G. RÄGO

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA JA ALGEBRA

KESKKOOLI XI KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1946

G. RÄGO

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA JA ALGEBRA

KESKKOOLI XI KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1946

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA.

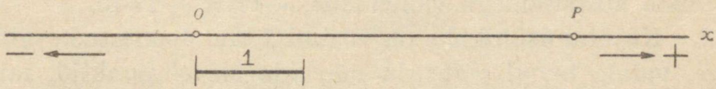
Peatükk I.

Punkt.

§ 1. Sirgjoone punkti abstsiss.

Olgu antud sirge x ja selle punkt O (joonis 1). Seame endile ülesandeks määrata sirge x teatava punkti P asukoht antud punkti O suhtes.

Selle ülesande lahendamiseks nimetame ühe suundadest, milles võib liikuda sirgel x, positiivseks suunaks ja teise negatiivseks suunaks, märkides esimest neist märgiga $+$ ja teist märgiga —. Valime pikkuste mõõtmiseks ühiku, näiteks 1 cm, mõõdame sirglõigu OP pikkuse ja võtame saadud arvu p märgiga $+$, kui punkt P asub punktist O positiivses suunas, ja märgiga —, kui ta on punktist O negatiivses suunas. Nii saadud märgiga arvu nimetame punkti P abstsissiks. Punkti O nimetame seejuures abstsisside alguspunktiks ehk nullpunktiks, mõnikord ka lühidalt alguseks, ja sirget x — abstsissteljeks ehk x-teljeks. Niisiis:



Joonis 1.

sirgjoone punkti abstsiss on arv, mis näitab, kummal pool alguspunkti ja mitme ühiku kaugusel alguspunktist asub vaadeldav punkt.

Sellest punkti abstsissi definitsioonist nähtub, et abstsisstelje igale punktile vastab ü k s a i n u s abstsiss ja igale abstsissile vastab ü k s a i n u s punkt; järelikult

punkti abstsiss määrab täielikult punkti asukoha teljel.

Seepärast ülesannet „leida telje punkt P" võime ikka mõista ülesandena „leida punkti P abstsiss x". Ütlust „punkti P abstsiss on x" ehk ütlust „punkt P abstsissiga x" kirjutatakse lühidalt kujul

$$P \doteq (x).$$

Kaks punkti, mis asetsevad teljel võrdseil kaugusil nullpunktist, üks ühel pool, teine teisel pool seda, on nullpunkti suhtes s ü m m e e t r i l i s e d punktid. Nende punktide abstsissid on võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega. Kui punktil on abstsiss a, siis temaga alguspunkti suhtes sümmeetrilisel punktil on abstsiss $-a$.

Ülesanded.

1. Kujutamisühikuks on võetud 5 mm. Joonestada mingi sirge, valida temal algus ja märkida sirgel punktid algarvuliste abstsissidega vahemikus —17-st +17-ni.

2. Kujutamisühikuks on võetud 1 cm. Joonestada mingi sirge, valida temal algus ja märkida sirgel punktid, mille abstsissid on

$$+3;\ +6\tfrac{1}{2};\ +5;\ -2{,}8;\ -0{,}2;\ -3{,}9;\ +4\tfrac{2}{3}\,.$$

3. Kujutamisühikuks on võetud 1 cm. Konstrueerida täisnurksed kolmnurgad hüpotenuusidega.

$$\sqrt{5} \qquad \sqrt{17} \qquad \sqrt{29}.$$

Joonestada mingi sirge, valida temal algus ja märkida sirgel punktid, mille abstsissid on $+\sqrt{5}$, $+\sqrt{17}$ ja $-\sqrt{29}$.

4. Arvu 195 soovitakse kujutada punktina teljel. Kasutada oleva teljeosa pikkus on 100 mm. Kui pikk tuleb valida kujutamisühik?

5. Arvu sin 60^0 soovitakse kujutada punktina teljel. Kasutada oleva teljeosa pikkus on 180 mm. Kui pikk tuleb valida kujutamisühik?

6. Kujutamisühikuks on 50 mm. Silm eraldab veel hästi kaht kriipsu 0,2-millimeetrilise vahega. Kui peenelt saab teljelt lugeda punkti abstsissi?

7. Olgu kujutamisühik 200 mm. Mitme kümnendkohaga tuleb võtta arv tan 72^0 tema kujutamisel punktina abstsissteljel?

8. Kujutamisühikuks on valitud 100 mm. Võtta mingi sirge, valida temal algus ja märkida sirgel punktid, mille abstsissid on arvude

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

logaritmid. Mitme kümnendkohaga need logaritmid tuleb võtta?

§ 2. Sirglõik.

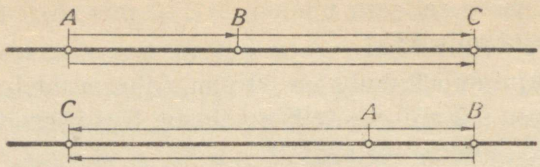
Sirglõik on määratud oma kahe otspunktiga; üht neist nimetame lõigu a l g u s-, teist lõigu l õ p p - p u n k t i k s. Lõiku, mille alguspunkt on A ja lõpp-punkt on B, tähistame sümboliga AB. Teljel asetsevat sirglõiku P_1P_2 loeme s u u n a g a sirglõiguks, nimelt positiivseks, kui suund punktist P_1 punkti P_2 poole on positiivne, ja negatiivseks, kui suund punktist P_1 punkti P_2 poole on negatiivne. Öeldust järgneb, et

$$P_2P_1 = -P_1P_2;$$

see tähendab, et

sirglõigu alguspunkti ja lõpp-punkti vahetamisel muudab suunaga sirglõik oma märgi.

Suunaga sirglõikude liitmine toimub järgmise kokku-



Joonis 2.

leppe alusel: kui A, B ja C on kolm teljel asetsevat punkti (joonis 2), siis on ikka kehtiv võrdus

$$AB + BC = AC.$$

Olgu O abstsisside alguspunkt ja P_1 ning P_2 mingid kaks teljel asetsevat punkti. Rakendades lõikude liitmise eeskirja punktidega O, P_1 ja P_2 määratud lõikude kohta, näeme, et

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2.$$

Olgu $P_1 \equiv (x_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2)$; siis $OP_1 = x_1$, $OP_2 = x_2$ ja järelikult

$$x_1 + P_1P_2 = x_2$$

ehk

$$P_1P_2 = x_2 - x_1;$$

see tähendab, et

teljel võetud lõik on võrdne tema lõpp- ja alguspunkti abstsisside vahega.

Kui $x_2 > x_1$, siis on lõik P_1P_2 positiivne ja ka $x_2 - x_1$ on positiivne; kui $x_2 < x_1$, on lõik P_1P_2 negatiivne ja ka $x_2 - x_1$ on negatiivne. Sellest näeme, et suunaga sirglõik teljel avaldub arvuna, mille märk määrab lõigu suuna ja absoluutväärtus lõigu pikkuse.

Lõigu P_1P_2 pikkus on punktide P_1 ja P_2 vaheline kaugus, mida ikka mõistame suunata suurusena. Tähistame selle pikkuse sümboliga $|P_1P_2|$. Siis

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|.$$

Niisiis:

telje kahe punkti vaheline kaugus on võrdne nende punktide abstsisside vahe absoluutväärtusega.

Ülesanded.

9. Sirgel on võetud punktid P_1 ja P_2. Määrata punkti P_1 kaugus punktist P_2, kui punkti P_1 abstsiss on

$$+3 \quad -7 \quad +4 \quad -6 \quad +8 \quad -10$$

ja punkti P_2 abstsiss on vastavalt

$$+8 \quad +2 \quad -3 \quad -6 \quad -5 \quad -14.$$

10. Sirgel on võetud punktid P_1 ja P_2. Avaldada lõik P_1P_2 arvuliselt, kui punkti P_1 abstsiss on

$$+4 \quad -6 \quad +5 \quad -7 \quad +9 \quad -11$$

ja punkti P_2 abstsiss on vastavalt

$$+9 \quad +1 \quad -4 \quad -8 \quad +9 \quad -15.$$

11. Sirgel on võetud punkt A, mille abstsiss on 6. Leida punkti B abstsiss, kui lõik AB on $+2$, $+7$, $+10$, -4, -6, -8, -11.

12. Kuidas muutub punkti abstsiss, kui endise mõõtühiku asemel valitakse uus, mis on endisest k korda suurem?

13. Kuidas muutub kahe punkti vaheline kaugus, kui endise mõõtühiku asemel valitakse uus, mis on endisest k korda väiksem?

14. Kuidas muutub punkti abstsiss, kui telje positiivne suund muudetakse vastupidiseks?

15. Kuidas muutub kahe punkti P_1 ja P_2 vaheline kaugus ja kuidas muutub lõik P_1P_2, kui telje positiivne suund muudetakse vastupidiseks?

§ 3. Sirglõigu keskpunkti abstsiss.

Olgu antud teljel asetsev lõik oma otspunktidega $P_1 \equiv (x_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2)$. Leiame selle lõigu keskpunkti abstsissi.

Olgu lõigu P_1P_2 keskpunkt $P \equiv (x)$. Siis

$$P_1P = PP_2$$

ehk, teisiti,

$$x - x_1 = x_2 - x,$$

millest

$$2x = x_1 + x_2$$

ehk

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

see tähendab, et

sirglõigu keskpunkti abstsiss võrdub otspunktide abstsisside aritmeetilise keskmisega.

Ülesanded.

16. Sirgel on võetud punktid P_1 ja P_2. Leida lõigu P_1P_2 keskpunkti abstsiss, kui punkti P_1 abstsiss on

$$0 \quad +2 \quad +3 \quad +5 \quad -3 \quad -1$$

ja punkti P_2 abstsiss on vastavalt

$$+8 \quad +12 \quad -1 \quad -7 \quad +6 \quad -9.$$

17. Sirgel on võetud kaks lõiku P_1P_2 ja Q_1Q_2. Nende lõikude keskpunktid on vastavalt P ja Q. Määrata lõigu PQ pikkus, teades, et

$$P_1 \equiv (-6) \qquad P_2 \equiv (+10) \qquad Q_1 \equiv (+8) \qquad Q_2 \equiv (-14).$$

18. Kuidas muutub lõigu keskpunkti abstsiss, kui mõõtühikut k korda suurendada ja x-telje positiivne suund muuta vastupidiseks?

19. Antud on punkt $P \equiv (+9{,}6)$. Lõigul OP asuv punkt A jaotab lõigu OP nii, et $OA : AP = 2 : 1$. Missugune on punkti A abstsiss?

20. Lõigul AB asuv punkt C jaotab lõigu AB kahte ossa nii, et $AC : CB = 2 : 3$. Missugune on punkti C abstsiss, kui $A \equiv (-2)$ ja $B \equiv (+3)$?

21. Lõigu AB pikendil asub punkt C nii, et $AC : BC = 12 : 5$. Missugune on punkti C abstsiss, kui $A \equiv (-18)$ ja $B \equiv (-4)$?

22. Antud on punkt $P_1 \equiv (+7{,}5)$. Punkt P_2 on sümmeetriline punktiga P_1 alguse suhtes. Missugune on punkti P_2 abstsiss? Kui pikk on lõik P_1P_2?

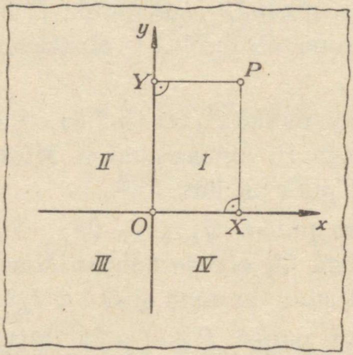
23. Antud on punkt $Q_1 \equiv (-23)$. Punkt Q_2 on sümmeetriline punktiga Q_1 alguse suhtes. Missugune on punkti Q_2 abstsiss? Kui suur on suhe $Q_1O : OQ_2$?

24. Antud on punkt $P \equiv (-7)$. Missugune on sama punkti abstsiss, kui abstsisside algus paigutada punkti (-4)?

25. Kui teljel võtta alguseks punkt O, siis on punkti P abstsissiks (-3); kui aga alguseks võtta punkt O_1, siis on punkti P abstsissiks $(+5)$. Missugune on punkti O_1 abstsiss alguse O suhtes?

§ 4. Tasapinna punkti koordinaadid.

Olgu antud tasapind ja sellel kaks ristuvat sirget x ja y (joonis 3). Seame endile ülesandeks määrata tasapinna teatava punkti P asukoht antud sirgete x ja y suhtes. Selleks võtame sirgete x ja y lõikepunkti O nullpunktiks nii ühel kui teisel sirgel, märgime kummalgi sirgel noolega positiivse suuna, nimetame saadud teljed vastavalt x- ja y-teljeks ja valime pikkuste mõõtmiseks ühiku, näiteks 1 cm. Projektime nüüd punkti P kummalegi teljele; olgu punkt X punkti P projektsioon x-teljele ja punkt Y punkti P projektsioon y-teljele. Mõõdame lõigud OX ja OY ja võtame mõõtmissaadused lõikude OX ja OY suunale vastava märgiga. Nii saadud arvu x nimetame punkti P abstsissiks ja arvu y — punkti P ordinaadiks. Sellele



Joonis 3.

vastavalt nimetame x-telge abstsissteljeks ja y-telge ordinaatteljeks. Mõlemaid arve x ja y koos nimetame punkti P koordinaatideks. Abstsiss- ja ordinaattelg moodustavad koos koordinaatide teljestiku.

Abstsiss- ja ordinaattelg jaotavad tasapinna neljaks veerandiks; neid nimetame joonisel 3 näidatud järjekorras esimeseks, teiseks, kolmandaks ja neljandaks veerandiks. Arvestades telgede suundi saame järgmise tabeli punkti koordinaatide märkide jaoks:

Veerand, milles punkt asub	Abstsissi märk	Ordinaadi märk
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

Joonisest 3 näeme, et

$$YP = OX \quad \text{ja} \quad XP = OY$$

ehk

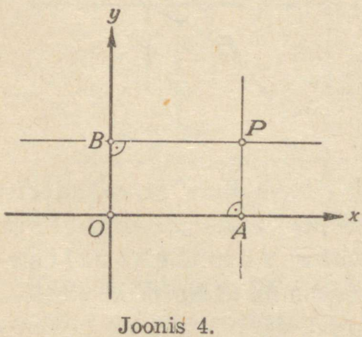
$$YP = x \quad \text{ja} \quad XP = y;$$

seega punkti koordinaadid näitavad punkti kaugusi koordinaatide telgedest. Nimelt

tasapinna punkti abstsiss on arv, mis näitab, kummal pool ordinaattelge ja mitme ühiku kaugusel ordinaatteljest punkt asub;

tasapinna punkti ordinaat on arv, mis näitab, kummal pool abstsisstelge ja mitme ühiku kaugusel abstsissteljest punkt asub.

Punkti koordinaatide ülalkirjeldatud määramisviisist nähtub, et igale tasapinnal võetud punktile vastab ü k s - a i n u s paar koordinaate. On selge, et ümberpöördult ka igale etteantud koordinaatide paarile vastab ü k s - a i n u s punkt tasapinnal. Tõepoolest, olgu punkti abstsiss a ja ordinaat b. Arvude a ja b järgi ehitame abstsiss- ja ordinaatteljel lõigud OA ja OB (joonis 4); tõmmates punktidest A ja B ristsirged lõikudele OA ja OB



Joonis 4.

näeme, et need ristsirged lõikuvad punktis P, millel on antud abstsiss a ja ordinaat b. Kiiremini kui praegu-kirjeldatud võttega leiame punkti P, kui abstsissi a järgi ehitame lõigu OA, punktis A tõmbame ristjoone x-teljele ja sellel ristjoonel ordinaadi b järgi märgime lõigu $AP = b$. Lõike OA ja AP nimetame vastavalt punkti P abstsiss- ja ordinaatlõiguks. Nii näeme, et

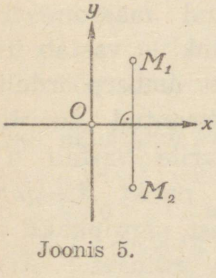
punkti abstsiss ja ordinaat määravad täielikult punkti asukoha tasapinnal.

Seepärast ülesannet „leida tasapinna punkt P“ võime mõista ülesandena „leida punkti P koordinaadid“.

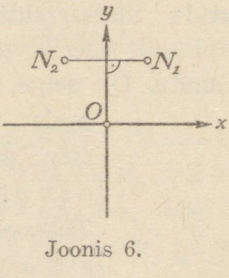
Ütlust „punkti P abstsiss on x ja ordinaat on y“ ehk ütlust „punkt P koordinaatidega x ja y“ kirjutatakse lühidalt kujul

$$P \equiv (x \mid y).$$

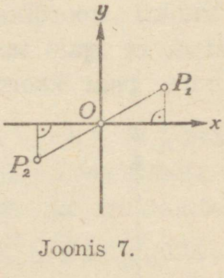
Kirjutis $M \equiv (-7|0)$ ütleb seega, et punkt M asetseb x-telje negatiivsel poolel ja nimelt 7 ühiku kaugusel alguspunktist.



Joonis 5.



Joonis 6.

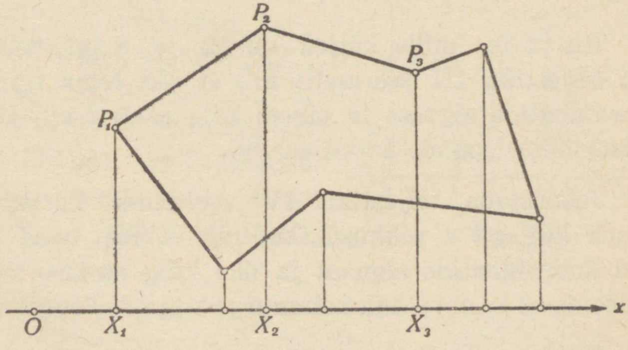


Joonis 7.

Kaks punkti, mis asetsevad x-telje ühel ja samal ristjoonel, üks ühel pool, teine teisel pool telge ja võrdseil kaugusil teljest, on selle telje suhtes sümmeetrilised punktid. Neil punktel on üks ja seesama abstsiss ja võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega ordinaadid. Näiteks on punktid $M_1 \equiv (a|b)$ ja $M_2 \equiv (a\,|\,—b)$ x-telje suhtes sümmeetrilised punktid (joonis 5). Samuti on $N_1 \equiv (a|b)$ ja $N_2 \equiv (—a|b)$ y-telje suhtes sümmeetrilised punktid (joonis 6).

Kaks punkti P_1 ja P_2, mis asetsevad nullpunktiga ühel ja samal sirgel, üks ühel pool, teine teisel pool nullpunkti võrdseil kaugusil nullpunktist, on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes. Nagu näeme joonisest 7, on nende punktide samanimelised koordinaadid võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega. Näiteks punktid $P_1 \equiv (a|b)$ ja $P_2 \equiv (—a\,|\,—b)$ on sümmeetrilised alguspunkti suhtes.

M ä r k u s. Punkti koordinaatide mõiste kuulub tähtsamate matemaatika mõistete hulka. Nagu hiljemini näeme, võimaldub selle mõiste kaudu avaldada geomeetrilisi küsimusi algebra keeles ja seega saavutada nende lahendamist algebra meetoditega.



Joonis 8.

Koordinaatide mõiste on ka praktiliselt suure tähtsusega: enamik kaardistamise ja plaanistamise võtteid tugineb koordinaatide mõistele. Kui on näiteks plaanistada maatükk $P_1 P_2 P_3 \ldots$ (joonis 8), siis võtame mingi sihi x-teljeks ja projektime vastavate optiliste riistade abil punktid P_1, P_2, $P_3, \ldots$ x-teljele; saades niiviisi punktid X_1, X_2, $X_3, \ldots$, mõõdame lõigud

$$OX_1,\ OX_2,\ OX_3, \ldots$$

ja

$$X_1P_1,\ X_2P_2,\ X_3P_3, \ldots$$

Varustades saadud arvud vajalike märkidega, saame punktide P_1, P_2, $P_3, \ldots$ koordinaadid, mille järgi nende märkimine plaanile kohaselt valitud mõõdus ei tee enam raskusi.

Ülesanded.

26. Joonestada koordinaatide teljestik ja kujutada selles järgmised punktid:

$$P \equiv (+2 \mid +3) \qquad Q \equiv (+4 \mid -5) \qquad R \equiv (-4 \mid +3)$$
$$S \equiv (-5 \mid -2) \qquad T \equiv (0 \mid -7) \qquad U \equiv (-3 \mid 0).$$

27. Ristkülik, mille küljed on 12 ja 8 pikkusühikut, asetseb teljestiku III veerandis nii, et üks tema tippudest on koordinaatide alguses ja pikem külg asub x-teljel. Määrata ristküliku tippude koordinaadid.

28. Joonestada teljestiku IV veerandis korrapärane kolmnurk küljega 4 pikkusühikut nii, et üks tema tippudest on koordinaatide alguses ja üks külg asetseb x-teljel. Leida joonisest ja arvutada kolmnurga tippude koordinaadid.

29. Romb, mille külg on a ja teravnurk 30^0, asetseb I veerandis nii, et üks tema tippudest on koordinaatide alguses ja üks tema külg asub x-teljel. Arvutada rombi tippude koordinaadid.

30. Punkt P_2 on x-telje suhtes sümmeetriline punktiga $P_1 \equiv (-5 \mid 3)$. Missugused on punkti P_2 koordinaadid? Kui pikk on lõik P_1P_2? Kui suur on kolmnurga OP_1P_2 pindala?

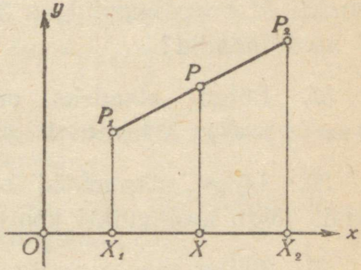
31. Koordinaatide algus on ristküliku diagonaalide lõikepunktis ja x-telg on rööbiti ristküliku pikema küljega. Ristküliku ühe tipu koordinaadid on 3 ja -7. Anda teiste tippude koordinaadid.

32. Punkti P koordinaadid on a ja b. Kuidas avalduvad sama punkti koordinaadid, kui mõõtühikut vähendame n korda?

§ 5. Sirglõigu keskpunkti koordinaadid.

Olgu antud tasapinnal sirglõik, mille otspunktid on $P_1 \equiv (x_1 \mid y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 \mid y_2)$. Leiame selle lõigu keskpunkti koordinaadid.

Märgime lõigu keskpunkti tähega $P \equiv (x|y)$ (joonis 9). Joonestame punktidest P_1, P ja P_2 ordinaatlõigud X_1P_1, XP ja X_2P_2. Et $P_1P = PP_2$, siis on võrdsed ka nende lõikude projektsioonid x-teljele; seega punkt X on lõigu X_1X_2 keskpunkt ja järelikult



Joonis 9.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Saadud valemeid võime sõnastada järgmiselt:

sirglõigu keskpunkti koordinaadid on lõigu otspunktide samanimeliste koordinaatide aritmeetilised keskmised.

Näide. Lõigu otspunktid on $P_1 \equiv (-14 \mid 9)$ ja $P_2 \equiv (6 \mid -5)$. Selle lõigu keskpunkti P koordinaadid on vastavalt

$$x = \frac{-14+6}{2} = -4 \quad \text{ja} \quad y = \frac{9+(-5)}{2} = 2,$$

seega

$$P \equiv (-4 \mid 2).$$

Ülesanded.

33. On antud punktid $S_1 \equiv (0 \mid 8)$ ja $S_2 \equiv (0 \mid -20)$. Leida lõigu S_1S_2 keskpunkti koordinaadid.

34. Lõik MN jaotub koordinaatide alguses pooleks. Punkti M koordinaadid on 3 ja -4. Missugused on punkti N koordinaadid?

35. Lõigu otsadeks on punktid $A \equiv (-2 \mid 3)$ ja $B \equiv (4 \mid -7)$. Määrata lõigu AB keskpunkti koordinaadid.

36. Lõigu otspunktid on $P_1 \equiv (a \mid 0)$ ja $P_2 \equiv (0 \mid b)$. Anda lõigu keskpunkti koordinaadid.

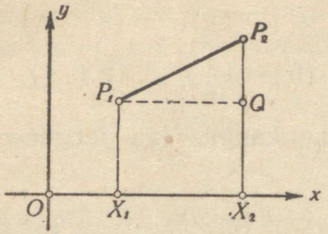
37. Lõigu üks otspunkt on $(4 \mid 2)$; lõigu keskpunkt on $(3 \mid -1)$. Määrata lõigu teine otspunkt.

38. Kolmnurga tipud on $A \equiv (6 \mid 5)$, $B \equiv (-2 \mid 7)$ ja $C \equiv (4 \mid -3)$. Leida kolmnurga külgede keskpunktid.

39. Rööpküliku kaks vastastippu on $A \equiv (1 \mid 3)$ ja $C \equiv (0 \mid 7)$ ning kolmas tipp on $B \equiv (3 \mid 5)$. Leida rööpküliku diagonaalide lõikepunkt ja neljas tipp D.

§ 6. Sirglõigu pikkus.

Olgu antud kaks punkti $P_1 \equiv (x_1 \mid y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 \mid y_2)$.



Joonis 10.

Leiame sirglõigu P_1P_2 pikkuse ehk, teisiti, punktide P_1 ja P_2 vahelise kauguse.

Selleks joonestame punktide P_1 ja P_2 ordinaatlõigud X_1P_1 ja X_2P_2 (joonis 10). Projektides punkti P_1 sirgele X_2P_2 saame punkti Q. Täisnurkse kolmnurga P_1QP_2 kaatet

$$P_1Q = X_1X_2 = x_2 - x_1;$$

sama kolmnurga kaatet

$$QP_2 = X_2P_2 - X_2Q = X_2P_2 - X_1P_1 = y_2 - y_1.$$

Pythagorase teoreemi põhjal on

$$P_1P_2{}^2 = P_1Q^2 + QP_2{}^2;$$

tähistades pikkuse P_1P_2 tähega d, leiame, et

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

mida võime sõnastada järgmiselt:

kahe punkti vahelise kauguse ruut on võrdne nende punktide samanimeliste koordinaatide vahede ruutude summaga.

N ä i d e. Olgu $P_1 \equiv (-8 \mid -3)$ ja $P_2 \equiv (5 \mid -7)$. Leiame nende punktide vahelise kauguse.

Tuletatud valemi põhjal

$$P_1P_2{}^2 = [5 - (-8]^2 + [-7 - (-3)]^2 =$$
$$= 13^2 + (-4)^2 = 13^2 + 4^2 = 185,$$

seega

$$P_1P_2 = \sqrt{185}$$

ehk

$$P_1P_2 \approx 13{,}6.$$

40. Arvutada järgmiste punktide kaugused koordinaatide algusest:

$(3 \mid 4)$ $(12 \mid 5)$ $(-7 \mid 24)$ $(8 \mid -6)$

$(-2 \mid 3\frac{1}{2})$ $(4{,}2 \mid -1{,}1)$ $(0 \mid -1\frac{1}{2})$ $(2{,}1 \mid 0)$.

41. Arvutada punktide vaheline kaugus iga järgneva punktide paari puhul:

1. $(1 \mid 3)$ $(2 \mid 7)$
2. $(1 \mid 2)$ $(-3 \mid -1)$
3. $(-4 \mid -2)$ $(-2 \mid -4)$
4. $(m \mid n)$ $(0 \mid 0)$

42. Kolmnurga tipud on

$A \equiv (4 \mid 1)$, $B \equiv (-2 \mid 4)$ ja $C \equiv (1 \mid -2)$.

Arvutada kolmnurga külgede pikkused.

43. Nelinurga tippudeks on punktid $A \equiv (-6 \mid 10)$, $B \equiv (-7 \mid -4)$, $C \equiv (3 \mid -9)$ ja $D \equiv (10 \mid 4)$. Arvutada nelinurga külgede ja diagonaalide pikkused.

44. Kolmnurga tipud on $M \equiv (3 \mid 4)$, $N \equiv (-1 \mid 1)$ ja $P \equiv (0 \mid -3)$. Arvutada kolmnurga mediaanide pikkused.

45. Kolmnurga tipud on $A \equiv (-6 \mid -4)$, $B \equiv (2 \mid 8)$ ja $C \equiv (-10 \mid 0)$. Näidata, et kolmnurk on võrdhaarne.

46. Kolmnurga tipud on $A \equiv (1 \mid 2)$, $B \equiv (3 \mid 4)$ ja $C \equiv (-1 \mid 4)$. Näidata, et kolmnurk on täisnurkne.

47. Kolmnurga tipud on $(3{,}5 \mid 0)$, $(5{,}7 \mid 0)$ ja $(4 \mid 2{,}5)$. Arvutada kolmnurga pindala.

48. Kuidas muutub kahe punkti vaheline kaugus, kui kujutamisühikut kummalgi teljel vähendatakse k korda?

§ 7. Joone võrrand.

Punkti koordinaatidega a ja b märkisime ülal sümboliga $(a \mid b)$. Abstsissi üldtähiseks kasutasime tähte x, ordinaadi üldtähiseks — tähte y. Seega punkti abstsissiga a ja ordinaadiga b võime märkida kujul $(x = a,\ y = b)$ ehk ka kujul

$$\begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$$

Selles kirjutusviisis punkt on antud kahe võrrandiga. Need võrrandid on ses mõttes erikujulised, et nad esinevad juba lahendatuna tundmatute x ja y suhtes. Seame küsimuse, mida esitavad üldse kaks võrrandit kahe tundmatuga x ja y, vaadeldud süsteemina?

Niisugused 2 võrrandit kahe tundmatuga on näiteks süsteemid:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 4x \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Lahendades need tundmatute x ja y suhtes, leiame, et

esimesel juhul teisel juhul kolmandal juhul

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 3 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -3, \end{cases} \qquad \text{pole lahendeid.}$$

Esimesel juhul saame süsteemile ühe lahendi, teisel — kaks lahendit, kolmandal ei ühtegi lahendit. Niisiis esimene võrrandipaar esitab üht punkti $(2 \mid -4)$, teine — kaht punkti $(3 \mid 3)$ ja $(-3 \mid -3)$, aga kolmas — ei ühtegi punkti.

Eeldame, et võrrandi kõik liikmed on viidud vasakule poolele; siis seisab paremal pool võrdusmärki null. Võrrandi vasakuks pooleks on mingi avaldis tundmatuist x ja y; tähistame selle avaldise lühidalt tähega F, mille taha sulgudesse kirjutame x ja y, näidates seega, et avaldis F on koostatud suurustest x ja y. Nii saame kahe tundmatuga võrrandi kirjutada kujul

$$F(x, y) = 0.$$

Kui on tegemist korraga mitme niisuguse võrrandiga, siis tähistame neil vasakud pooled, seepärast et nad on üksteisest erinevad avaldised suurustest x ja y, muidugi ka eri tähtedega, näiteks tähtedega F, G, H jne. Kolm seesugust võrrandit

$$F(x, y) = 0, \qquad G(x, y) = 0 \quad \text{ja} \quad H(x, y) = 0$$

saame näiteks, kui võrranditel

$$y = 2x + 1, \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \text{ja} \quad y^2 = 4x - 7$$

viime kõik liikmed vasakutele pooltele; siis $F(x, y)$, $G(x, y)$ ja $H(x, y)$ tähendus on järgmine:

$$F(x, y) = y - 2x - 1, \qquad G(x, y) = x^2 + y^2 - 2x,$$
$$\text{ja} \qquad H(x, y) = y^2 - 4x + 7.$$

Kasutades seda võrrandite üldkujulist kirjutamisviisi, võime sõnastada eelnenud kaalutluste tulemuse nõnda:

k a k s v õ r r a n d i t k a h e t u n d m a t u g a

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

v a a d e l d u n a k o o s, e s i t a v a d a l g e b r a l i s e l t n i i m i t u t xy-t a s a p i n n a p u n k t i, k u i m i t u s u u r u s t e x j a y v ä ä r t u s e p a a r i n e i d v õ r r a n d e i d r a h u l d a b. Ehk teisiti:

v õ r r a n d s ü s t e e m i

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

g e o m e e t r i l i s e k s v a s t e k s o n n i i m i t u xy-t a s a p i n n a p u n k t i, k u i m i t u l a h e n d i t o n s e l l e l s ü s t e e m i l.

Seame endile nüüd küsimuse, m i d a k u j u t a b **ü k s** v õ r r a n d k a h e t u n d m a t u g a

$$F(x, y) = 0?$$

Võib juhtuda, et ei leidu x ja y väärtusepaare, mis võrrandit rahuldavad. Niisugune olukord on meie ees näiteks võrrandi puhul

$$3x^2 + y^2 + 5 = 0$$

ehk

$$3x^2 + y^2 = -5.$$

Vasakul poolel on kumbki liige suurem kui 0 või võrdne nulliga; nende liikmete summa ei saa iialgi olla negatiivne. Sel puhul võrrandil e i o l e lahendeid ja seega võrrandil e i o l e ka geomeetrilist vastet.

Võib juhtuda, et leidub ainult ü k s i k u i d väärtusepaare, mis rahuldavad võrrandit $F(x, y) = 0$; siis on võrrandi geomeetriliseks vasteks need punktid xy-tasapinnal, millede koordinaadipaarideks on niisugused väärtusepaarid. Näiteks on võrrandi

$$4x^2 + 5(y - 1)^2 = 0$$

vasaku poole mõlemad liikmed suuremad kui 0 või võrdsed sellega. Nende liikmete summa võib olla 0 ainult siis, kui kumbki neist liikmeist on 0; seega $4x^2 = 0$ ja $5(y - 1)^2 = 0$ ehk $x = 0$, $y = 1$. Võrrandi geomeetriliseks vasteks on siin ü k s a i n u s punkt.

Võib viimaks juhtuda, et leidub piiramata hulk väärtusepaare, mis rahuldavad võrrandit $F(x, y) = 0$. Siis on võrrandi $F(x, y) = 0$ geomeetriliseks vasteks piiramata hulk xy-tasapinna punkte. Niisugust olukorda näeme näiteks võrrandi puhul

$$x^2 - 4y = 0.$$

Tõepoolest, andes x-ile ükspuha missuguse väärtuse a, saame arvutada vastava y väärtuse: $y = \frac{1}{4} a^2$. Väärtuste paar

$$\begin{cases} x = a \\ y = \frac{1}{4} a^2 \end{cases}$$

rahuldab antud võrrandit igasuguse arvu a puhul. Sel juhul on võrrandi $F(x, y) = 0$ geomeetriliseks vasteks kõigi punktide $(a \mid \frac{1}{4} a^2)$ kogu, kus a on ükspuha missugune arv. Leiame mõned neist punktidest, võttes x-i väärtused täisarvulistena ja paigutades arvutustulemused ülevaatlikku tabelisse:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Märkides väärtusepaarid $(-4 \mid 4)$, $(-3 \mid 2{,}25)$, $(-2 \mid 1)$ jne. punktidena xy-tasapinnal näeme, et need punktid asuvad kõik ühel joonel. Andes x-ile rida vahepealseid väärtusi, nagu näiteks $x = -3{,}2$, $x = 1{,}8$ ja arvutades neile vastavad y-d: $y = 2{,}56$, $y = 0{,}81$, näeme, et saadud väärtusepaaridele $(-3{,}2 \mid 2{,}56)$, $(1{,}8 \mid 0{,}81)$ vastavad punktid, mis on samal joonel, kus eelmisedki. Üldiselt: kui leidub piiramata hulk väärtusepaare (x, y), mis rahuldavad võrrandit $F(x, y) = 0$, siis selle võrrandi geomeetriliseks vasteks xy-tasapinnal on mingi joon C. Seejuures igale väärtusepaarile (x, y), mis rahuldab võrrandit $F(x, y) = 0$, vastab punkt joonel C ja iga joone C punkt omab koordinaate $(x \mid y)$, mis rahuldavad võrrandit $F(x, y) = 0$. Joon C on siis võrrandi $F(x, y) = 0$ geomeetriliseks vasteks, võrrand $F(x, y) = 0$ — joone C algebraliseks vasteks ehk, lühemalt, joone C võrrand.

Niisiis:

joone võrrand on niisugune võrrand tundmatutega x ja y, mida rahuldavad joone iga punkti koordinaadid ja ainult need.

Joont antakse geomeetrias ikka mingi teda määrava omadusega. Näiteks: ringjoon on niisugune joon, mille kõik punktid asuvad võrdseil kaugusil ühest kindlast punktist (ringi keskpunktist). Lõigu keskristjoont iseloomustab omadus, et iga tema punkt on võrdseil kaugusil lõigu otspunktidest. J o o n e   v õ r r a n d   s a a d a k s e,   a v a l d a d e s   j o o n t   m ä ä r a v   o m a d u s   k o o r d i n a a t i d e   k e e l e s.

Lahendame mõned joone võrrandi koostamise ülesanded.

Ü l e s a n n e 1. Punkt liigub xy-tasapinnas jäädes võrdkaugele punktidest $M \equiv (4 \mid 0)$ ja $N \equiv (0 \mid 6)$. Leida punkti kulgetud joone võrrand.

