B. HENRICHSON · A. TELGMAA

Matemaatika

ÕHTUKOOLIDELE

VIII KLASS

ARH

2/69028

A
28302

B. HENRICHSON • A. TELGMAA

MATEMAATIKA

ÕHTUKOOLIDE VIII KLASSILE

2. VÄLJAANNE

KIRJASTUS „VALGUS"
TALLINN 1967

Kaanekujundus *E. Tali*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
69028

ARHIIVKOGU

I PEATÜKK

KOORDINAATIDE MÕISTE. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

§ 1. KORDAMISEKS.

1. Ratsionaalarvud. Iga arvu, mida saab esitada kahe täisarvu suhtena, nimetatakse **ratsionaalarvuks.**

Näiteid. $0{,}75=\frac{3}{4}$; $-3{,}2=\frac{-32}{10}=\frac{-16}{5}$;

$-4=\frac{-4}{1}=\frac{-16}{4}$ ...; $0{,}33\ldots=\frac{1}{3}$; $0=\frac{0}{4}=\frac{0}{-6}=\ldots$

Ratsionaalarvude hulka kuuluvad kõik positiivsed ja negatiivsed murd- ja täisarvud, ka arv null.

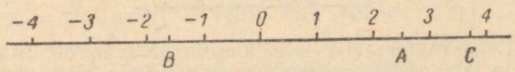
Kaks ratsionaalarvu, mis erinevad ainult märgi poolest, on teineteise vastandarvud. Nulli vastandarv on ta ise. Näiteks 2 ja -2; 4,5 ja $-4{,}5$; $-\frac{2}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ jne.

Positiivse arvu absoluutväärtus on see arv ise; negatiivse arvu absoluutväärtus on selle arvu vastandarv. Nulli absoluutväärtus on null. Arvu a absoluutväärtuse sümboliks on $|a|$.

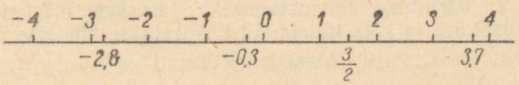
Näiteid. $|4{,}75|=4{,}75$; $|3\frac{3}{5}|=3\frac{3}{5}$; $|-1{,}7|=1{,}7$;

$|-48{,}5|=48{,}5$

Ratsionaalarve saab geomeetriliselt kujutada arvtelje punktidena (joon. 1 ja joon. 2). Igale ratsionaalarvule vastab



Joon. 1



Joon. 2

üks arvtelje punkt, mille kaugus nullpunktist on võrdne vastava ratsionaalarvu absoluutväärtusega. Negatiivsed arvud märgitakse nullpunktist ühele poole, positiivsed teisele poole.

Kahest positiivsest ratsionaalarvust on suurem see, millele vastav punkt on arvtelje nullpunktist kaugemal; kahest negatiivsest ratsionaalarvust on suurem see, millele vastav punkt on nullpunktile lähemal. Iga negatiivne arv on vähem kui null; null aga on vähem igast positiivsest arvust. Seega on iga negatiivne arv vähem ka igast positiivsest arvust.

Näiteid. $-3<-2$; $3{,}7>\frac{2}{3}$ $-0{,}3<0$; $2>0$; $-2<4$.

2. Tehted ratsionaalarvudega. Liitmine. Kahe samamärgilise arvu liitmisel liidetakse nende absoluutväärtused ja saadud summa ette pannakse liidetavate märk. Kahe isemärgilise arvu liitmisel lahutatakse liidetavate suuremast absoluutväärtusest vähem absoluutväärtus ja saadud vahe ette pannakse see märk, mis on suurema absoluutväärtusega liidetaval.

Lühidalt, kui a ja b tähistavad liidetavate absoluutväärtusi, siis:

$$\begin{array}{l}(+a)+(+b)=+(a+b)\\(-a)+(-b)=-(a+b)\\(-a)+(+b)=-(a-b),\ \text{kui}\ a>b\\(-a)+(+b)=+(b-a),\ \text{kui}\ a<b\end{array}$$

Näiteid. $(+3)+(+7)=+10$; $(-5)+(-3{,}7)=-8{,}7$; $(+6\frac{4}{5})+(-3\frac{4}{5})=+3$; $(+2{,}6)+(-5{,}6)=-3$

Lahutamine. Mingi ratsionaalarvu lahutamine tähendab selle arvu vastandarvu liitmist.

Näiteid. $(+3)-(+7)=(+3)+(-7)=-4$; $(-5)-(-6)=$ $=(-5)+(+6)=+1$; $(+10)-(-4)=(+10)+(+4)=+14$

Üldiselt: kui a ja b tähistavad mistahes ratsionaalarve, siis

$$a-b=a+(-b)$$

Märkus 1. Et ratsionaalarvude lahutamine taandub liitmisele, siis nimetatakse liitmist ja lahutamist ratsionaalarvude hulgas ühise nimetusega algebraliseks liitmiseks ja selle tehte tulemust algebraliseks summaks.

Märkus 2. Kirjutuse lihtsustamiseks jäetakse liitmismärk algebralise summa arvutamisel ära ja kõik liidetavad kirjutatakse üksteise järele koos nende märkidega.

Näide. $(-5)+(-7)-(-6)+(+8)=-5-7+6+8=+2$.

Korrutamine ja jagamine. Kahe ratsionaalarvu korrutamisel (jagamisel) korrutatakse (jagatakse) nende absoluutväärtused ja tulemuse ette pannakse + (pluss), kui mõlemad arvud on samamärgilised; − (miinus), kui mõlemad arvud on isemärgilised.

Lühidalt: kui a ja b tähistavad arvude absoluutväärtusi, siis

$$\begin{aligned}(+a)\cdot(+b)&=+ab\\(-a)\cdot(-b)&=+ab\\(-a)\cdot(+b)&=-ab\\(+a)\cdot(-b)&=-ab\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(+a):(+b)&=+(a:b)\\(-a):(-b)&=+(a:b)\\(-a):(+b)&=-(a:b)\\(+a):(-b)&=-(a:b)\end{aligned}$$

Kui korrutises vähemalt üks tegur on null, siis on korrutis null.

Kui jagatav on null ja jagaja on nullist erinev mistahes arv, siis on ka jagatis null.

Nulliga ei saa jagada.

Näiteid. $(+7)\cdot(+6)=+42$; $(-\frac{3}{2})\cdot(-9)=+6$; $(-0{,}8)\cdot(+5)=-4$; $(+3)\cdot(-15)=-45$; $0\cdot(-8)=0$; $0\cdot 0=0$; $(-3)\cdot(+2)\cdot(-5)=+30$; $(+12):(+6)=+2$; $(-8):(-2)=+4$; $(-36):(+\frac{2}{3})=-54$; $(+49):(-7)=-7$; $0:(-6)=0$; $3:0$ — ei oma mõtet, sest ühegi arvu korrutamisel nulliga ei saa kolme.

1. Teostada tehted:

1) $(-7)+(-5)-(-3)-(+7)$
2) $(+8{,}2)-(-3{,}2)+(+1{,}8)-(-7{,}5)+(-7{,}1)$
3) $-12+6-7-9-27+6-5+9$
4) $-6{,}5\cdot(3{,}2-5\frac{3}{5})+\left[1\frac{1}{2}:(1{,}8-4{,}4)\right]\cdot(-3)$
5) $-3\frac{3}{4}-\left\{\left[-\frac{4}{5}-(-1{,}2)\right]:(-2)\right\}\cdot(-4)$

Aste. Võrdseist tegureist koosneva korrutise üleskirjutamiseks kasutatakse astet:

$a\cdot a=a^2$ (arvu a ruut ehk teine aste)
$a\cdot a\cdot a=a^3$ (arvu a kuup ehk kolmas aste)
$a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4$ (arvu a neljas aste)
$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ tegurit}}=a^n$ (arvu a n-es aste)

Aste a^n tähendab n tegurist koosnevat korrutist, milles iga tegur on a.

Tehete puhul astmetega võib kasutada järgmisi valemeid:

$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$(a:b)^n = a^n : b^n$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Sõnastada need valemid!

Näiteid. $(2ab)^5 = 32a^5b^5$; $\left(\frac{3a}{b}\right)^2 = \frac{9a^2}{b^2}$; $a^5 \cdot a^7 = a^{12}$; $a^5 : a^3 = a^2$; $(m^5)^2 = m^{10}$; $(-5a^2b^3c)^3 = -125a^6b^9c^3$

2. Lihtsustada:

1) $x \cdot x^2$
$u \cdot u^2 \cdot u^3$
$2x^3 \cdot 5x$
$12h^3 \cdot \frac{3}{4} h^5$

2) $\frac{1}{3} ab^2(-3a^2bc)$
$-27a^2b \cdot \frac{1}{9} ab$
$0{,}8mn^2(-0{,}5m)(2m^2np)^3$
$(-3ab)^3a^2b(-2abc)^2$

3. Arvutada avaldise $2a-(3b^2+2)$ väärtus, kui $a=-5$ ja $b=2$.

4. Arvutada avaldise

$$3u^2 - \frac{5uv}{v^4}$$

väärtus, kui $u=-3$ ja $v=-2$.

3. Üksliige ja hulkliige. Üksliige on korrutis, mille teguriteks on numbrite ja tähtedega väljendatud arvud ja nende astmed. Üksliikme arvuline tegur kirjutatakse esikohale ja teda nimetatakse üksliikme kordajaks.

Näiteid. $2a^2bc$; $-13xyz^3$; $-a^2bx$; abc. Nende üksliikmete kordajad on vastavalt 2; -13; -1 ja 1.

Üksliikmete algebralist summat nimetatakse hulkliikmeks:

$$5a^2b+6abx-7a-b.$$

Hulkliikme sarnaseid liikmeid, s. o. selliseid liikmeid, mis erinevad ainult kordaja poolest või ei erine üldse, saab koondada.

Näide. $\underline{6a^2b^3} - \underline{\underline{7abc^2}} + \underline{2a^2b^3} + cd + \underline{\underline{abc^2}} - 5cd =$
$= 8a^2b^3 - 6abc^2 - 4cd$

Hulkliikme korrutamisel hulkliikmega tuleb ühe hulkliikme iga liige korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised liita:

$(2x^3+x^2+5)(x+2)=2x^4+4x^3+x^3+2x^2+5x+10=$
$=2x^4+5x^3+2x^2+5x+10.$

Hulkliikmete korrutamist kergendavad korrutamise abivalemid:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

Sõnastada need valemid!

Näiteid. 1) $(5x+2y^2)(5x-2y^2)=25x^2-4y^4$

2) $(3ab^2-2ab)^2=9a^2b^4-2\cdot 3ab^2\cdot 2ab+4a^2b^2=$
$=9a^2b^4-12a^2b^3+4a^2b^2$

3) $(2x-3y)^3=8x^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2+27y^3=$
$=8x^3-36x^2y+54xy^2+27y^3.$

Antud hulkliikme esitamist korrutise kujul nimetatakse hulkliikme **teguriteks lahutamiseks.**

Näiteid.

1) *Sulgude ette toomine:*
$3xy^2-9xy+12x^3y^4=3xy(y-3+4x^2y^3)$

2) *Abivalemite kasutamine:*
$4x^2-9y^2z^4=(2x+3yz^2)(2x-3yz^2)$
$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

3) *Rühmitamine:*
$n^2+nz-5n-5z=(n^2+nz)-(5n+5z)=$
$=n(n+z)-5(n+z)=(n+z)(n-5)$

5. Teostada tehted:
1) $(4m+n+1)(4m-n+1)$; 2) $(8n^2-7n+3)(5n^2+4n+8)$;
3) $(a^3+a^2+a+1)(a^2+a+1)$; 4) $(a^2+b)^2\cdot(a-b+1)$;
5) $(2x+y)(2x-y)\cdot(x-y)^2$

6. Lahutada teguriteks:
1) $3a^2b-9ab^2+6ab$; 2) $9a^5x^2-6a^3x^3+21a^2x^5$;
3) $42a^2y-35a^2y^2+7ay^2$

7. Lahutada teguriteks:

1) $49-14y+y^2$
2) $1+2z+z^2$
3) $2x^2-2y^2$
4) $18a^3m^2-50a$
5) $8u^3+12u^2v+6uv^2+v^3$
6) $125x^3-150x^2y+60xy^2-8y^3$

8. Lahutada teguriteks:

1) $a(x-y)+c(x-y)$
2) $m(x-c)+bc-bx$
3) $ac+bc+a+b$
4) $10ay-5by+2ax-bx$
5) $6by-15bx-4ay+10ax$
6) $3x^2-3xy+3y^2-3xy$

4. Algebraline murd. Murdu, mille nimetajas esineb tähti, nimetatakse **algebraliseks murruks.**

Milline on murru põhiomadus?

Näiteid tehete kohta algebraliste murdudega:

1) $\frac{2}{a}+\frac{4a-b}{a^2+ab}=\frac{2}{a}+\frac{4a-b}{a(a+b)}=\frac{2(a+b)+a(4a-b)}{a(a+b)}=$
$=\frac{2a+2b+4a^2-ab}{a(a+b)}$

2) $\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}=\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-1}-$
$-\frac{3a^2+a-2}{(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+a+2a^2+2a-3a^2-a+2}{(a-1)(a+1)}=$
$=\frac{2a+2}{(a-1)(a+1)}=\frac{2(a+1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{2}{a-1}$

3) $\frac{3a+3}{a^2+6a+9}\cdot\frac{6a+18}{a^2-1}=\frac{3(a+1)\cdot 6(a+3)}{(a+3)^2(a-1)(a+1)}=\frac{18}{(a+3)(a-1)}$

4) $\frac{(m+n)^2}{4m-4n}:\frac{6m+6n}{m-n}=\frac{(m+n)^2}{4(m-n)}\cdot\frac{m-n}{6(m+n)}=\frac{m+n}{24}$

Ka üks- ja hulkliikmeid võib pidada murdudeks, mille nimetajaks on 1:

$$\frac{4a^2+4a+1}{a-1}:(4a^2-1)=\frac{4a^2+4a+1}{a-1}:\frac{4a^2-1}{1}=$$
$$=\frac{(2a+1)^2}{a-1}\cdot\frac{1}{(2a+1)(2a-1)}=\frac{2a+1}{(a-1)(2a-1)}$$

9. Lihtsustada avaldised ja arvutada nende väärtused:

1) $a-b-\frac{a^2-b^2+ab}{b}$, kui $a=-3$; $b=\frac{3}{4}$

2) $\left(\frac{a+2}{a-2}+\frac{a-2}{a+2}\right)\cdot(a^2-4)$, kui $a=0{,}5$

3) $\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-a-b\right]:\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+1\right]$, kui $a=\frac{5}{6}$; $b=-\frac{1}{6}$

5. Võrrand. Tähti sisaldavat võrdust, mis kehtib temas esinevate tähtede teatud kindlail väärtustel, nimetatakse **võrrandiks.** Tähtede sobivate väärtuste (võrrandit rahuldavate väärtuste) arvutamine on võrrandi lahendamine, kusjuures kasutatakse võrrandi põhiomadusi:

1) võrrandi mõlemaid pooli võib korrutada ja jagada ühe ning sama nullist erineva arvuga;

2) võrrandi kumbagi poolt võib suurendada (või vähendada) ühe ning sama arvu võrra.

Viimasest omadusest järeldub ka, et võrrandi liikmeid võib vastupidise märgiga viia võrrandi ühelt poolt teisele poole.

N ä i d e. Lahendada võrrand:

$$\frac{5x-11}{4}-\frac{x-1}{10}=\frac{11x-1}{12}$$

L a h e n d u s. Korrutame võrrandi mõlemad pooled võrrandis olevate murdude ühise nimetajaga (60):

$$\frac{\overset{15}{5x-11}}{4}-\frac{\overset{6}{x-1}}{10}=\frac{\overset{5}{11x-1}}{12}\ |\cdot 60;$$

$$15(5x-11)-6(x-1)=5(11x-1).$$

Avame sulud:

$$75x-165-6x+6=55x-5.$$

Viime tundmatud liikmed vasakule poole ja tuntud liikmed paremale poole ning koondame:

$$75x-6x-55x=165-6-5;$$
$$14x=154\ |:14;$$
$$x=11.$$

Kontrolli teostamine jääb raamatu kasutaja ülesandeks.

Olgu juhitud tähelepanu sellele, et kontrolli teostamiseks tuleb x leitud väärtus asetada l ä h t e v õ r r a n d i s s e (antud võrrandisse) x asemele ja siis teostada vajalikud arvutused. Kui võrrand on õigesti lahendatud, siis osutuvad võrrandi mõlemad pooled pärast arvutuste teostamist võrdseiks arvudeks.

V a s t u s. $x=11$.

10. Lahendada järgmised võrrandid:

1) $5x-7+2x=6x+1-3x$; 2) $5(7-3y)=3(12y+7)-3$;

3) $6x-\frac{3}{4}(2x+7)=\frac{2}{5}(3x-5)+5$; 4) $5+\frac{3-x}{4}=4-\frac{x-5}{3}$;

5) $\frac{x-5}{x-2}=\frac{x}{x+8}$; 6) $\frac{4}{3(x-2)}=\frac{3}{4(x-2)}-\frac{1}{36}+\frac{2}{x-2}$

11. Lahendada võrrandi abil järgmised ülesanded:

1) Veduri ratta ümbermõõt on 4 m ja vaguni ratta ümbermõõt on 3 m. Kui pikal teel teeb vaguni ratas 100 pööret rohkem kui veduri ratas? (*1200 m*)

2) Osteti 38 kg kaht sorti kaupa, mille eest maksti kokku 17 rbl. 1 kg I sordi kaupa maksis 52 kop. ja 1 kg II sorti maksis 40 kop. Mitu kilogrammi kumbagi sorti kaupa osteti? (*15 kg, 23 kg*)

3) Murru lugeja on nimetajast 5 võrra vähem. Kui murru lugeja ja nimetajaga liita 2, siis on selle murru väärtus $\frac{1}{2}$. Mis murd see on? $\left(\frac{3}{8}\right)$

6. Ligikaudsed arvud. Enamik tegelikust elust pärinevaid arvulisi andmeid on l i g i k a u d s e d.

L i g i k a u d s e t ä i s a r v u t ü v e n u m b r i d on kõik numbrid selle arvu kirjutises, välja arvatud lõpunullid, mis asendavad mitte teada olevaid numbreid.

L i g i k a u d s e k ü m n e n d m u r r u t ü v e n u m b r i d on kõik numbrid selle arvu kirjutises, välja arvatud avanullid.

Tehted ligikaudsete arvudega toimuvad järgmiselt:

I ligikaudsete arvude s u m m a ja v a h e ümardatakse nii, et tulemuse viimane tüvenumber oleks samas järgus, kus ta on kõige vähema täpsusega komponendis;

II ligikaudsete arvude k o r r u t i s ja j a g a t i s ümardatakse nii, et tulemuses oleks niisama palju tüvenumbreid kui kõige vähema tüvenumbrite arvuga komponendis;

III ligikaudsete andmetega m i t m e t e h t e g a ülesannetes tuleb vahepealsete tehete tulemused ümardada nii, et neis jääks üks number rohkem (varunumber) kui nõuavad reeglid I ja II. Lõpptulemusest kustutatakse varunumber ümardamise teel.

N ä i d e. Arvutada ligikaudsete andmetega avaldise $x=12{,}8\cdot(5{,}7+3{,}9:1{,}27)-43{,}3$ väärtus.

Lahendus.[1] 1) $3{,}9 : 1{,}27 = 3{,}07$

2) $5{,}7 + 3{,}07 = 8{,}77$

3) $8{,}77 \cdot 12{,}8 = 112$

4) $112 - 43{,}3 = 68{,}7 \approx 70$

Vastus. $x \approx 70$.

12. Teostada tehted ligikaudsete arvudega:

1) $2{,}37 + 0{,}45 + 1{,}7$
2) $13{,}2 + 17{,}28$
3) $2{,}756 + 0{,}87 + 0{,}2$
4) $3{,}87 - 0{,}502$
5) $18{,}20 - 10{,}3 + 1{,}975$
6) $19{,}2 \cdot 0{,}37$
7) $6{,}75 \cdot (12{,}7 + 1{,}98)$
8) $13{,}8 : (3{,}2 \cdot 1{,}2 - 0{,}22)$
9) $12 \cdot (18{,}7 - 8{,}32 : 2{,}4)$
10) $2{,}7 \cdot 5{,}62 + 4{,}7568 : 2{,}43$

13. Arvutada lükati abil:

1) $2{,}75 \cdot 4{,}82$; $3{,}47 \cdot 1{,}55$; $12{,}8 \cdot 6{,}75$; $19{,}8 \cdot 13{,}2$; $0{,}75 \cdot 18{,}9$

2) $0{,}27 \cdot 1{,}38$; $13{,}7 \cdot 0{,}05$; $0{,}87 \cdot 0{,}95$; $19{,}3 : 8{,}7$; $12{,}3 : 1{,}29$

3) $123 : 87$; $275 : 0{,}87$; $12{,}8 : 0{,}375$; $0{,}75 : 3{,}2$; $15{,}8 : 20{,}2$

§ 2. KOORDINAATTELJESTIK

1. Punkti asukoha määramine sirgel. Arvteljel (§ 1 p. 1) saab punkti asukohta määrata ü h e arvuga, mida nimetatakse punkti **koordinaadiks.** Nii näiteks on joonisel 1 punkti A koordinaadiks arv 2,5, s. t. et arvuga 2,5 on punkti A asukoht arvteljel täpselt määratud: ta on nullpunktist positiivses suunas 2,5 ühiku kaugusel. Punkti B koordinaadiks on — 1,6, s. t. et punkt B on nullpunktist negatiivses suunas 1,6 ühiku kaugusel.

