O. PRINITS

FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS, TULETIS JA INTEGRAAL

KESKKOOLIS

O. PRINITS

FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS, TULETIS JA INTEGRAAL KESKKOOLIS

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS · TALLINN 1963

Kaanekujundus *E. Prikk*

SISSEJUHATUSEKS

Sotsialismilt kommunismile ülemineku kiirendamiseks seadsid NLKP Keskkomitee ja NSV Liidu Ministrite Nõukogu meie maa rahvaste ette grandioossed ülesanded. Need avaldati kommunistliku ülesehitustöö suures programmis — rahvamajanduse arendamise kontrollarvudes aastaiks 1959—1965. Püstitatud ülesannete täitmiseks hakati rahvamajanduse kõigis harudes tunduvalt suuremal määral kui seni kasutama teaduse ja tehnika saavutusi. On aga selge, et teaduse ja tehnika saavutuste rakendamine on tihedalt seotud vastava kaadri teadmiste ja oskustega. See ongi peamiseks põhjuseks, miks viimaseil aastail on hakatud üha enam tähelepanu osutama hariduskiisimustele.

Lähem iseloomustus kavandatavate uuenduste ja muudatuste kohta kehtivas haridussüsteemis avaldati NLKP Keskkomitee ja NSV Liidu Ministrite Nõukogu teesides «Kooli ja elu sidemete tugevdamisest ning rahvahariduse süsteemi edasiarendamisest meie maal». Neis teesides rõhutati muuhulgas vajadust tõsta meie koolides ka matemaatika õpetamise üldhariduslikku taset.

Selle eesmärgi saavutamiseks ongi vaja suurendada uue töö-keskkooli matemaatika programmis funktsionaalse sõltuvuse osatähtsust ja lülitada sinna kõrgema matemaatika elemendid.

Teatavasti hakkas matemaatika osatähtsus tema rakendusaladel kasvama XVII sajandil ja seda just tänu kõrgema matemaatika elementide kasutuselevõtmisele. Seda iseloomustas F. Engels järgmiste sõnadega: «Pöördepunktiks matemaatikas oli Descartes'i muutuv suurus. Tänu sellele tuli matemaatikasse liikumine ja dialektika ja tänu sellele osutus kiiresti vajalikuks diferentsiaal- ja integraalarvutus.»[1]

Viimastel aastatel on inimkond olnud uute suurte saavutuste tunnistajaks teaduse ja tehnika valdkonnas. Nõukogude teadlaste resultatiivsed tulemused kosmilise ruumi vallutamisel, kontinentidevaheliste rakettide konstrueerimisel ja aatomienergia rakendamisel näitavad, et Nõukogude teadus on asunud maailmas juhtivale positsioonile.

---

[1] Энгельс, Ф. Диалектика природы. Москва, 1952, lk. 206.

Kui matemaatika osutus juba möödunud sajandil tõhusaks vahendiks teiste teaduste arendamisel, siis kaasajal on tema osatähtsus, eriti tehnikateadustes, otsustavalt suurenenud.

Seistes tänapäeval uute suurte ülesannete ees meie rahvamajanduse arendamisel, on raske vaielda kõrgema matemaatika elementide kooli matemaatika programmi võtmise vastu. Me ei saa enam lugeda haritud inimesteks neid, kes ei tunne tehnika saavutuste matemaatilisi aluseid: funktsiooni, tuletise ja integraali mõisteid. Diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmed avardaksid keskkooli lõpetajate silmaringi ning annaksid neile kätte lähtepunktid, millele tuginedes asus tehnika oma tormilisele võidukäigule. Seetõttu on ka loomulik, et meie tulevases töö-keskkoolis polütehnilise hariduse omandanud noor ei vaataks integraali märgile kui mingile müstilisele sümbolile.

Vastuväitena diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmete käsitlemisele keskkoolis esitatakse eelkõige arvamus, et kõrgema matemaatika elemendid on vajalikud ainult neile, kes lähevad edasi õppima kõrgemate koolide nendesse teaduskondadesse, kus õpetatakse matemaatikat. See arvamus on kahtlemata väär. Matemaatilise analüüsi algmeid neile, kellel kõrgemas õppeasutuses tuleb kuulata ulatuslik kursus kõrgemast matemaatikast või selle üksikdistsipliinidest, poleks keskkoolis vaja õpetada. Kahtlemata kergendab muidugi sellealane ettevalmistus keskkoolis vastavate distsipliinide kuulamist kõrgemates õppeasutustes. Vajadus nimetatud teadmiste järele on aga siiski hoopis teisel poolel. Paljud spetsialistid, kes oma ettevalmistuskäigus pole kokku puutunud kõrgema matemaatika küsimustega, on raskustes oma eriala raamatute lugemisel niipea, kui seal on rakendatud matemaatikat. Mõnedes teaduskondades ollakse sunnitud kavva võtma üksikuid lõikeid kõrgemast matemaatikast, et üliõpilastele saaksid tuttavaks tuletise ja integraali mõisted, sest viimaseid vajatakse eriainete kursuste lugemisel. Eriti laialdast rakendamist leiab matemaatika teatavasti füüsikas ja keemias. Praegu ollakse aga kõrgemates õppeasutustes sunnitud nende ainete õpetamisel mõnedele teaduskondadele (näit. arstiteaduskonnale) otsima «kõveraid teid», et vältida matemaatilist aparaati, sest kuulajail puudub sellekohane ettevalmistus. Seega, kõrgematesse koolidesse siirdujaist on kõrgema matemaatika elemente vaja tunda eelkõige neil, kes ei vali oma erialaks matemaatikat, füüsikat, keemiat või tehnilisi teadusi.

Kõrgema matemaatika elementide keskkoolis käsitlemise idee ei ole uus. Pea kõigis maades tõstatati viimasel sajandivahetusel nõue matemaatika õpetamise ümberkorraldamiseks, selleks et muuta matemaatika õpetamine elulähedasemaks. Sealjuures peeti vajalikuks ka funktsionaalse sõltuvuse, diferentsiaal- ja integraalarvutuse, analüütilise geomeetria jt. küsimuste lülitamist kooli matemaatika programmi.

Selle eesmärgi saavutamiseks oli vaja kogu matemaatika harjutusmaterjali ümberkorraldamine ainult formaalset eesmärki taotleva materjali vähendamise ja enam rakenduslikku väärtust omava ainega asendamise teel ning kooli matemaatika lähendamine matemaatikateaduse viimase 400 aasta saavutustele. Seoses nende taotlustega ongi liikumise eesotsas seisnud teadlaste ja koolimeeste püüdeks olnud jõuda selleni, et funktsionaalse sõltuvuse mõiste saaks kogu koolimatemaatika lülisambaks ning et tuletise ja integraali mõiste leiaksid käsitlemist juba keskkoolis.

Nagu juba eespool nimetatud, tõusis kõrgema matemaatika elementide koolis käsitlemise probleem paljudes maades aktuaalselt päevakorrale XIX ja XX sajandi vahetusel.

Inglismaal oli tol perioodil aktuaalselt päevakorral geomeetria õpetamise küsimus. Astuti välja Eukleidese «Elementide» järgi teostatava geomeetria õpetamise vastu loosungi all «Meil pole nii palju aega kui Eukleidesel». Selle loosungi püstitas professor J. Perry, kes osutus tol ajal üheks agaramaks reformide eest võitlejaks koolimatemaatikas. Olles mehhaanika professor, püstitas ta eelkõige nõude suurendada koolis praktiliste rakenduste ja näitlikkuse osatähtsust. Erilised teened on tal matemaatika õpetamise alal laiadele rahvahulkadele. Oma vastavad loengud andis ta välja raamatuna «Practical Mathematics Lessons Delivered to Working Men», mis levis laialt Inglismaal ja tõlgiti paljudesse keeltesse.

J. Perry pooldas väga kõrgema matemaatika elementide õpetamist keskkoolis. Ta koostas isegi programmi, kus neile küsimustele oli omistatud suur osatähtsus. Perry arvates peaks funktsioonidest tulema koolis käsitlemisele astmefunktsioon, eksponentfunktsioon, logaritmfunktsioon ja trigonomeetrilised funktsioonid. Tuletise leidmist pidas ta vajalikuks järgmistele funktsioonidele:

$$y = ax^n, \quad y = ae^{bx}, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x,$$
$$y = a\sin(bx + c) \text{ ja } y = A\log(x + a).$$

Integreerimismeetodeist soovitas ta kasutada *ositi integreerimise* ja *muutuja vahetuse võtet*. Sealjuures nõudis Perry, et keskhariduse omandanud noor peab tundma järgmisi integraale:

$$\int ax^n dx, \quad \int ae^{bx}dx, \quad \int \frac{A}{x+a}\, dx,$$

$$\int \sin(ax + b)\,dx \text{ ja } \int A\cos(ax + b)\,dx.$$

Märkida tuleks ka Perry soovitust võtta *Simpsoni valem* kasutusele enne integraali mõiste käsitlemist. Perry programmi kohaselt tuli keskkoolis *lahendada ka lihtsamaid diferentsiaalvõrrandeid.*

Tähelepanuväärne on siinjuures asjaolu, et kogu selle programmi läbivõtmine hõlmas õpilasi ainult 15.—16. eluaastani. J. Perry pidas seda võimalikuks, tuginedes graafilisele lähtekohale ja intuitsioonile rajatud aine käsitlusele.

Suurimaks puuduseks Perry seisukohtades loetigi mitteküllaldast rangust aine käsitluses. Perry oli ise selles täiesti teadlik. Ta oli veendunud, et tema programm ei rahulda neid, kellel on eeldusi abstraktseks mõtlemiseks. Oma seisukohta õigustas Perry väitega, et õpetamisel tuleb arvestada õpilaste enamikku — enamikul aga puudub kalduvus abstraktseks mõtlemiseks.

Et võita aega kõrgema matemaatika küsimuste käsitlemiseks, selleks soovitas Perry rajada geomeetria mitte ainult minimaalselt vajalikule, vaid küllalt laialdasele postulaatide kogule. Et säilitada õpilaste tähelepanu ja huvi õpetatava uue aine vastu, selleks nõudis Perry ikka ja jälle tundmaõpitud küsimuste rakendamist mõõtmiste matemaatilistes probleemides, mehhaanikas ja füüsikas.

Perry taotlused leidsid paljudes maades poolehoidu. Eriti hoogsalt levisid tema ideed ja leidsid rakendamist Ameerika Ühendriikides.

Ameerika Ühendriikides juhtis matemaatika õpetamise reformimisliikumist Ameerika Matemaatikute Ühing. Kuni 1902. a. kuulusid sinna ainult ülikoolide professorid. Kui aga ühingu president professor E. H. Moore tõstis oma kõnes 29. dets. 1902. a. üles keskkooli matemaatika õpetamise reformimise küsimuse, siis hakati ühingu liikmeiks vastu võtma ka keskkoolide matemaatika õpetajaid.

Et läbi viia reformi matemaatika õpetamisel keskkoolis, selleks pidas E. H. Moore eelkõige vajalikuks muuta Ameerika iganenud koolikorraldust. Reformimist vajas kõigepealt traditsioon, mille alusel matemaatilisi distsipliine õpetati üksteise järel: kõigepealt algebra, siis planimeetria, seejärel füüsika, edasi stereomeetria ja lõpuks algebra raskemad peatükid. Trigonomeetria õpetamine jäeti täielikult ülikoolide hooleks. E. H. Moore nägi selle traditsiooni põhilist puudust selles, et õpilastel ei teki mingit ettekujutust nii tähtsatest üksikute distsipliinide vahelistest seostest. Ta ütles: «Kas ei saa rasket küsimust tihedama seose loomisest puhta matemaatika ja tema rakenduste vahel lahendada kaudsel teel, ja nimelt nii, et kogu koolikursuse ulatuses, kaasa arvatud ka lõpmatult kahanevate suuruste analüüs, ei tehtaks õpetamisel vahet puht matemaatika eriharude vahel ja puht matemaatika ning tema põhiliste rakenduste vahel.»[1]

E. H. Moore rõhutas nagu J. Perry'gi *laboratoorse meetodi* rakendamise vajadust matemaatika õpetamisel. J. Perry'ga oli E. H. Moore samal arvamusel ka aine käsitlemise ulatuse suhtes. Ta pooldas nii trigonomeetria, analüütilise geomeetria kui ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmete käsitlemist keskkoolis. Oma eespool nimetatud kõne lõpul ütles Moore: «Kas tõesti XX sajandil meie ei ole võimelised noorusele tema kõige vastuvõtlikumates aastates täiesti konkreetsel ja kaasakiskuval kujul tutvustama XVII sajandi imeilusaid mõisteid?»

Pärast prof. Moore'i ettekannet valiti erikomisjon, kelle ülesandeks jäi välja töötada programm kolledžitesse sisseastujate eksamineerimiseks. Selle komisjoni poolt väljatöötatud eksaminõuetes ei nähtud aga siiski veel ette tuletise ja integraali mõiste tundmist. Küll omistati tähelepanu graafilistele meetoditele, ja seda just seoses võrrandite lahendamisega. Võrdlemisi ulatuslikult nõuti aga algebra tundmist. Nii pidid kolledžisse astujad oskama kasutada kuni neljandat järku determinante, alamdeterminante ja Horneri skeemi.

Seega püstitati käesoleva sajandi algul ka Ameerikas küsimus kõrgema matemaatika elementide õpetamise vajaduse kohta keskkoolis, kuid koolide programmidesse ei suudetud seal vastavaid palasid lülitada.

Diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmete keskkooli matemaatika kavva võtmise küsimus tõsteti **Prantsusmaal** üles juba umbes 60 aasta eest. Nimelt moodustati 1898. a. Prantsuse parlamendis 33-liikmeline erikomisjon keskhariduse ümberkorraldamisega seotud küsimuste uurimiseks. Järgmisel aastal avaldati selle komisjoni materjalid trükis. Need olid omakorda aluseks 1902. a. kehtestatud uutele programmidele, mis tõid radikaalse muudatuse Prantsusmaa kooliellu. Neis kavades anti reaalainetele, eeskätt matemaatikale ja füüsikale senisest suurem osatähtsus. See asjaolu peegeldus matemaatika õppekavas eelkõige järgmiste muudatuste kehtestamises:

a) võeti kavva lihtsamate funktsioonide uurimine, tuletise mõiste, selle lihtsamad rakendused ja integraalarvutuse idee,

b) geomeetria käsitlemine rajati geomeetriliste teisenduste printsiibile (lüke, pööre, sarnasusteisendus, peegeldusteisendus),

c) suurendati rakenduste osatähtsust matemaatika kursuses, jättes välja materjali, millel pole otseselt praktilisi rakendusi.

Nende uuenduste eest võitlejaks oli tollal veel noor, kuid juba nimekas teadlane professor É. B o r e l. Matemaatika õpetamise

[1] M o o r e, E. H. On the Foundations of Mathematics. Presidental address delivered before the American Mathematical Society at its ninth annual meeting. December 29, 1902. "Bulletin of the American Mathematical Society", nr. 5, 1903, lk. 424.

reformimise vajaduse põhjendamisel lähtus ta eelkõige XVII saj. suurte matemaatikute saavutustest ja viimastel rajanevaist edusammudest täppisteaduste ja tehnika valdkonnas. Nii ütles Borel ühes oma kõnes: «Ükski tänapäeva tsivilisatsiooni element ei saa eksisteerida ilma mehhaanika printsiipideta, ilma analüütilise geomeetria ja diferentsiaalarvutuseta. Pole ühtki tegevusala, kus ei rakenduks geeniuste Galilei, Descartes'i, Newtoni ja Leibnizi tugev mõju. Ma siiski eksisin siin. Midagi on ometi roninud välja selle mõju alt ja on jäänud muutuseta — see on matemaatika õpetamise süsteem koolis.»[1]

Oma juhtmõtete põhjendamisel Borel pidas analüütilise geomeetria ja diferentsiaalarvutuse algmete õpetamist ja omandamist lihtsamaks kui näiteks geomeetrias toodavaid arutlusi pöördkehade ruumaladest või algebras esitatavast teise astme võrrandi uurimisest, lihtsamaks isegi kui tehteid raskepärasemate murdavaldistega.

Ühtaegu oma nõuete esitamisega juhtis Borel tähelepanu võimalustele kehtivate õppekavade lühendamiseks. Nendest ettepanekutest on tähelepanuväärsemad: esiteks harilike murdude üksikasjalisest käsitlemisest loobumine, kuna praktikas mõõtmisel ja arvutamisel töötatakse eranditult kümnendsüsteemis ja seega *on põhiliselt vajalikud ainult kümnendmurrud,* ja teiseks nende ülesannete õigel kohal käsitlemine, milliseid enne lahendatakse keerukaid teid kasutades, hiljem õpetatavate võtete abil aga hoopis lihtsamalt.

É. Borel rõhutas ka *ajaloolise elemendi sisselülitamise vajadust kooli matemaatikasse.* Kõige kategoorilisemalt nõudis ta kõrgema matemaatika loojate töö tutvustamist õppetundides. Ta võrdles matemaatika õpetajat, kes jätab klassile tutvustamata Leibnizi, Newtoni, Descartes'i ja Galilei nimed, ajaloo õpetajaga, kes oma tundides jätab käsitlemata Prantsuse kodanliku revolutsiooni.

É. Borel polnud ainult uute mõtete kandjaks, ta seisis esirinnas ka nende juurutamisel tegelikkusesse: tema poolt uues vaimus kirjutatud matemaatika õpikute järgi õppis prantsuse noorsugu ainet mitmed aastakümned.

1904. a. organiseeris Pariisi Pedagoogika Muuseumi direktor Ch. Langlois koosolekute seeria 1902. a. kehtestatud programmide rakendamisel saadud kogemuste läbiarutamiseks. Peaaegu kõik sõnavõtjad rõhutasid oma ettekannetes vajadust esitada juba koolis juurdunud kõrgema matemaatika küsimusi, tugínedes enam katsele. Rõhutati, et õpilastele ei tule esitada mitte valmis teadust, vaid teaduse saavutuste kujunemise protsessi. H. Poincaré, kes juba II ülemaailmsel matemaatikute kongres-

---

[1] Борель, Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки. «Математическое просвещение», пг. 3, 1958, lk. 96.

sil 1900. a. Pariisis tõstis esile intuitsiooni osa matemaatika kui teaduse arenemisel, rõhutas nüüd eriti *intuitsiooni rakendamise vajadust matemaatika õpetamisel keskkoolis.* Ta nimetas intuitsiooni selleks lüliks, mis ühendab matemaatilised sümbolid tegeliku eluga ja annab neile täiusliku sisu, mida ei suuda anda aga kunagi puhas loogika. Ta võrdles puhtabstraktselt teostatavat matemaatika õpetamist elevandi tundmaõppimisega mikroskoobi abil. H. Poincaré rõhutas oma ettekandes veel vajadust valmistada ette tuletise definitsioon puutuja ja kiiruse mõiste abil. Seda ettepanekut toetas omalt poolt veel prof. J. Hadamard, kes rõhutas, et ei saa tutvustada uut küsimust, kui õpilastel pole selge, miks seda vaja on.

XVII sajandi matemaatikute suursaavutused hakkasid üksikuisse koolidesse **Venemaal**, nagu mujalgi, tungima vähehaaval alles XIX sajandil. 1813. a. kinnitati koolide põhiliseks käsiraamatuks N. Fussi õpik: «Начальные основания чистой математики», mis sisaldas peale koordinaatide mõiste ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse elemente. Väärib märkimist, et juba 1838. aastal vene matemaatika professor I. I. Somov formuleeris oma raamatus «Теория определенных алгебраических уравнений» matemaatika õpetamise eesmärgi kujul: *uurida funktsioonide omadusi ja avastada funktsionaalset sõltuvust looduses.*

Funktsiooni mõiste võtmist kooli õppekavva toetasid ka möödunud sajandi suurimad vene matemaatikud P. L. Tšebõšev ja M. V. Ostrogradski.

Graafiliste meetodite rakendamist pidas vajalikuks V. N. Škljarevitš, kes juba 1864. a. kirjutas: «Algebra kursusesse tuleb tuua peatükk kahe tundmatuga võrranditest, kus tuleb erilist tähelepanu osutada nende võrrandite uurimisele, näidata nende graafilist konstrueerimist ja selgitada seost, mis valitseb võrrandi kuju ja temale vastava kõvera kuju vahel.»[1]

Kuigi möödunud sajandi 70. ja 80. aastad olid tsaari-Venemaal kõigil elualadel reaktsiooniaastateks, leidus selgi perioodil mõtteavaldusi matemaatika õpetamise ajakohastamise vajaduse kohta. Nii näiteks esines 1872. aastal Tartu Ülikoolis füüsika professor A. v. Oettingen piduliku aastapäevakõnega teemal «Matemaatika õpetamisest koolis». Juba kõne algul ta väitis, et kuigi eesrindlikud õpetajad püüavad õpetamise meetodeid ikka ja jälle parandada, on aine ise jäänud muutmata. Et matemaatika on õpilasile liiga kuiv, selles süüdistas ta vähest tundide arvu, mis moodustas ühe kaheksandiku (praegu ca üks kuuendik) õppeajast. Sellest ajast oleks piisanud Oettingeni väljendi järgi näiteks filoloogidel ainult grammatika käsitlemiseks ja siis oleks see aine sama igav. Seega pidas ta tundide arvu suurendamist hädasti vajalikuks. Puudutades küsimust matemaatika õpetamis-

[1] Шклярeвич, Н. В. Некоторые соображения о методе преподавания начальной математики. «Педагогический сборник», 1865, lk. 402—403.

meetodite ja aine valiku uuendamisest, püstitas ta järgmised nõuded:

«Tuua kooli kavva:

1) muutuvate suuruste vaheline sõltuvus ehk lühidalt funktsiooni mõiste,

2) tihedalt siia juurde kuuluvad analüütilise geomeetria ja diferentsiaalarvutuse elemendid, ja

3) kõikides klassides õpetada propedeutilist füüsikat.»[1]

1890. a. teostati Venemaal koolireform. Matemaatika õpetamisse ei toonud see erilisi muudatusi. Osalt sellest tingituna hakkasidki 90. aastatel sagenema hääled veel ikkagi teostamist vajavate uuenduste kasuks. Nii esitati ajakirjas «Русская школа» 1890. aastal matemaatika õpetamise kohta küsimus: kas ei osutu võimalikuks tunduvalt lühendada keskkoolis pakutava matemaatika kursuse välist mahtu ja kas ei nõua hariduse tegelikud eesmärgid mõningate nn. kõrgema matemaatika mõistete toomist keskkooli kavva ja kui, siis missuguses ulatuses? Agaramateks võitlejateks nende küsimuste positiivse lahendamise eest olid S. I. Šohhor-Trotski ja V. P. Šeremetjevski. Neist autoreist tuleb eriti esile tõsta viimast, kes 1895. a. ajakirjas «Русская мысль» avaldatud kirjutises tõstis esile XVII saj. matemaatikute suursaavutusi ja näitas XIX saj. lõpul kehtinud koolimatemaatika programmide ja aine käsitlusmeetodite mahajäävust. Ta kirjutas: «XIX sajandi lõpu noori inimesi, kes valmistavad vastu võtma ametlikku tunnistust mõistuse küpsuse kohta, hoitakse kunstlikult keskaegse matemaatilise mõtlemise tasemel; neid peetakse mittevõimelisteks omandama kasvõi elementegi matemaatikast kui uue aja teadusest.»[2] Ja veidi hiljem: «Kui kogu matemaatika on oma olemuselt õpetus funktsioonidest, siis on selge, et ka elementaarne kursus peab grupeeruma funktsionaalse sõltuvuse põhimõiste ümber. Mida varem ta kutsutakse esile õpilaste teadvuses, seda parem.»[3]

1899. a. kutsus Haridusministeerium üles korraldama õpperingkondades koosolekuid keskkooli reformimise küsimuse arutamiseks. Järgmisel aastal moodustati sajast inimesest koosnev komisjon vajalikkude ettepanekute ettevalmistamiseks. Nimetatud komisjonist tegelesid kaksteist liiget matemaatika õpetamise küsimustega. Viimased arutasid muuhulgas ka kõrgema matemaatika elementide kooli kavva võtmise küsimust. N. Parfjentjev, üks innustunumaid selle seisukoha eest võitlejaid, põhjendas oma arvamust järgmiselt: «See tutvumine on hädasti vajalik mitte nii-

---

[1] Oettingen, A. Ueber den mathematischen Unterricht in der Schule. Festrede zur Jahresfeier der Stiftung der Universität Dorpat am 12. December 1872. Dorpat, 1873, lk. 13.

[2] Шереметевский, В. П. Математика как наука и ее школьные суррогаты. «Русская мысль» № 5, 1895, lk. 36.

[3] Sealsamas, lk. 118.

võrd tulevastele matemaatikutele ja inseneridele, kes ka ilma keskkoolita õpivad seda kõike tundma, kui just naturalistidele, arstiteadlastele ja sotsioloogidele. Kõik nad kasutavad oma uurimustes mõisteid mõõt ja arv, kõik nad koostavad kaarte ja diagramme; järelikult võimaluse kõike seda mõista peab andma keskkool.»[1]

Matemaatika õpetamise reformimise alal saavutati esimesed tulemused 1906. aastal, kui reaalkoolide täiendusklasside õppekavadesse lülitati funktsiooni, pidevuse, tuletise, diferentsiaali ja integraali mõiste ühes nende lihtsamate rakendustega. 1908. a. võeti need küsimused juba reaalkoolide ametlikku programmi. See tähendas aga matemaatika õpetamise reformimise eest võitlejate suurt võitu.

Seejärel, kui 1906. a. otsustati lülitada diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmed reaalkoolide täiendusklasside õppekavva, asuti uute matemaatika programmide väljatöötamisele kooli kõigi tüüpide jaoks. Viimastest on tähelepanuväärsemad Kiievi Füüsika ja Matemaatika Seltsi ja Varssavi Füüsika ja Matemaatika Õpetajate Ringi poolt koostatud poeglaste gümnaasiumide matemaatika programmid. Neis programmides oli tugevasti rõhutatud funktsionaalse sõltuvuse osatähtsust. Oma ülesehituse poolest olid need programmid väga lähedased Merani plaani[2] seisukohtadele.

Järjest enam jõuti veendumusele, et kõrgema matemaatika küsimuste käsitlemist lõpuklassis tuleb tõhusalt ette valmistada nooremais klassides. Selle idee tolleaegsete propageerijate hulgas oli ka üks meie praegusaja juhtivaid matemaatikuid — akadeemik S. N. Bernstein.

Märkimisväärset osa matemaatika õpetamise reformimise eest võitlemisel Venemaal etendasid Peterburi Sõjaliste Õppeasutuste Pedagoogilise Muuseumi Matemaatika Osakond (asut. 1885. a.) ja Moskva Tehniliste Teaduste Levitamise Ühingu Õppeosakonna Matemaatika Õpetamise Komisjon (asut. 1890. a.). Nende matemaatikute koondiste teeneks on ka ülevenemaaliste matemaatika õpetajate kongresside organiseerimine. Neist esimene toimus 1911. ja 1912. aasta vahetusel Peterburis ja teine 1913. ja 1914. aasta vahetusel Moskvas.

Esimeselt kongressilt väärib siinkohal eriti märkimist M. G. Popruženko ettekanne teemal «Tõkestamatult kahanevate suuruste analüüsist keskkoolis», kus ta rõhutas, et tõkestamatult kahanevate suuruste teooria käsitlemine keskkoolis annab ainult siis efektiivseid

---

[1] Парфентьев, Н. Программа по математике в средней школе будущего. «Русская школа», № 2, 1902, lk. 229.

[2] Vaata lk. 13.

tulemusi, kui see esitatakse kõigile arusaadavalt, küllalt lühidalt ja orgaanilises seoses keskkooli matemaatika kursusega. Ta luges tol ajal soovitatud uuendustest kõige tähtsamaks *matemaatilise analüüsi algmete keskkooli kavva võtmist,* nimetades seda *tõeliseks XX sajandi kultuuri võiduks.* Sealjuures püstitas Popruženko aga nõude, et kui koolides teostatakse harunemine, siis peavad matemaatilise analüüsi algmed kuuluma kõigi koolitüüpide matemaatika programmi.

Integraali mõiste tutvustamist ei lubanud Popruženko mingil juhul siduda integreerimistehnika õpetamisega. Ta pidas võimalikuks kursuse niisugust ülesehitamist, kus *ei kõnelda ei diferentsiaalidest ega integraalidest, vaid ainult algfunktsioonidest.*

Esimese kongressi ettekannetest väärivad siinkohal esiletõstmist veel F. V. Filippovitši ettekanne teemal «Analüüsi algmete õpetamisest keskkoolis» ja A. G. Pitšugini ettekanne teemal «Kooli matemaatika kursuse sisu». Esimene neist rõhutas vajadust *kontsentreerida kogu keskkooli matemaatika kursus funktsionaalse sõltuvuse idee ümber* ja rõhutas sealjuures, et *see idee peaks läbima juba nooremate klasside aritmeetika, geomeetria ja algebra kursust.* A. G. Pitšugin näitas aga, et keskkooli matemaatika programmis leidub küllaldaselt küsimusi, mis ei arenda õpilasi ja mis seetõttu tuleksid kavast välja jätta. Ta nimetab niisugustena näiteks ahelmurde, ühendeid, Newtoni binoomi ja aritmeetika täiendavaid peatükke. Nende küsimuste väljajätmine pidi aga võimaldama diferentsiaal- ja integraalarvutuse elementide ning analüütilise geomeetria kavva lülitamist.

Teisel kongressil Moskvas peetud ettekandeist väärivad siinkohal tähelepanu A. K. Vlassovi ettekanne «Missugused elementaarmatemaatika küljed on väärtuslikud üldhariduse seisukohalt», D. M. Sintsovi ettekanne «Analüütilise geomeetria õpetamisest keskkoolis», M. G. Popruženko ettekanne «Analüüsi kursusest keskkoolis» ja S. N. Bernsteini ettekanne «Funktsiooni mõiste keskkoolis». Kõigis nimetatud ettekandeis osutati võimalusele õpetada kõrgema matemaatika elemente keskkoolis.

Esimese maailmasõja puhkemise tõttu jäi ära kavatsetud kolmas matemaatika õpetajate kongress, kus olid planeeritud läbi arutada kõrgema matemaatika elementide õpetamise tulemusi koolis ja võrrelda neid teistel maadel saadud kogemustega.

Innustava tõuke matemaatika õpetamise reformimisliikumisele **Saksamaal** andis 1900. a. ilmunud F. Kleini ja E. Riecke raamat «Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterricht an den höheren Schulen», kus formuleeriti selgelt uuendusliikumise ees seisvad olulised probleemid ja tehti ettepanekud nende lahendamiseks.

Reformimise teostamisele aitas suurel määral kaasa Saksa

Loodusuurijate ja Arstide Selts, lülitades oma töökavasse muuhulgas ka kooliuuenduse küsimused. Selleks andsid esimese tõuke 1901. a. Hamburgis toimunud Loodusuurijate ja Arstide Seltsi päeval püstitatud nn. «Hamburgi teesid», milles nõuti bioloogia taastamist keskkooli õppeainena. Viimane oli keskkooli õppeainete nimestikust kustutatud pärast seda, kui 1879. a. oli ühes koolis Darwini õpetust esitatud konservatiivsele avalikkusele vastuvõtmatul kujul. 1903. a. Kasselis toimunud seltsi päeval kaasusid bioloogide nõudeile, ka matemaatikute ja füüsikute omapoolsed pretensioonid. Seal tehti F. Kleinile ülesandeks koostada ülevaade füüsika ja matemaatika õpetamise olukorrast Saksa koolides. Kleini vastav ettekanne kuulati ära 1904. a. Loodusuurijate ja Arstide Seltsi päeval Breslaus. F. Klein, nähes Prantsusmaal juba teoks saanud koolireformi, pooldas tuliselt vastavate uuenduste läbiviimist ka Saksamaal. Oma ettekandes nõudis ta *funktsiooni mõiste asetamist kesksele kohale matemaatika õpetamises* ning *diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmete käsitlemist kooli lõpuklassides.*

«Minu eesmärk on, otsekoheselt öeldes, et siin esitatud vaatekohad 9. õppeaastast (Untersekunda) alates kogu matemaatika õpetamisele otsustavalt õige metoodilise arengu annaksid, et funktsiooni geomeetriline käsitlus ülejäänud ainet fermendina läbiks. Siinjuures on loomulikult arvestatud, et analüütiline geomeetria ja teiselt poolt ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmed on iseenesest kaasa arvatud.»[1]

Et püstitatud küsimustele lõplikku lahendust saada, moodustati Breslau koosolekul Saksa Loodusuurijate ja Arstide Seltsi juures Matemaatika Õpetamise Komisjon eesotsas Halle ülikooli professori A. Gutzmeriga. Sellele komisjonile tehti ülesandeks lõplikult vormistada ettepanekud matemaatika õpetamise reformimise läbiviimiseks. 1905. a. Meranis ja aasta hiljem Stuttgardis esitas komisjon oma ajaloolise tähtsusega ettepanekud, mis on tänapäevani tuntud «Merani plaani» nime all. Selles plaanis nõuti õppekava kõigi formaalsete ja praktiliselt väärtusetute palade kustutamist ja pandi ette need asendada loodust ja inimelu haaravate matemaatika küsimustega. Endise formaalse eesmärgi asemele seati matemaatika õpetamise peaeesmärgiks *funktsionaalse mõtlemise ja ruumilise kujutluse arendamine.* Metoodilisest küljest nõudis Merani plaan arvutuste ja konstruktsioonide käsitlemist kõige tihedamas seoses ja näitliku joonise kõige laialdasemat kasutamist õppevahendina. See komisjon töötas välja ka matemaatika näidisprogrammi humanitaargümnaasiumidele. Selle järgi töötamine pidi kindlustama:

---

[1] Klein, F. und Riecke, E. Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterricht an den höheren Schulen. Leipzig und Berlin, 1904, lk. 4.

«a) et õpilased saaksid teaduslikul tasemel seisva ülevaate neile õpetatavast matemaatikast;

b) et nad hästi orienteeruksid selle probleemides;

c) et nad oskaksid lahendada tegelikkusest pärinevaid matemaatilise sisuga ülesandeid ja

d) et nad mõistaksid matemaatika osa praegusaja loodusteaduses ja kohta, mida ta omab tänapäeva kultuuris üldse.»[1]

Diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmed olid selles programmis asetatud sulgudesse, sest siia kuuluvate palade käsitlemise vajaduse küsimuses ei saavutanud komisjon ühtset seisukohta. Kui aga 1909. a. Loodusuurijate ja Arstide Seltsi järjekordsel kokkutulekul Freiburgis tehti kokkuvõtteid «Merani plaani» praktikasse rakendamise kogemuste kohta, siis pääsesid lõplikult võidule matemaatilise analüüsi algmete keskkooli matemaatika programmi võtmise idee pooldajad ja see programmi punkt esines siitpeale sulgudest vabana.

1904.—1907. a. tegutsenud Matemaatika Õpetamise Komisjoni tegevus ja eriti tema «Merani plaan» olid innustavaks eeskujuks laialdasele matemaatika õpetamise metoodika küsimuste arutamisele rahvusvahelises ulatuses.

Ülemaailmne tihedam suhtlemine matemaatikute vahel algas 1897. a. Zürichis organiseeritud I Ülemaailmse Matemaatikute Kongressiga. Nii sellel esimesel kongressil kui ka järgnevail, mis toimusid 1900. a. Pariisis ja 1904. a. Heidelbergis, arutati ka matemaatika õpetamisega seoses olevaid küsimusi. 1908. a. moodustati IV Ülemaailmsel Matemaatikute Kongressil Roomas Rahvusvaheline Matemaatika Õpetamise Komisjon, kellele tehti ülesandeks uurida matemaatika õpetamise olukorda rahvusvahelises ulatuses ja selgitada üksikutes maades toimuvate reformimisliikumiste eesmärke ja saavutusi. Selle komisjoni esimeheks kutsuti eespool mainitud kuulus saksa matemaatik professor F. Klein ning liikmeteks inglane professor G. Greenhill ja šveitslane professor H. Fehr. See komisjon koostas oma tegevuskava ja kutsus iga riigi matemaatikuid üles moodustama RMÕK-i rahvuslikku alamkomisjoni. See üleskutse leidis kõikjal elavat vastukaja.

Üheks probleemiks, mida asuti uurima, oli diferentsiaal- ja integraalarvutuse käsitlemine keskkoolis. Küsimus oli päevakorra peapunktina arutusel 1910. a. Brüsselis ja 1914. a. Pariisis toimunud RMÕK koosolekuil. Juba Brüsselis selgus, et diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmed on leidnud tee keskkooli mitmetes maades. Samas sõna võtnud professor F. Klein juhtis järjekordselt tähelepanu kõrgema matemaatika elementide kooli kavva võtmise otstarbekusele ja vajalikkusele. Ta ütles: «Mate-

[1] Klein und Schimmak. Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen, Teil I. Leipzig, 1907, lk. 210.

maatika ei ole midagi lõpetatut, nagu iga teinegi teadus. Ta areneb nii puhtteaduslikust küljest kui ka oma rakenduste poolest. Kuid selle teaduse arengutasemele ei vasta hoopiski tema õpetamise arengutase; tänini on keskkooli kursus peaaegu sama, mis keskajalgi. Kuid siis oli see (koolis õpetatav matemaatika) teaduse viimane sõna, nüüd aga on see programm 400 aasta võrra ajast maha jäänud ja me peame püüdma uuesti kooskõlastada need *membra disjecta* (lahku sattunud lülid).»[1]

Järgnenud sõnavõttudest selgus, et tol ajal olid kõrgema matemaatika elemendid juba täielikult juurdunud Prantsusmaa koolides, samuti Šveitsis ning reas Saksamaa koolides. Venemaal käsitleti neid küsimusi sõjakoolides, kesk-tehnilistes õppeasutustes ja reaalkoolides.

Kui Brüsseli konverentsile järgnenud istungil 1911. a. Milaanos olid päevakorras peamiselt koolis õpetatava aine ranguse küsimused ja üksikute distsipliinide vahelised fusiooni küsimused, siis 1912. a. V Ülemaailmsel Matemaatikute Kongressil Cambridge'is kerkisid jälle päevakorrale funktsiooni mõiste ja kõrgema matemaatika elementide õpetamise probleemid. Eriti peatus nende juures professor D. E. Smith. Ta rõhutas, et funktsionaalse sõltuvuse küsimuste käsitlemise eesmärk on jõuda tuletise ja integraali mõiste juurde. Selle saavutamiseks pidas ta vajalikuks tõhusat ettevalmistust, mis peab algama juba nooremates klassides.

1913. a. saatis RMÕK kõigile alamkomisjonidele küsimustiku teemal: «Milliseid tulemusi on saavutatud diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmete sissetoomisel keskkooli.» See sisaldas küsimusi, nagu: kas ja kui suures ulatuses käsitletakse diferentsiaal- ja integraalarvutust koolides; kas seal tutvustatakse ka Taylori rida ja lihtsamaid diferentsiaalvõrrandeid; kui range on nende küsimuste käsitlus; kas diferentsiaali mõistet tutvustatakse, kas piirväärtusi käsitletakse; kas funktsionaalse sõltuvuse küsimusi tutvustatakse juba nooremais klassides; missugust sümboolikat kasutatakse; missuguses järjekorras ainet esitatakse; kui palju näidatakse diferentsiaal- ja integraalarvutuse rakendusi; milliseid tulemusi on saavutatud?

Paljudest maadest neile küsimustele saadud vastustest tegi kokkuvõtte üks matemaatika õpetamise uue suuna innustunumaid pooldajaid, Budapesti ülikooli professor M. Beke, kes esitas oma töö tulemused Pariisi konverentsil 1914. a. Ta ütles muuhulgas: «Kõik vastused näitavad, et funktsiooni mõiste sissetoomine ja diferentsiaal- ning integraalarvutuse algmete käsitlemine keskkoolis on saanud kõikjal õpetajate poolehoiu osaliseks. Õpetajad

[1] Синцов, Д. Математика на выставке в Брюсселе. Международная Комиссия по преподаванию математики. «Вестник опытной физики и элементарной математики», пг. 525, 1910, lk. 34.

loevad auasjaks õpetada uut ainet.»[1] Prof. Beke hindas nende küsimuste käsitlemist kui evolutsiooni matemaatika õpetamises, mis arendab õpilastes nii ranget loogilist mõtlemist kui ka intuitsiooni, elavat huvi praktiliste küsimuste vastu, õiget tõsiasjade hindamise oskust, harjumust iseseisvaks tööks ning armastust tegelikkuse vastu. Nende omaduste kompleksis nägi aga Beke tsiviliseeritud maailma kasvatuse ideaali, mille saavutamine kindlustaks noorusele hiilgava tuleviku.

Professor Beke ettekandele oli sisult väga lähedane ka samal konverentsil professor É. Boreli ettekanne teemal: «Kuidas kooskõlastada matemaatika õpetamist teaduse progressiga.» Ta ütles: «Sellest on juba enam kui kaks sajandit, mille jooksul mehhaanika, füüsika, analüütiline geomeetria ja diferentsiaalarvutuse printsiibid on vastu pidanud aja katsumusele. Praegu pole see möödalendav fantaasia, vaid alus meie teaduslikele töödele. Ja alles peale seda, kui neile hädavajalikele õpetustele antakse koolis vastav koht, muutub täppisteaduste õpetamine meie keskkoolides tegelikult tänapäevalikuks ja omandab tõeliselt kasvatusliku väärtuse.»[2]

Kui käesoleva sajandi algul päevakorrale tõusnud küsimus funktsiooni, tuletise ja integraali mõiste käsitlemisest keskkoolis ei saanud kõikjal positiivset lahendust, siis tänapäeval, kus teadus ja tehnika sammuvad edasi hiiglasammudega, ei ole enam mõeldav koolimatemaatika sügav irdumine matemaatikateadusest.

I ja II maailmasõja vahelisel perioodil katsetati kõrgema matemaatika elementide õpetamist peaaegu kõigis maades. Paljudes riikides leidis see suund aga vastuseisu. Nii kustutati ka Nõukogude Liidu koolide matemaatika programmidest 1938. aastal kõik funktsionaalse sõltuvusega seotud küsimused. Teostatud sammu kritiseerisid mitmed juhtivad matemaatikud. Eriti silmapaistvad artiklid avaldasid prof. A. Hintšin ajakirjas «Молодая гвардия» 1939. aastal ja prof. K. M. Štšerbin ajakirjas «Математика в школе» 1938. aastal. Nimetatud artiklis avaldas prof. A. Hintšin arvamust programmide liigse ülekuhjamise kohta. Ta väitis, et programmides leidub veel küllalt materjali, mis püsib kooli õppekavas ainult seetõttu, et seda on õppinud meie isad ja vanaisad. Ta rõhutas, et kui tuldi suurepäraselt toime vene kirjaviisi lihtsustamisega, miks siis ei suudeta seda teha matemaatikas. Samal ajal aga nõudis A. Hintšin, et *kooli matemaatika programmis figureeriksid funktsiooni mõiste ja lõpmatult kahanevate suuruste analüüs.* Ta iseloomustas viimast kui matemaatikateaduste *peamist ideelist alust ning loodusteaduse ja*

---

[1] Beke, M. Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires. «L'Enseignement Mathématique», 1914, lk. 280.

[2] Борель, Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки. «Математическое просвещение», пг. 3, 1958, lk. 99.

tehnika peamist matemaatilist relva. Ta kirjutas: «Meie programmid on vähe õnnestunud koopiad ennerevolutsiooniaegseist programmidest ja, välja arvatud vähesed erandid, jätavad õpilase teadusliku arengu XVII sajandi tasemele.

Kõige kategoorilisem vajadus on lülitada kooli programmi matemaatilise analüüsi algmed. Selle kasuks räägib otsustavalt kõik. Tõkestamatult kahanevate suuruste analüüs seisab vaieldamatult kõrvuti inimkonna kultuuri suurimate võitudega, nagu evolutsiooniteooria bioloogias ning molekulaarteooria füüsikas ja keemias. Tema praktilised rakendusvõimalused on loendamatud. Kui tahame tõsta töölise ja kolhoosniku teaduslik-kultuurilist taset insener-tehnilise töötaja tasemeni, siis ei saa me rahulikult vaadata selle puudumisele kooli matemaatika programmis, mis kujutab endast kogu tänapäeva tehnika matemaatilist alust; seda enam, et tõkestamatult kahanevate suuruste analüüsile kuulub oluliselt tähtis osa teadusliku dialektilis-materialistliku maailmavaate kujundamisel.» [1]

Prof. Štšerbin juhtis oma artiklis tähelepanu asjaolule, et funktsionaalse sõltuvuse küsimused on vajalikud kõigile, nii loodusteadlasile kui sotsioloogidele. Ta andis ülevaate kõrgema matemaatika elementide osatähtsusest Vene kooli programmis alates 1907. aastast. Ta märkis, et programme kärbitakse väga kergekäeliselt, tuginedes vaid kaheldavale väitele, et nende küsimuste käsitlemine koolis valmistas raskusi. K. M. Štšerbin nimetas veel rea küsimusi, nagu täisarvude jagamine, irratsionaalarvu mõiste jne., mis samuti valmistavad raskusi, ja küsis lõpuks: mis jääks siis programmi järele, kui kõik need palad kavast kustutada? Ta nõudis funktsionaalse sõltuvusega seotud küsimuste taastamist kooli matemaatika programmis ning tuletas meelde, kuidas suhtuti sellesse küsimusse XX sajandi algul: «Tänu üksikute õpetlaste ja Rahvusvahelise Matemaatika Õpetamise Komisjoni tööle enamik õpilasi ja pedagooge tuli sajandi algul ühisele järeldusele, et on vajalik uuendada ja elustada matemaatika õpetamist ning anda kasvõi väheselgi määral seda, mis kuulub moodsasse kultuuri.» [2] Esialgu aga programmi enam ei muudetud. Küsimuse lahendamisele asuti innukamalt alles alates 1944. aastast.

Kõige enne tõsteti funktsionaalse sõltuvusega seotud teemade õpetamise küsimus üles Vene NFSV Hariduse Rahvakomissariaadi Õppe-metoodilises Nõukogus 1944. a., kus professorid N. A. Glagolev ja V. A. Gontšarov esinesid vastavasisuliste ettekannetega. Neist esimene kõneles teemal «Kõrgema

---

[1] Хинчин, А. О преподавании математики. «Молодая гвардия», nr. 9, 1939, lk. 143.

[2] Щербин, К. М. Критический обзор программы средней школы по математике НКП РСФСР 1938 г. «Математика в школе», nr. 5—6, 1938, lk. 95.

matemaatika elementide keskkooli programmi lülitamise probleem» ja teine teemal «Funktsionaalse sõltuvuse idee matemaatika õpetamisel keskkoolis». Professor Gontšarov nõudis *funktsionaalse sõltuvuse osatähtsuse suurendamist eeskätt geomeetria õpetamises.* Ta soovitas tugevdada kinemaatika elemente geomeetria kursuses, pühendada enam tähelepanu piirjuhtudele (kolmnurk nelinurga piirjuhuna jne.) ja kasutada geomeetria ülesandeid funktsioonide uurimise materjalina.

Professor Glagolev selgitas võimalusi diferentsiaal- ja integraalarvutuse elementide kavva võtmiseks. Ta tõi esile kolm järgmist võimalust: 1) kooli struktuuri muutmine (kooliaja pikendamine, harunemine), 2) teistele matemaatika küsimustele ettenähtud aja lühendamine ja 3) matemaatika tundide arvu suurendamine. Nendest pidas Glagolev kõige kergemini elluviidavaks viimast. Sealjuures ta hoiatas aga, et kui on loodud võimalus diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmete käsitlemiseks, siis ei tohi esitada kõrgemat matemaatikat kui formaalset vahendit pindalade ja ruumalade leidmiseks, vaid eelkõige tuleb selgitada seal esitatavate mõistete sisu. Prof. Glagolev pidas vääraks mõnede matemaatikute arvamust, nagu omandaksid õpilased kõrgema matemaatika elemente kergemini kui mõningaid küsimusi kehtivast programmist, eriti trigonomeetriliste ja logaritmvõrrandite lahendamist või lahenduste leidmist keerukamatele geomeetria ülesannetele. Rõhutades oma ettekandes korduvalt, et k o o l i m a t e m a a t i k a t t u l e b l ä h e n d a d a m a t e m a a t i k a t e a d u s e s a a v u t u s t e l e, juhtis ta sealjuures tähelepanu asjaolule, et seda lähendamist ei kindlusta mitte niivõrd matemaatika programmi sisu muutmine kui just p r i n t s i p i a a l s e t e v a a d e t e m u u t m i n e p õ h i l i s t e m a t e m a a t i l i s t e m õ i s t e t e, n a g u a r v, t e h e, r u u m, f u n k t s i o o n j n e. s u h t e s.

Kõrgema matemaatika elementide keskkooli kavva lülitamise probleem muutus vaadeldaval perioodil Nõukogude Liidu matemaatikute ja pedagoogide hulgas üheks kesksemaks vaidlusküsimuseks.

Kavandatud 11-aastase keskkooli jaoks töötati välja uued programmi projektid. Matemaatika programme esitati kaks: üks Vene NFSV Pedagoogiliste Teaduste Akadeemia poolt ja teine Vene NFSV Haridusministeeriumi poolt. Vene NFSV Haridusministeeriumi komisjoni poolt koostatud programmi projektis oli tehtud väga tagasihoidlikke ettepanekuid funktsionaalse sõltuvuse küsimuste osatähtsuse suurendamiseks. Nende küsimuste käsitlemisega alustati VII klassi programmis, kus pärast lineaarvõrrandeid oli ette nähtud ristkoordinaadistiku tutvustamine ning funktsioonide $y=ax$ ja $y=ax+b$ kujutamine graafiliselt. XI klassi kavas olid aga toodud funktsiooni pidevuse ja katkevuspunktide mõisted. Seega täienes matemaatika programm Vene

NFSV Haridusministeeriumi projekti kohaselt funktsionaalse sõltuvuse osas ainult pidevuse mõistega.

Sellevastu Vene NFSV Pedagoogiliste Teaduste Akadeemia komisjoni ettepanekud olid tunduvalt ulatuslikumad. Koordinaatteljestikku soovitati tutvustada juba VI klassis, VII klassis nähti ette lineaarfunktsiooni käsitlemine, VIII klassis lisandus sellele ruutfunktsioon. IX klassis laiendati funktsiooni mõistet astmefunktsioonile $y = x^m$ ja selle pöördele $y = \sqrt[m]{x}$. IX klassi kavas seisid ka eksponent- ja logaritmfunktsioon. X klassis oli peatähelepanu pööratud trigonomeetrilistele funktsioonidele. Nende käsitlemine oli ette nähtud algebra kursuses. XI klassi kavas olid aga juhtival kohal juba analüütilise geomeetria küsimused ja matemaatilise analüüsi algmed. Viimaste küsimuste käsitlemiseks oli planeeritud 54 tundi, mille jooksul oleks tulnud läbi võtta:

Descartes'i koordinaadistik tasandil, kahe punkti vaheline kaugus, kolmnurga pindala, ringjoone võrrand, sirge võrrand avaldatuna tõusu ja algordinaadi ning tõusu ja ühe punkti kaudu, sirge üldvõrrand, ellipsi, hüperbooli ja parabooli kanoonilised võrrandid, hüperbooli asümptoodid.

Arvjärjendi piirväärtus, lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, perioodilised kümnendmurrud, tõkestamatult kahanevad suurused, summa, korrutise ja jagatise piirväärtus.

Funktsiooni üldmõiste, funktsionaalsed seosed, elementaarsed funktsioonid, funktsiooni piirväärtus, hulkliikme pidevus, näiteid ratsionaalsete funktsioonide katkevuspunktide kohta, kahe tõkestamatult kahaneva suuruse suhte piirväärtus lihtsamatel juhtudel, tõkestamatult kahaneva kaare siinuse ja selle kaare pikkuse suhte piirväärtus.

Puutuja leidmise ülesanne kõverale, mille võrrand on antud Descartes'i koordinaatides, tuletis ja tema geomeetriline tähendus, sirgjoonelise mitteühtlase liikumise kiirus ja kiirendus.

Tuletise leidmine naturaalarvulise astendajaga astmest ja hulkliikmest, parabooli puutuja, funktsioonide $\sin mx$ ja $\cos mx$ tuletis.

Kõverjoonelise trapetsi pindala tuletis abstsissi järgi, integreerimine kui diferentseerimise pöördtehe, integreerimise abil arvutatavate pindalade näiteid.

Komisjonide esindajad A. I. Markuševitš ja S. I. Novosjolov esinesid ajakirjas «Математика в школе» oma seisukohti kaitsvate artiklitega. Esimene neist rõhutas *vajadust käsitleda funktsionaalse sõltuvuse küsimusi ulatuses, mis haaraks ka tuletise ja integraali mõiste.* Markuševitš kritiseeris teravalt ametlikku matemaatika programmi, kus funktsionaalse sõltuvuse küsimused olid esitatud isoleeritult ja mitteküllaldases ulatuses. Ta ei olnud rahul sellega, et funktsionaalse sõltuvuse küsimused olid paigutatud VIII klassi kursuse lõppu, mille tõttu neid ei saanud rakendada astmete, juurte ja ruutvõrrandite käsitlemise juures. Samuti oli funktsionaalse sõltuvuse küsimustest mööda mindud IX klassis progressioonide käsitlemisel. 1950. a. esitas Markuševitš ajakirjas «Математика в школе» nr. 1 uue programmi projekti 10-klassilise kooli jaoks, sest ühenduses üldise keskhariduse nõude püstitamisega piirduti 10-õppeaastase keskkooliga. Selles programmi projektis nõudis Markuševitš *aritmeetika kursuse lõpetamist V õppeaastal.* Sealjuures nägi ta V klassis aritmeetika ülesannete lahendamisel ette lihtsamate võrrandite ja võrrandisüsteemide, nagu

$$ax + b = c \qquad \begin{cases} x + y = e \\ x - y = f \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

rakendamist.

Viimaste lahendamiseks soovitas ta kasutada liitmis-lahutamisvõtet. VI ja VII klassi algebra kursus pidi Markuševitši nõude kohaselt sisaldama muu hulgas ka koordinaatide süsteemi, lineaarfunktsiooni (peale lineaarvõrrandi käsitlemist), ruuttrinoomi (samuti peale ruutvõrrandi käsitlemist) ja pöördvõrdelise sõltuvuse koos vastavate graafikutega. Algebra kursus VIII—X klassini oli ehitatud üles, tuginedes funktsionaalsele sõltuvusele. VIII klassis oli pärast lineaar- ja ruutvõrrandite täiendavat käsitlust kavas veel ratsionaalse astendajaga astmefunktsioon; IX klassis — eksponent- ja logaritmfunktsioon. Selles klassis nõuti ka varem tundmaõpitud funktsioonide esitamist tabeli kujul, kasutades argumendi ekvidistantseid väärtusi. Ka piirväärtuste küsimused olid IX klassi programmis. X klassis aga esinesid juba analüütilise geomeetria elemendid ning diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmed koos nende rakendamisega geomeetrias ja füüsikas.

Vastupidisel arvamusel oli S. I. Novosjolov, kes kategooriliselt *eitas diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmete õpetamise vajadust keskkoolis.* Ta väitis, et nendest Markuševitši poolt soovitatud küsimustest on palju olulisem, et õpilased omandaksid harjumuse funktsiooni vahetuks uurimiseks. Integraali mõiste käsitlemise vastu välja astudes rõhutas ta, et neid pindalasid ja ruumalasid, mida võiks koolis tuletada integraali abil, võiks leida ka vahetult piirväärtuse kaudu. Peale selle väitis Novosjolov, et Newton-Leibnizi valemi efektiivsuse näitamiseks ei saa piirduda mõne üksiku funktsiooni integreerimisega. Suurimaks puuduseks varem meil ja mujal kehtestatud programmides peabki Novosjolov seda, et niisugust võimsat vahendit nagu integraal on kasutatud ainult mõne üksiku elementaarse näite puhul. Sellega ei tutvustata aga veel õpilastele uue meetodi tegelikku jõudu ja nii võidaks õpilaste silmis ainult diskrediteerida kõrgemat matemaatikat.

Samal ajal pidas Novosjolov aga *väga vajalikuks rea matemaatika moodsamate küsimuste käsitlemist keskkoolis.* Ta väitis, et hulga, teisenduste, ringi, korpuse jne. mõisted võivad ja peavad leidma koha keskkooli programmis.

Kuigi siinkohal on esitatud ainult kahe tuntud matemaatiku arvamused, ei tule sellest järeldada, nagu oleksid nad olnud ainsad küsimuse üle diskuteerijad. Rohkete koosolekute ja nõupidamiste tulemusena valmis Vene NFSV keskkoolidele uus matemaatika programm, mille järkjärgulisele kehtestamisele asuti alates 1954. aastast. See programm ei erine aga kuigi tunduvalt senikehtinust. Suuremad muudatused on ette võetud ainult lõpuklassi programmis, kuhu on lülitatud ka tuletise mõiste.