L a h e n d u s. Olgu P liikuva punkti m i n g i asukoht (jätame ütlemata, missugune nimelt). Punkti P liikumistingimuste kohaselt peab olema

$$MP = NP,$$

seega ka

$$MP^2 = NP^2.$$

Olgu punkti P koordinaadid x ja y. Siis punktide vahelise kauguse ruudu valemi järgi

$$MP^2 = (x - 4)^2 + (y - 0)^2,$$
$$NP^2 = (x - 0)^2 + (y - 6)^2$$

ja seega

$$(x-4)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-6)^2$$

ehk

$$x^2-8x+16+y^2=x^2+y^2-12y+36$$

ehk

$$8x-12y+20=0$$

ehk

$$2x-3y+5=0.$$

See võrrand on saadud punkti P koordinaatide jaoks. Et aga P oli liikuva punkti m i n g i asukoht (ja polnud öeldud, missugune nimelt), siis tulemus on kehtiv liikuva punkti i g a asukoha jaoks. Seega leitud võrrandit rahuldavad uuritava joone iga punkti koordinaadid, s. t. kulgetud joone võrrand on

$$2x-3y+5=0.$$

Ü l e s a n n e 2. Lõigul otspunktidega $(0|0)$ ja $(2|0)$ kui diameetril on joonestatud ring. Leida selle ringjoone võrrand.

L a h e n d u s. Olgu P kõnesoleva ringjoone m i n g i punkt ja olgu tema koordinaadid x ja y. Joonestame punkti P ordinaatlõigu. Selle alus jaotab antud diameetri kaheks osaks: x ja $2-x$. Ringjoone punktist diameetrile langetatud ristjoone omaduse põhjal kirjutame:

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{2-x}.$$

See võrrand on saadud punkti P koordinaatide jaoks. Et aga punkt P oli ringjoone m i n g i punkt, siis on leitud võrrand kehtiv ringjoone iga punkti kohta ja on seega ringjoone võrrand.

Rakendades võrde põhiomadust ja viies kõik liikmed vasakule poolele, saame võrrandit kirjutada kujul:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Ülesanne 3. Leida joone võrrand, teades, et joone iga punkt asub võrdseil kaugusil antud punktist ja antud sirgest.

Lahendus. Olgu antud punkt märgitud tähega F ja antud sirge tähega d. Et nad mõlemad on antud, siis võime lugeda antuks ka nende vahelist kaugust. Märgime selle kauguse tähega p.

Asudes nõutud võrrandi tuletamisele valime kõigepealt koordinaatide teljed. Võtame näiteks sirge d x-teljeks ja paneme y-telje läbi punkti F risti x-teljega. Siis on $F \equiv (0 \mid p)$.

Võtame uuritaval joonel mingi punkti; olgu selle punkti tähiseks P ja tema koordinaatideks x ja y. Ühendame punkti P punktiga F ja langetame punktist P perpendikulaari PD sirgele d. Ülesande tingimuste kohaselt peab olema

$$PF = PD,$$

seega ka

$$PF^2 = PD^2.$$

Nüüd on aga

$$PF^2 = (x - 0)^2 + (y - p)^2,$$

ja

$$PD = y,$$

seega

$$PD^2 = y^2.$$

Järelikult

$$(x - 0)^2 + (y - p)^2 = y^2$$

ehk

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2$$

ehk

$$x^2 - 2py + p^2 = 0.$$

See võrrand on saadud punkti P koordinaatide kohta. Et see punkt oli joone m i n g i punkt, siis on leitud seos kehtiv joone i g a punkti kohta ja on seega joone võrrand.

Joont, mille punktid asuvad võrdseil kaugusil antud punktist ja antud sirgest, nimetatakse parabooliks.

Antud punkti nimetatakse parabooli f o o k u s e k s, antud sirget parabooli j u h t j o o n e k s. Fookuse ja juhtjoone vahelist kaugust nimetatakse parabooli p a r a m e e t r i k s.

Parabooli definitsioonist lähtudes on kerge parabooli joonistada. Võtame nimelt mingi lõigu, suurema kui parameeter. Joonestame selle lõigu kui raadiusega ringi ümber fookuse ja tõmbame sama lõigu kaugusel juhtjoonest juhtjoonega rööbiku sirge. Ringjoon ja sirge lõikuvad kahes punktis, mis mõlemad kuuluvad paraboolile. Muutes lõigu pikkust saame veel kaks parabooli punkti. Sama teed edasi käies saame nii palju parabooli punkte, kui soovime. Jääb vaid ühendada neid sileda katkemata kõveraga.

M ä r k u s. Kui y-telg oleks valitud nagu ennegi, x-telg aga oleks nihutatud $\frac{p}{2}$ võrra fookuse poole, siis joone võrrand oleks võtnud lihtsama kuju, nimelt:

$$x^2 - 2py = 0$$

ehk

$$x^2 = 2py.$$

Telgede nimetuse vahetamisel oleks võrrand saanud kuju

$$y^2 = 2px.$$

Lahendades võrrandi $x^2 = 2py$ ordinaadi suhtes ja tähistades x^2 kordajat tähega a, saame parabooli võrrandi kujul

$$y = ax^2.$$

Mõnikord on võimalik kirjutada joone võrrandit esimeselt pilgult joonele. Olgu näiteks tegemist sirgjoonega, mis on tõmmatud rööbiti y-teljega kaugusel a sellest teljest. Et kõigil selle sirge punktidel on üks ja seesama abstsiss a, siis on kõnesoleva sirgjoone võrrand

$$x = a.$$

Sirgjoonel, mis on tõmmatud rööbiti x-teljega kaugusel b sellest teljest, on võrrandiks

$$y = b.$$

y-telje võrrandiks on

$$x = 0;$$

x-telje võrrandiks on

$$y = 0.$$

Koordinaatide I veerandi nurgapoolitaja iga punkt asetseb võrdseil kaugusil x-teljest ja y-teljest; seega koordinaatide I veerandi nurgapoolitaja võrrandiks on

$$y = x.$$

Kokku võttes joone võrrandi näiteis õpitut, saame järgmise juhise joone võrrandi koostamiseks:

et saada joone võrrandit, valime teljestiku, võtame joonel mingi tema punkti (jättes ütlemata, missuguse nimelt), märgime punkti koordinaadid ja avaldame neis tähistes omaduse, mis on kõigil joone punktidel ühine, või tingimuse, mida kõik joone punktid peavad rahuldama.

Sel viisil saadud võrrand on tuletatud küll ainult võetud punkti koordinaatide kohta. Et see punkt aga oli võetud joonel vabalt, siis on see võrrand kehtiv joone iga punkti kohta ja on seega tõepoolest joone võrrand.

Võrrandi kergema uurimise ja rakendamise otstarbel vabastame ta murdudest ja juuremärkidest (kui nende all peaksid esinema koordinaadid) ning kanname kõik koordinaate sisaldavad liikmed vasakule poolele.

Selle asemel, et ütelda „joon, mille võrrand on $F(x, y) = 0$“, ütleme lühidalt „joon $F(x, y) = 0$“. Lauset „leida joon“ mõistame lausena „koostada joone võrrand“.

Joone võrrandi abil lahenevad kergesti mitmed joone kohta sageli esinevad ülesanded.

Ü l e s a n n e 1. On antud joon C oma võrrandiga $F(x, y) = 0$. Kas punkt $P \equiv (a \mid b)$ asub joonel või mitte?

L a h e n d u s. Kui punkt P on joonel C, siis peavad tema koordinaadid rahuldama joone võrrandit. Seepärast asetame avaldisse $F(x, y)$ x ja y asemele a ja b ja arvutame tulemuse $F(a, b)$. Kui see on null, siis punkt P asetseb joonel C; kui see on nullist erinev, siis mitte.

Ü l e s a n n e 2. On antud joon C oma võrrandiga $F(x, y) = 0$ ja joonel asuva punkti P abstsiss x_0. Kui suur on punkti P ordinaat?

L a h e n d u s. Olgu otsitav ordinaat y_0. Et punkt $(x_0 \mid y_0)$ peab asetsema joonel C, siis tema koordinaadid peavad rahuldama joone võrrandit; seega peab olema $F(x_0, y_0) = 0$. Lahendades selle võrrandi y_0 suhtes saame nõutud ordinaadi.

Ü l e s a n n e 3. On antud kaks joont oma võrranditega $F(x, y) = 0$ ja $G(x, y) = 0$. Kus asuvad nende joonte ühispunktid?

L a h e n d u s. Joonte iga ühispunkt asub nii ühel kui teisel joonel. Järelikult joonte ühispunkti koordinaadid peavad rahuldama nii üht kui teist võrrandit. Seega ühispunkti (või kui neid on mitu, siis ühispunktide) koordinaadid saadakse lahendades mõlemad antud võrrandid ühiselt:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ülesanne 4. Kus lõikab joon $F(x, y) = 0$ koordinaattelgi?

Lahendus. Abstsiss- ja ordinaattelje võrrandid on vastavalt $y = 0$ ja $x = 0$. Seega joone ja telgede lõikepunktide koordinaadid saadakse lahendades süsteemid:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Koordinaatide meetod matemaatikas.

Ülal nägime, et joone võrrand on joone algebraliseks vasteks. Seega joone võrrand võimaldab uurida algebra võtetega joone kuju, omadusi ja iseärasusi. Samal ajal on joon oma võrrandi geomeetriliseks vasteks. Ta väljendab tundmatute x ja y vahel kehtivat algebralist seost, selle seose omadusi ja iseärasusi. „Võtmeks", mille abil geomeetrilised vahekorrad tõlgitakse algebra keelde ja ümberpöördult — algebralised vahekorrad tõlgitakse geomeetrilisse keelde, on koordinaatide mõiste. Sellel mõistel põhinevat uurimismeetodit nimetatakse koordinaatide meetodiks ja matemaatika haru, mis ehitatud koordinaatide mõistele ja koordinaatide meetodile — analüütiliseks geomeetriaks.

Koordinaatide meetodi loomisega avanes tee geomeetriliste tõdede avastamiseks algebra vahenditega ja algebraliste tõdede selgitamiseks geomeetriliste abinõudega. Koordinaatide meetodi loojaks on suur prantsuse matemaatik ja mõtteteadlane Descartes (loe: dekárt). Ta avaldas selle meetodi a. 1637 oma mahult väikeses raamatukeses „Géométrie" (loe: žeometrii = geomeetria). Selle teose ilmumisega algas matemaatika ajaloos uus ajastu.

Koordinaatide meetod on osutunud mitte ainult võimsaks uurimisvahendiks matemaatikas. Ta on kandnud rikkalikku vilja ka loodusteaduse kõigis osades ja leidnud laialdast rakendamist paljudel praktilise töö aladel.

Ülesanded.

49. Koostada joone võrrand teades, et joone punkti kaugus y-teljest on 2 korda suurem kui kaugus x-teljest.

50. Tuletada joone võrrand teades, et joone punkti kaugused punktidest $M \equiv (-2 \mid 0)$ ja $N \equiv (1 \mid -3)$ on võrdsed.

51. Kolmnurga aluseks on lõik OA x-teljel otspunktidega $O \equiv (0 \mid 0)$ ja $A \equiv (a \mid 0)$. Aluse vastastipp T liigub xy-tasapinnal nii, et kolmnurga OAT pindala jääb muutmatuks. Teades, et see pindala on c, koostada tipu T poolt kujutatud joone võrrand.

52. Kahel kolmnurgal on ühine tipp T; nende alused aga asuvad telgedel: aluse OA otspunktid on $O \equiv (0 \mid 0)$ ja $A \equiv (a \mid 0)$ ja aluse OB otspunktid on $O \equiv (0 \mid 0)$ ja $B \equiv (0 \mid b)$. Tipp T liigub xy-tasapinnal nõnda, et kolmnurga OAT ja OBT pindalad omavad muutumatu summa c. Tuletada tipu T poolt kujutatud joone võrrand.

53. Punkt liigub xy-tasapinnas nõnda, et tema kaugused punktidest $M \equiv (-2 \mid 3)$ ja $N \equiv (6 \mid -1)$ annavad muutumatu ruutude vahe 8. Koostada punkti kujutatud joone võrrand.

54. On antud ruut küljega a. Kirjutada selle joone võrrand, mille iga punkti kaugused ruudu külgedest annavad kindla ruutude summa b.

55. Leida joone $xy - 4x - 1 = 0$ lõikepunktid koordinaatide telgedega.

56. Missugused järgmistest joontest lähevad läbi koordinaatide alguspunkti, missugused mitte?

1. $3x + 4y = 0$
2. $2x - y - 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 = 10$
4. $2^x - 3y - 1 = 0.$

57. On antud joon $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ja tema ühe punkti abstsiss $\frac{3}{4}$. Leida sama punkti ordinaat.

58. Missugustes punktides joon

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

lõikab koordinaatide telgi ja I veerandi nurgapoolitajat?

Peatükk II.

Sirgjoon.

§ 8. Sirgjoone tõus.

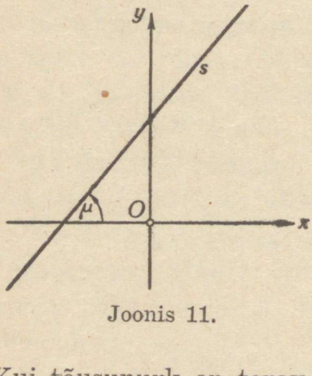
Olgu tasapinnal võetud koordinaatide teljestik ja mingi sirgjoon, mis lõikab x-telge. Siis

sirgjoone tõusunurgaks nimetatakse väikseimat positiivset nurka, mille esimene haar on sihitud positiivses suunas piki x-telge, teine haar aga piki sirgjoont.

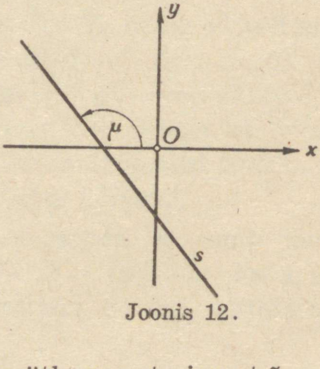
Nagu sirgjoone tõusunurga definitsioonist järeldub, asub see tõusunurk ikka ü l a l p o o l x-telge, seega:

sirgjoone tõusunurk on alati 0^0 ja 180^0 vahel.

Sirgjoone tõusunurka tähistame tähega μ. Sirgjoone võimalikke asendeid x-telje suhtes arvestades näeme, et nurk μ on kas teravnurk (joonis 11), täisnurk või nürinurk (joonis 12).



Joonis 11.



Joonis 12.

Kui tõusunurk on terav, siis ütleme, et sirge t õ u s e b tema punkti abstsissi kasvades; kui tõusunurk on nüri, ütleme, et sirge l a n g e b tema punkti abstsissi kasvades.

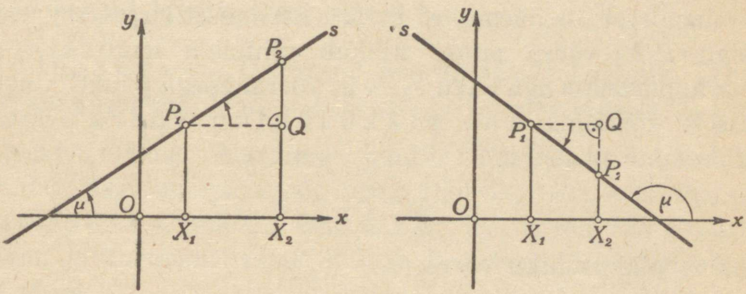
Kui sirgjoon ei lõika x-telge, s. t. kui ta on x-teljega paralleelne, siis loeme sirgjoone tõusunurga suuruseks 0^0.

Sirgjoone tõusunurga tangensit nimetatakse sirgjoone tõusuks.

Tähistame sirgjoone tõusu tähega m; siis

$$m = \tan \mu.$$

Olgu punktid $P_1 \equiv (x_1 \mid y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 \mid y_2)$ sirge s kaks punkti, kusjuures $x_2 > x_1$. Siis punkt P_2 on punktist P_1 paremal pool (joonis 13). Joonestame nende punktide ordinaatlõigud X_1P_1 ja X_2P_2 ning tõmbame punktist P_1 sirge P_1Q risti ordinaatlõiguga X_2P_2. Vaatleme tekkinud nurka QP_1P_2. Ta on



Joonis 13.

t õ u s v a sirge korral p o s i t i i v n e ja suuruselt võrdne tõusunurgaga;

l a n g e v a sirge korral n e g a t i i v n e ja suuruselt võrdne tõusunurga täiendusega 180^0-ni.

Sellest järeldub, et

t õ u s v a sirge korral $\tan QP_1P_2 = \tan \mu$,

l a n g e v a sirge korral

$$\tan QP_1P_2 = \tan [-(180^0 - \mu)] = \tan (\mu - 180^0) = \tan \mu.$$

Seega nii tõusva kui ka langeva sirge korral tõus

$$m = \tan QP_1P_2.$$

Kasutame seda võrdust sirge tõusu arvutamiseks. Et täisnurkses kolmnurgas QP_1P_2 kaatet

$$QP_2 = y_2 - y_1$$

ja kaatet

$$P_1Q = X_1X_2 = x_2 - x_1,$$

siis

$$\tan \widehat{QP_1P_2} = \frac{QP_2}{P_1Q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ja seega sirge tõus

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Joonisest 13 näeme, et punkti liikumisel sirget s mööda lõigu P_1P_2 võrra punkt nihkub rõhtsihis lõigu $x_2 - x_1$ võrra, püstsihis aga lõigu $y_2 - y_1$ võrra. Seega punkti nihkumisele rõhtsihis ü h e p i k k u s ü h i k u v õ r r a vastab nihkumine püstsihis

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ehk m pikkusühiku võrra.

Niisiis:

sirge tõus näitab, mille võrra sirge punkt tõuseb püstsihis, kui punkt nihkub rõhtsihis ühe ühiku võrra.

Tõusva sirge korral on see nihe positiivne ja langeva sirge korral negatiivne. Seega

tõusval sirgel on positiivne tõus, langeval sirgel — negatiivne tõus.

Ümberpöördult:

positiivse tõusuga sirge tõuseb ja negatiivse tõusuga sirge langeb, sest positiivse tõusu korral on tõusunurk teravnurk ja negatiivse tõusu korral — nürinurk.

Kui sirge tõusunurk μ on teada, siis saame tangensite tabeli abil leida tõusu m; ümberpöördult, kui on teada tõus m, saame sama tabeli abil leida tõusunurga μ. Et nurga joonestamine nurga tangensi järgi on tunduvalt hõlpsam ja täpsem kui nurga suuruse järgi kraadides ja minutites, siis antakse sirge puhul sageli mitte nurk μ, vaid tõus m.

Ülesanne 1. On joonestatud koordinaatide teljestik ja sirge. Määrata selle sirge tõus.

Lahendus. Võtame sirgel kaks punkti, küllalt kaugel teineteisest; joonestame esimesest punktist sirge rööbiti x-teljega, teisest punktist sirge rööbiti y-teljega, mõõdame saadud täisnurkse kolmnurga püstkaateti ja rõhtkaateti (näiteks millimeetrites), võtame kummagi saaduse suunale vastava märgiga ja jagame esimese tulemuse teisega. Saadud jagatis ongi nõutud tõus.

Ülesanne 2. On antud koordinaatide teljestik. Joonestada sirge, mis läbib punkti $(2 \mid 1)$ ja mille tõus on $-1{,}5$.

Lahendus. Märgime punkti $P \equiv (2 \mid 1)$. Sellest punktist tõmbame paremale mingi rõhtlõigu PQ, selle lõpust allapoole püstlõigu QR, mis on 1,5 korda rõhtlõigust pikem, ja ühendame punktid P ja R sirgega. See ongi nõutud sirge.

Ülesanded.

59. Leida sirge tõus, kui sirge tõusunurk on

$16^0\,42'$	$21^0\,48'$	$36^0\,30'$	$56^0\,54'$
$93^0\,06'$	$105^0\,18'$	$130^0\,24'$	158^0.

Missugused neist sirgeist on positiivse ja missugused negatiivse tõusuga?

Missugused neist sirgeist tõusevad paremale ja missugused vasakule poole?

60. Kui suurt tõusu omavad koordinaatide telgede vaheliste nurkade poolitajad?

61. Kasvagu sirge tõusunurk 30-st kraadist alates kahekordseks. Mitmekordseks kasvab sel puhul sirge tõus?

62. Leida tabelist sirge tõus, kui tõusunurk on

$$10^0 \quad 20^0 \quad 30^0 \quad 40^0 \quad 50^0.$$

Kas tõus kasvab võrdeliselt tõusunurgaga?

63. Kui suur tõusunurk vastab tõusule

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5?$$

64. Kui suur on x-teljega rööbiku sirge tõus? — y-teljega rööbiku sirge tõus?

65. Tõusude skaalast pildi saamiseks joonestada koordinaatide algusest sirged tõusudega

$$-10, -9, \ldots 0, +1, +2, \ldots +9, +10$$

ning märkida igal sirgel temale vastav tõus.

66. Teetõusu tahvlike raudteel kannab märget 3 : 200. Kui suur on raudtee tõusunurk?

67. Sirge läbib koordinaatide algust ja punkti $(-5 \mid 3)$. Kui suur on sirge tõus?

68. Sirge läbib punkte $(-4 \mid 3)$ ja $(2 \mid -1)$. Kui suur on sirge tõus?

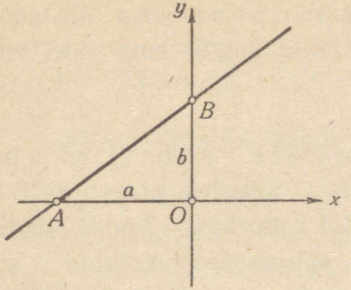
§ 9. Sirgjoone määramine tasapinnal.

Kui koordinaatide teljestik on antud, siis tasapinna iga p u n k t on määratud oma kahe koordinaadiga. Küsime, missuguste andmetega saab määrata s i r g e t sellel tasapinnal?

Sirget saame joonestada kõigepealt tema kahe punkti järgi, seega

sirge on määratud oma kahe punkti koordinaatidega.

Kui sirge ei lähe läbi koordinaatide alguspunkti (joonis 14), siis lõikab ta x-teljel lõigu $OA = a$ ja y-teljel lõigu $OB = b$. Neid lõike nimetame vastavalt sirge a l g a b s t s i s s i k s ja a l g o r d i n a a d i k s, mõlemaid koos — sirge t e l g l õ i k u d e k s. Et need lõigud määravad sirge kaks punkti



Joonis 14.

$$A \equiv (a \mid 0) \quad \text{ja} \quad B \equiv (0 \mid b),$$

need aga omakorda määravad sirge, siis näeme, et

sirge, mis ei läbi nullpunkti, on määratud oma algabstsissi ja algordinaadiga.

Eespool nägime, et sirget saab joonestada, kui teame üht tema punkti ja sirge tõusu; seega

sirge on määratud ühe oma punkti koordinaatide ja oma tõusuga.

Et antud punktiks võib olla näiteks ka punkt, milles sirge lõikab y-telge, siis

sirge on määratud oma algordinaadi ja tõusuga.

M ä r k u s. Iga ülalpool-nimetatud andmepaar ei sobi i g a sirgjoone määramiseks. Näiteks pole võimalik anda sirgjoont telglõikudega, kui ta läbib koordinaatide algust. Sel puhul on mõlemad telglõigud n u l l i d. Andmeile $a = 0$ ja $b = 0$ vastab aga i g a alguspunkti läbiv sirge. Seega andmed $a = 0$ ja $b = 0$ ei määra kindlat sirget.

§ 10. Sirgjoone võrrand.

Olgu antud mõni sirge xy-tasapinnas. Igal selle sirge punktil on o m a abstsiss x ja o m a ordinaat y. Punkti liikudes sirget mööda m u u t u v a d kas mõlemad koordinaadid või vähemalt üks neist. Viimane juhtum esineb siis, kui tegemist on sirgega, mis on rööbiti ühe koordinaatteljega: kui sirge on rööbiti y-teljega, siis on kõigil tema punktidel üks ja seesama, seega muutumatu abstsiss; kui sirge on rööbiti x-teljega, siis on kõigil tema punktidel muutumatu ordinaat.

Olgu antud mõni sirge, mis ei ole rööbiti ei ühe ega teise teljega. Punkti liikudes sirget mööda punkti mõlemad koordinaadid muutuvad; koordinaadid ei muutu aga mitte teineteisest sõltumata; vastupidi: kui üks sirge punkti koordinaatidest on ette antud, siis seega ka teine on juba ette määratud. Tõepoolest, olgu näiteks antud sirgjoone punkti abstsiss x. Märgime sellele vastava abstsisslõigu OX. Punktist X saab tõmmata vaid ühe ordinaatlõigu XP, mille lõpp-punkt on sirgel. Samuti näeksime, et sirgjoone punkti ordinaadi andmisega on ette määratud ka selle punkti abstsiss. Seega sirgjoone punkti ühele koordinaadile vastab ikka kindel teine koordinaat ehk, nagu ütleme,

sirgjoone punkti koordinaadid sõltuvad teineteisest

ehk

sirgjoone punkti üks koordinaat sõltub teisest.

Et lähemalt uurida sirgjoone punkti koordinaatide vahelist sõltuvust, selleks tuletame sirgjoone võrrandi. Joone võrrandi üldise definitsiooni järgi

sirgjoone võrrandiks on kahe tundmatuga võrrand, mida rahuldavad sirge iga punkti koordinaadid ja ainult need.

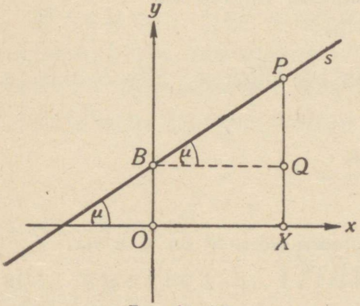
Sirgjoone võrrandi tuletame ennemalt antud eeskirja kohaselt.

§ 11. Algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand.

Olgu sirgjoon s antud oma algordinaadiga b ja tõusunurgaga μ, millest oletame, et ta on erinev 90°-st (joonis 15). Koostame sirgjoone võrrandi.

Selleks arutleme nõnda:

Olgu P üks sirge s punktidest; missugune nimelt, selle jätame ütlemata. Olgu punkti P koordinaadid tähistatud x ja y-ga. Joonestame punkti P ordinaatlõigu XP ja sellele punktist B ristjoone BQ. Täisnurksest kolmnurgast PBQ saame siis, et



Joonis 15.

$$QP = BQ \cdot \tan \mu$$

ehk ka

$$XP - XQ = BQ \cdot \tan \mu$$

ehk

$$XP - OB = OX \cdot \tan \mu$$

ehk

$$y - b = x \cdot \tan \mu,$$

seega

$$y = x \cdot \tan \mu + b.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate suurustega, mille abil sirge s oli antud. Et P oli üks sirge s punktidest ja et ei olnud öeldud, missugune punkt nimelt, siis leitud seos kehtib sirge s iga punkti koordinaatide kohta, järelikult see seos ongi sirgjoone võrrand.

Kirjutades $\tan \mu$ asemel m, saame algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrandi anda kujul

$$y = mx + b.$$

Saadud võrrand on kehtiv ainult sirge s punktide koordinaatide kohta: kui võtaksime punkti $(x \mid y)$, mis on väljaspool sirget s, siis

$$y \neq mx + b$$

ja nimelt on siis

$y > mx + b$, kui punkt $(x \mid y)$ on ülalpool sirget s ja
$y < mx + b$, kui punkt $(x \mid y)$ on allpool sirget s.

Algordinaadi ja tõusuga saab määrata iga sirget, mis ei ole rööbiti y-teljega; seega on iga niisuguse sirge võrrand kirjutatav kujul

$$y = mx + b.$$

Kokkuvõttes:

algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand on

$$\boldsymbol{y = mx + b.}$$

Kui sirgjoon läbib koordinaatide algust, siis $b = 0$ ja võrrandiks jääb

$$y = mx.$$

Niisiis:

läbi koordinaatide alguse mineva sirgjoone võrrand on $\boldsymbol{y = mx}$.

Kui sirgjoon on rööbiti x-teljega, siis $\mu = 0$, seetõttu ka $m = 0$ ja sirgjoone võrrand on

$$y = b.$$

Kui sirgjoon on rööbiti y-teljega, siis eespool kasutatud viisil sirgjoone võrrandit tuletada ei saa. Sel puhul sirge iga punkti abstsiss võrdub selle sirge algabstsissiga a, s. t.

$$x = a.$$

Niisiis:

abstsissteljega rööbiku sirge võrrand on $\boldsymbol{y = b}$; ordinaatteljega rööbiku sirge võrrand on $\boldsymbol{x = a}$.

Kui võrdustes $y = b$ ja $x = a$ asendada a ja b väärtusega 0, siis saame vastavalt x-telje ja y-telje võrrandid:

$$y = 0 \quad \text{ja} \quad x = 0.$$

Kokkuvõttes võime öelda, et

kuidas ka asetseb sirgjoon koordinaatide telgede suhtes, ikka omab tema võrrand kas kuju

$$x = a$$

või kuju

$$y = mx + b.$$

Et need mõlemad võrrandid on lineaarsed võrrandid, siis

sirgjoone algebraliseks vasteks on lineaarne võrrand.

Märkus. Kui sirgjoone võrrandis esineb murrulisi kordajaid või murruline vabaliige, siis on ikka võimalik võrrandi teisendamise teel anda see võrrand täisarvuliste kordajatega. Näiteks võime võrrandit

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}$$

kirjutada kujul

$$20y = -12x + 5$$

ehk ka kujul

$$12x + 20y - 5 = 0.$$

§ 12. Sirgjoone võrrandi koostamise ja kasutamise näiteid.

Ülesanne 1. Koostada koordinaatide telgede vahelisi nurki poolitavate sirgjoonte võrrandid.

Lahendus. Neid sirgeid on kaks; mõlemad nad läbivad koordinaatide algust ja järelikult omavad nende võrrandid kuju $y = mx$. Ühel neist sirgetest on tõusunurk 45^0

ja teisel 135^0. Nende sirgete tõusud on seega tan 45^0 ehk $+1$ ja tan 135^0 ehk -1. Järelikult nõutud võrrandid on vastavalt

$$y = x \quad \text{ja} \quad y = -x.$$

Ülesanne 2. Koostada sirgjoone võrrand, teades, et sirgjoone algordinaat on $-2\frac{1}{2}$ ja sirgjoone tõus on $\frac{3}{4}$.

Lahendus. Võrrandis $y = mx + b$ kirjutame m ja b asemele andmed ja saame

$$y = \frac{3}{4}x - 2\frac{1}{2}$$

ehk, teisendatult,

$$3x - 4y - 10 = 0.$$

Ülesanne 3. Sirgjoone võrrand on

$$y = 0{,}8x - 1{,}5.$$

Leida sirgjoonel punkt, mille abstsiss on 6.

Lahendus. Sirgjoone punktil abstsissiga x on ordinaat $0{,}8x - 1{,}5$; seega punktil abstsissiga 6 on ordinaat $0{,}8 \cdot 6 - 1{,}5$ ehk $4{,}8 - 1{,}5$ ehk $3{,}3$. Järelikult otsitav punkt on $(6 \mid 3{,}3)$.

Ülesanne 4. Sirgjoone s võrrand on

$$3x - 4y - 10 = 0.$$

Kas punkt $(2 \mid -1)$ asub sirgjoonel s?

Lahendus. Asetades võrrandi vasakul poolel x ja y asemele väärtused 2 ja -1, saame

$$3 \cdot 2 - 4(-1) - 10 \text{ ehk } 6 + 4 - 10 \text{ ehk } 0.$$

Seega punkti koordinaadid rahuldavad sirgjoone s võrrandit; järelikult $(2 \mid -1)$ on üks sirgjoone s punktidest ehk punkt asub sirgjoonel s.

Ülesanne 5. Kuidas asetseb punkt $(5 \mid 1)$ sirgjoone suhtes, mille võrrand on $y = 2{,}4x - 9$?

L a h e n d u s. Abstsissile 5 vastab sirgjoone punkti ordinaat $2{,}4 \cdot 5 - 9$ ehk 3; see on s u u r e m, kui antud punkti ordinaat 1; seega antud punkt asetseb a l l p o o l antud sirgjoont.

Ü l e s a n n e 6. Koostada sirgjoone s võrrand, teades, et sirgjoon tõusuga m läbib punkti $P_0 \equiv (x_0 \mid y_0)$.

L a h e n d u s. Sirgjoon tõusuga m on x-telje suhtes kaldu, seega lõikab ta y-telge. Märgime sirgjoone algordinaadi tähega b; sirgjoone võrrand on siis

$$y = mx + b,$$

kus x ja y tähendavad sirgjoone s vabalt võetud punkti koordinaate ja liige b on esiotsa veel tundmata. Selle b määrame järgmiselt: et sirgjoon s läbib punkti P_0, siis koordinaadid x_0 ja y_0 peavad rahuldama sirgjoone võrrandit; seega

$$y_0 = mx_0 + b.$$

Siit saame

$$b = y_0 - mx_0,$$

järelikult

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

ehk

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Saadud võrdus seob sirgjoone s m i n g i punkti koordinaate x ja y andmetega x_0, y_0 ja m. Nii kehtib see võrdus sirgjoone s i g a punkti koordinaatide kohta; järelikult on ta selle sirgjoone võrrand. Niisiis:

sirgel punktiga $(x_0 \mid y_0)$ ja tõusuga m on võrrand

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0).}$$

Näide. Sirgjoonel, mis läbib punkti $(-1\frac{1}{2}|2\frac{3}{4})$ ja mis omab tõusu $-\frac{1}{3}$, on võrrandiks

$$y-2\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}(x+1\frac{1}{2})$$

ehk, korrutatult 12-ga ja koondatult,

$$4x+12y=27.$$

Ülesanded.

69. Kus asetsevad tasapinna punktid, millel on üks ja seesama ordinaat —5?

70. Joonestada sirge, mis olles paralleelne y-teljega, läbib punkti $(-3|-2)$. Kirjutada selle sirge võrrand.

71. Kus asetsevad tasapinna punktid, mille abstsiss on võrdne ordinaadiga?

72. Kus asetsevad tasapinna punktid, mille abstsissi ja ordinaadi summa on 0?

73. Kirjutada sirgete võrrandid järgmisil andmeil:

1. sirge algordinaat on 2 ja tõus 3;
2. sirge algordinaat on —3 ja tõus 1;
3. sirge algordinaat on 4 ja tõus —2,3;
4. sirge algordinaat on —5 ja tõus —1.

Joonestada need sirged.

74. Kirjutada sirgete võrrandid järgmisil andmeil:

1. sirge algordinaat on +3 ja tõusunurk on 30°;
2. sirge algordinaat on —5 ja tõusunurk on 45°;
3. sirge algordinaat on 1 ja tõusunurk on 120°;
4. sirge algordinaat on —0,9 ja tõusunurk on $148^{\circ}30'$.

75. Leida järgmiste sirgete võrrandeist iga sirge jaoks algordinaat, tõus ja tõusunurk:

1. $3x - 4y + 10 = 0$
2. $x + 2y + 5 = 0$
3. $3y - 1 = 0$
4. $7x + 5y = 0$
5. $4x - 3 = 0$
6. $x - \sqrt{3}\,y - 6 = 0$
7. $\sqrt{2}\,x + y = 1$
8. $0{,}1x - 0{,}2y = 0{,}3$
9. $2x + \sqrt{5}\,y = 0$
10. $7x - 10 = 0$

76. Joonestada koordinaatide teljestikus vabalt mingi sirge ning leida joonisest sirge tõus ja algordinaat. Koostada selle sirge võrrand.

77. Joonist tegemata otsustada, kas punkt $(2 \mid 5)$ on sirgel $y = 4x - 3$ või mitte.

78. Otsustada, kas sirge $y = 2x - 7$ läbib punkti $(1 \mid -5)$ või mitte.

79. Sirgel, mille võrrand on $y = -\frac{1}{2}x + 5$, on võetud punkt, mille abstsiss on 4. Kui suur on selle punkti ordinaat?

80. Sirgel, mille võrrand on $y = 2x + 9$, on võetud punkt, mille ordinaat on 13. Kui suur on selle punkti abstsiss?

81. Allpool on antud rida sirgete võrrandeid. Missugused neist sirgeist läbivad koordinaatide algust, missugused mitte?

1. $y = 5x$

   $3x + 4y = 0$

   $x - \frac{1}{2}y - 1 = 0$

2. $x + y = 7$

   $2x + 3y - 5 = 0$

   $y - 4x + 10 = 0$

82. Leida, missuguses punktis sirge lõikab x-telge, kui sirge võrrand on:

1. $y = 3x - 6$	2. $2x + 7y = 10$
$y = 8x + 12$	$x + y = 36$
$y = -\frac{1}{2}x - 3$	$y + 4x = 100$

83. Leida, missuguses punktis sirge lõikab y-telge, kui sirge võrrand on:

1. $y = 4x + 12$	2. $3x + 5y = 15$
$y = 5x - 8$	$6x + 15y = 105$
$y = -2x + 7$	$x - 3y = 18$

84. Sirgjoone võrrand on $y = -0{,}6x + 3{,}8$. Missugused punktidest $A \equiv (3 \mid 2)$, $B \equiv (2 \mid 3)$ ja $C \equiv (-2 \mid 5)$ asuvad sellel sirgel, missugused mitte?