Mis on punkti C koordinaadiks?

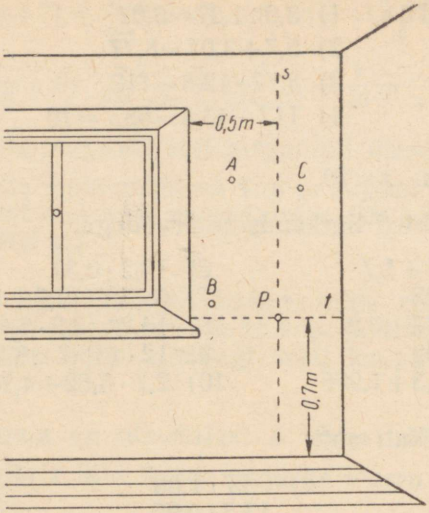
2. Punkti määramine tasapinnal. Vaatame, kuidas saab määrata punkti asukohta tasapinnal, kus punkti liikumisvabadus on ilmselt suurem kui sirgel.

Oletame, et korteri seinale akna kõrvale on vaja paigaldada elektrikontakt (joon. 3). Kui kontakti asukoha suhtes ei ole midagi täpsemalt öeldud, siis võib teda paigutada väga erinevaisse kohtadesse, näiteks punkti A; B; C jne. Oletame aga, et elektrik peab kontakti paigaldama akna servast 0,5 m kaugusele. Ka sellisel juhtumil ei ole kontakti asukoht määratud, kuigi selle paigutamiseks ei ole enam nii suurt vabadust kui enne, nimelt ta peab asetsema sirgel s.

Ühe arvuga ei saa punkti asukohta tasapinnal määrata.

Oletame, et elektrikule on veel esitatud nõue, et kontakt peab

[1] Varunumber on alla kriipsutatud.



Joon. 3.

olema põrandast 0,7 m kaugusel, s. t. sirgel *t*. Et kontakt peab nüüd asetsema korraga kahel sirgel *s* ja *t*, siis on ainus võimalus, et ta tuleb paigaldada nende sirgete lõikepunkti *P*.

Punkti asukoha määramiseks tasapinnal on vaja kaks arvu (kaks koordinaati).

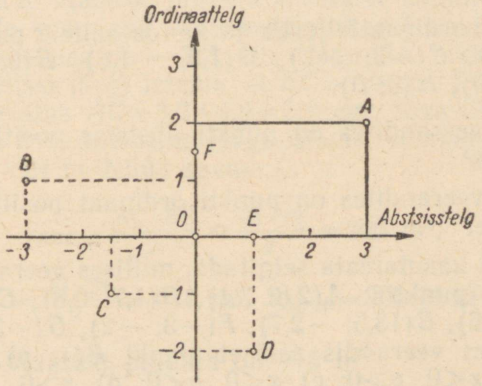
Punkti asukoha määramiseks tasapinnal kasutatakse koordinaatteljestikku. **Koordinaatteljestiku** moodustavad kaks teineteisega ristuvat arvtelge, millel on ühine nullpunkt *O* (joon. 4). Telgede positiivne suund märgitakse noolekesega. Üht telge, mis tavaliselt joonestatakse horisontaalsena, nimetatakse **abstsissteljeks.** Abstsissteljega ristuvat telge nimetatakse **ordinaatteljeks.** Abstsiss- ja ordinaattelge nimetatakse ühiselt **koordinaattelgedeks.**

Olgu antud koordinaatteljestikus punkt *A*. Punkti *A* koordinaatide leidmiseks ehitatakse sellest punktist mõlemale teljele ristsirged AA_1 ja AA_2. Abstsissteljel oleva lõigu OA_1 pikkus koos vastava märgiga (olenevalt punkti asukohast kas + või −) on punkti *A* üks koordinaat, mida nimetatakse selle punkti **abstsissiks.** Ordinaatteljel oleva lõigu OA_2 pikkus koos vastava märgiga on punkti *A* teine koordinaat, mida nimetatakse selle punkti **ordinaadiks.**

Jooniselt näeme, et punkti abstsiss on punkti kaugus ordinaatteljest; punkti ordinaat on punkti kaugus abstsissteljest.

Joonisel 4 on punkti *A* abstsissiks 3 ja ordinaadiks 2. Lühidalt märgitakse seda nii: *A*(3; 2). Sulgudes olevaist arvudest tähendab

esimene alati punkti abstsissi, teine ordinaati. Jooniselt 4 näeme veel, et punkti B abstsiss on -3 ja ordinaat 1: $B(-3; 1)$. Samal joonisel on veel punktid $C(-1{,}5; -1)$, $D(1; -2)$, $E(1; 0)$, $F(0; 1{,}5)$, $O(0; 0)$.

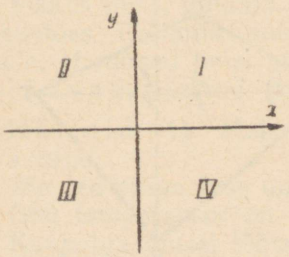


Joon. 4.

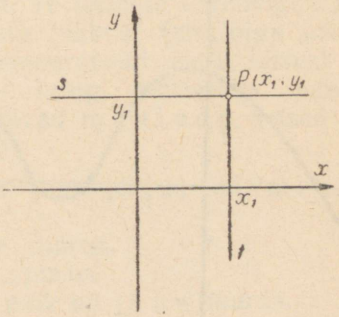
Punkti abstsissi tähistatakse tavaliselt tähega x ja ordinaati tähega y. Seepärast nimetatakse abstsisstelge ka lühidalt x-teljeks ja ordinaattelge y-teljeks.

Koordinaatteljestik jaotab tasapinna neljaks **veerandiks.** Veerandid nummerdatakse nii, nagu on näidatud joonisel 5.

Joonisel 6 on näidatud punkti P määramine tema koordinaatide x_1 ja y_1 järgi. Selleks ehitame y-teljega paralleelse sirge t, mis lõikab x-telge punktis x_1, ja x-teljega paralleelse sirge s, mis



Joon. 5.



Joon. 6.

lõikab y-telge punktis y_1. Nende sirgete lõikepunkt ongi otsitav punkt $P\ (x_1;\ y_1)$.

14. Milliste andmete järgi leiab teatrikülastaja oma istekoha teatrisaalis?

15. Milliste andmetega määratakse malendi asukoht malelaual?

16. Ehitada koordinaatteljestik ja kanda sellele punktid $A(1;\ 2)$, $B(-2;\ 1)$, $C(-3;\ -2)$, $D(1{,}5;\ -1{,}5)$, $E(0;\ 3)$, $F(3;\ 0)$, $G(-2{,}5;\ 0)$, $H(0;\ 0)$.

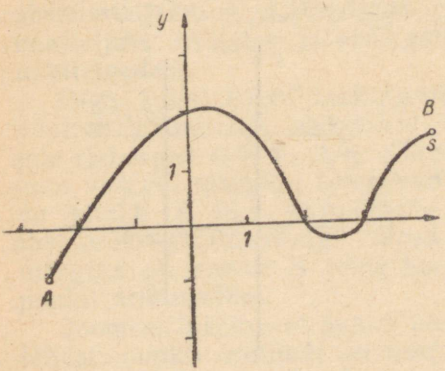
17. Millistes veerandites on punkti abstsiss positiivne, millistes negatiivne?

18. Millistes veerandites on punkti ordinaat positiivne, millistes negatiivne?

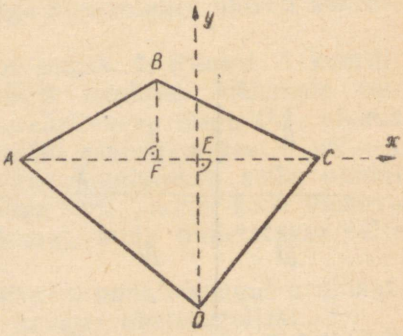
19. a) Joonist kasutamata selgitada, millises veerandis asetsevad järgmised punktid: $A(2{,}8;\ 3{,}1)$, $B(1{,}7;\ 0{,}8)$, $C(-0{,}95;\ 1{,}98)$, $D(2{,}5;\ 60{,}6)$, $E(13{,}5;\ -2{,}7)$, $F(-3;\ -2)$, $G(-3;\ 3)$.
b) Millises veerandis asetseb punkt $P(x;\ y)$, kui a) $x>0$, $y>0$; b) $x<0$, $y>0$; c) $x<0$, $y<0$; d) $x>0$, $y<0$; e) $x=0$, $y=0$?

20. Joonestada teljestik ja selles sirge, mis läbib punkte $A(-3;\ 2)$ ja $B(2;\ -1)$. Millistes punktides lõikab see sirge koordinaattelgi? Märkida sellel sirgel punktid, mille abstsissid on $-2{,}5$; -1; 0; 1,5; 2. Millised on nende punktide ordinaadid?

21. Joonisel 7 on joonestatud koordinaatteljestikus kõverjoon s. Missugustes punktides see kõverjoon lõikab koordinaattelgi? Kuidas muutuvad (kas suurenevad või vähenevad) sellel kõverjoonel oleva punkti koordinaadid, kui punkt liigub mööda kõverjoont punktist A punkti B?



Joon. 7.



Joon. 8.

3. **Ülesanne.** Joonisel 8 on kujutatud nelinurkse maatüki $ABCD$ plaan mõõdus 1 : 1000. Plaanil on võetud diagonaalsirge AC abstsissteljeks ja sellega ristuv sirge DE ordinaatteljeks. Nelinurga tippude koordinaatideks on (sentimeetrites): $A(-3{,}2;\ 0)$, $B(-0{,}8;\ 1{,}2)$, $C(1{,}9;\ 0)$, $D(0;\ -2{,}4)$. Arvutada maatüki pindala.

L a h e n d u s. Maatüki pindala arvutame kolmnurkade ABC ja ACD pindalade summana. Neil kolmnurkadel on ühine alus AC. Et punkti A abstsiss on $-3{,}2$, siis lõigu AE pikkus on 3,2 cm. Punkti C abstsissi järgi leiame, et $EC = 1{,}9$ cm. Plaanil on kolmnurkade ühine alus $AC = 3{,}2 + 1{,}9 = 5{,}1$ cm; maastikul aga 51 m. Punktide B ja D ordinaatide järgi leiame, et maastikul on $BF = 12$ m ja $DE = 24$ m. Nüüd saame

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BF}{2} = \frac{51 \cdot 12}{2} = 306 \text{ m}^2;$$

$$S_{ACD} = \frac{AC \cdot DE}{2} = \frac{51 \cdot 24}{2} = 612 \text{ m}^2;\ S_{ABCD} = 306 + 612 = 918 \text{ m}^2$$

V a s t u s. Maatüki pindala on 918 m^2.

22. Kolmnurga tippude koordinaadid on (3; 0), (−2; 0) ja (0; 4). Arvutada selle kolmnurga pindala. (*10 pindalaühikut*)

23. Trapetsi tippude koordinaadid on (3; −2), (−2; −2); (2; 1) ja (−1; 1). Arvutada trapetsi pindala. (*12 pindalaühikut*)

24. Ruudu diagonaalide lõikepunkt on koordinaatide alguspunktis ja üks tipp on punktis (0; 3). Leida ruudu teiste tippude koordinaadid ja ruudu pindala.

25. Ringi keskpunkti koordinaadid on (−4; −4) ja ringjoon puudutab koordinaattelgi. Arvutada ringjoone pikkus ja ringi pindala.

§ 3. FUNKTSIOON JA ARGUMENT.

1. **Jäävad ja muutuvad suurused.** Te tunnete varemõpitu põhjal mitmesuguseid s u u r u s i, näiteks pikkust (sirglõigu pikkus, tee pikkus jne.), pindala, ruumala, temperatuuri, aega, kiirust jne. Vaadeldes üksikuid suurusi seoses mingi nähtusega, paneme tähele, et mõned neist suurustest võivad m u u t u d a, teised aga on j ä ä v a d, püsivad (konstantsed).

N ä i t e i d. 1) Metsas kasvava puu pikkus on m u u t u v suurus.
2) Jõe vee pinna tase on m u u t u v suurus.
3) Õhu temperatuur on m u u t u v suurus.
4) Kuupalga alusel töötava töölise palk on j ä ä v suurus.
5) Ringjoone pikkuse ja ringi diameetri suhe on j ä ä v suurus (π).

6) Joonisel 9 on kujutatud poolringjoon ja selle kaarel vabalt võetud punkt C, mis on ühendatud diameetri otspunktidega A ja B. Oletame, et punkt C liigub mööda ringjoone kaart noolega näidatud suunas. Vaatleme sellel liikumisel järgmisi suurusi: α, β, γ, $\alpha+\beta+\gamma$, AC, BC, AB, $AC+BC+AB$, küljele AB ehitatud kõrgus, kolmnurga ABC pindala.

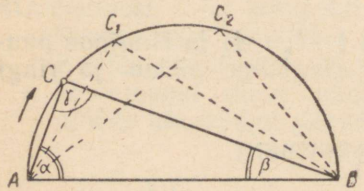
Siin paneme tähele, et α on muutuv suurus, β on muutuv suurus, γ on jääv suurus (kui diameetrile toetuv piirdenurk), $\alpha+\beta+\gamma$ on jääv suurus (miks?).

Lugeja ülesandeks on uurida teisi ülalnimetatud suurusi.

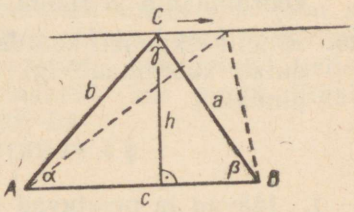
26. Millised järgmistest suurustest on muutuvad, millised jäävad?

1) Inimese keha kaal.
2) Kasvava puu läbimõõt.
3) Ühelt hektarilt saadav iga-aastane teraviljasaak kolhoosis.
4) Antud kaaluvihi kaal.
5) Raua erikaal.
6) Tükitöölise töötasu, kui tööline teeb iga kuu ühepalju tööd.
7) Ringi pindala ja raadiuse ruudu suhe.
8) Antud ajalehe hind.

27. Joonisel 10 on antud kolmnurk ABC, mille tipp C liigub mööda alusega paralleelset sirget paremale. Millised järgnevaist suurustest on seejures muutuvad, millised jäävad? α, β, γ, $\alpha+\beta+\gamma$, a, b, c, $a+b+c$, h, S_{ABC}.



Joon. 9



Joon. 10

2. Vastavuse mõiste. Igapäevases elus kohtume sageli vastavuse mõistega.

Näiteid. 1) Igale inimesele vastab kindel nimi.
2) Õpilaste nimekirjas vastab igale õpilasele klassipäevikus kindel järjekorranumber.
3) Igale töötajale tehases vastab kindel ametikoht.
4) Tehtud tööhulgale vastab kindel töötasu.
5) Igale automargile vastab kindel kandejõud.
6) Igale kaubale vastab kindel hind.

3. Argument ja funktsioon. N ä i d e 1. Õpilasele anti füüsika tunnis teha koduse ülesandena järgmine katse. Panna külma vett anumaga kuumale pliidile ja mõõta vee temperatuuri anumas iga minuti järel. Kuue minuti möödumisel lasta vette väike jäätükk ja mõõta jälle vee temperatuuri iga minuti tagant viie minuti jooksul.

Õpilane tegi kirjeldatud katse ja paigutas selle tulemused järgmisse tabelisse (vaatlusprotokolli):

Aeg (min.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Temperatuur (C°) . . .	5	8	10	12,5	16	17	18	15	13,5	12	13	14,5

Saadud tabelis on kaks a r v u d e h u l k a. Esimeses (ülemises reas) olevad arvud kujutavad ühe m u u t u v a suuruse — aja — väärtusi, täpsemalt öeldes: katse algusest kuni vaatlushetkeni möödunud minutite arvu. Teise hulga arvud kujutavad aga teise m u u t u v a suuruse — temperatuuri — väärtusi, nii et i g a l e v a a t l u s h e t k e l e v a s t a b ü k s k i n d e l t e m p e r a t u u r.

Matemaatikas öeldakse niisuguse vastavuse kohta:

v e e t e m p e r a t u u r **sõltub** v a a t l u s a j a s t

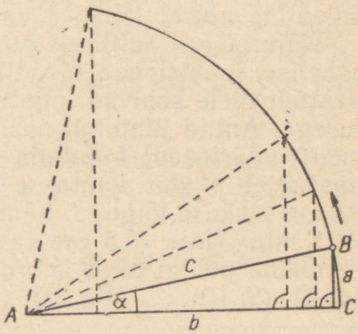
või

v e e t e m p e r a t u u r o n v a a t l u s a j a **funktsioon.**

Seda muutuvat suurust (antud näites vaatlusaega), millest funktsioon oleneb, nimetatakse **argumendiks.**

Argumenti nimetatakse ka **sõltumatuks muutujaks,** sest talle võib anda vabalt väärtusi. Eelmise näite korral tähendab see, et vaatleja võib teostada temperatuuri mõõtmist vastavalt oma soovile mistahes ajahetkel. Funktsiooni väärtused aga sõltuvad argumendi väärtustest ja seepärast nimetatakse funktsiooni ka **sõltuvaks muutujaks.**

N ä i d e 2. Joonisel 11 on antud täisnurkne kolmnurk ABC, mille teravnurk $\alpha = 10°$ ja hüpotenuus $c = 5$ cm. Hakkame nurka suurendama nii, et hüpotenuus jääb muutumatuks. Kolmnurga kaatetid hakkavad siis m u u t u m a. Vaatleme lähemalt α vastaskaateti a muutumist. Mõõdame kaateti a pikkused, kui $\alpha = 10°$, 20°, 30°, ..., 70°, 80°. Mõõtmise tulemusena saame tabeli:



Joon. 11

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
a (cm)	0,9	1,7	2,5	3,2	3,8	4,3	4,7	4,9

Tabelist ilmneb, et ühe muutuva suuruse, nimelt nurga α igale väärtusele vastab teise muutuva suuruse, s. o. α vastaskaateti a pikkuse üks kindel väärtus. Seega nurga α vastaskaateti pikkus sõltub nurga α väärtusest või nurga α vastaskaateti pikkus on nurga α funktsioon. Nurk α on seega argument.

Tavaliselt tähistatakse funktsiooni tähega y ja argumenti tähega x.

Toodud näidete põhjal võime öelda:

üks muutuv suurus y on teise muutuva suuruse x funktsioon, kui x igale väärtusele vastab y üks kindel väärtus.

Näiteid. 1) Ringjoone pikkus on ringi diameetri funktsioon, sest kui ringjoone pikkuse valemis $C=\pi d$ anda diameetrile mingid väärtused (näit. 2 cm, 3 cm, 7,5 cm jne.), siis igale diameetri väärtusele vastab üks kindel ringjoone pikkuse väärtus.

2) Tükitöö alusel töötava töölise töötasu on tehtud tööhulga funktsioon, sest igale tehtud tööhulgale vastab kindel tasu.

Märkus. Kui y on x funktsioon, siis öeldakse ka, et x ja y vahel valitseb funktsionaalne sõltuvus.

4. Funktsiooni graafik. Kahe suuruse vahelist funktsionaalset sõltuvust saab näitlikult esitada funktsiooni graafiku abil.

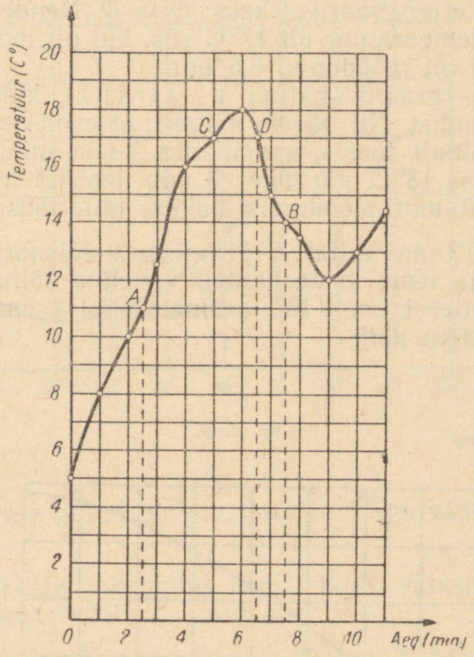
Funktsiooni graafiku ehitamiseks võetakse argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste paarid punktide koordinaatideks: argumendi väärtused võetakse abstsissideks ja funktsiooni väärtused ordinaatideks. Nende koordinaatide alusel leitakse vajalikud punktid koordinaatteljestikus.