Ulatuslikumatele ümberkorraldustele asuti pärast «Kooli ja elu sidemete tugevdamise seaduse» kehtestamist. Nimetatud seaduse arutluse käigus rõhutati asjaolu, et matemaatilise analüüsi elementidega tutvumise tähtsus ei seisne mitte ainult selles, et keskkooli lõpetajad saaksid neid vahetult kasutada oma õpinguis ja töös, vaid selles, et nad aitavad põhjalikumalt mõista, analüüsida ja hinnata paljusid nähtusi, millega inimesel tuleb elus kokku puutuda.

1961. aastal kinnitati Vene NFSV koolidele uus matemaatika programm. Funktsionaalse sõltuvuse temaatikaga tutvumine algab selle programmi kohaselt VI klassis, kus nähakse ette suuruste võrdelise ja pöördvõrdelise sõltuvuse käsitlemine. VII klassis on kavas peatükk «Koordinaadid ja lihtsamad graafikud» ning «Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid».

Keskkooli vanemas astmes on IX klassis ette nähtud peatükid «Astmefunktsioon» ja «Mistahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid», X klassis «Eksponent- ja logaritmfunktsioonid» ning XI klassis «Funktsioonid ja tõkked» ja «Tuletis ja selle kasutamine funktsiooni uurimisel», kus nähakse ette ka funktsiooni teise tuletise mõiste.

Eesti NSV-s asuti matemaatika õpetamise ümberkorraldamisele juba 1957. aastal. Seetõttu tulevad ilmsiks ka teatud erinevused Eesti NSV ja Vene NFSV koolide matemaatika programmides.

Eesti NSV koolide uues matemaatika programmis on veidi rohkemgi kui Vene NFSV koolide programmis rõhutatud funktsionaalse sõltuvuse ideed ja seda eriti keskkooli vanemas astmes. VI klassis on siin samuti ette nähtud teema «Suuruste võrdeline ja pöördvõrdeline sõltuvus», kuid talle on reserveeritud vähem aega. Arvud on vastavalt 24 ja 15. VII klassi programmis pole aga üldse täielikult funktsionaalse sõltuvuse küsimustele pühendatud peatükki. VIII klassis on aga ette nähtud peatükid «Koordinaatide mõiste», «Funktsionaalne sõltuvus» ja «Ruutfunktsioon ja ruutvõrrand», samuti ka «Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid». Kokku on V—VIII klassini otseselt funktsionaalse sõltuvuse temaatikale planeeritud Vene NFSV-s 74 tundi ja Eesti NSV-s 64 tundi. Et aga funktsionaalse sõltuvuse küsimused leiavad rakendamist ka teistes peatükkides, siis võib lugeda mõlemat programmi funktsionaalse sõltuvuse käsitlemise seisukohalt enam-vähem võrdseks.

ENSV keskkooli vanema astme programm sisaldab järgmisi funktsionaalse sõltuvuse ideega seotud peatükke: «Funktsionaalne sõltuvus», «Lineaarne funktsioon», «Ruutfunktsioon», «Astmefunktsioon», «Trigonomeetrilised funktsioonid» — IX klassis; «Eksponent- ja logaritmfunktsioon», «Funktsioonide uurimine» — X klassis; «Funktsiooni tuletis» ja «Integraal» — XI klassis. Kokku on Vene NFSV-s 146 ja Eesti NSV-s 205 tundi. Kui arvestada veel asjaolu, et integraali mõiste leiab rakendamist ka ruumalade arvutamise juures, siis on ilmne, et kõrgema matemaatika elemendid on keskkooli vanemas astmes ENSV koolide matemaatika programmis märksa tugevamini rõhutatud.

Kogemused ja katsetused on näidanud, et kooli matemaatika programmis võib funktsionaalse sõltuvuse küsimusi käsitleda varem kui 9. õppeaastal ja nii nende osatähtsust veelgi suurendada. Viimast asjaolu on mõningal määral arvesse võetud ka uutes töö-keskkoolide matemaatika programmides. Käesolevas raamatus on soovitatud *nooremate klasside matemaatika programmi lülitada funktsionaalse sõltuvuse propedeutiline kursus.* Nimetatud eelkursuse kaudu ei suurene mitte ainult nende õppeaastate arv, kus tegeldakse funktsionaalse sõltuvuse küsimustega, vaid selle kursuse abil osutub võimalikuks õpilasi ette valmistada ka funktsionaalse sõltuvuse küsimuste paremaks omandamiseks vanemais klassides. Funktsionaalse sõltuvuse propedeutiline kursus aitab kindlustada ka piirväärtuse, tuletise ja integraali mõiste edukat käsitlemist kooli lõpuklassides.

FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE KÜSIMUSTE PROPEDEUTILINE ESITUS

I. ÜLDISI KÜSIMUSI

1. Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse koht ja ulatus

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse käsitlemisel on suurustevaheline sõltuvus selleks tuumaks, mille ümber rullub aine esitus. Viimane mõiste pole õpilastele uus, kuna suurustevahelise sõltuvusega kohtuvad nad sageli igapäevases elus, olgu see siis näiteks sõltuvus suvel kolhoosis väljatöötatud normipäevade arvu ja saadava tasu vahel, tehases etteantud kvartaliplaani korral päevade arvu ja päevase toodangu hulga vahel, antud ajavahemikus läbitud tee pikkuse ja liikumiskiiruse vahel või ruudu külje pikkuse ja tema pindala suuruse vahel.

Aine küllaldase arusaadavuse ja mõistetavuse tõttu võiks niisuguse elust võetud materjali varal *asuda funktsionaalse sõltuvuse idee selgitamisele juba V klassis ning jätkata sellealase aine propedeutilist esitamist kogu 8-klassilise kooli matemaatika kursuse ulatuses.*

Väljakujunenud tava kohaselt hõlmab funktsionaalse sõltuvuse propedeutiline kursus **võrdelist** ja **pöördvõrdelist** sõltuvust, harvem ka **lineaarset** sõltuvust. Et siinkohal on soovitatud käsitleda seda kursust märksa laiemas ajavahemikus, siis peaks peale nimetatud sõltuvuste kuuluma siia veel **ruutsõltuvus.** See vajadus on tingitud ka viimase küllalt sagedasest esinemisest, eriti muidugi pindalaprobleemides. On loomulik, et 8-aastases koolis toimub geomeetria küsimuste esitamine propedeutiliselt. See kursus hõlmab aga kõik igapäevases elus vajalikud pindala valemid. Arvestades veel asjaolu, et me peame koolis õpetatavaid erinevaid matemaatilisi distsipliine üksteisele lähendama, *püüdes selle poole, et kooli õppeplaanis esineks ainult üks matemaatiline distsipliin* — **matemaatika**, osutub ruutsõltuvuse käsitlemine funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse raamides iseendastmõistetavaks.

2. Sõltuvuste defineerimisest

Metoodilisest seisukohast oleks vajalik, et enne sõltuvuste tutvustamist otsustataks, missugust teed mööda neile sõltuvustele läheneda, kuidas nendega tutvuda ja missuguses sõnastuses neid defineerida. Definitsiooni sõnastuselt nõuame, et see oleks küllalt kompaktne ja sealjuures õpilastele hästi mõistetav. Viimase nõude täitmist soodustab asjaolu, kui kõigi sõltuvuste puhul aine käsitlus kulgeb enam-vähem ühe ja sama skeemi kohaselt. Kuigi funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses ei kõnelda veel funktsioonist ja tema võimalikest esitusviisidest, võetakse viimastest ikka üks, s. t. kas valem, tabel või graafik aluseks konkreetse sõltuvuse mõiste kujundamisel. Defineerides näiteks ruutsõltuvust niisuguse kahe muutuva suuruse vahelise sõltuvusena, mis avaldub valemina $y = ax^2$, või lineaarset sõltuvust niisuguse kahe muutuva suuruse vahelise sõltuvusena, mille graafikuks on sirge, või võrdelist sõltuvust niisuguse kahe muutuva suuruse vahelise sõltuvusena, kus ühe suuruse väärtuste kasvades mingi arv korda teise suuruse vastavad väärtused kasvavad sama arv korda, siis esimene toodud definitsioonidest põhineb sõltuvuse analüütilisele esitusele, s. o. valemile, teine graafikule ja kolmas tabelile.

Selgitame, milline neist kolmest esitusviisist on kõige enam mõistetav V—VI klassi õpilasele.

Mõnedes kooli keskmise astme õpikuis leiame sõltuvuste definitsioone, mis tuginevad analüütilisele eeskirjale. Ei saa salata, et see defineerimisviis on formaalselt väga lihtne ja õpilased õpivad neile esitatava valemi kiiresti pähe. Kahjuks jääbki aga suurustevaheline sõltuvus sel juhul ainult formaalselt omandatud päheõpitud valemiks. Selline defineerimisviis sobib alles siis, kui ollakse tutvunud üldisema mõistega — funktsionaalse sõltuvuse ideega ja siis on juba üksikud sõltuvused selle üldise idee üksikjuhtudeks. Sellises käsitluses on funktsionaalse sõltuvuse defineerimine analüütilise eeskirja kaudu õpilastele täiesti jõukohane. Funktsionaalse sõltuvuse idee omandamine on aga 11—12-aastastel õpilastel suhteliselt raske. Seepärast ei saa nõustuda funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise käsitluse raames sõltuvuste defineerimisega analüütilisele eeskirjale tuginedes. IX klassis, kus on aeg alustada funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilise kursusega, omandatakse funktsionaalse sõltuvuse idee ja seetõttu ka alles seal võtame kasutusele üksikute funktsionaalsete sõltuvuste defineerimise valemi kujus.

Funktsionaalse sõltuvuse defineerimist graafiku abil ei saa lugeda otstarbekaks ei propedeutilises ega süstemaatilises kursuses. Graafiku joonestamine on lihtne küll lineaarse funktsiooni korral, kuid teiste funktsioonide puhul küllaltki tülikas ja aeganõudev. Pealegi kaasneb graafiku joonestamisele ebatäpsus.

Tabelilist esitust võib lugeda lastele kõige eakohasemaks. Kui õpilane läheb poodi, siis ilmestuvad temale seal mitmed sõltuvused tabeli kujul. Kui ta ostab 3 vihikut, maksab ta 5 kopikat, kui ostab 6 vihikut, maksab ta 10 kopikat. Kui tal on kaasas 1 rbl. 50 kop. kaustikute ostmiseks, siis ostes 15-kopikasi kaustikuid, saab ta neid 10 tükki, ostes 25-kopikasi kaustikuid, saab ta neid 6 tükki.

Need tulemused on esitatavad tabelina.

A

Vihikute arv	3	6	9
Maksumus kopikates	5	10	15

B

Kaustiku hind kopikates	15	25	30
Kaustikute arv	10	6	5

Kui õpilase ette seatakse küsimus, kui palju läheb maksma taksoga sõit 3, 4, 5 ja 6 km kaugusele, siis ka siin koostab ta tabeli.

C

Kilomeetrite arv	3	4	5	6	...
Sõiduhind kopikates	40	50	60	70	...

Ruudu külje pikkuse ja pindala kohta esitab ta järgmise tabeli.

D

Külje pikkus	1	2	3	4	5	...
Pindala	1	4	9	16	25	...

Lugedes kõige otstarbekamaks lähtuda sõltuvuste tutvustamisel nende tabelilisest esitusest, ei tähenda see, et teised funktsionaalse sõltuvuse esitusviisid, s.t. valem ja graafik jääksid propedeutilisest kursusest välja.

Tabeliline esitus näitab, missugune seaduspärasus valitseb vaatluse all olevate suuruste vahel. See võetakse aluseks sõltuvuse defineerimisel. Seda seaduspärasust on aga võimalik esitada valemi kujul, mis võimaldab seda seaduspärasust paremini meelde jätta. Sõltuvuse illustreerimiseks kantakse tabeliväärtustega määratud punktid koordinaatteljestikku ja ühendatakse need sileda kõveraga.

II. FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE PROPEDEUTILINE KÄSITLEMINE ARITMEETIKA KURSUSES

1. Vaatlusprotokoll

Igapäevases elus esinevate sõltuvuste tundmaõppimisel on sageli lähtekohaks nn. v a a t l u s p r o t o k o l l. Toodud näited kinnitavad seda. Seetõttu olekski kõige loomulikum alustada sõltuvuse tutvustamist vaatlusprotokollist. Sealt väljaloetavate omaduste järgi tuleks vastavat sõltuvust ka defineerida.

Nii peakski esimese praktilise sammuna funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses asuma vaatlusprotokollide valmistamisele. Andmeid nähtuskäikude protokollide valmistamiseks peaksid õpilased ise koguma l o e n d a m i s e ja m õ õ t m i s e teel. Nii võiksid nad koostada vaatlusprotokolle klassi õpilaste vanuse, raskuse ja pikkuse kohta, kooli kauguse kohta õpilaste kodudest, katselapil kasvava maisitaime kasvupikkuse kohta jne.

N ä i d e.

VAATLUSPROTOKOLL

Kooli ja kodu vaheline kaugus

Õpilase nimi	Kaugus
1. Aarma	1 km 200 m
2. Eelmäe	850 m
3. Ennula	250 m
4. Indrikus	500 m
5. Lepik	300 m

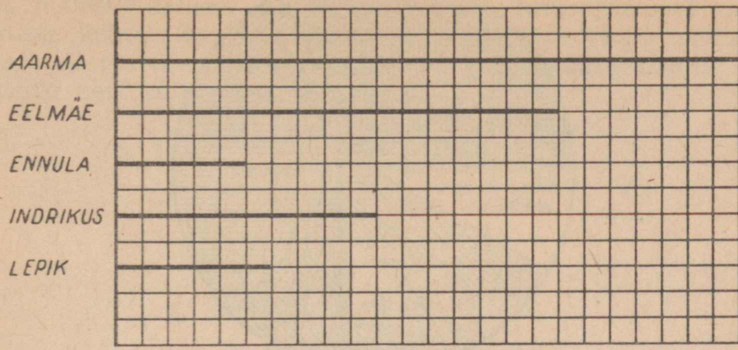
jne.

2. Diagrammide joonestamine. Võrdlusdiagramm

Et vaatlusprotokolli andmeist elavamat ettekujutust saada, selleks esitatakse need graafiliselt d i a g r a m m i d e n a. Esimesed näited valitakse seejuures nii, et mastaabi valiku küsimust poleks tarvis selgitada. Hiljem tuleb muidugi õpilastele tutvustada ka mastaabi valiku aluseid, nagu kujutamisühiku pikkuse sõltuvust kujutatava suuruse väärtustest ja jooniselehe suurusest, silma lahutusvõimet ja joonise lugemise täpsust.

Näiteks kerkib eespool toodud vaatlusprotokolli esitamisel diagrammina üles mastaabi valiku küsimus. Selleks et diagramm mahuks vihikulehele, võetakse ühe ruudu pikkuseks 50 m ja saadakse diagramm, mis on esitatud joonisel 1.

Diagrammid jagunevad põhiliselt kolme tüüpi: j o o n l õ i k-, t u l p- ja s e k t o r d i a g r a m m i d. Joonlõikdiagramme kasutatakse sageli näiteks maateaduse tundides jõgede pikkuste ja



Joon. 1.

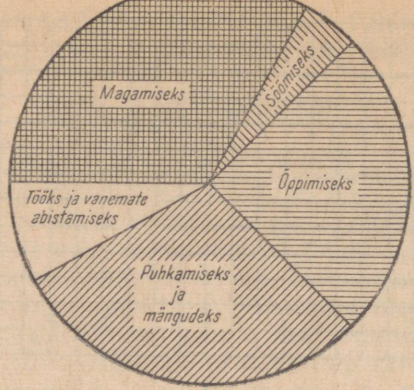
mägede kõrguste võrdlemiseks. Niisama hästi on aga joonlõikdiagrammid kasutatavad ka mitmesuguste teiste andmete võrdlemiseks. Nii võiksid õpilased võrrelda peale vaatlusprotokolli näidetena esitatud juhtumite veel pioneeride arvu üksikuis klassides, kaugushüppe võistlusel saadud tulemusi, matkagruppide poolt läbitud tee pikkusi jne. Tulp- ja sektordiagrammide abil on võimalik näitlikustada kodurajooni või mõne teise rajooni jagunemist metsa-, põllu-, heina-, karja- jne. maaks. Samuti võib tulp- ja sektordiagramme kasutada näiteks aja võrdlemiseks, mis kulutatakse ööpäeva jooksul magamiseks, söömiseks, õppimiseks ja mängimiseks; koolimaja põrandapinna jagunemise selgitamiseks klassideks, kabinettideks, administratiivruumideks, koridorideks ja muudeks ruumideks; igas klassis ühe õpilase kohta tuleva põrandapinna suuruse võrdlemiseks jne.

Toome näitena vaatlusprotokolli, mis kujutab õpilase aja jaotumist ööpäeva jooksul, ja sellele vastava sektordiagrammi (joon. 2).

VAATLUSPROTOKOLL

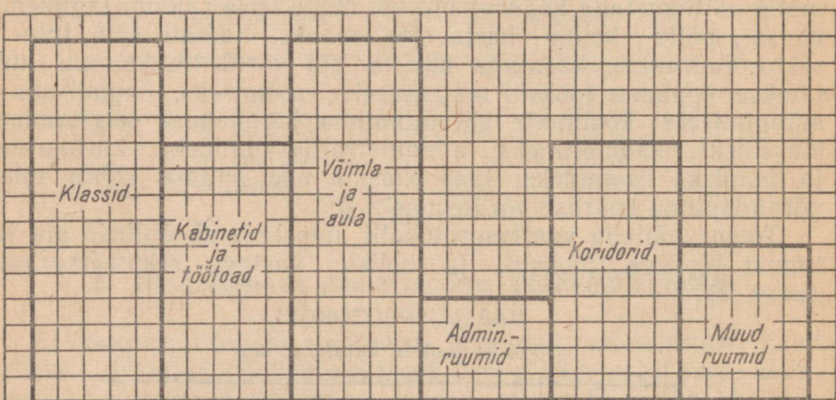
Ööpäeva jooksul kulutatud aeg

Milleks	Mitu tundi
1. Magamiseks	8 tundi
2. Söömiseks	1 tund
3. Õppimiseks	
a) kodus	$1^1/_2$ tundi
b) koolis	$4^1/_2$ tundi
4. Puhkamiseks ja mängudeks	
a) kodus	5 tundi
b) koolis	2 tundi
5. Tööks ja vanemate abistamiseks	2 tundi



Joon. 2.

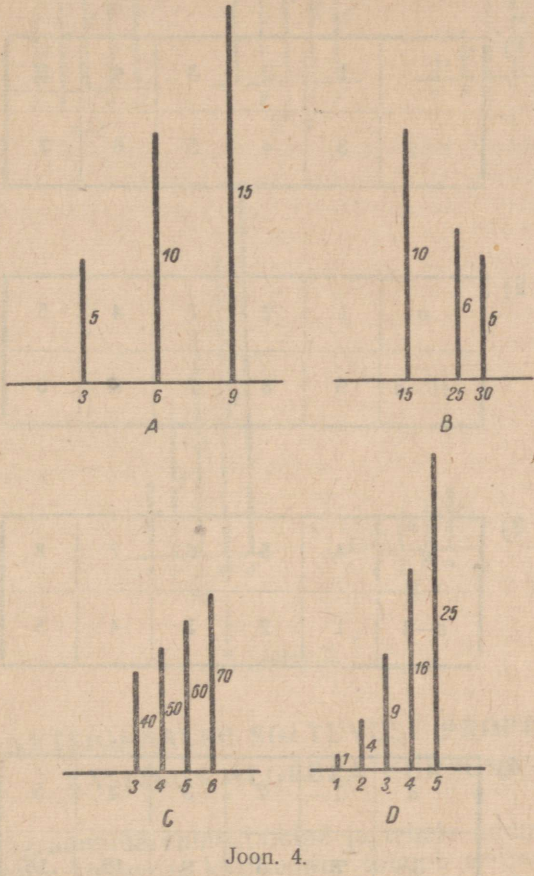
Joonisel 3 on esitatud tulpdiagramm A. H. Tammsaare nimelise Tartu I keskkooli põrandapinna jagunemise kohta (1 ruudule vastab ligikaudu 10 m²).



Joon. 3.

3. Sõltuvusdiagramm

Neilt võrdlusdiagrammidelt saab raskusteta üle minna sõltuvusdiagrammidele. Sobivateks sõltuvusteks, mille kohta võiks esitada sõltuvusdiagramme, on näiteks need, mis esitati käesoleva peatüki algul suurustevahelise sõltuvuse näidetena. Siin tuleks aga kindlasti tuua näiteid nii võrdelises, pöördvõrdelises, lineaarses kui ka ruutsõltuvuses olevate suuruste kohta. Sageli piirdutakse ainult võrdelises sõltuvuses olevate suurustega, mis võib aga põhjustada väärarvamust, nagu oleksidki kõik sõltuvused võrdelised.



Joon. 4.

S õ l t u v u s d i a g r a m m i d t u l e b a n d a j o o n l õ i k d i a g r a m m i d e n a, kusjuures on soovitav joonlõigud esitada vertikaalses asendis. Nii on joonisel 4 esitatud joonlõikdiagrammideks leheküljel 25 tabeli kujul antud sõltuvused.

Suurustevahelise sõltuvuse mõtte selgitamiseks aritmeetika kursuses on kohane ära kasutada ka *aritmeetiliste tehete resultaadi ja andmete vahelist sõltuvust.*

Selleks koostatakse jällegi tabelid ning joonistatakse neile vastavad sõltuvusdiagrammid. Siia sobivad tabelid summa muutumise kohta, kui tema üks liidetav muutub, vahe muutumise kohta, kui vähendatav või lahutatav muutub, korrutise muutumise kohta, kui üks tegur muutub, ja jagatise muutumise kohta, kui muutub kas jagatav või jagaja. Näiteks:

1)

a	1	2	3	4	5
$a+2$	3	4	5	6	7

2)

a	1	2	3	4	5
$10-a$	9	8	7	6	5

3)

a	4	5	6	7	8
$a-3$	1	2	3	4	5

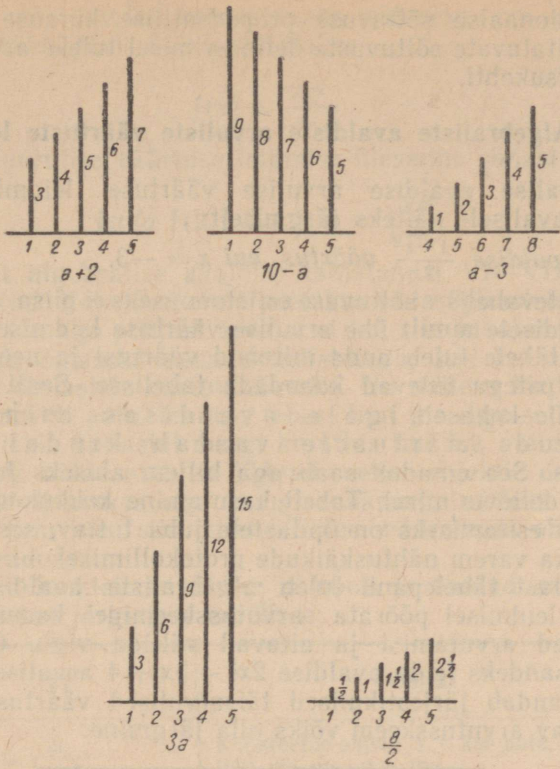
4)

a	1	2	3	4	5
$3a$	3	6	9	12	15

5)

a	1	2	3	4	5
$\frac{a}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$

Vastavad diagrammid on esitatud joonisel 5.



Joon. 5.

III. FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE PROPEDEUTILINE KÄSITLUS ALGEBRA KURSUSES

Kui diagrammide valmistamine ja tehete andmete ning resultaadi vahelise sõltuvuse käsitlemine toimub aritmeetika kursuses, siis üksikute sõltuvuste propedeutiline esitus kuulub tavaliselt algebra kursusesse, kus need küsimused jagunevad järgmiste peatükkide vahel:

1) algebraliste avaldiste arvuliste väärtuste leidmine (tabelite koostamine ja nende tõlgendamine funktsionaalse sõltuvuse väljendajana);
2) koordinaatteljestik ja punkti koordinaadid;
3) võrdeline sõltuvus;
4) pöördvõrdeline sõltuvus;
5) lineaarne sõltuvus;
6) ruutsõltuvus.

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse käsitlemisel ja seal esitatavate sõltuvuste defineerimisel tuleks arvestada järgnevaid seisukohti.

1. Algebraliste avaldiste arvuliste väärtuste leidmine

Algebralise avaldise arvulise väärtuse leidmise ülesanne antakse tavaliselt näiteks järgmiselt:

leida avaldise $\frac{1-x^2}{2x}$ *väärtus, kui* $x = -3$.

Suurustevahelise sõltuvuse esiletoomiseks ei piisa aga algebralisele avaldisele ainult ühe arvulise väärtuse leidmisest. Avaldises esinevale tähele tuleb anda mitmeid väärtusi ja need koos avaldise väärtustega tulevad koondada tabelisse. Sealt ilmneb **vastavus**, mille kohaselt igale avaldises esineva tähe etteantud väärtusele vastab kindel avaldise väärtus. See omadus saab aga hiljem aluseks funktsionaalse sõltuvuse defineerimisel. Tabeli kasutamine kokkukuuluvate väärtuspaaride esitamiseks on õpilastele juba tuttav, sest temaga on tegeldud ka varem nähtuskäikude protokollimisel.

Küllaldast tähelepanu tuleb algebraliste avaldiste arvuliste väärtuste leidmisel pöörata arvutusskeemide kasutamisele, mis hõlbustavad arvutamist ja aitavad vältida vigu. Olgu näiteks antud ülesandeks leida avaldise $2x^2 - 3x + 4$ arvulised väärtused, kui x omandab järjestikulised täisarvulised väärtused -5 kuni 5-ni. Vastav arvutusskeem võiks olla järgmine:

x	x^2	$2x^2$	$3x$	$2x^2-3x+4$
-5	25	50	-15	69
-4	16	32	-12	48
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Tuleb lugeda otstarbekaks võtta algebraliste avaldiste arvuliste väärtuste leidmisel kasutusele selle arvu avaldise jaoks lühem tähis. On mõeldav, et see tähis on ühetäheline, näiteks tähistatakse avaldist $\frac{2x^2}{1-x}$ y-ga ja kirjutatakse $y = \frac{2x^2}{1-x}$ ning avaldise arvulise väärtuse leidmise ülesanne sõnastatakse järgmiselt:

leida y *väärtus, kui* $x = 2$,

või kui tahetakse veelgi enam juurutada funktsionaalse sõltuvuse käsitlemisel kasutatavat sümboolikat:

leida

$$y\,\big|_{x=2}.$$

On aga mõeldav, et kasutatavaks tähiseks on isegi üldine funktsiooni tähis $f(x)$. Siis kirjutatakse

$$f(x)=\frac{2x^2}{1-x}$$

ja avaldise arvulise väärtuse leidmise ülesanne sõnastatakse:

$$\textit{leida } f(2), \textit{ kui } f(x)=\frac{2x^2}{1-x}.$$

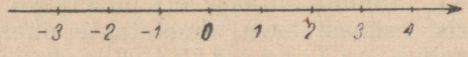
Niisugust algebralise avaldise tähistamist VI—VII klassis ei ole seni tehtud. Kaheldamatult peetakse seda õpilastele siin mitte eakohaseks. On aga põhjust arvata, et kui siin luua analoogia õpilastele täiesti omaseks saanud mõistetega, siis ka see sümboolika muutub õpilastele vastuvõetavaks. Nii näiteks kirjutavad õpilased üldnimesid: auto, lennuk, tehas, linn jne. Iga selle sõna kirjutamisega tekib õpilastel mingi kujutlus linnast, autost jne., kusjuures täiesti määramatuks jäävad selle objekti detailid. Kui sinna juurde lisatakse aga mingi määrang, näiteks meie kooli auto, Tartu linn jne., siis omandab see määramatu objekt kindla objekti tähenduse.

Analoogia funktsiooni üldise sümboli ja toodud näidete vahel on kokku võetav järgmisse tabelisse:

$f(x)$	Objekt
$f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$	Konkreetne objekt, s. t. kas auto, linn või maantee jne.
$f(2)=\frac{2\cdot 2}{1-4}=-\frac{4}{3}$	Meie kooli auto Tartu linn Tartu—Pärnu maantee jne.

2. Koordinaatteljestik ja punkti koordinaadid

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses jõutakse koordinaattelgede ja punkti koordinaatide mõiste juurde a r v - t e l j e kaudu. Positiivsete ja negatiivsete arvude interpreteerimiseks kasutatakse suunatud sirget, mille üks punkt on valitud alguspunktiks ja millel on määratud ühik. Joonisel 6 on näidatud, kuidas ühiku järjestikuse paigutamisega alguspunktist paremale ja vasakule saadakse punktid, mis interpreteerivadki positiivseid ja negatiivseid täisarve. Seetõttu nimetataksegi seda sirget a r v - t e l j e k s.

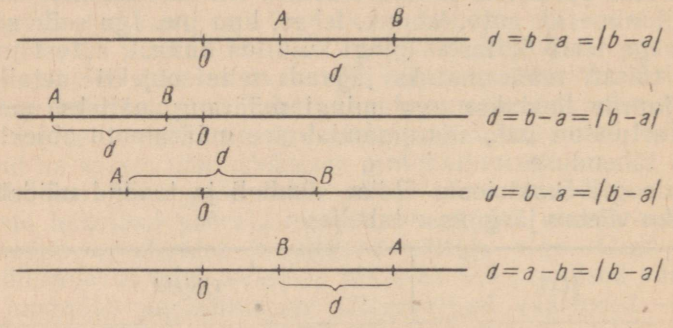


Joon. 6.

Siin ei tohi piirduda ainult ülesandega: *leida antud arvule vastav punkt*, vaid kindlasti tuleb anda ka ülesanne: *leida antud punktile vastav arv*. Selle viimase ülesande kaudu jõuamegi p u n k t i k o o r d i n a a d i mõisteni.

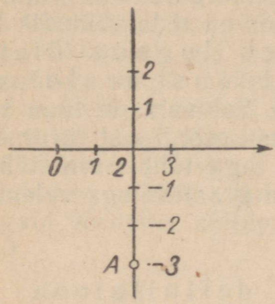
Täiesti jõukohane õpilastele on leida siin arvtelje k a h e p u n k t i v a h e l i s e k a u g u s e v a l e m. See nõuab ainult absoluutväärtuse mõiste tundmist, mis aga seoses positiivsete ja negatiivsete arvude käsitlemisega niikuinii kuulub tutvustamisele. Seega annaks selle valemi üleskirjutamine ühe rakenduse absoluutväärtuse mõistele. Jooniselt 7 näeme, et kui antud punktideks on $A(a)$ ja $B(b)$, siis nendevaheline kaugus d kui alati positiivne suurus avaldub kujus

$$d = |b - a|.$$

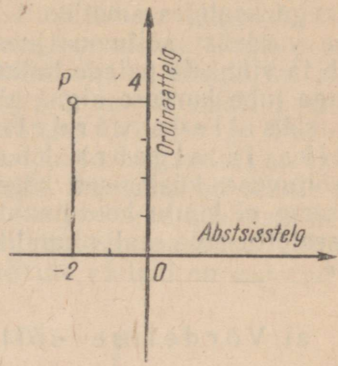


Joon. 7.

Koordinaatteljestikku ja punkti koordinaate tasapinnal on otstarbekas tutvustada vahetult enne nende kasutusele võtmist võrdelise sõltuvuse graafiku esitamiseks. Kui õpilased on hästi tuttavad punkti koordinaadi mõistega arvteljel, siis ei valmista neile enam erilisi raskusi ka punkti koordinaatide mõiste tasapinnal. Selleks võetakse jällegi arvtelg, mille abil otsitakse antud arvupaari järgi punkti asukoht tasapinnal. Algul leitakse arvteljel punkt, mille koordinaadiks on esimene antud arvudest ja sealt minnakse edasi arvteljega selles punktis ristuvat sirget kui uut arvtelge mööda teise arvuga kui koordinaadiga määratud kohta. Punkti $A(2; -3)$ asukoha määramist näeme jooniselt 8. Tavaliselt võetakse esimene arvtelg horisontaalselt ja temaga ristuva arvtelje positiivne suund alt üles. Et antud arvupaari järgi saaks punkti asukohta kiiremini määrata, selleks joonestatakse esimese arvteljega ristuv arvtelg läbi alguspunkti. Telgede eraldamiseks teineteisest antakse neile erinimetused: a b s t s i s s t e l g ja o r d i n a a t t e l g. Samuti antakse eri nimetused koordinaatidele antud arvupaaris: esimest arvu nimetatakse punkti a b s t s i s s i k s ja teist punkti o r d i n a a d i k s. Koordinaatteljestikus toimub punkti asukoha määramine sel teel, et leitakse punkti abstsiss abstsissteljel ja ordinaat ordinaatteljel ning neist punktidest telgedele tõmmatud ristsirgete lõikepunkt määrabki punkti asukoha. Joonisel 9 on näidatud punkti $P(-2; 4)$ asukoha määramine. Ka vastupidine ülesanne: *leida antud punkti koordinaadid*, lahendatakse sama põhimõtte järgi. Antud punktist tõmmatakse ristlõigud telgedele ning need määravadki telgedel punktid, milledele vastavad arvud on punkti abstsissiks ja ordinaadiks.



Joon. 8.



Joon. 9.

Nende ülesannete lahendamine peaks baseeruma mõningail tegeliku eluga seotud ülesannetel, nagu näiteks:

1) *Metsavaht leidis metsas hundipesa. Kuidas määras ta hundipesa asukoha, et teatada seda jahimeestele?*

2) *Poiss leidis karjamaalt sõjaaegse miini. Kuidas määras ta miini asukoha, et sellest teatada sõjakomissariaati?*

3) *Kuidas määratakse projektil kindlaks laearmatuuride asukohad?*

On loomulik, et siinne aine käsitlus tuleb seostada tihedalt sõltuvusdiagrammidega.

Koordinaatteljestikku kasutatakse peale asukoha määramise ülesannete veel mõningate konkreetsete nähtuskäikude iseloomustamiseks sirgjoone, murdjoone või kõverjoone abil. Nii võiks siin esitada sõiduplaanide graafikuid, temperatuuri käiku ööpäeva jooksul, sõidupileti hinna muutumist olenevalt tee pikkusest jne. Laialdast materjali mitmesuguste joonte esitamiseks pakub ka algebraliste avaldiste numbriliste väärtuste käigu graafiline kujutamine. Vastavate avaldistena on otstarbekas kasutada neid, mille kohta on varem juba tabel koostatud.

3. Võrdeline sõltuvus

Konkreetse lähtekoha võrdelise sõltuvuse tutvustamiseks annavad näiteks seosed Celsiuse ja Reaumuri kraadide arvu vahel, dollarite ja rublade vahel, ristküliku aluse ja pindala suuruse vahel (kui kõrgus jääb muutumatuks) jne. Siin on soovitav võtta uuesti vaatluse alla ka need võrdelised sõltuvused, millistega tutvuti diagrammide koostamisel, algebralise avaldise numbriliste väärtuste leidmisel ja graafikute joonestamisel koordinaatteljestikus. Praegu koolides ametlikult kehtiva programmi kohaselt käsitletakse võrdelist sõltuvust juba aritmeetika kursuses. Kuna seal kuulub ta viimaste palade hulka, algebras on teda võimalik käsitleda aga juba kursuse algul, siis tuleb lugeda üleliigseks käsitleda võrdelist sõltuvust eraldi aritmeetika ja algebra kursuses. Sobivam on tuua võrdelise sõltuvuse küsimused algebra kursusesse, sest aritmeetika kursusesse ei kuulu koordinaatteljestik ega täht arvu tähisena ning seetõttu pole seal võimalik vastava graafiku ega valemi esitamine.

a) Võrdelise sõltuvuse definitsioon

Õppe- ja metoodilises kirjanduses leiame järgmisi võrdelise sõltuvuse definitsioone.

1. *Üks suurus sõltub teisest võrdeliselt, kui selle teise suuruse väärtuste kasvades (kahanedes) mingi arv korda ka esimese suuruse väärtused kasvavad (kahanevad) sama arv korda.*

2. *Kui ühe suuruse kahe mistahes väärtuse suhe on võrdne teise suuruse vastavate väärtuste suhtega, siis niisuguseid suurusi nimetatakse võrdelisteks.*

3. **Üks suurus oleneb teisest võrdeliselt, kui esimese ja teise suuruse vastavate väärtuste suhted on võrdsed.**

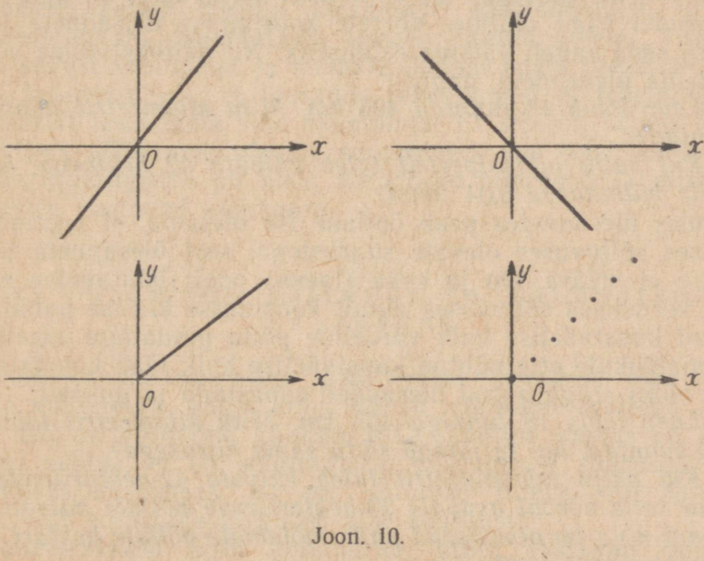
4. *Kaht suurust nimetatakse võrdelisteks, kui sõltuvust nende vahel saab väljendada valemiga $y=kx$, kus x ja y on arvud, mis väljendavad võetud suuruste teineteisele vastavaid väärtusi, k aga on jääv arv (võrdne y väärtusega, mis vastab x väärtusele* 1).

Nagu juba eespool nimetatud, on viimane toodud definitsioonidest, mis tugineb funktsiooni analüütilisele avaldisele, abstraktne, sisuliselt VI klassi õpilastele raskesti mõistetav, kuid sealjuures formaalselt muidugi kõige kergemini omandatav. Seetõttu pole õige sellist sõnastust siin kasutada.

Esimesed kolm definitsiooni tuginevad kõik funktsiooni tabelilisele esitusele. Neist esimest kasutatakse tavaliselt võrdelise sõltuvuse defineerimiseks aritmeetika kursuses. Sisult on ta hästi mõistetav. Selle definitsiooni puuduseks on aga asjaolu, et ta ei kehti negatiivse võrdeteguri juhul. Teine ja kolmas definitsioon on sisult samaväärsed. Funktsiooni tabelilisest esitusest on aga kõige kiiremini väljaloetavad kolmanda definitsiooni tingimused. Et funktsionaalse sõltuvuse propedeutiline kursus hõlmab võrdelist sõltuvust ka negatiivse võrdeteguri puhul, siis ongi kõige otstarbekam kasutada kolmandat definitsiooni.

b) Võrdelise sõltuvuse graafik

Võrdelise sõltuvuse graafiku joonestamine peab toimuma algul tegelikust elust pärinevate võrdelise sõltuvuse juhtudel. Nende näidete juures on argumendi väärtused tavaliselt ainult positiivsed, näiteks kauba kogus ja maksumus, aeg ja läbitud tee pikkus ühtlasel liikumisel, või need sõltuvused on vähemalt positiivse võrdeteguriga nagu näiteks temperatuur Celsiuse ja Reaumuri kraadides. Neid asjaolusid tuleb graafiku joonestamisel arvestada. Samuti tuleb selgitada, kas sõltumatul muutujal on ainult diskreetsed väärtused, sest sel juhul ei ole punktide ühendamine sirgega lubatav, näiteks dollarite ja rublade vaheline sõltuvus. Mõningaid võrdelise sõltuvuse graafikute näiteid on esitatud joonisel 10.



Joon. 10.

Tuginedes võrdelise sõltuvuse definitsioonile, esitatakse ka niisuguseid tabeleid, kus muutuvate suuruste vastavate väärtuste suhted on võrdsed, kuid suhte väärtus on negatiivne.

Toodud näidete põhjal tehakse järeldus, et *võrdelise sõltuvuse graafikuks on koordinaatide alguspunkti läbiv sirge või niisugust sirget määrav punktide hulk.*

Võrdelise sõltuvuse graafiku esitamisel sirgena kerkib üles järgmine probleem. Õpilased ei ole tuttavad irratsionaalarvudega ja seetõttu puudub nagu õigustus pideva graafiku joonestamiseks. On aga selge, et reaalarvude pidevuse küsimus ei ole VI klassis õpilastele tutvustamiseks jõukohane ja nad mõistavad vaadeldava sõltuvuse graafikut pidevana seni, kui ei ole näidatud, et teatud sõltumatu muutuja väärtuste korral ei saa sõltuvale muutujale väärtust leida.

c) Võrrete lahendamine

Nagu eespool öeldud, on otstarbekas käsitleda võrdelist sõltuvust ühes kontsentris. Seega peaks ka võrrete koostamine ja lahendamine kuuluma sellesse kontsentrisse. Nagu teada, nimetatakse võrdeks kahe suhte võrdust. Võrdelise sõltuvuse tundmine lubab võrret vaadelda kui võrdelises sõltuvuses olevate suuruste vastavate väärtuste suhete võrdust. Selle rõhutamine, et vaatluse all olevad suurused on võrdelises sõltuvuses, on aga paljudel juhtudel väga oluline. Võrrete koostamise ülesannete juures võetakse seda sageli vaikiva eeldusena. Nii näiteks võime võrrete kohta leida ülesandeid, nagu:

1. *Laev läbib* 18 *tunniga* 405 *km. Mitu kilomeetrit läbib laev* 24 *tunniga*?

2. *Kui palju lubisalpeetrit tuleb külvata* 42 *hektarile, kui* 20 *hektarile külvatakse* 5,04 *tonni*?

Nendes ülesannetes peab õpilane ise oletama, et tegemist on võrdelises sõltuvuses olevate suurustega, sest ülesannete tekstid seda ära ei määra. On ju keha (laeva) poolt läbitav tee pikkus ja aeg võrdelises sõltuvuses ainult konstantse kiiruse puhul ning külvatud kunstväetise hulk võrdeline põllu pindalaga ainult siis, kui pinnaühikule ette nähtud kunstväetise hulk jääb konstantseks. Õigem oleks seega antud ülesanded sõnastada järgmiselt:

1. *Laev läbis* 18 *tunniga* 405 *km. Mitu kilomeetrit läbib see laev* 24 *tunniga, kui ta jätkab sõitu sama kiirusega*?

2. *Kui palju lubisalpeetrit tuleb külvata* 42-*hektarilisele põllule, kui selle kõrval asuvale* 20-*hektarilisele põllule külvati seda* 5,04 *tonni ning on otsustatud anda mõlemale põllule hektari kohta ühepalju kunstväetist?*

Et tundmatut sisaldavad võrded on võrrandid, siis toimub võrde koostamise ülesande lahendamine sama põhimõtte kohaselt nagu võrrandi koostamise ülesande lahendaminegi.

Nii näiteks lahendame esimest ülesannet järgmiselt.

Oletame, et laev läbib 24 tunniga x kilomeetrit. Et ülesande tingimuse kohaselt sõidu aeg ja läbitud tee pikkus on võrdelises sõltuvuses, siis nende vastavate väärtuste suhted on võrdsed ja seega võime kirjutada:

$$\frac{18}{24}=\frac{405}{x}.$$

Siit

$$x=540\ (\text{km}).$$

Järgnevad kontroll ja vastus.

Sageli, eriti keemia tundides näeme võrde koostamise ülesannete lahendamist eri šablooni järgi. Näiteks ülesanne:

40 *g soolalahuses on* 3 *g soola. Mitu g soola on* 80 *g sama kontsentratsiooniga soolalahuses?,*

lahendatakse järgmiselt:

40 g soolalahuses on 3 g soola
80 g „ „ x g „

$$\frac{40}{80}=\frac{3}{x} \qquad \text{jne.}$$

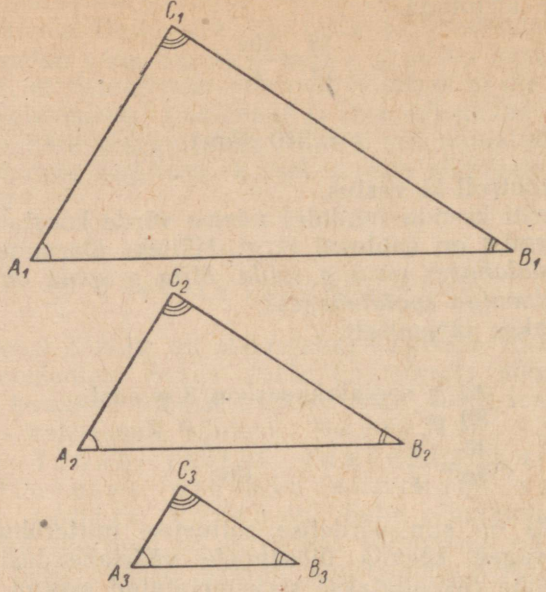
Puuduseks on siin võrdelise sõltuvuse mitterõhutamine. Nii kohtamegi sageli keemia ülesannete väärlahendusi, kus ilma järelemõtlemata rakendatakse sisseharjutatud skeemi. Tuleks loobuda sellest šabloonist ja suunata õpilasi enam ülesande sisulise külje tunnetamisele, et ülesande lahendamist ei teostataks mehhaaniliselt ilma tema sisu mõistmata. Et siin on sageli tegemist võrdelises sõltuvuses olevate suurustega, siis tuleb eelkõige selgitada, missugused on need võrdelised suurused ja missugused on nende vastavad väärtused.

d) Võrdeline sõltuvus ja kolmnurkade sarnasus

Kolmnurkade sarnasuse käsitlemisel kohtume tihti õpilaste väära väljendiga, nagu külg AB on võrdeline küljega A_1B_1 ja külg BC on võrdeline küljega B_1C_1. Taoline vastus on tingitud jällegi sellest, et on selgitamata, missugused suurused on siin võrdelises sõltuvuses. Et see sõltuvus tuleks siin teravamalt esile, võib soovitada järgmist aine käsitlust.

Joonestatakse mitu kolmnurka, mille vastavad nurgad on võrdsed (joon. 11). Seejärel mõõdetakse võrdse nurga lähisküljed ja esitatakse tulemused tabelina

A_1B_1	A_2B_2	A_3B_3	...	A_nB_n
A_1C_1	A_2C_2	A_3C_3	...	A_nC_n



Joon. 11.

Siit ilmneb, et küllalt täpsete mõõtmiste korral vastavate väärtuste suhted on võrdsed. Seejärel defineeritaksegi kolmnurkade sarnasus, tuginedes tähelepandud omadusele.

Kolmnurgad on sarnased, kui neil vastavad nurgad on võrdsed ja vastavate nurkade lähisküljed on võrdelises sõltuvuses.

Olgu antud n kolmnurka, mille tipud on tähistatud vastavalt $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$. Definitsiooni põhjal on need kolmnurgad sarnased, kui on täidetud järgmised tingimused:

$$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \ldots = \angle A_n;$$

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} = \ldots = \frac{A_nB_n}{A_nC_n};$$

$$\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3 = \ldots = \angle B_n;$$

$$\frac{B_1A_1}{B_1C_1} = \frac{B_2A_2}{B_2C_2} = \ldots = \frac{B_nA_n}{B_nC_n};$$

$$\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3 = \ldots = \angle C_n;$$

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{C_2A_2}{C_2B_2} = \ldots = \frac{C_nA_n}{C_nB_n}.$$

Me piirdume koolis tavaliselt kahe kolmnurga vaatlusega, siis oleksid nende sarnasuse tingimused järgmised:

$$\angle A_1 = \angle A_2; \quad \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2}; \quad \angle B_1 = \angle B_2; \quad \frac{B_1A_1}{B_1C_1} = \frac{B_2A_2}{B_2C_2};$$

$$\angle C_1 = \angle C_2; \quad \frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{C_2A_2}{C_2B_2};$$

Ehk lause kujul:

kaks kolmnurka on sarnased, kui neil vastavad nurgad on võrdsed ja vastavate nurkade lähisküigede mõõtarvud moodustavad võrde.

Nagu näeme, osutub võimalikuks funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse raames tunduvalt suurendada võrdelise sõltuvuse osatähtsust. Selleks on ainult vajalik kõikjal, kus kohtume võrdelise sõltuvusega, nimetada teda tema õige nimega.

4. Pöördvõrdeline sõltuvus

Pöördvõrdelise sõltuvuse käsitlemine peaks toimuma sama skeemi kohaselt, mida on kasutatud võrdelise sõltuvuse esitamisel. Seega tuleks ka siin lähtuda õpilastele juba tuttavatest konkreetsetest näidetest ja esitada vastavad tabelid. Pöördvõrdelise sõltuvuse illustreerimiseks on sobiv kasutada ka võrdelise sõltuvuse kohta toodud näiteid, kusjuures konstantset suurust vaadeldakse nüüd muutuvana ja sõltuvat muutujat konstantsena.

Õppe- ja metoodilises kirjanduses on pöördvõrdelise sõltuvuse defineerimiseks kasutatud peamiselt nelja järgmist sõnastust.

1. *Üks suurus sõltub teisest pöördvõrdeliselt, kui selle teise suuruse väärtuste kasvades (kahanedes) mingi arv korda esimese suuruse väärtused kahanevad (kasvavad) sama arv korda.*

2. *Kui ühe suuruse mistahes kahe väärtuse suhe on võrdne teise suuruse vastavate väärtuste pöördsuhtega, siis niisuguseid suurusi nimetatakse pöördvõrdelisteks.*

3. **Üks suurus oleneb teisest pöördvõrdeliselt, kui nende suuruste vastavate väärtuste korrutised on võrdsed.**

4. *Võrrandiga $xy = k$, kus k on mingi kindel nullist erinev arv, väljendatud kahe suuruse vahelist sõltuvust nimetatakse pöördvõrdeliseks sõltuvuseks.*

Need definitsioonid on analoogilised eespool toodud võrdelise sõltuvuse definitsioonidega ning hinnang nende kohta matemaatika metoodika seisukohast jääb samasuguseks. Nii seame ka siin eesmärgiks välja jõuda kolmanda definitsioonini.

Nagu juba eespool rõhutatud, oleks loomulik, et nii võrdelisele kui ka pöördvõrdelisele sõltuvusele antakse definitsioonid, mis on sõnastatud ühest ja samast põhimõttest lähtudes.

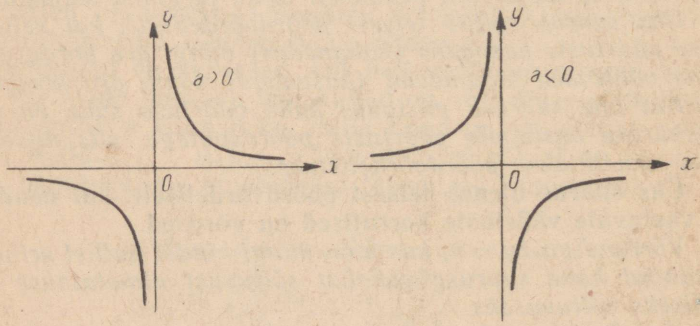
Kui pöördvõrdelises sõltuvuses olevate suuruste vastavate väärtuste tabelis mõni väärtus puudub, siis leitakse see väärtus pöördvõrdelise sõltuvuse definitsioonist lähtudes võrrandi

$$ab = cx$$

lahendamise teel. Võrde lahendamise seisukohalt saame tulemuse, mis saadakse pärast sise- ja välisliikmete korrutamist. Et nii võrdelises kui ka pöördvõrdelises sõltuvuses olevate suuruste väärtuste tabeli täiendamine viib võrde lahendamisele, siis vigade vältimiseks ülesannete lahendamisel on vaja jõuda selgusele, kas tegemist on suurustega, mille vastavate väärtuste jagatised on võrdsed, või suurustega, mille vastavate väärtuste korrutised on võrdsed.

Pöördvõrdelise sõltuvuse graafiliseks vasteks on teatavasti v õ r d h a a r n e h ü p e r b o o l. Kui senini on joonestatud sõltuvuste graafikuid, mis esituvad pidevate joontena, siis nüüd kohtutakse graafiku katkemisega. Tuginedes toodud kolmandale definitsioonile, mille kohaselt $xy = a$, veendutakse, et pöördvõrdelise sõltuvuse graafik võib asuda kas esimeses ja kolmandas veerandis (kui $a > 0$) või teises ja neljandas veerandis (kui $a < 0$) (joon. 12). Sellest valemist selgub ka, et ühe suuruse väärtusel null teisel suurusel väärtus puudub ja järelikult sellel kohal graafik katkeb. Võrdhaarse hüperbooli harud on aga kergesti skitseeritavad, kuna samast valemist ilmneb, et mida väiksem on x absoluutväärtus, seda suurem peab see olema y-l ja vastupidi.

Võrdhaarse hüperbooli joonestamisel tuleb muidugi arvestada ka neid märkusi, mis on tehtud võrdelise sõltuvuse graafiku kujutamise kohta.



Joon. 12.

5. Lineaarne sõltuvus

a) L i n e a a r s e s õ l t u v u s e d e f i n i t s i o o n

Lineaarse sõltuvuse tutvustamisel võiks lähtekohaks valida ülesande ühtlasel liikumisel läbitud tee pikkuse sõltuvuse kohta ajast, mida vaadeldi juba võrdelise sõltuvuse juures. Nüüd seatakse aga probleem õpilaste ette nii, nagu oleks varem osa teest juba läbitud. Konkreetselt võiks probleemi seostada näiteks õpilaste matkagrupi liikumisega. Esialgu minnakse kuni linna piirini, mille kaugus koolimajast on s_0 km ja sealt edasi ühtlase kiirusega kuni järgmise peatuskohani. Kui nüüd saadud sõltuvusvalemi abil koostada sõltuva muutuja väärtuste tabel ja võrrelda seda vastava võrdelise sõltuvuse tabeliga, siis sealt ilmnebki lineaarse ja võrdelise sõltuvuse vaheline erinevus. Selle erinevuse rõhutamiseks on otstarbekas anda t, vt ja $s_0 + vt$ väärtused ühes tabelis

t	vt	s_0+vt

Olgu vastavad konkreetsed andmed näiteks järgmised.

VAATLUSPROTOKOLL

Jalgrattamatkal läbitud tee pikkus

Aeg tundides (alates linna piirist)	Läbitud tee pikkus kilomeetrites	
	Linna piirilt	Koolimaja juurest
1	12	16
2	24	28
3	36	40
4	48	52
5	60	64

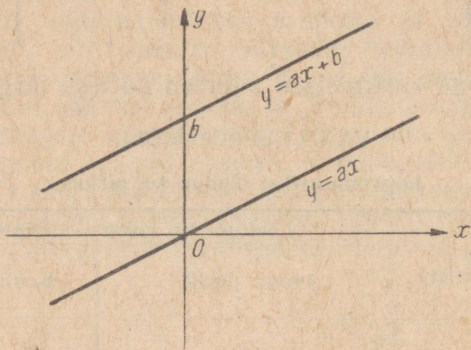
Sellest tabelist on ilmne, et kui muutuvateks suurusteks on aeg ja tee pikkus linna piirilt arvates, siis need on võrdelises sõltuvuses, sest vastavate väärtuste suhted on kõik võrdsed 12-ga. Meid huvitab aga sõltuvus aja ja tee pikkuse vahel koolimaja juurest arvates. Nende suuruste vahel ei ole võrdelist sõltuvust, sest

$$\frac{16}{1} \neq \frac{28}{2} \neq \frac{40}{3} \neq \frac{52}{4} \neq \frac{64}{5}.$$

Võime aga tähele panna, et viimases tabeliveerus antud arvud erinevad eelmisest 4 võrra, s. t. koolimaja asus linna piirist 4 km kaugusel. Seega on meid huvitav sõltuvus saadud võrdelisest sõltuvusest, kui seal ühe muutuva suuruse väärtustele lisada üks ja seesama konstant. Sel teel saadud sõltuvust nimetatakse l i n e a a r s e k s s õ l t u v u s e k s. Niisiis võime igast võrdelise sõltuvuse tabelist saada kergesti lineaarse sõltuvuse tabeli. Et võrdelises sõltuvuses olevate suuruste vahel kehtis seos $y = ax$, kus x ja y on võrdelises sõltuvuses olevate muutuvate suuruste vastav väärtuspaar ja a on konstant, siis

lineaarses sõltuvuses olevate suuruste vahel kehtib seos $y = ax + b$, kus x ja y on lineaarses sõltuvuses olevate muutuvate suuruste vastav väärtuspaar ning a ja b on konstandid.