85. Joonestada sirge, mis läbib punkti $(-4 \mid -3)$ ja mille tõus on $-\frac{3}{4}$. Koostada selle sirge võrrand.

86. Anda sirge võrrand, teades, et ta läbib punkti $(-4 \mid 3)$ ja et tema tõusunurk on $163^0\,18'$.

87. Missugune peab olema vabaliikme b väärtus, et sirge $y = -2x + b$ läbiks punkti $(5 \mid -4)$?

88. Missugune peab olema kordaja m väärtus, et punkt $(-3 \mid 5)$ oleks sirgel $y = mx - 7$?

89. Teades, et rombi diagonaalid on võetud koordinaatide telgedeks nii, et pikem diagonaal on x-teljeks, ja teades, et rombi külg on a ja üks nurkadest on 40^0, kirjutada kõigi 4 külje võrrandid.

90. Teades, et võrdhaarse trapetsi suurem alus ja sümmeetriatelg on võetud koordinaatide telgedeks, et trapetsi alused on 10 cm ja 6 cm ja et alusnurk on 60^0, koostada trapetsi kõigi külgede võrrandid.

§ 13. Lineaarse võrrandi geomeetriline vaste.

Ülalpool nägime, et sirgjoone võrrand esineb ikka kas kujul

$$x = a$$

või kujul

$$y = mx + b.$$

Teisendamise teel saame nii ühest kui teisest võrrandi, mille kuju on

$$Ax + By + C = 0.$$

Tõestame nüüd, et ka ümberpöördult iga niisugune võrrand esitab sirgjoone, kui aga arvupaari x ja y tõlgendada tasapinna punkti koordinaatidena. Selleks näitame, et missugused ka on kordajate A, B ja vabaliikme C väärtused, ikka leidub niisugune sirge, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$Ax + By + C = 0.$$

Arvudest A, B ja C võivad mõned olla nullid, kuid mitte kõik kolm korraga, sest siis muutub võrrand samasuseks $0 = 0$. Lähtudes kordaja B suurusest võib eristada kaht juhtu, nimelt $B \neq 0$ ja $B = 0$.

Kui $B \neq 0$, siis lahendades antud võrrandi y suhtes leiame, et

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ehk, kordajat ja vabaliiget teisiti tähistades,

$$y = mx + b.$$

See võrrand esitab sirgjoont arvude m ja b ja seega ka A ja C igasuguste väärtuste juures, sest missugused ka on m ja b väärtused selles võrrandis, ikka leidub niisugune sirge, mille tõus on m ja algordinaat on b ja mille võrrand on seega $y = mx + b$. Erijuhul, kui $A = 0$, esitab antud võrrand x-teljega rööbikut sirget, ja erijuhul, kui $C = 0$, esitab ta koordinaatide alguspunkti läbivat sirget. Seega, kui $B \neq 0$, siis võrrand $Ax + By + C = 0$ esitab ikka sirgjoont.

Kui $B = 0$, siis antud võrrand omandab kuju

$$Ax + C = 0,$$

kusjuures $A \neq 0$, sest vastasel korral järgneks, et ka $C = 0$. Et $A \neq 0$, siis saame võrrandi lahendada x-i suhtes:

$$x = -\frac{C}{A}$$

ehk, lühemalt kirjutades,

$$x = a.$$

Kui $C \neq 0$, siis ka $a \neq 0$; sel juhul viimane võrrand ja ka võrrand $Ax + C = 0$ esitab y-teljega rööbikut sirget. Erijuhul, kui $C = 0$, saame võrrandist $Ax + C = 0$ y-telje võrrandi $x = 0$. Seega, kui $B = 0$, siis võrrand

$$Ax + By + C = 0$$

esitab ikka sirgjoont.

Kokkuvõttes:

võrrand $Ax + By + C = 0$ esitab sirgjoont kordajate A, B ja vabaliikme C igasuguste väärtuste puhul.

Sel põhjusel esimese astme võrrandit nimetatakse lineaarseks võrrandiks. Sõna *linea* tähendab ladina keeles joont, kitsamas mõttes sirgjoont.

§ 14. Kahe punktiga määratud sirgjoone võrrand.

Olgu sirgjoon s määratud oma kahe punktiga $P_1 \equiv (x_1 \mid y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 \mid y_2)$. Koostame sirgjoone võrrandi.

Selleks arutleme nõnda:

Olgu P üks sirge s punktidest; missugune nimelt, selle jätame ütlemata. Olgu selle punkti koordinaadid tähistatud x-i ja y-ga. Avaldame lõikude P_1P ja P_1P_2 tõusud:

lõigu P_1P tõus on $\frac{y - y_1}{x - x_1}$,

lõigu P_1P_2 tõus on $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Et mõlemad lõigud asetsevad ühel ja sellelsamal sirgel, siis mõlemad leitud tõusud peavad olema võrdsed; järelikult

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate andmetega x_1, y_1, x_2 ja y_2. Et P oli üks sirge s punktidest ja et polnud öeldud, missugune nimelt, siis leitud seos kehtib sirge s iga punkti koordinaatide kohta; seepärast ta on sirge s võrrand. Niisiis:

sirgel punktidega $(x_1 \mid y_1)$ ja $(x_2 \mid y_2)$ on võrrand

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Toodud arutlust ei saa kasutada juhul, kui punktid P_1 ja P_2 asetsevad sirgel, mis on rööbiti y-teljega. Sel juhul punktidel P_1 ja P_2 on võrdsed abstsissid: $x_1 = x_2$. Sama abstsiss on ka kõigil teistel sirge punktidel. Seega siis sirge võrrand on

$$x = x_1 \quad (\text{ehk } x = x_2).$$

Ülesanne 1. Koostada sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkte $(-3 \mid 2)$ ja $(4 \mid -8)$.

Lahendus. Asendades võrrandis

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

koordinaadid x_1, x_2, y_1, y_2 nende antud väärtustega, saame

$$\frac{y - 2}{x - (-3)} = \frac{-8 - 2}{4 - (-3)}$$

ehk, lihtsustades,

$$10x + 7y + 16 = 0.$$

See ongi nõutud võrrandiks.

Eriti lihtsa kuju omandab sirgjoone võrrand, kui on teada sirgjoone telglõigud: algabstsiss a ja algordinaat b. Need andmed määravad sirge s kaks punkti $A \equiv (a \mid 0)$ ja $B \equiv (0 \mid b)$. Rakendades eespool-tuletatud võrrandit sellele juhule, saame

$$\frac{y - 0}{x - a} = \frac{b - 0}{0 - a}$$

ehk, peale teisendamist,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Kokkuvõttes:

sirgel algabstsissiga a ja algordinaadiga b on võrrand

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ülesanne 2. Koostada sirge võrrand, teades, et tema algabstsiss on 4 ja algordinaat -5.

Lahendus. Asendades võrrandis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a ja b nende väärtustega, saame

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$$

ehk

$$5x - 4y - 20 = 0.$$

Ülesanne 3. Joonestada sirgjoon, mis on antud oma võrrandiga $5x - 7y - 35 = 0$.

Lahendus. Et koordinaadid 0 ja 0 ei rahulda võrrandit, siis antud sirge ei läbi koordinaatide algust. Määrame lõigud a ja b, mis sirgjoon moodustab abstsiss- ja ordinaatteljel. Et sirge läbib punkti $A \equiv (a \mid 0)$ ja $B \equiv (0 \mid b)$, siis peab kumbki paar neid koordinaate rahuldama antud võrrandit; seega

$$5 \cdot a - 7 \cdot 0 - 35 = 0 \quad \text{ja} \quad 5 \cdot 0 - 7 \cdot b - 35 = 0$$

ehk

$$a = 7 \quad \text{ja} \quad b = -5.$$

Saadud lõikude järgi märgime telgedel punktid A ja B; neid läbiv sirge tuligi joonestada.

Teisiti jõuame eesmärgile, kui antud võrrandi teisendame järjest nii:

$$5x - 7y = 35,$$

$$\frac{5x}{35} - \frac{7y}{35} = 1,$$

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{-5} = 1.$$

Siit näeme, et sirge joonestamiseks vajalised lõigud telgedel on 7 ja -5.

Ülesanded.

91. Joonestada sirge, mis läbib punktid $(-4 \mid 6)$ ja $(8 \mid 0)$. Koostada selle sirge võrrand.

92. Missugused peavad olema kordaja m ja vabaliige b, et sirge $y = mx + b$ läbiks punktid $(6 \mid 2)$ ja $(5 \mid 1)$?

93. Sirge $y = mx + b$ läbib punktid $(-4 \mid -2)$ ja $(3 \mid 0)$. Leida kordaja m ja vabaliige b.

94. Koostada järgmiste punktipaaridega määratud sirgete võrrandid:

1. $A \equiv (1 \mid 1)$ ja $B \equiv (3 \mid 4)$
2. $C \equiv (2 \mid -5)$ ja $D \equiv (-4 \mid -1)$
3. $E \equiv (0 \mid 0)$ ja $F \equiv (-6 \mid -4)$
4. $G \equiv (0 \mid -5)$ ja $H \equiv (7 \mid 0)$
5. $I \equiv (-1 \mid -3)$ ja $K \equiv (-5 \mid -4)$.

95. Kolmnurga tipud on

$A \equiv (2 \mid 1)$, $B \equiv (-3 \mid -2)$ ja $C \equiv (3 \mid -2)$.

Koostada kolmnurga külgsirgete võrrandid.

96. Kirjutada kolmnurga külgsirgete võrrandid, kui kolmnurga tipud on $M \equiv (-4 \mid 4)$, $N \equiv (5 \mid -5)$ ja $P \equiv (-3 \mid 3)$.

97. Kirjutada nelinurga külgsirgete võrrandid, kui nelinurga tipud on $P \equiv (3 \mid 7)$, $Q \equiv (-1 \mid 3)$, $R \equiv (1 \mid -5)$ ja $S \equiv (5 \mid -1)$.

98. Koostada sirge võrrand, teades, et sirge läbib punktid $(p \mid q)$ ja $(q \mid p)$.

99. Otsustada, kas punkti $A \equiv (0 \mid -2)$ ja punkti $B \equiv (-2 \mid 0)$ läbiv sirge läbib ka punkti $C \equiv (-6 \mid 4)$.

100. Otsustada, kas punktid $M \equiv (2 \mid 3)$, $N \equiv (3 \mid 1)$ ja $P \equiv (-2 \mid 4)$ asuvad ühel ja sellelsamal sirgel.

101. Kirjutada sirgete võrrandid, kui:

1. sirge algabstsiss on $-4\frac{1}{2}$ ja algordinaat on 6;
2. sirge algabstsiss on -3 ja algordinaat on -1;
3. sirge lõikab x-telge punktis $(2 \mid 0)$ ja y-telge punktis $(0 \mid 3)$;
4. sirge lõikab x-telge punktis $(4 \mid 0)$ ja y-telge punktis $(0 \mid -1)$.

102. On antud sirged oma võrranditega:

1. $3x + 2y - 6 = 0$
2. $2x - 5y + 10 = 0$
3. $4x + 3y + 6 = 0$
4. $x - 2y - 8 = 0$

Joonestada need sirged nende telglõikude abil.

103. Kui suur on sirge tõus, kui:

1. algabstsiss on 5 ja algordinaat on 10;
2. algabstsiss on -4 ja algordinaat on 6;
3. algabstsiss on 1,5 ja algordinaat on $-4{,}5$;
4. algabstsiss on -3 ja algordinaat on $-\frac{1}{2}$.

Kirjutada nende sirgete võrrandid tõusu ja algordinaadi kaudu.

104. Sirge moodustab telgedel lõigud a ja b. Kirjutada sirge võrrand algordinaadi ja tõusu kaudu.

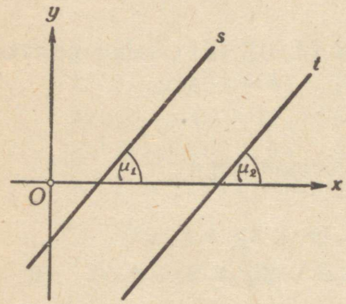
105. Näidata, et kolm punkti

$$(a \mid b), \qquad (b \mid a) \quad \text{ja} \quad (-a \mid 2a + b)$$

asetsevad ühel ja sellelsamal sirgel.

§ 15. Kahe sirgjoone rööpseisu ja ristseisu tunnused.

Olgu antud kaks r ö ö b i k u t sirgjoont s ja t; ühe sirge võrrand olgu $y = m_1 x + b_1$ ja teise oma $y = m_2 x + b_2$. Nende sirgete lõikumisel x-teljega tekivad siis võrdsed tõusunurgad (joonis 16); seega



Joonis 16.

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Siit järeldub, et

$$\tan \mu_1 = \tan \mu_2$$

ehk

$$m_1 = m_2.$$

Seega:

rööbikute sirgete tõusud on võrdsed.

Ümberpöördult:

võrdsete tõusudega sirged on rööbikud.

Tõepoolest, kui

$$m_1 = m_2$$

ehk

$$\tan \mu_1 = \tan \mu_2,$$

siis

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{või} \quad \mu_1 = \mu_2 + 180^0.$$

Et tõusunurk on ikka väiksem kui 180^0, siis teine võimalus langeb ära ja jääb püsima vaid esimene. Et sirgjoonte s ja t lõikumisel x-teljega tekkinud vastavad nurgad μ_1 ja μ_2 on võrdsed, siis sirgjooned s ja t peavad olema rööbikud, mida oligi tarvis tõestada.

N ä i d e. Sirged

$$2x - 3y = 8 \quad \text{ja} \quad 4x - 6y = 15$$

on rööbikud, sest antud võrrandite lahendamisel y suhtes leiame, et esimese sirge tõus on $\frac{2}{3}$, teise oma $\frac{4}{6}$ ehk ka $\frac{2}{3}$.

Olgu antud kaks r i s t u v a t sirget s ja t, millest kumbki pole rööbik y-teljega (joonis 17). Ühiselt x-teljega nad moodustavad täisnurkse kolmnurga A_1PA_2, mille teravnurgad on μ_1 ja $180^0 - \mu_2$. Et täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga tangens on teise teravnurga kootangens, siis

$$\tan \mu_1 = \cot (180^0 - \mu_2)$$

ehk

$$\tan \mu_1 = -\cot \mu_2.$$

Nurga kootangens on võrdne sama nurga tangensi pöördarvuga; seetõttu

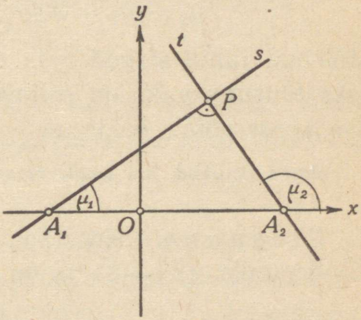
$$\tan \mu_1 = -\frac{1}{\tan \mu_2}$$

ehk

$$\tan \mu_1 \cdot \tan \mu_2 = -1$$

ehk

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$



Joonis 17.

Sellest näeme, et

ristuvate sirgete tõusude korrutis on —1.

Ümberpöördult, seosest $m_1m_2 = -1$ järeldub, et sirged s ja t ristuvad. Tõepoolest, tehtud eeldusel

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

ehk

$$\tan \mu_1 = -\frac{1}{\tan \mu_2};$$

siit

$$\tan \mu_1 = -\cot \mu_2$$

ehk

$$\tan \mu_1 = \cot (180^0 - \mu_2)$$

ja seega nurk $180^0 - \mu_2$ on nurga μ_1 täiendusnurk või ta erineb sellest täiendusnurgast 180^0 võrra. Järelikult

$$\mu_1 + (180^0 - \mu_2) = 90^0 \quad \text{või} \quad \mu_1 + (180^0 - \mu_2) = 90^0 + 180^0$$

ehk

$$\mu_1 - \mu_2 = -90^0 \quad \text{või} \quad \mu_1 - \mu_2 = 90^0$$

ehk

$$\mu_2 = \mu_1 + 90^0 \quad \text{või} \quad \mu_1 = \mu_2 + 90^0.$$

Mõlemal juhul sirged s ja t ristuvad, kusjuures nürinurkseks tõusunurgaks on esimesel juhul μ_2 ja teisel juhul μ_1. Seepärast võime öelda, et

sirged ristuvad, kui nende tõusude korrutis on —1.

Ü l e s a n n e. Koostada sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(2 \mid -3)$ ja on risti sirgega $4x - 3y + 6 = 0$.

L a h e n d u s. Antud sirge tõus on $\frac{4}{3}$, seega otsitava sirge tõus on $-\frac{3}{4}$. Järelikult nõutud võrrand on

$$y - (-3) = -\frac{3}{4} (x - 2)$$

ehk, pärast lihtsustamist,

$$3x + 4y + 6 = 0.$$

Ülesanded.

106. Antud on sirged:

$$3x + 2y - 3 = 0, \quad x + 6y = 1 \text{ ja } 4y = 9 - 6x.$$

Missugused nende sirgete hulgas on rööpsirged?

107. Anda sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(-4 \mid 3)$ ja on rööbiti sirgega $y = -\frac{3}{5}x + 2$.

108. Anda sirge võrrand, teades, et sirge on rööbiti sirgega $y = 0{,}8x - 5$ ja läbib koordinaatide algust.

109. Anda sirge võrrand, teades, et

1. sirge läbib punkti $(0 \mid 0)$ ja on rööbiti sirgega
$$3x - 4y + 1 = 0;$$
2. sirge läbib punkti $(2 \mid 5)$ ja on rööbiti sirgega
$$2x - 3y - 2 = 0;$$
3. sirge läbib punkti $(7 \mid 0)$ ja on rööbiti sirgega
$$5x + 2y = 0.$$

110. Koostada sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(-1 \mid 2)$ ja on rööbiti lõiguga, mille otspunktid on $(2 \mid -1)$ ja $(3 \mid 4)$.

111. Rööpküliku kahe küljsirge võrrandid on $x + y + 1 = 0$ ja $x - 4y - 4 = 0$. Koostada ülejäänud kahe küljsirge võrrandid, kui nad läbivad punkti $(1 \mid 3)$. Joonestada see rööpkülik.

112. Sirgele $y = 0{,}6x + 1{,}6$ on koordinaatide algusest joonestatud ristsirge. Koostada selle võrrand.

113. Punktist $(2 \mid -2)$ on sirgele $y = 2{,}5x - 9$ joonestatud ristsirge. Kirjutada selle võrrand.

114. Punktist $(0 \mid 5)$ on punkte $(2 \mid 1)$ ja $(4 \mid 0)$ ühendavale lõigule joonestatud ristsirge. Koostada tema võrrand.

115. Kolmnurga tipud on $(4 \mid 2)$, $(-3 \mid 5)$ ja $(0 \mid 0)$. Koostada kolmnurga kõrgussirgete võrrandid.

116. Kolmnurga tipud on $(5 | 0)$, $(-2 | 3)$ ja $(0 | -2)$. Koostada kolmnurga kõrgussirgete võrrandid.

117. On antud punktid $(3 | -1)$ ja $(-2 | 1)$. Kirjutada selle punktipaari sümmeetriatelje võrrand.

118. Punkt $P \equiv (a | b)$ on ühendatud algusega ja tekkinud lõigule on tõmmatud punktist P ristsirge. Anda selle viimase võrrand.

119. Koostada selle joone võrrand, mida mööda punkt peaks liikuma oma lähtekohast $(3 | 8)$, et lühimat teed jõuda joonele $y = \frac{1}{2} x - 1$.

120. Sirge moodustab telglõigud a ja b. Tema algordinaadi lõpus on tõmmatud sirgele ristsirge. Kui suurt pindala omab kolmnurk, mida piirab x-telg ühes kahe varemalt nimetatud sirgega?

§ 16. Kahe sirgjoone lõikepunkt.

Olgu antud kaks sirgjoont s_1 ja s_2 oma võrranditega

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{ja} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Kuidas arvutada nende sirgjoonte lõikepunkti P koordinaate?

Et sirgjoonte lõikepunkt asub nii ühel kui teisel sirgel, siis selle punkti koordinaadid peavad rahuldama nii üht kui teist antud võrrandit. Järelikult:

et saada kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaate, tuleb lahendada süsteem, mis koosneb antud sirgjoonte võrrandeist.

N ä i d e.

Leiame sirgjoonte

$$3x + 5y - 1 = 0$$

ja

$$y = 2x - 5$$

lõikepunkti koordinaadid.

Selleks lahendame antud võrrandeist koosneva süsteemi. Asendusvõtet kasutades saame

$$3x + 5(2x - 5) - 1 = 0,$$

millest

$$x = 2$$

ja järelikult

$$y = 2 \cdot 2 - 5 = -1.$$

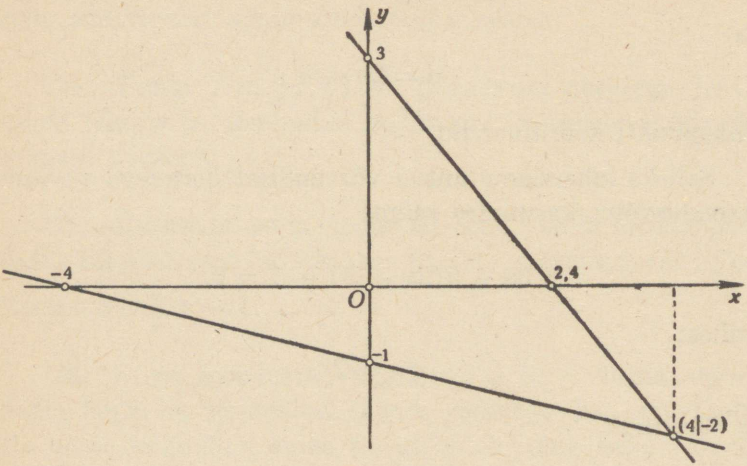
Niisiis lõikuvad antud sirged punktis $(2 \mid -1)$.

Asjaolu, et lineaarse võrrandi geomeetriliseks vasteks on sirgjoon, võime kasutada kahe tundmatuga lineaarvõrrandsüsteemi graafiliseks lahendamiseks. Selleks joonestame süsteemi võrranditega määratud sirgjooned ja leiame joonisest nende lõikepunkti abstsissi ja ordinaadi. Et see lõikepunkt asub nii ühel kui ka teisel sirgel, siis rahuldavad tema koordinaadid nii üht kui ka teist süsteemi kuuluvat võrrandit ja järelikult see koordinaadipaar ongi võrrandsüsteemi lahend.

N ä i d e. On antud lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x + 4y + 4 = 0 \\ 5x + 4y - 12 = 0. \end{cases}$$

Joonestades algabstsissi ja algordinaadi järgi nii esimese kui ka teise sirgjoone (joonis 18), leiame nende lõikepunkti koordinaatideks



Joonis 18.

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2. \end{cases}$$

See arvupaar ongi antud võrrandsüsteemi lahend.

Ülesanded.

121. Leida järgmiste sirgjoone-paaride lõikepunktid:

1. $y = 2x - 2$ ja $y = \frac{3}{4}x + 1$
2. $y = -3x + 10$ ja $y = \frac{1}{2}x + 3$
3. $y = 2x - 5$ ja $x - 2y = 2$
4. $7x + 2y = 20$ ja $4x - 5y = -7$
5. $5x - 4y - 1 = 0$ ja $2x + 3y + 18 = 0$

122. Lahendada graafiliselt järgmised võrrandsüsteemid ja kontrollida tulemused, asetades nad võrrandeisse tundmatute asemele:

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 7y - 5 = 0 \\ 2x - 5y + 6 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 5x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 5 \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 7 \end{cases}$

123. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid arvutamise teel ja kontrollida tulemused graafiliselt:

1. $\begin{cases} 10x + 3y = 25 \\ 5x + 9y = -25 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9x + 6y = 18 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + 3y = 26 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x - 4y = 20 \\ 10x - 8y = 40 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 3y = -9 \\ 5x + 7y = -25 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7x - y = 7 \\ 21x - 3y = 14 \end{cases}$

§ 17. Kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaatide avaldiste uurimine.

Uurime lähemalt võimalikke juhtumeid kahe sirgjoone lõikepunkti otsimisel.

Võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

lahendamiseks kasutame „liitmise-lahutamise“ võtet: et vabaneda tundmatust y, korrutame esimese võrrandi kõiki liikmeid arvuga B_2, teise võrrandi kõiki liikmeid arvuga B_1 ja lahutame esimesest tulemusest teise; saame

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0$$

ja siit edasi

$$x = -\frac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Tundmatust x vabanemiseks korrutame esimese võrrandi liikmeid arvuga A_2, teise omi arvuga A_1 ja lahutame teisest tulemusest esimese; saame

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y + (A_1C_2 - A_2C_1) = 0$$

ja siit edasi

$$y = -\frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Leitud avaldised esinevad murdudena, omades üht ja sedasama nimetajat $A_1B_2 - A_2B_1$. See on koostatud tundmatute kordajaist

$$\begin{matrix} A_1 & & A_2 \\ & \times & \\ B_1 & & B_2 \end{matrix}$$

neid ristamisi korrutades ja tulemusi teineteisest lahutades. Vahe $A_1B_2 - A_2B_1$ kannab v õ r r a n d s ü s t e e m i d e t e r m i n a n d i n i m e t u s t.

Lahendiks leitud avaldiste lugejad saadakse asendades süsteemi determinandis otsitava kordajad vabaliikmetega.

Asume lahendi uurimisele.

I j u h t u m. Süsteemi determinant on nullist erinev. Missugused siis ka ei ole lugejad leitud avaldistes, ikka saame nii x-i kui y jaoks kindla lõpliku väärtuse. Niisiis:

kui lineaarvõrrand-süsteemi determinant on nullist erinev, siis omab süsteem kindla ühese lõpliku lahendi

ehk geomeetrilises keeles:

kui lineaarvõrrand-süsteemi determinant on nullist erinev, siis võrranditega esitatud sirgjooned omavad kindla ühese lõikepunkti lõplikul kaugusel.

II juhtum. Süsteemi determinant on võrdne nulliga ja ka ühe tundmatu avaldise lugeja on null, näiteks x-i. Näitame, et siis ka teise avaldise lugeja on null. Tõepoolest: eeldustest

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \quad \text{ja} \quad C_1B_2 - C_2B_1 = 0$$

järeldub, et

$$A_1B_2 = A_2B_1 \quad \text{ja} \quad C_1B_2 = C_2B_1$$

ehk teisiti, et

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ja} \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

millest

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Siit järeldub, et

$$A_1C_2 - A_2C_1 = 0,$$

mida tahtsimegi näidata.

Eeldustest järeldub seega, et otsitavate avaldised esinevad kujul

$$x = \frac{0}{0} \qquad \text{ja} \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Sümbolil $\frac{0}{0}$ ei ole matemaatikas kindlat tähendust: jagada null nulliga tähendab ju leida niisugune arv, mis korrutamisel nulliga annab nulli. Viimast nõuet rahuldab aga iga arv a, sest $a \cdot 0 = 0$.

Tehtud eeldustel antud võrrandsüsteemi rahuldab piiramatu hulk lahendeid; võttes näiteks x-i jaoks vabalt mingi väärtuse, saame kas esimesest või teisest võrrandist leida vastava y.

Ülaltoodud asjaolud muutuvad tunduvalt arusaadavamaks, kui neid tõlgendame geomeetriliselt. Kordajate kohta tehtud eeldusel on, nagu nägime,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \quad \text{ja} \quad \frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

ehk

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

See tähendab aga, et uuritaval juhul antud võrrandite vastavad kordajad on võrdelised. Tähistades vastavate kordajate suhte ühise väärtuse tähega k, näeme, et

$$A_1=kA_2, \quad B_1=kB_2, \quad C_1=kC_2$$

ja

$$A_1x+B_1y+C_1=k(A_2x+B_2y+C_2).$$

Seetõttu võime antud süsteemi kirjutada kujul

$$\begin{cases} k(A_2x+B_2y+C_2)=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

Taandades teguriga k näeme, et esimene võrrand on samane teisega. Järelikult nende võrranditega määratud sirged langevad ühte ja nende sirgete ühispunktide arv on piiramatu.

Niisiis:

kui kaks lineaarvõrrandit omavad võrdelisi kordajaid, siis võrrandsüsteem omab määratu palju lahendeid

ehk geomeetrilises keeles:

kui kaks lineaarvõrrandit omavad võrdelisi kordajaid, siis võrranditega esitatud sirgjooned langevad ühte ja kõik nende punktid on ühispunktid.

III juhtum. Süsteemi determinant on võrdne nulliga ja ühe tundmatu avaldise lugeja on nullist erinev, näiteks x-i. Näitame, et siis ka teise lugeja on nullist erinev. Tõepoolest: eeldustest

$$A_1B_2-A_2B_1=0 \quad \text{ja} \quad C_1B_2-C_2B_1\neq 0$$

saame, et

$$A_1B_2 = A_2B_1 \quad \text{ja} \quad C_1B_2 \neq C_2B_1$$

ehk teisiti, et

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad \text{ja} \qquad \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Siit järeldub, et

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

ja seega

$$A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0,$$

mida tahtsimegi näidata.

Tehtud eeldustel tundmatud esinevad kujul

$$x = \frac{m}{0} \qquad \text{ja} \qquad y = \frac{n}{0},$$

kus m ja n on nullist erinevad arvud. Sümbolitel $\frac{m}{0}$ ja $\frac{n}{0}$ pole matemaatikas kohta, sest ei ole niisugust arvu, mis korrutamisel nulliga annaks nullist erineva arvu m või n. Seega **süsteemil pole lahendeid**.

Tõlgendame asja geomeetriliselt.

Tingimust

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

saab kirjutada kujul

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \qquad \text{ehk} \qquad -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Et need avaldised kujutavad meie sirgjoonte tõuse ja et need on võrdsed, siis **sirged on rööbikud**.

Tingimused

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad \text{ja} \qquad \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

ehk

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

näitavad, et võrrandite kõik kordajad pole võrdelised; seega on tegemist kahe rööbiku, kuid mitte ühtelangeva sirgjoonega. Need sirged ei lõiku.

Niisiis:

kui lineaarvõrrand-süsteemi determinant on null ja võrrandite kordajad ei ole võrdelised, siis ei oma süsteem lahendit; võrrandid on vasturääkivad,

ehk geomeetrilises keeles:

kui lineaarvõrrand-süsteemi determinant on null, võrrandite kordajad aga ei ole võrdelised, siis on võrranditega esitatud sirgjooned rööbikud ja ei oma ühispunkti; sirged ei lõiku.

N ä i d e 1. On antud süsteem:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x - 3y + 9 = 0 \end{cases}$$

Tema determinant $1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -3 + 1 = -2 \neq 0$. Seega süsteemil on lahend. Arvutamine annab lahendi $x = -3$, $y = 2$.

N ä i d e 2. On antud süsteem:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 6x + 8y - 24 = 0 \end{cases}$$

Tema determinant $3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0$ ja kordajad on võrdelised:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{-12}{-24}.$$

Võrrandeil on määratu palju lahendeid: võrrandid esitavad kahte ühtelangevat sirget; esimese sirgjoone iga punkt on ühtlasi teise sirgjoone punktiks.

N ä i d e 3. On antud süsteem:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 18 = 0 \\ 4x - 6y - 10 = 0 \end{cases}$$

Tema determinant $2 \cdot (-6) - (-3) \cdot 4 = -12 + 12 = 0$ ja kordajad pole võrdelised:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{18}{-10}.$$

Süsteemil pole lahendeid. Võrrandid esitavad kahte rööbikut sirget; neil pole ühispunkti.

Ülesanded.

124. Lahendada võrrandsüsteemid ja tõlgendada tulemused:

1. $\begin{cases} 3x + 5y + 21 = 0 \\ 5x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x - 8y = 10 \\ 35x - 40y = 32 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 9x - 6y = 36 \end{cases}$

125. Lahendada võrrandsüsteemid ja tõlgendada tulemused:

1. $\begin{cases} 5m = 2n + 11 \\ 3m = 4n + 17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4p = 3q - 5 \\ 9q = 12p - 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + \frac{5}{2}y = 132 \\ \frac{5}{2}x + 3y = 132 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 7x + 21y = 1 \end{cases}$

126. Lahendada võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} ax + by = m \\ bx - ay = n \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y = 0 \\ mx + my = a \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax + by = h \\ ax + by = k \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + my = a \\ nx + y = b \end{cases}$

Ülesandeid sirgete kohta.

127. Kolmnurga külgsirgete võrrandid on

$x - 2y + 6 = 0$, $8x + y + 14 = 0$ ja $10x - 3y - 8 = 0$.

Leida kolmnurga tipud.

128. Leida, kui suure nurga moodustavad teineteisega iga kaks järgmist sirget:

1. $y = x - 1$ ja $2x - y - 3 = 0$
2. $3x - 4y - 6 = 0$ ja $y = 0{,}5x + 1$

129. Kolmnurga külgsirged on $x - 2y + 6 = 0$, $8x + y + 14 = 0$ ja $10x - 3y - 8 = 0$. Leida kolmnurga nurgad.

130. Kolmnurga tipud on $(2 \mid 3)$, $(-1 \mid 2)$ ja $(3 \mid -1)$. Leida kolmnurga nurgad.

131. Kui kaugel on sirgete $3x + 2y + 7 = 0$ ja $x - 5y - 8 = 0$ lõikepunkt koordinaatide algusest?

132. On antud sirged

$$3x + 2y + 7 = 0 \quad \text{ja} \quad x - 5y - 8 = 0.$$

Koostada nende lõikepunkti ja koordinaatide algust ühendava sirge võrrand.

133. Arvutada sirgete $3x + 7y = 18$ ja $7x - 5y = 10$ lõikepunkti kaugus punktist $(5 \mid 3)$.

134. On antud sirged

$$3x + 7y = 18 \quad \text{ja} \quad 7x - 5y = 10.$$

Nende lõikepunkt ja punkt $(5 \mid 3)$ määravad kolmanda sirge. Anda selle sirge võrrand.

135. Kas sirged

$$2x + 3y = 11, \; 2x - y = 2 \quad \text{ja} \quad 6x + 17y = 51$$

lõikuvad ühes punktis või moodustavad kolmnurga?

136. Näidata, et sirged

$$ax + by = 1, \; bx + ay = 1 \quad \text{ja} \quad x - y = 0$$

lõikuvad ühes punktis.

137. Kolmnurga tipud on:

$$A \equiv (6 \mid -4), \qquad B \equiv (-4 \mid 5) \quad \text{ja} \quad C \equiv (-3 \mid -3).$$

Anda punktidest A ja B tõmmatud mediaansirgete võrrandid. Leida nende kahe mediaani lõikepunkt. Näidata, et seda punkti läbib ka kolmas, tipust C tõmmatud mediaan.

138. Kolmnurga tipud on $(6|8)$, $(-4|2)$ ja $(2|-4)$. Anda kolmnurga külgede keskristsirgete võrrandid. Näidata, et 3 keskristsirget lõikuvad ühes punktis. Kui suur on kolmnurga ümberringjoone raadius?

139. On antud sirge $y = 5 + \sqrt{3}\,x$. Kui kaugel on sirge koordinaatide algusest?

140. Arvutada kaugus koordinaatide alguse ja sirge $3x + 4y = 12$ vahel.

141. Kui kaugel koordinaatide algusest on punktidega $(3|-1)$ ja $(1|5)$ määratud sirge?

142. Leida kaugus kahe paralleelse sirge vahel, mille võrrandid on $3x + 4y - 4 = 0$ ja $3x + 4y + 8 = 0$.

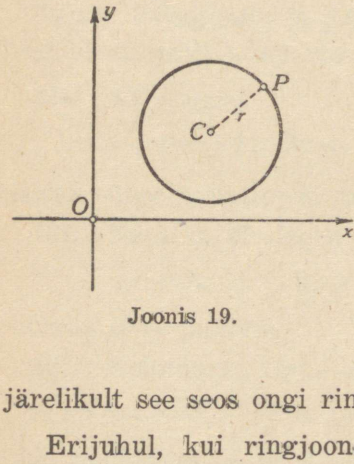
Peatükk III.

Ringjoon.

§ 18. Ringjoone võrrand.

Ringjoon on määratud, kui on antud tema keskpunkt ja raadius, sest nende andmete järgi saab ringjoont joonestada. Olgu punkt $C \equiv (a \mid b)$ ringjoone keskpunkt ja r ringjoone raadius. Leiame selle ringjoone võrrandi.

Selleks võtame ringjoonel vabalt punkti; olgu see $P \equiv (x \mid y)$ (joonis 19). Siis on CP üks ringi raadiustest, seega $CP = r$, järelikult $CP^2 = r^2$. Avaldades viimase võrduse vasaku poole punktide C ja P koordinaatide abil, saame



Joonis 19.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate antud suurustega a, b ja r. Et punkt P oli ringjoonel võetud v a b a l t, siis leitud seos kehtib ringjoone i g a punkti puhul; järelikult see seos ongi ringjoone võrrand.

Erijuhul, kui ringjoone keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt, siis $a = 0$ ja $b = 0$ ning ringjoone võrrand omab kuju

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kokkuvõttes:

kui ringjoone keskpunkti koordinaadid on a ja b ning raadius on r, siis ringjoone võrrandiks on

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

kui ringjoone keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt ja ringjoone raadius on r, siis ringjoone võrrandiks on

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ümberpöördult, võrrand

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

esitab arvude a, b ja r igasugustel väärtustel ringjoont. Tõepoolest, võrrand ütleb, et punkt, mille koordinaadid x ja y rahuldavad antud võrrandit, asetseb kindlast punktist $(a \mid b)$ niisugusel kaugusel, mille ruut on jääv r^2; järelikult on kõnesolev kaugus ise jääv. Punktid aga, mis asetsevad jääval kaugusel kindlast punktist, moodustavad ringjoone. Ainult siis, kui $r = 0$, on ringjoon tõmbunud kokku punktiks $(a \mid b)$.

