise suunale), et ta ühtiks sirgega CD . Joonisel 31 see on terav nurk $\angle BPD = \alpha$. Seevastu nurgaks AB ja CD vahel on joonisel 31 nüri nurk $\angle DPA = 180^\circ - \alpha$. Nagu näeme, nurgad sirgete AB ja CD vahel ning sirgete



Joonis 31.

CD ja AB vahel ei ole üldiselt võrdsed; nad täiendavad üksteist 180° -ni. Nii on nüüd igasugune määramatus kõrvaldatud ja võime asuda sirge CD ja sirge AB vahelise nurga määramisele, lähtudes nende sirgete võrrandeist.

Oletame, et sirge AB moodustab teljega OX nurga φ_1 , aga sirge CD — nurga φ_2 . Jooniselt leiame:

$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1,$$

millest

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Kuid nagu teada (§ 7), $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$. Järelikult saame:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (16)$$

Tuletame nüüd valemi, mis määrab sirgete AB ja CD vahelise nurga tangensi. Tähistame selle nurga β -ga. Siis saame:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

ehk

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \quad (16^*)$$

Valemid (16) ja (16*) erinevad teineteisest vaid märgilt. Näeme, et nende valemite lugejais lahutatakse selle sirge tõus, mille pööramisel kuni ühtimiseni teise sirgega tekib valemi kaudu määratav nurk.

Kui ülesandes ei ole öeldud, kumb kahest nurgast tuleb leida, siis, arusaadavalt, lahutatava tõusu valik osutub vabaks.

Öeldu selgitamiseks toome näiteid.

Näide 1. Leida nurk sirgete $2x - 3y + 5 = 0$ ja $x + 2y + 2 = 0$ vahel.

Lahendus. Avaldades kummastki antud võrrandist y , saame võrrandid tõusuga:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}; \quad y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Kuna ülesandes ei ole öeldud, kas tuleb leida nurk, mida moodustab esimene sirge teisega, või ümberpöörduvalt, siis on ükskõik, kumb tõusudest võtta lahutatavaks. Niisiis võime kirjutada:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{7}{4},$$

millest $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{4}$.

Näide 2. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(-2, 0)$ ja moodustab sirgega $3x + 4y + 6 = 0$ nurga $\arctg \frac{2}{3}$.

Lahendus. Otsitava sirge leidmiseks kasutame antud punkti läbiva sirge võrrandit

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (12)$$

Antud näites $x_1 = -2$, $y_1 = 0$. Asetades need väärtused võrrandisse (12), saame:

$$y = k(x + 2).$$

Kuna antud näites kõne on nurgast, mida otsitav sirge moodustab antud sirgega, siis lahutatavaks tuleb võtta antud sirge tõus.

Antud sirge tõusu leiame selle võrrandist, millest saame tõusuna $-\frac{3}{4}$. Siis saame:

$$\frac{2}{3} = \frac{k - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + k\left(-\frac{3}{4}\right)},$$

millest $k = -\frac{1}{18}$. Järelikult otsitav võrrand on

$$y = -\frac{1}{18}(x + 2)$$

ehk

$$x + 18y + 2 = 0.$$

Kui aga oleks olnud tarvis leida punkti $(-2, 0)$ läbiva sirge võrrand, millega sirge $3x + 4y + 6 = 0$ moodustab nurga $\arctg \frac{2}{3}$, siis tõusu k määramiseks oleks meil võrrand

$$\frac{2}{3} = \frac{-\frac{3}{4} - k}{1 - \frac{3}{4}k},$$

millest $k = -\frac{17}{6}$, ja järelikult otsitav võrrand oleks

$$y = -\frac{17}{6} (x + 2)$$

ehk $17x + 6y + 34 = 0$.

§ 15. Kahe sirge paralleelsuse ja ristseisu tunnused.

Paralleelsuse tunnused. Kui sirged on paralleelsed, siis nende vaheline nurk on 0° . Sellepärast eelmise paragrahvi valemist (16) saame:

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0.$$

Kuid muid võrdub nulliga, kui lugeja on null. Seega kui sirged on paralleelsed, siis $k_2 - k_1 = 0$ ehk

$$k_1 = k_2. \quad (17)$$

Samale tulemusele jõuame, kui võtame arvesse, et paralleelsuse puhul sirged moodustavad teljega OX võrdsed nurgad. Kuid siis on sirgete tõusud võrdsed.

Oletame nüüd ümberpöörduvalt, et $k_1 = k_2$. Siis valemi (16) põhjal $\operatorname{tg} \alpha = 0$, millest leiame: $\alpha = 0^\circ$. Täheleb sirged on paralleelsed.

Niisiis kahe sirge paralleelsuse tunnuseks on nende sirgete tõusude võrdsus.

Kui sirged on antud üldkujuliste võrranditega

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

siis paralleelsuse tunnuse määramiseks väljendame sirgete tõusud võrrandite kordajate kaudu. Esimesest võrrandist, avaldades y ,

leiame: $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, ja teisest võrrandist:

$$k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Siis tingimus (17) esineb kujul

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

ehk

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (17^*)$$

Niisiis kui sirged on antud üldkujuliste võrranditega, siis nende sirgete paralleelsuse tunnuseks on jooksvate koordinaatide kordajate võrdelisus.

Ristseisu tunnus. Kui antud sirged on vastastikku risti, siis

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ,$$

millest

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \varphi_1,$$

ehk

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Järelikult

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (18)$$

ehk

$$1 + k_1 k_2 = 0. \quad (18^*)$$

Võrdus (18) näitab, et kui kaks sirget on teineteisega risti, siis ühe sirge tõus võrdub teise sirge tõusu pöördväärtsuga, mis on võetud vastasmärgiga.

Kui sirged on antud võrranditega üldkujul, siis, asendades valemis (18) $k_1 = \frac{A_1}{B_1}$ ja $k_2 = \frac{A_2}{B_2}$, saame kahe sirge ristseisu tunnuse kujul $1 + \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = 0$ ehk

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (18^{**})$$

Näide 1. Leida sirgega $3x - 5y + 6 = 0$ paralleelse ja punkti $(-2, 3)$ läbiva sirge võrrand.

Lahendus. 1-ne viis. Punkti $(-2, 3)$ läbiva sirgete kimbu võrrand [valem (12)] on $y - 3 = k(x + 2)$. Kuna otsitav sirge on paralleelne sirgega $3x - 5y + 21 = 0$,

siis selle tõus võrdub antud sirge tõusuga, s. o. võrdub $\frac{3}{5}$; võttes sirgete kimbu võrrandis $k = \frac{3}{5}$, saame otsitava võrrandi

$$y - 3 = \frac{3}{5}(x + 2)$$

ehk $3x - 5y + 21 = 0$.

2-ne viis. Kasutame antud punkti läbiva sirgete kimbu võrrandit (13):

$$A(x + 2) + B(y - 3) = 0;$$

kooskõlas tingimusega (17*) peab olema kehtiv võrdus

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-5},$$

mis leiab aset arvudega 3 ja -5 vastavalt võrdeliste A ja B väärtuste puhul — eri juhul, kui $A = 3$ ja $B = -5$. Niisiis otsitava sirge võrrandiks on

$$3(x + 2) - 5(y - 3) = 0$$

ehk

$$3x - 5y + 21 = 0.$$

Näide 2. Leida punkti (5, 3) läbiva ja sirgega $7x + 9y + 1 = 0$ risti oleva sirge võrrand.

Lahendus. 1-ne viis. Antud sirge tõus on $-\frac{7}{9}$. Järelikult, lähtudes tingimusest (18), otsitava sirge tõus on $\frac{9}{7}$. Koostades punkti (5, 3) läbiva sirgete kimbu võrrandi valemi (12) põhjal ja asendades selles $k = \frac{9}{7}$, saame otsitava võrrandi:

$$y - 3 = \frac{9}{7}(x - 5)$$

ehk $9x - 7y - 24 = 0$.

2-ne viis. Võtame antud punkti läbiva otsitava sirge võrrandi kujul (13):

$$A(x - 5) + B(y - 3) = 0.$$

Kahe sirge ristseisu tunnuse (18**) kohaselt peab kehtima võrdus

$$7A + 9B = 0$$

ehk

$$\frac{A}{9} = -\frac{B}{7}.$$

Selle tingimuse täitmiseks on küllaldane võtta

$$A = 9, \quad B = -7.$$

Niisiis leiame otsitava sirge võrrandi:

$$9(x - 5) - 7(y - 3) = 0$$

ehk

$$9x - 7y - 24 = 0.$$

§ 16. Kahe sirge lõikepunkt. On antud kaks sirget võrranditega:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

On tarvis leida nende sirgete lõikepunkti koordinaadid.

Kuna otsitav punkt asetseb mõlemal antud sirgel, siis selle punkti koordinaadid peavad rahuldama mõlemat võrrandit. Järelikult otsitava punkti koordinaatide leidmiseks tuleb lahendada antud sirgete võrranditest koosnev võrrandisüsteem x ja y suhtes.

Näide 1. Leida sirgete

$$5x - y - 7 = 0 \quad \text{ja} \quad 3x + 2y - 12 = 0 \quad \text{lõikepunkt.}$$

Lahendus. Korrutades esimese võrrandi liikmed 2-ga ja liites teise võrrandi vastavate liikmetega, saame $13x - 26 = 0$, millest $x = 2$. Asetades leitud x -i väärtuse esimesse võrrandisse, leiame: $y = 3$. Seega otsitavaks punktiks on $(2, 3)$.

Näide 2. Leida sirgete

$$3x + 4y - 2 = 0 \quad \text{ja} \quad 6x + 8y + 7 = 0 \quad \text{lõikepunkt.}$$

Lahendus. Antud võrrandite süsteemil lahendeid ei ole.

See asjaolu on geomeetriliselt kergesti seletatav: sirgete võrrandeist järgneb, et sirgete tõusud on võrdsed, s. o. meil on tegemist paralleelsete sirgetega ja sellepärast sirgetel lõikepunkti ei ole.

Harjutusi.

1. Kas sirge

$$y = 3x + 13$$

läbib punkte: a) $(5, -1)$; b) $(-4, 1)$; c) $(3, 2)$; d) $(5, 7)$;
e) $(-5, -2)$?

2. Kas sirge

$$3x - 4y + 11 = 0$$

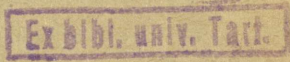
läbib punkte: a) $(3, 5)$; b) $(\frac{1}{2}, -1)$; c) $(2, -4)$; d) $(-1, 2)$?

3. Joonestada sirged, mis on antud järgmiste võrranditega:

a) $y = x$; b) $y = 2x$; c) $y = \frac{1}{2}x$; d) $y = 2x + 3$; e) $y = -x$;
f) $y = -2x$; g) $y = -\frac{1}{2}x$; h) $y = -2x - 3$; i) $2x + 3y - 4 = 0$;
j) $2x - 3y - 4 = 0$; k) $3x + 2 = 0$; l) $3y - 5 = 0$; m) $2x + 3y = 0$.

4. Leida sirge võrrand, kui sirge moodustab teljega OX nurga 30° ja lõikab ära teljel OY lõigu suurusega 3.

Vastus: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$.



5. Leida sirge võrrand, kui sirge moodustab teljega OX nurga 60° ja lõikab ära teljel OY lõigu suurusega -4 .

Vastus: $y = \sqrt{3}x - 4$.

6. Leida sirge võrrand, kui sirge moodustab teljega OX nurga 120° ja lõikab ära teljel OY lõigu suurusega 5.

Vastus: $y = -\sqrt{3}x + 5$.

7. Leida sirge võrrand, kui sirge on paralleelne teljega OX ja lõikab ära teljel OY lõigu suurusega 3.

Vastus: $y = 3$.

8. Leida sirge võrrand, kui sirge on paralleelne teljega OY ja lõikab ära teljel OX lõigu suurusega -5 .

$$\text{Vastus: } x = -5.$$

9. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(1, -3)$ ja moodustab teljega OX nurga $\arctg 2$.

$$\text{Vastus: } 2x - y - 5 = 0.$$

10. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(-1, -\frac{1}{2})$ ja moodustab teljega OX nurga $\arctg (-2)$.

$$\text{Vastus: } 4x + 2y + 5 = 0.$$

11. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(2, -\frac{5}{3})$ ja moodustab teljega OX nurga 0° .

$$\text{Vastus: } y = -\frac{5}{3}.$$

12. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ja on paralleelne teljega OY .

$$\text{Vastus: } x = \frac{1}{3}.$$

13. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkte $(-1, -4)$ ja $(0, 5)$.

$$\text{Vastus: } 9x - y + 5 = 0.$$

14. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkte $(2, -\frac{1}{2})$ ja $(-1, \frac{1}{4})$.

$$\text{Vastus: } x + 4y = 0.$$

15. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkte $(2, -1)$ ja $(2, 3)$.

$$\text{Vastus: } x = 2.$$

16. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(5, -1)$ ja sirge tõus on võrdne punkte $(0, 3)$ ja $(2, 0)$ läbiva sirge tõusuga.

$$\text{Vastus: } 3x + 2y - 13 = 0.$$

17. Leida võrrand sirgel, mis lõikab ära teljel OX lõigu pikkusega 3 ja teljel OY lõigu pikkusega -4 .

$$\text{Vastus: } 4x - 3y - 12 = 0.$$

18. Leida lõigud, mis sirge $6x - 4y - 3 = 0$ lõikab ära koordinaattelgedel.

$$\text{Vastus: } \frac{1}{2} \text{ ja } -\frac{3}{4}.$$

19. Leida teravnurk, mis tekib sirgete $3x - y + 6 = 0$ ja $x - y + 4 = 0$ lõikumisel.

$$\text{Vastus: } \arctg\left(\frac{1}{2}\right).$$

20. Leida teravnurk sirgete $2x - y + 8 = 0$ ja $2x + 5y - 4 = 0$ vahel.

$$\text{Vastus: } \arctg 12.$$

21. Leida teravnurk sirge $2x - 3y + 6 = 0$ ja punkte $(4, -5)$ ja $(-3, 2)$ läbiva sirge vahel.

$$\text{Vastus: } \arctg 5.$$

22. Kaks sirget läbivad koordinaatide algust ja punkte, mis jaotavad sirge $2x + 3y - 12 = 0$ koordinaattelgede-vahelise lõigu kolme võrdsesse ossa. Leida nurk nende kahe sirge vahel.

$$\text{Vastus: } \arctg \frac{9}{13}.$$

23. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(2, -3)$ ja on paralleelne sirgega $3x - 2y + 12 = 0$.

$$\text{Vastus: } 3x - 2y - 12 = 0.$$

24. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(-\frac{3}{2}, -2)$ ja on paralleelne sirgega $3x - 2y + 2 = 0$.

$$\text{Vastus: } 6x - 4y + 1 = 0.$$

25. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(-1, -1)$ ja on paralleelne punkte $(-2, 6)$ ja $(2, 1)$ läbiva sirgega.

$$\text{Vastus: } 5x + 4y + 9 = 0.$$

26. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib koordinaatide algust ja on risti sirgega $3x + 4y - 2 = 0$.

$$\text{Vastus: } 4x - 3y = 0.$$

27. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(2, -3)$ ja on risti sirgega $7x - 4y + 3 = 0$.

$$\text{Vastus: } 4x + 7y + 13 = 0.$$

28. Leida ristsirge võrrand, kui see sirge on püstitatud punkte $(-5, -1)$ ja $(-3, 4)$ ühendava sirglõigu keskpunktis.

$$\text{Vastus: } 4x + 10y + 1 = 0.$$

29. Leida sirge võrrand, kui sirge on risti sirgega $2x - 3y + 7 = 0$ ja läbib selle sirge koordinaattelgede vahelise sirglõigu keskpunkti.

Vastus: $36x + 24y + 35 = 0$.

30. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(4, -3)$ ja moodustab nurga 45° sirgega $3x + 4y = 0$.

Vastus: $x - 7y - 25 = 0$.

31. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(-1, -1)$ ja moodustab nurga $\arctg \frac{1}{2}$ sirgega $3x + 2y - 6 = 0$.

Vastus: $4x + 7y + 11 = 0$.

32. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ ja sirgete $3x - 5y - 11 = 0$ ja $4x + y - 7 = 0$ lõikepunkti.

Vastus: $11x + 4y - 18 = 0$.

33. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib sirgete $2x - y - 1 = 0$, $x - y + 7 = 0$ ja $x - 7y - 1 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$ lõikepunkte.

Vastus: $23x - 14y + 26 = 0$.

34. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib sirgete $x - 3y + 2 = 0$ ja $5x + 6y - 4 = 0$ lõikepunkti ja on paralleelne sirgega $4x + y + 7 = 0$.

Vastus: $12x + 3y - 2 = 0$.

35. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib sirgete $3x - y + 4 = 0$ ja $4x - 6y + 3 = 0$ lõikepunkti ja on risti sirgega $5x + 2y + 6 = 0$.

Vastus: $4x - 10y + 1 = 0$.

36. Leida mediaanide võrrandid kolmnurgas, mille tekitavad sirged $2x - 3y + 11 = 0$, $3x + y - 11 = 0$ ja $x + 4y = 0$.

Vastus: $5x - 2y = 0$; $4x + 5y - 11 = 0$; $x - 7y + 11 = 0$.

37. Leida punktist $(-1, 2)$ sirgele $3x - 5y - 21 = 0$ tõmmatud ristlõigu alus.

Vastus: $(2, -3)$.

38. Tõestada analüütiliselt, et kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes ja samas punktis.

39. Tõestada analüütiliselt, et kolmnurga tippudest vastaskülgedele joonestatud ristjooned lõikuvad ühes ja samas punktis.

40. Tõestada analüütiliselt, et kolmnurga külgede keskpunktides külgedele tõmmatud ristsirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

41. Valguse kiir, väljudes punktist (2, 3) peegeldub teljelt OX ja siis jõuab punkti (5, 8). Leida langeva ja peegelduva kiire võrrandid.

$$\text{Vastus: } 11x + 3y - 31 = 0; 11x - 3y - 31 = 0.$$

42. Valguse kiir $y = x + 3$ langeb klaasplaadile, mille paksus on 1 cm (murdumisnäitaja 2). Eeldades, et abstsissitelg ühtib plaadi ülemise pinnaga ja ordinaattelg on risti sellega, leida kiire võrrand plaadi läbimisel ja pärast väljumist sellest ja kiire tee pikkus plaadi sees.

$$\text{Vastus: } y = \sqrt{7}(x + 3); y = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

III peatükk.

Geomeetrilised kohad ja nende võrrandid. Teise järgu kõverad.

§ 17. **Geomeetrilised kohad ja geomeetriliste kohtadena antud joonte võrrandid.** II peatükis vaadeldud sirge võrrandi koostamise meetodit antud geomeetriliste tingimuste põhjal võib laiendada kõverjoontele, mis on antud geomeetriliste kohtadena.

Punktide geomeetriliseks kohaks tasapinnal nimetatakse punktide kogu, mis evivad ainult neile omast mingit omadust, mis eraldab neid kõigist teistest punktidest tasapinnal.

Näiteks niisuguste punktide kogu, millel on see omadus, et nad kõik on ühekaugusel ühest antud punktist, moodustab geomeetrilise koha, mida nimetatakse ringjooneks. Niisuguste punktide kogu, milledest igauks on võrdsel kaugusel kahest antud punktist, moodustab teatavasti sirge, mis

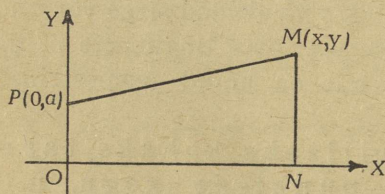
on risti kahte antud punkti ühendava sirglõiguga selle keskpunktis.

Kui joon on antud punktide geomeetrilise kohana, siis võib seda geomeetrilist kohta määravaid geomeetrilisi tingimusi väljendada analüütiliselt, s. o. võrrandina, mida peavad rahuldama antud joone punktide koordinaadid.

Sellejuures, nii nagu sirge puhulgi, ei ole tarvidust vaadelda kõverjoonel kõiki punkte, vaid on küllaldane kujutleda kõverat (s. o. kõverjoont) moodustatuna ühe liikuva punkti $M(x, y)$ jäljena; siis omadus, mis iseloomustab joone kõiki punkte, väljendub analüütiliselt punkti M jooksvaid koordinaate (x, y) siduva võrrandi kaudu.

Võtame arutusele geomeetrilise koha võrrandi koostamise lihtsa näite.

Näide. Leida niisuguste punktide geomeetrilise koha võrrand, milledest iga punkti kaugus antud sirgeni AB on kaks korda väiksem kui kaugus punktini P , mis ei asetse sellel sirgel.



Joonis 32.

Lahendus. Geomeetrilise koha võrrandi tuletamiseks on kõigepealt tarvis määrata kindlaks koordinaattelgede asend. Koordinaattelgede asendit võib muidugi valida vabalt, kuid sobiva valiku puhul saame geomeetrilise koha

võrrandi lihtsamana. Eeskirju, mida võiks võtta sel puhul juhendina, ei ole olemas — oskus koordinaattelgede otstarbekohase asendi valikuks omandatakse kogemustega.

Võtame teljeks OX antud sirge ja telje OY ehitame läbi antud punkti (joonis 32). Kuna punkti P tuleb lugeda antuks, siis tuleb lugeda antuks ka punkti P kaugus antud

sirgest, s. o. teljest OX . Tähistame selle kauguse a -ga. Seega punkti P koordinaatideks on $(0, a)$.

Olgu $M(x, y)$ otsitava geomeetrilise koha mistahes punkt. Ülesande tingimuste põhjal on

$$PM = 2NM.$$

Kahe punkti vahelise kauguse valemi põhjal [valem (8) § 5] saame: $PM = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$. Sirglõik $NM = y$. Järelikult on

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = 2y.$$

Võttes selle võrrandi mõlemad pooled ruutu ja koondades sarnased liikmed, saame:

$$x^2 - 3y^2 - 2ay + a^2 = 0.$$

Kui koordinaatteljed asetaksime teisiti, näiteks kui telg OY ei läbiks punkti P , siis punkti P abstsiss ei oleks enam null; tähendab, punkti P abstsissiks osutub siis mingi nullist erinev arv, näiteks b . Siis oleks

$$\sqrt{(x - b)^2 + (y - a)^2} = 2y$$

ehk

$$x^2 - 3y^2 - 2bx - 2ay + a^2 + b^2 = 0,$$

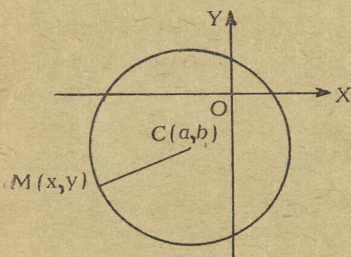
millest nähtub, et võrrand on sel puhul keerulisem.

Asume nüüd lihtsaimate geomeetriliste kohtade võrrandite tuletamisele, nendele geomeetrilistele kohtadele vastavate joonte ehitamisele ja elementaarsele uurimisele.

§ 18. Ringjoon. Ringjooneks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, mis asuvad ühekaugusel antud punktist. Antud punkti nimetatakse ringjoone keskpunktiks, jääva suurusega kaugust ringjoone punkti ja keskpunkti vahel — ringjoone raadiuseks. Tähistame ringjoone

keskpunkti C koordinaadid tähtedega a ja b ja raadiuse tähega r . Olgu $M(x, y)$ ringjoone mistahes punkt (joonis 33). Kahe punkti vahelise kauguse valemi põhjal [valem (8) § 5] saame:

$$(\bar{x} - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (1)$$



Joonis 33.

Saadud võrrand ongi raadiusega r ja keskpunktiga $C(a, b)$ ringjoone võrrandiks.

Kui koordinaatide algus on ringjoone keskpunktis, siis $a = b = 0$ ja võrrand (1) omandab lihtsama kuju:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (1^*)$$

Näide. Kirjutada ringjoone võrrand, kui ringjoone raadius on $\frac{2}{3}$ ja keskpunktiks $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

Lahendus. Kooskõlas võrrandiga (1) saame:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Kirjutame võrrandi (1) ümber järgmisel kujul:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0. \quad (2)$$

Korrutades saadud võrrandi (2) kõik liikmed arvuga A , saame samaväärtse võrrandi

$$Ax^2 + Ay^2 - 2aAx - 2bAy + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Tähistades $-aA = D$; $-bA = E$; $A(a^2 + b^2 - r^2) = F$, saame ringjoone võrrandi üldkujul:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (3)$$

kus

$$-\frac{D}{A} = a; \quad -\frac{E}{A} = b; \quad \frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2.$$

Seega ringjoone võrrand väljendub teise astme võrrandina kujul (3). Selle võrrandi iseloomustavad tunnused on: koordinaatide ruutudega liikmete kordajad on võrdsed ja puudub liige korrutisega xy .

Ümberpöördult, kui on antud võrrand kujul (3), siis sellele võrrandile geomeetriliselt vastab ringjoon.

Selgitame selle väite tõelisust näitega. Olgu antud võrrand $2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y - 5 = 0$.

See võrrand on kujult sama, mis ringjoone võrrand (3): jooksvate koordinaatide ruutudega liikmete kordajad on võrdsed ja puudub liige jooksvate koordinaatide korrutisega. Siin $A = 2$, $D = 1$, $E = -1$, $F = -5$. Eelmistest suhetest leiame keskpunkti koordinaadid ja ringjoone raadiuse:

$$a = -\frac{D}{A} = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{E}{A} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Seosest

$$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{F}{A}$$

saame: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - r^2 = -\frac{5}{2}$, millest $r^2 = 3$ ja $r = \sqrt{3}$.

Sama ülesande võime lahendada ka teisiti, nimelt andes võrrandile kuju (1). Selleks jagame võrrandi kõik liikmed 2-ga ja kirjutame võrrandi järgneval kujul:

$$x^2 + x + y^2 - y = \frac{5}{2}.$$

Nüüd liidame võrrandi mõlemale poolele niisugused arvud, et võrrandi vasemal poolel tekiks kahe täisruudu summa, nagu võrrandis (1). On selge, et kahe esimese liidetavaga on tarvis liita $\frac{1}{4}$ ja selleks, et võrrand jääks õigeks,

võrrandi paremale poolele liita $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Selle tagajärjel saame:

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 3$$

ehk

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

Võrrandi leitud kuju näitab, et võrrand väljendab ringjoont, mille keskpunkt on punktis $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ja mille raadius on $\sqrt{3}$.

Märkus. Võib juhtuda, et kujul (3) esitatud ringjoone võrrandi kordajate mõnesuguste väärtuste puhul võrrand siiski ei väljenda ringjoont.

Näiteks võrrand

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0,$$

väljendatuna kujul

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0,$$

näitab, et võrrandile ei vasta ringjoon, vaid punkt $(1, -2)$, sest võrrandi vasem pool võib võrduda nulliga ainult siis, kui kumbki sulgudes toodud avaldis on null, s. o. väärtustel $x = 1$ ja $y = -2$.

Vaatleme veel võrrandit

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7 = 0.$$

Kirjutades selle võrrandi kujul

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -2,$$

näeme, et võrrandit ei rahulda ükski paar jooksvate koordinaatide reaalseid väärtusi (x, y) . Järelikult see võrrand üldse ei väljenda mingit kõverjoont¹.

§ 19. Ringjoone ja sirge lõikumine. Puutuja. Olgu antud ringjoon $x^2 + y^2 = r^2$ ja sirge $y = kx + b$. Leiame ringjoone ja sirge lõikepunktid.

¹ Sellistel juhtudel öeldakse, et võrrand väljendab imaginaarset ringjoont.

Kuna lõikepunktid üheaegselt asuvad nii ringjoonel kui sirgel, siis nende punktide koordinaadid peavad samaaegselt rahuldama mõlemat antud võrrandit. Seepärast leiame lõikepunktide koordinaadid, kui lahendame ringjoone ja sirge võrrandiga määratud võrrandsüsteemi. Asendusvõtet kasutades saame:

$$x^2 + (kx + b)^2 = r^2$$

ehk

$$(1 + k^2) x^2 + 2bkx + b^2 - r^2 = 0.$$

Nii saime lõikepunktide abstsisside määramiseks ruutvõrrandi. Lahendades ruutvõrrandi, leiame otsitavad abstsissid:

$$x_1 = \frac{-bk + \sqrt{r^2(1+k^2) - b^2}}{1+k}, \quad x_2 = \frac{-bk - \sqrt{r^2(1+k^2) - b^2}}{1+k}.$$

Igale leitud abstsissile vastab ainult üks ordinaat, mis määratakse võrrandist $y = kx + b$.

Ruutvõrrandil, millest määrasime abstsisside väärtused ringjoone ja sirge lõikepunktidele, võivad olla, olenevalt b , k ja r väärtustest, kas kaks reaalselt või kaks imaginaarselt lahendit. Nimelt kui $r^2(1+k^2) - b^2 \geq 0$, siis esineb kaks reaalselt lahendit — erinevat või võrdset. See tähendab, et sirge lõikab ringjoont kahes erinevas punktis või kahes ühtelangevas punktis. Esimesel juhul sirget nimetatakse lõikajaks ja sirglõiku lõikepunktide vahel kõõlaks. Teisel juhul, kui lõikepunktid langevad kokku, kõõlu pikkus muutub nulliks. Kui lõikepunktid piiramatult lähenevad üksteisele, siis lõikaja läheneb piirasendile, mida nimetatakse puutujaks.

Kui $r^2(1+k^2) - b^2 < 0$, siis lahendid x_1 ja x_2 on imaginaarsed. See tähendab, et ringjoonel ja sirgel ei ole lõikepunkti ehk, nagu öeldakse, ringjoone ja sirge lõikepunktid on imaginaarsed.

Olgu (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ ja sirge $y = kx + b$ lõikepunktide koordinaadid.

Lõikajale, mis ühendab kõverjoone neid kahte punkti, vastab teavasti [v. § 12, valem (14)] võrrand

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ehk

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Et koordinaadid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) rahuldavad ringjoone võrrandit, siis

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$

Lahutades teisest samasusest esimese samasuse vastavad pooled, saame:

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0$$

ehk

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1),$$

millest leiame:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

Nüüd võime kirjutada lõikaja võrrandi järgmisel kujul:

$$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1).$$

Kui punkt (x_2, y_2) piiramatult läheneb ringjoonel punktile (x_1, y_1) , siis piirjuhul saame ringjoone puutuja võrrandi punktis (x_1, y_1) järgmisel kujul:

$$y - y_1 = -\frac{x}{y_1}(x - x_1)$$

ehk

$$yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Kuna aga punkt (x_1, y_1) asetseb ringjoonel, siis

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

mille põhjal lõplikult saame:

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

Niisugune ongi ringjoone puutuja võrrand punktis (x_1, y_1) .

Näide 1. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ puutuja võrrand punktis $(3, -4)$.

Lahendus. Antud juhul $x_1 = 3$, $y_1 = -4$ ja $r^2 = 25$. Sellepärast puutuja võrrand on:

$$3x - 4y - 25 = 0.$$

Näide 2. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ puutuja võrrand, kui puutuja läbib punkti $(7, -1)$.

Lahendus. Ringjoone puutujale punktis (x_1, y_1) vastab võrrand

$$xx_1 + yy_1 = 25,$$

kus (x_1, y_1) on tundmatud puutepunkti koordinaadid. Kuna otsitav puutuja läbib punkti $(7, -1)$, siis need koordinaadid peavad rahuldama puutuja võrrandit. Siit järgneb:

$$7x_1 - y_1 = 25.$$

Tundmatud koordinaadid (x_1, y_1) rahuldavad ühtlasi ringjoone võrrandit. Sellepärast saame siit teise võrrandi tundmatute x_1 ja y_1 suhtes:

$$x_1^2 + y_1^2 = 25.$$

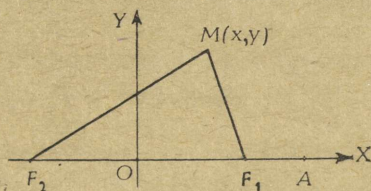
Lahendades mõlemast võrrandist koosneva võrrandite süsteemi x_1 ja y_1 suhtes, saame:

$$x_1^2 + (7x_1 - 25)^2 = 25,$$

millest leiame $x_1 = 4$, $x_1' = 3$.

Võrrandist $7x_1 - y_1 = 25$ leiame: $y_1 = 3$, $y_1' = -4$. Järelikult puutujaid on kaks: $4x + 3y - 25 = 0$ ja $3x - 4y - 25 = 0$.

§ 20. **Ellips.** Ellipsiks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, millede kauguste summa kahest antud punktist — fookustest — on jääv suurus. Koostame võrrandi, mida peavad rahuldama ellipsi vabalt võetud punkti koordinaadid.



Joonis 34.

Tähistame fookused tähtedega F_1 ja F_2 . Teljeks OX võtame fookusi ühendava sirge, aga koordinaatide alguseks võtame fookustevahelise sirglõigu keskpunkti (joonis 34).

Kui ellipsi vabalt võetud punkti märgime $M(x, y)$ ja kauguste püsiva summa $2a$, siis saame:

$$F_1M + F_2M = 2a. \quad (4)$$

Võrduse (4) väljendamiseks punkti M koordinaatide kaudu on tarvis veel märkida fookuste, s. o. punktide F_1 ja F_2 koordinaadid. Tähistame fookustevahelise kauguse $2c$ -ga. Siis fookuse F_1 koordinaatideks on c ja 0 , fookuse F_2 koordinaatideks aga $-c$ ja 0 . Rakendades nüüd kahe punkti vahelise kauguse valemit (peatükk I, § 5), leiame:

$$F_1M = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad F_2M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Asendades need avaldised võrdusesse (4), saame võrrandi, mida peavad rahuldama ellipsi mistahes punkti koordinaadid, s. o. lühidalt, saame ellipsi võrrandi:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a. \quad (5)$$

Seda võrrandit võib lihtsustada, vabastades võrrandi juuravaldistest. Selleks viime teise juure paremale poolele:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \quad (5^*)$$

Võtame võrrandi (5*) mõlemad pooled ruutu:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Koondades sarnased liikmed ja jagades võrrandi mõlemad pooled 4-ga, saame võrrandi kujul:

$$a \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Võtame uuesti võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

millest pärast sarnaste liikmete koondamist saame:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

ehk

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (5^{**})$$

Nii saime ellipsi võrrandi, mis ei sisalda juuravaldisi.

Harilikult sellele võrrandile antakse teine kuju. Kuna kolmnurgas kahe külje summa on suurem kui kolmas külg, siis $F_1M + F_2M > F_2F_1$ ehk $2a > 2c$ ja $a > c$. Järelikult $a^2 - c^2$ on positiivne suurus ja sellepärast võib seda asendada mingi arvu ruuduga:

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (6)$$

Kirjutades võrrandis (5^{**}) $a^2 - c^2$ asemele b^2 , saame:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (7)$$

ehk, pärast võrrandi mõlema poole jagamist a^2b^2 -ga:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Niisugune on ellipsi võrrandi lihtsaim kuju. Kui paigutaksime koordinaatteljed teisiti, saaksime keerukama võrrandi.

Andes abstsissile (või ordinaadile) mistahes väärtused ja arvutades võrrandist (8) vastavad ordinaadi (või abstsissi) väärtused, võime arvutatud koordinaatide järgi, kuna need rahuldavad ellipsi võrrandit, konstrueerida kuupalju tahes punkte.

§ 21. Ellipsi kuju määramine. Ellipsi kuju määramiseks avaldame y võrrandist (7) või (8):

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{ehk} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2),$$

millest

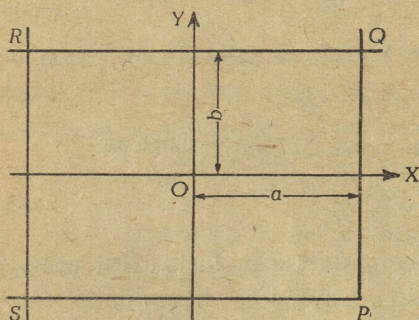
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (9)$$

Sellest ellipsi võrrandi kujust nähtub, et abstsissi x igale väärtusele vastab kaks ordinaadi y väärtust, mis on absoluutsuuruselt võrdsed, kuid märgilt vastupidised; sellest järgneb, et ellipsi punktid on abstsissitelje suhtes sümmeetriliselt asetatud.

Ellipsi võrrandist, mis on lahendatud abstsissi x suhtes, s. o. võrrandist

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (9^*)$$

samuti järgneb, et ellipsi punktid on ka ordinaattelje suhtes sümmeetriliselt asetatud.



Joonis 35.

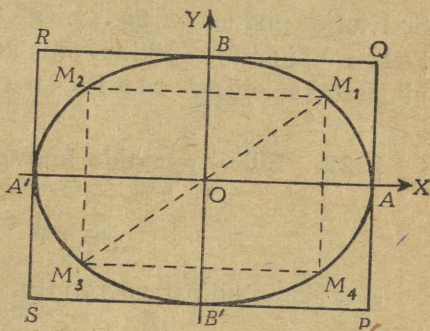
Võrrandist (9) nähtub, et ordinaat y on reaalne ainult siis, kui $x^2 \leq a^2$, s. o. kui x absoluutväärtuselt ei ületa a -d. Analoogiliselt järgneb võrrandist (9*), et abstsiss x jääb reaalseks ainult siis, kui $y^2 \leq b^2$, s. o. kui y -i absoluutväärtus ei ületa b -d. Punktid, millede abstsissi absoluutväärtus ei ületa a -d, asetsevad lõpmatul vöötmeil, mida piiravad tel-

jega OY paralleelsed sirged PQ ja SR , need sirged asetsevad teljest OY kaugusel a — üks paremal, teine vasemal (joonis 35). Punktid, millede ordinaadi y absoluutväärtus ei ületa b -d, asetsevad lõpmatul vöötmeil, mida piiravad teljega OX paralleelsed sirged RQ ja SP ; need sirged asetsevad teljest OX kaugusel b — üks üleval, teine all. Punktid, millede abstsissid ja ordinaadid rahuldavad vaadeldud tingimusi üheaegselt, asetsevad nende vöötmete ühises osas, s. o. ristkülikus $PQRS$ (joonis 35).

Võrrandist (9*) nähtub, et absoluutväärtuselt kõige suurem ellipsi punkti abstsiss vastab ordinaadi väärtusele $y = 0$. Kui $y = 0$, siis $x = \pm a$. Järelikult ellips lõikab telge OX punktides $(a, 0)$ ja $(-a, 0)$. Võrrandist (9) nähtub, et absoluutväärtuselt kõige suurem ellipsi punkti ordinaat vastab abstsissi väärtusele $x = 0$. Kui $x = 0$, siis $y = \pm b$. Järelikult ellips lõikab telge OY punktides $(0, b)$ ja $(0, -b)$.

Võttes arvesse eelmist väidet ellipsi sümmeetriilisusest telgede OX ja OY suhtes, jõuame otsusele, et ellipsil on niisugune kaju nagu joonisel 36.

Ellipsi sümmeetriilisuses veendume ka veel järgneva põhjal.



Joonis 36.

Ellipsi võrrandis esinevad jooksvad koordinaadid ainult ruudus. Olgu $M_1(x_1, y_1)$ üks ellipsi punktidest (joonis 36). Järelikult koordinaadid x_1 ja y_1 peavad rahuldama võrrandit (8), s. o. peab leidma aset samasus

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Kuid niisugusel juhul ka punktid $M_2(-x_1, y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(x_1, -y_1)$ asetsevad ellipsil, sest kui on õige võrdus

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

siis on õiged ka võrdused:

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Punkt M_4 on sümmeetriline punktiga M_1 telje OX suhtes, kuid punkt M_2 on sümmeetriline punktiga M_1 ordinaattelje suhtes. Järelikult ellips on sümmeetriline koordinaattelgedes suhtes ehk teisiti väljendatult, koordinaatteljed on ellipsi sümmeetriatelgedeks. Peale selle punkt M_3 on sümmeetriline punktiga M_1 koordinaatide alguse suhtes. Siit järgneb, et ellips on sümmeetriline ka koordinaatide alguse suhtes.

Sirglõiku $A'A$ nimetatakse ellipsi suurteljeks. Suurtelje pikkus on $2a$. Sirglõik $B'B$ on ellipsi väiketelg. Väiketelje pikkus on $2b$. Punkte A, A', B, B' nimetatakse ellipsi laigipunktideks (tippudeks).

§ 22. Ellipsi punktide konstrueerimine. Olgu antud ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Avaldame ellipsi võrrandist y -i:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (9)$$

Ehitame ellipsi suurteljele kui diameetrile ringjoone (joonis 37). Selle ringjoone võrrand on:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Kui tähistada y' -ga selle ringjoone mõne punkti L ordinaadi, mis vastab abstsissile $OP = x$, siis saame:

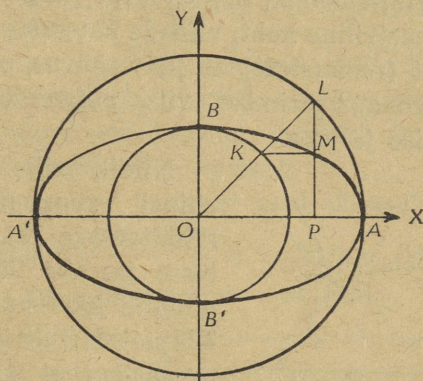
$$y' = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ellipsi ja ringjoone ühesuguste märkidega, ühele ja samale x -i väärtusele vastavate ordinaatide võrdlemiseks jagame y y' -ga, mille tulemusena saame:

$$\frac{y}{y'} = \frac{b}{a},$$

s. o. abstsissi ühe ja sama väärtuse puhul ellipsi ordinaadi ja ringjoone ordinaadi suhe võrdub ellipsi väiketelje ja suurtelje suhtega.

Eelmine seos juhhib meid lihtsale ellipsi punktide leidmisele, kui on teada ellipsi teljed.



Joonis 37.

Kahele ellipsi teljele AA' ja BB' kui diameetritele konstrueerime kaks konsentrilist ringjoont ja keskpunktist joo-
nestame kiire OL . Joonestades pärast seda selle kiire ja
suure ringjoone lõikepunkti L läbiva sirge LP , mis on
paralleelne väiketeljega, ning kiire ja väikese ringjoone
lõikepunkti K läbiva sirge KM , mis on paralleelne suur-
teljega, saame nende kahe sirge lõikepunkti M , mis asetseb
ellipsil. Tõepoolest, olenevalt sellest, et paralleelsed sirged OP
ja KM lõikavad nurga OLP külgedest võrdelised osad, võime
kirjutada:

$$\frac{MP}{LP} = \frac{OK}{OL} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}$$

ehk

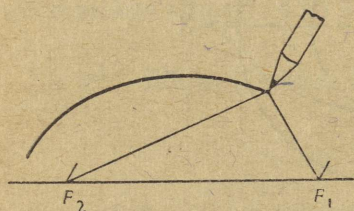
$$\frac{y}{y'} = \frac{b}{a},$$

millest

$$y = \frac{b}{a} y' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Muutes kiire OL tõusu nurka, võime sel viisil konstrueerida kuitahes palju ellipsi punkte.

Ellipsi definitsioonist, mille järgi ellips on niisuguste punktide geomeetriline koht, millede kauguste summa kahest antud punktist (fookustest) on jääv suurus, nimelt $2a$, järgneb ellipsi konstrueerimise viis pinguletõmmatud niidi pideva liikumise jäljena.



Joonis 38.

Niidil, mille pikkus võrdub ellipsi suurtelje pikkusega, kinnitatakse kaks otsa fookustesse ja siis tõmmatakse niit pingule joonestava teravikuga. Ellipsi definitsiooni põhjal on arusaadav, et kui viime teraviku paberil edasi, nii et niit oleks kogu aeg pingul, siis teravik joonestab ellipsi (joonis 38).

§ 23. Ellipsi ekstsentrisus. Ellipsi fookuste vahelise kauguse $2c$ ja suurtelje $2a$ suhet, s. o. $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, nimetatakse ellipsi ekstsentrisuseks ja märgitakse harilikult tähega e . Valemist (6) § 20 saame:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Niisiis:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (10)$$

Ellipsi ekstsentrisus, nagu see järgneb ekstsentrisuse definitsioonist, on arv, mis on ühest väiksem. Ekstsentrisuse suurus määrab ellipsi kuju. Mida suurem on ellipsi ekstsentrisus, seda rohkem suurtelje sihis väljavenitatud kuju

omab ellips. Ellipsi telgede võrdelisel (proportsionaalsel) suurenemisel ellipsi kuju ja ekstsentrismus ei muutu.

§ 24. **Ellipsi seos ringjoonega.** Vaatleme ellipsi eri juhtu, kui $a = b$. Siis võrrand (8) omandab kuju:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ehk} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

See on niisuguse ringjoone võrrand, mille raadius on a ja mille keskpunkt on koordinaatide alguses. Siit järeldame, et ringjoon on ellipsi eri juhtum, nimelt ringjoon on ellips, mille teljed on teineteisega võrdsed.

Eelmise paragrahvi valemist (10) järgneb, et kui $a = b$, siis ekstsentrismus $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0$. Niisiis ringjoon kujutab endast ellipsit, mille ekstsentrismus on null.

Võrrand (8) $b > a$ puhul kujutab endast niisuguse ellipsi võrrandit, mille fookused asetsevad teljel OY kaugusel $\sqrt{b^2 - a^2}$ koordinaatide algusest O . Sel juhul sirglõik $B'B = 2b$ on suurteljeks, sirglõik $A'A = 2a$ aga väiketeljeks.

N ä i d e. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi ekstsentrismus on $\frac{1}{3}$ ja fookused asetsevad punktides $(4, 0)$ ja $(-4, 0)$.

L a h e n d u s. Fookuse kaugus keskpunktist määratakse avaldisega $\sqrt{a^2 - b^2}$, ekstsentrismus e aga on võrdne $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Nii saame:

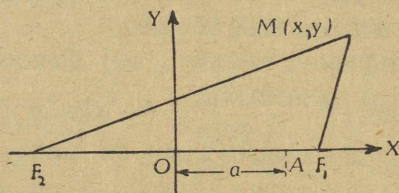
$$\sqrt{a^2 - b^2} = 4 \quad \text{ja} \quad \frac{4}{a} = \frac{1}{3}, \quad \text{kust} \quad a = 12, \quad b^2 = 128.$$

$$\text{Järelikult, otsitav ellipsi võrrand on} \quad \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1.$$

§ 25. **Hüperbool.** Hüperbooliks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, millede kauguste vahe kahest kindlast punktist — fookustest — on jääv suurus.

Lähtudes hüperbooli definitsioonist, koostame hüperbooli võrrandi. Valime koordinaattelgedele samasuguse asendi fookuste suhtes kui ellipsi võrrandi tuletamisel. Tähistame fookuste F_1 ja F_2 vahelise kauguse $2c$ -ga, aga hüperbooli punkti ja fookuste vaheliste kauguste jääva suurusega vahe $2a$. Olgu $M(x, y)$ vabalt võetud hüperbooli punkt. Hüperbooli definitsiooni põhjal on

$$F_2M - F_1M = \pm 2a \text{ (joonis 39).}$$



Joonis 39.

Väljendades kaugused F_2M ja F_1M kahe punkti vahelise kauguse valemi põhjal, saame:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

See on otsitav hüperbooli võrrand. Vabastame võrrandi juuravaldistest ja anname võrrandile lihtsama kuju.

Viies teise juuravaldise paremale poolele, saame:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\begin{aligned} x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ &+ x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

Pärast lihtsustamist saame:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Võttes uuesti mõlemad pooled ruutu, saame võrrandi kujul:

$$(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2). \quad (11)$$

Võrrandil (11) on sama kuju, kui ellipsi võrrandil (5**) enne suuruse b asetamist võrrandisse. Kuid erinevus on selles, et nüüd $a < c$, sest kolmnurga F_2MF_1 kahe külje vahe on väiksem kui kolmas külg:

$$F_2M - F_1M < F_2F_1 \text{ ehk } 2a < 2c,$$

kust $a < c$.

Järelikult $a^2 - c^2$ on negatiivne suurus ja seda võib tähistada $-b^2$ -ga.

Kirjutades võrrandis (11) avaldise $a^2 - c^2$ asemele $-b^2$, saame:

$$-b^2 x^2 + a^2 y^2 = -a^2 b^2.$$

Jagades võrrandi kõik liikmed $-a^2 b^2$ -ga, saame võrrandi kujul:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Niisugune on hüperbooli lihtsaim võrrand.

Võrdusest $a^2 - c^2 = -b^2$ järgneb:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Suhet $\frac{c}{a}$ nimetatakse hüperbooli ekstsentrissuseks ja tähistatakse harilikult tähega e :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Viimasest järgneb, et hüperbooli ekstsentrissus on suurem kui üks.

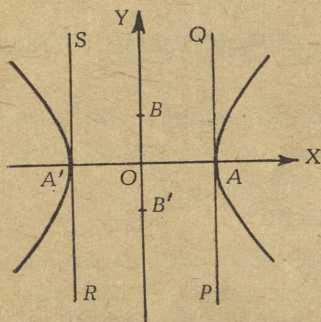
§ 26. Hüperbooli kuju määramine. Samuti kui ellipsi kuju määramisel, on kerge näha, et hüperbool on sümmeetriline koordinaattelgedele ja koordinaatide alguse suhtes.

Tõepoolest, jooksvad koordinaadid esinevad hüperbooli võrrandis (12) ruudus; sellepärast, kui punkt $M_1(x_1, y_1)$ asetseb hüperboolil, s. o. kui punkti koordinaadid x_1 ja y_1 rahuldavad võrrandit (12), siis ka punktiga M_1 koordinaat- telgede ja nende alguse suhtes sümmeetriliste punktide $M_2(-x_1, y_1)$, $M_3(-x_1, -y_1)$, $M_4(x_1, -y_1)$ koordinaadid rahuldavad hüperbooli võrrandit. Järelikult punktid M_2 , M_3 ja M_4 asetsevad ka hüperboolil.

Avaldame võrrandist (12) ordinaadi y :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (12^*)$$

Võrrandist (12*) nähtub, et ordinaat saab olla reaalne ainult siis, kui $x^2 \geq a^2$. Kui aga abstsissi absoluutväärtuse



Joonis 40.

võtame väiksema kui a , siis ordinaat y omandab imaginaarväärtuse. See näitab, et hüperbooli punkte ei saa olla võtmes, mida piiravad ordinaat- teljega paralleelsed ja sellest vasemal ja paremal pool kaugusel a asetsevad sirged RS ja PQ (joonis 40).

Kui $x = \pm a$, siis ordinaat $y = 0$. See tähendab, et hüperbool lõikab telge OX punktides $A(a, 0)$ ja $A'(-a, 0)$, s. o. punktides, millede abstsissid on absoluutväärtuselt kõige väiksemad.

Kui $x = 0$, siis, nagu järgneb võrrandist (12*), y omandab imaginaarväärtuse. Järelikult hüperbool ei lõika telge OY , mis muuseas järgnes ka eelnevatest arutlustest.

Arvestades öeldut, jõuame otsusele, et hüperbool omab joonisel 40 esitatud kuju.

Sirglõiku $A'A$ nimetatakse hüperbooli reaalteljeks. Punkte A' ja A nimetatakse hüperbooli lagi-punktideks (tippudeks).

Sirglõiku BB' , mille pikkus on $2b$, nimetatakse hüperbooli imaginaarteljeks.

§ 27. Hüperbooli asümptoodid. Olgu antud hüperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Konstrueerime kaks sirget (joonis 41), mille võrranditeks on

$$y = \frac{b}{a}x \text{ ja } y = -\frac{b}{a}x. \quad (13)$$

Märgime tähega Y ühel sirgetest (13) asetseva punkti ordinaadi ja tähega y hüperbooli (12) punkti ordinaadi, mis vastavad samale abstsissi x väärtusele — nii sirge kui hüperbooli tarvis. Hüperbooli võrrandist saame:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

ja sirgetest (13) näiteks esimese sirge võrrand on

$$Y = \frac{b}{a}x.$$

Võrratusest

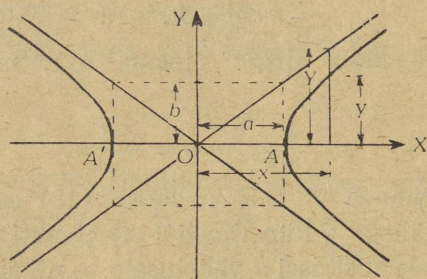
$$x^2 > x^2 - a^2$$

järgneb, et abstsissi x absoluutväärtus on suurem kui $\sqrt{x^2 - a^2}$. Kuid siis on korrutise $\frac{b}{a}x$ absoluutväärtus suurem kui korrutise $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ absoluutväärtus, s. o. sirge (13) ordinaadi Y absoluutväärtus on suurem kui hüperbooli ordinaadi y absoluutväärtus. See näitab, et hüperbooli punktid asetsevad sirgetest (13) moodustatud tippnurkade sees (joonis 41).

Uurime nüüd, kui lähedale sirgetele (13) lähenevad hüperbooli harud, s. o. kuidas muutub sirgete (13) ja hüper-

booli ordinaatide vahe $Y - y$ abstsissi x kasvamisel. Arvestades hüperbooli ja sirgete (13) sümmeetrilisust koordinaattelgede suhtes, piisab selle küsimuse lahendamisest ainult esimese kvadrandi suhtes. Võttes x , y ja Y positiivsetena, saame:

$$Y - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$



Joonis 41.

Abstsissi x suurenemisel see vahe muutub, kuid saadud avaldise järgi on raske otsustada, kas see vahe suureneb või väheneb. Seepärast teisendame vaadeldud avaldise parema poole, korrutades ja jagades seda summaga $x + \sqrt{x^2 - a^2}$:

$$Y - y = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})}$$

ehk, pärast lihtsustamist,

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Saadud avaldisest nähtub, et abstsissi x kasvamisel see vahe piiramatult kahaneb, sest murru lugeja säilitab oma väärtust, murru nimetaja aga kasvab piiramatult. See tähendab, et hüperbool läheneb sirgele $Y = \frac{b}{a} x$, kuid selle sirgeni kunagi ei jõua.

Kuna hüperbooli harud on sümmeetrilised ja sirgete (13) asend on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes, järeldame, et allpool telge asetsev parempoolse haru osa, samuti ka pahempoolse haru ülemine osa piiramatult lähenevad sirgele $Y = -\frac{b}{a}x$, kuna hüperbooli pahempoolse haru alumine osa sirgele $Y = \frac{b}{a}x$.

Sirget, millele kõverjoon piiramatult läheneb, nimetatakse selle kõvera asümptootiks. Nii tegime kindlaks, et hüperboolil on kaks asümptooti, mida väljendavad võrrandid:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{ja} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Näide. Leida hüperbooli ekstsentrisus, fookuste koordinaadid ja asümptootide võrrandid, kui hüperbooli võrrand on:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Lahendus. Paragrahvis 25 esitatud valemi järgi on:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Näiteks antud hüperboolil $a = 5$, $b = 2$, järelikult

$$e = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

Ekstsentrisus on fookuse ja koordinaatide alguse vahelise kauguse ja reaalpooltelje pikkuse suhe (§ 25), s. o.

$$e = \frac{OF_1}{OA} = \frac{OF_1}{a}$$

(joonis 39). Järelikult $OF_1 = ae = 5 \cdot \frac{1}{5} \sqrt{29} = \sqrt{29}$.

Seega fookuse koordinaadid on: $(\sqrt{29}, 0)$ ja $(-\sqrt{29}, 0)$.

Käesoleva paragrahvi valemitest (13) saame asümptootide võrrandid:

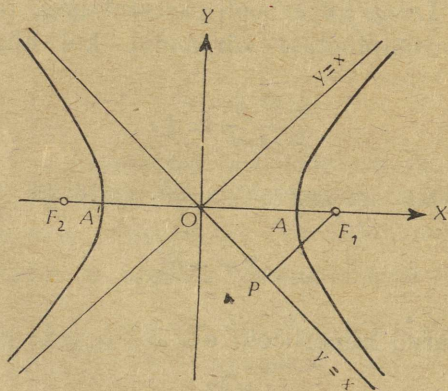
$$y = \pm \frac{2}{5}x \text{ ehk } 2x \pm 5y = 0.$$

§ 28. **Võrdhaarne hüperbool.** Kui $a = b$, siis hüperbooli nimetatakse võrdhaarseks, ja selle võrrand omab kuju:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ ehk } x^2 - y^2 = a^2.$$

Eelmise paragrahvi valemite (13) põhjal leiame võrdhaarse hüperbooli asümptootide võrrandid:

$$y = x \text{ ja } y = -x.$$



Joonis 42.

Järelikult võrdhaarse hüperbooli asümptootideks on sirged, milledest üks moodustab teljega OX nurga 45° ja teine nurga 135° . Nurk võrdhaarse hüperbooli asümptootide vahel on 90° (joonis 42).

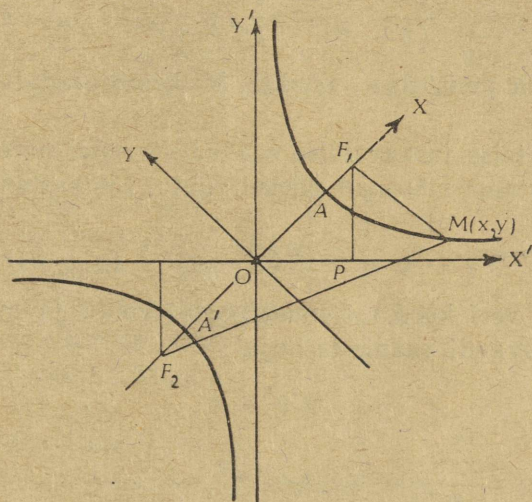
Fookuste kaugused asümptootidest on võrdsed (mitte ainult võrdhaarse, vaid iga hüperbooli puhul). Üks neist

kaugustest on kujutatud joonisel 42 sirglõiguna F_1P . Väljendame selle sirglõigu pikkuse a kaudu.

Paragrahvist 25 on teada, et $OF_1 = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Võrdhaarse hüperbooli puhul $a = b$ ja $OF_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Kolmnurk OPF_1 on täisnurkne — võrdhaarne. Järelikult

$$F_1P = a.$$



Joonis 43.

Pöörame koordinaatide süsteemi — 45° võrra; siis telg OY ühtib asümptoodiga $y = x$ ja telg OX asümptoodiga $y = -x$. Andes neile hariliku asendi, saame joonise 43. Uued koordinaatteljed on tähistatud joonisel tähtedega OX' ja OY' . Missugused on nüüd fookuste F_1 ja F_2 koordinaadid uue koordinaatide süsteemi suhtes?

Me leidsime, et $F_1P = a$. Kuna $OP = F_1P = a$, siis fookuse F_1 koordinaadid on (a, a) . On silmanähtav, et fookusel F_2 on koordinaatideks $(-a, -a)$.

Tuletame võrdhaarse hüperbooli võrrandi uue koordinaatide süsteemi suhtes ehk, nagu öeldakse, kohaldame hüperbooli võrrandi asümptootidele.

Hüperbooli definitsiooni põhjal kirjutame: $F_2M - F_1M = 2a$. Kasutades kahe punkti vahelise kauguse valemit, väljendame selle võrrandi järgmiselt:

$$\sqrt{(x' + a)^2 + (y' + a)^2} - \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - a)^2} = \pm 2a$$

[hüperbooli mistahes punkti M koordinaadid märgime (x', y')].

Viime teise juuravaldise saadud võrrandi paremale poolele ja tõstame mõlemad pooled ruutu. Lihtsustamiste järel saame:

$$x' + y' - a = \pm \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - a)^2}.$$

Tõstes veel kord mõlemad pooled ruutu ja lihtsustades saadud võrrandi, saame ta kujul:

$$2x'y' = a^2$$

ehk

$$x'y' = \frac{a^2}{2}.$$

Niisiis võrdhaarse hüperbooli võrrand

$$x^2 - y^2 = a^2$$

pärast kohaldamist asümptootidele omandab kuju:

$$x'y' = \frac{a^2}{2},$$

kus x' ja y' on jooksvad koordinaadid uute koordinaatide suhtes, milledeks on asümptootidid.

Kui võtta $a^2 = 2m^2$, siis eelmine võrrand omandab kuju:

$$x'y' = m^2$$

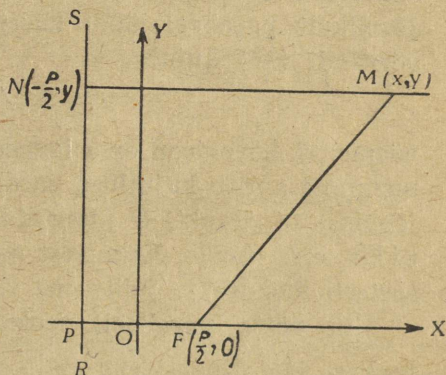
ehk

$$y' = \frac{m^2}{x'}.$$

Siit näeme, et võrdhaarne hüperbool, kohaldatud asümptootidele, graafiliselt väljendab pöördvõrdelisuse seadust.

§ 29. **Parabool.** Parabooliks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, mille kaugused ühest antud punktist — fookusest — ja antud sirgest, mida nimetatakse parabooli juhtjooneks ehk direktriksiks, on võrdsed.

Võtame teljeks OX sirge, mis läbib fookust F ja on risti juhtjoonega RS (joonis 44). Koordinaatide alguseks võtame fookuse ja juhtjoone vahelise ristlõigu keskpunkti. Tähistame PF tähega p . Suurust p nimetatakse parabooli parameetriks. Siis fookuse koordinaadid on $(\frac{p}{2}, 0)$.



Joonis 44.

Olgu $M(x, y)$ parabooli mingi punkt. Parabooli definitiooni põhjal on:

$$FM = NM.$$

Punkti N koordinaadid on $(-\frac{p}{2}, y)$; sellepärast, kasu-

tades kahe punkti vahelise kauguse valemit, võime kirjutada selle võrduse kujul:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2},$$

ehk, tõstes võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

millest pärast sarnaste liikmete koondamist saame:

$$y^2 = 2px. \quad (14)$$

Niisugune on parabooli võrrand kõige lihtsamal kujul.

Võrrand (14) näitab, et x võib omandada ainult väärtsusi, mis ei ole negatiivsed, sest kui $x < 0$, siis ordinaadi y väärtused on imaginaarsed. Kui $x = 0$, siis ordinaat $y = 0$. Järelikult parabool läbib koordinaatide algust. Kirjutades võrrandi (14) kujul:

$$y = \pm \sqrt{2px},$$

näeme, et kõverjoon on sümmeetriline telje OX suhtes. See uurimine annab kujutluse paraboolist, nagu see on esitatud joonisel 45. Punkti O nimetatakse parabooli lagipunktiks ehk tipuks. Eelmisest selgub, et parabooli lagipunkt asetseb fookuse ja juhtjoone vahelise kauguse keskpunktis.

Kui võtta parabooli fookus vasemal juhtjoonest, siis fookuse koordinaatideks on $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ ja parabooli võrrand omandab kuju:

$$y^2 = -2px.$$

Parabool sel juhul asetseb vasemal teljest OY . Jätame lugeja ülesandeks tuletada iseseisvalt kõverjoone võrrand fookuse niisuguse asendi puhul.

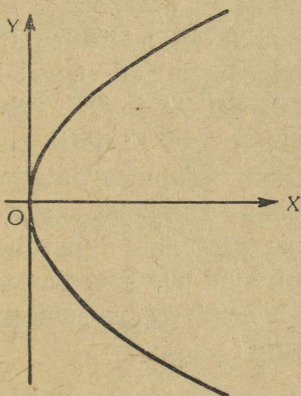
Samuti jätame lugeja ülesandeks iseseisvalt veenduda, et kui juhtjoon asetseb horisontaalselt, telg OY aga võtta

risti juhtjoonega läbi fookuse, mis on juhtjoonest kõrgemal, siis parabooli võrrand omandab kuju:

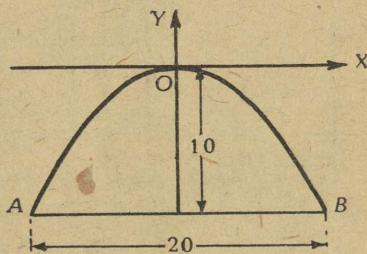
$$x^2 = 2py .$$

Kõverjoon osutub sümmeetriliseks Y -telje suhtes. Tema harud suunduvad ülespoole. Kui võtta fookuse asend allpool juhtjoont, siis parabooli harud suunduvad alla ja parabooli võrrand omandab kuju:

$$x^2 = -2py .$$



Joonis 45.



Joonis 46.