Ka lineaarse sõltuvuse graafiku võrdlemine temale vastava võrdelise sõltuvuse graafikuga näitab lineaarse sõltuvuse erinevust võrdelisest sõltuvusest (joon. 13). Nad mõlemad esituvad küll sirgetena, kuid lineaarse sõltuvuse graafikut on alati võimalik saada vastavast võrdelise sõltuvuse graafikust paralleellükke abil.



Joon. 13.

Edasi tuleks tuua teisigi näiteid lineaarse sõltuvuse esinemise kohta igapäevases elus. Niisugustena tuleksid esmajärjekorras kõne alla: telegrammi koguhinna sõltuvus sõnade arvust, seos Fahrenheiti ja Celsiuse kraadide vahel, raamatu trükkimise eest makstava koguhinna sõltuvus trükipoognate arvust jne.

Esitatud konkreetsete näidete jaoks koostatud sõltumatu ja sõltuva muutuja väärtuste tabelitest selgub ka veel teinegi lineaarse sõltuvuse iseloomulik omadus. Ja nimelt, et sõltumatu muutuja väärtuste kasvades võrdsete arvude võrra sõltuva muutuja väärtused kasvavad samuti võrdsete arvude võrra. Vastavatel graafikutel võib aga näidata, et võrdsetele abstsissi väärtuste vahedele vastavad võrdsed ordinaadi väärtuste vahed. Tuginedes sellele omadusele võime lineaarset sõltuvust defineerida ka järgmiselt:

üks suurus sõltub teisest lineaarselt, kui selle teise suuruse väärtuste võrdsetele vahedele vastavad esimese suuruse väärtuste võrdsed vahed.

Eespool rõhutasime vajadust tugineda sõltuvuste defineerimisel vastavate funktsioonide tabelilisele esitusele. Võrdelise ja pöördvõrdelise sõltuvuse korral oli tabelilisest esitusest neile iseloomulik omadus kohe väljaloetav. Praegune lineaarse sõltuvuse defineerimiseks kasutatud omadus pole tabelist nii kergesti läbinähtav ja nõuab lisaks muutuvate suuruste väärtuste veergudele ka nende vahede veergude esitamist.

Eespool oli antud soovitus defineerida lineaarset sõltuvust võrdelise sõltuvuse kaudu. Seal toodud mõttekäigus, mis tugines sõltuvuse tabelilisele esitusele, jõuti lõpuks välja seoseni $y = ax + b$. On mõeldav, et saadud tulemus võetakse aluseks lineaarse sõltuvuse defineerimisel seosena $y = ax + b$. Selline defineerimisviis vastaks võrdelise ja pöördvõrdelise sõltuvuse juures toodud 4. definitsioonile. Kuid nagu öeldud, et siin 3. definitsioonile analoogiline defineerimine on seotud raskustega ja kui selle valemi sisu on tabeli abil eelnevalt küllaldaselt selgitatud, siis on arvata, et see omandatakse teadlikumalt kui definitsioon vahede kaudu. Paljudes kooli õpikuis ongi lineaarset sõltuvust defineeritud viimatinimetatud seose kaudu. Vastav ettevalmistus tabelilise esituse kaudu aga puudub.

b) Lineaarvõrrandisüsteemi graafiline lahendamine

Kehtivate matemaatika programmide kohaselt jõutakse lineaarse sõltuvuse juurde enne lineaarvõrrandisüsteemide käsitlemist kahe tundmatuga lineaarvõrrandi esitamise kaudu. Lähtudes aga funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse eesmärkidest, kus rõhutatakse sõltuvuste iseseisva käsitluse vajadust, oleks loomulik, et lineaarse sõltuvuse küsimusi käsitletakse käesolevas peatükis esitatud materjali ulatuses veel enne, kui asutakse lineaarsete võrrandite lahendamisele. Niisugusel juhul osutuks võimalikuks lineaarvõrrandi lahendamist siduda lineaarse sõltuvusega, ja nimelt, lineaarvõrrandi lahendamine tähendaks lineaarse sõltuvuse tabelis selle väärtuspaari leidmist, kus $y = 0$. Lineaarvõrrandisüsteemide lahendamisel on aga iga kahe tundmatuga lineaarvõrrandit võimalik teisendada kujule $y = ax + b$, s.t. neid võrrandeid on võimalik vaadelda lineaarse sõltuvuse analüütiliste eeskirjadena. See vaatekoht võimaldab lineaarset võrrandisüsteemi lahendada ja seejärel ka uurida lahendite arvu graafiliselt.

Esitades lineaarvõrrandisüsteemi kujus

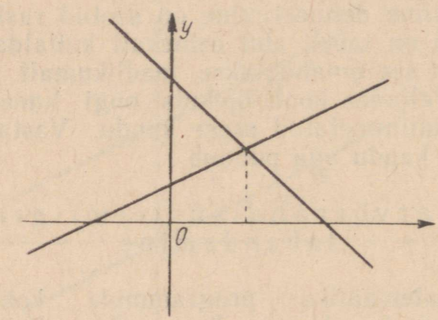
$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2, \end{cases}$$

võib seda tõlgendada kui ülesannet:

leida kahest lineaarse sõltuvuse tabelilisest esitusest üks ja sama väärtuspaar.

Et aga tabelid pole täielikud ja seetõttu võib sealt otsitav väärtuspaar parajasti puududa, siis on ilmne, et sellise tabelitest otsimise meetodiga seda ülesannet alati ei lahenda. Järgneb katse ülesande lahendamiseks graafilisel meetodil. Et mõlemad võrdused esitavad lineaarset sõltuvust, siis vastab neile kummalegi koordinaatteljestikus sirge. Antud ülesannet saab tõlgendada ülesandena:

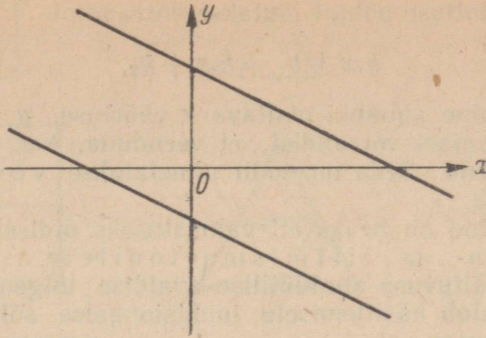
leida ühe muutuva suuruse väärtus, mille puhul teise muutuva suuruse väärtused on võrdsed, s. t. *graafikult tuleb leida see abstsissi väärtus, millele vastavad ordinaatlõigud on võrdsed* (joon. 14).



Joon. 14.

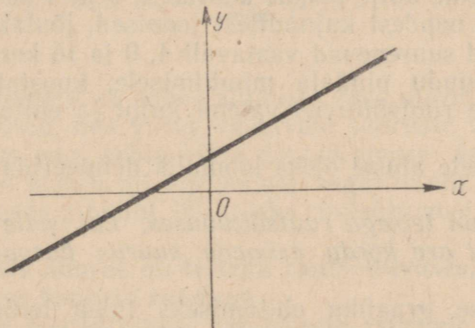
Kui sirged lõikuvad, siis lõikepunkti abstsiss- ja ordinaatlõigud rahuldavad seda tingimust. Ja nii saadaksegi lineaarvõrrandisüsteemi lahendiks vastavate sirgete lõikepunkti koordinaadid, mis leitakse jooniselt mõõtmise teel. Kui aga osutub, et sirged on paralleelsed, siis eelnimetatud ülesandel ja sellega ka lineaarsel võrrandisüsteemil puudub lahend.

Lineaarse võrrandisüsteemi graafilise lahendamise juures on sobiv koht mõistete muutuv suurus ja tundmatu erinevuse selgitamiseks, sest sageli need mõisted samastatakse. Tuleb kindlalt rõhutada tundmatu ühtekuulumist võrrandi mõistega ja muutuva suuruse ühtekuulumist funktsiooni mõistega. Kui vaadeldakse eraldi kahe lineaarse sõltuvuse analüütilisi avaldisi, siis andes ühele muutuvale suurusele vabalt väärtusi, leiame neile vastavad teise muutuva suuruse väärtused. Nii on võimalik leida eraldi mõlema sõltuvuse jaoks lõpmata palju arvupaare, mille graafiliste vastetena esituvad punktid kujutavad sirgeid. Kui on aga tegemist võrrandisüsteemiga, millel on üks lahend, siis rahuldab teda üksainus arvupaar, s. t. tundmatutel on kummalgi ainult üks väär-



Joon. 15.

tus. Sellele arvupaarile vastab graafikul üks kindel punkt (joon. 14). Kui süsteemi võrranditele vastavad sirged on paralleelsed, s. t. ühine punkt puudub (joon. 15), siis on see ilmseks tunnuseks, et tundmatutele ei leidu väärtusi. Juhul aga, kui on tegemist ühtivate sirgetega (joon. 16), siis on muutuvate suuruste väärtused ka tundmatute väärtusteks.



Joon. 16.

Et õpilased saavad ülesannete graafilisel lahendamisel erinevaid vastuseid, mis on tingitud joonise valmistamisel ja mõõtmisel tehtud vigadest, siis kerkib üles vajadus leida lahendusmeetod, mis annaks täpse lahendi. Selliseks meetodiks on a r v u t u s l i k m e e t o d. Siin on sobiv lähtuda samast kaalutlusest, mis esines graafilise meetodi juures: tuleb leida see ühe muutuva suuruse väärtus, mille puhul teise muutuva suuruse väärtused on võrdsed. Selline lähtekoht sobib muidugi ainult siis, kui võrrandisüsteem on esitatud kujus

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

Nimetatud kaalutluse põhjal jõutakse võrrandini

$$k_1x + b_1 = k_2x + b_2,$$

mille lahendamine annabki otsitava x väärtuse. y väärtus tuleb aga leida mõlemast võrrandist, et veenduda, kas tõepoolest on leitud õige lahend. Seda meetodit nimetatakse v õ r d l u s m e e t o d i k s.

Võrdlusmeetod on heaks ettevalmistuseks üldiselt kasutatavatele a s e n d u s- ja l i i t m i s m e e t o d i t e l e.

Lineaarse sõltuvuse analüütilise avaldise tõlgendamine sirge võrrandina kuulub käsitlemisele funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses.

6. Ruutsõltuvus

a) R u u t s õ l t u v u s e d e f i n i t s i o o n

Ruutsõltuvuse käsitlemist on sobiv alustada ruudu, korrapärase kolmnurga ja korrapärase kuusnurga pindalade muutumise vaatlemisest, kui nende külje pikkus kasvab 2, 3 ja 4 korda.

Valmistades nendest kujunditest joonised, jõutakse veendumusele, et pindalad suurenevad vastavalt 4, 9 ja 16 korda (joon. 17).

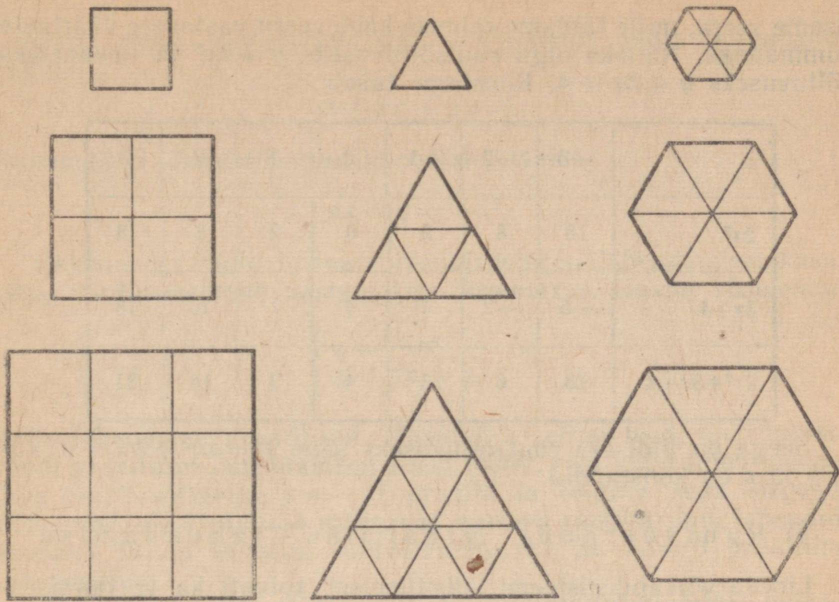
Tuginedes ruudu pindala muutumisele, koostatakse ruutude tabel, esitatakse ruutsõltuvus valemi kujul ja ehitatakse seejärel tema graafik.

Toodud näidete alusel oleks loomulik defineerida ruutsõltuvust järgmiselt:

üks suurus on teisega ruutsõltuvuses, kui selle teise suuruse kasvades mingi arv korda esimene suurus kasvab sama arvu ruudu kordseks.

Ruutsõltuvuse graafiku ehitamiseks tuleb leida funktsiooni väärtusi ka argumendi negatiivsete väärtuste korral. Selles piirkonnas aga toodud definitsioon ei kehti, sest nüüd teise suuruse kasvades esimene suurus kahaneb. Üldisema definitsiooni leidmiseks esitame järgmise tabeli. Arvutamise hõlbustamiseks esitame ta kolmerealisena.

Külje pikkus	1	2	3	4	5
Ruudu pindala	1	4	9	16	25
Korrapärase kolmnurga pindala	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	$4\sqrt{3}$	$\frac{25\sqrt{3}}{4}$



Joon. 17.

Tabelist ilmneb, et kahes alumises reas olevate väärtuste jagatised on võrdsed, mis viitab vastavate suuruste võrdelisusele. Viimane omadus ongi sobiv võtta ruutsõltuvuse defineerimisel aluseks, sest see kehtib nii argumendi negatiivsete väärtuste kui ka negatiivse kordaja puhul. Nii tuleks ruutsõltuvust defineerida järgmiselt:

üks muutuv suurus on teisega ruutsõltuvuses, kui ta on võrdeline selle teise suuruse ruuduga.

Tuginedes ruutsõltuvuse tabelilisele esitusele joonestatakse ka vastavad graafikud.

Siinjuures tuleb tähele panna, et kui sõltumatu muutuja omandab ainult positiivseid väärtusi, siis saame graafikuks pool parabooli. Korrapärase kolmnurga pindala kohta toodud tabelile vastav graafik on esitatud joonisel 18.

On saanud tavaks, et ruutvõrrandite lahendamine toimub VIII klassis. Rõhutades sõltuvuste primaarsust vastavate võrrandite suhtes, tuleks siingi tutvuda üldise ruutsõltuvusega enne, kui asutakse ruutvõrrandite lahendamisele.

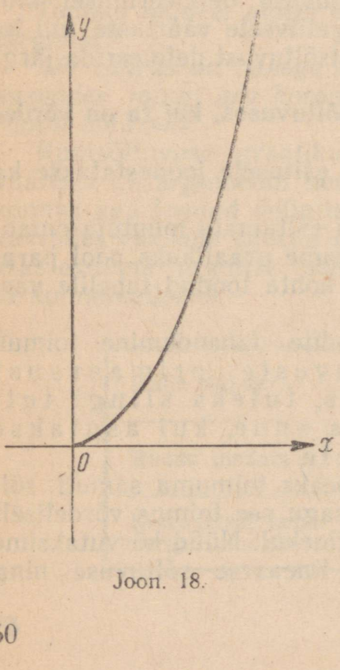
Üldise ruutsõltuvusega tutvumine peaks toimuma samuti sõltuvuse laiendamise põhimõtte alusel, nagu see toimus võrdeliselt sõltuvuselt lineaarsele sõltuvusele üleminekul. Nüüd kõrvutaksime ühes tabelis hariliku ruutsõltuvuse ja lineaarse sõltuvuse ning lisame veeru, mille täidame eelmise kahe veeru vastavate väärtuste summadega. Näiteks olgu ruutsõltuvuseks $y=2x^2$ ja lineaarseks sõltuvuseks $y=3x+4$. Koostame tabeli

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$3x+4$	—5	—2	1	4	7	10	13
$2x^2+3x+4$	13	6	3	4	9	18	31

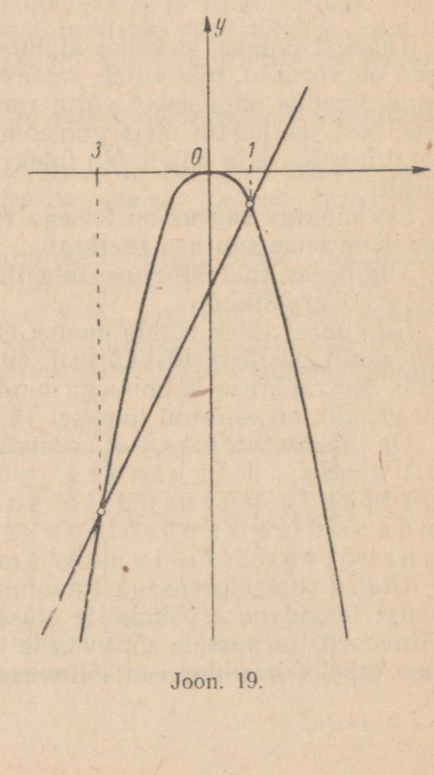
Seega on üldiseks ruutsõltuvuseks seos $y=ax^2+bx+c$, kus a, b ja c on konstandid.

b) Ruutvõrrandi graafiline lahendamine

Lineaarvõrrandisüsteemi käsitlemisel tutvuti ka võrrandisüsteemi graafilise lahendamisega. Seda lahendusmeetodit on võimalik rakendada ka ruutvõrrandi lahendamisel.



Joon. 18.



Joon. 19.

Olgu antud ruutvõrrand $ax^2+bx+c=0$, mille teisendame kujule

$$x^2+px+q=0.$$

Kanname x^2 võrduse paremale poolele, saame

$$px+q=-x^2.$$

Rakendades nüüd lineaarvõrrandisüsteemi lahendamisel kasutatud võrdlusmeetodit vastupidises järjekorras, jõuame süsteemini

$$\begin{cases} y=-x^2 \\ y=px+q, \end{cases}$$

mille lahendame graafiliselt. Kasutades sellist teed, on ruutvõrrandi graafilisel lahendamisel enam mõtet, sest nüüd tuleb joonestada ainult sõltuvuse $y=-x^2$ graafik ja lõigata seda sirgega. Lõikepunktide abstsissid määravad vastava ruutvõrrandi lahendid. Joonisel 19 on esitatud ruutvõrrandi $x^2+2x-3=0$ graafiline lahendamine.

See lahendusvõte viib meid ruutvõrrandisüsteemide juurde, sest on ju meil süsteemis üks teise astme võrrand. Sellega seoses kerkib aga üles küsimus, kui ulatuslikult tuleks VIII klassis ruutvõrrandisüsteeme käsitleda. Kui vaadelda seda küsimust graafilise lahendamise seisukohalt, siis ruutvõrrandisüsteemide graafiline lahendamine võimaldab tutvustada ka teisi teist järku jooni peale parabooli. Õieti tutvusid õpilased võrdhaarse hüperbooli ja parabooliga juba pöördvõrdelise sõltuvuse ja ruutsõltuvuse käsitlemisel. Võõrad on neile teist järku joontest veel ringjoon ja ellips. Küsimust tervikuna vaadeldes tuleb siiski arvestada asjaolu, et võrrandisüsteemide graafilise lahendamise tähtsus seisneb eeskätt ikkagi võrrandisüsteemi lahendite mõiste ja lahendite arvu selgitamises. Praktiliselt on ruutvõrrandisüsteemide graafiline lahendamine vähese väärtusega, kuna numbriline töö viib rutemini eesmärgile ja kindlustab ka täpsema tulemuse.

Seega jääb veel probleem, missuguses ulatuses teostada ruutvõrrandisüsteemide numbrilist arvutamist. Et ruutvõrrandisüsteemidele taanduvaid ülesandeid on suhteliselt vähe, siis võiks see süsteemide hulk piirdudagi nendega, mis tulid kõne alla graafilisel lahendamisel.

Peale ruutvõrrandi graafilise lahendamise tuletatakse muidugi ka ruutvõrrandi lahendivalem, mille abil saadakse lahendid ka sellele süsteemile, mida kasutati ruutvõrrandi graafiliseks lahendamiseks. Nüüd osutub võimalikuks kontrollida ka graafikult saadud lahendite täpsust.

*

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse sisust ja käsitlusmeetoditest selgub, et selle kursuse ülesandeks on luua ettekujutus suurustevahelistest sõltuvustest, valmistades sellega õpilasi ette järgneva funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilise kursuse käsitlemiseks. Vaatluse all olnud neljast sõltuvusest: võrdelisest, pöördvõrdelisest, lineaarsest ja ruutsõltuvusest on kaheldamatult igapäevases elus kõige sagedamini esinevad esimesed kaks. Et need sõltuvused oma iseloomult on teineteisele lähedased ja et nende defineerimisel tabelilisele esitusele tuginedes ei esine mingeid raskusi, siis on loomulik, et propedeutilise kursuse sõltuvuste osa algab just nende sõltuvustega. Lineaarne ja eriti ruutsõltuvus nõuavad õpilastelt juba avaramaid teadmisi ning seetõttu oleks nende käsitlemiseks sobivad VII ja VIII klass. Nende kahe sõltuvuse defineerimine on samuti seotud mõningate raskustega, sest tabelid ei anna neil juhtudel ($y=ax+b$, $y=ax^2+bx+c$) läbinähtavaid tunnuseid. Seetõttu ollakse siin sunnitud tabelilist esitust siduma analüütilise esitusega. See ei tähenda aga seda, et lineaarset sõltuvust defineeritaks valemina $y=ax+b$ või üldist ruutsõltuvust valemina $y=ax^2+bx+c$, vaid esimesel juhul on tegemist võrdelise sõltuvuse laiendamisega ja teisel juhul hariliku ruutsõltuvuse laiendamisega.

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses ei tõestata mingeid omadusi, vaid vaatluse all olevaid sõltuvusi iseloomustatakse nende tähelepanekute alusel, mis tulevad ilmsiks tabeli vaatlemise, graafiku mõõtmise või valemi juures, s. t. baseerub vaatlusele ja mõõtmisele, nii nagu see on omane igale propedeutilisele kursusele.

On iseloomustav, et kõne all olev kursus on läbi põimitud konkreetsete näidetega ja ei piirdu ainult abstraktsete sõltuvuste esitamisega. Esitatavatelt näidetelt nõuame aga, et need oleksid tihedas kooskõlas meid ümbritseva eluga. See on garanteeritud eriti neil juhtudel, kui õpilased koguvad ise andmeid vaatlusprotokollidesse. See töövorm mitmekesistab õpilaste tegevust ja pakub neile suurt huvi.

FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE KÜSIMUSTE SÜSTEMAATILINE KÄSITLUS

Funktsionaalse sõltuvuse küsimuste süstemaatilise käsitluse ülesandeks on süvendada propedeutilises kursuses omandatud teadmisi ja laiendada seal tundmaõpitud sõltuvuste valdkonda. Lähtekohaks saab nüüd funktsiooni mõiste ja kõik vaatluse alla tulevad funktsioonid on selle üldise mõiste erijuhud. Süstemaatilises kursuses on rõhutatud ka tõestuste osa. Kui propedeutilises kursuses tuginesid järeldused *vaatlusele* ja *mõõtmisele*, siis nüüd asendatakse see *loogilise arutlusega.* Mitmed omadused, mis propedeutilises kursuses loeti kehtivaiks *induktsioonile* või *analoogiale* tuginedes, esitatakse nüüd *teoreemidena.* Sellisteks omadusteks on näiteks vahede konstantsus lineaarse sõltuvuse korral ja korrapärase hulknurga külje ja pindala vaheline ruutsõltuvus.

Põhiteemadena tulevad funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses käsitlusele:

I funktsiooni mõiste,
II joone võrrand,
III lineaarne funktsioon,
IV ruutfunktsioon,
V astmefunktsioon,
VI eksponentfunktsioon,
VII logaritmfunktsioon,
VIII funktsiooni määramispiirkond.

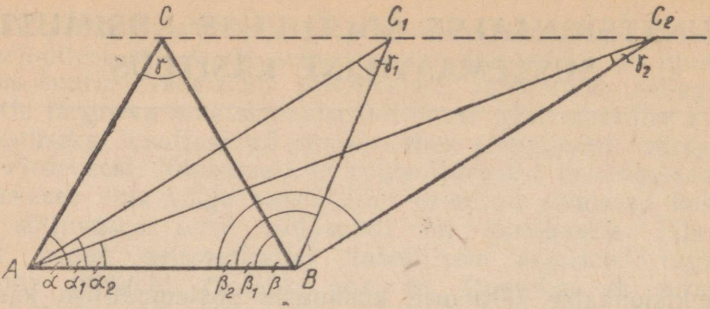
I. FUNKTSIOONI MÕISTE

1. Jäävad ja muutuvad suurused

Funktsionaalse sõltuvuse küsimuste süstemaatilist kursust on loomulik alustada jäävate ja muutuvate suuruste tutvustamisega. Nende mõistete selgitamiseks sobivad eriti järgmised küsimused kolmnurga elementide muutumise kohta:

missugused kolmnurga elemendid osutuvad muutuvaiks ja missugused jäävaiks, kui

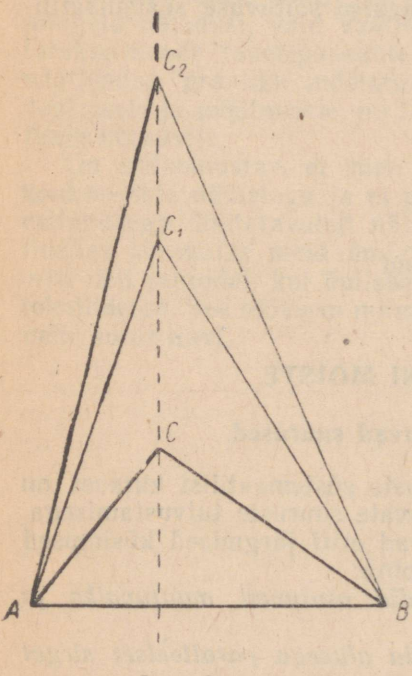
1) *aluse vastastipp liigub mööda alusega paralleelset sirget* (joon. 20),



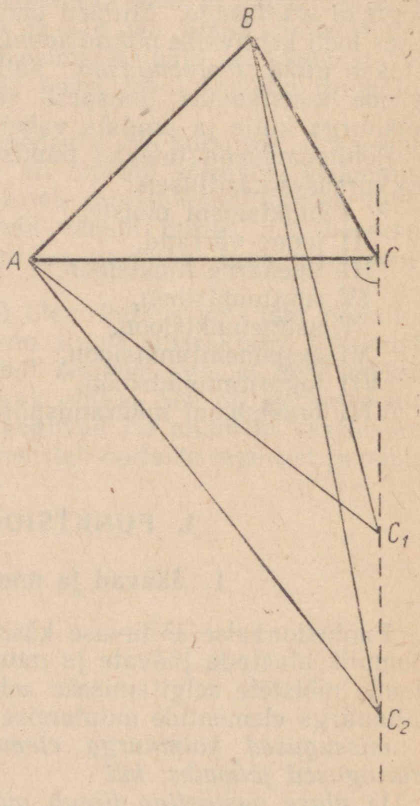
Joon. 20.

2) *võrdhaarse kolmnurga aluse vastastipp liigub mööda kõrgussirget* (joon. 21),

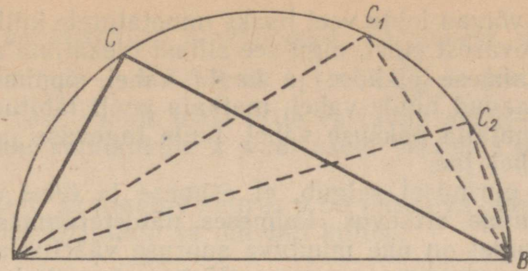
3) *tipp liigub mööda ühe lähiskülje ristsirget* (joon. 22).



Joon. 21.



Joon. 22.



Joon. 23.

4) *ringi diameetrile toetuva kolmnurga tipp liigub piki ringjoont* (joon. 23)?

Kindlasti tuleb siin esitada veel teisigi näiteid. Otstarbekas on sealjuures kasutada propedeutilises kursuses vaatluse all olnud probleeme. Näidetele tuginedes selgitatakse õpilastele, et r õ h u v e n a m i k m u u t u v a i d s u u r u s i o n s e l l i s e d, m i s ü h e k ü s i m u s s e a d e p u h u l o n m u u t u v a d, t e i s e p u h u l v õ i v a d o s u t u d a a g a k o n s t a n t s e i k s. Eriti vajab rõhutamist, et k õ i k j a l j a a l a t i k o n s t a n t s e i n a e s i n e v a i d s u u r u s i o n a i n u l t ü k s i k u i d. Niisuguste suurustena tutvustatakse õpilastele eukleidilises geomeetrias läbivõetavat *kolmnurga sisenurkade summat* ning *ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhet*.

2. Funktsionaalne sõltuvus

Järgnevaks ülesandeks oleks õpilastele funktsionaalsest sõltuvusest õige ettekujutuse loomine. Näidete varal jõutakse selgusele, et ühe või teise suuruse muutumist põhjustab mingi kolmanda suuruse muutumine. Nii on 2. näites (lk. 54, joon. 21) pindala muutumine põhjustatud kõrguse muutumisest; ümbermõõdu muutumine külgede BC ja AC muutumisest; kõrguse, külgede BC ja AC, samuti kõigi nurkade muutumine tipu C nihkumisest piki kõrgussirget. Seega on õigustatud ütlus, et pindala sõltub kõrgusest; ümbermõõt külgede pikkusest; kõrgus, küljed BC ja AC ning kõik nurgad aga kaugusest CC_1, $CC_2, \ldots$. Eriti vajab siinkohal esiletoomist, et niipea, kui punkti C asukoht on fikseeritud, omavad kõik kõne all olnud muutuvad suurused kindla arvulise väärtuse.

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilisest kursusest on õpilastel teada, et näiteks ruudu pindala sõltub ruudu külje pikkusest, ringjoone pikkus raadiusest, läbitud tee pikkus konstantse kiiruse puhul ajast, metallvarda pikkus temperatuurist, voolu tugevus jääva takistuse korral pingest jne.

Õpilased võivad leida veel lisaks nimetatutele küllalt palju sõltuvusi igapäevasest elust, olgu see sillast ülekäijate arvu ja kellaaja vahel, inimese pikkuse ja kaalu vahel, õppimiseks kulutatud aja ja saadud hinde vahel, matkaja poolt läbitud tee pikkuse ja tema saapatalla paksuse vahel, tuule tugevuse ja pesu kuivamise aja vahel jne.

Lähemal uurimisel selgub, et esimese ja teise näideterühma vahel on oluline erinevus. Esimeses näideterühmas tutvustatud sõltuvuste korral on ühe muutuva suuruse väärtus määratud niipea, kui teise muutuva suuruse väärtus on antud. Näiteks, kui ruudu külg on 2 cm, siis tema pindala on 4 cm^2; kui keha liigub 4 tundi kiirusega 5 $\frac{km}{t}$, siis tema poolt läbitud tee pikkus on 20 km jne. Teise näideterühma sõltuvuste korral ei määra aga ühe suuruse etteantud väärtus veel teise suuruse väärtust. Näiteks ei ole meil alust öelda, et inimene, kes kaalub 80 kg, on 180 cm pikk, või et kell 9 on Tartu jalakäijate sillast ülekäijaid 25, või et kui kodus on õppimiseks kulutatud 5 tundi, siis koolis saab ka ainult hindeid 5 jne.

Toodud näidete ja nende uurimise põhjal veendutaksegi, et on olemas kaht liiki teineteisest põhiliselt erinevaid muutuvate suuruste vahelisi sõltuvusi: funktsionaalsed ja stohastilised. Sellise arutelu põhjal peaksid õpilased jõudma iseseisvalt järgmiste definitsioonide juurde:

sõltuvust, kus ühe muutuva suuruse igale võimalikule etteantud väärtusele vastab teise muutuva suuruse teatud kindel väärtus, nimetatakse funktsionaalseks

ja

sõltuvust, kus ühe muutuva suuruse igale võimalikule etteantud väärtusele vastab teise muutuva suuruse mingi väärtus, nimetatakse stohastiliseks.

Tuleb muidugi rõhutada, et koolimatemaatikas tegeldakse ainult funktsionaalse sõltuvusega. Sellega seoses tutvustatakse ka vastavaid termineid. Ja nimelt, et funktsionaalses sõltuvuses olevaid suurusi nimetatakse sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks ja sõltuvaks muutujaks ehk funktsiooniks.

3. Funktsiooni mõiste

Funktsiooni mõistet tuleks funktsionaalse sõltuvuse definitsioonile tuginedes defineerida seega järgmiselt:

me nimetame muutuvat suurust y teise muutuva suuruse x funktsiooniks, kui x igale võimalikule väärtusele vastab teatud kindel y väärtus.

Tuginedes sellele definitsioonile, tuleb kindlasti selgitada, et kõik seni vaatluse all olnud ja edaspidi vaatluse alla tulevad *algebralised avaldised on funktsioonid.* Tõepoolest, mõistes y all näiteks avaldisi: $2x-3$, $7x^2+2x-1$ või $\frac{2x-1}{4x^2+3}$ jne. ning andes siin x-ile väärtusi, saame leida neile vastavad avaldise väärtused, kusjuures igale võimalikule x väärtusele vastab kindel avaldise väärtus.

Seda tõsiasja, et muutuv suurus y on muutuva suuruse x funktsioon, saab üles kirjutada ka lühidalt kujus

$$y=f(x).$$

Sellise kuju andmine kahe muutuva suuruse vahelisele funktsionaalsele sõltuvusele on õigustatud eriti siis, kui tähis $f(x)$ on võetud kasutusele juba algebralise avaldise arvuliste väärtuste leidmise puhul.

Funktsionaalset sõltuvust tuleb koolis käsitleda nii, et ei tekiks väärarvamust, mille kohaselt näiteks lineaarse funktsiooni käsitlemisel y on funktsioon, $y=ax+b$ on funktsioon, aga $ax+b$ ei ole funktsioon! Et niisugust väärarvamust vältida, on vaja tõsta esile, et täht y on siin võetud kasutusele vaadeldava funktsiooni tähisena lühendamise otstarbel.

4. Funktsionaalse sõltuvuse esitusviise

Enamkasutatavaid funktsionaalse sõltuvuse esitusviise on teatavasti kolm: *analüütiline*, *tabeliline* ja *graafiline*. Et funktsionaalse sõltuvuse analüütilist esitust asendab sageli valem, siis sellega luuaksegi tavaliselt see väär ettekujutus, millest eespool oli juttu. Seepärast on just siin vaja ainet esitada nii, et ei samastataks funktsiooni mõistet ainult valemiga. *Funktsioon on oma analüütilises esituses ikkagi matemaatiline avaldis, mille lühemaks esitamiseks võetakse kasutusele uus täht ja see viib meid valemi juurde.*

Funktsiooni esitamisel tabeli kujul tavaliselt nimetatud viga ei tehta. Tabeli andmed, mis saadakse analüütilise esituse abil, kirjutatakse näiteks ka järgmiselt:

x	
$2x^2-3$	

Sageli esitatakse tabel ka kujus, kust ei ilmne, missugune on funktsiooni väärtuste arvutamise eeskiri. Seetõttu on järgmine tabeli pea kasutamine õigustatud neil juhtudel, kui see eeskiri pole teada

x	
y	

Mitte eriti soovitavaks tuleb lugeda tabelit

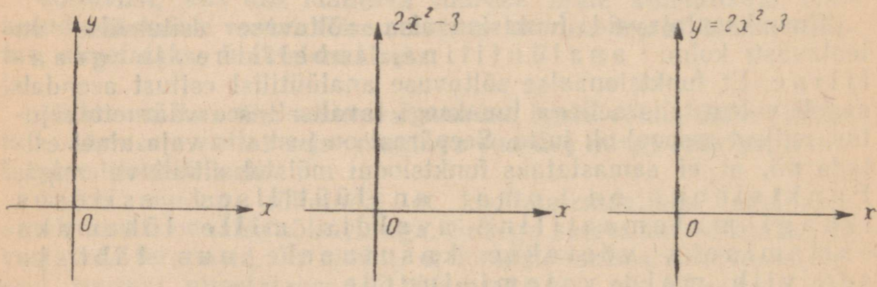
x	
$y=2x^2-3$	,

sest siin on tabeli peas üks suurus tähistatud kahekordselt. See võiks kõne alla tulla siis, kui funktsiooni väärtuste esitamiseks kasutatakse mitmerealist või mitmeveerulist arvutusskeemi (lk. 50).

Graafilise esituse korral tähistatakse ordinaattelge harilikult funktsiooni tähisega y.

Graafilises esituses me ei leia peaaegu kunagi ordinaattelge tähistatuna matemaatilise avaldise, s. t. funktsiooni endaga. Et aga süvendada õiget arusaamist funktsiooni mõistest, tuleks vahetevahel teha ka seda ja näidata, et just ökonoomsuse huvides tähistatakse ordinaattelge ühe tähega, mitte aga seepärast, et nagu ainult see täht oleks funktsioon ja vastav matemaatiline avaldis mitte.

Joonisel 24 on esitatud kolm ordinaattelje tähistusviisi, mis on samad tabelis kasutatud tähistustega. Esimene neist on meil alati kasutusel, teist võib soovitada juhul, kui teljestikku joonestatakse ainult ühe funktsiooni graafik ja kolmandat ei saa jällegi soovitavaks lugeda.



Joon. 24.

5. Funktsiooni defineerimisest

Siinkohal on huvitav jälgida, kuidas on funktsiooni mõistet seni matemaatilises kirjanduses defineeritud.

1748. a. E u l e r i poolt antud sõnastuses

muutuva suuruse funktsiooniks on a n a l ü ü t i l i n e a v a l d i s, mis on mingil viisil moodustatud sellest muutuvast suurusest ja konstantsetest arvudest.

Tänapäeval kasutatavates funktsioonide definitsioonides ilmneb aga teravalt D i r i c h l e t' ja L o b a t š e v s k i poolt antud definitsioonide mõju, sest viimastes *on esile tõstetud sõltumatu ja sõltuva muutuja väärtuste vahelist vastavust.*. Seoses hulga mõiste järjest laiema kasutuselevõtmisega kõigis matemaatika harudes *on ka funktsiooni defineerimisel hakatud rõhutama vastavust hulkade elementide vahel.*

II Ülevenemaalisel Matemaatikute Kongressil, mis toimus 1913. ja 1914. aasta vahetusel Moskvas, soovitas akadeemik S. N. Bernstein tugineda koolis funktsiooni defineerimisel just Euleri definitsioonile, kuid nõudis selle kõrval ka teiste definitsioonide tutvustamist. Kui vaadelda aga meie tänapäeva metoodilist kirjandust, siis soovitatakse seal funktsiooni mõistet esitada juba kahe hulga elementide vahelise vastavusena. Nii kirjutab oma metoodika õpikus V. Bradis: «Kuid viimaseil aastail on ilmunud rida töid, mis veenvalt näitavad üldise (tabelilise) definitsiooni eeliseid, definitsiooni, mis on rajatud hulga ideel ja vastavuse ideel, s. o. ideedel, mis olles kaasaegse matemaatika põhilisteks ideedeks, väärivad iseenesest koolis tarvituselevõtmist. Need kaks mõistet on nii lihtsad ja ühtlasi niivõrd üldised, et ilma neil eraldi peatumiseta saab neid võtta püsivale kasutamisele matemaatika tundides, lähendades sellega koolimatemaatikat mõnevõrra kaasaegsele teadusele.»[1]

Tänapäeva matemaatilises kirjanduses on funktsiooni mõiste defineerimisel hulga ja vastavuse ideed tõepoolest täielikult maksvusele pääsenud. Funktsiooni definitsioon antakse enamikus kõrgema matemaatika õpikuis järgmises sõnastuses:

suurust y nimetatakse hulgal M määratud suuruse x funktsiooniks, kui igale hulka M kuuluvale suuruse x väärtusele vastab üheselt määratud suuruse y väärtus.

Osa meil kasutusel olevate erialaste õpikute autoreid, nagu näiteks Smirnov, Bermant, Rägo ja tehnikumidele kirjutatud kõrgema matemaatika õpikute autorid Zaitsev ja Suvorov ei rõhuta vastavuse kõrval hulga mõistet. Osa autoreid, nagu Tolstov, Piskunov ja Borkvell nõuavad aga funktsiooni mõiste defineerimisel vastavuse kõrval ka veel vastavuse korraldamise eeskirja rõhutamist.

Kõigil nimetatud autoreil on funktsioon antud kas muutuva suuruse väärtuste hulgaga või eeskirjaga, mille järgi leitakse sõltuva muutuja väärtused sõltumatu muutuja väärtustest. Hoopis erineval seisukohal on I. V. Proskurjakov, kes elementaarmatemaatika entsüklopeedias «Энциклопедия элементарной математики» defineerib funktsiooni kui vastavust. Proskurjakovi seisukohta jagab Saksa Demokraatliku Vabariigi matemaatik J. Riedel, kes soovitab koolis funktsiooni defineerida järgmises sõnastuses:

---

[1] Bradis, V. Matemaatika õpetamise metoodika keskkoolis. Tallinn, 1957, lk. 245.

kui ühe muutuva suuruse x igale võimalikule väärtusele on seatud etteantud eeskirja kohaselt üheselt vastavusse üks y väärtus, siis nimetatakse seda vastavust funktsiooniks.[1]

On muidugi ilmne, et sellise definitsiooni kasutamine koolis pole võimalik, sest kuidas selgitada seal näiteks vastavuse diferentseerimist ja integreerimist või kuidas vastavuste liitmist ja astendamist.

Funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses teostatakse aga varemõpitu süvendavat kordamist, õpitakse tundma funktsionaalse sõltuvuse üldist olemust ja tutvutakse uute funktsioonidega. Sellest tingituna ei ole otstarbekohane selles kursuse osas säilitada funktsioonide definitsioonidena propedeutilises kursuses sõltuvuste jaoks antud sõnastusi, mis tuginevad nende tabelilisele esitusele. Kui tahaksime endist suunda jätkata, siis tekib siin raskusi eksponentfunktsiooni ja logaritmfunktsiooni defineerimisel. Et õpilased on funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilise kursuse õppimisel juba märksa vanemad (15—16-aastased), kes on võimelised ka abstraktsemat ainet mõistma, siis tuleb lugeda õigeks, et selles kursuse osas defineeritakse funktsioonid üldise definitsiooni alusel üldtähise $y=f(x)$ konkretiseerimise teel.

II. JOONE VÕRRAND

1. Joone võrrandi mõiste

Kui seame endale eesmärgiks tutvustada õpilastele funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses ka analüütilise geomeetria elemente, siis osutub vajalikuks peatuda eraldi joone võrrandi mõistel. *Esitab ju iga funktsionaalse sõltuvuse analüütiline eeskiri mõne joone võrrandit.* Vastava teema sisustamine IX klassi õpilastele võiks toimuda järgnevalt.

Kui on teada funktsionaalse sõltuvuse analüütiline eeskiri, siis saab selle abil esitada sama sõltuvuse tabelilise eeskirja. Vaadeldes tabelis esinevaid arvupaare tasapinna punktidena ja ühendades need punktid ladusa kõveraga, saame vaatluse all oleva sõltuvuse graafilise esituse.

On aga ilmselt selge, et saadud tabel on lünklik, sest seal pole võimalik fikseerida argumendi kõigile võimalikele väärtustele vastavaid arvupaare, mistõttu funktsiooni muutumine kahe tabelis antud väärtuse vahel pole tabeliga määratud. Ka selle tabeli abil saadud graafik on seetõttu puudulik. Esiteks, kui tabelis on lüngad, siis on selge, et pole teada, kuidas kulgeb funkt-

[1] Riedel, J. Die Begriffe «Funktion» und «Inverse Funktion», «Mathematik und Physik in der Schule», nr. 7, 1956, lk. 301.

siooni graafik kahe antud punkti vahel. Teiseks on graafiku ulatus jooniselehe suurusega piiratud. Ühiku vähendamisega on muidugi võimalik seda puudust vähendada, kuid mitte likvideerida. Kolmandaks tehakse ka graafiku joonestamisel ebatäpsusi.

Seega, lähtudes funktsiooni esitusest valemi kujus, on võimalik jõuda ainult oletatava graafikuni.

Kerkib üles küsimus, kas vastupidise ülesande puhul on võimalik leida täpset lahendust, s. t. *kas antud graafiku järgi on võimalik leida tema analüütilist eeskirja?*

Teostades graafikul mõõtmisi, saame tabelilise esituse ainult ligikaudsete arvudega, sest mõõtmine pole kunagi täpne. Tabel on juba oma olemuselt lünklik ja kui ta sisaldab ka ainult ligikaudseid andmeid, siis on iseenesest mõistetav, et ei tule kõne alla vastava analüütilise eeskirja leidmine.

Seega, üldiselt ei ole võimalik leida funktsionaalse sõltuvuse täpset analüütilist eeskirja tema graafiku järgi.

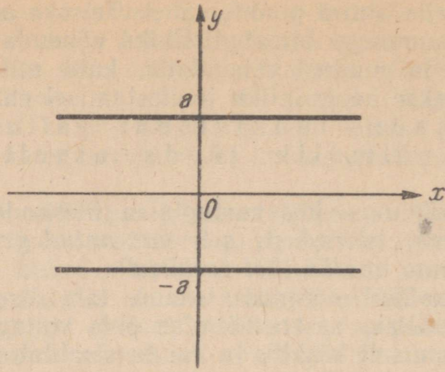
Osutub aga, et sellel üldisel reeglil on erandeid. Ja nimelt, kui graafikuks oleva joone kui punkti geomeetrilise koha definitsioon on teada, siis osutub võimalikuks leida täpne analüütiline eeskiri valemi kujus. Neil juhtudel me nimetame seda valemit vastava joone võrrandiks. Joone võrrandi leidmine osutub alati võimalikuks, kui graafikuks on sirge. Et leitud valem oleks antud joone võrrandiks, peavad seda võrrandit rahuldama antud joone kõikide punktide koordinaadid ja ainult need, s. t. kui asetame antud joone võrrandisse tundmatute asemele antud joone ükskõik missuguse punkti koordinaadid, siis võrdus peab jääma kehtima. Joonel mitteasetseva punkti koordinaatide puhul aga võrdus kehtima ei jää.

Joone võrrandi mõiste võimaldab funktsiooni analüütilisest esitusest saada ka tema täpset graafikut juhul, kui on teada missuguse joone võrrandit funktsiooni analüütiline esitus valemi kujul esitab.

2. Mõnede joonte võrrandite tuletamine

Selle teema käsitlemise raames tuleksid mõnede joonte võrrandid tuletada. Sellisteks joonteks võiksid olla näiteks koordinaattelgedega paralleelsete sirgete võrrandid; koordinaattelgede vaheliste nurkade poolitajad; sirgete võrrandid, kui nende sirgete lõikepunktid telgedega on teada; ringjoonte võrrandid, kui ringjoonte keskpunktid asetsevad koordinaatide alguses. Esitame lühidalt nende joonte võrrandite tuletamise käigu.

a) *Leida võrrand sirgele, mis on paralleelne x-teljega ja asetseb temast a ühiku kaugusel* (joon. 25).



Joon. 25.

Antud sirgega paralleelne sirge on teatavasti niisuguse punkti geomeetriliseks kohaks, mis antud sirgest asub antud kaugusel. Seega on meid huvitavatest sirgetest ühel kõigi punktide ordinaadid võrdsed a-ga, teisel $(-a)$-ga. See tõsiasi lubabki nende sirgete võrrandeid esitada kujus

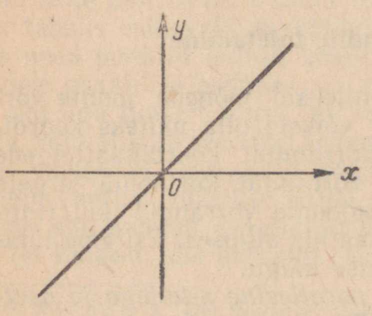
$$y = a \text{ ja } y = -a,$$

kus y tähendab vaadeldava joone mistahes punkti ordinaati.

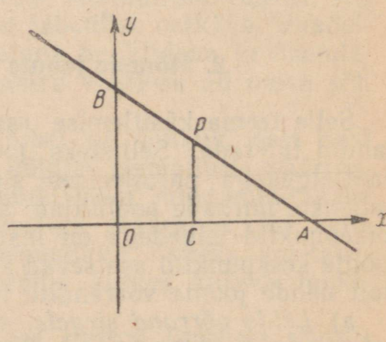
b) *Leida võrrand sirgele, mis poolitab koordinaattasapinna I ja III veerandi* (joon. 26).

Et nurgapoolitaja on niisuguse punkti geomeetriliseks kohaks, mis asetseb nurga haardest võrdsetel kaugustel, siis vaadeldaval sirgel asetsevate punktide abstsissid ja ordinaadid on võrdsed. See tõsiasi lubab meid otsitava sirge võrrandi esitada kujus

$$y = x \text{ ehk } y - x = 0,$$



Joon. 26.



Joon. 27.

kus x ja y tähendavad vaadeldava joone mistahes punkti koordinaate.

c) *Leida võrrand sirgele, mille lõikepunktid koordinaattelgedega on antud.*

Olgu sirge ja x-telje lõikepunktiks $A(p; 0)$ ning sirge ja y-telje lõikepunktiks punkt $B(0; q)$. Selle joone mistahes punktiks olgu punkt $P(x; y)$. Ülesandeks on leida võrrand, mis seoks punktide A, B ja P koordinaate.

Jooniselt 27 näeme, et

$$\triangle OBA \sim \triangle CPA$$

ja seega

$$\frac{CP}{OB} = \frac{CA}{OA}.$$

Et $CP = y$; $OB = q$; $CA = p - x$ ja $OA = p$, siis saame

$$\frac{y}{q} = \frac{p-x}{p},$$

mis ongi otsitava sirge võrrand. Teisendades seda võrrandit, saame

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

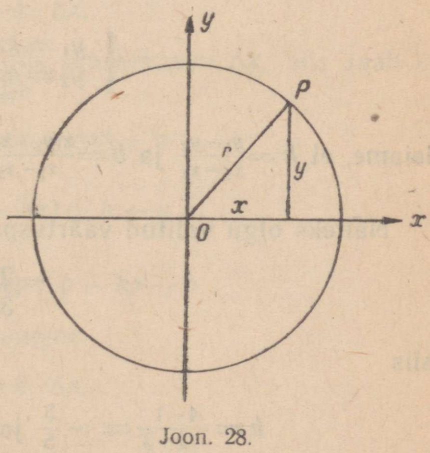
d) *Leida ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja tema raadius on r.*

Olgu $P(x; y)$ ringjoone mistahes punkt. Jooniselt 28 näeme, et selle punkti koordinaadid on seotud raadiusega järgmise võrduse abil

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Saadud võrrandit nimetataksegi r i n g j o o n e v õ r r a n d i k s.

On ilmne, et neid võrrandeid rahuldavad ainult vastava joone punktide koordinaadid.



Joon. 28.

III. LINEAARNE FUNKTSIOON

1. Lineaarse funktsiooni definitsioon

On loomulik, et funktsioonide käsitlemine funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses algab propedeutilises kursuses läbivõetud materjali meeldetuletamisega. Et seal kasutusele võetud definitsioonid tuginesid funktsiooni tabelilisele esitusele, siis siin oleks loomulik seada õpilased mitmete tabelite ette, kust nad peavad leidma, missugused neist esitavad võrdelist, missugused pöördvõrdelist, missugused lineaarset ja missugused ruutsõltuvust, tuginedes seejuures propedeutilises kursuses kasutusele võetud definitsioonidele.

Tuletades nüüd meelde kasutusele võetud funktsiooni definitsiooni ja üldtähist, jõutakse selgusele, et võrdus $y=f(x)$ esitub lineaarse funktsiooni korral kujus

$$y=kx+b.$$

Seega ollakse õigustatud lineaarset funktsiooni defineerima järgmiselt:

me nimetame funktsiooni $f(x)$ lineaarseks, kui ta avaldub kujus $kx+b$, kus x on argument ning k ja b konstandid.

2. Analüütilise eeskirja saamine tabelilisest esitusest

Võrrandis $y=kx+b$ on kaks parameetrit k ja b, mille määramiseks vajame tabelilisest esitusest ainult kaht väärtuspaari, näiteks x_1, y_1 ja x_2, y_2, sest lahendades süsteemi

$$\begin{cases} y_1=kx_1+b \\ y_2=kx_2+b, \end{cases}$$

leiame, et $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ ja $b=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$.

Näiteks olgu valitud väärtuspaarideks

$$\begin{array}{r|l} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{array}$$

siis

$$k=\frac{4-1}{-2-3}=-\frac{3}{5} \text{ ja } b=\frac{-2-12}{-5}=\frac{14}{5}.$$

Otsitavaks lineaarseks funktsiooniks on seega

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}.$$

3. Lineaarse funktsiooni põhiomadus

Juba funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses pandi tähele, et lineaarse sõltuvuse korral ühe muutuva suuruse võrdsetele vahedele vastasid teise muutuva suuruse võrdsed vahed. Esitades nüüd mitu lineaarset funktsiooni, kontrollitakse nende juures veel kord selle omaduse kehtivust ning seatakse eesmärgiks see omadus tõestada. Siin on õige koht terminoloogia avardamiseks sõnaga «*juurdekasv*» või viimasel ajal soovitatud sõnaga «*muut*». Nii üks kui teine neist sõnadest tähendab kas argumendi kahe järjestikuse väärtuse vahet (*argumendi juurdekasv*, *argumendi muut*) või funktsiooni kahe järjestikuse väärtuse vahet (*funktsiooni juurdekasv*, *funktsiooni muut*). Selle mõiste tähistamiseks võetakse kasutusele ka eri sümbolid. Nii kirjutame näiteks sõnade asemel «*argumendi muut*» — Δx.

Tõestatav lineaarse funktsiooni põhiomadus võiks olla sõnastatud järgmise teoreemina:

lineaarse funktsiooni muut on võrdeline argumendi muuduga, kusjuures võrdeteguriks on funktsiooni avaldises esinev argumendi kordaja.

Tõestus võiks aga kulgeda järgmiselt.

Eeldame, et on antud lineaarne funktsioon valemi kujul

$$y = kx + b$$

ja väidame, et

$$\Delta y = k \cdot \Delta x.$$

Tõestuseks anname argumendile juurdekasvu Δx, siis saab ka funktsioon juurdekasvu Δy. Seega

$$y + \Delta y = k(x + \Delta x) + b.$$

Siit

$$\Delta y = k(x + \Delta x) + b - y$$

ehk

$$\Delta y = k(x + \Delta x) + b - kx - b.$$

Avades sulud ja koondades, saame

$$\Delta y = k \cdot \Delta x,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Et kahe muutuva suuruse vaheline võrdelise sõltuvuse omadus on vastastikune, siis *lineaarse funktsiooni puhul on ka argumendi muut võrdeline funktsiooni muuduga.* Tõepoolest,

$$\Delta x = \frac{1}{k} \Delta y.$$

Kõne all olevale lineaarse funktsiooni põhiomadusele saab anda veel teise tõlgenduse. Nimelt võime tõestatud väite esitada kujus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

sest Δx (kui argumendi muut) ei ole 0. See kirjutis ütleb, et lineaarse funktsiooni avaldises argumendi kordaja näitab, kui palju muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus muutub ühiku võrra. Teiste sõnadega,

kordaja k näitab lineaarse funktsiooni muutumise kiirust.

4. Sirge võrrand

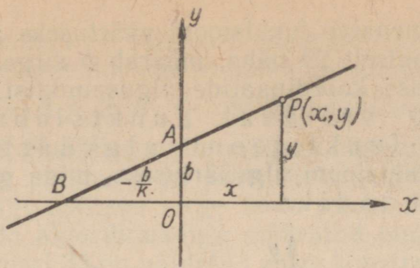
Keskkoolide matemaatika programmides varem sageli esinenud peatükk analüütilise geomeetria elementide kohta on viimasel ajal kaotanud seal oma iseseisva tähtsuse. Vastavaid küsimusi on hakatud käsitlema funktsionaalse sõltuvuse küsimuste raames. Juhul, kui kõrgema matemaatika elemendid lülitatakse ametlikku keskkooli matemaatika programmi, ka siis ei osutu ilmtingimata vajalikuks käsitleda analüütilise geomeetria küsimusi omaette. Kindlasti on aga siis tarvis suurendada analüütilise geomeetria üksikküsimuste osatähtsust funktsionaalse sõltuvuse käsitlemise raames.