Avades sulud, saame ringjoone võrrandi kirjutada kujul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Kui selles võrrandis peaks esinema murdarvulisi kordajaid (kaasa arvatud vabaliige), siis korrutame võrrandi kummagi poole kohaselt valitud teguriga k ja saame võrrandi t ä i s - a r v u l i s t e kordajatega:

$$kx^2 + ky^2 - 2kax - 2kby + k(a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

See võrrand on x ja y suhtes t e i s e a s t m e l i n e võrrand. Üldine teiseastmeline võrrand sisaldab järgmisi liikmeid: liige x-i ruuduga, liige x-i ja y korrutisega, liige y ruuduga, liige x-iga, liige y-ga ja vabaliige. Viimati saadud võrrand on selles mõttes e r i k u j u l i n e, et temas puudub liige muutujate korrutisega ja et muutujate ruutude kordajad on võrdsed. Näitame, et iga teiseastmeline võrrand suurustega x ja y, mille puhul on täidetud praegu-nimetatud tingimused, teiseneb võrrandiks

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ja esitab seega ringjoont. Tõepoolest, olgu tegemist võrrandiga, mis rahuldab eespool-nimetatud tingimusi. Kirjutame ta kujul:

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0.$$

Jagades võrrandi kõik liikmed kordajaga A ja kirjutades nad teises järjekorras, saame

$$x^2+\frac{B}{A}x+y^2+\frac{C}{A}y+\frac{D}{A}=0.$$

Täiendades esimese ja teise liikme summat, samuti kolmanda ja neljanda liikme summat täisruutudeks ja lahutades juurdelisatud liikmed, saame eelmisega samaväärse võrrandi

$$\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}\right)+\left(y^2+\frac{C}{A}y+\frac{C^2}{4A^2}\right)+\frac{D}{A}-\frac{B^2}{4A^2}-\frac{C^2}{4A^2}=0$$

ehk

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}.$$

Vasakul poolel seisab kahe ruudu summa; see ei ole iialgi negatiivne; kui A, B, C ja D on niisugused arvud, et paremal poolel seisev avaldis tuleb negatiivne, siis pole võimalik võrrandit rahuldada ühegi x ja y väärtusepaariga. Kui aga paremal poolel seisev avaldis on positiivne, saame leitud võrrandi kirjutada kujul

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

kus

$$a=-\frac{B}{2A}, \quad b=-\frac{C}{2A} \quad \text{ja} \quad r^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2};$$

et $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ on ringjoone võrrand, siis eespool-püstitatud väide on tõestatud.

Kokkuvõttes:

teiseastmeline võrrand muutujatega x ja y, milles puudub liige muutujate korrutisega ja milles muutujate ruutude kordajad on võrdsed, esitab kas ringjoont või temale ei vasta ühtki geomeetrilist kujundit.

N ä i d e. Võrrandit

$$2x^2 + 2y^2 + 5x - 8y + 10 = 0$$

saame peale kõigi liikmete jagamist 2-ga kirjutada kujul

$$\left(x^2 + \frac{5}{2} x\right) + (y^2 - 4y) + 5 = 0$$

ehk, liites ja lahutades sulgudes vastavalt $\frac{25}{16}$ ja 4,

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} x + \frac{25}{16}\right) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) + \left(5 - \frac{25}{16} - 4\right) = 0$$

ehk

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{16}.$$

See on niisuguse ringjoone võrrand, mille keskpunkti koordinaadid on $-\frac{5}{4}$ ja 2 ning raadius on $\frac{3}{4}$.

Ülesanded.

143. Koostada ringjoone võrrand teades, et

1. ringi keskpunkt on koordinaatide alguses ja ringi raadius on 5;

2. ringi keskpunkt on koordinaatide alguses ja ringjoon läbib punkti $(-2 \mid 6)$;

3. ringi keskpunkt on $(-3 \mid 1)$ ja ringi raadius on 4;

4. ringi keskpunkt on $(-4 \mid -3)$ ja ring puudutab x-telge;

5. ringi keskpunkt on $(3 \mid 2)$ ja ringjoon läbib koordinaatide algust;

6. ringi keskpunkt on $(5 \mid 2)$ ja ringjoon läbib punkti $(6 \mid -1)$;

7. ringi keskpunkt on II veerandis, ringi raadius on 3 ja ring puudutab kumbagi telge.

144. Joonestada järgmised ringjooned, leides enne nende keskpunkti ja raadiuse:

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $x^2 + y^2 = 4x$
3. $x^2 + y^2 - 10y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
5. $x^2 + y^2 - 2x - 3y + \frac{1}{4} = 0$

145. Leida järgmiste ringjoonte keskpunkt ja raadius:

1. $4x^2 + 4y^2 + 12x - 4y + 5 = 0$
2. $3x^2 + 3y^2 - 14x - 48y = 0$
3. $5x^2 + 5y^2 - 6x + 8y = 12$
4. $49x^2 + 49y^2 - 14x + 28y + 5 = 0$
5. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 6$

146. Missugust tingimust peavad rahuldama arvud a, b ja r ringjoone võrrandis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, et

1. ringi keskpunkt asuks x-teljel;
2. ring puudutaks y-telge;
3. ring puudutaks x-telge koordinaatide alguses;
4. ring puudutaks kumbagi telge;
5. ringjoon läbiks koordinaatide algust?

147. Ringjoone keskpunkt on x-teljel ja ringjoon läbib punkte $(3 \mid 3)$ ja $(5 \mid -1)$. Anda ringjoone võrrand.

148. Missugune punkt x-teljel asetseb võrdseil kaugusil punktest $(-2 \mid 5)$ ja $(4 \mid 7)$?

149. Leida ringjoonel $x^2 + y^2 = 81$ asetsevate punktide ordinaadid, kui abstsissid on 5, 6, —1, —3.

150. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ punktide abstsissid, kui ordinaadid on 0, 3, —1.

151. Koostada ringjoone võrrand teades, et ringjoone keskkoht on punktis $(6 \mid 7)$ ja et ringjoon puudutab sirget $5x - 12y - 24 = 0$.

152. Kolmnurga tipud on:

$$(-1 \mid 5), \qquad (-2 \mid -2) \quad \text{ja} \quad (3{,}4 \mid -3{,}8).$$

Leida selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt ja raadius.

153. Kolmnurga tipud on:

$$(0 \mid 0), \qquad (a \mid 0) \quad \text{ja} \quad (0 \mid b).$$

Leida selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt ja raadius.

154. On antud punktid $A \equiv (3 \mid 4)$ ja $B \equiv (-1 \mid 2)$. Leida selle ringjoone võrrand, mille diameeter on AB.

§ 19. Ringjoone lõikumine sirgjoonega.

On antud ringjoon ja sirgjoon. Seame endile ülesandeks leida nende joonte ühiste punktide koordinaadid. Lihtsuse mõttes valime ringi keskpunkti koordinaatide alguseks; siis ringjoone võrrand on

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Olgu sirgjoon antud oma algordinaadi b ja tõusuga m; siis sirgjoone võrrand on

$$y = mx + b.$$

Ringjoone ja sirgjoone ühised punktid asuvad nii esimesel kui teisel joonel; seega nende punktide koordinaadid peavad rahuldama nii esimest kui ka teist võrrandit; järelikult otsitavad koordinaadid saadakse lahendades võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + b. \end{cases}$$

Asendades esimeses võrrandis tundmatu y tema avaldisega x-i kaudu $mx + b$, saame otsitava abstsissi jaoks ruutvõrrandi, mille lahendamine annab kas kaks erinevat x-i väärtust või kaks ühtelangevat x-i väärtust või ei ühtegi x-i väärtust. Selle järgi saame y jaoks kas kaks, üks või ei ühtki väärtust. Seega meie võrrandsüsteemil on kas kaks lahendit või üks lahend või ei ühtki lahendit. Esimesel juhul antud sirge lõikab ringjoont, teisel juhul sirge puudutab ringjoont ja kolmandal juhul sirge ja ringjoon ei oma ühiseid punkte.

Ülesanne. Kuidas asetseb sirgjoon

$$3x + 4y + 24 = 0$$

ringjoone

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

suhtes?

Lahendus. Leiame mõlema joone ühised punktid. Nende punktide koordinaadid peavad rahuldama nii üht kui ka teist antud võrrandit. Lahendades esimese võrrandi y suhtes, saame

$$y = -\frac{3}{4}x - 6.$$

Asetades leitud y avaldise teise võrrandisse näeme, et

$$x^2 + (-\frac{3}{4}x - 6)^2 - 6x + 4(-\frac{3}{4}x - 6) - 12 = 0.$$

Siit saame peale sulgude avamist ja koondamist, et

$$\frac{25}{16}x^2 = 0$$

ehk

$$x = 0$$

ja sellele vastavalt

$$y = -6.$$

Niisiis antud joontel on ü k s ühine punkt $(0 | -6)$; järelikult antud sirgjoon puudutab ringjoont.

Ülesanded.

155. Leida punktid, milles ringjoon $x^2 + y^2 = 225$ lõikub sirgetega

$$x = -7, \quad y = -3 \quad \text{ja} \quad 2x + y = 0.$$

156. Missugustes punktides ringjoon

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$$

lõikab koordinaatide telgi?

157. Leida ringjoone $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$ ja sirge $5x - y - 2 = 0$ lõikepunktid.

158. Leida ringjoone $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ ja sirge $2x - 3y = 6$ lõikepunktid.

159. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 37$ ja sirge $x + 3y = 3$ lõikumisel tekkiva kõõlu keskpunkt.

160. Kui pikk kõõl tekib ringjoone

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$$

ja x-telje lõikumisel?

161. Leida, missugused järgmistest sirgetest puudutavad ringjoont $x^2 + y^2 = 36$, ja arvutada puutepunktide koordinaadid:

1. $x = 6$	2. $y = 7$
$y = x + 8$	$y = x - 11$
$y = \frac{4}{3}x + 10$	$y - x = 6\sqrt{2}$

162. Leida punkt, milles sirge $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$ puudutab ringjoont $x^2 + y^2 = 25$.

163. Näidata, et sirge $3x + 4y = -32$ puudutab ringjoont $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$, ja leida puutepunkti koordinaadid.

Peatükk IV.

Ellips.

§ 20. Ellipsi joonestamine.

Ellipsiks nimetatakse niisugust tasapinnalist kõverjoont, mille punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jääva suurusega summa.

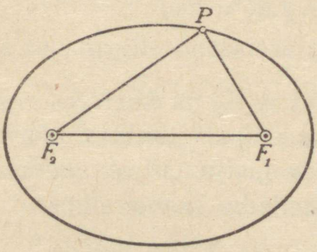
Neid kindlaid punkte nimetatakse ellipsi fookusteks. Olgu punktid F_1 ja F_2 ellipsi fookused ja P ellipsil vabalt valitud punkt. Ellipsi definitsiooni järgi siis

$$F_1P + F_2P = konst.$$

Lühend *konst* tähendab konstanti ehk jäävat.

Võrduse paremal poolel seisvat konstanti on viisiks tähistada sümboliga $2a$, nii et

$$F_1P + F_2P = 2a.$$



Joonis 20.

Lihtsaim võte ellipsi joonestamiseks on järgmine: torkame fookustesse F_1 ja F_2 nõelad (joonis 20), paneme nõelte ümber kinnise niidi pikkusega $F_1F_2 + 2a$, tõmbame pliiatsi teravikuga niidi pingule ja joonestame joone nii, nagu pingul olev niit seda lubab. Nii saadud joon on ellips, sest märkides pliiatsi teraviku tähega P leiame, et igas tema asukohas

$$F_1F_2 + F_1P + F_2P = F_1F_2 + 2a$$

ehk

$$F_1P + F_2P = 2a;$$

see aga tähendab, et punkt P rahuldab ellipsi punkti kohta seatud nõuet.

Sirglõike, mis ühendavad ellipsi punkti fookustega, nimetatakse ellipsi punkti raadiusvektoriteks.

Viimaseid tähistatakse sümbolitega r_1 ja r_2. Ellipsi definitsiooni järgi on ikka

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Eespool-toodud ellipsi joonestamise võte näitab, et

ellips on määratud, kui on teada ellipsi fookused ja raadiusvektorite summa.

Teine võte ellipsi joonestamiseks on järgmine. Võtame lõigul A_1A_2, mille pikkus on $2a$, mingi punkti A; joonestame raadiusega AA_1 fookusest F_1 ringjoone ja raadiusega AA_2 fookusest F_2 teise ringjoone. Lõikugu need ringjooned punktides P_1 ja P_2. Siis

$$F_1P_1 + F_2P_1 = AA_1 + AA_2 = 2a$$

ja

$$F_1P_2 + F_2P_2 = AA_1 + AA_2 = 2a;$$

seega nii punkt P_1 kui ka punkt P_2 asetsevad ellipsil.

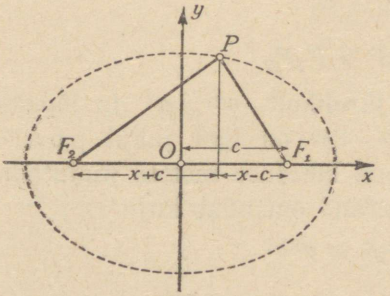
Muutes punkti A asukohta lõigul A_1A_2 ja korrates eespool-toodud võtet, saame veel kaks ellipsi punkti; nõnda edasi minnes võime leida kuitahes palju ellipsi punkte. Neid punkte kõverjoonlaua abil ühendades saame ellipsi.

§ 21. Ellipsi võrrand.

Antud ellipsi fookused on F_1 ja F_2 ning raadiusvektorite summa $2a$. Nende andmetega on ellips määratud. Seame endile ülesande tuletada selle ellipsi võrrand.

Selleks arutame nõnda:

Et punktid F_1 ja F_2 on antud, siis on teada ka nende vaheline kaugus F_1F_2. Tähistame selle kauguse, nagu üldiselt viisiks, sümboliga $2c$. Valime sirgjoone F_1F_2 abstsissteljeks ja lõigu F_1F_2 keskristsirge ordinaatteljeks (joonis 21). Siis $F_1 \equiv (c \mid 0)$ ja $F_2 \equiv (-c \mid 0)$. Olgu P mingi punkt ellipsil, missugune nimelt, selle jätame ütlemata. Siis



Joonis 21.

$$F_1P + F_2P = 2a$$

ehk, raadiusvektorite sümboleid kasutades,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Tähistame punkti P koordinaadid tähtedega x ja y; siis

$$r_1^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2 \quad \text{ja} \quad r_2^2 = (x + c)^2 + (y - 0)^2$$

järelikult

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

ja seepärast

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Et punkt P oli mingi punkt ellipsil, siis leitud seos x, y ja konstantide a ja c vahel on kehtiv ellipsi iga punkti puhul; järelikult saadud võrrand ongi ellipsi võrrand.

Anname sellele võrrandile ruutjuurtest vaba kuju. Selleks viime ühe ruutjuure paremale poolele; saame:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2};$$

võrrandi kummagi poole ruutimisel saame:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

peale sulgude avamist ja koondamist leiame, et

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx;$$

uuesti kummagi poole ruutimisel ja koondamisel saame:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Otsustame, missugune on vahe a^2-c^2 märk. Kolmnurgast F_1PF_2 näeme (joonis 21), et

$$F_1P+F_2P>F_1F_2$$

ehk $2a>2c$, seega $a>c$, järelikult $a^2>c^2$ ja lõpuks $a^2-c^2>0$. Niisiis vahe a^2-c^2 on igal juhul p o s i t i i v n e. Seepärast võime teda lühiduse mõttes kirjutada kujul b^2, mille järel ellipsi võrrand omandab kuju

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

ehk

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Uurime, missugune on arvude a ja b geomeetriline tähendus. Selleks leiame ellipsi lõikepunktid koordinaatide telgedega. Lõikepunktis x-teljega on $y=0$, seega $\frac{x^2}{a^2}=1$, $x^2=a^2$ ja $x=\pm a$. Samal viisil leiame, et lõikepunktis y-teljega on $y=\pm b$. Näeme, et ellips lõikab x-telge punktides (joonis 22)

$$A_1\equiv(a\,|\,0)\qquad\text{ja}\qquad A_2\equiv(-a\,|\,0)$$

ja y-telge punktides

$$B_1\equiv(0\,|\,b)\qquad\text{ja}\qquad B_2\equiv(0\,|\,-b).$$

Neid nelja punkti nimetatakse ellipsi h a r i p u n k t i d e k s, sirglõike $A_1A_2=2a$ ja $B_1B_2=2b$ ellipsi t e l g e d e k s, nende lõikepunkti — ellipsi k e s k p u n k t i k s.

Et

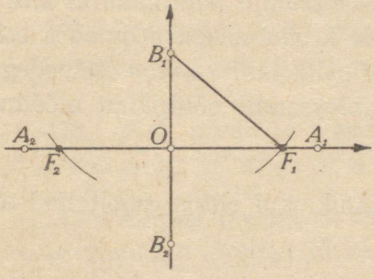
$$a^2-c^2=b^2,\qquad\text{siis}\quad a^2=b^2+c^2,$$
$$a^2>b^2,\quad a>b\quad\text{ja}\quad 2a>2b.$$

Seepärast lõiku A_1A_2 nimetatakse ellipsi suureks teljeks, lõiku B_1B_2 — ellipsi väikeseks teljeks. Vastavalt sellele a on ellipsi suur pooltelg ja b ellipsi väike pooltelg.

Kirjutades a, b ja c vahelise seose kujul

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

näeme, et ellipsi pooltelgede andmisega on määratud ka fookuste vaheline kaugus, ehk, teisiti, punktid A_1, A_2, B_1 ja B_2 määravad ka F_1 ja F_2. Tõepoolest, joonestades väikese telje otspunktist B_1 (või B_2) (joonis 22) ringjoone raadiusega a, näeme, et ta lõikab suurt telge just punktides F_1 ja F_2.



Joonis 22.

Fookuste vahelise kauguse ja suure telje suhet nimetatakse ellipsi ekstsentrisuseks ja tähistatakse tähega e. Definitsiooni järgi $e = 2c : 2a$ ehk

$$e = \frac{c}{a}$$

ehk, teisiti,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Et $a > c$, siis ellipsi ekstsentrisus $e < 1$.

Kokkuvõttes:

Pooltelgedega a ja b ellipsi võrrand on $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ellipsi fookused asetsevad suurel teljel kaugusel $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ellipsi keskpunktist.

Ellipsi ekstsentrisus $e = \frac{c}{a}$ on väiksem kui üks.

164. Joonestada ellips, mille pooltteljed on 6 ja 1,5.

165. Joonestada ellips $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

166. Vana-Rooma amfiteatrid ehitati enamasti ellipsikujulise põhiplaaniga. Nii on Kolosseumi põhiplaaniks ellips telgedega 188 m ja 156 m; selle keskel asetseb, omades esimesega ühiseid telgsirgeid, ellipsikujuline areen telgedega 86 m ja 54 m. Joonestada Kolosseumi põhiplaan mõõdus 1 : 2000.

167. Kirjutada ellipsi võrrand, kui ellipsi pooltteljed on 10 ja 8.

168. Kui pikad on järgmiste ellipsite pooltteljed:

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$	4. $x^2+4y^2=1$
2. $8x^2+25y^2=200$	5. $16x^2+25y^2=1$
3. $x^2+4y^2=9$	6. $6x^2+10y^2=1$

169. Leida ellipsi $2x^2+3y^2=6$ ja sirge $y=4x$ lõikepunktid.

170. Joonestada ellipsi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ teljed ja leida konstruktsiooni teel ellipsi fookused.

171. Ellipsi fookusteks on punktid $(1\,|\,0)$ ja $(-1\,|\,0)$; ellipsi suur telg on 3. Kirjutada selle ellipsi võrrand.

172. Koostada ellipsi võrrand teades, et raadiusvektorite summa on 10 ja et fookuste vaheline kaugus on 8.

173. Ellipsil $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ on võetud punkt, mille abstsiss on 2. Arvutada selle punkti kaugused fookustest.

174. Ellipsil $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ on võetud punkt, mille ordinaat on $\frac{1}{2}$. Arvutada sellesse punkti viivate raadiusvektorite pikkused.

175. Kui pikk on ellipsi $9x^2 + 16y^2 = 144$ kõõl, mis läbib fookust ja on risti ellipsi suure teljega?

176. Kui pikad on raadiusvektorid, mis viivad ellipsi $x^2 + 3y^2 = 12$ ja sirge $x + 3y = 6$ lõikepunktidesse?

177. Ellipsi poolteljed on 5 cm ja 3 cm. Arvutada fookuste vaheline kaugus ja ekstsentrisus.

178. Ellipsi väike pooltelg on 5 ja fookuste kaugus keskpunktist on 24. Arvutada ellipsi ekstsentrisus.

179. Ellipsi suur telg on 2 korda pikem väikesest teljest. Kui suur on ellipsi ekstsentrisus?

180. Ellipsi ekstsentrisus on $\frac{3}{5}$ ja väike pooltelg on 4 cm. Kui pikk on suur pooltelg?

181. Ellipsi suur telg on $2a$, ekstsentrisus e. Kui suur on lühima ja pikima raadiusvektori suhe?

182. Maa liigub Päikese ümber ellipsit mööda, mille ühes fookuses on Päike. Maa ja Päikese vaheline väikseim ja suurim kaugus suhtuvad ligikaudu nagu 29 : 30. Arvutada Maa orbiidi ekstsentrisus.

183. Kui pikk on ellipsisse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kujundatud ruudu külg?

§ 22. Ellipsi uurimine tema võrrandi põhjal.

Lahendades ellipsi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

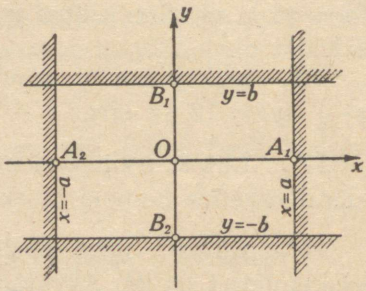
ordinaadi y suhtes, leiame, et

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Saadud avaldisel on mõte üksnes siis, kui juuritav pole negatiivne; see tähendab, et $a^2-x^2\geqslant 0$ ehk $x^2\leqslant a^2$ ehk $|x|\leqslant a$ ehk, teisiti,

$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

Sellest näeme, et ükski ellipsi punkt ei asetse vasakul pool sirget $x=-a$ ega paremal pool sirget $x=a$ (joonis 23). Analoogiliselt leiaksime ellipsi võrrandi lahendamisel abstsissi x suhtes, et



Joonis 23.

$$-b\leqslant y\leqslant b;$$

siit järeldame, et ükski ellipsi punkt ei asetse ülalpool sirget $y=b$ ega allpool sirget $y=-b$.

Kokkuvõttes:

kõik ellipsi punktid asetsevad ristkülikus, mille sümmeetriatelgedeks on ellipsi teljed.

Olgu x_1 mingi x-i väärtus $-a$ ja a vahel. Sellele x-i väärtusele vastavad k a k s y väärtust:

$$y_1'=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2} \quad \text{ja} \quad y_1''=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2};$$

need erinevad üksnes märgi poolest: $y_1'=-y_1''$. See tähendab, et ühtaegu punktiga $(x_1 \mid y_1')$ esineb ellipsil ikka ka punkt $(x_1 \mid -y_1')$, teiste sõnadega,

ellips on sümmeetriline oma suure telje suhtes.

Samal viisil näitame, et

ellips on sümmeetriline oma väikese telje suhtes.

Olgu $(x_1 \mid y_1)$ üks ellipsi punktidest; siis koordinaadid x_1 ja y_1 rahuldavad ellipsi võrrandit; järelikult

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Et $(-x_1)^2 = x^2$ ja $(-y_1)^2 = y_1^2$, siis ühtaegu ülaltoodud võrdusega kehtib ka võrdus

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1;$$

see tähendab aga, et ka punkt $(-x_1 \mid -y_1)$ asetseb ellipsil. Punktid $(x_1 \mid y_1)$ ja $(-x_1 \mid -y_1)$ on sümmeetrilised koordinaatide alguse suhtes. Seetõttu koordinaatide alguspunkti nimetatakse ellipsi keskpunktiks. Niisiis

ellips on sümmeetriline oma keskpunkti suhtes.

Vaatleme lõpuks ellipsi kuju olenevuses ellipsi ekstsentrisusest. Ekstsentrisuse definitsiooni järgi

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a};$$

sellest leiame, et

$$c = ae;$$

ühtlasi selgub, et $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$, millest

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Loeme suure telje jäävaks ja laseme e muutuda. Ekstsentrisuse kasvades nullist üheni, nagu näeme viimastest valemitest, fookuse kaugus keskpunktist kasvab nullist suure pooltelje väärtuseni, väike pooltelg aga väheneb suurest pooltteljest nullini. See tähendab: ellipsi ekstsentrisuse kasvades ellipsi fookuste vaheline kaugus järjest kasvab, väike telg aga järjest väheneb ja ellips muutub järjest lamedamaks. Ekstsentrisuse e lähenedes 1-le läheneb c arvule a ja b arvule 0: ellips läheneb kujult sirgjoone lõigule. Ekstsentrisuse e lähenedes 0-le läheneb ka c 0-le, fookused lähenevad järjest keskpunktile, b läheneb a-le, teiste sõnadega, ellips läheneb oma kujult ringjoonele.

§ 23. Ellips ringjoone normaalprojektsioonina.

Olgu antud ringjoon raadiusega a. Võtame ringjoone kaks ristuvat diameetrit koordinaatide telgedeks ja vaatame, missuguse kõvera moodustavad punktid, mis saame vähendades ringjoone punktide ordinaate suhtes $\frac{m}{n}$.

Tähistades ringjoone punkti koordinaate tähtedega X ja Y, saame ringjoone võrrandi kirjutada kujul

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Ringjoone punkti $(X \mid Y)$ abstsissi endiseks jätmisel ja ordinaadi vähendamisel suhtes $\frac{m}{n}$ saame punkti abstsissiga $x = X$ ja ordinaadiga $y = \frac{m}{n} Y$. Et ümberpöördult $X = x$ ja $Y = \frac{n}{m} y$, siis ringjoone võrrandi põhjal saame

$$x^2 + \left(\frac{n}{m} y\right)^2 = a^2$$

ehk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{n} a\right)^2} = 1.$$

See on niisuguse ellipsi võrrand, millel suur pooltelg on a ja väike pooltelg on $\frac{m}{n} a$.

Kokkuvõttes:

kui ringjoone punktide ordinaate vähendada mingis kindlas suhtes, siis asetsevad ordinaatide uued lõpp-punktid ellipsil.

Viimasest võrrandist nähtub, et saadud ellipsi väikese pooltelje pikkus

$$b = \frac{m}{n} a$$

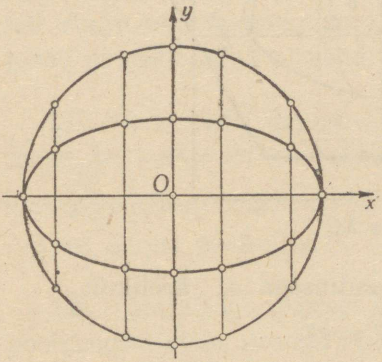
ja seega

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}.$$

Järelikult:

et saada ringjoonest raadiusega a ellipsit pooltelgedega a ja b, tuleb ringjoone ordinaadid vähendada suhtes $b : a$.

See annab lihtsa võtte ellipsi punktide leidmiseks: joonestame ellipsi suurel teljel kui diameetril ringjoone ja vähendame selle ringjoone punktide ordinaate suhtes $b : a$ (joonis 24).



Joonis 24.

Näitame lõpuks, et

ringjoone normaalprojektsioon on ellips.

Kujutagu tasapind R (joonis 25) ringi tasapinda, olgu ringi raadius a, ringi keskpunkt O ja OX üks ringi diameetritest. Võtame projektsioonipinnaks tasapinna T, mis lõikub tasapinnaga R mööda sirget OX ja moodustab tasapinnaga R nurga φ. Langegu projektivad kiired risti tasapinnaga T.

Võtame tasapinnal R telje OY risti teljega OX ja tasapinnal T teljeks Ox sirge OX ja teljeks Oy sirge läbi punkti O risti sirgega Ox. Olgu $P \equiv (X \mid Y)$ vabalt valitud punkt ringjoonel ja $P_1 \equiv (x \mid y)$ tema projektsioon tasapinnal T; siis

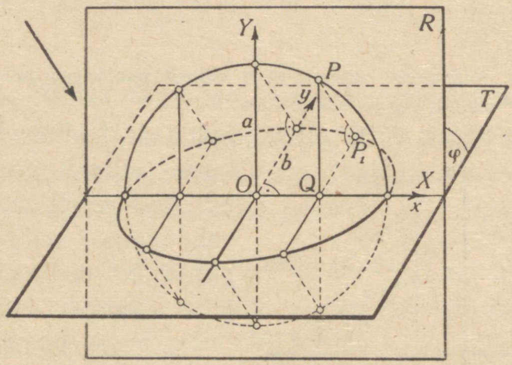
$$x = X.$$

Joonisest näeme, et kolmnurgas PP_1Q on nurk PP_1Q täisnurk; nurk $PQP_1 = \varphi$ ja järelikult

$$QP_1 = QP \cos \varphi$$

ehk

$$y = Y \cos \varphi.$$



Joonis 25.

Punkt P asetseb ringjoonel raadiusega a; järelikult

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Et $X = x$, $Y = \frac{y}{\cos \varphi}$, siis punkti P projektsiooni koordinaadid x ja y rahuldavad võrrandit

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \varphi} = a^2$$

ehk võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \varphi} = 1.$$

See aga on niisuguse ellipsi võrrand, mille pooltelјed on a ja $a \cos \varphi$. Näeme, et projektsioonipinnale risti langevad kiired heidavad kaldu seisva tasapinna ringist projektsioonitasapinnale ellipsikujulise varju.

184. On antud ringjoon $x^2 + y^2 = r^2$. Missuguse joone täidavad ringjoone punktide ordinaatlõikude poolitamispunktid?

185. Missuguse joone täidavad punktid, millel on niisama suur ordinaat, kuid kolm korda suurem abstsiss kui ringjoone $x^2 + y^2 = 9$ vastavatel punktidel?

186. Ringjoon $x^2 + y^2 = 16$ projektitakse tasapinnale, mis lõikub ringjoone tasapinnaga piki x-telge ja moodustab ringjoone tasapinnaga 60^0-se nurga. Kirjutada ringjoone projektsiooni võrrand.

187. Kirjutada niisuguse ellipsi võrrand, mis tekib ringjoone $x^2 + y^2 = 64$ projektimisel tasapinnale, mille kaldenurga koosinus ringjoone tasapinna suhtes on $\frac{1}{3}$. Kui suured on ellipsi poolteljed?

188. Maja lõunapoolsel küljel on seinast välja ehitatud poolringikujulise alusega rõdu. Keskpäeval näeme maja seinal rõdu poolellipsikujulist varju. Leida päikese kõrgusnurk üle horisondi, teades, et ellipsi püst- ja rõhtpooltelg suhtuvad nagu 2 : 3.

189. Silindri raadius on 10 cm. Silinder on lõigatud tasapinnaga, mis moodustab silindri põhjaga nurga 45^0. Võttes lõikejoone kõrgeimat ja madalaimat punkti läbiva sirge x-teljeks ja lõiketasapinnal sellega ristuva ning silindri telge lõikava sirge y-teljeks, kirjutada lõikejoone võrrand.

190. Kerast, mille läbimõõt on 30 cm, heidavad päikesekiired põrandale varju. Anda varju piirjoone võrrand, teades, et päikesekiired moodustavad põrandaga 30^0-se nurga.

ALGEBRA.

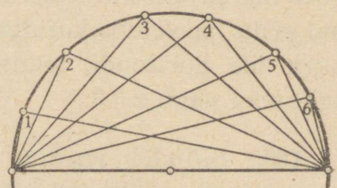
Peatükk V.

Suuruste sõltuvus.

§ 24. Jäävad ja muutuvad suurused.

Suurusi, mis esinevad mõne küsimuse matemaatilisel käsitlemisel, võib liigitada kahte liiki: ühed, millel on ainult üks numbriline väärtus, ja teised, mis võivad omada numbrilisi väärtusi enam kui ühe. Esimest liiki suurusi nimetatakse jäävaiks suurusiks, lühidalt jäävaiks ehk konstantideks; teist liiki suurusi nimetatakse muutuvaiks suurusiks, lühidalt muutujaiks.

Näide. Joonestame ringi sisse rea kolmnurki, millede üheks küljeks on diameeter (joonis 26). Nummerdame need kolmnurgad numbritega 1, 2, 3, jne. Siis kolmnurga numbri muutudes kolmnurga üks külg on jääv, selle külje vastasnurk on jääv; teine külg, kolmas külg, kolmnurga ümbermõõt ja kolmnurga pindala muutuvad; kolmnurga jääva külje lähisnurgad muutuvad, nende nurkade summa aga on jääv.



Joonis 26.

Muutuv suurus võib omandada mitmesuguseid väärtusi. Kui ükski suuruse s väärtustest ei ole väiksem arvust a ja ükski neist ei ole suurem arvust b, siis ütleme, et selle suuruse muutumine on altpoolt tõkestatud arvuga a ja ülaltpoolt arvuga b. Väärtuste kogu, mida muutuv suurus võib omada, moodustab suuruse muutumisvahemiku. Näiteks $\sin \alpha$ muutumisvahemik ulatub arvust —1 arvuni 1. Et $\sin \alpha$ seejuures võib omandada ka väärtused —1 ja 1, siis kirjutame tema muutumisvahemiku järgmiselt:

$$-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1.$$

Väärtusteks, mis suurus oma muutumisel omandab, võivad olla kas kõik muutumisvahemikku kuuluvad arvud või üldse kõik arvud või ka ainult mõned eriarvud. Näiteks hulknurga nurk võib omada iga väärtust 0^0 ja 180^0 vahel; korrapärase hulknurga nurk võib omada aga ainult järgmisi väärtusi 0^0 ja 180^0 vahel:

$$\frac{1 \cdot 180^0}{3} \text{ ehk } 60^0, \quad \frac{2 \cdot 180^0}{4} \text{ ehk } 90^0, \quad \frac{3 \cdot 180^0}{5} \text{ ehk } 108^0, \ldots$$

üldiselt

$$\frac{(n-2) \cdot 180^0}{n},$$

kus täisarv n on hulknurga nurkade arv.

Kõigil juhtudel nimetame muutuja väärtuste kogu selle muutuja muutumispiirkonnaks.

§ 25. Funktsioon ja argument.

On olemas suurusi, mis on teineteisega niiviisi seotud, et ühe suuruse väärtuse etteandmisega on ka teise suuruse väärtus juba ette määratud. Näiteks arvu a etteandmisega on juba määratud tema logaritm; kõvera punkti abstsissi etteandmisega on juba määratud punkti ordinaat; ringi läbimõõdu etteandmisega on juba määratud ringi pindala.

Teise suuruse määratud väärtus leitakse kord tema otsimise teel tabelist, kord mõõtmise, kord jälle arvutamise teel.

Kui ühe suuruse mingis muutumispiirkonnas igale väärtusele vastab teise suuruse kindel väärtus, siis öeldakse, et teine suurus sõltub esimesest ehk, teisiti, teine suurus on esimese funktsioon.

Suurust, millest funktsioon sõltub, nimetatakse argumendiks.

Näiteks sirgjoone tõus on sirgjoone tõusunurga funktsioon, ellipsi punkti raadiusvektor on punkti abstsissi funktsioon, kera ruumala on kera läbimõõdu funktsioon, veeröhk meres on sügavuse funktsioon, inimese keha pikkus on aja funktsioon.

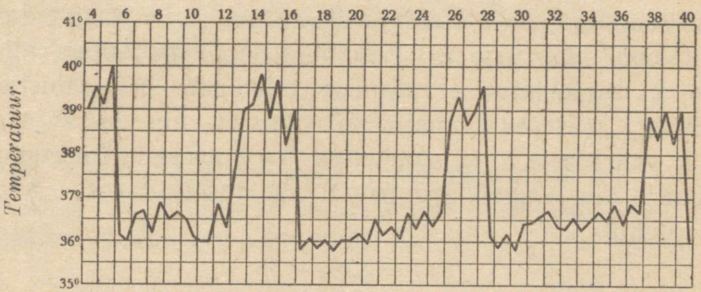
Suuruse x funktsiooni tähistakse lühidalt $f(x)$.

Muutuv suurus võib ühtaegu sõltuda mitmest teisest suurusest; näiteks silindri ruumala sõltub põhja raadiusest ja silindri kõrgusest, ellipsi väike telg sõltub suurest teljest ja ellipsi ekstsentrisusest, juhtmes elektrivoolu poolt tekitatud soojuse hulk sõltub ajast, voolu tugevusest ja juhtme takistusest. Mitmest muutujast sõltuvaid funktsioone uuritakse ikka nii, et uuritakse funktsiooni sõltuvust esiteks ühest, siis teisest, siis kolmandast jne. argumendist. Seepärast edaspidi vaatleme ainult ühest muutujast sõltuvaid funktsioone ja viimaseistki vaid neid, mis eriti sageli esinevad tegelikkuse poolt seatud ülesannete lahendamisel.