Kujutame graafiliselt punktis 3 käsitletud aja ja temperatuuri vahelise funktsionaalse sõltuvuse. Esiteks tuleb valida koordinaattelgedele sobivad kujutusühikud, et joonis tuleks paraja suurusega. Antud juhtumil sobib abstsissteljel (kuhu kantakse argumendi väärtused) kujutada 1 min. 0,5 cm pikkuse lõiguga ja ordinaatteljel (kuhu kantakse funktsiooni väärtused) 1°C samuti 0,5 cm pikkuse lõiguga. Sümbolites tähistatakse seda nii: 0,5 cm $\triangleq$ $\triangleq$ 1 min. (loe: «0,5 cm vastab ühele minutile») ja 0,5 cm $\triangleq$ 1°C.

Öeldu põhjal tuleb koordinaatteljestikku kanda punktid (0; 5), (1; 8), (2; 10), ... (10; 13), (11; 14,5) (joon. 12)[1]. Kui temperatuuri

[1] Tabelist on näha, et argument ja funktsioon omavad ainult positiivseid väärtusi. Seepärast kujutame joonisel ainult esimese veerandi.

mõõtmisi tehakse sagedamini, siis paiknevad ka joonisele kantavad punktid tihedamalt, nii et nad võivad lõpuks moodustada ühe joone. Seepärast ühendamegi saadud punktid ladusa joonega. Seda koordinaatteljestikus olevat joont nimetatakse **funktsiooni** (antud puhul temperatuuri) **graafikuks.**



Joon. 12

Graafiku iga punkti abstsiss näitab, kui palju aega on möödunud katse algusest, ordinaat näitab aga vastavat temperatuuri. Näiteks, graafikul võetud punkti *A* järgi võime öelda, et kui katse algusest oli möödunud ligikaudu 2,5 min., siis oli vee temperatuur 11° C.

Selle graafiku abil võime lahendada kaht tüüpi ülesandeid:

1) leida katse algusest möödunud aja järgi vee temperatuuri;

2) leida vee temperatuuri järgi katse algusest möödunud aega.

Näide 1. Kui kõrge oli vee temperatuur pärast 7,5 minuti möödumist?

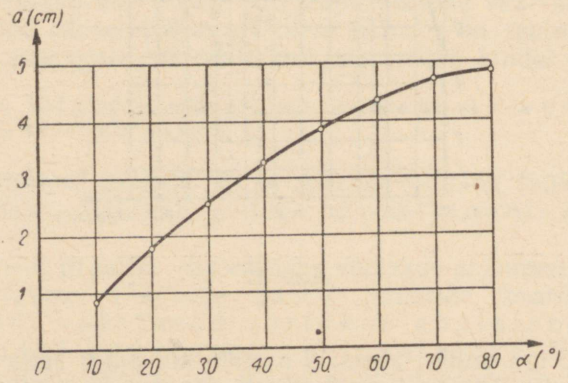
L a h e n d u s. Leiame graafiku punkti B, mille abstsiss on 7,5. Selle punkti ordinaat näitabki vastavat temperatuuri (14° C).

N ä i d e 2. Mitu minutit oli möödunud katse algusest, kui vee temperatuur oli 17° C?

L a h e n d u s. Leiame graafikult punkti, mille ordinaat on 17. Selliseid punkte on graafikul kaks: C ja D. Nende abstsissid näitavad, et vee temperatuur oli 17° C siis, kui oli möödunud 5 min., ja ka siis, kui oli möödunud 6,5 min.

Funktsiooni graafik näitab p i l t l i k u l t, kuidas funktsioon sõltub argumendist. Nii näeme näiteks, et esimese 6 min. jooksul temperatuur ainult tõusis, saavutades 6-nda min. lõpuks maksimaalse väärtuse 18° C. Järgneva 3 min. jooksul temperatuur langes ja pärast 9. min. möödumist hakkas jälle tõusma.

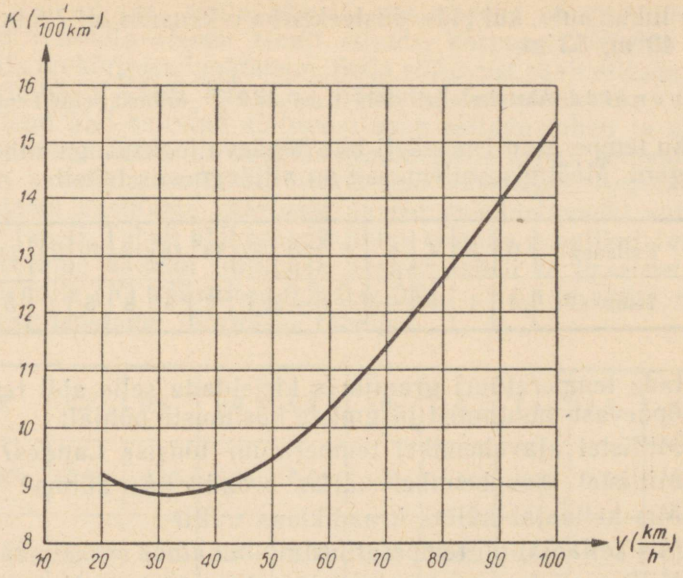
28. Joonisel 13 on esitatud graafiliselt täisnurkse kolmnurga nurga α ja tema vastaskaateti vaheline sõltuvus (vt. p. 3). Abstsissteljel 1 cm $\triangleq$ 10°; ordinaatteljel 1 cm $\triangleq$ 1 cm. Selgitada graafiku abil:



Joon. 13

1) Kui pikk on a, kui $\alpha = 15°, 25°, 35°, 42°, 67°, 78°$?
2) Kui suur on α, kui $a = 1{,}0$ cm, 2,0 cm, 2,5 cm, 3,3 cm, 4,0 cm, 4,5 cm?

29. Joonisel 14 kujutatud graafik näitab sõiduauto «Volga» bensiinikulu K (liitrites) 100 km läbisõidu kohta olenevalt sõidukiirusest $v\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. (Ruumi kokkuhoiu mõttes ei ole koordinaattelgede alguspunkti joonisele kantud.) Leida graafiku abil vastus järgmistele küsimustele:



Joon. 14

1) Millise kiiruse puhul on bensiinikulu kõige vähem ja kui suur nimelt?

2) Millises kiiruste vahemikus bensiinikulu väheneb kiiruse kasvades? Suureneb kiiruse kasvades?

3) Kui palju bensiini vajab auto 100 km läbimiseks, kui tema kiirus on $50\frac{km}{h}$; $60\frac{km}{h}$; $65\frac{km}{h}$; $80\frac{km}{h}$; $95\frac{km}{h}$; $100\frac{km}{h}$?

4) Kui suure kiirusega võib auto sõita, et 100 km läbimiseks piisaks 15 l; 12 l; 11,5 l; 14 l; 10 l; 9,5 l; 9,3 l; 9 l bensiinist?

30. Alljärgnevas tabelis on esitatud auto pidurdusteekonna pikkuse (s. o. tee pikkus, mille auto läbib pärast pidurdamist kuni seisma jäämiseni) sõltuvus auto liikumiskiirusest v kuival asfaldil:

$v\left(\frac{km}{h}\right)$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
s (m)	3	7	13	20	28	38	50	64	79	95

Ehitada sõltuvuse graafik ja määrata selle abil, kui suure kii-

rusega liikus auto, kui pidurdusteekonna pikkuseks oli 7,5 m; 15 m; 25 m; 40 m; 53 m.

Näpunäide. Abstsissteljel võtta 1 cm $\triangleq 10 \frac{km}{h}$, ordinaatteljel 1 cm $\triangleq$ 10 m.

31. Õhu temperatuuri mõõdeti ühe ööpäeva jooksul iga kahe tunni tagant. Mõõtmise tulemused on alljärgnevas tabelis:

Kellaaeg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temp. C°	3	1	0	−3	−4	−2	1	2	5	8	6	5	5

Esitada temperatuuri graafik ja kirjeldada selle abil temperatuuri ööpäevast muutumist järgmiste küsimuste põhjal:

1) Millistel ajavahemikel temperatuur tõusis? Langes?
2) Millistel ajavahemikel näitas kraadiklaas külma? Sooja?
3) Mis kellaajal näitas kraadiklaas nulli?
4) Mis kellaajal oli temperatuur minimaalne? Maksimaalne?
5) Milline oli temperatuuri minimaalne väärtus? Maksimaalne väärtus?

Näpunäide. Abstsissteljel võtta 1 cm $\triangleq$ 2 h, ordinaatteljel: 1 cm $\triangleq$ 1° C. Tähele panna, et ordinaatteljele on vaja kanda ka negatiivseid väärtusi.

32. Joonestada täisnurkne kolmnurk ABC, mille teravnurk $\alpha = 10°$ ja hüpotenuus $c = 5$ cm (vt. joon. 11). Suurendada nurka α, nii et hüpotenuus c jääks muutumatuks. Mõõta α lähiskaateti b pikkus, kui $\alpha = 10°, 20°, 30°, \ldots, 70°, 80°$ ja koostada α ja b vastavate väärtuste tabel ning ehitada α ja b vahelise sõltuvuse graafik (vt. § 2 p. 3).

5. Valem. Ülal vaatlesime kahe muutuva suuruse vahelist funktsionaalset sõltuvust, mis oli esitatud tabeli abil (p. 3) või graafiku abil (p. 4).

Sageli osutub võimalikuks funktsionaalset sõltuvust esitada valemi abil, mis näitab, millised matemaatilised tehted tuleb sooritada argumendi väärtusega, et saada funktsiooni väärtus.

Näiteid. 1) Ringi pindala on raadiuse funktsioon, sest igale raadiuse väärtusele vastab kindel pindala väärtus. Kui raadiuse (argumendi) väärtused on antud, siis vastavaid funktsiooni (pindala) väärtusi saab arvutada kindla juhendi järgi: tuleb leida raadiuse ruut ja korrutada see π-ga. Sümbol: $S = \pi R^2$. See valem esitabki ringi raadiuse ja ringi pindala vahelist sõltuvust.

2) Kui silindri põhja pindala on näiteks 10 dm^2, siis selle silindri ruumala oleneb ainult silindri kõrgusest H ehk silindri ruumala on kõrguse funktsioon. Seda sõltuvust saab esitada valemi abil. Nimelt: $V=10H$, kus H on mõõdetud detsimeetrites.

Valemi abil esitatud sõltuvust saab esitada tabeli ja graafiku abil. Selleks tuleb anda valemis argumendile vabalt sobivaid väärtusi ja arvutada vastavad funktsiooni väärtused. Argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste paarid moodustavadki antud sõltuvuse tabeli. Tabeli abil on aga lihtne ehitada graafikut (vt. p. 4).

Koostame näiteks sõltuvuse $S=\pi R^2$ tabeli ja graafiku, andes argumendile (R) väärtused 0,2; 0,4; 0,6; ...; 1,8 ja võttes $\pi \approx 3{,}14$. Arvutuse teostame järgmises tabelis:

R	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
R^2	0,04	0,16	0,36	0,64	1,0	1,44	1,96	2,56	3,24
πR^2	0,126	0,503	1,13	2,01	3,14	4,52	6,16	8,04	10,2

Saadud tabeli iga veeru esimene ja viimane arv kujutavadki argumendi (raadiuse) ja funktsiooni (ringi pindala) vastavate väärtuste paare. Joonisel 15 on kujutatud funktsiooni $S=\pi R^2$ graafik. Graafiku joonestamiseks on ümardatud kõik pindala väärtused ühe kohani pärast koma.

Leida jooniselt 15:

1) Kui suur on ringi pindala, kui raadius on 0,30; 0,50; 1,10; 1,70; 0,62; 0,84; 1,58; 1,69?

2) Kui suur on ringi raadius, kui pindala on 0,8; 1,5; 2,0; 3,2; 4,1; 6,8; 7,0; 8,2; 10,0?

33. Valemi $C=\pi d$ alusel ehitada graafik, mis näitab ringjoone pikkuse sõltuvust ringi diameetrist, andes diameetrile väärtused 0 cm; 0,5 cm; 1 cm; 1,5 cm; 2 cm; 2,5 cm; 3 cm.

Leida graafiku abil: 1) kui pikk on ringjoon, kui $d=$ $=1{,}8$ cm; 2,8 cm; 2,3 dm; 1,2 m? 2) Kui suur on ringi diameeter, kui ringjoone pikkus on 8 cm; 7,6 cm; 6 cm; 2,3 dm; 4,5 m?

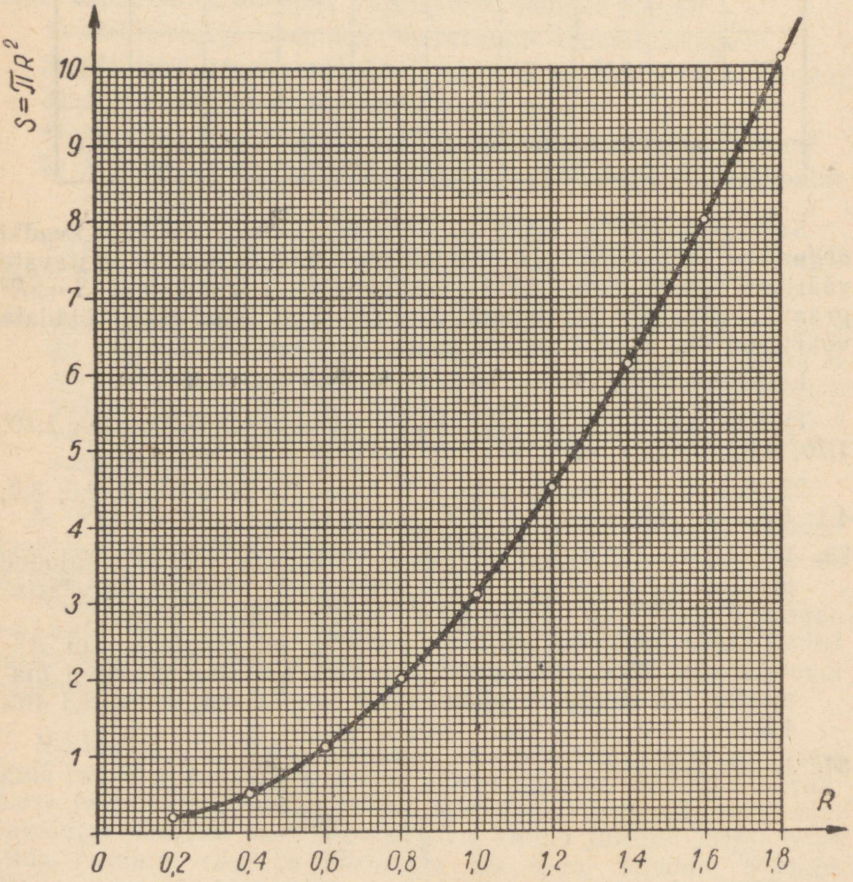
34. Leida avaldise

$$\frac{x^2-2}{3}$$

väärtused, kui $x=-4, -3, -2, \ldots, 3, 4$. Arvutused teha järgmises skeemis:

x	x^2	x^2-2	$\frac{x^2-2}{3}$
-4	16	14	$4\frac{2}{3}$
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

Ehitada graafik, mis näitab antud avaldise väärtuse sõltuvust x väärtusest. Leida graafiku abil avaldise väärtus, kui



Joon. 15

$x=-3{,}5$; $-1{,}5$; 0,7; 2,8. Kontrollida graafikult saadud tulemusi arvutamise teel.

35. Ehitada graafik, mis näitab avaldise

$$\frac{2x-3}{2}$$

väärtuse sõltuvust x väärtusest, andes x-le kasvavas järjekorras sobivaid väärtusi alates -2-st.

Märkus. Ülesanded 34 ja 35 näitavad, et algebraline avaldis on selles avaldises esineva tähe funktsioon, sest avaldises esineva tähe igale väärtusele vastab avaldise kindel väärtus.

§ 4. VÕRDELINE SÕLTUVUS

1. Näited. 1) Vesi voolab paaki kraani kaudu. Paaki voolanud vee hulk märgiti üles iga minuti järel ja saadi järgmine tabel:

Aeg (min.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Vee hulk (l)	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	...

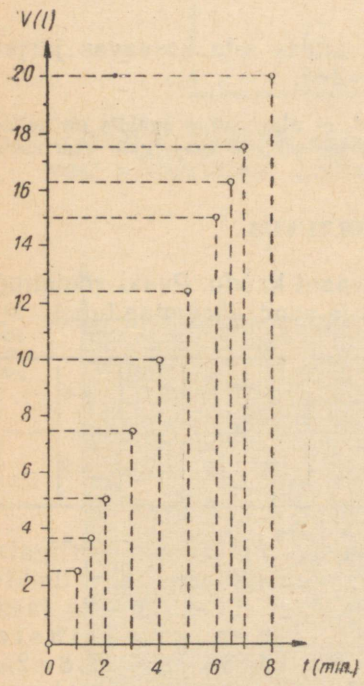
Paaki voolanud vee hulk on voolamisaja funktsioon, sest igale ajahetkele vastab kindel vee hulk paagis. Esitame selle funktsiooni valemi abil. Selleks paneme tähele, et antud suuruste (aeg ja vee hulk) muutumisel on nende vastavate väärtuste suhe jääv. Tõepoolest, $2{,}5:1=5:2=7{,}5:3=\ldots=20:8=2{,}5$ (või vastupidi: $1:2{,}5=2:5=\ldots$). Tähistades väljavoolanud vee hulga tähega V ja selleks kulunud aja tähega t, saame, et

$$\frac{V}{t}=2{,}5, \text{ millest } V=2{,}5t.$$

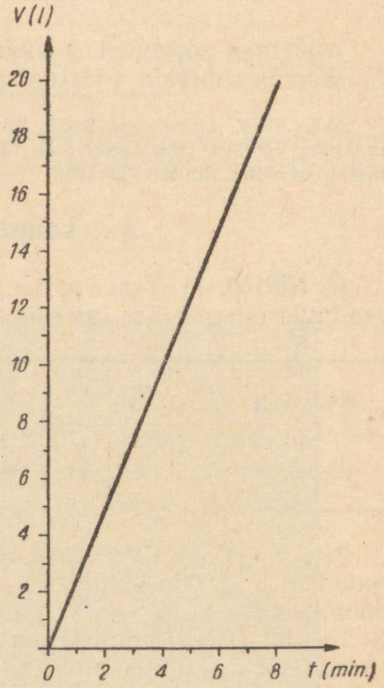
Saadud valem esitabki paaki voolanud vee hulga ja voolamisaja vahelist sõltuvust, s. t. selle valemi järgi võime arvutada paaki voolanud vee hulga mistahes ajahetkel. Kui näiteks $t=25$ min., siis $V=2{,}5\cdot 25=62{,}5$ l, s. t. 25 min. pärast on paagis 62,5 l vett.

Joonisel 16 on ehitatud koordinaatteljestikus punktid, mille koordinaatideks on eelmisest tabelist võetud argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste paarid. Selgub, et need punktid asetsevad ühel sirgel. Andes t-le mõned tabelis mitteleiduvad väärtused (näiteks 1,5; 6,5) ja arvutades vastavad V väärtused (3,75 ja 16,25), selgub, et ka uued punktid (1,5; 3,75) ja (6,5; 16,25) asetsevad samal sirgel. Et antud tabelit võiks paremale poole

veelgi pikendada (andes argumendile näiteks väärtusi 9, 10, ..., 50. ...), vasakule poole aga mitte (miks?), siis on funktsiooni $V=2{,}5\ t$ graafikuks koordinaatide alguspunktist lähtuv kiir (joon. 17).



Joon. 16



Joon. 17

2) Antud kauba maksumus on kauba hulga funktsioon. Miks? Näiteks, kui üks kilogramm suhkrut maksab 0,78 rbl., siis ostetud suhkru maksumuse ja suhkru hulga vahelist sõltuvust esitab järgmine tabel:

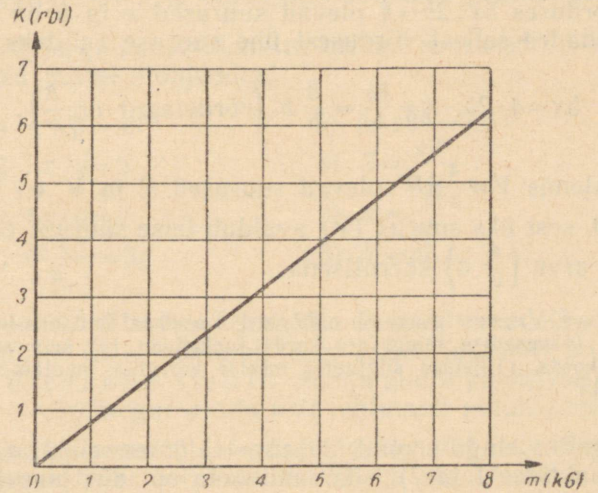
Suhkru hulk (kg)	0	1,5	2	3	4,5	6	7,5	8
Maksumus (rbl.)	0	1,17	1,56	2,34	3,51	4,68	5,85	6,24

Võite kontrollida, et ka selle sõltuvuse puhul on muutuvate suuruste (suhkru maksumuse ja suhkru hulga) vastavate

väärtuste suhe jääv, nimelt 0,78. Seega, tähistades suhkru hulga tähega m ja maksumuse tähega K, saame vaadeldava funktsiooni esitada valemina:

$$\frac{K}{m} = 0{,}78, \text{ millest } K = 0{,}78m$$

Funktsiooni graafik, mis jällegi osutub koordinaatide alguspunktist lähtuvaks kiireks, on esitatud joonisel 18.