Et lineaarsel võrrandil on kooli matemaatika kursuses küllaltki tähtis osa, siis oleks loomulik, et sirge võrrandile pühendataks senisest rohkem tähelepanu. See võiks toimuda järgmises ulatuses.

Et lineaarse funktsiooni graafikuks on sirge, seda oletavad õpilased juba vaadeldud näidete järgi. Nüüd võib seada ülesandeks tõestada see. Teoreemi sõnastus oleks lakooniline:

lineaarse funktsiooni graafikuks on sirge.

Kui tahetakse näidata, et igale funktsioonile $y = kx + b$ vastab koordinaatteljestikus sirge, siis leitakse algul selle funktsiooni graafiku kahe punkti koordinaadid: $A(0;\ b)$ ja $B\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$. Läbi nende kahe punkti tõmmatakse sirge ja näidatakse, et sellel sirgel asetseb funktsiooni $y = kx + b$ graafiku iga kolmas punkt $P(x;\ y)$, kus $y = kx + b$. Tõestus võiks kulgeda järgmiselt (joon. 29).



Joon. 29.

Eespool leidsime, et koordinaattelgedel asetsevate punktidega määratud sirge võrrand avaldub kujus

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1.$$

Antud juhul on $p=-\frac{b}{k}$ ja $q=b$. Seega esitub punktidega A ja B määratud sirge võrrand kujus

$$\frac{x}{-\frac{b}{k}}+\frac{y}{b}=1,$$

kust

$$y=kx+b.$$

Et otsitava sirge võrrand avaldub täpselt samasuguses kujus nagu lineaarse funktsiooni analüütiline avaldiski, siis on ilmne, et lineaarse funktsiooni tabelilisest esitusest võetud iga väärtuspaar $(x;\ kx+b)$ rahuldab leitud sirge võrrandit.

Et väljaspool seda sirget ei ole punkte, mille koordinaadid rahuldaksid viimast võrrandit, selles võib veenduda järgmiselt.

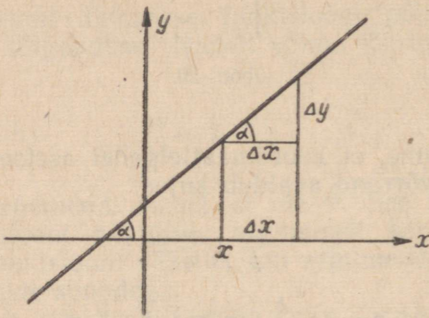
Oletame, et mingi abstsissi väärtuse x korral leidub punkt, mis ei asetse saadud sirgel ja mille koordinaadid rahuldavad võrrandit $y=kx+b$. Sellest järeldub, et abstsissi väärtusele x peab vastama kaks erinevat ordinaadi väärtust, mis rahuldavad seda võrrandit. See aga võimatu, sest andes võrrandis $y=kx+b$ x-le mingi kindla väärtuse, saame leida ainult ühe y väärtuse.

Edasi tuleks selgitada lineaarse funktsiooni avaldises esinevate parameetrite k ja b geomeetrilist tähendust. Juba teostatud arutlustest on teada, et

1) kui $x=0$, siis $y=b$,

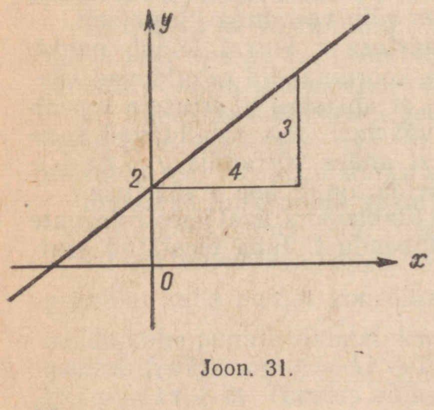
ja 2) et $\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$.

Seega on b lineaarse funktsiooni väärtuseks argumendi väärtusel 0. Nagu jooniselt 29 näha, määrab b sirge ja ordinaattelje lõikepunkti kauguse koordinaatide alguspunktist. Argumendi väärtusele 0 vastavat funktsiooni väärtust nimetatakse funktsiooni algväärtuseks. Seega on b lineaarse funktsiooni algväärtuseks, mida graafikul nimetatakse algordinaadiks.

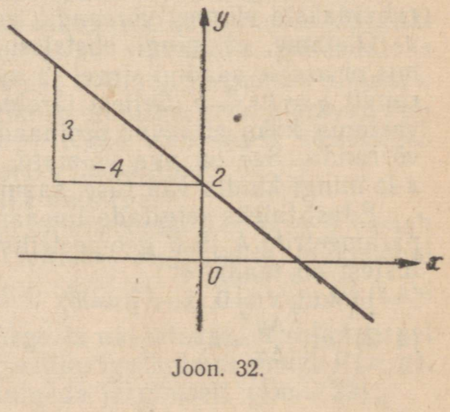


Joon. 30.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ esitab aga nurga α tangensit (joon. 30). Et nurk α on võrdne sirge ja x-telje positiivse suuna vahelise nurgaga, mida nimetatakse sirge tõusunurgaks, siis suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on võrdne tõusunurga tangensiga ehk nn. tõusuga. Et $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, siis kordaja k on vastava sirge tõusu numbriliseks väärtuseks. Sirge tõusunurka arvestatakse 0°-st kuni 180°-ni (mõnikord ka —90°-st kuni 90°-ni). Trigonomeetriast on teada, et teravnurga tangens on positiivne, nürinurga tangens aga negatiivne. Konstruktsiooni abil selgitame, et koordinaatteljestikus on sirge oma parameetritega —



Joon. 31.

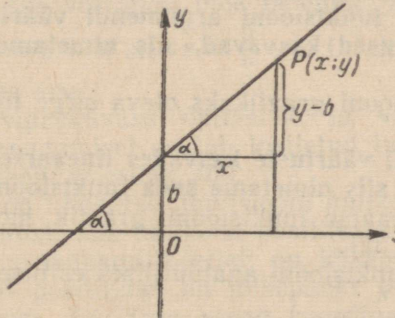


Joon. 32.

tõusu ja algordinaadiga — täielikult määratud ning sellele tuginedes lahendame vastavaid konstruktsioonülesandeid.

Olgu näiteks $b=2$ ja $k=\frac{3}{4}$. Sirge konstrueerimine viiakse siin läbi järgmiselt. Punktist, mille määrab algordinaat, minnakse nelja ühiku võrra paremale ja sealt kolme ühiku võrra üles (joon. 31). See ongi otsitava sirge teine punkt. Kui k on negatiivne, siis ei minda algordinaadiga määratud punktist paremale, vaid vasakule. Joonisel 32 on näidatud sirge konstrueerimine juhul, kui $b=2$ ja $k=-\frac{3}{4}$.

Kui eespool tõestati, et lineaarse funktsiooni graafikuks on sirge, siis nüüd võiks tõestada, et iga telgedega mitteparalleelse sirge võrrandiks on $y=kx+b$. See on pikemata selge, sest iga niisugune sirge lõikab ordinaattelge ja tal on seega kindel algordinaat. Samuti on igal sellisel sirgel 90°-st erinev tõusunurk ja seega on tõusul olemas lõplik väärtus. Iga sirge jaoks, millel on kindel tõus ja algordinaat (joon. 33), on aga võimalik tuletada vastavat võrrandit.



Joon. 33.

Olgu sirge tõus k ja algordinaat b. Et

$$\tan\alpha=k,$$

siis joonise põhjal

$$\frac{y-b}{x}=k$$

ja

$$y=kx+b.$$

Seega esitab lineaarse funktsiooni avaldis sellise sirge võrrandit, mis on määratud tõusu ja algordinaadiga.

Et k esitab tõusunurga tangensit ja nurga lähenedes 90°-le tangensi väärtus kasvab, siis on ilmne, et ordinaatteljega paralleelsete sirgete võrrandid ei ole esitatavad k kaudu. Eespool selgitasime juba, et nendele sirgetele võrrandi leidmiseks kasutatakse paralleelsete sirgete omadust.

Kui sirge tõus $k=0$, siis sirge võrrand taandub kujule

$$y=b.$$

Kuigi $x=a$ ja $y=b$ esitavad sirge võrrandeid, ei esita nad lineaarse funktsiooni analüütilist esitust valemi kujul, sest need võrdused sisaldavad ainult üht muutuvat suurust. Seega, lineaarse funktsiooni graafikuks on koordinaatteljedega mitteparalleelne sirge.

5. Lineaarse funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Kui juba kõnelda lineaarse funktsiooni graafikust ja sirge võrrandist, siis võiks tutvustada siin ka mõisteid funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Kui lineaarse funktsiooni argumendi väärtuste kasvades ka funktsiooni väärtused kasvavad, siis nimetame seda funktsiooni kasvavaks.

Sellise funktsiooni graafikuks oleva sirge tõusunurk on teravnurk (joon. 31).

Kui argumendi väärtuste kasvades lineaarse funktsiooni väärtused kahanevad, siis nimetame seda funktsiooni kahanevaks.

Kahaneva lineaarse funktsiooni graafik moodustab x-teljega nürinurga (joon. 32).

Et lineaarse funktsiooni analüütilises esituses

$$y=kx+b$$

k tähendab tõusunurga tangensit, siis on ilmne, et *lineaarseid funktsioone võib liigitada kasvavaiks või kahanevaiks nende analüütilises esituses antud argumendi kordaja märgi järgi.* On see $+$, on funktsioon kasvav, $-$ puhul aga kahanev.

6. Lineaarvõrrandi lahendi uurimine

Olles joonestanud küllalt palju sirgeid, võib teha järeldusi sirge asendi kohta sõltuvalt parameetrite märgist. Need järeldused võimaldavad uurida lineaarvõrrandi $kx+b=0$ lahendit. Uurimuse tulemusena saame:

kui $k>0$ ja $b>0$, siis $x<0$;
kui $k<0$ ja $b<0$, siis $x<0$;

kui $k > 0$ ja $b < 0$, siis $x > 0$;
kui $k < 0$ ja $b > 0$, siis $x > 0$;
kui $k \neq 0$ ja $b = 0$, siis $x = 0$.

Edasi võiks vaadelda ka juhte:
kui $k = 0$ ja $b \neq 0$, siis võrrandil lahend puudub (vastav sirge on paralleelne x-teljega);
kui $k = 0$ ja $b = 0$, siis võrrandil on lõpmatu hulk lahendeid (vastav sirge ühtib x-teljega).

Neile tulemustele võime jõuda ka lineaarse funktsiooni **null-koha** leidmise ülesandest, s. t. lahendades võrrandi

$$kx + b = 0.$$

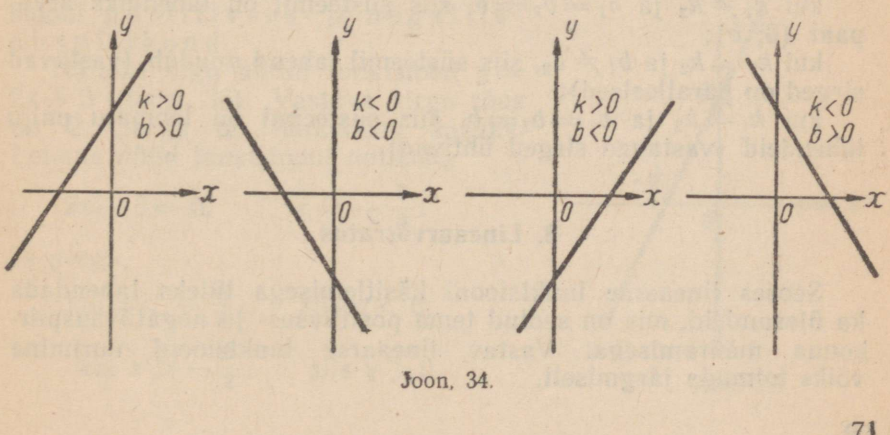
Lahendiks saame

$$x = -\frac{b}{k}.$$

Siit ilmnebki, et lahend on positiivne, kui b ja k on erinevate märkidega, ja negatiivne, kui b ja k on samamärgilised. Kui aga $k = 0$ ja $b \neq 0$, siis võrrandil pole lahendit ja järelikult pole ka nullkohta. Kui $k = b = 0$ siis $x = \frac{0}{0}$, s. t. lahend on määramatu, teda rahuldab iga arv.

Küllaltki huvipakkuvaks õpilastele ja väärtuslikuks nende kujutlusvõime arendamisel osutub loetletud tulemustele jõudmine lineaarse funktsiooni graafiku abil.

Et graafikul on lineaarse funktsiooni nullkohaks vastava sirge ja x-telje lõikepunkt, siis nullkoha positiivsus või negatiivsus on määratud tema asukohaga x-teljel: on lõikepunkt y-teljest paremal, on nullkoht positiivne; on lõikepunkt y-teljest vasakul, on nullkoht negatiivne. Et sirge asend koordinaatteljestikus sõltub k ja b märgist, siis on ka lineaarse funktsiooni nullkoha positiivsus või negatiivsus määratud k ja b märkidega (joon. 34).



Joon. 34.

Peatume eraldi veel järgmiste juhtumite juures.

Juhul, kui $k \neq 0$ ja $b = 0$, on tegemist alguspunkti läbiva koordinaattelgedega mitteühtiva sirgega. Seega on siin nullkohaks $x = 0$.

Juhul, kui $k = 0$ ja $b \neq 0$, on sirge x-teljega paralleelne, sest tõus on 0 ja ta asub x-teljest b ühiku kaugusel.

Juhul, kui $k = 0$ ja $b = 0$, peab sirge läbima koordinaatide alguspunkti ja olema paralleelne x-teljega. Järelikult ühtib see sirge x-teljega.

7. Lineaarvõrrandisüsteemi lahendite uurimine

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses tutvuti juba lineaarvõrrandisüsteemi graafilise lahendamisega. Selle põhjal on lineaarvõrrandisüsteemil kas üks lahend, mitte ühtegi lahendit või lõpmata palju lahendeid. Vastavate analüütiliste tingimuste väljaselgitamine, mille alusel võib graafikuid joonestamata öelda, missuguse nimetatud juhuga on tegemist, kuulub funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilisse kursusesse. Seda võimaldab sirge võrrand.

Teatavasti on lineaarvõrrandisüsteemid taandatavad kujule

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2. \end{cases}$$

Et sirge võrrandis k tähendab sirge tõusu, siis on ilmne, et süsteemi võrranditele vastavad sirged on paralleelsed, kui $k_1 = k_2$, ja ei ole paralleelsed, kui $k_1 \neq k_2$. Algordinaatide võrdsus koos tingimusega $k_1 \neq k_2$ määrab lõikepunkti asukoha y-teljel. Kui aga algordinaadid on võrdsed ja $k_1 = k_2$, siis peavad vaadeldavad sirged ühtima. Neile tingimustele tuginedes võime vaadelda nelja järgmist võimalust (joon. 35):

kui $k_1 \neq k_2$ ja $b_1 \neq b_2$, siis süsteemil on lahend olemas;

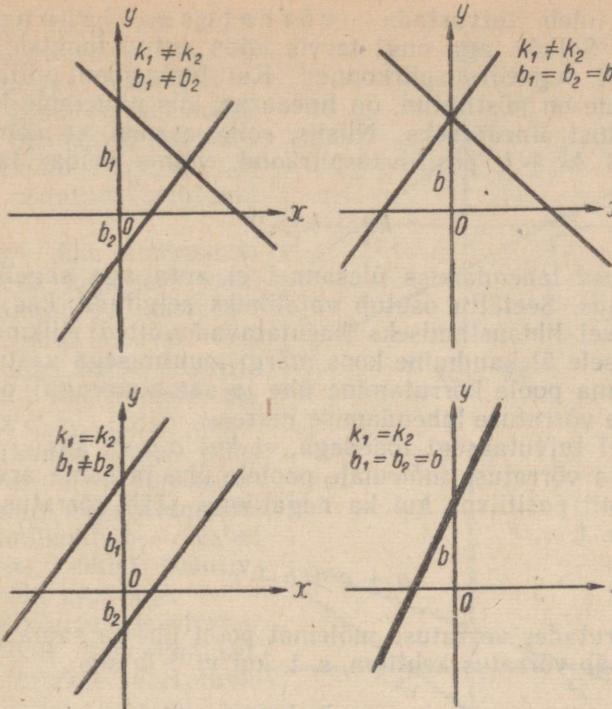
kui $k_1 \neq k_2$ ja $b_1 = b_2 = b$, siis süsteemil on lahendiks arvupaar $(0; b)$;

kui $k_1 = k_2$ ja $b_1 \neq b_2$, siis süsteemil lahend puudub (vastavad sirged on paralleelsed);

kui $k_1 = k_2$ ja $b_1 = b_2 = b$, siis süsteemil on lõpmatu palju lahendeid (vastavad sirged ühtivad).

8. Lineaarvõrratus

Seoses lineaarse funktsiooni käsitlemisega tuleks lahendada ka ülesandeid, mis on seotud tema positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna määramisega. Vastav lineaarse funktsiooni uurimine võiks toimuda järgmiselt.



Joon. 35.

Uuritava funktsiooni avaldisest loetakse välja vastava sirge tõus. Selle positiivsus või negatiivsus näitab, kas lineaarne funktsioon on k a s v a v või k a h a n e v. Tarvitseb vaid leida veel funktsiooni n u l l k o h t ja saadaksegi võrratuse abil välja kirjutada funktsiooni p o s i t i i v s u s- ja n e g a t i i v s u s p i i r k o n d.

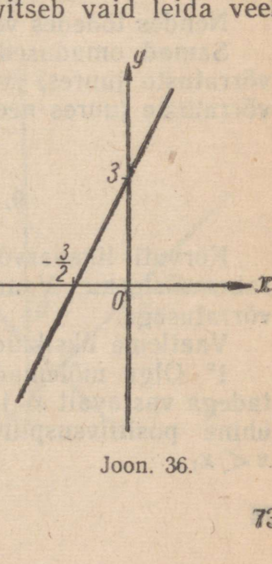
Näiteks olgu antud funktsioon $y = 2x + 3$ (joon. 36). Vastava sirge tõus on 2. Seega on funktsioon kasvav. Leiame nüüd funktsiooni nullkoha

$$2x + 3 = 0, \qquad x = -\frac{3}{2}.$$

Ja seega,

$$\text{kui } x < -\frac{3}{2}, \qquad \text{siis } y < 0;$$

$$\text{kui } x > -\frac{3}{2}, \qquad \text{siis } y > 0.$$



Joon. 36.

Edasi tuleb tutvustada **võrratuse lahendamise mõistet**. Selleks aga ongi tarvis leida antud funktsiooni positiivsus- või negatiivsuspiirkonnad. Kui funktsioon, mille suhtes see ülesanne on püstitatud, on lineaarne, siis nimetame ka vastavat võrratust lineaarseks. Niisiis, selle asemel, et öelda: leida funktsiooni $kx + b$ positiivsuspiirkond, võime öelda: lahendada võrratus

$$kx + b > 0.$$

Võrratuse lahendamise ülesannet ei anta aga sageli sellises lihtsas kujus. Seetõttu osutub vajalikuks selgitada, kas võrrandi lahendamisel lihtsustamiseks kasutatavad võtted (liikmete ühelt poolelt teisele ülekandmine koos märgi muutmisega vastupidiseks ning mõlema poole korrutamine ühe ja sama arvuga) on rakendatavad ka võrratuse lahendamise juures.

Seejärel tutvutaksegi tõdedega, et kui $a > b$, siis

1° liites võrratuse mõlemale poolele ühe ja sama arvu c, mis võib olla nii positiivne kui ka negatiivne, jääb võrratus endiselt kehtima, s. t.

$$a + c > b + c.$$

2° korrutades võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama positiivse arvuga, jääb võrratus kehtima, s. t. kui $m > 0$, siis

$$am > bm.$$

3° korrutades võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama negatiivse arvuga, muutub võrratuse märk vastupidiseks, s. t. kui $n < 0$, siis

$$an < bn.$$

Nendes tõdedes veendumine tuginegu arvulistele näidetele.

Samad omadused jäävad kehtima ka tundmatut sisaldavate võrratuste juures, sest tundmatu tähistab mingeid arve ja arvvõrratuste juures need omadused kehtivad.

9. Lineaarvõrratusesüsteem

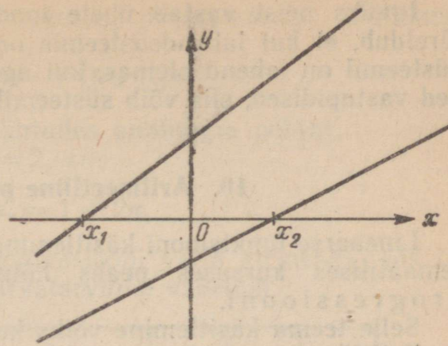
Kõrvuti lineaarvõrratustega tuleks lahendada ka lineaarvõrratusesüsteeme. Vaadeldavates süsteemides peaks piirduma kahe võrratusega.

Vaatleme üksikuid erijuhte.

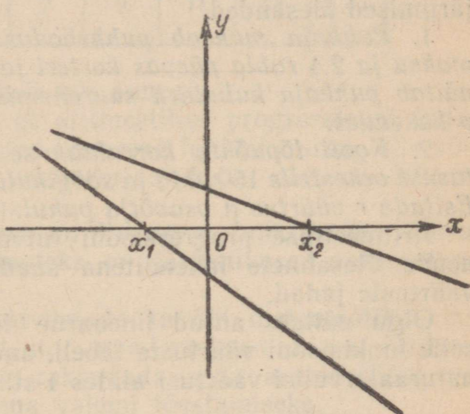
1° Olgu mõlemad funktsioonid kasvavad (joon. 37) nullkohtadega vastavalt x_1 ja x_2. Sel juhul on neil funktsioonidel olemas ühine positiivsuspiirkond $x > x_2$ ja ühine negatiivsuspiirkond $x < x_1$.

2° Olgu mõlemad funktsioonid kahanevad (joon. 38) nullkohtadega vastavalt x_1 ja x_2. Sel juhul on neil funktsioonidel olemas ühine positiivsuspiirkond $x < x_1$ ja ühine negatiivsuspiirkond $x > x_2$.

3° Olgu üks funktsioon kasvav, teine kahanev (joon. 39) nullkohtadega vastavalt x_1 ja x_2. Juhul a) on neil funktsioonidel ühine positiivsuspiirkond nullkohtade vahel $x_1 < x < x_2$, ühist negatiivsuspiirkonda aga pole. Juhul b) on neil funktsioonidel ühine negatiivsuspiirkond nullkohtade vahel $x_1 < x < x_2$, ühist positiivsuspiirkonda aga pole.



Joon. 37.

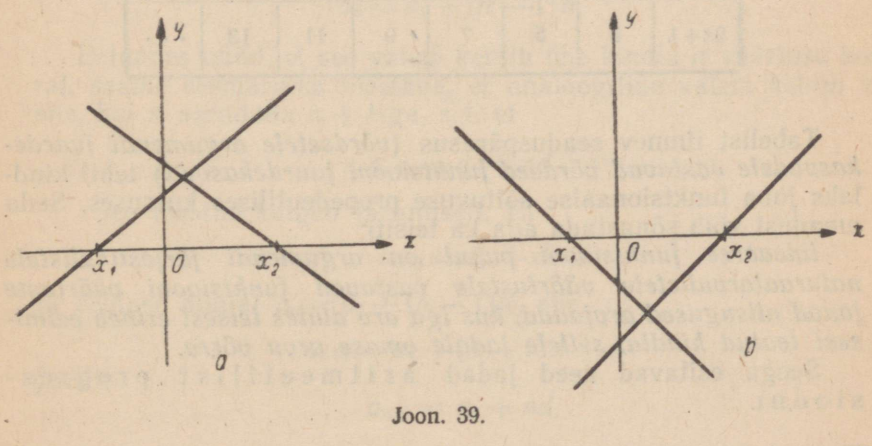


Joon. 38.

Lineaarvõrratusesüsteemide tegelikul lahendamisel, kus kasutatakse võrratuste lahendamiseks lubatud teisendusi, jõutakse ühele kolmest järgnevast tulemusest:

$$\begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < x_1 \\ x < x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > x_1 \\ x < x_2. \end{cases}$$



Joon. 39.

Igaüks neist vastab ühele toodud kolmest võimalusest. Siit järeldub, et kui lahendsüsteemis on võrratused samapidised, siis süsteemil on lahend olemas, kui aga lahendsüsteemis on võrratused vastupidised, siis võib süsteemil ka lahend puududa.

10. Aritmeetiline progressioon I

Lineaarse funktsiooni käsitlemine funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses peaks hõlmama ka aritmeetilist progressiooni.

Selle teema käsitlemine võiks kulgeda lühidalt järgmiselt.

Eelkõige on probleemi püstitamiseks tarvis vaadelda niisuguseid ülesandeid lineaarse sõltuvuse kohta, kus argument omandab ainult järjestikulisi täisarvulisi väärtusi. Selleks sobiksid näiteks järgmised ülesanded.

1. *Puhkaja maksab puhkekodus* 1 *rubla sisseregistreerimismaksu ja* 2,4 *rubla päevas korteri ja söögi eest. Leida valem, mis näitab puhkaja kulude* k *suurenemise käiku suvituspäevade arvu* p *kasvades.*

2. *Kooli lõpuõhtu korraldamise kogu kulu* r *rubla koosneb tasust orkestrile* 15 *rubla ja söögikuludest* 0,8 *rubla osavõtja kohta. Esitada* r *väärtus* n *osavõtja puhul.*

Aritmeetilise progressiooni tutvustamiseks kirjutatakse välja nende ülesannete lahenditena saadud lineaarsete funktsioonide väärtuste jadad.

Olgu näiteks antud lineaarne funktsioon $2x+1$. Koostame selle funktsiooni väärtuste tabeli, andes argumendile järjestikulisi naturaalarvulisi väärtusi alates 1-st.

x	1	2	3	4	5	6	...
$2x+1$	3	5	7	9	11	13	...

Tabelist ilmnev seaduspärasus (*võrdsetele argumendi juurdekasvudele vastavad võrdsed funktsiooni juurdekasvud*) tehti kindlaks juba funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses. Seda omadust võib sõnastada aga ka teisiti:

lineaarse funktsiooni puhul on argumendi järjestikulistele naturaalarvulistele väärtustele vastavad funktsiooni väärtuste jadad niisugused arvjadad, kus iga arv alates teisest erineb eelmisest teatud kindla, sellele jadale omase arvu võrra.

Seega esitavad need jadad aritmeetilist progressiooni.

Edasi tutvutakse aritmeetilise progressiooni üldliikmega. Vastav valem

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

tuletatakse definitsioonist lähtudes analoogia põhjal.

Olgu nüüd $a_1 = 3$ ja $d = 2$, siis

$$a_n = 1 + 2n.$$

Kui tahame vastavat progressiooni välja kirjutada, siis tuleb anda n-le järjestikulisi naturaalarvulisi väärtusi.

n	1	2	3	4	5	6	...
$1+2n$	3	5	7	9	11	13	...

Saame täpselt sama tabeli mis ennegi.

Kasutades ära asjaolu, et aritmeetilise progressiooni üldliige avaldub liikmete arvu suhtes lineaarse funktsioonina, siis võibki aritmeetilist progressiooni defineerida kohe alguses lineaarse funktsiooni väärtuste jadana.

Aritmeetiline progressioon on lineaarse funktsiooni väärtuste jada, kui argumendi väärtusteks on järjestikused naturaalarvud alates 1-st.

Siin oleks sobiv koht tutvustada ka üht matemaatikas laialt kasutatavat tõestusmeetodit, nn. m a t e m a a t i l i s e i n d u k t s i o o n i m e e t o d i t, ning rakendada seda aritmeetilise progressiooni üldliikme ja summa valemi tõestamiseks.

Analoogia põhjal saadi aritmeetilise progressiooni üldliikme valemiks

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Eeldades nüüd, et see valem kehtib ühe kindla n väärtuse korral, seame eesmärgiks tõestada, et analoogiline valem kehtib ka siis, kui n asendada $n+1$-ga, s. t. et

$$a_{n+1} = a_1 + nd.$$

See tõestus kulgeb järgmiselt. Et

$$a_{n+1} = a_n + d$$

ja eelduse põhjal $a_n = a_1 + (n-1)d$, siis

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1)d + d$$

ja siit

$$a_{n+1} = a_1 + nd.$$

Kui eelnevalt vaadeldi selle valemi kehtivust $n=2$; 3 ja 4 korral, siis tõestatu põhjal kehtib ta $n=5$ korral, sellest järeldub omakorda, et valem kehtib $n=6$ korral jne.

Alles pärast niisugust arutlust, tuginedes toodud näitele, tuleks tutvustada matemaatilise induktsiooni meetodit. Seejuures tuleb rõhutada kolme olulise etapi läbimise vajadust. Esiteks on vaja kontrollida valemi kehtivust mõnede väikeste n väärtuste korral, teiseks — tõestada valemi kehtivus $n+1$ korral, eeldades, et valem kehtib ühe kindla n korral ja kolmandaks — teha järeldus valemi kehtivuse kohta iga n korral.

Ka aritmeetilise progressiooni summa valemi kehtivust võib tõestada sama meetodi abil.

Moodustades aritmeetilise progressiooni summasid, kasutame ära omaduse, et *aritmeetilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.*

$$S_2=a_1+a_2;$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_3+\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{a_1+a_3}{2}\cdot 3;$$

$$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=2(a_1+a_4)=\frac{a_1+a_4}{2}\cdot 4;$$

$$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2(a_1+a_5)+\frac{a_1+a_5}{2}=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5.$$

Analoogia põhjal võime nüüd väita, et

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Eeldades selle valemi kehtivust, väidetakse, et

$$S_{n+1}=\frac{a_1+a_{n+1}}{2}(n+1).$$

Tõestus kulgeks lühidalt järgmiselt:

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n+a_{n+1}=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n+a_1+nd=$$

$$=\frac{2a_1n+2a_1+n^2d+nd}{2}=\frac{2a_1+nd}{2}\cdot(n+1)=\frac{a_1+a_{n+1}}{2}\cdot(n+1).$$

Et varem oli valemi kehtivust kontrollitud $n=5$ korral, siis tõestatu põhjal kehtib see valem ka $n=6$ korral jne.

Oma ulatuselt on siin esitatud tõestus suurem kui seni koolis kasutatav tõestus. Kui eesmärgiks ei seata matemaatilise induktsiooni meetodi juurutamist keskkoolis, siis tuleb klassis tõestamiseks kasutada senist meetodit ja siin toodud tõestus kuuluks tutvustamisele klassivälise töö raames.

11. Aritmeetiline progressioon II

Aritmeetilise progressiooni käsitlemiseks võib soovitada veel järgmist aine esitust.

Lineaarse funktsiooni põhiomaduse kohaselt argumendi võrdsetele juurdekasvudele vastavad võrdsed funktsiooni juurdekasvud. Seega, kui lineaarse funktsiooni väärtuste tabelis argumendi juurdekasv on konstantne, siis on konstantne ka funktsiooni juurdekasv. Aritmeetiline progressioon defineeritaksegi lineaarse funktsiooni väärtuste jadana, kui argumendi juurdekasv on konstantne (vt. lk. 77) ehk teisiti:

aritmeetiline progressioon on niisugune arvude jada, kus kahe teineteisele järgneva liikme vahe on jääv.

Kui nüüd on antud mingi lineaarne funktsioon, siis saame selle väärtustest moodustada väga mitmeid aritmeetilisi progressioone. Argumendi juurdekasvu muutmine annab ju uue aritmeetilise progressiooni.

Vastupidine ülesanne oleks järgmine: on antud mingi aritmeetiline progressioon ning tuleb leida vastav lineaarne funktsioon. Ka siin võib olla mitu lahendust. Valime neist välja meile sobivaima.

Võttes argumendi väärtuste jadaks naturaalarvude jada, alates 1-st, oleks aritmeetilise progressiooni iga liikme järjekorra number temale vastavaks argumendi väärtuseks. Otsitava lineaarse funktsiooni tabeliline esitus näeks siis välja järgmine

x	1	2	3	...	n
y	a_1	a_2	a_3	...	a_n

Et leida selle lineaarse funktsiooni analüütilist esitust, arutleme järgmiselt. Et $\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$ ja et praegusel juhul $\Delta x=1$, siis $\Delta y=k$. Tähistades progressiooni vahe tähega d, võime kirjutada, et

$$k=d.$$

Lineaarse funktsiooni analüütilist esitust valemi kujus $y=kx+b$ peavad rahuldama kõigi tema graafikul asetsevate punktide koordinaadid, seega peab kehtima ka võrdus

$$a_1 = k \cdot 1 + b.$$

Et $k = d$, siis $b = a_1 - d$ ja otsitav funktsioon on

$$y = dx + (a_1 - d).$$

Et ka kõik teised väärtuspaarid rahuldavad seda võrrandit, siis võime kirjutada, et

$$a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$$

ehk siit

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

mis on tuntud aritmeetilise progressiooni üldliikme valemi nime all.

Aritmeetilise progressiooni summa valemi tuletamiseks kasutatakse omadust, et *progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asuvate liikmete summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.* Selle omaduse kehtivuses võib veenduda lihtsa arutluse teel. Saadakse ju teine liige esimesest liikmest vahe juurdeliitmise teel ja eelviimane viimasest vahe lahutamise teel. Kolmas liige saadakse esimesest kahekordse vahe juurdeliitmise teel ja lõpust kolmas liige viimasest liikmest kahekordse vahe lahutamise teel jne.

On muidugi mõeldav ka selle omaduse tõestamine kasutades üldliikme valemit.

Olgu antud aritmeetiline progressioon:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots,\ a_{n-k+1},\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n.$$

Progressiooni algusest ja lõpust seisavad võrdsetel kaugustel liikmed a_k ja a_{n-k+1}. Väidame, et

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Tõestame selle, kasutades leitud üldliikme valemit.

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k - 1)d + a_1 + (n - k)d = a_1 + kd - d +$$
$$+ a_1 + nd - kd = a_1 + a_1 + (n - 1)d = a_1 + a_n.$$

Aritmeetilise progressiooni summa valemi tuletamiseks vaatleme eraldi kaht juhtu: 1) kui liikmete arv on paarisarvuline ja 2) kui liikmete arv on paarituarvuline.

1) Olgu liikmete arv $n = 2k$. Leiame

$$S_{2k} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k +$$
$$+ a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k}.$$

Kirjutame selle summa teisiti, muutes liidetavate järjekorda:

$$S_{2k} = (a_1 + a_{2k}) + (a_2 + a_{2k-1}) + (a_3 + a_{2k-2}) + \ldots + (a_{k-1} + a_{k+2}) + (a_k + a_{k+1}).$$

Et kõik k suluavaldist on aritmeetilise progressiooni omaduse põhjal võrdsed, siis võime kirjutada

$$S_{2k} = k \cdot (a_1 + a_{2k})$$

ehk, arvestades, et $2k = n$,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Olgu nüüd aritmeetilise progressiooni liikmete arv paarituarvuline, s. t. $n = 2k + 1$, siis

$$S_{2k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1}$$

ehk

$$S_{2k+1} = (a_1 + a_{2k+1}) + (a_2 + a_{2k}) + (a_3 + a_{2k-1}) + \ldots + (a_{k-1} + a_{k+3}) + (a_k + a_{k+2}) + a_{k+1}.$$

Et

$$a_{k+1} = \frac{a_1 + a_{2k+1}}{2}$$

ja suluavaldised on kõik võrdsed $(a_1 + a_{2k+1})$-ga, siis

$$S_{2k+1} = k \cdot (a_1 + a_{2k+1}) + \frac{1}{2}(a_1 + a_{2k+1})$$

ja siit

$$S_{2k+1} = \frac{(a_1 + a_{2k+1})(2k+1)}{2}.$$

Arvestades, et $2k + 1 = n$, saame

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Seega avaldub aritmeetilise progressiooni summa valem nii paaris- kui paarituarvulise liikmete arvu puhul ühteviisi

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Et $a_n = a_1 + (n-1)d$, siis võime aritmeetilise progressiooni summa valemi esitada veel kujus

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

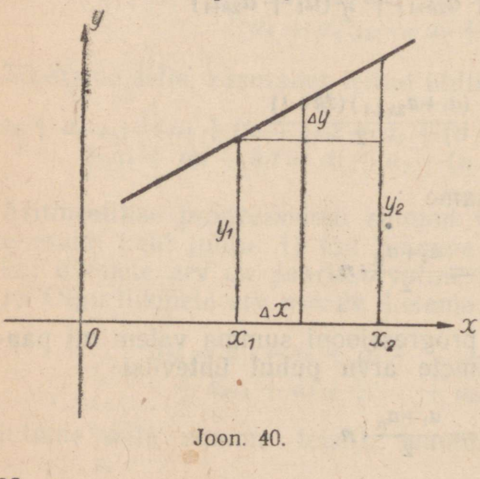
12. Lineaarne interpolatsioon

Et õpilastel tuleb koolis küllalt palju tegelda mitmesuguste matemaatiliste tabelitega, siis on loomulik lineaarse funktsiooni käsitlemise raames tutvustada neid ka l i n e a a r s e i n t e r p o l a t s i o o n i g a. Selle teema käsitlemisel on eelkõige vaja juhtida õpilaste tähelepanu lineaarse interpolatsiooni kasutamise võimalusele, viies selle sõltuvusse tabelis esitatud argumendi väärtuste vahega. Vastavate jooniste abil näidatakse, et väikeses argumendi väärtuste vahemikus on funktsiooni graafik lähedane sirgele. Et viga, mis me teeme, lugedes selles vahemikus kõvera sirgeks, on väga väike, siis see õigustabki lineaarse interpolatsiooni kasutamist.

Kui on antud funktsiooni väärtuste tabel

x	x_1	x_2	x_3	...
y	y_1	y_2	y_3	...

ja vajatakse funktsiooni väärtust mõne tabelis mitteesineva argumendi väärtuse puhul, siis leitakse see järgmise arutluse põhjal.



Joon. 40.

Olgu meil tarvis leida funktsiooni väärtus argumendi väärtusel $x_1 + \Delta x$. Et me vaatleme funktsiooni lineaarsena vahemikus x_1-st x_2-ni, siis leiame graafikul punktid $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$ ning ühendame need sirgega.

Jooniselt 40 näeme, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ kust}$$

$$\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \Delta x.$$

Seega otsitav funktsiooni väärtus

$$y_1+\Delta y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\Delta x.$$

Tuleb muidugi arvestada asjaolu, et juhul, kui argumendi väärtuste kasvades funktsiooni väärtused kahanevad, on Δy negatiivne.

Järgnevalt olgu esitatud üks näide lineaarse interpolatsiooni rakendamise kohta.

Olgu antud väljavõte logaritmide tabelist:

x	y
50,0	1,6990
50,1	1,6998
50,2	1,7007
50,3	1,7016

Leida y väärtus, kui $x=50,06$.

Vaadeldaval juhul on

$x_1=50,0$; $y_1=1,6990$;

$x_2=50,1$; $y_2=1,6998$;

$\Delta x=0,06$.

$$\Delta y=\frac{1,6998-1,6990}{50,1-50,0}\cdot 0,06=0,00048\approx 0,0005;$$

$$y_1+\Delta y=1,6990+0,0005=1,6995.$$

13. Lineaarse funktsiooni pöördfunktsioon

Et kooli matemaatikas tuleb mitmel korral kokku puutuda pöördfunktsiooni mõistega, siis on sobiv temaga tutvuda juba lineaarse funktsiooni käsitlemise raames. Ühtlasi on mõeldav tutvuda siin *peegeldusvõttega pöördfunktsiooni graafiku konstrueerimiseks.*

Lineaarse funktsiooni pöördfunktsiooni käsitlus võiks toimuda järgmiselt.

Võetakse vaatluse alla üks lineaarne funktsioon, näiteks $y=2x+4$. See funktsioon esitatakse nii tabeliliselt kui ka graafiliselt.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$2x+4$	-2	0	2	4	6	8	10	...

Selle funktsiooni graafilisel esitamisel tuleb kindlasti meenutada, et sirge joonestamiseks vajame ainult kaht punkti.

Nüüd seatakse ülesandeks avaldada x esialgsest võrdusest $y=2x+4$, s. o.

$$x=\frac{1}{2}y-2.$$

Kui saadud võrduses vaadelda y argumendina, siis x on funktsiooni tähiseks. Saadud funktsiooni nimetatakse antud funktsiooni $y=2x+4$ pöördfunktsiooniks. Ka selle pöördfunktsiooni esitame tabeliliselt ja graafiliselt, valides argumendi väärtusteks endised funktsiooni väärtused

y	-2	0	2	4	6	8	10	...
$\frac{1}{2}y-2$	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

Võrreldes esitatud tabeleid selgub, et teises tabelis on samad arvud, mis esimeses tabeliski, ainult et esialgseist argumendi väärtustest on saanud funktsiooni väärtused ja esialgseist funktsiooni väärtustest argumendi väärtused. Seega, kui esimeses tabelis on väärtuspaar $(x_1;\ y_1)$, siis teises tabelis on väärtuspaar $(y_1;\ x_1)$. See peab kindlasti nii olema, sest teine võrrand on saadud esimesest lubatud teisenduste teel. Et konstrueerida funktsiooni $x=\frac{1}{2}y-2$ graafikut ühes ja samas teljestikus funktsiooni $y=2x+4$ graafikuga, selleks tähistame ka esimesel juhul funktsiooni y-ga ja argumendi x-ga. Saame

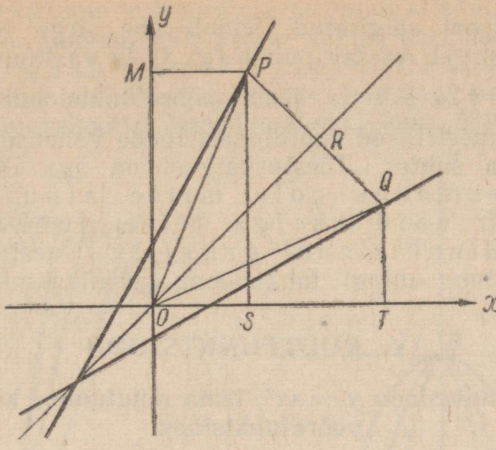
$$y=\frac{1}{2}x-2.$$

Konstrueerides selles teljestikus veel I ja III veerandi poolitaja, s. t. funktsiooni $y=x$ graafiku, näeme, et funktsioonide $y=2x+4$ ja $y=\frac{1}{2}x-2$ graafikud on selle poolitaja suhtes sümmeetrilised (joon. 41).

Toome ka tõestuse selle kohta, et funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised koordinaattelgede vahelise I ja III veerandi poolitaja suhtes.

Võttes sirgel $y=2x+4$ punkti $P(x_1;\ y_1)$, näitame, et sirgel $y=\frac{1}{2}x-2$ leidub punkt $Q(y_1;\ x_1)$, mis on sümmeetriline punktiga $P(x_1;\ y_1)$ sirge $y=x$ suhtes.

Tõestuseks näitame, et $PQ\perp OR$ ja $PR=RQ$.



Joon. 41.

Ühendame punktid P ja Q koordinaatide alguspunktiga ning tõmbame punktide P ja Q ordinaatlõigud. Tekivad kongruentsed kolmnurgad

$$\triangle OMP = \triangle OQT,$$

sest neis täisnurksetes kolmnurkades

$$OM = PS = OT = y_1$$

ja

$$MP = OS = QT = x_1.$$

Ka

$$\triangle OPR = \triangle OQR,$$

sest $OP = OQ$ kui kongruentsete kolmnurkade vastavad küljed, $OR = OR$ kui ühine külg ja $Q\widehat{O}R = P\widehat{O}R$, sest $M\widehat{O}P = T\widehat{O}Q$.

Kongruentsusest järeldub, et

$$PR = RQ$$

ja

$$P\widehat{R}O = Q\widehat{R}O.$$

Kuna $P\widehat{R}Q = 180°$, siis $P\widehat{R}O = Q\widehat{R}O = 90°$ ja seega

$$PQ \perp OR.$$

Kuigi tõestus on esitatud ainult ühe punktipaari sümmeetrilisuse kohta, on selge, et sirge $y = 2x + 4$ igale punktile $(x;\ y)$ vastab sirgel $y = \frac{1}{2}x - 2$ temaga sümmeetriline punkt $(y;\ x)$, sest nagu eespool selgitatud, leidub ühe sirge igale punktile $(x; y)$ teisel sirgel vastav punkt $(y; x)$ ja vastupidi. Seega on funktsiooni $y=2x+4$ ja tema pöördfunktsiooni $y=\frac{1}{2}x-2$ graafikud sümmeetrilised koordinaattelgede vahelise I ja III veerandi poolitaja suhtes. Tõestuskäigust on aga ilmne, et s e e s ü m m e e t r i a o m a d u s p o l e m i t t e a i n u l t v a a d e l d u d s i r g e l, v a i d k a i g a t e i s e f u n k t s i o o n i j a t e m a p ö ö r d f u n k t s i o o n i g r a a f i k u l, sest tõestust võib vaadelda esitatuna mingi funktsiooni graafiku mistahes punkti suhtes.

IV. RUUTFUNKTSIOON

1. Ruutfunktsioon $y=ax^2$; tema muutumise kiirus ja pöördfunktsioon

Selleks ajaks, kui matemaatikas jõutakse funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilise kursuse käsitlemise juurde, on õpilased juba füüsikas tutvunud mõningate konkreetsete ruutsõltuvustega. Siin võiks eelkõige nimetada kehade vaba langemise ja hoo valemeid. Neid tuleb ära kasutada õpilaste huvi tõstmiseks ruutfunktsiooni uurimise vastu.

Meenutades, kuidas selgitati ruutsõltuvust ruudu, korrapärase kolmnurga ja korrapärase kuusnurga juures, seatakse eesmärgiks tõestada teoreem:

korrapäraste hulknurkade pindalad on ruutsõltuvuses oma külje pikkusega.

Teatavasti võrdub korrapärase hulknurga pindala poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega (joon. 42), s. t.

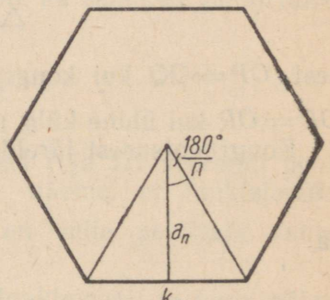
$$S_n=\frac{n\cdot k_n\cdot a_n}{2}.$$

Et

$$a_n=\frac{k_n}{2}\cdot\cot\frac{180^\circ}{n},$$

siis

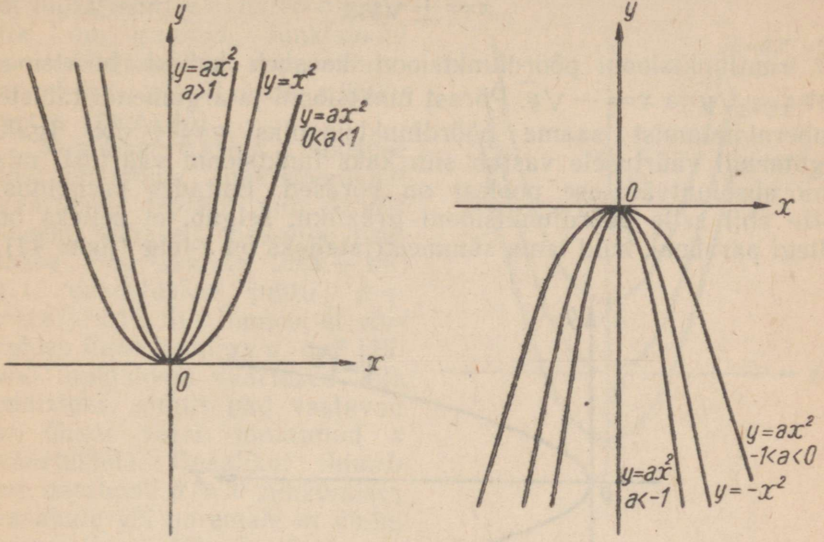
$$S_n=\left(\frac{n}{4}\cdot\cot\frac{180^\circ}{n}\right)\cdot k_n^2.$$



Joon. 42.

Etteantud n korral on sulgudes olev avaldis konstantne ja seetõttu ongi S_n ruutsõltuvuses k_n-ga.

Funktsionaalse sõltuvuse propedeutilises kursuses õpiti tundma ruutsõltuvust $y=ax^2$. Asudes nüüd selle funktsiooni uurimisele, veendutakse, et kui x^2 kordaja absoluutväärtus on ühest suurem, siis selliste funktsioonide graafikud esituvad kitsamate parabooli-dena kui seda on funktsioonile $y = x^2$ vastav parabool, mida nimetatakse ka n o r m a a l- ehk p õ h i p a r a b o o l i k s. Juhul aga, kui a absoluutväärtus on ühest väiksem, esituvad vastavad paraboolid normaalparaboolist lamedamatena (joon. 43).



Joon. 43.

Paraboolide joonestamisel tuleb õpilaste tähelepanu pöörata paraboolide kuju erinevusele võrreldes pöördvõrdelise sõltuvuse juures tundma õpitud hüperbooliga. Koosneb ju hüperbool kahest harust ja ta on asümptootiline kõver.

Edasi käsitletakse küsimust ruutfunktsiooni kasvamise kiirusest. Et ruutfunktsioon ei kasva ega kahane ühtlaselt nagu lineaarfunktsioon, siis ei saa siin kõnelda ka tema kasvamise kiirusest, mis kehtiks kogu vaadeldava funktsiooni kohta tervikuna. Küll võib aga kõnelda f u n k t s i o o n i m u u t u m i s e k e s k m i s e s t k i i r u s e s t argumendi teatud väärtusvahemiku kohta. Kui see vahemik algab argumendi väärtusest x ja tema pikkus on Δx, siis keskmise kiiruse avaldise saamiseks tuleb leida funktsiooni juurdekasv ühiku kohta, s. o.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

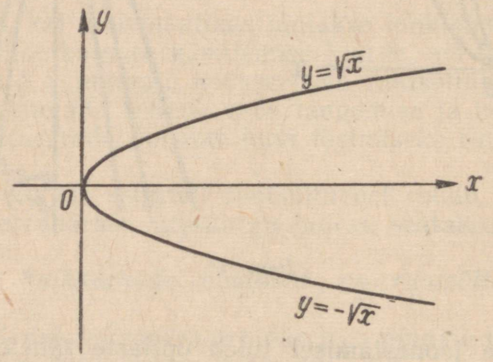
Tulemusest ilmneb, et r u u t f u n k t s i o o n i m u u t u m i s e k e s k m i n e k i i r u s o n s õ l t u v n i i a r g u m e n d i l ä h t e v ä ä r t u s e s t k u i k a v a h e m i k u p i k k u s e s t.

Ruutfunktsiooni pöördfunktsiooni on otstarbekohane käsitleda ruutfunktsiooni kõige lihtsama kuju $y=x^2$ juures.

Nii avaldatakse lähtevõrdusest x

$$x=\pm\sqrt{y},$$

s. t. ruutfunktsiooni pöördfunktsioon koosneb kahest funktsioonist $x=\sqrt{y}$ ja $x=-\sqrt{y}$. Pärast funktsiooni ja argumendi tähiste ümbernimetamist saame pöördfunktsiooniks $y=\pm\sqrt{x}$. Igale argumendi väärtusele vastab siin kaks funktsiooni väärtust, mis oma absoluutväärtuse poolest on võrdsed. Esitades peegeldusvõtte abil selle pöördfunktsiooni graafiku, selgub, et selleks on jällegi parabool, kuid tema sümmeetriateljeks on x-telg (joon. 44).



Joon. 44.

Jooniselt ilmneb, et parabooli ülemise osa võrrandiks on $y=\sqrt{x}$ ja alumise osa võrrandiks $y=-\sqrt{x}$.

Ruutfunktsiooni pöördfunktsiooni nimetatakse mõnikord ka **ruutjuurfunktsiooniks.**

2. Ruutfunktsioon $y=ax^2+bx+c$

Üldise ruutfunktsiooni defineerimine peab toimuma vastavalt eespool esitatud seisukohale (lk. 56). Seega esituks ruutfunktsiooni definitsioon järgmiselt:

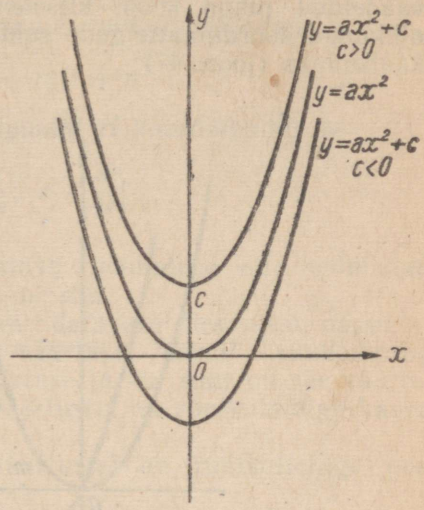
me nimetame funktsiooni $f(x)$ ruutfunktsiooniks, kui ta esitub kujus ax^2+bx+c, kus a, b ja c on konstandid.

Seni vaatluse all olnud funktsioon $y=ax^2$ on seega erijuht üldisest ruutfunktsioonist, kus $b=c=0$.

3. Ruutkolmliikme uurimine

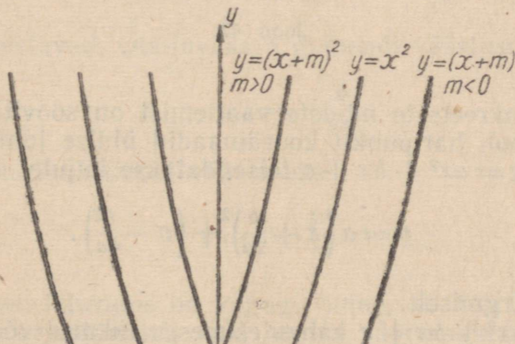
Järgmiseks teemaks võiks olla ruutfunktsioonide ax^2+c ja ax^2+bx+c uurimine.

Võrduse $y=ax^2+c$ teisendamisel kujule $y-c=ax^2$ ilmneb, et funktsiooni $y=ax^2+c$ graafik on saadud funktsiooni $y=ax^2$ graafikust selle nihutamisel üles- või allapoole c ühiku võrra (joon. 45).



Joon. 45.

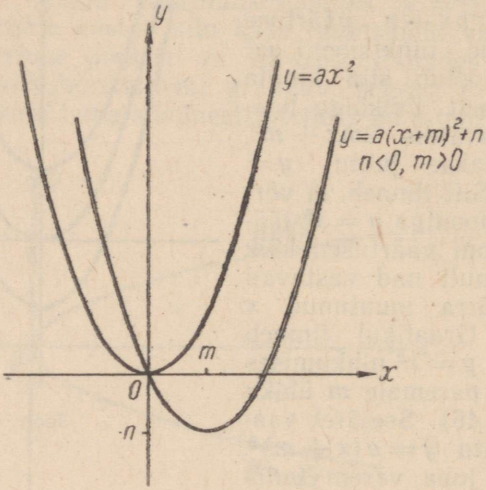
Avaldise $bx+c$ väärtuse juurdelisamine funktsiooni ax^2 väärtusele teostub siin kindla skeemi kohaselt. Eelkõige lisatakse x^2-le avaldis $2mx+m^2$, s. t. vaadeldakse juhtu $y=(x+m)^2$. Siit ilmneb, et võrreldes funktsiooniga $y=x^2$ jäävad funktsiooni väärtused kõik endisteks, ainult nad vastavad m ühiku võrra muutunud x väärtustele. Graafikul ilmneb see parabooli $y=x^2$ nihkumises vasakule või paremale m ühiku võrra (joon. 46). Seejärel vaadeldakse juhtu $y=a(x+m)^2$, mis hõlmab juba varem tund-



Joon. 46.

ma õpitud funktsiooni väärtuste kasvamise või kahanemise kiiruse muutuse koos parabooli nihkumisega paremale või vasakule.

Lõpuks jõutakse üldisele juhule $y = a(x + m)^2 + n$. Sellisele kujule on taandatav iga ruutkolmliige. Siin esinevad mõlemad vaadeldud juhud koos: kitsenenud või laienenud parabool on nihkunud koordinaattelgede suhtes nii horisontaal- kui ka vertikaalsuunas (joon. 47).



Joon. 47.

Pärast konkreetsete näidete vaatlemist on soovitav leida nihkunud parabooli haripunkti koordinaadid üldise juhu jaoks.

Sõltuvus $y = ax^2 + bx + c$ teisendatakse kujule

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

See toimub järgmiselt.

Avaldise $ax^2 + bx + c$ kahes esimeses liikmes võetakse a sulgude ette

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

ja täiendatakse suluavaldis täisruuduks

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

$\frac{b^2}{4a}$ lahutamine on vajalik selleks, et avaldise väärtus jääks muutmatuks. Kirjutades suluavaldise täisruuduna, saame

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Saadud ruutkolmliige on sarnane ruutkolmliikmega

$$y=a(x+m)^2+n$$

ja seetõttu antud parabooli haripunkti H koordinaadid on

$$H\left(-\frac{b}{2a};\ c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Haripunkti tutvustamine annab võimaluse ette valmistada *funktsiooni ekstreemse väärtuse* mõistet.