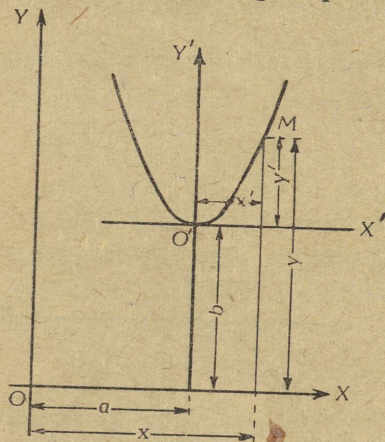
Näide. Kivi, mis visati kaldu horisondi suhtes, jooonestas parabooli kaare ja kukkus 20 m kaugusele algasendist. Kõige suurem kõrgus, milleni tõusis kivi, on 10 m. Määrata paraboolse trajektoori parameeter.

Lahendus. Asetades koordinaatteljed nii, nagu on näidatud joonisel 46, leiame, et paraboolset trajektoori väljendab võrrand

$$x^2 = -2py .$$

Punktil B , kuhu kivi langeb maapinnale, on koordinaadid $(10, -10)$. Kuna see punkt asetseb paraboolil, siis selle koordinaadid $(10, -10)$ peavad rahuldama eelmist võrrandit. Nii saame $100 = -2p \cdot (-10)$, millest leiame: $p = 5$.

§ 30. Parabool $y = Ax^2 + Bx + C$. Oletame nüüd, et parabooli lagipunkt asetseb mingisuguses punktis (a, b) ja tema sümmeetria telg on paralleelne teljega OY (joonis 47).



Joonis 47.

Konstrueerime koordinaatide abisüsteemi $X'O'Y'$, võttes koordinaatide alguspunkti parabooli lagipunkti ja määrates uute telgede suunad samad kui telgedel OX ja OY . Tähen­dab, telg $O'Y'$ ühtib para­booli sümmeetriateljega. Siis, kooskõlas eelmise paragrahvi­ga, parabooli võrrand uue koordinaatide süsteemi suhtes omandab kuju:

$$x'^2 = 2py'.$$

Meie ülesanne seisab selles, et väljendada seda võrrandit koordinaatide põhisüsteemi XOY suhtes. Joonise 47 põhjal on: $x' = x - a$, $y' = y - b$. Asetades need jooksvate koordinaatide (x', y') väärtused eelmisse võrrandisse, saame:

$$(x - a)^2 = 2p(y - b). \quad (15)$$

Niisuguse kuju omandab parabooli võrrand, kui parabooli lagipunkt asetseb punktis (a, b) ja parabooli teljeks on sirge, mis on paralleelne teljega OY .

Kui parabooli asend on telje OY negatiivses suunas, siis silmanähtavalt võrrand omandab kuju: $(x - a)^2 = -2p(y - b)$.

Näitame nüüd, et kõverjoon

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (16)$$

on parabool. Selleks veendume, et võrrandi (16) võib väljendada kujul (15); kuna võrrand (15) väljendab parabooli, siis sellest järgneb, et kõverjoon (16) ka on parabool.

Jagame võrrandi (16) mõlemad pooled A -ga ja viime vaba liikme vasemale poolele; saame:

$$\frac{y}{A} - \frac{C}{A} = x^2 + \frac{B}{A}x.$$

Täiendame nüüd võrrandi parempoolse osa täisruuduni, milleks liidame võrrandi mõlemale poolele $\frac{B^2}{4A^2}$; siis saame:

$$\frac{y}{A} - \frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2} = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}$$

ehk

$$\frac{1}{A} \left(y - \frac{4AC - B^2}{4A} \right) = \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2.$$

Nüüd oletades, et

$$a = -\frac{B}{2A}, \quad b = \frac{4AC - B^2}{4A}, \quad 2p = \frac{1}{A},$$

saame võrrandi kujul (15): $2p(y - b) = (x - a)^2$.

Nii on näidatud, et võrrand (16) on parabooli võrrand.

N ä i d e 1. Konstrueerida parabool $y = x^2 - 4x - 5$.

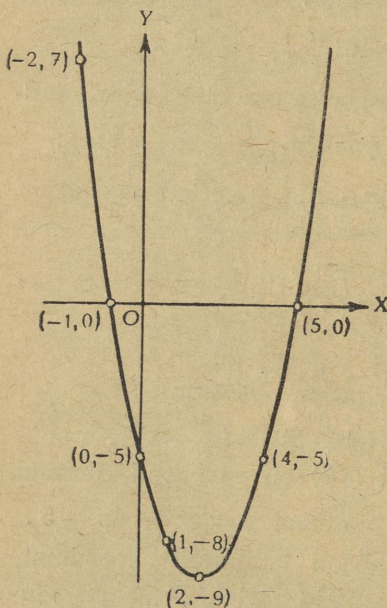
L a h e n d u s. Leiame parabooli lagipunkti koordinaadid; selleks liites võrrandi mõlemale poolele 9, saame võrrandi kujul:

$$y + 9 = (x - 2)^2.$$

Järelikult parabooli lagipunkt asetseb punktis $(2, -9)$. Parabooli konstrueerimiseks leiame parabooli ja koordinaattelgede lõikepunktid. Võttes $x = 0$, leiame, et $y = -5$. Järelikult kõverjoon lõikab telge OY punktis $(0, -5)$. Võttes nüüd $y = 0$ ja lahendades ruutvõrrandi

$$x^2 - 4x - 5 = 0,$$

määrame parabooli lõikepunkti teljega OX : $(5, 0)$, $(-1, 0)$. Kõverjoone täpsemaks väljajoonestamiseks leiame veel mõned kõvera punktid. Kui võtta näiteks $x = 1$, siis $y = -8$; kui võtta $x = 4$, siis $y = -5$; kui võtta $x = -2$, siis $y = 7$ jne. Konstrueerides need punktid ja ühendades nad sujuva joonega, saame joonisel 48 kujutatud graafiku.



Joonis 48.

parabooli võrrandit. Asendades nendega jooksivaid koordinaate, saame võrrandsüsteemi:

$$1 = A + B + C, \quad 3 = 4A + 2B + C, \quad 0 = C,$$

millest määrame A , B ja C : $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$. Järelikult otsitav võrrand on: $2y = x^2 + x$.

Märkus. Parabooli lagi-punkti koordinaatide määramiseks oleks võinud kasutada varem tuletatud valmis valemeid, kuid otstarbekohasem on rakendada käesolevas näites toodud meetodit.

Näide 2. Leida punkte $(1, 1)$, $(2, 3)$ ja $(0, 0)$ läbi-va parabooli võrrand, kui on teada, et sümmeetriateljeks on sirge, mis on paralleelne teljega OY .

Lahendus. Võtame parabooli võrrandi kujul:

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Antud punktide koordinaadid peavad rahuldama

parabooli võrrandit. Asendades nendega jooksivaid koordinaate, saame võrrandsüsteemi:

§ 31. **Kõverjoone võrrandid parameetrilisel kujul.** Sageli on sobiv väljendada kõverjoont mitte ühe võrrandiga, mis seob kõverjoone punkti jooksvaid koordinaate, vaid kahe võrrandiga, milledest üks määrab jooksva abstsissi x muutumise, sõltuvalt mõne muutuva suuruse muutumisest, ja teine — jooksva ordinaadi y muutumise, sõltuvalt sellest samast muutuvast suurusest. Seda kolmandat, abimuutajat, millest sõltub jooksvate koordinaatide x ja y muutumine, nimetatakse parameetriks; sellepärast nimetatakse kõverjoone mõlemaid võrrandeid parameetrilisteks. Selgitame öeldut näitega.

Näide. Antud on kõverjoone parameetrilised võrrandid $x = t^2$, $y = t$, kus t on parameeter. Konstrueerida kõverjoon.

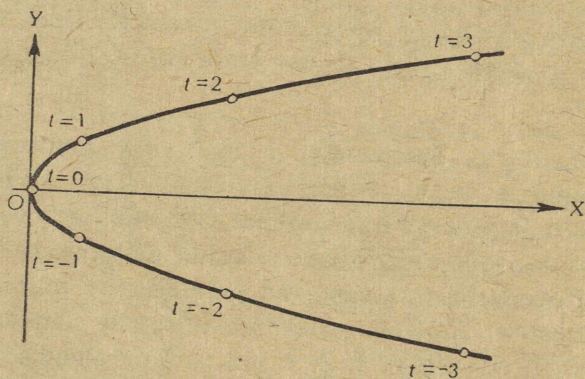
Lahendus. Parameetri t muutudes muutuvad ka koordinaadid x ja y . Seepärast punkt $M(x, y)$ muudab oma asendit ja joonestab tasapinnal mõnesuguse kõverjoone. Et selgitada selle kõverjoone kuju, ehitame terve rea punkti M asendeid, mis vastavad parameetri t mitmesugustele väärtustele. Anname sellele parameetrile näiteks väärtused $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ j. n. e. Korraldame arvutamise tulemused ülevaate kergendamise otstarbel tabelisse:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	9	4	1	0	1	4	9
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Konstrueerides nüüd punktid $(9, -3)$, $(4, -2)$, $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(9, 3)$ ja ühendades nad

sujuva joonega, saame võrrandite $x = t^2$ ja $y = t$ (joonis 49) kaudu antud kõverjoone graafiku.

Kõverjoon meenutab parabooli. Veendumiseks, et kõverjoon tõeliselt on parabool, määrame kahe antud võrrandi põhjal vahetu seose x ja y vahel, s. o. väljendame kõverjoone ühe võrrandi kaudu. Selleks elimineerime kahest antud võrrandist t . Kuna $t = y$, siis, asendades võrrandis $x = t^2$ parameetri t ordinaadiga y , saame võrrandi $x = y^2$. See võrrand osutubki meile tuntud parabooli võrrandiks.



Joonis 49.

Parameetrilisi võrrandeid kasutatakse sageli mehaanikas. Parameetris t võetakse harilikult aeg. Siis kõverjoon, mida väljendavad parameetrilised võrrandid, esitab tasapinnal liikuva punkti trajektoori. Sellest vaatekohast lähtudes vaadeldud näide annab meile niisuguse punkti trajektoori, mille liikumise seadus antakse võrrandis: $x = t^2$, $y = t$.

Võtame nüüd vaatlemisele, kuidas võib väljendada parameetrilisel kujul ringjoont ja ellipsit.

§ 32. Ringjoone parameetriselised võrrandid. Olgu $M(x, y)$ (joonis 50) mistahes punkt ringjoonel, mille raadius on r ja mille keskpunkt on koordinaatide alguses. Olgu t nurk, mille raadius OM moodustab teljega OX . Siinuse ja koosinuse definitsiooni põhjal on:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

Niisugused on ringjoone parameetriselised võrrandid, milles t on kesknurk XOM . Parameetri t muutumisel 0-st 2π -ni punkt $M(x, y)$ liikumisel moodustab ringjoone.

Võttes kummagi võrrandi mõlemad pooled ruutu ja liites nad vastavalt, saame:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \quad \text{ehk} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Siit näeme, et parameetri t elimineerimisega saime abstsiss x ja ordnaati y siduva, meile juba tuntud ringjoone võrrandi.

Näide. Punkt liigub jääva kiirusega v ringjoonel, mille raadius on a . Leida punkti liikumise seadus.

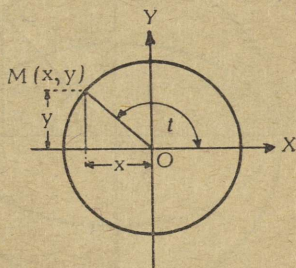
Lahendus. Aja t kestel läbib punkt kaare, mille pikkus on $s = vt$. Teisest küljest, $s = \varphi a$, kus φ on kesknurk, mis toetub kaarele s . Siit saame:

$$\varphi = \frac{s}{a} = \frac{vt}{a}.$$

Järelikult

$$x = a \cos \frac{vt}{a}, \quad y = a \sin \frac{vt}{a}.$$

§ 33. Ellipsi parameetiline võrrand. Olgu $M(x, y)$ ellipsi vabalt valitud punkt. Ehitame ellipsi suurteljele kui dia-



Joonis 50.

meetrile ringjoone (joonis 51). Joonestame läbi punkti M sirge LP , mis on paralleelne ellipsi väiketeljega. Võtame parameetriks nurga t ringi raadiuse OL ja telje OX vahel.

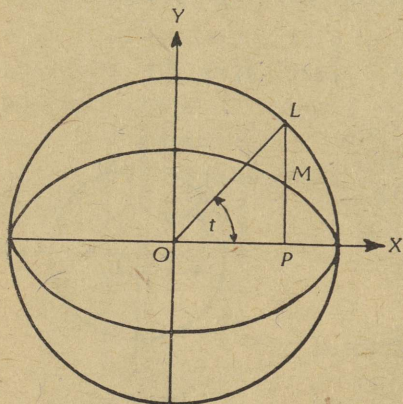
Siis saame:

$$OP = x = a \cos t.$$

Paragrahvist 22 me juba teame, et

$$\frac{MP}{LP} = \frac{b}{a},$$

kus b on ellipsi väiketelg. Kuid $MP = y$ ja $PL = OL \sin t = a \sin t$.



Joonis 51.

Järelikult

$$y = \frac{b}{a} a \sin t = b \sin t.$$

Seega ellipsi parameetrilised võrrandid on:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Jagades esimese võrrandi a -ga, teise b -ga, tõstes pärast seda mõlemad võrrandid ruutu ja liites osade kaupa, saame tuntud ellipsi võrrandi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§ 34. Ellipsi sirkel. Oletame, et kahte vastastikku rist-sirget OX ja OY lõikab mingisugune sirge punktides K ja L (joonis 52), ja olgu M mingi kindlaks määratud punkt sel sirgel. Tähistades selle punkti koordinaadid x -i ja y -ga,

nurga, mille sirge KL moodustab teljega OX , α -ga ja oletades, et

$$LM = a, \quad MK = b,$$

saame kolmnurkadest LQM ja MPK :

$$\left(\frac{MQ}{ML}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \alpha \text{ ja}$$

$$\left(\frac{MP}{MK}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \alpha, \text{ millest } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

See näitab, et punkt $M(x, y)$ asetseb ellipsil, mille teljed ühtivad sirgetega OX ja OY ja on võrdsed sirglõikude LM ja MK kahekordse pikkusega.

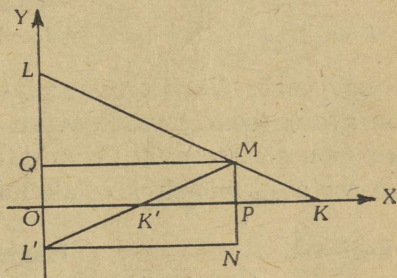
Kui kujutleda, et sirge KL muudab oma asendit nii, et punktid K ja L liiguvad telgedel OX ja OY ning sirglõik KL säilitab oma pikkuse, siis punkt M muudab pidevalt asendit, jäädes nimetatud ellipsile.

Kui vaatleme punkti M kui kuuluvat sirgele KL' , mis moodustab teljega OX nurga $(\pi - \alpha)$, siis kolmnurkadest MPK' ja MNL' leiame:

$$\left(\frac{NL'}{L'M}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \alpha \text{ ja } \left(\frac{MP}{MK'}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \alpha,$$

ning järelikult $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

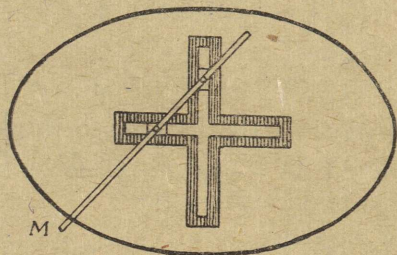
Nii näeme, et kui sirge liikudes selle sirge lõik koordinaattelgedel vahel säilitab oma pikkuse, siis selle sirge iga punkt, nii sisemine kui välimine, s. o. sirglõigul või samal sirgel väljaspool sirglõiku, joonestab ellipsi.



Joonis 52.

Sellel põhjened ellipsi ehitamine joonestava teraviku pideva liikumise kaudu, niinimetatud ellipsi sirkli abil.

Ellipsi sirkel (joonis 53) koosneb ristikujuulisest seadist, milles on kaks ristiseisvat väljalõiget. Nendes väljalõigetel liiguvad „liugurid“, milledele on kinnitatud liigenditel



Joonis 53.

liikuv varb. Varb on varustatud liikuva muhviga M , milles on avaus joonestava teraviku jaoks. Muhvi M edasiliikumisel joonestav teravik (kinnitatud muhvis M , kusjuures muhv on asetatud mõnele kindlale kohale varval) joonestab ellipsi.

Harjutusi.

Geomeetrilised kohad.

1. Leida niisuguste punktide geomeetrilise koha võrrand, milledest igaüks on teljest OX 5 korda kaugemal kui teljest OY .

Vastus: $y = 5x$.

2. Leida niisuguste punktide geomeetrilise koha võrrand, millest igaühe kaugus teljest OX on võrdne kahekordse kaugusega teljest OY pluss 3 pikkusühikut.

Vastus: $y = 2x + 3$.

3. Leida punktidest $(2, -3)$ ja $(3, 2)$ võrdseil kaugustel asetsevate punktide geomeetrilise koha võrrand.

Vastus: $x - y = 0$.

4. Punkt liigub tasapinnal nii, et tema kaugus teljest OY jääb kogu aja võrdseks kaugusega punktist $(5, 0)$. Leida punkti liikumisel tekkiva kõverjoone võrrand.

Vastus: $y^2 - 10x + 25 = 0$.

5. Punkt liigub tasapinnal nii, et tema kaugus punktist $(0, 3)$ ruutu tõstetult jääks võrdseks kaugusega teljest OY kuubis. Leida punkti liikumisel tekkiva kõverjoone võrrand.

$$\text{Vastus: } x^2 + (y - 3)^2 = x^3.$$

6. Leida niisuguste punktide geomeetrilise koha võrrand, millel on omadus, et tõus sirglõigul, mis ühendab koordinaatide algust geomeetrilise koha punktiga, on kaks korda suurem seda geomeetrilise koha punkti punktiga (a, a) ühendavad sirglõigu tõusust.

$$\text{Vastus: } xy - 2ax + ay = 0.$$

7. Punkt liigub tasapinnal niiviisi, et tema kaugus koordinaatide algusest jääb võrdseks seda punkti ja koordinaatide algust ühendava sirge tõusuga. Leida selle kõverjoone võrrand, mida tekitab punkt liikumisel.

$$\text{Vastus: } x^4 + x^2y^2 = y^2.$$

Ringjoon.

8. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on punktis $(3, -5)$ ja raadius on 4.

$$\text{Vastus: } x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0.$$

9. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoone raadius on 2 ja keskpunkt $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

$$\text{Vastus: } 5x^2 + 5y^2 + 8x - 6y - 15 = 0.$$

10. Leida telje OX lõikepunktid ringjoonega, mille diameetriks on punkte $(1, 2)$ ja $(-3, -4)$ ühendav sirglõik.

$$\text{Vastus: } (-1 \pm 2\sqrt{3}, 0).$$

11. Ringjoone diameetriks on sirge $3x - 4y + 12 = 0$ lõik koordinaattelgedel vahel. Leida ringjoone võrrand.

$$\text{Vastus: } x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0.$$

12. Leida võrrand ringjoonel, mille raadius on a ja mis puutub telge OY koordinaatide alguses.

$$\text{Vastus: } x^2 + y^2 \pm 2ax = 0.$$

13. Leida ringjoone $x^2 + y^2 + 2x + 16y - 42 = 0$ keskpunkt ja raadius.

$$\text{Vastus: } (-1, -8); \sqrt{107}.$$

14. Leida ringjoone $2x^2 + 2y^2 + 6x - 3y - 10 = 0$ keskpunkt ja raadius.

$$\text{Vastus: } \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right); \frac{5}{4} \sqrt{5}.$$

15. Tõestada, et kaks ringjoont on kontsentrilised, kui nende võrrandid erinevad ainult vabade liikmete väärtustelt.

16. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone võrrand, kui kolmnurga tippudeks on punktid $(0, 1)$, $(-2, 0)$ ja $(0, -1)$.

$$\text{Vastus: } 2x^2 + 2y^2 + 3x - 2 = 0.$$

17. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone võrrand, kui kolmnurga külgedeks on sirged $x + 2y - 3 = 0$, $3x - y - 2 = 0$ ja $2x - 3y - 6 = 0$.

$$\text{Vastus: } 7x^2 + 7y^2 - 19x + 11y - 6 = 0.$$

18. Leida koordinaattelgi puutuva ja punkti $(4, -2)$ läbiva ringjoone võrrand.

$$\text{Vastus: } x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0;$$

$$x^2 + y^2 - 20x + 20y + 100 = 0.$$

19. Koordinaattelgi puutuva ringjoone keskpunkt asetseb sirgel $3x - 5y + 15 = 0$. Leida ringjoone võrrand.

$$\text{Vastus: } 4x^2 + 4y^2 - 60x - 60y + 225 = 0; 64x^2 + 64y^2 + 240x - 240y + 225 = 0.$$

20. Näidata, et sirge $4x - 3y - 14 = 0$ on ringjoone $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ puutuja.

21. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ puutuja võrrand, kui puutepunktiks on $(-3, -4)$.

$$\text{Vastus: } 3x + 4y + 25 = 0.$$

22. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 13$ puutujate võrrandid, kui puutujad läbivad punkti $(1, 5)$.

$$\text{Vastus: } 3x + 2y - 13 = 0; 2x - 3y + 13 = 0.$$

23. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 52$ puutujate võrrandid, kui puutujad on paralleelsed sirgega $2x + 3y - 6 = 0$.

$$\text{Vastus: } 2x + 3y \pm 26 = 0.$$

Ellips.

24. Leida ellipsi $9x^2 + 25y^2 = 225$ telgede pikkused, ekstsentrilisus ja fookuste koordinaadid.

$$\text{Vastus: } 10, 6; \frac{4}{5}; (\pm 4, 0).$$

25. Leida ellipsi $3x^2 + 4y^2 = 2$ telgede pikkused, ekstsentrilisus ja fookuste koordinaadid.

$$\text{Vastus: } \frac{2}{3} \sqrt{6}; \sqrt{2}; \frac{1}{2}; (\pm \frac{1}{6} \sqrt{6}, 0).$$

26. Leida ellipsi $4x^2 + 2y^2 = 1$ lagipunktide ja fookuste koordinaadid ja ekstsentrismus.

$$\text{Vastus: } \left(\pm \frac{1}{2}, 0\right); \left(0, \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}\right); \left(0, \pm \frac{1}{2}\right); \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

27. Missuguste a ja b väärtuste puhul ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ läbib punkte $(2, 3)$ ja $(-1, -4)$.

$$\text{Vastus: } \frac{1}{7} \sqrt{385}, \frac{1}{3} \sqrt{165}.$$

28. Ellipsi kahe lagipunkti koordinaadid on $(\pm 6, 0)$ ja fookuste koordinaadid on $(\pm 4, 0)$. Leida ellipsi võrrand.

$$\text{Vastus: } 5x^2 + 9y^2 = 180.$$

29. Ellipsi fookuste koordinaadid on $(0, \pm 3)$ ja suurtelje pikkus 12. Leida ellipsi võrrand.

$$\text{Vastus: } 4x^2 + 3y^2 = 108.$$

30. Ellipsi väiketelje pikkus on 6 ja ühe fookuse koordinaadid on $(-4, 0)$. Leida ellipsi võrrand.

$$\text{Vastus: } 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

31. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi fookuste koordinaadid on $(0, \pm 5)$ ja ekstsentrismus $\frac{2}{3}$.

$$\text{Vastus: } 36x^2 + 20y^2 = 1125.$$

32. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi ekstsentrismus on $\frac{1}{3}$, ühe fookuse abstsiss on $\frac{3}{2}$ ja suurtelg ühtib teljega OX .

$$\text{Vastus: } 8x^2 + 9y^2 = 162.$$

H ü p e r b o o l .

33. Leida hüperbooli $4x^2 - 9y^2 = 36$ ekstsentrismus, fookuste koordinaadid ja asümptootide võrrandid.

$$\text{Vastus: } \frac{1}{3} \sqrt{13}; (\pm \sqrt{13}, 0); 2x \pm 3y = 0.$$

34. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookuste koordinaadid on $(\pm 4, 0)$ ja reaaltelg 6.

$$\text{Vastus: } 7x^2 - 9y^2 = 63.$$

35. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli asümptootideks on sirged $y = \pm \frac{3}{5}x$ ja fookusteks punktid $(\pm 2, 0)$.

$$\text{Vastus: } 153x^2 - 425y^2 = 450.$$

36. Leida punkti $(2, 1)$ läbiva hüperbooli võrrand, kui hüperbooli asümptootideks on sirged $y = \pm \frac{3}{4}x$.

$$\text{Vastus: } 9x^2 - 16y^2 = 20.$$

37. Leida punkti $(3, -1)$ läbiva võrdhaarse hüperbooli võrrand.

$$\text{Vastus: } x^2 - y^2 = 8.$$

38. Hüperbooli lagipunktide kaugus keskpunktist on $\frac{2}{3}$ fookuse ja keskpunkti vahelisest kaugusest. Leida hüperbooli asümptoodi ja reaaltelje vaheline nurk φ .

$$\text{Vastus: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{5}.$$

39. Ellipsi kaks lagipunkti asetsevad hüperbooli fookustes, kuna hüperbooli lagipunktid asetsevad ellipsi fookustes. Ellipsi võrrand on

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Leida hüperbooli võrrand.

$$\text{Vastus: } 9x^2 - 7y^2 = 63.$$

Parabool.

40. Määrata parabooli $y^2 = 2px$ parameetri p suurus, kui parabool läbib punkti $(2, 4)$.

$$\text{Vastus: } p = 4.$$

41. Leida parabooli võrrand, kui parabooli fookus on punktis $(-2, 0)$ ja parabooli teljeks on telg OX .

$$\text{Vastus: } y^2 = -8x.$$

42. Parabooli lagipunktiks on punkt (a, b) ja sümmeetriateljeks sirge, mis on paralleelne teljega OX . Tuletada parabooli võrrand, kui on teada, et parabooli parameetriks on p .

$$\text{Vastus: } (y - b)^2 = \pm 2p(x - a).$$

J u h i s. Vt. § 30.

43. Tõestada, et võrrand $x = My^2 + Ny + P$ väljendab parabooli.
Juhis. Vt. § 30.

44. Leida parabooli $y^2 + 4y - 6x + 7 = 0$ lagipunkti ja fookuse koordinaadid, telje ja juhtjoone võrrandid.

Vastus: $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$; $(2, -2)$; $y + 2 = 0$; $x + 1 = 0$.

45. Leida parabooli $4x^2 + 4x + 3y - 2 = 0$ lagipunkti ja fookuse koordinaadid, telje ja juhtjoone võrrandid.

Vastus: $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{16}\right)$; $2x + 1 = 0$; $16y - 19 = 0$.

46. Parabooli lagipunkt on punktis $(2, 3)$; parabool läbib koordinaatide algust ja parabooli telg on paralleelne teljega OX . Leida parabooli võrrand.

Vastus: $2y^2 - 12y + 9x = 0$.

47. Punkti $(-1, -1)$ läbiva parabooli lagipunkt on punktis $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$. Leida parabooli võrrand, kui tema telg on paralleelne teljega OY .

Vastus: $12x^2 + 36x + y + 25 = 0$.

48. Leida parabooli võrrand, kui koordinaatide algus langeb ühte parabooli fookusega, teljeks on telg OX ja parameeter on p .

Vastus: $y^2 = \pm 2px + p^2$.

49. Leida parabooli võrrand, kui selle telg ja juhtjoon on vastavalt telgedeks OX ja OY ; parameeter on p .

Vastus: $y^2 = \pm 2px - p^2$.

50. Leida parabooli võrrand, kui lagipunkt asetseb punktis $(3, 2)$ ja fookus punktis $(5, 2)$.

Vastus: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

51. Leida parabooli võrrand, kui lagipunkt asetseb punktis $(-1, -2)$ ja fookus punktis $(-1, -4)$.

Vastus: $x^2 + 2x + 8y + 17 = 0$.

52. Leida parabooli võrrand, kui parabooli fookus on punktis $(2, -1)$ ja juhtjooneks on sirge $y - 4 = 0$.

Vastus: $x^2 - 4x + 10y - 11 = 0$.

53. Leida parabooli võrrand, kui parabooli lagipunkt asetseb punktis $(-2, -5)$ ja juhtjooneks on sirge $x - 3 = 0$.

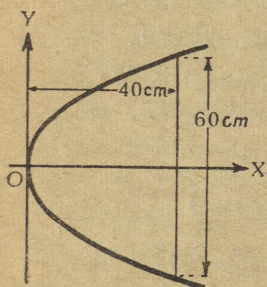
Vastus: $y^2 + 10y + 20x + 65 = 0$.

54. Parabooli juhtjooneks on sirge $y + 4 = 0$. Lagipunkt asetseb punktis $(5, -2)$. Leida parabooli võrrand.

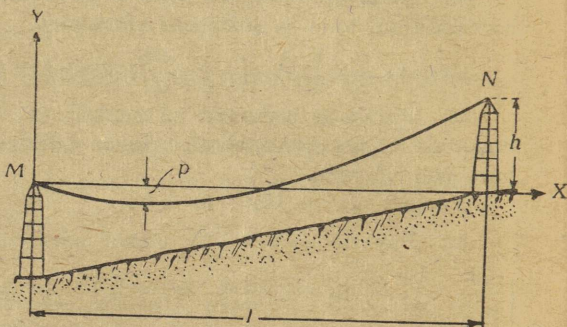
Vastus: $x^2 - 10x - 8y + 9 = 0$.

55. Sillakaarel on parabooli kaju. Määrata selle parabooli parameeter p , teades, et kaare laius on 24 m ja kõrgus 6 m.

Vastus: $p = 12$.



Joonis 54.



Joonis 55.

56. Joonisel 54 on kujutatud paraboolse peegli pikilõige. Leida peegli fookuse abstsiss joonise andmetel.

Vastus: $x = 5,625$.

57. Oletades, et traat, mis ühendab punkte M ja N (joonis 55), omab parabooli kaju, leida parabooli võrrand, kui $p = 0,1$; $h = 1$ ja $l = 10$.

Vastus: $y = -0,02(1 + \sqrt{11})x + 0,002(6 + \sqrt{11})x^2$.

J u h i s. Võtta parabooli võrrand kujul $y = Ax^2 + Bx + c$. Lagipunkti ordinaat määratakse seosega $b = \frac{4AC - B^2}{4A}$. Peale selle parabool läbib punkte M ja N , millele koordinaadid on teada. Nende tingimuste põhjal võib koostada kolm võrrandit A , B ja C leidmiseks.

Kõverjoonte parameetrilised võrrandid.

58. Konstrueerida kõverjoonte graafikud, kui kõverjooned on antud võrranditega:

a) $x = t^2$, $y = t + 1$;

b) $x = \frac{4}{t^2}$, $y = \frac{4}{t}$;

$$\text{c) } x = t, \quad y = \frac{a^3}{a^2 + t^2}; \quad \text{d) } x = \frac{2a}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2a}{t(1 + t^2)}.$$

59. Näidata, et kõverjoon, mida väljendavad võrrandid $x = \frac{2p}{t^2}$, $y = \frac{2p}{t}$, on parabool.

60. Mürsk väljub kahurist algkiirusega v_0 , moodustades horisondiga nurga α . Selle mürsu liikumise seaduse määravad võrrandid:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

(g — raskuskiirendus, t — aeg).

Leida trajektoori võrrand, elimineerides parameetri t .

$$\text{Vastus } 2v_0^2 y^2 \cos^2 \alpha = v_0^2 x \sin 2\alpha - g x^2.$$

61. Kasutades ülensande 60 võrrandeid, leida, missuguse aja möödumisel ja kui kaugele langeb mürsk.

$$\text{Vastus: } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}; \quad x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

62. Kasutades ülensande 60 võrrandeid, leida, missuguse nurga horisondiga peab moodustama kahuri toru, et saavutada suurimat laskekaugust.

$$\text{Vastus: } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

II OSA.

DIFERENTSIAALARVUTUSE ELEMENDID.

IV peatükk.

Piiride teooria.

§ 35. Muutuvad ja jäävad suurused. Lõpmatult kahanev suurus. Suurused, mis esinevad mingi nähtuse uurimisel, jagunevad muutuvateks ja jäävateks (konstantseteks).

Muutuvaks suuruseks nimetatakse niisugust suurust, mis antud nähtuse tingimustel võib omandada mitmesuguseid arvulisi väärtusi — kas piiratud vahemikus asuvaid või ilma etteantud vahemikuta missuguseid tahes väärtusi.

Jäävaks suuruseks nimetatakse niisugust suurust, mis kogu uurimise kestel säilitab ühte ja sama arvulist väärtust.

Nii näiteks analüütilises geomeetrias sirgjoone jooksvad koordinaadid (x, y) on muutuvad suurused, aga parameetrid, mis määravad sirge asendi valitud koordinaatide süsteemi suhtes, on jäävad suurused.

Iga antud küsimuse asetuses määrab, missuguseid küsimuses vaadeldavaid suurusi tuleb lugeda muutuvateks suurusteks (lühidalt muutujateks), missuguseid jäävateks.

Nii näiteks kolmnurgas, mille tipp liigub mööda alusega paralleelset sirget, nurgad ja küljed on muutuvad suurused,

aga alus, kõrgus, pindala ja nurkade summa — jäävad suurused.

Kui aga kolmnurga tipp liigub mööda sirget, mis pole paralleelne alusega, siis ka kõrgus ja pindala on muutuvateks suurusteks ja jäävateks ainult alus ja nurkade summa.

Muutes ülesande tingimusi, võib teha muutuvaks ka alust, kuid kolmnurga nurkade summa on ikka jääv, s. o. 180° .

Siit järene, et on tarvis eraldada kahte liiki jäävaid suurusi — suurused, mis säilitavad kindlaid arvulisi väärtusi ainult antud ülesande tingimuste puhul, ja suurused, mis omavad muutumatuid arvulisi väärtusi ülesande tingimustest olenemata. Esimest liiki suurusi nimetatakse mõnikord parameetreiks ja teisi — absoluutseteks jäävateks suurusteks (absoluutseteks konstantideks).

Nii, sirge võrrandis telglõikudega

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

suurustel a ja b on antud võrrandis kindlad arvulised väärtused, mingi teise sirge puhul arvudel a ja b on juba teised arvulised väärtused. Järelikult a ja b on parameetrid.

Absoluutsete jäävate suuruste hulka kuuluvad niisugused suurused, nagu kolmnurga nurkade summa, ringjoone pikkuse ja diameetri suhe (arv π), $\sqrt{2}$, 7 , $5\frac{3}{4}$ jne.

Jäävad suurused tähistatakse harilikult tähestiku esimeste tähtedega: a , b , c , ..., muutuvad suurused aga tähestiku viimaste tähtedega: x , y , z , ...

Edaspidi eeldame kõikjal, et suuruste kõik vaadeldavad väärtused on reaalsed arvud, ja imaginaarsete arvude esinemisel juhime sellele tarviduse korral tähelepanu.

Muutuvate suuruste hulgas, millede muutumiste iseloom võib olla väga mitmesugune, omavad kõrgemas matemaati-

kas eriti tähtsat kohta lõpmatult kahanevad suurused. Lõpmatult kahanevaks nimetatakse muutuvat suurust, mille muutumise protsessi omapärasest iseloomu väljendab järgmine definitsioon:

Muutuvat suurust a nimetatakse lõpmatult kahanevaks, kui muutumisel tema absoluutväärtus $|a|$ saab ja edasisel muutumisel ka jääb väiksemaks igast kui tahes väikesest etteantud positiivsest arvust ε , s. o. kui, alates a mõnesugusest väärtusest ja edasisel a muutumisel on kehtiv võrratus

$$|a| < \varepsilon,$$

ükskõik kui väike positiivne arv ε ka ei oleks.

Selgitame seda definitsiooni näitega.

Näide 1. Murd $a = \frac{1}{x}$, kus x on positiivne arv, on lõpmatult kahanev suurus, kui x piiramatult kasvab. Tõepoolest, kui väikese positiivse arvu ε me ka ei võtaks, saab ikka niisugune moment, mil murd $\frac{1}{x}$ saab väiksemaks sellest etteantud arvust, s. o. kus on õige võrratus $\frac{1}{x} < \varepsilon$.

Nii, kui võtame $\varepsilon = \frac{1}{1\,000\,000}$, siis võrratus

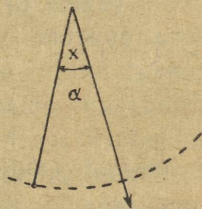
$$\frac{1}{x} < \frac{1}{1\,000\,000}$$

leiab aset, kui x kasvades saab suuremaks kui 1 000 000. On silmanähtav, et edasisel x -i kasvamisel murd $\frac{1}{x}$ jääb väiksemaks kui $\frac{1}{1\,000\,000}$. Sama arutlust võiks korrata, kui annaksime ette mitte 0,000001, vaid veel väiksema arvu, näiteks 0,0000001 või 0,00000001 jne.

Niisiis murd $\frac{1}{x}$ antud x -i muutumise protsessis rahuldab kõiki tunnuseid, mis määravad lõpmatult kahanevat suurust.

Näide 2. Murd $-\frac{1}{x}$, kus x on positiivne arv, x -i pii-ramatul kasvamisel on ka lõpmatult kahanev suurus, sest murdudel $-\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{x}$ on ühesugused absoluutväärtused. Järe-likult kõik, mis näites 1 on öeldud murru $\frac{1}{x}$ kohta, jääb õigeks ka murru $-\frac{1}{x}$ kohta.

Näide 3. Vaatleme pendlit, mis väljaviiduna tasa-kaalu asendist hakkab võnkuma (joonis 56). Määrame pendli asendi niisuguse nurga α kaudu, mille pendel moodustab vertikaalsirgega (tasakaalu asend). Nurga α loeme posi-tiivseks või negatiivseks — olenevalt sel-lest, kas pendel asetseb vertikaalsihist paremal või vasemal. Eeldades takistuse olemasolu, näeme, et alates teatud momen-dist, α kõrvalekaldumine saab ja pärast seda jääb väiksemaks igast etteantud kui-tahes väikesest positiivsest arvust. Järelikult α on lõpmatult kahanev suurus, kusjuures α omandab muutumise protsessis kord positiivseid, kord negatiivseid väärtusi.



Joonis 56.

Näide 4. Näitame, et $\sin x$ x -i lähenemisel nullile on lõpmatult kahanev suurus.

Tõepoolest, anname ette mingisuguse väikese positiivse arvu ε , näiteks $\varepsilon = 0,01$. Trigonomeetriast on teada, et igasuguse x -i väärtuse puhul (väljaarvatud $x = 0$) $|\sin x| < < |x|$. Kuna x läheneb nullile, siis alates mõnesugusest x -i väärtusest ja x -i edasisel muutumisel on kehtiv võrratus $|\sin x| < 0,01$ ja järelikult ka võrratus $|\sin x| < 0,01$, sest $|\sin x| < |x|$. Sama oleks võinud korrata, kui me oleksime

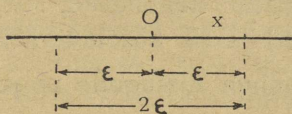
andnud ette mitte arvu 0,01, vaid veel väiksema arvu, näiteks 0,001 või 0,0001 jne. — üldse igasuguse kuitahes väikese positiivse arvu ε . Nimetatud x -i muutumise laadi juures (s. o. x -i lähenemisel nullile) jõuame niisugusele momendile, kus tema absoluutväärtus, s. o. $|x|$ saab väiksemaks ja edasisel muutumisel ka jääb väiksemaks kui ε . Aga siis, lähtudes võrratusest $|\sin x| < |x|$, ka $\sin x$ absoluutväärtus, s. o. $|\sin x|$ saab ja edaspidi jääb väiksemaks kui ε . See tähendabki, et $\sin x$ on lõpmatult kahanev suurus.

Läbiarutatud näidetest nähtub, et lõpmatult kahaneva suuruse muutumise laad võib olla väga mitmesugune: lõpmatult kahanev suurus võib olla püsivalt positiivne (näide 1), negatiivne (näide 2), kord positiivne, kord negatiivne (näide 3). Kuid igal juhul lähenevad lõpmatult kahaneva suuruse väärtused nullile, seejuures kas nii, et nad kunagi nullini ei ulatu (nagu näidetes 1 ja 2), või nii, et erandjuhul omandavad nulliga võrdsed väärtused (pendli kaldenurk tasakaalu punktist läbiminekul on null).

Samad tulemused järgnevad vahetult ka lõpmatult kahaneva suuruse definitsioonist. Nii, kui lõpmatult kahanev suurus absoluutväärtuselt saab väiksemaks kuitahes väikesest positiivsest arvust, siis on selge, et lõpmatult kahaneva suuruse väärtused lähenevad kuitahes lähedale nullile; kui x on lõpmatult kahanev, siis ka $-x$ on lõpmatult kahanev, sest arvudel x ja $-x$ on ühesugused absoluutväärtused. Võrratusest $|x| < \varepsilon$ järgneb ka, et alates mingisugusest väärtusest, lõpmatult kahaneva suuruse x kõik väärtused saavad ja jäävad suuremaks kui negatiivne arv $-\varepsilon$ ja vähemaks kui positiivne arv $+\varepsilon$ kui väike ka ε ei oleks, s. o. ülaltoodud võrratuse asemel võime kirjutada kahekordse võrratuse: $-\varepsilon < x < +\varepsilon$.

Graafiliselt võib illustreerida lõpmatult kahanevat suurust järgmiselt. Võtame suunatud sirge koordinaatide algusega O (joonis 57). Siis kujutab muutuvat suurust x sel sir-

gel liikuv punkt, mis võtab endale selle või teise asendi, vastavalt arvulisele väärtusele, mille omandab suurus x sellel või teisel momendil. Ülaltoodud kahekordsest võrratusest nähtub, et kui nullpunktist paremale või vasemale võtta sirglõik, mille pikkus on ε , siis lõpmatult kahanevat suurust kujutav punkt peab sattuma sissepoole otspunkte sirglõigule, mille pikkus on 2ε ja keskpunkt punktis O , ja edasisel muutumisel x peab jääma sellele sirglõigule sissepoole otspunkte, ükskõik kui väike 2ε ka ei oleks. Nii on siis näitlikult selge, et lõpmatult kahaneva suuruse väärtused lähenevad nullile. Lõpuks märgime, et mingisugune jääv suurus c ,



Joonis 57.

mis on erinev nullist, ei või olla lõpmatult kahanev, kuna ta ei saa kunagi olla absoluutväärtuselt väiksem kui ε , kui $0 < \varepsilon < |c|$. Nulli suhtes see väide ei ole kehtiv. Meie võime nulli nimetada lõpmatult kahanevaks suuruseks, vaadeldes teda kui muutuvat suurust, mis püsivalt omandab ühe ja sama arvulise väärtuse; tõepoolest, missuguse jääva positiivse arvu meie ka ei võtaks, ikka on õige võrratus $0 < \varepsilon$, s. o. alati on täidetud tingimus, mis määrab lõpmatult kahanevat suurust. Selline kokkulepe nulli suhtes võimaldab edaspidi lühendada rea teoreemide sõnastamist. Iga lõpmatult kahanev suurus, mis ei ole püsivalt nulliga võrdne, on tingimata muutuv.

§ 36. Lõpmatult kahanevate suuruste põhiteoreemid.

I. Lõpmatult kahanevate suuruste algebraalne summa igasuguse (muutumatu)

arvu liidetavate puhul on lõpmatult kahanev suurus.

Tõestus. Tõestame selle teoreemi kolmest liidetavast koosneva summa kohta: $\alpha + \beta - \gamma = \sigma$.

Olgu ε kuitahes väike positiivne arv. On tarvis tõestada, et saabub niisugune moment, kus on kehtiv ja ka edaspidi jääb kehtivaks võrratus

$$|\sigma| < \varepsilon.$$

Kuigi muutujate α , β ja γ muutumise iseloom nullile lähenemise protsessis on erinev iga üksiku liidetava suhtes, kuid et nad kõik on lõpmatult kahanevad, siis igauks neist (üks varem, teine hiljem) saab absoluutväärtuselt väiksemaks kui $\frac{\varepsilon}{3}$. Järelikult saabub niisugune moment, millest alates kehtivad võrratused:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\gamma| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Siis saame:

$$|\sigma| = |\alpha + \beta - \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |-\gamma| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

seda aga oligi tarvis tõestada.

Täiesti samal viisil võib tõestada teoreemi ükskõik kui suure muutumatu suurusega liidetavate arvu puhul.

Märkus. Tõestatud teoreem on kehtiv ainult tingimusel, kui summa koosneb muutumatust arvust liidetavaist. Kui aga üheaegselt iga liidetava lähenemisega nullile liidetavate arv piiramatult kasvab, siis teoreem võib osutuda kehtetuks. Võtame näiteks sirglõigu, mille pikkus võrdub pikkuse ühikuga, ja hakkame jaotama seda 2, 3, 4, ..., 10, ..., 100..., üldse n võrdseks osaks. Iga osa pikkus on $\frac{1}{n}$, aga kõikide osade summa on üks ühik. Suurendame nüüd piiramatult osade arvu n . Siis iga osa,

mis võrdub $\frac{1}{n}$, on lõpmatult kahanev suurus (vt. näidet 1, § 35.). Kuid kõikide osade summa arvu n mistahes väärtusel on ikkagi üks ja ei ole sugugi mitte lõpmatult kahanev. See tuleb sellest, et siin on tegemist mitte liidetavate muutu-matu arvuga, vaid summaga, mille liidetavate arv piiramatult kasvab.

II. Piiratud suuruse ja lõpmatult kahaneva suuruse korrutis on lõpmatult kahanev suurus.

Kõigepealt tähendame, et piiratud muutuva suuruse all tuleb mõista suurust, mille absoluutväärtus muutumisel ikka jääb väiksemaks teatud jäävast positiivsest arvust.

Nii näiteks, antud ringisse, mille raadius on R , joonestatud hulknurga übermõõt on piiratud muutuv suurus, sest hulknurga külgede arvu suurenemisel jääb übermõõt alati väiksemaks kui $2\pi R$ (ringjoone pikkus).

Asume nüüd teoreemi tõestamisele.

Tõestus. Olgu piiratud suurus y , lõpmatult kahanev suurus α ja nende suuruste korrutis σ , seega

$$\sigma = y \cdot \alpha.$$

On tarvis tõestada, et σ on lõpmatult kahanev suurus, s. o. et alates σ teatud väärtusest ja σ edasisel muutumisel on õige võrratus

$$|\sigma| < \varepsilon,$$

kus ε on etteantud kuitahes väike positiivne arv.

Kui y on piiratud suurus, siis leidub niisugune positiivne arv N , et $|y| < N$. Suurus α on lõpmatult kahanev: sellepärast saabub niisugune moment, et on õige ja edasi ka jääb õigeks võrratus $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{N}$. Siis saame:

$$|\sigma| = |y \cdot \alpha| = |y| \cdot |\alpha| < N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

Märkus 1. On ilmne, et jääv suurus on piiratud suurus. Sellepärast jääb teoreem õigeks ka sel juhul, kui tegur on jääv arv.

Märkus 2. Lõpmatult kahanev suurus on ka piiratud suurus. Sellepärast jääb teoreem õigeks ka sel juhul, kui mõlemad tegurid on lõpmatult kahanevad.

Märkus 3. See teoreem on laiendatav igasuguse muutumatu arvu tegureile, millede hulgas kasvõi ainult üks peab olema lõpmatult kahanev suurus, aga teised võivad olla piiratud muutuvad, jäävad või ka lõpmatult kahanevad suurused.

§ 37. Lõpmatult kasvav suurus. Lõpmatult kasvava suuruse all mõistetakse niisugust muutuvat suurust, mis oma muutumise protsessis, alates mõnest väärtusest, saab ja siis ka jääb absoluutväärtuselt suuremaks ükskõik kui suurest etteantud positiivsest arvust.

Kui tähistame lõpmatult kasvavat suurust x -ga, siis muutuja x -i muutumine iseloomustub sellega, et alates x -i teatud väärtusest ja kõigi järgnevate väärtuste puhul on kehtiv võrratus

$$|x| > N,$$

kus N on mistahes etteantud positiivne arv.

Niisiis lõpmatult kasvav suurus ei ole piiratud suuruseks. Graafiliselt kujutab lõpmatult kasvavat suurust arvsirgel liikuv punkt, mille kaugus nullpunktist piiramatult kasvab, s. o. saab ja edasisel liikumisel jääb suuremaks vabalt võetud ükskõik kui suurest arvust $N > 0$. Lõpmatult kasvava suuruse näitena võib esineda $y = \operatorname{tg} x$ x -i lähenemisel nurgale $\frac{\pi}{2}$.

Kui x läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le esimeses kvadrantis, s. o. jäädes püsivalt väiksemaks kui $\frac{\pi}{2}$, siis $\operatorname{tg} x$ väärtused, olles posi-

tiivsed, piiramatult kasvavad. Kui x läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le teises kvadrantis, s. o. jäädes püsivalt suuremaks kui $\frac{\pi}{2}$, siis $\operatorname{tg} x$ väärtused, jäädes negatiivseiks, absoluutväärtuselt piiramatult kasvavad. Lõpuks, kui x , lähenedes nurgale $\frac{\pi}{2}$, omandab väärtusi nii suuremaid kui väiksemaid $\frac{\pi}{2}$ -st, siis $\operatorname{tg} x$, piiramatult kasvades absoluutväärtuselt, saab kord positiivseks, kord negatiivseks.

§ 38. Seos lõpmatult kahaneva ja lõpmatult kasvava suuruse vahel. Kui x on lõpmatult kahanev suurus, siis selle pöördväärtus, s. o. $\frac{1}{x}$, on lõpmatult kasvav suurus.

Tõepoolest, kui murru $\frac{1}{x}$ nimetaja piiramatult läheneb nullile, omandades ikka väiksemaid ja väiksemaid absoluutväärtusi, siis murd $\frac{1}{x}$ ise absoluutväärtuselt piiramatult kasvab. Nii et missuguse positiivse kuitahes suure arvu N meie ka ette ei annaks, alates mõnesugusest x -i väärtusest, saab ja edasisel muutumisel jääb õigeks võrratus $\left| \frac{1}{x} \right| > N$.

Et see tõepoolest on nii, selles on kerge veenduda järgmisel viisil. On selge, et on kehtiv võrdus: $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$. Järelikult võrratus $\left| \frac{1}{x} \right| > N$ on samaväärne võrratusega

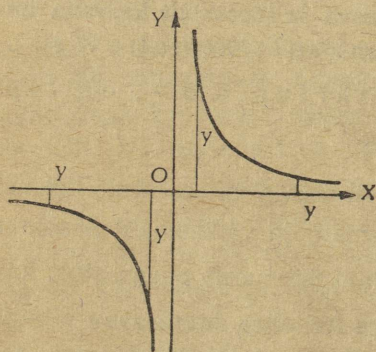
$$\frac{1}{|x|} > N,$$

mis täitub tingimusel $|x| < \frac{1}{N}$. Selle võrratuse kehtivus on silmanähtav, sest tingimuse järgi on x lõpmatult kahanev suurus. Järelikult on õige ka lähevõrratus $\left| \frac{1}{x} \right| > N$.

Võtame:

$$y = \frac{1}{x}$$

ja nagu ennegi loeme x lõpmatult kahanevaks suuruseks. Oletame, et x läheneb nullile, omandades järjestikku eranditult kõiki arvulisi väärtusi, mis on küllaldaselt lähedad nullile. Nagu on teada analüütilisest geometriast (vt. § 28), võrrand $y = \frac{1}{x}$ väljendub graafiliselt hüperbooli haruna, asendiga esimeses kvadrantis (joonis 58). Selle järgi, kui



Joonis 58.

das abstsiss x läheneb nullile, ordinaadi y väärtused piiramatult suurenevad ja kõverjoon samuti piiramatult tõuseb ülespoole, lähenedes pidevalt ordinaatteljele, kuid kunagi selleni mitte jõudes. Abstsissi x lähenedes nullile telje OX negatiivsest küljest hüperbooli vastav haru piiramatult langeb allapoole telje OY negatiivses suunas, lähenedes pidevalt sellele teljele, kuid kunagi selleni mitte jõudes (joonis 58).

Kui suure positiivse arvu meie ordinaadi y muutumisel ka ei võtaks, saabub niisugune moment (s. o. leidub niisugune abstsissi x väärtus), et $|y|$ ületab antud arvu ja edasisel x -i lähenemisel nullile jääb suuremaks sellest arvust. Järelikult lõpmatult kahanevale abstsissile x (x läheneb nullile) vastab lõpmatult kasvav ordinaat y .

Ümberpöördult, kui x on lõpmatult kasvav suurus, siis $\frac{1}{x}$ on lõpmatult kahanev suurus.

Tõepoolest, kui tähistame ε -ga kuitahes väikese positiivse arvu, siis võrratus

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

kehtib, alates x -i väärtusest, mis rahuldab võrratust:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Kuna x on lõpmatult kasvav suurus, siis niisuguse x -i väärtuse olemasolu, millest alates ülalnimetatud võrratus oleks rahuldatud, on silmanähtav.

Kui x ja y osutuvad jooksvateks koordinaatideks, siis $y = \frac{1}{x}$, nagu nägime, esitab graafiliselt võrdhaarset hüperbooli (joonis 58). Nüüd huvitavad meid hüperbooli harude need osad, mis vastavad abstsissi x piiramatult kasvavatele absoluutväärtustele. Hüperbooli parempoolne haru, selle järgi kuidas kasvab x , läheneb piiramatult teljele OX . Ordinaadi väärtused jäävad ikka väiksemaks ja väiksemaks ja lähenevad nullile. Kui x eemaldub telje OX negatiivses suunas, ordinaadi y väärtused jäävad kogu aja negatiivseteks, kuid absoluutväärtuselt vähenevad, lähenedes nullile, mis nähtub näitlikult hüperbooli pahempoolse haru vaatlemisel (joonis 58).

§ 39. Muutuva suuruse piiri mõiste. Juba elementaar-geomeetrias tutvusime muutuvate suurustega, millede muutumine toimub selliselt, et muutuv suurus läheneb mõnele kindlale arvule nii, et vahe nende vahel saab kuitahes väikeseks. Neil tingimustel nimetatakse seda arvu muutuva suuruse piirväärtuseks ehk muutuja piiriks.

Nii näiteks antud ringisse joonestatud korrapärase hulknurga pindala tema külgede arvu piiramatul kasvamisel läheneb jäävale ringi pindalale nii, et nende vahe saab kuitahes väikeseks. Järelikult võrdub ringisse joonestatud kor-

rapärase hulknurga pindala piir hulknurga külgede arvu piiramatul suurenemisel ringi pindalaga.

Diferentsiaal- ja integraalarvutus käsitlebki peamiselt seda liiki muutuvaid suurusi.

Kui tähistame sedalaadi muutuva suuruse y -ga, aga tema piiri tähistame A -ga, siis piirile läheneva muutuva suuruse kirjeldatud muutumine iseloomustub, nagu see selgesti on näha, sellega, et vahe

$$y - A$$

absoluutväärtuselt, alates mõnesugusest y -i väärtusest ja ka y -i edasisel muutumisel, saab ja jääb väiksemaks kui tahes väikesest etteantud arvust ε , s. o. alates mõnesugusest y -i väärtusest, ja ka y -i edasisel muutumisel on õige võrratus

$$|y - A| < \varepsilon,$$

kui väike ka positiivne arv ε ei oleks. Tuletades meelde lõpmatult kahaneva suuruse definitsiooni (vt. § 35), näeme, et vahe $y - A = a$ on lõpmatult kahanev suurus.

Järelikult arvu A nimetatakse muutuva suuruse y piiriks, kui vahe

$$y - A = a$$

on lõpmatult kahanev suurus.

Öeldakse ka, et muutuja y läheneb piirile A (A on jääv arv), kui vahe $y - A = a$ on lõpmatult kahanev.

Võrdusest $y - A = a$ saame:

$$y = A + a,$$

s. o. muutuvat suurust y , mille piiriks on A , võib väljendada kahe liidetava summana: jääva A (s. o. piiri) ja lõpmatult kahaneva a summana.

Ümberpöördult, kui muutuv suurus on väljendatud arvu A ja lõpmatult kahaneva suuruse α summana, siis A on muutuva suuruse piir.

Tõepoolest, võrdusest

$$y = A + \alpha \text{ saame: } y - A = \alpha,$$

kus α on lõpmatult kahanev suurus. Kuid siis järeldame piiri definitsioonist, et arv A on muutuja y piir.

Piiri mõiste definitsioonist järgneb:

1. Lõpmatult kahaneva suuruse α piiriväärtus on null. Tõepoolest, vahe $\alpha - 0 = \alpha$ on lõpmatult kahanev suurus.

2. Kui $\lim \alpha = 0$, siis α on lõpmatult kahanev suurus. Tõepoolest, võrdusest

$$\lim \alpha = 0$$

järgneb, et vahe

$$\alpha - 0$$

on lõpmatult kahanev suurus. Kuid

$$\alpha - 0 = \alpha;$$

tähendab, α on lõpmatult kahanev suurus.

3. Jääva suuruse c piiriks on jääv suurus ise.

Jäävat suurust võime kujutleda kui muutujat y , mis oma muutumise protsessis püsivalt omandab ühe ja sama arvulise väärtuse c .

Siis vahe

$$y - c = c - c = 0$$

on lõpmatult kahanev suurus (vt. § 35 lõppu), millest järgneb, et c piir on c ise.

Seda, et arv A on muutuva suuruse y piiriks, kirjutame lühidalt:

$$\lim y = A .$$

Kui muutuv suurus x piiramatult kasvab, omandades positiivseid väärtusi, siis kirjutatakse:

$$\lim x = +\infty \text{ ehk } x \rightarrow +\infty$$

(loetakse: x -i piir on pluss lõpmatus või x läheneb pluss lõpmatusele).

Kui x absoluutväärtuselt piiramatult kasvades jääb püsivalt negatiivseks, siis kirjutatakse:

$$\lim x = -\infty \text{ ehk } x \rightarrow -\infty$$

(loetakse: x -i piir on miinus lõpmatus või x läheneb miinus lõpmatusele).

Kui aga x absoluutväärtuselt saab kord positiivseks, kord negatiivseks, siis kirjutatakse:

$$\lim x = \infty \text{ ehk } x \rightarrow \infty$$

(loetakse: x -i piir on lõpmatus või x läheneb lõpmatusele).

Niisuguse muutuva suuruse näiteks võib olla funktsioon $\operatorname{tg} x$ tema argumendi x lähenemisel väärtusele $\frac{\pi}{2}$. Kirjutatakse $\lim \operatorname{tg} x = +\infty$, kui x läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le kasvades, s. o. jäädes esimesse kvadranti, ja järelikult $\operatorname{tg} x$ piiramatult kasvab, omandades ainult positiivseid väärtusi. Kui x läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le kahanedes, s. o. jäädes teise kvadranti, ja järelikult $\operatorname{tg} x$ absoluutselt väärtuselt piiramatult kasvades omandab ainult negatiivseid väärtusi, siis kirjutatakse $\lim \operatorname{tg} x = -\infty$.

Viimaks, kui x läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le, omandades väärtusi kord esimeses, kord teises kvadrantis, siis kirjutatakse $\lim \operatorname{tg} x = \infty$ või $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$. Sellejuures on tarvis pidada meeles, et sellisel kirjutamisviisil on puht kõkkuleppe ise-

loom, sest antud juhul ei ole ühtegi arvu, millele tg x piiramatult läheneks.

Sümbolid $+\infty$, $-\infty$ ja ∞ ei ole arvud, vaid on ainult lõpmatult kasvava muutuva suuruse tingmärkideks.

Nagu näeme, lõpmatult kasvaval suurusel ei ole piiri. Kuid ka piiratud muutujate seas on muutujaid, millel ei ole piiri.

Näiteks suurus $y = \sin x$ x -i piiramatul kasvamisel ei lähene ühelegi piirile, sest $\sin x$ seejuures kõigub $+1$ ja -1 vahel ja vahe $y - A$ ei ole lõpmatult kahanevaks suuruseks ei ühegi arvu A puhul.

Toome nüüd mõned näited muutuvatest suurustest, millel on olemas piirid.

1. Olgu $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ ja $x \rightarrow 1$. Siin lugeja ja nimetaja lähenevad nullile, kuid kuidas muutub nende suhe, seda otseselt ei ole näha.

Andes x -le järjestikku väärtused:

$$x = 1,1; x = 1,01; x = 1,001; x = 1,0001; \dots\dots,$$

leiame y -i vastavad väärtused:

$$y = 5,1; y = 5,01; y = 5,001; y = 5,0001; \dots\dots$$

y -i arvuliste väärtuste vaatlemisel nagu selguks, et y -i pii-riks on arv 5. Selle väitmisel on tarvis tõestada, et vahe

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} - 5 = \alpha$$

on lõpmatult kahanev suurus. Näitame, et see tõesti on nii.

Selleks teisendame antud avaldise järgmiselt:

$$\alpha = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} - 5 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1.$$

Kui $x \rightarrow 1$, siis vahe $x - 1$ läheneb nullile, s. t. vahe on lõpmatult kahanev suurus.

Saadud resultaati kirjutatakse harilikult järgmisel kujul:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = 5.$$

$$2. \quad y = \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}, \quad \text{kui } x \rightarrow 0.$$

Siin nii lugeja kui ka nimetaja lähenevad nullile.

Andes jälle x -le rea väärtusi, mis on lähedased nullile, selgitame, kuidas muutub y . Võtame järjestikku:

$$x = 0,1; \quad x = 0,01; \quad x = 0,001; \quad x = 0,0001; \dots$$

Siis saame y -i väärtused:

$$y = 1,9487; \quad y = 1,9950; \quad y = 1,9995; \quad y = 1,9999; \dots$$

Arvutatud väärtuste vaatlemisest järgneb, et nähtavasti $\lim y = 2$. Kuid et seda kinnitada, peame tõestama, et vahe

$$y - 2 = \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} - 2 = \alpha$$

on lõpmatult kahanev suurus.

Selleks teisendame antud avaldise järgmiselt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} - 2 = \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{1 - (1 - x)} - 2 = \\ &= 1 + \sqrt{1 - x} - 2 = \sqrt{1 - x} - 1. \end{aligned}$$

Saadud avaldisest selgub, et x -i lähenedes nullile $\sqrt{1 - x}$ läheneb 1-le, vahe

$$\alpha = \sqrt{1 - x} - 1$$

aga nullile, s. o. osutub lõpmatult kahanevaks suuruseks. Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = 2.$$

Käsiteldud näidetest selgub, et muutuvate suuruste piiride leidmisel võivad esineda raskused ja mõnikord õige

tunduvad, milles veendume veel mitmel juhul. Seejuures juhime tähelepanu järgmisele asjaolule: kui meil katseliselt ilmnes, et muutuv suurus läheneb mõnesugusele arvule, siis see asjaolu ei ole veel küllaldane selleks, et lugeda seda arvu muutuja piiriks: tarvis on näidata, et muutuja ja arvu vahe on lõpmatult kahanev. Nii, perioodiline murd $0,989898\dots$ kümmandkohtade arvu kasvamisel suureneb, püsivalt lähenedes ühele. Kuid kui siit järeldame, et 1 on selle murru piir, siis eksime, sest vahe 1 ja antud murru vahel, kuipalju kümmandkohti meie ka ei võtaks, on ikkagi suurem kui $\frac{1}{99}$. Nagu aritmeetikast on teada, antud murru piir on $\frac{98}{99}$.

Järgmises paragrahvis esitame rea teoreeme, mis võimaldavad lihtsustada piiride leidmise tehnikat. Kuid need teoreemid ei ole rakendatavad kõigil juhtudel, ja seepärast, üldiselt võttes, piiride leidmise ülesanne on ikkagi küllalt raske. Edasisel käsitusel näeme, et diferentsiaal- ja integraalarvutuse ülesandeks ongi mõnede, sageli esinevate piiride tüüpide leidmise meetodite tundmaõppimine.

Lõpuks tähendame, et muutujad võivad läheneda oma piiridele õige mitmel viisil, mida nägime lõpmatult kahanevate suuruste käsitlemisel (§ 35). Kõik need muudatused muutumise protsessi suhtes ei mõjuta eespool antud piiri definitsiooni, kuna piiri mõiste olemus seisab ainult selles, et vahe muutuja y ja tema piiri vahel on lõpmatult kahanev suurus.