§ 26. Suuruste sõltuvuse väljendusvahendid.

On mitmeid vahendeid suuruste sõltuvuse väljendamiseks. Üheks niisuguseks vahendiks on t a b e l, mille ühte veergu (või ritta) on kirjutatud argumendi väärtused ja teise veergu (või ritta) on kirjutatud funktsiooni vastavad väärtused. Näiteina olgu nimetatud järgmised: siinuste tabel, mille ühes veerus leiame nurga väärtused, teises veerus vastavad siinuse väärtused; päikese tõusuaegade tabel, kus ühes veerus leiame kalendripäeva, kõrvalveerus päikese vastava tõusuaja; tulumaksumäärade tabel, mille ühes veerus näeme maksualust tulu, kõrvalveerus vastavat tulumaksumäära.

Haiguspäevad.



Korduva soetõve haige kehatemperatuuri graafik.

Joonis 27.

Teiseks vahendiks suuruste sõltuvuse väljendamiseks on g r a a f i k. Joonisel 27 näeme kujutatuna korduva soetõve haige inimese kehatemperatuuri sõltuvust ajast. Siin on iga mõõtmisaeg kujutatud ajateljel abstsissina ja temperatuur abstsissile vastava ordinaadina. Kergema ülevaate saamiseks temperatuuri muutumise käigust on iga kaks järjestikust ordinaadi lõppu ühendatud sirglõiguga. Haige kehatemperatuuri muutumise käik on mõne haiguse puhul (nagu tüüfus, sarlakid ja mitmed teised) niivõrd iseloomustav, et temperatuurikõvera osa esimestel haiguspäevadel kasutatakse abinõuna haiguse eritlemisel.

Kolmandaks vahendiks sõltuvuse väljendamiseks on valem. Ta annab kokkuvõtlikult eeskirja, kuidas arvutada funktsiooni väärtust, kui argumendi väärtus on antud. Olgu näiteks

$$y = 3x^2 - 8x.$$

Niipea kui x-i väärtus on teada, on selle valemiga määratud ka y; seega y on x-i funktsioon:

$$y = f(x).$$

Sümbolit $f(x)$ võime vaadelda siin funktsiooni avaldisena, teiste sõnadega, selle eeskirja lühendina, mille järgi toimub funktsiooni väärtuste arvutamine. Sama sümboliga tähistame ka kirjeldatud arvutamise tulemust. Nii tähistame sümboliga $f(5)$ seda funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi väärtusele 5, ja sümboliga $f(a+1)$ seda funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi väärtusele $a+1$. Antud näite puhul

$$f(x) = 3x^2 - 8x,$$

seega

$$f(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 3 \cdot 25 - 40 = 35$$

ning edasi

$$f(a+1) = 3(a+1)^2 - 8(a+1) =$$
$$= 3a^2 + 6a + 3 - 8a - 8 = 3a^2 - 2a - 5.$$

Kolmest käsiteldud sõltuvuse väljendusvahendist on valem kõige võimsam: ta lubab kohe arvutada funktsiooni väärtuste tabeli; selle järgi saab siis joonestada funktsiooni graafiku.

Suuruste sõltuvuse graafilisel esitamisel pole iga kord võimalik kasutada argumendi ja funktsiooni kujutamiseks üht ja sama ühikut; nii argumendi kui ka funktsiooni kujutamisühik tuleb valida omaette, arvestades joonise võimalikku suurust ühelt poolt ning argumendi ja funktsiooni muutumispiirkondi teiselt poolt. Selle selgituseks olgu järgmine ülesanne.

Ü l e s a n n e. Kujutada graafiliselt ringi pindala sõltuvus raadiusest, võttes viimase muutumisvahemik 0 meetrist 10 meetrini.

L a h e n d u s. Väljendades valemiga ringi pindala S sõltuvuse raadiusest r, saame

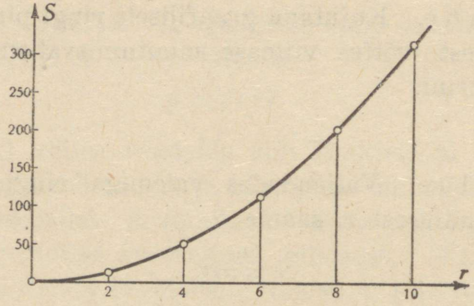
$$S = \pi r^2.$$

Andes argumendile r tema muutumisvahemikus näiteks väärtused 0, 2, 4, 6, 8, 10 ja arvutades ning ümardades neile vastavad funktsiooni väärtused, saame järgmise tabeli

r m-tes	0	2	4	6	8	10
S m^2-tes	0	12,6	50,7	113	201	314

Valime argumendi väärtuste kujutamisel ühikuks 10 mm ja funktsiooni väärtuste kujutamisel ühikuks 0,2 mm. Nende kujutamisühikute puhul r-telje ühesentimeetrine lõik kujutab üht meetrit, S-telje ühesentimeetrine lõik kujutab 50 ruutmeetrit. Valitud kujutamisühikute korral argumendi muutumisvahemik esineb r-teljel lõiguna 10 sentimeetrit, funktsiooni muutumisvahemik S-teljel lõiguna pisut üle 6 sentimeetri. Arvestades pealkirjadeks 1 sentimeetri laiust riba, näeme, et kogu joonise suuruseks on sentimeetrites ümmarguselt 7×11.

Kujutades eespool-olevas tabelis seisvaid arvupaare punktidena rS-tasapinnas ja ühendades need punktid võimalikult lihtsa ja sileda joone abil, saame pildi ringi pindala S muutumisest raadiuse r muutudes (joonis 28, kaks korda vähendatud suuruses).



Joonis 28.

Kõnesolevas näites argument võib omandada **iga** positiivse väärtuse. Juhul, kui argument võib omandada vaid rea **eriväärtusi**, esineb funktsiooni graafik üksikute ordinaatide koguna; siis ordinaatide lõpp-punktide ühendamiseks joone abil pole alust.

Funktsiooni graafiku valmistamisel tuleb kaaluda, kuidas muutub funktsiooni väärtus — kas pidevalt või **hüppeliselt**. Vastavalt sellele saame funktsiooni graafikuna kas **katkematu** või **katkeva** joone.

Ülesanded.

191. Nimetada iga allpool-märgitud nähtuse puhul mõned sellega seotud suurused, mis muutuvad, ja mõned teised, mis jäävad muutumatuks:

1. auto ühtlane liikumine;
2. kivi vaba langemine;

3. õhu kokkusurumine õhkpüstolis;
4. mündi paisumine soojenemisel;
5. Maa liikumine oma ellipsikujulisel teel.

192. Nimetada mõned suurused, millest sõltub:

1. kuubi täispindala;
2. tetraeedri ruumala;
3. silindri tasapinnalise lõike suur telg;
4. kauba saatekulu raudteel;
5. fotoplaadi ilmutamise aeg.

193. Nimetada mõned suurused, millest sõltub:

1. pesu kuivamise aeg;
2. vasara löögi tugevus;
3. jääva raadiusega silindri täispindala;
4. jääva kõrgusega koonuse ruumala;
5. antud rahasumma eest saadava kauba hulk.

194. Nimetada mõned argumendid, mille funktsioon on:

1. ringi sektori ümbermõõt;
2. aritmeetilise rea liige;
3. kinnises klassis ühele õpilasele osanev hapniku hulk;
4. veerõhk mere sügavusse laskumisel;
5. voolutugevus juhtmes antud takistuse puhul.

195. Väljendada valemiga ühe kaateti sõltuvus teisest, kui hüpotenuus jääb muutumatuks.

Väljendada see sõltuvus tabeliga, kui hüpotenuus on 10 cm.

Kujutada seesama sõltuvus graafiliselt.

196. Järgmine tabel annab korrapärase hulknurga külje pikkuse a sõltuvuses külgede arvust n, kui pikkusühikuks on hulknurga ümberringjoone raadius:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
a	1,73	1,41	1,18	1,00	0,87	0,77	0,68	0,62	0,52	0,42

Kujutada graafiliselt funktsiooni $a(n)$ muutumine. Anda funktsiooni $a(n)$ avaldis.

197. Järgmine tabel näitab inimese peaaju keskmise kaalu kasvamist vanusega:

Vanus aastates	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Peaaju kaal g-des	330	800	945	1050	1095	1148	1170	1180	1205	1220

Vanus aastates	10	11	12	13	14	15	16	17	18	20
Peaaju kaal g-des	1235	1246	1253	1260	1275	1282	1295	1303	1312	1325

Kujutada graafiliselt inimese peaaju kaalu kasvamine vanusega, tarbe korral andmeid tasandades. Missugused selle kasvamise iseärasused paistavad silma?

Kui suur on peaaju kaal vanuste puhul 8 kuud, 1 aasta 4 kuud, 4 aastat 6 kuud?

198. Kujutada graafiliselt alljärgneva suuruse muutumine tema avaldises esineva tähe kasvades etteantud vahemikus. Avaldise väärtused arvutada küllalt tihedalt, näiteks võttes argumendi väärtused 0,5, tarbe korral isegi 0,2 või 0,1 tagant. Arvutused toimetada sobivalt valitud arvutus-skeemis nii peenelt, kui seda nõuab graafiline töö.

1. $y = \frac{x+20}{x+20}$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant 20$

2. $v = \frac{1}{1+u^2}$ $\quad 0 \leqslant u \leqslant 5$

3. $z = \frac{5x}{1+2x^2}$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant 10$

4. $s = 6t - t^2$ $\quad 0 \leqslant t \leqslant 6$

5. $q = 25 - 10p + p^2$ $\quad 0 \leqslant p \leqslant 10$

6. $x = \frac{z+5}{z^2+2}$ $\quad 0 \leqslant z \leqslant 20.$

199. Sõnastada eeskiri, mille järgi leitakse x-i väärtusele vastav funktsiooni väärtus $f(x)$, kui

1. $f(x) = (x-3)(x-4)$
2. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
3. $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$
4. $f(x) = \frac{2x+5}{7x+3}$
5. $f(x) = 3^{\frac{2}{x-2}}$
6. $f(x) = \log \sqrt[3]{1+x^2}$

200. On antud: Leida:

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ $\quad f(-1);\ f(1);\ f(5).$
2. $g(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ $\quad g(0);\ g(-1);\ g(9).$
3. $j(x) = \sqrt{x^2-3}$ $\quad j(2);\ j(-3\frac{1}{2});\ j(\sqrt{3}).$
4. $h(x) = 5^{x-1}$ $\quad h(0);\ h(2);\ h(1).$
5. $l(x) = \log \sqrt[3]{x}$ $\quad l(10);\ l(\sqrt{5});\ l(0{,}001).$

201. On antud: Leida:

1. $F(x) = 2x + 3$ $\quad F(1+h);\ F(\frac{h}{2}).$
2. $G(x) = x^2 - 5x + 6$ $\quad G(2-h);\ G(3+h).$
3. $K(x) = x^3 - 2x + 1$ $\quad K(h);\ K(1+h).$
4. $L(x) = \log x$ $\quad L(10^h) + 1;\ L(2^h).$

202. Olgu: Avaldada:

1. $E(x) = x + 1$ — $\dfrac{E(x) - 1}{E(x) + 1}$

2. $F(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$ — $[F(x)]^3$

3. $G(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ — $G(x) - 1$

4. $H(x) = \sqrt[3]{x^2}$ — $\log H(x)$

5. $I(x) = \log (x^2 + 1)$ — $10^{I(x)}$

203. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et tema kaugus y-teljest on 3 korda suurem kui kaugus x-teljest. Avaldada seos punkti P koordinaatide vahel. Missugusel joonel liigub punkt P?

204. Missuguse funktsionaalse seose puhul koordinaatide x ja y vahel punkt $(x \mid y)$ asetseb võrdseil kaugusil punktidest $(-4 \mid 0)$ ja $(0 \mid 6)$?

205. On antud punktid $P_1 \equiv (3 \mid -2)$ ja $P_2 \equiv (-1 \mid 6)$. Punkti P kaugused neist punktidest on PP_1 ja PP_2. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et ikka kauguste PP_1 ja PP_2 ruutude vahe on 8. Väljendada võrrandiga punkti P ordinaadi olenevus abstsissist. Missugusel joonel liigub punkt P?

206. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et punkti kaugus sirgest $y = -1$ jääb võrdseks tema kaugusega punktist $(0 \mid 1)$. Väljendada võrrandiga punkti ordinaadi sõltuvus tema abstsissist.

207. Vaatleme kõiki inimese poolt valmistatud ruute. Olgu ruudu külg tähistatud tähega a, ümbermõõt tähega u, pindala tähega S, diagonaal tähega d. Missugused suurustest

$$a \qquad d \qquad u \qquad S \qquad d:a \qquad S:d^2$$

on selles ruutude kogus muutuvad, missugused on jäävad?

Avaldada muutuvad suurused külje a funktsioonina.

208. Avaldada ringi sektorikujulise kaheksandiku ümbermõõt raadiuse funktsioonina.

209. Ellipsi suur telg on 1 dm. Avaldada ellipsi väike telg, fookuste vaheline kaugus ja ellipsi ordinaat fookuse kohal ekstsentrisuse funktsioonina.

210. $y = \frac{x}{|x|}$. Kujutada graafiliselt suuruse y muutumine x-i muutudes.

211. $y = x + |x|$. Kujutada graafiliselt suuruse y muutumine x-i muutudes.

212. $y = \frac{1}{2}|x| \cdot x$. Kujutada graafiliselt suuruse y muutumine x-i muutudes.

§ 27. Võrdeline sõltuvus.

Kui kaks suurust sõltuvad teineteisest nii, et ühe suuruse kasvades mingi arv korda teine suurus kasvab sama arv korda, siis öeldakse, et teine suurus sõltub esimesest võrdeliselt.

Märgime kõnesolevad suurused tähtedega x ja y ja olgu x_1 ja x_2 mingid kaks argumendi väärtust ning y_1 ja y_2 neile vastavad funktsiooni väärtused. Üleminekul väärtuselt x_1 väärtusele x_2 argument kasvab $x_2 : x_1$ korda; samal ajal funktsioon kasvab $y_2 : y_1$ korda. Suuruste x ja y võrdelisuse puhul peab seega olema

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

ehk, teisiti kirjutades,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

See tähendab, et

võrdelise sõltuvuse puhul funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste suhted on võrdsed.

Et ümberpöördult võrdest $y_1 : x_1 = y_2 : x_2$ järeldub võrre $x_2 : x_1 = y_2 : y_1$, siis praegu sõnastatud võrdelise sõltuvuse tunnus on samaväärne algul antud definitsiooniga.

Et ühtaegu võrdega

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

kehtib ka võrre

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2},$$

siis näeme, et kui muutuja y on võrdeline x-iga, siis ka muutuja x on võrdeline y-ga. See tähendab, et

kahe suuruse võrdelisus on nende suuruste vastastikune omadus.

Seepärast võime rääkida teineteisest võrdeliselt sõltuvatest suurustest.

Teineteisest võrdeliselt sõltuvateks suurusteks on näiteks: ruudu külg ja ruudu ümbermõõt; kullakangi kaal ja tema väärtus; ühtlase liikumise puhul sõidu aeg ja kaetud maa; koha sügavus meres ja seal valitsev veerõhk; hõõglambi põlemise aeg ja kulunud vooluhulk.

Olgu (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ kahe teineteisest sõltuva suuruse kokkukuuluvate väärtuste paarid. Siis

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots$$

See võrrete jada ütleb, et võrdelise olenevuse korral funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste suhe on jääv. Seda jäävat suhet nimetame võrdeteguriks. Tähistame ta tähega a. Olgu x argumendi mingi väärtus ja tähendagu y sellele vastavat, argumendist võrdeliselt sõltuva funktsiooni väärtust; siis öeldu järgi

$$\frac{y}{x} = a$$

ehk

$$y = ax.$$

See tähendab:

võrdelise sõltuvuse korral funktsiooni väärtus võrdub argumendi vastava väärtuse ja võrdeteguri korrutisega.

Anname argumendile väärtuse 1; siis $y = a$. Seega:

võrdelise sõltuvuse korral võrdetegur kujutab funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi väärtusele 1.

N ä i d e. Olgu õhu temperatuur mõõdetud ühtaegu Celsiuse ja Réaumuri järgi kraadides ja saadud esimese skaala järgi C^0, teise järgi R^0. Arvud C ja R on võrdelised:

$$C = \frac{5}{4} R.$$

Võrdeteguriks on kordaja $\frac{5}{4}$; ta näitab, et üks Réaumuri kraad termomeetri skaalal on võrdne $\frac{5}{4}$ Celsiuse kraadiga.

Tõlgendame seost $y = ax$ võrrandina ja tuletame meelde, et sellele võrrandile vastab sirge, mis omab tõusu a ja läbib koordinaatide alguspunkti. Me näeme siis, et

võrdelise sõltuvuse geomeetriliseks vasteks on koordinaatide alguspunkti läbiv sirge; selle sirge tõus kujutab võrdetegurit.

Ümberpöördult, koordinaatide algust läbiva sirge iga punkti ordinaat on selle punkti abstsissi kordne, seega abstsissiga võrdeline. Järelikult:

iga alguspunkti läbiv sirge (peale telgede eneste) on teatava võrdelise sõltuvuse graafikuks.

Ülesanded.

213. On antud ring ja temas võetud piirdenurk $\widehat{ABC} = \beta$ ning kaarele AC toetuv kesknurk ω. Kuidas sõltuvad teineteisest nurgad β ja ω?

214. Avaldada võrdkülgse kolmnurga kõrgus h selle kolmnurga külje a kaudu. Näidata, et h on võrdeline a-ga. Kui suur on võrdetegur?

215. Suurendagu mikroskoop 1500 korda. Bakter paistab mikroskoobi all P mm pikana. Missugune on tema tõeline pikkus p?

Kuidas sõltuvad teineteisest arvud p ja P?

216. Maatüki plaan on joonestatud mõõdus 1 : 1000. Olgu kahe piirikivi vaheline kaugus plaanil k cm. Missugune kaugus K vastab sellele maapinnal?

Kuidas sõltuvad teineteisest arvud K ja k?

217. Kolmnurga küljed on 48 cm, 32 cm ja 64 cm. Kui suur on selle kolmnurgaga sarnase kolmnurga ümbermõõt, kui ta väikseim külg on 48 cm?

218. Hulknurga ümbermõõt on 148 cm ja hulknurga suurim diagonaal on 15 cm. Kui suur on esimese hulknurgaga sarnase hulknurga ümbermõõt, kui ta suurim diagonaal on 120 cm?

219. Allpool on antud rida teineteisest sõltuvate suuruste paare. Otsustada, missuguste paaride puhul on tegemist võrdelise sõltuvusega, missuguste paaride puhul mittevõrdelise sõltuvusega.

1. Poolringi ümbermõõt ja ringi läbimõõt.
2. Kullakangi kaal ja selle kangi väärtus.
3. Ruudu pindala ja ruudu ümbermõõt.
4. Hoius ja sellelt saadav aastaintress antud intressimäära puhul.
5. Raudteel sõitja vanus ja tema pileti hind Tartust Tallinna.
6. Kolmnurga pindala ja kolmnurga kõrgus antud aluse puhul.

7. Silindri ruumala ja silindri raadius antud kõrguse puhul.

8. Koonuse ruumala ja koonuse kõrgus antud põhja ümbermõõdu puhul.

9. Ühtlaselt liikuva keha läbitud tee pikkus ja liikumise kestus.

10. Vabalt langeva keha läbitud tee pikkus ja langemise kestus.

220. Olgu y ja x teineteisest võrdeliselt sõltuvad suurused ja suuruse x väärtusele 2,4 vastaku suuruse y väärtus 12. Missugune y väärtus vastab x-i väärtusele 3,4?

221. Olgu suurus y võrdeline suurusega x ja olgu $y = 4$, kui $x = 5$. Anda valem, mis väljendab suuruste x ja y vahelise seose. Kui suur on võrdetegur? Kui suur on y, kui $x = 2$? kui $x = \frac{1}{4}$? Kui suur on x, kui $y = 36$? kui $y = 1{,}25$?

§ 28. Lineaarne sõltuvus.

Avaldist $ax + b$, kus x on muutuv, a ja b on konstandid ja $a \neq 0$, nimetatakse suuruse x lineaarseks binoomiks ehk lineaarfunktsiooniks. Niisiis:

suuruse x lineaarfunktsioon on

$$ax + b,$$

milles a ja b on mingisugused konstandid ja $a \neq 0$.

Kui võrdusest

$$y = ax + b$$

avaldame muutuja x, saame

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}.$$

Leitud avaldis on suuruse y lineaarne binoom. Seega: kui y sõltub x-ist lineaarselt, siis ka x sõltub y-st lineaarselt; teiste sõnadega, lineaarne sõltuvus kahe suuruse vahel on vastastikune; seepärast võime edaspidi rääkida teineteisest lineaarselt sõltuvatest suurustest.

Lineaarselt sõltuvad teineteisest näiteks: raudteerööpme pikkus ja temperatuur; hoiukassas hoiul seisev rahasumma ja hoiuaeg; õhupallis oleva gaasi ruumala ja temperatuur; ülespaisatud kivi kiirus ja liikumisaeg.

Selgitame lineaarfunktsiooni

$$f(x) = ax + b$$

avaldises esinevate kordajate tähenduse. Andes argumendile väärtuse 0, saame

$$f(0) = b;$$

seega:

lineaarfunktsiooni avaldises esinev vabaliige kujutab funktsiooni algväärtust.

Et leida konstandi a tähendust, selleks anname argumendile mingid kaks teineteisele järgnevat ja ühe võrra erinevat väärtust, näiteks x_0 ja $x_0 + 1$. Siis

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

ja

$$f(x_0 + 1) = a(x_0 + 1) + b = ax_0 + a + b.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, leiame, et

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) = a.$$

Tulemusest nähtub, et argumendi kordaja lineaarfunktsiooni avaldises näitab, mille võrra muutub funktsioon, kui argument kasvab ühe võrra, teiste sõnadega:

argumendi kordaja lineaarfunktsiooni avaldises kujutab funktsiooni muutumise kiirust.

Näited. 1. Olgu koonuse põhja raadius r ja koonuse moodustaja l. Siis koonuse täispindala S avaldub kujul

$$S = \pi r l + \pi r^2.$$

S sõltub l-ist lineaarselt; pindala S algväärtus on πr^2 ja muutumise kiirus on πr.

2. Ellipsi punkti raadiusvektorite summa on võrdne ellipsi suure teljega; seda sümbolites kirjutades saame

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

millest

$$r_2 = -r_1 + 2a.$$

Me näeme, et ellipsi punkti raadiusvektorid sõltuvad teineteisest lineaarselt; raadiusvektori algväärtus on $2a$ ja muutumise kiirus on —1.

Suuruse s mingit juurdekasvu on viisiks tähistada sümboliga Δs (loe: delta s). Sümbol Δ asendab siin sõna „juurdekasv". Kirjutises Δs ei saa sümboleid Δ ja s eraldada; sümbol Δs kujutab üht tervikut just nii, nagu seda näeme sümbolite $\log a$, $\sin \varphi$ ja $\tan \mu$ puhul.

Küsime, mille võrra muutub lineaarfunktsioon $y = ax + b$, kui argument kasvab lähteväärtusest x juurdekasvu Δx võrra?

Et argumendi lähteväärtus on x, siis funktsiooni lähteväärtus on $ax + b$;

et argumendi lõppväärtus on $x + \Delta x$, siis funktsiooni lõppväärtus on $a(x + \Delta x) + b$.

Seega argumendi kasvades Δx võrra funktsioon kasvab

$$a(x + \Delta x) + b - (ax + b) \quad \text{ehk} \quad a \cdot \Delta x$$

võrra; teiste sõnadega: argumendi juurdekasvule Δx vastab funktsiooni juurdekasv.

$$\Delta y = a \cdot \Delta x.$$

Selles funktsiooni juurdekasvu valemis e i e s i n e argumendi lähteväärtus; see tähendab, et missugusele argumendi väärtusele juurdekasv Δx ka lisandataks, ikka saab funktsioon ühe ja sellesama juurdekasvu ehk, teisiti,

lineaarse sõltuvuse puhul võrdsetele argumendi juurdekasvudele vastavad ikka võrdsed funktsiooni juurdekasvud.

Anname nüüd argumendile rea eri suurusega juurdekasve Δx. Juurdekasvude valemist $\Delta y = a \cdot \Delta x$ näeme siis, et

lineaarfunktsiooni puhul argumendi ja funktsiooni juurdekasvud on võrdelised.

Tõestame selle teoreemi pöörde:

kui argumendi ja funktsiooni juurdekasvud on võrdelised, siis sõltuvus on lineaarne.

Tõepoolest, olgu x_0 üks argumendi e r i v ä ä r t u s ja y_0 sellele vastav funktsiooni väärtus; olgu x argumendi m i n g i väärtus ja y sellele vastav funktsiooni väärtus. Argumendi ja funktsiooni juurdekasvud on vastavalt

$$x - x_0 \text{ ja } y - y_0.$$

Eelduse järgi nende juurdekasvude suhe on jääv; tähistades viimast tähega a, saame

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a.$$

Siit

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

ehk

$$y = ax + (y_0 - ax_0)$$

ehk, vabaliiget teisiti tähistades,

$$y = ax + b,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Viimati-tõestatud lause põhjal on hõlpus otsustada, kas mõne tabeliga antud sõltuvus on lineaarne või mitte.

Olgu näiteks antud tabel:

x	-4	-2	1	6	13
y	13	9	3	-7	-21

Koostame selle põhjal juurdekasvude tabeli:

Δx	2	3	5	7
Δy	-4	-6	-10	-14
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	-2	-2	-2	-2

Et juurdekasvude suhe on igal pool -2, seega jääv, siis antud tabel esindab lineaarset olenevust x ja y vahel.

Juurdekasvude valemist

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

näeme, et positiivse Δx korral Δy märk ühtib kordaja a märgiga:

$$\text{kui } a > 0, \text{ siis ka } \Delta y > 0,$$
$$\text{kui } a < 0, \text{ siis ka } \Delta y < 0.$$

Esimesel juhul argumendi kasvades ka funktsioon k a s v a b, teisel juhul argumendi kasvades funktsioon k a h a n e b.

Võrrandi

$$y = ax + b$$

geomeetriliseks vasteks on sirge, mille tõus on a ja algordinaat on b. Niisiis:

lineaarfunktsiooni graafikuks on sirge, mille tõus kujutab funktsiooni muutumise kiirust ja mille algordinaat kujutab funktsiooni algväärtust.

K a s v a v a lineaarfunktsiooni graafikuks on t õ u s e v sirge, k a h a n e v a funktsiooni graafikuks l a n g e v sirge.

Sirge, mis kujutab lineaarfunktsiooni muutumist, on määratud k a h e andmega. Järelikult ka lineaarfunktsioon on määratud kahe andmega; nendeks andmeteks võivad olla näiteks funktsiooni algväärtus ja muutumise kiirus, kaks funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste paari, või üks funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste paar ja funktsiooni muutumise kiirus.

Ü l e s a n n e. Kui suur y vastab x-i väärtusele —1, kui y on argumendi x lineaarfunktsioon ja argumendi väärtustele 3 ja 7 vastavad funktsiooni väärtused 11 ja 24,6?

L a h e n d u s. Otsitav funktsioon y avaldub valemiga

$$y = ax + b,$$

kus a ja b esiotsa on tundmatud. Andmete põhjal saame, et

$$11 = a \cdot 3 + b$$

ja

$$24{,}6 = a \cdot 7 + b.$$

Lahendades selle süsteemi tundmatute a ja b suhtes leiame, et

$$a = 3{,}4 \quad \text{ja} \quad b = 0{,}8.$$

Järelikult

$$y = 3{,}4x + 0{,}8$$

ja otsitav väärtus on

$$3{,}4 \cdot (-1) + 0{,}8$$

ehk $-2{,}6$.

Sama ülesannet oleks võimalik lahendada ka nii, et koostame läbi punktide $(3 \mid 11)$ ja $(7 \mid 24{,}6)$ mineva sirgjoone võrrandi ja leiame siis abstsissile -1 vastava ordinaadi.

Nii selles kui ka eelmises paragrahvis oleme ikka eeldanud, et argumendi ja funktsiooni väärtuste kujutamiseks on kasutatud võrdseid ühikuid. Näitame, et

ka siis, kui abstsissi ja ordinaadi kujutamiseks kasutatakse erinevaid ühikuid, on lineaarse funktsiooni graafikuks sirge.

Tõepoolest, olgu y lineaarne funktsioon muutujast x, nimelt

$$y = ax + b.$$

Kujutame teda üks kord xy-teljestikus, võttes kujutamisühikuks nii ühel kui teisel teljel 1 mm. Saadud punktid $(x \mid y)$ asuvad, nagu teame, sirgel.

Kujutame sama funktsiooni nüüd XY-teljestikus, võttes kujutamisühikuks X-teljel u mm ja Y-teljel v mm. Siis arv x kujutatakse XY-teljestikus lõiguna $X = xu$ mm
ja „ y „ „ „ $Y = yv$ mm.

Et viimastest võrdustest

$$x = \frac{X}{u} \quad \text{ja} \quad y = \frac{Y}{v}$$

ja eelduse järgi

$$y = ax + b,$$

siis

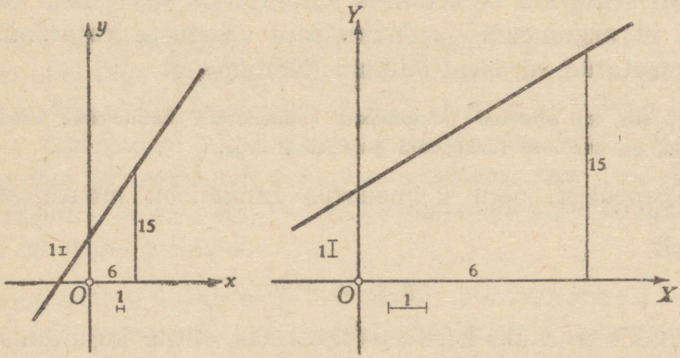
$$\frac{Y}{v} = a\frac{X}{u} + b$$

ehk

$$Y = a\frac{v}{u}X + bv$$

ehk, teiste tähtedega,

$$Y = AX + B.$$



Joonis 29.

Me näeme, et XY-tasapinnas kõnesoleva seose kujutiseks on ka sirgjoon; selle algordinaat $B = bv$ ja tõus $A = a\frac{v}{u}$. Näitena on joonisel 29 sõltuvus $y = 1{,}5x + 6$ kujutatud kord xy-teljestikus, kus kujutamisühikuks on valitud nii x-teljel kui ka y-teljel 1 mm, teine kord XY-teljestikus, kus kujutamisühikuks on valitud X-teljel 5 mm ja Y-teljel 2 mm. Võttes kujutamisühiku v küllalt väikese, saame suuregi vabaliikme b puhul küllalt väikese algordinaadi B. Valides kohaselt suhte $\frac{v}{u}$, saame suuregi a puhul joonisel küllalt väikese tõusuga sirge.

222. Poja sündimisajal oli isa 27 aastat, ema 23 aastat vana. Avaldada

1. seos poja vanuse p ja isa vanuse i vahel;
2. seos poja vanuse p ja ema vanuse e vahel;
3. seos isa vanuse i ja ema vanuse e vahel.

Kujutada kolmel joonisel kolm antud seost.

223. Avaldada püramiidi tippude koguarv t servade koguarvu s kaudu. Missugusesse liiki kuulub arvude s ja t vaheline seos?

224. Avaldada prisma servade koguarv s tahkude koguarvu T kaudu. Missugusesse liiki kuulub arvude T ja s vaheline seos?

225. Missugune sõltuvus valitseb täisnurkse kolmnurga teravnurkade vahel?

226. Allpool on antud rida teineteisest sõltuvate suuruste paare. Otsustada, missuguste paaride puhul on tegemist lineaarse sõltuvusega, missuguste paaride puhul mittelineaarse sõltuvusega:

1. Aritmeetilise jada liige ja liikme kohanumber.
2. Geomeetrilise jada liige ja liikme kohanumber.
3. Kuubi serv ja kuubi pindala.
4. Kauba brutokaal ja kauba netokaal muutumatu taarakaalu puhul.
5. Kera ümbermõõt ja kera ruumala.
6. Varda pikkus ja varda temperatuur.
7. Jääva raadiusega silindri täispindala ja kõrgus.
8. Esimese n täisarvu summa ja arv n.
9. Ringjoone kaar ja kaarele toetuv kesknurk.
10. Ellipsi väike telg ja ekstsentrisus antud suure telje puhul.

227. Suurus v sõltub lineaarselt suurusest u ning $v = 3$, kui $u = 1$ ja $v = 5{,}4$, kui $u = 7$. Leida graafiliselt, kui suur on v, kui $u = 3$ ja kui $u = 6$. Kui suur on u, kui $v = 7{,}6$ ja kui $v = 8$?

228. Suurus s sõltub lineaarselt suurusest t ning $s = 6{,}6$, kui $t = 2$, ja $s = 37{,}8$, kui $t = 10$. Leida graafiliselt, kui suur on s, kui $t = 4$ ja kui $t = 7{,}5$. Kui suure t puhul on $s = 22{,}2$ ja on $s = 30$?

229. Küünal põleb kiirusega 4 cm tunnis. Avaldada küünla pikkus põlemisaja kaudu, teades, et küünla algpikkus on 30 cm. Missugusele seadusele allub küünla pikkuse kahanemine ajaga?

Kujutada graafiliselt kõnesoleva nähtuse käik.

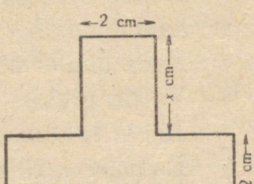
Millena kujuneb joonisel küünla põlemise kiirus?

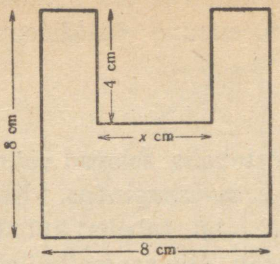
230. Kell 15 näitas kraadiklaas 3,5 kraadi sooja. Siit peale langes temperatuur ühtlaselt iga tunniga 0,8 kraadi. Anda valem temperatuuri t arvutamiseks n-da tunni lõpuks $(15 \leqslant n \leqslant 24)$.

Kujutada graafiliselt temperatuuri muutumine ajaga.

Missuguse valemi ja graafiku me saaksime, kui temperatuur poleks langenud, vaid oleks tõusnud ühtlaselt iga tunniga 0,8 kraadi?

231. Arvutada joonisel näidatud kujundi pindala S. Koostada mõnede xS-väärtusepaaride tabel ja kujutada graafiliselt pindala S muutumine pikkuse x muutudes. Kuidas sõltub pindala S pikkusest x? Kui suur on S, kui $x = 3{,}6$? Missuguse x-i väärtuse puhul $S = 50$? Leida pindala S väikseim väärtus.





232. Arvutada joonisel näidatud kujundi pindala S. Koostada mõnede xS-väärtusepaaride tabel ja kujutada graafiliselt pindala S muutumine pikkuse x muutudes. Milline on pindala S sõltuvus pikkusest x? Kui suur on S, kui $x = 6{,}4$? Kui suure x-i väärtuse puhul $S = 42$? Leida pindala S suurim ja väikseim väärtus.

233. Lauale asetatud keti üks osa ripub üle laua serva alla. Kuidas sõltub laual oleva keti osa pikkus allarippuva osa pikkusest, kui kett libiseb üle laua serva alla?

234. Lahendada graafiliselt ja numbriliselt ülesanne: Tigu ronib päeval puud mööda viis jalga üles ja öösel kolm jalga alla. Mitmendal päeval ta jõuab puu latva, kui puu on 12 jalga kõrge?

235. Jalakäija sammub kiirusega 6 km tunnis Tartust Võru poole, puhkab 1 tunni järel 15 minutit, sammub edasi 2 tundi endise kiirusega, puhkab 30 minutit, sammub edasi 3 tundi sama kiirusega, puhkab 45 minutit jne. Kolmanda tunni lõpul alustab oma teekonda samas suunas ja samast lähtekohast suusataja, liikudes 9 km tunnis.

Kujutada ühel ja samal joonisel jalakäija ja suusataja graafilised liikumisplaanid.

Leida aeg ja koht, kus suusataja jõuab jalakäijale järele.

§ 29. Lineaarne interpolatsioon.

Olgu antud argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste tabel:

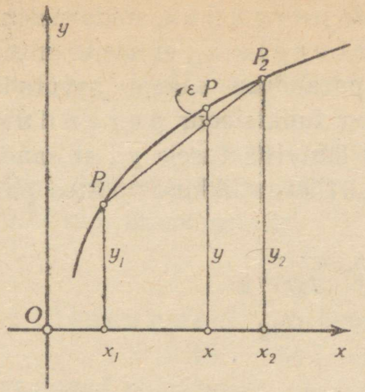
Argument	...	x_1	x_2	...
Funktsioon	...	y_1	y_2	...

ja mingi tabelis mitte esinev argumendi väärtus x tabeli väärtuste x_1 ja x_2 vahel. Küsime, missugune funktsiooni väärtus y vastab antud x-ile?