Raskusteta osutuvad nüüd lahendatavaks ülesanded, nagu:

a) missuguse argumendi väärtuse korral ruutkolmliige omandab suurima (vähima) väärtuse ja kui suur on see väärtus;

b) missugustel argumendi väärtustel on ruutkolmliige kasvav ja missugustel kahanev;

c) missugustel argumendi väärtustel on ruutkolmliige positiivne, negatiivne või null.

Esimese ülesande vastused on ruutkolmliikmest kujus

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

kohe väljaloetavad. Otsitavaks argumendi väärtuseks on

$$x=-\frac{b}{2a}$$

ja otsitavaks funktsiooni väärtuseks

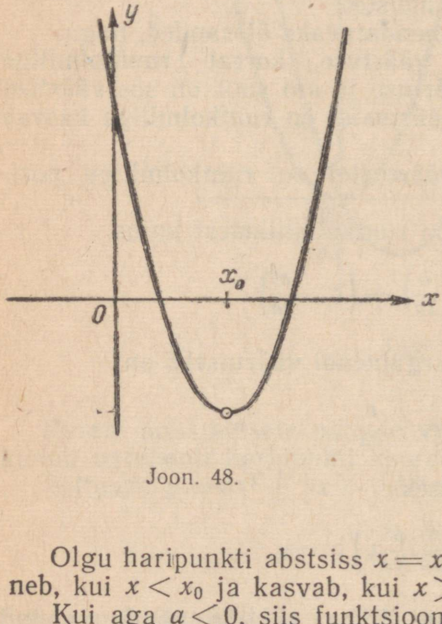
$$y=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Kuigi see lahendus on vägagi ilmne, ei tule nõuda saadud tulemuste meeldejätmist, vaid hoopis väärtuslikum on igakordne funktsiooni avaldise teisendamine antud kujule.

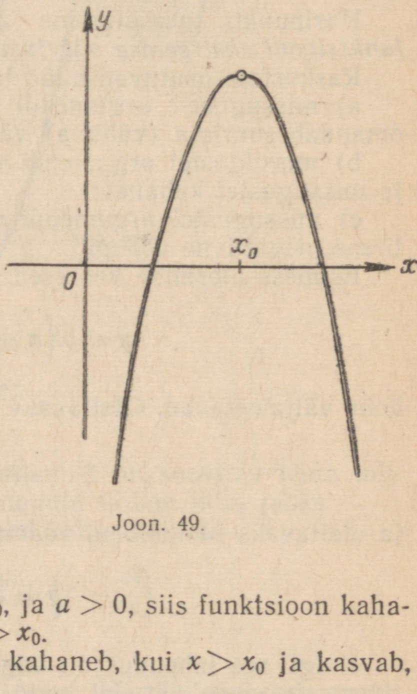
Siin tuleks vaadelda kahte juhtu. Kõigepealt tuleb selgitada, et kui $a>0$, siis otsime funktsiooni vähimat väärtust, ja kui $a<0$, siis otsime funktsiooni suurimat väärtust.

Esimesel juhul esitab ruutkolmliikme avaldises $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+$ $+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$ esimene liidetav iga x korral positiivset arvu, välja arvatud juhul $x = -\frac{b}{2a}$, mil tema väärtus on null. Ruutkolmliikme väärtus on seega väikseim siis, kui $x = -\frac{b}{2a}$. Teisel juhul on esimene liidetav negatiivne iga x korral, välja arvatud juhul $x = -\frac{b}{2a}$ kus tema väärtus on 0. Seega on ruutkolmliikme väärtus suurim just selle x väärtuse korral. Ruutkolmliikme suurimaks või vähimaks väärtuseks on aga teine liidetav.

Ülesanne b) laheneb kergesti, kui haripunkti koordinaadid on leitud. Nagu joonistelt 48 ja 49 on näha, jaotab haripunkt parabooli kaheks osaks: ühes neist on ta *kasvav*, teises *kahanev*. Teades peale haripunkti abstsissi veel a märki, on ruutfunktsiooni kasvamise ja kahanemise piirkond kohe määratud.



Joon. 48.



Joon. 49.

Olgu haripunkti abstsiss $x = x_0$, ja $a > 0$, siis funktsioon kahaneb, kui $x < x_0$ ja kasvab, kui $x > x_0$.

Kui aga $a < 0$, siis funktsioon kahaneb, kui $x > x_0$ ja kasvab, kui $x < x_0$.

Olgu antud näiteks ruutfunktsioon $y = 2x^2 - 8x + 3$. Teisendanud selle funktsiooni kujule

$$y = 2(x-2)^2 - 5,$$

võime kirjutada, et selle funktsiooni haripunktiks on

$$H(2; -5).$$

Et $a > 0$, siis funktsioon on kahanev, kui $x < 2$, ja kasvav, kui $x > 2$.

Nii nagu ei saa otstarbekaks lugeda seda, kui õpilased õpivad pähe, kuidas avalduvad üldisel kujul haripunkti koordinaadid ruutfunktsiooni avaldises esinevate kordajate kaudu, samuti ei saa lugeda õigeks, et õpilased hakkavad ruutfunktsiooni kasvamise ja kahanemise piirkondi määrama üldise valemi järgi. On vaja, et õpilased oskaksid skitseerida ruutfunktsiooni graafikut a märgi ja haripunkti järgi ning määrata jooniselt, kus funktsioon on kasvav või kahanev.

Ülesanne c) viib ruutkolmliikme positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna leidmise probleemi juurde. Aine käsitlemine võiks siin olla järgmine.

Olles teisendanud ruutkolmliikme kujule

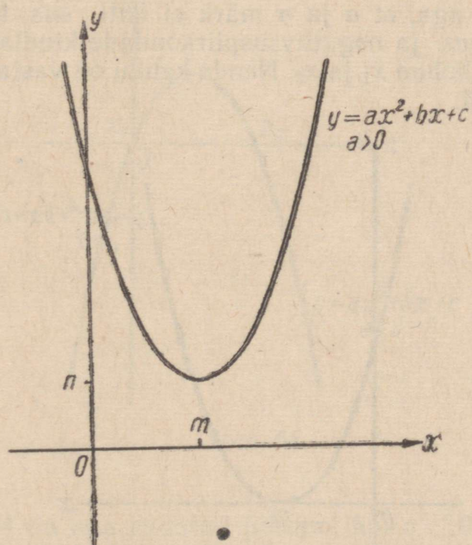
$$y = a(x + m)^2 + n,$$

on selge, kuidas asetseb selle ruutfunktsiooni graafik teljestiku suhtes, sest arvudega m ja n on parabooli haripunkti koordinaadid antud

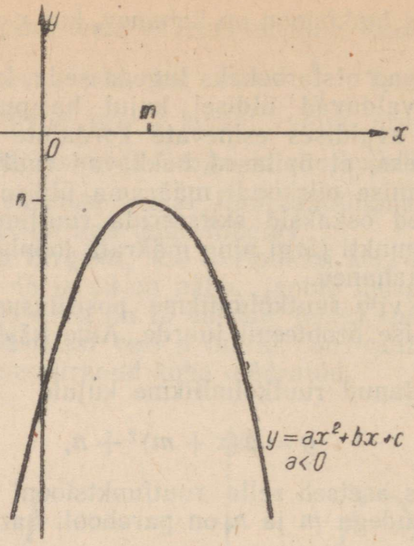
$$H(-m; n).$$

a märk aga näitab, missuguses suunas parabooli harud avanevad.

On raskusteta selgitatav, et kui $a > 0$ ja $n > 0$, siis parabool x-telge ei lõika ja $ax^2 + bx + c > 0$ iga x väärtuse korral (joon. 50). Kui aga $a < 0$ ja $n < 0$, siis ka $ax^2 + bx + c < 0$ iga x



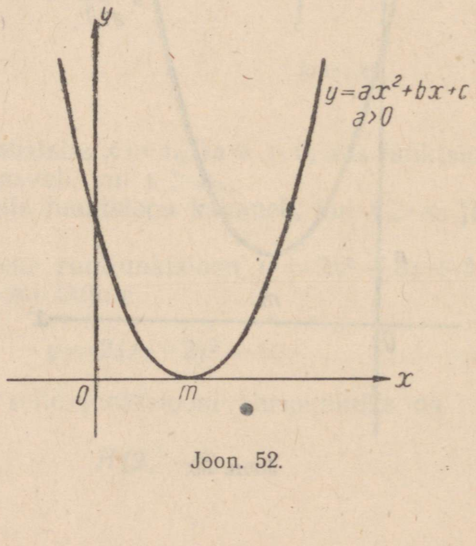
Joon. 50.



Joon. 51.

väärtuse korral (joon. 51). Kui aga $n=0$, siis parabool puudutab x-telge ja ruutfunktsiooni väärtused jäävad kõik kas positiivseiks ($a>0$) või negatiivseiks ($a<0$), välja arvatud kohal $x=-m$, kus funktsiooni väärtus on 0 (joon. 52).

Kui osutub aga, et a ja n märk ei ühti, siis tuleb ruutfunktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade kindlaksmääramiseks leida tema nullkohad x_1 ja x_2. Nende kaudu on vastavad piirkonnad kohe esitatavad.



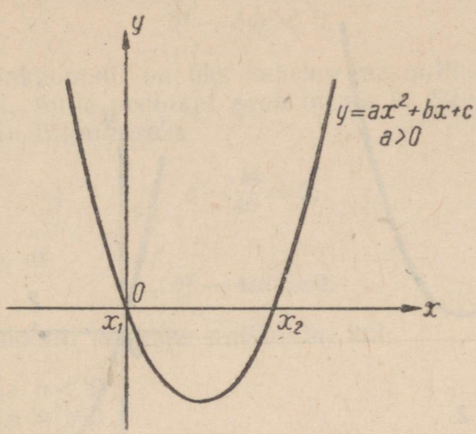
Joon. 52.

Joonisel 53 on esitatud juhtum, kui $a>0$, $n<0$. Jooniselt näeme, et

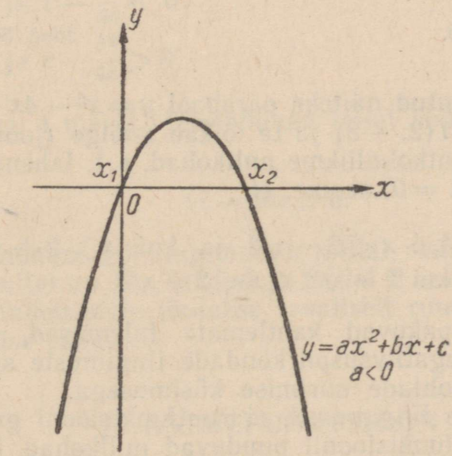
$ax^2+bx+c>0$, kui $x<x_1$ ja $x>x_2$

ning

$ax^2+bx+c<0$, kui $x_1<x<x_2$.



Joon. 53.



Joon. 54.

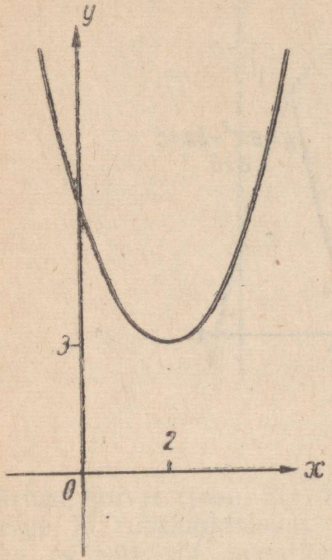
Joonisel 54 on aga esitatud juhtum, kui $a<0$, $n>0$. Siin

$ax^2+bx+c>0$, kui $x_1<x<x_2$

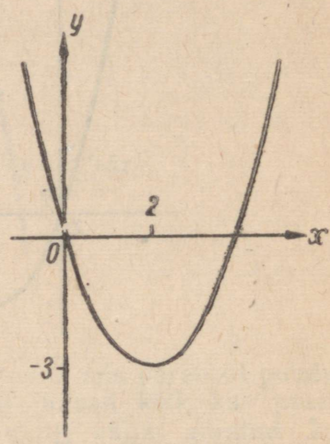
ja

$ax^2+bx+c<0$, kui $x<x_1$ ning $x>x_2$.

Olgu antud näiteks parabool $y=x^2-4x+7$. Tema haripunktiks on $H(2; 3)$. Skitseerides selle parabooli, näeme, et ta asub kõigi oma punktidega ülalpool x-telge (joon. 55). Järelikult on $y>0$ iga x korral.



Joon. 55.



Joon. 56.

Kui aga on antud näiteks parabool $y=x^2-4x+1$, siis tema haripunktiks on $H(2; -3)$ ja ta lõikab x-telge (joon. 56). Määrates nüüd selle ruutkolmliikme nullkohad, s. t. lahendades ruutvõrrandi $x^2-4x+1=0$, saame, et

$$y>0, \text{ kui } x<2-\sqrt{3} \text{ ja kui } x>2+\sqrt{3};$$
$$y<0, \text{ kui } 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}.$$

Teatud huvi pakuvad kahtlemata tulemused, mis saadakse positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade tingimuste sidumisel ruutfunktsiooni nullkohtade uurimise küsimusega.

Eespool saime tingimused, et ruutfunktsiooni graafik ei lõika x-telge, s. t. ruutfunktsioonil puuduvad nullkohad, kui

1) $a>0$ ja $n>0$;
2) $a<0$ ja $n<0$.

Et $n=c-\frac{b^2}{4a}$, siis võime need tingimused esitada ka kujul

1) $a>0$ ja $c-\frac{b^2}{4a}>0$;

2) $a<0$ ja $c-\frac{b^2}{4a}<0$.

Tingimused $c-\frac{b^2}{4a}>0$ ja $c-\frac{b^2}{4a}<0$ teisenduvad ühele ning samale kujule $b^2-4ac<0$ ja seega saame ruutfunktsiooni nullkohtade puudumise tingimuseks

$$b^2-4ac<0.$$

Kui ruutfunktsioonil on üks kahekordne nullkoht, siis on selleks haripunkt, mille ordinaat peab olema 0. Seega on ühe nullkoha olemasolu tingimuseks

$$c-\frac{b^2}{4a}=0,$$

millest saame, et

$$b^2-4ac=0.$$

Ruutfunktsioonil on kaks nullkohta, kui

1) $a>0$ ja $n<0$
2) $a<0$ ja $n>0$

ehk

1) $a>0$ ja $c-\frac{b^2}{4a}<0$

2) $a<0$ ja $c-\frac{b^2}{4a}>0$

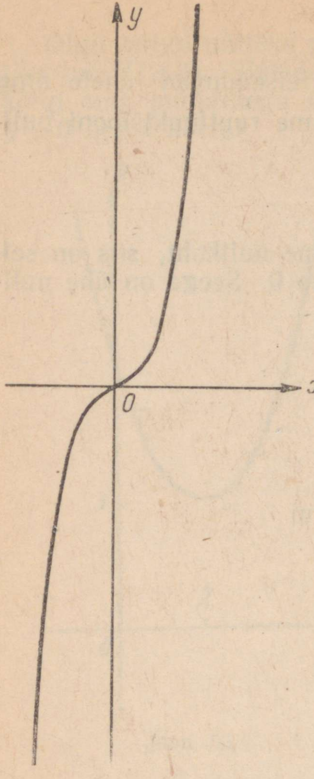
Arvestades a märki, teisenduvad teisel kohal olevad võrratused kujule

$$b^2-4ac>0.$$

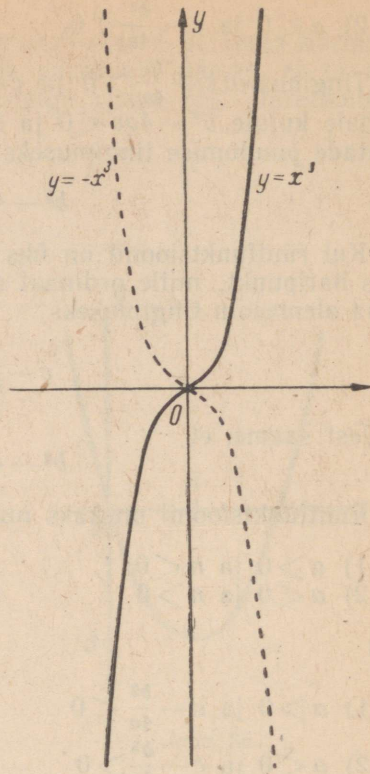
Seega saadakse siit tingimused, millal ruutvõrrandil lahendid puuduvad, millal on üks lahend ja millal 2 erinevat lahendit. Nendele tulemustele jõutakse tavaliselt ruutvõrrandi diskriminandi uurimise kaudu.

V. ASTMEFUNKTSIOON

Ruutfunktsiooni käsitluse juurest on loomulik edasi minna astmefunktsiooni käsitlemisele. Esimeses järjekorras tuleksid vaatluse alla astmefunktsioonid juhul, kui astendaja on positiivne täisarv. Seejärel leiaksid aga käsitlemist negatiivsete ja murruliste astendajatega astmed. Käesolevas peatükis selgitame, missuguses ulatuses tuleks neid küsimusi keskkoolis käsitleda.



Joon. 57.



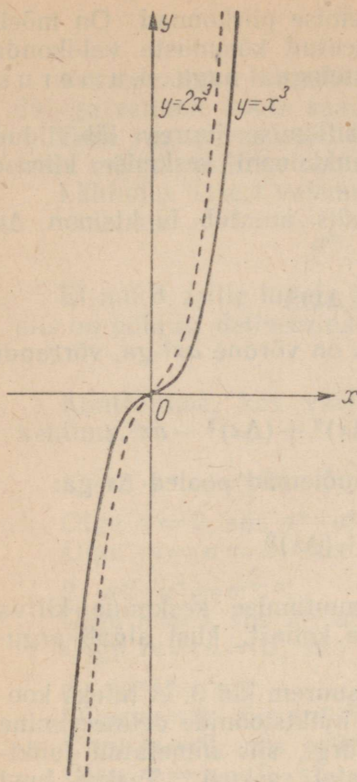
Joon. 58.

1. Astmefunktsioon positiivse täisarvulise astendaja korral

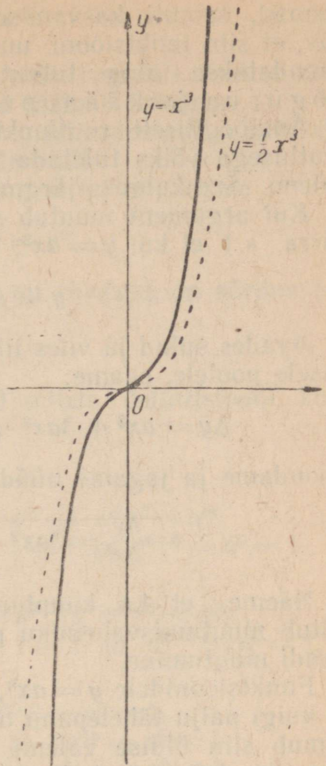
Pärast ruutfunktsiooni käsitlust on võimalik püstitada küsimus: missuguse kuju omandab funktsioon, kui temas argumendi kõrgeimaks astendajaks on 3? Sellele küsimusele suudavad õpilased ise vastata ja nii defineeritaksegi kuupfunktsioon: **me nimetame funktsiooni $f(x)$ kuupfunktsiooniks, kui ta esitub kujus ax^3+bx^2+cx+d, kus a, b, c ja d on konstandid.**

Sellega on kätte näidatud formaalne tee kõrgema astme astmefunktsioonide defineerimiseks. Üksikasjalikumale käsitlusele võetakse need funktsioonid aga kujus, kus esineb ainult kõrgema astme liige, s. t. kujus $y=ax^n$, kus $n=3$, 4, 5 jne.

Kuupfunktsiooni $y=ax^3$ kohta oskavad õpilased mõningaid näiteid tuua ka ise, sest geomeetria propedeutilises kursuses on nad õppinud tundma kuubi ja kera ruumala valemeid. Nendele valemitele vastavate funktsioonide graafikute abil tutvutakse kuupparabooliga ja sümmeetriaga koordinaatide alguspunkti



Joon. 59.



Joon. 60.

suhtes. Sümmeetria näitamiseks on otstarbekohane kasutada näitlikku õppevahendit, kus vineerist alusele joonestatud kuupparabooli kohal on võimalik pöörata traadist valmistatud täpselt samasugust parabooli.

Kuupfunktsiooni $y=ax^3$ graafik esitatakse ka sel juhul, kui a on negatiivne. Põhiparabooliks on nüüd funktsiooni $y=x^3$ graafik (joon. 57). Selgitamisele kuuluvad funktsioonide graafilise esituse juures küsimused, nagu:

1) kuidas asetsevad funktsioonide $y=x^3$ ja $y=-x^3$ graafikud teineteise suhtes (joon. 58);

2) kuidas muutub parabooli kuju, kui a absoluutväärtus suureneb (joon. 59);

3) kuidas muutub parabooli kuju, kui a absoluutväärtus väheneb (joon. 60).

Graafiku abil on raskusteta lahendatavad ka mitmed teised funktsiooni uurimisega seotud küsimused. Nii on graafikult leitav kuupfunktsiooni nullkoht, tema positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, samuti kasvamise ja kahanemise piirkonnad. On mõeldav, et siin funktsiooni uurimisega seotud küsimuste valdkonda laiendatakse ning tutvutakse mõistetega nagu k u m e r u s, n õ g u s u s ja k ä ä n u p u n k t.

Analoogiliselt ruutfunktsiooni käsitlemise juures läbiviidud arutlusega võiks tuletada ka kuupfunktsiooni keskmise kiiruse valemi. See kulgeks järgmiselt:

Kui argument muutub Δx võrra, siis muutub funktsioon Δy võrra, s. t. et kui $y = ax^3$, siis

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^3.$$

Avades sulud ja viies liikme y, mis on võrdne ax^3-ga, võrrandi teisele poolele, saame:

$$\Delta y = ax^3 + 3ax^2 \cdot \Delta x + 3ax(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - ax^3.$$

Koondame ja jagame nüüd võrrandi mõlemad pooled Δx-ga:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3ax^2 + 3ax \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Näeme, et ka kuupfunktsiooni muutumise keskmine kiirus sõltub muutumisvahemiku pikkusest ja kohast, kust algab argumendi muutumine.

Funktsioonidele $y = ax^n$, kus n on suurem kui 3, ei tuleks koolis kuigi palju tähelepanu osutada. Et funktsioonide defineerimine toimub siin üldise valemi $y = f(x)$ järgi, siis nimetatud funktsioonide defineerimisega ei ole õpilastel raskusi. Teatud huvi pakub aga nende funktsioonide graafikute võrdlemine. Kui esialgu tehakse lähemalt kaalutlemata mitmesuguseid oletusi neljanda, viienda ja kõrgema astme funktsioonide kulgemise kohta, siis joonestamisel ilmneb, et paarisarvulise astendaja korral kulgevad funktsioonide graafikud analoogiliselt ruutparabooliga ja paarituarvulise astendaja korral analoogiliselt kuupparabooliga. On vajalik, et õpetajal oleks juba olemas mõned kõrgema astme funktsioonide graafikud, et mitte aega viita nende joonestamisega.

Olles tutvunud astmefunktsioonidega, kus astendajaks on positiivne täisarv, tuletatakse valemid teheteks positiivse täisarvulise astendajaga astmetega. Need on järgmised:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, kui $m > n$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
5) $(a : b)^m = a^m : b^m$.

2. Astendaja 0

Astme mõistet laiendatakse nii, et positiivse täisarvulise astendajaga astmete kohta saadud valemid jääksid kehtima.

Enne negatiivse astendajaga astme defineerimist selgitatakse, mida mõista nullilise astendajaga astme all.

Lähtudes teisest valemist ja võttes seal $n = m$, saame

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0.$$

Et murd, mille lugeja ja nimetaja on võrdsed, on võrdne 1-ga, siis on põhjust defineerida

$$a^0 = 1.$$

Kontrollime, kas valemid jäävad sellise definitsiooni korral kehtima.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Olgu $n = 0$, siis $a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$ ja $a^{m+0} = a^m$.
Olgu $m = n = 0$, siis $a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1$ ja $a^{0+0} = a^0 = 1$.

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Olgu $n = 0$, siis $a^m : a^0 = a^m : 1 = a^m$ ja $a^{m-0} = a^m$.
Olgu $m = n = 0$, siis $a^0 : a^0 = 1 : 1 = 1$ ja $a^{0-0} = a^0 = 1$.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Olgu $n = 0$, siis $(a^m)^0 = 1$ ja $a^{m \cdot 0} = a^0 = 1$.
Olgu $m = 0$, siis $(a^0)^n = 1^n = 1$ ja $a^{0n} = a^0 = 1$.
Olgu $m = n = 0$, siis $(a^0)^0 = 1$ ja $a^{0 \cdot 0} = a^0 = 1$.

4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Olgu $m = 0$, siis $(ab)^0 = 1$ ja $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$.

5. $(a : b)^m = a^m : b^m$.

Olgu $m = 0$, siis $(a : b)^0 = 1$ ja $a^0 : b^0 = 1 : 1 = 1$.

Et kõik valemid jäid kehtima, siis

$$a^0 = 1.$$

Astmefunktsioon $y = x^0$ ei paku erilist huvi. Tema graafikuks on x-teljega paralleelne sirge.

3. Negatiivne astendaja

Negatiivse astendaja defineerimiseks laiendame 2. valemi kehtivust ka juhule, kus $m < n$. Selleks lähtume 1. valemist, võttes seal $n = -m$, saame

$$a^m \cdot a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1.$$

Seega võiks

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$$

Kontrollime, kas kõik valemid jäävad sellise definitsiooni puhul kehtima.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Olgu $n=-k$, siis

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$$

ja

$$a^{m+n}=a^{m-k}.$$

Olgu $m=-l$ ja $n=-k$, siis

$$a^m \cdot a^n = a^{-l} \cdot a^{-k} = \frac{1}{a^l} \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{l+k}}$$

ja

$$a^{m+n}=a^{-l-k}=a^{-(l+k)}=\frac{1}{a^{l+k}}.$$

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Olgu $n=-k$, siis

$$a^m : a^n = a^m : a^{-k} = a^m : \frac{1}{a^k} = a^m \cdot a^k = a^{m+k}$$

ja

$$a^{m-n}=a^{m+k}.$$

Olgu $m=-l$, siis

$$a^m : a^n = a^{-l} : a^n = \frac{1}{a^l} : a^n = \frac{1}{a^l \cdot a^n} = \frac{1}{a^{l+n}}$$

ja

$$a^{m-n}=a^{-l-n}=a^{-(l+n)}=\frac{1}{a^{l+n}}.$$

Olgu $m=-l$ ja $n=-k$, siis

$$a^m : a^n = a^{-l} : a^{-k} = \frac{1}{a^l} : \frac{1}{a^k} = \frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$$

ja

$$a^{m-n}=a^{-l+k}.$$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Olgu $n=-k$, siis

$$(a^m)^n=(a^m)^{-k}=\frac{1}{(a^m)^k}=\frac{1}{a^{mk}}$$

ja

$$a^{mn}=a^{-mk}=\frac{1}{a^{mk}}.$$

Olgu $m = -l$, siis

$$(a^m)^n = (a^{-l})^n = \left(\frac{1}{a^l}\right)^n = \frac{1}{a^{ln}}$$

ja

$$a^{mn} = a^{-ln} = \frac{1}{a^{ln}}.$$

Olgu $m = -l$ ja $n = -k$, siis

$$(a^m)^n = (a^{-l})^{-k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^l}\right)^k} = a^{lk}$$

ja

$$a^{mn} = a^{lk}.$$

4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Olgu $m = -k$, siis

$$(ab)^m = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k}$$

ja

$$a^m \cdot b^m = a^{-k} \cdot b^{-k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = \frac{1}{a^k \cdot b^k} = \frac{1}{(ab)^k}.$$

5. $(a : b)^m = a^m : b^m$.

Olgu $m = -k$, siis

$$(a : b)^{-k} = \frac{1}{(a : b)^k} = \frac{1}{a^k : b^k} = \frac{b^k}{a^k}$$

ja

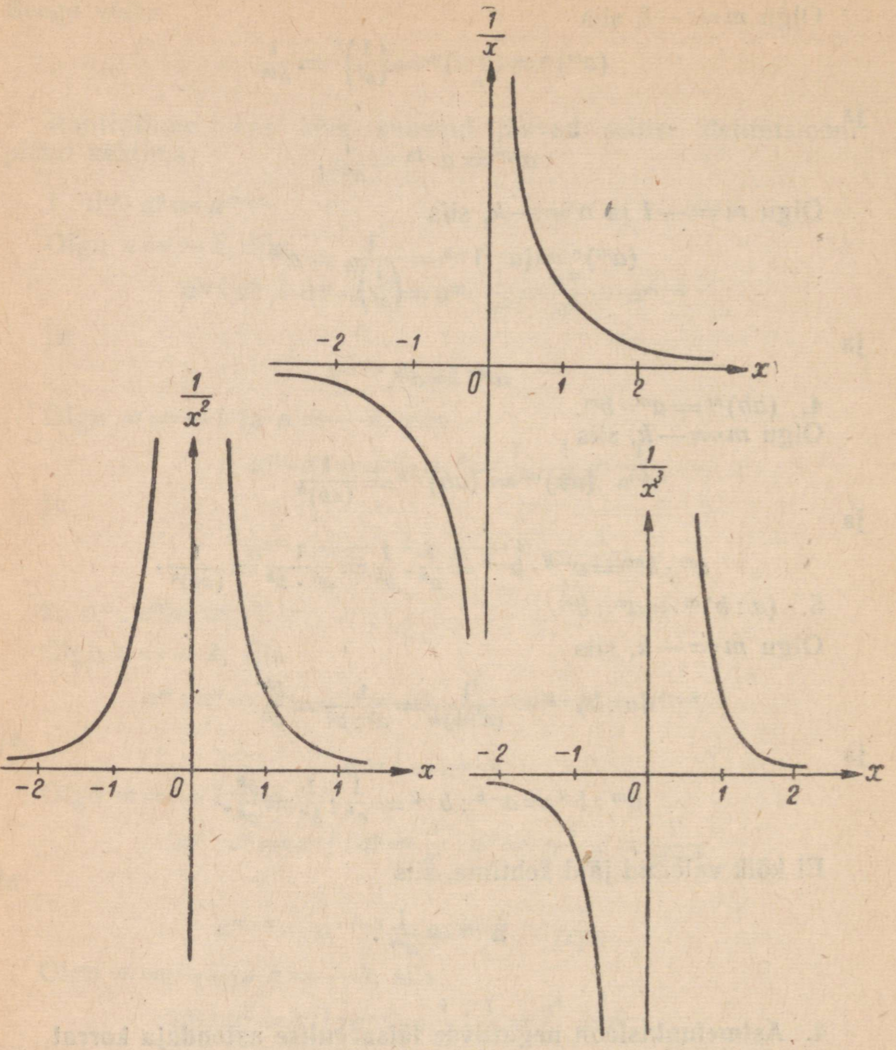
$$a^m : b^m = a^{-k} : b^{-k} = \frac{1}{a^k} : \frac{1}{b^k} = \frac{b^k}{a^k}.$$

Et kõik valemid jäid kehtima, siis

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

4. Astmefunktsioon negatiivse täisarvulise astendaja korral

Nüüd tutvutakse funktsiooniga $y = ax^n$, kus n on negatiivne täisarv. Lähemalt vaadeldakse funktsioone $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ ja $y = \frac{1}{x^3}$ (joon. 61). Nende funktsiconide graafikute kaudu tutvutakse veel kord hüperbooliga. Esimene toodud seostest (kui pöördvõrdeline sõltuvus) on õpilastele tuttav juba funktsionaalse sõltuvuse propedeutilisest kursusest, kus joonestati ka selle funktsiooni graafik. Käesolevas peatükis võrreldakse funktsioonide $y = \frac{a}{x}$



Joon. 61.

ja $y = -\frac{a}{x}$ graafikuid, s. t. vaadeldakse, kuidas muutub funktsiooni graafik, kui muutub a absoluutväärtus. Peale selle võrreldakse siin nii paarisarvulise kui ka paarituarvulise astendajaga funktsioonide graafikuid. Aitab ju funktsiooni graafik leida vastuseid küsimustele: kus on funktsiooni nullkoht, kus on tema positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, kus on funktsioonil ekstremaalne väärtus, kus on funktsioon kasvav, kus kahanev, kus on funktsioonil käänupunkt, kus ta on kumer, kus nõgus.

5. Murrulise astendajaga astme mõiste

Eespool on selgitatud, et vaatluse all olnud viis valemit kehtivad iga täisarvulise m ja n puhul. Murrulise astendaja juurde jõudmiseks nende kaudu ei ole seega võimalust. Astendaja 0 ja negatiivse täisarvulise astendajaga astme defineerimisega ammendati kõik nende valemite endi poolt tingitud astme mõiste laiendamise võimalused. Seepärast on vajalik järgmiseks astme mõiste laiendamiseks veel ühe uue valemi sissetoomine, mis defineeriks murrulise astendaja. See võiks toimuda järgmiselt.

Esimesed kolm valemit

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn},$$

näitavad tehteid, mis viivad astendajate liitmisele, lahutamisele ja korrutamisele. Võrdsete alustega astmete korrutamine ja jagamine viisid vastavalt astendajate liitmisele ja lahutamisele, s.t. madalamat järku tehte juurde. Astme astendamine viis samuti madalamat järku tehte — korrutamise juurde. On seega loogiline, et astendamise pöördtehe viib astendajate jagamise juurde. Selleks tehteks on juurimine.

Ruutjuure leidmisega tegelevad õpilased juba 8-aastases koolis. Ruutjuureks arvust a nimetatakse seal niisugust positiivset arvu, mis ruutu tõstes annab a. Seda arvu kirjutatakse sümboliga $\sqrt{a}$. Sama põhimõtte kohaselt defineeritakse ka kõrgemat järku juured. Nii tähendab $\sqrt[n]{a}$ positiivset arvu, mis astendades n-ga annab a. Kui seda arvu tähistada lühidalt b-ga, siis

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ kui } b^n = a.$$

Juure abil saaksimegi defineerida murrulise astendaja. See oleks

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Tekib küsimus, kuidas sooritada tehteid murrulise astendajaga astmetega ehk, teisiti, kuidas teostada tehteid juurtega. Neid on vaja osata, kui tahetakse kontrollida, kas eespool toodud 5 valemit jäävad ka murrulise astendajaga astmete korral kehtima. Tuginedes juure definitsioonile võib seda teha, mis on seotud küllalt suure tööga. Võib soovitada veel teist teed. Ja nimelt, lugeda murrulise astendajaga astme definitsiooni sisse ka kõne all oleva viie valemi kehtivus. Sellega oleks kindlustatud, et need valemid kehtivad murrulise astendajaga astmete korral ja ühtlasi oleks ette antud juhised teheteks juurtega.

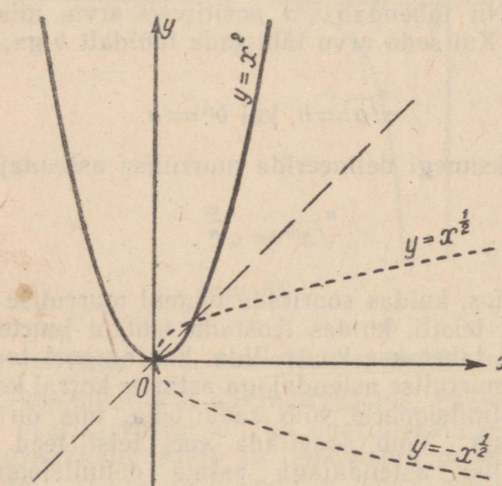
6. Astmefunktsioon murrulise astendaja korral

Eelkõige vaadeldakse siin mõnede positiivse täisarvulise astendajaga ja negatiivse täisarvulise astendajaga astmefunktsioonide pöördfunktsioone. Nendeks võiksid olla $y = \pm x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = \pm x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$. Et pöördfunktsioonigraafiku joonestamisega peegeldusvõtte abil ollakse tuttavad, siis on kerge joonestada nende funktsioonide graafikuid (joon. 62—65) ja graafiku järgi uurida vastavat funktsiooni.

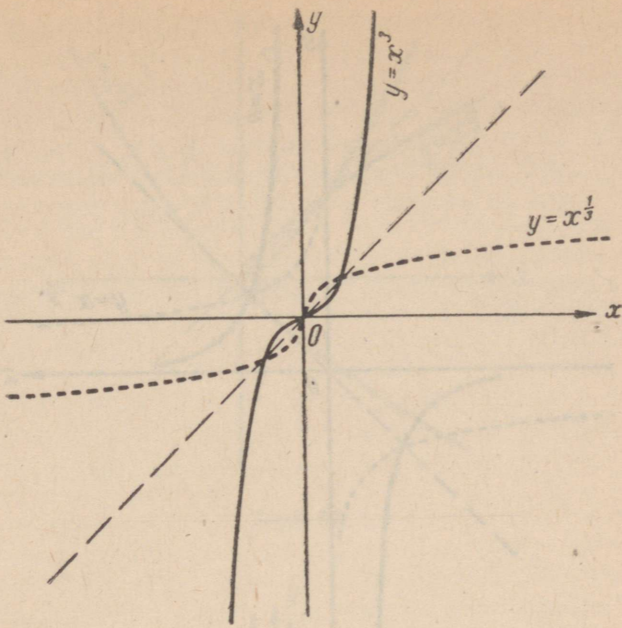
Üldisemate juhtude kohta peaks õpetajal olema valmis graafikud koos vastavate pöördfunktsioonide graafikutega. Vaatluse alla võiksid siin tulla funktsioonid $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{3}{4}}$ ja nende pöördfunktsioonid $y = x^{\frac{3}{2}}$ ja $y = x^{\frac{4}{3}}$ (joon. 66 ja 67). Samuti peaks vaadeldama mõnd negatiivse murrulise astendajaga astmefunktsiooni, näiteks $y = x^{-\frac{2}{3}}$ ja $y = x^{-\frac{3}{2}}$ (joon. 68).

Kõigi vaatluse all olevate funktsioonide uurimine toimub jällegi graafikute põhjal.

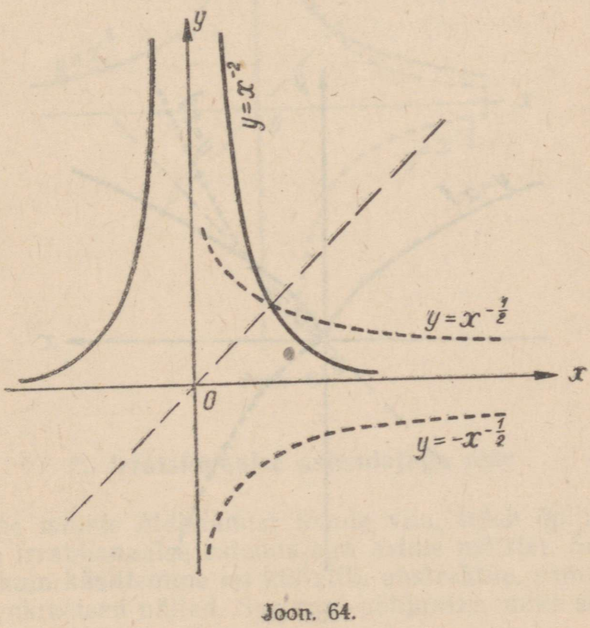
Tähelepanelikult tuleb siin jälgida kaheseid funktsioone, s. t. funktsioone, kus ühele argumendi väärtusele vastab kaks funktsiooni väärtust. Ühtlasi selgitatakse, missugustest ühestest funktsioonidest see kahene funktsioon koosneb.



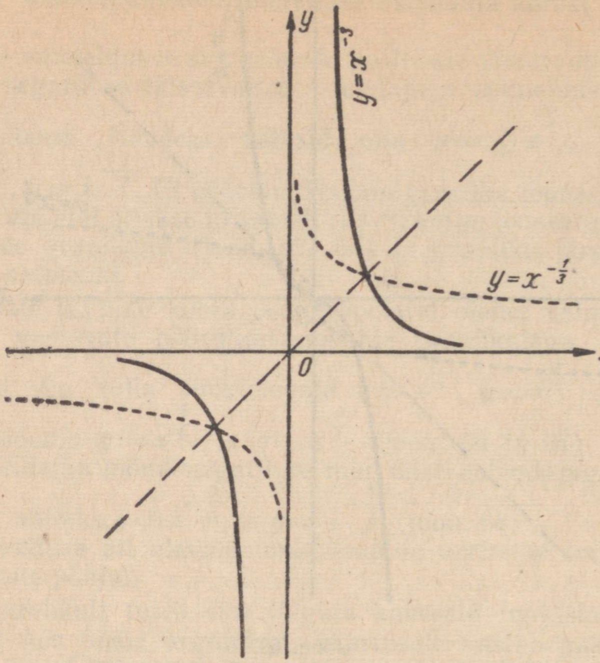
Joon. 62



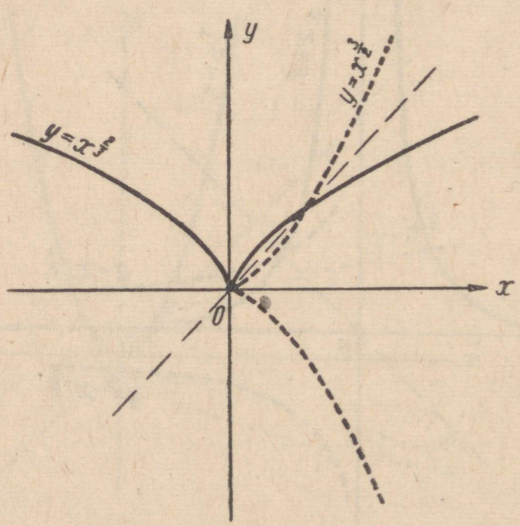
Joon. 63.



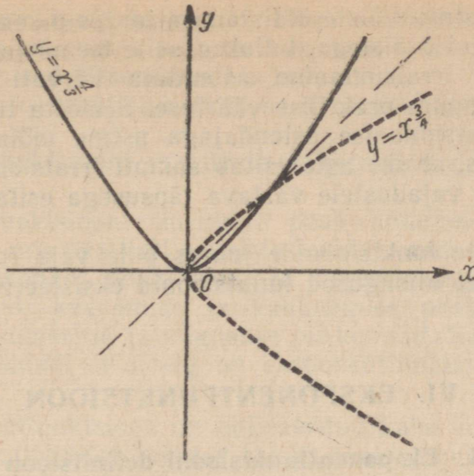
Joon. 64.



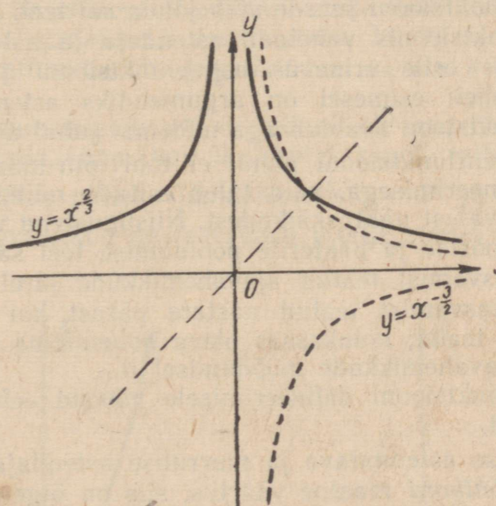
Joon. 65.



Joon. 66.



Joon. 67.



Joon. 68.

7. Irratsionaalse astendajaga aste

Et astme mõiste üldistamist lõpule viia, tuleb õpilastele tutvustada ka irratsionaalse astendajaga astme mõistet. Selle teema üksikasjalikum käsitlemine on küllaltki abstraktne, samuti puuduvad siin konkreetsed näited. See ongi põhjuseks, miks selle teema juures koolis astme mõiste üldistamise juures pikemalt ei peatuta. Seoses logaritmi mõistega tullakse selle teema juurde tagasi ja seal omandab irratsionaalne astendaja kõrvuti ratsionaalsete astendajatega suure praktilise väärtuse. Seetõttu tulebki piirduda siin ainult irratsionaalse astendajaga astme mõiste tutvustamisega, rõhutades, et see aste esitab samuti irratsionaalarvu, mida võime praktika vajadustele vastava täpsusega esitada ratsionaalarvuna.

Ka vastavate funktsioonide juures pole vaja rohkem peatuda kui nimetada, et niisugused funktsioonid eksisteerivad.

VI. EKSPONENTFUNKTSIOON

1. Eksponentfunktsiooni definitsioon

Peale eespool vaadeldud funktsioonide kuuluvad koolis käsitlemisele veel e k s p o n e n t- ja l o g a r i t m f u n k t s i o o n.

Eksponentfunktsiooni juurde võib jõuda sel teel, et juba käsitletud astmefunktsioonis vahetada astendaja ja astendatav. Sellega tõstetakse esile erinevus astmefunktsiooni ja eksponentfunktsiooni vahel: esimesel on argumendiks astendatav, teisel astendaja. Funktsioon avaldub aga mõlemal juhul astmena.

Ka eksponentfunktsiooni puhul ei tohi piirduda funktsiooni formaalse defineerimisega, vaid tuleb esitada näiteid eksponentsiaalselt kulgevatest nähtuskäikudest. Niisugustena võiks siin tutvustada: infusooride ja bakterite pooldumise teel saadavate pisikute hulga kasvamist teatud ajavahemikkude järel; mingi riigi elanike arvu kasvamist teatud aastate pärast, kui elanike arvu kasvutegur on teada; hoiukassas oleva hoiusumma suuruse leidmist teatud ajavahemikkude möödumisel jt.

Eksponentfunktsiooni defineerimisele võiksid eelneda järgmised kaalutlused.

Et negatiivse astendatava ja murrulise astendaja korral puudub astmel *mõnikord* reaalne väärtus, siis on õigem jätta negatiivse aluse juht välja. Samuti on õigem jätta välja need juhud, kus astendatava väärtus on 0 või 1, sest sel korral funktsiooni väärtused ei muutu argumendi väärtuste muutumisel ning vastavad graafikud esituvad sirgetena. Et defineeritav funktsioon esituks ühesena, on soovitav juba enne defineerimist selgitada, et murruliste argumendi väärtuste korral arvestatakse ikka ainult saadavat positiivset väärtust.

Arvestades nimetatud tingimusi, võiks eksponentfunktsiooni defineerida koolis järgmiselt:

me nimetame funktsiooni $f(x)$ eksponentfunktsiooniks, kui ta esitub kujus $k \cdot a^x$, kus k ja a on konstandid, kusjuures a suhtes kehtivad järgmised kitsendused: $a > 0$, $a \neq 1$.

Koolis on seni käsitletud eksponentfunktsiooni tavaliselt kujus, kus $k = 1$.

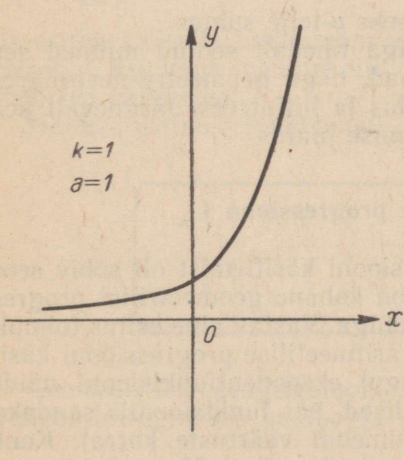
Eksponentfunktsiooni omaduste selgitamiseks tuleb kasutada graafikuid.

Eksponentfunktsiooni uurimine peab hõlmama jällegi kõiki neid küsimusi, mis püstitati eelmiste funktsioonide puhul. Nii tuleb selgitada nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, ekstreemumpunktid, kasvamise ja kahanemise piirkonnad, käänupunktid ning kumeruse ja nõgususe piirkonnad. Samuti tuleb joonise abil veenduda, et x-telg on eksponentfunktsiooni graafikule asümptoodiks.

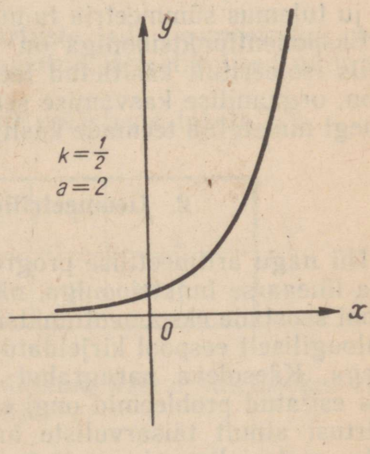
Et eksponentfunktsioon on defineeritud kahe konstandi kaudu, siis tuleb samuti uurida, kuidas oleneb funktsiooni muutumine nii ühest kui teisest konstandist.

Kogu arutelu peab siingi tuginema eksponentfunktsioonide graafikuile. Kõrvuti õpilaste poolt joonestatavate graafikutega peab õpetaja kasutuses olema küllaldane hulk valmisjoonestatud suuremõõdulisi graafikuid. Joonistel 69, 70, 71 ja 72 on esitatud rida eksponentfunktsiooni graafikuid erinevate k ja a väärtuste korral.

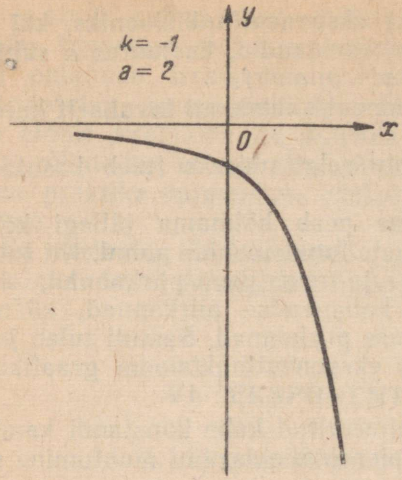
Eksponentfunktsiooni graafikuid ei ole soovitav ühte teljestikku joonestada enam kui üks, kuigi sageli esitatakse ühes ja samas teljestikus näiteks funktsioonide $y = 2^x$ ja $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ graafikud. Need graafikud on teatavasti y-telje suhtes sümmeetrilised



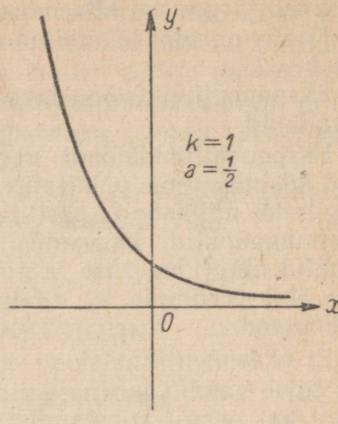
Joon. 69.



Joon. 70.



Joon. 71.



Joon. 72.

kõverad. Esineb juhtumeid, kus õpilased nimetavad seetõttu eksponentfunktsiooni graafikut «paraabooliks» või isegi «sabadega paraabooliks», sest nad loevad neid graafikuid ühe funktsiooni graafikuks. Kui peetakse vajalikuks esitada neid graafikuid ühes ja samas teljestikus, siis tuleb kindlasti kasutada värvilisi kriite või ühe graafiku esitamist punktiiris, et õpilaste kujutlusse ei jääks väärarvamust.

Teisest küljest on siin aga suurepärane võimalus selgitada joonte sümmeetriat y-telje suhtes. Vaadeldes funktsioone 2^x ja $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ning asendades viimases x $(-x)$-ga, saame $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$. On ju tulemus sümmeetria tunnuseks y-telje suhtes.

Eksponentfunktsiooniga on väga tihedalt seotud mitmed seni koolis isoleeritult käsitletud teemad, nagu geomeetriline progressioon, orgaanilise kasvamise seadus ja liitintress. Järgnevalt peatumegi nimetatud teemade käsitlemise juures.

2. Geomeetriline progressioon I

Nii nagu aritmeetilise progressiooni käsitlemist oli sobiv seostada lineaarse funktsiooniga, nii on kohane geomeetrilist progressiooni seostada eksponentfunktsiooniga. Vastav aine esitus toimuks analoogiliselt eespool kirjeldatud aritmeetilise progressiooni käsitlusega. Käesoleva paragrahvi algul eksponentfunktsiooni näidetena esitatud probleemid ongi sellised, kus funktsioonile saadakse väärtusi ainult täisarvuliste argumendi väärtuste korral. Konkreetse materjalina olgu esitatud veel järgmised ülesanded:

1. *Isa paneb poja sündimise päeval hoiukassasse hoiule* 50 *rubla tähtajaga poja* 20-*aastaseks saamiseni. Hoiukassa maksab tähtajaliselt hoiuselt* 3% *aastas ja lisab selle aasta lõpul hoiusummale. Arvuta hoiusumma suurus* n $(1 \leqslant n \leqslant 20)$ *aasta lõpuks.*

2. *Tööstuse sisseseade maksis uuena* 125 000 *rubla. Selle väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse vananemise ja kulumise arvel* 8% *sisseseade eelmise aasta väärtusest. Kui suur on n aasta pärast tööstuse sisseseade väärtus v, kui sisseseadet vahepeal ei uuendata?*

Geomeetrilise progressiooni tutvustamiseks kirjutatakse välja nende ülesannete lahenditena saadud eksponentfunktsiooni väärtuste jadad.

Olgu antud näiteks eksponentfunktsioon 2^x. Koostame selle funktsiooni väärtuste tabeli, andes argumendile järjestikulisi naturaalarvulisi väärtusi, alates 1-st:

x	1	2	3	4	5	...
2^x	2	4	8	16	32	...

Kui vaadelda saadud funktsiooni väärtuste jada, siis ilmneb omadus, et selles jadas iga liige alates teisest erineb eelmisest teatud kindel arv korda, seega see arvude jada esitab geomeetrilist progressiooni.

Kui võtta vaatluse alla eksponentfunktsioon kujus

$$k \cdot a^x,$$

siis esitab ka selle funktsiooni väärtuste jada geomeetrilist progressiooni, kui vaid argumendile on antud järjestikulised naturaalarvulised väärtused.

Näiteks esitame funktsiooni $3 \cdot 2^x$ väärtuste tabeli

x	1	2	3	4	5	...
$3 \cdot 2^x$	6	12	24	48	96	...

Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem tuletatakse definitsioonile toginedes analoogia põhjal

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Kui siin q^{n-1} asendada $\frac{q^n}{q}$ -ga, siis

$$a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n.$$

Olgu näiteks $a_1 = 6$ ja $q = 2$, siis

$$a_n = 3 \cdot 2^n$$

ja vastav geomeetriline progressioon on

$$6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots$$

Saame sama väärtuste jada mis ennegi.

Seega esitub geomeetrilise progressiooni üldliige liikmete arvu suhtes eksponentfunktsioonina ja me võime defineerida geomeetrilist progressiooni eksponentfunktsiooni väärtuste jadana: **geomeetriline progressioon on eksponentfunktsiooni väärtuste jada, kui argumendi väärtusteks on järjestikulised naturaalarvud, alates 1-st.**

Täpselt samuti nagu tõestasime aritmeetilise progressiooni üldliikme ja summa valemi matemaatilise induktsiooni meetodiga, on võimalik sama meetodiga tõestada ka geomeetrilise progressiooni üldliikme ja summa valemeid. See toimuks järgmiselt.

Analoogia põhjal saadi geomeetrilise progressiooni üldliikme valemiks

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Eeldame nüüd, et see valem kehtib ühe kindla n väärtuse korral ja tõestame, et valem jääb kehtima ka siis, kui n asendada $n+1$-ga, s. t. et

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n.$$

Et

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

ja

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

siis

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 q^n.$$

Et valem kehtis $n = 2, 3, 4$ korral, siis tõestatu põhjal kehtib ta ka $n = 5$ korral. Sellest omakorda järeldub valemi kehtivus $n = 6$ korral jne.

Leiame geomeetrilise progressiooni summa, kui $n = 2$ ja $n = 3$.

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = a_1(1+q) = a_1 \cdot \frac{1-q^2}{1-q}.$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = a_1(1+q+q^2) = a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q}.$$

Analoogia põhjal võib oletada, et

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Oletame, et see valem kehtib, ja tõestame, et kehtib ka valem

$$S_{n+1} = a_1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Et

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1},$$

siis

$$S_{n+1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} + a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q} + q^n\right) =$$

$$= a_1 \cdot \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Seega, kuna valem

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

kehtis $n=2$ ja $n=3$ korral, siis tõestatu põhjal kehtib ta ka $n=4$ korral. Sellest omakorda järeldub valemi kehtivus $n=5$ korral jne.

3. Geomeetriline progressioon II

Geomeetrilise progressiooni käsitlemisel võib lähtuda eksponentfunktsioonist $y = ka^x$. Selle funktsiooni väärtuste jadas, mis on saadud argumendi järjestikuliste naturaalarvuliste väärtuste korral, on iga kahe järjestikulise liikme jagatis konstantne. Seega võime geomeetrilist progressiooni defineerida järgmiselt:

geomeetriline progressioon on niisugune arvude jada, kus kahe teineteisele järgneva liikme jagatis on jääv.