Kõigil juhtudel, mil leiab aset võrdus $y - A = \alpha$, kus α on lõpmatult kahanev suurus ja A — jääv arv, on meil $\lim y = A$.

§ 40. Põhiteoreemid piiridest.

I. Muutumatu arvu muutuvate suuruste algebralise summa piir võrdub nende

muutuvate suuruste piiride algebralise summaga.

Tõestus. Tõestame selle teoreemi kolme muutuva suuruse puhul. Tõestus jääb samaks ka liidetavate mistahes arvu puhul. Olgu x , y ja z — kolm muutuvat suurust ja olgu $\lim x = A$, $\lim y = B$, $\lim z = C$. Piiri definitsiooni põhjal (§ 39) võime kirjutada:

$$x = A + \alpha, \quad y = B + \beta, \quad z = C + \gamma,$$

kus α , β ja γ on lõpmatult kahanevad suurused.

Vaatame nüüd algebralist summat $x + y - z$. Meil on tarvis tõestada, et

$$\lim (x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z = A + B - C.$$

Meil on:

$$x + y - z = (A + B - C) + (\alpha + \beta - \gamma).$$

Parempoolse osa teine liidetav on lõpmatult kahanev suurus (§ 36, teoreem 1), esimene liidetav aga jääv suurus. Järelikult

$$\lim (x + y - z) = A + B - C = \lim x + \lim y - \lim z.$$

II. Muutumatu arvu muutuvate suuruste korrutise piir võrdub nende muutuvate suuruste piiride korrutisega.

Tõestus. Olgu s ja y kaks muutuvat suurust ja olgu $\lim x = A$ ja $\lim y = B$. Piiri definitsiooni põhjal (§ 39)

$$x = A + \alpha, \quad y = B + \beta,$$

kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused. Sellepärast

$$xy = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

Igäiks liidetavatest $B\alpha$, $A\beta$, $\alpha\beta$ on lõpmatult kahanev suurus (§ 36, II teoreem); sellepärast ka nende summa on lõpmatult kahanev suurus (§ 36, I teoreem). Järelikult

$$\lim (xy) = AB = \lim x \cdot \lim y.$$

See tõestus on kergesti laiendatav igasuguse muutumatu arvu tegureile.

III. Kahe muutuva suuruse jagatise piirvõrdub jagatava ja jagaja piiride jagatisega, kui jagaja piir ei ole null.

Tõestus. Olgu x ja y kaks muutuvat suurust ja olgu $\lim x = A$, $\lim y = B$, kusjuures $B \neq 0$. Olgu $\frac{x}{y} = z$ ja oletame tõestuse lihtsustamiseks (kuigi teoreem on õige ka ilma selle oletuseta), et on olemas piir z . Võrdusest $\frac{x}{y} = z$ saame: $x = yz$. Siit saame

$$\lim x = \lim (yz)$$

ehk teoreemi II põhjal

$$\lim x = \lim y \cdot \lim z,$$

s. o. $A = B \lim z$.

Kuna $B \neq 0$, siis võime jagada viimase võrduse mõlemad pooled B -ga, mille tulemusena saame:

$$\lim z = \frac{A}{B} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Näide 1. Leida

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7}.$$

Lahendus. Kuna

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 7) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 7 = (\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 + 7 = \\ &= 1^2 + 7 = 8 \neq 0, \end{aligned}$$

siis võime rakendada teoreemi III:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7} &= \frac{\lim (x^2 - 2x + 5)}{\lim (x^2 + 7)} = \frac{\lim x^2 - \lim 2x + \lim 5}{8} = \\ &= \frac{(\lim x)^2 - \lim 2 \cdot \lim x + 5}{8} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 5}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Näide 2. Leida $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + 3x^3}{x^3}$.

Lahendus. Antud näites nimetaja piir on null. Seepärast teoreem III ei ole rakendatav ja meil tuleb leida piir seda teoreemi kasutamata. Niisugustel juhtudel lahendub küsimus harilikult nii, et püütakse teisendamise teel anda antud avaldisele kuju, mis võimaldab juba rakendada ülal- toodud piiride teoreeme. Kuna $x \rightarrow 0$, kuid ei võrdu nulliga (vastasel korral piir, mida meie otsime, kaotaks mõtte), siis võib murdu taandada teguriga x^3 . Nii saame:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + 3x^3}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 3) = \lim 2x + \lim 3 = \\ &= \lim 2 \cdot \lim x + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3. \end{aligned}$$

Näide 3. Leida $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.

Lahendus. Antud juhul (nagu eelmiseski näites) lugeja ja nimetaja lähenevad üheaegselt nullile, kuna murd ise, nagu nägime näites 1 § 39, läheneb 5-le. Sarnast laadi murru muutumine, lugeja ja nimetaja lähenedes nullile, on eriti iseloomustav diferentsiaalarvutuses esinevate suuruste suhtes. Seda näidet ei ole võimalik lahendada teoreemi III rakendamise abil (nimetaja piiriks on null) ja sellepärast tuleb jälle kasutada teisendamist, mille tulemusena saame:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x + 4) - (x + 4)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 4)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5. \end{aligned}$$

Näide 4. Leida $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$. Antud näites murru lugeja ja nimetaja kasvavad piiramatult. Vaatleme murru ligikaudset muutumist, andes x -le järjestikku rea väärtusi:

$$x = 100, \quad x = 1000, \quad x = 10\,000, \quad x = 100\,000, \dots$$

Siis murd omandab vastavalt väärtused:

$$1,01; \quad 1,001; \quad 1,0001; \quad 1,00001; \dots$$

Niisiis näeme, et murru väärtused ikka rohkem ja rohkem lähenevad 1-le; sellest järeldame, et nähtavasti murru piir on 1. Kuid tõestame seda rangelt.

Antud avaldise piiri leidmisel ei või rakendada teoreemi III; lugeja ja nimetaja — kumbki eraldi —, olles lõpmatult kasvavad suurused, ei oma mingit piiri. Sellepärast esitame selle murru järgmisel kujul:

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Siis saame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1,$$

sest murd $\frac{1}{x}$ x -i piiramatul kasvamisel on lõpmatult kahanev suurus (§ 35) ja järelikult tema piir on null.

§ 41. Kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhe. Lõpmatult kahanevate suuruste järk. Ekvivalentset lõpmatult kahanevad suurused. Paragrahvis 36 käsitletud lõpmatult kahanevate suuruste põhiteoreemide hulgas ei leidu teoreemi kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhtest. See seletub asjaoluga, et kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhe, olenevalt nende muutumise iseloomust, võib olla mitmesugune: piiratud suurus, lõpmatult kahanev suurus, lõpmatult kasvav suurus või täiesti määramatu suurus (s. o. piiramatu, kuid

lõpmatusele mitte lähenev). Meid huvitab tegelikkudest tarvidustest lähtudes vaid see juhtum, kui kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhe läheneb täiesti määratud lõplikule piirile või lõpmatusele. Sel juhul võivad esineda silmanähtavalt ainult kolm esimest võimalust. Et need võimalused tegelikult esinevad, seda näitavad järgmised näited.

Kui α on lõpmatult kahanev suurus, siis 2α on ka lõpmatult kahanev suurus. Suhe

$$\frac{2\alpha}{\alpha} = 2$$

osutub sellel puhul jäävaks suuruseks.

Kui võtame nüüd kaks lõpmatult kahanevat suurust: α ja α^2 , siis suhe

$$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$$

annab meile lõpmatult kahaneva suuruse, aga suhe $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$ annab lõpmatult kasvava suuruse, kuna lõpmatult kahaneva suuruse pöördväärtus on lõpmatult kasvav (§ 38).

Saadud resultaadid on seletatavad sellega, et erinevatel juhtudel vaadeldud murdude lugejate ja nimetajate muutmise iseloom on erinev. Kui näiteks α omandab väärtused $0,1; 0,01; 0,0001; \dots$, siis α^2 , muutudes, omandab väärtused $0,01; 0,0001; 0,00000001; \dots$. Võib öelda, et α^2 kiiremini läheneb nullile kui α . Ja sellepärast suhe $\frac{\alpha^2}{\alpha}$ läheneb nullile, s. t. on lõpmatult kahanev suurus, $\frac{\alpha}{\alpha^2}$ aga kasvab piiramatult, s. o. osutub lõpmatult kasvavaks suuruseks.

Vaadeldud näited viivad meid mõttele, et on otstarbekohane võrrelda lõpmatult kahanevaid suurusi omavahel nende nullile lähenemise kiiruse suhtes.

Selleks otstarbeks anname järgmised definitsioonid.

Olgu a ja β kaks lõpmatult kahanevat suurust. Kui $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ on nullist erinev arv, siis öeldakse, et a ja β on ühe ja sama järgu lõpmatult kahanevad suurused. Kui see piir on null, siis a nimetatakse kõrgema järgu lõpmatult kahanevaks suuruseks võrreldes β -ga. Kui aga suhe $\frac{\alpha}{\beta}$ on lõpmatult kasvav suurus, siis a nimetatakse madalama järgu lõpmatult kahanevaks suuruseks kui β .

Läheneagu näiteks a nullile. Siis lõpmatult kahanevate suuruste reas

$$a, a^2, a^3, a^4, \dots$$

iga järgmine lõpmatult kahanev suurus kuulub kõrgemasse järku kui iga eelmine. Näiteks a^4 on kõrgema järgu lõpmatult kahanev suurus kui a^3 , sest et $\lim \frac{a^4}{a^3} = \lim a = 0$.

Vaatleme lühidalt juhtu, kus kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhe ei lähene ühelegi määratud, lõplikule piirile. Ka siin võib mõnikord võrrelda nende nullile lähenemise kiirust. Vaatleme näiteks lõpmatult kahanevaid a ja $\beta = a \left(2 + \sin \frac{1}{a}\right)^1$.

$$\text{Võttes } \beta \text{ ja } a \text{ suhte, saame: } \frac{\beta}{a} = 2 + \sin \frac{1}{a}.$$

Kui a , lähenedes nullile, omandab näiteks kõik arväärtused 1 ja 0 vahel, siis $\frac{1}{a}$, suurenedes, omandab vastavalt väärtused 1 ja $+\infty$

¹ Selles, et korrutis $a \left(2 + \sin \frac{1}{a}\right)$ on lõpmatult kahanev suurus, võib veenduda järgmiselt: $\left| \sin \frac{1}{a} \right| \leq 1$ mistahtese a puhul. Järelikult $2 + \sin \frac{1}{a}$ on piiratud suurus. a ja $2 + \sin \frac{1}{a}$ korrutis, mis on lõpmatult kahaneva suuruse korrutis piiratud suurusega, on lõpmatult kahanev suurus.

vahel, millest olenevalt $\sin \frac{1}{\alpha}$ väärtused kõiguvad -1 ja $+1$ vahel. Seepärast $2 + \sin \frac{1}{\alpha}$ kõigub 1 ja 3 vahel ja, tähendab, suhtel $\frac{\beta}{\alpha}$ (samuti kui $\frac{\alpha}{\beta}$) mingit piiri ei ole olemas. Kuid et suhte $\frac{\beta}{\alpha}$ absoluutsuurus kõigub kahe positiivse arvu (1 ja 3) vahel, siis see suhe ei saa omandada mistahes lõpmatult kahanevaid ega lõpmatult kasvavaid väärtusi. Sel juhul öeldakse, et α ja β on ühe ja sama järgu lõpmatult kahanevad suurused.

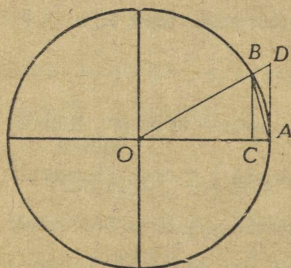
Teisiti on, kui võtame lõpmatult kahanevad suurused α ja $\beta = \alpha \sin \frac{1}{\alpha}$. Suhe $\frac{\beta}{\alpha^2} = \sin \frac{1}{\alpha}$ muutub nulliks lõpmata arv kordi (väärtustel $\alpha = \frac{1}{\pi k}$, $k = 1, 2, \dots$), nii et selle väärtuste järjestikkuse puhul

β on lõpmatult kahanev võrreldes α -ga. Kuid järjestikkuse $\alpha = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$,

$k = 1, 2, \dots$ puhul suhe $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, s. o. suhe $\frac{\beta}{\alpha}$ ei lähene nullile. β ja α on võrreldamatud lõpmatult kahanevad suurused.

Kui kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhte piirväärtus on 1 , siis need suurused nimetatakse ekvivalentseteks. Näiteks $\cos x$ ja $\operatorname{ctg} x$ on ekvivalentssed lõpmata väikesed suurused, kui x läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le, sest et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

§ 42. Suhte $\frac{\sin x}{x}$ piir kui $x \rightarrow 0$. Meie kasutame seda piiri edaspidises käsitluses. Jagatise piiri teoreem ei ole siin rakendatav, sest nimetaja piir võrdub nulliga. Seepärast tuleb leida teine viis otsitava piiri määramiseks.



Joonis 59.

Võtame ringi, mille raadius on 1 (joonis 59). x -i all mõistame kaare radiaanmõõtu, s. o. kaare pikkuse ja raadiuse suhet, mis antud juhul arvuliselt on võrdne

kaare pikkusega, kusjuures x -i võtame vahemikus 0-st $\frac{\pi}{2}$ -ni

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

$\triangle OAB$ pindala $<$ sektor OAB pindala $<$ $\triangle OAD$ pindala ehk

$$\frac{1}{2} OA \cdot CB < \frac{1}{2} OA \cdot \overset{\frown}{AB} < \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$

Kuna $OA = 1$, siis $CB = \sin x$, $\overset{\frown}{AB} = x$, $AD = \operatorname{tg} x$. Järelikult võib kirjutatud kahekordse võrratuse esitada järgmiselt:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Jagades selle kahekordse võrratuse positiivse suurusega $\sin x$ ($\sin x > 0$, sest $0 < x < \frac{\pi}{2}$), saame:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ja} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Läheneagu nüüd x nullile. Siis $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Sel viisil saime muutuva suuruse $\frac{\sin x}{x}$, mille väärtused sisalduvad kahe teise muutuva suuruse väärtuste vahel (1 ja $\cos x$), millel on ühesugused piirid. On ilmne, et suurusel $\frac{\sin x}{x}$ on sama piir, s. o.

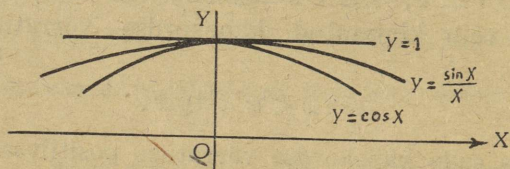
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Meie eeldasime, et x läheneb nullile, omandades positiivseid väärtusi. Kuid võttes arvesse, et $\sin(-x) = -\sin x$, suhe

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x};$$

siit järgneb, et tõestatud teoreem jääb kehtivaks sõltumata argumendi x nullile lähenemise iseloomust.

Saadud resultaadi paremaks selgitamiseks kujutame graafiliselt kõverad $y = 1$, $y = \cos x$ ja $y = \frac{\sin x}{x}$ (joonis 60). Kõver, mis kujutab muutujat $y = \frac{\sin x}{x}$, kooskõlas võrratusega $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$, peab läbima tasapinna osa sirge $y = 1$ ja kõvera $y = \cos x$ vahel. Nende joonte ($y = 1$



Joonis 60.

ja $y = \cos x$) ordinaadid omavad $x \rightarrow 0$ puhul piirina ordinaati $y = 1$ (joonis 60). Et kõver $y = \frac{\sin x}{x}$ ei või laskuda madalamale kui kõverjoon $y = \cos x$ ja tõusta kõrgemale sirgest $y = 1$, siis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

ka võrdub 1-ga.

Järgnev tabel näitab suhte $\frac{\sin x}{x}$ muutumist, kui $x \rightarrow 0$:

x	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{180}$...	$\rightarrow 0$
$\frac{\sin x}{x}$	0,9798	0,9949	0,9987	0,9999	...	$\rightarrow 1$

Harjutusi.

Leida järgmiste avaldiste piirid:

- | | |
|---|--------------------------|
| 1. $3a - 2b + 5x^2$, kui $x \rightarrow 0$. | Vastus: $3a - 2b$. |
| 2. $\frac{x^2 + 1}{x + 3}$, kui $x \rightarrow -2$. | Vastus: 5. |
| 3. $\frac{(a-x)^2 - 2ax^2}{a(a+x)}$, kui $x \rightarrow 0$. | Vastus: 1. |
| 4. $\frac{\sin 2x}{x}$, kui $x \rightarrow 0$. | Vastus: 2. |
| 5. $\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3}$, kui $x \rightarrow \infty$. | Vastus: $-\frac{2}{7}$. |

J u h i s. Enne piirile üleminekut jagada lugeja ja nimetaja x^3 -ga.

- | | |
|---|--------------------------|
| 6. $\frac{x^2 + 2x}{5 - 3x^3}$, kui $x \rightarrow \infty$. | Vastus: 0. |
| 7. $\frac{x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 1}$, kui $x \rightarrow \infty$. | Vastus: $\frac{1}{2}$. |
| 8. $\frac{3 + 2x}{x^2 - 5x}$, kui $x \rightarrow \infty$. | Vastus: 0. |
| 9. $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$, kui $x \rightarrow 1$. | Vastus: 2. |
| 10. $\frac{3x^3 + 6x^2}{2x^4 - 15x^2}$, kui $x \rightarrow 0$. | Vastus: $-\frac{2}{5}$. |
| 11. $\frac{2x^3 + 3x^2}{x^4}$, kui $x \rightarrow 0$. | Vastus: ∞ . |

12. Näidata, et juhul, kui $x \rightarrow 0$, lõpmatult kahanevad suured x ja $\operatorname{tg} x$ on ekvivalentsed.

J u h i s. $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$; rakendada piiride teoreemi II.

13. Näidata, et juhul, kui $x \rightarrow 0$, lõpmatult kahanevate suuruste x ja $2x + \operatorname{tg} x$ järk on mõlemal suurusel üks ja sama.

14. Tõestada, et kui täisnurkse, punktis B asuva täisnurgaga kolmnurga ABC tipp A eemaldub lõpmatusse kaateti BA sihis, siis hüpotenuusi CA ja kaateti BA vahe läheneb nullile.

15. Kaugusel b võrdhaarse kolmnurga ABC alusest $AC = a$ on joonestatud sirge, mis on paralleelne alusega AC ja mis lõikab haara BC punktis D . Määrata sirge AD pikkus piirjuhul, kui tipp B , jäädes alusega AC risti seisvale sirgele, eemaldub lõpmatusse.

$$\text{Vastus: } \sqrt{a^2 + b^2}.$$

V p e a t ü k k.

Tuletise mõiste.

§ 43. **Lineaarfunktsiooni muutumise kiirus. Tõus muutumise kiirusena.** Analüütilises geomeetrias tutvusime sirge võrrandiga:

$$y = kx + b.$$

See võrrand näitab, mil viisil muutub muutuv ordinaat y sõltuvalt abstsissi x muutumisest. Suurust, mis muutub sõltuvalt teise suuruse muutumisest, nimetasime funktsiooniks. Seega y on funktsioon. Muutujat, millest funktsioon sõltub, nimetasime argumendiks ehk sõltumatuks muutujaks. Antud juhul argumendiks on x . Funktsiooni

$$y = kx + b \tag{1}$$

nimetasime lineaarseks (v. § 10).

Omandagu argument x mõnesuguse väärtuse x_1 ja pärast seda teise väärtuse x_2 . Vahet

$$x_2 - x_1$$

nimetatakse argumendi juurdekasvuks ja tähistatakse harilikult sümboliga Δx_1 :

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1.$$

Kreeka täht Δ (delta) ei ole kordaja; ta ainult juhib tähelepanu sellele, et tuleb x -i uuest väärtusest $x = x_2$ lahutada x -i endine väärtus $x = x_1$. Seega Δ on x -i lahutamatu osa, niisama kui \sin on x -i lahutamatu osa avaldises $\sin x$ või \lg_a avaldises $\lg_a x$.

Kui $x = x_1$, suurus y omandab väärtuse:

$$y_1 = kx_1 + b, \quad (1')$$

ja $x = x_2$ puhul väärtuse:

$$y_2 = kx_2 + b. \quad (1'')$$

Vahet

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

nimetatakse funktsiooni juurdekasvuks.

Kui $x_2 > x_1$, siis $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ väärtus on positiivne ($\Delta x_1 > 0$). Kui $x_2 < x_1$, siis juurdekasvu Δx_1 väärtus on negatiivne ($\Delta x_1 < 0$).

On selge, et samuti ka juurdekasv Δy_1 , mis vastab argumendi juurdekasvule Δx_1 , võib olla nii positiivseks kui negatiivseks suuruseks. Nimelt, kui $y_2 > y_1$, siis $\Delta y_1 > 0$, aga kui $y_2 < y_1$, siis $\Delta y_1 < 0$.

Näide. Olgu antud funktsioon $y = 3x - 4$.
Olgu $x_1 = 2$ ja $x_2 = 2,3$. Siis

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 2,3 - 2 = 0,3,$$

$$y_1 = 3 \cdot 2 - 4 = 2; \quad y_2 = 3 \cdot 2,3 - 4 = 2,9, \text{ järelikult}$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 2,9 - 2 = 0,9.$$

Asendades võrduses $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ võrduste (1') ja (1'') põhjal määratud y_1 ja y_2 väärtused, saame:

$$\Delta y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1) = k \cdot \Delta x_1,$$

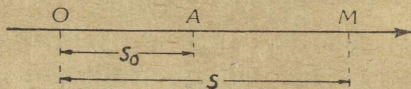
millest

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = k, \quad (2)$$

s. o. lineaarfunktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhe on võrdne tõusuga (nurga teguriga).

Juurdekasvude suhte kohta saame väga lihtsa tõlgenduse, kui vaatleme sirgel jääva kiirusega liikuvat punkti.

Tähistame tähega s punkti M kaugust alguspunktist O ajamomendil t (joonis 61) ja oletame, et punkt hakkab liikuma ühtlaselt punktist A alates, kusjuures kauguse OA tähistame tähega s_0 . Kauguse s O -st paremal poolel loeme positiivseks, vasemal poolel — negatiivseks. Leiame, kuidas kaugus s väljendub aja t kaudu.



Joonis 61.

Kooskõlas ülesande tingimustega, aja t kestel punkt läbib tee $AM = s - s_0$. Kuna punkt liigub jääva kiirusega v , siis $s - s_0 = vt$ ehk

$$s = vt + s_0. \quad (3)$$

Järelikult s on argumendi t lineaarseks funktsiooniks, s. o. ühtlase liikumise seadus väljendub lineaarse funktsioonina.

Vaatleme kaht ajamomenti: $t = t_1$ ja $t = t_2$, ja leiame juurdekasvu: $\Delta t_1 = t_2 - t_1$.

Olgu $t = t_1$ puhul tee $s = s_1$ ja $t = t_2$ puhul tee $s = s_2$. Siis tee juurdekasv Δs_1 määratakse seosega:

$$\begin{aligned} \Delta s_1 = s_2 - s_1 &= (vt_2 + s_0) - (vt_1 + s_0) = \\ &= v(t_2 - t_1) = v\Delta t_1, \end{aligned}$$

millest

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = v. \quad (4)$$

Niisiis tee juurdekasvu ja aja juurdekasvu suhe võrdub sirgel ühtlaselt (s. o. jääva kiirusega) liikuva punkti kiirusega.

Pöördudes tagasi lineaarfunktsiooni

$$y = kx + b$$

juurde ja mõeldes x -i all aega ning y -i all tee pikkust, mida läbib keha, näeme, et suhe

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = k$$

määrab kiiruse suuruse kehal, mis liigub lineaarfunktsiooni kaudu väljendatava seaduse põhjal.

Kuid muutujad — argument x ja funktsioon y võivad omada ka teistsugust konkreetset sisu. Näiteks, kui y all mõistame vedru pikkust, x -i all tungi, mis venitab vedru, siis lineaarfunktsioon

$$y = kx + b$$

annab meile vedru pikkuse muutumise seaduse sõltuvalt koormatusest (tuntud tehnikas Hooke'i seadusena). Ainult harilikult tähtede x , y ja b asemel kirjutatakse vastavalt P , l ja l_0 .

Vaadeldes väärtusi $x = x_1$, $x = x_2$ ja vastavaid väärtusi $y = y_1$, $y = y_2$ ning koostades suhte

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta l_1}{\Delta P_1} = k,$$

näeme, et see suhe väljendab vedru pikenemist ühe tungi-ühiku kohta, mida nimetatakse vaadeldava protsessi kiiruseks, nimelt vedru pikkuse muutumise kiiruseks, sõltuvalt koormatusest.

Kuna k on jääv suurus, siis vaadeldav vedru pikkuse muutumise protsess, sõltuvalt koormatusest, on ühtlane protsess.

Niisiis, olenevalt sellest või teisest konkreetsest sisust, mida omandavad argument x ja funktsioon y , lineaarne funktsioon

$$y = kx + b$$

väljendab seda või teist muutumise konkreetset protsessi, suhe $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = k$ aga selle protsessi kiirust.

Kui vaatleme x ja y kui matemaatilisi suurusi, s. o. ei anna neile mingit konkreetset sisu, siis lineaarfunktsioon

$$y = kx + b \quad (1)$$

väljendab lihtsalt funktsiooni muutumise protsessi, sõltuvuses argumendi muutumisest. Siis suhet

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = k$$

on loomulik nimetada funktsiooni y muutumise kiiruseks argumendi x suhtes.

Valem (2)

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = k \quad (2)$$

näitab, et lineaarfunktsiooni muutumise kiirus argumendi suhtes on jääv suurus, mis võrdub sirge tõusuga k võrrandis (1). See suurus, olles jääv, ei olene ei x -i ega Δx -i väärtusest.

Niisiis lineaarfunktsiooni graafiku tõus (1) kujutab funktsiooni muutumise kiirust argumendi suhtes.

Seda asjaolu, et suhe $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ lineaarfunktsiooni puhul on jääv suurus mistahes $x = x_1$ ja mistahes juurdekasvu $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ väärtuse puhul, on kerge jälgida lineaarfunktsiooni graafiku põhjal. Joonisel 62 on kujutatud kaks juurdekasvude Δx_1 ja $\Delta x_1'$ erinevat väärtust argumendi x_1 ja x_1' erinevate väärtuste puhul. Kolmnurkade sarnasusest saame:

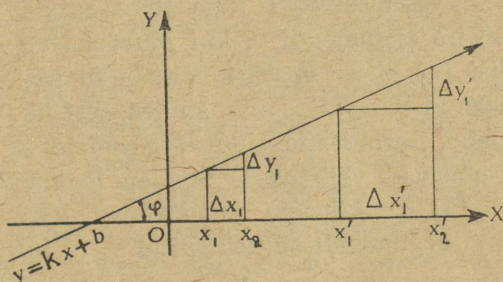
$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_1'}{\Delta x_1'} = k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Näitame, et ümberpöördult, funktsioon y , millel funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhe on jääv suurus, on tingimata lineaarfunktsioon.

Tõepoolest, võtame argumendi lähteväärtuseks väärtuse $x = 0$ ja lõppväärtuseks mistahes x -i väärtuse. Funktsiooni juurdekasv Δy on vahe $y - y_0$, kus y on funktsiooni väärtus, mis vastab argumendi lõppväärtusele x , y_0 aga on väärtus, mis vastab väärtusele $x = 0$. Võrdusest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x} = k,$$

mis on kehtiv mistahes x -i puhul, saame: $y = kx + y_0$. Võttes $y_0 = b$, saame valemi: $y = kx + b$, mis väljendab lineaarset funktsiooni.



Joonis 62.

Märkus. Nagu varem näidatud, võib juurdekasv Δx_1 omada nii positiivset kui negatiivset väärtust. Jätame õppijate endi hooleks selgusele jõuda, et käesoleva paragrahvi resultaadid jäävad õigeks ka juhul, kui $\Delta x_1 < 0$.

§ 44. Teise astme funktsioon. Lineaarfunktsioon on lihtsamaks funktsiooniks. Teise astme funktsioon

$$y = ax^2 + bx + c \quad (5)$$

osutub juba keerukamaks.

Vaatleme sellise funktsiooni puhul funktsiooni kiiruse muutumise küsimust argumendi suhtes.

Võtame argumendi x mingi väärtuse x_1 ja anname temale positiivse või negatiivse juurdekasvu Δx_1 ; siis argumendi x uus väärtus väljendub nii: $x_2 = x_1 + \Delta x_1$.

Arvutame funktsiooni juurdekasvu (5):

$$\begin{aligned} \Delta y_1 = y_2 - y_1 &= (ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c) = \\ &= a(x_1 + \Delta x_1)^2 + b(x_1 + \Delta x_1) + c - ax_1^2 - bx_1 - c = \\ &= 2ax_1 \cdot \Delta x_1 + a \cdot (\Delta x_1)^2 + b\Delta x_1, \end{aligned}$$

millest, jagades saadud võrduse liikmed Δx_1 -ga, leiame:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2ax_1 + b + a \cdot \Delta x_1. \quad (6)$$

Saadud resultaat näitab, et funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhe teise astme funktsiooni puhul oleneb nii argumendi x_1 kui juurdekasvu Δx_1 väärtusest. Avaldist (6) ei või enam nimetada funktsiooni muutumise kiiruseks argumendi $x = x_1$ suhtes, sest ühe ja sama x_1 väärtuse puhul erinevatele juurdekasvudele Δx_1 vastavad suhte (6) erinevad väärtused. Siis on loomulik nimetada seda suhet (6) funktsiooni muutumise keskmiseks kiiruseks argumendi suhtes antud x_1 ja Δx_1 puhul.

Näide. Määrata keskmine kiirus argumendi suhtes funktsioonil: $y = 3x^2 - 7x + 2$, kui $x_1 = 3$ ja $\Delta x_1 = 0,1$.

Lahendus. Valemi (6) põhjal saame:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2 \cdot 3 \cdot 3 - 7 + 3 \cdot 0,1 = 11,3.$$

Kuidas määrata aga täpselt funktsiooni muutumise kiirust argumendi suhtes antud x -i väärtuse puhul?

Selle asemel, et lahendada seda küsimust funktsiooni eri juhu — teise astme funktsiooni kohta, selgitame seda küsimust mistahes funktsiooni puhul ja selleks kõigepealt asume funktsiooni üldise tähistamise küsimuse vaatlemisele.

§ 45. Funktsiooni üldine tähis. Väga sageli tuleb matemaatikas uurida funktsioonide üldisi omadusi, kujutledes endile väga mitmesuguseid tuntud ja tundmatuid seoseid kahe muutuja vahel. Selle näitamiseks, et y on x -i funktsioon, kirjutatakse võrdus:

$$y = f(x). \quad (7)$$

See võrdus ei anna vastust mingi kindla, muutujate x ja y vahelist seost väljendava seaduse kohta, ta ainult väljendab sõltuvuse olemasolu fakti.

Sümbolis $f(x)$ täht f omab õige olulist tähendust. Vaatleme näiteks funktsioone: $3x^2 - 8x + 2$ ja $3t^2 - 8t + 2$. Kas need on erinevad või ühesugused funktsioonid? Kui anname esimeses ja teises avaldises ühesugused väärtused argumentidele x ja t , siis saame ühesugused väärtused ka funktsioonidele. Funktsioonide väärtuste võrdsus esineb alati argumentide x ja t ühesuguste vabalt võetud väärtuste puhul. Siin ei ole midagi imestamisväärset, sest nii selles kui teises funktsioonis toimuvad argumendi juures ühed ja samad tehted. Seepärast tähistavad ülalkirjutatud kaks avaldist mitte kahte erinevat, vaid ühte ja sama funktsiooni, ainult esimesel juhul märgitakse argument tähega x , teisel juhul tähega t . Kasutades äsja tarvitusele võetud sümbolset tähistamisviisi, kirjutame järelikult:

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 2 \quad \text{ja} \quad f(t) = 3t^2 - 8t + 2,$$

s. o. funktsioonide sümbolseks tähistamiseks kasutame ühte ja sama tähte f .

Kui aga vaatleme funktsioone

$$8x^2 - 3x + 4 \quad \text{ja} \quad 3x^2 - 2,$$

siis nende sümbolseks tähistamiseks peame kasutama juba erinevaid tähti, mis märgivad argumendi juures toimuvate

tehete kogu, sest need funktsioonid on juba täiesti erinevad. Nii võime kirjutada:

$$f(x) = 8x^2 - 3x + 4 \quad \text{ja} \quad \varphi(x) = 3x^2 - 2.$$

Niisiis, kui üheaegselt tuleb kõnelda mitmest erinevast funktsioonist, siis neid märgitakse erinevalt, näiteks:

$$f(x), F(x), \varphi(x), \psi(x), \dots$$

Võrduse (7) kaudu määratava funktsiooni y väärtus, mis vastab argumenti x mõnele eri väärtusele a , märgitakse $f(a)$. Näiteks kui

$$y = f(x) = 3x^2 - 8x + 2,$$

siis argumenti väärtusel $x = 2$ saame:

$$y = f(2) = 3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 2 = -2;$$

$x = a$ puhul saame:

$$y = f(a) = 3a^2 - 8a + 2;$$

$x = b - 1$ puhul saame:

$$y = f(b - 1) = 3(b - 1)^2 - 8(b - 1) + 2 = 3b^2 - 14b + 13.$$

Mõnikord funktsioon sõltub mitte ühest, vaid mitmest muutujast, milliseid võib vabalt ja sõltumatult üksteisest muuta. Niisugust funktsiooni nimetatakse mitme muutujaga funktsiooniks. Näiteks funktsiooniks mitme muutujaga võib olla ringikujulise põhjaga püst-koonuse ruumala, mis sõltub kahest argumentist: koonuse

põhja raadiusest r ja kõrgusest h : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Mitme muutujaga funktsiooni üldiseks tähistamiseks rakendatakse sama printsiipi, mis ühe muutujaga funktsiooni puhul. Nii, soovides väljendada, et koonuse ruumala on põhja raadiuse r ja kõrguse h funktsioon, võime kirjutada: $V = f(r, h)$.

Mõnikord funktsioonid antakse võrrandina, kus y on avaldamata, nagu öeldakse, ilmutamata; näiteks võrrandis

$$Ax + By + C = 0$$

y on x -i ilmutamatu funktsioon, sest on ilmne, et x -i vabal muutumisel muutuja y omandab kindlad väärtused — tingimusel, et x ja y peavad rahuldama kirjutatud võrrandit. Analoogiliselt funktsioon y , mis on määratav võrrandiga

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on samuti argumendi x ilmutamatuks funktsiooniks.

Kuidas märkida, kinni pidades funktsioonide üldise märkimise printsiibist, ilmutamatut funktsiooni? On selge, et ilmutamatu funktsiooni väärtused määratakse võrrandist, mille pahempoolses osas esinevad argumenti x ja funktsiooni y sisaldavad liikmed, parempoolne osa aga võrdub nulliga. Seepärast on loomulik tähistada argumendi x ilmutamatut funktsiooni y järgmise võrrandiga:

$$f(x, y) = 0 \quad (8)$$

Kirjutatud avaldisest on näha, et argumendi x igale vabalt võetud väärtusele peab vastama üks või mitu kindlat funktsiooni y väärtust, sest x ja y väärtuste iga paar peab rahuldama võrrandit (8).

Täpselt samal viisil võrrand (8) määrab x -i kui ilmutamatu funktsiooni argumendi y .

Toodud näidetest selgub, et ilmutamatu funktsiooni võib teisendada ilmutatud funktsiooniks, avaldades võrrandist y -i. Nii, esimesest näitest saame:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ja teisest:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Seni meil on tegemist juhtudega, milledes seos funktsiooni ja argumendi vahel väljendus valemi abil. Loodusteaduses ja tehnikas esinevad sageli juhud, kus funktsiooni ja argumendi vaheline sõltuvus määratakse mitte valemiga, vaid katseliselt. Siis püütakse leida valemit, mis väljendaks funktsionaalset sõltuvust ligikaudselt. Niisuguseid valemeid nimetatakse empiirilisteks. Seos funktsiooni ja argumendi vahel väljendatakse niisugustel juhtudel ka tabelite abil.

§ 46. Keskmise liikumise kiirus ja kiirus antud momendil.

Asume nüüd argumendi suhtes funktsiooni muutumise täpse kiiruse määramise küsimuse käsitlemisele.

Liikugu punkt ebahütlaselt seaduse järgi

$$s = f(t),$$

kus s aja t funktsioonina märgib liikuva punkti poolt läbitud tee pikkust, sest igale kindlale ajamomendile t vastab kindel tee pikkuse s väärtus (s. o. väärtused sõltuvad t väärtustest).

Püüame leida punkti liikumise kiiruse mõnel ajamomendil t_1 .

Selleks võtame vaatlusele teise ajamomendi t_2 , küllalt lähedase t_1 -le, ja arvutame tee pikkuse, mille punkt läbib ajavahemikus $t_2 - t_1 = \Delta t_1$. Kuna $s_1 = f(t_1)$ ja $s_2 = f(t_2)$, siis tee pikkus väljendub vahega

$$s_2 - s_1 = f(t_2) - f(t_1) = \Delta s_1$$

ehk, kuna võrdusest $t_2 - t_1 = \Delta t_1$ saame $t_2 = t_1 + \Delta t_1$, siis

$$\Delta s_1 = f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1).$$

Suhe

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1)}{\Delta t_1}$$

määrab liikuva punkti keskmise kiiruse ajavahe-
mikus Δt_1 .

On selge, et mida väiksema võtame ajavahemiku Δt_1 ,
seda täpsemalt annab keskmine kiirus meile kujutluse
punkti kiirusest momendil t_1 . Sellepärast on loomulik võtta
punkti liikumise kiiruseks momendil t_1 :

$$\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1)}{\Delta t_1} = v.$$

Näide. Nagu teada, aja t kestel punkti poolt läbitud
tee s , kui punkt liigub ühtlaselt kiirenevalt, määratakse vale-
miga

$$s = v_0 t + \frac{j t^2}{2},$$

kus v_0 on punkti algkiirus (momendil $t = 0$) ja j kiirendus;
 v_0 ja j on jäävad suurused. Määrame punkti kiiruse,
kui $t = 2$.

Lahendus. Anname väärtusele $t = 2$ juurdekasvu
 Δt ja võtame vaatlusele ajamomendi $t = 2 + \Delta t$. Määrame
vastava juurdekasvu Δs :

$$\begin{aligned} \Delta s &= \left[v_0(2 + \Delta t) + \frac{j}{2} (2 + \Delta t)^2 \right] - \left[v_0 \cdot 2 + \frac{j}{2} \cdot 2^2 \right] = \\ &= (v_0 + 2j)\Delta t + \frac{j}{2} (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Leiame keskmise kiiruse: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 + 2j + \frac{j}{2} \cdot \Delta t$.

Täpne kiirus momendil $t = 2$ võrdub:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_0 + 2j + \frac{j}{2} \Delta t) = v_0 + 2j,$$

sest $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{j}{2} \Delta t = 0$.

Ühtlase liikumise vaatlemisel jõudsimme tulemuseni, et
kiirus ei võrdu suhte $\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}$ piiriga, vaid suhte endaga. See

resultaat ei ole aga vastuolus käesolevas paragrahvis toodud kiiruse määramisega igasuguse liikumise puhul, kuna ühtlase liikumise kiirus v on jääv suurus, ja sellepärast koos võrdusega $\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = v$ osutub õigeks ka seos $\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = v$ (konstandi piirväärtuseks on konstant ise).

§ 47. Funktsiooni muutumise kiirus. Asudes nüüd teise astme funktsiooni uurimisele, tuletame meelde, et funktsiooni muutumise keskmise kiiruse suuruse tarvis, argumendi suhtes väärtusega $x = x_1$, saime avaldise:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2ax_1 + b + a \cdot \Delta x_1 \quad (6)$$

[vt. § 44, valem (6)]. Analoogiliselt liikumise kiiruse mõistetele ütleme, et funktsiooni muutumise kiirus, kui $x = x_1$, on

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (2ax_1 + b + a \cdot \Delta x_1) = 2ax_1 + b \quad (9)$$

(viimase liidetava piir võrdub nulliga, sest $\Delta x_1 \rightarrow 0$).

Üldse mistahes funktsiooni muutumise kiiruse all, kui $x = x_1$, mõistetakse:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}.$$

Näide. Määrata funktsiooni $y = x^2 + 5x - 2$ muutumise keskmine kiirus x -i muutumisel vahemikus $x = 1$ kuni $x = 3$, samuti kiirused x -i väärtustel $x = 1$ ja $x = 2$.

Lahendus. § 44 valemi (6) järgi teise astme funktsiooni keskmine kiirus, kui $x = x_1$, on

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2ax_1 + b + a \cdot \Delta x_1. \quad (6)$$

Antud näites $x_1 = 1$, $x_1 = 3 - 1 = 2$, $a = 1$, $b = 5$.
 Asetame need väärtused valemisse (6), saame keskmise kiirusena:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 5 + 1 \cdot 2 = 9.$$

Kiiruse määramiseks $x = x_1$ puhul kasutame käesoleva paragrahvi valemit (9):

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2ax_1 + b.$$

Kui $x_1 = 1$, $a = 1$, $b = 5$, siis saame:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 7$$

ja, kui $x_1 = 2$:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 9.$$

§ 48. Antud funktsiooni tuletis. Viimaste paragrahvide uurimised on seotud diferentsiaalarvutuse tähtsaima põhimõistega — antud funktsiooni tuletise mõistega.

Olgu antud funktsioon: $y = f(x)$. Vaatleme argumenti x kindlat väärtust x_1 . Kui $x = x_1$, olgu funktsiooni y väärtuseks $y_1 = f(x_1)$.

Anname x_1 -le juurdekasvu Δx_1 ; siis argument x muudab oma väärtust ja võrdub summaga $x_1 + \Delta x_1$. Selle tagajärjel muudab ka funktsioon oma väärtust; uue väärtuse, mille funktsioon $x = x_1 + \Delta x_1$ puhul omandab, tähistame $y_1 + \Delta y_1 = f(x_1 + \Delta x_1)$. Nii esitame funktsiooni uue väärtuse summa kujul; see summa koosneb endisest väärtusest y_1 ja funktsiooni juurdekasvust Δy_1 , mis sõltub argumenti juurdekasvust Δx_1 .

Lahutades funktsiooni uuest väärtusest $y_1 + \Delta y_1 = f(x_1 + \Delta x_1)$ tema endise väärtuse $y_1 = f(x_1)$, saame:

$$\frac{y_1 + \Delta y_1 - y_1}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

Jagame viimase võrduse mõlemad pooled Δx_1 -ga; saame:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

Leiame suhte $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$, kui $\Delta x_1 \rightarrow 0$ piiri:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

Seda piiri nimetatakse antud funktsiooni $y = f(x)$ tuletiseks $x = x_1$ puhul ja tähistatakse y_1' või $f'(x_1)$.

Seega

$$y_1' = f'(x_1) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

Selle asemel et öelda: „tuletis $x = x_1$ puhul“, öeldakse ka: „tuletis punktis x_1 “.

Tuletise leidmise protsessis on oluline see, et tuletis määratakse väärtuse $x = x_1$ fikseerimisel. Piiri leidmisel see valitud või ülesannete tingimustes antud argumendi väärtus x_1 ei muutu, s. o. jääb jäävaks. Muutuvad ainult juurdekasvud Δx_1 ja Δy_1 .

Edaspidi kirjutame lihtsustamise otstarbel x_1 asemel lihtsalt x , pidades siiski meeles, et x -i all tuleb mõista argumendi kindlat väärtust, mis ei muutu tuletise leidmise protsessis.

Analoogiliselt kirjutame y_1 asemel lihtsalt y , Δx_1 ja Δy_1 asemel vastavalt Δx ja Δy , samuti y_1' = $f'(x_1)$ asemel lihtsalt $y' = f'(x)$.

Seega antud funktsiooni tuletiseks argumendi antud väärtusel nimetatakse funktsiooni ja argumendi juurdekasvude suhte piiriväärtust, kui argumendi juurdekasv läheneb piiramatult nullile.

Niisiis näeme, et vastavalt antud aja momendile punkti liikumise kiiruse määramine taandub tuletise leidmisele; üldse mõne funktsiooni muutumise kiiruse leidmise ülesanne vastab funktsiooni tuletise leidmise ülesandele.

Tuletise leidmise protsessi nimetatakse diferentseerimiseks. Selle asemel et öelda: „leida antud funktsiooni tuletis“, võime öelda: „diferentseerida antud funktsioon“.

Kooskõlas tuletise definitsiooniga funktsiooni diferentseerimiseks tuleb teostada järgnevad operatsioonid:

Esimene samm. x asendada summaga $x + \Delta x$ ja määrata funktsiooni uus väärtus $y + \Delta y$.

Teine samm. Lahutada funktsiooni endine väärtus uuest väärtusest ja seega määrata funktsiooni juurdekasv Δy .

Kolmas samm. Jagada funktsiooni juurdekasv Δy argumendi juurdekasvuga Δx .

Neljäsamm. Leida suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhte) piir. See piir ongi funktsiooni tuletis.

Näide 1. Leida funktsiooni $y = x^3$ tuletis.

Esimene samm.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Teine samm.

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ - y &= -x^3 \\ \hline \Delta y &= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \end{aligned}$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Neljas samm.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2$$

(x osutub muutumatuks suuruseks, aga $\lim \Delta x = 0$).

Näide 2. Diferentsida funktsioon $y = 3x^2 + 5$.

Esimene samm.

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5 = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5.$$

Teine samm.

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \\ - y \qquad \qquad = -3x^2 \qquad \qquad \qquad - 5 \\ \hline \Delta y = \qquad \qquad 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{array}.$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3 \cdot \Delta x.$$

Neljas samm.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x.$$

Näide 3. Diferentsida funktsioon $y = \frac{c}{x^2}$.

Esimene samm.

$$y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}.$$

Teine samm.

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} \\ - y \qquad \qquad = -\frac{c}{x^2} \\ \hline \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = -\frac{c \cdot \Delta x (2x + \Delta x)}{x^2 (x + \Delta x)^2} \end{array}.$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c \frac{2x + \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}.$$

Neljas samm.

$$y' = -c \cdot \frac{2x}{x^2 \cdot x^2} = -\frac{2c}{x^3}.$$

Näide 4. Leida funktsiooni $f(x) = 3x^2 + 5$ tuletised $f'(2)$ ja $f'(-3)$.

Lahendus. Näites 2 meie leidsime selle funktsiooni tuletise avaldise vabalt võetud argumendi väärtusel: $y' = f'(x) = 6x$. Sümbol $f'(2)$ väljendab tuletise väärtust, kui $x = 2$. Järelikult

$$f'(2) = 6 \cdot 2 = 12 \quad \text{ja} \quad f'(3) = 6 \cdot (-3) = -18.$$

Vaadeldud näidetest selgub, et tuletise arvuline väärtus sõltub argumendi väärtusest, vastavalt millele otsitakse antud funktsiooni tuletist. See tähendab, et antud funktsiooni $f(x)$ tuletis $f'(x)$ on omakorda argumendi x uus funktsioon.

Niisiis antud funktsiooni $f(x)$ tuletise üldavaldise $f'(x)$ leidmine, s. o. tuletise leidmine argumendi x mistahes väärtusele viib meid antud funktsiooni $f(x)$ põhjal sama argumendi uue funktsiooni $f'(x)$ leidmisele. Tuleb aga pidada meeles, et diferentsimise protsessis eneses argumendi x mistahes väärtust loetakse muutumatuks ja funktsiooni juurdekasvu ning argumendi juurdekasvu suhte piir leitakse tingimusel, et argumendi juurdekasv (Δx) läheneb nullile, kuna x -i vabalt valitud väärtus jääb muutumatuks.

§ 49. Tuletise geomeetriline vaste. Analüütilises geometrias nägime, et lineaarfunktsioon

$$y = kx + b$$

graafiliselt väljendub sirgjoonena.

Peale lineaarfunktsiooni tutvusime seal ka funktsioonidega:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ehk} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ehk} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$y^2 = 2px \quad \text{ehk} \quad y = \pm \sqrt{2px}.$$

Need funktsioonid väljenduvad geomeetriliselt kõverjoonte — ellipsi, hüperbooli ja parabooli kujul. Õppijad on samuti tuttavad trigonomeetriliste funktsioonidega ja nende graafikutega.

See fakt, et kõik nimetatud funktsioonid väljenduvad geomeetriliselt kõverjoontena, ei ole juhuslik. Ei ole raske näha, et iga funktsioon

$$y = f(x)$$

üldse väljendab geomeetriliselt mõnesugust kõverjoont.

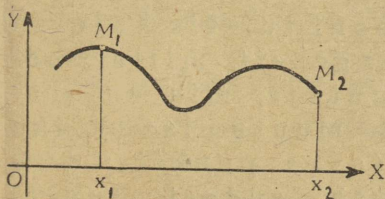
Tõepoolest, vaatleme x ja y punkti koordinaatidena tasapinnal XOY . Vastavalt x -i igale väärtusele funktsioon $f(x)$ omandab kindla väärtuse y .

Omandagu $x = x_1$ puhul y väärtuse $y = y_1$. Konstrueerime punkti (x_1, y_1) (punkt M_1 joonisel 63). Anname x -le väärtuse x_2 ja oletame, et y -i vastav väärtus on y_2 . Konstrueerime punkti $M_2(x_2, y_2)$. Muudame nüüd x -i pidevalt x_1 -st kuni x_2 -ni, nii, et x omandab järjestikku kõik vahepealsed väärtused x_1 ja x_2 vahel. Sirge x_1M_1 hakkab liikuma ja tema otspunkt M_1 joonestab seejuures mõnesuguse kõvera (joonis 63).

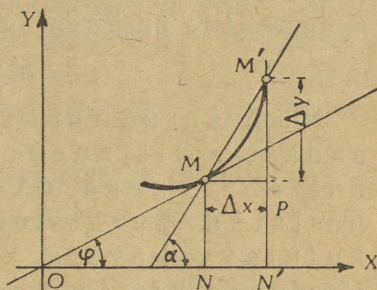
Funktsiooni $y = f(x)$ mitmesugustele eri kujudele vastavad erilised kõverad.

Üheks kõrgema analüüsi ülesandeks on kõverate uurimine. Suurt abi selles uurimises osutab funktsiooni tuletis tema geomeetrilises tõlgenduses. Seepärast asume nüüd tuletise geomeetrilise vaste selgitamisele.

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Geomeetrilisest vaatekohast see tähendab, et on antud kõver (joonis 64). Võtame mõne kindla x -i väärtuse, ja vastaku sellele argumendi väärtusele funktsiooni väärtus $y = f(x)$. Arvude paar (x, y) määrab kõveral punkti M nii, et $ON = x$ ja $NM = y = f(x)$. Diferentsime nüüd funktsiooni selles punktis ja vaatame, missuguse geomeetrilise vaste annab iga samm.



Joonis 63.



Joonis 64.

Esimene samm.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = N'M'.$$

Teine samm.

$$\frac{y + \Delta y = f(x + \Delta x) \quad = N'M'}{-y \quad = -f(x) \quad = -NM} \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = N'M' - NM = PM'.$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{PM'}{NN'} = \operatorname{tg} \angle PMM' = \operatorname{tg} \alpha.$$

Neljas samm.

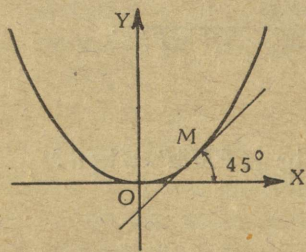
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha.$$

Kuid kui Δx hakkab lähenema nullile, siis ordinaat $N'M'$ hakkab lähenema ordinaadile NM , punkt M' , liikudes kõverjoonel, hakkab piiramatult lähenema punktile M , lõikaja MM' hakkab pöörduma punkti M ümber, lähenedes mõnesugusele piirasendile MT , mida nimetatakse kõvera puutujaks punktis M ; nurk α lõikaja MM' ja telje OX vahel, muutudes, hakkab lähenema nurgale φ , mis asetseb punktist M tõmmatud kõverjoone puutuja ja telje OX vahel; seejuures $\operatorname{tg} \alpha$ piiriks on $\operatorname{tg} \varphi$. Järelikult

$$y' = \operatorname{tg} \varphi.$$

Niisiis antud funktsiooni tuletis kujutab endast selle nurga tangensit, mille moodustab teljega OX puutuja, mis on joonestatud funktsiooni muutumise käiku kujutava kõvera vastavas punktis; teiste sõnadega, tuletis kujutab endast funktsiooni graafiku puutuja tõusu.

Puutuja tõus iseloomustab kõverjoone tõusu antud punktis ja seepärast teda sageli nimetatakse lihtsalt kõvera tõusuks antud punktis. Niisiis tuletis geomeetrisest vaatekohast kujutab endast kõvera tõusu antud punktis.



Joonis 65.

Joonisel 64 võtsime Δx positiivse suurusena: endast mõistetavalt uurimise resultaat ei muutu, kui võtta Δx mitte paremal, vaid vasemal valitud väärtusest $x = ON$. Jätame õppijate hooleks veenduda selles iseseisvalt.

Näide. Leida parabooli $y = x^2$ tõus tema lagipunktis ja punktis, mille abstsiss $x = \frac{1}{2}$.

L a h e n d u s. Diferentsides funktsiooni $y = x^2$ üldise eeskirja järgi, saame: $y' = 2x$. See avaldis annab kõvera tõusu mistahes punktis.

Et leida kõvera tõusu lagipunktis, on tarvis tuletise avaldises asendada x nulliga; siis saame:

$$y' = 0.$$

See tähendab, et kõvera puutuja kõvera lagipunktis on paralleelne teljega OX ; kuna aga käesoleval juhul puutuja läbib koordinaatide algust, siis ta ühtib teljega OX . Et leida kõvera tõusu punktis, mille abstsiss $x = \frac{1}{2}$ (ja ordinaat $y = \frac{1}{4}$), võtame tuletise üldises avaldises $x = \frac{1}{2}$; saame: $y' = 1$.

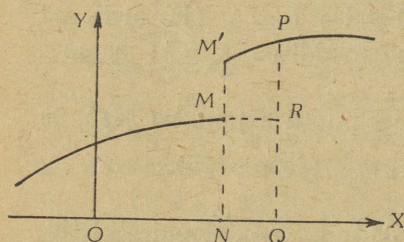
See resultaat näitab, et kõvera puutuja punktis $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ moodustab teljega OX tõusunurga $\frac{\pi}{4}$ (joonis 65).

§ 50. Funktsiooni pidevus. Antud funktsiooni tuletise mõiste määramisel ja diferentsimise eeskirja tuletamisel eeldasime, et suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piir, kui $\Delta x \rightarrow 0$, alati on olemas. Kuid siiski selle piiri olemasolu eeldab teatud tingimusi.

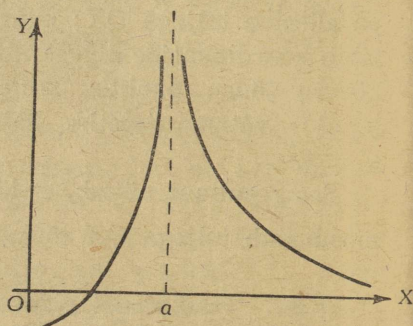
Selleks, et suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piir, kui $\Delta x \rightarrow 0$, oleks olemas, on tarvis, et ka funktsiooni juurdekasv Δy , juhul kui $\Delta x \rightarrow 0$, läheneks nullile: kui Δy , juhul kui $\Delta x \rightarrow 0$, ei lähene nullile, siis suhtel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ei ole mingit piiri, sest sellisel juhul murd $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on piiramatu. Tähendab, tuletis võib esineda ainult neis funktsiooni $y = f(x)$ punktides, milledes juurdekasvu Δx nullile lähenemisel ka juurdekasv Δy läheneb nullile. Nii-sugust funktsiooni nimetatakse pidevaks vaadeldavas punktis.

Niisiis funktsioon $y = f(x)$ võib omada tuletist antud punktis ainult siis, kui ta on selles punktis pidev. Kuid see tingimus ei ole piisav: on niisuguseid funktsioone, millel

ei ole tuletist, vaatamata funktsiooni pidevusele antud punktis. Üksikasjaline selle küsimuse vaatlemine aga ei mahu meie elementaarkursuse raamidesse; mõned näited niisugustest funktsioonidest, mis antud punktis on pidevad, kuid millel selles punktis ei ole tuletist, esinevad edasises käsitluses (vt. § 75). Rakendustes harilikult esinevad funktsioonid on üheaegselt pidevad ja diferentsitavad.



Joonis 66.



Joonis 67.

Nii viisi, funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse pidevaks punktis (x, y) , kui $\Delta x \rightarrow 0$ puhul ka juurdekasv Δy läheneb piiramatult nullile.

Kui see tingimus ei ole täidetud, siis öeldakse, et selles punktis funktsioonil on katkemiskoht.

Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse pidevaks intervallis (a, b) , kui ta on pidev kõigis selle intervalli punktides.

Joonis 66 kujutab katkelise funktsiooni graafikut. Kui $x=ON$, siis selle funktsiooni väärtus on NM . Kui punkt Q , liikudes mööda koordinaattelge, läheneb punktile N , siis argumenti juurdekasv $\Delta x = NQ$ läheneb nullile. Kuid funktsiooni juurdekasv $\Delta y = RP$ ei lähene nullile.

Teine funktsiooni katkemisjuhtum on toodud joonisel 67. Oletame, et punktis $x = a$ funktsiooni väärtus on b (see funktsiooni väärtus ei ole joonisel näidatud). Missugune ka funktsiooni väärtus b ei oleks, juurdekasv Δy , mille funktsioon omandab, kui argument väärtuselt $x = a$ kasvab väärtuseni, mis on a -le kuitahes lähedal, nagu see on näha joonisest, ei lähene nullile, vaid kasvab piiramatult.

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, pidev punktis $x = a$. Läheneagu x piiramatult a -le ($x \rightarrow a$). Vaatame vahet

$$f(x) - f(a).$$

Esitame argumenti kujul: $x = a + \Delta x$. Siis toodud vahet võib kirjutada nii:

$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y.$$

Funktsiooni pidevuse puhul punktis $x = a$ see vahe on lõpmatult kahanev suurus. Kui aga vahe muutuja $f(x)$ ja konstandi $f(a)$ vahel on lõpmatult kahanev suurus, siis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f(\lim x).$$

See omadus on ainult pidevatel funktsioonidel.

Kõik funktsioonid, millega lugeja kohtus ja millega tuleb veel tegelda käesolevas raamatus, on kõikjal pidevad, välja arvatud funktsioonid, nagu: $\frac{m}{x}$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, mis on katkevad üksikutes punktides. Funktsioon $\frac{m}{x}$ katkeb punktis $x = 0$, sest funktsioonil $\frac{m}{x}$ ei ole mingit väärtust, kui $x = 0$, ja seepärast ei saa tulla kõne alla funktsiooni pidevus selles punktis. Samal põhjusel funktsioon $\operatorname{tg} x$ katkeb punktides $\pm \frac{\pi}{2}$, $\pm \frac{3\pi}{2}$, ..., aga funktsioon $\operatorname{ctg} x$ punktides 0 , $\pm \pi$, $\pm 2\pi$,

Kasutades pidevate funktsioonide viimati tõestatud omadust, võime näiteks kirjutada:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} x) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow N} \lg_a x = \lg_a(\lim_{x \rightarrow N} x) = \lg_a N \text{ jms.}$$

Harjutusi.

§ 47. ja 48. juurde.

1. Määrata punkti liikumise kiirus kolmanda sekundi lõpul, kui tee s m, mida punkt läbib t sekundiga, väljendub võrrandiga: $s = 2t^3 - 3$.

Vastus: 54 m/sek.

2. Millal on seaduse $s = t^2 - 4t + 5$ põhjal liikuva punkti kiirus null?

Vastus: Kui $t = 2$.

3. Määrata funktsiooni $y = 3x^2 - 4x + 2$ muutumise kiirus, kui $x = \frac{2}{3}$.

Vastus: 0.

4. Määrata funktsiooni $y = x^2 - 3$ muutumise keskmine kiirus vahemikus $x = 2$ kuni $x = 3,5$ ja leida muutumise kiirus kui $x = 2$ ja $x = 3,5$.

Vastus: 5,5; 4; 7.

§ 49. ja 50. juurde.

5. Rakendades diferentsimise eeskirja, leida järgnevate kõverate tõusud antud punktides:

- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|-----|--------------------------|
| 1. $y = x^2 - 4$, | punktis, mille abstsiss on | 2. | Vastus: 4. |
| 2. $y = 6 - x^2$, | „ „ „ „ | 1. | Vastus: -2. |
| 3. $y = \frac{2}{x}$, | „ „ „ „ | -2. | Vastus: $-\frac{1}{2}$. |
| 4. $y = x - x^2$, | „ „ „ „ | 0. | Vastus: 1. |
| 5. $y = \frac{1}{x-1}$, | „ „ „ „ | 3. | Vastus: $-\frac{1}{4}$. |
| 6. $y = \frac{1}{2}x^2$, | „ „ „ „ | 4. | Vastus: 4. |
| 7. $y = x^2 - 2x + 3$, | „ „ „ „ | 1. | Vastus: 0. |
| 8. $y = 9 - x^2$, | „ „ „ „ | -3. | Vastus: 6. |

6. Leida kõveral $y = 3x^3 - 4x^2$ punkt, milles kõvera puutuja moodustab teljega OX nurga $\frac{\pi}{4}$ radiaani.

Vastus: $(1, -1); \left(-\frac{1}{9}, -\frac{13}{243}\right)$.

7. Kõverale, mille võrrand on $y = -2x^2 + 8x - 9$, on joonestatud puutuja, mis on paralleelne abtsisisteljega. Määrata puutepunkti koordinaadid.

Vastus: $(2, -1)$.

VI peatükk.

Diferentsiaalarvutuse põhivalemid ja eeskirjad.

Elementaarfunktsioonide tuletised.

§ 51. **Põhivalemite tabel.** Diferentsimise eeskiri, mis on antud §-s 48, on põhieeskirjaks, sest ta on tuletatud tuletise definitsioonist endast. Kuigi lihtsamate avaldiste puhul põhireegli kasutamine ei tekita erilist raskust, siiski keerukate funktsioonide ja avaldiste puhul, kui need koosnevad funktsioonide kombinatsioonidest, nagu avaldised, mis sisaldavad funktsioonide summat, korrutist või jagatist, põhieeskirja rakendamine võib osutuda väga tülikaks. Seepärast on loomulik, lähtudes üldisest eeskirjast, määrata täiendavalt alatiseks kindlaks erieeskirjad funktsioonide summa, korrutise ja jagatise diferentsimiseks ja eeskiri, mis kergendab liitfunktsioonide diferentsimist.

Kirjutame kõigepealt välja diferentsimise eeskirjade ja põhivalemite tabeli. Sümbol $()'$ tähendab, et sulgudes olevast avaldisest leitakse tuletis.

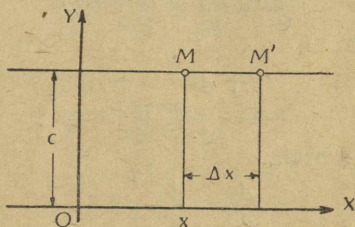
Diferentsimise eeskirjade ja põhivalemite tabel.

- I. $(c)' = 0$ (c on jääv suurus).
- II. $(x)' = 1$.
- III. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$ (u , v ja w on x -i funktsioonid).
- IV. $(u \cdot v)' = uv' + vu'$.
- V. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ (c on jääv, u on x -i funktsioon).
- VI. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- VII. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ ($v \neq 0$).
- VIII. $(\lg_a x)' = \frac{1}{x} \lg_a e$.
- IX. $(\lg_e x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- X. $(a^x)' = a^x \ln a$.
- XI. $(e^x)' = e^x$.
- XII. $(\sin x)' = \cos x$.
- XIII. $(\cos x)' = -\sin x$.
- XIV. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.
- XV. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x$.
- XVI. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- XVII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- XVIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- XIX. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
- XX. Kui $y = f(u)$, kus $u = \varphi(x)$, siis $y' = f(u) \cdot u' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

¹ Arvust e vaata alamal, § 61.

Käesoleva peatüki ülesandeks on selles tabelis toodud eeskirjade ja valemite tuletamine ja diferentsimise tehnika selgeks õpetamine, s. o. põhivalemite rakendamise tehnika õpetamine liitavaldiste (keerukate avaldiste) diferentsimiseks.