Joon. 18

2. Definitsioon. Mõlemas eelmises näites (1 ja 2) vaadeldud suurused olid sellises sõltuvuses, et nende vastavate väärtuste suhe oli jääv. Selline sõltuvus on **võrdeline sõltuvus.**

Tähistades üldiselt funktsiooni tähega y, argumendi tähega x ja jääva arvu tähega a, võime võrdelise sõltuvuse defineerida järgmiselt.

Kahe muutuva suuruse x ja y vahelist sõltuvust nimetatakse võrdeliseks sõltuvuseks, kui nende suuruste vastavate väärtuste suhe on jääv.

Sümbolid: $\boxed{\frac{x}{y} = a}$, millest $\boxed{y = ax}$

Võrdelises sõltuvuses olevaid suurusi nimetatakse **võrdelisteks suurusteks.** Jäävat arvu a nimetatakse **võrdeteguriks.**

3. Võrdeliste suuruste leidmine. Kui tahame veenduda kahe suuruse võrdelisuses, siis peame eeltoodu põhjal näitama, et nende suuruste vastavate väärtuste suhe on jääv või et üks suurus on teise suuruse ja mingi jääva arvu korrutis.

Näiteid. 1) Kui risttahuka põhja pindala on 0,8 m², siis risttahuka ruumala V (m³) ja kõrgus h (m) on võrdelised, sest $V=0{,}8h$ (võrdetegur on 0,8).

2) Võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt u ja külje pikkus a on võrdelised, sest $u=3a$ (võrdetegur on 3).

3) Võrduses $5x:2b=4$ olevad suurused x ja b on võrdelised, sest avaldades sellest võrdusest ühe suuruse (näiteks x), saame

$$5x=4\cdot 2b;\ x=\frac{8b}{5}=\frac{8}{5}b\ \left(\text{võrdetegur on }\frac{8}{5}\right).$$

4) Valemis $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ olevad suurused R ja V ei ole võrdelised, sest üks suurus (V) avaldub teise suuruse (R) *kuubi* ja jääva arvu $\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ korrutisena.

Märkus. Valemist $y=ax$ on näha, et kui $a>0$ ja $x>0$, siis argumendi (x) suurenedes (vähenedes) mingi arv korda funktsioon (y) suureneb (väheneb) sama arv korda. (Tuletada siinjuures meelde korrutise muutumist ühe teguri muutumisel.)

Et tegeliku eluga seotud ülesannetes on enamasti $a>0$ ja $x>0$ (nagu punktides 1 ja 2), siis saab seda omadust sageli kasutada võrdelise sõltuvuse kindlakstegemisel.

Näide. Kui põllu igale hektarile külvatakse ühepalju väetist, siis tarvilik väetise hulk on võrdeline väetatava põllu pindalaga, sest põllu pindala suurenemine (vähenemine) mingi arv korda põhjustab ilmselt ka tarviliku väetise hulga suurenemise (vähenemise) sama arv korda.

36. Millised järgnevaist suurustest on võrdelised, millised mitte? Põhjendus!

1) Ruudu ümbermõõt u ja külje pikkus a.
2) Kuubi servapikkuste summa s ja serva pikkus b.
3) Ringi ümbermõõt C ja diameeter d.
4) Ringi ümbermõõt C ja raadius R.
5) Antud ainest keha kaal P ja ruumala V.
6) Ringi pindala S ja raadius R.
7) Läbitud tee pikkus s ja selle läbimiseks kulunud aeg t, kui kiirus on jääv.

8) Läbitud tee pikkus s ja kiirus v, kui tee läbimiseks kuluv aeg on antud.

9) Traktori poolt küntud põllu pindala S ja kündmiseks kulunud aeg t, kui tööjõudlus on jääv.

10) Antud kontsentratsiooniga lahuse kaal P ja lahustunud aine hulk m.

11) Antud teepikkuse läbimisel seljataha jäänud kilomeetripostide arv u ja eesolevate kilomeetripostide arv v.

37. Millised järgmistes valemites olevad suurused on võrdelised, millised mitte? Põhjendus!

1) $\alpha+\beta=90°$
2) $3x:y=5$
3) $5x\cdot y=7$
4) $\frac{2x+3}{5}=3y$
5) $3a:8b=7{,}5$
6) $S=\frac{\pi d^2}{4}$
7) $m=\frac{7x}{8}$
8) $V=a^3$.

4. Võrdelise sõltuvuse graafik. Eespool vaadeldud näidetes võis argument (ühel juhtumil aeg, teisel juhtumil kauba hulk) vastavalt ülesande sisule omada ainult positiivseid väärtusi. Samuti võis võrdetegur a olla neil juhtumeil ainult positiivne arv.

Võrdelise sõltuvuse üldises kujus $y=ax$ võib argument x omada ka negatiivseid väärtusi; samuti võib ka võrdetegur a olla negatiivne. Seepärast ei ole võrdelise sõltuvuse graafik üldjuhtumeil ainult esimeses veerandis asetsev kiir. See selgub järgnevais näidetes.

Näide 1. On antud funktsioon $y=2x$. Koostada argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste tabel (andes argumendile järjestikku täisarvulisi väärtusi -3, -2, ..., 2, 3) ja ehitada selle põhjal funktsiooni graafik.

Lahendus.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

Graafik on ehitatud joonisel 19, kust selgub, et funktsiooni $y=2x$ graafikuks on koordinaatide alguspunkti ning I ja III veerandit läbiv sirge.

Üldiselt, kui valemis $y=ax$ $a>0$ ja kui

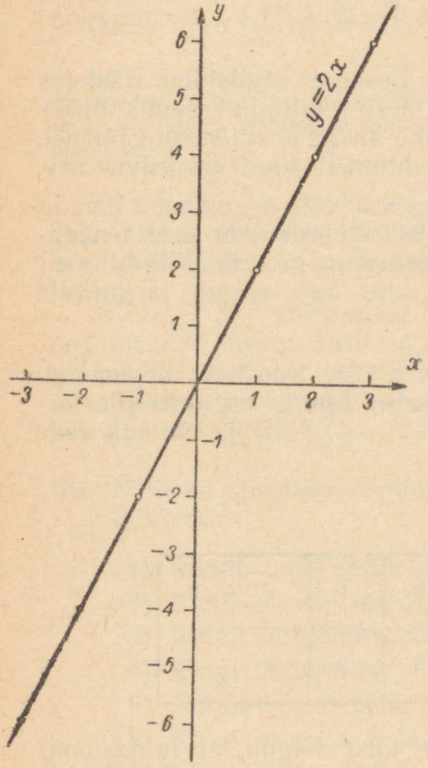
1) $x>0$, siis $y>0$, sest kahe positiivse arvu a ja x korrutis on positiivne.

2) $x<0$, siis $y<0$. Miks?

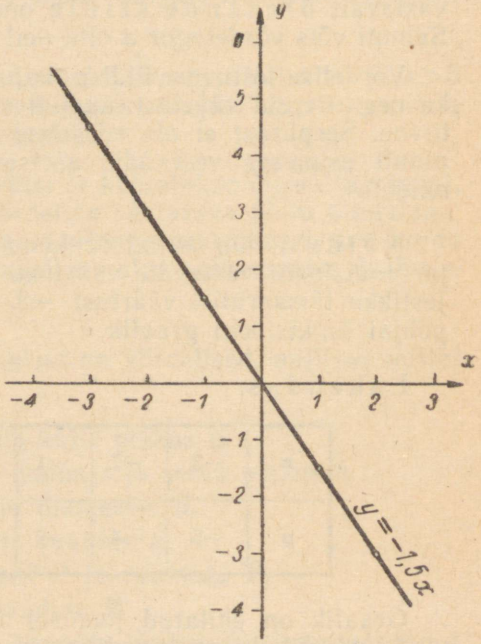
3) $x=0$, siis $y=0$. Miks?

Siit selgub, et kui $a>0$, siis funktsiooni $y=ax$ graafik läbib tõepoolest I ja III veerandi ning koordinaatide alguspunkti, sest punktid, mille korral $x>0$ ja $y>0$, asetsevad I veerandis; punktid, mille korral $x<0$ ja $y<0$, asetsevad III veerandis; punkt (0; 0) on aga koordinaatide alguspunkt (vt. ülesanne 19).

N ä i d e 2. Järgnevas tabelis on esitatud funktsiooni $y=-1{,}5x$ väärtused. Vastav graafik on kujutatud joonisel 20.



Joon. 19



Joon. 20

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	6	4,5	3	1,5	0	$-1,5$	-3

Üldiselt olgu valemis $y=ax$ $a<0$. Sel puhul:

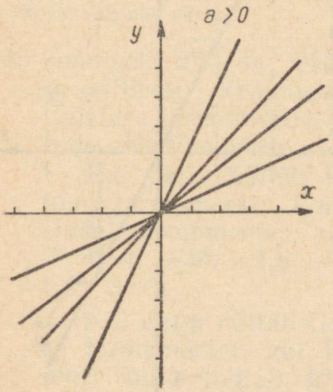
1) Kui $x>0$, siis $y<0$. Miks?
2) Kui $x<0$, siis $y>0$. Miks?
3) Kui $x=0$, siis $y=0$. Miks?

Mis siit järeldub funktsiooni $y=ax$ graafiku asendi kohta koordinaatteljestikus, kui $a<0$?

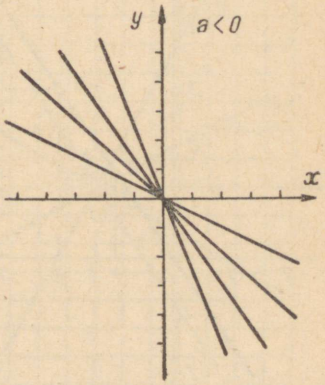
Kokkuvõttes võime öelda:

võrdelise sõltuvuse $y=ax$ graafikuks on koordinaatide alguspunkti läbiv sirge, mis $a>0$ korral asetseb I ja III veerandis ning $a<0$ korral II ja IV veerandis (joon. 21 ja 22).

Sirge on määratud kahe punktiga. Et võrdelise sõltuvuse $y=ax$ graafikuks on sirge, mis läbib alati koordinaatide alguspunkti, siis piisab selle sirge ehitamiseks veel ühe punkti leidmisest. Selleks tuleb argumendile anda vabalt mingi väärtus ja leida vastav funktsiooni väärtus. Tavaliselt antakse argumendile väärtus 1. Siis $y=a\cdot 1=a$. Seega läbib otsitav sirge punkte $(0; 0)$ ja $(1; a)$.



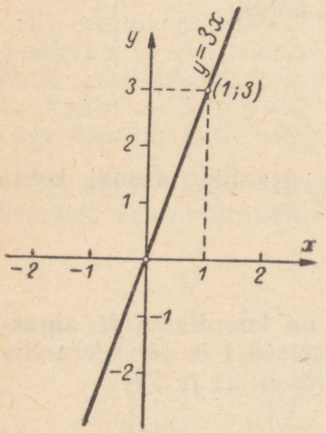
Joon. 21



Joon. 22

Näide. Funktsiooni $y=3x$ graafiku ehitamiseks võime kasutada punkte (0; 0) ja (1; 3) (joon. 23).

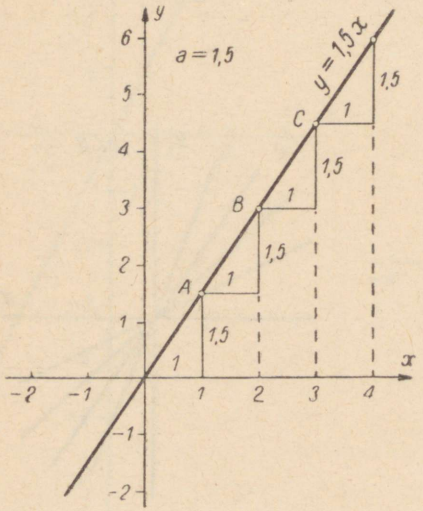
Märkus. Et võrdelise sõltuvuse graafikuks on koordinaatide alguspunkti läbiv sirge, siis nimetatakse võrdust $y=ax$ koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrandiks. Lühiduse mõttes kasutame edaspidi väljendit «sirge $y=ax$», mõeldes selle all sirget, mille võrrand on $y=ax$.



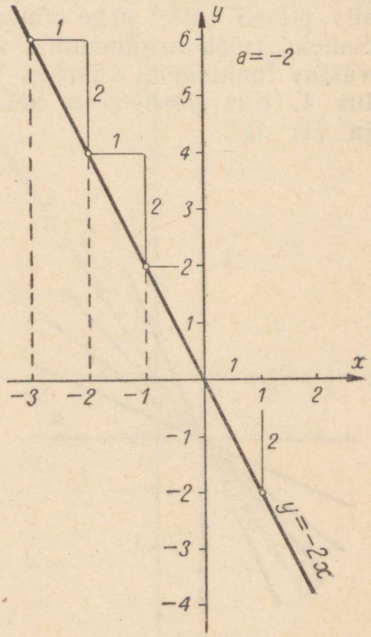
Joon. 23

5. Sirge tõus. Joonistelt 24 ja 25 selgub, et võrdetegur a näitab graafikul, mille võrra muutub sirgel $y=ax$ liikuva punkti ordinaat, kui selle punkti abstsiss suureneb ühe ühiku võrra. Et aga ordinaadi väärtused tähendavad funktsiooni väärtusi ja abstsissi väärtused argumendi väärtusi (vt. § 3 p. 4), siis võime öelda ka, et

võrdetegur näitab, mille võrra muutub funktsioon, kui argument suureneb ühe võrra.



Joon. 24



Joon. 25

Võrdetegurit a nimetatakse sirge $y=ax$ **tõusuks.**

Kui $a>0$, siis funktsioon kasvab argumendi kasvades (joon. 24), kui $a<0$, siis funktsioon kahaneb argumendi kasvades (joon. 25).

38. Ehitada ühes ning samas teljestikus järgmised sirged:

1) $y=1{,}5x$, $y=2x$, $y=3x$, $y=x$

2) $y=-0{,}5x$, $y=-x$, $y=-2x$, $y=-2{,}5x$

3) $y=0{,}7x$, $y=0{,}9x$, $y=5x$

39. Graafikuid joonestamata selgitada, kuidas muutuvad järgmiste funktsioonide väärtused, kui argument suureneb ühe võrra (vt. p. 5).

$y=3x$; $y=2{,}9x$; $y=32x$; $y=-5x$; $y=-2x$; $y=-0{,}3x$; $y=x$; $y=-x$; $y=-3{,}9x$; $y=5{,}6x$.

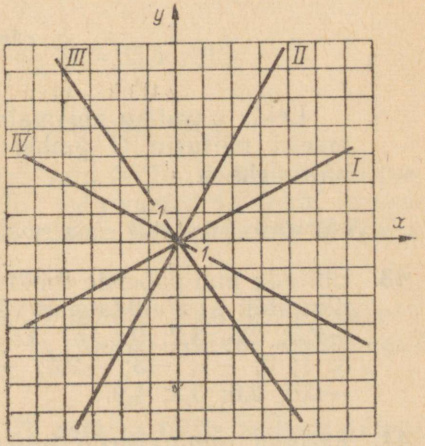
40. Graafikuid joonestamata selgitada, milliseid veerandeid läbivad sirged $y=2x$; $y=-\frac{3}{5}x$, $y=-x$; $y=0{,}75x$; $y=-\frac{1}{2}x$, $y=x$; $y=87x$.

Nimetada igal sirgel mingi kahe punkti koordinaadid.

Näide. Sirge $y=2x$ läbib näiteks punkte (1; 2), (3; 6).

41. Joonisel 26 on kujutatud neli võrdelise sõltuvuse graafikut. Leida iga sõltuvuse korral võrdetegur (a) ja kirjutada välja nende sõltuvuse valemid.

Näpunäide. Selgitada, mille võrra muutub funktsioon, kui argument kasvab ühe võrra.

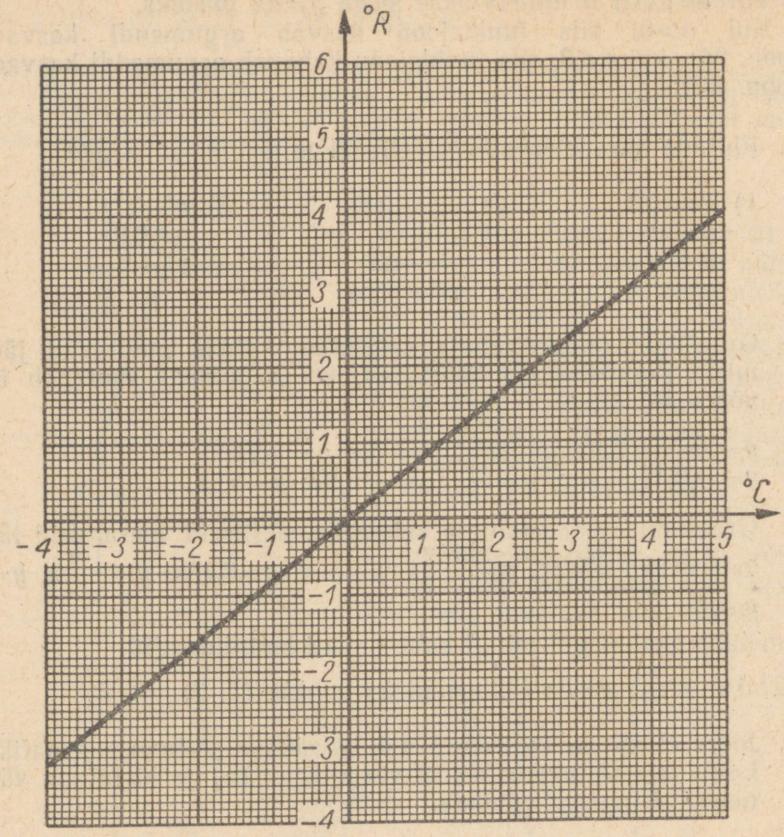


Joon. 26

42. Joonisel 27 on esitatud graafiliselt Reaumuri ja Celsiuse termomeetrite näitude vaheline sõltuvus.

Kui palju näitab Reaumuri termomeeter, kui Celsiuse termomeeter näitab 2°, 3°, 4°, −3°, −1,8°, −2,5°, 0,8°, 3,9°?

Kui palju näitab Celsiuse termomeeter, kui Reaumuri oma näitab 2°, 3°, −3°, −2°, −2,4°, 1,3°, 2,6°, 3,8°?



Joon. 27

Leida graafiku abil valem, mis võimaldab Celsiuse termomeetri näitusid C ümber arvestada Reaumuri termomeetri näitudeks R.

Näpunäide. Leida võrdetegur.

43. Ehitada mm-paberile funktsiooni $y=0{,}8x$ graafik. Leida graafiku abil: a) Funktsiooni väärtus y, kui $x=3$; 4; 2; -2; $-1{,}5$; $-2{,}3$; 2,5; 3,2; 0,5. b) Argumendi väärtus x, kui $y=5$; 4,5; 3; 1; 0; -1; -3; $-2{,}8$; $-1{,}5$; $-0{,}9$; 2,6; 3,2; 4,9.

44. Ehitada mm-paberile funktsiooni graafik, mis näitab ringjoone pikkuse sõltuvust diameetrist. Leida selle graafiku abil: a) Ringjoone pikkus, kui diameeter on 1,5 cm; 1,8 cm; 2,4 dm;

0,8 m; 2,1 cm. b) Ringi diameeter, kui ringjoone pikkus on 8 cm; 7,5 cm; 6,3 dm; 5,3 m; 2,8 cm; 1,2 mm.

6. Ülesanded võrdelistele suurustele. Et võrdeliste suuruste vastavate väärtuste suhted on kõik võrdsed, siis saab nendest suhetest moodustada võrdeid.

Näide. Olgu kahe võrdelise suuruse x ja y vastavate väärtuste paarid järgmised:

x	1,3	2,5	3	4	4,8
y	3,9	7,5	9	12	14,4

Selle tabeli põhjal võib moodustada näiteks järgmised võrded:

$$\frac{1,3}{3,9}=\frac{3}{9};\quad \frac{4}{12}=\frac{2,5}{7,5};\quad \frac{4,8}{14,4}=\frac{1,3}{3,9}\quad \text{jne.}$$

Võrrete abil on lihtne lahendada ülesandeid võrdeliste suuruste kohta.

Näide. Tööline sai nelja päeva eest töötasu 18 rbl. Kui palju töötasu saab tööline 13 päeva eest, kui ta töötab sama jõudlusega?

Lahendus. Jääva jõudlusega töötamisel on töötasu ja tööpäevade arv võrdelises sõltuvuses. Tähistades otsitava töötasu suuruse tähega x, saame võrde

$$\frac{18}{4}=\frac{x}{13},\ \text{millest}\ x=\frac{13\cdot 18}{4}=58,5\ \text{rbl.}$$

Vastus. 13 päeva eest saab tööline 58,5 rbl.