Kui on antud mingi eksponentfunktsioon, siis saame sellest mitmeti esitada geomeetrilisi progressioone, sest argumendi juurdekasvu muutmine annab iga kord uue geomeetrilise progressiooni.

Vastupidine ülesanne oleks järgmine: on antud mingi geomeetriline progressioon ning on vaja leida vastav eksponentfunktsioon. Ka siin on mitu lahendust. Valime neist meile sobivaima.

Et geomeetriline progressioon esitab eksponentfunktsiooni väärtuste jada, siis kirjutame sinna juurde veel argumendi väärtuste jada. Valime selleks jadaks naturaalarvude jada, alates 1-st.

Sel korral on geomeetrilise progressiooni iga liikme järjekorranumber temale vastavaks argumendi väärtuseks. Otsitava eksponentfunktsiooni tabeliline esitus näeks siis välja järgmine:

1	2	3	...	n
a_1	a_2	a_3	...	a_n

Eksponentfunktsiooni avaldises sisalduvate konstantide määramiseks valime tabelist esimese ja teise väärtuspaari, sest need peavad seda võrdust rahuldama. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 = k \cdot a \\ a_2 = k \cdot a^2 \end{cases}$$

Jagades teise võrrandi esimesega, saame

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{ka^2}{ka},$$

kust

$$\frac{a_2}{a_1} = a.$$

Geomeetrilise progressiooni kahe järjestikuse liikme jagatist nimetatakse selle progressiooni teguriks ja tähistatakse tavaliselt tähega q. Seega

$$a = q.$$

k leiame esimesest võrrandist,

$$k = \frac{a_1}{a} = \frac{a_1}{q}.$$

Seega on otsitavaks eksponentfunktsiooniks

$$y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$$

ehk

$$y = a_1 \cdot q^{x-1}.$$

Asendades saadud tulemuses x ja y väärtuspaariga n ja a_n, saame tuntud geomeetrilise progressiooni üldliikme valemi

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Toome ühe näite.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$-4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Ülesandeks on leida see eksponentfunktsioon, mille väärtuste jada see progressioon esitab. Et

$$k = \frac{a_1}{q} = \frac{-4}{-\frac{1}{2}} = 8 \quad \text{ja} \quad a = q = -\frac{1}{2},$$

siis otsitavaks funktsiooniks on

$$y = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^x.$$

Geomeetrilise progressiooni summa valemi tuletamiseks võib soovitada peale harilikult kasutatava võtte veel järgmist mõttekäiku.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

ehk, kasutades üldliikme valemit,

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots, a_1q^{n-1}.$$

Ülesandeks on leida summa

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

ehk

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Seega taandub ülesanne summa

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$$

leidmisele.

Oletame, et eelnevalt on õpilastele tutvustatud valemeid

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3);$$
$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

mis on kergesti kontrollitavad, kui korrutada tegurid võrduste paremal poolel läbi. Saadud tulemus üldistatakse kas analoogiale tuginedes, s. t. loetakse kehtivaks ka valem

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

või õpitakse tundma Bezout' valemit, mille järeldusena jõutaksegi esitatud valemini.

Võttes selles valemis $a = q$ ja $b = 1$, saame

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q^2 + q + 1)$$

ja siit

$$\frac{q^{n}-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Seega, geomeetrilise progressiooni summa avaldub valemina

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

4. Orgaanilise kasvamise seadus

Geomeetrilise progressiooni rakendusena on soovitav kasutada ülesandeid orgaanilise kasvamise seaduse kohta.

On tähele pandud, et elava looduse indiviidide arv ühe ja sama ajaühiku jooksul kasvab enam-vähem konstantse arvu ehk indeksi kordseks. See seaduspärasus ongi tuntud orgaanilise kasvamise seaduse nime all. Nii näiteks loetakse elanikkonna kasvuteguriks (ehk indeksiks) Rootsis 1,0051, Poolas 1,013, Prantsusmaal 1,0014, Soomes 1,0094 jne.

Sama seaduspärasus tuleb aga ilmsiks ka eluta looduses, nagu füüsikas, keemias jne. Sellisteks nähtusteks on näiteks õhurõhu muutumine olenevalt kõrgusest, valgusenergia neeldumine keskkonnas, elektrikondensaatori tühjenemine laengust, keemilises reaktsioonis tekkiva aine kontsentratsiooni muutumine, keha temperatuuri muutumine antud soojusjuhtivuse tingimustes jne.

Teatavasti aitab sellise seaduspärasuse olemasolu koostada rahvamajanduse perspektiivplaane. Rahva heaolu suurendamiseks on vajalik, et toodangu indeks ületaks elanikkonna kasvuteguri. Tähistades indiviidide arvu kindlate ajavahemike järgi tähtedega

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

võime orgaanilise kasvamise seaduse kehtimise korral kirjutada

$$a_2 - a_1 = a_1(q-1);$$
$$a_3 - a_2 = a_2(q-1);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1}(q-1).$$

Seega on indiviidide arvu juurdekasv ajaühikus määratav indiviidide lähtearvu ja teatud kindla teguri korrutisena. Seda kindlat tegurit $q-1$ nimetatakse kasvu tempoks ja ta esitatakse tavaliselt protsentides. Nii näiteks ütleme, et elanikkonna arvu kasvutempo Poolas on ca 1,3%.

Toodud võrdustest ilmneb, et indiviidide arvu juurdekasvud on võrdelised lähtearvudega, näiteks

$$\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}=\frac{a_2}{a_1},$$

s. t. kui mitu korda suureneb lähtearv, nii mitu korda suureneb ka juurdekasv.

Olgu siinkohal esitatud ka paar näidisülesannet orgaanilise kasvamise seaduse kohta.

1. *Õhurõhu kohta pealpool merepinda kehtib seadus:* 100-*meetrilisele tõusule vastab õhurõhu vähenemine* 1,2% *võrra. Arvutada, kui suur on õhurõhk* 400 *m kõrgusel, kui merepinnal valitseb normaalrõhk.*

Kui tähistada õhurõhku merepinnal a_1, 100 m kõrgusel a_2, jne., siis otsitavaks on a_5.

Ülesande lahendamiseks tuleb eelkõige leida indeks q. Kuna me teame õhurõhu vähenemise tempot

$$q-1=-0{,}012,$$

siis siit

$$q=0{,}988.$$

Et $a_1=760$, siis

$$a_5=760\cdot 0{,}988^4\approx 724{,}4.$$

Seega võime väita, et õhurõhk 400 m kõrgusel on ca 724 mm.

2. *Kuumutamisel laguneb vesiniku ülihapend valemi järgi*

$$H_2O_2=H_2O+O.$$

10 *minutit pärast reaktsiooni algust oli* H_2O_2 *kontsentratsioon* $8\,\frac{g}{l}$ *ja* 20 *minutit pärast reaktsiooni algust* $4{,}8\frac{g}{l}$. *Arvutada vesiniku ülihapendi esialgne kontsentratsioon. Mitme protsendi võrra väheneb selles katses kontsentratsioon minutis?*

Ülesandes on antud $a_{11}=8$ ja $a_{21}=4{,}8$. Otsitavad on a_1 ja $q-1$.

Et

$$\begin{cases} a_1q^{10}=8 \\ a_1q^{20}=4{,}8, \end{cases}$$

siis

$$q^{10} = 0,6$$

ja

$$q \approx 0,95.$$

Siit

$$a_1 = \frac{8}{0,6} \approx 13,3$$

ja

$$q - 1 \approx -0,05.$$

Seega vähenes vesiniku ülihapendi kontsentratsioon minutis 5% võrra ja esialgne vesiniku ülihapendi kontsentratsioon oli ca 13 grammi liitri kohta.

3. *Rahvaarvu aastane indeks on* 1,01. *Kui suur peab olema põllumajandusliku toodangu indeks, et* 15 *aasta pärast oleks ühe elaniku kohta tulev põllumajandussaaduste kogus* 2 *korda suurem kui praegu?*

Eelkõige tuleb arvutada, mitmekordseks suureneb elanikkonna arv 15 aasta jooksul.

Kui $a_1 = 1$ ja ülesande tingimuse kohaselt $q = 1,01$, siis otsitavaks on a_{16}.

$$a_{16} = a_1 \cdot q^{15} = 1,01^{15} \approx 1,16.$$

Et elanikkond kasvab 1,16 kordseks, siis põllumajandussaaduste toodang peab kasvama $2 \cdot 1,16 = 2,32$ kordseks. Kui praegune põllumajandussaaduste toodang lugeda võrdseks 1-ga, siis nüüd on

$$a_{16} = 2,32$$

ja teades, et $a_1 = 1$, tuleb leida q.

$$q^{15} = 2,32;$$
$$q \approx 1,06.$$

Ülesandes seatud nõue põllumajandussaaduste toodangu suurendamise kohta täidetakse seega juhul, kui selle toodangu aastane indeks on 1,06.

5. Liitintress

Geomeetrilise progressiooni rakendusena tuleks käsitleda koolis ka l i i t i n t r e s s i.

I n t r e s s on teatavasti see rahasumma, mis hoiukassas arvestatakse juurde hoiusele. Intressi suurus oleneb nn. i n t r e s s i m ä ä r a s t, mis näitab, mitmendik osa hoiusest arvestatakse aasta lõpul hoiusele juurde. Samuti oleneb intressi suurus hoiuajast ja hoiuse suurusest.

Olgu intressimäär p % ja hoius k rubla. Aasta lõpul arvestatakse sellele hoiusele intressina juurde

$$\frac{kp}{100} \text{ rubla.}$$

Tuleb vahet teha kaht liiki intressi vahel. Kui teise aasta lõpul arvestatakse intressi esialgselt hoiusummalt, s. t. k rublalt, siis nimetatakse seda l i h t i n t r e s s i k s. Kui aga teise aasta lõpul arvestatakse intressi ka esimese aasta intressilt, siis nimetatakse teise aasta lõpul juurdelisatavat summat l i i t i n t r e s s i k s.

Tähistades kogu hoiusummat teise aasta lõpul K_2, avaldub see

a) lihtintressi korral

$$K_2 = k + \frac{2kp}{100} = k\left(1 + \frac{2p}{100}\right);$$

b) liitintressi korral

$$K_2 = k + \frac{kp}{100} + \left(k + \frac{kp}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Kasutades matemaatilise induktsiooni meetodit, võib kergesti tõestada nende valemite kehtivuse mistahes positiivse täisarvulise n korral:

a) lihtintressi korral

$$K_n = k\left(1 + \frac{np}{100}\right);$$

b) liitintressi korral

$$K_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n;$$

Viimasest valemist on ilmne, et liitintressi korral moodustavad hoiused geomeetrilise progressiooni

$$k;\ k\left(1 + \frac{p}{100}\right);\ k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;\ \ldots;\ k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n;\ \ldots,$$

kus $a_1 = k$ ja $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Kui intressi soovitakse arvestada hoiusummale juurde lühemate ajavahemike, näiteks päevade järel, siis tuleb arvestada, et

$$1 \text{ aasta intress on } \frac{kp}{100} \text{ rubla,}$$

$$1 \text{ päeva intress on } \frac{kp}{36\,000} \text{ rubla,}$$

$$n \text{ päeva intress on } \frac{nkp}{36\,000} \text{ rubla.}$$

VII. LOGARITMFUNKTSIOON

1. Logaritmi mõiste

Enne logaritmfunktsiooni käsitlemist vajab selgitamist logaritmi mõiste. Logaritmi mõiste tutvustamine on kaheldamatult kõige efektiivsem, kui see tugineb praktilise kasutatavuse rõhutamisele. Selleks demonstreeritakse arvutamise lihtsustamist tehte järgu alandamise teel. Esialgu peavad need näited olema hästi läbinähtavad, nagu alljärgnevad.

1. Leida $32 \cdot 16$.

Et $32 = 2^5$ ja $16 = 2^4$, siis $32 \cdot 16 = 2^5 \cdot 2^4 = 2^9 = 512$.

2. Leida $3125 : 125$.

Et $3125 = 5^5$ ja $125 = 5^3$, siis $3125 : 125 = 5^5 : 5^3 = 25$.

Tuues veel teisigi analoogilisi näiteid, selgitatakse, et esitades korrutamiseks, jagamiseks, astendamiseks või juurimiseks antud arve ühe ja sama arvu astmetena, on võimalik need tehted vastava arvu astmete tabeli olemasolu korral taandada vastavalt liitmisele, lahutamisele, korrutamisele ja jagamisele.

Suhteliselt kiiresti mõistavad õpilased fakti, et ei leidu niisugust arvu, mille astmed täisarvuliste astendajate korral esitaksid kõiki arve. Küll aga on võimalik murrulise astendaja abil saada astet, mis on antud arvule kuitahes lähedane.

Praktilistest kaalutlustest lähtudes on astme aluseks valitud arv kümme.

Astendajat, millega tuleb kümmet astendada, et saada antud arvu, nimetatakse antud arvu k ü m n e n d l o g a r i t m i k s ehk lihtsalt logaritmiks.

Kui astendatavaks on näiteks 2, siis nimetatakse astendajat, millega tuleb arvu 2 astendada, et saada antud arvu, logaritmiks alusel 2.

Arvu 32 logaritmiks alusel 2 on seega 5;
arvu 3125 logaritmiks alusel 5 on 5;
arvu 1000 logaritmiks alusel 10 on 3 jne.

Selliste kirjutuste lühendamiseks on võetud kasutusele vastav sümboolika. Nii kirjutame toodud lausete asemel

$\log_2 32 = 5$;

$\log_5 3125 = 5$;

$\log_{10} 1000 = 3$ jne.

Kuna praktikas on kasutusel peamiselt kümnendlogaritmid, siis jäetakse tavaliselt kümnendlogaritmide puhul alus 10 märkimata, s. t. kirjutatakse

$\log 1000 = 3$;

$\log 0{,}01 = -2$ jne.

Viimastel aastatel on koolimatemaatikas pühendatud liialt palju tähelepanu logaritmidele kümnest erinevate aluste puhul. Selleks ei ole mingit praktilist vajadust. Matemaatilises analüüsis laialt rakendatav loomulik või naturaallogaritm kuulub käsitlemisele kõrgemas õppeasutuses ja logaritmide kasutamine teiste kümnest erinevate aluste puhul on väga harva esinevaks nähtuseks. Seetõttu tuleks soovitada, et koolis ei pandaks pearõhku definitsioonile «logaritm alusel a on . . . .», vaid definitsioonile

kümnendlogaritm on arv, millega kümmet astendades saame antud arvu.

Mis puutub korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi, siis ka need valemid võiks tuletada ainult kümnendlogaritmide puhul, sest vastavad valemid leiavad koolis rakendamist ainult alusel 10.

Senisest märksa vähem tuleks koolis lahendada nn. potentseerimise ülesandeid, sest ka sellesuunalistel ülesannetel ei ole erilist praktilist väärtust.

Siinkohal tuleks tähelepanu juhtida veel ühele puudusele meie senises koolipraktikas. Me ei talita õigesti, kui laseme õpilastel leida näiteks kuup- ja ruutjuuri logaritmide tabelite abil, ignoreerides täiesti vastavaid kuup- ja ruutjuurte tabeleid.

2. Logaritmfunktsioon

Pärast logaritmi mõistega tutvumist osutub võimalikuks tutvuda logaritmfunktsiooniga.

Selleks püstitatakse ülesanne:

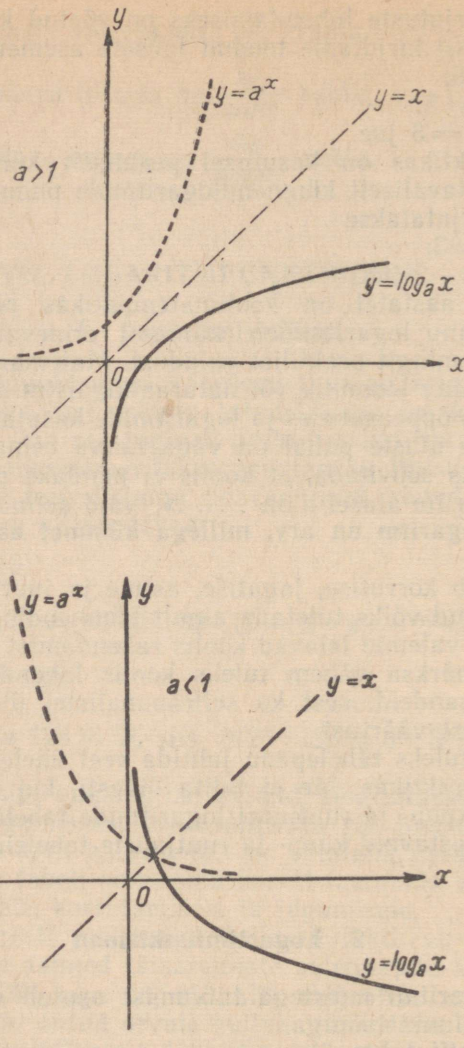
leida eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon.

Et pöördfunktsiooni leidmist lihtsustada, vaadeldakse eksponentfunktsiooni erijuhtu, kui $k = 1$. Seega seatakse ülesandeks leida funktsiooni

$$y = a^x$$

pöördfunktsioon, s. t. x tuleb avaldada y kaudu. See osutub võimalikuks tänu logaritmi mõiste tundmisele. Nii saame

$$x = \log_a y.$$



Joon. 73.

Tähistades funktsiooni tähega y ja argumendi tähega x, saame

$$y = \log_a x.$$

Et pöördfunktsiooni mõiste on juba mitmel korral olnud kõne all, siis võiks logaritmfunktsiooni käsitlus tugineda täielikult eksponentfunktsiooni uurimisel jõutud tulemustele.

Nagu juba mitmel korral on eespool rõhutatud, peab funktsioonide uurimine keskkoolis tuginema nende graafikule. Seega on siingi esimeseks ülesandeks logaritmfunktsiooni graafiku esitamine. See saadakse eksponentfunktsiooni graafiku peegeldusena I ja III veerandi poolitaja suhtes (joon. 73).

Logaritmfunktsiooni omadused võib välja lugeda saadud graafikutelt või tutvuda nendega eksponentfunktsiooni omaduste abil.

Eksponentfunktsiooni omadused on koondatavad järgmisesse tabelisse:

x	a	a^x
>0		>0
<0		>0
>0	>1	>1
<0	>1	<1
>0	<1	<1
<0	<1	>1

Vahetades siin argumendi ja funktsiooni osad, saame logaritmfunktsiooni omaduste tabeli:

x	a	$\log_a x$
>0		kas >0 või <0
>1	>1	>0
<1	>1	<0
<1	<1	>0
>1	<1	<0

Need omadused on kergesti kontrollitavad logaritmfunktsioonide graafikutelt. Ka logaritmfunktsiooni kasvamine ja kahanemine, ekstreemumpunktid, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad jne. on otseselt loetavad funktsiooni graafikult.

VIII. FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKOND

Funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilise kursuse lõpetamiseks on otstarbekas võtta vaatluse alla küsimus, mis ei ole seotud mingi ühe konkreetse funktsiooniga, vaid mis hõlmaks kõiki funktsioone. See on vajalik funktsiooni mõiste süvendamiseks.

Süstemaatilises kursuses vaadeldi lineaarset, ruut-, astme- ja eksponentfunktsiooni ning nende pöördfunktsioone. Nüüd tuleb õpilastele meenutada, et peale vaadeldud funktsioonide eksisteerib veel küllalt palju teisi funktsioone, sest esitab ju iga algebraline avaldis funktsiooni. Trigonomeetria kursuses on vaadeldud trigonomeetrilisi funktsioone. Astmefunktsiooni laiendusena võiks tutvustada ka täisratsionaalsete funktsioonide ning lõpuks veel murdratsionaalsete funktsioonide mõistet.

Olles avardanud õpilaste silmaringi funktsioonide vallas, tulekski nüüd seada üles küsimus, kas igale funktsioonile saab leida väärtusi argumendi mistahes väärtuse korral. Väikese järelemõtlemise ja sellele järgneva ühise arutelu abil jõutakse selgusele, et leidub funktsioone, millede puhul tuleb püstitatud küsimusele vastata eitavalt. On mõeldav ja isegi vajalik, et õpilased juba VI klassis jõuaksid selgusele, et algebralisel avaldisel võib mõnikord väärtus puududa ja nimelt siis, kui tähe etteantud väärtuse korral avaldises esineva murru nimetaja on võrdne nulliga. Vaadeldes nüüd lineaarset, ruut-, kuup- ja eksponentfunktsiooni, selgub, et need funktsioonid on määratud argumendi kõigi reaalarvuliste väärtuste korral. Et logaritmfunktsioon on aga määratud ainult logaritmitava avaldise positiivsete väärtuste korral ja ruutjuur juuritava avaldise mittenegatiivsete väärtuste korral, siis taandub siin määramispiirkonna leidmise ülesanne esimesel juhul avaldise positiivsuse, teisel juhul mittenegatiivsuse piirkondade määramisele.

Eelkõige on sobiv võtta vaatluse alla murdratsionaalne funktsioon, alustades kujust $\frac{a}{x}$ ja jätkates funktsioonidega

$$\frac{a}{bx+c}, \quad \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \frac{k}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}.$$

Et nulliga jagada ei saa, siis on ilmne, et murdratsionaalne funktsioon ei ole määratud nimetaja nullkohtades. Esitades nende funktsioonide määramispiirkondi, kirjutatakse need välja võrratustena.

Näite $\frac{ax+b}{cx+d}$ korral oleks funktsiooni määramispiirkonnaks

$$x > -\frac{d}{c} \quad \text{ja} \quad x < -\frac{d}{c}.$$

Järgmine funktsioon, mille juures peatutakse, on ruutjuurfunktsioon. Ka siin on loomulik alustada määramispiirkonna leidmist kõige lihtsamast juhust $\sqrt{x}$ ning hiljem minna järk-järgult keerukamate funktsioonide, nagu $\sqrt{ax+b}$ ja $\sqrt{ax^2+bx+c}$ juurde. Kaugemale, nagu näiteks funktsiooni $\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}}$ määramispiirkonna leidmise ülesande püstitamisele, võib minna ainult võimekamate klassikollektiivide puhul.

Järgnevalt vaadeldakse logaritmfunktsiooni määramispiirkonna leidmise ülesandeid. Siin kuuluvad käsitlemisele funktsioonid $\log x$, $\log(ax+b)$, $\log(ax^2+bx+c)$. Oluline on, et teravalt rõhutataks ja selgitataks erinevust ruutjuurfunktsiooni ja logaritmfunktsiooni juures ja nimelt, et juuritav avaldis peab olema mittenegatiivne, logaritmitav avaldis aga positiivne.

Ülesanded, nagu juurfunktsioon ja logaritmfunktsioon murdratsionaalsest funktsioonist esitavad juba kahekordse raskuse, sest seal tuleb arvestada ka seda, et juuritav või logaritmitav avaldis on murd. Niisuguste ülesannete lahendamise juures on väga oluline tulemuste geomeetriline interpreteerimine. Veelgi olulisem on see ülesannete juures, mis esitavad kolmekordset raskust. Toome siin ühe näite.

Leida funktsiooni $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-3x-5}}{\log(4x-12)}$ määramispiirkond.

See ülesanne nõuab järgmiste tingimuste rahuldamist:

1. $2x^2-3x-5\geqslant 0$
2. $4x-12>0$
3. $\log(4x-12)\neq 0$

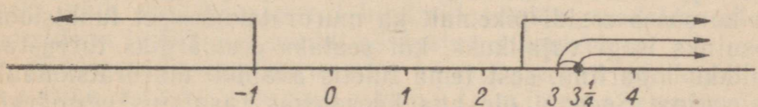
1. Ruutvõrratuse lahendamiseks kasutame ruutkolmliikme uurimise juures tundma õpitud positiivsuspiirkondade leidmise võtet. Saame, et 1. tingimus on rahuldatud, kui

$$x\geqslant\frac{5}{2}\ \text{ja}\ x\leqslant -1.$$

2. tingimus nõuab, et $x>3$.

3. tingimus, et $4x-12\neq 1$, s. t. $x\neq\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$.

Antud funktsiooni määramispiirkonnad teeme kindlaks arvtelje abil (joon. 74).



Joon. 74.

Ülesande lahendiks on seega

$$3<x<3\frac{1}{4}\ \text{ja}\quad x>3\frac{1}{4}.$$

Funktsiooni määramispiirkonna käsitlemisel puutume kokku väga paljude funktsioonidega. Et vaadeldav küsimus hõlmab aga üldse kõiki funktsioone, siis on otstarbekas tutvustada funktsiooni määramispiirkonna mõistet kasutades funktsiooni üldist tähistusviisi.

Nii nimetame funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks kõigi nende x väärtuste hulka, mille korral on võimalik leida $f(x)$-le vastavat väärtust.

Kõrvuti funktsiooni määramispiirkonna ülesannetega võiks lahendada ülesandeid ka funktsiooni muutumispiirkonna kohta. See annaks hea võimaluse korrata trigonomeetrilisi funktsioone.

*

Funktsionaalse sõltuvuse süstemaatiline kursus on üles ehitatud nii, et ta algab üldise teemaga — funktsionaalse sõltuvuse idee selgitamisega, mille alusel defineeritakse üksikuid funktsioone. Samuti lõpeb see kursus üldise teemaga — funktsiooni määramispiirkonna leidmisega, mis loob hea võimaluse kõigi süstemaatilises kursuses vaatluse all olnud funktsioonide kordamiseks.

Üksikute funktsioonide käsitlemisel on rõhutatud funktsiooni omaduste selgitamise vajadust tema graafikule tuginedes. Funktsionaalse sõltuvuse idee on seda kursust siduvaks mõisteks. See idee liidab sellesse kursusesse mitmeid küsimusi, milliseid seni on käsitletud isoleeritult omaette teemadena. Sellisteks küsimusteks on näiteks aritmeetiline ja geomeetriline progressioon, mis on seostatud vastavalt lineaarse ja eksponentfunktsiooniga või lineaarne ja ruutvõrratus, milledega tutvutakse lineaarse ja ruutfunktsiooni käsitlemisel.

Funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilise kursuse ülesandeks on anda ettevalmistus funktsioonide uurimisvahendite — piirväärtuse ja tuletise ning samuti integraali tundmaõppimiseks. Olles põhjalikult tutvunud funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses esitatud funktsioonidega, on õpilased varustatud küllaldaste eelteadmistega nimetatud teemade juurde asumiseks.

Oleks ju mõeldav käsitleda funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses eraldi pikemalt ka murdratsionaalset funktsiooni. See osutuks isegi vajalikuks, kui seataks eesmärgiks tutvustada loomulikku logaritmi, sest tema tuletis avaldub murdratsionaalse funktsioonina. Seda ei ole aga käesolevas raamatus eesmärgiks seatud, kuna loomulik logaritm etendab enam tähtsat osa matemaatilise analüüsi teoreetilistes mõttearendustes. Viimaste esitamise kohaks peaks siiski jääma kõrgema õppeasutuse auditoorium, mitte aga keskkooli klass.

I. PIIRVÄÄRTUSE MÕISTE KÄSITLEMINE

Piirväärtuse mõiste tutvustamine on alati olnud üks raskemaid ülesandeid koolimatemaatikas. Seda on tinginud peamiselt küsimuse olemuse uudsus, käsitlemiseks ettenähtud aja vähesus ja piirväärtusealaste teadmiste vähene rakendamine. Seoses tuletise ja integraali mõiste sissetoomisega keskkooli matemaatika programmi suureneb nii piirväärtuse mõiste kui ka tema rakenduste osatähtsus. Ka tundide arvu peaks olema võimalik programmi ümberkorraldamise teel vajalikul määral suurendada. Aine uudsusest tingitud raskuste ületamiseks tuleb aga otsida vahendeid metoodika valdkonnast.

Piirväärtuse mõiste käsitlemiseks koolis on soovitatud mitmeid teid. Kõige otstarbekamaks tuleb neist pidada käsitlust, mis hõlmab järgmisi sõlmküsimusi:

1) tõkestamatult kasvavad suurused,
2) tõkestamatult kahanevad suurused,
3) kindlale arvule ($\neq 0$) lähenevad suurused,
4) funktsiooni piirväärtus.

Nende küsimuste käsitlemist tuleks alustada jääva ja muutuva suuruse erinevuse rõhutamisega. Seda võiks teha arvteljel, kus jäävale suurusele vastab kindel punkt, muutuvale suurusele aga mööda arvtelge liikuv punkt. Veelgi elavama ettekujutuse loomiseks võib vajaduse korral kindlaid punkte vaadelda kilomeetripostidena ja liikuvat punkti sõidukina maanteel.

Tõlgendades suuruse muutumist liikumisena, saame alati suuruse muutumisega seotud probleeme interpreteerida liikumise ülesannete kaudu.

1. Tõkestamatult kasvavad suurused

Tõkestamatult kasvavate suuruste tutvustamist võiks alustada näidetest, nagu Maa poolt tiirlemisel ümber Päikese läbitava tee pikkus või kolmnurga külgede pikkuste kasvamine aluse vastastipu kaugenemisel mööda alusega paralleelset sirget (joon. 20). Tõkestamatult kasvavate suuruste olemuse selgitamiseks tuleks jällegi kasutada arvtelge, kuhu kantakse läbitud tee või kolmnurga külje pikkused. Kuna arvteljel kujutatavate lõikude lõpp-punktid järjest kaugenevad, siis on ilmne, et meil on tegemist tõkestamatult kasvava suurusega. Kui kaugele alguspunktist ei püütaks ka tõket ette seada, ikka ületavad vaadeldava muutuva suuruse väärtustele vastavate lõikude lõpp-punktid teatud väärtusele vastavast pikkusest alates selle tõkke.

Õpilaste tähelepanu tuleb muidugi juhtida ka asjaolule, et tõkestamatu kasvamine võib toimuda täpselt samuti negatiivses suunas.

Et järgnevas kursuses tuleb veel mitmel korral kokku puutuda tõkestamata kasvamise juhuga, siis on ilmselt vajalik anda keskkoolis ka tõkestamatult kasvavate suuruste definitsioon. Näidetele tuginedes jõutaksegi selleni.

Olgu muutuva suuruse X väärtused tähistatud x-ga ja kuitahes suur positiivne arv M-ga. Kui teatud muutumiskohast alates saab ja edaspidises muutumises ka jääb

$$|x|>M,$$

siis on X tõkestamatult kasvav suurus.

Kui eelnenud näiteid on selgitatud toodud definitsioonile vastavalt, siis võib arvata, et õpilased võiksid jõuda selle definitsiooni sõnastamiseni ka ise, olgugi et nende poolt antud definitsioon hõlmab võib-olla ainult neid suurusi, mis kasvavad positiivses suunas.

On iseendast mõistetav, et tõkestamatult kasvavate suuruste käsitlemise raames tuleb üksikasjalisemalt peatuda ka lõpmatuse sümboli ∞ juures.

Tuleb muidugi meeles pidada, et lõpmatuse sümbol ei väljenda konkreetset arvu, vaid osutab ainult muutuva suuruse muutumise iseloomule, s. t. tema tõkestamatule kasvamisele. Seepärast on lõpmatuse sümbolit vaja käsitleda ettevaatlikult, et mitte viga teha.

Olles tutvunud lõpmatuse sümboliga, võetakse see kasutusele ka tõkestamatult kasvava suuruse märkimiseks. Kui planeedi poolt läbitava tee pikkus tähistada s-ga ja kolmnurga külje pikkusi AC_n ja BC_n, siis nende tõkestamatut kasvamist märgitakse nüüd

$$s \to \infty\,,\ AC_n \to \infty \text{ ja } BC_n \to \infty$$

2. Tõkestamatult kahanevad suurused

Tõkestamatult kahanevate suuruste käsitlemisele võib asuda alles siis, kui on täielikult omandatud tõkestamatult kasvava suuruse mõiste, eriti tõkestamata kasvamise mõiste negatiivses suunas. Just siin võib tekkida õpilastel raskusi, sest mitteküllaldase ettevalmistuse korral ajavad nad segi tõkestamata kahanemise tõkestamata kasvamisega negatiivses suunas.

Tõkestamatult kahanevate suuruste tutvustamise meetoditest võib soovitada kahte.

Kui tugineda tõkestamatult kasvava suuruse definitsioonile, siis osutub selle põhjal võimalikuks püstitada küsimust niisuguste suuruste olemasolu kohta, millede väärtused järjest kahanevad ja saavad väiksemaks igast kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust. Et niisuguseid suurusi on olemas, seda on võimalik selgitada sellesama kolmnurga näite juures, kus vaadeldi tõkestamatult kasvavaid suurusi. Nimelt osutuvad püstitatud tingimust rahuldavateks suurusteks nurgad α ja γ.

Niisuguseid suurusi nimetatakse vastavalt nende muutumise iseloomule t õ k e s t a m a t u l t k a h a n e v a t e k s s u u r u s t e k s ning antakse definitsioon analoogiliselt tõkestamatult kasvava suuruse definitsiooniga.

O l g u m u u t u v a s u u r u s e X v ä ä r t u s e d t ä h i s t a t u d x-g a j a ε k u i t a h e s v ä i k e p o s i t i i v n e a r v. K u i t e a t u d m u u t u m i s k o h a s t a l a t e s s a a b j a e d a s p i d i s e s m u u t u m i s e s k a j ä ä b

$$|x| < \varepsilon,$$

s i i s X o n t õ k e s t a m a t u l t k a h a n e v s u u r u s.

Teine tee tõkestamatult kahanevate suuruste tutvustamiseks langeks ühte tõkestamatult kasvavate suuruste käsitlemisega. Vaadeldakse näiteid ja selgitatakse nendele tuginedes suuruste muutumise iseloomu. Lõpuks jõutakse selgusele, et kui väikese positiivse arvu me ka ei valiks, olgu see 0,01 või 0,000001 või veelgi väiksem, ja kui muutuva suuruse absoluutväärtused on oma teatud muutumise kohast alates eranditult kõik sellest etteantud arvust väiksemad, siis see muutuv suurus on tõkestamatult kahanev. Sellele tähelepanekule tuginedes defineeritakse tõkestamatult kahanev suurus.

Analoogiliselt tõkestamatult kasvavate suuruste tähistusviisile võetakse kasutusele ka tõkestamatult kahanevate suuruste tähistamine kujul

$$X \to 0.$$

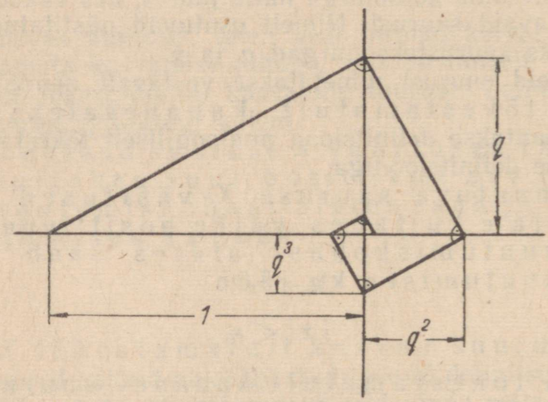
Kolmnurga näite puhul võiksime kirjutada

$$\alpha \to 0 \quad \text{ja} \quad \gamma \to 0.$$

Koos tõkestamatult kahanevate suurustega tuleks käsitleda ka tõkestamatult kahanevat geomeetrilist progressiooni. Kuigi vastava summa valemi tuletamine võiks toimuda veidi hiljem, siis, kui ollakse tutvunud funktsiooni piirväärtuse mõistega, oleks siiski otstarbekas vaadelda siin ülesandeid, kus muutuva suuruse väärtuste jada esitab tõkestamatult kahanevat geomeetrilist progressiooni. Oleks mõeldav ka vaadeldava progressiooni liikmetele vastavate pikkuste konstrueerimine geomeetriliselt. Nii võiks näiteks progressiooni

$$\div 1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots \quad 0 < q < 1$$

liikmeid konstrueerida nii, nagu on näidatud joonisel 75.



Joon. 75.

3. Kindlale arvule ($\neq 0$) lähenevad suurused

Pärast tõkestamatult kasvavate ja tõkestamatult kahanevate suuruste vaatlemist kerkib iseendast küsimus niisuguste muutuvate suuruste olemasolu kohta, millede väärtused lähenevad mingile kindlale nullist erinevale arvule. Konkreetsete näidetena võiks siin vaadelda vasktraadi pikkuse muutumist temperatuuri lähenemisel 0°-le, vee ruumala muutumist temperatuuri lähenemisel 4° C-le, tänavalaternale läheneva inimese varju pikkuse muutumist jne. Eespool toodud kolmnurga näite puhul läheneb nurk β 180°-le.

Vaatluse all olevat küsimust selgitatakse analoogiliselt eelmiste juhtude puhul teostatud arutlustega. Siin võetakse kasutusele ka eelmiste juhtudega analoogiline tähistusviis

$$X \to a,$$

mis kolmnurga näite puhul avaldub kujul

$$\beta \to 180°.$$

Omaette huvitavaks küsimuseks kujuneb antud juhul definitsiooni sõnastamine. Osutub, et eelmistel juhtudel kasutatud sõnastus ei ole mehhaaniliselt ülekantav, sest arvud, milledele muutuvate suuruste väärtused lähenevad, on üldiselt erinevad. Varsti jõutakse aga selgusele üldises omaduses ja nimelt:

kui vahe muutuva suuruse väärtuste ja teatud konstandi vahel osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks, siis see muutuv suurus on kindlale arvule lähenev suurus.

See ongi lõplikule väärtusele lähenevate suuruste definitsiooniks.

Kogu aine käsitlus muutuva suuruse muutumise iseloomu uurimise kohta peab teostuma nii, et õpilasil ei jääks väära ettekujutust, nagu piirdukski muutuvate suuruste hulk tõkestamatult kasvavate, tõkestamatult kahanevate ja lõplikule väärtusele lähenevate suurustega. Tuleb ikka ja jälle rõhutada, et senivaadeldud juhud hõlmavad ainult teatud kindla muutumisiseloomuga suurusi. See iseloom avaldub nende tõkestamatus kasvamises, tõkestamatus kahanemises või lõplikule väärtusele lähenemises. Peale nende leidub aga küllaldaselt veel teisi muutuvaid suurusi, milledel see iseloomulik omadus puudub. Taolisi näiteid leidub aga rikkalikult, näiteks kellapendli poolt moodustatud nurk oma tasakaaluasendi suhtes, veepinna kõrgus jões või järves, siinusfunktsioon jne.

4. Funktsiooni piirväärtus

Kui hakata lähemalt vaatlema eelmistes punktides käsitletud näiteid, siis osutub, et kõigis neis on vaadeldud mingi funktsiooni väärtuste muutumist, mida põhjustas tema argumendi väärtuste muutumine. Esitatud kolmnurga näites (joon. 20) oli argumendiks lõigu CC_n pikkus, mis tõkestamatult kasvas. Seetõttu oleks õigem saadud tulemused üles kirjutada järgmiselt:

$$\begin{aligned}
&\text{kui } CC_n \to \infty, \text{ siis } AC_n \to \infty;\\
&\text{kui } CC_n \to \infty, \text{ siis } BC_n \to \infty;\\
&\text{kui } CC_n \to \infty, \text{ siis } \beta_n \to 180^\circ;\\
&\text{kui } CC_n \to \infty, \text{ siis } \alpha_n \to 0^\circ;\\
&\text{kui } CC_n \to \infty, \text{ siis } \gamma_n \to 0^\circ.
\end{aligned}$$

Nüüd õpitakse tundma ka piirväärtuse tähist — lim. Kuna vaadeldavas näites on viimasel kolmel juhul piirväärtus olemas, siis võib piirväärtuse tähist kasutades kirjutada

$$\lim_{CC_n \to \infty} \alpha_n = 0^\circ; \qquad \lim_{CC_n \to \infty} \beta_n = 180^\circ; \qquad \lim_{CC_n \to \infty} \gamma_n = 0^\circ.$$

Esimesel kahel juhul aga piirväärtust pole, sest need on tõkestamatu kasvamise juhtumid, kus muutuva suuruse väärtused kasvavad üle iga määra. Et aga piirprotsesside ülesmärkimiseks kasutataks ühtset märkimisviisi, siis on kokku lepitud tähistada ka neid juhte lim märgi abil, kusjuures piirväärtuse puudumist tõkestamatu kasvamise korral tähistab lõpmatuse sümbol:

$$\lim_{cc_n \to \infty} AC_n = \infty; \qquad \lim_{cc_n \to \infty} BC_n = \infty.$$

F u n k t s i o o n i p i i r v ä ä r t u s e leidmist valmistatakse ette argumendi ja funktsiooni väärtuspaaride tabeli koostamisega. Seejuures ei tule piirduda ainult nende juhtudega, kus argument osutub tõkestamatult kasvavaks suuruseks, vaid tuleb käsitleda ka niisuguseid juhte, kus argument läheneb mingile lõplikule väärtusele. Kui funktsiooni väärtused neis tabeleis lähenevad mingile kindlale arvule, siis on tõenäone, et vaadeldaval funktsioonil on etteantud argumendi muutumisviisi kohaselt piirväärtus olemas.

Funktsiooni piirväärtuse defineerimisel koolis võib tugineda kindlale arvule ($\neq 0$) lähenevate suuruste definitsioonile, mis sisuliselt kehtib ka tõkestamatult kahanevate suuruste korral, ja nimelt, et kui funktsioonil on piirväärtus olemas, siis muutuva suuruse väärtuste ja piirväärtuse vahe absoluutväärtus saab väiksemaks igast kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust, s. t. on samuti tõkestamatult kahanev suurus.

Nii võiks funktsiooni piirväärtust defineerida järgmiselt: **arvu b nimetatakse funktsiooni piirväärtuseks argumendi etteantud muutumisviisi korral** ($x \to a$, $x \to \infty$), **kui funktsiooni vastavate väärtuste ja arvu b vahe absoluutväärtus osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks.**

Piirväärtuse lausetest on kooli kursuses vajalikud ainult mõned üksikud, nagu näiteks laused summa, vahe, korrutise ja jagatise piirväärtuse kohta. Need laused tuleks aga lugeda kehtivaiks tuginedes intuitsioonile.

Käsitledes näiteks lauset summa piirväärtuse kohta

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$

veendume selle valemi kehtivuses rea näidete juures, leides eraldi piirväärtused kummalegi liidetavale ja nende summale.

II. PIIRVÄÄRTUSE RAKENDUSI

1. Ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemi tuletamine

Tuletades geomeetria kursuses ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemit, teeb seal õpilastele suuremaid raskusi piirile üleminek. Kahtlemata on kahest näitest liiga vähe selleks, et omandada selget arusaamist piirile lähenemisest. Kui aga algebra kursuses tutvustatakse eelnevalt funktsiooni piirväärtuse mõistet, siis kergendaks see tunduvalt nende geomeetriliste probleemide mõistmist, kus kasutatakse piirprotsesse.

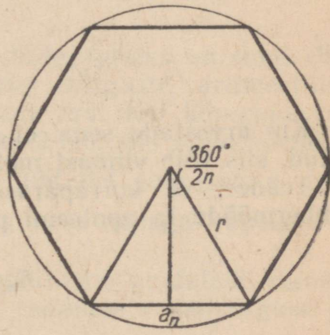
Ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemi tuletamine võiks toimuda lühidalt järgmiselt.

a) Ringjoone pikkus

Et korrapärase hulknurga tipud asetsevad kõik võrdsel kaugusel hulknurga keskpunktist, siis saab läbi selle hulknurga tippude joonestada ringjoone.

Tuginedes joonisele 76, võime kirjutada

$$\frac{a_n}{2r} = \sin\frac{360^\circ}{2n}.$$



Joon. 76.

Korrutades võrduse mõlemad pooled n-ga, saame

$$\frac{n \cdot a_n}{2r} = n \cdot \sin\frac{360^\circ}{2n}.$$

Võrduse paremal poolel oleva avaldise piirväärtuse määrame intuitiivselt mittetäieliku induktsiooni abil.

Andes n-le väärtusi

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots,$$

saame $n \cdot \sin\frac{360^\circ}{2n}$ väärtustena vastavalt

$$2{,}60;\ 3;\ 3{,}10;\ 3{,}13;\ 3{,}14;\ \ldots$$

See piirväärtus avaldub ilmselt irratsionaalarvuna, mille tähistusena võetaksegi kasutusele π.

Et piirväärtuse

$$\lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n)$$

kaudu avaldubki ringjoone pikkus c, siis

$$c = \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = \lim_{n \to \infty} \left(2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}\right),$$

kust

$$c = 2\pi r.$$

b) Ringi pindala

Tuginedes joonisele 76, võime välja kirjutada ringi sisse joonestatud korrapärase n-nurga pindala

$$S_n = n \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Teisendades saame

$$S_n = \frac{r^2}{2} \cdot n \cdot 2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \cdot \cos \frac{360^\circ}{2n}.$$

Et ringi pindala

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

siis

$$S = \pi r^2.$$

Kui arvestada seda, et ringjoone pikkuse valem on juba tuletatud, siis võib viimast mõttekäiku veelgi lühendada.

Teades, et korrapärase hulknurga pindala avaldub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisena, võime kirjutada

$$S_n = (n \cdot a_n) \frac{k_n}{2}.$$

Et

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

siis

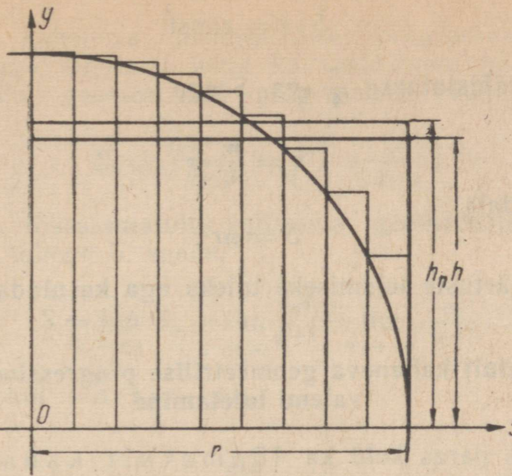
$$S = \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2} = \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{k_n}{2} =$$

$$= 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2.$$

Ringi pindala valemit võiks tuletada ka tuginedes arutlusele, mida kasutatakse seoses kõverjoonse trapetsi pindala valemi tuletamisega integraali tutvustamisel.

Vastav tuletuskäik kulgeks siis järgmiselt.

Joonestame koordinaatteljestikus ringjoone, mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguses (joon. 77). Ringi pindala määramiseks kasutatakse ringi üht veerandit e. kvadranti. Kvadrandi pindala tükeldatakse ristkülikuteks. Saadud ristkülikute pind-



Joon. 77.

alade summa on võrdne ristkülikuga, mille aluseks on ringi raadius r ja kõrguseks jaotusristkülikute kõrguste aritmeetiline keskmine h_n, kus n on jaotusristkülikute arv. Kui kõverjoonsete trapetsite esialgseks laiuseks on näiteks 2 cm, siis nüüd võetakse nende laiuseks 1 cm ja $\frac{1}{2}$ cm. Neil juhtudel suureneb n, ristkülikute pindalade summa väheneb ja koos sellega väheneb ka kõrgus h_n.

Ringi kvadrandi pindala saame ristkülikute pindalade summa piirväärtusena. Viimane avaldub aga raadiuse r ja kõrguse h_n alammäära korrutisena. Seega

$$\frac{1}{4}S = r \cdot \lim_{n \to \infty} h_n.$$

Tähistades $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = h$, saame, et ringi pindala

$$S = 4h \cdot r.$$

Nüüd võetakse vaatluse alla teised antud ringiga kontsentrilised ringid, mille raadiused on antud ringi raadiusest mingi arv korda suuremad. Tükeldades k korda pikema raadiusega ringi ühe kvadrandi k korda laiemate ribadega kui esialgses ringis, siis ribade arv tuleb niisama suur kui enne. Ristkülikute kõrgused suurenevad aga k korda ja seega ka kõrguse h_n alammäär h suureneb k korda. Seega jääb kõrguse h_n alammäära h suhe raadiusse muutumatuks, s. o.

$$h : r = \text{const.}$$

Seda suhet tähistatakse $\frac{\pi}{4}$ -ga. Seega

$$h = \frac{\pi}{4} \cdot r$$

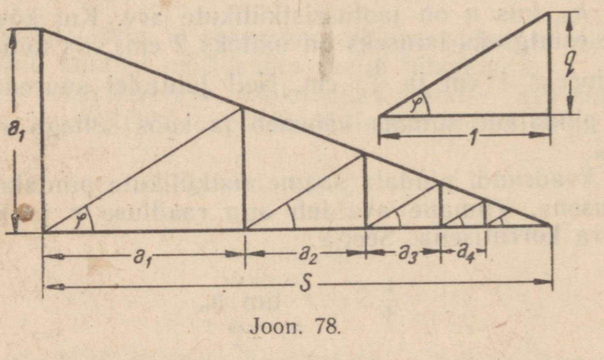
ja ringi pindala

$$S = \pi r^2.$$

π lähisväärtuste leidmiseks tuleks aga kasutada jooniseid.

2. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemi tuletamine

Siin oleks paras koht ka lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa mõiste selgitamiseks. Metoodilisest seisukohast lähtudes on soovitav enne selle summa defineerimist tutvustada lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni järjestikulistele liikmetele vastavate pikkuste graafilisi konstruktsioone. Üks selline näide on toodud joonisel 78.



Joon. 78.

Selle joonise abil saab selgeks ka piirväärtuse olemasolu, millele lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete osasummad järjest lähenevad. Kasutades kolmnurkade sarnasust, on võimalik seda piirväärtust avaldada esimese liikme ja teguri kaudu. Nii saame

$$\frac{S}{a_1} = \frac{S - a_1}{a_1 q},$$

kust

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valem tuleb aga kindlasti leida ka funktsiooni piirväärtusena, lähtudes lõpliku geomeetrilise progressiooni summa valemist

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1}.$$

Tähistades tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa tähega S, saame

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n q}{q - 1} - \lim_{n \to \infty} \frac{a_1}{q - 1}.$$

Et $a_n \to 0$, kui $n \to \infty$, siis

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n q}{q - 1} = 0$$

ja

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

3. Piirväärtuste rakendamine kehade pindalade ja ruumalade valemite tuletamisel

a) Silindri külgpindala ja ruumala

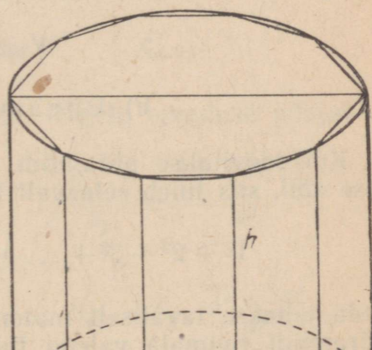
Silindri külgpindala all mõistetakse silindri sisse joonestatud korrapärase püstprisma külgpindala piirväärtust, kui prisma külgservade arv tõkestamatult kasvab.

Olgu silindrisse joonestatud korrapärane n-nurkne prisma, mille põhiserv on a_n, põhja apoteem k_n ja kõrgus h (joon. 79). Selle prisma külgpindala

$$S_{k\ (\text{prisma})} = n \cdot a_n \cdot h.$$

Et

$$S_{k\ (\text{silinder})} = \lim_{n \to \infty} S_{k\ (\text{prisma})},$$



Joon. 79.

siis

$$S_{k\,(\text{silinder})} = \lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n \cdot h) = \lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} h.$$

Esimene tegur esitab ringjoone pikkust, s. t. silindri põhja ümbermõõtu c, teine tegur on prisma kõrgus h ja seega ka silindri kõrgus. Niisiis,

$$S_{k\,(\text{silinder})} = c \cdot h.$$

Silindri täispindala $S_{t\,(\text{silinder})} = S_k + 2S_p$. Et S_p on ringi pindala, siis

$$S_{t\,(\text{silinder})} = ch + 2\pi r^2,$$

kus r on silindri põhja raadius. Et $c = 2\pi r$, siis

$$S_{t\,(\text{silinder})} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$

Silindri ruumala valemi tuletamisel kasutatakse analoogilist mõttekäiku.

$$V_{(\text{silinder})} = \lim_{n\to\infty} V_{(\text{prisma})}$$

ja siit

$$V_{(\text{silinder})} = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot a_n \cdot \frac{k_n}{2}\right) \cdot h = \lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} k_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{h}{2} = c \cdot r \cdot \frac{h}{2}.$$

Et $\frac{c \cdot r}{2}$ on silindri põhja pindala S_p, siis

$$V_{(\text{silinder})} = S_p \cdot h.$$

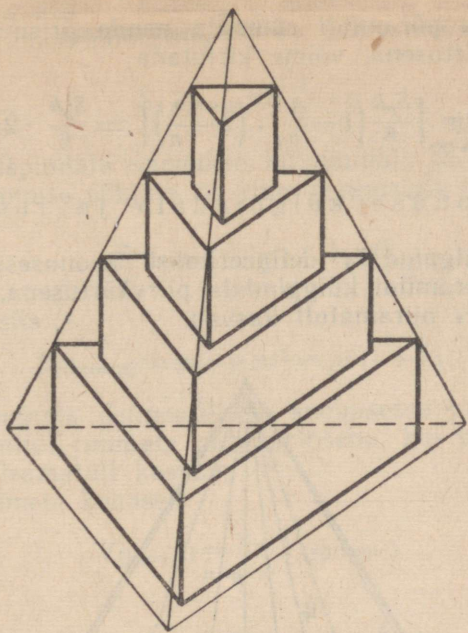
b) Püramiidi ruumala

Kui soovitakse püramiidi ruumala valemit tuletada piirväärtuse abil, siis tuleb eelnevalt tuletada valem

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Seda tehakse tavaliselt matemaatilise induktsiooni meetodi abil. Püramiidi ruumala valemi tuletamine võiks toimuda järgmiselt.

Jagame püramiidi kõrguse h n võrdseks osaks (joon. 80). Läbi jaotuspunktide paneme tasapinnad paralleelselt püramiidi põhjaga. Nende tasapindade ja püramiidi lõikejoonteks saame hulknurgad. Kujundades nüüd püramiidi sisse prismad, mille põhjadeks on need hulknurgad, saame püramiidi ruumala lähendina $n-1$ prisma ruumala summa, kusjuures iga prisma kõr-



Joon. 80.

guseks on $\frac{h}{n}$. Kui lõikepindalad tähistada vastavalt tähtedega $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, siis püramiidi ruumala

$$V \approx \frac{h}{n}\,(S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}).$$

Püramiidi põhjaga paralleelsete lõigete omaduse põhjal

$$\frac{S_1}{S_p} = \frac{\left(\frac{h}{n}\right)^2}{h^2};\quad \frac{S_2}{S_p} = \frac{\left(\frac{2h}{n}\right)^2}{h^2};\ \ldots;\ \frac{S_{n-1}}{S_p} = \frac{\left[\frac{(n-1)h}{n}\right]^2}{h^2}.$$

Siit

$$S_1 = S_p \cdot \frac{1^2}{n^2};\quad S_2 = S_p \cdot \frac{2^2}{n^2};\quad \ldots;\ S_{n-1} = S_p \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

Seega

$$V \approx \frac{S_p h}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] = \frac{S_p h}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

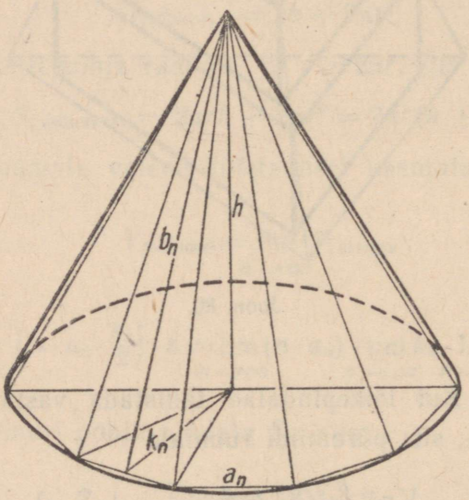
$$= \frac{S_p h}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Defineerides püramiidi ruumala nende prismade ruumalade summa piirväärtusena, võime kirjutada

$$V = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{S_p h}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{S_p h}{6} \cdot 2 = \frac{S_p h}{3}.$$

c) Koonuse külgpindala ja ruumala

Koonuse külgpindala defineeritakse koonusesse joonestatud korrapärase püramiidi külgpindala piirväärtusena, kui püramiidi külgservade arv piiramatult kasvab.



Joon. 81.