§ 52. **Jääva suuruse diferentsimine.** Vaatleme nagu varemgi jäävat suurust c kui muutujat, mis omandab oma muutumise protsessis ühe ja sama väärtuse (§ 39). Järelikult jääva suuruse all võime mõista funktsiooni y , mis omandab ühe ja sama väärtuse c argumendi x igasuguse väärtuse puhul, s. o. võime esitada jäävat suurust kujul $y = c$.



Joonis 68.

Kui argumendile x anname juurdekasvu Δx , siis suurus y ei muutu, s. o. $\Delta y = 0$ ja $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, ja seepärast ka $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Järelikult

$$(c)' = 0. \quad (I)$$

Seda tulemust võime teha näitlikuks geomeetriliselt.

Võrrand $y = c$ väljendab sirgjoont, mis on paralleelne teljega OX ja mille kaugus sellest teljest on c (joonis 68). Võtame x -i mõnesuguse väärtuse ja anname x -le kasvu Δx . Jooniselt on kohe näha, et $\Delta y = 0$. Tuletise geomeetriliseks vasteks on kõvera puutuja tõus antud punktis. Kui $\Delta x \rightarrow 0$,

siis punkt M' piiramatult läheneb punktile M ja „lõikaja“ MM' läheneb meie joone puutuja asendile punktis M . Kuna aga antud juhul joon on sirge, siis puutuja ühtib „kõve-
raga“ endaga. Aga olenevalt sellest, et sirge $y = c$ on paralleelne teljega OX ja moodustab temaga nurga 0 , puutuja on samuti paralleelne abstsissiga ja tuletis $y' = (c)' = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Niisiis jääva suuruse tuletis võrdub nulliga.

§ 53. Argumendi tuletis. Olgu $y = x$. Rakendades diferentsimise põhireeglit, saame:

Esimene samm.

$$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

Teine samm.

$$\frac{y + \Delta y = x + \Delta x}{-y = -x} \quad \cdot$$

$$\frac{\Delta y = \Delta x}{\Delta y = \Delta x}$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Neljas samm.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Järelikult

$$(x)' = 1. \quad (\text{II})$$

Niisiis argumendi tuletis võrdub ühega.

§ 54. Algebraalise summa tuletis. Olgu antud funktsioon

$$y = u + v - w,$$

kus u , v ja w on x -i funktsioonid¹.

¹ Valemite tuletamisel käesolevas ja järgnevais paragrahvides me eeldame, et funktsioonidel u , v , w jts. on tuletised x -i vaadeldava väärtuse puhul olemas (§ 50).

Esimene samm. Anname x -le juurdekasvu Δx . Kuna u , v ja w on x -i funktsioonid, siis igäüks neist saab oma juurdekasvu; märgime need juurdekasvud vastavalt Δu , Δv , Δw . Nii saame:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w.$$

Teine samm.

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w \\ - y \qquad = u \qquad - v \qquad + w \end{array} \quad \hline \Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Neljas samm.

$$y' = u' + v' - w'. \quad (\text{III})$$

Niisiis funktsioonide algebralise summa tuletis võrdub nende funktsioonide tuletiste algebralise summaga.

On silmanähtav, et sama eeskirja saame igasuguse liidetavate arvuga algebralise summa puhul.

§ 55. Kahe funktsiooni korrutise tuletis. Olgu antud funktsioon

$$y = u \cdot v,$$

kus u ja v on argumendi x funktsioonid.

Esimene samm.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Teine samm.

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Neljas samm.

$$y' = u \cdot v' + v \cdot u' \quad (\text{IV})$$

$$\left[\lim \left(\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim \Delta u \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = 0 \cdot v' = 0 \right].$$

Niisiis kahe funktsiooni korrutise tuletis võrdub teise funktsiooni tuletise ja esimese funktsiooni korrutisega pluss esimese funktsiooni tuletise ja teise funktsiooni korrutis.

Kui

$$y = c \cdot v \quad (c \text{ — jääv}),$$

siis, diferentsides seda korrutist valemi (IV) järgi, saame:

$$y' = c \cdot v' + v \cdot c',$$

ja kuna $c' = 0$ [v. valem (I)], siis lõplikult saame:

$$y' = cv'. \quad (\text{V})$$

Niisiis jääva suuruse ja funktsiooni korrutise tuletis võrdub selle funktsiooni tuletise ja jääva suuruse korrutisega.

§ 56. Mistahes arvu funktsioonide korrutise tuletis. Olgu antud funktsioon

$$y = u_1 u_2 \dots u_n,$$

kus u_1, u_2, \dots, u_n on x -i funktsioonid.

Antud n funktsiooni korrutise võime esitada kahe teguri korrutisena: $y = u_1 \cdot (u_2 u_3 \dots u_n)$.

Rakendades valemit (IV), saame:

$$y' = u_1' (u_2 u_3 \dots u_n) + u_1 (u_2 u_3 \dots u_n)'$$

Korrates sama meetodit korrutise $u_2 u_3 \dots u_n$, $u_3 \dots u_n$ jne. kohta, saame:

$$y' = u_1'(u_2 u_3 \dots u_n) + u_1 \cdot u_2'(u_3 \dots u_n) + \\ + u_1 \cdot u_2(u_3 \dots u_n)' = u_1'(u_2 u_3 \dots u_n) + u_2'(u_1 u_3 \dots u_n) + \\ + u_1 \cdot u_2(u_3 \dots u_n)' = u_1'(u_2 u_3 \dots u_n) + u_2'(u_1 u_3 \dots u_n) + \\ + u_3'(u_1 u_2 u_4 \dots u_n) + \dots + u_1 u_2 u_3 (u_4 u_5 \dots u_n)' \text{ jne.}$$

Sel viisil jõuame lõpuks järgmisele tulemusele:

$$y' = u_1'(u_2 u_3 \dots u_n) + u_2'(u_1 u_3 \dots u_n) + \\ + u_3'(u_1 u_2 u_4 \dots u_n) + \dots + u_n'(u_1 u_2 \dots u_{n-1}). \quad (\text{IVa})$$

Niisiis n funktsiooni korrutise tuletis võrdub kõigi nende korrutiste summaga, mis moodustuvad iga teguri tuletise korutamisest kõigi ülejäävate liikmetega.

§ 57. **Astme $y = x^n$ tuletis.** Võttes valemis (IVa) $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n = x_1$, saame:

$$y' = (x^n)' = x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1}. \quad (\text{VI})$$

Valem (VI) on meil tõestatud ainult täisarvulise positiivse astendaja n puhul. Paragrahvis 62 näitame, et valem on kehtiv igasuguse n väärtuse puhul (murdarvulise, negatiivse, irratsionaalse). Kuid näidetes, milledega meil on tege mist lähemas paragrahvis, kasutame astme tuletise valemit juba astendaja igasuguse väärtuse puhul.

Niisiis astme x^n tuletis võrdub astendaja ja ühe võrra väiksema astendajaga astendatava x korrutisega.

§ 58. **Muru tuletis.** Olgu antud funktsioon

$$y = \frac{u}{v} ;$$

kus u ja v on x -i funktsioonid ja v ei muutu nulliks ei ühegi x -i vaadeldava väärtuse puhul. Rakendades diferentsimise eeskirja, saame:

Esimene samm.

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Teine samm.

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Neljas samm. Rakendades teoreeme III, II ja I § 40, saame:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \quad (\text{VII})$$

Niisiis murru tuletise saame, kui lugeja tuletise ja nimetaja korrutisest lahutame nimetaja tuletise ja lugeja korrutise ning saadud vahe jagame nimetaja ruuduga.

Olgu nüüd

$$y = \frac{c}{u},$$

kus u on x -i funktsioon, aga c jääv suurus. Valemi (VII) põhjal saame:

$$y' = \frac{u \cdot c' - c \cdot u'}{u^2} = -c \frac{u'}{u^2}, \quad (\text{VIIa})$$

Niisiis murru tuletis, mille lugeja on jääv, nimetaja aga x -i funktsioon, võrdub nimetaja tuletise ja lugeja korrutisega, mis on jagatud nimetaja ruuduga ja võetud vastupidise märgiga.

§ 59. Liitfunktsiooni tuletis. Olgu antud funktsioon

$$y = \sqrt{1 + x^2} = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Millise eeskirja põhjal võiks leida selle funktsiooni tuletist? Astme diferentsimise eeskirja ei või rakendada, sest astmefunktsiooni tuletise valem oli tuletatud x^n -kujulise funktsiooni tarvis, s. o. astmele, mille aluseks on argument x ise, kuid funktsioonil $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ on aluseks funktsioon $1 + x^2$ argumentiga x , s. o. funktsioon $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ osutub funktsiooni astmeks. Sellepärast on loomulik, et valem (VI) selle funktsiooni diferentsimiseks ei ole kehtiv ja meil tuleb diferentsimise põhieeskirja kasutada või koostada uus eeskiri niisuguste liitfunktsioonide tarvis. Käesoleva paragrahvi ülesandeks ongi niisuguse eeskirja tuletamine.

Me teeme vahet liitfunktsioonide ja funktsioonidest olevate funktsioonide ehk liitfunktsioonide vahel.

Liitfunktsiooniks nimetatakse niisugust funktsiooni, mis on argumentiga teostatud mingi ühe tehte tulemuseks. Liitfunktsioonideks, mis saadakse meile tuntud tehete abil, on järgmised:

$c \pm x, \frac{c}{x}, x^n, a^x, \lg_a x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \operatorname{arcsin} x, \operatorname{arccos} x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arctg} x$, kus c on jääv suurus.

Kui aga funktsioon on argumentiga teostatud mitme tehte resultaat, siis niisugust funktsiooni nimetatakse liitfunktsiooniks ehk funktsiooni funktsiooniks.

Nii on funktsioon $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ liitfunktsioon. Võttes $1 + x^2 = u$, saame:

$$y = u^{\frac{1}{2}},$$

s. o. y on u funktsioon, u omakorda aga on x -i funktsioon; seega y on funktsiooni funktsioon.

Üldkujul võib funktsiooni funktsiooni kirjutada järgmisel kujul:

$$y = f(u),$$

kus u omakorda on x -i funktsioon:

$$u = \varphi(x).$$

Asume nüüd liitfunktsiooni tuletise leidmisele.

Niisiis olgu antud funktsioon

$$y = f(u), \text{ kus } u = \varphi(x).$$

Esimene samm. Anname x -le juurdekasvu Δx . Siis funktsioon saab juurdekasvu Δu , aga sellest olenevalt muutub ka y , omandades juurdekasvu Δy ; järelikult esimese sammu tulemus esineb järgmisel kujul:

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u), \quad u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x).$$

Teine samm.

$$\frac{y + \Delta y = f(u + \Delta u)}{-y = -f(u)} \quad \frac{u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x)}{-u = -\varphi(x)}$$

$$\frac{\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}$$

Kolmas samm. Tuletise y' saamiseks tuleb leida suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piir, kui $\Delta x \rightarrow 0$. Kuid Δy läheneb nullile mitte vahe-
tult Δx -i nullile lähenemisel, vaid Δu nullile lähenemise kaudu. Seepärast suhte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

esitame suhete korrutise kujul:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$[\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta u].$$

Nüüd on tarvis leida selle korrutise piir, kui $\Delta x \rightarrow 0$. Käesoleva eeskirja tuletamisel eeldame, et funktsioonil u on antud x -i väärtuse juures tuletis. Seepärast kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis juurdekasv Δu samuti läheneb nullile (vt. § 50). Sel viisil, minnes üle piirile, saame:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \\ &= f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'(u) \cdot u'. \end{aligned} \quad (\text{XX})$$

Niisiis kui $y = f(u)$ ja $u = \varphi(x)$, siis y -i tuletis x -i suhtes võrdub y -i tuletisega u suhtes, korrutatud u tuletisega x -i suhtes.

Rakendades seda eeskirja funktsiooni $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ kohta, saame:

$$\begin{aligned} y &= u^{\frac{1}{2}}, \quad u = 1 + x^2, \quad y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + x^2)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

Võivad esineda veel keerukamad funktsioonid; näiteks funktsiooni

$$y = \sin \sqrt{1 + x^2}$$

võib eraldada kolmeks järgmiseks olenevuseks:

$$y = \sin u; \quad u = \sqrt{v}; \quad v = 1 + x^2.$$

Üldkujul sellist sõltuvust võib esitada järgmiselt:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = \psi(x).$$

Niisugusel juhul funktsiooni y tuletist x suhtes, nagu seda on kerge näidata, väljendab valem

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'. \quad (\text{XXa})$$

Analoogiliselt leitakse tuletised veel keerukamail funktsioonidel.

§ 60. Näiteid. Diferentsida järgmised funktsioonid:

1. $y = x^3$.

Lahendus. $y' = 3x^2$ valemi (VI) järgi.

2. $y = 3x^4 - 2x^2$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} y' &= (3x^4)' - (2x^2)' && \text{[valemi (III) järgi]} \\ &= 3(x^4)' - 2(x^2)' && \text{[valemi (V) järgi]} \\ &= 12x^3 - 4x && \text{[valemi (VI) järgi].} \end{aligned}$$

3. $y = x^{\frac{4}{7}} - 2$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} y' &= (x^{\frac{4}{7}})' - (2)' && \text{[valemi (III) järgi]} \\ &= \frac{4}{7} x^{-\frac{3}{7}} && \text{[valemite (VI) ja (I) järgi]} \\ &= \frac{4}{7x^{\frac{7}{3}}}. \end{aligned}$$

4. $y = \frac{3x^5}{\sqrt{x^2}} - \frac{7x}{\sqrt{x^4}} + 3\sqrt[7]{x^3}$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} y' &= (3x^5)' - (7x^{-\frac{1}{3}})' + (3x^{\frac{3}{7}})' && \text{[valemi (III) järgi]} \\ &= \frac{69}{5} x^{\frac{18}{5}} + \frac{7}{3} x^{-\frac{4}{3}} + \frac{9}{7} x^{-\frac{4}{7}} && \text{[valemite (V) ja (VI) järgi].} \end{aligned}$$

5. $y = (x^3 + 2)^5$.

Lahendus. Antud astet võib lahutada Newtoni binoomi valemi põhjal ja siis diferentsida summa tuletise

eeskirja järgi, kuid lihtsam on rakendada liitfunktsiooni tuletise valemit: $y = u^5$; $u = x^3 + 2$.

$$y' = 5u^4 \cdot u' = 5(x^3 + 2)^4 (x^3 + 2)' = 5(x^3 + 2)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2(x^3 + 2)^4.$$

6. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Lahendus. See on liitfunktsioon: $y = u^{\frac{1}{2}}$; $u = a^2 - x^2$. Rakendades valemit (XX) saame:

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Liitfunktsiooni diferentsimise protsessi kirjutamise viis, mida rakendasime käesolevani, on väga kohmakas. Näitame sama ülesande lahendamisel lihtsama kirjutamisviisi.

Olgu antud funktsioon $y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Me näeme, et see on funktsiooni funktsioon. Asendame mõttes astme aluse $a^2 - x^2$ u -ga, diferentsime y -i muutuja $u = a^2 - x^2$ suhtes ja korrutame u tuletisega muutuja x suhtes, s. o. vahe $a^2 - x^2$ tuletisega

$$y' = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (a^2 - x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Lõpuks, kui lugeja on omandanud harjumuse diferentsimise tehnikas, võib lihtsustada ka viimast kirjutuse vormi, jättes ära teguri $(a^2 - x^2)'$ ja asetades tema asemele korruga aluse $a^2 - x^2$ diferentsimise resultaadi

$$y' = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{a^2 - x^2}.$$

7. $y = (5x^2 - 4) \sqrt[3]{1 + 3x^2}$.

Lahendus.

$$\begin{aligned}y' &= (5x^2 - 4) \cdot [(1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}}]' + (1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (5x^2 - 4)' \\ & \quad \text{[valemi (IV) järgi]} \\ &= (5x^2 - 4) \cdot \frac{1}{3} (1 + 3x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x + (1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 10x \\ & \quad \text{[valemite (XX), (III) ja (VI) järgi]} \\ &= \frac{2x(5x^2 - 4)}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}} + 10x \sqrt[3]{1 + 3x^2} = \frac{2x(20x^2 + 1)}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}}.\end{aligned}$$

8. $y = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Lahendus.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2 + x^2)' - (a^2 + x^2) [(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}]'}{a^2 - x^2} \\ & \quad \text{[valemi (VII) järgi]} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x - (a^2 + x^2) \cdot \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{2x(a^2 - x^2) + x(a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3a^2x - x^3}{(a^2 - x^2)^2}.\end{aligned}$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = 5x^3 - 3x^2 + 6.$

Vastus: $y' = 15x^2 - 6x.$

2. $y = x^{a+b}.$

Vastus: $y' = (a+b)x^{a+b-1}.$

3. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}.$

Vastus: $y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}.$

4. $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$

Vastus: $y' = -\frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}.$

$$5. y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Vastus: } y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}.$$

$$6. y = x^{-2} - 4x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Vastus: } y' = -2x^{-3} + 2x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$7. y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2}} - \frac{1}{x^2}.$$

$$8. y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1).$$

$$\text{Vastus: } y' = 6x^2 + 18x + 7.$$

$$9. y = (x^2 + 4x - 3)(3x^2 + 12x + 12).$$

$$\text{Vastus: } y' = 6(x+2)(2x^2 + 8x + 1).$$

$$10. y = \frac{x+a}{x-a}.$$

$$\text{Vastus: } y' = -\frac{2a}{(x-a)^2}.$$

$$11. y = \frac{x^2-4}{x^2+4}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{16x}{(x^2+4)^2}.$$

$$12. y = \frac{x^3}{4-x}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{2x^2(6-x)}{(4-x)^2}.$$

$$13. y = \frac{x^2+x-2}{x^3-1}.$$

$$\text{Vastus: } y' = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$14. y = (x^3-1)^4.$$

$$\text{Vastus: } y' = 12x^2(x^3-1)^3.$$

$$15. y = \sqrt[3]{4x^3+6x^2-5}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{4x(x+1)}{\sqrt{(4x^3+6x^2-5)^2}}.$$

$$16. y = \sqrt{x^4+x^2-2x}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{2x^3+x-1}{\sqrt{x^4+x^2-2x}}.$$

$$17. y = (3x-1)^2(x-1)^3.$$

$$\text{Vastus: } y' = 3(5x-3)(3x-1)(x-1)^2.$$

$$18. y = (x-1)\sqrt{x^2+1}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{2x^3-x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$19. y = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{x+2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$20. y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}.$$

$$21. \quad y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$\text{Vastus: } y' = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$22. \quad y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

$$\text{Vastus: } y' = -\frac{a^2}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

§ 61. **Logaritmfunksiooni tuletis.** Olgu antud funktsioon

$$y = \log_a x.$$

Diferentsides seda funktsiooni üldise eeskirja järgi, saame:

Esimene samm.

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x).$$

Teine samm.

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Kolmas samm.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Saadud avaldise piiri leidmiseks tähistame $\frac{\Delta x}{x}$ tähega α :

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha,$$

millest: $\Delta x = \alpha \cdot x$. Siis saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\alpha \cdot x} \log_a(1 + \alpha) = \frac{1}{x} \cdot \log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Neljas samm.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right], \end{aligned}$$

sest $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, kuna x ei muutu, kui $\Delta x \rightarrow 0$. Viimast piiri

otsime $\alpha \rightarrow 0$ puhul, sest kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis suurus $\alpha = \frac{\Delta x}{x}$ samuti läheneb nullile.

Jäab leida

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Jättes ära tõestuse selle piiri olemasolu kohta, piirdume ainult järgmiste lühikeste seletustega.

Vaatame, mil viisil muutub avaldis

$$z = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

kui α läheneb nullile. Selleks anname α -le mitmesuguseid arvulisi väärtusi ja arvutame z -i vastavad väärtused; arvutamise tulemused on esitatud järgnevas tabelis:

¹ Piirile lähenemise ja logaritmitamise tehete vastastikune ümberpaigutus

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log_a \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]$$

on lubatav selle tagajärjel, et $\log_a x$ on pidev funktsioon, aga pidevate funktsioonide kohta oli §-s 50 määratud kindlaks omadus, mis kirjutatakse järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x).$$

α	z	α	z
10	1,0096		
5	1,4310		
2	1,7320		
1	2,0000		
0,5	2,2500	- 0,5	4,0000
0,1	2,5937	- 0,1	2,8680
0,01	2,7048	- 0,01	2,7320
0,001	2,7169	- 0,001	2,7195

Sellest tabelist nähtub, et suurus $(1 + a)^\alpha$ arvu a absoluutväärtuse vähenemisel läheneb arvule 2,71... Täpsem arvutamine näitab, et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + a)^{\frac{1}{\alpha}} = 2,718281828459045 \dots$$

Analüüsi põhjalikkudes kursustes tõestatakse, et see piir on irratsionaalarv; järelikult seda ei saa väljendada täpselt murruna.

Vaadeldud piiri võib tähistada mõne tähega. Seda piiri tähistatakse üldiselt tähega e , samuti kui on viisiks tähistada tähega π piir, millega lugeja juba on tuttav geomeetria kursusest ($\pi = 3,14 \dots$).

Niisiis

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e. \quad (\text{VIII})$$

Arvul e on analüüsis väga suur tähtsus. Kuna arvutamisel on sobiv rakendada arvu 10 logaritmidüsteemi aluseks, on teoreetilistes ülesannetes sobivam kasutada logaritmidüsteemi, mille aluseks on arv e . See eelistus ilmnebki logaritmifunktsiooni tuletise vaatlemisel: kui võtta $a = e$, siis $\log_e e = 1$ ja valem (VIII) omandab kuju

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

Nii näeme, et kui logaritmade aluseks võtta arv e , siis logaritmfunksiooni tuletis väljendub lihtsamalt kui mõne muu mistahes arvu a võtmisel logaritmade aluseks.

Muu seas on ka logaritmade tabelit lihtsam koostada logaritmadele, millede aluseks on e . Olles koostanud niisuguse tabeli, on kerge selle tabeli järgi saada kümnendlogaritmade tabeli. Tõepoolest, olgu meil teada arvu N logaritm alusel e : $\log_e N = p$. See tähendab, et $e^p = N$.

Leiame võrduse mõlemalt poolelt logaritmid alusel 10; saame:

$$p \log_{10} e = \log_{10} N.$$

Siit näeme, et arvu kümnendlogaritmi leidmiseks sama arvu logaritmi p järgi, mis on arvutatud alusel e , osutub küllaldaseks korrutada $p \log_{10} e$ -ga. Niisiis, teades arvude logaritme alusel e , leiame arvude kümnendlogaritmid nende korrutamisel arvuga $\log_{10} e = 0,43429\dots$

Logaritmade süsteemi, mille aluseks on võetud arv e , nimetatakse naturaals- ehk Napier'i logaritmade süsteemiks (loomulikkude logaritmade süsteemiks).

Tegur $\log_{10} e$, mille abil naturaalllogaritmade süsteemist minnakse üle kümnendlogaritmade süsteemile, nimetatakse mooduliks. On silmanähtav, et valemis (VIII) tegur $\log_a e$ on mooduliks üleminekul naturaalllogaritmade süsteemist niisugusele logaritmade süsteemile, mille aluseks on a .

Niisiis võime ütelda:

Argumendi logaritmi tuletis võrdub argumendi pöörd suuruse ja logaritmade süsteemi mooduli korrutisega.

Edasises käsitluses arvu N naturaalllogaritmi, s. o. $\log_e N$ märgime sümboliga $\ln N$.

Nagu nägime, võttes $a = e$, saame:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}, \quad (\text{IX})$$

sest $\log_e e = \ln e = 1$.

Niisiis argumendi naturaallogaritmi tule-
tis võrdub argumendi pöördväärtusega.

§ 62. Astme tuletis mistahes astendaja puhul. Nüüd võime tõestada igasuguse astendajaga astme tuletise valemi $(x^n)' = nx^{n-1}$ kehtivuse, mis on tuletatud paragrahvis 57 ainult täisarvulise positiivse astendaja puhul.

Olgu funktsioon

$$y = x^n,$$

kus n on mistahes arv. Logaritmides saame: $\ln y = n \ln x$.

Funktsioon $\ln y$ on liitfunktsioon, sest naturaallogaritm võetakse y -st, aga y on x -i funktsioon. Seepärast valemite

$$(IX) \text{ ja } (XX) \text{ põhjal saame: } (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

Võrduse $\ln y = n \ln x$ parempoolse osa tuletis võrdub:

$$(n \ln x)' = n \cdot \frac{1}{x}.$$

Järelikult

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{n}{x},$$

millest

$$y' = (x^n)' = y \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}. \quad (VI)$$

§ 63. Eksponentfunktsiooni tuletis. Eksponentfunktsiooni nimetatakse funktsiooni kujul:

$$y = a^x \quad (a > 0).$$

Selle funktsiooni tuletise leidmiseks leiame tema naturaallogaritmi: $\ln y = x \ln a$.

Funktsioon $\ln y$ on liitfunktsioon, sest logaritm võetakse y -st, aga y on x -i funktsioon. Sellepärast valemite (IX) ja (XX) järgi saame:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a,$$

millest

$$y' = (a^x)' = y \ln a = a^x \ln a. \quad (X)$$

Niisiis, eksponentfunktsiooni a^x tuletis võrdub eksponentfunktsiooni ja aluse naturaalogaritmi korrutisega.

Eri juhul, kui $a = e$, saame funktsiooni $y = e^x$.

Valemi järgi saame:

$$y' = (e^x)' = e^x \ln e = e^x, \quad (\text{XI})$$

s. o. eksponentfunktsiooni e^x tuletis võrdub funktsiooni endaga.

§ 64. Näiteid. Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = \ln(x^3 + 2)$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^3 + 2} \cdot (x^3 + 2)' \text{ [valemite (IX) ja (XX) järgi]} \\ &= \frac{3x^2}{x^3 + 2}. \end{aligned}$$

2. $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} (\sqrt{1 - x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \\ &= \frac{x}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Selle näite võib lahendada teisel viisil:

$$y = \ln \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2),$$

millest

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} [\ln(1 - x^2)]' \text{ [valemi (V) järgi]} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x^2} (-2x) = \frac{x}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

3. $y = a^{4x^2}$.

Lahendus.

$$y' = a^{4x^2} \ln a \cdot (4x^2)' \text{ [valemite (X) ja (XX) järgi]} \\ = a^{4x^2} \ln a \cdot 8x = 8x \ln a \cdot a^{4x^2}.$$

4. $y = x^x$.

Lahendus. Selle funktsiooni diferentsimiseks ei või rakendada astme tuletise valemit, sest astmefunktsiooni astendajaks on jääv arv, ega või rakendada eksponentfunktsiooni tuletise valemit, kuna selle funktsiooni aluseks on jääv arv. Antud funktsiooni diferentsimiseks leiame temast naturaalogaritmi. Saame:

$$\ln y = x \ln x,$$

millest

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x \text{ [valemite (XX) ja (IV) järgi];}$$

määrame siit y' :

$$y' = (x^x)' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

Märkus: Selle meetodiga diferentsitakse funktsioonid, millede kuju on:

$$y = [f(x)]^{g(x)}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = \ln(x-2)$.

Vastus: $y' = \frac{1}{x-2}$.

2. $y = \ln(ax+b)$.

Vastus: $y' = \frac{a}{ax+b}$.

3. $y = \ln(x^2+2x)$.

Vastus: $y' = \frac{2(x+1)}{x^2+2x}$.

4. $y = \log_a(x+x^3)$.

Vastus: $y' = \frac{1+3x^2}{x+x^3} \log_a e$.

5. $y = \ln x^2$. Vastus: $y' = \frac{2}{x}$.
6. $y = (\ln x)^2$. Vastus: $y' = \frac{2 \ln x}{x}$.
7. $y = x \ln x$. Vastus: $y' = \ln x + 1$.
8. $y = \ln \frac{a+x}{a-x}$. Vastus: $y' = \frac{2a}{a^2 - x^2}$.
9. $y = e^{4x-3}$. Vastus: $y' = 4e^{4x-3}$.
10. $y = a^{3x}$. Vastus: $y' = 3a^{3x} \ln a$.
11. $y = 7^{x^2+3x}$. Vastus: $y' = 3 \ln 7 \cdot (x^2 + 1) \cdot 7^{x^2+3x}$.
12. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Vastus: $y' = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.
13. $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$. Vastus: $y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.
14. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Vastus: $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.
15. $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Vastus: $y' = \frac{1}{1-x^2}$.
16. $y = \ln (x + \sqrt{1+x^2})$. Vastus: $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
17. $y = x^{\frac{1}{x}}$. Vastus: $y' = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$.
18. $y = x^{\ln x}$. Vastus: $y' = x^{\ln x - 1} \cdot \ln(x^2)$.
19. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$. Vastus: $y' = 0$.

§ 65. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised.

a) $\sin x$ tuletis. Rakendades üldist diferentsimise eeskirja, saame:

Esimene samm.

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

Teine samm.

$$\begin{aligned} y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2} = \\ &= 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

Kolmas samm.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \\ &= \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin z}{z}, \end{aligned}$$

kus $z = \frac{\Delta x}{2}$. Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis z samuti läheneb nullile.

Neljäs samm.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \\ &= \cos \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \cos x \end{aligned}$$

(sest $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, § 42).

Seega:

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (\text{XII})$$

b) $\cos x$ tuletis. Funktsiooni $\cos x$ võib esitada kujul: $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Diferentsides nüüd $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ nagu liitfunktsiooni, saame:

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x,$$

sest $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Seega:

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (\text{XIII})$$

c) $\operatorname{tg} x$ tuletis. Kuna

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

siis murru tuletise valemi (VII) järgi saame:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (\text{XIV})$$

d) $\operatorname{ctg} x$ tuletis. Arvesse võttes, et

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

murru tuletise valemi järgi leiame:

$$\frac{\sin x (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (\text{XV})$$

§ 66. Näiteid. Diferentsida järgmised funktsioonid:

1. $y = \cos 3x^2$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} y' &= \cos 3x^2 \cdot (3x^2)' \text{ [valemite (XII) ja (XX) järgi]} \\ &= 6x \cdot \cos 3x^2. \end{aligned}$$

2. $y = \operatorname{tg} \sqrt{1 - x^3}$.

Lahendus.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1-x^3}} \cdot (\sqrt{1-x^3})' \text{ [valemite (XIV) ja (XX) järgi]} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1-x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}} (1-x^3)' \\ &= -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3} \cos^2 \sqrt{1-x^3}}.\end{aligned}$$

3. $y = \cos^3 x.$

Lahendus. Seda funktsiooni võib kirjutada kujul:

$$y = (\cos x)^3. \text{ Siit}$$

$$\begin{aligned}y' &= 3(\cos x)^2 \cdot (\cos x)' \text{ [valemite (VI) ja (XX) järgi]} \\ &= -3 \sin x \cdot \cos^2 x.\end{aligned}$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = \cos 5ax.$ Vastus: $y' = -5a \sin ax.$
2. $y = \operatorname{tg}(2x + 3).$ Vastus: $y' = \frac{2}{\cos^2(2x + 3)}.$
3. $y = \sin^2 x.$ Vastus: $y' = \sin 2x.$
4. $y = \operatorname{tg} x - x.$ Vastus: $y' = \operatorname{tg}^2 x.$
5. $y = \cos^3 x^2.$ Vastus: $y' = -6 \cos^2 x^2 \cdot \sin x^2.$
6. $y = \sin^3 x \cdot \cos x.$ Vastus: $y' = \sin^2 x (3 \cos^2 x - \sin^2 x).$
7. $y = \ln \cos x.$ Vastus: $y' = -\operatorname{tg} x.$
8. $f(x) = \ln \sin^2 x.$ Vastus: $y' = 2 \operatorname{ctg} x.$
9. $f(x) = \cos \frac{a}{x}.$ Vastus: $y' = \frac{a}{x^2} \cdot \sin \frac{a}{x}.$
10. $y = e^{\sin x}.$ Vastus: $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x.$
11. $f(x) = a^{\operatorname{tg} nx}.$ Vastus: $f'(x) = \frac{na^{\operatorname{tg} nx} \cdot \ln a}{\cos^2 nx}.$

$$12. y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}. \quad \text{Vastus: } y' = \frac{1}{\cos x}.$$

$$13. y = x^{\sin x}. \quad \text{Vastus: } y' = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x \right).$$

$$14. y = (\sin x)^x. \quad \text{Vastus: } y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

§ 67. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide tuletised.

a) $\arcsin x$ tuletis. Olgu

$$y = \arcsin x,$$

siis $\sin y = x$.

Funktsioon $\sin y$ on liitfunktsioon, sest y on x -i funktsioon.

Diferentsides võrduse $\sin y = x$ mõlemaid pooli muutuja x suhtes, saame:

$$\cos y \cdot y' = 1,$$

$$\text{millest leiame: } y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Kuna $\sin y = x$, siis $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ ¹; järelikult

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (\text{XVI})$$

b) $\arccos x$ tuletis. Võtame

$$y = \arccos x,$$

siis $\cos y = x$.

¹ Juure ees võtame positiivse märgi, sest funktsiooni $y = \arcsin x$ väärtusi vaadeldakse ainult piirides alates $-\frac{\pi}{2}$ kuni $+\frac{\pi}{2}$ ($-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$), nendes piirides on aga funktsiooni $\cos y$ kõik väärtused positiivsed.

Diferentsides võrduse $\cos y = x$ mõlemaid pooli muutuja x suhtes, saame:

$$-\sin y \cdot y' = 1,$$

kust leiame $y' = -\frac{1}{\sin y}$.

Kui $\cos y = x$, siis $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$ ¹; järelikult

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (\text{XVII})$$

c) $\arctg x$ tuletis. Võtame

$$y = \arctg x,$$

siis $\tg y = x$.

Diferentsides selle võrduse mõlemaid pooli, saame:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1,$$

millest leiame: $y' = \cos^2 y$.

Kui $\tg y = x$, siis $\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$, sest $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tg^2 y}$; järelikult

$$y' = (\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (\text{XVIII})$$

d) $\text{arcctg } x$ tuletis. Võtame

$$y = \text{arcctg } x;$$

siis $\text{ctg } y = x$.

Diferentsides selle võrduse mõlemaid pooli, saame:

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1,$$

millest leiame $y' = -\sin^2 y$.

¹ Juure ees võtame positiivse märgi, sest funktsiooni $y = \arccos x$ väärtusi vaadeldakse ainult piirides alates 0 kuni π ($0 \leq y \leq \pi$), nendes piirides on aga funktsiooni $\sin y$ kõik väärtused positiivsed.

Kui $\operatorname{ctg} y = x$, siis $\sin^2 y = \frac{1}{1+x^2}$, sest $\sin^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$;
järelikult

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (\text{XIX})$$

§ 68. Näiteid. Leida järgmiste funktsioonide tule-
tised:

1. $y = \operatorname{arctg} 3x^2$.

Lahendus.

$$y' = \frac{1}{1+9x^4} \cdot (3x^2)' \quad [\text{valemite (XVIII) ja (XX) järgi}]$$

$$= \frac{6x}{1+9x^4}.$$

2. $y = \arcsin(3x - 4x^3)$.

Lahendus.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \cdot (3x-4x^3)' \quad [\text{valemite (XVI) ja (XX)}]$$

järgi]

$$= \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arctg} \frac{x+a}{1-ax}$.

Lahendus.

$$y' = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+a}{1-ax}\right)' \quad [\text{valemite (XIX) ja (XX) järgi}]$$

$$= -\frac{(1-ax)^2}{(1+a^2)(1+x)^2} \cdot \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Harjutusi.

Diferentsida järgmised funktsioonid:

1. $y = \arcsin \frac{x}{a}$. Vastus: $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

2. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$. Vastus: $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

3. $f(x) = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$. V a s t u s: $f'(x) = 2 \sqrt{a^2 - x^2}$.
4. $y = \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. V a s t u s: $y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.
5. $y = \operatorname{arccos} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. V a s t u s: $y' = -\frac{2}{e^x + e^{-x}}$.
6. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - x$. V a s t u s: $y' = -\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.
7. $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. V a s t u s: $y' = \frac{2ax^2}{x^4 - a^4}$.
8. $y = x^{\arcsin x}$. V a s t u s: $y' = x^{\arcsin x} \left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$.

§ 69. Teise ja kõrgema järgu tuletised. Antud funktsiooni tuletis on ka mõnesugune argumendi x funktsioon. Seda uut funktsiooni võib omakorda diferentsida. Sel viisil saadakse teise järgu tuletis ehk lühidalt teine tuletis. Teise tuletise tuletist nimetatakse kolmanda järgu tuletiseks jne.

Kui $y = f(x)$ on antud funktsioon, siis tema tuletis (esimene tuletis) tähistatakse nagu teada, sümboliga

$$y' = f'(x).$$

Diferentsides seda funktsiooni, saame teise tuletise, mis tähistatakse:

$$y'' = f''(x).$$

Kolmanda tuletise tähistamiseks tarvitatakse sümbolit

$$y''' = f'''(x),$$

neljanda tuletise tarvis —

$$y^{\text{IV}} = f^{\text{IV}}(x)$$

jne.

Näide 1. Leida funktsiooni $y = e^{ax}$ teine tuletis.

Lahendus.

$$y' = ae^{ax}; \quad y'' = a^2e^{ax}.$$

Näide 2. Leida funktsiooni $y = x^3$ viienda järgu tuletis.

Lahendus.

$$y' = 3x^2; \quad y'' = 6x; \quad y''' = 6; \quad y^{IV} = 0.$$

Järelikult funktsiooni $y = x^3$ viienda ja kõrgema järgu tuletised võrduvad nulliga.

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide teine tuletis:

- | | |
|--|--|
| 1. $y = 4x^3 - 6x^2 + 4x + 7.$ | Vastus: $y'' = 12(2x - 1).$ |
| 2. $y = \frac{a}{x^n}.$ | Vastus: $y'' = \frac{n(n+1)a}{x^{n+2}}.$ |
| 3. $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$ | Vastus: $y'' = \frac{1}{2a} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$ |
| 4. $y = \frac{x+1}{x-1}.$ | Vastus: $y'' = \frac{4}{(x-1)^3}.$ |
| 5. $y = \ln(ax + b).$ | Vastus: $y'' = -\left(\frac{a}{ax+b}\right)^2.$ |

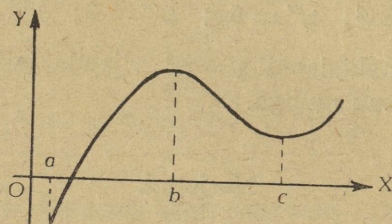
VII peatükk.

Tuletise lihtsamaid rakendusi.

§ 70. **Funktsiooni muutumise käik.** Olgu antud mingi funktsioon $y = f(x)$. Nagu teada, saab funktsiooni graafiliselt väljendada kõverjoonena. See kõver annab näitliku kujutluse funktsiooni muutumise käigust, olenevalt argumendi muutumisest.

Olgu meile antud kõverjoon, mis on kujutatud joonisel 69. Jooniselt näeme, et kõver mõnedes piirkondades tõuseb, teistes langeb.

Tõusult langusele ülemineku punktis kõvera ordinaat jõuab kõige suurema väärtuseni, võrreldes lähedaste punktidega (maksimum), aga languselt tõusule ülemineku



Joonis 69.

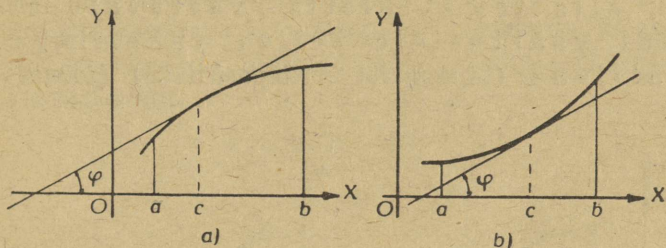
punktis jõuab kõige väiksema väärtuseni (miinimum). Kõvera tõus, langus ja ülemineku punktid tõusult langusele just ongi elementideks, mis iseloomustavad funktsiooni käigu muutumist. Käesolevas peatükis peatume küsimusel, mil viisil võib antud funktsiooni järgi määrata nimetatud kõvera muutumise käiku iseloomustavaid omadusi.

§ 71. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine. Kui argumendi x muutumise vahemikus a -st kuni b -ni argumendi x kasvades funktsiooni $y = f(x)$ väärtused ka kasvavad, siis funktsiooni nimetatakse kasvavaks selles vahemikus.

Analoogiliselt, kui vahemikus a -st b -ni argumendi x kasvades funktsiooni $y = f(x)$ väärtused kahanevad, siis funktsiooni nimetatakse kahanevaks selles vahemikus.

Esimesel juhul funktsiooni $y = f(x)$ abstsissstelje vahemikus a -st b -ni kujutab kõvera tõusev kaar, sest abstsissi x liikumisel a -st b -ni ordinaadid peavad suurenema (joonis 70). Sel juhul kõvera puutuja igas punktis vahe-

mikus a -st b -ni moodustab teljega OX teravnurga φ . Sellepärast on niisugustes punktides $\operatorname{tg} \varphi$ väärtus positiivne. Kuna aga kõvera puutuja tõusu määrab funktsiooni tuletise väärtus, siis jõuame tulemuseni, et kui funktsioon kasvab vahemikus a -st b -ni, siis tema tuletis, vastavalt argumenti väärtustele selles vahemikus on positiivne¹.



Joonis 70.

Ümberpöörduvalt, kui vastavalt argumenti väärtustele vahemikus a -st b -ni tuletise väärtused on positiivsed, siis funktsioon kasvab selles vahemikus.

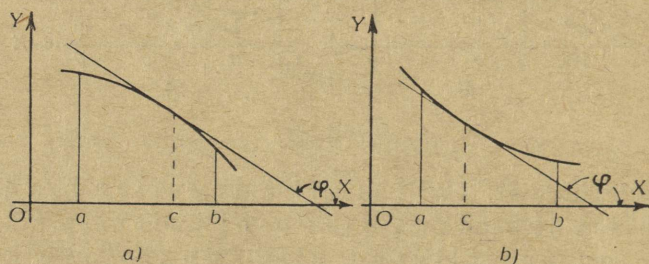
Tõepoolest, võtame mõnesuguse x -i väärtuse sirglõigul vahemikus $x = a$ kuni $x = b$. Kui $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ omab positiivset väärtust, siis absoluutväärtustelt küllalt väikeste Δx väärtuste puhul funktsiooni ja argumenti juurdekasvudel, s. o. Δy -l ja Δx -l on ühesugused märgid. See tähendab, et vahe $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$ sellel tingimusel on positiivne positiivse Δx puhul ja negatiivne negatiivse Δx puhul. Võib tõestada, et juurdekasvu Δy märk on ühesugune juurdekasvu Δx märgiga mitte ainult küllalt

¹ Täpsemalt öeldes: mittenegatiivne. Asi on selles, et mõnedes punktides tuletis võib muutuda nulliks. Vt. allpool „Märkus“.

väikeste, vaid igasuguste Δx väärtuste puhul, kui $x + \Delta x$ ei ulatu väljapoole vaadeldava vahemiku piiridest (tõestus antakse analüüsi põhjalikkudes teostes). See siis tähendab, et funktsioon $f(x)$ kasvab terves vahemikus $x = a$ kuni $x = b$.

Analoogilise arutluse abil jõuame järgmistele tulemusteni:

Kui funktsioon kahaneb vahemikus a -st b -ni, siis tema tuletis, vastavalt argumenti väärtustele selles vahemikus on negatiivne (täpsemalt: mittepositiivne) (joonis 71).



Joonis 71.

Kui argumenti väärtustele vahemikus a -st b -ni vastavad tuletise väärtused on negatiivsed, siis funktsioon on kahanev selles vahemikus.

Märkus. Võib juhtuda, et argumenti üksikute väärtuste puhul funktsiooni kasvamise või kahanemise vahemikus tuletis võrdub nulliga. Niisugune juhtum esineb joonisel 72: punktis M kõvera puutuja on paralleelne teljega OX ; järelikult puutuja moodustab abstsissiteljega nurga 0 ja sellepärast $\operatorname{tg} \varphi = y' = 0$. Niisugustes punktides peale puutumise puutuja ka lõikab kõverat.

Näide. Määrata funktsiooni

$$y = x^3 - 3x^2 + 5$$

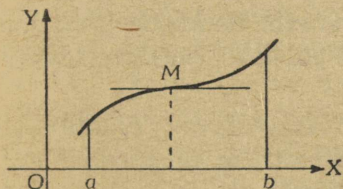
kasvamise ja kahanemise vahemikud.

Lahendus. Leiame antud funktsiooni tuletise

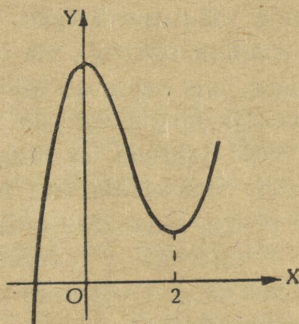
$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Nüüd tuleb määrata, missugustel argumenti x väärtustel tuletis on positiivne ja missugustel negatiivne. Et antud ülesande lahendamine oleks lihtsam, lahutame kaksliikme $3x^2 - 6x$ tegureiks:

$$y' = 3x(x - 2).$$



Joonis 72.



Joonis 73.

Tuletise saadud kujust on kergesti näha, et korrutis $3x(x - 2)$ argumenti väärtuste puhul, kui $x < 0$, on positiivne, sest x -il ja kaksliikmel $x - 2$ on siis ühesugused märgid. Kui x on positiivne, kuid vähem 2-st, tuletis on negatiivne, kuid kui $x > 2$, siis tuletis muutub jälle positiivseks. Järelikult funktsioon vahemikus $-\infty$ kuni 0 kasvab; vahemikus 0 kuni 2-ni funktsioon kahaneb ja vahemikus 2 kuni $+\infty$ kasvab. Joonisel 73 on esitatud niisuguse funktsiooni graafik.

§ 72. Funktsiooni maksimum ja miinimum. Funktsiooni $f(x)$ argumenti väärtus $x=a$ nimetatakse funktsiooni maksimumpunktiks, kui funktsiooni väärtus $f(a)$ on suurem kui iga teine funktsiooni väärtus küllaldases läheduses punktile $x=a$.

Funktsiooni $f(x)$ argumenti väärtus $x=a$ nimetatakse funktsiooni miinimumpunktiks, kui funktsiooni väärtus $f(a)$ on väiksem kui iga teine funktsiooni väärtus küllaldases läheduses punktile $x=a$.

Tähendame, et maksimum- või miinimumpunktis $x=a$ funktsioon ei omanda suurimat või väikseimat väärtust kõigi nende väärtuste hulgas, mida funktsioon võib omandada, vaid ainult suurima või väikseima väärtuse nende väärtuste hulgas, mis vastavad küllalt lähedastele punktidele, mis eelnevad ja järgnevad punktile a .

Võib juhtuda, et maksimumpunktis funktsiooni väärtus osutub väiksemaks kui miinimumpunktis; edasises käsitluses näeme seda ühes näites.

Argumenti väärtused, milledele vastavalt funktsioonil on maksimum või miinimum, nimetatakse funktsiooni ekstreempunktideks.

Meie ülesanne seisab selles, et õppida leidma funktsiooni ekstreempunkte.

Vaatleme funktsioone, millel on tuletised antud intervalli igas punktis, kusjuures tuletised võivad muutuda nulliks intervalli lõplikus arvus punktides. Niisugustel funktsioonidel langevad ekstreempunktid ühte funktsiooni ülemineku punktidega kasvamiselt kahanemisele (maksimum) või kahanemiselt kasvamisele (miinimum).

Oletame, et punktis a funktsioonil on maksimum. See tähendab, et selle punkti küllaldases läheduses vasemal temast funktsioon kasvab, paremal kahaneb. Kuna antud

funktsiooni tuletis võib muutuda nulliks ainult intervalli lõplikus arvus punktides, siis võime võtta punktile a nii-võrd lähedased punktid, et vasemal ja paremal argumendi väärtusest $x = a$ tuletis ei ole null ei ühelgi x -i väärtusel. Siis, kooskõlas paragrahvi 71, vasemal punktist $x = a$ tuletis $f'(x) > 0$, aga paremal — $f'(x) < 0$.

Järelikult argumendi x üleminekul väärtusest $x = a$ tuletis $f'(x)$ muudab märgi plussist miinuseks. Funktsiooni tuletise $f'(x)$ pidevuse eeldusel see märgi muutumine ei saa toimuda muul viisil, kui tuletise nullist ülemineku kaudu, s. o. maksimumpunktis tuletise väärtus $f'(a) = 0$. Järelikult funktsiooni $f(x)$ maksimumpunkti määramiseks kõigepealt leiame need x -i väärtused, millele vastavalt

$$f'(x) = 0. \quad (1)$$

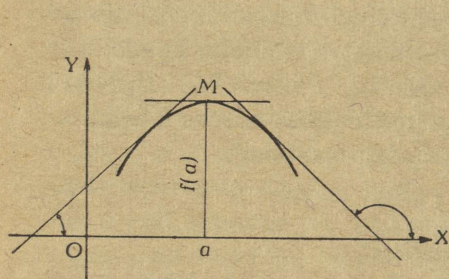
Selgitame öeldut geomeetriliselt.

Joonisel 74 on kujutatud maksimumpunkt: kõvera ordinaat aM , mis kujutab funktsiooni $y = f(x)$, on suurim võrreldes temale küllalt lähedaste ordinaatidega — nii eelnevate kui järgnevatega: vasemal punktist $x = a$ kõver tõuseb (funktsioon kasvab) ja puutuvad punktides, küllalt lähedastes punktile M , moodustavad teljega OX teravad nurgad [$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) > 0$]. Paremal punktist $x = a$ kõver langeb (funktsioon kahaneb) ja puutuvad punktides, küllalt lähedastes punktile M , moodustavad teljega OX nürinurgad [$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) < 0$]. Punktis M aga puutuja on paralleelne teljega OX , punktile M vastava puutuja ja telje OX vahe-line nurk võrdub nulliga, ja sellepärast $f'(a) = \operatorname{tg} 0 = 0$.

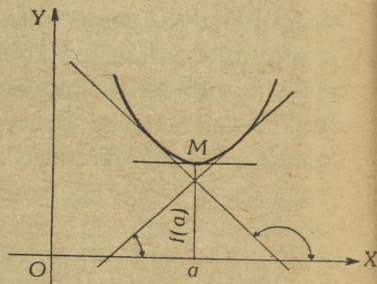
Oletame nüüd, et punktis $x = a$ funktsioonil on miinimum. See tähendab, et punkti a läheduses, vasemal temast funktsioon kahaneb, aga paremal kasvab. Tähendab, vasemal punktist $x = a$ tuletis $f'(x) < 0$, aga paremal $f'(x) > 0$ (punkti $x = a$ läheduses, paremal ja vasemal temast, tuletis kordagi ei muutu nulliks). Niisiis argumendi x üle-

minekul väärtusest $x = a$ tuletis $f'(x)$ muudab märgi miinusest plussiks. Funktsiooni tuletise pidevuse eeldusel see märgi muutumine ei saa toimuda muul viisil kui tuletise $f'(x)$ nullist ülemineku kaudu, s. o. miinimumpunktis tuletise väärtus $f'(a) = 0$.

Joonisel 75 on esitatud miinimumpunkt: kõvera, mis kujutab funktsiooni $y = f(x)$, ordinaat aM on väiksem kõigist ordinaatidest, eelnevaist ja järgnevaist. Punktist



Joonis 74.



Joonis 75.

$x = a$ vasemal kõver langeb (funktsioon kahaneb) ja puutuvad punktides, mis on punkti M läheduses, moodustavad teljega OX nürinurgad [$\text{tg } \varphi = f'(x) < 0$]. Punktist $x = a$ paremal kõver tõuseb (funktsioon kasvab) ja kõvera puutuvad punktides, mis on punkti M läheduses, moodustavad teljega OX teravnurgad [$\text{tg } \varphi = f'(x) > 0$]. Punktis M endas puutuja on paralleelne teljega OX ja, tähendab, moodustab temaga nurga 0 radiaani. Järelikult punktis M tuletise $f'(a)$ väärtus on null.

Siit järgneb, et funktsiooni $f(x)$ miinimumpunkti määramiseks, samuti kui maksimumpunkti määramiseks, peame kõigepealt leidma need x -i väärtused, millelele vastavalt $f'(x) = 0$.

Kooskõlas meie uurimustega võib näida, et argumendi väärtus, millele vastavalt $f'(x) = 0$, on kindlasti kas mak-

simum- või miinimumpunkt. Kuid see ei ole nii. Joonisel 72 esitatud juhul puutuja on paralleelne teljega OX [$\text{tg } 0 = f'(a) = 0$], kuid vaatamata sellele punktis M ordinaat ei ole ei suurimaks ega väiksemaks võrreldes lähedaste ordinaatidega, s. o. vaatamata sellele, et $f'(a) = 0$, väärtus $x = a$ ei anna maksimumi ega miinimumi. Nagu nähtub joonisest 72, vasemal punktist $x = a$ funktsioon kasvab ja jätkab kasvamist paremal sellest punktist; tähendab, punktist a läbiminekul tuletis ei muuda märki.

Niisiis tuletise muutumine nulliks punktis $x = a$ veel ei kindlusta funktsiooni ekstreemumi (ekstreempunktide) olemasolu; ekstreemumi olemasoluks nõutakse peale selle, et punkti a läheduses, vasemal ja paremal temast, tuletisel oleksid erinevad märgid.

Võtame kokku tingimused, millede täitumisel funktsioonil on maksimum ja miinimum.

Funktsioonil $f(x)$ on punktis $x = a$ maksimumpunkt, kui $f'(a) = 0$ ja kui punkti a läheduses vasemal temast $f'(x) > 0$, aga paremal $f'(x) < 0$.

Funktsioonil $f(x)$ on punktis $x = a$ miinimumpunkt, kui $f'(a) = 0$ ja kui punkti a läheduses vasemal temast $f'(x) < 0$, aga paremal $f'(x) > 0$.

Kui aga $f'(a) = 0$, kuid märgid tuletisel punkti a läheduses, vasemal ja paremal temast, on ühesugused, siis väärtus $x = a$ ei ole ekstreempunktiks.

§ 73. Näiteid ja ülesandeid funktsioonide maksimumi ja miinimumi leidmiseks. Eelmise paragrahvi tulemuste põhjal anname järgmise eeskirja funktsiooni ekstreempunktide leidmiseks.

Esimene samm. Leida antud funktsiooni tuletis.

Teine samm. Võrdsustada tuletis nulliga ja lahendada sel viisil saadud võrrand.

Kolmas samm. Iga leitud lahendi suhtes uurida, kas tuletis muudab märgi argumendi üleminekul vaadeldava lahendi väärtusest. Selleks tuleb määrata tuletise märgid argumendi väärtustel, mis on veidi väiksemad ja veidi suuremad uuritavast lahendist. Kui tuletis esimesel juhul on positiivne ja teisel negatiivne, siis argumendi vaadeldav väärtus annab maksimumpunkti, kui ümberpöörduvalt, tuletis muudab märgi miinusest plussiks, siis vaadeldav lahend annab miinimumpunkti. Kui aga tuletise märk ei muutu, siis uurimisel oleva lahendi puhul ei ole ei maksimumi ega miinimumi. Märgi muutumise uurimiseks on sobiv lahutada tuletis tegureiks — juhul, kui tuletis on ratsionaalne.

Näide 1. Leida funktsiooni

$$f(x) = -12x^5 + 25x^3 - 15x$$

maksimumid ja miinimumid.

Lahendus.

Esimene samm.

$$f'(x) = -60x^4 + 75x^2 - 15.$$

Teine samm.

$$-60x^4 + 75x^2 - 15 = 0.$$

Lahendades selle võrrandi, leiame lahendid:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = +\frac{1}{2}, \quad x_4 = +1.$$

Kolmas samm.

$$f'(x) = -60(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1).$$

Võtame esimese lahendi:

Kui $x < -1$, siis saame:

$$f'(x) = -60(-)(-)(-)(-) < 0.$$

Kui $x > -1$, siis saame:

$$f'(x) = -60(+)(-)(-)(-) > 0$$

Järelikult $x_1 = -1$ on miinimumpunkt. Leiame funktsiooni $f(x)$ väärtuse, kui $x = -1$: $f(-1) = +2$.

Võtame teise lahendi:

Kui $x < -\frac{1}{2}$, siis saame:

$$f'(x) = -60(+)(-)(-)(-) > 0.$$

Kui $x > -\frac{1}{2}$, siis saame:

$$f'(x) = -60(+)(+)(-)(-) < 0.$$

Järelikult $x_2 = -\frac{1}{2}$ on maksimumpunkt.

Kui $x = -\frac{1}{2}$, siis funktsiooni väärtus $f(-\frac{1}{2}) = 4\frac{3}{4}$.

Võtame kolmanda lahendi:

Kui $x < \frac{1}{2}$, siis saame:

$$f'(x) = -60(+)(+)(-)(-) < 0.$$

Kui $x > \frac{1}{2}$, siis saame:

$$f'(x) = -60(+)(+)(+)(-) > 0.$$

Järelikult $x_3 = \frac{1}{2}$ on miinimumpunkt.

Kui $x = \frac{1}{2}$, siis funktsiooni väärtus $f(\frac{1}{2}) = -4\frac{3}{4}$.

Võtame neljanda lahendi:

Kui $x < 1$, siis saame:

$$f'(x) = -60(+)(+)(+)(-) > 0.$$

Kui $x > 1$, siis saame:

$$f'(x) = -60(+)(+)(+)(+) < 0.$$

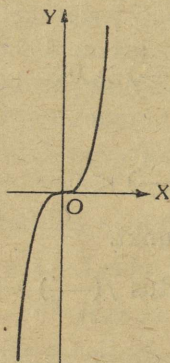
Järelikult $x_4 = 1$ on maksimumpunkt.

Kui $x = 1$, siis funktsiooni väärtus $f(1) = -2$.

Saadud resultaatidest muuseas nähtub, et funktsiooni väärtus miinimumpunktis $x = -1$ on suurem kui maksimumpunktis $x = 1$.

Näide 2. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni

$$y = x^3.$$

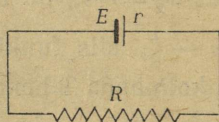


Joonis 76.

Lahendus.

Esimene samm.

$$y' = 3x^2,$$



Joonis 77.

Teine samm.

$$3x^2 = 0, \text{ mis annab } x = 0.$$

Kolmas samm.

Kui $x < 0$, siis tuletis $f'(x) > 0$. Kui $x > 0$, siis tuletis $f'(x) > 0$.

Järelikult väärtus $x = 0$ ei anna ei maksimumi ega miinimumi. Sellele funktsioonile vastav graafik (joonis 76) annab näitliku kujutluse saadud resultaadist.

Näide 3. Voolutugevus I ahelas (näidatud joonisel 77) määratakse Ohmi seaduse järgi avaldisega

$$I = \frac{E}{R + r},$$

kus R on välis-, aga r — sisetakistus. Võimsus, mis tekib takistuses R , teatavasti väljendub valemiga

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}.$$

Leida R -i väärtus, mille puhul võimsus on suurim.

L a h e n d u s.

Siin tuleb uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni P , mis sõltub argumendist R . Toimides samuti kui esimeses näites, saame:

$$1. \quad P' = E^2 \cdot \frac{(R + r)^2 - 2(R + r)R}{(R + r)^4} = E^2 \cdot \frac{r - R}{(R + r)^3}.$$

$$2. \quad r - R = 0, \text{ millest } R = r.$$

3. Kui $R < r$, siis tuletis $P' > 0$. Kui $R > r$, siis tuletis $P' < 0$.

Järelikult kui $R = r$, s. o. kui välistakistus ahelas on võrdne sisetakistusega, siis võimsus P on suurim.

Ülesannetes, mis esinevad tegelikkuses, harilikult funktsiooni ei anta valmis võrrandina. Niisugustel juhtudel tuleb ülesande tingimuse põhjal koostada võrrand, mis seob funktsiooni selle muutujaga, millest oleneb funktsiooni suurim või väikseim väärtus.

Sageli võib ülesande iseloomu enda põhjal teha kindlaks, missugused tuletist nulliks muutvad argumendi väärtused annavad funktsiooni maksimumi ja missugused miinimumi. See vabastab meid tarvidusest määrata tuletise märke sõltumatu muutuja leitud väärtustest vasemal ja paremal.

Ü l e s a n n e 1. Ruudukujulisest papitükist, mille külj võrdub a -ga, valmistada kaaneta karp, lõigates nurkadest välja ruudukesed ja murdes pärast seda tekkinud väljaulatuvad servad üles (joonis 78) nii, et saadud karbi ruumala oleks võimalikult suur. Kui suur peab olema väljalõigatavate ruudukeste külj?

Lahendus. Tähistame väljalõigatava ruudukese külje pikkuse tähega x . Suurus x on ühtlasi karbi kõrguseks. Siis karbi põhja pikkus on võrdne $a - 2x$ ja karbi ruumala $V = (a - 2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$.

Meil tuleb leida x -i väärtus, mil funktsioonil V on maksimum. Tähendab, on tarvis uurida maksimumi ja miinimumi suhtes koostatud funktsiooni V .

Esimene samm.

$$V = a^2 - 8ax + 12x^2.$$

Teine samm.

$a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$; sellest võrrandist leiame lahendid:

$$x_1 = \frac{a}{2} \text{ ja } x_2 = \frac{a}{6}.$$

Ilma pikemate uurimisteta on näha, et maksimum tekib, kui $x = \frac{a}{6}$, sest kui lõigata ruudukesed külje pikkusega $\frac{a}{2}$, siis papitükist ei jää midagi järele ja karbi ruumala on null.

Niisiis väljalõigatavate ruudukeste külje pikkus peab moodustama ühe kuuendiku antud ruudukujulise papitüki külje pikkusest.

$$\text{Kui } x = \frac{a}{6}, \text{ siis ruumala } V = \frac{2a^3}{27}.$$

Ülesanne 2. Ristküliku-kujulise tala kandejõud on võrdeline tala kõrguse ruudu ja laiuse korrutisega. Leida suurima kandejõuga tala, mida saab välja lõigata silindrilisest palgist läbimõõduga a cm.

Lahendus. Joonisel 79 on kujutatud palgi ja tala ristlõige. Tähistame tähega x palgi laiuse ja tähega y kõrguse. Siis saame: $x^2 + y^2 = a^2$. Tala kandejõud S määratakse seosega:

$$S = kxy^2 = kx(a^2 - x^2) = ka^2x - kx^3,$$

kus k on võrdetegur.

Niiviisi koostasime funktsiooni, mida on tarvis uurida maksimumi ja miinimumi suhtes.

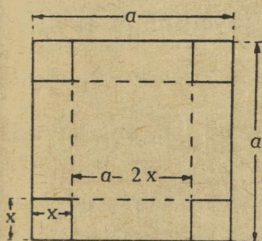
Esimene samm.

$$S' = k(a^2 - 3x^2).$$

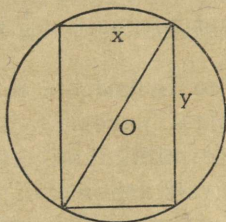
Teine samm.

$$k(a^2 - 3x^2) = 0, \text{ mis annab } x_1 = \frac{a}{3} \text{ ja } x_2 = -\frac{a}{3}.$$

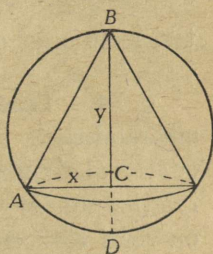
Teist lahendit ei tarvitse võtta arvesse, sest negatiivsel lahendusel ei ole ülesande jaoks mõtet.



Joonis 78.



Joonis 79.



Joonis 80.

Kuna tala kandejõud ei või olla piiramatult suur, siis peab temal olema maksimum. Järelikult lahend $x_1 = \frac{a}{3}$ annab väärtuse, mille puhul funktsioonil S on maksimum.

Kui $x = \frac{a}{3}$ cm, siis kõrgus $y = a \sqrt{\frac{2}{3}}$ cm. Niisugused on tugevaima tala mõõted.

Ülesanne 3. Kui suur peab olema maksimaalse ruumalaga koonuse kõrgus, mida saab kujutada keraesse raadiusega r ?

L a h e n d u s. Tähistame koonuse põhja raadiuse tähega x ja kõrguse tähega y (joonis 80). Siis koonuse ruumala võrdub:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y.$$

Jooniselt 80 näeme:

$$x^2 = BC \cdot CD = y(2r - y).$$

Sellepärast funktsioon V väljendub muutuja y kaudu järgmiselt:

$$V = \frac{\pi}{3} y^2(2r - y).$$

Uurides seda funktsiooni maksimumi ja miinimumi suhtes, leiame, et otsitud kõrgus $y = \frac{4}{3} r$.