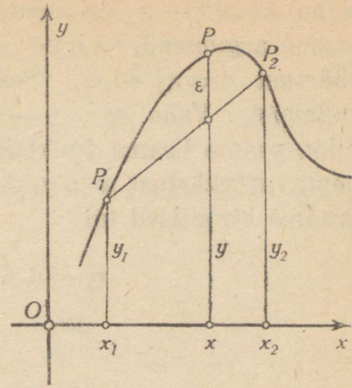
Küsimuse lahendamiseks kujutame tabelis seisvad väärtusepaarid punktidena..., P_1, P_2,... xy-tasapinnas. Kui väärtusepaare..., (x_1, y_1), (x_2, y_2),... on tabelis küllalt palju ja kui nad on antud küllalt tihedalt, siis saame küllalt arvuka ja tiheda punktide kogu. Punkte..., P_1, P_2,... joonega ühendades saame tabeliga määratud funktsiooni graafiku. Kujutades antud x-i väärtuse abstsissina x-teljel ja mõõtes ära sellele abstsissile vastava ordinaadi, saamegi funktsiooni nõutava väärtuse.

Praegu-kirjeldatud võtet funktsiooni väärtuse leidmiseks etteantud argumendi väärtusel nimetatakse graafiliseks interpolatsiooniks.

Kirjeldatud graafilise interpolatsiooni võtte kasutamine põrkab raskustele, kui punkte funktsiooni graafiku joonistamiseks on vähe ja nad asetsevad hõredalt. Sel puhul on raske ütelda midagi kindlat funktsiooni graafiku kuju kohta. Sel juhul kasutame funktsiooni graafiku asemel punktidest $P_1 \equiv (x_1 \mid y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 \mid y_2)$ läbipandud sirgjoont ja määrame selle kaudu abstsissile x vastava ordinaadi. Juhul, kui funktsiooni graafiku kaar punktide P_1 ja P_2 vahel erineb vaid vähe kõõlust P_1P_2, annab võte küll ligikaudse, kuid rahuldava tulemuse; viga ε on väike. Juhul aga, kui funktsiooni graafiku kaar P_1P_2 erineb tunduvalt kõõlust P_1P_2, on vahe funktsiooni tõelise ja leitud väärtuse vahel suur, viga ε suur ja seepärast tulemus mitte usaldatav (vt. jooniseid 30 ja 31).



Joonis 30.



Joonis 31.

Interpolatsiooni sirgjoone abil nimetatakse **lineaarseks interpolatsiooniks.**

Kõigis arvuliste väärtuste tabeleis antakse andmed ikka niivõrd tihedalt, et on võimalik interpolatsiooni teostada **lineaarselt.**

Graafiline interpolatsioon on võrdlemisi aeganõudev ja tülikas toiming. Kui on võimalik seda teostada lineaarselt, siis võib joonestamistöö hoopis ära jätta ja nõutava funktsiooni väärtuse leida **arvutamise** teel. Tõepoolest, punktidega P_1 ja P_2 määratud sirgjoone võrrand on

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ehk, teisiti kirjutatult,

$$\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y - y_1}.$$

See võrdus ütleb vaid, et lineaarse sõltuvuse korral argumendi ja funktsiooni kasvud on võrdelised.

Nii argumendi väärtuste vahet $x_2 - x_1$ kui ka funktsiooni väärtuste vahet $y_2 - y_1$ saame arvutada tabeli andmeist.

Vahe $\Delta x = x - x_1$ on argumendi p a r a n d u s, mida peame lisama argumendi l ä h t e v ä ä r t u s e l e x_1, et saada antud väärtust $x = x_1 + \Delta x$. Selle paranduse saame arvutada andmeist. Vahe $\Delta y = y - y_1$ on funktsiooni p a r a n d u s, mida peame lisama funktsiooni lähteväärtusele y_1, et saada nõutavat väärtust $y = y_1 + \Delta y$. Ülevaatlikkuse mõttes paigutame kirjutised nii:

$$\begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \Delta x & \Delta y \end{array}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta y},$$

$$\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Delta x.$$

Selgitame võtet mõne ülesande najal.

Ü l e s a n n e 1. Arvudele

$$\ldots 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \ldots$$

vastavad ruudud

$$\ldots 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100 \quad 121 \ldots$$

Missugune ruut vastab arvule 9,6?

L a h e n d u s. Arv 9,6 on 9 ja 10 vahel. Seega $9{,}6^2 =$ $= 81 +$ parandus. Vahede tabel on meie juhul

$$\begin{array}{cc} 10 - 9 = 1 & 100 - 81 = 19 \\ 9{,}6 - 9 = 0{,}6 & \Delta y \end{array}$$

ehk, lühemalt,

$$\begin{array}{cc} 1 & 19 \\ 0{,}6 & \Delta y. \end{array}$$

Seega

$$\frac{1}{0,6} = \frac{19}{\Delta y} \text{ ehk } \Delta y = \frac{19}{1} \cdot 0,6 = 11,4$$

ja

$$y = 81 + 11,4 = 92,4.$$

Õige $9,6^2$ väärtus on 92,16, seega leitud väärtuse viga on 0,24 ehk ümmarguselt

$$\frac{0,3 \cdot 100}{90} \% \text{ ehk } 3\%.$$

Ülesanne 2. Arvudele

$$\ldots 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100 \quad 121 \ldots$$

vastavad ruutjuured

$$\ldots 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \ldots$$

Kui suur on $\sqrt{70}$?

Lahendus. Arv 70 on 64 ja 81 vahel. Seega $\sqrt{70} = 8 +$ parandus. Vahede tabel on meie juhul

$$81 - 64 = 17 \qquad 9 - 8 = 1$$
$$70 - 64 = 6 \qquad \Delta y$$

ehk, lühemalt,

$$17 \qquad 1$$
$$6 \qquad \Delta y$$

Seega

$$\frac{17}{6} = \frac{1}{\Delta y}$$

$$\text{ehk } \Delta y = \frac{1}{17} \cdot 6 = \frac{6}{17} = 0,35$$

$$\text{ja } \sqrt{70} = 8 + 0,35 = 8,35.$$

Õige $\sqrt{70}$ väärtus (kahe kümnendkohaga) on 8,37, seega leitud väärtuse viga on 0,02 ehk ümmarguselt

$$\frac{0,02 \cdot 100}{8} \% \text{ ehk } \frac{1}{4} \%.$$

Ülalseletatud võte leiab rakendamist töötamisel igasuguste tabelitega, muude hulgas logaritmide tabelitega.

Neis on tavaliselt eri tulbas märgiga *P. p.* (see tähendab *Partes proportionales* ehk „võrdelised osad") antud valmisarvutatud parandused.

Ülesanded.

236. Kell 9.00 oli õhu temperatuur $-3{,}6^0$, kell 12.00 vastavalt $+2{,}8^0$. Kui suur tõenäoliselt oli õhu temperatuur kell 10.20?

237. Temperatuuril 70^0 lahustub 100 osas vees 138 osa salpeetrit, 80^0 juures vastavalt 169 osa. Mitu osa salpeetrit lahustub 100 osas vees temperatuuril 74^0?

238. Temperatuuril 14^0 lahustub 1 ruumalas vees 826 ruumala ammoniaaki, 20^0 juures aga 715. Mitu ruumala ammoniaaki lahustub 1 ruumalas vees 15^0 juures?

239. Kilomeeter vaskjuhet kaalub 10,18 kg, kui traat on läbimõõduga 1,2 mm ja 11,95 kg, kui traat on läbimõõduga 1,3 mm. Kui palju kaalub kilomeeter vaskjuhet läbimõõduga 1,26 mm?

240. Teades, et $2^3 = 8$ ja $3^3 = 27$, leida $\sqrt[3]{20}$. Kui suur on leitud väärtuse viga?

241. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Leida lineaarse interpolatsiooni abil $\sin 35^0$. Kui suur on leitud väärtuse viga?

242. Kasutades täisarvude ruutude tabelit arvutada lineaarse interpolatsiooni teel

$$\sqrt{17}, \quad \sqrt{53}, \quad \sqrt{178} \quad \text{ja} \quad \sqrt{120}$$

väärtused ja leida nende väärtuste viga ruutjuurte tabeliga võrdlemisel.

243. Kasutades täisarvude kuupide tabelit leida lineaarse interpolatsiooni teel

$$\sqrt[3]{9}, \quad \sqrt[3]{30}, \quad \sqrt[3]{67} \quad \text{ja} \quad \sqrt[3]{198}$$

väärtused ja arvutada nende väärtuste viga kuupjuurte tabeli järgi.

244. Asetada arvude 3 ja 10 vahele 5 arvu, mis koos antutega moodustavad aritmeetilise jada. Näidata, et võte ülesande lahendamiseks on samane lineaarse interpolatsiooniga.

245. On antud võrrand $f(x)=0$. Väärtuse $x=-1$ proovimisel võrrandi vasak pool on 0,7 ja $x=2$ proovimisel on ta — 0,2. Kui suur ümmarguselt on võrrandi lahend?

§ 30. Pöördvõrdeline sõltuvus.

Kui kaks suurust sõltuvad teineteisest nii, et ühe suuruse kasvades mingi arv korda teine suurus väheneb sama arv korda, siis öeldakse, et teine suurus sõltub esimesest pöördvõrdeliselt.

Märgime kõnesolevad suurused tähtedega x ja y ja olgu x_1 ja x_2 mingid kaks argumendi väärtust ning y_1 ja y_2 neile vastavad funktsiooni väärtused. Üleminekul väärtuselt x_1 väärtusele x_2 argument kasvab $x_2 : x_1$ korda; samal ajal funktsioon kasvab $y_2 : y_1$ korda ehk väheneb $y_1 : y_2$ korda. Suuruste x ja y pöördvõrdelisuse puhul peab seega olema

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2}$$

ehk

$$x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

See tähendab, et

pöördvõrdelise sõltuvuse puhul argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste korrutised on võrdsed.

Et ümberpöördult võrdusest $x_1y_1 = x_2y_2$ järeldub võrre $x_2 : x_1 = y_1 : y_2$, siis praegu sõnastatud pöördvõrdelisuse tunnus on samaväärne algul antud definitsiooniga.

Et ühtaegu võrdusega

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

kehtib ka võrdus

$$y_1x_1 = y_2x_2,$$

siis näeme, et kui muutuja y on pöördvõrdeline x-iga, siis ka muutuja x on pöördvõrdeline y-ga. See tähendab, et

kahe suuruse pöördvõrdelisus on nende suuruste vastastikune omadus.

Seepärast võime rääkida t e i n e t e i s e s t pöördvõrdeliselt sõltuvatest suurustest.

Pöördvõrdeliselt sõltuvate suuruste näiteina olgu nimetatud järgmised: kahe linna vahelise tee katmiseks kuluv aeg ja sõidukiirus; antud gaasihulga ruumala ja gaasi tihedus; galvani elemendist saadava voolu tugevus ja ahela takistus.

Olgu (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ kahe teineteisest pöördvõrdeliselt sõltuva suuruse kokkukuuluvate väärtuste paarid. Siis

$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3\,y_3 = \ldots$$

See võrduste jada ütleb, et pöördvõrdelise sõltuvuse korral funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste korrutis on j ä ä v. Tähistame selle jääva korrutise tähega a. Olgu x argumendi mingi väärtus ja tähendagu y sellele vastavat funktsiooni väärtust; siis pöördvõrdelise sõltuvuse korral

$$xy = a$$

ehk

$$y = \frac{a}{x}.$$

Ülesanded.

246. Kahe linna vaheline tee on s kilomeetrit pikk. Kasutatav mootorratas lubab muuta sõidukiirust v piirides 20 km/t kuni 80 km/t. Missugustes piirides muutub seejuures sõidukestus t?

Avaldada sõidukestus t suuruste s ja v kaudu.

Kuidas sõltub sõidukestus t sõidukiirusest v muutumatuks jääva s puhul?

Kuidas sõltub sõidukestus t sõidetud tee pikkusest s muutumatuks jääva v puhul?

247. Kruvikeerme tõus on h mm. Avaldada p cm pikkuse kruvi keermete arv n.

Kuidas olenevad teineteisest arvud h ja n?

248. Teatava töö kordasaatmiseks kulub N inimesetööpäeva. Sooritagu selle töö i inimest p päeva jooksul. Avaldada arv p arvu i kaudu ja arv i arvu p kaudu. Kuidas sõltub arv p arvust i? arv i arvust p?

249. Leida, missugustes järgmistes suurusepaarides esinevad teineteisega pöördvõrdelised suurused:

1. Jääva pindalaga rööpküliku alus ja kõrgus.
2. Jääva alusega kolmnurga pindala ja kõrgus.
3. Vankriratta läbimõõt ja ratta pöörete arv antud pikkusega tee kulgemisel.
4. Gaasi ruumala ja gaasi rõhk jääva temperatuuri puhul.
5. Pliiatsi hind ja pliiatsite hulk, mille saab osta kindla rahasumma eest.
6. Nurk ja selle kõrvunurk.

§ 31. Hüperbool.

Vaatleme, missugune on pöördvõrdelise sõltuvuse graafik. Selle sõltuvuse valemis

$$y = \frac{a}{x}$$

esinev konstant a võib olla kas positiivne või negatiivne. Kui a on positiivne, siis $-a$ on negatiivne. Funktsioone

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{ja} \quad y = \frac{-a}{x}$$

võrreldes näeme, et võrdsete x-ide korral y-d erinevad vaid märgilt. Järelikult kõnesolevate funktsioonide graafikud on sümmeetrilised x-telje suhtes. Seepärast piisab funktsiooni

$$y = \frac{a}{x}$$

graafiku uurimisest positiivse a korral.

Funktsioone

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{x}$$

võrreldes näeme, et võrdsete x-ide korral esimese funktsiooni väärtus on teise väärtuse a-kordne. Järelikult esimese funktsiooni graafiku ordinaadid saadakse korrutades teise funktsiooni graafiku ordinaate ühe ja sellesama teguriga. Seepärast piisab funktsiooni

$$y = \frac{1}{x}$$

graafiku uurimisest.

Otsime punkte, kus selle funktsiooni graafik lõikab telgi. Abstsissteljel on $y = 0$. Funktsiooni avaldisest nähtub, et ei leidu x-i väärtust, mille puhul y on 0. Samuti ei leidu y väärtust, mille puhul x on 0. Järelikult

pöördvõrdelise sõltuvuse graafik ei lõika telgi.

Võrdusest $y = \frac{1}{x}$ nähtub, et abstsiss ja ordinaat peavad ikka olema ühe ja sellesama märgiga; see tähendab, et graafiku punkte võib leiduda teljestiku I ja III veerandis.

Rahuldagu väärtusepaar x_1 ja y_1 võrdust $y = \frac{1}{x}$. Siis rahuldab seda võrdust ka väärtusepaar $-x_1$ ja $-y_1$. Punktid $(x_1 \mid y_1)$ ja $(-x_1 \mid -y_1)$ on aga sümmeetrilised koordinaatide alguse suhtes; kui esimene punkt on I veerandis, siis teine on III veerandis. Järelikult

funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafiku osa teljestiku III veerandis on koordinaatide alguse suhtes sümmeetriline graafiku osaga I veerandis.

Nii näeme, et piisab funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafiku tundmisest I veerandis. Viimase joonestamiseks anname x-ile väärtused

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,$$

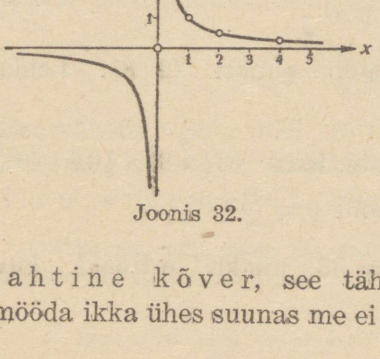
leiame vastavad y väärtused

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$$

ja kujutame väärtusepaarid

$$\left(\frac{1}{4} \mid 4\right),\quad \left(\frac{1}{2} \mid 2\right),\quad (1 \mid 1),\quad \left(2 \mid \frac{1}{2}\right),\quad \left(4 \mid \frac{1}{4}\right)$$

graafiliselt punktidena. Ühendades punktid pideva joone abil saame kõvera, mida näeme I veerandis joonisel 32. Ehitades saadud joonele sümmeetrilise koordinaatide alguse suhtes, saame kahest harust koosneva kõvera (joonis 32), mida nimetatakse **hüperbooliks** ehk, täpsemalt, **risthüperbooliks**.



Joonis 32.

Vastandina **kinnistele** kõveratele, nagu ringjoon ja ellips, on hüperbool **lahtine kõver**, see tähendab, et liikudes hüperbooli mööda ikka ühes suunas me ei jõua kunagi lähtekohta tagasi.

Vastandina pidevatele joontele, nagu sirgjoon ja ringjoon, on hüperbool katkev kõver, sest liikudes piki hüperbooli üht haru pole võimalik jõuda teisele. Joonisest 32 nähtub, et abstsissi kasvamisel hüperbooli ordinaat järjest väheneb; see tähendab, et hüperbooli haru järjest läheneb abstsissteljele, ilma et ta kunagi omaks selle teljega ühiseid punkte. Näitame, et hüperbooli haru tuleb abstsissteljele nii lähedale, kui iganes tahame, kui aga abstsiss on küllalt suur. Tõepoolest, hüperbooli punkti $(x \mid y)$ kaugus abstsissteljest on y. Et see kaugus saaks väiksemaks näiteks arvust 0,000001, on vaid tarvis võtta $x > 1 : 0{,}000001$ ehk $x > 1000000$. Et ühtaegu võrdusega $y = \frac{1}{x}$ on kehtiv ka võrdus $x = \frac{1}{y}$, siis kõik, mis on öeldud hüperbooli lähenemise kohta x-teljele, jääb kehtima ka hüperbooli lähenemise kohta y-teljele.

Sirget, millele kõver tuleb kuitahes lähedale, nimetatakse kõvera asümptoodiks.

Seega:

hüperbooli $y = \frac{1}{x}$ asümptootideks on koordinaatide teljed.

Seesama kehtib ka hüperbooli $y = \frac{a}{x}$ kohta.

Ülesanded.

250. Joonestada hüperbool $y = \frac{3}{x}$.

251. Hüperbool $y = \frac{a}{x}$ läbib punkti $(2 \mid 8)$. Leida kordaja a.

252. Leida, missugused punktidest $(5 \mid 4{,}8)$, $(0{,}5 \mid 36)$ ja $(0{,}4 \mid 60)$ asetsevad hüperboolil $y = \frac{24}{x}$.

253. Leida hüperbooli $xy = 32$ punkti ordinaat, kui punkti abstsiss on 2, 4, 8, 10.

254. Leida, kus lõikuvad jooned $xy = 25$ ja $x - y = 3$.

255. Leida joonte $xy = 3$ ja $2x - y + 1 = 0$ lõikepunktide vaheline kaugus.

256. Näidata, et sirge $x + 4y = 8$ puudutab hüperbooli $xy = 4$.

257. Ringis raadiusega 5 cm on võetud punkt P kaugusel 3 cm keskpunktist. Seda punkti läbib kõõl MN. Avaldada kõõlu lõigu $MP = y$ sõltuvus lõigust $NP = x$, kui kõõl pöörleb ümber punkti P. Kujutada see sõltuvus graafiliselt.

258. Kujutada graafiliselt voolu tugevuse sõltuvus juhtme takistusest, kui vooluallika pinge on 4,5 V.

Leida saadud graafikust, kui suur on voolu tugevus, kui juhtme takistus on 2,8 Ω. Kui suure takistuse puhul on voolu tugevus 6,4 A?

259. Kui suure abstsissiga punktist alates saab ja jääb hüperbooli $y = \frac{20}{x}$ ordinaat väiksemaks kui 0,01? — väiksemaks kui 0,001?

§ 32. Ruutsõltuvus $y = ax^2$.

Olgu (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste paarid ja olgu

$$\frac{y_1}{x_1^2} = \frac{y_2}{x_2^2} = \frac{y_3}{x_3^2} = \ldots$$

See võrduste jada ütleb, et funktsiooni ja argumendi ruudu suhe on jääv ehk teisiti, et funktsioon on võrdeline argumendi ruuduga.

Sõltuvust, mille puhul üks suurus on võrdeline teise suuruse ruuduga, nimetatakse ruutsõltuvuseks.

Tähistades suhte $y : x^2$ jääva väärtuse ehk võrdeteguri tähega a, saame

$$y = ax^2.$$

Funktsiooni, mis avaldub argumendi ruudu kordsena, nimetatakse ruutfunktsiooniks.

Näiteks on ringi pindala S raadiuse r ruutfunktsioon, sest

$$S = \pi r^2.$$

Samuti on kuubi täispindala T serva s ruutfunktsioon, sest

$$T = 6s^2.$$

Vaadeldav sõltuvus p o l e muutuvate suuruste vastastikune omadus, sest kui $y = ax^2$, siis on $x = \pm \sqrt{\frac{y}{a}}$ ja mitte $x = \text{konst} \cdot y^2$.

Käsiteldava sõltuvuse iseloomustavamaks omaduseks on see, et

argumendi x kasvamisel k korda ruutfunktsioon ax^2 kasvab k^2 korda.

Tõestuseks anname x-ile mingi eriväärtuse x_1; selle kasvamisel k-kordseks saab x eriväärtuse kx_1; arvutades vastavad y väärtused, näeme järgmist:

$$\begin{array}{lll} \text{kui } x = x_1, & \text{siis} & y = ax_1{}^2, \\ \text{kui } x = kx_1, & \text{siis} & y = a(kx_1)^2 \\ & \text{ehk} & y = k^2 \cdot ax_1{}^2, \end{array}$$

mis on endise y väärtuse k^2-kordne.

Kui näiteks kuubi serv kasvab 1,4 korda, siis kuubi täispindala kasvab $1{,}4^2$ ehk 1,96 korda.

Ümberpöördult:

kui argumendi kasvamisel k korda funktsioon kasvab k^2 korda, siis funktsioon on võrdeline argumendi ruuduga.

Tõestuseks arutame nii:

Olgu x_1 mõni k i n d e l argumendi väärtus ja x m i n g i argumendi väärtus; tähistame jagatise $\frac{x}{x_1}$ tähega k, nii et $x = kx_1$ ja vastavalt $f(x) = f(kx_1)$.

Eelduse järgi

$$f(kx_1) = k^2 \cdot f(x_1),$$

seega

$$f(x) = k^2 \cdot f(x_1)$$

ehk

$$f(x) = \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 \cdot f(x_1)$$

ehk

$$f(x) = \frac{f(x_1)}{x_1^2} \cdot x^2.$$

Tähistades jääva teguri võrduse paremal poolel tähega a, saame

$$f(x) = ax^2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Jääv tegur a võrduses $y = ax^2$ on määratud, kui on teada üks paar vastavaid argumendi ja funktsiooni väärtusi. Olgu näiteks see paar $x = 1{,}3$ ja $y = 0{,}7$. Siis

$$0{,}7 = a \cdot 1{,}3^2$$

ehk

$$0{,}7 = 1{,}69a,$$

millest

$$a = \frac{0{,}7}{1{,}69} = 0{,}4142$$

seega

$$y = 0{,}4142a^2.$$

Ülesanded.

260. Võrk koosneb n rõhtsihis ja n püstsihis niidist. Avaldada sõlmede arv s.

Kujutada arvu s muutumine arvu n muutudes vahemikus $n = 2$ kuni $n = 10$.

261. Klassis on n õpilast. Nad lepivad kokku omavahel endi päevapilte vahetada, nii et igaühel oleks enese ja kõigi oma klassikaaslaste pildid. Mitu pildi-äratõmmet peab päevapiltnik valmistama?

Kujutada äratõmmete hulga p muutumine õpilaste arvu n muutudes 19-st 38-ni.

262. Avaldada ruudukujulise plaadi mass tema paksuse h, serva s ja aine tiheduse t kaudu.

Kuidas muutub plaadi mass tiheduse t kasvamisel 2, 3, 4, ... -kordseks? paksuse h kasvamisel 2, 3, 4, ... -kordseks? serva s kasvamisel 2, 3, 4, ... -kordseks?

263. Teemandi väärtust võib lugeda ligikaudu võrdeliseks tema kaalu ruuduga. Avaldada seos teemandi kaalu k, tema väärtuse v ja tema kaaluühiku hinna h vahel. Selgitada valemi mõtet arvuliste näidetega.

264. Perenaisel on kaks silindrikujulist biskviidivormi. Teise vormi läbimõõt on $1\frac{1}{2}$ korda väiksem esimese läbimõõdust, selle eest on teise vormi sügavus 2 korda suurem esimese sügavusest. Kuidas suhtuvad esimese ja teise vormi ruumalad?

265. Vedelik, mis täidab pudeli 10 cm kõrguseni, valatakse purki, mille läbimõõt on 2 korda suurem pudeli läbimõõdust. Missuguse kõrguseni täidab vedelik purgi?

§ 33. Ruutparabool.

Küsime, missugune on sõltuvuse $y = ax^2$ graafik?

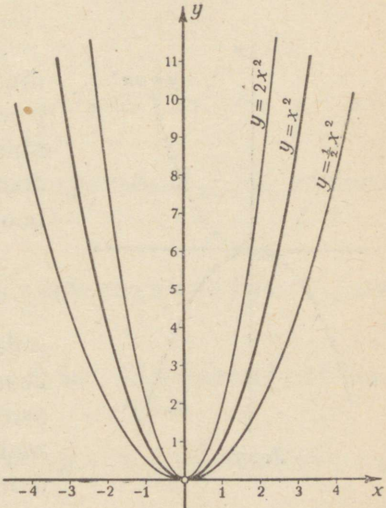
Et võrduses $y = ax^2$ tegur x^2 on alati positiivne (kui $x \neq 0$), siis positiivse a korral on kõik y väärtused positiivsed, negatiivse a korral negatiivsed. See tähendab, et

positiivse a korral funktsiooni $y = ax^2$ graafik asetseb ülalpool abstsisstelge, negatiivse a korral allpool abstsisstelge.

Kui võrrandit $y = ax^2$ rahuldab mingi väärtusepaar x_1 ja y_1, siis rahuldab teda ka väärtusepaar $-x_1$ ja y_1, sest $(-x_1)^2 = x_1^2$. Punktid $(x_1 \mid y_1)$ ja $(-x_1 \mid y_1)$ asetsevad sümmeetriliselt y-telje suhtes. Seega:

sõltuvuse $y = ax^2$ graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

Paneme tähele, et võrranditega $y = ax^2$ ja $y = -ax^2$ määratud ordinaadid ühe ja sellesama x-i puhul erinevad vaid märgi poolest. Järelikult kõverad $y = ax^2$ ja $y = -ax^2$ on sümmeetrilised x-telje suhtes. Seega piisab kõvera $y = ax^2$ uurimisest p o s i t i i v s e a korral.



Joonis 33.

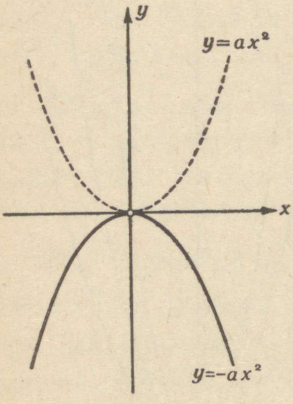
Vaadeldes võrrandeid $y = x^2$ ja $y = ax^2$ näeme, et teise kõvera ordinaadid saadakse esimese kõvera ordinaatidest korrutades neid ühe ja sellesama teguriga a. Seepärast joonestame kõigepealt sõltuvuse

$$y = x^2$$

graafiku. Selleks anname x-ile väärtused näiteks 0-st 3-ni, iga 0,5 tagant, ja arvutame vastavad y väärtused; saame tabeli:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Kujutame need väärtusepaarid punktidena xy-tasapinnal, ehitame neile punktidele sümmeetrilised y-telje suhtes ja ühendame leitud punktid kõvera abil. Saadud kõverat nimetatakse **ruutparabooliks** ehk lühidalt **parabooliks**. See ongi sõltuvuse $y = x^2$ graafik. Tema sümmeetriatelge nimetame lühidalt **parabooli teljeks**; parabooli ja tema telje ühist punkti nimetame **parabooli haripunktiks**.



Joonis 34.

Korrutades saadud kõvera ordinaate a-ga, saame funktsiooni $y = ax^2$ graafikuna joone, mida nimetame samuti parabooliks. Joonisel 33 on kujutatud paraboolid

$$y = x^2 \quad y = 2x^2 \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

Mida suurem on kordaja a, seda järsemalt parabool tõuseb, seda „teravam" ta on. Mida väiksem on kordaja a, seda aeglasemalt parabool tõuseb, seda „lamedam" ta on.

Joonestades paraboolile $y = ax^2$ x-telje suhtes sümmeetrilise kõvera, saame sõltuvuse $y = -ax^2$ graafiku (joonis 34).

Parabooli $y = ax^2$ saab joonestada ka y väärtusi arvutamata tema fookuse ja juhtjoone järgi. Nimelt, kirjutades parabooli võrrandi kujul

$$x^2 = \frac{1}{a}y$$

ja võrreldes võrrandiga

$$x^2 = 2py$$

näeme, et $2p = \frac{1}{a}$ ja seega parabooli parameeter

$$p = \frac{1}{2a}.$$

Järelikult on parabooli fookuseks punkt $\left(0 \mid \frac{1}{4a}\right)$ ja parabooli juhtjooneks sirge, mille võrrand on $y = -\frac{1}{4a}$. Fookuse ja juhtjoone järgi saab parabooli joonestada varemalt lk. 26 kirjeldatud võtte abil.

Ülesanded.

266. Arvutada kordaja a parabooli võrrandis $y = ax^2$, kui parabool läbib punkti $(2 \mid 12)$.

267. Kui kaugel teineteisest on parabooli $y = \frac{1}{10} x^2$ punktid, millede ordinaat on $\frac{1}{40}$?

268. Kui pika kõõlu moodustab sirge $x + 2y = 0$ paraboolis $y = \frac{1}{4} x^2$?

269. Leida parabooli $y = 0{,}8x^2$ lõikepunktid sirgega $3{,}2x + y + 3{,}2 = 0$.

270. Näidata, et sirge $2x - 2y - 1 = 0$ puudutab parabooli $y = \frac{1}{2}x^2$.

271. Näidata, et parabooli $y = ax^2$ punkti kaugus punktist $(0 \mid \frac{1}{4a})$ on niisama suur, kui selle punkti kaugus sirgest $y = -\frac{1}{4a}$.

272. Leida, kus lõikuvad jooned $y = 0{,}25x^2$ ja $y = 2x + 21$.

273. Kus lõikuvad parabool $y = 3x^2$ ja sirge $3x + 5y = 1{,}2$?

274. Joonestada parabool $y = x^2$ ja sirge $y = 2x - 5$. Leida joonisest nende joonte lõikepunktide abstsissid.

275. Joonestada parabool $y = x^2$ ja sirge $y = 5x + 4$. Leida joonisest nende joonte lõikepunktide koordinaadid.

276. Mitu ühispunkti on paraboolil $y = ax^2$ koordinaatide algusest läbi mineva sirgega $y = mx$ ja missugused on nende ühispunktide koordinaadid?

§ 34. Üldine ruutsõltuvus.

Avaldist

$$ax^2 + bx + c,$$

kus $a \neq 0$ ning a, b ja c on mingid konstandid, nimetatakse suuruse x ruuttrinoomiks.

Olgu x ja y kahe muutuva suuruse kokkukuuluvad väärtused ja avaldugu teine neist esimese ruuttrinoomina, nii et

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Sel puhul nimetatakse xy-sõltuvust üldiseks ruutsõltuvuseks ja funktsiooni y tema argumendi x üldiseks ruutfunktsiooniks. Niisiis:

Kui suurus y avaldub suuruse x ruuttrinoomina, siis nimetame xy-sõltuvust üldiseks ruutsõltuvuseks.

Näiteks on õõneskera kesta ruumala V välisraadiuse r ja kesta paksuse h puhul välisraadiuse ruutfunktsioon:

$$V = 4\pi hr^2 - 4\pi h^2 r + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

Samuti on kõrguselt s_0 vertikaalse algkiirusega v_0 üles paisatud keha kõrgus üle maapinna liikumisaja ruutfunktsioon:

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

kus g on raskuskiirendus 9,81 m/sek^2.

Avaldades võrdusest $y = ax^2 + bx + c$ suuruse x, näeme, et x ei avaldu y ruuttrinoomina; järelikult e i o l e kahe suuruse ruutsõltuvus suuruste vastastikune omadus.

Kui argumendi väärtus kasvab k korda, siis esimene liige ax^2 ruutfunktsiooni avaldises kasvab k^2 korda, teine k korda ja kolmas ei muutu üldse; seega funktsioon ei kasva k^2 korda, nagu seda nägime funktsiooni $y = ax^2$ puhul.

Näitame, et

missugused ka on kordajad a, b ja c, ikka on ruutfunktsiooni graafikuks parabool.

Selleks teisendame võrdust $y = ax^2 + bx + c$ nii, et selle parem pool oleks täisruut. Seda teeme järgmiselt:

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

ehk

$$y = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + (c - \frac{b^2}{4a})$$

ehk

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$$

ehk

$$y - (c - \frac{b^2}{4a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2.$$

Võtame abiks uued muutujad X ja Y nii, et

$$X = x + \frac{b}{2a}$$

ja

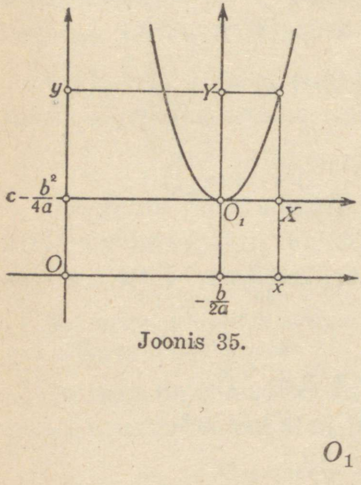
$$Y = y - (c - \frac{b^2}{4a}).$$

Eespool-saadud võrdus võtab siis kuju

$$Y = aX^2.$$

Vaatleme kõrvuti x-i ja y-ga ka X-i ja Y-d koordinaatidena. Nagu näitab X-i avaldis, saadakse uus abstsiss X endisest, liites sellega arvu $\frac{b}{2a}$; teiste sõnadega, lugedes abstsisse X mitte punktist O, vaid u u e s t a l g u s e s t, mille abstsiss on $-\frac{b}{2a}$; uus ordinaat Y saadakse endisest, lahutades sellest arvu $c-\frac{b^2}{4a}$; teiste sõnadega, lugedes ordinaate Y mitte punktist O, vaid uuest algusest, mille ordinaat on $c-\frac{b^2}{4a}$. Valime nüüd uue koordinaatide teljestiku (joonis 35), mille algus on punktis

$$O_1 \equiv \left(-\frac{b}{2a} \mid c-\frac{b^2}{4a}\right),$$



Joonis 35.

ja mille teljed O_1X ja O_1Y on vastavalt rööbiti telgedega Ox ja Oy. Uuritava kõvera võrrand avaldub uutes koordinaatides kujul

$$Y = aX^2;$$

see võrrand aga kujutab parabooli, mille teljeks on sirge $X = 0$ ehk, teisiti, $x = -\frac{b}{2a}$ ja mille haripunkt on uues alguses O_1, ehk, teisiti, mille haripunkt on

$$O_1 \equiv \left(-\frac{b}{2a} \mid c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Kokkuvõttes:

ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks on parabool, mille haripunkti koordinaadid on $-\frac{b}{2a}$ ja $c-\frac{b^2}{4a}$.

Ü l e s a n n e. Valmistada funktsiooni

$$-0{,}5x^2 + 4x - 2$$

graafik.

L a h e n d u s. Tähistades funktsiooni tähega y ja teisendades tema avaldist ülalseletatud viisil, saame:

$$y = -0{,}5(x^2 - 8x) - 2$$

ehk

$$y = -0{,}5(x^2 - 8x + 16) - 2 + 8$$

ehk

$$y = -0{,}5(x - 4)^2 + 6$$

ehk

$$y - 6 = -0{,}5(x - 4)^2.$$

Võttes uued muutujad X ja Y nii, et

$$X = x - 4$$

ja

$$Y = y - 6,$$

saame võrrandi

$$Y = -0{,}5X^2.$$

See võrrand esitab parabooli, mis on oma kumerusega pööratud ülespoole. Tõmbame läbi punkti $O_1 \equiv (4 \mid 6)$ uued teljed O_1X ja O_1Y ning joonestame esiteks parabooli $Y = -X^2$. Kui selle parabooli ordinaadid poolitame ja leitud punktid ühendame kõvera joone abil, saame nõutava graafiku.

Ülal nägime, et ruutparabooli

$$y = ax^2 + bx + c$$

haripunkti abstsiss on $-\frac{b}{2a}$ ja ordinaat on $c - \frac{b^2}{4a}$. Näitame, et kordaja a ja avaldised $-\frac{b}{2a}$ ja $c - \frac{b^2}{4a}$ määravad parabooli kuju ja asukoha.

Võttes parabooli haripunkti uueks alguseks O_1 ning X- ja Y-teljed vastavalt rööbiti x- ja y-telgedega, saime parabooli võrrandi kirjutada kujul

$$Y = aX^2.$$

Kordaja a märk määrab parabooli kumeruse suuna:

kui $a > 0$, siis parabool on allapoole kumer;
kui $a < 0$, siis parabool on ülespoole kumer.

Kordaja a suurus määrab parabooli kuju:

suure a puhul on parabool kitsas ja „terav",
väikese a puhul on parabool lai ja „lame".