45. Kui palju kunstväetist tuleb külvata 38 ha suurusele põllule, kui 15 ha suurusele põllule kulus seda väetist 4,2 tonni (arvestades, et mõlemale põllule külvatakse hektari kohta ühepalju väetist)? (*11 tonni*)

46. Tööline valmistab 4,5 tunniga 87 detaili. Mitu detaili valmistab tööline 7 tunniga, kui ta töötab jääva jõudlusega? (*135 detaili*)

47. Tööline valmistas 6 tunniga 72 eset ja täitis sellega päevanormi. Mitu protsenti ületas tööline päevanormi, kui ta töötas sama jõudlusega tööpäeva lõpuni? (*16,7%*)

48. Aurik läbib 7 tunniga 137 km. Mitu tundi kulub aurikul 186 km läbimiseks, kui ta liigub ühtlaselt? (*9,5 tundi*)

49. 4,5 kg soolalahust sisaldab 400 g puhast soola. Kui palju puhast soola sisaldab 7,8 kg sama kontsentratsiooniga soolalahust? (*694* g)

50. 1,2 kg salpeetrist valmistati 7 kg lahust. Mitu kilogrammi sama kontsentratsiooniga lahust saab valmistada 2,8 kg salpeetrist? (*16,3 kg*)

§ 5. LINEAARFUNKTSIOON.

1. Definitsioon. Tühi bensiini kanister kaalub 1,5 kg. Üks liiter bensiini kaalub 0,7 kg. Kui valada kanistrisse bensiini, siis võib bensiini brutokaalu[1] P vaadata kui kanistris oleva bensiini ruumala V funktsiooni, sest kanistris olevale bensiini ruumala igale väärtusele vastab kindel brutokaal. Leiame valemi, mis võimaldab arvutada brutokaalu P kanistris oleva bensiini ruumala V järgi. Arutleme järgmiselt: kui kanistris ei ole üldse bensiini, siis on kanistri kaal $P_0=1{,}5$ kg;

kui kanistris on 1 l bensiini, siis $P_1=0{,}7+1{,}5=2{,}2$ kg;
kui kanistris on 2 l bensiini, siis $P_2=0{,}7\cdot 2+1{,}5=2{,}9$ kg;
kui kanistris on 3 l bensiini, siis $P_3=0{,}7\cdot 3+1{,}5=3{,}6$ kg;
kui kanistris on 8 l bensiini, siis $P_8=0{,}7\cdot 8+1{,}5=7{,}1$ kg; . . . ,
kui kanistris on V liitrit bensiini, siis $P=0{,}7V+1{,}5$ kg. Saadud valem $P=0{,}7V+1{,}5$ võimaldabki arvutada funktsiooni (brutokaalu) väärtusi, kui argument (bensiini ruumala) on antud. Näiteks, kui $V=16$ l, siis $P=0{,}7\cdot 16+1{,}5=12{,}7$ kg.

Toodud näitest näeme, et funktsiooni (P) väärtuse arvutamiseks tuleb argumendi (V) väärtus korrutada ühe konstantse suurusega (0,7) ja saadud korrutisele liita teine konstantne suurus (1,5). Sel puhul öeldakse, et suurus P on suuruse V lineaarfunktsioon.

Tähistades üldiselt argumendi tähega x, funktsiooni tähega y ja jäävad suurused tähtedega a ja b, võime öelda, et

y on x lineaarfunktsioon, kui selle funktsiooni väärtusi saab arvutada valemiga

$$y=ax+b$$

Märkus. Kui $y=ax+b$, siis öeldakse ka, et x ja y vahel valitseb lineaarne sõltuvus.

[1] Brutokaal — kauba kaal koos taaraga.

Saadud valemis olev liige ax on **lineaarliige**; täht b tähistab aga **vabaliiget**. Kui vabaliige $b=0$, siis $y=ax$. Seega on võrdeline sõltuvus lineaarse sõltuvuse erijuhtum.

Näiteid. $y=2x+3$ — lineaarliige: $2x$, vabaliige: 3; $y=0{,}7x-5$ — lineaarliige: $0{,}7x$, vabaliige: -5; $y=-3x-8$ — lineaarliige: $-3x$, vabaliige: -8.

51. Taime pikkus on 25 cm. Leida taime pikkus l pärast 1, 2, 3, 5 ööpäeva möödumist, kui iga ööpäevaga kasvab taim 1,5 cm. Avaldada taime pikkus pärast t päeva möödumist ja näidata, et l on t-st lineaarses sõltuvuses.

52. Turist peatus kolhoosi keskusest 3 km kaugusel. Pärast peatumist hakkas ta kolhoosist eemalduma ühtlase kiirusega $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Leida valem, mis võimaldab arvutada turisti kaugust (s) kolhoosi keskusest pärast t tunni möödumist. Millises sõltuvuses on kaugus s ajast t? Miks?

53. Küünla pikkus oli enne süütamist 12 cm. Leida valem, mis võimaldab arvutada küünla pikkust l pärast x tunni möödumist, kui igas tunnis põleb küünlast 4 cm. Millises sõltuvuses on küünla pikkus l ajast x? Mispärast?

54. Tühi õlipaak kaalub 3 kg. Leida valem, mis võimaldab arvutada õli brutokaalu P olenevalt paagis oleva õli ruumalast V, kui 1 liiter õli kaalub 0,9 kg.

55. Järgnevalt on antud rida võrdusi, mis seovad kaht muutuvat suurust. Selgitada, kas nende suuruste vaheline sõltuvus on lineaarne. Põhjendus.

1) $y=3x-5$; 2) $x=2-3y$; 3) $\frac{P}{2}=4V+3$;

4) $\frac{a+3b}{5}=4$; 5) $\frac{3x}{y}=\frac{4x+3}{2}$; 6) $\frac{a^2+b}{5}=4b-5$.

Näpunäide. Avaldada võrduses olev üks suurus teise suuruse kaudu. Näiteks

$$\frac{a-5b}{3}=7;\ a-5b=21;\ a=5b+21.$$

Sõltuvus on lineaarne.

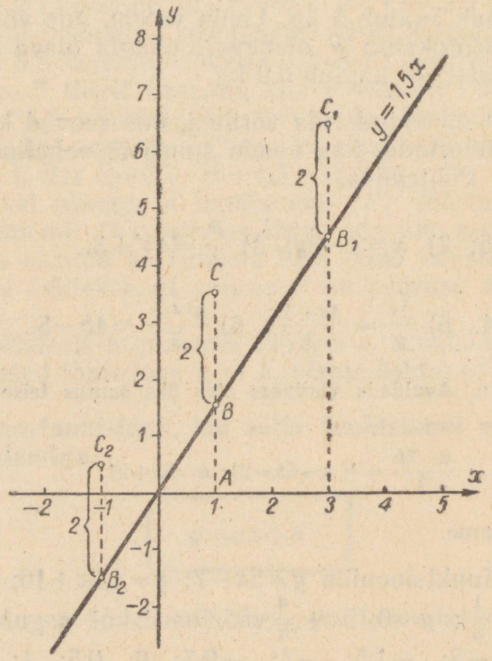
56. Arvutada funktsioonide $y=5x-7$; $y=1{,}5x+10$; $y=0{,}4x+0{,}5$; $y=\frac{2}{3}x+1\frac{1}{3}$; $y=0{,}75x+\frac{4}{5}$ väärtused, kui argumendi väärtuseks on -2; $-1{,}5$; -1; $-0{,}5$; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 10.

2. Graafik. Lineaarfunktsiooni graafiku saamiseks vaatame näiteks funktsiooni $y=1{,}5x+2$. Ehitame esiteks graafiku vastavale võrdelisele sõltuvusele $y=1{,}5x$. Tema graafikuks on joonisel 28 kujutatud sirge.

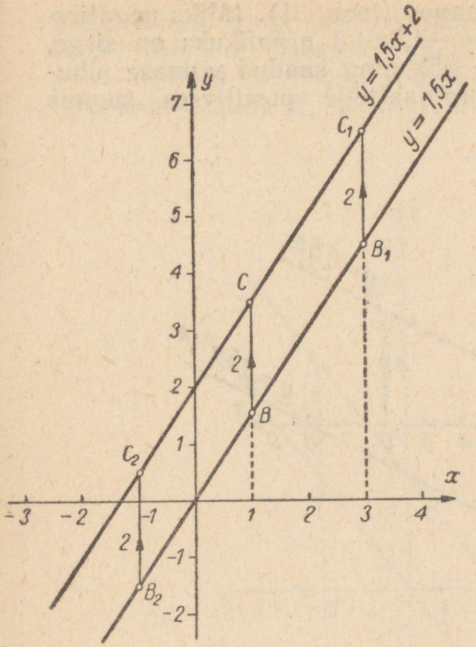
Võrdleme nüüd lineaarset sõltuvust $y=1{,}5x+2$ võrdelise sõltuvusega $y=1{,}5x$. Andes mõlemas funktsioonis argumendile ükskõik millise ühe ning sama väärtuse, näiteks 2, 3, -1, -2 jt., on ilmne, et funktsiooni $y=1{,}5x+2$ väärtus on alati kahe võrra suurem funktsiooni $y=1{,}5x$ vastavast väärtusest (lugeja kontrolligu seda arvutuste teel!).

Et funktsiooni graafiku punktide ordinaadid kujutavad funktsiooni väärtusi (§ 3 p. 4), siis peab lineaarfunktsiooni graafiku iga punkt olema antud näites võrdelise sõltuvuse graafiku vastavast punktist kahe ühiku võrra kõrgemal.

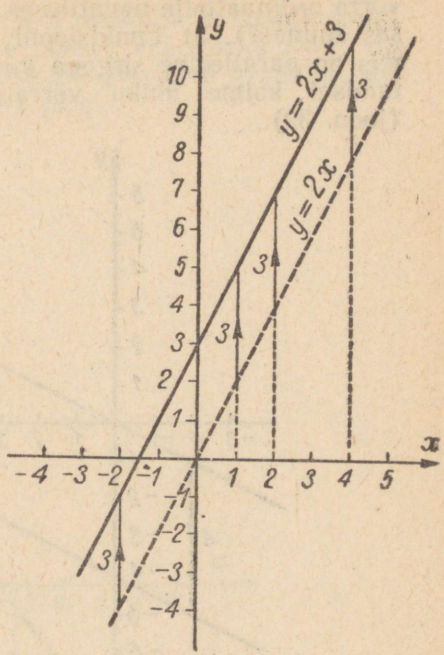
Näited. 1) Kui $x=1$, siis leiame funktsiooni $y=1{,}5x$ graafikul punkti B, mille ordinaat — graafikul lõik AB — on funktsiooni $y=1{,}5x$ vastavaks väärtuseks (joon. 28). Funktsiooni $y=1{,}5x+2$ graafiku (seda graafikut veel joonisel 28 ei ole) vastav punkt C peab olema punktist B kahe ühiku võrra kõrgemal ehk punkt C on saadud punkti B nihutamisel kahe ühiku võrra y-telje positiivses suunas.



Joon. 28



Joon. 29



Joon. 30

2) Kui $x=3$, siis leiame funktsiooni $y=1{,}5x$ graafikul punkti B_1; funktsiooni $y=1{,}5x+2$ graafiku vastav punkt C_1 on aga kahe ühiku võrra kõrgemal ehk ta on saadud punkti B_1 nihutamisel kahe ühiku võrra y-telje positiivses suunas.

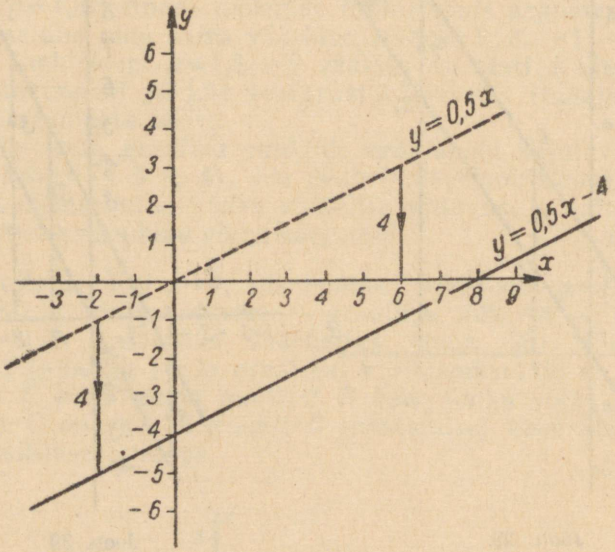
3) Kui $x=-1$, siis leiame funktsiooni $y=1{,}5x$ graafikul punkti B_2; vastav punkt C_2 teisel graafikul on jällegi kahe ühiku võrra kõrgemal.

Selliselt võib arutleda x iga väärtuse korral. Tulemuseks saame, et lineaarse funktsiooni $y=1{,}5x+2$ graafiku kõik punktid on saadud võrdelise sõltuvuse $y=1{,}5x$ graafiku vastavate punktide nihutamisel kahe ühiku võrra y-telje positiivses suunas. Need punktid on kõik ühel sirgel ja nimelt sirgel, mis on sirgega $y=1{,}5x+2$ paralleelne (joon. 29).

Lineaarfunktsiooni $y=1{,}5x+2$ graafiku ehitamisel tehtud arutelu jääb maksma ka iga teise lineaarfunktsiooni graafiku ehitamisel.

Näited. 1) Funktsiooni $y=2x+3$ graafikuks saame sirge, mis on paralleelne sirgega $y=2x$ ja mis on viimasest nihutatud kolme ühiku võrra ordinaattelje positiivses suunas (joon. 30). 2) Funktsiooni $y=0{,}5x-4$ graafikuks saame sirge, mis on paralleelne sirgega $y=0{,}5x$ ja mis on nihutatud viimasest 4 ühiku

võrra ordinaattelje negatiivses suunas (joon. 31). (Miks negatiivses suunas?). 3) Funktsiooni $y=-1{,}5x+3$ graafikuks on sirge, mis on paralleelne sirgega $y=-1{,}5x$ ning saadud viimase nihutamisel kolme ühiku võrra ordinaattelje positiivses suunas (joon. 32).



Joon. 31

Kuidas asetsevad teineteise suhtes funktsioonide $y=-2x-5$ ja $y=-2x$ graafikud?

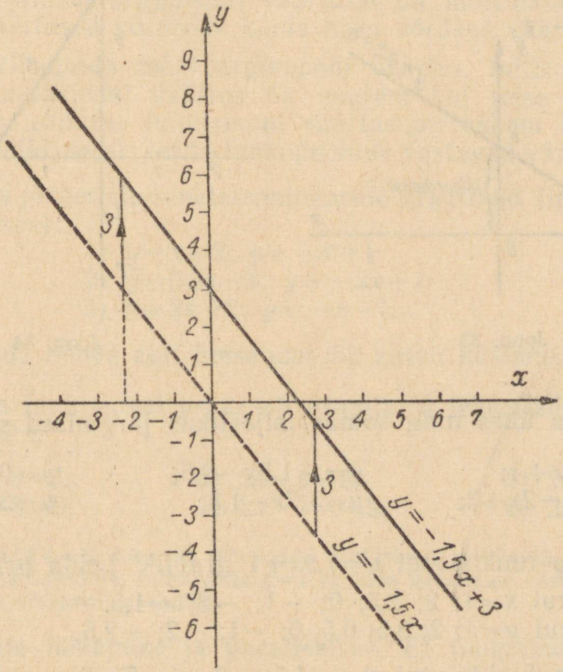
Näidetest selgub, et funktsiooni $y=ax+b$ graafik saadakse ikka vastava võrdelise sõltuvuse $y=ax$ graafiku nihutamisel kas y-telje positiivses või negatiivses suunas. Nihke suurust näitab seejuures vabaliikme absoluutväärtus $|b|$; nihke suunda aga vabaliikme märk.

Seega võime üldiselt öelda:

lineaarse funktsiooni $y=ax+b$ graafikuks on sirge, mis saadakse funktsiooni $y=ax$ graafiku nihutamisel $|b|$ ühiku võrra ordinaattelje positiivses suunas, kui $b>0$; negatiivses suunas, kui $b<0$.

Et lineaarse funktsiooni graafikuks on sirge, siis piisab tema ehitamiseks kahest punktist, s. t. argumendile x tuleb anda vabalt kaks mingisugust väärtust. Üheks väärtuseks võetakse tavaliselt $x=0$. Siis $y=a\cdot 0+b=b$. Seega läbib funktsiooni $y=ax+b$ graafik alati punkti $(0; b)$ või, teiste sõnadega, lõikab y-teljelt lõigu, mille pikkus on $|b|$ ühikut. Seda lõiku nimetatakse *algordinaadiks* (joon. 33). Argumendi teiseks väärtuseks võe-

takse vabalt mingi väärtus, mille järgi on lihtne arvutada funktsiooni väärtust. Tavaliselt võetakse teiseks väärtuseks $x=1$; siis $y=a\cdot 1+b=a+b$. Seega võib funktsiooni $y=ax+b$ graafikut ehitada kahe punkti $(0;\ b)$ ja $(1;\ a+b)$ järgi.



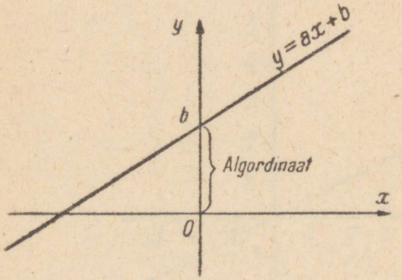
Joon. 32

Näide. Ehitada funktsiooni $y=-1{,}5x+3$ graafik.

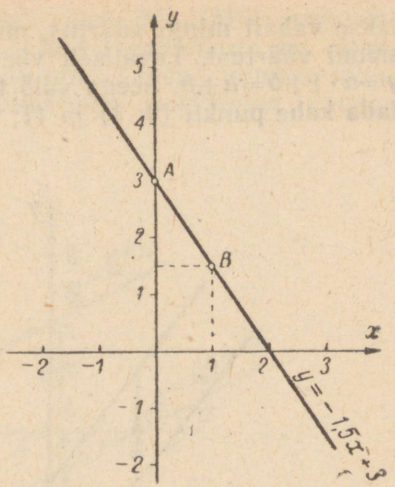
Lahendus. Kui $x=0$, siis $y=3$; saame punkti A $(0;\ 3)$. Kui $x=1$, siis $y=-1{,}5\cdot 1+3=1{,}5$; saame punkti B $(1;\ 1{,}5)$. Läbi punktide A ja B tõmbame sirge, mis ongi otsitavaks graafikuks (joon. 34).

Märkus 1. Väikese kujutusühiku korral satuvad punktid $(0;\ b)$ ja $(1;\ a+b)$ teineteise lähedale, mistõttu sirge joonestamise täpsus kannatab. Sel puhul tuleb argumendi teiseks väärtuseks võtta mingi sobivam väärtus.

Märkus 2. Et lineaarse sõltuvuse graafikuks on alati sirge, siis nimetatakse võrdust $y=ax+b$ sirge võrrandiks. Edaspidi tähendab väljend «sirge $y=ax+b$» sirget, mille võrrand on $y=ax+b$ ehk sirget, mis on määratud võrrandiga $y=ax+b$.



Joon. 33



Joon. 34

57. Ehitada ühes ning samas teljestikus järgmised sirged:

1) $y=x+1$; $y=-1{,}5x-0{,}5$; $y=0{,}5x+1{,}5$
2) $y=-2x+3$; $y=1{,}7x-1{,}5$; $y=3x+2$

58. Ehitada funktsiooni $y=1{,}5x+1$ graafik. Leida graafiku abil:

1) y, kui $x=1$; 2; 2,5; 0; -1; -2; $-1{,}5$.
2) x, kui $y=1$; 2; 3,5; 0,5; 0; -1; -2; $-2{,}5$.

59. Ehitada funktsiooni $y=-1{,}5x-2$ graafik ja selgitada selle abil järgmised küsimused:

1) Millisel argumendi väärtusel on funktsiooni väärtus null?
2) Millisel argumendi väärtusel on funktsiooni väärtus -2; -1; 1,5; 2?
3) Nimetada mõned argumendi väärtused, mille korral funktsiooni väärtused on positiivsed ($y>0$); negatiivsed ($y<0$).
4) Kui suur on funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtuseks on -2; -1; $-1{,}5$; 0; 0,5; 1; 2?

60. Ehitada funktsioonide $y=-1{,}5x+2$; $y=2x-1{,}5$; $y=x-1$ ja $y=-x+3$ graafikud (iga graafik eriteljestikus). Selgitada nende abil ülesandes 59 antud küsimused.

61. Ehitada ühes ning samas teljestikus § 5 p. 1 saadud funktsiooni $P=0{,}7V+1{,}5$ ja ülesandes 54 antud funktsiooni $P=0{,}9V+3$ graafik. Millise ruumala korral on bensiini ja õli

brutokaalud võrdsed? Millise ruumala korral näiteks on bensiini brutokaal suurem kui õli brutokaal?

62. Ehitada ühes ning samas teljestikus funktsioonide $y=x-2$ ja $y=-0{,}5x+2$ graafikud. Selgitada nende graafikute abil järgmised küsimused:

1) Millisel argumendi väärtusel on mõlemate funktsioonide väärtused võrdsed? Leida need võrdsed väärtused.