§ 74. Teine võtte funktsiooni maksimumi ja miinimumi määramiseks. Eelmises paragrahvis näitasime, et funktsiooni maksimumi või miinimumi määramiseks tuleb uurida tuletise märki vastavalt argumendi nendele väärtustele, mis on veidi väiksemad või suuremad kriitilisest väärtusest¹, sest kui tuletis argumendi sellest punktist läbiminekul märki ei muuda, siis ei ole ei maksimumi ega miinimumi.

Kuid väga sageli võib ekstreempunktide olemasolu määrata kindlaks teise tunnuse abil, mis nõuab antud funktsiooni teise tuletise märgi määramist argumendi uuritava väärtusel.

Eespool nägime, et kui antud funktsiooni $y = f(x)$ tuletis $y' = f'(x)$ nullist läbiminekul $x = a$ puhul, muudab märgi plussist miinuseks, siis argumendi see väärtus annab maksimumi.

¹ S. o. argumendi väärtusest, mis muudab antud funktsiooni tuletise nulliks.

Tuletis, mis positiivsetelt väärtustelt nulli kaudu üle läheb negatiivsetele väärtustele, kujutab endast kahanevat funktsiooni a -le lähedate x -i väärtuste puhul. Kui aga funktsioon kahaneb, siis tema tuletis peab $x = a$ puhul omandama negatiivse väärtuse või muutuma nulliks (§ 71). Überpöörduvalt, kui tuletisfunktsioon $x = a$ puhul omandab negatiivse väärtuse, siis funktsioon kahaneb. Niisiis kui tuletise tuletisel, s. o. esialgse funktsiooni teisel tuletisel märk on miinus $x = a$ puhul, siis esialgsel funktsioonil on maksimum.

Miinumipunkti puhul esimene tuletis üleminekul nullist $x = a$ puhul muudab märgi miinusest plussiks. Järelikult esimene tuletis on antud juhul kasvav funktsioon, a -le lähedastel x -i väärtustel. Kuid funktsiooni kasvamiseks on küllalt sellest, et tema tuletis oleks positiivne. Sellepärast kui teine tuletis $x = a$ puhul on positiivne, siis esialgsel funktsioonil on miinum.

Kuid võib juhtuda, et $x = a$ puhul, nii tuletise $y' = f'(x)$ kasvamisel punkti $x = a$ läheduses kui ka kahanemisel, teine tuletis omandab väärtuse: $f''(a) = 0$. Nüüd juba enam ei saa teada, kuidas toimub tuletise $y' = f'(x)$ muutumine, s. o. ei saa teada, kas funktsioon kasvab või kahaneb $x = a$ läheduses. Siis ei ole võimalik teha mingit otsust ekstreempunkti olemas- või mitteolemasolu kohta, kui $x = a$; küsimuse lahendamiseks on tarvis võtta ette uurimine, nii nagu see on käsiteldud §-s 73.

Võtame lühidalt kokku saadud resultaadid.

1. Kui $f'(a) = 0$ ja $f''(a) < 0$, siis väärtus $x = a$ annab maksimumpunkti [esimene tuletis $x = a$ läheduses kahaneb, kuna aga $f'(a) = 0$, siis $x < a$ puhul tuletis $f'(x) > 0$, $x > a$ puhul tuletis $f'(x) < 0$ ja järelikult $x = a$ annab maksimumi].

2. Kui $f'(a) = 0$ ja $f''(a) > 0$, siis väärtus $x = a$ annab miinimumpunkti [esimene tuletis $x = a$ läheduses kasvab, kuna aga $f'(a) = 0$, siis $x < a$ puhul tuletis $f'(x) < 0$, $x > a$ puhul tuletis $f'(x) > 0$ ja järelikult $x = a$ annab miinimumi].

3. Kui $f'(a) = 0$ ja $f''(a) = 0$, siis küsimus ekstreemumi olemasolu ja uuritava punkti iseloomust jääb lahtiseks [kui $f''(a) = 0$, siis me ei saa midagi teada tuletise muutumise iseloomust punkti $x = a$ läheduses].

Kirjeldatud tunnuste põhjal võime anda järgmise, teise funktsiooni maksimumi ja miinimumi määramise eeskirja.

Esimene samm. Leiame antud funktsiooni esimese tuletise.

Teine samm. Võrdsustame esimese tuletise nulliga ja lahendades saadud võrrandi, leiame võrrandi lahendid.

Kolmas samm. Leiame teise tuletise ja asendame sellesse argumendi asemele järjestikku võrrandi lahendid.

Kui teine tuletis osutub positiivseks, siis argumendi uuritav väärtus annab miinimumpunkti; kui teine tuletis osutub negatiivseks — siis maksimumpunkti; kui teine tuletis on null, siis küsimus jääb lahtiseks ja siis tuleb kasutada funktsiooni maksimumi ja miinimumi määramiseks esimest eeskirja.

Näide 1.

Leida funktsiooni

$$y = -12x^5 + 25x^3 - 15x$$

maksimumid ja miinimumid.

Lahendus.

1. $y' = -60x^4 + 75x^2 - 15.$

$$2. \quad -60x^4 + 75x^2 - 15 = 0,$$

mis annab lahendid:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad x_3 = \frac{1}{2}; \quad x_4 = 1.$$

$$3. \quad y'' = -240x^3 + 150x.$$

4. Kui $x = -1$, siis $y'' = +90$ ($x = -1$ annab miinimumi).

Kui $x = -\frac{1}{2}$, siis $y'' = -45$ ($x = -\frac{1}{2}$ annab maksimumi).

Kui $x = +\frac{1}{2}$, siis $y'' = +45$ ($x = +\frac{1}{2}$ annab miinimumi).

Kui $x = +1$, siis $y'' = -90$ ($x = +1$ annab maksimumi).

Näide 2. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni $y = x^4$.

Lahendus.

$$1. \quad y' = 4x^3.$$

$$2. \quad 4x^3 = 0,$$

mis annab lahendi: $x = 0$.

$$3. \quad y'' = 12x^2.$$

$$4. \quad \text{Kui } x = 0, \text{ siis } y'' = 0$$

Kasutame sellepärast esimest eeskirja.

Kui $x < 0$, siis $y' < 0$. Kui $x > 0$, siis $y' > 0$.

Järelikult $x = 0$ annab miinimumi (joonis 81).

Näide 3. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni $y = x^3$.

Lahendus.

$$1. \quad y' = 3x^2.$$

$$2. \quad 3x^2 = 0,$$

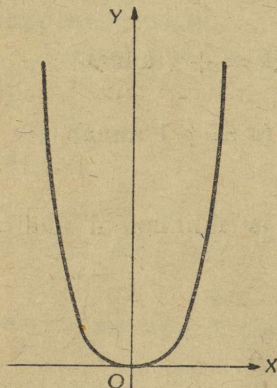
mis annab lahendi: $x = 0$.

$$3. \quad y'' = 6x.$$

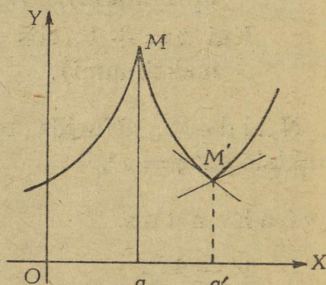
$$4. \quad \text{Kui } x = 0, \text{ siis } y'' = 0.$$

Sellepärast tuleb kasutada esimest eeskirja. Uurimine, mis toimus §-i 73 näite 2 lahenduses, näitas, et $x = 0$ puhul ei ole maksimumi ega miinimumi.

M ä r k u s: Teine funktsiooni maksimumi ja miinimumi määramise viis eeldab teise tuletise olemasolu (ja pidevust) argumendi uuritava väärtuse läheduses ja seega ühtlasi esimese tuletise pidevust.



Joonis 81.



Joonis 82.

§ 75. Funktsioonide maksimumi ja miinimumi teised tüübid. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi küsimuse uurimisel lähtusime antud funktsiooni tuletise olemasolust. Joonisel 82 on kujutatud juhtum, kus funktsioonil on ekstreemum punktides, milles temal tuletist ei ole: punktis a funktsioonil ei ole tuletist, sest funktsiooni esitava kõvera puutuja punktis M on paralleelne teljega OY , s. o. moodustab teljega OX nurga $\frac{\pi}{2}$ radiaani ja $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ ei oma kindlat väärtust; punktis M' kõveral on kaks üksteisega mitte ühtelangevat puutujat: „puutuja paremalt“ ja „puutuja vasemalt“. Ühe puutuja tõus vastab suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirile tingimusel, kui $\Delta x \rightarrow 0$, jäädes suuremaks kui null, aga teise puutuja tõus — suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirile juhul, kui $x \rightarrow 0$ ja kui

Δx jääb vähemaks kui null. Kui need piirid ei lange ühte („piir paremalt“ ei võrdu „piiriga vasemalt“), siis, tähendab, piiri

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ei ole olemas, sest piiri olemasolu tingimus nõuab, et suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ läheneks ühele ja samale arvule, kui Δx läheneb nullile mistahes viisil.

Aga kui ei ole olemas $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, siis, tähendab, ei ole olemas ka funktsiooni tuletist y' punktis a' .

Niisugust tüüpi ekstreempunktide leidmist tegelikkuses enamal jaol juhtudes õnnestub teostada antud funktsiooni elementaarse uurimise abil. Võtame vaatlusele kaks näidet, mis illustreerivad meid huvitavaid juhtumeid.

Näide 1. Leida funktsiooni

$$y = (x - 1) \sqrt[3]{x^2}$$

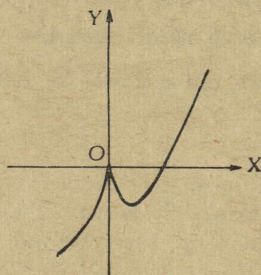
ekstreempunktid.

Lahendus.
$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{2\sqrt[3]{x}}$$

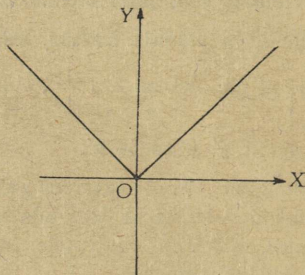
Tuletis muutub nulliks, kui $x = \frac{2}{5}$. Kui $x = \frac{2}{5}$, tuletist väljendava murru nimetajal on märk „+“ ja see nimetaja säilitab selle märgi kõigi, arvule $\frac{2}{5}$ lähedaste väärtuste puhul. Murru lugejal $x < \frac{2}{5}$ puhul on märk „-“, $x > \frac{2}{5}$ puhul märk „+“. Järelikult punktis $x = \frac{2}{5}$ funktsioonil on miinimum.

Punktis $x = 0$ tuletist ei ole (muru nimetaja, mis määrab tuletise, muutub nulliks ja sellepärast murrul ei ole siis mingit arvulist väärtust). Kui $x = 0$, siis funktsiooni $y = (x - 1) \sqrt[3]{x^2}$ väärtus võrdub nulliga, aga paremale ja vasemale punktist $x = 0$ funktsioonil on negatiivne väärtus. Järelikult punktis $x = 0$ funktsioonil on maksimum.

x -i lähenedes nullile tuletis kasvab absoluutväärtuselt piiramatult. Täheandab, antud funktsiooni kujutava kõverjoone lõikajal, mis läbib punkti $(0, 0)$, tõusunurk läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le.¹ Järelikult punktis $(0, 0)$ kõvera puutuja langeb ühte teljega OY . Kõvera graafik on esitatud joonisel 82-a.



Joonis 82-a.



Joonis 82-b.

Näide 2. Vaatleme funktsiooni $y = |x|$. Juhul kui $x > 0$, siis $|x| = x$, aga kui $x < 0$, siis $|x| = -x$. Kui $x = 0$, siis funktsiooni väärtus $y = |0| = 0$. Järelikult võib antud funktsiooni väljendada kahe valemiga:

$$y = x, \text{ kui } x \geq 0.$$

$$y = -x, \text{ kui } x < 0.$$

Selle funktsiooni graafik esitab kahte kiirt, mis väljuvad koordinaatide algusest ja mille tõusunurgad on $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{4}$ radiaani (joonis 82-b).

¹ Täpsemalt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-2}{\sqrt{x}} = +\infty$, kui x jääb positiivseks, ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-2}{x} = -\infty, \text{ kui } x < 0.$$

Kuid nii sel kui teisel juhul sirge lõikaja tõusunurk läheneb $\frac{\pi}{2}$ -le: esimesel juhul trigonomeetrilise ringi esimese kvadranti, teisel juhul trigonomeetrilise ringi teise kvadranti poolt. Täheandab, punktis $(0, 0)$ kõverjoonel on ainus püstsuunaline puutuja.

Geomeetrilisest tõlgendusest selgub, et koordinaatide alguses funktsiooni esitaval joonel on kaks mitteühtivat puutujat, mis langevad ühte funktsiooni kujutavate kiirtega¹. Järelikult punktis 0 antud funktsioonil tuletist ei ole. Kuna $y = |x| > 0$ nii paremal kui vasemal punktist $x = 0$ ja $y = 0$, siis punktis $x = 0$ funktsioonil on miinimum.

§ 76. Teine tuletis kiirendusena. Nii nagu oli määratud kindlaks §-s 46, kui liikumise seadus väljendub funktsiooniga

$$s = f(t),$$

siis $s' = f'(t) = v$ väljendab punkti liikumise kiirust antud ajamomendil t .

Sirgjoont mööda liikuva punkti kiirendus j määratakse punkti kiiruse muutmise kiirusena, nii et

$$j = v' = s''.$$

Kiirendus on positiivne, kui kiirus kasvab, ja negatiivne, kui ta kahaneb.

¹ On kerge näidata ka analüütiliselt, et punktis 0 funktsioonil $y = |x|$ tuletist ei ole. Tõepoolest, kui $x = 0$, siis funktsioon $y = 0$. Sellepärast

$$y + \Delta y = \Delta y = |0 + \Delta x| = |\Delta x|.$$

Kui $\Delta x > 0$, siis $|\Delta x| = \Delta x$, sellepärast

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

kui $\Delta x \rightarrow 0$ positiivsete väärtuste piirkonnas.

Kui $\Delta x < 0$, siis $|\Delta x| = -\Delta x$. Sellepärast

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-1) = -1,$$

kui $\Delta x \rightarrow 0$ negatiivsete väärtuste piirkonnas.

Järelikult $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ei ole olemas.

Näide. Maja katuselt, mille kõrgus on 50 m, visati otse üles pall kiirusega $20 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$. t sekundi möödumisel on pall, maast arvates, kõrgusel

$$h = 50 + 20t - 4,9t^2.$$

Kui suur on kiirus ja kiirendus teise sekundi lõpul? Mitu sekundit pall tõuseb ja missugusele kõrgusele selle juures jõuab?

Lahendus 1. Kiirus v momendil t määratakse tee tuletisena aja suhtes:

$$v = \frac{dh}{dt} = 20 - 9,8t.$$

Kiirendus

$$j = v' = h'' = -9,8.$$

Järelikult kiirendus on jääv suurus.

Kui $t = 2$, siis kiirus $v = 20 - 9,8 \cdot 2 = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$.

2. Pall tõuseb seni, kui tema kiirus muutub nulliks. Seepärast aeg, mille kestel pall tõuseb, määratakse võrrandist

$$v = 20 - 9,8t = 0,$$

millest saame $t \approx 2,04$ sek.

Tõusu kõrguse leiame, kui asetame võrrandisse, mis määrab palli kauguse maast, $t = 2,04$; sel viisil saame:

$$h \approx 70,4.$$

Harjutusi.

§ 72. juurde.

Määrata järgmiste funktsioonide kasvamise ja kahanemise vahemikud.

1. $y = x^2 + 6x - 4$.

Vastus: Kasvab, kui $x > -3$; kahaneb, kui $x < -3$.

2. $y = x^3 - 3x^2 + 7$.

Vastus: Kasvab vahemikkudes $-\infty$ kuni 0 ja 2 kuni $+\infty$, kahaneb vahemikus 0 kuni 2.

3. $y = x^4 + 4x - 6$.

Vastus: Kasvab, kui $x > -1$; kahaneb, kui $x < -1$.

4. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 270$.

Vastus: Kasvab vahemikkudes $-\infty$ kuni $x < 2$ ja $x > 3$ kuni $+\infty$; kahaneb vahemikus 2-st 3-ni.

5. $y = \sin x$.

Vastus:

Kasvab vahemikkudes:

Kahaneb vahemikkudes:

0 kuni $\frac{\pi}{2}$
 $\frac{3\pi}{2}$ kuni $\frac{5\pi}{2}$
jne.
 $-\frac{\pi}{2}$ kuni 0
 $-\frac{5\pi}{2}$ kuni $-\frac{3\pi}{2}$
jne.

$\frac{\pi}{2}$ kuni $\frac{3\pi}{2}$
 $\frac{5\pi}{2}$ kuni $\frac{7\pi}{2}$
jne.
 $-\frac{3\pi}{2}$ kuni $-\frac{\pi}{2}$
 $-\frac{7\pi}{2}$ kuni $-\frac{5\pi}{2}$
jne.

6. Maapinnalt vertikaalselt ülesvisatud kivi liigub seaduse järgi $s = 100t - 4,91t^2$. Määrata, missugustel aja t väärtustel kivi tõuseb ja missugustel langeb.

Vastus: Tõuseb, kui $t < \frac{100}{9,82}$, langeb, kui $t > \frac{100}{9,82}$.

7. 20 m pikkune traat on painutatud risküliku kujuliseks, mille ühe külje pikkus on x . x -i muutumisel muutub ka risküliku pindala. Määrata, missugustel x -i väärtustel pindala suureneb ja missugustel väheneb.

Vastus: Suureneb, kui $x < 5$, väheneb, kui $x > 5$.

8. Võrdhaarsesse kolmnurka, mille alus on 20 ja kõrgus 10, on joonestatud riskülik alusega x pikkusühikut. Määrata missugustel x -i väärtustel pindala suureneb, missugustel kahaneb.

Vastus: Suureneb, kui $x < 10$; väheneb, kui $x > 10$.

§ 73., 75. ja 76. juurde.

Leida järgmiste funktsioonide maksimum ja miinimum.

$$9. \quad y = 2x^2 - 5x + 7.$$

Vastus: $x = \frac{5}{4}$ annab miinimumi.

$$10. \quad y = 6 + 12x - x^3.$$

Vastus: $x = -2$ annab miinimumi, $x = +2$ annab maksimumi.

$$11. \quad y = x^4 - 2x^3 - 2x^2.$$

Vastus: $x = 0$ annab maksimumi; $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = 2$ annavad miinimumi.

Näidata, et järgmistel funktsioonidel ei ole ei maksimumi ega miinimumi.

$$12. \quad y = x^3 + 4x.$$

$$13. \quad y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3.$$

Leida järgmiste funktsioonide maksimum ja miinimum.

$$14. \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Vastus: $x = 1$ annab maksimumi; $x = -1$ annab miinimumi.

$$15. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}.$$

Vastus: $x = \sqrt{2}$ annab miinimumi; $x = -\sqrt{2}$ annab maksimumi.

$$16. \quad y = a - b(x - c)^{\frac{2}{3}}.$$

Vastus: $x = c$ annab maksimumi.

$$17. \quad y = b + c(x - a)^{\frac{2}{3}}.$$

Vastus: $x = a$ annab miinimumi.

$$18. \quad y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}(x - 2)^{\frac{2}{3}}.$$

Vastus: $x = \frac{4}{3}$ annab maksimumi; $x = 2$ annab miinimumi; $x = 1$ ei anna ei maksimumi ega miinimumi.

$$19. \quad y = (2x - a)^{\frac{1}{3}}(x - a)^{\frac{2}{3}}.$$

Vastus: $x = \frac{2}{3}a$ annab maksimumi; $x = a$ annab miinimumi; $x = \frac{a}{2}$ ei anna ei maksimumi ega miinimumi.

$$20. y = \frac{1-x}{(1+x)^2}.$$

Vastus: $x = 3$ annab miinimumi; $x = -1$ annab maksimumi.

21. Näidata, et avaldisel $\sin x(1 + \cos x)$ on maksimum, kui $x = \frac{\pi}{3}$.

22. Näidata, et funktsioonil $\sin^3 x \cdot \cos x$ on maksimum kui $x = \frac{\pi}{3}$.

23. Jaotada arv 12 kaheks niisuguseks osaks, millede korrutis annaks suurima väärtuse.

Vastus: Kumbki osa peab olema 6.

24. Jaotada arv 10 kaheks osaks nii, et kahekordse esimese osa ja teise osa ruudu summa oleks väikseim.

Vastus: 9 ja 1.

25. Näidata, et kõigist ristkülikuist, mis on joonestatud antud ringi, ruudul on suurim übermõõt ja suurim pindala.

26. Missugusel antud alusega ja antud übermõõduga kolmnurkadest on suurim pindala?

Vastus: Võrdhaarsel.

27. Valmistada pealt ja alt kinnine antud ruumalaga silindriline anum. Näidata, et selle silindri valmistamiseks kulub kõige vähem materjali, kui anuma kõrgus võrdub anuma põhja diameetriga.

28. Normandia aknal on ristküliku kuju, poolringiga ülemises osas. Akna übermõõt on antud. Missugune peab olema akna laiuse ja kõrguse suhe, et valguse hulk, mida aken läbi laseb, oleks suurim.

Vastus: Poolringi raadius võrdub ristküliku kõrgusega.

29. Valmistada plekist lahtine renn, mille ristlõige on võrdhaarne trapets, aluse ja külghaarde pikkus olgu 4 dm. Missugune peab olema renni laius pealt, et renn mahutaks kõige suurema hulga vett.

Vastus: 8 dm.

30. On tarvis piirata taraga ristküliku-kujuline maa-ala, kasutades ühest küljest tarana maja seinaga. Maa-ala peab olema kindlaks määratud pindala, kuid külgede pikkused on vabalt valitavad. Missugune peab olema külgede pikkuste suhe, et tara ehitamiseks läheks kõige vähem materjali.

Vastus: Tara külg, mis on paralleelne maja seinaga, peab olema kaks korda pikem teisest küljest.

31. Miinilaev seisab ankrus 9 km kaugusel kõige lähemast kalda punktist. Miinilaevalt on tarvis saata käskjalg laagrisse, mis asetseb kaldal 15 km kaugusel nimetatud kaldapunktist. Teades, et käskjalg käib jalgsi 5 km tunnis ja paadiga sõidab 4 km tunnis, määrata, missuguses kaldapunktis ta peab maabuma, et kõige lühema aja kestel jõuda laagrisse.

Vastus: 3 km laagrist eemal.

32. Laev seisab ankrus 3 km kaugusel kaldast; kaldapunkti kohal, mis on 5 km eemal sellest kaldapunktist, mille kohal seisab laev, on kaldast 9 km kaugusel teine laev. Esimeselt laevalt peab viidama reisija paadil kaldale ja sealt paat peab siirduma teisele laevale. Kui pikk on kõige lühem tee?

Vastus: 13 km.

33. Elektrilamp on tarvis asetada 100-meetrise diameetriga ringikujulise väljaku keskpunkti kohale. Eeldades, et valgustuse tugevus on võrdeline langemisnurga koosinusega ja pöördvõrdeline valgustatava pinna kauguse ruuduga, määrata, kui kõrgele tuleb asetada lamp, et ta kõige paremini valgustaks väljakut ümbritsevat ringteed.

Vastus: $\frac{50}{\sqrt{2}}$ m kõrgusel.

34. Väljakul on mälestussammas: kuju, mille kõrgus on a , on asetatud alusele kõrgusega b . Missugusel kaugusel alusest kuju on näha suurimas nurgas.

Vastus: Kaugusel $\sqrt{b(a+b)}$.

§ 77. juurde.

Sirgjooneliselt liikuva punkti kiirus antakse järgnevate võrranditega. Määrata punkti kiirendus antud ajamomentidel:

- | | |
|--|--------------------------|
| 35. $v = t^2 + 2t$; $t = 3$. | Vastus: $j = 8$. |
| 36. $v = 3t - t^3$; $t = 2$. | Vastus: $j = -9$. |
| 37. $v = 4 \sin \frac{t}{2}$; $t = \frac{\pi}{3}$. | Vastus: $j = \sqrt{3}$. |
| 38. $v = a \cos 3t$; $t = \frac{\pi}{6}$. | Vastus: $j = -3a$. |
| 39. $v = 5e^{2t}$; $t = 1$. | Vastus: $j = 10e^2$. |

Leida antud ajamomentidel tee pikkus, punkti kiirus ja kiirendus, kui punkt liigub sirgjooneliselt seaduse järgi, mis on antud järgmiste võrranditega:

40. $s = t^3 + 2t^2$; $t = 2$. Vastus: $s = 16$, $v = 20$, $j = 16$.
41. $s = 2t - t^2$; $t = 1$. Vastus: $s = 1$, $v = 0$, $j = -2$.
42. $s = 2 \sin t$; $t = \frac{\pi}{4}$. Vastus: $s = \sqrt{2}$, $v = \sqrt{2}$,
 $j = -\sqrt{2}$.
43. $s = a \cos \frac{\pi t}{3}$; $t = 1$. Vastus: $s = \frac{a}{2}$, $v = -\frac{\pi a \sqrt{3}}{6}$,
 $j = -\frac{\pi^2 a}{18}$.
44. $s = 2e^{3t}$; $t = 0$. Vastus: $s = 2$, $v = 6$, $j = 18$.
45. Keha liigub sirgjooneliselt seaduse järgi

$$s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2.$$

Leida keha kiirus ja kiirendus mistahes ajamomendil. Missuguses ajavahemikus kiirus kahaneb?

$$\text{Vastus: } v = t^3 - 12t^2 + 32t; \quad j = 3t^2 - 24t + 32.$$

Kiirendus on algul positiivne; kui $t \approx 1,69$, muutub kiirendus nulliks ja sellest momendist alates muutub negatiivseks; uuesti muutub nulliks, kui $t \approx 6,31$. Vahemikus nende kahe momendi vahel kiirus väheneb.

VIII peatükk.

Diferentsiaal.

§ 77. **Diferentsiaal kui funktsiooni juurdekasvu peaos.** Kõrvuti tuletisega esineb matemaatilises analüüsis väga tähtsal kohal diferentsiaali mõiste.

Nagu teada (§ 39), muutuva suuruse ja tema piiri vahe on lõpmatult kahanev suurus. Sellepärast funktsiooni $y = f(x)$ juurdekasvu Δy ja argumendi juurdekasvu Δx suhte ja tuletise $f'(x)$ vahe on lõpmatult kahanev suurus:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon.$$

Sellest valemist leiame funktsiooni juurdekasvu Δy :

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x. \quad (1)$$

Liidetav $\varepsilon\Delta x$ on kõrgema järgu lõpmatult kahanev suurus võrreldes argumendi juurdekasvuga Δx (§ 41). Tõepoolest,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

sest ε on lõpmatult kahanev suurus, s. o. ε läheneb nullile, kui Δx absoluutväärtuselt piiramatult väheneb.

Valemi (1) parempoolse osa esimene liidetav, s. o. avaldis

$$f'(x)\Delta x, \quad (2)$$

osutub sama järgu lõpmatult kahanevaks suuruseks kui Δx , kui ainult $f'(x) \neq 0$, sest

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) = f'(x)$$

[$f'(x)$ ei sõltu Δx -st, s. o. antud x puhul on jääv].

Avaldist (2) nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ juurdekasvu Δy peaosaks ehk funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaaliks.

Niisiis funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal võrdub funktsiooni tuletise ja argumendi vabalt võetud juurdekasvu korrutisega.

Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal tähistatakse sümboliga dy . Järelikult võib kirjutada:

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (3)$$

Pöördudes tagasi valemi (1) juurde

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x = dy + \varepsilon\Delta x,$$

tuleme otsusele, et juurdekasv Δy ja funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal dy üldiselt ei ole võrdsed üksteisega ja erinevad teineteisest $\varepsilon \Delta x$ -i võrra:

$$\Delta y - dy = \varepsilon \Delta x. \quad (4)$$

Sel asjaolul, et $\varepsilon \Delta x$ on kõrgema järgu lõpmatult kahanev suurus Δx -i suhtes, on suur tähtsus, sest paljudes rakendustes võib Δy ligikaudselt asendada dy -ga. Me ütlesime, et funktsiooni diferentsiaal ja funktsiooni juurdekasv üldiselt ei ole võrdsed teineteisega, kui aga $y = f(x)$ on lineaarfunktsioon, siis see üldine lause ei ole kehtiv.

Tõepoolest, kui

$$y = kx + b,$$

siis, andes x -le juurdekasvu Δx , saame: $y + \Delta y = k(x + \Delta x) + b$, millest $\Delta y = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k\Delta x$.

Diferentsides antud funktsiooni, saame: $y' = k$. Järelikult

$$dy = y' \Delta x = k \Delta x,$$

s. o.

$$\Delta y = dy.$$

[vt. valemit (3)].

Selgitame nüüd, mida kujutab endast argumendi x diferentsiaal dx .

Antud avaldise diferentsiaali leidmiseks tuleb korrutada antud avaldise tuletis argumendi juurdekasvuga. Sel viisil saame:

$$dx = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Saadud resultaati näitab, et argumendi juurdekasv ja tema diferentsiaal on võrdsed:

$$\Delta x = dx. \quad (5)$$

Saaksime sama resultaadi, vaadeldes argumenti x kui funktsiooni y , mille kõik väärtused langevad ühte x -i väärtustega, s. o. nagu funktsiooni $y = x$.

See on lineaarfunktsioon ja sellepärast $\Delta y = dy$.

Lähtudes sellest, et $y = x$, juurdekasv $\Delta y = \Delta x$ ja $dy = dx$, s. o. $\Delta x = dx$.

Lähtudes võrdusest $\Delta x = dx$ võib valemi (3) kirjutada kujul:

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (6)$$

Niisiis funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal dy võrdub funktsiooni tuletise ja argumenti x diferentsiaali dx korrutisega.

Jagades võrduse (6) mõlemad pooled dx -ga, saame:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad (7)$$

(loetakse: „de igrek de iksi suhtes“).

Valemist (7) näeme, et funktsiooni $y = f(x)$ tuletis $f'(x)$ võrdub funktsiooni diferentsiaali dy ja argumenti diferentsiaali dx suhtega.

Näide. Leida funktsiooni $y = x^3$ diferentsiaal.

Lahendus. Koostame funktsiooni $y = x^3$ juurdekasvu Δy ; $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Kaks viimast liidetavat annavad kõrgema järgu lõpmatult kahaneva suuruse võrreldes x -ga. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = \\ &= 3x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^2 = 0. \end{aligned}$$

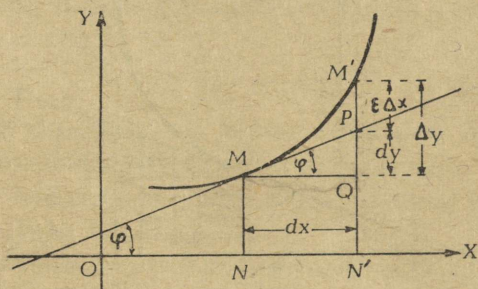
Jättes kõrvale Δx -ga võrreldes kõrgema järgu lõpmatult kahaneva suuruse, leiame valemi (1) põhjal funktsiooni

juurdekasvu peaosaks ehk funktsiooni diferentsiaali: $dy = 3x^2 \cdot \Delta x$ ehk $dy = 3x^2 dx$, sest $\Delta x \approx dx$.

Saadud resultaat on kooskõlas valemiga (6). Tõepoolest, $(x^3)' = 3x^2$, ja me näeme, et $dy = f'(x) dx = 3x^2 dx$.

Jagades saadud võrduse dx -ga, saame resultaadi, mis illustreerib valemit (7): $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 = \frac{dy}{dx}$.

§ 78. Diferentsiaali geomeetiline vaste. Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Geomeetriselt kujutab teda mingisugune kõver (joonis 83).



Joonis 83.

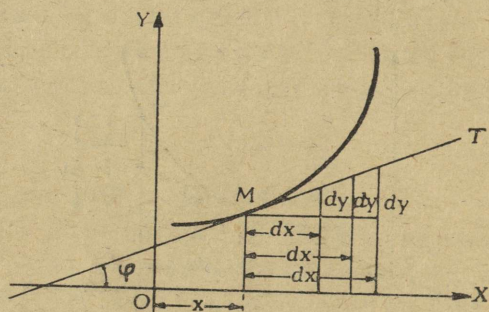
Võtame kindla väärtuse $x = ON$; valitud x -i väärtusele vastab kõvera ordinaat $y = NM$. Anname x -le juurdekasvu $x = dx$ ja konstrueerime ordinaadi $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = N'M'$. Joonestame kõverale punktis M puutuja MT . Siis saame: $NN' = MQ = \Delta x = dx$; $QM' = \Delta y$. Täisnurksest kolmnurgast MQP saame:

$$QP = \operatorname{tg} \angle QMP \cdot MQ = \operatorname{tg} \varphi \cdot dx = f'(x) dx.$$

Diferentsiaali definitsiooni põhjal korrutis $f'(x)dx = dy$. Järelikult diferentsiaali dy geomeetriliseks vasteks on sirg lõik QP .

$\Delta y = QM'$ on kõvera ordinaadi juurdekasv, aga sirglõik $QP = dy$ on puutuja ordinaadi juurdekasv.

Niisiis funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaali geomeetriliseks vasteks on antud kõvera punktis M joonestatud puutuja ordinaadi juurdekasv; ehk teisiti, diferentsiaal dy on juurdekasv, mille omandaks ordinaat $NM = y$ abstsissi ON kasvamisel suuruse $NN = dx$ võrra, kui punkt, mille liikumisel tekib kõver, alates punktist M , liiguks edasi sirgjooneliselt puutujat mööda.



Joonis 84.

Jooniselt võime kirjutada: $PM' = QM' - QP = \Delta y - dy$.

Toetudes valemile (4):

$$\Delta y - dy = \varepsilon \Delta x; \quad (4)$$

niiviisi sirglõik PM' on geomeetriliseks vasteks suurusele $\varepsilon \Delta x$, mis näitab juurdekasvu Δy ja diferentsiaali dy vahet ja mis on Δx -ga võrreldes kõrgema järgu lõpmatult kahanevaks suuruseks.

On arusaadav, et juurdekasv Δy võib osutada väiksemaks kui dy . Jätame õppijate hooleks joonestada sellele vastav geomeetiline väljendus.

Eelmise paragrahvi valemist (7) järgneb, et tuletis on funktsiooni ja argumendi diferentsiaalide suhe. Valitud x -väärtusel tuletis $f'(x)$ on jääv suurus. Silit järgneb, et argumendi diferentsiaali $\Delta x = dx$ muutumisel dy muutub nii, et suhe $\frac{dy}{dx}$ säilitab jääva väärtuse. Seda omadust selgitab näitlikult joonis 84: dx -i muutumisel saame rea sarnaseid kolmnurki, millede kaatetite suhe kogu aja jääb võrdseks puutuja tõusuga, s. o. tuletisega.

§ 79. Tuletise leidmise eeskirjade ja valemite laiendamine diferentsiaalide leidmiseks. Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal on antud funktsiooni tuletise $f'(x)$ ja argumendi diferentsiaali korrutis:

$$dy = f'(x)dx.$$

Järelikult diferentsiaali leidmine taandub antud funktsiooni tuletise leidmisele ja selle korrutamisele dx -ga. Diferentsiaalide leidmine ei tekita seega raskusi, kuna tuletise leidmist me juba oskame.

Diferentsimise põhivalemid, mis on esitatud §-s 51, väljenduvad diferentsiaalide kaudu järgmiselt:

- I. $dc = (c)'dx = 0$ (c on jääv suurus).
- II. $dx = (x)'dx = dx$.
- III. $d(u + v - w) = (u' + v' - w') dx = u'dx + v'dx - w'dx = du + dv - dw$ (sest $u'dx$, s. o. funktsiooni tuletise korrutis dx -ga, on selle funktsiooni diferentsiaal, s. o. du ; samal viisil $v'dx = dv$ ja $w'dx = dw$).
- IV. $d(uv) = (uv' + vu') dx = u(v'dx) + v(u'dx) = udv + vdu$.
- V. $d(cu) = c \cdot u'dx = cdu$.
- VI. $d(x^n) = nx^{n-1} dx$.
- VII. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2} dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

$$\text{VIII. } d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e \, dx .$$

$$\text{IX. } d(\ln x) = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x} .$$

$$\text{X. } d(a^x) = a^x \ln a \, dx .$$

$$\text{XI. } d(e^x) = e^x \, dx .$$

$$\text{XII. } d(\sin x) = \cos x \, dx .$$

$$\text{XIII. } d(\cos x) = -\sin x \, dx .$$

$$\text{XIV. } d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} .$$

$$\text{XV. } d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x} .$$

$$\text{XVI. } d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

$$\text{XVII. } d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

$$\text{XVIII. } d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2} .$$

$$\text{XIX. } d(\operatorname{arctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2} .$$

N ä i d e. Leida funktsiooni

$$y = \operatorname{lg} \operatorname{tg} \sqrt{1-x^2}$$

diferentsiaal.

L a h e n d u s. Kuna

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) ,$$

siis

$$dy = -\frac{2x \, dx}{\sqrt{1-x^2} \sin(2\sqrt{1-x^2})} .$$

Antud funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaali leidmise tehet, samuti kui tuletise leidmist, nime-tatakse diferentsimiseks.

Antud funktsiooni $y = f(x)$ tuletise arvutamiseks on kül-laldane teada argumendi väärtust, millele vastavalt arvuta-

takse tuletise väärtus. Nii näiteks, kui on antud funktsioon $y = x^3$, siis

$$y' = 3x^2,$$

ja $x = 2$ puhul saame: $y' = 3 \cdot 4 = 12$.

Diferentsiaali arvutamiseks on aga peale argumendi väärtuse tarvis teada ka argumendi juurdekasvu dx suurus.

Tõepoolest, ei ole võimalik leida funktsiooni $y = x^3$ diferentsiaali arvulist väärtust, kui on teada ainult argumendi arvuline väärtus, näiteks $x = 2$. Me võime kirjutada ainult

$$dy = 3x^2 dx,$$

ja kui $x = 2$, saame: $dy = 3 \cdot 4dx = 12dx$.

Kui aga peale selle on antud veel dx -i väärtus, näiteks $dx = 0,1$, siis saame määrata ka dy -i arvulise suuruse:

$$dy = 12 \cdot 0,1 = 1,2.$$

Kokku võttes väljendame öeldut:

Kui on antud funktsioon $y = f(x)$, siis suhte $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ arvutamiseks on küllaldane teada x -i arvulist väärtust.

Murru $\frac{dy}{dx}$ lugeja dy arvutamiseks aga on peale selle nõutav ka nimetaja dx väärtuse teadmine.

§ 80. Diferentsiaali mõiste rakendamine ligikaudses arvutamises. Matemaatika mitmesugustes rakendustes tuleb sageli teha tegemist mitte täpsete, vaid ligikaudsete väärtustega. Nii näiteks igasuguse mõõtmise tulemus on alati ainult mõõdetava suuruse ligikaudne väärtus.

Funktsiooni $y = f(x)$ väärtuse arvutamisel argumendi ligikaudse väärtuse põhjal saame funktsiooni ligikaudse väärtuse.

Kui tähistame argumendi ligikaudse väärtuse x -ga, aga täpse väärtuse $x + \Delta x$, siis esimesele vastab funktsiooni

ligikaudne väärtus $f(x)$, teisele täpne väärtus $f(x + \Delta x)$. Viga Δx argumendi määramisel tekitab funktsiooni väärtuse vea

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Kuna

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x = dy + \varepsilon\Delta x,$$

siis absoluutväärtuselt väikeste väärtuste $\Delta x = dx$ puhul viga Δy erineb dy -st suuruse $\varepsilon \cdot \Delta x$ võrra, mis on väike võrreldes Δx -ga (väikeste Δx puhul on ε väike). Seepärast Δy asemel võib niisugustel juhtudel võtta dy , tehes sellejuures seda väiksema vea, mida väiksem on $|\Delta x|$.

Vea Δy absoluutväärtust, s. o. $|\Delta y|$, nimetatakse absoluutveaks. Võttes Δy asemel diferentsiaali dy , võime ligikaudselt lugeda, et viga $|\Delta y| = |dy| = |y'dx|$.

Suhet $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ nimetatakse relatiivseks ehk suhteliseks veaks; relatiivse vea ligikaudseks väljenduseks on avaldis $\left|\frac{dy}{y}\right|$.

Selgitame näitega nende mõistete rakendamist.

Näide. Määrata arvutuse täpsuse mõttes kõige kasulikum magnetnõela kõrvalekaldumise nurk voolu tugevuse mõõtmisel tangensgalvanomeetriga.

On teada, et voolu tugevus i on võrdeline $\text{tg } \varphi$ -ga, s. o. $i = k \text{tg } \varphi$, kus k on võrdetegur.

Nurga φ lugemisel olgu tehtud viga $d\varphi$; see viga tekitab vea Δi , mida varem öeldu põhjal võib lugeda ligikaudselt võrdseks: $di = d(k \text{tg } \varphi) = k \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$.

Relatiivne viga on siis

$$\left|\frac{di}{i}\right| = \left|\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \cdot \text{tg } \varphi}\right| = \left|\frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}\right| = \left|\frac{2d\varphi}{\sin 2\varphi}\right|.$$

Siit näeme, et täpsus on kõige parem siis, kui $\sin 2\varphi = 1$, s. o. $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ja kõige halvem, kui $\sin 2\varphi$ on lähedane nullile,

s. o. φ väärtuste puhul, mis on lähedased nullile või $\frac{\pi}{2}$ -le, kus relatiivne viga piiramatult kasvab.

Siit järgneb, et tuleb vältida lugemise toimingut nullile ja $\frac{\pi}{2}$ -le lähedaste magnetnõela kõrvalekaldumise nurkade puhul.

Oletame, et aparaadil võib loendada nurki poole kraadi täpsusega. Siis, väljendades nurgad kaareühikuis, saame:

$$d\varphi < \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} \cdot 0,01745 \dots \text{ Relatiivne viga on siis } \left| \frac{d\varphi}{\sin 2\varphi} \right| = \\ = \frac{0,01745}{|\sin 2\varphi|}.$$

Kui lugemisel on saadud näiteks 30° , siis $\sin 2\varphi = \frac{1}{2} \cdot 1,73205$ ja relatiivne viga on $\frac{2 \cdot 0,01745}{1,73205}$, s. o. 2% ümber.

Tehnikas kasutatakse arvutuste lühendamise otstarbel ligikaudseid valemeid, mis saadakse juurdekasvu Δy asendamisel diferentsiaaliga dy .

Näiteks a väikeste väärtuste puhul avaldis $(1+a)^n$ asendatakse avaldisega $1+na$. Sellise asendamise võimalust saab põhjendada järgmiselt.

Vaatleme funktsiooni $y = x^n$. Võttes $x = 1$ ja siis $x = 1 + a$, moodustame funktsiooni juurdekasvu $(1+a)^n - 1$.

Asendame selle juurdekasvu diferentsiaaliga: $dy = nx^{n-1} dx$. Kui $x = 1$ ja $dx = a$, saame ligikaudse võrduse

$$(1+a)^n - 1 \approx na,$$

millest

$$(1+a)^n \approx 1 + na.$$

Analoogiliselt väikeste a väärtuste puhul võime ligikaudselt asendada

$$\sin a \approx a.$$

Tõepoolest, vaadeldes funktsiooni $y = \sin x$ ja võttes $x = 0$ ja pärast seda $x = a$, moodustame juurdekasvu Δy :

$$\Delta y = \sin a - \sin 0 = \sin a.$$

Asendades Δy diferentsiaaliga $dy = \cos x dx$, kui $x = 0$ ja $dx = a$, saamegi ligikaudse valemi:

$$\sin a \approx a.$$

Samuti tuletame ligikaudse valemi $\ln(1 + a)$ arvutamiseks a väikeste väärtuste puhul. Kui $y = \ln x$, siis $dy = \frac{dx}{x}$. Moodustame funktsiooni juurdekasvu Δy , mis vastab üleminekule väärtuselt $x = 1$ väärtusele $x = 1 + a$:

$$y = \ln(1 + a) - \ln 1 = \ln(1 + a),$$

millest saame, kui $x = 1$ ja $dx = a$, ligikaudselt:

$$\Delta y = \ln(1 + a) \approx \frac{a}{1} = a.$$

Harjutusi.

§ 79. juurde.

Leida järgmiste funktsioonide diferentsiaalid:

1. $y = ax^3 - bx^2 + cx + d$. Vastus: $dy = (3ax^2 - 2bx + c) dx$.

2. $y = 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-1} + 5$.

Vastus: $dy = (5x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-2}) dx$.

3. $y = (a^2 - x^2)^4$.

Vastus: $dy = -8x(a^2 - x^2)^3 dx$.

4. $y = \ln \sqrt{1 - x^3}$.

Vastus: $dy = \frac{3x^2 dx}{2(x^3 - 1)}$.

5. $y = (e^x + e^{-x})^2$.

Vastus: $dy = 2(e^{2x} - e^{-2x}) dx$.

6. $y = e^x \ln x$.

Vastus: $dy = e^x(\ln x + \frac{1}{x}) dx$.

7. $y = \frac{1}{4} \sin^4 2x$.

Vastus: $dy = 2 \sin^3 2x \cdot \cos 2x dx$.

$$8. \quad y = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x. \quad \text{Vastus: } dy = \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} dx.$$

$$9. \quad y = \arcsin \frac{x-2}{2}. \quad \text{Vastus: } dy = \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$10. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad \text{Vastus: } dy = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

§ 80. juurde.

11. Arvutada ligikaudselt funktsiooni juurdekasv

$$y = x^3 - 5x^2 + 80$$

muutuja x väärtuselt $x = 4$ üleminekul väärtusele $x = 4,001$. Võrrelda ligikaudset tulemust täpsega.

$$\text{Vastus: } \Delta y = 0,008007001; \quad dy = 0,008.$$

12. Leida murru $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ ligikaudne väärtus, kui $x = 4,2$.

$$\text{Vastus: } 0,8144.$$

J u h i s. Arvutada algul selle murru diferentsiaal, kui $x = 4$ ja $dx = 0,2$. Murru ligikaudse väärtuse leiame, kui liidame murru väärtuse $x = 4$ puhul arvatud diferentsiaaliga.

13. Leida murru $\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ ligikaudne väärtus, kui $x = 0,3$.

$$\text{Vastus: } 0,7.$$

14. Teades, et $\lg_{10} 200 = 2,30103$, leida $\lg_{10} 200,4$. Võrrelda saadud tulemust tabeli andmetega (moodul = $\lg_{10} e = 0,43429$).

Vastus: $\lg_{10} 200,4 = 2,30190$. See väärtus langeb ühte väärtusega, mis on toodud viiekohalistes tabelites.

J u h i s. Kirjutame $y = \lg_{10} x$. Siis

$$\begin{aligned} \lg_{10}(x + \Delta x) &= y + \Delta y \approx y + dy = \lg_{10} x + d(\lg_{10}) = \\ &= \lg_{10} x + \frac{1}{x} \lg_{10} e \cdot dx. \end{aligned}$$

15. Pendli võnkumise periood väljendub valemiga

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

kus l on pendli pikkus ja g raskuskiirendus. Leida pendli perioodi relatiivne viga, olenevalt pendli pikkuse l mõõtmisel tekkinud veast.

Vastus: $\left| \frac{dT}{T} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{dl}{l} \right|.$

16. Näidata geomeetriliselt, et lineaarfunktsioonil $\Delta y = dy$.

III OSA.

INTEGRAALARVUTUSE ELEMENDID.

IX peatükk.

Määramatu ja määratud integraalid.

§ 81. **Integreerimine diferentsimise pöördtehtena.** Määramatu integraal. Lugejal on juba teada elementaararvemaatika- ja algebrast tehete jagunemine otsesteks ja pöördtehteks. Nii, otsesele tehele liitmine vastab pöördtehe lahutamisele; korrutamise tehele — jagamine; astendamisele vastab kaks pöördtehet — juurimine ja logaritmine.

Üheks integraalarvutuse ülesandeks on diferentsimise pöördtehte tundmaõppimine.

Diferentsimise tehte eesmärgiks on antud funktsiooni $F(x)$ diferentsiaali $dF(x) = f(x)dx$ või tuletise $F'(x) = f(x)$ leidmine.

Integraalarvutus seab oma ülesandeks pöördtehte tundmaõppimise. Seda tehet nimetatakse integreerimiseks ja selle tehte eesmärgiks on antud avaldise $f(x)dx$, kui tundmatu funktsiooni $F(x)$ diferentsiaali järgi leida tundmatu „algfunktsioon“ $F(x)$.

Võtsime tarvitusele uue oskussõna — algfunktsioon. Selle mõiste täpne definitsioon on järgmine:

Antud avaldise $f(x)dx$ algfunktsiooniks nimetatakse funktsioon $F(x)$, mille diferentsiaaliks on $f(x)dx$, ehk mille tuletiseks on antud funktsioon $f(x)$.

Niisiis avaldise $f(x)dx$ ja tema algfunktsiooni $F(x)$ vahel on vastastikune seos:

$$dF(x) = f(x)dx$$

või

$$F'(x) = f(x).$$

Otsese tehte — diferentsimise tähistamiseks tarvitatakse märki d ; sümboliga

$$dF(x),$$

nagu teada, tähistatakse funktsiooni $F(x)$ diferentsiaali.

Pöördtehte — integreerimise — tähistamiseks tarvitatakse märki \int , nii sümbol

$$\int f(x)dx$$

tähistab, et avaldisega $f(x)dx$ toimub operatsioon, mis on diferentsimise pöördtehteks.

Sümbolit

$$\int f(x)dx$$

nimetatakse määramatuks integraaliks ja loetakse järgnevalt: „määramatu integraal $f(x)dx$ “.

Näiteks avaldise x^3dx määramatu integraal kirjutatakse järgmiselt:

$$\int x^3dx.$$

Asjaolu, et tarvitusele võetud sümbol nimetatakse määramatuks integraaliks, seletub lahenduste määra-

matusega (s. o. lahenduste piiramatu arvuga), mida annab integreerimise tehe.

Sellise tulemusega oli lugejal tegemist juba varem, näiteks ruutjuure leidmisel. Nii, $\sqrt{4} = \pm 2$, sest $(+2)^2 = 4$ ja $(-2)^2 = 4$.

Analoogiline tulemus esineb ka integreerimisel.

Selle küsimuse selgitamiseks vaatleme näidet.

Olgu antud rida funktsioone:

$$y = \frac{x^3}{3}, y = \frac{x^3}{3} + 1, y = \frac{x^3}{3} + 2, y = \frac{x^3}{3} + 3, y = \frac{x^3}{3} - 1 \text{ jms.}$$

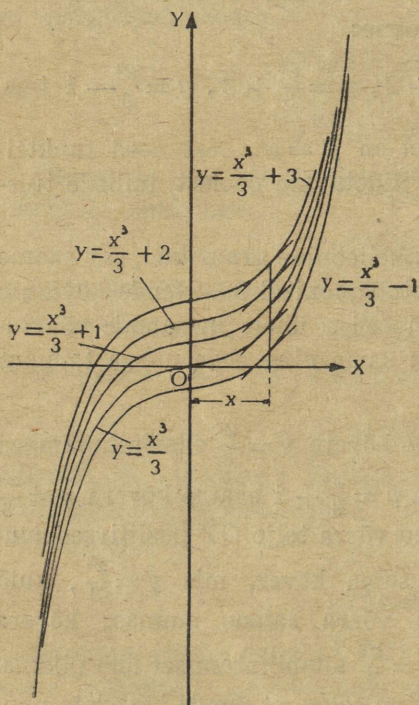
Kõigil neil funktsioonidel on $y' = x^2$, sest need funktsioonid erinevad konstantsete liidetavate poolest, millede tulestised võrduvad nulliga.

Kui joonestame nende funktsioonide graafikud, siis saame rea kõveraid, mis on kujutatud joonisel 85. Nende kõverate puutujail, mis vastavad abstsissi x ühele ja samale väärtusele x , on tõusnurk üks ja sama ning selle nurga tangens on $y' = x^2$ (§ 49).

Kõik need kõverad saame kõvera $y = \frac{x^3}{3}$ edasinihutamisel vertikaalsuunas. Nii, kõvera $y = \frac{x^3}{3} + 1$ saame kõvera $y = \frac{x^3}{3}$ nihke kaudu ühe mõõduühiku võrra telje OY positiivses suunas; kõver $y = \frac{x^3}{3} + 2$ on sama kõver, mis $y = \frac{x^3}{3}$, kuid nihkega kahe pikkusühiku võrra samas suunas; kõvera $y = \frac{x^3}{3} - 1$ saame kõvera $y = \frac{x^3}{3}$ allanihutamisel ühe pikkusühiku võrra jne. Sellepärast on selge, et nende kõverate puutujate tõus punktides, millel on üks ja sama abstsiss x , peab olema kõigil puutujatel üks ja sama.

On ilmne, et see asjaolu esineb kõigi kõverate juures üldkujuga $y = \frac{x^3}{3} + C$, kus C on mistahes arv (esimese kõvera puhul $C = 0$, teise puhul $C = 1$ jne.).

Kui seame üles pöördülesande: antud tuletise $y' = x^2$ järgi leida esialgne kõver, siis otsustada, missugune joonest $y = \frac{x^3}{3} + C$ oli antud esialgu, me silmanähtavalt ei saa. Kõik funktsioonid kujuga $y = \frac{x^3}{3} + C$, mis neid kõveraid väljendavad, rahuldavad nõudmist $y' = x^2$ või $dy = x^2 dx$.



Joonis 85.

Meie poolt kindlaks määratud oskussõnades selline tulemus tähendab, et avaldise $x^2 dx$ määramatu integraali leidmise ülesanne ei anna kindlakujulist vastust, sest iga funktsioon, mille saame üldkujust $\frac{x^3}{3} + C$, kus C võib olla ükskõik missugune arv, võib olla ülesande lahendiks.

Seepärast peame kirjutama nii:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

ja pidama meeles, et tulemus $\frac{x^3}{3} + C$ on lõpmata paljude vastuste lühike kujutis, kuna täht C võib olla igasuguseks arvuks (1, 2, 3, 10, 50, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\sqrt{2}$, 1, 0, -1 jms.). Kuna ei ol-

nud võimalik leida ühte kindlat vastust, siis sümbolit $\int x^2 dx$ nimetatakse määramatuks integraaliks.

On kerge näha, et samasugune tulemus esineb iga funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni leidmisel.

Tõepoolest on selge, et kui $F(x)$ on mõni kindel $f(x)$ algfunktsioon, s. o. niisugune, et $dF(x) = f(x)dx$ või $[F'(x) = f(x)]$, siis iga summa $F(x) + C$, kus C on ükskõik misugune jääv arv, on ka $f(x)$ algfunktsiooniks, sest jääva arvu diferentsiaal võrdub nulliga ja tähendab

$$d[F(x) + C] = dF(x) + dC = f(x)dx.$$

Avaldis $F(x) + C$ sisaldab eneses kõik $f(x)dx$ algfunktsioonid. Selle väite tõestamine toetub diferentsiaalarvutuse nõndanimetatud keskväertuse teoreemile, mida käesolevas teoses ei käsitelda. Sellepärast piirdume siin vaid mõnede näitlikkude arutlustega. Oletame, et $\Phi(x)$ on ka mõnesugune $f(x)$ algfunktsioon, s. o. $\Phi'(x) = f(x)$. Siis vahe $\Phi(x) - F(x) = \Psi(x)$ tuletis igal juhul võrdub nulliga, sest

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - \\ &\quad - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Kuid funktsiooni $\Psi(x)$, mille tuletis $\Psi'(x)$ x -i kõigi väärtuste puhul võrdub nulliga, peab kujutama kõver, mille puutuja igas punktis on paralleelne teljega OX , s. o. funktsioonil endal peab x -i kõigi väärtuste puhul olema üks ja sama väärtus, s. o. funktsioon peab olema jäävaks suuruseks. Tõepoolest, kui see ei oleks nii, siis ordinaadid, mis kujutavad $\psi(x)$ väärtusi, oleksid erineva pikkusega x -i erinevate väärtuste puhul; siis kõver üksikutes osades tõuseks või langeteks ja puutuja seega ei saaks jääda paralleelseks abstsiss-teljega.

Sel viisil on määramatu integraali sümboli mõiste järgi kehtiv järgmine põhivõrdus:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1)$$

kus $F(x)$ on mõnesugune määratud, ükskõik missugune $f(x)dx$ -i algfunktsioon, aga C on vabalt võetav konstant.

Kuna võrduse (1) vasempoolses osas vabalt võetavat konstanti C ei ole kirjutatud, siis sümboli

$$\int f(x)dx$$

kirjutamisel tuleb mõista, et see konstant ilmutamatul kujul sisaldub määramatu integraali sümbolis, ja pidada meeles, et see sümbol väljendab lõpmatu hulga funktsioone.

Näited.

1. Kui $F(x) = x^3$, siis $dF(x) = 3x^2 dx$. Sellepärast valemi (1) põhjal

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

2. Kui $F(x) = \sin x$, siis $F'(x) = \cos x$, seepärast

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

3. Kui $F(x) = e^x$, siis $F'(x) = e^x$, järelikult

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

§ 82. Määramatu integraali omadused, mis järelduvad otseselt tema definitsioonist.

Integraali definitsiooni põhjal võime kirjutada:

1. $\left[\int f(x)dx \right]' = f(x).$

2. $d \int f(x)dx = f(x)dx.$

3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$

või, kuna $F'(x)dx = dF(x)$,

4. $\int dF(x) = F(x) + C.$

Omadus 2 näitab, et märk d hävitab märgi \int , ja omadusest 4 järgneb, et samuti märk \int hävitab märgi d , kuid selle juures $F(x)$ -ga tuleb liita vabalt võetav konstant.

5. Integreeritava avaldise jääva kor-daja võib tuua integraali märgi ette.

Selle omaduse võib väljendada võrdusega

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx,$$

kus x on jääv suurus. Muidugi tuleb pidada meeles, et kahe määramata integraali võrdus on võrdus täpsusega vabalt võetava jäävani (konstandini).

Tõestus. Integraali definitsiooni põhjal saame:

$$\left[\int cf(x)dx \right]' = cf(x), \quad \left[c \int f(x)dx \right]' = c \left[\int f(x)dx \right]' = cf(x).$$

Järelikult

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx.$$

Näide.

$$\int \frac{\cos x}{5} dx = \int \frac{1}{5} \cos x dx = \frac{1}{5} \int \cos x dx = \frac{1}{5} \sin x + C.$$

6. Funktsioonide algebralise summa integraal võrdub liidetavate funktsioonide integraalide summaga (ja ümberpöördukt).

Piirdudes kolme liidetava summaga, võime väljendada selle omaduse järgmise valemiga:

$$\begin{aligned} & \int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx = \\ & = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx - \int \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Tõestus. Võttes selle võrduse mõlemast poolst tule-
tised, saame:

$$\left\{ \int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx \right\}' = f(x) + \varphi(x) - \psi(x);$$

$$\left[\int f(x) dx + \int \varphi(x) dx - \int \psi(x) dx \right]' = \left[\int f(x) dx \right]' +$$

$$+ \left[\int \varphi(x) dx \right]' - \left[\int \psi(x) dx \right]' = f(x) + \varphi(x) - \psi(x).$$

Järelikult

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx - \int \psi(x) dx.$$

Näide.

$$\int (3x^2 + 4 \cos x - a^x) dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int \cos x dx - \int a^x dx =$$

$$= x^3 + 4 \sin x - \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

§ 83. Integreerimise põhivalemid. Iga pöördtehte teo-
tamine taandub tulemuse ennustamisele ja saadud tulemuse
kontrollimisele otsese tehte abil. Pöördtehete reeglid seisa-
vad selles, et keerulisi ennustamise võtteid taandada lihtsa-
maile. Nii näiteks mitmekohaliste arvude jagamisel teatud
arvu kohtade eraldamisel jagatavas asendamegi keerulise
ennustamise lihtsamaga, kuid ka niisugusel lihtsamal jaga-
misel teeme sageli vigu, võttes mittevastava numbri
jagatises.

Samuti määramatu integreerimine, s. o. pöördtehte dife-
rentsimisele, on oluliselt otstarbekohaselt suunatud ennusta-
miste ja katsetamiste protsess. Integreerimise protsessi ker-
gendamiseks on koostatud põhivalemite kogud, mis osutuvad
ümberpöörduvalt diferentsimise põhivalemeiks. Et leida (ehk
nagu öeldakse, võtta) mõnesugune integraal, võrdleme seda
nende valemitega, ja kui osutub, et integraal on samane
ühega neist, siis integraal on leitud. Kui aga antud integraal
ei ole samane ei ühegagi põhivalemeist, siis püütakse teda

mitmesuguste teisendamiste abil muuta vastavaks ühele neist. Need, antud integraali taandamised tabeliintegraalile, on üldiselt väga rasked ja nõuavad suurt osavust, milleni võib jõuda ainult harjutuse teel.

Nagu öeldud, integreerimise põhivalemeid on koostatud diferentsimise põhivalemite pööramise teel ja neid on kerge kontrollida otsese tehte, s. o. diferentsimise kaudu, mille jätame iseseisvaks ülesandeks õppijaile.

Toome põhivalemite tabeli:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. ($n \neq -1$; $n = -1$ puhul valem kaotab mõtte: $n + 1 = -1 + 1 = 0$, aga nulliga jagada ei saa).

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln x + C.$$

$$\text{III. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\text{IV. } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\text{V. } \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{VI. } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\text{VII. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\text{VIII. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\text{IX. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

§ 84. Integreerimise lihtsamaid võtteid. Käesolevas paragrahvis esitame näidetel integreerimise lihtsaimaid võtteid ja toome rea integraale iseseisvaiks harjutusiks.

Näited.

$$1. \int (x^3 + 5x^2 - 7x + 3) dx.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} & \int (x^3 + 5x^2 - 7x + 3) dx = \\ & = \int x^3 dx + 5 \int x^2 dx - 7 \int x dx + 3 \int dx = (\S 82 \text{omaduste } 6 \\ & \hspace{15em} \text{ja } 5 \text{ järgi}) \end{aligned}$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 7 \frac{x^2}{2} + 3x + C \text{ [valemi (I) järgi].}$$

$$2. \int (ax^2 + bx + \frac{c}{x} + \frac{e}{x^2}) dx =$$

$$= a \int x^2 dx + b \int x dx + c \int \frac{dx}{x} + e \int \frac{dx}{x^2} = (\S 82 \text{omaduste } 6 \\ \text{ja } 5 \text{ põhjal})$$

$$= a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + c \ln x + e \frac{x^{-1}}{-1} + C = [\text{valemite (I) ja (II) järgi}]$$

$$= \frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2 + c \ln x - \frac{e}{x} + C.$$

$$3. \int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c \sqrt[3]{x^2} \right) dx =$$

$$= 2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-2} dx + 3c \int x^{\frac{2}{3}} dx =$$

$$= 2a \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b \frac{x^{-1}}{-1} + 3c \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = [\text{valemi (I) järgi}]$$

$$= 4a \sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5} cx^{\frac{5}{3}} + C.$$

$$4. \int (x^2 + 2)x dx = \int (x^3 + 2x) dx =$$

$$= \int x^3 dx + 2 \int x dx = \frac{x^4}{4} + x^2 + C.$$

Integreerimine asendusmeetodi abil. Lahendatud näidetes kasutasime ainult summa integreerimise eeskirja ja lihtsamate integraalide tabelit. Kuid sel teel saab integreerida ainult õige piiratud arvul juhtudel. Vaatleme veel ühte integreerimise võtet — integreerimist asendusmeetodi kaudu. See võte leiab integreerimise tehnikas laialdast rakendamist.

Nimetatud võte seisab selles, et integraali $\int f(x) dx$ leidmisel muutuja x asemel võetakse abimuutuja t , mis on seotud x -ga selleks määratud sõltuvuse kaudu — niisuguse arvestusega, et saada lihtsamat integreeritavat avaldist.

Olgu näiteks tarvis leida integraal: $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Asendame $x = \operatorname{tg} t$, kus t on abimuutuja. Siis avaldis, mis esineb nimetajas sulgudes, teisendub järgmiselt:

$$1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

ja integreeritava avaldise nimetaja väljendub uue muutuja kaudu nii: $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos^3 t}$.