Parabooli sümmeetriateljeks on Y-telg ehk sirge võrrandiga $X = 0$ ehk sirge

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Kui b ja a on ühesuguse märgiga, siis $x < 0$ ja parabooli sümmeetriatelg asetseb vasakul pool y-telge. Kui aga b ja a on erinevate märkidega, siis $x > 0$ ja parabooli sümmeetriatelg asetseb paremal pool y-telge. Parabooli haripunkti ordinaat $Y = 0$ ehk endistes koordinaatides

$$y = c - \frac{b^2}{4a}$$

ehk

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Kui $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$, siis asetseb parabooli haripunkt ülalpool x-telge; kui aga $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$, siis asetseb parabooli haripunkt allpool x-telge.

Ruutparabooli saab hõlpsasti kasutada ruutvõrrandi lahendite arvu ja paigutuse küsimuste selgitamiseks.

Olgu nimelt antud lahendada ruutvõrrand

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Võime ikka eeldada, et kordaja $a > 0$; sest kui ta oleks negatiivne, muudaksime võrrandi kõigi liikmete märgid vastupidisteks ja saaksime võrrandi positiivse kordajaga a.

Antud võrrandi lahendid on samased süsteemi

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

lahenditega. Esimene süsteemi võrrand esitab parabooli, teine x-telge. Seega uuritava võrrandi lahendid on parabooli ja x-telje lõikepunktide abstsissid.

Parabooli haripunkti ordinaat avaldus kujul

$$\frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Et $a > 0$, siis selle avaldise märk on sama, mis lugejalgi

$$4ac - b^2.$$

Kui parabooli haripunkt on allpool x-telge, s. t. kui $4ac - b^2 < 0$ ehk kui $b^2 - 4ac > 0$, siis parabool lõikab x-telge kahes erinevas punktis ja ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit.

Kui parabooli haripunkt on x-teljel, s. t. kui $4ac - b^2 = 0$ ehk $b^2 - 4ac = 0$, siis parabool puudutab x-telge, paraboolil on kaks ühtelangevat lõikepunkti x-teljega ehk, algebra keeles, ruutvõrrandil on kaks ühtelangevat lahendit.

Kui parabooli haripunkt on ülalpool x-telge, s. t. kui $4ac - b^2 > 0$ ehk $b^2 - 4ac < 0$, siis paraboolil ja x-teljel pole ühispunkte ja ruutvõrrandil pole ühtegi lahendit.

Kokkuvõttes:

Ruuutvõrrand $ax^2 + bx + c = 0$ omab
kaks erinevat lahendit, kui $b^2 - 4ac > 0$,
kaks ühtelangevat lahendit, kui $b^2 - 4ac = 0$,
ei ühtegi lahendit, kui $b^2 - 4ac < 0$.

Ülesanded.

277. Leida kordajad a ja b parabooli võrrandis $y = ax^2 + bx + 4$, kui parabool läbib punkte $(1 \mid 2)$ ja $(3 \mid 16)$.

278. Leida kordajad a, b ja c parabooli võrrandis $y = ax^2 + bx + c$, kui parabool läbib punkte $(0 \mid 0)$, $(4 \mid 24)$ ja $(-6 \mid -24)$.

279. Leida püstteljega parabool, mis läbib kolme antud punkti:

$$A \equiv (-3 \mid 0), \qquad B \equiv (-1{,}5 \mid -13{,}5) \text{ ja } \qquad O \equiv (0 \mid 0).$$

280. Valides kujutamisühikuks 1 cm ja kasutades papist väljalõigatud parabooli $y = x^2$ šablooni, joonestada paraboolid:

1. $y = x^2$
   $y = x^2 + 3$
   $y = x^2 - 2$

2. $y = -x^2$
   $y = -x^2 + 1$
   $y = -x^2 - 4$

281. Valides kujutamisühikuks 1 cm ja kasutades parabooli $y = x^2$ šablooni, joonestada paraboolid:

1. $y = (x - 2)^2$
   $y = (x + 1)^2$
   $y = -(x - 3)^2$

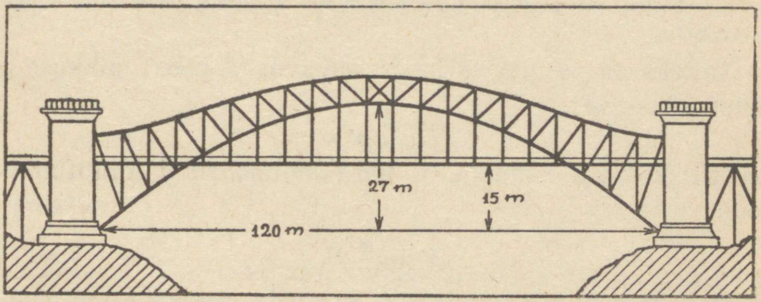
2. $y = (x + 2)^2 + 2$
   $y = (x - 1)^2 - 3$
   $y = -(x + 2)^2 - 5$

282. Leida joonist tegemata järgmiste paraboolide haripunktid ja sümmeetriateljed:

1. $y = x^2 - 1$	2. $y = (x + 1)^2 - 2$
$y = -x^2 + 7$	$y = x^2 - 2x + 6$
$y = (x + 5)^2$	$y = x^2 - 6x + 3$
$y = -(x + 3)^2 + 4$	$y = -x^2 - 4x - 1$

283. Punkt P liigub mööda lõiku AB, mille pikkus on a. Avaldada suurus $y = AP^2 + PB^2$ suuruse $x = AP$ funktsioonina ja leida selle funktsiooni graafikust, missuguse x-i väärtuse puhul omab suurus y väikseimat väärtust.

284. Lõik AC koosneb osadest $AB = a$ ja $BC = 3a$. Punkt P liigub mööda lõiku AC punktist A punkti B ja sealt punkti C. Missugusele lõigu AP pikkusele vastab suuruse $AP^2 + BP^2 + CP^2$ väikseim väärtus?



285. Ülalseisev joonis kujutab kahte jõekallast ühendavat raudsilda. Silda kannab paraboolne kaar. Kaare tugipunktide kaugus teineteisest on 120 m, kaare haripunkt on 27 m kõrgemal tugipunktidest. Sõidutee asetseb 15 m kõrgemal tugipunktidest. Koostada parabooli võrrand, võttes koordinaatide alguseks parabooli haripunkti ja ordinaatteljeks parabooli telje. Leida, kui pikk on kaarevaheline osa sõiduteest.

§ 35. Kuupsõltuvus $y = ax^3$.

Olgu (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste paarid ja olgu

$$\frac{y_1}{x_1^3} = \frac{y_2}{x_2^3} = \frac{y_3}{x_3^3} = \ldots$$

See võrduste jada ütleb, et funktsiooni ja argumendi kuubi suhe on *jääv* ehk, teisiti, et *funktsioon on võrdeline argumendi kuubiga*.

Sõltuvust, mille puhul üks suurus on võrdeline teise suuruse kuubiga, nimetatakse kuupsõltuvuseks.

Tähistades suhte $y : x^3$ jääva väärtuse ehk võrdeteguri tähega a, saame

$$\frac{y}{x^3} = a$$

ehk

$$y = ax^3.$$

Funktsiooni, mis avaldub argumendi kuubi kordsena, nimetatakse kuupfunktsiooniks.

Näiteks on pesunööri looga sügavus l nööri pikkuse p kuupfunktsioon:

$$l = ap^3.$$

Samuti on kera ruumala V kera läbimõõdu d kuupfunktsioon:

$$V = \frac{\pi}{6} d^3.$$

Kuupsõltuvus ei ole muutuvate suuruste vastastikune omadus, sest kui $y = ax^3$, siis $x = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$, mitte aga $x = \text{konst} \cdot y^3$.

Käsiteldavat funktsiooni iseloomustav omadus on see, et **argumendi x kasvamisel k korda kuupfunktsioon ax^3 kasvab k^3 korda.**

Ümberpöördult:

kui argumendi k-kordsel kasvamisel funktsioon kasvab k^3 korda, siis funktsioon on võrdeline argumendi kuubiga.

Nii üks kui teine omadus tõestatakse skeemi järgi, mida kasutasime ruutfunktsiooni $y = ax^2$ vastavate omaduste tõestamisel.

Jäävat tegurit a võrduses $y = ax^3$ saab leida, kui on teada üks paar argumendi ja funktsiooni vastavaid väärtusi. Olgu näiteks $y = 12$, kui $x = 2$. Siis

$$12 = a \cdot 2^3$$

ehk

$$12 = a \cdot 8,$$

millest

$$a = 1{,}5,$$

seega

$$y = 1{,}5x^3.$$

Ülesanded.

286. Telliskivi-virnas, milles kivid on laotud vahedeta, loeti N kivi pikkuse sihis, niisama palju laiuse sihis ja niisama palju kõrguse sihis. Avaldada telliskivide koguarv A virnas. Kuidas sõltub arv A arvust N?

287. Kuubi serv on t cm pikk, kus t on täisarv. Kuubi tahud on kaetud ruutsentimeetrise võrguga nii, et võrgu jooned on rööbiti kuubi servadega. Iga kahe vastastahu võrgu sõlmed on ühendatud tahkudel risti seisvate niitidega. Mitu sõlmpunkti on tekkinud ruumilises võres? Kuidas sõltub leitud arv arvust t?

288. Täita järgmise tabeli tühjad lahtrid arvutades vajalikud väärtused lihtsaimal viisil:

Kera läbimõõt	5,3	2 · 5,3	3 · 5,3	0,1 · 5,3	0,4 · 5,3
Kera ruumala	78,0				

289. Kerakujuline rahetera kasvab langedes auru veeldumisel ja jäätumisel läbimõõdult 0 millimeetrist 20 millimeetrini. Teades, et jää erikaal on 0,92, kujutada rahetera kaalu kasvamise käik tera läbimõõdu kasvades.

290. Seebimulli läbimõõt kasvab 0 sentimeetrist 8 sentimeetrini. Kujutada mulli ruumala kasvamine samas vahemikus, võttes andmed 0,5 cm tagant.

Leida joonisest seebimulli ruumala läbimõõtudel

2,7 3,9 4,8 5,3 6,6 sentimeetrit.

291. Kera, mille raadius on 6 cm, kaalub 7,2 kg. Kui palju kaalub samast ainest kera, mille raadius on 8 cm?

292. Köögis tarvitataval veetrumlil on tüvikoonuse kuju. Kui tähistada tema sügavust h ning põhja ja kaane raadiusi vastavalt R ja r, siis võib tema ruumala arvutada valemi järgi

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)h.$$

Näidata, et trumli mõõtmete kahanemisel k-kordselt kahaneb trumli ruumala k^3-kordselt.

293. Kahe silindrikujulise keedisepurgi läbimõõdud on d ja D ja sügavused vastavalt h ja H. Kuidas suhtuvad nende purkide ruumalad?

Vastata küsimusele ruumalasid arvutamata.

294. Luhal seisab kaks teineteisega sarnast heinakuhja. Nende ümbermõõdud on laiemal kohal vastavalt C m ja c m. Äravedamisel selgus, et esimeses kuhjas on H tsentnerit heinu. Arvutada teise kuhja heinte hulk (eeldades, et kuhjad on võrdse tihedusega).

295. Laual seisab kaks teineteisega sarnast kohvikannu. Nende põhjade läbimõõdud suhtuvad nagu $1 : 1{,}442$. Mitu korda on teine kann mahult suurem kui esimene?

296. Lahtisel tulel seisab kaks poolkerakujulist pesukatelt, läbimõõtudega d ja D. Kuidas suhtuvad nende küttepinnad? Kuidas suhtuvad nendes olevad veehulgad, kui mõlemad on ääreni täis? Kuidas suhtuvad ajad, mis tarvilikud, et vesi neis keema läheks?

297. Õhupalli kandejõud on võrdeline tema ruumalaga. Avaldada vesinikuga täidetud kerakujulise õhupalli kandejõud tema läbimõõdu funktsioonina, teades, et 2,8-meetrise läbimõõduga palli kandejõud on 138 kg.

298. Koonuse telglõike tipunurk on 90°. Kuidas sõltub koonuse ruumala koonuse kõrgusest? Kujutada see sõltuvus graafiliselt ja leida graafikust, kui suure kõrguse puhul on koonuse ruumala 30 ruumiühikut.

§ 36. Kuup-parabool.

Küsime, missugune on sõltuvuse $y = ax^3$ graafik. Et koordinaadid $(0 \mid 0)$ rahuldavad võrrandit $y = ax^3$, siis

sõltuvuse $y = ax^3$ graafik läbib koordinaatide algust.

Paneme tähele, et võrranditega

$$y = ax^3 \quad \text{ja} \quad y = -ax^3$$

määratud ordinaadid ühe ja sellesama x-i puhul erinevad vaid märgi poolest. Järelikult kõverad $y = ax^3$ ja $y = -ax^3$ on sümmeetrilised x-telje suhtes. Seega piisab kõvera

$y = ax^3$ uurimisest positiivse a korral. Sel korral on ordinaadil y seesama märk, mis abstsissil x; järelikult positiivse a korral sõltuvuse $y = ax^3$ kõik graafiku punktid on teljestiku I ja III veerandis.

Kui võrrandit $y = ax^3$ rahuldab mingi väärtusepaar x_1 ja y_1, siis rahuldab seda ka väärtusepaar $-x_1$ ja $-y_1$. Tõepoolest, kui $y_1 = ax_1{}^3$, siis ka $-y_1 = a \cdot (-x_1)^3$. Punktid $(x_1 \mid y_1)$ ja $(-x_1 \mid -y_1)$ on aga sümmeetrilised koordinaatide alguse suhtes. Seega

sõltuvuse $y = ax^3$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguse suhtes.

Selle põhjal saame teljestiku I veerandis asetseva graafiku osa järgi joonestada kohe ka tema osa III veerandis.

Vaadeldes võrrandeid

$$y = x^3 \quad \text{ja} \quad y = ax^3$$

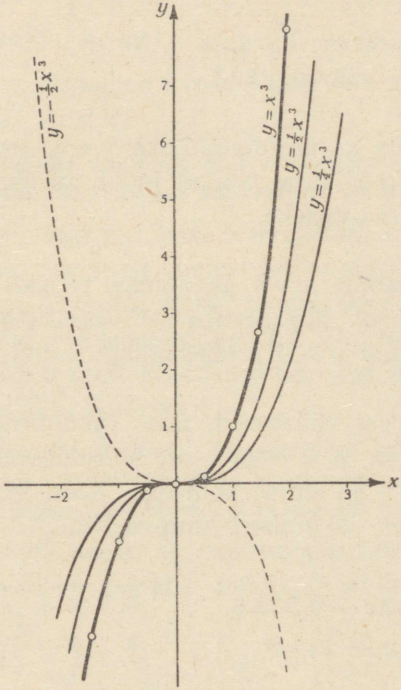
näeme, et teise kõvera ordinaadid saadakse esimese kõvera ordinaatidest, korrutades neid ühe ja sama teguriga a. Seepärast joonestame kõigepealt sõltuvuse

$$y = x^3$$

graafiku. Selleks anname x-ile väärtused, näiteks 0-st 2-ni iga 0,5 tagant, ja arvutame vastavad y väärtused; saame tabeli:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,125	1	3,375	8

Kujutame need väärtusepaarid punktidena xy-tasapinnal, ehitame neile punktidele sümmeetrilised punktid koordinaatide alguse suhtes ja ühendame kõik saadud punktid



Joonis 36.

kõvera abil (joonis 36). Seda kõverat nimetatakse k u u p - p a r a b o o l i k s. See ongi sõltuvuse $y = x^3$ graafikuks.

Korrutades saadud kõvera ordinaate a-ga, saame joone, mida nimetame samuti kuup-parabooliks. Joonisel 36 on kujutatud kuup-paraboolid

$$y = x^3 \quad y = \frac{1}{2}x^3 \quad y = \frac{1}{4}x^3.$$

Joonestades kõverale $y = ax^3$ x-telje suhtes sümmeetrilise, saame funktsiooni $y = -ax^3$ graafiku (joonis 36).

Ülesanded.

299. Kui suur on kordaja a, kui $y = ax^3$ ja x-i väärtusele 2 vastab y väärtus 2,4?

300. Valides kujutamisühikuks 1 cm, joonestada papile kõver $y = x^3$ ja lõigata saadud joont mööda šabloon kuupparabooli joonestamiseks.

301. Joonestada ühes ja samas teljestikus paraboolid $y = x^2$ ja $Y = x^3$. Missuguste x-i väärtuste puhul $y < Y$? Missuguste puhul $y > Y$? Missuguste puhul $y = Y$?

302. Abstsissi väärtused, mis rahuldavad võrrandsüsteemi $y = x^3$ ja $y = -pr - q$, rahuldavad ka võrrandit $x^3 + px + q = 0$ ja ümberpöördult. Seda arvestades lahendada graafiliselt järgmised kuupvõrrandid:

1. $x^3 - 2x + 0{,}5 = 0$	3. $x^3 + \frac{3}{4}x + 2 = 0$
2. $x^3 + x - 1 = 0$	4. $x^3 - 1{,}7x + 0{,}9 = 0$

303. Leida joonestamise teel parabooli $y = x^3$ ja sirge $y = 5x - 4$ ühised punktid. Kontrollida tulemust, asetades leitud koordinaatide väärtused kõverate võrranditesse.

304. Argumendi x väärtustele 1 ja 2 vastavad lineaarse funktsiooni $f(x)$ väärtused 1 ja 3 ning kuupfunktsiooni $F(x)$ väärtused 0,1 ja 0,8. Leida joonestamise teel, missugusele x-i väärtusele vastavad võrdsed funktsioonide $f(x)$ ja $F(x)$ väärtused.

§ 37. Ruutvõrrand-süsteemide graafiline lahendamine.

Olgu antud kahest võrrandist koosnev süsteem, milles vähemalt üks võrrand on ruutvõrrand, näiteks

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x+2y=1 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} y=2x^2-1 \\ xy=1 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y=x^2-5x+6. \end{cases}$$

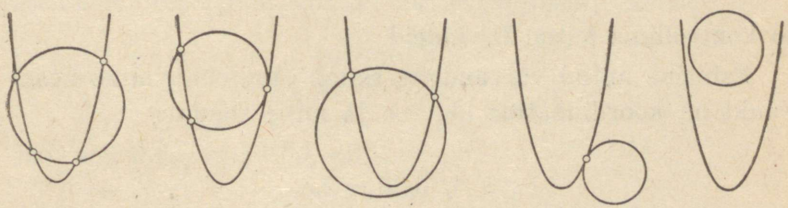
Niisugust võrrandsüsteemi nimetame r u u t v õ r r a n d - s ü s t e e m i k s. Niisiis:

ruutvõrrand-süsteemiks nimetame niisugust võrrandsüsteemi, milles üks võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga kas ruut- või lineaarvõrrand.

Kujutleme nii ühe kui teise võrrandiga määratud joone xy-tasapinnal ja vaatleme joonte lõikepunkte. Need punktid asetsevad nii ühel kui teisel joonel, seega nende punktide koordinaadid rahuldavad nii üht kui teist antud võrrandeist. Järelikult need koordinaadid ongi antud võrrandsüsteemi lahendeiks. Seepärast:

ruutvõrrand-süsteemi graafiliseks lahendamiseks joonestame süsteemi kuuluvate võrranditega määratud jooned ja leiame nende joonte lõikepunktide koordinaadid. Iga niisugune koordinaatide paar ongi süsteemi üheks lahendiks.

Öeldu põhjal on selge, et võrrandsüsteemil on nii mitu lahendit, kui mitmes punktis lõikuvad süsteemi võrrandi-

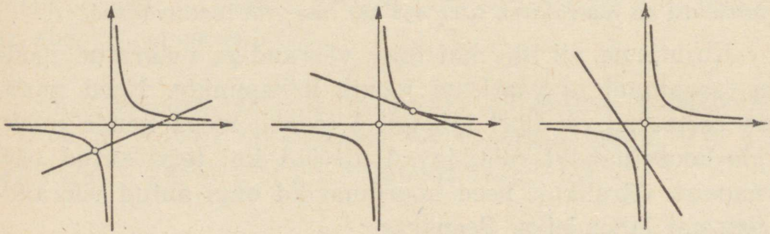


Joonis 37.

tega määratud jooned. Kui näiteks üks võrrand esitab ringjoont, teine parabooli, siis neil joontel on kas 4, 3, 2, 1 või 0 ühist punkti (joonis 37) ja sellele vastavalt võrrandsüsteemil on kas 4, 3, 2, 1 või 0 lahendit. Kui näiteks üks võrrand esitab hüperbooli, teine sirget, siis neil joontel on kas 2, 1 või 0 ühist punkti (joonis 38) ja sellele vastavalt võrrandsüsteemil on kas 2, 1 või 0 lahendit.

Üldiselt:

kui ruutvõrrand-süsteemi kuuluvaist võrrandeist on mõlemad ruutvõrrandid, siis võrrandsüsteemil on ülimalt neli lahendit; kui aga üks võrrandeist on lineaarvõrrand, siis süsteemi lahendeid on ülimalt kaks.



Joonis 38.

N ä i d e 1. Lahendame graafiliselt võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6{,}25 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

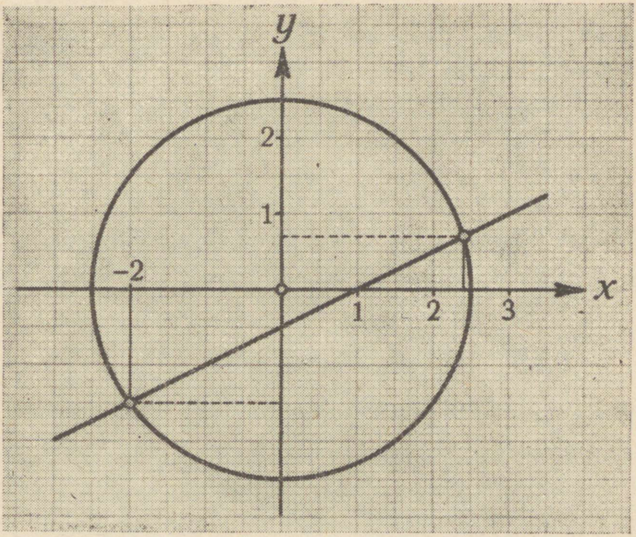
ja kontrollime leitud lahendeid.

Esimene antud võrrandeist esitab ringjoont, mille keskpunkt on koordinaatide alguses ja mille raadius

$$r = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5.$$

Teise võrrandiga on määratud sirge, mis lõikab x-telge punktis $(1\,|\,0)$ ja y-telge punktis $(0\,|\,—0{,}5)$. Võtame tüki ruudulist paberit, näiteks mm-paberit, valime teljed, joonestame mõlemad jooned ja leiame joonisest nende lõikepunktide koordinaadid (joonis 39). Neid lõikepunkte on kaks, nimelt

$$(-2 \mid -1{,}5) \quad \text{ja} \quad (2{,}4 \mid 0{,}7).$$



Joonis 39.

Esimene lõikepunkt annab võrrandsüsteemi lahendi

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -1{,}5 \end{cases}$$

ja teine lõikepunkt lahendi

$$\begin{cases} x_2 = 2{,}4 \\ y_2 = 0{,}7. \end{cases}$$

Lahendite kontrollimiseks asendame antud võrrandite vasakutes pooltes x-i ja y leitud väärtustega. Esimese lahendi asendamisel saame

$$x^2 + y^2 = (-2)^2 + (-1{,}5)^2 = 4 + 2{,}25 = 6{,}25$$

ja

$$x - 2y = -2 - 2 \cdot (-1{,}5) = -2 + 3 = 1,$$

nagu peab olema. Esimene lahend on seega õige. Teise lahendi puhul saame

$$x^2 + y^2 = 2{,}4^2 + 0{,}7^2 = 5{,}76 + 0{,}49 = 6{,}25$$

ja

$$x + 2y = 2{,}4 - 2 \cdot 0{,}7 = 2{,}4 - 1{,}4 = 1,$$

nagu peab olema. Seega on ka teine lahend õige.

Näide 2. Lahendame graafiliselt võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$$

ja kontrollime leitud lahendeid.

Antud võrrandeist esimene esitab ringjoont keskpunktiga $(0 \mid 0)$ ja raadiusega 2 ning teine parabooli, mille sümmeetriatelg on y-telg ja haripunkt $(0 \mid 3)$. Parabooli joonestamiseks koostame järgneva väärtusepaaride tabeli:

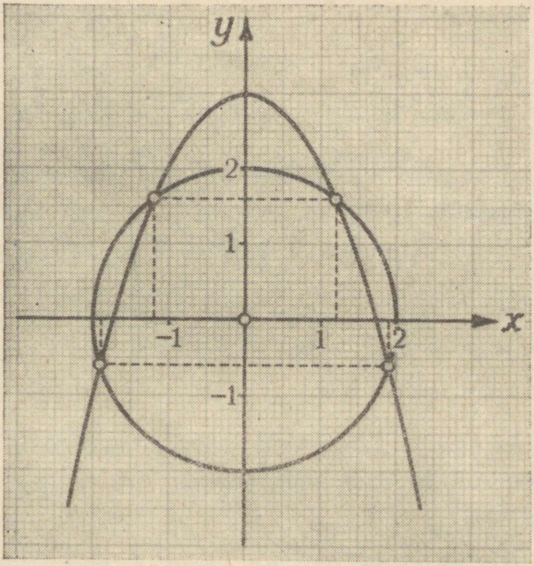
x	0	$\pm 0{,}5$	± 1	$\pm 1{,}5$	± 2
x^2	0	0,25	1	2,25	4
$y = 3 - x^2$	3	2,75	2	0,75	-1

Joonestades antud süsteemiga määratud kõverjooned, näeme, et neil on neli lõikepunkti (joonis 40), nimelt $(-1{,}9 \mid -0{,}6)$, $(-1{,}2 \mid 1{,}6)$, $(1{,}2 \mid 1{,}6)$ ja $(1{,}9 \mid -0{,}6)$. Vastavalt sellele on võrrandsüsteemil järgmised lahendid:

$$\begin{cases} x_1 = -1{,}9 \\ y_1 = -0{,}6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1{,}2 \\ y_2 = 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1{,}2 \\ y_3 = 1{,}6 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_4 = 1{,}9 \\ y_4 = -0{,}6. \end{cases}$$

Lahendite kontrollimisel näeme, et esimese ja viimase lahendi puhul

$$x^2 + y^2 = (\pm 1{,}9)^2 + (-0{,}6)^2 = 3{,}61 + 0{,}36 =$$
$$= 3{,}97 \approx 4{,}0$$



Joonis 40.

ja

$$3 - x^2 = 3 - (\pm 1{,}9)^2 = 3 - 3{,}61 = -0{,}61 \approx$$
$$\approx -0{,}6 = y.$$

Teise ja kolmanda lahendi puhul

$$x^2 + y^2 = (\pm 1{,}2)^2 + 1{,}6^2 = 1{,}44 + 2{,}56 = 4{,}00$$

ja

$$3 - x^2 = 3 - (\pm 1{,}2)^2 = 3 - 1{,}44 = 1{,}56 \approx 1{,}6 = y.$$

Leitud lahendid on seega l i g i k a u d s e d, kuid õige väikeste vigadega. Viimaste tekkimine on tingitud vältimatutest joonestamise ja mõõtmise ebatäpsustest.

305. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid graafiliselt ja kontrollida tulemusi:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x - y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$

306. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid graafiliselt ja kontrollida tulemusi:

1. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 100 \\ 7x + 2y = -50 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ 15y - 4x = 20 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 100 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$

307. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid graafiliselt ja kontrollida tulemusi, leides süsteemide lahendid arvutamise teel:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45 \\ xy = 18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ xy = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{1}{6} x^2 \end{cases}$

308. Lahendada graafiliselt järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} 25x^2 + 36y^2 = 576 \\ y = x^2 - 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ xy = 1\frac{1}{2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy = 12 \\ y = (x - 5)^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy = 4 \\ y = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

Peatükk VIII.

Ülesandeid kordamiseks.

§ 38. Arvutusülesandeid.

309. Arvutada peast järgmiste tehete tulemused ja anda iga arvutusvõtte puhul selle põhjendus:

1.	2.
$785+4286+215$	$102\cdot 98$
$3875-1999$	158^2-58^2
$99\cdot 73$	$23\frac{7}{8}\cdot 5$
$72\cdot 73$	$\frac{12}{13}\cdot 182$
82^2	$\sqrt{2\frac{14}{25}}$

310. Missugune arvudest $\frac{5}{23}$, $\frac{3}{14}$ ja 0,22 on suurim ja missugune väikseim?

311. Järjestada murrud

$$\frac{3}{5},\quad \frac{7}{13},\quad \frac{8}{15} \quad \text{ja} \quad \frac{15}{28}$$

kasvava suuruse järgi.

312. Andmete ümberkirjutamisel on ära vahetatud jagatav ja jagaja ning jagatisena saadud 0,658. Kui suur on õige jagatis?

313. Kalliskivi kaal on grammides 0,945. Kui suur on kivi kaal karaatides, kui 1 karaat = 206 mg?

314. Vasktraadi pikkus 10^0 temperatuuril on 200 m. Mitme millimeetri võrra pikeneb see traat soojenemisel 30 kraadini, kui vase joonpaisumise koefitsient on $1{,}71 \cdot 10^{-5}$?

315. Maantee pikkus on 19,8 km ja laius 6,4 m. Mitu hektaari võtab enda alla maantee?

316. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $6{,}5 - 5{,}2 \cdot 1{,}25 + 0{,}75$

$\frac{2}{3} + 1{,}7 - \frac{1}{6}$

$\frac{3}{4} \cdot 2{,}5 - \frac{5}{8} \cdot 1{,}2$

$\frac{9}{3{,}6} - \frac{65}{1{,}5} + \frac{81}{1{,}08}$

2. $630\frac{3}{35} : 4\frac{2}{7}$

$3\frac{5}{8} \cdot 16 - 13 : 5\frac{4}{7}$

$36 : 1\frac{2}{7} + 3\frac{1}{2} \cdot 9$

$\frac{2{,}7 \cdot 4{,}2}{4{,}5 \cdot 3} + \frac{1{,}6 \cdot 1{,}35}{1{,}5 \cdot 4{,}5}$

317. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$2\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} \cdot 3 - 27$$

$$\left(\frac{4}{9} + 1\frac{5}{9}\right) \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$$

$$\left(2\frac{1}{4} - 1\frac{3}{8}\right) \cdot \left(5 - \frac{2}{3} \cdot 6\frac{3}{8}\right)$$

$$\left(6 \cdot \frac{4}{9} - \frac{5}{12}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + 0{,}2\right)$$

$$\left(4\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0{,}9 - 0{,}3 : \frac{3}{7}\right) \cdot 3\frac{3}{4}$$

318. Kirjutada järgmised suhted võimalikult väikeste täisarvude abil:

$$432 : 400; \quad \frac{1}{4} : \frac{2}{3}; \quad 13\frac{1}{3} : 5\frac{5}{7}; \quad 302\frac{1}{2} : 3\frac{7}{16}.$$

319. Taandada murrud

$$\frac{385}{1430}, \quad \frac{399}{1365} \quad \text{ja} \quad \frac{1890}{3990}.$$

320. Missugused järgmistest arvudest on algarvud: 191, 713, 1203, 1307?

321. Lahutada järgmised arvud algteguriteks: 174, 672, 826, 1430, 1896, 2184, 6930, 8800.

322. Leida järgmiste arvurühmade suurim ühistegur: 168 ja 576; 182 ja 1352; 560, 336 ja 616.

323. Leida järgmiste arvurühmade väikseim ühiskordne: 28, 36 ja 63; 10, 14, 21, 24 ja 30; 125, 400 ja 750; 2205 ja 2898.

324. Leida arvude 720, 945 ja 3969 suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

325. Aednikul on lõigatud 45 ühevärvilist roosi, 60 ühevärvilist nelgiõit ja 105 sparglioksa. Ülimalt mitu ühe ja sama koostisega lillekimpu saab aednik valmistada neist lilledest ja okstest?

326. Veduri eesmiste rataste läbimõõt on 54 cm, tagumiste rataste läbimõõt on 104 cm ja vagunirataste läbimõõt on 86 cm. Kui pika maa peab rong sõitma, et kõik kolm rataste liiki jõuaksid jälle samasse seisu üksteise suhtes nagu liikumise alguses?

327. Auruturbiin annab tagasi kasuliku töö näol 82% temasse soojuse näol juhitud energiat. Mitu kilogrammmeetrit tööd teeb turbiin, kui temasse on juhitud $3{,}35 \cdot 10^6$ kilokalorit soojust?

328. Mootortraktorijaam ostab määrdeõli hinnaga 72 kopikat kilogramm ja müüb seda hinnaga 72 kopikat liiter. Mitu protsenti teenib jaam õli müügilt, kui õli erikaal on 0,92?

329. Kaubastu ostis 75 kg seepi, makstes 44,25 rubla. Kuivades kaotas seep 8% oma kaalust. Kui kallilt peab kaubastu müüma 200-grammise tüki seepi, et saada kätte makstud raha ja 12% käibekulude katteks?

330. Mitme protsendi võrra suureneb murd, kui nimetaja väheneb 25% võrra?

331. Mitme protsendi võrra suureneb 1 tšervoonetsi eest saadava kauba hulk, kui kauba hind väheneb 20% võrra?

332. Üks arv on teisest 25% võrra väiksem. Mitme protsendi võrra on teine arv esimesest suurem?

§ 39. Ülesandeid avaldiste teisendamiseks.

333. Näidata otsese arendamise teel, et

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=$$
$$=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca).$$

334. Näidata otsese arendamise teel, et

$$\frac{1}{3}[(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3]=$$
$$=ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c).$$

335. Olgu a ja b mingid kaks teineteisest erinevat positiivset arvu. Tõestada, et alati on

$$(a+b)^2>4ab.$$

336. Lahutada teguriteks järgmised polünoomid:

1. $x - x^3$	6. $x^2 - 4x - 21$
2. $u^3 + 4u^2 + 4u$	7. $(a + 3b)^2 - (b - 3a)^2$
3. $z^2 + 11z + 28$	8. $m^2 - n^2 + 2n - 1$
4. $t^3 - t^2 - t + 1$	9. $(2a + 2x)^3 - 2(a + x)$
5. $18x^3 - 2a^2x$	10. $3mn - 2m - 12 + 18n$

337. Leida iga järgneva avaldiste kolmiku suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne:

1.	$x^3 + x^2 + x + 1$	$x^2 + 2x + 1$	$x^2 + 1$
2.	$x^3 - x^2 - x + 1$	$5x^2 - 10x + 5$	$3(x^2 - 1)$
3.	$x^2 - 4x + 3$	$2x^2 - 18$	$x^2 + 3x - 4$
4.	$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$	$x^3 + x^2 - 2x$	$x^2 + 2x$
5.	$6x^3 + 6x$	$10x^2 - 10$	$4cx^3$

338. Missuguse suuruse võrra muutub polünoomi $1 - 5x - x^2$ väärtus arvu x muutumisel väärtuselt $a - h$ väärtusele $a + h$?

339. Põranda mõõtmed on ligikaudu 4,4 m ja 5,6 m. Kummagi mõõtme vea ülemmäär on a meetrit. Leida põranda pindala tõelise väärtuse tõkked.

340. Telliskivi mõõtmed on sentimeetrites $25 \pm \alpha$, $12 \pm \beta$ ja $4 \pm \gamma$. Kui suur on telliskivi ruumala vea ülemmäär?

341. Näidata, et avaldis

$$\frac{a+b}{ab}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{b+c}{bc}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$

ei sõltu arvust b.

342. Lihtsustada avaldised

1. $1\frac{9}{16}\left(-\frac{4m}{5n}\right)^2\left(\frac{m}{n}\right)^4$
2. $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}x^2\right)^2$
3. $\sqrt{3c\sqrt[3]{\frac{x}{9c^2}}}$
4. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{h^2x}\cdot\frac{2}{3}h^2\sqrt[3]{hx^2}$

343. Lihtsustada järgmised avaldised:

1. $\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2$
2. $\frac{2am+m^2}{4a^2-m^2}:\left(\frac{2a}{2a-m}-1\right)$
3. $\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)$
4. $\left(u-\frac{u-v}{1+uv}\right):\left[1+\frac{u(u-v)}{1+uv}\right]$
5. $\left(a^2q^2-2+\frac{1}{a^2q^2}\right):2\left(aq-\frac{1}{aq}\right)$
6. $\left(3-\frac{9m-1}{m+3m^2}\right)\left(m+1+\frac{4}{9m-3}\right)$
7. $\left(\frac{5-3a}{4+2a}-1+a\right):(a-a^2-2a^3)$
8. $\left(2-p+\frac{2p^2}{2+p}\right):\frac{4a^2+ap^2}{p^2x-4x}$
9. $\left(2+\frac{2m^2}{2+m}-m\right):\frac{4n^2+n^2m^2}{m^2x-4x}$
10. $\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

344. Näidata, et avaldis m^2-n^2 on avaldiste $m^2+2mn+n^2$ ja $m^2-2mn+n^2$ keskmine võrdeline.

345. Taandada murd

$$\frac{6q^2+q-12}{6q^2+11q+3}.$$

346. Lihtsustada järgmised avaldised:

1. $\sqrt{125+\frac{25a}{16}}:\sqrt{100-\frac{a}{4}}$
2. $\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{2}}$
3. $(\sqrt{a+x}+\sqrt{a}-\sqrt{x})(\sqrt{a+x}-\sqrt{a}+\sqrt{x})$
4. $\left(\sqrt{1-p}+\frac{1}{\sqrt{1+p}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\right)$
5. $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2}$
6. $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{2a-2b}{a^3+a^2b}}$

§ 40. Ülesandeid võrrandite lahendamiseks.