Olgu koonusesse joonestatud korrapärane n-nurkne püramiid, mille põhiserv on a_n, põhja apoteem k_n, külgtahu apoteem b_n ja kõrgus h (joon. 81). Korrapärase n-nurkse püramiidi külgpindala on

$$S_{k\,(\text{püramiid})} = n \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{2}.$$

Et

$$S_{k\,(\text{koonus})} = \lim_{n \to \infty} S_{k\,(\text{püramiid})},$$

siis

$$S_{k\,(\text{koonus})} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{b_n}{2} \cdot (n \cdot a_n) \right].$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot a_n) = c$, kus l on koonuse moodustaja ja c koonuse põhja ümbermõõt, siis

$$S_{k\,(\text{koonus})} = \frac{l}{2} \cdot c.$$

Koonuse täispindala saadakse külgpindala ja põhja pindala liitmisel. Et koonuse põhjaks on ring raadiusega r, siis

$$S_{t\,(\text{koonus})} = \frac{l}{2} \cdot c + \pi r^2$$

ja et $c = 2\pi r$, siis

$$S_{t\,(\text{koonus})} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r).$$

Koonuse ruumala defineeritakse koonusesse joonestatud korrapärase püramiidi ruumala piirväärtusena, kui püramiidi külgservade arv piiramatult kasvab.

Toodud andmete kohaselt

$$V_{(\text{koonus})} = \lim_{n\to\infty} V_{(\text{püramiid})}$$

Et

$$V_{(\text{püramiid})} = \frac{n \cdot a_n}{2} \cdot k_n \cdot \frac{h}{3},$$

siis

$$V_{(\text{koonus})} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6}\,(n \cdot a_n) \cdot k_n \cdot h\right] = \frac{1}{6} \cdot c \cdot r \cdot h.$$

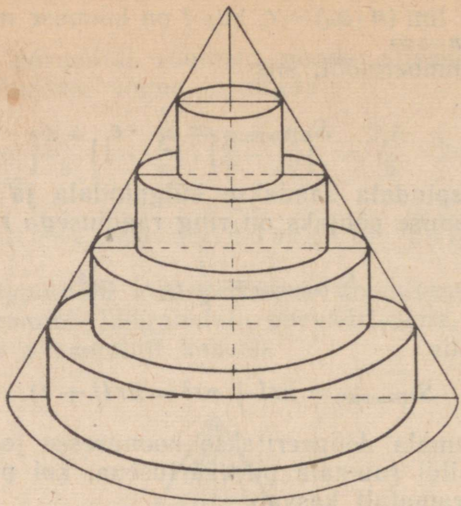
Et $c = 2\pi r$, siis

$$V_{(\text{koonus})} = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h.$$

Piirväärtuse mõistet saab aga koonuse ruumala valemi tuletamiseks kasutada ka nii, nagu seda tehti püramiidi ruumala valemi tuletamisel.

Selleks jagame koonuse kõrguse h n võrdseks osaks (joon. 82). Läbi saadud jaotuspunktide paneme tasapinnad paralleelselt koonuse põhjaga. Koonuse ja tasapindade lõigeteks on ringid. Neile ringidele ehitame silindrid. Viimaste summa on aga koonuse ruumala ligikaudseks väärtuseks. Kui silindrite põhjadeks olevate ringide raadiused tähistada vastavalt tähtedega $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, siis koonuse ruumala

$$V \approx \frac{h}{n}\,(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots + \pi r_{n-1}^2).$$



Joon. 82.

Et ka koonuse põhjaga paralleelsete lõigete juures kehtib omadus, et lõike pindala ja põhja pindala suhtuvad nagu vastavate kõrguste ruudud, siis tähistades koonuse põhja raadiuse tähega r, võime kirjutada

$$\frac{\pi r_1^2}{\pi r^2}=\frac{\left(\frac{h}{n}\right)^2}{h^2};\quad \frac{\pi r_2^2}{\pi r^2}=\frac{\left(\frac{2h}{n}\right)^2}{h^2};\ \ldots;\ \frac{\pi r_{n-1}^2}{\pi r^2}=\frac{\left[\frac{(n-1)h}{n}\right]^2}{h^2}.$$

Siit

$$r_1^2=\frac{r^2}{n^2}\cdot 1^2;\quad r_2^2=\frac{r^2}{n^2}\cdot 2^2;\ \ldots;\ r_{n-1}^2=\frac{r^2}{n^2}\,(n-1)^2.$$

Seega

$$V\approx\frac{h}{n}\cdot\frac{\pi r^2}{n^2}\,[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\,n\cdot(2n-1)}{6}.$$

Et

$$V=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi r^2 h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right],$$

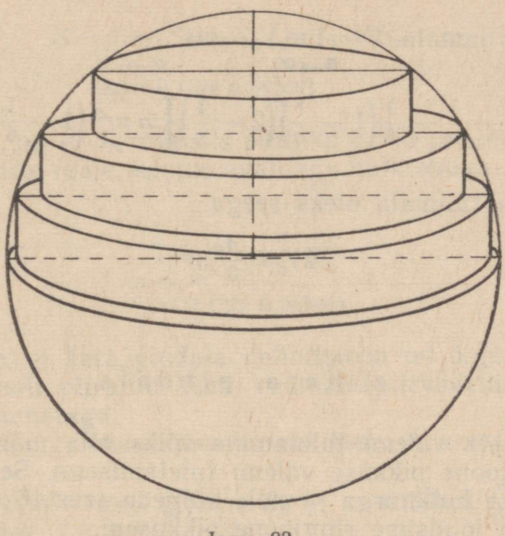
siis

$$V=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

d) Kera ruumala

Kera ruumala võib defineerida temasse joonestatud silindrite ruumalade summa piirväärtusena (joon. 83).

Poolkera ruumala valemi tuletamiseks jagatakse raadius r n võrdseks osaks. Iga silindri kõrgus on seega $\frac{r}{n}$. Silindrite põhjade raadiused olgu $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$.



Joon. 83.

Poolkerasse kujutatud silindrite ruumalade summa on

$$V_n = \frac{\pi r}{n}(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{n-1}^2).$$

Kuna täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on keskmine võrdeline kaatetite projektsioonidega hüpotenuusil, siis võime kirjutada

$$r_1^2 = \frac{r}{n}\left(2r - \frac{r}{n}\right);\ r_2^2 = 2 \cdot \frac{r}{n}\left(2r - \frac{2r}{n}\right);\ \ldots;\ r_{n-1}^2 =$$
$$= \frac{(n-1) \cdot r}{n}\left[2r - \frac{(n-1) \cdot r}{n}\right]$$

ehk

$$r_1^2 = \frac{r^2}{n}\left(2 - \frac{1}{n}\right);\ r_2^2 = \frac{2r^2}{n}\left(2 - \frac{2}{n}\right);\ \ldots;\ r_{n-1}^2 =$$
$$= \frac{(n-1) \cdot r^2}{n}\left(2 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Asendades saadud tulemused V_n avaldisse, saame

$$V_n=\frac{\pi r}{n}\cdot\frac{r^2}{n}\Big\{\big[1+2+3+\ldots+(n-1)\big]\cdot 2-$$

$$-\frac{1}{n}\cdot\big[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\big]\Big\}=\frac{\pi r^3}{n^2}\Big[2\cdot\frac{1+n-1}{2}(n-1)-$$

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\Big]=\pi r^3\Big[1-\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(2-\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Et poolkera ruumala $V=\lim\limits_{n\to\infty} V_n$, siis

$$V=\lim_{n\to\infty}\pi r^3\Big[1-\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(2-\frac{1}{n}\Big)\Big]=\pi r^3\Big(1-\frac{1}{6}\cdot 2\Big)=\frac{2}{3}\pi r^3$$

Terve kera ruumala oleks seega

$$2V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

e) Kera pindala

Kera pindala valemi tuletamine võiks olla mõningal määral sarnane ringjoone pikkuse valemi tuletamisega. Seal kujutasime ringjoone sisse hulknurga ja selle külgede arvu tõkestamatu kasvamise kaudu jõudsime ringjoone pikkuseni.

Kera puhul on otstarbekas vaadelda kera piiratuna mõnest hulktahukast. Kera pindala defineerime aga selle hulktahuka pindala piirväärtusena, kui tema tahkude arv tõkestamatult kasvab, nii et sealjuures kõikide tahkude pindalad lähenevad nullile.

On ilmne, et kera ümbritseva hulktahuka ruumala on suurem antud kera ruumalast, kuid teiselt poolt väiksem selle kera ruumalast, mille keskpunkt asetseb antud kera keskpunktis ja mille raadiuse pikkuse määrab keskpunktist kõige kaugemal asuv hulktahuka tipp.

Olgu antud kera raadius r ja hulktahuka ümber kujundatud kera raadius $r+d$. Seega d on hulktahuka kaugeima tipu kaugus kera pinnast. Tähistades hulktahuka ruumala W-ga, võime kirjutada, eeldades, et tunneme kera ruumala valemit

$$\frac{4}{3}\pi r^3<W<\frac{4}{3}\pi(r+d)^3.$$

Ruumala W on vaadeldav kõigi nende püramiidide ruumalade summana, mille põhjadeks on hulktahuka tahud ja kõrguseks nende tahkude kaugus antud kera keskpunktist, s. o. antud kera raadius. Tähistades hulktahuka tahkude pindalad tähtedega $S_1, S_2, \ldots, S_n$, võime kirjutada

$$W = \frac{r}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n).$$

Kera pindala S on definitsiooni kohaselt sulgudes oleva summa piirväärtus, s. t.

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ S_n \to 0 \text{ (iga } n \text{ puhul)}}} (S_1 + S_2 + \ldots + S_n).$$

Kui $n \to \infty$, nii et $S_n \to 0$, siis peab ka $d \to 0$ ja seega, tuginedes toodud võrratuste reale, saame avaldada hulktahuka ruumala piirväärtuse

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ S_n \to 0 \text{ (iga } n \text{ puhul)}}} W = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Siit ilmneb, et kera pindala definitsioon on õige, sest hulktahuka pinna poolt piiratud keha ruumala piirväärtus on võrdne antud kera ruumalaga.

Kera pindala valemini jõuame sel teel, et arvestame asjaolu

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ S_n \to 0 \\ \text{(iga } n \text{ puhul)}}} W = \lim_{\substack{n \to \infty \\ S_n \to 0 \\ \text{(iga } n \text{ puhul)}}} \frac{r}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{r}{3} \cdot S.$$

Seega peab kehtima võrdus

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r}{3} \cdot S$$

ja siit

$$S = 4\pi r^2.$$

I. TULETISE MÕISTE KÄSITLEMINE

1. Tuletise definitsioon

Tuletise mõiste selgitamist on otstarbekas alustada vastava geomeetrilise tõlgenduse, kõvera puutuja tõusu kaudu.

Kõigepealt meenutatakse lineaarse funktsiooni käsitlemisel tundma õpitud omadust funktsiooni ja argumendi juurdekasvude suhte jäävuse kohta. Graafikul esitas see suhe sirge tõusu. Siis tuletatakse meelde funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses õpitut, et mittelineaarsete funktsioonide korral esitab suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vastava kõvera kõõlu tõusu. Seega ei iseloomusta siin funktsiooni ja argumendi juurdekasvude suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ enam otseselt vaadeldava funktsiooni kasvamist või kahanemist, vaid tema keskmist kasvamist või kahanemist vahemiku Δx ulatuses. Seetõttu n i m e t a t a k s e s u h e t $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ v a s t a v a k õ v e r a k e s k m i s e k s t õ u s u k s v a h e m i k u s Δx. Et see suhe esitas ka argumendi ühiku kohta tulevat funktsiooni muutu, siis tõlgendati teda samuti funktsiooni muutumise keskmise kiirusena vahemikus Δx. Funktsioonide uurimiseks ei piisa ainult funktsiooni muutumise keskmise kiiruse teadmisest, vaid osutub vajalikuks määrata ka funktsiooni muutumise kiirust teatud kindla argumendi väärtuse puhul. See küsimusseade viibki piirprotsessi rakendamise kaudu avaldise

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

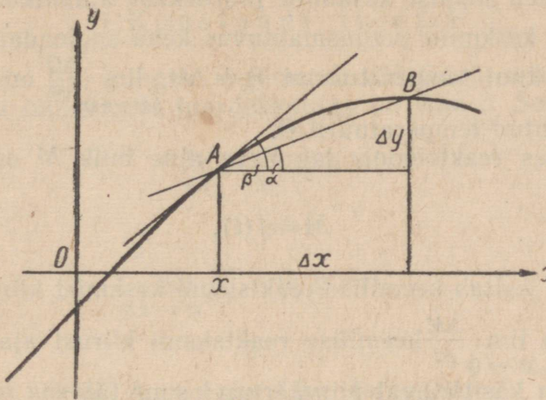
juurde. Nüüd vajab selgitamist, mida esitab see piirväärtus geomeetrilises interpretatsioonis. Jooniselt 84 nähtub, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha.$$

Kui Δx väheneb, siis kõõlu AB otspunkt B läheneb punktile A, kõõl AB läheneb punktis A tõmmatud puutujale ja nurk α läheneb nurgale β.

Arutluse tulemusena jõutakse veendumusele, et vaadeldav piirväärtus esitab kõvera puutuja tõusu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta.$$



Joon. 84.

Sellega jõutakse kõvera puutuja mõiste juurde. Üksikasjalikult tuleks peatuda puutuja üldmõiste juures, et kõrvaldada väärarvamust, nagu oleks puutuja niisugune sirge, millel on kõveraga ainult üks ühine punkt. Kõvera puutuja defineerime järgmiselt:

kõvera puutuja on piirsirge, millele läheneb kõõlsirge, kui kõõlu üks otspunktidest tõkestamatult läheneb teisele.

Järgnevaks ülesandeks on tutvustada vaadeldava piirväärtuse laia rakendatavust. Kasutades näiteid mitteühtlase liikumise kohta, jõutakse keha liikumise keskmise ja hetkelise kiiruse avaldamiseni. Vahepealse astmena tuleb siin pidada otstarbekaks ka ositi ühtlase liikumise tutvustamist mitteühtlase liikumise lähendajana. Pärast otseseid liikumisnäiteid tuleks õpilasi tutvustada mitteühtlaselt kulgevate nähtustega. Eriti tuleks juhtida õpilaste tähelepanu asjaolule, et ka siin avaldub hetkeline kiirus piirväärtusena $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Vastavate näidetena võiks tutvustada nurkkiirust, keha soojusmahtuvust, keemilise reaktsiooni kiirust jne. Nii näiteks on keha pöörlemisel ümber telje pöörlemisnurk φ aja funktsioon

$$\varphi = f(t).$$

$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ esitab siis keskmist nurkkiirust ajavahemikus Δt ja $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ hetkelist nurkkiirust.

Keha soojendamiseks vajalik soojushulk Q on temperatuuri funktsioon

$$Q=f(\Theta).$$

$\frac{\Delta Q}{\Delta \Theta}$ on keha soojuse keskmine juurdekasv ajaühiku jooksul ehk, teisiti, keha keskmine soojusmahtuvus keha soojendamisel temperatuurilt Θ kuni temperatuurini $\Theta+\Delta\Theta$; $\lim\limits_{\Delta\Theta \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \Theta}$ on keha soojusmahtuvus antud temperatuuril Θ.

Keemilises reaktsioonis laguneva aine hulk M on aja funktsioon

$$M=f(t).$$

Suhe $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ esitab keemilise reaktsiooni keskmist kiirust ajavahemikus Δt ja $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t}$ keemilise reaktsiooni kiirust ajamomendil t.

Seega on käsitletaval piirväärtusel suur tähtsus nii matemaatikas kui ka tema rakendusaladel, mistõttu piirväärtusele $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ on antud ka eri nimetus — *funktsiooni tuletis* — ja tema jaoks on loodud eritähistus: y'.

Funktsiooni tuletist defineeritakse tavaliselt tema arvutamise eeskirjast lähtudes:

funktsiooni tuletis on funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhte piirväärtus, kui argumendi juurdekasv läheneb nullile.

Defineerides keskkoolis funktsiooni tuletist, ei tohi jätta rõhutamata, et olgu funktsiooniks x, $\sin x$ või mõni muu funktsioon, ikka peab jääma domineerivaks idee: funktsiooni tuletis on tema muutumise kiirus. Arvestades toodud märkust, oleks ostarbekam defineerida funktsiooni tuletist koolis järgmises sõnastuses:

funktsiooni $f(x)$ tuletis on näitaja, mis iseloomustab antud funktsiooni $f(x)$ muutumise kiirust ning ta avaldub funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhte piirväärtusena, kui argumendi juurdekasv tõkestamatult kahaneb.

2. Funktsiooni tuletise leidmine

Vastavalt tuletise definitsioonile leitakse antud funktsiooni $y=f(x)$ tuletis kindla skeemi kohaselt. Nii tuleb

1) anda argumendile juurdekasv Δx, mille tulemusena funktsioon saab juurdekasvu Δy;

2) avaldada Δy, kusjuures y asendatakse $f(x)$-ga;
3) jagatakse võrduse mõlemad pooled Δx-ga;
4) leitakse $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

a) Konstandi tuletis

Olgu $y = c$. Kui mingile argumendi väärtusele x anda juurdekasv Δx, siis funktsiooni juurdekasv Δy on ikka 0. Seetõttu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

ja ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0; \ y' = 0.$$

b) Argumendi tuletis

Olgu $y = x$.
1) $y + \Delta y = x + \Delta x$;
2) $\Delta y = x + \Delta x - x$;
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$;
4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; $y' = 1$.

c) Summa tuletis

Olgu $y = u(x) + v(x)$.
1) $y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)$;
2) $\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)$;
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$;
4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$;

$$y' = u'(x) + v'(x).$$

d) Korrutise tuletis

Olgu $y = u(x) \cdot v(x)$.

1) $y + \Delta y = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)$;
2) $\Delta y = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$;

Selleks et pärast Δx-ga jagamist saaksime funktsioonide $u(x)$ ja $v(x)$ muutumise keskmised kiirused, lahutame ja liidame $u(x)\cdot v(x+\Delta x)$, saame

$$\Delta y = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + \\ + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x+\Delta x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x};$$

4) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ = v(x)\cdot u'(x) + u(x)\cdot v'(x);$$

$$y' = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x).$$

e) $c\cdot f(x)$ tuletis

Olgu $y = c\cdot f(x)$.

Korrutise tuletise valemi põhjal

$$y' = c\cdot f'(x).$$

f) Astmefunktsiooni tuletis

1° Olgu $y = x^2$.

Vaatleme antud funktsiooni korrutisena $x\cdot x$, siis korrutise tuletise valemi põhjal

$$y' = x + x = 2x; \quad y' = 2x.$$

2° Olgu $y = x^3$.

Vaatleme antud funktsiooni jällegi korrutisena $x^2\cdot x$, siis

$$y' = 2x\cdot x + x^2 = 3x^2; \quad y' = 3x^2.$$

3° Olgu $y = x^4$.

Vaatleme ka seda funktsiooni korrutisena $x^3\cdot x$, siis

$$y' = 3x^2\cdot x + x^3 = 4x^3; \quad y' = 4x^3.$$

4° Olgu $y = x^n$.

Et

$$(x^2)' = 2x$$

ja

$$(x^3)' = 3x^2,$$

siis oletatakse, et

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

See võrdus võetakse eelduseks ning tõestatakse, et

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n.$$

Tõestus tugineb varem tundma õpitud korrutise tuletise valemile ja kulgeb lühidalt järgmiselt.

Et

$$x^{n+1} = x^n \cdot x,$$

siis

$$(x^{n+1})' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x'$$

ehk

$$(x^{n+1})' = n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1.$$

Siit on aga ilmne, et

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n.$$

g) Jagatise tuletis

Olgu $y = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Esitame selle kujus $u(x) = y \cdot v(x)$ ning leiame funktsiooni $y \cdot v(x)$ tuletise. Rakendades korrutise tuletise leidmise valemit, võime kirjutada

$$u'(x) = y' \cdot v(x) + y \cdot v'(x).$$

Et meid tegelikult huvitab y', siis avaldame selle:

$$y' = \frac{u'(x) - y \cdot v'(x)}{v(x)}.$$

Asetades nüüd y asemele $\frac{u(x)}{v(x)}$ ning korrutades lugejat ja nimetajat $v(x)$-ga, saame

$$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

h) Negatiivse astendajaga astmefunktsiooni tuletis

Olgu $y = x^n$, kus $n = -m$, s. t. $y = x^{-m}$.

Et $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, siis tuletise leidmiseks rakendame jagatise tuletise valemit

$$y' = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

Kuna $-m=n$, siis

$$y'=nx^{n-1},$$

s. t. saime sama tulemuse, mis punktis g.

i) $\sqrt{x}$ tuletis

Olgu $y=\sqrt{x}$.

Rakendame tuletise leidmiseks üldist eeskirja.

1) $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$;

2) $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$;

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}};$$

4) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Leitud tuletisi rakendatakse mitmesuguste ülesannete lahendamisel. Kõrvuti harjutusülesannetega:

leida antud funktsiooni tuletis,

lahendatakse ka ülesandeid:

leida funktsiooni muutumise kiirus antud kohal

või

leida funktsiooni graafiku puutuja tõus antud kohal.

3. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised

Siinus- ja koosinusfunktsioonil on suur tähtsus võnkumisliikumiste uurimisel. Kuna võnkumisliikumised leiavad käsitlemist ka kooli füüsika kursuses, siis on loomulik leida samuti siinus- ja koosinusfunktsiooni tuletise avaldised. Selleks on aga vajalik tunda piirväärtust

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Sellele tulemusele võiks jõuda juba piirväärtuste käsitlemise juures, kuid arvestades asjaolu, et piirväärtus $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ jääb seal rakendamata, siin on tema tundmine aga vahetult vajalik, siis tuleb eelistada selle piirväärtuse tuletamist trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste käsitlemise eel. Piirväärtuse $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ tuletamiseks kasutatakse kolmest avaldisest koosnevat võrratusterida, kusjuures võrreldavateks suurusteks on kas joonlõikude pikkused või pindalade suurused. Tuleb eelistada viimaseid, sest sel juhul on võrreldavate suuruste suurusjärjestus eriti selgelt nähtav (joon. 85).

Mõttekäik ise toimuks lühidalt järgmiselt.
Et

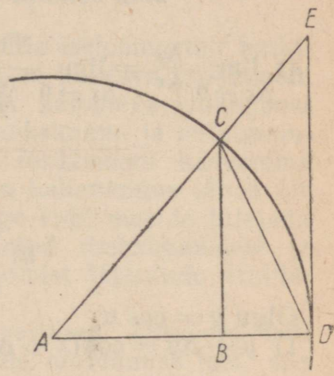
$$S_{\Delta ADC} < S_{\sphericalangle ADC} < S_{\Delta ADE},$$

siis ka

$$\frac{AD \cdot BC}{2} < \frac{AD \cdot x}{2} < \frac{AD \cdot DE}{2}.$$

Jagades viimast võrratuste rida $\frac{AD}{2}$-ga ja asendades $BC = \sin x$ ja $DE = \tan x$, saame

$$\sin x < x < \tan x.$$


Joon. 85.

Jagame nüüd saadud võrratuste rea $\sin x$-ga. Et meid huvitab juht, kus $x \to 0$, siis $\sin x > 0$ ja võrratuse märgid jäävad samapidisteks:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Võttes saadud avaldiste pöördväärtused, muutuvad võrratuse märgid vastupidisteks:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Siit, kui $x \to 0$, siis $\cos x \to 1$ ja järelikult

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Leiame nüüd trigonomeetriliste funktsioonide tuletised.

a) $\sin x$ tuletis

Olgu $y = \sin x$.
Tuletise leidmise eeskirja kohaselt
1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;
2) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$;

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x$;

$$y' = \cos x.$$

b) $\cos x$ tuletis

Olgu $y = \cos x$.
1) $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$;
2) $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = - \dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$;

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = - \sin x$;

$$y' = - \sin x.$$

c) $\tan x$ tuletis

Olgu $y = \tan x$, s. t. $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Rakendades jagatise tuletise valemit, leiame

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

d) cot x tuletis

Olgu $y = \cot x$, s. t. $y = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Rakendades jagatise tuletise valemit, leiame

$$y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

II. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSI

1. Funktsiooni käigu uurimine tuletise abil

Tuginedes asjaolule, et funktsiooni tuletis iseloomustab funktsiooni muutumise kiirust, järeldub sellest, et kasvava funktsiooni muutumise kiirus on positiivne, s. t. $y' > 0$, kahaneva funktsiooni kiirus negatiivne, s. t. $y' < 0$. Funktsiooni maksimum- ja miinimumkohad defineeritakse aga kohtadena, kus funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemisele, ja vastupidi, kus kahanemine läheb üle kasvamisele, s. t. kus $y' = 0$. Siin on õige koht meelde tuletada ruutfunktsiooni käsitlemise juures teostatud maksimaalsete ja minimaalsete väärtuste leidmist ruuttrinoomist täisruudu eraldamise teel.

Kui funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses leiti parabooli haripunkti koordinaadid täisruudu eraldamise teel, siis nüüd, arvestades asjaolu, et haripunkt on parabooli ekstremaalne punkt, võib tema koordinaate leida tuletise abil. Nii näiteks leitakse nüüd parabooli $y = 2x^2 - 4x + 3$ haripunkti koordinaadid järgmiselt.

Funktsiooni tuletise

$$y' = 4x - 4$$

võrdsustamisel nulliga leitakse ekstreemumpunkti abstsiss

$$4x - 4 = 0; \quad x = 1.$$

Saadud väärtuse asetamisega funktsiooni avaldisse leitakse ekstreemumpunkti ordinaat

$$y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1.$$

Seega on haripunktiks punkt $H(1;\ 1)$.

Vaatleme, kuidas uurida mõnda konkreetset funktsiooni.

Ruutfunktsiooni, näiteks $y = -5x^2 + 12x - 4$ uurimine võiks toimuda järgmise skeemi kohaselt.

1) Haripunkti koordinaadid (ekstreemumpunkt)

$$y' = -10x + 12;$$

$$-10x + 12 = 0; \quad x = 1\frac{1}{5}; \quad y = 3\frac{1}{5}.$$

2) Kasvamise ja kahanemise piirkonnad.

Et x^2 kordaja on negatiivne, siis parabooli harud avanevad allapoole ja järelikult:

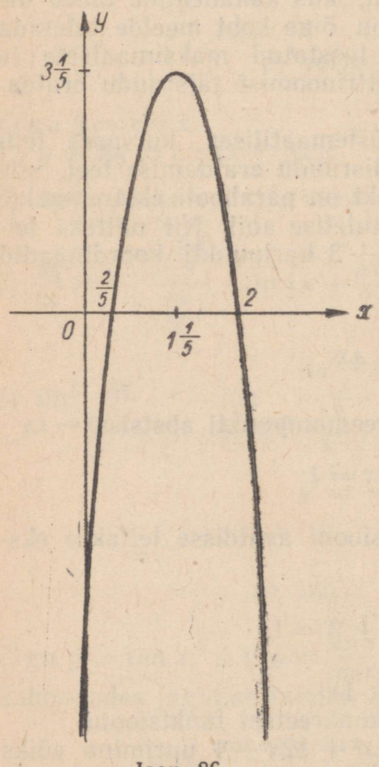
$$\text{kui } x < 1\frac{1}{5}, \quad \text{siis } y \text{ on kasvav;}$$

$$\text{kui } x > 1\frac{1}{5}, \quad \text{siis } y \text{ on kahanev.}$$

3) Lõikepunktid x-teljega

$$-5x^2 + 12x - 4 = 0;$$

$$x_1 = 2; \; x_2 = \frac{2}{5}.$$



Joon. 86.

4) Positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

$$\text{kui } x < \frac{2}{5} \text{ või } x > 2, \quad \text{siis } y < 0$$

$$\text{kui } \frac{2}{5} < x < 2, \quad \text{siis } y > 0.$$

Uurimistulemustele tuginedes skitseeritakse ka vastav graafik (joon. 86).

Mõeldav on siin uurida ka selliseid kuupfunktsioone, mille vabaliige on 0, sest ainult neil juhtudel oskavad õpilased leida kuupfunktsiooni nullkohti.

Toome näite.

Olgu ülesandeks uurida funktsiooni $y = x^3 - 3{,}5x^2 + 2x$.

Leiame algul tema ekstreemumpunktid. Selleks võrdsustame funktsiooni tuletise 0-ga.

$$y' = 3x^2 - 7x + 2;$$
$$3x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Saame $x_1 = 2, \; x_2 = \frac{1}{3}$.

Et siin ruutliikme kordaja on positiivne, siis

$$y' > 0, \text{ kui } x < \frac{1}{3} \text{ ja kui } x > 2;$$

$$y' < 0, \text{ kui } \frac{1}{3} < x < 2.$$

Antud funktsioon on seega kasvav, kui $x < \frac{1}{3}$ ja $x > 2$ ning kahanev, kui $\frac{1}{3} < x < 2$.

Sellest järeldub, et antud funktsioonil on kohal $x = \frac{1}{3}$ maksimum ja kohal $x = 2$ miinimum.

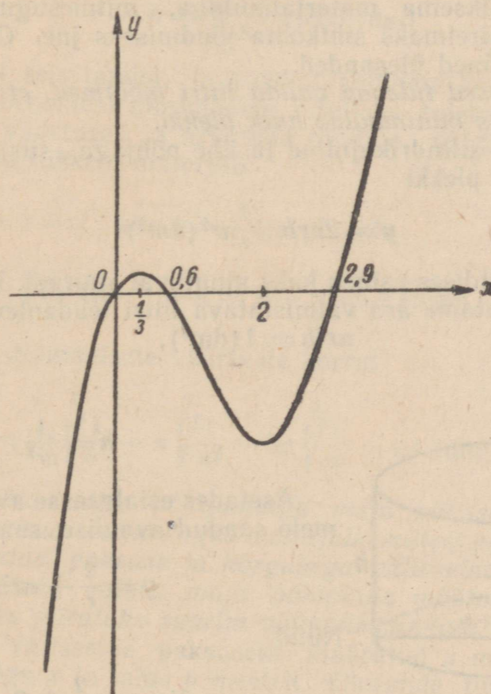
Funktsiooni nullkohtade leidmiseks tuleb lahendada võrrand

$$x^3 - 3{,}5x^2 + 2x = 0.$$

Et antud võrrandi vasak pool lahutub tegureiks

$$x(x^2 - 3{,}5x + 2) = 0,$$

siis $x_1 = 0$.



Joon. 87.

Võrrandi $x^2 - 3{,}5x + 2 = 0$ lahenditeks on

$$x_1 \approx 0{,}6, \quad x_2 \approx 2{,}9.$$

Seega on antud funktsiooni nullkohtadeks

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0{,}6; \quad x_3 = 2{,}9.$$

Teades, et funktsioonil on kohal $x = \frac{1}{3}$ maksimum ja kohal $x = 2$ miinimum, võime kohe välja kirjutada, et antud funktsioon on positiivne, kui $0 < x < 0{,}6$ ja kui $x > 2{,}9$, ning negatiivne, kui $x < 0$ ja kui $0{,}6 < x < 2{,}9$.

Saadud uurimistulemustele tuginedes on antud funktsiooni graafik kergesti skitseeritav (joon. 87).

2. Ekstreemumülesandeid

Funktsiooni tuletise huvitavamaid rakendusvõimalusi pakuvad ekstreemumülesanded. Need tuleks valida võimalikult reaalse sisuga, nagu näiteks kandetalade mõõtmete suhte määramine suurima kandetugevuse puhul, etteantud mahuga karbi valmistamine võimalikult väiksema materjalikuluga, mitmesuguste liikumisviiside valik kiireimaks sihtkohta jõudmiseks jne. Olgu siin toodud näiteks mõned ülesanded.

a) *Missugused tulevad valida liitri mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks minimaalne hulk plekki.*

Et liiter on silindrikujuline ja ühe põhjaga, siis tema valmistamiseks kulub plekki

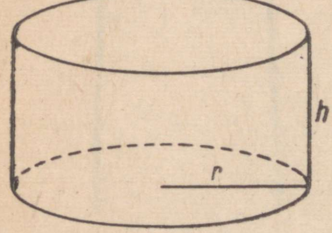
$$y = 2\pi rh + \pi r^2 \, (dm^2).$$

Saadud avaldises esineb kaks muutuvat suurust. Et ühest neist vabaneda, kasutame ära valmistatava liitri teadaoleva mahu.

$$\pi r^2 h = 1 \, (\mathrm{dm}^3),$$

kust

$$h = \frac{1}{\pi r^2}.$$



Joon. 88.

Asetades esialgsesse avaldisse h asemele saadud avaldise, saame

$$y = \frac{2}{r} + \pi r^2.$$

Nüüd

$$y' = -\frac{2}{r^2} + 2\pi r.$$

Ekstremaalse väärtuse saamiseks võrdsustame tuletise nulliga

$$-\frac{2}{r^2}+2\pi r=0,$$

kust

$$r=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}.$$

Et

$$h=\frac{1}{\pi r^2},$$

siis

$$h=\frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}.$$

Seega kulub liitri valmistamiseks kõige vähem plekki siis, kui

$$r=h=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\approx 0{,}68 \text{ (dm)}.$$

Vajab veel selgitamist, et saadud andmete korral on materjali vajadus tõepoolest minimaalne. Selleks tuleks võtta mõned teised r ja h väärtused ja arvutada pindala, näidates seega, et sel juhul kulub rohkem materjali.

Kui näiteks $r=1$, siis $h=\frac{1}{\pi}$ ja pindala

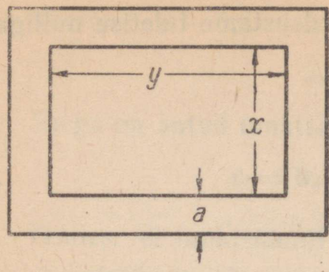
$$y=2\pi\cdot\frac{1}{\pi}+\pi=2+\pi\approx 5{,}2 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Saadud ekstremaalsete väärtuste korral

$$y=2\pi\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}+\pi\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}=3\pi\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}\approx 4{,}4 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

b) *Ristkülikukujulise põhipinnaga maja välisseinte ehitamiseks on planeeritud teatud kogus materjali, millest piisab* 64 *meetri pikkuse etteantud paksuse ja kõrgusega välisseina ehitamiseks. Missugused tuleks valida maja põhipinna mõõtmed, et välisseinaga osutuks piiratuks suurim võimalik pindala?*

Olgu maja välisseina paksuseks määratud a m. Maja seesmine pikkus olgu x ja laius y meetrit. Ülesande tingimuse kohaselt on



Joon. 89.

$$2x + 2y + 4a = 64;$$
$$x + y + 2a = 32.$$

Meid huvitab küsimus, millal

$$S = xy$$

on maksimaalne.

Esitame pindala ühemuutujafunktsioonina, kasutades esimest seost

$$S = x(32 - 2a - x).$$

Leiame nüüd selle funktsiooni tuletise

$$S' = 32 - 2a - 2x.$$

Ekstreemumi määramiseks võrrutame tuletise nulliga

$$32 - 2a - 2x = 0,$$

kust

$$x = 16 - a.$$

Et

$$y = 32 - 2a - x,$$

siis

$$y = 16 - a.$$

Et saadud x ja y väärtustel on välisseinaga piiratud suurim võimalik pindala, selles veendutakse, nagu eelmises ülesandeski, mõnd teist võimalikku väärtuspaari kasutades.

c) *Kuidas tuleks saagida d cm läbimõõduga palgist tala, et tema kandetugevus oleks suurim?*

Tala kandetugevus on võrdeline tema ristlõike laiusega ja kõrguse ruuduga, s. t.

$$P = kxy^2.$$

Et

$$y^2 = d^2 - x^2,$$

siis

$$P = kx(d^2 - x^2).$$

Leiame tuletise

$$P' = k(d^2 - 3x^2)$$

ja võrdsustame saadud avaldise nulliga

$$k(d^2 - 3x^2) = 0,$$

kust

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Nüüd leiame y.

$$y^2 = d^2 - x^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3}\, d^2;$$

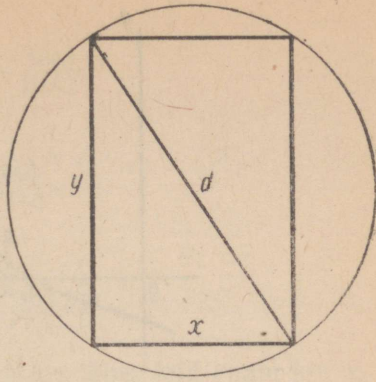
$$y = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Moodustades suhte

$$y : x,$$

saame

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} \approx \frac{1{,}4}{1} = \frac{7}{5}.$$



Joon. 90.

Seega peavad tala ristlõike mõõtmed (kõrgus ja laius) suurima kandetugevuse korral suhtuma nagu 7 : 5.

3. Newtoni meetod võrrandi ligikaudsete lahendite täpsustamiseks

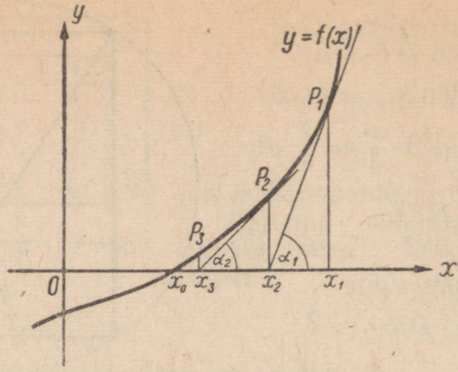
Kooli algebra kursuses käsitletakse põhjalikult lineaar- ja ruutvõrrandit. Harva on käsitletud ka kolmanda astme võrrandeid ja tuletatud Cardano valemid. Viimaste käsitlemisel pole erilist väärtust, sest teoreetilisest küljest pole Cardano valemid üldistatavad, arvutustehnilisest küljest on nad aga raskesti rakendatavad. Oleks otstarbekam anda õpilastele kätte palju võimsam ja väärtuslikum vahend, s.o. võrranditele ligikaudsete lahendite leidmise meetod. See osutub võimalikuks, kui keskkooli matemaatika programm sisaldab tuletise mõistet. Newtoni võtte tutvustamine võrrandite ligikaudsete lahendite leidmiseks annaks õpilastele ühelt poolt tõhusa vahendi kõrgemat järku võrrandite lahendamiseks ja teiselt poolt esitaks suurepärast funktsiooni tuletise rakendamise võimalust. Loomulikult peaks siin Newtoni võtte tutvustamine tuginema graafilisele esitusele.

Olgu antud funktsioon

$$y = f(x).$$

Meid huvitab selle funktsiooni nullkoht, s. t. me seame eesmärgiks leida niisugune x väärtus x_0, kus funktsiooni $f(x)$ graafik lõikab x-telge ja kus seetõttu

$$f(x_0) = 0.$$



Joon. 91.

Kõigepealt määrame kindlaks otsitava lahendi ligikaudse väärtuse x_1 kas graafikult või proovimise teel. Siis täpne lahend

$$x_0 = x_1 + a,$$

kus a on parandus, mis näitab ligikaudse lahendi erinevust täpsest lahendist.

Moodustagu punktist P_1 kõverale tõmmatud puutuja x-telje positiivse suunaga nurga α_1. Selle puutuja tõus

$$k = f'(x_1) = \tan \alpha_1.$$

Jooniselt 91 näeme, et puutuja ja x-telje lõikepunkt määrab meie võrrandi lahendile juba parema ligikaudse väärtuse x_2.

Ülesandeks on nüüd määrata x_2 analüütiliselt esimese lähendi x_1 kaudu. Graafikult pole otstarbekohane määrata x_2, sest sealt mõõtes ei ole võimalik saada enam küllaldast täpsust. Joonisel esitatud kolmnurgast saame kirjutada

$$\frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan(180° - \alpha_1).$$

Siit

$$\frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\tan \alpha_1,$$

ehk

$$\frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} = -f'(x_1),$$

kust

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Täpselt samuti leiame edasi, et

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Üldiselt

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Koolis ei tohiks olla vajadust leida lähendeid enam kui x_3-ni, mis annab juba küllaldase arvu täpseid numbreid kümnendkohtades. Õigeteks loetakse seal muidugi ainult need kümnendkohad, mis langevad kokku x_2 kümnendkohtadega.

Olgu antud ülesandeks leida lahend võrrandile

$$x^3 - x - 5 = 0.$$

Esimese lähendi saamiseks otsitavale lahendile kontrollime, missuguste täisarvude vahel peab sellel võrrandil lahend olema:

$$\begin{array}{ll} \text{kui } x = 1, & \text{siis } x^3 - x - 5 = -5 \\ \text{kui } x = 2, & \text{siis } x^3 - x - 5 = 1 \end{array}$$

Seega üks lahend on 1 ja 2 vahel.

Võttes $x_1 = 2$, leiame x_2 Newtoni valemi abil.

Et

$$f(x) = x^3 - x - 5,$$

siis

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Seega

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{11} \approx 1{,}909.$$

Edasi leiame x_3 ja x_4.

$$x_3 = 1{,}909 - \frac{0{,}048}{9{,}935} \approx 1{,}909 - 0{,}005 = 1{,}904$$

$$x_4 = 1{,}904 - \frac{0{,}002}{9{,}878} \approx 1{,}904 - 0{,}0002 \approx 1{,}904.$$

Saadud tulemuse põhjal oleme veendunud, et lahendis saadud kohad kuni tuhandendikeni on õiged.

4. Vea valem

Üheks põhilisemaks mõisteks koolimatemaatikas peab kujunema v e a m õ i s t e, millel on suur tähtsus täppisteadustes ja tehnikas.

V e a h i n d a m i s e küsimustega peaksid õpilased kokku puutuma juba varakult pikkuste ja nurkade mõõtmise puhul. Kaudse mõõtmistulemuse viga vajaks selgitamist ruudu, ristküliku ja kolmnurga pindala suuruse määramisel. Üldise v e a v a l e m i saab aga esitada alles tuletise mõiste abil.

Teatavasti on $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ja seega, kui Δx on küllalt väike, võime lugeda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x),$$

kust

$$\Delta x = f'(x) \cdot \Delta x,$$

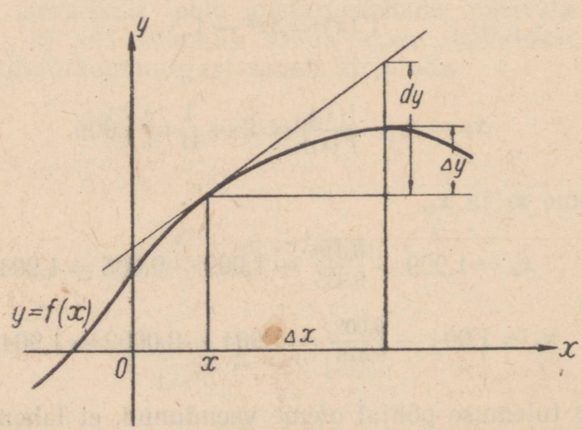
mis esitabki praktiliselt kasutatava valemi vea hindamiseks.

Ka vea mõiste selgitamisel tuleb tugineda graafilisele kujutamisele. Nagu joniselt 92 näeme, esitab Δy funktsiooni juurdekasvu kuni funktsiooni graafikuni, $f'(x)\Delta x$ aga kuni puutujani, mis on tõmmatud kohal x. Vea ligikaudne avaldis saab nimetuse f u n k t s i o o n i d i f e r e n t s i a a l. Seega

$$dy = f'(x)\Delta x$$

ja kui

$$y = x,$$



Joon. 92.

siis

$$dx = \Delta x,$$

mistõttu kirjutataksegi $dy = f'(x)dx$.

Diferentsiaali mõiste on aga sillaks tuletise ja integraali mõiste vahel.

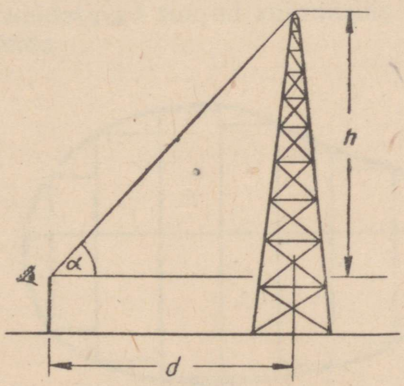
Vea valemit kasutatakse peamiselt mõõtmissaadusest tuletatud suuruste väärtuste usaldatavuse hindamisel ja mõõtmiste planeerimisel.

Olgu siinkohal esitatud kaks näidet vea valemi rakendamise kohta.

a) Nii näiteks, kui ruudu külje pikkuse x mõõtmisel tehtud viga on Δx, siis vea valemi põhjal saame ruudu pindala veaga

$$\Delta S \approx 2x \cdot \Delta x.$$

b) Vea valemi abil saame näiteks määrata, *kui kaugelt tuleks mõõta torni kõrgust, et tulemuse viga oleks võimalikult väike.*



Joon. 93.

Asugu vaatleja tornist d meetri kaugusel ja nähku ta sealt torni kõrgusosa h vaatenurgas α radiaani. Jooniselt nähtub, et

$$h = d \cdot \tan \alpha.$$

Vea valemi põhjal

$$\Delta h \approx \frac{d}{\cos^2 \alpha} \cdot \Delta \alpha.$$

Et

$$d = \frac{h}{\tan \alpha},$$

siis

$$\Delta h \approx \frac{2h}{\sin 2\alpha} \cdot \Delta\alpha.$$

Saadud valemist ilmneb, et viga on seda väiksem, mida suurem on nimetaja. Viimasel on maksimaalne väärtus, kui $\alpha = 45°$. Sel juhul

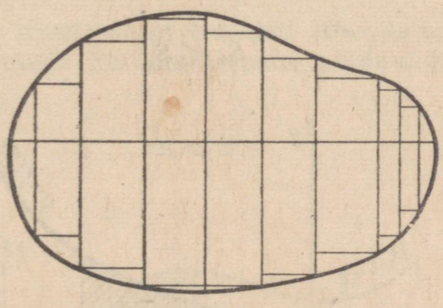
$$h = d.$$

Seega on viga väikseim, kui mõõtmiskaugus on ligikaudu võrdne mõõdetava torni kõrgusega.

I. INTEGRAALI MÕISTE KÄSITLEMINE

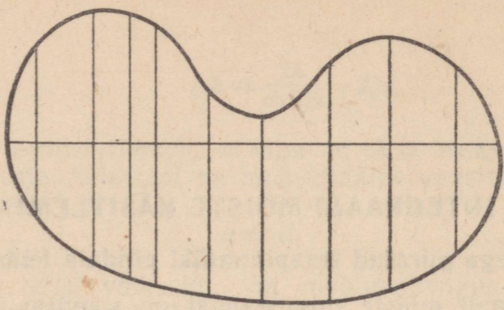
1. Kõverjoonega piiratud tasapinnatüki pindala leidmise probleem

Ka integraali mõiste tutvustamist on soovitav alustada vastava geomeetrilise ettevalmistusega. Selleks püstitatakse probleem, kuidas mõõta puulehe, kaardil esitatud järve, nahatüki jne. pindala, kui ükski neist pindaladest ei esita varem tundma õpitud planimeetrilist kujundit. Esimese vahendina nende pindalade suuruse määramiseks kasutatakse läbipaistvat ruutkatikut. Samuti kerkib lahendusideena kahtlematult üles ka arvamus, et ehk on need pindalad tükeldatavad tuntud kujundeiks. See on aga ainult erandjuhtudel nõnda.



Joon. 94.

Ühe võimaluse küsimuse lahendamiseks annab pinna katmine ristkülikute võrguga (joon. 94). Kasutades otsitava pindala määramisel ainult tervenisti tema sees asuvaid ristkülikuid, jäävad arvestamata kõverjoonsed kolmnurgakesed. Vaadeldavate pindalade suuruse määramise küsimus oleks täielikult lahendatud, kui õnnestuks leida meetodit kõverjoonse trapetsi pindala määramiseks, sest iga kõverjoonega piiratud pindala on jaotatav kõverjoonseiks trapetseiks (joon. 95). Otsitava pindala suuruse ligikaudsed avaldised saame, kui lähendame kõverjoonseid trapetseid kas ristkülikute, kõõl- või puutuja-trapetsitega. Sel teel jõutaksegi nn. r i s t k ü l i k - ja t r a p e t s - v a l e m i t e n i.

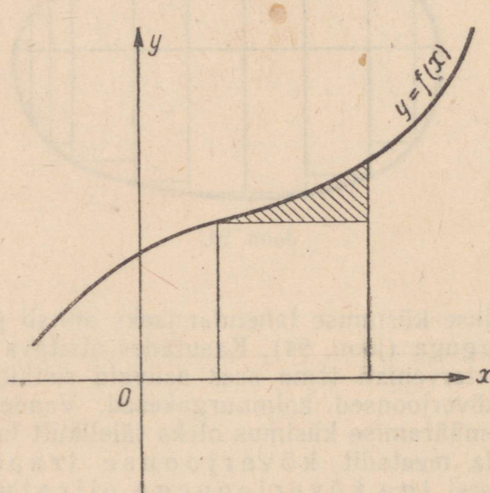


Joon. 95.

2. Kõverjoonse trapetsi lähendamine ristküliku või trapetsiga

Joonisel 96 on esitatud koordinaatteljestikus üks kõverjoonne trapets, mida on lähendatud ristkülikuga, mille üheks küljeks on trapetsi kõrgus ja teiseks küljeks lühem alus. Tähistades kõverjoonse trapetsi pindala tähega S ja ristküliku pindala tähega S_n, siis ilmselt

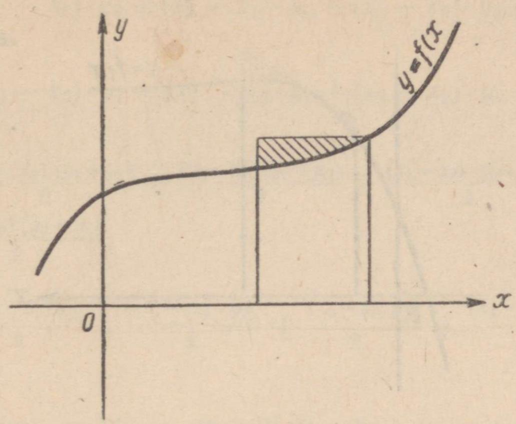
$$S_n < S.$$



Joon. 96.

Joonisel 97 esitatud kõverjoonne trapets on samuti lähendatud ristkülikuga, kuid selle teiseks küljeks on trapetsi pikem alus. Tähistades selle ristküliku pindala tähega S_R, siis

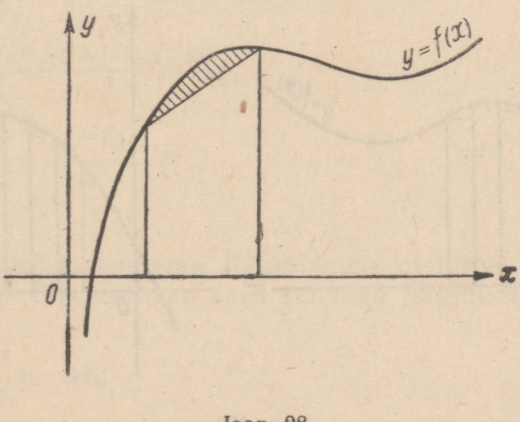
$$S_R > S.$$



Joon. 97.

Joonisel 98 on kõverjoonset trapetsit lähendatud hariliku trapetsiga. Kui tähistada hariliku trapetsi pindala tähega S_t, siis vaadeldaval juhul

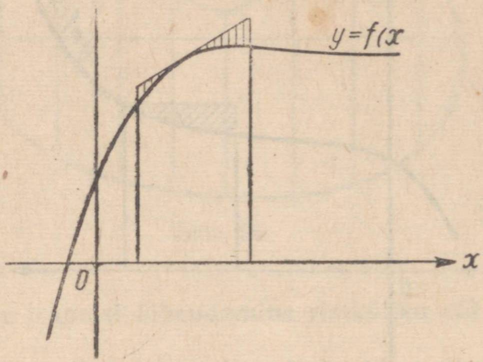
$$S_t < S.$$



Joon. 98.

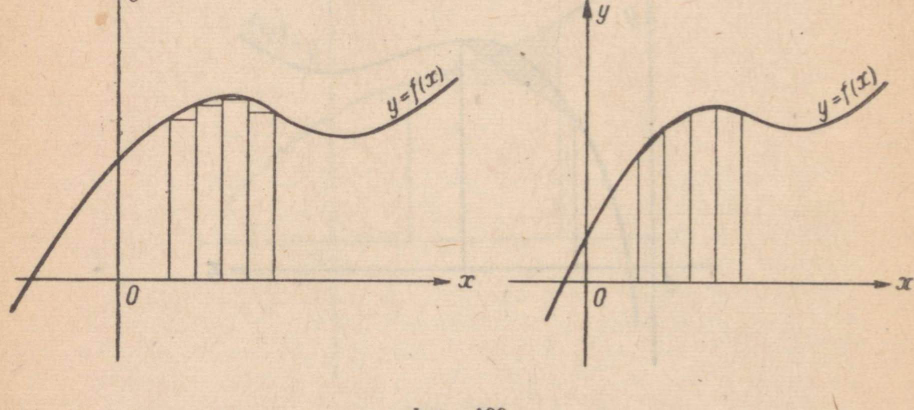
Joonisel 99 on hariliku trapetsi teine haar kõverjoonse trapetsi kõverjoonse haara puutujaks. Tähistades siin hariliku trapetsi pindala tähega S_T, siis ilmselt

$$S_T > S.$$



Joon. 99.

Esitatud joonistelt ilmneb, et kui kõverjoonse trapetsi pindalaks lugeda vastava ristküliku või trapetsi pindala, siis tehakse küllaltki suur viga. Vastavate jooniste abil on aga kergesti näha, et see viga väheneb, kui antud kõverjoonne trapets jagada mitmeks kõverjoonseks trapetsiks ja neid kitsamaid kõverjoonseid trapetseid lähendada ristküliku või trapetsiga (joon. 100).



Joon. 100.

3. Σ märk

Tükeldades nüüd antud kõverjoonse trapetsi näiteks neljaks kitsamaks kõverjoonseks trapetsiks, saame vastavalt nimetatud juhtumeile kirjutada

a) $S \approx (x_1 - x_0) \cdot y_0 + (x_2 - x_1) \cdot y_1 + (x_3 - x_2) \cdot y_2 +$
$+ (x_4 - x_3) \cdot y_3;$

b) $S \approx (x_1 - x_0) \cdot y_1 + (x_2 - x_1) \cdot y_2 + (x_3 - x_2) \cdot y_3 +$
$+ (x_4 - x_3) \cdot y_4;$

c) $S \approx \frac{(x_1 - x_0)(y_0 + y_1)}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2} + \frac{(x_3 - x_2)(y_2 + y_3)}{2} +$
$+ \frac{(x_4 - x_3)(y_3 + y_4)}{2};$

d) $S \approx \frac{(x_1 - x_0) y_{k_1}}{2} + \frac{(x_2 - x_1) \cdot y_{k_2}}{2} + \frac{(x_3 - x_2) y_{k_3}}{2} + \frac{(x_4 - x_3) \cdot y_{k_4}}{2}.$

Kuna saadud avaldised on küllalt pikad ja nad võivad muutuda veelgi pikemaks, kui kõverjoonsete trapetsite jaotamist tihendada, siis kerkib üles vajadus nende avaldiste lühemaks kirjutamiseks. Seda tehakse Σ märgi abil. Nii esitatakse saadud summad järgmiselt:

a) $S \approx \sum_{i=0}^{3} (x_{i+1} - x_i) \cdot y_i;$

b) $S \approx \sum_{i=0}^{3} (x_{i+1} - x_i) \cdot y_{i+1};$

c) $S \approx \sum_{i=0}^{3} \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)}{2};$

d) $S \approx \sum_{i=0} \frac{(x_{i+1} - x_i) y_{k_{i+1}}}{2}.$

Avaldiste veelgi suurema lühendamise otstarbel tähistatakse $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$. Siis esituvad need summad järgmiselt:

a) $S \approx \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot \Delta x_i;$

b) $S \approx \sum_{i=0}^{3} y_{i+1} \cdot \Delta x_i;$

c) $S \approx \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x_i;$

d) $S \approx \sum_{i=0}^{3} \frac{y_{k_{i+1}}}{2} \cdot \Delta x_i.$

Tundes neid valemeid võib Σ märgi abil raskusteta üles kirjutada kõverjoonse trapetsi pindala ligikaudsed valemid, kui antud kõverjoonne trapets on jaotatud n kitsamaks kõverjoonseks trapetsiks:

a) $S \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Delta x_i;$

b) $S \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} \cdot \Delta x_i;$

c) $S \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x_i;$

d) $S \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_{k_{i+1}}}{2} \cdot \Delta x_i.$

Saadud valemeid kasutatakse sageli kõverjoonse trapetsi pindala arvutamiseks.

4. Ristkülik- ja trapetsvalemid

Kui antud kõverjoonse trapetsi tükeldamine kitsamateks kõverjoonseteks trapetsiteks toimub nii, et nende kõigi kõrgused on võrdsed, s. t. et

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1},$$

siis nii eespool saadud valemid kui ka arvutused lihtsustuvad.

Tähistades seda konstantset vahet Δx-ga, esituvad valemid kujus:

a) $S \approx \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} y_i;$

b) $S \approx \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}$;

c) $S \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})$;

d) $S \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^{n-1} y_{k_{i+1}}$.