Kuid integreeritav avaldis sisaldab veel diferentsiaali dx , mis samuti tuleb väljendada muutuja t kaudu. Kuna $x = \operatorname{tg} t$, siis $dx = (\operatorname{tg} t)' dt = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

Sel viisil, muutujale t ülemineku kaudu integreeritav avaldis lihtsustub tunduvalt:

$$\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dt}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^3 t} = \cos t dt.$$

Järelikult saame:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \cos t dt = \sin t + C.$$

Saadud tulemus tuleb väljendada endise muutuja x kaudu. Kuna $x = \operatorname{tg} t$, siis selleks on tarvis $\sin t$ väljendada $\operatorname{tg} t$ kaudu ja siis $\operatorname{tg} t$ asendada x -ga. Saame:

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ja lõplikult leiame:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Saadud tulemuse kehtivuses võib veenduda kontrollimisel.

Vaatleme veel näidet integreerimisest asendusmeetodil. Leida integraal:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Asendame x abimuutujaga φ seose $x = a \sin \varphi$ kaudu. Saame:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \varphi)} = a \cos \varphi, \quad dx = a \cos \varphi d\varphi.$$

Järelikult saame:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos \varphi \cdot a \cos \varphi d\varphi = a^2 \int \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Integraal $\int \cos^2 \varphi d\varphi$ leitakse, rakendades tuntud trigonomeetria valemit: $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$. Sellepärast võime kirjutada:

$$a^2 \int \cos^2 \varphi d\varphi = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\int d\varphi + \int \cos 2\varphi d\varphi \right].$$

Esimene integraal võetakse vahetult:

$$\int d\varphi = \varphi + C_1.$$

Teise integraali leidmiseks rakendame asendust $\varphi = \frac{1}{2} t$. Siis

$$d\varphi = \frac{1}{2} dt$$

ja

$$\int \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C_2 = \frac{1}{2} \sin 2\varphi + C_2.$$

Järelikult

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{a^2}{2} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right] + C$$

(vabalt võetud konstantide summa $C_1 + C_2$, korrutatult $\frac{a^2}{2}$ -ga, asendame üheainsa vabalt võetava jäävaga C).

Seosest $x = a \sin \varphi$ leiame:

$$\sin \varphi = \frac{x}{a}, \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{a},$$

ja lõplikult saame:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Tuleb märkida, et asendamismeetodit toodud kujul rakendatakse võrdlemisi harva, kuna on raske aimata niisugust funktsiooni t , mille asetamine x -i asemele annaks integreeritava avaldise lihtsustuse. Harilikult toimitakse ümberpöörduvalt, võttes uue muutuja t endise muutuja x funktsioonina: $t = \psi(x)$.

Selgitame öeldut näitega. Olgu tarvis leida

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

Kirjutame:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}.$$

Asendame $\cos x = t$; siit $-\sin x dx = dt$ ehk $\sin x dx = -dt$ ja

$$\frac{\sin x dx}{\cos x} = -\frac{dt}{t}.$$

Nii leiame:

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C.$$

Asetades $\cos x$ tagasi t asemele, saame lõpptulemusena:

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C.$$

Vaatame veel läbi rea näiteid asendusmeetodi rakendamise kohta.

1. $\int \sqrt{x+a} dx$. Asendame $x+a=t$; siis $dx=dt$ ja

$$\int \sqrt{x+a} dx = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (x+a)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{a+x}$. Asendame $a+x=t$, saame: $dx=dt$

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(a+x) + C.$$

3. $\int \frac{dx}{a-x}$. Asendame $a-x=t$, leiame: $dx=-dt$,

$$\int \frac{dx}{a-x} = - \int \frac{dt}{t} = - \ln t + C = - \ln(a-x) + C.$$

4. $\int e^{2x} dx$. Asendame $2x=t$; siit $dx = \frac{dt}{2}$; järelikult

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Asendame $a^2+x^2=t$; siis $2x dx = dt$ ja $x dx = \frac{dt}{2}$; järelikult

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{a^2+x^2} + C. \end{aligned}$$

6. $\int \frac{5x^2 dx}{x^3+15}$. Asendame $x^3+15=t$; siis $3x^2 dx = dt$ ja $x^2 dx = \frac{dt}{3}$; järelikult

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 dx}{x^3+15} &= \int \frac{5 \frac{dt}{3}}{t} = \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{5}{3} \ln t + C = \\ &= \frac{5}{3} \ln(x^3+15) + C. \end{aligned}$$

7. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$. Asendame $\ln x = t$; siis $\frac{dx}{x} = dt$;

järelikult

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$$

8. $\int (a^{nx} - e^{mx}) dx = \int a^{nx} dx - \int e^{mx} dx$. Esimese integraali leidmiseks asendame: $nx = t$, siis $n dx = dt$ ja $dx = \frac{dt}{n}$. Teise integraali leidmiseks asendame: $mx = z$, siis $dx = \frac{dz}{m}$; järelikult

$$\begin{aligned} \int (a^{nx} - e^{mx}) dx &= \int a^t \frac{dt}{n} - \int e^z \frac{dz}{m} = \frac{1}{n} \frac{a^t}{\ln a} - \frac{1}{m} e^z + C = \\ &= \frac{a^{nx}}{n \ln a} - \frac{e^{mx}}{m} + C. \end{aligned}$$

9. $\int \frac{\sin x dx}{a + b \cos x}$. Asendame $a + b \cos x = t$; siis $-b \sin x dx = dt$ ja $\sin x dx = -\frac{dt}{b}$; järelikult

$$\int \frac{\sin x dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{b} \ln(a + b \cos x) + C.$$

10. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$. Asendame $x^3 = t$; siis $x^2 dx = \frac{dt}{3}$; järelikult

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3} &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} t + C = \quad [\text{valemi VII järgi}] \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C. \end{aligned}$$

11. $\int \frac{dx}{4x^2 + 9}$.

Selle integraali saab taandada integraalile X järgmiste teisendamiste abil:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 1}.$$

Asendame $\frac{2}{3}x = t$; siis $dx = \frac{3}{2} dt$; järelikult

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 1} &= \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{3}x + C. \end{aligned}$$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$.

Selle integraali saab taandada integraalile IX:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}x\right)^2}}.$$

Asendame $\frac{3}{4}x = t$; siis $dx = \frac{4}{3} dt$; järelikult

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{3} \arcsin t + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{4}x + C.$$

13. $\int \cos^2 x \sin x dx$. Asendame $\cos x = t$; siis $\sin x dx = -dt$; järelikult

$$\int \cos^2 x \sin x dx = - \int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

14. $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$
 $= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx.$

Esimene integraal on tabeli integraal. Teise integraali leidmiseks (vt. näidet 13) asendame $\cos x = t$; siis $\sin x dx = -dt$; järelikult

$$\begin{aligned} \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx &= -\cos x + \int t^2 dt = -\cos x + \\ &+ \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Lõpuks märgime, et üldise eeskirja andmine selle või teise asenduse valikuks, vastavalt antud integraalile, ei ole võimalik. Muutuja asendamise meetodi kasutamise oskus omandatakse ainult harjumusega.

Harjutusi.

1. $\int (4x^3 + 3x^2 + 4x - 3) dx$. Vastus: $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + C$.
 2. $\int \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$. Vastus: $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$.
 3. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 3}}{\sqrt{x}} dx$. Vastus: $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + 6\sqrt{x} + C$.
- Juhis. Kõigepealt jagada lugeja iga liige nimetajaga.
4. $\int (2 + 3x)^{\frac{3}{2}} dx$. Vastus: $\frac{2}{15} (2 + 3x)^{\frac{5}{2}} + C$.
 5. $\int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} x dx$. Vastus: $\frac{(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C$.
 6. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^3)^{\frac{1}{2}}}$. Vastus: $\frac{2}{3} (a^2 + x^3)^{\frac{1}{2}} + C$.
 7. $\int \sqrt{2 + e^x} dx$. Vastus: $\frac{2}{3} (2 + e^x)^{\frac{3}{2}} + C$.
 8. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 2}$. Vastus: $\ln \sqrt{(e^{2x} + 2)} + C$.
 9. $\int \frac{dx}{x \ln x^2}$. Vastus: $\frac{1}{2} \ln \ln x + C$.
 10. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$. Vastus: $\ln(e^x - e^{-x}) + C$.
 11. $\int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx$. Vastus: $a(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) + C$.
 12. $\int 3a^{2x^3} x^2 dx$. Vastus: $\frac{a^{2x^3}}{2 \ln a} + C$.
 13. $\int a^x e^x dx$. Vastus: $\frac{a^x e^x}{1 + \ln a} + C$.

14. $\int \text{ctg } x \, dx$. Vastus: $\ln \sin x + C$.
 J u h i s. Vt. näidet 9, § 84.
15. $\int \frac{1 + \sin x}{x - \cos x} \, dx$. Vastus: $\ln(x - \cos x) + C$.
16. $\int \sin 2ax \, dx$. Vastus: $-\frac{\cos 2ax}{2a} + C$.
17. $\int (\cos \frac{x}{3} - \sin 3x) \, dx$. Vastus: $3 \sin \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \cos 3x + C$.
18. $\int \cos mx \, dx$. Vastus: $\frac{1}{m} \sin mx + C$.
19. $\int x^2 \sin 3x^3 \, dx$. Vastus: $-\frac{1}{9} \cos 3x^3 + C$.
20. $\int x \cos(a + bx^2) \, dx$. Vastus: $\frac{1}{2b} \sin(a + bx^2) + C$.
21. $\int e^{\cos x} \sin x \, dx$. Vastus: $-e^{\cos x} + C$.
22. $\int \frac{5dx}{\cos^2 bx}$. Vastus: $\frac{5}{b} \text{tg } bx + C$.
23. $\int \frac{dx}{\cos^2(a - bx)}$. Vastus: $\frac{1}{b} \text{tg}(a - bx) + C$.
24. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{n}}$. Vastus: $-n \text{ctg } \frac{x}{n} + C$.
25. $\int \frac{dx}{3 + 4x^2}$. Vastus: $\frac{\sqrt{3}}{6} \text{arctg } \frac{2x}{\sqrt{3}} + C$.
26. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}}$. Vastus: $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{5} + C$.
27. $\int \frac{7dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$. Vastus: $\frac{7}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} x + C$.
28. $\int \frac{\cos x \, dx}{a^2 + \sin^2 x}$. Vastus: $\frac{1}{a} \text{arctg} \left(\frac{\sin x}{a} \right) + C$.
29. $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$. Vastus: $\arcsin e^x + C$.
30. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}$. Vastus: $\arcsin(\ln x) + C$.

$$31. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}. \quad \text{Vastus: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Juhis. Moodustades nimetajas täisruudu, taandame antud integraali integraalile, mis on sarnane näites 25 vaadeldule. Nimelt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}. \quad \text{Vastus: } \arcsin \frac{2x-1}{3} + C.$$

$$33. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}. \quad \text{Vastus: } \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$34. \int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}. \quad \text{Vastus: } \arcsin(2x-3) + C.$$

$$35. \int \sin^2 x \cos x \, dx. \quad \text{Vastus: } \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

$$36. \int \cos^3 x \, dx. \quad \text{Vastus: } \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

(Vt. näite 14 lahendust §-s 84.)

$$37. \int \sin^3 \frac{x}{2} \, dx. \quad \text{Vastus: } \frac{2}{3} \cos^3 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + C.$$

$$38. \int \left(\sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} \right)^3 dx. \quad \text{Vastus: } 3 \left(\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \right) + \\ + 2 \left(\sin^3 \frac{x}{3} - \cos^3 \frac{x}{3} \right) + C.$$

$$39. \int \sin^2 x \, dx. \quad \text{Vastus: } \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

(Vt. näite lahendust §-is 84.)

$$40. \int \sin^4 x \, dx. \quad \text{Vastus: } \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$41. \int \cos^4 x \, dx. \quad \text{Vastus: } \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$42. \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx. \quad \text{Vastus: } \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

§ 85. Integreerimiskonstandi määramine algandmete järgi.

Paragrahvis 81 oli näidatud, et diferentsimise pöördülesande lahendamisel saame lõpmata palju lahendeid, mis erinevad üksteisest nn. integreerimiskonstandi C väärtuselt. Kui on antud funktsioon $f(x)$ ja on tarvis leida funktsioon, mis rahuldaks ainult üht tingimust, nimelt, et tema tuletis oleks võrdne antud funktsiooniga, siis vastus kirjutatakse kujul

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kus $F(x)$ on niisugune funktsioon, et $F'(x) = f(x)$, C aga on vabalt võetav konstant; andes C -le mitmesugused väärtused, saame mitmesugused funktsioonid, mis rahuldavad antud ülesannet.

Kui täiendavalt veel lisandame mõne tingimuse, siis saame juba ainsa lahenduse, mis vastab integreerimiskonstandi kindlale väärtusele — niisugusele, mille puhul rahuldub täiendav tingimus.

Selgitame öeldu näitega.

N ä i d e. Leida funktsioon, mille tuletis on $3x^2 - 2x + 5$ ja mis peab võrduma 12-ga, kui $x = 1$.

L a h e n d u s. Leiame esiteks funktsiooni, mis rahuldaks esimest tingimust, s. o. funktsiooni, mille diferentsimisel saame antud tuletise $3x^2 - 2x + 5$. Integraali definitsiooni põhjal leiame:

$$\int (3x^2 - 2x + 5)dx = x^3 - x^2 + 5x + C,$$

kus C on integreerimiskonstant. Ülesande teise tingimuse kohaselt peab see funktsioon võrduma 12-ga, kui $x = 1$, s. o.

$$12 = 1 - 1 + 5 + C, \text{ millest } C = 7.$$

Järelikult otsitav funktsioon on

$$x^3 - x^2 + 5x + 7.$$

Harjutusi.

Leida funktsioon, mille tuletis võrdub:

1. $x = 3$, teades, et kui $x = 2$, siis funktsiooni väärtus on 9.

Vastus: $\frac{x^2}{2} - 3x + 13$.

2. $3 + x - 5x^2$, teades, et kui $x = 6$, siis funktsiooni väärtus on -200 .

Vastus: $124 + 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3}$.

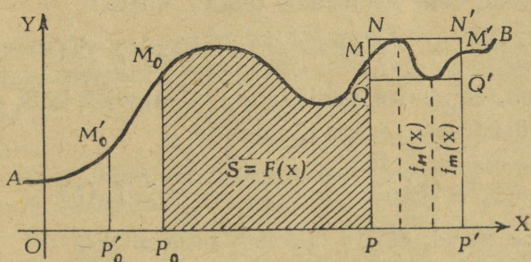
3. $\sin x + \cos x$, teades, et kui $x = \frac{\pi}{2}$, siis funktsiooni väärtus on 2.

Vastus: $\sin x - \cos x + 1$.

§ 86. Määramatu integraali geomeetiline vaste. Olgu antud funktsioon

$$y = f(x).$$

Olgu AB (joonis 86) kõver, mis kujutab antud funktsiooni graafikut¹.



Joonis 86.

Valime sel kõveral mingi kindla punkti M_0 , mille koordinaadid on $OP_0 = x_0$ ja $M_0P_0 = y_0 = f(x_0)$.

¹ Eeldatakse, et $f(x)$ on pidev funktsioon.

Abstsissi mingile vabalt valitud väärtusele $OP = x$ vastab kõveral AB punkt M , mille ordinaat on $MP = y = f(x)$. Pindala S suurus (joonisel viirutatud), mida piiravad kõvera AB kaar M_0M , ordinaadid M_0P_0 ja MP ja abstsissitelg, muutub abstsissi $OP = x$ muutumisel ja on sellepärast x -i funktsioon, mida tähistame $F(x)$, nii et

$$S = F(x).$$

Kui abstsissile $x = OP$ anname juurdekasvu $PP' = \Delta x$, siis pindala $S = F(x)$ saab juurdekasvu $\Delta S = F(x + \Delta x) = PMM'P'$. Jooniselt nähtub, et see juurdekasv ΔS on ristkülikute $PNN'P'$ ja $PQQ'P'$ pindalade vahepealne; nende ühiseks aluseks on sirglõik $PP' = \Delta x$, esimesel on kõrguseks kõvera kõigist ordinaatidest vahemikus PP' suurim ordinaat $f_M(x)$, teisel — väikseim ordinaat $f_m(x)$. Niisiis võime kirjutada:

$$PNN'P' \text{ pindala} > \Delta S > PQQ'P' \text{ pindala.}$$

Kuna pindala $PNN'P' = f_M(x) \cdot \Delta x$; pindala $PQQ'P' = f_m(x) \cdot \Delta x$, $\Delta S = F(x + \Delta x) - F(x)$, siis seda kahekordset võrratust võib kirjutada ümber kujul:

$$f_M(x) \cdot \Delta x > F(x + \Delta x) - F(x) > f_m(x) \cdot \Delta x.$$

Oletame, et Δx on positiivne, ja jagades kõik osad kahekordses võrratuses Δx -ga¹, saame:

$$f_M(x) > \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} > f_m(x).$$

Oletame nüüd, et Δx läheneb nullile. Siis

$$f_m(x) = f_M(x) = f(x), \text{ aga } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

¹ Kui $\Delta x < 0$, siis kahekordse võrratuse jagamisest Δx -ga võrratuse märgid muutuksid vastupidisteks, kuid edasise arutluse käik jääks samaks, mis $\Delta x > 0$ puhul. Sellepärast arutluste lõpptulemus jääb kehtivaks ka $\Delta x < 0$ puhul.

Järelikult

$$F'(x) = f(x),$$

millest järeldame, et pindala S kui x -i funktsioon on funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks.

Kui oleksime võtnud pindala sama muutuva ordinaadini PM , kuid arvates teisest kindlast ordinaadist $P_0'M_0'$ (joonis 86), siis selle uue pindala tuletis, missugust pindala määrame $\varphi(x)$, nagu on kerge näha, võrdub ka $f(x)$, s. o. $\varphi'(x) = f(x)$. See uus pindala erineb endisest pindalast $P_0'M_0'M_0P_0$ pindala, s. o. jääva suuruse C võrra. Tähendab, $\varphi(x)$ kujutab endast teist $f(x)$ algfunktsiooni.

Niiviisi pindalad, mis saadakse algordinaadi mitmesuguste asendite puhul, vaadeldud x -i funktsioonina, kujutavad endast $f(x)$ algfunktsioone.

Lähtudes sellest, järeldame, et lõpmatu hulk pindalasi, mis erinevad üksteisest algordinaadi asendilt, kujutavad endast lõpmatu suurt arvu¹ funktsioone, mis sisalduvad sümbolis

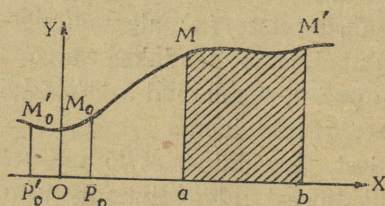
$$\int f(x) dx$$

ja mis erinevad üksteisest vabalt võetud konstandi väärtustelt. Selles seisabki määramatu integraali geomeetriline tähendus.

¹ Täpsemalt öeldes, on lõpmatu suurest arvust funktsioonidest, mis sisalduvad sümbolis $\int f(x) dx$. Asi on selles, et algordinaadi igale asendile vastab vabalt võetava jääva C kindel väärtus, kuid pöördväide, üldiselt võttes, juba ei ole õige: vabalt võetava jääva mõnelele väärtustele ei ole vastavat ordinaadi asendit. Näiteks, olgu $y = \sqrt{x}$. Siis $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. Kuna sirge asetseb täielikult teljest OY paremal, siis missuguse algordinaadi meie ka ei valiks, jääva C vastav väärtus on negatiivne (või on võrdne nulliga, kui algordinaadiks võtta telg OY). Järelikult vabalt võetava jääva positiivsele väärtusele ei vasta ükski algordinaat.

§ 87. **Määratud integraal.** Tuletame nüüd valemi, mis võimaldab arvutada pindala suurust kujundil, mida piiravad kõverjoon, väljendatud võrrandiga $y = f(x)$, kaks kindlaks määratud ordinaati $f(a)$ ja $f(b)$, vastavalt abstsissiväärtustele $x = a$ ja $y = b$, ja abstsissitelg.

Selleks märgime, et otsitavat pindala võib esitada kahe pindala vahena: $P_0M_0M'b$ pindala (joonis 87), s. o. pindala, mis on piiratud mõne jääva ordinaadiga P_0M_0 , kõveraga $y = f(x)$, ordinaadiga $f(b)$ ja abstsissiteljega, ja P_0M_0Ma pindala, s. o. pindala, mis on piiratud sama konstantse ordi-



Joonis 87.

naadiga P_0M_0 , kõveraga $y = f(x)$, ordinaadiga $f(a)$ ja abstsissiteljega. Esimene pindala — $P_0M_0M'b$ — kujutab määratud integraali $\int f(x)dx$ väärtust kindlaks määratud algordinaadi P_0M_0 asendil ja muutuva ordinaadi $f(x)$ fikseeritud asendil, nimelt asendil, millele tema asub, kui võtame $x = b$. Analoogiliselt, teine pindala P_0M_0Ma on määratud integraali $\int f(x)dx$ väärtus valitud algordinaadi P_0M_0 puhul ja muutuva ordinaadi $f(x)$ asendil, mille ta omandab, kui $x = a$.

Algordinaadi asemel oleks võidud võtta mõnda teist ordinaati $P'_0M'_0$; siis otsitav pindala $aMM'b$ võiks olla pindalade vaheks:

$P'_0M'_0M'b$ pindala — $P'_0M'_0Ma$ pindala = $aMM'b$ pindala.

See tähendab, et otsitava pindala suurust $aMM'b$ võib väljendada määramatu integraali

$$\int f(x) dx$$

kahe väärtuse vahena, kui need väärtused vastavad väärtustele $x = b$ ja $x = a$ integreerimiskonstandi C vabalt võetud väärtuse puhul. Kui võtame

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

siis $aMM'b$ pindala suurus väljendub järgneva vahena:

$$[F(x) + C]_{x=b} - [F(x) + C]_{x=a} = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

(võrdused $x = b$ ja $x = a$ peenkirjas nurgeliste sulgude all näitavad, et määramatu integraali $F(x) + C$ vaadeldakse argumendi väärtustel $x = b$ ja $x = a$).

Võib ka veel kirjutada:

$$aMM'b \text{ pindala} = \left[\int f(x) dx \right]_{x=b} - \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}.$$

Lühemalt seda vahet kirjutatakse kujul:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

ja teda nimetatakse määratud integraaliks. Väärtust $x = a$ nimetatakse integraali alamrajaks ja väärtust $x = b$ — integraali ülemrajaks. Sümbolit

$$\int_a^b f(x) dx$$

loetakse nõnda: „määratud integraal a -st b -ni $f(x) dx$ “.

Me kasutasime tähistamisviisi

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

ja leidsime, et

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + C]_{x=b} - [F(x) + C]_{x=a} = F(b) - F(a),$$

kusjuures C väärtus on vabalt võetav. Arvestades asjaolu, et lõpptulemuses C kaob ära, kirjutatakse lihtsamalt nii:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{x=b} - [F(x)]_{x=a}$$

või veel lihtsamalt järgmisel viisil:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

kus, tuletame meelde, funktsioon $F(x)$ on niisugune funktsioon, millel $F'(x) = f(x)$.

Niisiis pindala suurus kujundil $aMM'b$, mida piiravad kõver $y=f(x)$, abstsissiväärtusele $x=a$ ja $x=b$ vastavad ordinaadid $f(a)$ ja $f(b)$ ja telg OX , väljendub määratud integraaliga

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Määratud integraali $\int_a^b f(x) dx$ arvutamiseks tuleb leida

sama funktsiooni $f(x)$ määramatu integraal, s. o. integraal

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

ja jättes ära vabalt võetava konstandi C , koostada funktsiooni $F(x)$ väärtuste vahe, kui argument $x=b$ ja $x=a$:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Näide 1. Arvutada $\int_0^1 x^2 dx$.

Lahendus. Leiame määramatu integraali

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Siis $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

Näide 2. Arvutada $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - (\cos 0) = \\ &= 0 - (-1) = 1. \end{aligned}$$

Näide 3. Arvutada pindala kujundil, mida piiravad parabool $y = 4 - x^2$ ja telg OX (joonis 88).

Lahendus. Ülaltoodu põhjal saame:

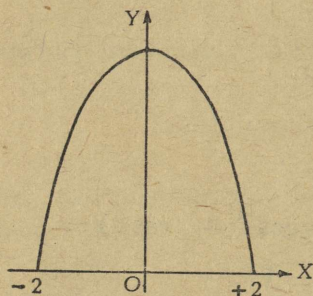
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{+2} (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{+2} = \\ &= \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 - \frac{-8}{3} \right) = 10\frac{2}{3} \text{ ruutühikut.} \end{aligned}$$

Näide 4. Arvutada pindala, mida piiravad sinusoid $y = \sin x$ ja telg OX vahemikus $x = 0$ kuni $x = 2\pi$ (joonis 89).

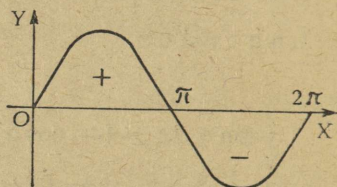
Lahendus.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Geomeetrisest seisukohast lähtudes saime absurdse tulemuse: pindala osutus võrdseks nulliga. See tulemus seletub väga lihtsalt ja loomulikult: kõverjoontega piiratud pindalade arvutamiseks koostasime analüütilise valemi ja selleks, et seda kasutada, tuleb allpool telge OX asetsevad pindalad lugeda negatiivseteks, samuti kui võtsime analüütilises geomeetrias tarvitusele positiivsed ja negatiivsed sirglõigud.



Joonis 88.



Joonis 89.

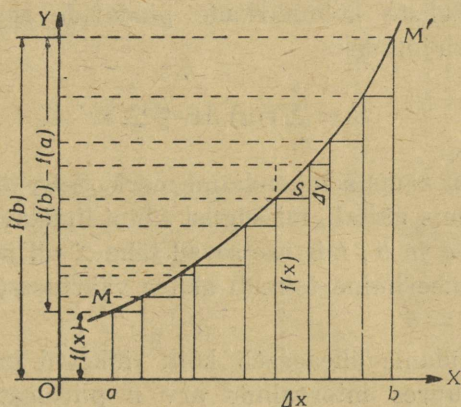
Tegelikkuses muidugi on tähtis teada pindala absoluutväärtust. Antud näites otsitava pindala absoluutväärtust tuleb arvutada järgmiselt: leida ülalpool telge OX asetsev pindala osa ja saadud tulemus korrutada kahega. Sel viisil saame:

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 2[-\cos \pi - (-\cos 0)] = 2[+1 + 1] = 4 \text{ ruutühikut.}$$

Harjutusi kõverjoontega piiratud pindalade arvutamiseks leiavad õppijad § 84. lõpul.

Määratud integraal kui summa piir. Lihtsamaid integraalarvutuse rakendusi.

§ 88. Määratud integraal kui summa piir. Kõverjoonelise kujundi pindala arvutamisel, nagu seda nägime paragrahvis 87, võime lähtuda ka teisest vaatekohast ja nimelt järgmiselt. Olgu antud pidev funktsioon $y = f(x)$ — positiivne ja kasvav mõnes vahemikus $x = a$ kuni $x = b$ (joonis 90). Vaatleme pindala $aMM'b$, mida piiravad kõvera



Joonis 90.

$y = f(x)$ kaar, ordinaadid $f(a)$ ja $f(b)$ ja telg OX . Selle pindala arvutamiseks jaotame vahemiku a -st b -ni n osaks, võrdseiks või mittevõrdseiks — see on ükskõik, ja jaotuspunktidest püstitame ordinaadid. Püstitatud ordinaatide lõpp-punktidest joonestame sirged, mis on paralleelsed abstsissteljega, nii et terve kujund jaotub ristkülikuteks ja iga ristküliku ühe otsa juures asetseb kõverjooneline kolmnurk. Iga ristküliku pindala võime arvutada: kui võtame

mingisuguse ühe neist ja tema aluse, nagu harilikult teeme, tähistame Δx -ga, ristküliku pindala võrdub korrutisega $f(x)\Delta x$, kus $f(x)$ on ristküliku kõrgus, mis ühtlasi on kõvera $y = f(x)$ ordinaadiks ja mis ordinaadina vastab väikese intervalli Δx pahempoolse otsa abstsissi väärtusele.

Kõverjooneliste kolmnurkade pindala me ei oska arvutada. Tähistame ühe tundmatu kolmnurga pindala tähega s , siis terve kujundi pindala S koosneb kahest summast: ristkülikute pindalade summast

$$\sum f(x)\Delta x$$

ja kõverjooneliste kolmnurkade pindalade summast $\sum s$, s. o. võime kirjutada:

$$S = \sum_a^b f(x)\Delta x + \sum_a^b s.$$

Täht Σ on summa lühendatud märk. Selle tähe järel seisab avaldis, mis näitab, missugust tüüpi liidetavaid summeerime. Tähed a ja b , mis asetsevad tähe Σ all ja ülal, näitavad, et summeerimine toimub alates väärtusest $x = a$ kuni väärtuseni $x = b$.

Kui lähendame üheaegselt kõik väikesed intervallid Δx nullile (seejuures intervallide arv n piiramatult kasvab), siis, piirjuhul, nagu kohe näitame, teine summa $\sum_a^b s$ muutub nulliks. Järelikult see summa osutub lõpmatult kahanevaks suuruseks. Otsitav pindala on jääv suurus. Summa $\sum_a^b f(x)\Delta x$ on muutuv suurus. Siis, lähtudes piirväärtuse (piiri) definitsioonist, saame:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x)\Delta x.$$

Asume nüüd väite tõestamisele, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b s = 0$.

Kui võtame intervalli Δx , siis kõverjoonelise kolmnurga pindala s , mis vastab sellele intervallile, on väiksem alusega Δx ja kõrgusega Δy ristküliku pindalast. Joonisel 91 on selguse mõttes suurendatult joonestatud intervall Δx , temale vastav kõverjooneline kolmnurk s ja ristkülik, mille aluseks on Δx ja kõrguseks Δy . Niisiis võime kirjutada:

$$s < \Delta x \cdot \Delta y.$$

Siit järgneb, et

$$0 < \sum_a^b s < \sum_a^b \Delta x \cdot \Delta y.$$

Tähistame tähega β kõige suurema Δx -i väärtustest. Siis saame:

$$\sum_a^b \Delta x \cdot \Delta y < \sum_a^b \beta \Delta y,$$

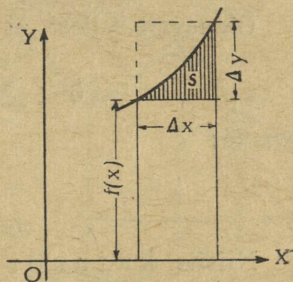
siis aga ammugi

$$\sum_a^b s < \sum_a^b \beta \Delta y.$$

Igas viimasena toodud summa liidetavas tegur β on üks ja sama. Sellepärast võime tuua tema summa märgi ette:

$$\sum_a^b \beta \Delta y = \beta \sum_a^b \Delta y.$$

Juurdekasvude y summa võrdub vahega $f(b) - f(a)$ (vt. joonist 90).



Joonis 91.

Järelikult

$$\beta \sum_a^b \Delta y = \beta [f(b) - f(a)].$$

Kuna vaatleme protsessi, milles kõik juurdekasvud Δx lähenevad nullile, siis läheneb nullile ka kõige suurem juurdekasvudest Δx , s. o. β . Järelikult

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta [f(b) - f(a)] = 0.$$

Olenevalt sellest, et

$$0 < \sum_a^b s < \beta [f(b) - f(a)],$$

saame:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b s = 0.$$

Niisiis kujundi pindala S on võrdne ristkülikute $f(x)\Delta x$ pindalade summa piiriga, s. o.

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x)\Delta x.$$

Olgu $y = f(x)$ positiivne ja intervallis $x = a$ kuni $x = b$ kahanev funktsioon (joonis 92). Siis kujundi $aMM'b$ pindala S väljendub summade vahena:

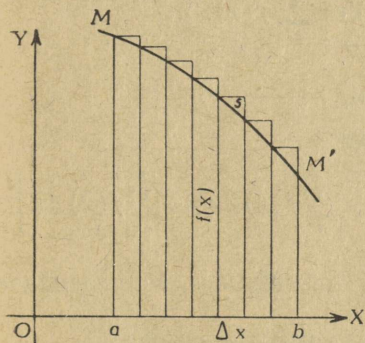
$$S = \sum_a^b f(x)\Delta x - \sum_a^b s,$$

kus tähega s on tähistatud kõverpinnalise kolmnurga pindala.

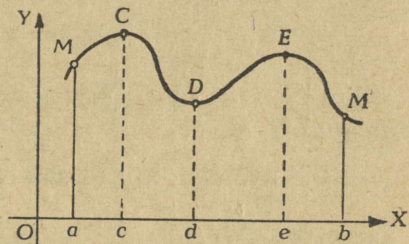
Arutades samuti nagu eelmisel juhul, jõuame jällegi tulemuseni:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x)\Delta x.$$

Oletame lõpuks, et funktsioon $y = f(x)$ intervallis $x = a$ kuni $x = b$ kord kasvab, kord kahaneb, jäädes seejuures positiivseks. Oletame, et intervalli a -st b -ni on võimalik jaotada niisugustesse osadesse, milledes igäühes üksikult võttes funktsioon kas kasvab või kahaneb. Nii, joonisel 93 on kuju-



Joonis 92.



Joonis 93.

tatud funktsioon $y = f(x)$, mis abstsissis muutudes a -st c -ni kasvab, $x = c$ kuni $x = d$ kahaneb, pärast seda intervallis d -st e -ni jälle kasvab ja terve intervalli (a, b) viimases osas, s. o. $x = e$ kuni $x = b$, uuesti kahaneb.

Õeldu põhjal võime kirjutada:

$$\text{pindala } aMCCe = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^c f(x) \Delta x,$$

$$\text{pindala } cCDDd = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_c^d f(x) \Delta x,$$

$$\text{pindala } dDEEe = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_d^e f(x) \Delta x,$$

$$\text{pindala } eEM'b = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_e^b f(x) \Delta x.$$

On ilmne, et pindala $aMM'b =$ pindala $aMCc +$
 $+ \text{pindala } cCDd + \text{pindala } dDEe + \text{pindala } eEM'b$, s. o.

$$\begin{aligned} \text{pindala } aMM'b = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^c f(x) \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_c^d f(x) \Delta x + \\ & + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_d^e f(x) \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_e^b f(x) \Delta x, \end{aligned}$$

ehk, summa piiri teoreemi põhjal,

$$\begin{aligned} & \text{pindala } aMM'b = \\ = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \sum_a^c f(x) \Delta x + \sum_c^d f(x) \Delta x + \sum_d^e f(x) \Delta x + \sum_e^b f(x) \Delta x \right\}. \end{aligned}$$

Kuid avaldist, mis seisab suurtes sulgudes, võib asendada summaga $\sum_a^b f(x) \Delta x$. Nii saame lõplikult:

$$\text{pindala } aMM'b = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \Delta x.$$

See tulemus näitab, et meie poolt rakendatud kõverjoone-
 lise kujundi pindala arvutamise meetod on kehtiv ka sel
 juhul, kui funktsioon $y = f(x)$ vaadeldava intervalli üksi-
 küis osades on kord kasvav, kord kahanev.

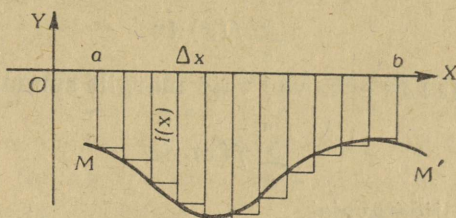
Kui kõver asetseb allpool telge OX , siis ordinaadid
 $y = f(x)$ on negatiivsed ja korrutis $f(x) \Delta x$ on ka nega-
 tiivne. Järelikult summa

$$\sum_a^b f(x) \Delta x$$

on negatiivne ja sellepärast summa piir, s. o. pindala $aMM'b$
 (joonis 94) omandab negatiivse väärtuse. Nii tekib meil
 tarvidus omistada pindaladele see või teine märk.

Paragrahvis 87 nägime, et käesolevas paragrahvis vaadeldud kujundite pindalade suurused väljendusid määratud integraalina

$$\int_a^b f(x) dx .$$



Joonis 94.

Järelikult võime kirjutada:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \Delta x . \quad (1)$$

See valem näitab, et määratud integraali võib vaadelda kui piiramatult kasvava arvuga liidetavate summat, kusjuures iga liidetav läheneb nullile, s. o. osutub lõpmatult kahanevaks suuruseks, ja liidetavad kujutavad endast integreeritava avaldise $f(x) dx$ järjestikuseid väärtusi.

See määratud integraali uus mõte omab eriti suurt tähtsust rakendustes, milledega tutvume lähemates paragrahvides.

§ 89. Määratud integraali lihtsamaid omadusi. Kasutades määratud integraali kui summa piiri definitsiooni, võtame vaatlusele kolm tema lihtsaimat omadust.

Senini vaatlesime juhtu, kui $a < b$. Kui $a > b$, siis, jaotades integreerimise intervalli osadesse Δx , alates tema

lõpp-punktist a , saame Δx tarvis negatiivsed väärtused. Siit tuleneb määratud integraali järgmine omadus:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Tõepoolest, summa

$$\sum_a^b f(x) \Delta x$$

liidetavad $f(x) \Delta x$ erinevad vaid märgilt summa

$$\sum_b^a f(x) \Delta x$$

vastavatest liidetavaist.

Sellepärast ka nende summade piirid, s. o.

$$\int_a^b f(x) dx \text{ ja } \int_b^a f(x) dx$$

erinevad vaid märgilt.

Niiviisi saame määratud integraali esimese omaduse:

1. Integreerimisrajade ümbervahetamisel integraali märk muutub vastupidiseks.

2. Integreeritava funktsiooni jääva teguri võib tuua määratud integraali märgi ette.

Selle omaduse võib kirjutada valemi kujul:

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Tõestus. Valemi (1) põhjal, § 88, on:

$$\int_a^b cf(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b cf(x) \Delta x.$$

Kuna c on summa liidetavate ühiseks teguriks, siis võime kirjutada:

$$\begin{aligned} \int_a^b cf(x)dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b cf(x)\Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \sum_a^b f(x)\Delta x = \\ &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x)\Delta x = c \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

3. Funktsioonide algebralise summa määratud integraal võrdub üksikute funktsioonide määratud integraalide summaga.

Piirdudes kolme liidetava summaga, võime kirjutada selle omaduse valemi kujul:

$$\begin{aligned} &\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx = \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx. \end{aligned}$$

Tõestus. § 88 valemi (1) põhjal saame:

$$\begin{aligned} &\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\Delta x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x)\Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b \varphi(x)\Delta x - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b \psi(x)\Delta x = \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx. \end{aligned}$$

§ 90. Integraalarvutuse rakenduste printsiip. Paljud raken-
dusliku iseloomuga ülesanded on lahendatavad meetodil, mis
on analoogiline paragrahvis 88 vaadeldud meetodiga.

Nimelt mingisuguse suuruse S arvutamine taandub $f(x)\Delta x + a \cdot \Delta x$ kujuliste liidetavatega summa arvutamisele, kus suurus a jääb tundmatuks, kuid on teada, et kõige suurem a väärtusest läheneb nullile, s. o. $a \rightarrow 0$, kui $\Delta x \rightarrow 0$.

Siis vaatleme otsitavat suurust summa $\sum [f(x)\Delta x + a \cdot \Delta x]$ piirina, kui $\Delta x \rightarrow 0$. Lahutades selle summa kaheks, saame:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum [f(x)\Delta x + a \cdot \Delta x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x)\Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum a \cdot \Delta x,$$

ja kogu küsimus taandub tõestamisele, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum a \cdot \Delta x = 0$.

Põhjenedes algebralise summa absoluutväärtuse omadusele, võime kirjutada:

$$|\sum a \cdot \Delta x| \leq \sum |a \cdot \Delta x| = \sum |a| \cdot |\Delta x|.$$

Tähistame a' -ga kõige suurema a absoluutsuuruste väärtustest. Siis

$$\sum |a| |\Delta x| < \sum a' |\Delta x| = a' \sum |\Delta x| = a' |b - a|,$$

sellepärast muidugi ka

$$|\sum a \cdot \Delta x| < a' |b - a|.$$

Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis, tingimuse kohaselt, $a' \rightarrow 0$. Järelikult

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a' \cdot |b - a| = 0.$$

Siit järeldame, et

$$\sum a \Delta x$$

on lõpmatult kahanev suurus, ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum a \Delta x = 0.$$

Korrutis kujul $\alpha \cdot \Delta x$ on kõrgema järgu lõpmatult kahanev suurus võrreldes Δx -ga, sest

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0,$$

sest $\alpha \rightarrow 0$, kui $\Delta x \rightarrow 0$. Seepärast printsiipi, mida kasutatakse rakendustes, võib väljendada järgmiselt:

Summa piiri arvutamisel, kui liidetavad omavad kuju $f(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ ja $\Delta x \rightarrow 0$, suurused $\alpha\Delta x$ ($\alpha \rightarrow 0$, kui $\Delta x \rightarrow 0$) on kõrgema järgu lõpmatult kahanevad suurused, võrreldes Δx -ga, ja need võib ära jätta. Siis otsitav suurus S määratakse kui $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x)\Delta x$:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x)\Delta x.$$

Integraalarvutuse rakendustes argumentidele x ja funktsioonile $y = f(x)$ omistatakse ikka konkreetne sisu. Nii, keha liikumise vaatlemisel x -i all võib mõelda aega, y -i all — kiirust; rõhumise arvutamisel, nagu alamal näeme, x -i all mõistetakse sügavust, milleni plaat on asetatud vedelikku, y -i all aga sügavusele vastavat rõhumise suurust jms. Kuid ükskõik missugust konkreetset mõtet funktsioon $f(x)$ ka ei omaks, võime seda kujutada alati kõvera $y = f(x)$ ordinaadi kujul. Aga niisugusel juhul

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x)\Delta x$$

väljendab kõverjoonelise kujundi pindala suurust; ja kuna pindala suurust väljendab integraal

$$\int_a^b f(x) dx,$$

siis suuruse S leidmise ülesanne taandub määratud integraali

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

arvutamisele.

Seda meetodit vaatlesime üksikasjaliselt §-s 88, milles kõverjoonelise kujundi pindala arvutati just niisuguse pii-rile ülemineku abil.

Integraalarvutuse lihtsaimate rakenduste vaatlemist algame kõverjoontega piiratud kujundite pindalade arvuta-mise esitamisest ja selle kõrval toome mõned määratud integraali arvutamise võtted.

§ 91. Pindalade arvutamise ülesandeid. Kui joone võr-rand on $y = f(x)$, siis selle joonega, kahe selle joone punkti ordinaatidega, vastavalt abstsissidele a ja b , ja abstsissstel-jega piiratud kujundi pindala suurus S määratakse, nagu oli näidatud §-s 88, valemiga

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Kasutades seda valemit, võtame vaatlusele kaks pindala määramise näidet.

Näide 1. Leida kahe parabooliga $y^2 = 2px$ ja $x^2 = = 2py$ piiratud pindala.

Lahendus. Et leida otsitav pindala, on tarvis, nagu see on näha jooniselt 95, pindalast, mida piiravad parabool $y^2 = 2px$, telg OX ja kahe parabooli lõikepunkti ordinaat, lahutada pindala, mida piiravad parabool $x^2 = 2py$, telg OX ja sama ordinaat. Et määrata integraalide rajad, millede abil määratakse need üksikud pindalad, on tarvis leida nende

kõverate lõikepunktide abstsissid. Lahendades ühiselt võrrandid $y^2 = 2px$ ja $x^2 = 2py$, leiame $x = 0$ ja $x = 2p$.

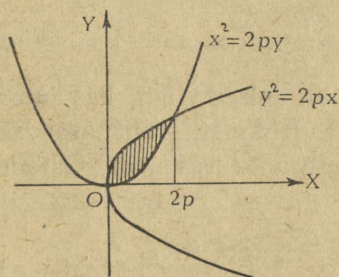
Järelikult saame:

$$S = \int_0^{2p} \sqrt{2px} dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p} dx = \sqrt{2p} \int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2p} \int_0^{2p} x^2 dx =$$

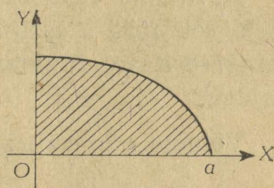
$$= \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2p} - \frac{1}{2p} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2p} = \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2p)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2p} \cdot \frac{8p^3}{3} = \frac{4}{3} p^2.$$

Näide 2. Leida pindala, mida piirab ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Joonis 95.



Joonis 96.

Lahendus. Leides veerandi otsitavast pindalast ja korrutades tulemuse neljaga, määrame terve pindala. Ellipsi võrrandist saame:

$$y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

[juure võtame märgiga +, kuna arvutame esimeses kvadrantis asetseva ellipsi kaare järgi (joonis 96)].

Tähistades otsitava pindala tähega S , saame:

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Määramatu integraal $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ oli leitud näites, mis on toodud §-s 84 asendusmeetodi kohta.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} S &= 4 \frac{b}{a} \left[\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right]_0^a \\ &= 4 \frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{2} \arcsin 1 + 0 - \frac{a^2}{2} \arcsin 0 - 0 \right) = \\ &= 4 \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

Arvutame vaadeldud integraali teisel viisil, kasutamata esialgset määramatu integraali leidmist, vaid asendades integreeritava funktsiooni muutuja (argument) abimuutujaga.

Võtame $x = a \sin \varphi$. Siis $dx = a \cos \varphi d\varphi$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \varphi)} = a \cos \varphi.$$

Integreerimise rajad 0 ja a vastavad muutujale x . Kui võtame võrdusega $x = a \sin \varphi$ seotud abimuutuja φ , siis integreerimise rajad selle uue muutuja suhtes on juba teised. Integreerimise rajad vastavalt abimuutujale leiame samast võrdusest $x = a \sin \varphi$, asendades x enne alumise ja siis ülemise rajaga ja arvutades vastavad φ väärtused. Sel viisil saame:

$$0 = a \sin \varphi \quad \text{ja} \quad \varphi = 0;$$

$$a = a \sin \varphi \quad \text{ja} \quad \sin \varphi = 1 \quad \text{ning} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Järelikult saame:

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi \cdot a \cos \varphi \cdot d\varphi = \\
 &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = 4ab \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \right\} = \\
 &= 4ab \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi \right\}.
 \end{aligned}$$

Esimene integraal sulgudes määratakse otseselt. Teise integraali arvutamiseks asendame $2\varphi = \psi$. Siis $d\varphi = \frac{d\psi}{2}$ ja integreerimise rajad muutuja ψ suhtes on 0 ja π (uued rajad leiame võrdusest $2\varphi = \psi$, võttes algul $\varphi = 0$ ja pärast seda $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Sel viisil saame:

$$\begin{aligned}
 S &= 4ab \left\{ \frac{1}{2} [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos \psi d\psi \right\} = \\
 &= 4ab \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) \right\} = \pi ab.
 \end{aligned}$$

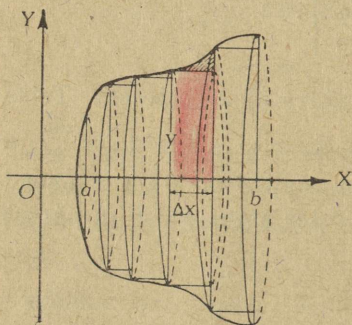
Selle näite lahendus näitab, et muutuja asendamisel määratud integraali märgi all võib, kui on leitud integreerimise rajad abimuutuja suhtes, integreerimise tulemus jätta endise muutuja suhtes määramata¹.

¹ Integraali märgi all muutuja asendamise eeskirja võtsime kasutamisele ilma range põhjendusega. Selle reegli range tõestamine ulatub väljapoole elementaarse kursuse raame.

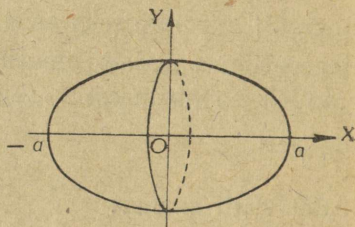
§ 92. **Pöördkeha ruumala.** Pöördkehaks nimetakse keha, mis moodustub mingisuguse kõverjoone kaare pöörlemisel mõne telje ümber, mida nimetatakse pöörlemisteljeks.

Olgu antud kõvera võrrand $y = f(x)$. On tarvis arvutada keha ruumala, mis tekib ordinaatide $f(a)$ ja $f(b)$ vahel asuva kõverjoone kaare pöörlemisel ümber telje OX .

Analoogiliselt sellele, kuidas toimeksime tasapinnalise kujundi pindala leidmisel, kujutleme, et pöördkeha on tasapindadega, mis on risti teljega OX , lõigatud suureks hul-



Joonis 97.



Joonis 98.

gaks osadeks. Iga osa ruumala koosneb silindri ruumalast, mida moodustab pöörlemisel ristkülik, mille aluseks on Δx ja kõrguseks y , ja ristküliku otsas asuva kõverjoonelise kolmnurga pöörlemisel moodustunud pöördkeha ruumalast (joonisel 97 on see kõverjooneline kolmnurk viirutatud). On kerge näidata, et ruumala kehal, mis tekib kõverjoonelise kolmnurga pöörlemisel, on kõrgema järgu lõpmatult kahanev suurus, võrreldes Δx -ga. Jättes need ruumalad, kooskõlas §-s 90 toodud printsiibiga, arvestamata, väljendame pöördkeha ruumala V silindrite ruumalade summa pii-

rina. Ruumala silindril, mille põhja raadius on y ja kõrgus Δx , võrdub $\pi y^2 \Delta x$; järelikult

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (2)$$

N ä i d e. Leida ruumala pöördkehal, mille moodustab ellips $\frac{a^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pöörlemisel ümber telje OX (joonis 98).

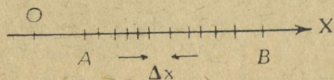
L a h e n d u s. Kuna $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$, siis valemi (2) põhjal saame:

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Võttes $a = b$, leiame: $V = \frac{4}{3} \pi a^3$, s. o. kera ruumala, mis tekib ringjoone $x^2 + y^2 = a^2$ pöörlemisel ümber telje OX .

§ 93. Tungi töö. Kui keha, jääva tungi F mõjul, mille suund ühtib keha liikumise suunaga, liigub sirgjooneliselt edasi sirglõigu pikkuse x võrra, siis tungi tööks nimetatakse korrutist $F \cdot x$.

Järgmisel viisil võib laiendada töö mõiste juhule, kui tung on muutuv.



Joonis 99.

Nihkugu keha edasi telge OX mööda punktist $A(x = a)$ punkti $B(x = b)$ (joonis 99) tungi F mõjul, kusjuures tung on x -i funktsioon $F = f(x)$ ja on suunatud mööda telge OX .

Kui tung on muutuv, siis tööd saab määrata ainult piirile ülemineku abil.

Keha ümberpaigutamisel sirglõigul AB tungi poolt tehtud töö arvutamiseks toimime analoogiliselt sellele, kuidas tegime seda integraali geomeetriliste rakenduste puhul.

Loeme ligikaudselt, et keha nihkub edasi igas sirglõigu Δx ulatuses jääva tungi mõjul, mis võrdub näiteks tungi väärtusega Δx -i vasemas otspunktis. Siis töö, mida teeb tung üksiku sirglõigu Δx ulatuses, väljendub korrutisega $f(x)\Delta x$ (elementaartöö). Selle töö ligikaudne väärtus erineb täpsest väärtusest kõrgema järgu lõpmatult kahaneva suuruse võrra, võrreldes Δx -ga. Põhjenedes üldisele printsiibile, mis on käsitletud §-s 90, võib seda viga jätta arvestamata, ja siis töö P , mida teeb tung keha edasiliikumisel sirglõigu AB terves ulatuses, määratakse elementaartööde summa piirina, piiramatul intervallide Δx arvu n suurenemisel (tingimusel, et kõik pikkused Δx lähenevad selle juures nullile). Järelikult saame:

$$P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

N ä i d e. Kruvilise vedru kokkusurutavus on võrdeline rakendatud tungiga. Leida töö, mis toimub vedru kokkusurumisel 3 cm võrra, kui on teada, et vedru kokkusurumiseks 0,5 cm võrra tuleb rakendada tungi 1 kg.

L a h e n d u s. Olgu x vedru kokkusurutavus, väljendatud meetrites; siis tung $f(x)$, mis on tarvilik vedru kokkusurumiseks x m võrra, on kx , kus k on võrdetegur. Kui $x = 0,005$ m, tung $f(0,005) = k \cdot 0,005 = 1$, järelikult $k = \frac{1}{0,005} = 200$ ja

$$f(x) = 200x.$$

Toodud valemi järgi tungi töö vedru kokkusurumisel
 $3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ võrra võrdub

$$\int_0^{0,03} f(x) dx = \int_0^{0,03} 200x dx = 100 [x^2]_0^{0,03} =$$

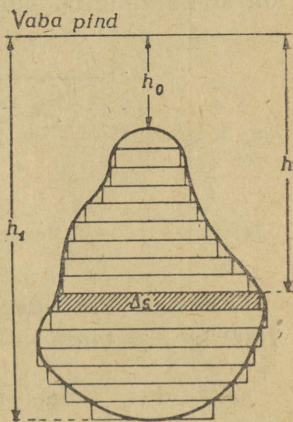
$$= 0,09 \text{ kilogramm-meetrit.}$$

§ 94. **Vedeliku rõhumine.** Vedeliku rõhumine rõhtsele plaadile, mis on allpool vedeliku vaba pinda sügavusel h , võrdub plaadile toetuva vedeliku samba kaaluga. Niisiis kui tähistame plaadi pindala tähega S , vedeliku erikaalu tähega γ ja rõhumise tähega P , siis saame:

$$P = \gamma Sh.$$

Lähtudes sellest tõsiasiast, et vedeliku rõhumine on igas suunas üks ja sama, leiame rõhumise plaadile, mis on paigutatud vedelikku vertikaalselt. Selle ülesande lahendamisel kasutame meetodit, mida rakendati eelmistes paragrahvides käsitletud ülesannete lahendamisel.

Kujutleme endile plaati, mis vedeliku vabale pinnale paralleelsete sirgetega on jaotatud suureks arvuks n kitsasteks ribadeks (joonis 100), ja eeldame, et rõhumine ühe ja sama riba kõigis osades on ühesugune. Tõepoolest ei ole see muidugi mitte nii: näiteks riba ülemises servas on rõhumine väiksem kui alumises. Arvutamise lihtsustamise otstarbel eeldame, et ribal on ristküliku kuju, mille pindala märgime Δs . Viga, mida sellejuures teeme, on kõrgema



Joonis 100.

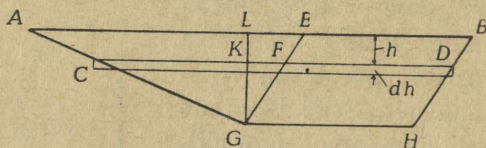
järgu lõpmatult kahanev suurus, ja seepärast, kooskõlas üldise printsiibiga, võib jätta selle vea arvestamata.

Märgime vedeliku erikaalu tähega γ , siis, arvestades ülalnimetatud eeldusi, leiame, et ligikaudselt rõhumine ribale, mis asetseb sügavusel h , võrdub korrutisega $\gamma h \Delta s$.

Suurendades piiramatult ribade arvu n ja minnes üle piirile (tingimusel, et kõik ribade kõrgused sellejuures lähenevad nullile), leiame rõhumise P plaadile:

$$P = \lim_{h_0}^{h_1} \sum \gamma h \Delta s = \int_{h_0}^{h_1} \gamma h ds, \quad (3)$$

kus h_0 on sügavus, mille kaugusel vabast vedeliku pinnast on plaadi kõrgeim punkt, aga h_1 on sügavus, mille kaugusel on kõige alumine punkt.



Joonis 101.

Edasisel käsitlusel eeldame, et vee kuupmeetri kaal on $1000 \text{ kg} = 1 \text{ tonn}$.

Näide. Leida rõhumine paisule, millel on trapetsi kuhu paralleelsete alustega 40 m ja 15 m ja kõrgusega 8 m. Paisu ülemine alus asub vee pinnal.

Lahendus. Valemist (3) saame: $P = 1000 \int_0^8 h \cdot ds$.

Selle integraali arvutamiseks tuleb vabalt võetava riba pindala väljendada h kaudu. Jooniselt 101 näeme: $ds = CD \cdot dh$.

Aga

$$CD = CF + FD = CF + 15.$$

Kolmnurkade AGE ja CGF sarnasusest leiame:

$$\frac{CF}{AE} = \frac{GK}{GL} \text{ ehk } \frac{CF}{25} = \frac{8-h}{8}, \text{ millest } CF = \frac{25(8-h)}{8}.$$

Järelikult

$$CD = \frac{25(8-h)}{8} + 15 = \frac{320 - 25h}{8} = 40 - \frac{25}{8}h.$$

Niiviisi leiame:

$$ds = (40 - \frac{25}{8}h)dh, \quad P = 1000 \int_0^8 (40 - \frac{25}{8}h)h dh = 746 \frac{2}{3} t.$$

Harjutusi.

1. Leida pindala, mida piiravad sirged $y = 5x$, $x = 2$ ja telg OX .

Vastus: 10.

2. Arvutada pindala, mida piiravad parabool $y^2 = 4x$, telg OX ja sirged $x = 4$ ja $x = 9$.

Vastus: $25\frac{1}{3}$.

3. Leida pindala, mida piiravad võrdhaarne hüperbool $xy = a^2$, telg OX ja sirged $x = a$ ja $x = 2a$.

Vastus: $a^2 \ln 2$.

4. Leida pindala kuupparabooli $y = x^3$ ja sirge $y = 2x$ vahel.

Vastus: 2.

5. Leida pindala, mida piiravad parabool $y^2 = 2(x - 4)$ ja sirge $x = 3y$.

Vastus: $\frac{2}{3}$.

6. Leida pindala parabooli $x^2 - 9y = 0$ ja sirge $x - 3y + 6 = 0$ vahel.

Vastus: $13\frac{1}{2}$.

7. Integreerimise abil arvutada ringi $x^2 + y^2 = a^2$ pindala.

Vastus: πr^2 .

8. Leida pöördparaboloidi ruumala, mis moodustub parabooli $y^2 = 4ax$ kaare pöörlemisel ümber telje OX koordinaatide alguse ja punkti (x_1, y_1) vahel.

Vastus: $2\pi ax_1^2$.

9. Leida integreerimise teel koonuse ruumala, mis tekib sirge $4x - 5y + 3 = 0$ koordinaattelgede vahel asuva lõigu pöörlemisel ümber telje OX .

Vastus: $\frac{9}{100}\pi$.

10. Leida keha ruumala, mis tekib sinusoidi $y = \sin x$ koordinaatide alguse ja punkti $(\pi, 0)$ vahel asuva kaare pöörlemisel ümber telje OX .

Vastus: $\frac{1}{2}\pi^2$.

11. Leida keha ruumala, mis tekib aheljoone

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

punktide $x = 0$ ja $x = b$ vahel asuva kaare pöörlemisel ümber telje OX .

Vastus: $\frac{\pi a^3}{4} \left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$.

12. Tung, mis on tarvilik metallist lati venitamiseks pikkuselt a pikkuseni $a + x$, võrdub $\frac{kx}{a}$, kus k on jääv suurus. Leida töö, mis kulub lati venitamiseks pikkuselt a pikkuseni b .

Vastus: $\frac{k(b-a)^2}{2a}$.

13. Gaas on paigutatud silindrilisse anumasse, milles on liikuv kolb pindalaga A . Lähtudes Boyle-Mariotte'i seadusest $pv = k$, arvutada gaasi rõhumise töö ruumala suurenemisel v_1 -st v_2 -ni.

Vastus: $k \ln \frac{v_2}{v_1}$.

Juhis. Gaasi rõhumine kolvile on võrdne pA , kus p on eri rõhk, s. o. rõhumine pinnauhiku kohta. Kolvi väljatõukamisel kaugu-

sele dx elementaartöö võrdub $pA dx$. Kuid $A dx$ on gaasi ruumala dv juurdekasv. Järelikult $pA dx = \frac{k}{v} dv$ ja tööd väljendab integraal $\int_{v_1}^{v_0} \frac{k}{v} dv$.

14. Newtoni seaduse põhjal tõmbetung on pöördvõrdeline kauguse ruuduga. Paigalseisev materiaalne punkt tõmbab teist punkti, mis sirgjoonelisel teel nihkub esimese punkti suunas kauguselt r_1 kaugusele r_2 . Määrata tõmbetungi töö.

Vastus: $\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$, kus μ on võrdetegur.

15. Arvutada rõhumine ristküliku-kujulisele plaadile, mille alus on 8 cm, kõrgus 12 cm ja mis on paigutatud vette vertikaalselt nii, et plaadi ülemine alus on 5 cm allpool vaba veepinda.

Vastus: 1056 g.

16. Arvutada rõhumine kolmnurga-kujulisele plaadile, mille alus on 10 cm, kõrgus 4 cm ja mis on paigutatud vette vertikaalselt nii, et kolmnurga tipp asub vee pinnal.

Vastus: $53\frac{1}{3}$ g.

17. Leida rõhumine kolmnurga-kujulisele plaadile, mille alus on 8 cm, kõrgus 6 cm ja mis on paigutatud vette nii, et tipp asub alusest ülalpool ja on allpool vaba veepinda 3 cm võrra.

Vastus: 168 g.

18. Paraboolse segmendi kujuga plaat, mille alus on 15 cm ja kõrgus 3 cm, on paigutatud vertikaalselt vette niiviisi, et segmendi tipp asub vee pinnal. Määrata plaadile mõjuv rõhumine.

Vastus: 54 g.

XI peatükk.

Esimese järgu diferentsiaalvõrrandid eraldatavate muutujatega.

§ 95. **Definitsioonid.** Diferentsiaalvõrrandiks nimetakse võrrandit, mis sisaldab otsitava funktsiooni tuletisi või diferentsiaale. Nii on võrrand kujul

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

diferentsiaalvõrrand. Diferentsiaalvõrrandis on „tundmatuks“ ehk „otsitavaks“ argumendi x funktsioon y . Lahendada diferentsiaalvõrrand — see tähendab leida funktsioon y , mis rahuldaks antud võrrandit, s. o. mille asetamine diferentsiaalvõrrandisse y -i asemele muudab võrrandi samasuseks. Näiteks ülaltoodud võrrandi lahendiks osutub funktsioon $y = \sin x$. Tõepoolest, asendades võrrandi (1) pahempoolses osas y funktsiooniga $\sin x$, saame:

$$(\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x,$$

s. o. pahempoolses osas saame nulli ja võrrand muutub samasuseks $0 = 0$.

Funktsiooni, mis on diferentsiaalvõrrandi lahendiks, nimetatakse võrrandi integraaliks, aga lahendi leidmise protsessi ennast nimetatakse diferentsiaalvõrrandi integreerimiseks.

Tehakse vahet diferentsiaalvõrrandi eri- ja üldintegraali ehk eri- ja üldlahendi vahel.

Nii funktsioon $y = \sin x$ on võrrandi (1) eriintegraal; tema üldintegraaliks on funktsioon

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

kus C_1 ja C_2 on vabalt võetud konstandid. On kerge veenduda, et selle funktsiooni asetamine võrrandisse x -i asemele, muudab võrrandi samasuseks $0 = 0$.

Võrrandit (1) nimetatakse teise järgu võrrandiks, sest ta sisaldab teise järgu tuletist. Kui võrrand sisaldab ainult esimese järgu tuletist, siis nimetatakse teda esimese järgu võrrandiks.

Diferentsiaalvõrrandeid on väga erinevatesse tüüpidesse kuuluvaid. Meie piirdume lihtsaimat tüüpi esimese järgu diferentsiaalvõrranditega, nõndanimetatud eraldatavate muutujatega võrranditega (§ 97).

Algul lahendame mõned ülesanded, kus rakendatakse diferentsiaalvõrrandeid.

§ 96. Näiteid ülesannetest, mis lahenduvad diferentsiaalvõrrandite abil.