347. Näidata, et võrdust

$$(2x-1)^2-x=(1-x)(1-4x)$$

rahuldab x-i iga väärtus.

348. Avaldada arv x võrdest $x:(2+x)=\frac{3}{4}:\frac{5}{x}$.

349. Laeva kinnitamise vaia pool pikkust on maa sees, $\frac{4}{5}$ ülejäävast osast on vee sees ja 1 meetri pikkune lõpposa ulatub üle veepinna. Kui pikk on vai?

350. Missugusel hetkel kella 6.00 ja 6.30 vahel ajanäitaja osutid moodustavad teineteisega täisnurga?

351. Käia raadius väheneb käia kulumise tõttu, ilma et seejuures muutuks käia paksus. Käia raadiuse algsuurus on r_0 cm. Milleni väheneb käia raadius, kui pool käia ruumala on ära kulunud?

352. Ruudukujulise plekitüki nurkadest lõigatakse välja ruudud küljega 4 cm. Ülejäänud plekitüki osa murtakse kokku lahtiseks karbiks. Kui suur peab olema plekitükk, et karbi ruumala oleks 100 cm^3? Mitu protsenti plekist läheb kaduma karbi valmistamisel?

353. Isa ja poeg koos töötades niidavad oma talu heina 30 tunniga. Üksinda niites oleks pojal kulunud selleks tööks 8 tundi enam kui isal. Mitme tunniga niidab kumbki kogu talu heina?

354. Elektrivoolu ahela pinge on 220 volti. Kui suured on voolutugevus ja takistus, kui takistuse suurendamisel 11 oomi võrra voolutugevus langeb 1 ampri võrra?

355. Tilgakujuline keha langeb õhus peaaegu takistamatult. Kaevanduse šahti sügavuse mõõtmiseks lastakse sinna langeda maapinnalt tilgakujuline tükk seatina. Kui sügav on šaht, kui tinatüki löök šahti põhja vastu tuleb kuuldavale 5,4 sekundit pärast tinatüki langetamist ja hääle levimiskiirus õhus on 340 meetrit sekundis?

356. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{a}{x} - a = \frac{b}{2x} - \frac{1}{2}b$

2. $x^2 + a(b + c) = (a + x)\,(b + x) - \frac{a^2c}{b}$

3. $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{a - b}{x^2 - ab}$

4. $\frac{x}{p + q} + pqx = p + q + \frac{1}{pq}$

357. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{x}{h+x}+\frac{h+x}{x}=\frac{5}{2}$

2. $\frac{1}{ax+b}+\frac{1}{ax-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$

3. $\frac{x}{m-n}+\frac{m-n}{x}=\frac{m^2-1}{m}$

4. $\frac{px+q}{px-q}-\frac{px-q}{px+q}=\frac{4pq}{p^2-q^2}$

358. Näidata, et võrrandi

$$ax^2-ax+c=0$$

lahendite summa on sõltumata a väärtusest alati 1.

359. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on $2+\sqrt{3}$ ja $2-\sqrt{3}$.

360. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on võrrandi $x^2-x-2=0$ lahendite ruudud.

361. Leida kordaja q nõnda, et võrrandi

$$x^2-12x+q=0$$

üks lahend oleks teise lahendi ruut.

362. Olgu teada, et võrrandi

$$x^2-px+q=0$$

lahenditeks on kaks järjestikust täisarvu. Näidata, et sel korral

$$p^2=4q+1.$$

363. Kui pikk peab olema kuubi serv, et kuubi pindala ja ruumala mõõtarvud oleksid võrdsed?

364. Avaldada ringi pindala läbimõõdu funktsioonina ja läbimõõt pindala funktsioonina.

365. Avaldada kera ruumala kera läbimõõdu funktsioonina ja läbimõõt ruumala funktsioonina.

366. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\sqrt{4x+5}\cdot\sqrt{7x+1}=30$
2. $x-2\sqrt{x+6}=2$
3. $10(8-\sqrt{2x})=x+2$
4. $\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{2x+1}}$

367. Lahendada iga järgmine valem nurksulgudes seisva tähe suhtes:

1. $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ [r]
2. $S=2\pi r(r+h)$ [h]
3. $S=\pi(R^2-r^2)$ [R]
4. $a=(k-h)^2$ [h]
5. $\frac{1}{u}=\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$ [v]
6. $y=\sqrt{r^2-x^2}$ [x]
7. $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ [l]
8. $S=2(ab+bc+ac)$ [c]

368. Kui suur on vooluallika pinge ja sisetakistus, kui voolu tugevus on 20-oomise välistakistuse puhul 4 amprit ja 75-oomise välistakistuse puhul 2 amprit?

369. Rong vajab a minutit, et mööduda semaforist, ja b minutit, et läbida c meetri pikkune tunnel. Mitu kilomeetrit sõidab rong tunnis ja kui pikk on rong?

370. Õpilaste ekskursiooniks oli palgatud autobus 54 rubla eest. Kaasa sõitis nelja õpilase võrra rohkem kui esialgu arvati. Seetõttu tuli igal õpilasel maksta 15 kopika võrra vähem, kui ette arvestati. Mitu õpilast võttis ekskursioonist osa?

371. Kaks koormist tasakaalustuvad kangil, kui nende kaugused toest on 80 ja 70 cm. Kui kumbagi koormist suurendada 4 kg võrra, siis tasakaalustuvad nad, asetsedes 160 ja 150 cm kaugusel toest. Kui suured on koormised?

372. Täisnurkse kolmnurga külgede pikkused moodustavad aritmeetilise jada. Kolmnurga pindala on 294 cm^2. Kui pikad on kolmnurga küljed?

373. Kahe arvu suhe on $\frac{9}{4}$; nende arvude keskmine võrdeline on 600. Kui suured on arvud?

374. Kella osutite tippude vahe on kella 6 ajal 12,6 cm, kella 9 ajal aga 9,0 cm. Kui pikad on osutid?

375. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x + y = 100 \\ xy = 2491 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 24 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x = 3y \\ 2x^2 - 3y^2 = 24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 + x - 11 = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 - a^2y^2 = b \\ bx^2 + a^2y^2 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 - 2xy = 0 \\ 7x + y = 30 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y = 3a + b \\ x^2 - y^2 = 4ab \end{cases}$

8. $\begin{cases} xy = 2 \\ x(1 + y^2) = 6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 22 \\ 3x^2 - 5y^2 = 7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} xy = p \\ x : y = q \end{cases}$

Lahendada võrrandid:

376.

1. $0{,}3^{2x+5} = 0{,}027$
2. $5^{x^2 - 3x} = 625$
3. $x^{\log x} = 4{,}885$

377.

1. $\sqrt[x]{a} = a^x$
2. $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$
3. $9 \cdot 5^{x+1} - 5^x = 5500$

Lahendada järgmised võrrandid:

378. 1. $2^x = 3^x$

2. $\sqrt[x]{1,371} = \sqrt[10]{10}$

3. $2^x + 4^x = 272$

4. $2^x - 2^{x-2} = 3$

5. $(4^{3-x})^{2-x} = 1$

379. 1. $4^{x+1} = 64 \cdot 2^{x+1}$

2. $x^{\log x} = 100x$

3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

4. $7^{5x} \cdot 2^{7x} = 1467$

5. $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$

380. 1. $\dfrac{\log x}{1 - \log 2} = 2$

2. $\log (x + \sqrt{3}) = - \log (x - \sqrt{3})$

3. $5 \log x - \log 288 = 3 \log \dfrac{x}{2}$

4. $\log (x + 2) + \log (x - 1) = 5,480$

5. $(\log x)^2 + \log x = 0,9094$

381. 1. $\frac{1}{2} \log (x - 9) + \log \sqrt{2x - 1} = 1$

2. $\log (x - 2)^3 + 3 \log (x - 5) = 3$

3. $\log (x - 3) + \log (x + 4) = 1 + \log 3$

4. $\log (x - 2) - 1 = \frac{1}{2} \log 13,75 - \log \sqrt{2x + 1}$

5. $\log (x - 5) - \log 0,5 = 1,623 - \log x$

§ 41. Ülesandeid jadadest ja ridadest.

382. Aritmeetilises reas on $a_m = M$, $a_n = N$. Leida rea vahe.

383. Geomeetrilises reas on $a_m = M$, $a_n = N$. Leida rea tegur.

384. Kui suur on jada $\dfrac{n-1}{n}$, $\dfrac{n-2}{n}$, $\dfrac{n-3}{n}$, ... esimese n liikme summa?

385. Mitu liiget peab võtma jadas 1, —3, 5, —7, 9, . . ., et saada summat 421?

386. Moodustagu arvud a, b, c ja d aritmeetilise jada. Näidata, et siis $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$.

387. Aritmeetilises reas on $a_3 + a_8 = 17$ ning $a_{13} + a_{20} = 83$. Leida rea esimene liige ja rea vahe.

388. Näidata, et arvud a^2, b^2 ja c^2 moodustavad aritmeetilise jada, kui arvud $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ ja $\frac{1}{b+c}$ annavad aritmeetilise jada.

389. Arvud x, y ja z annavad aritmeetilise jada ning y, z ja x moodustavad geomeetrilise jada. Avaldada y ja z arvu x-i funktsioonidena ning anda kummagi jada esimesed 5 liiget.

390. Geomeetrilise rea esimese kahe liikme summa on 28, järgmise kahe liikme summa on 252. Leida rea esimesed viis liiget.

391. Kumera hulknurga sisenurkade suurused moodustavad aritmeetilise jada, mille väikseim liige on 120^0 ja jada vahe on 5^0. Mitu tippu on hulknurgal?

392. Nii aritmeetilise kui geomeetrilise jada esimene liige on 4, jadade teised liikmed on ka võrdsed ning aritmeetilise ja geomeetrilise jada kolmandate liikmete jagatis on 16. Leida mõlema jada esimesed neli liiget.

393. Rea esimene liige on 20 ja iga järgnev liige on 5% võrra väiksem eelnevast. Millele läheneb rea väärtus liikmete arvu piiramatul kasvamisel?

394. Millele läheneb rea

$$(1-x^2) + (x-x^3) + (x^2-x^4) + \dots$$

väärtus liikmete arvu piiramatul kasvamisel, kui $|x| < 1$?

395. Kui suur väärtus on real

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots?$$

396. Olgu teada, et lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea esimene liige on 1 ja rea väärtus on tõkete 2 ja 3 vahel. Missuguste tõkete vahel on rea tegur?

397. Teisendada harilikeks murdudeks perioodilised kümnendmurrud 0,65353..., 0,359090... ja 4,00707...

398. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea iga liige võrdub temale järgnevate liikmete summa 10-kordsega. Leida rea esimene liige ja tegur.

399. Arendada arv 1,2 lõpmatult kahanevaks geomeetriliseks reaks, mille tegur on võrdne esimese liikme ruuduga.

400. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea iga kahe järjestikuse liikme vahele paigutatakse uus liige nii, et tekib lõpmatult kahanev geomeetriline rida, mille väärtus on esialgse rea väärtuse poolteisekordne. Kui suur on esialgse rea tegur?

§ 42. Ülesandeid analüütilisest geomeetriast.

401. Olgu antud punkt $P \equiv (a \mid b)$. Kuidas avalduvad punkti P koordinaadid, kui kujutamisühikut x-teljel vähendada m korda ja y-teljel suurendada n korda?

402. Anda nende kahe sirge võrrandid, mis läbivad punkti (—4 | 2) ja on rööbiti vastavalt x-teljega ja y-teljega.

403. Leida punkte (1 | 3) ja (5 | 6) läbiva sirge tõusunurga siinus ja koosinus.

404. Lõigu üks otspunkt on $A \equiv (-1 \mid -1)$, teine $B \equiv (3 \mid 2)$. Lõiku pikendatakse alates punktist B kahe ühiku võrra punktini C. Määrata punkti C koordinaadid.

405. Missugune punkt sirgel $y = 2x$ on võrdseil kaugusil punktidest (1 | 3) ja (3 | 1)?

406. Kolmnurga üks tipp on $A \equiv (1 \mid 1)$, teine tipp $B \equiv (4 \mid -2)$. Kolmas tipp C liigub mööda sirget $3x + 5y = 25$. Missugusesse punkti peab tipp C jõudma, et kolmnurga küljed AC ja BC saaksid võrdseteks?

407. On antud punktid

$$A \equiv (2 \mid 2), \quad B \equiv (3 \mid 6), \quad C \equiv (5 \mid -1) \text{ ja } D \equiv (4 \mid -5).$$

Näidata, et kujund $ABCD$ on rööpkülik.

408. Avaldada sirge algabstsiss sirge algordinaadi b ja tõusunurga μ abil.

409. Sirge lõikab telgedel positiivselt suunatud lõigud, läbib punkti (4 | 2) ja koos telgedega moodustab kolmnurga, mille pindala on 16. Leida selle sirge võrrand.

410. Läbi punkti (1 | 2) on tõmmatud sirge, mis tekitab telgedel lõigud ξ ja η. Avaldada teine telglõik esimese funktsioonina.

411. Sirge ja temale koordinaatide algusest tõmmatud ristsirge lõikuvad punktis $(a \mid b)$. Leida sirge võrrand.

412. On antud kolm punkti:

$$A \equiv (-4 \mid 1), \; B \equiv (0 \mid 5) \text{ ja } C \equiv (-2 \mid -1).$$

Näidata, et punkt A asetseb ringjoonel, mis on kujutatud lõigul BC kui diameetril.

413. On antud punktid $O = (0 \mid 0)$ ja $D \equiv (a \mid b)$. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et suurus $OP^2 + DP^2$ jääb võrdseks summaga $a^2 + b^2$. Anda punkti P liikumiskõvera võrrand. Otsustada saadud võrrandi järgi, missugusel joonel liigub punkt P.

414. Punkti $C \equiv (2 \mid 6)$ ümber on kujutatud ringjoon raadiusega 5. Missugune punkt sel ringjoonel on sirgele $3x + 4y = 101$ lähim?

415. Anda ringjoone võrrand, teades, et tema keskpunkt on $(-3 \mid 4)$ ja et ta puudutab sirget

$$3x + 8y - 6 = 0.$$

416. Kolmnurga ABC tipud A ja B asetsevad punktides $(-2 \mid 0)$ ja $(2 \mid 0)$. Tipp C liigub tasapinnal nii, et kolmnurga pindala on jäävalt 20 pindalaühikut. Missuguse joone joonestab tipp C? Anda selle joone võrrand.

417. Kolmnurga ABC tipud A ja B asetsevad punktides $(-1 \mid 0)$ ja $(1 \mid 0)$. Tipp C liigub tasapinnal nii, et kolmnurga ümbermõõt on jäävalt 8 pikkusühikut. Missuguse joone joonestab tipp C? Anda selle joone võrrand.

418. Maa orbiidi ekstsentrisus on $\approx 0{,}02$. Näidata, et soojusehulgad, mis Maa Päikeselt saab kohtades, kus Maa on Päikesest kõige kaugemal ja Päikesele kõige lähemal, suhtuvad ligikaudu nagu 12 : 13.

419. Kahe kolmnurga alused a ja b asetsevad vastavalt x- ja y-teljel. Kolmnurkadel on ühine tipp P. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et kolmnurkade pindalade summa s jääb muutumatuks. Anda selle joone võrrand, mille joonestab punkt P.

420. Silindrilise veeklaasi seesmine läbimõõt on 6 cm ja seesmine kõrgus 9 cm. Klaas on kallutatud nii, et klaasis oleva vee pind puudutab põhja ringjoont ja klaasi ülemist serva. Missugune kuju on veepinna piirjoonel? Joonestada see joon tõelises suuruses.

421. Lahendada graafiliselt ja numbriliselt järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ 4y - x^2 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 4x^2 + 49y^2 = 196 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} xy = 12 \\ y = x^2 - 10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy = 16 \\ x^2 = y - 2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases}$

422. Kujutagu võrrandid

$$y = mx + n \text{ ja } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

üht ja sedasama sirget. Avaldada m ja n arvude a ja b kaudu.

423. Leida sirgete

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

lõikepunkt.

424. On antud paraboolid $x^2 = 8y$ ja $x^2 = 4 - 6y$. Leida nende paraboolide lõikepunktid.

425. Ringjoon $x^2 + y^2 = 16$ ja parabool $x^2 = 9y$ lõikuvad. Kui pikad on ringi kaared lõikepunktide vahel?

426. Missugust tingimust peavad täitma kordajad m, n ja p, et sirge $y = mx + n$ puudutaks parabooli $x^2 = 2py$?

427. Sirged

$$y = 2x + 1, \quad y = 2x + 3 \quad \text{ja} \quad y = 2x - 1$$

lõikuvad parabooliga $y = 4x^2$. Näidata, et kolme tekkiva kõõlu keskpunktid on ühel ja samal sirgel.

428. Olgu $P_1 \equiv (x_1 \mid y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 \mid y_2)$. Missugust tingimust peavad rahuldama need kaks paari koordinaate, et lõik P_1P_2 paistaks koordinaatide algusest nurgas 90^0?

429. Kolmnurga tipud on $(4 \mid 6)$, $(-8 \mid -2)$ ja $(0 \mid 10)$. Näidata, et kolmnurk on võrdhaarne. Leida aluse keskpunkt ja arvutada alusele joonestatud kõrgus.

430. Koostada selle sirge võrrand, mis läbib sirgete

$$3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 5x + y - 1 = 0$$

lõikepunkti ja lõikab koordinaatide telgedelt võrdsed positiivselt suunatud lõigud.

431. Sirge läbib punkti $(9 \mid 4)$ ja on rööbiti lõiguga, mille otspunktid on $(8 \mid 6)$ ja $(-10 \mid 0)$. Missuguses punktis sirge lõikab abstsisstelge?

432. Kolmnurga külgsirged on $4x + 3y = 48$, $x + 2y = 12$ ja $6x - 8y = -14$. Näidata, et kolmnurk on täisnurkne. Kui suur on hüpotenuusi tõusunurk?

433. Ristküliku ühe külje otspunktid asetsevad sirge $2x - y - 6 = 0$ lõikepunktides koordinaatide telgedega. Leida teiste külgsirgete võrrandid ja tippude koordinaadid, kui on teada, et kolmanda tipu abstsiss on 0.

434. Ringjoone $x^2 + 12x + y^2 - 8x + 36 = 0$ püstläbimõõdu väiksema ordinaadiga otspunkt võetakse uue ringjoone keskpunktiks. See ringjoon läbib antud ringjoone keskpunkti. Leida uue ringjoone võrrand.

435. Kui kaugel on ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ punkt $(3 \mid 3{,}2)$ kummastki fookusest?

436. Ringjoon $x^2 + y^2 = 144$ projektitakse paralleelsete kiirtega tasapinnale, mis ringjoone tasapinnaga moodustab 45^0-se nurga ja on risti kiirtega. Kirjutada ringjoone projektsiooni võrrand. Näidata, et see projektsioon on ellips ja arvutada viimase ekstsentrisus.

437. Leida, kus lõikub sirge $4x + 5y = 560$ ellipsiga, mille sümmeetriateljed on x- ja y-telg, ekstsentrisus on 0,6 ja pooltelgede vahe on 20.

438. Termomeetri kontrollimisel selgus, et ta jää sulamisel näitab 1^0 ja vee keemisel 96^0. Toas näitab termomeeter 20^0. Kui kõrge on tõeliselt toa temperatuur?

439. Korrapärase viisnurga keskpunkt asub koordinaatide alguses ja üks tipp asub punktis $(1 \mid 0)$. Leida viisnurga teiste tippude koordinaadid, kasutades nurgafunktsioonide tabeleid.

440. On antud punktid $A \equiv (-3 \mid -1)$ ja $B \equiv (0 \mid 1)$. Lõik AB pikendatakse punktini C nii, et $BC = 3AB$. Leida punkti C koordinaadid.

441. Rööpküliku kolm tippu on $A \equiv (-10 \mid 7)$, $B \equiv (5 \mid -13)$ ja $C \equiv (14 \mid 17)$. Leida rööpküliku neljas tipp D, teades, et see asetseb tipu B vastas.

442. Leida kolmnurga tipud, teades, et tema külgede keskpunktid on $(3 \mid -2)$, $(1 \mid 6)$ ja $(-4 \mid 2)$.

443. On antud ring keskpuntiga $(-4 \mid 2)$ ja raadiusega 5. Kui pikk on ringi kõõl, mille keskpunkt on $(-2 \mid 1)$?

444. Näidata, et kolmnurk tippudega $(0 \mid 0)$, $(3 \mid 1)$ ja $(1 \mid 7)$ on täisnurkne.

445. On antud kaks punkti $A \equiv (-3 \mid 1)$ ja $B \equiv (3 \mid -7)$. Leida ordinaatteljel niisugune punkt P, millest lõik AB paistab täisnurgas.

446. Missuguse nurga peab valguskiir tekitama x-teljega, et ta, tulles punktist $(5 \mid 2)$, peale peegeldumist x-teljel läbiks punkti $(-1 \mid 4)$?

447. Valguskiir on suunatud mööda sirget $y = \frac{2}{3}x - 4$. Anda sirge võrrand, mida mööda kiir peegeldub abstsissteljelt.

448. Näidata, et punktid $(-2 \mid -2)$, $(3 \mid 1)$, $(7 \mid 7)$ ja $(3 \mid 1)$ on trapetsi tippudeks. Leida trapetsi kesksirge võrrand.

449. Kolmnurga tipud on $A \equiv (2 \mid -2)$, $B \equiv (8 \mid 10)$ ja $C \equiv (-3 \mid 5)$. Leida sirge, mis läbib tipu C

1. rööbiti küljega AB;
2. risti küljega AB.

450. Aineosake liigub tungi mõjul mööda ringjoont, mille võrrand on $(x-5)^2+(y+3)^2=25$. Hetkel, mil osake on jõudnud punkti $(2 \mid 1)$, lakkab tung mõjumast. Anda joone võrrand, mida mööda toimub edaspidine tungivaba liikumine.

451. Kolmnurgal ABC on muutumatu alus AC pikkusega 24 cm. Tipp B liigub kolmnurga tasapinnas nii, et kolmnurga ümbermõõt on jäävalt 50 cm. Missuguse joone joonestab punkt B?

452. Ellips, mille fookused on $(\sqrt{3} \mid 0)$ ja $(-\sqrt{3} \mid 0)$, läbib punkti $(2 \mid 1)$. Anda ellipsi võrrand.

453. Maakera meridiaanil on ellipsi kuju, mille telgede suhe on $299:300$. Kui suur on selle ellipsi ekstsentrisus?

454. Kolmnurga kaks tippu on $A=(0 \mid 0)$ ja $B=(a \mid 0)$. Kolmas tipp P liigub tasapinnas APB nõnda, et külje AB lähisnurkade tangensite summa jääb konstantseks. Näidata, et tipp P joonestab parabooli, mis läbib tipud A ja B.

455. Arvutada suhe, milles sirge $y=3x+9$ jaotab punktide $A \equiv (0 \mid 48)$ ja $B \equiv (36 \mid 0)$ vahelise lõigu.

§ 43. Ülesandeid suuruste sõltuvuse kohta.

456. Inimese silmatera läbimõõt võib muutuda 2 millimeetrist 9 millimeetrini. Mitu korda ületab võrkkilele langev suurim valgushulk samades välistingimustes võrkkilele langeva väikseima valgushulga?

457. Masina mudeli kõrgus on 40 cm. Masin tahetakse valmistada mudeli sarnane, kõrgusega 2,4 m. Mitu korda tuleb masin mudelist raskem, kui mõlema vastavad osad on tehtud samast materjalist?

458. Liikuvale kehale avaldab õhk takistust, mis on võrdeline liikumise kiiruse ruuduga (kiirust õhu suhtes mõistes). Vaikse ilmaga ületab jalgrattur, kelle kiirus on 12 km/t, õhutakistust, mille suurus on 360 g. Kui suur õhutakistus tuleb ületada jalgratturil, kui ta vaikse ilmaga sõidab kiirusega 16 km/t? Kui suure õhutakistuse peab jalgrattur ületama, kui ta sõidab maapinna suhtes kiirusega 12 km/t vastu tuult, mille kiirus on 5 m/sek?

459. Veevarustuse magistraaltorus tehtud mõõtmised näitasid 372 m kaugusel rõhupaagist rõhku 2,4 atmosfääri ja 1476 m kaugusel rõhku 1,8 atmosfääri. Oletades, et rõhk muutub kaugusega lineaarselt, anda rõhu muutumist valitsev seadus.

460. Üle ploki O on pandud nöör, mille pikkus on l cm. Nööri otstel ripuvad koormised B ja C. Ühe koormise tõustes langeb teine. Olgu $OC = x$ cm, ja koormiste B ja C kõrgusvahe y cm. Avaldada arv y arvu x funktsioonina. Missugusse liiki kuulub xy-sõltuvus?

461. Kuidas sõltub hulknurga sisenurkade summa hulknurga külgede arvust? Kujutada see sõltuvus graafiliselt.

462. Kuidas sõltub korrapärase hulknurga küljele vastav kesknurk hulknurga külgede arvust? Kujutada see sõltuvus graafiliselt.

463. Avaldada kera ruumala V kera pindala S funktsioonina. Kasutades saadud seost, arvutada kera ruumala, kui kera pindala on 1 m².

464. Avaldada kuubi pindala S kuubi ruumala V funktsioonina. Kasutades saadud seost, leida kuubi pindala, kui kuubi ruumala on 660 cm³ ja kui kuubi ruumala on 50 l.

465. Püramiidi piirab neli võrdkülgset kolmnurka, mille külje pikkus on a. Avaldada funktsionaalne seos püramiidi ruumala V ja püramiidi täispindala S vahel.

466. Kuidas sõltub suurus z suurusest x, kui z on võrdeline suurusega y ja y sõltub suurusest x lineaarselt?

467. Kuubi pindala on 42 cm² ja ruumala 18,5 cm³. Kui suured on 3 korda pikema servaga kuubi pindala ja ruumala?

468. Kuidas suhtuvad ühe ja sellesama täispindalaga kuubi, ruudukujulise telglõikega silindri ja kera ruumalad?

469. Kera, mille raadius on 3 cm, kaalub 800 g. Kui palju kaalub samast ainest õõnes kera, mille välimine raadius on 6 cm ja sisemine raadius 5 cm?

470. Elusolendite lineaarmõõtmete k-kordsel kasvamisel suureneb nende ruumala ja ühes sellega ka nende kaal k^3 korda. Samal ajal suurenevad aga nende lihaste ristlõigete pindalad ja ühes sellega lihaste jõuavaldised k^2 korda. Mis järgneb siit looma hüppe suuruse kohta (kirp, konn, koer, elevant)?

471. Kuubi serv kasvab 2-, 3-, 4-, . . ., n-kordseks. Kuidas muutub sel puhul kuubi servade kogupikkus? kuubi täispindala? kuubi ruumala?

472. Kera läbimõõt kasvab 2-, 3-, 4-,..., n-kordseks. Kuidas muutub sel puhul kera ümbermõõt? kera pindala? kera ruumala?

473. Silindri läbimõõt ja kõrgus kasvavad 2-, 3-, 4-,..., n-kordseks. Kuidas muutub sel puhul silindri ümbermõõt? silindri külgpindala? silindri täispindala? silindri ruumala?

474. Kuubikujuline karp, mille serv seestpoolt mõõtes on 10 cm, on täidetud kuulidega, igas kihis ühepalju kuule. Kuulide läbimõõt on 2 cm.

Mitu kuuli mahub karpi?

Missuguse ruumala võtavad kuulid endi alla?

Kui suur on kuulidest vaba olev karbi osa? Mitu protsenti ta moodustab kogu karbi ruumalast?

Kuidas muutuks see protsendimäär kuulide läbimõõdu 2-, 3-, 4-,..., n-kordsel vähenemisel?

§ 44. Ülesandeid mitmeilt kursuse osadelt.

475. Arvutada avaldise

$$\left(\frac{b-c}{b^2+c^2}-\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{b+a}{b^2+a^2}+\frac{1}{c+b}\right)$$

numbriline väärtus, kui $a=2$, $b=-3$ ja $c=-7$.

476. Tõestada, et on kehtiv samasus:
$(a^2+b^2)(m^2+n^2)=(am+bn)^2+(an-bm)^2$.

477. Tõestada, et on kehtiv samasus:

$$(x+a)(x+b)(x+c)-(x-a)(x-b)(x-c)\equiv$$
$$\equiv 2abc+2x^2(a+b+c).$$

478. Tõestada, et on kehtiv samasus:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 \equiv$$
$$\equiv 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

479. Taandada murd:

$$\frac{x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}}{x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}}.$$

480. Taandada murd:

$$\frac{bx^2-(1+ab)x+a}{x^2-(a+b)x+ab}.$$

481. Lihtsustada avaldis:

$$2\sqrt{72}-\sqrt{50}-3\sqrt{18}.$$

482. Lihtsustada avaldis:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{108}-\sqrt{147}}{\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{3}}.$$

483. Lihtsustada avaldis:

$$\frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-2\sqrt{x}.$$

484. Lahendada võrrand:

$$(x-a)^2+(x-b)^2=2(x+a)(x+b).$$

485. Lahendada võrrand:

$$\frac{bx+a^2}{ax-b^2}-\frac{bx-a^2}{ax+b^2}=\frac{2a^2b^2(a+b)}{a^2x^2-b^4}.$$

486. Lahendada võrrandid:

1. $2x^2-2\sqrt{b}\,x+3=0$
2. $4x^2-2(\sqrt{5}+1)x+\sqrt{5}=0$
3. $x^2-2(\sqrt{3}+1)x+2(\sqrt{3}-2)=0$
4. $ax^2-(a^2+b)x+ab=0$
5. $b(x-a)^2-a(x-b)^2=b^3-a^3.$

487. Koostada ruutvõrrand, mille lahendid on

$$\frac{1}{a-b} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{a+b}.$$

488. Koostada ruutvõrrand, mille lahendid on

$$-a+2\sqrt{bc} \quad \text{ja} \quad -a-2\sqrt{bc}.$$

489. Avaldada suurus x võrdusest

$$u=\sqrt{\frac{1}{p+\frac{a}{x^2}}}$$

490. Olgu α ja β ruutvõrrandi $ax^2+2hx+c=0$ lahendid. Koostada avaldised

$$\alpha^2+\beta^2, \quad \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ja} \quad \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$$

ja anda nad lihtsaimal kujul.

491. Tõestada lause:
selleks, et ruutvõrrand $ax^2+2hx+c=0$ omaks kaht ühtelangevat lahendit, on tarvilik ja piisav, et arvud a, h ja c moodustaksid geomeetrilise jada.

492. Lahendada võrrandid:

1. $\sqrt{x-m}+\sqrt{x-n}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$
2. $(\sqrt{ax}+\sqrt{b})(\sqrt{ax}-\sqrt{b})=(a^2-1)b$
3. $a(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=b(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$
4. $2n=\sqrt{2nx}+\sqrt{bnx-4n^2}$
5. $\sqrt{a^2+bx}+\sqrt{a^2-bx}=\sqrt{2abx}$

493. Lahendada võrrand

$$5x^2-6x-8=1.$$

494. Lahendada võrrand

$$2+\log(x^2-0{,}004)=\log(x+2)+\log 2.$$

495. Anda funktsiooni

$$10^{2\log x}-10^{\frac{1}{2}\log x}$$

avaldis võimalikult lihtsal kujul.

496. Lahendada võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 29 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3^{x-1} \cdot 4^{y+1} = 2 \\ 5^{x+1} \cdot 2^{y-1} = 6 \end{cases}$

497. Avaldada lõpmatu rea

$$\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots$$

väärtus argumendi x funktsioonina.

498. Avaldada lõpmatu geomeetrilise rea

$$\tan^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \ldots$$

väärtus argumendi x funktsioonina.

499. Lahendada võrrand

$$\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \ldots = 2.$$

500. Leida järgmise jada n liikme summa:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{n}{x}\right), \quad \left(\frac{1}{a} - \frac{n-1}{x}\right), \quad \left(\frac{1}{a} - \frac{n-2}{x}\right), \ldots$$

501. Olgu $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Arvutada funktsiooni $f(n)$ väärtused vahemiku jaoks $1 \leqslant n \leqslant 10$.

502. Kera läbimõõdu puhul 1,7 on kera pindala 9,10 ja kera ruumala 2,57. Kui suur on kera pindala ja ruumala, kui läbimõõt on

$$2 \cdot 1{,}7 \quad 3 \cdot 1{,}7 \quad 4 \cdot 1{,}7 \quad 5 \cdot 1{,}7?$$

503. Tõestada täieliku induktsiooni tõestusviisil, et

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$
2. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
3. $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left\{\frac{1}{2} n(n + 1)\right\}^2$
5. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) =$

$$= \frac{1}{3} n(n + 1)(n + 2).$$

504. Arendada ja lihtsustada avaldis

$$(1+\sqrt{a})^6+(1-\sqrt{a})^6.$$

505. Kui suur on avaldise

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$$

arendise keskne liige?

506. Tõestada täieliku induktsiooni viisil, et

$$(-1)^n=-1, \text{ kui } n \text{ on paaritu arv}$$

ja

$$(-1)^n=+1, \text{ kui } n \text{ on paarisarv.}$$

507. Tõestada täieliku induktsiooni viisil, et

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+$$
$$+[a+(n-1)d]=na+\frac{1}{2}n(n-1)d.$$

508. Tõestada täieliku induktsiooni viisil, et

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

509. Tõestada täieliku induktsiooni viisil, et

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

510. Tõestada täieliku induktsiooni viisil, et n-nurga nurkade summa on $180^0\cdot(n-2)$.

SISUKORD.

Analüütiline geomeetria.

Lk.

Peatükk I. **Punkt**

§ 1. Sirgjoone punkti abstsiss 3
§ 2. Sirglõik 5
§ 3. Sirglõigu keskpunkti abstsiss 8
§ 4. Tasapinna punkti koordinaadid 9
§ 5. Sirglõigu keskpunkti koordinaadid 15
§ 6. Sirglõigu pikkus 17
§ 7. Joone võrrand 19

Peatükk II. **Sirgjoon**

§ 8. Sirgjoone tõus 32
§ 9. Sirgjoone määramine tasapinnal 36
§ 10. Sirgjoone võrrand 37
§ 11. Algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand 39
§ 12. Sirgjoone võrrandi koostamise ja kasutamise näiteid 41
§ 13. Lineaarse võrrandi geomeetriline vaste 47
§ 14. Kahe punktiga määratud sirgjoone võrrand 49
§ 15. Kahe sirgjoone rööpseisu ja ristseisu tunnused . . 54
§ 16. Kahe sirgjoone lõikepunkt 58
§ 17. Kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaatide avaldiste uurimine 61

Peatükk III. **Ringjoon**

§ 18. Ringjoone võrrand 70
§ 19. Ringjoone lõikumine sirgjoonega 75

Peatükk IV. **Ellips**

§ 20. Ellipsi joonestamine 79
§ 21. Ellipsi võrrand 80
§ 22. Ellipsi uurimine tema võrrandi põhjal 86
§ 23. Ellips ringjoone normaalprojektsioonina 88

Algebra.

Peatükk V. **Suuruste sõltuvus**

Lk.

§ 24. Jäävad ja muutuvad suurused 92
§ 25. Funktsioon ja argument 93
§ 26. Suuruste sõltuvuse väljendusvahendid 94
§ 27. Võrdeline sõltuvus 103
§ 28. Lineaarne sõltuvus 107
§ 29. Lineaarne interpolatsioon 117
§ 30. Pöördvõrdeline sõltuvus 123
§ 31. Hüperbool 125
§ 32. Ruutsõltuvus $y = ax^2$ 129
§ 33. Ruutparabool 132
§ 34. Üldine ruutsõltuvus 136
§ 35. Kuupsõltuvus $y = ax^3$ 144
§ 36. Kuup-parabool 147
§ 37. Ruutvõrrand-süsteemide graafiline lahendamine . . 151

Peatükk VI. **Ülesandeid kordamiseks**

§ 38. Arvutusülesandeid 157
§ 39. Ülesandeid avaldiste teisendamiseks 160
§ 40. Ülesandeid võrrandite lahendamiseks 163
§ 41. Ülesandeid jadadest ja ridadest 168
§ 42. Ülesandeid analüütilisest geomeetriast 170
§ 43. Ülesandeid suuruste sõltuvuse kohta 177
§ 44. Ülesandeid mitmeilt kursuse osadelt 180

Vastutav toimetaja prof. dr. A. Humal.

Ladumisele antud 16. VII 1946. Trükkimisele antud 15. X 1946. Trükiarv 3500 eks. Paber 56 × 79, $^{1}/_{16}$. Trükipoognaid 11,75. Trükitähti trükipoognas 33984. Arvutuspoognaid 9,8. MB 05110. Tellimise nr. 1114. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4.

На эстонском языке
Г. Ряго, Аналитическая геометрия и алгебра для XI класса.

Rbl. 7.—