Saadud valemitest a) ja b) on tuntud ristkülikvalemitena, c) kõõltrapetsvalemina ja d) puutujatrapetsvalemina.

Kui kõverjoonse trapetsi alused on võetud abstsissi väärtustel a ja b, siis $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

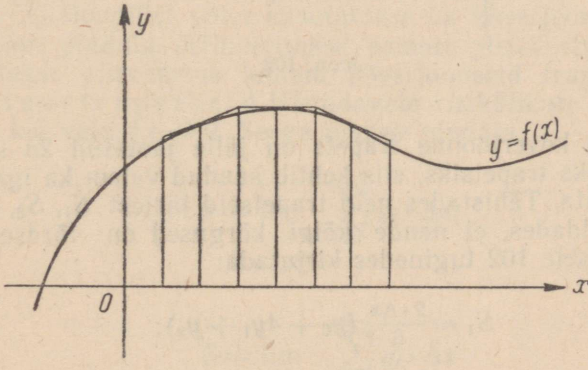
Sageli osutub otstarbekamaks jaotada antud kõverjoonne trapets $2n$ kitsamaks kõverjoonseks trapetsiks, eriti trapetsvalemite puhul. Nii esituks valem c) kujus

$$S \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} (y_i + y_{i+1})$$

ehk ilma Σ märgita

$$S \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Puutujatrapetsvalemi juures võetakse $2n$ jaotuse puhul puutujad paarituarvulise indeksiga ordinaatide otspunktides (joon. 101), siis on iga trapetsi kõrgus $2 \cdot \Delta x$ ja valem d) esitub kujus



Joon. 101.

$$S \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1,3,5}^{2n-1} y_i$$

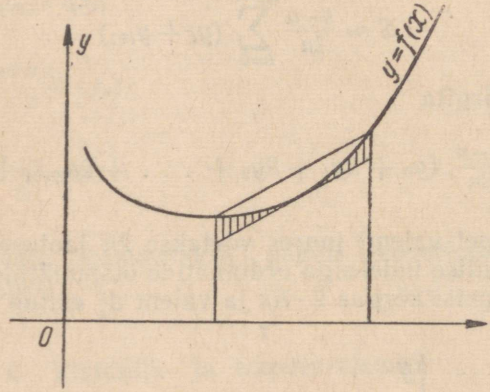
ehk

$$S \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})$$

5. Simpsoni valem

Täpsema tulemuse saamiseks esitame joonisel 102 nii kõõl- kui ka puutujatrapetsi. Silma järgi hinnates võib oletada, et lähendades kõverjoonset trapetsit puutujatrapetsiga teeme vea, mis on ligikaudu võrdne kõõl- ja puutujatrapetsi vahelise pindala kolmandikuga. Seega

$$S \approx f(c)(b-a) + \frac{1}{3}\left[\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) - f(c)(b-a)\right] =$$
$$= \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)].$$



Joon. 102.

Kui aga kõverjoonne trapets on jälle jaotatud $2n$ kitsamaks kõverjoonseks trapetsiks, siis kehtib saadud valem ka iga kitsama trapetsi kohta. Tähistades neid trapetseid järjest S_1, S_3, S_5, . . . , S_{2n-1} ja eeldades, et nende kõigi kõrgused on võrdsed Δx-ga, võime joonisele 102 tuginedes kirjutada:

$$S_1 \approx \frac{2 \cdot \Delta x}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2);$$

$$S_3 \approx \frac{2 \cdot \Delta x}{6}(y_2 + 4y_3 + y_4);$$

$$S_5 \approx \frac{2 \cdot \Delta x}{6}(y_4 + 4y_5 + y_6);$$

. . . . , , , , , ,

$$S_{2n-1} \approx \frac{2 \cdot \Delta x}{6}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Et otsitav pindala on võrdne kitsamate kõverjoonsete trapetsite pindalade summaga, siis

$$S \approx \sum_{i=1,3,5}^{2n-1} S_i =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$
$$+ y_{2n}]$$

ehk Σ märgi abil

$$S \approx \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 2\sum_{i=2,4}^{2n-2} y_i + 4\sum_{i=1,3}^{2n-1} y_i + y_{2n}].$$

Saadud valem on tuntud Simpsoni valemi nime all.

6. Kõverjoonse trapetsi pindala piirväärtusena

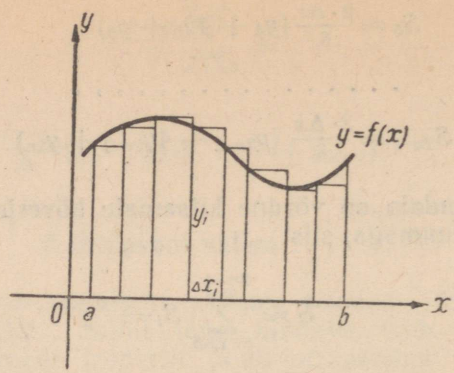
Olles lahendanud ülesandeid kõverjoonse trapetsi pindala leidmise kohta ligikaudsete valemite abil, kerkib üles probleem, kas on võimalik saada ka täpset valemit kõverjoonse trapetsi pindala määramiseks.

Ringi pindala defineeriti piirväärtuse abil, sest teda piiras kõverjoon. Analoogilist võtet kasutatakse ka kõverjoonse trapetsi puhul. Tema pindala defineeritakse samuti piirväärtusena. Seekord võetakse piirväärtus kitsaid kõverjoonseid trapetseid, nn. elementaartrapetseid lähendavate ristkülikute (joon. 103) summast, kui vaid $\Delta x_i \to 0$. Seega otsitav pindala

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Delta x_i$$

või

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Delta x$$



Joon. 103.

7. Kõverjoonse trapetsi pindala tuletis

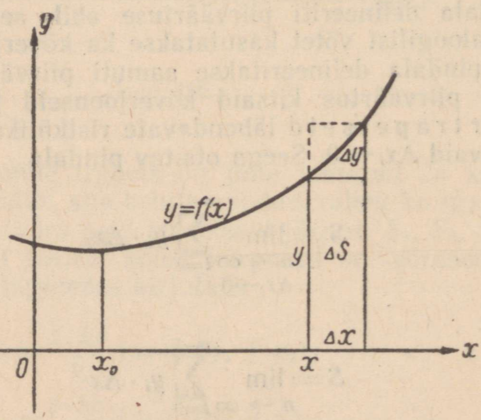
Kõverjoonse trapetsi kõverjoonne haar esitab mingi funktsiooni $y = f(x)$ graafikut. Seega ka kõverjoonse trapetsi pindala S avaldub x funktsioonina. Selle nn. pindfunktsiooni tuletiseks osutub kõverjoonse trapetsi äärmine ordinaat

$$S'_x = y$$

ja selle pinna diferentsiaal avaldub kujus

$$dS = y \cdot dx.$$

Nendele tulemustele jõudmine võiks toimuda järgmiselt.



Joon. 104.

Joonise 104 põhjal võib kirjutada, et

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \cdot \Delta x.$$

Jagades võrratuse kõik pooled Δx-ga, saame

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis ka $\Delta y \to 0$ ja järelikult

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \to y.$$

Teisiti kirjutatult

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = y$$

ehk

$$S'_x = y.$$

Et

$$dS = S'_x \cdot dx,$$

siis

$$dS = y \cdot dx.$$

Käsitletud teoreemist ilmneb, et **kõverjoonse trapetsi pindala suuruse määramiseks tuleb leida funktsioon, mille tuletiseks on** $f(x)$. Seega jõutakse eelmises peatükis lahendatud ülesande suhtes pöördülesandele. Antud tuletisfunktsioonidele tuleb leida **algfunktsioon**. Seega on kõverjoonse trapetsi pindala määramiseks tarvis leida funktsioon, mille tuletis on võrdne tema äärordinaadiga.

8. Määramata ja määratud integraal

Algfunktsiooni leidmise käigus ilmneb tema lõpmata mitmesus. Olgu näiteks tarvis leida funktsiooni $3x^2$ algfunktsioon. On teada, et

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Samuti on aga ka

$$(x^3 + 1)' = 3x^2;$$
$$(x^3 - 100)' = 3x^2.$$

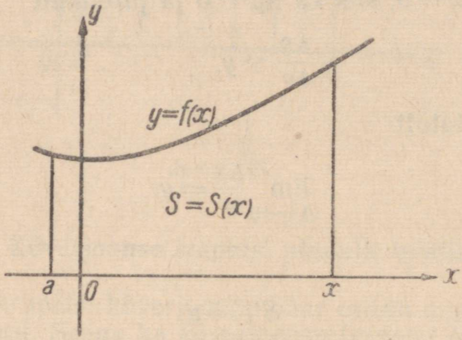
Üldiselt

$$(x^3 + c)' = 3x^2,$$

kus c on mistahes konstant. Seda lõpmata mitmest algfunktsiooni nimetataksegi määramata integraaliks ja kirjutatakse kujul

$$\int f(x)\,dx = u(x) + c, \quad \text{kus} \quad u'(x) = f(x).$$

Kui fikseerida kõverjoonse trapetsi lähteordinaat a, siis sellega on määratud kõverjoonse trapetsi pindala ühese x funktsioonina,



Joon. 105.

sest nüüd vastab ju igale x väärtusele kindel pindala suurus (joon. 105). Sel juhul peab seega saadud avaldises c-l olema kindel väärtus. Selle väärtuse määramiseks kasutame asjaolu, et kõverjoonse trapetsi pindala on 0, kui $x = a$:

$$0 = u(a) + c,$$

kust

$$c = -u(a).$$

Kasutades juba tarvitusele võetud integraali märki, kirjutatakse saadud tulemus üles järgmiselt:

$$S(x) = \int_a^x f(x)\,dx = u(x) - u(a).$$

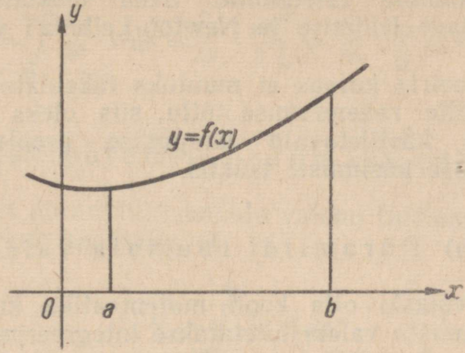
Kui fikseerida ka kõverjoonse trapetsi lõppordinaat, siis on kõverjoonne trapets üheselt määratud, tarvitseb vaid viimases valemis x asendada b-ga (joon. 106). Saame

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = u(b) - u(a),$$

kus $u'(x) = f(x)$.

Saadud tulemust nimetatakse Newton-Leibnizi valemiks.

Viimast integraali nimetatakse aga määratud integraaliks, kuna siin on määratud abstsissi väärtused, mille vahelist kõverjoonse trapetsi pindala avaldatakse.



Joon. 106.

Et aga teiselt poolt oli kõverjoonse trapetsi pindala defineeritud piirväärtusena, siis saadakse määratud integraali definitsiooniks

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot \Delta x_i$$

ehk

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot \Delta x.$$

Integreerimist teostatakse nendest funktsioonidest, mis avaldusid tuletistena või erinevad neist konstantse teguri poolest. Nii lahendatakse ülesandeid, nagu

$$\int dx; \quad \int 2x dx; \quad \int nx^{n-1} dx; \quad \int \cos x\, dx; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx; \quad \text{jne.}$$

või siis

$$\int_0^1 (2x+3x^2)\,dx; \quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x)\,dx; \quad \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad \text{jne.}$$

1. Integraali rakendusi stereomeetria kursuses

Integraali peamiseks rakendusalaks keskkoolis on kehade ruumalade valemite tuletamine. Seda teostatakse vastavate integraalsummade leidmise ja Newton-Leibniz'i valemi rakendamisega.

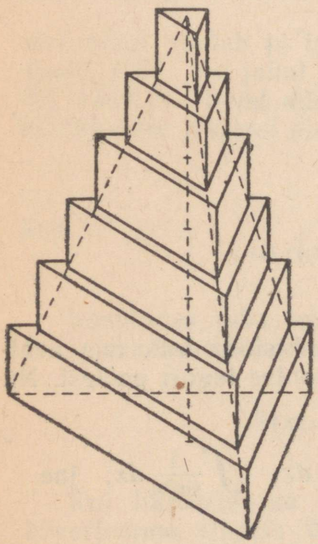
Et stereomeetria kursus ei muutuks tükeldatuks mitmete erinevate meetodite rakendamise tõttu, siis oleks loomulik kõiki stereomeetrias käsitletavaid kuupimise probleeme käsitleda integraalarvutuse küsimuste tsüklis.

a) Püramiidi ruumala valem

Püramiid võikski olla kooli matemaatika kursuses esimene keha, mille ruumala valem tuletatakse integreerimise teel.

Tükeldades püramiidi tema põhjaga paralleelsete tasapindadega tüvipüramiidideks ja lähendades viimaseid püstprismadega, saame püramiidi ruumala esitada ligikaudse summana

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \cdot \Delta x_i.$$



Joon. 107.

Püramiidi ruumala on võrdne selle summa piirväärtusega

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

mis omakorda on võrdne määratud integraaliga

$$V = \int_0^h S(x)\, dx.$$

Funktsioon $S(x)$ määratakse omadusest, et püramiidi põhja ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nagu vastavate kõrguste ruudud, s. t.

$$\frac{S(x)}{Sp} = \frac{x^2}{h^2},$$

kust

$$S(x)=\frac{S_p}{h^2}\cdot x^2.$$

Püramiidi ruumala avaldub seega integraalina:

$$V=\int_0^h \frac{S_p}{h^2}\cdot x^2 dx=\frac{S_p}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{S_p}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{S_p\cdot h}{3}.$$

b) Tüvipüramiidi ruumala valem

Analoogiliselt püramiidi ruumala valemi tuletamisel kasutatud mõttekäigule võime kirjutada, et

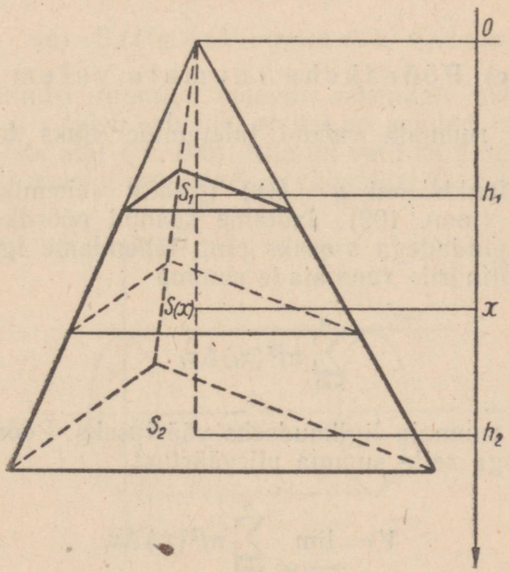
$$V=\int_{h_1}^{h_2} S(x)\,dx.$$

Et

$$\frac{S(x)}{x^2}=\frac{S_1}{h_1^2},$$

siis

$$S(x)=\frac{S_1}{h_1^2}\,x^2.$$



Joon. 108.

Seega

$$V=\frac{S_1}{h_1^2}\int_{h_1}^{h_2} x^2dx=\frac{S_1}{h_1}\cdot\frac{h_2^3-h_1^3}{3}.$$

Teisendades saadud tulemust, saame

$$V=\frac{h_2-h_1}{3}\cdot\frac{S_1(h_2^2+h_1h_2+h_1^2)}{h_1^2}.$$

Et

$$\frac{S_2}{h_2^2}=\frac{S_1}{h_1^2},$$

ehk

$$S_2h_1^2=S_1h_2^2$$

ning võttes arvesse, et

$$h_2-h_1=h,$$

saame

$$V=\frac{h}{3}\cdot(S_1+\sqrt{S_1\cdot S_2}+S_2).$$

c) Pöördkeha ruumala valem

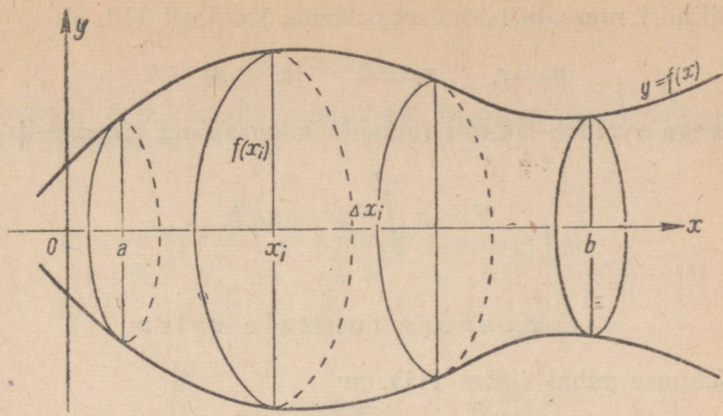
Pöördkeha ruumala valemi tuletamine võiks toimuda järgmiselt.

Pöörelgu funktsiooni $y=f(x)$ graafik vahemikus a-st b-ni ümber x-telje (joon. 109). Jaotame saadud pöördkeha x-teljega ristuvate tasapindadega n-osaks ning lähendame iga osa silindriga. Nende silindrite ruumalade summa

$$\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(x_i)\Delta x_i$$

on pöördkeha ruumala ligikaudseks väärtuseks. Pöördkeha ruumalaks loeme aga selle summa piirväärtust

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(x_i)\Delta x_i.$$



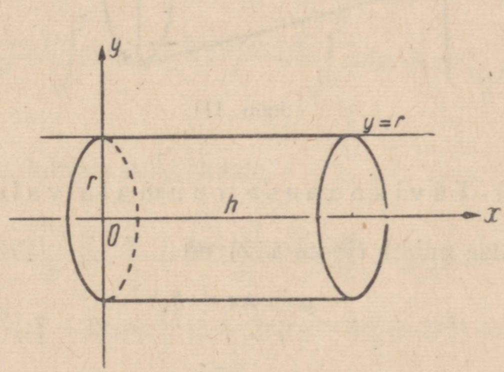
Joon. 109.

Et selline summa piirväärtus on esitatav määratud integraalina, siis

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

d) Silindri ruumala valem

Kuna silindri ruumala valemit rakendati pöördkeha valemi tuletamisel, siis tuleb eeldada, et see on saadud juba varem piirväärtuse mõiste abil (lk. 140). Siin on vaid näidatud leitud pöördkeha ruumala valemi rakendamise võimalust ka silindri puhul.



Joon. 110.

Silindri ruumala leidmiseks näeme jooniselt 110, et

$$y=r, \qquad x_1=0 \qquad \text{ja} \qquad x_2=h.$$

Seega avaldub silindri ruumala integraalina järgmiselt:

$$V=\pi \int_0^h r^2 dx=\pi r^2 h.$$

e) Koonuse ruumala valem

Koonuse puhul (joon. 111) on

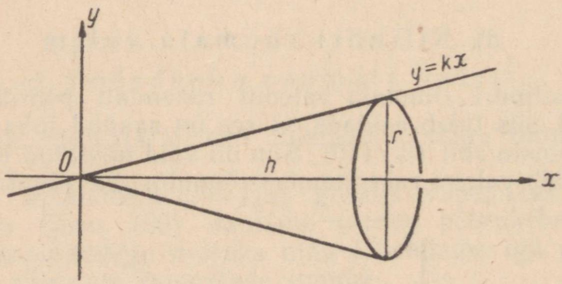
$$y=kx,$$

kus

$$k=\frac{r}{h}.$$

Integraali rajad on samad mis eelmisel juhulgi ja seega koonuse ruumala

$$V=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$



Joon. 111.

f) Tüvikoonuse ruumala valem

Tüvikoonuse puhul (joon. 112) on

$$y=kx+b,$$

kus

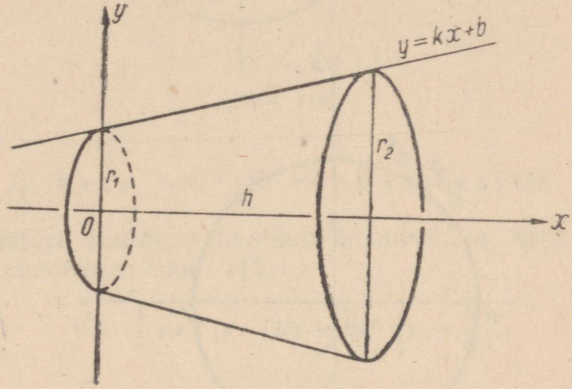
$$k=\frac{r_2-r_1}{h}$$

ja

$$b = r_1.$$

Integraali rajad on jällegi endised. Seega avaldub tüvikoonuse ruumala järgmiselt:

$$V = \pi \int_0^h \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 x^2 + \frac{2r_1(r_2 - r_1)}{h} x + r_1^2 \right] dx.$$



Joon. 112.

Et summa integraal on võrdne liidetavate integraalide summaga, siis

$$V = \frac{\pi (r_2 - r_1)^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx + \frac{2\pi r_1 (r_2 - r_1)}{h} \int_0^h x dx + \pi r_1^2 \int_0^h dx.$$

Avaldades need integraalid, saame

$$V = \frac{\pi (r_2 - r_1)^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{2\pi r_1 (r_2 - r_1)}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + \pi r_1^2 h =$$

$$= \frac{\pi h}{3} (r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2 + 3r_1 r_2 - 3r_1^2 + 3r_1^2) =$$

$$= \frac{\pi h}{3} (r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2).$$

g) Kera ruumala valem

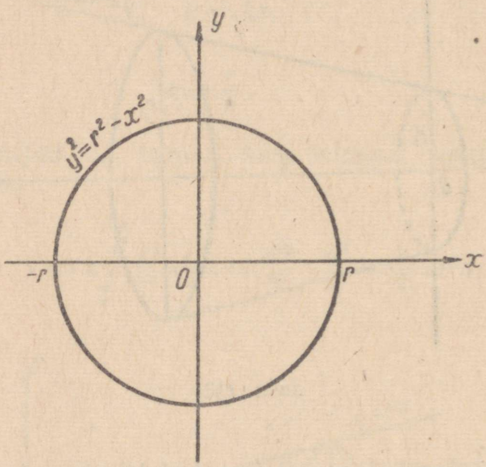
Kera (joon. 113) ruumala valemi tuletamise puhul on

$$y^2 = r^2 - x^2; \quad x_1 = -r; \quad x_2 = r.$$

Seega

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2 \int_{-r}^{r} dx - \pi \int_{-r}^{r} x^2 dx =$$

$$= \pi r^2 \cdot 2r - \pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$



Joon. 113.

h) Kera segmendi ruumala valem

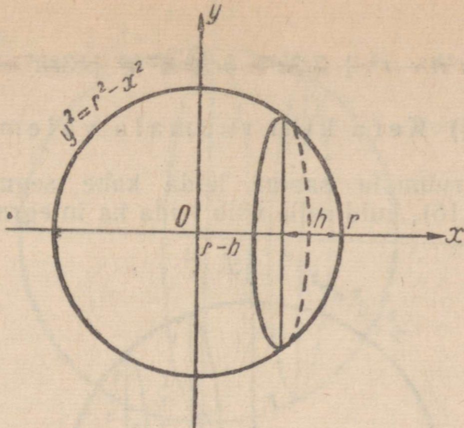
Kera segmendi (joon. 114) ruumala valemi saame järgmiselt:

$$y^2 = r^2 - x^2; \quad x_1 = r - h; \quad x_2 = r.$$

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2 (r - r + h) - \pi\left[\frac{r^3}{3} - \frac{(r-h)^3}{3}\right] =$$

$$= \pi r^2 h - \frac{\pi}{3}\,(r^3 - r^3 + 3r^2 h - 3rh^2 + h^3) =$$

$$= \pi r^2 h - \pi r^2 h + \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right).$$



Joon. 114.

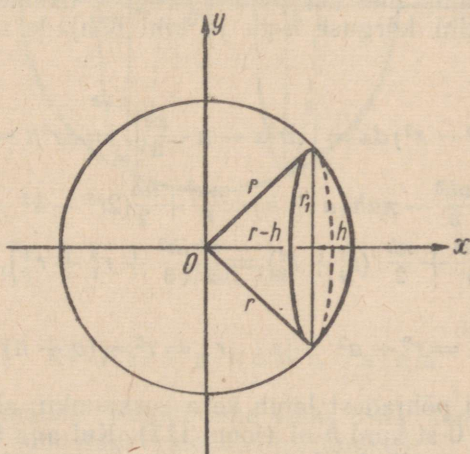
i) Kera sektori ruumala valem

Kera sektori ruumala avaldub koonuse ja kera segmendi ruumalade summana (joon. 115):

$$V=\frac{1}{3}\pi r_1^2(r-h)+\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).$$

Et

$$r_1^2=r^2-(r-h)^2,$$



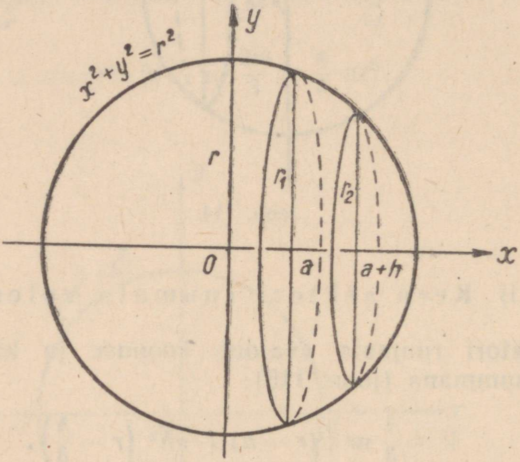
Joon. 115.

siis

$$V = \frac{1}{3}\pi(r^3 - r^2h - r^3 + 3r^2h - 3rh^2 + h^3 + 3rh^2 - h^3) = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

j) Kera kihi ruumala valem

Kera kihi ruumala saame leida kahe segmendi ruumala vahena (joon. 116), kuid selle võib leida ka integraali abil.



Joon. 116.

Vaadeldes juhtu, kus kera kiht asub tervikuna ühel pool kera keskpunkti ja tähistades keskpunkti kauguse temale lähemast kihi põhjast a-ga, kihi kõrguse h-ga ja kihi põhjade raadiused r_1 ja r_2-ga, saame

$$V_{(\text{kiht})} = \int_a^{a+h} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \left| \pi r^2 x - \pi \cdot \frac{x^3}{3} \right|_a^{a+h} = \pi r^2 h - \frac{\pi}{3}[(a+h)^3 -$$

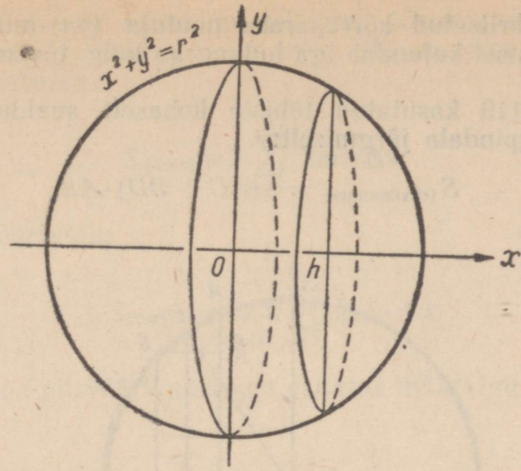
$$- a^3] = \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{3} - \pi a h(a+h) = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(2r^2 - h^2 - 2a^2 - 2ah) =$$

$$= \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2) = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + r_1^2 + r_2^2\right),$$

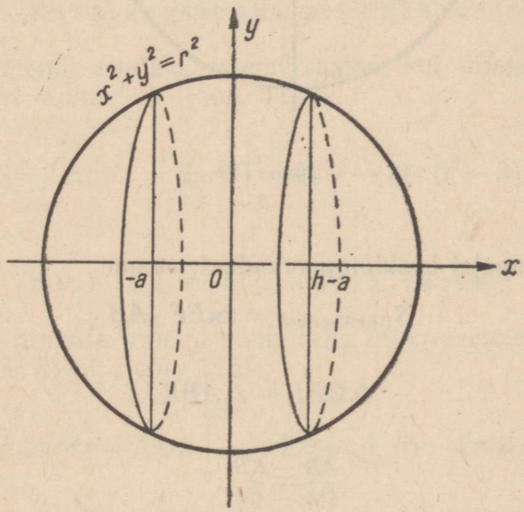
kus

$$r_1^2 = r^2 - a^2 \quad \text{ja} \quad r_2^2 = r^2 - (a+h)^2.$$

Kui üks kihi põhjadest läbib kera keskpunkti, siis tuleb integreerida rajades 0-st kuni h-ni (joon. 117). Kui aga kera keskpunkt asetseb kihi sees, siis tuleb integreerida $(-a)$-st kuni $(h-a)$-ni (joon. 118). Tulemus jääb ikka samaks.



Joon. 117.



Joon. 118.

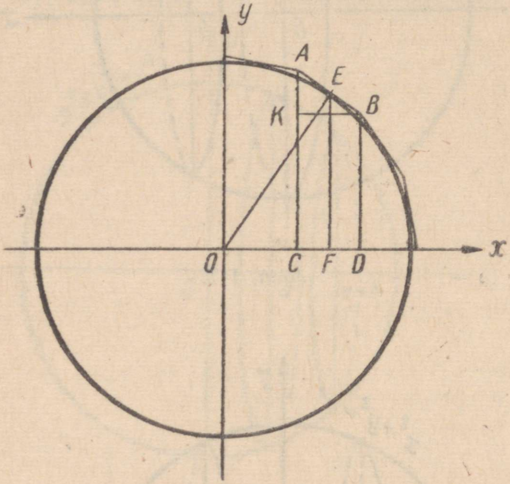
k) Kera pindala valem

Integraali mõiste rakendamine võiks tulla kõne alla ka kera ja tema osade pindalade valemite tuletamisel.

Kera pindala valemi tuletamiseks vaatleme kera pöördkehana, mis tekib poolringi pöörlemisel ümber diameetri. Olgu vaadeldav ringjoon ümbritsetud korrapärase puutuja $(4n)$-nurgaga. Poolringi pöörlemisel kujundab iga hulknurga külg tüvikoonuse külgpinna.

Joonisel 119 kasutatud tähiste kohaselt avaldub ühe tüvikoonuse külgpindala järgmiselt:

$$S_{(\text{tüvikoonus})} = \pi(AC + BD) \cdot AB.$$



Joon. 119.

Kasutades trapetsi kesklõigu omadust, saame

$$S_{(\text{tüvikoonus})} = 2\pi EF \cdot AB.$$

Et

$$\triangle OEF \sim \triangle ABK,$$

siis

$$\frac{AB}{OE} = \frac{KB}{EF}.$$

Siit

$$EF \cdot AB = OE \cdot KB$$

ja seega

$$S_{(\text{tüvikoonus})} = 2\pi \cdot OE \cdot KB.$$

Kui lõigu $KB = CD$ pikkuse tähistame Δx_i ja OE, mis on võrdne kera raadiusega, tähega r, siis saame

$$S_{(\text{tüvikoonus})} = 2\pi r \cdot \Delta x_i.$$

Kera pindala all mõistame tekkinud tüvikoonuste külgpindalade summa piirväärtust, kui $n \to \infty$. Nii on kera pindala ligikaudseks väärtuseks

$$S_{(\text{kera})} \approx 2 \sum_{i=1}^{n} 2\pi r \cdot \Delta x_i$$

ja täpseks väärtuseks

$$S_{(\text{kera})} = \lim_{n \to \infty} 2 \sum_{i=1}^{n} 2\pi r \cdot \Delta x_i.$$

Saadud summa piirväärtus on aga esitatav määratud integraalina. Nii saame

$$S_{(\text{kera})} = 2\int_0^r 2\pi r dx = 4\pi r x \Big|_0^r = 4\pi r^2.$$

l) Kera segmendi pindala valem

Kera segmendi pindala valemi saame, kui integreerime rajades $(r-h)$-st kuni r-ni (joon. 114).

$$S_{(\text{segment})} = \int_{r-h}^{r} 2\pi r dx = 2\pi r x \Big|_{r-h}^{r} = 2\pi r^2 - 2\pi r(r-h) = 2\pi r h.$$

m) Kera vöö pindala valem

Kera vöö pindala valemi saamiseks integreerime kas rajades a-st kuni $(a+h)$-ni (joon. 116)

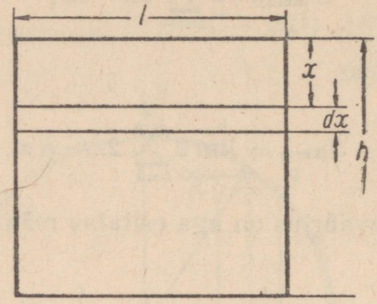
$$S_{(\text{vöö})} = \int_{a}^{a+h} 2\pi r dx = 2\pi r x \Big|_{a}^{a+h} = 2\pi r(a+h) - 2\pi r a = 2\pi r h$$

või 0-st h-ni või $(-a)$-st $(h-a)$-ni (vt. kera kihi ruumala valemi tuletamist), mis viivad samale tulemusele.

2. Integraali teisi rakendusi

Integraali mõiste tähtsus suureneb õpilaste silmis veelgi, kui esitada mõningaid näiteid integraali rakendamisest füüsikas ja tehnikas. Arvutatavate suurustena võiksid kõne alla tulla näiteks vee surve paisule, allarippuva köie venitus tema oma kaalu mõjul, hooratta hoog jne.

Nende ülesannete puhul seatakse eesmärgiks avaldada otsitava suuruse diferentsiaal, et siis integreerimise teel leida otsitav suurus.



Joon. 120.

Näiteks ülesande puhul määrata vee surve paisule (joon. 120) vaadeldakse survet P sügavuse x funktsioonina. Avaldatakse rõhu P diferentsiaal

$$dP = lx\,dx,$$

kus l on paisu laius. Oletades, et veepinna kõrgus paisu kohal on h, leitakse integreerimise teel P

$$P = \int_0^h lx\,dx = \frac{1}{2}\,lh^2.$$

1. Märkusi programmi kohta

Et selgitada, missugustes klassides ja missuguses järjestuses funktsionaalse sõltuvuse küsimusi koolis käsitleda, selleks on järgnevas esitatud projekt selle aine võimaliku paigutuse kohta keskkooli matemaatika programmis. Sõltuvalt käesoleva raamatu sisust hõlmab see projekt eeskätt küsimusi, mis on seotud algebra ja matemaatilise analüüsi algmete õpetamisega. Seetõttu on ka teadlikult projektist välja jäetud suurem osa aritmeetika paladest, samuti geomeetria ja trigonomeetria küsimused.

Programmi koostamisel on lähtutud veendumusest, et kaasaja nõudeid kajastav matemaatika programm ei nõua aritmeetika kursuses kunstlikke või, nagu neid sageli programmis nimetatakse, keerukamate ülesannete lahendamist. Samuti on arvestatud asjaolu, et tänapäeval ei ole vajadust omistada liiga suurt osatähtsust harilikele murdudele, sest praktikas kasutatakse põhiliselt kümnendmurde. Viimastega võiks aga tutvuda juba IV klassis, käsitledes neid seal kümnendsüsteemi arvudena.

Toodud seisukohtade arvestamine võimaldaks aritmeetika kursuse lõpetamist põhiliselt juba V klassis.

Algklassides tundmaõpitud geomeetrilistele kujunditele tuginevat propedeutilist geomeetria kursust tuleks alustada V klassis. Selle kursuse jätkamine VI klassis võimaldaks tundmaõpitud ja seal õpetatavate pindalade ja ruumalade arvutamisel süvendada arvutamise oskust täisarvude ja murdudega. Peamist tähelepanu osutatakse VI klassis juba algebra küsimustele.

Funktsionaalse sõltuvuse küsimuste käsitlemiseks vajaliku ettevalmistusega tuleks alustada juba V klassis nähtuskäikude graafilise esitamise abil. VI klassis jätkuks see algebraliste avaldiste väärtuste käigu kujutamisega diagrammides. Üksikute sõltuvustega tutvumine toimuks aga VII ja VIII klassis.

Kuni VIII klassini (incl.) võiks ulatuda ka geomeetria propedeutiline kursus, kusjuures tuleb soovitada, et alates

VII klassist hakataks rakendama ka deduktsiooni. VII klassis hõlmaks see kursus peamiselt geomeetrilisi konstruktsioone ja kolmnurkade kongruentsust ning VIII klassis kolmnurkade lahendamist Pythagorase teoreemi ja trigonomeetriliste funktsioonide abil.

Kuigi algebra kursuses 6. kuni 8. õppeaastani (incl.) on esitatavas programmi projektis küllaltki rõhutatud funktsionaalse sõltuvuse küsimusi, on seal peaeesmärgina mõeldud ikkagi samasusteisenduste teostamise ning lineaarsete ja ruutvõrrandite koostamise ja lahendamise oskuse väljakujundamist.

Oleks vajalik, et selline matemaatiline pagas, nagu see on ette nähtud esitatavas matemaatika programmi projektis esimese kaheksa klassi ulatuses, antaks tulevikus kõigile kohustusliku üldhariduse raames.

Järgnevates klassides (IX—XI) domineerib aga esitatava projekti kohaselt juba täielikult funktsionaalne sõltuvus.

Kuna geomeetria küsimusi saab vastavas propedeutilises kursuses nelja õppeaasta vältel käsitleda küllaltki laiaulatuslikult ning kui suhtuda kriitilisemalt teoreemide valikusse ja vajalikkusesse geomeetria (eriti stereomeetria) süstemaatilises kursuses, siis peaks planimeetria kursus, välja arvatud ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemi tuletamine, olema läbivõetav 9. õppeaastal. 10. õppeaastal käsitletaks stereomeetria põhiküsimusi ja -teoreeme ning projektsiooniõpetust. Kehade ruumalade valemite tuletamine toimuks aga pärast integraali mõiste käsitlemist. Trigonomeetria kursus tuleks paigutada nagu praegugi IX ja X klassi.

Et kindlustada matemaatika õpetamises enam üksikute matemaatiliste distsipliinide vastastikust arvestamist ja et enam esile tõsta seost nende vahel, selleks on loobutud esitatavas programmi projektis üksikuist matemaatilistest ainetest (aritmeetika, algebra ja geomeetria) ning seda ainet nimetatakse kõigis klassides ühe nimega — matemaatika.

Programmi lõpus toodud keskkooli kursuse kordamise peatükis tuleks muuhulgas anda: 1) ülevaade arvu mõiste laiendamisest ja tutvustada ka kompleksarvu; 2) lahendada võrrandeid ja tutvustada ka juur-, logaritm-, eksponent- ja trigonomeetrilisi võrrandeid; 3) luua ettekujutus geomeetria aksiomaatilisest ülesehitusest; 4) näidata funktsionaalse sõltuvuse siduvat osa kooli matemaatika kursuses.

2. Keskkooli matemaatika programmi projekt

(5.—11. õppeaasta)

V klass

(5 tundi nädalas)

1. Täisarvud ja kümnendmurrud (60 tundi).
Neli põhitehet täisarvude ja kümnendmurdudega. Summa, vahe, korrutise ja jagatise omadused.
Protsendi mõiste. Protsendi leidmine arvust ja arvu leidmine protsendi järgi. Kahe arvu suhte väljendamine protsentides. Lihtintressi arvutamine.
2. Harilikud murrud (50 tundi).
Lihtmurd, liigmurd, segaarv.
Murru põhiomadus, murru taandamine ja laiendamine.
Murdude liitmine ja lahutamine. Murdude korrutamine ja jagamine.
Hariliku murru esitamine kümnendmurruna ühe-, kahe- või kolmekohalise murdosaga. Kümnendmurru esitamine hariliku murruna.
4. Diagrammid (10 tundi).
Kaardil või plaanil antud kahe punkti vahelise tegeliku kauguse määramine. Arvmõõt.
Statistiliste andmete kogumine tabelisse ja nende graafiline kujutamine joonlõik-, tulp- ja sektordiagrammidena.
5. Geomeetria propedeutiline kursus (35 tundi).
6. Kordamine (10 tundi).

VI klass

(5 tundi nädalas)

1. Geomeetria propedeutiline kursus ja aritmeetika kursuse süvendamine (75 tundi).
2. Algebraline avaldis (20 tundi).
Tähe kasutamine arvu tähisena. Kordaja. Arvu ruut ja kuup. Aste.
Aritmeetiliste ülesannete lahendamine tähelistel andmetel.
Täheliste avaldiste väärtuste tabelid; nende väärtuste käigu diagramm.
Aritmeetiliste tehete seadused. Nende seaduste kasutamine peastarvutamisel.
3. Ratsionaalarvud (20 tundi).
Positiivsed ja negatiivsed arvud, arv null. Arvtelg. Arvu absoluutväärtus. Ratsionaalarvude suurusjärjestus.
Ratsionaalarvude liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja naturaalarvuga astendamine.
Algebralise avaldise arvuline väärtus temas esinevate tähtede ratsionaalarvuliste väärtuste korral.
4. Üksliikmed ja hulkliikmed (20 tundi).
Üksliige ja hulkliige. Sarnased liikmed, nende koondamine. Üksliikmete liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine. Üksliikme astendamine naturaalarvuga.
Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega.
5. Hulkliikmete tegureiks lahutamine (20 tundi).
Ühise teguri sulgude ette toomise võte. Rühmitamise võte.
Valemid:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$
$$(a\pm b)(a^2\pm ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

Nende valemite rakendamine hulkliikmete tegureiks lahutamisel ja peastarvutamisel.

Hulkliikmete liitmine, lahutamine ja korrutamine.

6. Kordamine (10 tundi).

VII klass

(5 tundi nädalas)

1. VI klassi kursuse kordamine (10 tundi).

2. Algebralised murrud (35 tundi).

Algebraline murd. Murru põhiomadus. Murdude taandamine, laiendamine ja ühenimeliseks teisendamine.

Alg- ja kordarv. Antud arvu tegurid ja kordsed. Suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

Murdude liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine.

Murru astendamine naturaalarvuga.

3. Graafikud (10 tundi).

Koordinaatteljestik. Punkti abstsiss ja ordinaat. Antud punkti koordinaatide leidmine. Punkti asukoha määramine tema koordinaatide järgi.

Ühtlase ja ositi ühtlase liikumise graafik. Temperatuuri käigu ja rongi sõidu graafikud. Algebraliste avaldiste numbriliste väärtuste käigu graafiline kujutamine.

4. Võrdeline ja pöördvõrdeline sõltuvus (20 tundi).

Konkreetseid ülesandeid teineteisest võrdeliselt sõltuvate suuruste kohta. Võrdelise sõltuvuse esitamine valemi, tabeli ja graafiku abil.

Võrdelised suurused. Võrde põhiomadus. Võrde tundmatu liikme leidmine.

Konkreetseid ülesandeid teineteisest pöördvõrdeliselt sõltuvate suuruste kohta. Pöördvõrdelise sõltuvuse esitamine valemi, tabeli ja graafiku abil.

5. Lineaarne sõltuvus (5 tundi).

Konkreetseid ülesandeid teineteisest lineaarselt sõltuvate suuruste kohta. Võrdeline sõltuvus lineaarse sõltuvuse erijuhuna. Lineaarse sõltuvuse esitamine valemi, tabeli ja graafiku abil.

6. Lineaarvõrrandid (30 tundi).

Samasuse, võrrandi ja võrratuse mõiste.

Arvuliste ja täheliste kordajatega ühe tundmatuga lineaarvõrrandite lahendamine.

Tekstülesannete lahendamine lineaarvõrrandite abil.

7. Lineaarvõrrandisüsteemid (25 tundi).

Kahe tundmatuga võrrandi lahendite hulk.

Kahe tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemi lahendi graafiline tõlgendus.

Arvuliste ja täheliste kordajatega esimese astme võrrandisüsteemide lahendamisvõtteid.

Tekstülesannete lahendamine esimese astme võrrandisüsteemide abil.

8. Geomeetria propedeutiline kursus (20 tundi).

9. Kordamine (10 tundi).

VIII klass

(5 tundi nädalas)

1. Kordamine (10 tundi).

2. Ruutsõltuvus ja selle pööre (15 tundi)

Ruutsõltuvus $y=x^2$. Ruutude tabel.

Ruutsõltuvuse pööre $y=\sqrt{x}$. Ruutjuurte ligikaudsete väärtuste leidmine. Ruutjuurte tabel. [1]

Ruutsõltuvus $y=ax^2$, tema esitamine tabeli ja graafiku abil. Ruutsõltuvuse definitsioon.

3. Ruutirratsionaalarv (5 tundi).

Ruutirratsionaalarv, tema ligikaudsed väärtused. Näiteid tehetest irratsionaalarvudega.

4. Ruutvõrrandid (35 tundi).

Mittetäielikud ja täielikud ruutvõrrandid. Ruutvõrrandi lahendusvalem. Diskriminant. Tekstülesannete lahendamine ruutvõrrandite abil.

Ruutvõrrandi lahendite omadused. Teise astme kolmliikme lahutamine lineaarseiks tegureiks.

5. Teise astme võrrandisüsteemid (15 tundi).

Kahe tundmatuga teise astme võrrandisüsteem, selle graafiline ja analüütiline lahendamine (lihtsamatel juhtudel). Ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ graafiline lahendamine süsteemi $\begin{cases} y=-x^2 \\ y=px+q \end{cases}$ abil.

6. Geomeetria ja trigonomeetria propedeutiline kursus (40 tundi).

7. Aritmeetika, algebra ja geomeetria kursuse kordamine koos veaarvutuse küsimustega (45 tundi).

IX klass

(4 tundi nädalas)

1. Funktsionaalne sõltuvus (5 tundi).

Jäävad ja muutuvad suurused. Sõltuvuse näiteid meid ümbritsevast elust. Funktsionaalne sõltuvus; selle esitusviisid: valem, tabel ja graafik. Funktsiooni mõiste. Argument. Joone võrrand.

2. Lineaarne funktsioon (25 tundi).

Lineaarne funktsioon; selle põhiomadus. Lineaarse funktsiooni graafik. Sirge võrrand tõusu ja algordinaadi kaudu.

Lineaarse funktsiooni pöördfunktsioon.

Lineaarse funktsiooni nullkoht. Lineaarse funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

Lineaarne võrratus, selle põhiomadused. Lineaarvõrratuste süsteem.

Aritmeetiline progressioon; selle üldliige ja liikmete summa.

Lineaarne interpolatsioon.

3. Ruutfunktsioon (15 tundi).

Ruutfunktsioon $y=x^2$ ja selle pöördfunktsioon.

Funktsioonide $y=ax^2+c$ ja $y=ax^2+bx+c$ uurimine: parabooli nihkumine koordinaattelgede suhtes ja tema kuju muutumine; parabooli haripunkti koordinaatide määramine, ruutfunktsiooni ekstremaalse väärtuse leidmine, nullkohtade ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade kindlakstegemine.

Ruutvõrratus; selle lahendamine.

4. Astmefunktsioon. Tehted astmetega (10 tundi).

Funktsioonid $y=ax^n$, kus $n=1$, 2, 3 ja 4; nende graafikud.

Naturaalarvulise astendajaga astmed. Korrutise, jagatise ja astme aste. Ühe ja sama arvu astmete korrutamine ja jagamine.

5. Juurfunktsioon. Tehted juurtega (15 tundi).

Juurfunktsioon kui astmefunktsiooni pöördfunktsioon. Funktsioonide $y=x^2$ ja $y=x^3$ pöördfunktsioonid ja nende graafikud.

Võrdsete juurijatega juurte korrutamine ja jagamine. Korrutise ja murru

---

[1] Programmist on teadlikult välja jäetud ruutjuure leidmise algoritm, kuna on otstarbekam osutada suuremat tähelepanu tabelitele, mis võimaldaks ühtlasi tunduvat aja kokkuhoidu.

juurimine. Juure astendamine. Astme juurimine. Juure taandamine ja laiendamine. Juure juurimine. Teguri toomine juurimismärgi ette ja viimine juurimismärgi alla. Murru lugeja või nimetaja vabastamine irratsionaalsusest.

Juurvõrrandite lahendamise näiteid.

6. Geomeetria ja trigonomeetria (65 tundi).

7. Kordamine (5 tundi).

X klass

(4 tundi nädalas)

1. Eksponent- ja logaritmfunktsioon (15 tundi).

Astendaja 0. Negatiivne astendaja. Murrulise astendajaga astme mõiste.

Eksponentfunktsioon, selle graafik ja omadused.

Logaritmfunktsioon kui eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon, selle graafik ja omadused.

Eksponentfunktsiooni graafiku kasutamine arvutusvahendina.

2. Kümnendlogaritmid (25 tundi).

Arvu kümnendlogaritm. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm. Üksliikme logaritmimine.

Kümnendlogaritmide omadused. Karakteristik ja mantiss. Neljakohalised logaritmide tabelid; nende kasutamine.

Logaritmiline arvutuslükati. Arvu, ruudu ja ruutjuure, kuubi ja kuupjuure, korrutise ja jagatise leidmine lükati abil.

3. Geomeetriline progressioon (15 tundi).

Geomeetriline progressioon; selle üldliige ja liikmete summa. Liitprotsendid. Orgaanilise kasvamise seadus.

4. Funktsionaalne sõltuvus (10 tundi).

Käsitletud funktsioonide kordamine. Funktsiooni üldtähis. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond.

5. Geomeetria ja trigonomeetria (75 tundi).

XI klass

(4 tundi nädalas)

1. Funktsiooni piirväärtus (15 tundi).

Tõkestamatult kasvavad ja tõkestamatult kahanevad suurused. Lõplikule väärtusele lähenevad suurused. Funktsiooni piirväärtus.

Ringjoone pikkus ja ringi pindala. Tõkestamatult kahanev geomeetriline progressioon; selle summa.

2. Funktsiooni tuletis (15 tundi).

Funktsiooni kasvamise või kahanemise keskmine kiirus ja hetkeline kiirus. Funktsiooni tuletis; selle geomeetriline tõlgendus. Tuletis nähtuskäigu kiirusena.

Konstandi tuletis. Argumendi tuletis.

Summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletis. x^n tuletis naturaalarvulise n korral.

Suhte $\frac{\sin x}{x}$ piirväärtus, kui $x \to 0$. Funktsioonide $\sin x$ ja $\cos x$ tuletised.

3. Funktsiooni tuletise rakendusi (15 tundi).

Funktsiooni muutumise uurimine tuletise abil.

Funktsiooni suurima ja vähima väärtuse leidmine. Newtoni võte võrrandi ligikaudsel lahendamisel.

Funktsiooni diferentsiaal; selle rakendamine vea arvutamiseks.

4. Hulktahukad ja nende pindala (10 tundi).

Geomeetrilised kehad ja nende liigitelu. Regulaarsed hulktahukad.

Prisma. Prismade liigitelu. Prisma külg- ja täispindala.

Püramiid. Püramiidi lõikamine paralleelsete tasapindadega. Tüvipüramiid. Püramiidi ja tüvipüramiidi külg- ja täispindala.

5. Pöördkehad ja nende pindala (10 tundi).

Silindriline pind. Pöördsilinder; selle külg- ja täispindala. Kooniline pind. Pöördkoonus, selle külg- ja täispindala. Tüvikoonus; selle külg- ja täispindala.

6. Integraali mõiste (10 tundi).

Kinnise kõveraga piiratud tasapinnatüki pindala leidmise probleem. Piirväärtuse mõiste kasutamine pindala arvutamisel. Pindala tuletis. Algfunktsioon. Määramata integraal. Määratud integraal. Newton-Leibnizi valem.

7. Ruumala arvutamine (20 tundi).

Risttahuka ruumala. Püstprisma ruumala.

Püramiidi ruumala. Tüvipüramiidi ruumala. Kaldprisma ruumala.

Silindri ruumala. Pöördkeha ruumala. Koonuse ruumala.

Tüvikoonuse ruumala.

8. Kera (10 tundi).

Sfäär, tema osad: vöö, segment ja sektor.

Kera, tema osad: kiht, segment ja sektor.

Kera ja tema osade ruumala.

Sfääri ja tema osade pindala.

Keskkooli matemaatika kursuse kordamine (35 tundi).

*

Käesolev raamat ei pretendeeri süstemaatilise matemaatika metoodika õpiku nimetusele. Eesmärgiks on seatud valgustada võimalusi funktsiooni, tuletise ja integraali mõiste käsitlemiseks keskkoolis. Et sellel probleemil on küllaltki pikk ajalugu, siis on juba sissejuhatuses esile tõstetud nimesid, nagu Klein, Borel, Perry, Šeremetjevski, Beke jt., kes käesoleva sajandi algul olid kõrgema matemaatika elementide keskkoolis käsitlemise eest võitlejate esirinnas ning kellel olid välja kujunenud oma arvamused vastavate teemade käsitlemise osas.

Tuleb juhtida tähelepanu ka teistele matemaatika õpetamise reformimistaotlustele, mis kerkisid samuti käesoleva sajandi algul teravalt päevakorrale. Nimetagem neist

1) nõuet geomeetria propedeutiliseks käsitlemiseks seal, kus süstemaatiline kursus pole õpilastele jõukohane;

2) matemaatiliste teadmiste tõstmise vajadust laiemates rahvahulkades;

3) üksikute matemaatiliste distsipliinide käsitlemist enam fusioneeritult;

4) enam aktiivsete õpetamise meetodite kasutamist;

5) matemaatika praktilise rakendatavuse suuremat rõhutamist;

6) matemaatika ajaloo episoodide tutvustamist matemaatika tundides;

7) kümnendmurdude osatähtsuse suurendamise vajadust võrreldes harilike murdudega;

8) õpetatavate teemade vajalikkuse rõhutamist ja
9) ruumikujutluse arendamise vajadust.

Need on küsimused, mis on aktuaalsed tänapäevalgi. Sirvides meie pedagoogilisi ajalehti ja ajakirju, võime sealt sageli leida nimetatud ühe või teise taotluse täieliku realiseerimise nõuet nõukogude koolis. See fakt näitab, et matemaatika õpetamise reformimise eest võitlejad olid käesoleva sajandi algul paljudes küsimustes eesrindlase positsioonil. Kui ühe või teise idee juurutamine toimus tol ajal väga visalt, siis seda kindlamini peaksid nad juurduma tänapäeva kooli ja elu sidemete tugevdamise seaduse juurutamise ning kommunistliku ühiskonna ülesehitamise ajastul.

Erinevalt senisest praktikast on siin rõhutatud funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise käsitlemise vajadust. On peetud vajalikuks omaette funktsionaalse sõltuvuse propedeutilise kursuse sissetoomist. Seda aga mitte iseseisva distsipliinina, vaid seostatult aritmeetika, algebra ja geomeetria ainega. Funktsionaalse sõltuvuse süstemaatilises kursuses nähakse ette funktsioonide lähem uurimine ja kõigi teiste vajalike teemade, nagu progressioonid, võrratused jt. paigutamine vastava funktsiooni käsitlemise tsüklisse. Tuletise ja integraali mõiste lülitamine keskkooli kursusesse teenib esmalt funktsioonide uurimise laiendamise kui ka üksikute matemaatiliste distsipliinide lähendamise eesmärki. Vajalikuks tuleb lugeda aga kindlasti tuletise ja integraali mõiste rakendamist füüsika õpetamisel.

Raamatus toodud aine käsitlus ei ole ühtlane, s. t. on küsimusi, millede juures on pikemalt peatutud, on küsimusi, milliste käsitlemiseks on vaadeldud mitmeid võimalusi, kuid on ka küsimusi, milliseid on ainult põgusalt puudutatud. Et raamat on mõeldud õpetajale käsiraamatuks aga mitte õpikuks, siis on see printsiip ka arusaadav. Vajab ju nii mõnigi küsimus enne tundi minekut väga põhjalikku läbimõtlemist, teine aga ainult fikseerimist.

Kooli ja elu sidemete tugevdamise seaduse ellurakendamisel Eesti NSV koolides on siin toodud põhimõtteid küllaltki suurel määral arvestatud, sest uute programmide koostamisel on siin esitatud programm olnud aluseks.

Kuigi suurem osa esitatud metoodilistest arutlustest on leidnud kinnituse praktikas kas juba sajandi algul toimunud matemaatika õpetamise reformimisliikumise käigus või praegu elluviidava koolireformi ettevalmistamise käigus toimunud koolikatseis [1], ikkagi on vajalik, et nii suuremat ümberkorraldust kui ka programmi ülesehitamist uutel alustel kinnitaks ulatuslik praktika. Seetõttu ootab ka siin raamatus toodud seisukohti ulatuslikum kontroll praktikas.

[1] Lähemalt vt. «Nõukogude Kool» 1961, nr. 6, lk. 410—420.

SISUKORD

Олаф Принитс
ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ
На эстонском языке
Обложка Э. Пикк
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10
*
Toimetaja K. Kallaste
Kunstiline toimetaja H. Keigo
Tehniline toimetaja E. Lumet
Korrektorid: V. Põlde ja O. Kajando
Ladumisele antud 8. XII 1962. Trükkimisele antud 13. VI 1963. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 13. Arvestuspoognaid 11. Trükiarv 2500. Tellimise nr. 9904. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I.
Hind 48 kop.
6—5

48 kop.