2) Nimetada mõni argumendi väärtus, mille korral esimese funktsiooni väärtus on suurem kui teise funktsiooni väärtus; esimese funktsiooni väärtus on vähem teise funktsiooni väärtusest. Leida funktsioonide vastavad väärtused.

63. Ehitada järgmiste funktsioonipaaride graafikud (iga paar eriteljestikus):

1) $y=x+2$; $y=-x+1$
2) $y=0{,}5x-1$; $y=-2x+1$
3) $y=2x+2$; $y=-x-1$.

Selgitada nende abil ülesandes 62 antud küsimused.

64. Ehitada funktsiooni $y=2x-3$ graafik ja lahendada selle abil võrrandid:

1) $2x-3=1$; 2) $2x-3=2$; 3) $2x-3=2{,}5$;
4) $2x-3=0$; 5) $2x-3=-2$; 6) $2x-3=-3$.

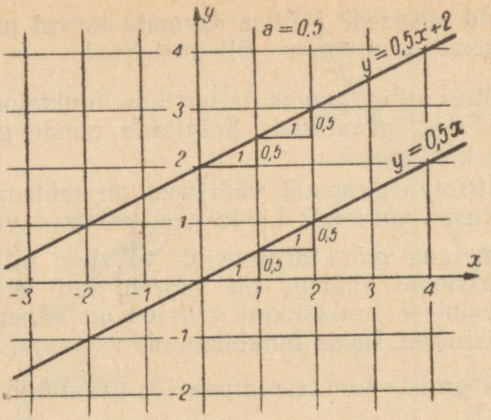
Näpunäide. Selleks, et lahendada funktsiooni $y=2x-3$ graafiku abil näiteks võrrand $2x-3=4$, tuleb võtta $y=4$ ja leida graafikult vastav x väärtus, mis ongi selle võrrandi lahendiks.

3. Sirgete lõikumine ja paralleelsus. Et funktsioonide $y=ax$ ja $y=ax+b$ graafikuks on paralleelsed sirged, siis järeldub siit, et lineaarfunktsiooni lineaarliikme kordajal a on graafikul sama tähendus, mis on võrdelise sõltuvuse graafikul võrdeteguril a (§ 4 p. 5): ta näitab funktsiooni muutumist, kui argument kasvab ühe võrra ja teda nimetatakse samuti sirge tõusuks. Kui $a>0$, siis funktsiooni väärtused kasvavad argumendi kasvades (sirge on tõusev — joon. 35); kui $a<0$, siis funktsiooni väärtused kahanevad argumendi kasvades (sirge on langev — joon. 36).

Tundes lineaarse funktsiooni valemis olevate konstantide a ja b graafilist tähendust, võib kirjeldada sirgete asendeid koordinaatteljestikus ka ilma graafikuid joonestamata.

Näited. 1) Sirge $y=2x+5$ eraldab y-telje positiivselt poolelt lõigu 5 (sest $b=5>0$). Argumendi kasvades funktsioon kasvab, s. t. sirge on tõusev (sest $a=2>0$); ta läbib III, II ja I veerandit.

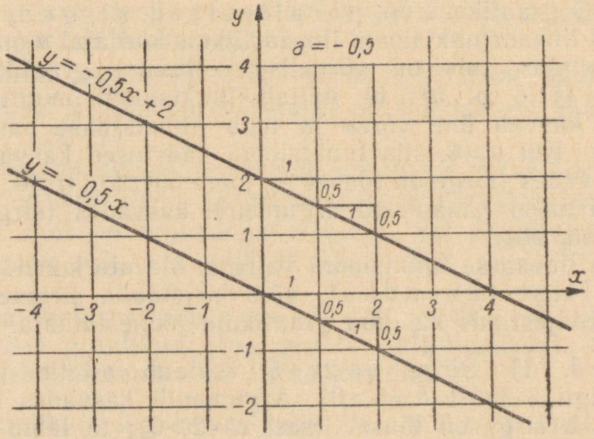
Toodud kirjelduse õigsust näitab joonis 37.



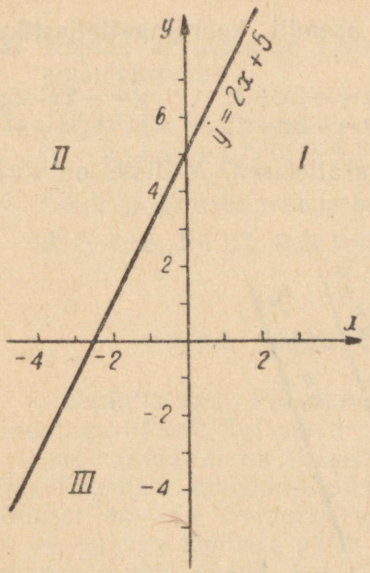
Joon. 35

2) Sirge $y=-3x+1$ eraldab y-telje positiivselt poolelt lõigu 1 ($b=1>0$); et $a=-3<0$, siis sirge on langev; ta läbib II, I ja IV veerandit.

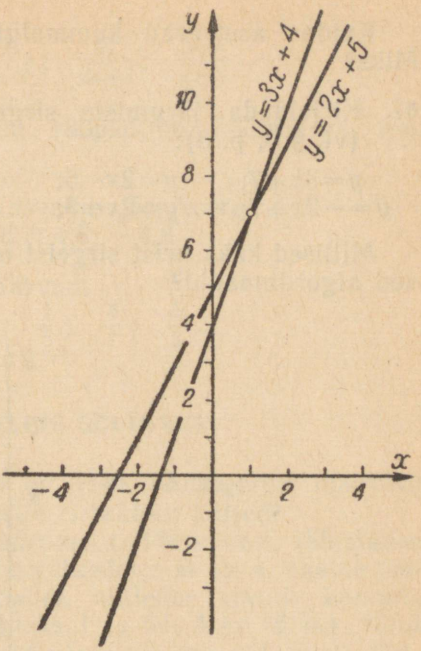
3) Sirge $y=3x+4$ eraldab y-telje positiivselt poolelt lõigu 4. Sirge on tõusev, sest $a=3>0$; läbib III, II ja I veerandit. Võrreldes selle sirge tõusu näites 1 antud sirge $y=2x+5$ tõusuga, saab järeldada, et need sirged l õ i k u v a d (joon. 38), sest nende tõusud on e r i n e v a d ($3\neq 2$).



Joon. 36



Joon. 37



Joon. 38

4) Sirge $y=3x-2$ eraldab y-telje positiivselt poolelt lõigu 2 ($b=-2<0$). Sirge on tõusev, läbib III, IV ja I veerandit. See sirge on paralleelne näites 3 toodud sirgega $y=3x+4$, sest nende sirgete tõusud on võrdsed (mõlemal puhul $a=3$) — joon. 39.

Toodud näidetest saab järeldada: kui kahe lineaarfunktsiooni lineaarliikmete kordajad on erinevad, siis on nende funktsioonide graafikuiks lõikuvad sirged, kui lineaarliikmete kordajad on võrdsed, aga vabaliikmed ei ole võrdsed, siis on nende funktsioonide graafikuiks paralleelsed sirged.

65. Ehitada ühes ning samas teljestikus järgmised sirged:

1) $y=x+2$; $y=x-1$; $y=x-3$
2) $y=-1{,}5x+3$; $y=-1{,}5x+0{,}5$; $y=-1{,}5x-2$

Kuidas asetsevad kummalgi korral sirged üksteise suhtes? Miks?

66. Ehitada ühes ning samas teljestikus järgmised sirged:

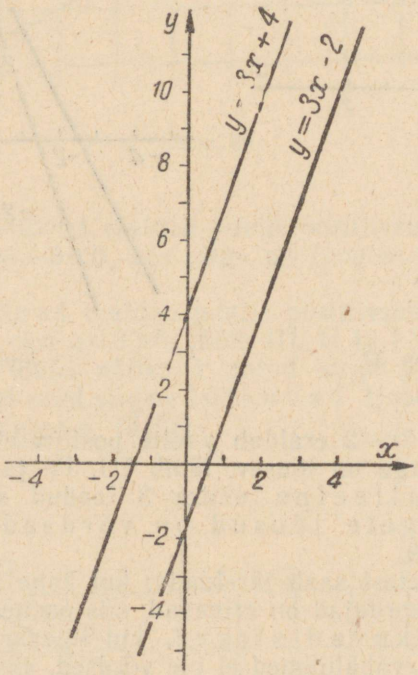
1) $y=-0{,}5x+2$; $y=x+2$; $y=2x+2$
2) $y=x-2$; $y=-x-2$; $y=1{,}5x-2$

Kuidas asetsevad kummalgi puhul sirged üksteise suhtes? Miks?

67. Kirjeldada järgmiste sirgete asendit koordinaatteljestikus (vt. § 5, p. 3):

$y=3x+7$; $y=2x-5$; $y=-2x+3$; $y=-2x-5$;
$y=-2x+7$; $y=2x+3$; $y=-3x-4$; $y=1{,}5x-4$.

Millised kaks neist sirgeist on paralleelsed? Millistel on võrdsed algordinaadid?



Joon. 39

Kordamiseks.

68. Millist sõltuvust nimetatakse võrdeliseks sõltuvuseks?

69. Milline omadus on võrdelistel suurustel positiivsete arvude hulgas?

70. Milliseid tehteid võib teha arvuga null? Milliseid mitte?

71. Milliseid väärtusi võivad omada tähed järgmistes murdudes?

Milliseid mitte? Põhjendus!:

$$\frac{3}{a};\ \frac{5}{b};\ \frac{6}{5-a};\ \frac{7}{a+2};\ \frac{27}{2a+1};\ \frac{3+a}{x-5}.$$

72. Kuidas arvutatakse ristküliku, rööpküliku, kolmnurga, trapetsi pindala?

73. Järjestada järgmised arvud kasvavas järjekorras:
5; −2; 3,5; −1,7; 0; −0,1; −8,7; 4,8; −4,8.

74. Leida järgmiste arvude pöördarvud:
2; 3; 4; 8; 10; 0,5; 0,3; 0,8; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{8}$.

§ 6. PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS

1. Definitsioon. Peenramaaks on ristkülikukujuline maatükk pindalaga 64 m^2. Kui pikad on selle ristküliku küljed?

Antud ülesanne on ilmselt määramatu. Tõepoolest, tähistades ristküliku kahe lähiskülje pikkused tähtedega m ja n, saame tingimuse: $mn=64$. Selliseid arvupaare, milledes arvude korrutis on 64, on aga lõpmata palju (näiteks 1 ja 64; 4 ja 16 jt.). Neid arvupaare võib saada, kui anname võrduses $mn=64$ ühele küljele, näiteks m, mitmesuguseid arvulisi väärtusi ja arvutame teise külje pikkused valemist $n=\frac{64}{m}$. Arvutuse tulemused on esitatud alljärgnevas tabelis, kus ühe külje igale pikkusele vastab teise külje kindel pikkus:

m	1	2	4	6	8	10	16	32	64	...
n	64	32	16	$10\frac{2}{3}$	8	6,4	4	2	1	...

Seega on antud pindalaga ristküliku ühe külje pikkus teise külje pikkuse kui argumendi funktsiooniks. Argumendi ja funktsiooni vaheline sõltuvus on siinjuures aga selline, et nende vastavate väärtuste korrutised on võrdsed jääva arvuga (toodud näites 64). Selline sõltuvus kannab **pöördvõrdelise sõltuvuse** nime.

Kui tähistada argument tähega x, funktsioon tähega y ja jääv arv tähega a, siis võime pöördvõrdelise sõltuvuse defineerida järgmiselt:

sõltuvust kahe muutuva suuruse x ja y vahel nimetatakse pöördvõrdeliseks sõltuvuseks, kui nende suuruste vastavate väärtuste korrutis on võrdne jääva arvuga a.

Sümbolid (valemi abil):

$$\boxed{xy=a}, \text{ millest } \boxed{y=\frac{a}{x}}$$

Suurusi, mis on pöördvõrdelises sõltuvuses, nimetatakse **pöördvõrdelisteks suurusteks.**

Kui tahame veenduda, kas kaks suurust on pöördvõrdelised, siis peame näitama, et nendevahelist sõltuvust saab esitada ühega toodud valemitest.

Näiteid. 1) Antud rahasumma a (näiteks 10 rbl.) korral on ostetava kauba hulk M ja kauba tükihind h pöördvõrdelises sõltuvuses, sest

$$M=\frac{a}{h} \text{ ehk } Mh=a.$$

2) Ühtlasel liikumisel on antud teepikkuse s puhul liikumise kiirus v ja tee läbimiseks kulunud aeg pöördvõrdelised, sest $vt=s$.

3) Kui kaks muutuvat suurust x ja y on seotud võrdusega

$$\frac{2xy}{3}=16,$$

siis need suurused on pöördvõrdelised, sest antud võrdust saab teisendada järgmiselt:

$$\frac{2}{3}xy=16; \qquad xy=16:\frac{2}{3}=\frac{16\cdot 3}{2}=24,$$

millest selgubki nende suuruste pöördvõrdelisus.

Näidetes 1 ja 2 vaadeldud ülesanded olid sellise sisuga, et neis esinevad suurused võisid omada ainult positiivseid väärtusi.

Positiivsete arvude hulgas iseloomustab pöördvõrdelisi suurusi järgmine omadus:

kui üks suurus suureneb (väheneb) mingi arv korda, siis teine suurus väheneb (suureneb) sama arv korda.

Selgesti ilmneb see omadus punktis 1 antud tabelis, kus ristküliku ühe külje suurenemine mingi arv korda põhjustab teise külje vähenemise sama arv korda.

Kui ülesande sisu ei sea pöördvõrdelises sõltuvuses

$$y=\frac{a}{x}$$

olevate suuruste kohta kitsendusi, siis võib arv a olla ka nega-

tiivne; argument x ja sellest sõltuvalt funktsioon y võivad aga omada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

N ä i d e. Andes sõltuvuses $y=-\frac{2}{x}$ (siin $a=-2$) argumendile näiteks väärtused -2; -1; 1; 2; 4, saame funktsiooni väärtusteks vastavalt 1; 2; -2; -1; $-0{,}5$. Toodud näitest selgub ka, et positiivsete arvude hulgas kehtiv pöördvõrdeliste suuruste omadus ei kehti negatiivsete arvude hulgas. Tõepoolest, kui näiteks $x=2$, siis $y=-1$; kui $x=4$, siis $y=-0{,}5$. Siit selgub, et argumendi s u u r e n e m i n e kaks korda ei põhjusta funktsiooni v ä h e n e m i s t, sest $-0{,}5>-1$.

Ülesande sisust olenemata maksab aga argumendi x väärtuste suhtes alati üks kitsendus, nimelt: $x\neq 0$, sest nulliga ei saa jagada.

Pöördvõrdelise sõltuvuse korral ei saa argumendi väärtus olla null.

75. Näidata, et järgmised suuruste paarid kujutavad pöördvõrdelisi suurusi:

1) Antud töö tegemiseks kuluv aeg t ja tööliste arv n, kui kõik töölised töötavad ühesuguse jõudlusega.
2) Rööpküliku alus a ja kõrgus h, kui pindala on jääv.
3) Kolmnurga alus a ja kõrgus h, kui pindala on jääv.
4) Trapetsi kesklõik k ja trapetsi kõrgus H, kui trapetsi pindala on jääv.
5) Silindri põhja pindala S ja silindri kõrgus H, kui silindri ruumala on jääv.
6) Koonuse moodustaja l ja põhja raadius R, kui koonuse külgpindala on jääv.
7) Koonuse põhja pindala S ja koonuse kõrgus H, kui ruumala on jääv.
8) Püramiidi põhja pindala U ja püramiidi kõrgus k, kui ruumala on jääv.

76. Millised järgnevaist valemeist väljendavad pöördvõrdelist sõltuvust, millised võrdelist ja millised lineaarset sõltuvust?

1) $\frac{xy}{3}=\frac{3}{4}$; 2) $\frac{x}{5}=\frac{4}{3y}$; 3) $\frac{a}{2b}=0{,}7$; 4) $\frac{m+n}{2}=6$;

5) $\frac{5}{a-2}=\frac{7}{b+5}$; 6) $\frac{3}{6x}=\frac{4y}{5}$; 7) $\frac{x}{5}=\frac{6y}{7}$; 8) $\frac{3}{2p}=\frac{4}{3q}$

2. Graafik. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafiku saamiseks vaatleme näidet

$$y=\frac{5}{x}$$

Koostame argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste tabeli vahemikus $-10 \leqslant x \leqslant 10$:

x	-10	-8	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$
y	$-0{,}50$	$-0{,}63$	$-0{,}83$	$-1{,}00$	$-1{,}25$	$-1{,}67$	$-2{,}50$	$-5{,}00$	$-6{,}3$	-10

x	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6	8	10
y	10,0	6,30	5,00	2,50	1,67	1,25	1,00	0,83	0,63	0,50

Vastav graafik on esitatud joonisel 40. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on kõverjoon, mida nimetatakse **hüperbooliks.** Hüperbool koosneb kahest eraldi asetsevast harust, millest antud näite korral üks haru on I veerandis, teine haru on III veerandis.

Selgitame selle graafiku abil funktsiooni muutumist, kui argument kasvab, s. o. saab ikka suuremaid ja suuremaid positiivseid väärtusi. Vaadeldes I veerandis olevat hüperbooli haru, selgub, et argumendi kasvades funktsioon kahaneb, sest kõverjoon läheneb x-teljele (kõverjoone punktide ordinaadid vähenevad). Kas on võimalik, et kuskil, nullpunktist väga kaugel hüperbool puudutab x-telge? See ei ole võimalik, sest andes x-le kuitahes suuri positiivseid väärtusi, näiteks 100 000, 1 000 000, 5 000 000 jne., saame y jaoks ikka kindlad positiivsed väärtused 0,00005; 0,000005; 0,000001 jne., olgugi et need väärtused on väga väikesed. Seega on hüperbooli vastavad punktid ikkagi ülalpool x-telge.

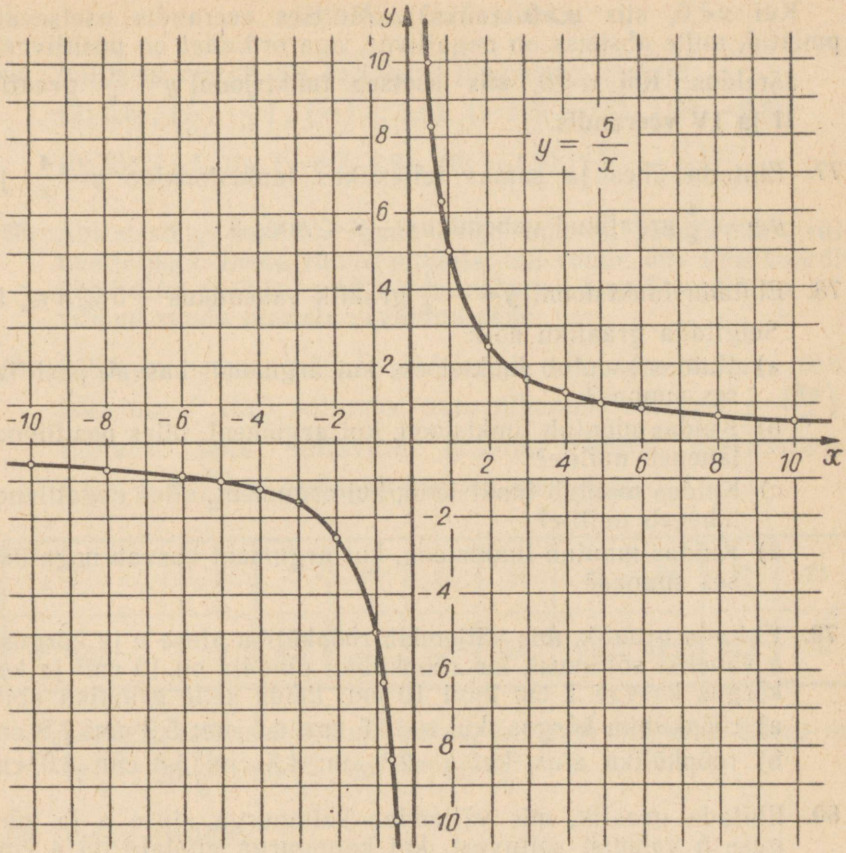
Kuidas muutuvad funktsiooni väärtused, kui argumendi väärtused, olles positiivsed, ikka vähenevad ja vähenevad?

Graafikult selgub ka, et kui $x=0$, siis ei saa funktsiooni jaoks leida mingit väärtust (vt. p. 2). Sel juhtumil öeldakse, et funktsioon katkeb, kui $x=0$.

Lugeja ülesandeks on ehitada funktsiooni $y=-\frac{4}{x}$ graafik vahemikus $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Millistes veerandites asetsevad tekkinud hüperbooli harud?

Et selgitada, millistes veerandites asetsevad hüperbooli harud ühel või teisel korral, uurime pöördvõrdelise sõltuvuse üldist kuju

$$y=\frac{a}{x}$$



Joon. 40

1) $a > 0$.