1. Leida kõvera võrrand, kui puutuja tõus igas kõverjoone punktis on kaks korda suurem selle punkti abstsissist.

Lahendus. Ülesande tingimuste põhjal koostame võrrandi:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

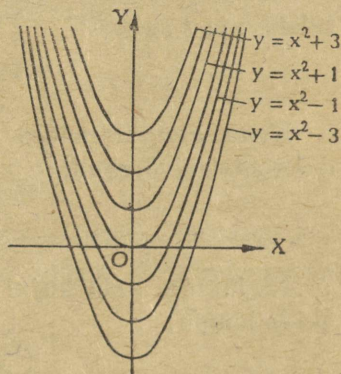
Korrutades võrrandi mõlemad osad dx -ga, saame:

$$dy = 2x dx.$$

Integreerime nüüd liikmete kaupa saadud võrrandi:

$\int dy = \int 2x dx$; leiame $y = x^2 + C$, kus C on integreerimiskonstant.

Leitud funktsioon on diferentsiaalvõrrandi üldintegraal. Üldintegraal sisaldab vabalt valitava konstandi C . Sel viisil leidsime mitte ühe funktsiooni, vaid lugemata hulga funktsioone, mis erinevad üksteisest konstandi C väärtuselt. Geomeetriliselt see tähendab, et saime mitte ühe kõvera, vaid kõverate parve, mis vastavad konstandi C mitmesugustele väärtustele (joonis 102).



Joonis 102.

Kui ülesandes oleks veel öeldud, et kõverjoon peab läbima kindlat punkti tasapinnal, näiteks punkti $(2, 3)$,

siis oleksime saanud üheainsa lahendi, sest ainult üks parabool paraboolide $y = x^2 + C$ parvest rahuldaks seda täiendavat tingimust. Tõepoolest, koordinaadid $(2, 3)$ peavad rahuldama otsitava kõvera võrrandit, kuid see on võimalik ainult ühel kindlal C väärtusel, mille leiame, kui asendame kõverate parve võrrandis muutujad koordinaatidega $(2, 3)$; kui see on tehtud, saame: $3 = 4 + C$, millest $C = -1$, ja otsitava kõvera võrrand oleks:

$$y = x^2 - 1.$$

Nagu öeldakse, leidsime C väärtuse algtingimuste põhjal.

2. Punkt väljub paigalolekust ja ajamomendil t liigub kiirusega $v = gt$, kus g on jääv suurus. Leida punkti liikumise seadus, s. o. leida punkti liikumise tee s ja aja t vahele seos.

Lahendus. Nagu teada (§ 46), kiirus v on tee s tuletis aja t suhtes:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Kuna aga ülesandes on antud, et $v = gt$, siis saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{ds}{dt} = gt.$$

Kirjutades seda kujul $ds = gt dt$, integreerime võrrandi osade kaupa:

$$\int ds = \int gt dt,$$

millest saame: $s = \frac{1}{2}gt^2 + C$.

Konstandi C leidmiseks tähendame, et kui $t = 0$, siis ka $s = 0$. Asetades need väärtused saadud lahendisse, leiame: $C = 0$.

Järelikult otsitud liikumise seadus väljendub funktsioonina

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

3. Keha jahtumise kiirus õhus on võrdeline keha temperatuuri ja õhu temperatuuri vahega. Õhu temperatuur on 20° C. On teada, et 20 minuti kestel keha jahtub 100° -st 60° -ni. Missuguse aja kestel keha jahtub 30° -ni?

L a h e n d u s. Jahtumise kiirus on temperatuuri muutumise kiirus aja suhtes ja sellepärast väljendub tuletise $\frac{dT}{dt}$ (§ 47) kujul, kus T on keha temperatuur ja t — aeg.

Teisest küljest, ülesandes antud jahtumise seaduse põhjal jahtumise kiiruse võib esitada avaldisega

$$k(T - 20),$$

kus k on võrdetegur.

Võrdsustades kaks avaldist, mis määravad keha jahtumise kiiruse, saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20).$$

Kirjutades seda kujul

$$\frac{dT}{T - 20} = k dt$$

ja integreerides liikmete kaupa, saame: $\ln(T - 20) = kt + C$.

Logaritmi definitsiooni põhjal võime kirjutada saadud võrduse nii:

$$T - 20 = e^{kt + C}$$

ehk

$$T - 20 = e^{kt} \cdot e^C.$$

Tähistades $e^C = c$, saame:

$$T - 20 = ce^{kt}.$$

Leitud lahenduses suuruste c ja k väärtused on veel tundmata. c määramiseks võtame arvesse, et kui $t = 0$, siis $T = 100^\circ$. Asendades need väärtused, saame $80 = ce^0$, mis annab $c = 80$.

Järelikult saame:

$$T - 20 = 80e^{kt}. \quad (A)$$

Jäeb määrata k väärtus. On teada, et 20 minuti kestel keha jahtub 60° -ni, s. o. kui $t = 20$, siis temperatuur $T = 60$. Sel viisil saame võrduse:

$$40 = 80e^{20k},$$

millest võime määrata k . Kuid selle asemel määrame e^k , leiame:

$$e^{20k} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \text{ ja } e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Nüüd võime kirjutada võrduse (A) järgmisel kujul:

$$T - 20 = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}. \quad (B)$$

Seega leidsime võrduse, mis määrab temperatuuri T muutumise olenevalt aja t muutumisest.

Et vastata ülesandes esitatud küsimusele, tuleb kasutada toodud võrdust, määrata t väärtus, kui $T = 30$.

Võttes võrduses (B) $T = 30$, saame:

$$10 = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},$$

millest $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$; järelikult $\frac{t}{20} = 3$ ja $t = 60$.

Seega keha jahtub temperatuurini 30° tunni kestel.

4. On 100 l soolalahust, mis sisaldab 10 kg lahustatud soola. Reservuaari, milles asetseb lahus, voolab vett kiiru-

sega 3 l minutis ja segu voolab reservuaarist välja sama-
 suguse kiirusega, kusjuures kontsentratsioon hoitakse sega-
 mise abil ühtlasena. Kui palju soola sisaldab lahus 1 tunni
 möödumisel?

L a h e n d u s. Olgu soola hulk, mis sisaldub reservuaar-
 ris t minuti möödumisel, x . Siis kontsentratsioon c on:

$$c = \frac{x}{100} \text{ kg 1 l kohta.}$$

Soola vähenemise kiirus reservuaaris ajamomendil t
 väljendub tuletisena $\frac{dx}{dt}$. Teisest küljest, kuna lahus voolab
 reservuaarist välja kiirusega 3 l minutis, siis sama soola
 hulga muutumise kiirust määrab avaldis $\frac{3x}{100}$. Olenevalt sel-
 lest, et x on t kahanev funktsioon, tuletis $\frac{dx}{dt}$ on negatiivne
 suurus; saame võrduse

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}$$

(võrduse parempoolses osas on x positiivne suurus).

Saadud võrduse võib kirjutada ümber kujul

$$\frac{dx}{x} = -0,03 dt.$$

Integreerides osade kaupa, saame: $\ln x = 0,03t + C$.

Kui $t = 0$, siis soola hulk $x = 10$; leitud avaldisest
 saame: $\ln 10 = C$.

Sel viisil saame võrduse, mis määrab soola hulga x
 t minuti möödumisel: $\ln x = -0,03t + \ln 10$.

Võtame $t = 60$, leiame soola hulga, mis jääb reservu-
 aari tunni möödumisel: $\ln x = -1,8 + \ln 10$.

Kasutades naturaalogaritmid tabelit, saame:

$$x = 1,654 \text{ kg.}$$

§ 97. Diferentsiaalvõrrandid eraldatavate muutujatega.

Kui mitmesuguste teisendamiste kaudu võib esitada diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\varphi(y)dy = f(x)dx, \quad (1)$$

siis saame võrrandi eraldatud muutujatega. Võrrandi ülaltoodud kujule taandumise protsessi nimetatakse muutujate eraldamiseks. Niisuguse võrrandi lahendamine toimub mõlema osa integreerimise teel. Nii, integreerides võrrandi (1), leiame üldise lahendi

$$\int \varphi(y)dy = \int f(x)dx + C, \quad (2)$$

kus C on vabalt võetav konstant.

Võrrandi

$$\varphi(y)dy = f(x)dx \quad (1)$$

mõlema osa integreerimise võimalust, vaatamata sellele, et nad väljenduvad erinevate muutujate kaudu, võib põhjendada järgmisel viisil.

Võrrandi (1) parempoolset osa võime vaadelda kui mõne meie tundmatu funktsiooni $F(x)$ diferentsiaali, mis oleneb argumentidest x . Selle funktsiooni leiame avaldise $f(x)dx$ integreerimise kaudu:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Võrrandi (1) vasempoolset osa võime vaadelda mõne argumentidest y oleneva funktsiooni $\Phi(y)$ diferentsiaalina, selle funktsiooni võime määrata, integreerides avaldise $\varphi(y)dy$:

$$\Phi(y) = \int \varphi(y)dy.$$

Kuid vaadeldava diferentsiaalvõrrandi mõtte järgi y on x -i mingisugune funktsioon; järelikult $\Phi(y)$ võime vaadelda kui argumenti x liitfunktsiooni, funktsiooni $\Phi(y)$ tuletis

argumendi x suhtes määratakse avaldisega $\Phi'(y)y'$ (liit-funktsiooni tuletise valemi järgi § 59), diferentsiaal aga avaldisega $\Phi'(y)y'dx$. Kuid, põhjenedes integraali (määratu) definitsioonile, $\Phi'(y) = \varphi(y)$ ja korrutis $y'dx$ diferentsiaali definitsiooni põhjal on dy , järelikult $\Phi'(y)y'dx = \varphi(y)dy$, s. o. avaldis $\varphi(y)dy$ osutub argumendi x mõnesuguse funktsiooni diferentsiaaliks. Niiviisi võrrand (1) väljendab argumendi x kahe funktsiooni diferentsiaalide võrdsust. Kui kahe funktsiooni diferentsiaalid on võrdsed, siis funktsioonid ise erinevad teineteisest konstantse liiditava võrra ja sellepärast võime kirjutada:

$$\int \varphi(y)dy = \int f(x)dx + C. \quad (2)$$

Võrrandid eraldatavate muutujatega, mis ei ole antud nii lihtsal kujul kui võrrand (1), võib sageli tuua sellele kujule, kasutades alamaltoodud muutujate eraldamise eeskirja.

Esimene samm. Muudame võrrandi kõik liikmed ühenimelisteks, jätame selle ühise nimetaja ära ja, kui võrrand sisaldab tuletisi, korrutame argumendi diferentsiaaliga.

Teine samm. Ühendame kõik liikmed, mis sisaldavad argumendi diferentsiaali, ja samuti toimime liikmetega, mis sisaldavad funktsiooni diferentsiaali. Kui pärast seda funktsioon omandab kuju

$$XY dx = X_1Y_1 dy,$$

kus X, X_1 on ainult x -i funktsioonid ja Y, Y_1 ainult y -i funktsioonid, siis võib anda võrrandile kuju (1), jagades kõiki liikmeid korrutisega X_1Y .

Kolmas samm. Integreerime võrrandi mõlemad osad [valem (2)].

Näide. Integreerida võrrand

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = ax.$$

Lahendus.

Esimene samm.

$$(1 - x^2)dy + xy dx = ax dx.$$

Teine samm.

$$x(y - a)dx + (1 - x^2)dy = 0, \quad \frac{x dx}{1 - x^2} + \frac{dy}{y - a} = 0.$$

Kolmas samm.

$$\int \frac{x dx}{1 - x^2} + \int \frac{dy}{y - a} = \ln c, \quad -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + \ln(y - a) = \ln c,$$

kus C on esitatud kujul $\ln c$,

$$\frac{y - a}{\sqrt{1 - x^2}} = c; \quad y = a + c \sqrt{1 - x^2}.$$

Harjutusi.

Integreerida järgmised võrrandid:

1. $y dx - x dy = 0$. Vastus: $y = cx$.
2. $(1 + y) dx - (1 - x) dy = 0$. Vastus: $(1 + y)(1 - x) = c$.
3. $(1 + x)y dx + (1 - y)x dy = 0$. Vastus: $\ln xy + x - y = c$.
4. $(x^2 - yx^2) \frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$. Vastus: $\frac{x + y}{xy} + \ln \frac{y}{x} = c$.
5. $x^2 dy + (y - a) dx = 0$. Vastus: $y - a = ce^{\frac{1}{x}}$.
6. $(1 + y^2) dx - x^{\frac{1}{2}} dy = 0$. Vastus: $2\sqrt{x} - \arctg y = c$.
7. $dy + y \operatorname{tg} x dx = 0$. Vastus: $y = c \cos x$.
8. $\cos x \sin y dy - \cos y \sin x dx = 0$. Vastus: $\cos y = c \cos x$.
9. Leida kõvera võrrand, kui puutuja tõus kõvera mistahes punktis on $3x - 2$.

$$\text{Vastus: } y = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

10. Leida punkti (0, 3) läbiva kõvera võrrand, kui on teada, et puutujal kõvera mistahes punktis on tõus $x^2 + 5x$.

$$\text{Vastus: } y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3.$$

11. Leida punkti (1, 1) läbiva kõvera võrrand, kui on teada, et puutujal kõvera mistahes punktis tõus on võrdeline punkti ordinaadi ruuduga.

$$\text{Vastus: } k(x-1)y - y + 1 = 0, \text{ kus } k \text{ on võrdetegur.}$$

Oletades, et $s = 0$, kui $t = 0$, leida seos s ja t vahel, teades, et kiirus on võrdne:

12. Jääva suurusega v_0 .

$$\text{Vastus: } s = v_0 t.$$

13. $m + kt$.

$$\text{Vastus: } s = mt + \frac{1}{2}kt^2.$$

14. $3 + 2t - 3t^2$.

$$\text{Vastus: } s = 3t + t^2 - t^3.$$

15. Paigalseisust väljuva keha kiirus on t sekundi möödumisel $5t^2 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$. Määrata: 1) kui kaugel on keha väljumispunktist 3 sek. möödumisel; 2) kui pika aja kestel läbib keha 360 m, arvates väljumispunktist.

$$\text{Vastus: } 1) 45 \text{ min.}; 2) 6 \text{ sek.}$$

16. Leida keha liikumise seadus, kui keha liigub kiirusega, mis on võrdeline läbitud teega, kui on teada, et keha läbib 10 sekundiga 100 m ja 15 sekundiga 200 m.

$$\text{Vastus: } s = 25 \cdot (2)^{\frac{t}{5}}.$$

17. Öhu temperatuur on 15°C . On teada, et 30 minuti kestel keha jahtub 90° -st 40° -ni. Missugune on keha temperatuur tund aega pärast esialgset mõõtmist?

$$\text{Vastus: } 23\frac{1}{3}^\circ \text{C}.$$

J u h i s. Lahendamise viis, nagu näites 3 § 96.

18. Mõnesuguse radioaktiivse lagunemise aktiivsus on võrdeline oma vähenemise kiirusega. Leida selle aktiivsuse sõltuvus ajast, kui on teada, et 4 päeva kestel ta vähenes pooleni võrreldes endisega.

$$\text{Vastus: } R = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{4} \cdot t}.$$

19. Reservuaaris on 100 l soolalahust, mis sisaldab 10 kg lahustatud soola. Vesi voolab reservuaari kiirusega 2 l minutis, kusjuures kontsentratsioon hoitakse ühtlane segamise abil. Kui palju soola on segus ühe tunni pärast?

Vastus: 3,9 kg.

TÄIENDUSI.

XII peatükk.

Polaarkoordinaadid.

§ 98. **Suunatud nurgad.** Esimeses peatükis vaadeldi punkti asendi määramise viisi sirgjooneliste koordinaatide abil. See viis ei ole ainus, on palju teisi punkti asendi määramise viise koordinaatide abil. Kõige rohkem tarvitatawaks peale ülalnimetatu osutub nõndanimetatud polaarkoordinaatide viis.

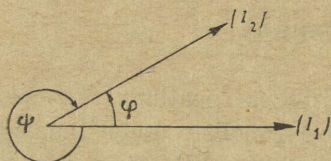
Punkti asendi määramine polaarkoordinaatide abil vajab suunatud nurkade mõiste tarvitusele võtmist. Eeldades, et see mõiste on lugejale põhiosas tuttav trigonomeetriast, peatume sellel vaid lühidalt.

Pöörlemine tasapinnal on võimalik kahes suunas. Kui ühte neist suundadest lugeda positiivseks, siis teine — vastupidine pöörlemise suund — on negatiivne. Harilikult võetakse positiivseks pöörlemise suunaks kellaosuti liikumisele vastupidine suund.

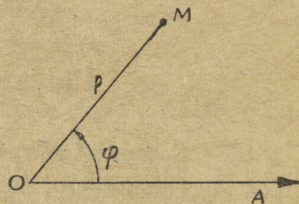
Vastavalt sellele võtame positiivseks nurgaks suundade (l_1) ja (l_2) vahel nurga, mis moodustub kiire (l_1) pöörlemisel vastupidiselt kellaosuti liikumisele kuni kiirega (l_2) ühtimiseni. Selle nurga φ -arvulisele suurusele, mis on

mõõdetud kraadi- või kaareühikuis, omistatakse märk + (näiteks $+30^\circ$ ehk $+\frac{\pi}{6}$ radiaani). Nurk ψ , mis saadakse pöörlemisel, alates (l_1) -st kuni (l_2) -ni vastupidises suunas (joonis 103), loetakse negatiivseks (-330° ehk $-\frac{11\pi}{6}$ radiaani).

Kaks suunda (l_1) ja (l_2) määravad mitte ühe, vaid luge-mata suure hulga nurki, sest selle või teise kiire — (l_1) või (l_2) pöörlemisel ühele või teisele poole täispöörete võrra kiir



Joonis 103.



Joonis 104.

tuleb tagasi algseisundisse. Nurgaks (l_1) ja (l_2) vahel võib siis võtta mitte ainult nurga φ (või ψ , vt. joonist 103), vaid igaihe nurkadest $\varphi + 2\pi k$, kus k on mistahes positiivne või negatiivne täisarv.

Tähendame, et suunatud nurkade liitmine ja lahutamine on analoogiline suunatud sirglõikude liitmisega ja lahutamisega (vt. § 2).

§ 99. Punkti polaarkoordinaadid tasapinnal. Asume nüüd punkti asendi määramisele tasapinnal polaarkoordinaatide abil.

Valime tasapinnal mingi punkti O , nimetame teda pooluseks ja joonestame antud suunas poolusest O kiire OA (joonis 104). Kiirt OA nimetatakse polaar-teljeks.

Olgu nüüd M tasapinnal mistahes punkt, mis ei ühti punktiga O . Märgime tähega ϱ sirglõigu OM pikkuse ja tähega φ nurga, mille see sirglõik moodustab polaarteljega ja mis loetakse sellest teljest selles või teises suunas ning varustatakse sellest olenevalt vastava märgiga. Niisiis, kooskõlas meie tähistamisega

$$\varrho = OM, \quad \varphi = \angle AOM.$$

On ilmne, et suurused ϱ ja φ täiesti määravad punkti M asendi tasapinnal; neid suurusi nimetatakse punkti M polaarkoordinaatideks.

Soovides näidata, et punkti M koordinaatideks on ϱ ja φ , kirjutatakse: $M(\varrho, \varphi)$.

Üldiselt tarvitusele võetud terminoloogia järgi ϱ nimetatakse punkti M raadius-vektoriks ja nurka φ — polaarnurgaks.

On kerge näha, et tasapinna kõigi punktide saamiseks on küllaldane anda raadius-vektorile igasuguseid positiivseid väärtusi ja nurka φ muuta 0-st kuni 2π -ni, välja arvates väärtuse 2π ¹. Sellejuures mitte ainult ϱ ja φ väärtuste igale paarile vastab tasapinna ainus punkt, vaid ka tasapinna igale punktile vastab koordinaatide ϱ ja φ väärtuste ainus paar. Erandiks on vaid poolus, millele vastab nulliga võrdne raadius-vektor, aga polaarnurga φ väärtus on määratu.

Kuid väga sageli on sobiv loobuda kitsendustest, mida omistatakse suuruste ϱ ja φ muutumistele, ja eeldada, et ϱ -le võib anda ka negatiivseid väärtusi, aga nurgale φ igasuguseid, nii positiivseid kui negatiivseid väärtusi. Sel juhul tuleb punkti M vaadelda asetsevana teljel, mis läbib

¹ Kui $\varphi = 2\pi$, siis saaksime tasapinna samad punktid, mis siis, kui $\varphi = 0$, s. o. polaartelje.

punkte O ja M ja millel võib vabalt määrata positiivse suuna.

Harilikult määratakse positiivne suund sellel teljel nii: olgu antud nurk φ , pöörame selle nurga võrra polaartelje suuna; pööratud polaartelg määrab telje positiivse suuna, millel asub punkt M . Raadius-vektori ρ positiivsed väärtused mõõdame telje positiivses suunas, ρ negatiivsed väärtused — negatiivses suunas.

Olgu näiteks tarvis ehitada punkt M , mis on antud koordinaatidega $\rho = -4$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$.

Pöörates punkti O ümber polaartelje nurga $\frac{3\pi}{4}$ radiaani võrra kellaosuti liikumise suunas, saame telje, millel peab asetsema punkt M . Kuna raadius-vektor võrdub 4 negatiivse ühikuga, siis punkti M leiame ehitatud teljel, kui mõõdame poolusest 4 pikkusühikut suunas, mis on vastupidine noolega näidatud suunale (joonis 105).

Muidugi kui ρ ja φ võivad omandada mistahes positiivseid ja negatiivseid väärtusi, siis igale punktile tasapinnal vastab mitte ainult üks paar koordinaate. Näiteks äsja ehitatud punktile M vastavad koordinaadid:

$$\rho = 4, \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$\rho = -4, \varphi = \frac{5\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \varphi = -\frac{7\pi}{4};$$

$$\rho = -4, \varphi = -\frac{3\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \varphi = \frac{9\pi}{4};$$

$$\rho = -4, \varphi = \frac{13\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \varphi = -\frac{15\pi}{4};$$

$$\rho = -4, \varphi = -\frac{11\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \varphi = \frac{17\pi}{4}; \dots$$

$$\rho = -4, \varphi = \frac{21\pi}{4}; \dots$$

$$\rho = 4, \varphi = -\frac{23\pi}{4}; \dots$$

$$\rho = -4, \varphi = -\frac{19\pi}{4}; \dots$$

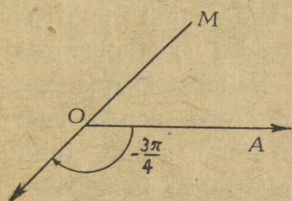
Üldse kui tasapinna punkti mõnda koordinaatide paari märgime ϱ_0 ja φ_0 , siis sellele punktile vastavad koordinaadid

$$\begin{aligned}\varrho &= \varrho_0, \\ \varphi &= \varphi_0 + 2k\pi\end{aligned}$$

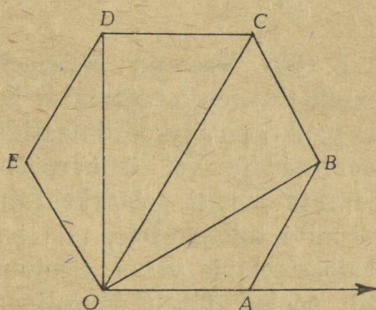
ja

$$\begin{aligned}\varrho &= -\varrho_0, \\ \varphi &= \varphi_0 + \pi + 2k\pi,\end{aligned}$$

kus k on mistahes positiivne või negatiivne arv või null.



Joonis 105.



Joonis 106.

N ä i d e. Määrata korrapärase kuusnurga tippude koordinaadid, kui kuusnurga külg on a , võttes pooluseks ühe kuusnurga tippudest ja polaarteljeks kuusnurga ühe külje, mis lähtub võetud tipust (joonis 106).

L a h e n d u s. Tipp A omab koordinaate $(a, 0)$. Punkti B koordinaatide määramiseks tähendame, et kolmnurk OAB on võrdhaarne, kusjuures kumbki nurk kolmnurga aluse OB juures on võrdne $\frac{\pi}{6}$ radiaaniga. Sellepärast kolmnurga kõrgus, mis on tõmmatud tipust A , on võrdne

$\frac{a}{2}$ -ga, aga sirglõik $OB = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}$. Järelikult tipu B koordinaadid on $(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$. Edasi OC kui ümberjoonestatud ringi diameeter võrdub $2a$ -ga ja $\angle BOC$ võrdub $\frac{\pi}{6}$ -ga. Seega punkti C koordinaadid on: $\rho = 2a$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. On kerge näha, et $OD = OB$ ja järelikult punkti D tarvis saame: $\rho = a\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Tipu E tarvis on meil: $\rho = a$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Lõpuks tipp O , mis ühtib poolusega, omab koordinaate: $\rho = 0$, φ määramata.

§ 100. Valemid üleminekuks polaarkoordinaatide süsteemilt ristkoordinaadistikule ja ümberpöördult. Sageli on tarvis punkti polaarkoordinaatide järgi leida sama punkti ristkoordinaadid või ümberpöördult, teades ristkoordinaate, määrata punkti polaarkoordinaadid. Selleks asume nende valemite tuletamisele, mis määravad seose nende koordinaatsüsteemide vahel. Seejuures piirdume ainult juhuga, mil poolus ühtib koordinaatide algusega ja polaarteljelje OX positiivse suunaga.

Võtame järelikult koordinaatide alguseks ristkoordinaadistikus pooluse O , teljeks OX — polaartelje ja teljeks OY sirge, mis on risti teljega OX , kusjuures positiivne suund teljel OY on valitud nii, et koordinaatnurk XOY võrduks $+\frac{\pi}{2}$ -ga.

Olgu punkti M koordinaadid $\rho > 0$ ja $\varphi > 0$. Siis täisnurksest kolmnurgast ONM (joonis 107) saame, võttes arvesse, et $ON = x$ ja $NM = y$:

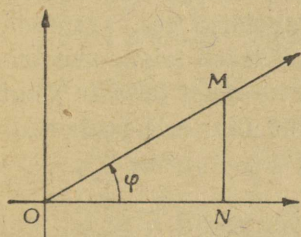
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Need valemid jäävad kehtivaks punkti M mistahes asendi puhul koordinaattelgedes suhtes.

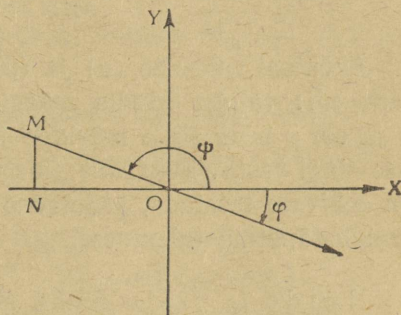
Võtame näiteks juhu, mil punkti M koordinaadid on $\varrho < 0$ ja $\varphi < 0$ (joonis 108).

Võtame tarvitusele abinurga $\psi = \varphi + \pi$, siis

$$\begin{aligned} x &= -\varrho \cos \psi, \quad y = -\varrho \sin \psi \quad (\text{siin } -\varrho > 0) \text{ ehk} \\ x &= -\varrho \cos(\pi + \varphi) = \varrho \cos \varphi, \quad y = -\varrho \sin(\pi + \varphi) = \\ &= \varrho \sin \varphi. \end{aligned}$$



Joonis 107.



Joonis 108.

On kerge veenduda valemite (1) kehtivuses ka kõigi muude võimalikkude koordinaatide ϱ ja φ antud väärtuste puhul.

Valemid ümberpööratud ülemineku tarvis tuletatakse valemist (1). Nendest vālemeist saame:

$$x^2 + y^2 = \varrho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho^2,$$

mis annab

$$\varrho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2)$$

ja edasi

$$\cos \varphi = \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\varrho} = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Märgi juuravaldise ees võib võtta vabalt, kuid siiski ühe ja sama märgi kõigis valemis (2) ja (3).

Kui võtta $\varrho > 0$, siis eelmised valemid omandavad järgmise kuju:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= +\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

Toodud valemist järgneb, et

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (4)$$

Arvutusi valemite (2) ja (3) järgi on kõige parem teostada nii: valides kindla märgi juuravaldise ees, arvutada ϱ ja $\cos \varphi$ ning $\sin \varphi$ märkide järgi määrata trigonomeetriilise ringi vastav kvadrant; nurga φ arvutamist tabelite järgi on sobivam teostada, kasutades valemit (4), mis peale selle annab täpsema tulemuse.

Näide 1. Leida punkti ristkoordinaadid x ja y , kui on antud: $\varrho = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Lahendus. Valemite (1) järgi leiame:

$$x = 5 \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$y = 5 \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Näide 2. Leida punkti polaarkoordinaadid, kui on antud selle punkti ristkoordinaadid: $x = \sqrt{3}$, $y = -1$.

Lahendus. Võttes juuravaldise ees märgi —, saame valemitest (2) ja (3):

$$\varrho = -\sqrt{3+1} = -2, \quad \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

Arvestades $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$ märke, leiame, et nurk on teise kvadrantis; järelikult

$$\varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

Kui oleksime võtnud tingimuseks vaadelda ainult positiivseid väärtusi, siis saaksime:

$$\varrho = +2, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2},$$

s. o.

$$\varphi = \frac{11\pi}{6}.$$

Näide 3. Leida kaugus kahe punkti $M_1(\varrho_1, \varphi_1)$ ja $M_2(\varrho_2, \varphi_2)$ vahel.

Lahendus. Tuntud tähistamisviisi järgi saame:

$$\begin{aligned} \overline{M_1 M_2}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\varrho_2 \cos \varphi_2 - \varrho_1 \cos \varphi_1)^2 + \\ &+ (\varrho_2 \sin \varphi_2 - \varrho_1 \sin \varphi_1)^2 = \varrho_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) + \\ &+ \varrho_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) - 2\varrho_1 \varrho_2 (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \\ &+ \sin \varphi_2 \sin \varphi_1) = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Sel viisil saime valemi, mis on tuntud trigonomeetriast.

§ 101. Kõverjoon ja tema võrrand polaarkoordinaatides.

Nagu juba teada, punkti asendi määramine ristkoordinaatide abil võimaldas määrata kindlaks joone võrrandi mõiste. Täiesti sama on rakendatav ka polaarkoordinaatide puhul.

Olgu antud kõver oma geomeetrilise omadusega, s. o. punktide geomeetrilise kohana. Vaatleme kõverat kui jooksvate koordinaatidega ϱ ja φ punkti M liikumise trajektoori. Siis geomeetrilisele omadusele, mis määrab joone, peab vastama analüütiline seos koordinaatide ϱ ja φ vahel, mis kujutabki endast joone võrrandit. Üldkujul joone võrrandi polaarkoordinaatides võib kirjutada kujul

$$\varrho = f(\varphi)$$

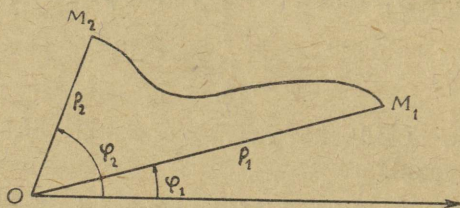
(võrrelda § 45), vaadeldes ϱ kui nurga φ funktsiooni.

Ei ole raske näha, et ümberpöördult, funktsiooni

$$\varrho = f(\varphi)$$

geomeetriline vaste on kõverjoon.

Tõepoolest, olgu $\varphi = \varphi_1$, siis raadius-vektor ϱ omandagu väärtuse ϱ_1 . Ehitame punkti $M_1(\varrho_1, \varphi_1)$ (joonis 109).



Joonis 109.

Anneme nurgale φ väärtuse φ_2 ja oletame, et vastav ϱ väärtus on ϱ_2 . Ehitame punkti $M_2(\varrho_2, \varphi_2)$. Hakkame nüüd muutma pidevalt φ väärtusi φ_1 -st kuni φ_2 -ni, nii, et φ muutudes omandab järjestikku kõik vahepealsed väärtused φ_1 ja φ_2 vahel. Raadius-vektor muutub sellejuures ϱ_1 -st kuni ϱ_2 -ni, sirglõik OM_1 hakkab pöörlema punkti O ümber; üheaegselt pöörlemisega tema pikkus muutub ja otspunkt M_1 joonestab mingisuguse kõverjoone.

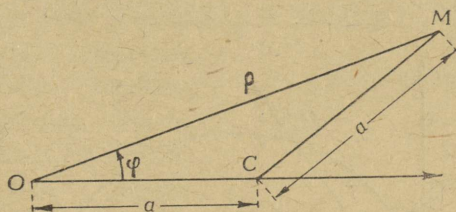
Niisiis ka polaarkoordinaatide puhul määrasime kindlaks, et kõverjoonele, mis on antud geomeetrilise omaduse kaudu, vastab võrrand $\varrho = f(\varphi)$ ja ümberpöördult, võrrandile $\varrho = f(\varphi)$ vastab kõverjoon.

Siit tekivad ülesanded: 1) on antud joon punktide geomeetrilise kohana; koostada selle joone võrrand; 2) on antud võrrand koordinaatide φ ja ϱ vahel; ehitada joon, mida see võrrand väljendab.

Vaatleme nüüd näiteid.

§ 102. Näiteid joone võrrandi koostamiseks polaarkoordinaatides ja kõvera ehitamiseks tema võrrandi järgi.

1. Ringjoon. Olgu ringjoone raadius võrdne a -ga. Asetame polaartelje ringjoone horisontaalsele diameetrile ja pooluse selle diameetri pahempoolsesse otspunkti. Ringjoone keskpunkti tähistame tähega C (joonis 110).



Joonis 110.

. Olgu M ringjoone mistahes punkt jooksvate koordinaatidega ρ ja φ . Kahe punkti vahelise kauguse valemi järgi (§ 100, näide 3) saame avaldise $\overline{CM}^2 = a^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi$, millest saame:

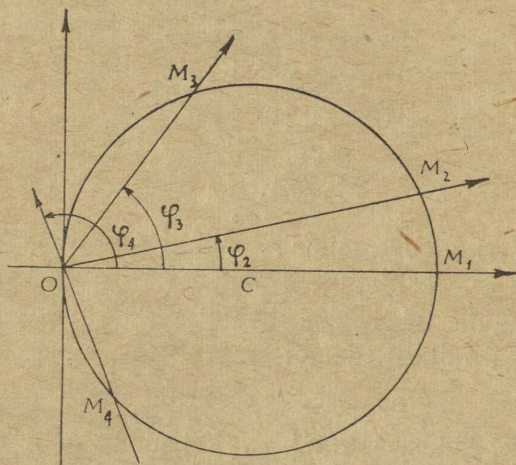
$$\rho = 2a \cos \varphi .$$

Vaatame, kuidas muutub ρ , kui punkt M nurga φ suurenemisel joonestab ringjoone.

Algame väärtusest $\varphi = \varphi_1 = 0$. ρ vastav väärtus on $2a \cos 0 = 2a$. Saame punkti M_1 (joonis 111).

Kui nurk φ suurenedes hakkab omandama positiivseid väärtusi φ_2, φ_3 jne., siis punkt M võtab asendid M_2, M_3 jne. Punkti M lähenemisel poolusele nurk φ hakkab läheneda nurgale $\frac{\pi}{2}$, nagu nähtub joonisest, $\rho = 2a \cos \varphi$ kahaneb, alates väärtusest $2a$ kuni 0-ni (sest $\cos \varphi$ kahaneb ühest nullini, kui φ kasvab 0-st kuni $\frac{\pi}{2}$ -ni). φ edasisel suurenemisel punkt M läheb ringjoone alumisse ossa ja võtab asendi telje OM negatiivses osas; järelikult ρ muutub negatiivseks

(näiteks raadius-vektor OM_4), mis on täielises kooskõlas võrrandiga $\rho = 2a \cos \varphi$, sest $\cos \varphi$, φ üleminekul nurgast $\frac{\pi}{2}$, muutub negatiivseks. Viimaks, kui φ läheneb π -le, jõuame tagasi punkti M_1 ; $\cos \varphi$ läheneb siis väärtusele -1 , järelikult ρ läheneb väärtusele $-2a$. Soovitame lugejale jälgida φ ja ρ muutumisi teiskordsel ringjoone ümberkäigul.



Joonis 111.

Võrrandi $\rho = 2a \cos \varphi$ oleksime võinud saada ka lähtudes ringjoone võrrandist ristkoordinaatides polaarkoordinaatidele ülemineku valemite abil. Need valemid on määratud kindlaks selleks juhuks, kui poolus ühtib ristkoordinaatide süsteemi koordinaatide algusega ja polaartelg ühtib teljega OX . Telgede OX ja OY niisuguse asetuse puhul ringjoone keskpunkti koordinaadid on $(a, 0)$ ja tema võrrandi kuju on:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Läheme nüüd üle polaarkoordinaatidele. Kuna $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, siis, asendades nende avaldistega x ja y väärtused ringjoone võrrandis, saame:

$$(\rho \cos \varphi - a)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi = a^2$$

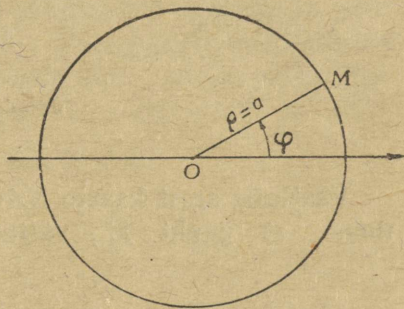
ehk

$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2a\rho \cos \varphi + a^2 = a^2,$$

mis annab meile jälle võrrandi $\rho = 2a \cos \varphi$.

Tuletame nüüd ringjoone võrrandi, asetades pooluse ringjoone keskpunkti. Nüüd, nurga φ mistahes väärtuse puhul, ringjoone punkti $M(\rho, \varphi)$ kaugus poolusest võrdub ringjoone raadiusega (joonis 112), s. o. φ mistahes väärtuse puhul saame

$$\rho = a.$$



Joonis-112.

Selles võrrandis ei esine koordinaati φ , aga see asjaolu just näitabki ringjoone punktide omadust — säilitada raadius-vektoril jäävat väärtust nurga φ iga väärtuse puhul.

Esitame võrrandi $\rho = a$ ristkoordinaadistikus. Teades, et $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (§ 100) leiame:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{ehk} \quad x^2 + y^2 = a^2;$$

saimegi tuntud ringjoone võrrandi raadiusega a ja keskpunktiga koordinaatide alguses (§ 18).

2. Kardioid. Ring, mille raadius on a , veereb libisemata mööda paigalseisvat sama raadiusega ringjoont. Leida selle kõverjoone võrrand, mida joonestab veereva ringjoone punkt M .

punktist N punktini M võrdub paigalseisva ringjoone kaare pikkusega samast puutepunktist N pooluseni:

$$\sphericalangle NAO = \sphericalangle NBM.$$

Kuna mõlema ringi raadiused on võrdsed, siis kesknurgad $\sphericalangle NC_2M$ ja $\sphericalangle NC_1O$ on võrdsed:

$$\sphericalangle NC_2M = \sphericalangle NC_1O.$$

Järelikult kujund OC_1C_2M on võrdhaarne trapets ja sellepärast sirglõigud C_1C_2 ja $OM = \varrho$ on paralleelsed. Tõmmates punktist N ristjoone sirglõigule OM , saame: $OP = PM$. Järelikult $\varrho = 2OP$. Kuna aga $OP = OQ + QP$ ja $OQ = = \frac{a}{2} \cos \varphi$, $QP = C_1N = \frac{a}{2}$, siis leiame:

$$\varrho = 2 \left(\frac{a}{2} \cos \varphi + \frac{a}{2} \right)$$

ehk

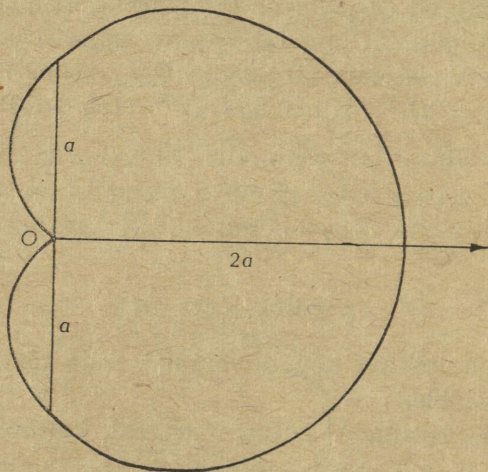
$$\varrho = a(1 + \cos \varphi).$$

Niisugune on otsitava kõvera võrrand. Seda kõverat nimetatakse kardioidiks.

Määrame, kasutades leitud võrrandit, kardioidi kuju.

Kui $\varphi = 0$, siis raadius-vektor $\varrho = 2a$. Punkt M asetseb polaarteljel kaugusel $2a$ poolusest (algseis). Võttes $\varphi = \frac{\pi}{2}$, saame $\varrho = a$. Kui $\varphi = \pi$, saame: $\varrho = 0$, s. o. punkt M ühtib poolusega. Kui $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, siis raadius-vektor $\varrho = a$. Nurga φ edasisel muutumisel punkt M joonestab kõvera ülejääva osa, tuleb oma esialgsesse seisu, kui $\varphi = 2\pi$, ja edasi hakkab teiskordselt liikuma sama kõverat mööda. Arvutades tabelite abil veel rea ϱ väärtusi, ehitades vastavad punktid ja ühendades need sujuva joone abil, saame kõvera, mis on kujutatud joonisel 115.

Kõverat, mille joonestab ringjoone punkt, kui ringjoon libisemata veereb paigalseisvat ringjoont mööda, tingimusel, et veerev ringjoon asetseks väljaspool paigalseisvat ringjoont, nimetatakse üldiselt epitsükloidiks. Veereva ja paigalseisva ringi diameetrite mitmesugustest suhetest olenevalt saadakse mitmesugused epitsükloidid. Niisiis kardiodid kuulub epitsükloidide hulka; see on epitsükloid, mis saadakse siis, kui veereva ja paigalseisva ringi diameetrid on võrdsed.



Joonis 115.

3. Spiraalid.

A. Arhimeedese spiraal. Arhimeedese spiraali nimetust kandva kõvera võrrandi kuju on:

$$\rho = a\varphi,$$

kus a on positiivne arv.

Määrame spiraali kuju tema võrrandi järgi.

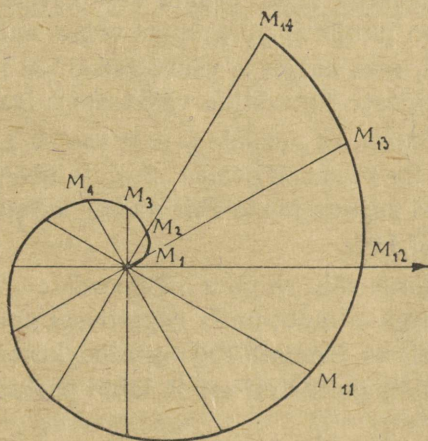
Jagame nurga 2π pooluse O juures mitmesse võrdsesse ossa, näiteks 12-sse, joonestades poolusest 12 kiirt (joo-

nis 116). Nende kiirte tõusunurgad polaar telje suhtes on vastavalt

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{12}, \quad \varphi_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{12}, \quad \varphi_3 = 3 \cdot \frac{2\pi}{12}, \quad \varphi_4 = 4 \cdot \frac{2\pi}{12}$$

jne. Leiame kõvera võrrandist raadius-vektorite vastavad väärtused:

$$\rho_1 = \frac{2\pi a}{12}, \quad \rho_2 = 2 \cdot \frac{2\pi a}{12}; \quad \rho_3 = 3 \cdot \frac{2\pi a}{12}; \quad \rho_4 = 4 \cdot \frac{2\pi a}{12}.$$



Joonis 116.

Võtame nüüd mingisuguse sirglõigu ja loeme selle pikkuse võrdseks $2\pi a$.

Kiirtel asetsevate spiraali punktide ehitamiseks tuleb märkida kiirtel, alates poolusest, sirglõigud, mis võrduvad $\frac{2\pi a}{12}$, $2 \cdot \frac{2\pi a}{12}$, $3 \cdot \frac{2\pi a}{12}$, jne. Sel viisil saame punktid M_1 , M_2 , M_3 jne.

Väärtustele $\varphi > 2\pi$ vastavate punktide ehitamise kohta tähendame järgmist. Oletame, et võtsime $\varphi = \frac{2\pi}{12} + 2\pi$. Leiame raadius-vektori vastava väärtuse:

$$\rho = a \left(\frac{2\pi}{12} + 2\pi \right) = \frac{2\pi a}{12} + 2\pi a.$$

See väärtus erineb esimesest vaadeldaval kiirel asetseva punkti ρ väärtusest $2\pi a$ võrra, s. o. meie poolt valitud sirglõigu pikkuse võrra. Pikendades nüüd esimest kiirt ja asetades sellele juba varem ehitatud punktist $\left(\frac{2\pi a}{12}, \frac{2\pi}{12} \right)$ sirglõigu pikkusega $2\pi a$, saame veel kõvera punkti. Joonisel 116 see on punkt M_{13} . Samuti võime ehitada punkte ka teistel kiirtel, sest nurga φ väärtused uutel punktidel erinevad varem ehitatud punktide väärtustest igakord 2π võrra.

Tähele pannes, et nurgale $\varphi = 0$ vastab punkt $(0, 0)$ ja nurgale $\varphi = 2\pi$ punkt $M_{12}(2\pi a, 2\pi)$, ja ühendades kõik ehitatud punktid sujuva joone abil, saame kõvera, mis on kujutatud joonisel 116.

Analoogiliselt võib ehitada arhimeedese spiraali graafiku, vaadeldes nurga φ muutumist negatiivses suunas. See kõver on sümmeetriline joonisel 116 esitatud kõveraga sirge suhtes, mis on risti polaarteljega ja läbib poolust.

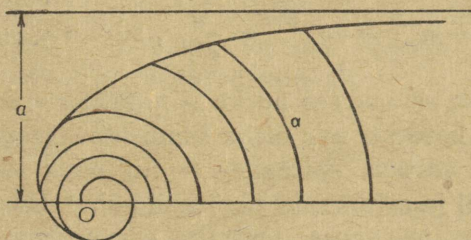
B. H ü p e r b o o l n e s p i r a a l $\rho = \frac{a}{\varphi}$ ($a > 0$). Paneme kõigepealt tähele, et nurga φ lähenemisel nullile raadiusvektor piiramatult kasvab. Kui $\varphi = \pi$, siis raadiusvektor $\rho_0 = \frac{a}{\pi}$; kui $\varphi = 2\pi$, siis raadiusvektor on kaks korda väiksem $\left(\rho = \frac{a}{2\pi} = \frac{\rho_0}{2} \right)$; kui $\varphi = 3\pi$, siis raadiusvektor võrdub $\frac{\rho_0}{3}$ -ga jne. Nurga piiramatul kasvamisel raadiusvektori väärtused lähenevad nullile, kuid kunagi selleni ei jõua. Tähendab, kõver läheneb piiramatult poolusele O , keerdues

pooluse ümber, kuid kunagi selleni mitte jõudes. Säärast punkti nimetatakse kõvera *a* s ü m p t o o d i l i s e k s p u n k t i k s.

Kõvera graafiku ehitamiseks kirjutame tema võrrandi ümber kujul:

$$a = \rho\varphi.$$

Sellest asjaolust, et raadius-vektori ja nurga φ korrutis jääb alati konstantseks suuruseks, järgneb spiraali punktide ehitamise viis.



Joonis 117.

Joonestame rea kontsentrilisi ringjooni, keskpunktiga pooluses, ja igal ringjoonel, selle lõikepunktist polaarteljega, möödame kaare, mille pikkus on *a*. Iga kaare pikkus võrdub vastava nurga φ ja ρ korrutisega, s. o. $\rho \cdot \varphi$; järelikult iga kaare otspunkt osutubki punktiks, mis kuulub spiraalile (joonis 117).

Selle järgi, kuidas suurenevad ringjoonte raadiused, kaar *a* muutub ikka lamedamaks, püüdes sirgestuda sirglõiguks, mis oleks risti polaarteljega. See näitab, et spiraali punktid nurga φ lähenedes 0-le lähenevad sirgele, mis on paralleelne polaarteljega ja on eemal sellest teljest kaugusel, mis võrdub *a*-ga. Spiraali punktide kaugus sellest sirgest kogu aja väheneb, kuid kunagi ei muutu nulliks. Sel juhul

öeldakse, et spiraal asümptoodiliselt läheneb nime-
tatud sirgele (võrrelda hüperbooli asümptootidega).

Nurga φ negatiivsetel väärtustel saame spiraali, mis on
sümmeetriline vaadeldud spiraaliga poolust läbiva ja polaar-
teljega ristuva sirgjoone suhtes.

C. Logaritmiline spiraal: $\rho = ae^{m\varphi}$ ($a > 0$,
 $m > 0$).

Kui $\varphi = 0$, siis raadius-vektor $\rho_0 = a$. Nurga φ posi-
tiivsete väärtuste puhul raadius-vektor $\rho = ae^{m\varphi} > \rho_0$.
Negatiivsete nurkade puhul ($\varphi = -\varphi'$, $\varphi' > 0$) saame:

$$\rho = ae^{m\varphi} = ae^{-m\varphi'} = \frac{a}{e^{m\varphi'}}, \text{ s. o. } \rho < \rho_0.$$

Siit järeldame, et muutes nurka φ negatiivses suunas, meie
ei saa enam kõverat, mis oleks sümmeetriline positiivsetele
nurkadele φ vastava spiraaliga — nii nagu see oli hüper-
boolse spiraali ja arhimeedese spiraali puhul. Lähtudes punk-
tist $(\rho_0, 0)$ ja andes nurgale φ negatiivsed väärtu-
sed ($\varphi = -\varphi'$), saame kõvera pikenduse. Kuna sel
puhul $\rho = \frac{a}{e^{m\varphi'}}$, siis nurga φ absoluutväärtuse piiramatul
suurenemisel raadius-vektor piiramatult väheneb ja kõver
keerub pooluse ümber, piiramatult temale lähenedes. Aval-
dis $\frac{a}{e^{m\varphi'}}$ ei muutu kunagi nulliks. Tähendab, ka logaritmilise
spiraali puhul poolus osutub asümptoodiliseks punktiks.

Logaritmilise spiraali graafiku ehitamisel võib toimida
järgmiselt. Kui polaarnurgale φ anda rida väärtusi, mis moo-
dustavad aritmeetilise jada, siis raadius-vektor omandab rea
väärtusi, mis moodustavad geomeetrilise jada:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, & \varphi_1 &= \varphi_1, & \varphi_2 &= 2\varphi_1, & \varphi_3 &= 3\varphi_1, & \varphi_4 &= 4\varphi_1 \dots \\ \rho &= ae^{m\varphi_0} = a, & \rho_1 &= ae^{m\varphi_1}, & \rho_2 &= ae^{m\varphi_2} = a(e^{m\varphi_1})^2, \\ \rho_3 &= ae^{m\varphi_3} = a(e^{m\varphi_1})^3, & \rho_4 &= ae^{m\varphi_4} = a(e^{m\varphi_1})^4, \dots \end{aligned}$$

Võtame kõigepealt järgmised φ väärtused:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{8}, \quad \varphi_3 = \frac{3\pi}{8}, \dots \quad \varphi_8 = \frac{8\pi}{8} = \pi.$$

Arvutame raadius-vektori vastavad väärtused:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= a, & \varrho_1 &= ae^{\frac{m\pi}{8}}, & \varrho_2 &= a(e^{\frac{m\pi}{8}})^2, & \varrho_3 &= a(e^{\frac{m\pi}{8}})^3, \dots \\ & & & & & & & \varrho_8 &= a(e^{\frac{m\pi}{8}})^8. \end{aligned}$$

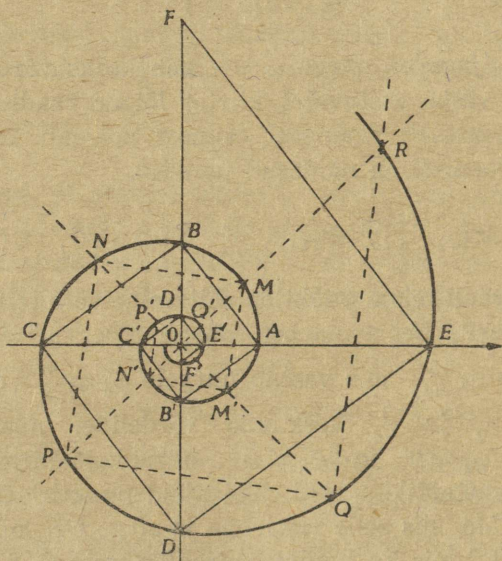
Niiviisi, jagades nurga $\varphi = \pi$ kaheksaks võrdseks osaks ja mõõtes välja vastavatel kiirtel lõigud raadius-vektorite arvutuse kohaselt, saame 9 esimest spiraali punkti (joonis 118). Joonisel on näidatud punktid

$$A(\varrho_0, 0), \quad M(\varrho_2, \frac{\pi}{4}), \quad B(\varrho_4, \frac{\pi}{2}), \quad N(\varrho_6, \frac{3\pi}{4}), \quad C(\varrho_8, \pi) \text{ jne.}$$

Rea spiraali teiste punktide ehitamine võib toimuda nüüd geomeetriselt. Sel otstarbel märgime, et $\varrho_4^2 = \varrho_0 \varrho_8$, s. o. raadius-vektor ϱ_4 , mis vastab nurgale $\varphi_4 = \frac{\pi}{2}$, on raadius-vektorite ϱ_0 ja ϱ_8 keskmine võrdeline, mis vastavad nurkadele $\varphi_0 = 0$ ja $\varphi_8 = \pi$ ¹. Järelikult sirglõigud AB ja BC on vastastikku risti. Kui nüüd punktist C püstitada ristjoon BC -le, siis selle ristjoone ja sirge OB lõikepunktiks on punkt D , mis ka kuulub spiraalile, sest $OC^2 = OB \cdot OD$ ehk $a^2(e^{m\pi})^2 = ae^{\frac{m\pi}{2}} \cdot OD$, millest saame $OD = ae^{\frac{3m\pi}{2}}$, s. o. sirglõik OD tõeliselt võrdub raadius-vektoriga, mis vastab polaarnurgale $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Punktist D sirglõiguga CD risti

¹ Võrdus $\varrho_4^2 = \varrho_0 \varrho_8$ väljendab geomeetriselise jada teatud omadust: geomeetriselise jada iga liige on temast mõlemal pool võrdseil kaugustel seisvate liimete keskmine proportsionaalne (keskmine võrdeline).

joonestatud sirge ja polaartelje lõikumisel saame punkti E , mis kuulub spiraalile jne. Niiviisi ehitame kuitahes palju spiraali punkte, mis asetsevad vastastikku ristsirgetel CE ja DB ja mis vastavad positiivsetele nurkadele φ . Teostades samasuguse ehituse negatiivsete nurkade φ suunas, saame samadel sirgetel kuitahes palju spiraali punkte (punktid B', C', D', E', F' joonisel 118).



Joonis 118.

Spiraali graafiku täpsemaks esitamiseks tuleb ehitada veel rida vahepealseid punkte. Seda võib teha näiteks nii:

Võtame juba arvutatud raadius-vektorite väärtused:

$\rho_2 = a \left(e^{\frac{m\pi}{8}} \right)^2$ ja $\rho_6 = a \left(e^{\frac{m\pi}{8}} \right)^6$. Neid raadius-vektoreid kujutavad sirglõigud OM ja ON asetsevad vastastikku ristsirgetel,

sest nurk ϱ_2 ja ϱ_6 vahel võrdub $\frac{6\pi}{8} - \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. Joonestame punktist N sirge, mis on risti sirglõiguga NM . Selle rist-sirge lõikumine sirgega, millel asetseb ϱ_2 , annab punkti P , mis kuulub spiraalile. Tõeliselt: $ON^2 = OM \cdot OP$ ehk

$$a^2 \left(e^{\frac{6m\pi}{8}} \right)^2 = ae^{\frac{2m\pi}{8}} \cdot OP, \text{ millest } OP = ae^{\frac{10m\pi}{8}}; \text{ nurk poolaar-}$$

telje ja sirglõigu OP vahel võrdub $\frac{10\pi}{8}$; järelikult OP kujutab raadius-vektorit, mis vastab sellele nurgale, ja punkt P asetseb spiraalil. Selle võttega ehitame kuitahes palju spiraali punkte, mis asetsevad joonisel 118 punktiiriga märgitud sirgetel — nii positiivsete nurkade φ (punktid M, N, P, Q, R) kui ka negatiivsete nurkade suunas (M', N', P', Q').

Ehitades küllaldase arvu punkte ja ühendades need sujuva joone abil, saame kõvera, mis on kujutatud joonisel 118.

Harjutusi.

1. Ehitada punktid: $A\left(5, \frac{\pi}{6}\right); B\left(5, -\frac{\pi}{6}\right); C\left(-5, \frac{\pi}{2}\right); D\left(-5, -\frac{\pi}{6}\right); E\left(6, \frac{\pi}{8}\right); F\left(4, \frac{10\pi}{6}\right); G\left(2, -\frac{4\pi}{3}\right); H\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$.

2. Leida kaugus punktide vahel: a) $A\left(4, \frac{5\pi}{12}\right)$ ja $B\left(5, \frac{\pi}{12}\right)$; b) $A\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$ ja $B\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$.

Vastus: a) 21; b) 5.

3. Leida kolmnurga pindala, kui kolmnurga üks tippudest asetseb pooluses, aga teised punktides: $\left(5, \frac{5\pi}{12}\right)$ ja $\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$.

Vastus: 10.

4. On antud punktid: $A\left(8, \frac{\pi}{3}\right); B\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$. Leida kaugus punk-

tist A kuni punktini, mis on sümmeetriline punktiga B polaartelje suhtes.

Vastus: 10.

5. Kui suured nurgad moodustab punkte $\left(1, \frac{7\pi}{36}\right)$ ja $\left(2, \frac{67\pi}{36}\right)$ ühendav sirge nende punktide raadius-vektoritega.

Vastus: $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{6}$.

6. Kahe polaarsüsteemi suhtes, millede teljed on paralleelsed, ühe ja sama punkti koordinaadid on: $\left(15, \frac{5\pi}{12}\right)$ ja $\left(8, \frac{\pi}{12}\right)$. Leida kaugus nende süsteemide pooluste vahel.

Vastus: 13.

7. Polaarkoordinaatide süsteemi suhtes on antud punktid:

$A\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(6, \frac{3\pi}{4}\right)$; $C\left(6, -\frac{5\pi}{4}\right)$; $D\left(-6, -\frac{5\pi}{4}\right)$; $E\left(-8, -\frac{11\pi}{6}\right)$.

Leida nende punktide ristkoordinaadid tingimusel, et ristkoordinaatide süsteemi algus ühtib poolusega ja abstsissstelg on suunatud polaarteljele.

Vastus: $A(2\sqrt{3}, 2)$; $B(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; $C(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$; $D(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; $E(-4\sqrt{3}, 4)$.

8. Ristkoordinaatide süsteemis on antud punktid: $A(-1, 1)$; $B(0, 2)$; $C(5, 0)$; $D(6, -8)$. Leida nende punktide polaarkoordinaadid samal tingimusel mis ülesandes nr. 7.

Vastus: $A\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$; $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$; $C(5, 0)$; $D\left[10, \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$.

9. Kuidas on asetatud punktid, millede polaarkoordinaadid rahuldavad ühte järgmistest võrdustest: a) $\rho = 2$; b) $\rho = \frac{\pi}{6}$; c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; d) $\varphi = 0$.

Vastus: a) Ringjoonel keskpunktiga pooluses ja raadiusega, mis võrdub 2-ga; b) ja c) kiirtel, mis väljuvad poolusest ja mis moodustavad polaarteljega nurgad 30° ja 90° ; d) polaarteljel.

10. Ehitada kõverad, mis on antud järgmiste võrranditega:

- | | | |
|--|------------------------------------|--|
| a) $\rho = a \sin \varphi$; | e) $\rho = a \sin^3 \varphi$; | i) $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$; |
| b) $\rho = a \cos 3\varphi$; | f) $\rho^2 = a^2 \sin 3\varphi$; | j) $\rho = a \operatorname{tg} 2\varphi$; |
| c) $\rho = a \sin 3\varphi$; | g) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$; | k) $\rho = \frac{2}{\varphi - 1}$. |
| d) $\rho = a \cos \frac{\varphi}{3}$; | h) $\rho = a(1 + \cos 2\varphi)$; | |

11. Alljärgnevate kõverate võrrandid, mis on antud ristkoordinaatide süsteemi suhtes, väljendada polaarkoordinaatides (poolus asetada ühte ristkoordinaatide süsteemi algusega ja polaartelg — abstsisssteljega):

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $xy = 7$; | c) $x^4 + x^2y^2 - a^2y^2 = 0$; |
| b) $x^2 + y^2 - 8ax - 8ay = 0$; | d) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. |

Vastus:

- | | |
|---|---|
| a) $\rho^2 \sin 2\varphi = 14$; | c) $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$; |
| b) $\rho = 8a(\cos \varphi + \sin \varphi)$; | d) $\rho^2 = \cos 2\varphi$. |

12. Avaldada ristkoordinaatides järgmiste kõverate võrrandid:

- a) ringjoon: $\rho = a \cos \varphi$ (vt. näidet 1 § 102);
 b) roos nelja lehega: $\rho = \sin 2\varphi$;
 c) kardiidid: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (vt. näidet 2 § 102).

Vastus:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 - ax = 0$; | b) $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$; |
| c) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. | |

13. Sirglõik OA , mille pikkus on a , pöörleb ümber punkti O . Punktist A on joonestatud ristjoon liikumatule sirgele OM , kusjuures ristjoon lõikab sirget punktis B . Punktist B on joonestatud ristjoon sirgele OA , kusjuures see ristjoon lõikab sirglõiku punktis P . Leida punkti P geomeetriline koht, võttes punkt O pooluseks ja sirge OM polaarteljeks.

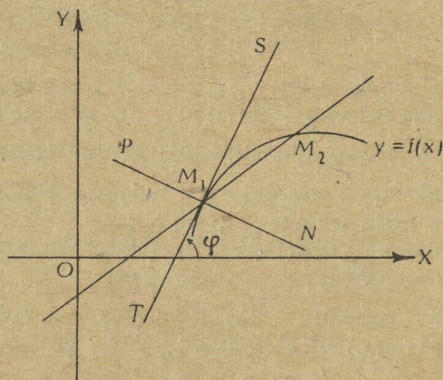
Vastus: $\rho = a \cos^2 \varphi$.

14. Punkt O asetseb ringjoonel raadiusega a . Liikumatu sirge OM läbib selle ringjoone keskpunkti. Punktist O väljub ringjoone kõõl OP_1 ja punktist P_1 joonestatakse ristjoon sirgele OM , mille lõikepunkt ristjoonega on Q . Punktist Q joonestatakse ristjoon sirgele OP_1 , kusjuures ristjoon lõikab sirget OP_1 punktist P . Leida punktide P geomeetriline koht. Punkt O võtta pooluseks ja sirge OM polaarteljeks.

Vastus: $\rho = 2a \cos^3 \varphi$.

Diferentsiaal- ja integraalarvutuse rakendusi geometrias.

§ 103. Tasapinnalise kõvera puutuja ja normaal. Meil on juba teada (§ 49), et kõvera puutujaks punktis $M_1(x_1, y_1)$ (joonis 119) tuleb lugeda sirget TS , mis on lõikaja M_1M_2 piirasendiks, millele lõikaja läheneb punkti M_2 piiramatul lähenemisel punktile M_1 .



Joonis 119.

On ka teada, et kui kõvera võrrand on $y = f(x)$, siis puutuja tõusunurga φ tangens telje OX suhtes punktis $M_1(x_1, y_1)$, s. o. puutuja tõus k_1 , määratakse funktsiooni $f(x)$ tuletise väärtusega antud punktis:

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_1).$$

Seepärast kõvera $y = f(x)$ puutuja võrrand punktis $M_1(x_1, y_1)$ kui niisuguse sirge võrrand, mis läbib antud punkti ja mille tõus on võrdne tuletisega $f'(x)$, on järgmine:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \quad (1)$$

Sirge NP , mis läbib puutepunkti M_1 risti puutujaga TS , nimetatakse kõvera normaaliks punktis M_1 . Kooskõlas ristseisu tunnusega (§ 15), normaali tõus k_2 on seotud puutuja tõusuga k_1 võrduse $k_1 k_2 = -1$ kaudu, millest, kuna $k_1 = f'(x)$, saame:

$$k_2 = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Sellepärast normaali võrrandi kuju on:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

ehk

$$x - x_1 + f'(x_1)(y - y_1) = 0. \quad (2)$$

Näide 1. Leida parabooli $y = x^2 - 5x + 6$ puutuja ja normaali võrrandid punktis, mille abstsiss on $x = 4$.