Kui $x>0$, siis $y>0$, sest kahe positiivse arvu a ja x jagatis on positiivne. Sellised punktid, mille mõlemad koordinaadid on positiivsed, asetsevad I veerandis.

Kui $x<0$, siis $y<0$ (miks?). Millises veerandis asetsevad punktid, mille mõlemad koordinaadid on negatiivsed?

Järeldus. **Kui $a>0$, siis asetseb funktsiooni $y=\frac{a}{x}$ graafik I ja III veerandis.**

2) $a<0$.

Kui $x>0$, siis $y<0$ (miks?). Millises veerandis asetsevad punktid, mille abstsiss on positiivne, aga ordinaat on negatiivne?

TRU Raamatukogu

Kui $x<0$, siis $y>0$ (miks?). Millises veerandis asetsevad punktid, mille abstsiss on negatiivne, aga ordinaat on positiivne?

Järeldus. **Kui $a<0$, siis asetseb funktsiooni $y=\frac{a}{x}$ graafik II ja IV veerandis.**

77. Ehitada ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=\frac{4}{x}$ ja $y=-\frac{4}{x}$ graafikud vahemikus $-8\leqslant x\leqslant 8$.

78. Ehitada funktsiooni $y=-\frac{2}{x}$ graafik vahemikus $-5\leqslant x\leqslant 5$. Selgitada graafiku abil:
   a) Kuidas muutub funktsioon, kui argument kasvab positiivses suunas?
   b) Kuidas muutub funktsioon, kui argument, olles positiivne, läheneb nullile?
   c) Kuidas muutub funktsioon, kui argument, olles negatiivne, läheneb nullile?
   d) Kuidas muutub funktsioon, kui argument kasvab negatiivses suunas?

79. Ehitada graafik, mis väljendab rööpküliku aluse a ja kõrguse h vahelist sõltuvust, kui rööpküliku pindala on 10 cm² ja kui kõrgus kasvab 1 cm kuni 10 cm. Leida selle graafiku abil:
   a) rööpküliku kõrgus, kui $a=3{,}5$ cm; 4,5 cm; 5,3 cm; 7,8 cm
   b) rööpküliku alus, kui $h=2{,}5$ cm; 4,5 cm; 5,8 cm; 8,0 cm

80. Ehitada graafik, mis väljendab kolmnurga aluse a ja kõrguse h vahelist sõltuvust, kui kolmnurga pindala on 4 cm² ja kui alus kasvab 1 cm kuni 10 cm. Leida selle graafiku abil:
   a) kolmnurga alus, kui $h=2{,}5$ cm; 3,7 cm; 4,5 cm
   b) kolmnurga kõrgus, kui $a=3{,}5$ cm; 4,0 cm; 6,5 cm

81. Ehitada mm-paberile I veerandis funktsiooni $y=\frac{1}{x}$ graafik, andes x-le väärtusi 0,1; 0,2; ...; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; ...; 2,0; 3; 4; 5; ...; 10. Leida selle graafiku abil järgmiste arvude pöördväärtused:
   a) 0,7; 0,9; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,5; 2,7; 2,8; 3,6; 5,5; 8,6.
   b) 9; 10; 11; 12; 13; 18; 25; 32; 41; 50; 0,57; 0,36; 0,87.

Näpunäide. Kui vastavat arvu ei saa teljelt lugeda, siis nihutame selles arvus koma, nii et teda oleks võimalik lugeda. Pöördväärtuse saamisel peame arvestama, et kui arv suureneb (väheneb) mingi arv korda, siis tema pöördväärtus väheneb (suureneb) sama arv korda.

Üldiseks kordamiseks.

82. Milliseis veerandeis asetsevad järgmised punktid: $(3; 0{,}5)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right)$, $(-1{,}8; 3{,}6)$, $(-1{,}8; -16)$, $(17; -9{,}8)$, $(0; 2)$, $(-5; 0)$, $(-8{,}7; 4{,}9)$, $(0; -1{,}7)$, $\left(\frac{4}{5}; -\frac{1}{3}\right)$?

83. Abstsisstelg poolitab ruudu külje, mis on paralleelne ordinaatteljega. Leida ruudu pindala, kui ruudu ühe tipu koordinaadid on $(-3{,}2; -1{,}8)$. Kas mõlemad koordinaadid on tarvilikud ruudu pindala arvutamiseks?

84. Alljärgnev tabel näitab sõiduautole «Pobeda» mõjuva õhutakistuse F (kg) sõltuvust auto liikumise kiirusest v $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. Ehitada selle sõltuvuse graafik, võttes abstsissteljel 1 cm $\triangleq$ $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja ordinaatteljel 0,5 cm $\triangleq$ 1 kg.

$v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$	0	9	18	27	36	45	54	63	72
F (kg)	0	0,3	1,3	2,8	5,0	7,8	11,2	15,3	20,0

Leida graafiku abil õhutakistus, kui auto liikumise kiirus on $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $23\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $40\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

85. Leida avaldise

$$\frac{10}{x+2}$$

väärtused, kui x saab kõik võimalikud täisarvulised väärtused vahemikus $-8 \leqslant x \leqslant 6$. Ehitada graafik, mis näitab antud avaldise sõltuvust x väärtusest. Millist väärtust ei tohi x omada selles avaldises? Kuidas see kajastub graafikul?

86. Mis on argument? Mis on funktsioon? Tuua näiteid.

87. Millist sõltuvust nimetatakse võrdeliseks sõltuvuseks? Tuua näiteid.

88. Millist sõltuvust nimetatakse lineaarseks sõltuvuseks? Tuua näiteid.

89. Millist tähendust omavad graafikul sõltuvustes $y=ax$ ja $y=ax+b$ olevad konstandid a ja b?

90. Ehitada ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=2x$; $y=-2x$; $y=2x+1$; $y=-2x-1$ graafikud.

91. Ilma graafikuid joonestamata kirjeldada järgmiste sirgete asendit koordinaatteljestikus: $y=1{,}5x$; $y=-3x$; $y=5x+10$; $y=-5x+2$; $y=3x-5$; $y=4x-8$.

92. Lahendada funktsiooni $y=0{,}5x+2$ graafiku abil järgmised võrrandid (vt. ülesanne 64).

$0{,}5x+2=3$; $0{,}5x+2=2{,}5$; $0{,}5x+2=1$; $0{,}5x+2=0$; $0{,}5x+2=-0{,}5$; $0{,}5x+2=2$.

93. Teostada tehted:

1) $\left[\left(\frac{1}{4}-0{,}1:2\right)\cdot\frac{5}{13}+1:\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\frac{3}{8}$

2) $1\frac{1}{2}\cdot(2{,}652:1{,}3-1\frac{17}{30}+0{,}06)\cdot\left[29{,}21-\left(14{,}26-\frac{5}{24}:\frac{25}{42}\right)\right]\left(\frac{3}{8};\ 12{,}24\right)$

94. Kui Moskva metroo avati 1935. a., siis oli sellel 13 jaama ja liini pikkus oli 11,4 km. 1960. a. oli aga 56 jaama ja liini pikkus oli 75,6 km. Mitme protsendi võrra on suurenenud vaadeldaval ajavahemikul jaamade arv ja liini pikkus?

95. Üldhariduslike koolide lõpetajate arvu kasvu Eesti NSV-s iseloomustavad järgmised arvud (tuh. inim.):

Kool / Aastad	1963. a.	1964. a. plaan	1965. a. plaan
Üldhariduslik (päevane)	3,59	4,12	4,72
Üldhariduslik (täiskasvanutele)	2,38	2,63	2,72

Mitme protsendi võrra suurenes koolide lõpetajate arv 1964. a., võrreldes 1963. aastaga
a) päevastes koolides?; b) täiskasvanute koolides?
Lahendada sama ülesanne aastate 1963 ja 1965 kohta.
Mitu protsenti on 1965. aastal üldhariduslike koolide kõigi lõpetajate seas täiskasvanute koolide lõpetajaid?

96. Lahendada järgmised võrrandid:
a) $x-0{,}07-0{,}16-0{,}8x-0{,}09=0{,}02x+0{,}1$.

b) $5+\frac{3+x}{4}=4-\frac{x+5}{3}$

c) $\frac{3x-7}{5}+x-2=8\cdot\left(\frac{3}{4}x-2\right)-\frac{4x-1}{3}$

d) $\frac{x-5}{x+4}=\frac{x+1}{x-8}$

97. Missugune arv on oma vastandarvust 30 võrra suurem?

98. Kahe jaama A ja B vahelise tee läbib reisirong 45 min. kiiremini kui kaubarong. Leida jaamadevaheline kaugus, kui on teada, et reisirongi kiirus on 48 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja kaubarongi kiirus on 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Kodune kontrolltöö nr. 1.

1. Millistes veerandites asetsevad järgmised punktid: (3,5; 2), (4; −0,8), (−7,6; −4), (−87; 32), (−4,7; −5), (0; −2), (−4,9; 0), (0; 0).

2. Koordinaatteljestikku on paigutatud trapets, mille tippude koordinaadid on (−3,2; −5,6), (−1,3; 0,7), (4,8; −5,6), (3,4; 0,7). Arvutada selle trapetsi pindala.

3. Malmtorusid saab valada tsentrifugaalvaluga, mille puhul sulamalm valatakse kiiresti pöörlevasse vormi. Vormi pöörlemise kiirus n oleneb valatava toru välimisest raadiusest R järgmiselt:

R(cm)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n\left(\frac{\text{pööret}}{\text{min.}}\right)$	1270	1040	900	805	735	680	637	600	570	543	520	500	480	465

Ehitada selle tabeliga määratud sõltuvuse graafik, võttes abstsissteljel 1 cm $\doteq$ 1 cm ja ordinaatteljel 2 cm $\doteq$ 100 $\frac{\text{pööret}}{\text{min.}}$

Selgitada graafiku abil: a) kui suur peab olema vormi pöörlemise kiirus, kui R=2,5 cm; 3,5 cm; 6,5 cm; 9,5 cm; 10,3 cm; 12,7 cm; 14,5 cm? b) Kui suure raadiusega torusid saab valada, kui vormi pöörete arv minutis on 1200; 1000; 850; 700; 650; 550; 450?

4. Millist sõltuvust kujutab iga alljärgnev võrdus:

1) $\frac{x}{3y}=7$; 2) $3x=5y$; 3) $\frac{4}{5x}=\frac{3}{2y}$; 4) $\frac{3x+2}{y}=\frac{3}{2}$;

5) $\frac{3x}{7}=\frac{8}{5y}$; 6) $\frac{3}{5y+7}=\frac{4}{x+2}$.

5. Ehitada funktsiooni $y=-\frac{5}{2x}$ graafik vahemikus $-5\leqslant x\leqslant 5$.

6. Ehitada ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=-x+1$ ja $y=0{,}8x+2$ graafikud. Missugusel x väärtusel on mõlema funktsiooni väärtused võrdsed? Millisel x väärtusel

on kummagi funktsiooni väärtus null? Nimetada kaks x väärtust, mille puhul esimese funktsiooni väärtused on negatiivsed. Leida need negatiivsed funktsiooni väärtused. Nimetada kaks x väärtust, mille puhul teise funktsiooni väärtused on positiivsed. Leida need positiivsed funktsiooni väärtused.

II PEATÜKK

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID

§ 7. KAHE TUNDMATUGA LINEAARVÕRRAND

1. Definitsioon. Kahe tundmatuga lineaarvõrrandi tundmaõppimiseks vaatleme kaht alljärgnevat näidet.

Näide 1. Kolhoosil on ratas- ja linttraktoreid, kokku 12 masinat. Mitu ratastraktorit ja mitu linttraktorit on kolhoosil?

Tähistame ratastraktorite arvu tähega x ja linttraktorite arvu tähega y. Ülesande tingimuste kohaselt saame siis võrrandi:

$$x+y=12,$$

milles on kaks tundmatut, kusjuures mõlemad on esimeses astmes.

Saadud võrrandit rahuldavad näiteks järgmised arvupaarid:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=7, \end{cases}$$

sest $1+11=12$; $3+9=12$; $5+7=12$.

Siit selgub, et ülesandes antud tingimuste kohaselt pole võimalik seda ülesannet üheselt lahendada, s. t. ei ole võimalik öelda, mitu ratas- ja mitu linttraktorit on tegelikult kolhoosil. Sel puhul öeldakse, et ülesanne on määramatu.

Leida veel arvupaare, mis seda võrrandit rahuldavad. Kas iga arvupaar, mis rahuldab võrrandit, võib olla ka antud ülesande lahendiks (näit. $x=3{,}5$; $y=8{,}5$)?

Näide 2. Ma mõtlesin kaks arvu. Kui ma esimese arvu korrutasin kahega ja teise kolmega ning liitsin saadud korrutised, sain 6. Mis arvud ma mõtlesin?

Tähistame esimese mõeldud arvu tähega x ja teise tähega y. Saame kahe tundmatuga võrrandi:

$$2x+3y=6.$$

Seda võrrandit rahuldavad näiteks järgmised arvupaarid:

$$\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=2\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Tõepoolest, $2\cdot 6+3\cdot(-2)=12-6=6, \ldots$ Teiste arvupaaride kontroll jääb raamatu kasutaja teha. Leida veel arvupaare, mis antud võrrandit rahuldavad.

Vastus. Antud ülesanne on määramatu.

Näidetes 1 ja 2 antud ülesannete põhjal koostatud võrrandid on kahe tundmatuga esimese astme võrrandid ehk kahe tundmatuga lineaarvõrrandid.

Kahe tundmatuga lineaarvõrrandiks nimetatakse võrrandit $ax+by=c$, kus x ja y tähistavad tundmatuid ning a, b ja c tähistavad antud arve.

Näiteid.

1) Võrrandis $x+y=12$ on $a=1$, $b=1$ ja $c=12$.
2) Võrrandis $2x+3y=6$ on $a=2$, $b=3$ ja $c=6$.
3) Võrrandis $5x-7y=-8{,}6$ on $a=5$, $b=-7$ ja $c=-8{,}5$.
4) Võrrandis $5x=16$ ehk $5x+0y=16$ on $a=5$; $b=0$ ja $c=16$.
5) Võrrandis $-15x-0{,}7y=0$ on $a=-15$, $b=-0{,}7$ ja $c=0$.

Arvupaari, mis rahuldab kahe tundmatuga lineaarvõrrandit, nimetatakse selle võrrandi lahendiks.

99. On antud võrrand $2x+y=5$. Millised järgnevaist arvupaaridest on selle võrrandi lahendid?:

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2{,}5 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$

100. On antud võrrand $\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y=1$. Millised järgnevaist arvupaaridest on selle võrrandi lahendid?:

$\begin{cases} x=0 \\ y=-1\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1{,}5 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{5}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-\frac{25}{24} \end{cases}$

2. Lahendite leidmine. Kahe tundmatuga lineaarvõrrand omab lõpmatu hulga lahendeid.

Tõepoolest, näiteks võrrandis $3x-2y=4$ võib ühele tundmatule anda meelevaldselt mistahes väärtusi. Pärast nende väärtuste paigutamist antud võrrandisse tundmatu asemele saame ühe tundmatuga võrrandid, millest saab leida teise tundmatu vastavad väärtused. Kui näiteks anda toodud võrrandis x väärtused 1; 2; 3; -2; 3; 6, siis saame viis ühe tundmatuga võrrandit:

$$3\cdot 1-2x=4;\ 3\cdot 2-2y=4;\ 3\cdot 3-2y=4;\ 3\cdot(-2)-2y=4;$$
$$3\cdot(-3{,}6)-2y=4.$$

Esimesest võrrandist saame:

$$-2y=4-3;\ y=-\frac{1}{2}.$$

Teisest võrrandist saame:

$$-2y=4-6;\ y=1.$$

Järgmistest võrranditest saaksime y väärtusteks vastavalt: 2,5; -5; $-7{,}4$. Tundmatute vastavate väärtuste paarid

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2{,}5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3{,}6 \\ y=-7{,}4 \end{cases}$$

ongi antud võrrandi lahenditeks, sest iga paar rahuldab seda võrrandit.

Kontrollime näiteks viimast lahendit:

$$3\cdot(-3{,}6)-2\cdot(-7{,}4) = -10{,}8+14{,}8=4.$$

Teiste lahendite kontroll on lugeja ülesandeks.

On ilmne, et selliseid arvupaare, mis rahuldavad antud võrrandit, võib leida kuitahes palju (sest ühele tundmatule võib anda kuitahes palju väärtusi).

Kahe tundmatuga lineaarvõrrandi lahendamiseks on otstarbekas eelnevalt avaldada üks tundmatu (see, mille avaldamine on lihtsam) teise kaudu.

Näide. Leida võrrandi $6x-3y=4$ sellised lahendid, kus $x=-3; -2; -1; 0; 1; 1{,}5; 2; 3{,}5; 4; 5$.

Avaldame antud võrrandist y. Saame

$$-3y=4-6x \mid :(-3);$$

$$y=-\frac{4}{3}+\frac{6}{3}x; \quad y=2x-1\frac{1}{3}.$$

Asendades viimases võrrandis x ülesandes antud väärtustega, saamegi pärast arvutamist y vastavad väärtused:

kui $x=-3$, siis $y=2\cdot(-3)-1\frac{1}{3}=-6-1\frac{1}{3}=-7\frac{1}{3}$;

kui $x=-2$, siis $y=2\cdot(-2)-1\frac{1}{3}=-4-1\frac{1}{3}=-5\frac{1}{3}$;

.....

.....

Arvutuse võib korraldada järgmises tabelis:

x	-3	-2	-1	0	1	$1{,}5$	2	$3{,}5$	4	5
$2x$	-6	-4	-2	0	2	3	4	7	8	10
$y=2x-1\frac{1}{3}$	$-7\frac{1}{3}$	$-5\frac{1}{3}$	$-3\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$

Seega on antud võrrandi nõutavaiks lahendeiks:

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=-7\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-5\frac{1}{3}\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=8\frac{2}{3} \end{cases}$$

Märkus. Kui võrrand on koostatud mingi tekstülesande järgi, siis võib ülesande sisu seada tundmatute väärtuste kohta teatavaid kitsendusi ja sel juhtumil ei tarvitse ülesandel olla lõpmata palju lahendeid (vt. p. 1, näide 1, kus ülesande lahendites võivad esineda ainult 12-st vähemad positiivsed täisarvud).

101. Avaldada x:

1) $3x-7y=6$; 2) $-5x-6y=7$; 3) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y=-\frac{1}{8}$.

102. Avaldada y:

1) $4x-3y=6$; 2) $-6x-4y=5$; 3) $0{,}8x+0{,}4y=0{,}5$.

103. Leida igale alljärgnevale võrrandile viis lahendit:

1) $x-y=7$; 2) $3x-7y=4$; 3) $0{,}8x-0{,}2y=-1{,}4$;

4) $1\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{1}{5}$; 5) $-2{,}5x-0{,}8y=\frac{3}{4}$;

6) $8x-9y=\frac{1}{2}$

104. Leida igale alljärgnevale võrrandile viis lahendit, kus $x=1$; 2; $-0{,}5$; $-1{,}5$; 0:

1) $2x-y=3$; 2) $3x-7y=-3$; 3) $-0{,}7x+5y=8$

105. Leida igale alljärgnevale võrrandile viis lahendit, kus $y=-2$, $-1{,}5$; 0; 1; $2\frac{1}{3}$.

106. Leida puuduv arv alljärgnevais arvupaarides, nii et need arvupaarid oleksid võrrandi $3x+5y=6$ lahenditeks:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} x=\ldots \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} x=\ldots \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\ldots \end{cases}$$

107. Kolhoosi põllutööbrigaadis on kokku 13 noormeest ja neiut. Mitu noormeest ja neiut on brigaadis? Koostada vastav võrrand ja leida sellele kolm lahendit, mis rahuldavad antud ülesande tingimusi. Mitu lahendit on antud ülesandel?

108. Jüril on 3- ja 5-kopikasi münte, kokku 55 kop. väärtuses. Mitu 3-kopikast ja 5-kopikast münti on Jüril? Koostada vastav võrrand ja leida sellele vähemalt üks lahend, mis rahuldab ülesande tingimusi.

3. **Graafik.** Eelmise punkti näidetes selgub, et kui kahe tundmatuga lineaarvõrrandis ühe tundmatu (näit. x) väärtused on antud, siis teise tundmatu väärtusi ei saa enam vabalt valida, vaid nad sõltuvad esimese tundmatu väärtustest; teine tundmatu on seega esimese tundmatu funktsioon. Vaatame, missugune on nende tundmatute vaheline sõltuvus.

Võrreldes eespool toodud näites ühe tundmatu suhtes lahendatud võrrandit:

$$y=2x-1\frac{1}{3}$$

lineaarfunktsiooni valemiga (§ 5, p. 1)

$$y=ax+b,$$

näeme, et kahe tundmatuga lineaarvõrrandi tundmatute vahel valitseb lineaarne sõltuvus.

Et lineaarse sõltuvuse graafikuks on sirge, siis peab ka kahe tundmatuga lineaarvõrrandi tundmatute vahel valitseva sõltuvuse graafik olema sirge. Siit järeldus, et

kahe tundmatuga lineaarvõrrand on sirgjoone võrrand (vt. märkus 2, lk. 39).