Lahendus. Leiame y -i väärtuse vastavalt abstsissi väärtusele $x = 4$, asendades kõvera võrrandis x arvuga 4:

$$y = 16 - 20 + 6 = 2.$$

Järelikult $x_1 = 4$ ja $y_1 = 2$. Puutuja tõusu leidmiseks tähendame, et $f'(x) = 2x - 5$ ja $f'(x_1) = f'(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3$. Asetades valemisse (1) x_1 , y_1 ja $f'(x_1)$ väärtused, saame puutuja võrrandi:

$$y - 2 = 3(x - 4) \quad \text{ehk} \quad 3x - y - 10 = 0.$$

Normaali võrrand punktis (4, 2), koostatud valemi (2) kohaselt, omandab kuju:

$$x - 4 + 3(y - 2) = 0 \quad \text{ehk} \quad x + 3y - 10 = 0.$$

Näide 2. Leida ellipsi puutuja ja normaali võrrandid punktis (x_1, y_1) .

Lahendus. Võtame ellipsi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja diferentsime võrrandi mõlemad pooled x -i suhtes, vaadel-
des y -t x -i funktsioonina ja y^2 kui x -i liitfunktsiooni (võr-
relda § 57 ja 59). Siis saame:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0;$$

siit määrame tuletise y' :

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Meil on tarvis leida tuletise väärtust punktis (x_1, y_1) ; ase-
tades x_1 x -i asemele ja y_1 y -i asemele tuletise avaldisse,
saame:

$$y' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Puutuja võrrand omandab sellepärast niisuguse kuju:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1);$$

korrutades võrrandi mõlemad osad $\frac{y_1}{b^2}$ -ga, saame:

$$\frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -\frac{xx_1}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2}$$

ehk

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Kuna punkt (x_1, y_1) asetseb ellipsil, siis $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$
ja puutuja võrrand omandab lõplikult järgmise kuju:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Normaali võrrandi leiame valemi (2) järgi:

$$x - x_1 - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (y - y_1) = 0.$$

Mõlema osa korrutamise-ga $\frac{y_1}{b^2}$ -ga anname võrrandile kuju:

$$\frac{(x - x_1) y_1}{b^2} - \frac{(y - y_1) x_1}{a^2} = 0.$$

Näide 3. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutuja ja normaali võrrandid punktis (x_1, y_1) .

Lahendus. Diferentsides hüperbooli võrrandi mõlemad pooled x -i suhtes, saame:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0, \text{ mis annab } y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Järelikult puutuja tõus punktis (x_1, y_1) võrdub $\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ ja puutuja võrrand on:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1).$$

Korrutades võrrandi mõlemad osad $\frac{y_1}{b^2}$ -ga, saame:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Kuna $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, siis hüperbooli puutuja võrrand omandab lõplikult kuju:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Koostame normaali võrrandi:

$$x - x_1 + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (y - y_1) = 0.$$

Korrutades võrrandit $\frac{y_1}{b^2}$ -ga, saame:

$$\frac{(x - x_1) y_1}{b^2} + \frac{(y - y_1) x_1}{a^2} = 0.$$

Näide 4. Koostada parabooli $y^2 = 2px$ puutuja ja normaali võrrandid punktis (x_1, y_1) .

L a h e n d u s. Diferentsides parabooli võrrandi, leiame:

$$2yy' = 2p, \text{ millest } y' = \frac{p}{y}.$$

Puutepunktis (x_1, y_1) tuletis võrdub $\frac{p}{y_1}$. Sellepärast parabooli puutuja võrrand on järgmine:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1),$$

ehk pärast võrrandi mõlema poole korrutamist y_1 -ga:

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1.$$

Kuna punkt (x_1, y_1) asetseb paraboolil, siis $y_1^2 = 2px_1$. Asendades puutuja võrrandis y_1^2 tema avaldisega x_1 kaudu, leiame lõplikult:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Normaalile saame võrrandi:

$$x - x_1 + \frac{p}{y_1} (y - y_1) = 0$$

ehk

$$(x - x_1)y_1 + p(y - y_1) = 0.$$

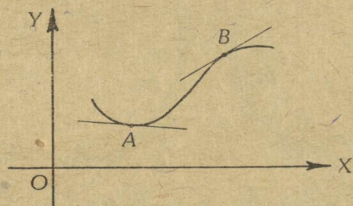
M ä r k u s. Me leidsime, et ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutujate võrrandi kujuks on vastavalt:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1; \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad yy_1 = p(x + x_1).$$

Neid võrrandeid on kerge meeles pidada: asendades neis x_1 x -ga ja y_1 y -ga, saame vastavalt ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrandid.

§ 104. Kõvera kumerus ja nõgusus. Üks elementidest, mis määravad kõvera kuju igas punktis, on tema kõveruse suund. Näiteks punktis A ja B joonisel 120 kõvera kõveruse suunad on erinevad. Me ütleme, et kõver, mis kuju-

tab funktsiooni $y=f(x)$, on vaadeldavas punktis pööratud kumerusega allapoole, kui kõver asetseb samale punktile vastavast kõvera puutujast kõrgemal (punkt A joonisel 120). Samuti ütleme, et kõver on pööratud nõgususega allapoole, kui kõver asetseb samale punktile vastavast kõvera puutujast madalamal (punkt B joonisel 120). Harilikult kõneldakse lihtsalt kõvera kumerusest ja nõgususest, mõeldes selle all kõvera kumerust ja nõgusust allapoole, mida teeme ka meie edasises käsitluses.



Joonis 120.

Püüame määrata nüüd analüütilise tunnuse, mille põhjal võib otsustada, kas kõver antud punktis on kumer või nõgus.

Väljendagu kõverat võrrand $y=f(x)$. Eeldame edasiseks, et funktsioonil $f(x)$ on kõigis punktides nii esimene kui ka teine tuletis.

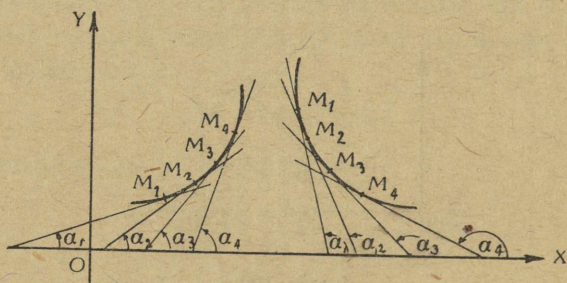
Vaatleme esiteks juhtu kõvera kumerusest. Joonisel 121 on esitatud kõvera kumeruse kaks võimalikku juhtu: kõver a) kujutab kasvavat funktsiooni, aga kõver b) — kahanevat. Võtame kõveratel a) ja b) rea punkte $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$, millele abstsissid moodustavad kasvava jada

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \dots,$$

ja igas punktis joonestame kõverale puutuja. Jälgime kõvera puutuja tõusu muutumise käiku puutepunkti edasinihkumisel kõverat mööda. Näeme, et nii ühel kui teisel kõveral, selle järgi, kuidas kasvab abstsiss x , nurk, mille moodustab puutuja teljega OX , suureneb

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$$

Kõvera *a*) puhul, mis kujutab kasvavat funktsiooni, nurk asub esimeses kvadrantis, aga kõvera *b*) puhul, mis kujutab kahanevat funktsiooni, — teises kvadrantis.



Joonis 121.

Kuna tangens argumenti suurenemisel ka suureneb, nagu see on teada trigonomeetriast, siis järelikult abstsissi x suurenemisel puutuja tõus ka kasvab¹:

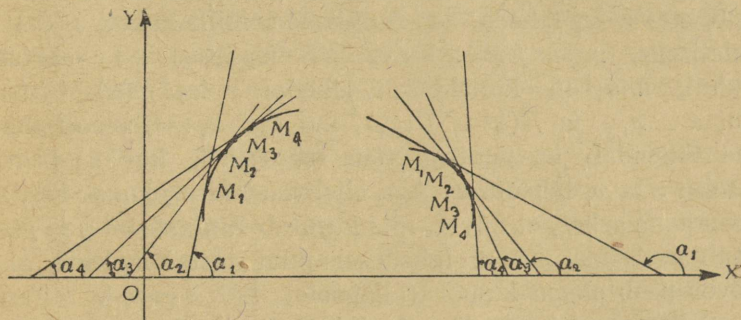
$$\operatorname{tg} a_1 < \operatorname{tg} a_2 < \operatorname{tg} a_3 < \operatorname{tg} a_4 < \dots$$

Kuid funktsiooni $y = f(x)$ kujutava kõvera puutuja tõus ei ole midagi muud kui funktsiooni $y = f(x)$ esimene tule-

¹ Joonise 121 teise kõvera nurgad a on suuremad kui $\frac{\pi}{2}$, nende nurkade tangensid on negatiivsed ja absoluutsuuruselt kahanevad. Järelikult tangens kui suhteline suurus kasvab.

tis $y' = f'(x)$. Järelikult kui kõver on suunatud kumerusega allapoole, siis esimene tuletis $y' = f'(x)$ kasvab.

Funktsiooni kasvamise ja kahanemise üle me otsustame tema tuletise märgi järgi (vt. § 71). Vaadeldaval juhul kasvavaks funktsiooniks osutub tuletis $y' = f'(x)$. Tähendab, tema tuletis, s. o. teine tuletis $y'' = f''(x)$, peab olema positiivne (või üksikutes punktides võrduma nulliga, võrrelda sellel puhul märkust §-is 70 enne näidet).



Joonis 122.

Kui asuda nüüd juhu vaatlemisele, mil kõver on nõgus allapoole, siis vaadeldes joonist 122, samuti kui ülalpool, tuleme otsusele, et abstsissi x suurenemisel juhtudel a) ja b)

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$$

ja

$$\operatorname{tg} a_1 > \operatorname{tg} a_2 > \operatorname{tg} a_3 > \operatorname{tg} a_4 > \dots$$

Teiste sõnadega, kõvera puutuja tõus kahaneb, s. o. tuletis $y' = f'(x)$ on kahanev funktsioon. Järelikult selle kahaneva funktsiooni tuletis, s. o. tuletise tuletis ehk teine tuletis $y'' = f''(x)$ on negatiivne (või üksikutes punktides võrdub nulliga).

Niisiis tegime kindlaks, et kui kõver $x = x_1$ puhul on kumer, siis funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis on positiivne või võrdne nulliga, $f''(x_1) \geq 0$, aga kui kõver on nõgus, siis teine tuletis on negatiivne või on võrdne nulliga, $f''(x_1) \leq 0$.

Nüüd võime kergesti lahendada selle paragrahvi alguses seatud ülesande kõvera kumeruse ja nõgususe analüütilise tunnuse leidmiseks vastavalt antud kõvera punktile.

Olgu $x = x_1$ puhul teine tuletis $f''(x_1) > 0$. See tähendab, et $x = x_1$ lähedal see funktsioon, mille suhtes $f''(x)$ on tuletiseks, s. o. $f'(x)$, kasvab. Sellepärast x -i väärtuste puhul, mis on küllaldaselt lähedal x_1 -le, $f'(x) > f'(x_1)$, kui $x > x_1$, ja $f'(x) < f'(x_1)$, kui $x < x_1$. Geomeetriliselt see tähendab, et puutuja tõus suureneb, kui x kasvab punkti $x = x_1$ läheduses. Aga siis, vaadeldes joonist 121, me veendume selles, et kõver, mis kujutab funktsiooni $y = f(x)$, peab asetsema $x = x_1$ läheduses puutujast kõrgemal, s. o. kõver peab olema kumer (allapoole), kui $x = x_1$ ¹.

Sellesarnased arutlused lubavad jõuda otsusele, et kui $f''(x_1) < 0$, siis $x = x_1$ puhul kõver, mis kujutab funktsiooni $y = f(x)$, on nõgus.

Niisiis analüütilist tunnust, mille järgi on võimalik otsustada kõvera kõveruse suuna üle, võib võtta kokku järgmiselt:

Kõver $y = f(x)$ on punktis $x = x_1$ suunatud kumerusega alla, kui $f''(x_1) > 0$, ja on suunatud nõgususega alla, kui $f''(x_1) < 0$.

§ 105. Käänupunktid. Sageli juhtub, et kõver, mida väljendab võrrand $y = f(x)$, on oma mõnedes osades kumer,

¹ Et seda hästi mõista, soovitatakse lugejal täita joonis 121, ehitades algul ainult puutujad vastavalt nurkadele $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \dots$. Siis on selgesti näha, et kõverat, mis oleks puutujaks kõveraks kõigi nende puutujate suhtes, tuleb joonestada pealpool puutujaid.

teistes nõgus. Näiteks kõver, mida kujutab joonis 123, on osades AB ja CD kumerusega suunatud allapoole, aga osas BC nõgususega allapoole.

Punktis, mis lahutab kumerat osa nõgusast, läheb kõver puutuja ühelt poolelt teisele poolele. Niisugune punkt kannab kõvera k ä ä n u p u n k t i nimetust. Joonisel 123 punktid B ja C on käänupunktideks.

Funktsiooni $y = f(x)$ muutumise iseloomu uurimiseks tuleb osata määrata, missuguste x -i väärtuste puhul kõver on kumer ja missuguste puhul nõgus, selleks aga on kasulik leida esijoones käänupunktid, sest need punktid eraldavad kõvera lõigud, kus kõver on kumer, lõikudest, kus kõver on nõgus, ja ümberpöördukt.

Olgu kõver antud võrrandiga $y = f(x)$. Eeldame, et funktsiooni $f(x)$ teine tuletis on vaadeldavas intervallis pidev ja võib muutuda nulliks ainult selle intervalli lõpliku arvu punktide puhul. Kuna käänupunktis kõver muudab kõveruse iseloomu vastupidiseks (kumeruse nõgususeks või ümberpöördukt, nõgususe kumeruseks), siis kooskõlas tulemustega, mis on saadud §-s 104, tuleme otsusele, et käänupunktist üleminekul teine tuletis muudab märgi vastupidiseks. Järelikult käänupunktis $f''(x) = 0$.

Ümberpöördukt, oletame, et $f''(x) = 0$ x -i mõnesuguse väärtuse puhul. Siis võib juhtuda, et vasemal ja paremal pool x -i vaadeldavast väärtusest teisel tuletisel on erinevad märgid. See tähendab, et vasemal ja paremal pool x -i vaadeldavast väärtusest kõveral $y = f(x)$ on erinevad kõveruse omadused; järelikult on vaadeldav punkt kõvera käänupunktiks.

Kuid võib juhtuda, et vasemal ja paremal x -i väärtusest, mille puhul $f''(x) = 0$, teise tuletise märgid on ühesugused. Tõepoolest, võtame näiteks vaatlusele kõvera $y = x^4$. Diferentsides funktsiooni x^4 kaks korda, saame:

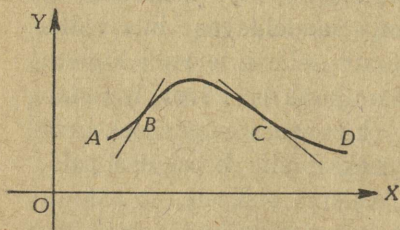
$$y'' = 12x^2.$$

Kui $x = 0$, siis teine tuletis muutub nulliks, kuid nii $x < 0$, kui ka $x > 0$ puhul avaldis $12x^2 > 0$. Tähendab, vasemal ja paremal väärtusest $x = 0$ kõver on kumer allapoole ja kui $x = 0$, kõveral ei ole käanupunkti (vt. joonist 81).

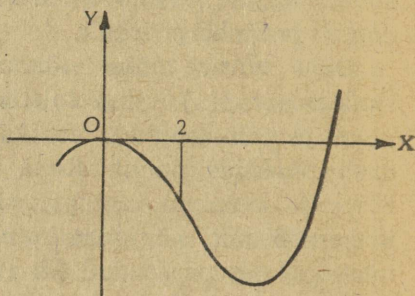
Niisiis kõvera $y = f(x)$ käanupunkti leidmiseks on tarvis:

1) Leida funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis.

2) Võrdsustada teine tuletis nulliga ja leida võrrandi $f''(x) = 0$ reaalsed lahendid.



Joonis 123.



Joonis 124.

3) Määrata teise tuletise märgid võrrandi $f''(x) = 0$ iga leitud lahendi läheduses.

Kui selgub, et vasemal ja paremal pool x -i vaadeldavast väärtusest teise tuletise $f''(x)$ märgid on vastupidised, siis see x -i väärtus annab kõvera käanupunkti. Kui aga vasemal ja paremal x -i vaadeldavast väärtusest teise tuletise $f''(x)$ märgid on ühesugused, siis x -i selle väärtuse korral kõveral ei ole käanupunkti.

Lühemalt öeldes, kõvera käanupunktide leidmisel funktsiooni $y = f(x)$ teise tuletise abil tuleb teostada samasugune

uurimus, kui esimese tuletise suhtes funktsiooni ekstremumi leidmisel (võrrelda § 74).

Selgitame toodud seletust näidetega:

Näide 1. Leida käänupunktid ja uurida kumeruse ja nõgususe suhtes kõverat

$$y = \frac{1}{12} (x^3 - 6x^2).$$

Lahendus. Leiame antud funktsiooni teise tuletise:

$$y' = \frac{1}{4} x^2 - x,$$

$$y'' = \frac{1}{2} x - 1 = \frac{1}{2} (x - 2).$$

Võrdsustades teise tuletise nulliga, saame: $x = 2$. Teine tuletis y'' muudab märgi argumendi üleminekul väärtusest 2: kui $x < 2$, siis teine tuletis $y'' < 0$, aga kui $x > 2$, siis teine tuletis $y'' > 0$; järelikult $x = 2$ puhul on käänupunkt.

Ühtlasi sellega näeme, et abstsisstelje piirkonnas $-\infty$ kuni 2 kõver on nõgus (allapoole), aga piirkonnas 2 kuni $+\infty$ kumer. Uuritav kõver on toodud joonisel 124.

Vaatleme nüüd kahte näidet, milledes tuleb uurida funktsiooni selleks juhuks, mil temal x -i mõnede väärtuste puhul teist tuletist ei ole.

Näide 2. Leida käänupunktid ja uurida kumeruse ja nõgususe suhtes kõverat

$$y = (x - 3).$$

Lahendus.

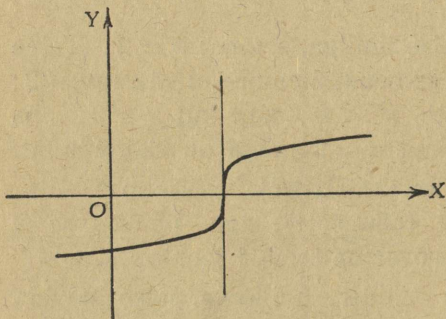
$$y' = \frac{1}{3} (x - 3)^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = -\frac{2}{9(x - 3)^{\frac{5}{3}}}.$$

Teine tuletis ei muutu nulliks ei mingisuguse x -i väärtuse puhul. Kuid avaldisest, mis määrab teise tuletise, on vahe-

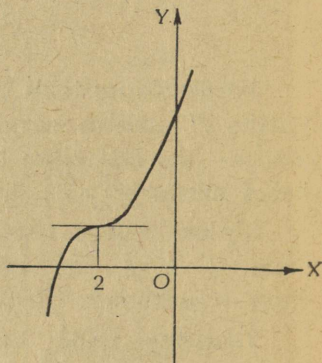
tult näha, et $y'' < 0$, kui $x < 3$, ja $y'' > 0$, kui $x > 3$. Järelikult vasemal argumendi väärtusest $x = 3$ kõver on kumer allapoole, aga paremal — nõgus allapoole. Sellepärast, kui $x = 3$, on kõveral käänupunkt. Edasi

$$\lim_{x \rightarrow 3} y' = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} = +\infty.$$

Järelikult kõvera puutuja punktis $(3, 0)$ on risti teljega OX . Võttes arvesse kõike seda, tuleme otsusele, et kõvera graafikul on joonisel 125 näidatud kuju.



Joonis 125.



Joonis 126.

Näide 3. Leida käänupunktid ja uurida kumeruse ja nõgususe suhtes kõverat

$$y = (x + 2)^{\frac{5}{3}} + 1.$$

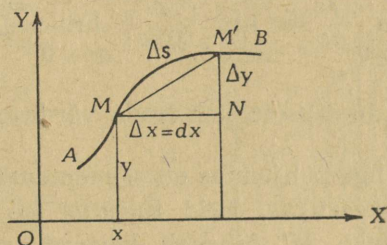
Lahendus.

$$y' = \frac{5}{3} (x + 2)^{\frac{2}{3}};$$

$$y'' = \frac{10}{9} (x + 2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9(x + 2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Nagu eelmiseski näites, teine tuletis ei muutu nulliks ei mingi x -i väärtuse puhul. Avaldisest, mis määrab teise tuletise, saame: $y'' < 0$, kui argumendi väärtus $x < -2$, ja $y'' > 0$, kui argumendi väärtus $x > -2$. Järelikult kui $x = -2$, siis kõveral on käänupunkt. Kui $x = -2$, siis esimene tuletis $y' = 0$: käänupunktis on puutuja paralleelne abstsisssteljega. Kõver on kujutatud joonisel 126.

§ 106. **Kaare diferentsiaal.** Olgu antud mingisugune kõver $y = f(x)$. Püstitame ülesande: leida selle kõvera kahe mingisuguse punkti A ja B (joonis 127) vahelise kaare pikkus. Selleks, nagu näeme seda järgmises paragrahvis, on tarvis enne leida avaldis, mis määrab kaare diferentsiaali.



Joonis 127.

Märgime muutuva kaare pikkuse tähega s , lugedes seda pikkust liikumatust kõvera punktist A punktini M , mille asend on muutuv, s. o. võib edasi liikuda kõverat mööda. Siis s on punkti M abstsissi x funktsiooniks; igale x -i väärtusele vastab punkti M kindel asend kõveral ja järelikult kaare AM pikkuse s kindel väärtus. Leiame selle funktsiooni diferentsiaali.

Me teame, et funktsiooni diferentsiaaliks nimetatakse funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutist (§ 77); sellepärast võime kirjutada:

$$ds = s'dx.$$

Järelikult meie ülesanne taandub kaare tuletise s' leidmisele.

Selleks anname x -i valitud väärtusele juurdekasvu $\Delta x = dx$, mille tagajärjel punkt M kandub edasi asendisse M' ja kaar $s = \overline{AM}$ saab juurdekasvu $\Delta s = \overline{MM'}$. Kaare tuletis on suhte $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ piir, kui $\Delta x \rightarrow 0$ (§ 48). Et leida selle suhte piir, teisendame teda, korrutades ja jagades kõõlu $\overline{MM'}$ pikkusega:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\overline{MM'}} \cdot \frac{\overline{MM'}}{\Delta x}.$$

Võttes piiri, saame:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\overline{MM'}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta x}.$$

Loeme ilma tõestuseta kehtivaks võrduse $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\overline{MM'}} = 1$.

Selle asjaolu range põhjendus on elementaarkursuse ulatuses mõnel määral keerukas, kuid tulemus ise on küllaldaselt ilmne: kui punkt M' läheneb kõverat mööda punktile M , kaare lõik läheb ikka rohkem ja rohkem ühesuguseks kõõlu lõiguga $\overline{MM'}$. Ringjoone puhul oli see asjaolu tõestatud küllalt rangelt §-s 42, kus oli tõestatud võrdus: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Kuna $\overline{MM'} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,

siis saame:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x},$$

või

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2};$$

olenevalt sellest, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = y'$, lõplikult leiame:

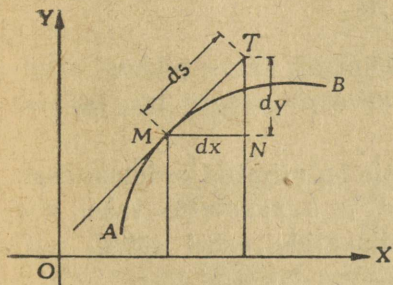
$$s' = \sqrt{1 + y'^2}$$

ja sellepärast

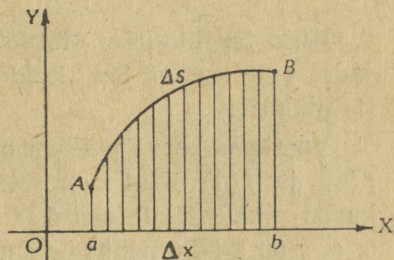
$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3)$$

Viies teguri dx juuremärgi alla, võime saadud valemi esitada kujul:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (3^*)$$



Joonis 128.



Joonis 129.

Ei ole raske määrata kaare diferentsiaali geomeetriselt tähendust. Kõvera $y = f(x)$ ordinaadi diferentsiaal dy on võrdne, nagu teada, puutuja koordinaadi juurdekasvuga, mis vastab juurdekasvule $\Delta x = dx$ (§ 78). Aga siis, nagu see selgub joonisest 128,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{MN^2 + NT^2} = MT,$$

s. o. kaare diferentsiaal on võrdne puutuja lõiguga puutepunktist kuni puutuja ja selle ordinaadi lõikepunktini, mis vastab abstsissile $x + dx$.

§ 107. **Kõvera kaare pikkus.** Asume nüüd kõvera $y = f(x)$ mingisuguse kahe punkti A ja B vahelise kaare pikkuse arvutamisele (joonis 129). Olgu nende punktide abstsissid vastavalt a ja b . Jaotame abstsissitelje lõigu a ja b vahel n ossa ja püstitame jaotuspunktidest kõvera vastavate punktide ordinaadid. Selle tagajärjel kaar \overline{AB} jaguneb ka n osaks. Tähistame ühe, ükskõik missuguse, abstsissitelje n lõigust Δx -ga, aga kaare elemendi, mis vastab lõigule Δx , Δs -ga. Siis terve kaare \overline{AB} pikkus s on võrdne pikkuste Δs summaga, mida kirjutame järgmiselt¹:

$$s = \sum_a^b \Delta s.$$

Kuid tegelikult ei ole veel võimalik kaare pikkust arvutada, sest me ei tea, kuidas arvutada kaare iga osakese Δs pikkust.

Vaatleme kaare pikkust s , mis on piiratud ordinaatidega $f(a)$ ja $f(x)$. Kui x muutub a ja b väärtuste vahel, siis kaare pikkus ülalnimetatud ordinaatide vahel sõltub x -st, s. o. s on x -i funktsioon:

$$s = \Phi(x).$$

Sel juhul kaare element Δs on funktsiooni $\Phi(x)$ juurdekasv, mis vastab sõltumatu muutuja x -i juurdekasvule Δx . Kasutame sellepärast §-s 90 saadud tulemusi ja väljendame kaare juurdekasvu Δs tema diferentsiaali ds kaudu:

$$\Delta s = ds + \alpha \cdot \Delta x,$$

kus $\alpha \rightarrow 0$, kui $\Delta x \rightarrow 0$ (§ 77). Siis võime kirjutada:

$$s = \sum_a^b (ds + \alpha \cdot \Delta x) \quad \text{ehk} \quad s = \sum_a^b ds + \sum_a^b \alpha \cdot \Delta x.$$

¹ Me säilitame siin samasugust sümbolset tähistamisviisi, kui oli rakendatud §-s 88 kõverjoonelise kujundi pindala arvutamisel.

Nüüd võime arvutada esimese summa, aga teist summat ei ole võimalik arvutada. Kuid meil on teada (§ 88), et teise summa piir, kui $\Delta x \rightarrow 0$ (ja kui $n \rightarrow \infty$), võrdub nulliga, sest liidetavad nagu $\alpha \cdot \Delta x$ on kõrgema järgu lõpmatult kahanevad suurused, võrreldes Δx -ga. See asjaolu võimaldab läbi saada ilma summa $\sum_a^b \alpha \cdot \Delta x$ arvutamata, aga selle eest tuleb meil kasutada piirile üleminekut. Suurendame piiramatult jaotuspunktide arvu n nii, et selle juures iga Δx läheneks nullile. Kuna s on jääv suurus, siis saame:

$$s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b ds.$$

Kooskõlas §-ga 90

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b ds = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b \sqrt{1 + y'^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Nii leiame lõplikult valemi:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4)$$

Näide 1. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ pikkus.

Lahendus. Arvutame poole ringjoone pikkusest, mis asetseb ülalpool telge OX . Selles osas ringjoone ordinaadid on positiivsed. Diferentsides ringjoone võrrandit, saame:

$$2x + 2yy' = 0, \text{ millest } y' = -\frac{x}{y}$$

ja

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{r}{y}.$$

Kuid $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$. Järelikult

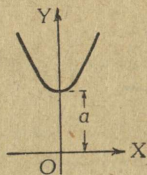
$$s = \int_{-r}^{+r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Võtame algul määramatu integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Teostades teisendused, mis on sarnased näites 12 § 84 üksikasjaliselt toodud teisendustega, saame:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{r} + C.$$



Joonis 130.

Nii saame:

$$s = r \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^{+r} = r \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi r.$$

Terve ringjoone pikkus on $2s = 2\pi r$.

Näide 2. Leida aheljoone¹ $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ kaare pikkus piirides $x = 0$ kuni $x = a$ (joonis 130).

¹ Selle kõvera kuju omandab paindub mitteväljavenitatav niit, mis ripub kahest otsast kinnitatuna.

Lahendus. $y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$;

$$\begin{aligned} \sqrt{1+y'^2} &= \sqrt{1 + \frac{(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})^2}{4}} = \sqrt{\frac{e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4}} = \\ &= \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$s = \int_0^a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} dx.$$

Võtame määramatu integraali

$$\int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx.$$

Lahutades selle integraali kahe integraali summaks ja kasutades esimeses integraalis asendust $\frac{x}{a} = t$ ja teises $-\frac{x}{a} = z$, saame kergesti:

$$\int e^{\frac{x}{a}} dx + \int e^{-\frac{x}{a}} dx = ae^{\frac{x}{a}} - ae^{-\frac{x}{a}} + C.$$

Siit saame:

$$s = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right]_0^a = \frac{a}{2} (e - e^{-1}) = \frac{a(e^2 - 1)}{2e}.$$

Näide 3. Leida tsükloidi¹

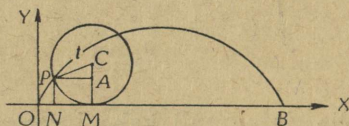
$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t), \\y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

kaare pikkus alates $t = 0$ kuni $t = 2\pi$.

Lahendus. Määrame algul $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Tsükloidi võrrandist leiame:

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a \sin t dt,$$

¹ Tsükloidiks nimetatakse kõverat, mille joonestab ringjoone punkt, kui ring veereb libisemata liikumatul sirgel. Olgu ringjoone raadius a . Võtame teljeks OX sirge, mida mööda veereb ring. Koordinaatide algus ühtib kõverat moodustava ringjoone punkti algseisuga. Vaatame veereva ringi mingit vahepealset asendit (joonis 131).



Joonis 131.

Tähistame tähega P punkti, mis joonestab kõvera, ja tähega M ringi ja telje OX puutepunkti. On ilmne, et kaar $\overset{\frown}{MP}$ on võrdne sirglõiguga \overline{OM} . Tähistades nurga PCM tähega t , saame

$$\begin{aligned}x &= OM - NM = at - a \sin t = a(t - \sin t), \\y &= PN = MC - AC = a - a \cos t = a(1 - \cos t).\end{aligned}$$

Kui $t = 0$, siis punkt P asetseb koordinaatide alguses O ; kui $t = 2\pi$ — punkt P ühtub punktiga B . Järelikult meie näites on tarvis leida kaare $\overset{\frown}{OB}$ pikkus.

kust

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2(dt)^2 + a^2 \sin^2 t(dt)^2} = \\ &= a \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Järelikult

$$s = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt.$$

Kuna

$$\int \sin \frac{t}{2} dt = -2 \cos \frac{t}{2} + C,$$

siis

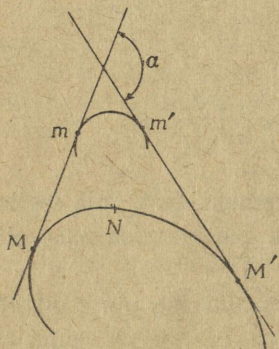
$$s = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

§ 108. **Kõvera kõverus.** Üheks elementidest, mis iseloomustavad kõverat, on tema kõveraks paindumise aste ehk kõverus mitmesugustes punktides.

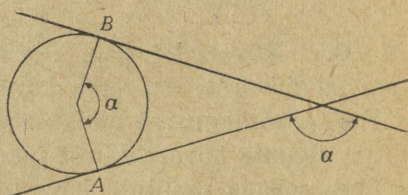
Kui liigume kõvera ühest punktist M teise punktini M' , siis ühes sellega muutub kõvera puutuja asend; puutuja pöördub. See asjaolu eraldab kõverat sirgest, mille puutuja ühtib sirge endaga kõigis punktides ja järelikult omab alati ühte ja sama suunda. On ilmne, et mida suurem on puutuja pöördumisnurk punktist M punktile M' üleminekul, seda enam kõver erineb sirgest, seda suurem on kõvera kõverus.

Kuid kaare kõverdumise astet ei saa iseloomustada ainult puutuja pöördenurgaga üleminekul kaare ühest otspunktist teise otspunktini: joonisel 132 on näidatud kaks kaart $\overline{mm'}$ ja $\overline{MM'}$, millede kõverdumise aste silmapaistvalt on erinev,

kuid millede puutujate pöördenurk on üks ja sama. Kõvera kaare kõveruse mõõdu kindlaksmääramiseks on tarvis võtta arvesse ka kaare pikkust. Nagu jooniselt 132 selgesti on näha, mida väiksem on kaare pikkus puutuja ühe ja sama pöördenurga puhul, seda suurem on kõverdumise aste. Sellepärast on loomulik võtta kõvera kaare keskmiseks kõveruseks kaare otspunktidele vastavate puutujate vahelise nurga ja selle kaare pikkuse suhe; teisiti väljendades, puutuja pöördenurk ühe kaare pikkuse ühiku kohta: kaare $\overline{MM'}$ keskmine kõverus $= \frac{\alpha}{\overline{MM'}}$. Eeldame, et nurk α alati väljendatakse radiaanides.



Joonis 132.



Joonis 133.

Arvutame näiteks ringjoone, mille raadius on R , keskmise kõveruse. Ringjoone mistahes kaare puhul on kaare otspunktidele vastavate ringjoone puutujate vaheline nurk võrdne samadele otspunktidele vastavate raadiuste vahel oleva nurgaga (joonis 133).

Kaare \overline{AB} pikkus on võrdne αR ; järelikult ringjoone keskmine kõverus on kõigis ringjoone osades üks ja sama ja võrdub

$$\frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}.$$

Ringjoone keskmine kõverus on ringjoone raadiuse pöördväärtus. Kõverus on järelikult seda suurem, mida väiksem on ringjoone raadius.

Keskmine kõverus iseloomustab kaare kõverust kogu kaare ulatuses. Kuid ühe ja sama kaare mitmesugustes osades kõverus võib olla erinev, näiteks joonisel 132 kaare $\overline{MM'}$ osa \overline{MN} on rohkem kõver kui osa $\overline{NM'}$. Õeldust selgub, et keskmine kõverus iseloomustab seda paremini kõvera kaare kõverust mitmesugustes kaare punktides, mida väiksem on selle kaare pikkus. On loomulik sellepärast lugeda kõvera kõveruseks punktis M kaare $\overline{MM'}$ keskmise kõveruse piiri, kui kaare $\overline{MM'}$ pikkus läheneb nullile. Seega kõvera kõverus punktis M määratakse järgmiselt:

$$k = \lim_{\overline{MM'} \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\overline{MM'}}$$

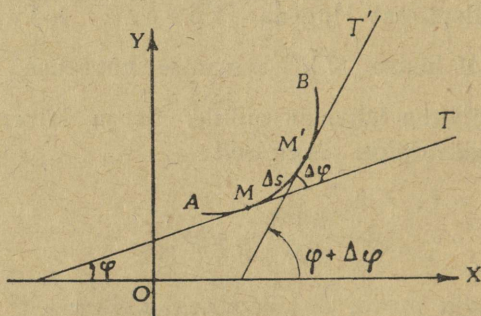
Nagu lugeja näeb, on üleminek keskmiselt kõveruselt kõverusele punktis täiesti analoogiline üleminekuga keha liikumise keskmiselt kiiruselt kiirusele antud ajamomendil.

Leiame nüüd valemil punktile vastava kõveruse K arvutamiseks. Võtame arvesse, et harilikult kõver antakse oma võrrandi $y = f(x)$ kaudu. Kui otsime kõverust punktis, siis, tähendab, peame lugema antuiks peale kõvera võrrandi veel selle kõvera punkti koordinaadid. Seepärast tuletada valem kõveruse arvutamiseks — see tähendab väljendada lim $\frac{\alpha}{\overline{MM'}}$ kõvera punkti M koordinaatide x ja y kaudu, pidades seejuures meeles, et $y = f(x)$.

Olgu antud kõvera võrrand $y = f(x)$. Oletame, et punkt M , mille suhtes kõverust arvutame, omab koordi-

naate x, y . Anname x -le juurdekasvu Δx ; abstsissi $x + \Delta x$ väärtusele vastab kõvera punkt M' . Joonestame punktides M ja M' puutujad MT ja $M'T'$ (joonis 134). Kui puutuja tõusnurka punktis M märgime tähega φ , siis üleminekul punkti M punktile M' see nurk omandab juurdekasvu $\Delta\varphi$. Juurdekasv osutub ühtlasi ka puutuja pöördenurgaks. Kui kaar $\overset{\frown}{AM} = s$, siis kaar $\overset{\frown}{MM'} = \Delta s$. Niiviisi saame:

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$



Joonis 134.

Jagame murru lugeja ja nimetaja Δx -ga ja leiame piiri

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\varphi'}{s'}.$$

s' tarvis oli varem leitud avaldis: $s' = \sqrt{1 + y'^2}$. Mis puutub tuletisse φ' , siis selle tuletise arvutame järgmiselt. On teada, et $\operatorname{tg} \varphi = y'$ (§ 49); siit $\varphi = \operatorname{arctg} y'$. Tuletis y' on x -i funktsioon, järelikult $\operatorname{arctg} y'$ on x -i liitfunktsioon. Dife-

rentsides teda x -i suhtes, leiame: $\varphi' = \frac{1}{1+y'^2} \cdot y''$. Asendades kõveruse avaldises s' ja φ' eelnimetatud avaldistega, saame:

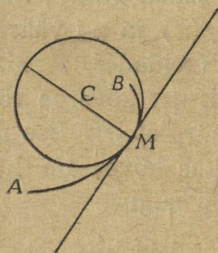
$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

Niisiis eesmärk — saada valem, mis lubaks arvutada k antud funktsiooni $y = f(x)$ ja x -i väärtuse järgi — on saavutatud. Märgime, et (eeldades, et nimetajas juuravaldise ees alati valitakse märk $+$) kõverus võib olla positiivne või negatiivne, olenevalt märgist y'' . See näitab, et kõverus on positiivne punktides, kus kõver on kumer, ja negatiivne punktides, kus kõver on nõgus.

Märkus. Eespool leidsime, et ringjoone keskmine kõverus on igas punktis jääv ja võrdub ringjoone raadiuse R pöördväärtusega. Kuna kõverus punktis on keskmise kõveruse piir, siis kõverus ringjoone igas punktis on ka jääv ja võrdub $\frac{1}{R}$. Kui arvutada ringjoone kõverust valemi (5) järgi, siis leiaksime, et ringjoone punktidel, mis asetsevad teljest OX kõrgemal, kõverus on $-\frac{1}{R}$, aga punktidel, mis asetsevad teljest OX allpool, kõverus on $+\frac{1}{R}$. Erinevus märkides näitab, et ringjoone ülemises ja alumises pooles on nõgususel erinev suund. See erinevus tuli esile koordinaatide süsteemi tarvitusele võtmise puhul.

§ 109. Kõverusring ja kõverusraadius. Olgu antud mingi kõver AB , mille kõverus punktis M on K (joonis 135). Joonestame kõvera punktis M puutuja ja normaali. Joonestame nüüd läbi punkti M ringjooni, millede keskpunktid asetsevad normaali kõvera nõgususe suunas. Kõigil neil ringjoontel on kõveraga AB ühine puutuja punktis M ja nad

on suunatud oma nõgususega selle punkti ümber samasse külge kuhu kõvergi. Nende ringjoonte seas leidub niisugune, millel on samasugune kõverus K kui kõveral punktis M . Seosest ringjoone kõveruse ja tema raadiuse vahel (§ 108) järgneb, et vaadeldava ringjoone raadius peab võrduma $\frac{1}{K}$ absoluutväärtusega.



Joonis 135.

Kirjeldatud viisil konstrueeritud ring kannab nimetust kõvera kõverusring punktis M . Kõvera kõveruse pöördsuurust punktis M , s. o. $R = \frac{1}{K}$, nimetatakse kõverusraadiuseks, aga kõveruse ringi keskpunkti C — kõvera kõveruskeskpunktiks punktis M .

Sarnaselt sellega, kuidas puutuja iseloomustab kõvera tõusu kõvera antud punktis, kõverusring annab näitliku kujutluse kõvera kõverdumise astmest vaadeldavas punktis. Kõverusringjoon liitub kõveraga tihedamalt kui ükski teine ringjoontest, mis puudutavad kõverat punktis M , ja kujutab ligikaudselt kõverat väikses piirkonnas punkti M ümber kõige suurema täpsuse astmega.

Valem kõverusraadiuse arvutamiseks saadakse väga lihtsalt võrdusest

$$R = \frac{1}{K}.$$

Kuna

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

siis

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (6)$$

§ 110. Näiteid kõverusraadiuse arvutamiseks.

1. Leida võrdhaarse hüperbooli $xy = 12$ kõverusraadius punktis (3, 4).

Lahendus. $y = \frac{12}{x}$; $y' = -\frac{12}{x^2}$; $y'' = \frac{24}{x^3}$. Kui $x = 3$, esimese ja teise tuletise väärtused on

$$y' = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}, \quad y'' = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}.$$

Järelikult

$$R = \frac{\left(1 + \frac{16}{9}\right)}{\frac{8}{9}} = \frac{125}{24}.$$

2. Leida ellipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kõverusraadius punktis (0, b).

Lahendus. Näites 2 § 103 leiti ellipsi ordinaadi esimene tuletis:

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Diferentsime selle võrduse, pidades meeles, et y on x -i funktsioon:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}.$$

Asendame siin y' vastava avaldisega, saame:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

sest $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$. Järelikult

$$R = \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = -\frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Punktis $(0, b)$, s. o. kui $x = 0$, $y = b$, saame:

$$R = -\frac{a^2}{b}.$$

3. Leida kõverusraadius aheljoone

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

mistahes punktis.

Lahendus. Näites 2 § 107 meie juba leidsime:

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad \text{ja} \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{y}{a}.$$

Diferentsides esimese tuletise, saame:

$$y'' = \frac{1}{2a} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{y^2}{a}.$$

Järelikult

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y^2}{a}} = \frac{y}{a}.$$

4. Leida tsükloidi

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

kõverusraadius mistahes punktis.

Lahendus. Kõverusraadiuse valem sisaldab kõvera ordinaadi esimese ja teise tuletise muutuja x suhtes. Tsükloloidi parameetrilistes võrrandites on koordinaadid x ja y parameetri t funktsioonid. Kuid omades seost x ja t vahel, võime vaadelda t -d kui x -i funktsiooni. Sel viisil saame:

$$y' = a \sin t \cdot t'.$$

Diferentsides võrrandit $x = a(t - \sin t)$ x -i suhtes, leiame:

$$1 = a(1 - \cos t) \cdot t', \text{ millest } t' = \frac{1}{a(1 - \cos t)}.$$

Asetades selle avaldise valemisse, mis määrab y' , saame

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Diferentsides y' x -i suhtes, leiame teise tuletise y'' :

$$y'' = - \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{t'}{2}.$$

Et $t' = \frac{1}{a(1 - \cos t)} = \frac{1}{2a \sin^2 \frac{t}{2}}$, siis saame:

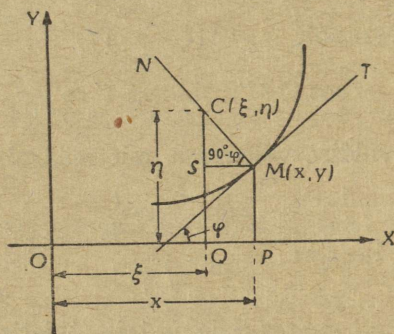
$$y'' = - \frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

Järelikult

$$R = - \frac{\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{4a \sin^4 \frac{t}{2}} = - 4a \sin \frac{t}{2}.$$

§ 111. Kõveruskeskpunkti koordinaadid. Lõpuks tule-tame valemid, mis võimaldavad arvutada kõveruskesk-

punkti koordinaate antud kõvera võrrandi ja vaadeldava punkti koordinaatide järgi. Olgu $M(x, y)$ mingisugune punkt antud kõveral $y=f(x)$. Joonestame kõvera puutuja MT ja normaali MN selles punktis (joonis 136). Tähistame tähega C kõvera kõveruskeskpunkti, vastavalt punktile M . Määrame tema koordinaadid ξ , η .



Joonis 136.

Jooniselt leiame:

$$\begin{aligned}\xi &= OQ = OP - QP = x - MC \cos SMC = \\ &= x - R \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = x - R \sin \varphi.\end{aligned}$$

Kuna $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, $\operatorname{tg} \varphi = y'$, $\sin \varphi = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, siis saame:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

Kõveruskeskpunkti ordinaadi η leiame:

$$\eta = QC = QS + SC = y + R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = y + R \cos \varphi.$$

Et $\cos \varphi = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$, siis leiame:

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Kõveruskeskpunkti koordinaatide valemid on tuletatud lähtudes joonisest, millel kujutatud juhul kõverus väljendub positiivse arvuga. Soovitame lugejale teha joonised ja tõestada leitud valemite kehtivus sel juhul, kui kõvera kõverus on negatiivne.

N ä i d e. Leida parabooli $y^2 = 2px$ mistahes punkti kõveruskeskpunkti koordinaadid.

L a h e n d u s. Diferentsime parabooli võrrandi:

$$2yy' = 2p, \text{ millest } y' = \frac{p}{y}.$$

Leiame teise tuletise y'' :

$$y'' = -\frac{p}{y^2} \cdot y' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Asetades saadud avaldised valemitesse, mis määravad kõveruskeskpunkti koordinaate (ξ, η) , saame:

$$\xi = x - \frac{p}{y} \cdot \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = 3x + p,$$

$$\eta = y + \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Harjutusi.

1. Leida kuupparabooli $y = x^3$ puutuja ja normaali võrrandid punktis (1, 1).

Vastus: $3x - y - 2 = 0$; $x + 3y - 4 = 0$.

2. Leida hüperbooli $xy = 4$ puutuja ja normaali võrrandid punktis (1, 4).

Vastus: $4x + y - 8 = 0$; $x - 4y + 15 = 0$.

3. Leida kõvera $y = ab^x$ puutuja võrrand punktis, mille abstsiss on 0.

Vastus: $y - a = (a \ln b) \cdot x$.

4. Leida kõvera $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ puutuja ja normaali võrrandid punktis, mille abstsiss on $2a$.

Vastus: $x + 2y - 4a = 0$; $2x - y - 3a = 0$.

5. Leida ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ puutuja ja normaali võrrandid punktides $(0, -3)$; $(5, 0)$; $(-4, -\frac{9}{5})$.

Vastus:

Punktis $(0, -3)$: $y + 3 = 0$; $x = 0$.

Punktis $(5, 0)$: $x = 5$; $y = 0$.

Punktis $(-4, -\frac{9}{5})$: $4x + 5y + 25 = 0$; $25x - 20y + 64 = 0$.

6. Leida parabooli $y^2 = 4x$ puutuja võrrand, teades, et puutuja on paralleelne sirgega $y = x$.

Vastus: $x - y + 1 = 0$.

7. Missuguse nurga moodustavad teljega OX lõikumisel kõverad:

a) $y = \ln x$; b) $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; c) $y = \frac{x\sqrt{3}}{1+x+x^2}$?

J u h i s. Nurgaks kõvera ja sirge vahel nimetatakse nurka antud sirge ja kõvera puutuja vahel, vastavalt sirge ja kõvera lõikepunktile.

Vastus: a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\pm \frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$.

8. Leida nurk, mille moodustavad lõikumisel järgmised kõverate paarid: a) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$; b) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 6x = 9$;

c) $y = \sin x$, $y = \cos x$; d) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $y = 2e^x$.

J u h i s. Kahe kõvera vahelise nurga all mõistetakse nurka mõlema kõvera puutuja vahel kõverate lõikepunktis.

Vastus: a) $\frac{\pi}{2}$ ja $\arctg \frac{3}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\arctg 2\sqrt{2}$; d) $\arctg 3\sqrt{3}$.

9. Näidata, et kõverad $x^2 - y^2 = a^2$ ja $xy = b^2$ igasugustel a ja b väärtustel lõikumisel moodustavad täisnurga.

10. Näidata, et hüperbooli $xy = m^2$ puutuja lõik, mis asetseb koordinaattelgedega vahel, jaguneb puutepunktis pooleks, vaatamata sellele, kus see punkt hüperboolil asetseb.

11. Tõestada, et hüperbooli $xy = m^2$ puutuja moodustab koordinaattelgedega jääva pindalaga kolmnurga (pindala suurus ei olene puutepunkti koordinaatidest).

12. Olgu F_1 ja F_2 ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ fookused. Näidata, et ellipsi igas punktis M puutuja moodustab võrdsed nurgad sirgetega F_1M ja F_2M .

13. Olgu F_1 ja F_2 hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fookused. Näidata, et normaal hüperbooli mistahes punktis moodustab võrdsed nurgad sirgetega F_1M ja F_2M .

14. Tõestada, et parabooli $y^2 = 2px$ fookust läbiva ja teljega OX ristioleva sirge ning parabooli lõikepunktides joonestatud puutujad on vastastikku risti ja lõikuvad punktis, mis asetseb parabooli juhtjoonel.

15. Tõestada, et ellips ja hüperbool, millede fookused ühtivad, lõikumisel moodustavad täisnurga.

16. Määrata kumeruse ja nõgususe suund ja leida käänupunktid järgmistel kõveratel:

a) $y = x^3 - 3x + 3$;

f) $y = e^x$;

b) $y = 5 - 2x - x^2$;

g) $y = \ln x$;

c) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

h) $y = \sin x$;

d) $y^3 = x - 1$;

i) $y = xe^x$;

e) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$;

j) $y = e^{-x^2}$.

Vastus: a) Käänupunkt on siis, kui $x = 0$; kõver on nõgus allapoole, kui $x < 0$, ja kumer allapoole, kui $x > 0$.

b) Kõver on igal pool nõgus allapoole.

c) Käänupunktid on siis, kui $x = 2$ ja $x = 4$; kõver on kumer allapoole, kui $x < 2$, nõgus allapoole, kui $2 < x < 4$ ja kumer allapoole, kui $x > 4$.

d) Käänupunkt on siis, kui $x = 1$; kõver on kumer allapoole, kui $x < 1$, ja nõgus allapoole, kui $x > 1$.

e) Käänupunkt on siis, kui $x = \frac{1}{2}$.

f) Kõver on igal pool kumer allapoole.

g) Kõver on igal pool nõgus allapoole.

h) Käänupunkt on siis, kui $x = n\pi$, kus n on ükskõik missugune täisarv või null.

i) Käänupunkt on siis, kui $x = -2$; kõver on nõgus allapoole, kui $x < -2$ ja kumer allapoole, kui $x > -2$.

j) Käänupunktid on siis, kui $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; kui $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\frac{\sqrt{2}}{2}$ kõver on nõgus allapoole; väljaspool seda vahemikku kõver on kumer allapoole.

17. Näidata, et kõveral $y(x^2 + a^2) = x$ on kolm käänupunkti, mis asetsevad sirgel $x - 4a^2y = 0$.

18. Arvutada poolkuubilise parabooli $y^2 = x^3$ kaare pikkus punktide $(0, 0)$ ja $(4, 8)$ vahel.

Vastus: $\frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$.

19. Arvutada poolkuubilise parabooli $y^2 = (x-2)^3$ kaare pikkus abstsissiteljega lõikumise punkti ja punkti $(6, 8)$ vahel.

Vastus: $\frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$.

20. Arvutada kõvera $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ kaare pikkus punktide vahel, millede abstsissid on 1 ja 2.

Vastus: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

21. Leida kaare pikkus kõveral $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$, vastavalt nurga φ muutumisele vahemikus 0 kuni $\frac{\pi}{2}$.

Vastus: $\frac{3}{2} a$.

22. Leida kõvera $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ kaare pikkus punktide vahel, millele vastavad parameetri t väärtused on 0 ja 2π .

Vastus: $2\pi^2 a$.

23. Leida parabooli $y^2 = 4x$ kõverus ja kõverusraadius punktis (4, 4).

Vastus: $-\frac{1}{10\sqrt{5}}$, $-10\sqrt{5}$.

24. Leida võrdhaarse hüperbooli $xy = 12$ kõverus ja kõverusraadius punktis (4, 3).

Vastus: $\frac{24}{125}$ ja $\frac{125}{24}$.

25. Leida kõvera $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ kõverusraadius punktis (0, 0).

Vastus: $R = -\frac{1}{36}$.

26. Leida hüperbooli $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ kõverusraadius a) mistahes punktis; b) punktis $(a, 0)$.

Vastus: a) $R = -\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$; b) $R = -\frac{b^2}{a}$.

27. Missuguses punktis on kõveral $y = e^x$ kõige väiksem kõverusraadius?

Vastus: $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

28. Missuguses punktis kõveral $y = \ln x$ on absoluutväärtuselt kõige väiksem kõverusraadius?

Vastus: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \ln 2\right)$.

29. Leida kõvera $x = t^2$, $y = t^3$ kõverusraadius punktis (1, 1).

Vastus: $\frac{13\sqrt{13}}{6}$.

30. Näidata, et kõverusraadius tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ mistahes punktis jaotub pooleks punktis, milles vee-

rev ringjoon puudutab abstsissstelge (tsükloldi definitisiooni ja võrrandite tuletamist vt. §-st 107).

31. Näidata, et kõverusraadius kõvera $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ mistahes punktis (x, y) on kolm korda suurem kui pikkus ristjoonel, mis koordinaatide algusest on tõmmatud kõvera puutujale punktis (x, y) (s. o. punktis, milles kõverusraadiust vaadeldakse).

32. Leida kõveruskeskpunkti koordinaadid järgmiste kõverate mistahes punktis:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$

c) $ay^2 = x^3;$

b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

d) $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$

Vastus: a) $\xi = \frac{(a^2 + b^2)x^3}{a^4}; \eta = \frac{(a^2 + b^2)y^3}{b^4}.$

b) $\xi = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}; \eta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$

c) $\xi = -x - \frac{9x^2}{2a}; \eta = 4 \left(x + \frac{a}{3} \right) \sqrt{\frac{x}{a}}.$

d) $\xi = x - a \frac{\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} \right)}{4}; \eta = y + \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$

33. Näidata, et kõvera $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ kohta on kehtiv seos:

$$\xi + \eta = 3(x + y).$$

34. Leida kõveruskeskpunkti koordinaadid järgmiste kõverate mistahes punktis:

a) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t);$

b) $x = 3t^2; y = 3t - t^3.$

Vastus: a) $\xi = a(t + \sin t), \eta = -a(1 - \cos t);$

b) $\xi = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4), \eta = -4t^3.$

SISUKORD.

I OSA.

TASAPINNALISE ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA ALGED.

Sissejuhatus	Lk. 5
------------------------	----------

I peatükk. Ristkoordinaadid. Lihtsamaid ülesandeid koordinaatide meetodi rakendamiseks.

§ 1. Suunatud sirglõigud	6
§ 2. Suunatud sirglõikude liitmine	7
§ 3. Sirgjoone punkti koordinaat	8
§ 4. Tasapinna punkti koordinaadid. Ristkoordinaatide ehk Descartes'i koordinaatide süsteem	12
§ 5. Kahe punkti vaheline kaugus	17
§ 6. Sirglõigu jagamine antud suhtes	20
Harjutusi	22

II peatükk. Sirgjoon.

§ 7. Sirgjoone võrrandi mõiste. Sirge võrrand tõusuga (nurga- teguriga)	24
§ 8. Koordinaattelgedega paralleelsete sirgete ja koordinaat- telgede võrrandid	32
§ 9. Sirge võrrandi üldkuju ja selle eri juhud	34
§ 10. Lineaarfunktsioon	38
§ 11. Antud punkti läbiva sirge võrrand (sirgete kimbu võr- rand)	39
§ 12. Kahte antud punkti läbiva sirge võrrand	41
§ 13. Sirge võrrand telglõikudes	42
§ 14. Nurk kahe sirge vahel	43

	Lk.
§ 15. Kahe sirge paralleelsuse ja ristseisu tunnused	47
§ 16. Kahe sirge lõikepunkt	50
Harjutusi	51

III peatükk. Geomeetrilised kohad ja nende võrrandid.
Teise järgu kõverad.

§ 17. Geomeetrilised kohad ja geomeetriliste kohtadena antud joonte võrrandid	55
§ 18. Ringjoon	57
§ 19. Ringjoone ja sirge lõikumine. Puutuja	60
§ 20. Ellips	63
§ 21. Ellipsi kuju määramine	65
§ 22. Ellipsi punktide konstrueerimine	68
§ 23. Ellipsi ekstsentrisus	70
§ 24. Ellipsi seos ringjoonega	71
§ 25. Hüperbool	71
§ 26. Hüperbooli kuju määramine	73
§ 27. Hüperbooli asümptoodid	75
§ 28. Võrdhaarne hüperbool	78
§ 29. Parabool	81
§ 30. Parabool $y = Ax^2 + Bx + C$	84
§ 31. Kõverjoone võrrandid parameetrilisel kujul	87
§ 32. Ringjoone parameetrilised võrrandid	89
§ 33. Ellipsi parameetiline võrrand	89
§ 34. Ellipsi sirkel	90
Harjutusi	92

II OSA.

DIFERENTSIAALARVUTUSE ELEMENDID.

IV peatükk. Piiride teooria.

§ 35. Muutuvad ja jäävad suurused. Lõpmatult kahanev suurus	100
§ 36. Lõpmatult kahanevate suuruste põhiteoreemid	105
§ 37. Lõpmatult kasvav suurus	108
§ 38. Seos lõpmatult kahaneva ja lõpmatult kasvava suuruse vahel	109

	Lk.
§ 39. Muutuva suuruse piiri mõiste	111
§ 40. Põhiteoreemid piiridest	117
§ 41. Kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhe. Lõpmatult kaha- nevate suuruste järk. Ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused	121
§ 42. Suhte $\frac{\sin x}{x}$ piir kui $x \rightarrow 0$	124
Harjutusi	127

V peatükk. Tuletise mõiste.

§ 43. Lineaarfunktsiooni muutumise kiirus. Tõus muutumise kiirusena	128
§ 44. Teise astme funktsioon	133
§ 45. Funktsiooni üldine tähis	135
§ 46. Keskmise liikumise kiirus ja kiirus antud momendil	138
§ 47. Funktsiooni muutumise kiirus	140
§ 48. Antud funktsiooni tuletis	141
§ 49. Tuletise geomeetiline vaste	145
§ 50. Funktsiooni pidevus	149
Harjutusi	152

**VI peatükk. Diferentsiaalarvutuse põhivalemid ja eeskirjad.
Elementaarfunktsioonide tuletised.**

§ 51. Põhivalemite tabel	153
§ 52. Jääva suuruse diferentsimine	155
§ 53. Argumendi tuletis	156
§ 54. Algebraalse summa tuletis	156
§ 55. Kahe funktsiooni korrutise tuletis	157
§ 56. Mistahes arvu funktsioonide korrutise tuletis	158
§ 57. Astme $y = x^n$ tuletis	159
§ 58. Murru tuletis	159
§ 59. Liitfunktsiooni tuletis	161
§ 60. Näiteid	164
Harjutusi	166
§ 61. Logaritmfunktsiooni tuletis	168
§ 62. Astme tuletis mistahes astendaja puhul	172
§ 63. Eksponentfunktsiooni tuletis	172
§ 64. Näiteid	173
Harjutusi	174

	Lk.
§ 65. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised	175
§ 66. Näiteid	177
Harjutusi	178
§ 67. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide tuletised	179
§ 68. Näiteid	181
Harjutusi	181
§ 69. Teise ja kõrgema järgu tuletised	182
Harjutusi	183

VII peatükk. Tuletise lihtsamaid rakendusi.

§ 70. Funktsiooni muutumise käik	183
§ 71. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	184
§ 72. Funktsiooni maksimum ja miinum	188
§ 73. Näiteid ja ülesandeid funktsioonide maksimumi ja miinimumi leidmiseks	191
§ 74. Teine võte funktsiooni maksimumi ja miinimumi määramiseks	198
§ 75. Funktsioonide maksimumi ja miinimumi teised tüübid	202
§ 76. Teine tuletis kiirendusena	205
Harjutusi	206

VIII peatükk. Diferentsiaal.

§ 77. Diferentsiaal kui funktsiooni juurdekasvu peaosas	211
§ 78. Diferentsiaali geomeetriline vaste	215
§ 79. Tuletise leidmise eeskirjade ja valemite laiendamine diferentsiaalide leidmiseks	217
§ 80. Diferentsiaali mõiste rakendamine ligikaudses arvutamises	219
Harjutusi	222

II OSA.

INTEGRAALARVUTUSE ELEMENDID.

IX peatükk. Määramatu ja määratud integraalid.

§ 81. Integreerimine diferentsimise pöördehtena. Määramatu integraal	225
§ 82. Määramatu integraali omadused, mis järelduvad otseselt tema definitsioonist	230

	Lk.
§ 83. Integreerimise põhivalemid	232
§ 84. Integreerimise lihtsamaid võtteid	233
Harjutusi	241
§ 85. Integreerimiskonstandi määramine algandmete järgi	244
Harjutusi	245
§ 86. Määramatu integraali geomeetriline vaste	245
§ 87. Määratud integraal	248

**X peatükk. Määratud integraal kui summa piir. Lihtsamaid
integraalarvutuse rakendusi.**

§ 88. Määratud integraal kui summa piir	253
§ 89. Määratud integraali lihtsamaid omadusi	259
§ 90. Integraalarvutuse rakenduste printsiip	261
§ 91. Pindalade arvutamise ülesandeid	264
§ 92. Pöördkeha ruumala	268
§ 93. Tungi töö	269
§ 94. Vedeliku rõhumine	271
Harjutusi	273

**XI peatükk. Esimese järgu diferentsiaalvõrrandid
eraldatavate muutujatega.**

§ 95. Definitsioonid	275
§ 96. Näiteid ülesannetest, mis lahenduvad diferentsiaalvõrran- dite abil	277
§ 97. Diferentsiaalvõrrandid eraldatavate muutujatega	282
Harjutusi	284

TÄIENDUSED.

XII peatükk. Polaarkoordinaadid.

§ 98. Suunatud nurgad	287
§ 99. Punkti polaarkoordinaadid tasapinnal	288
§ 100. Valemid üleminekuks polaarkoordinaatide süsteemilt rist- koordinaadistikule ja ümberpöörduvalt	292
§ 101. Kõverjoon ja tema võrrand polaarkoordinaatides	295
§ 102. Näiteid joone võrrandi koostamiseks polaarkoordinaatides ja kõvera ehitamiseks tema võrrandi järgi	297
Harjutusi	309

XIII peatük. Diferentsiaal- ja integraalarvutuse rakendusi
geomeetrias.

	Lk.
§ 103. Tasapinnalise kõvera puutuja ja normaal	312
§ 104. Kõvera kumerus ja nõgusus	316
§ 105. Käänupunktid	320
§ 106. Kaare diferentsiaal	325
§ 107. Kõvera kaare pikkus	328
§ 108. Kõvera kõverus	333
§ 109. Kõverusring ja kõverusraadius	337
§ 110. Näiteid kõverusraadiuse arvutamiseks	339
§ 111. Kõveruskeskpunkti koordinaadid	341
Harjutusi	343

Tõlkinud Joh. Kiivet.

Vastutav toimetaja V. Arak.

Keeleline toimetaja J. Pedari.

Ladumisele antud 3. IX 1948. Trükkimisele antud 18. X 1948. Trüki-
arv 2000. Paber 56×79 , $\frac{1}{16}$. Trükipoognaid 22,25. Trükitähti trüki-
poognas 34.810. Arvutuspoognaid 18,9. MB-08563.

Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 1718.

На эстонском языке.

Н. П. Тарасов. Курс высшей математики для техникумов.

RBL. 6.70

A-17333