See selgub ka jooniselt 41, kus koordinaatteljestikus ringikestena märgitud punktide koordinaatideks on võetud võrrandit $x+y=2$ rahuldavad arvupaarid. Need arvupaarid on esitatud järgnevas tabelis:

x	-4	-2	0	2	4
y	6	4	2	0	-2

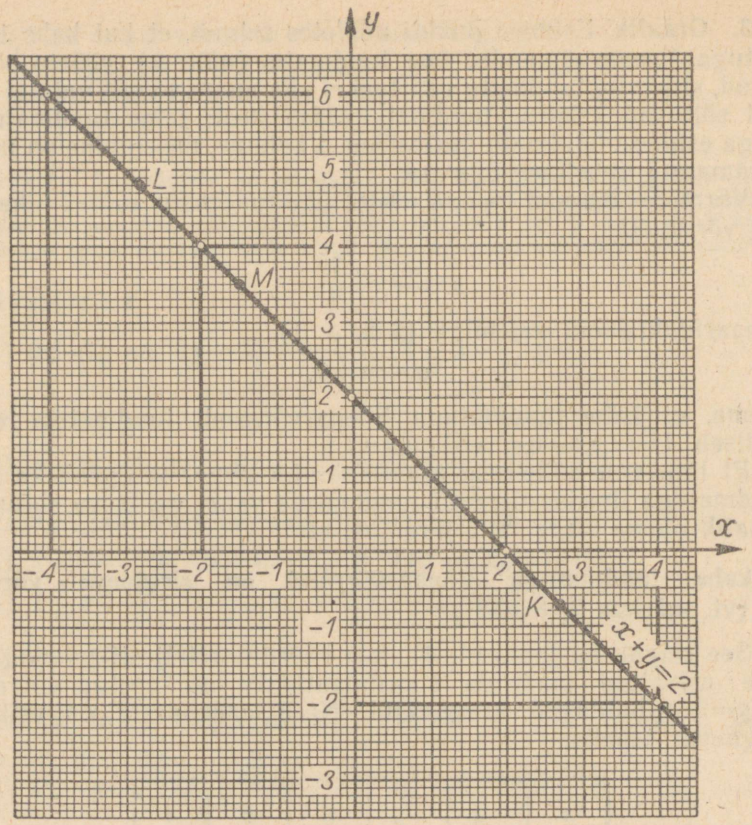
Ilmselt asetsevad need punktid kõik ühel sirgel. Võttes sellel sirgel vabalt mingi punkti, näiteks M $(-1,5;\ 3,5)$ ja paigutades need koordinaadid antud võrrandisse, selgub et võrrand on rahuldatud. Tõepoolest, $-1,5+3,5=2$.

Kontrollida, kas ka punktide K ja L koordinaadid rahuldavad antud võrrandit!

Kahe tundmatuga lineaarvõrrandi poolt määratud sirge ehitamiseks kahe punkti järgi kasutatakse tavaliselt otsitava sirge ja koordinaattelgede lõikepunkte. Neid punkte on kerge leida, sest koordinaatteljel asetseva punkti üks koordinaat on null.

Näide 1. Ehitada sirge $4x+3y=8$.

Leiame esiteks punkti, kus sirge lõikab y-telge. Sel puhul $x=0$; y vastava väärtuse saame võrrandist



Joon. 41

$$4 \cdot 0 + 3y = 8; \quad y = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Seega üks vajalik punkt on $A\left(0; 2\frac{2}{3}\right)$.

Nüüd leiame punkti, kus sirge lõikab x-telge. Sel korral $y=0$; x vastava väärtuse saame võrrandist

$$4x + 3 \cdot 0 = 8; \quad x = \frac{8}{4} = 2.$$

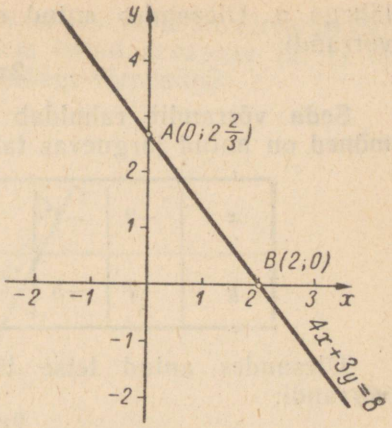
Teine vajalik punkt on $B(2; 0)$.

Punktide A ja B järgi joonestamegi sirge $4x+3y=8$ (joonis 42).

Näide 2. Sirge $-2x+3y=-7$ joonestamiseks saab kasutada punkte $A(0; -2\frac{1}{3})$ ja $B(3{,}5; 0)$, sest kui $x=0$, siis $-2 \cdot 0+$

$+3y=-7$, millest $y=-2\frac{1}{3}$; kui $y=0$, siis $-2x+3\cdot 0=7$, millest $x=3{,}5$.

Märkus. Kui sirge ja koordinaattelgede lõikepunktid on teineteisele väga lähedal, nii et nende järgi on sirget raske joonestada, siis tuleb kasutada veel mõnd kolmandat punkti, andes ühele tundmatule mingi sobiva väärtuse, ning arvutada siis teise tundmatu vastav väärtus.



Joon. 42

109. Missuguseid koordinaattelgede punkte läbivad järgmised sirged?

1) $3x-y=3$; 2) $5x-3y=7$; 3) $4x+5y=-6$.

110. Ehitada mm-paberile sirge, mille võrrand on $x-2y=4$, ja leida selle abil antud võrrandi viis lahendit.

111. Ehitada ühes ning samas teljestikus sirged, mille võrrandid on $2x-y=2$ ja $x+y=1$. Leida kummalegi võrrandile kolm lahendit. Missugune lahend on mõlemal võrrandil ühine?

112. Ehitada ühes ning samas teljestikus sirged, mille võrrandid on $3x-2y=-4$ ja $3x-2y=2$. Leida kummagi võrrandi kolm lahendit. Kas on olemas lahendit, mis on mõlemal võrrandil ühine?

113. Ehitada ühes ning samas teljestikus sirged $3-3x+1{,}5y=3$ ja $-4{,}5x+2{,}25y=4{,}5$. Leida kummagi võrrandi kolm lahendit. Missugune lahend on mõlemal võrrandil ühine?

§ 8. KAHE TUNDMATUGA LINEAARNE VÕRRANDISÜSTEEM JA SELLE GRAAFILINE LAHENDAMINE.

1. Definitsioon. Vaatleme ülesannet:
leida kaks arvu, mis rahuldavad järgmisi tingimusi: kui esimest arvu korrutada kahega ja tulemusest lahutada teine arv, siis saab 3; kui aga esimest arvu korrutada kahega ja tulemusele liita teine arv, siis saab 5.

Lahendus. Tähistame esimese arvu tähega x ja teise arvu

tähega y. Ülesandes antud esimese tingimuse kohaselt saame võrrandi

$$2x-y=3$$

Seda võrrandit rahuldab lõpmatu hulk arvupaare, millest mõned on antud järgnevas tabelis:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Ülesandes antud teise tingimuse järgi saame veel teise võrrandi:

$$2x+y=5,$$

mida samuti rahuldab lõpmatu hulk arvupaare, näiteks:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	7	5	3	1	-1	-3	-5

Tabelite võrdlemisel selgub, et üks arvupaar, nimelt

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

rahuldab mõlemat võrrandit. See arvupaar on mõlema võrrandi ühiseks lahendiks. See nende ühine lahend on ka meie ülesande lahendiks, sest ta täidab kõiki ülesandes antud tingimusi. Tõepoolest:

$$2\cdot 2-1=3;\ 2\cdot 2+1=5.$$

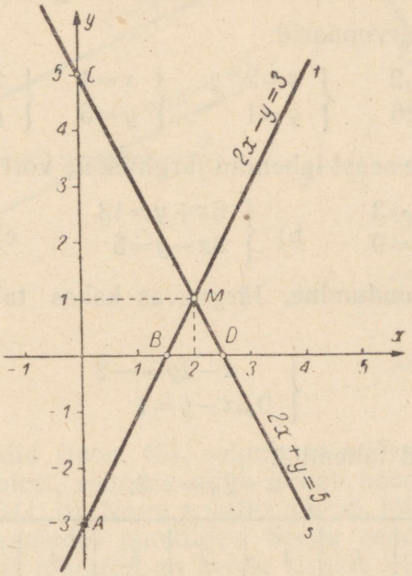
Kaks kahe tundmatuga lineaarset võrrandit, millele otsitakse ühist lahendit, moodustavad kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi. Mõlema võrrandi ühist lahendit nimetatakse võrrandisüsteemi lahendiks.

Võrrandid, mis moodustavad süsteemi, kirjutatakse teineteise alla ja ühendatakse omavahel loogelise suluga. Eelmise näite korral saame:

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

2. Ühene lahend. Lugejal võib tekkida küsimus: kui punktis 1 toodud tabeleist leida mõlemale võrrandile ikka uusi ja uusi

lahendeid, kas siis nende seas võib veel olla mõlema võrrandi ühiseid lahendeid? Teiste sõnadega: kas leitud arvupaar (2; 1) on ainus arvupaar, mis rahuldab kumbagi võrrandit?



Joon. 43

Sellele küsimusele vastamiseks ehitame ühes ning samas teljestikus sirged, mille võrrandeiks on antud süsteemi kuuluvad võrrandid. (Vt. § 7, p. 3.) Esimese sirge ehitame punktide $A(0; -3)$ ja $B(1{,}5; 0)$ järgi; teise sirge ehitame punktide $C(0; 5)$ $D(2{,}5; 0)$ järgi (joon. 43). Võrrandit $2x-y=3$ rahuldavad ainult sirgel t olevate punktide koordinaadid (vt. § 7, p. 3); võrrandit $2x+y=5$ rahuldavad aga sirgel s olevate punktide koordinaadid. Mõlema võrrandi ühiseks lahendiks on siis sirgete ühise punkti, s. o. nende sirgete lõikepunkti M koordinaadid 2 ja 1, nagu juba varem leitud.

Et kaks lõikuvat sirget omavad ainult ühe ühise punkti, siis on ka antud võrrandisüsteemil ainult üks lahend.

114. Ehitada ühes ning samas teljestikus sirged $2x+y=5$ ja $3x-y=5$. Missugune järgnevaist arvupaaridest rahuldab süsteemi

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=5? \end{cases}$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-5 \end{cases}$

Missugune nendest ei rahulda kumbagi võrrandit?

115. On antud arvupaarid:

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2{,}2 \\ y=0{,}6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Leida nende seast lahendid järgmistele võrrandisüsteemidele:

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ -x+4y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x+y=13 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

3. Lahendi puudumine. Järgnevas kahes tabelis on esitatud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x-2y=-2 \\ 0{,}5x-y=1 \end{cases}$$

võrrandite mõned lahendid.

$x-2y=-2$:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4

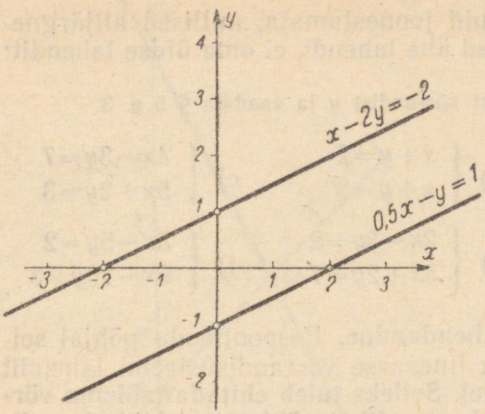
$0{,}5x-y=1$:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2

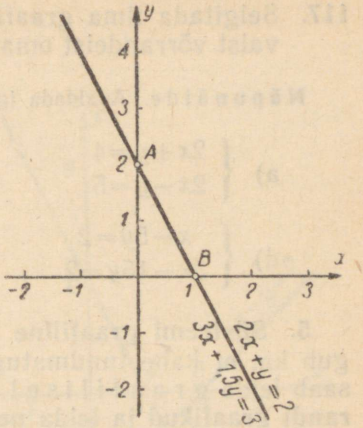
Tabelites olevate lahendite hulgas ei ole antud süsteemi lahendit. Kui tabeleid pikendada, kas on siis loota, et me leiame süsteemi lahendi? Vastuse sellele küsimusele annab joonis 44, kus on joonestatud antud võrranditega määratud sirged. Et need sirged on paralleelsed, siis nendel puudub ühine punkt ja seetõttu antud võrrandisüsteemil ei ole lahendit olemas.

4. Süsteemi määramatus. Ehitanud sirged, mille võrranditeks on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+1{,}5y=3 \end{cases}$$



Joon. 44



Joon. 45

kuuluvad võrrandid (joon. 45), selgub, et mõlemad sirged langevad ühte. Tõepoolest, esimene sirge lõikab koordinaattelgi punktides $A(0; 2)$ ja $B(1; 0)$. Nagu arvutus näitab, lõikab ka teine sirge koordinaattelgi samades punktides. Seega need sirged peavadki ühte langema. Sel juhtumil on nende sirgete kõik punktid ühised ja järelikult iga arvupaar, mis rahuldab üht võrrandit, rahuldab ka teist. Sellisel juhul omab võrrandisüsteem lõpmatu hulga lahendeid või süsteem on määramatu. Nii näiteks rahuldavad esimest võrrandit arvupaarid

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0{,}5 \\ y=1 \end{cases}$$

Lihtne kontroll näitab, et samad arvupaarid on ka teise võrrandi lahenditeks.

Kokkuvõttes võime öelda:

vastavalt sellele, kas kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi võrranditega määratud sirged lõikuvad, on paralleelsed või langevad ühte, omab süsteem kas ühe lahendi, ei oma üldse lahendit, või omab lõpmatu hulga lahendeid.

116. Selgitada graafilisel teel, milline alljärgnevaist võrrandisüsteemidest omab ühe lahendi, ei oma üldse lahendit, omab lõpmatu hulga lahendeid:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+7{,}5y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+4y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$

117. Selgitada ilma graafikuid joonestamata, millised alljärgnevaist võrrandeist omavad ühe lahendi, ei oma üldse lahendit:

Näpunäide. Avaldada igast võrrandist y ja vaadata § 5 p. 3.

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 5x+2y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-5y=2 \\ 3x-15y=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 5x+2y=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x-5y=2 \\ 6x-10y=3 \end{cases}$

5. Süsteemi graafiline lahendamine. Eespooltoodu põhjal selgub ka, et kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendit saab leida g r a a f i l i s e l teel. **Selleks tuleb ehitada mõlema võrrandi graafikud ja leida nende graafikute ühiste punktide koordinaadid, mis ongi antud võrrandisüsteemi lahenditeks.**

Märkus. Et praktikas omavad peamist tähtsust sellised võrrandisüsteemid, mis omavad ainult ühe lahendi (sirged lõikuvad), siis allpool vaatlemegi ainult neid.

Näide 1. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Lahendus. Ehitame ühes ning samas teljestikus kummagi võrrandiga määratud sirge, selleks leiame nende sirgete ja koordinaattelgede lõikepunktide koordinaadid. Esimene sirge lõikab telgi punktides $A(0;\ 7)$ ja $B(3{,}4;\ 0)$; teine punktides $C(0;\ 1)$ ja $D(-1;\ 0)$ (joon. 46). Jooniselt näeme, et sirgete lõikepunkti M koordinaadid on: $x=2$ ja $y=3$.

Kontroll. Kontrollimiseks paigutame x ja y leitud väärtused süsteemi mõlemasse võrrandisse:

$$2\cdot 2+3=7;\ 2-3=-1$$

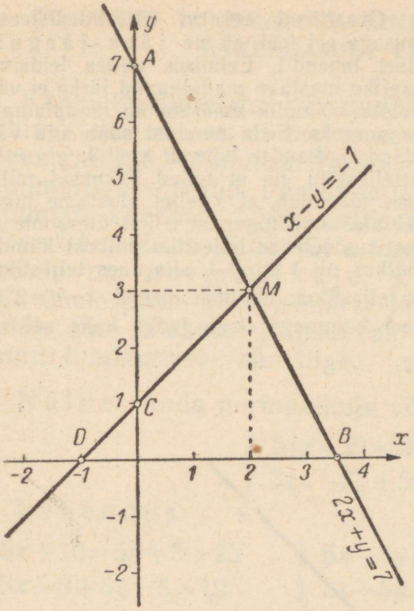
Vastus.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

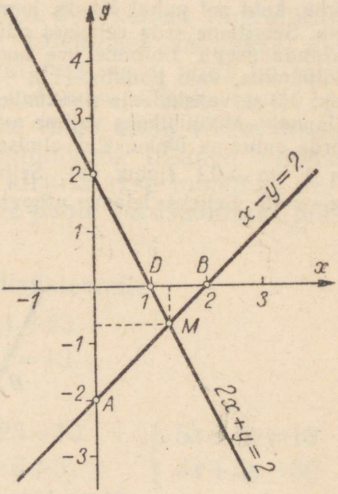
Näide 2. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$

Lahendus. Joonisel 47 on ehitatud esimene sirge punktide $A(0;\ -2)$ ja $B(2;\ 0)$ järgi, teine punktide $C(0;\ 2)$ ja $D(1;\ 0)$ järgi.



Joon. 46



Joon. 47

Jooniselt leiame sirgete lõikepunkti $M(1{,}3;\ -0{,}6)$.

Kontroll:

$$1{,}3-(-0{,}6)=1{,}9;\ 2\cdot 1{,}3-0{,}6=2.$$

Kontroll näitab, et esimene võrrand ei ole täpselt rahuldatud. See ebatäpsus on tingitud sellest, et graafiku joonistamine ja graafikult punkti koordinaatide lugemine on seotud alati vigadega.

Vastus.

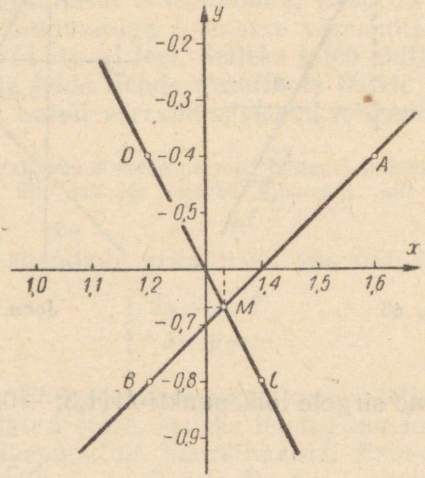
$$\begin{cases} x\approx 1{,}3 \\ y\approx -0{,}6 \end{cases}$$

118. Lahendada graafiliselt alljärgnevad võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x+y=4 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 13x+12y=26 \\ 5x+10y=18 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 6x+5y=12 \\ 3x-3y=8 \end{cases}$

6. Lahendi graafiline parandamine. Graafilisel teel on võrrandisüsteemi lahendit võimalik leida ka suurema täpsusega sel teel, et me järk-järgult parandame esialgu leitud ligikaudset lahendit. Eelmises näites leidsime graafikult lahendi kümnendikud, kuid graafiku mastaap madalamaid järke ei võimalda leida. Suurema mastaabi korral oleks võimalik määrata ka madalamaid järke, kuid sel puhul läheks joonis liiga suureks. Seda puudust saab aga vältida. Selgitame seda eelmises näites saadud ligikaudse lahendi $x \approx 1{,}3$; $y \approx -0{,}6$ parandamisega. Ehitame uue koordinaatteljestiku, nii et teljed lõikuksid mitte nullpunktis, vaid punktis (1,3; −0,6); see tähendab, et x-teljel alustame lugemist 1,3-st vasakule ja paremale, y-teljel alustame lugemist 0,6-st ülespoole ja allapoole. Mõõtühikuks valime uues teljestikus eelmise teljestiku ühikust kümme korda suurema ühiku. Kui eelmises teljestikus oli 1 cm $\triangleq$ 1, siis uues teljestikus on 1 cm $\triangleq$ 0,1 (joon. 48). Selles uues teljestikus ehitame sirged $x-y=2$ ja $2x-y=2$. Selleks leiame proovimise teel kummagi sirge jaoks kaks sobivat



Joon. 48

punkti. Võttes esimeses võrrandis $x=1{,}6$, saame, et $y=-0{,}4$; võttes aga $x=1{,}2$, on $y=-0{,}8$. Punkte $A(1{,}6;\ -0{,}4)$ ja $B(1{,}2;\ -0{,}8)$ ongi sobiv kasutada esimese sirge ehitamiseks. Teise sirge ehitamiseks on kasutatud punkte $C(1{,}4;\ -0{,}8)$ ja $D(1{,}2;\ -0{,}4)$. Sirgete lõikepunkti M täpsemaiks koordinaatideks saame nüüd 1,33 ja −0,66. Seega võrrandisüsteemi lahendiks kahe kohaga koma järel on

$$\begin{cases} x \approx 1{,}33 \\ y \approx -0{,}66 \end{cases}$$

Tahtes leida ka tuhandike numbreid, peaksime ehitama uue teljestiku alguspunktiga (1,33; −0,66), kusjuures kujutusühikuks oleks 1 cm $\triangleq$ 0,01.

Võrrandisüsteemi graafiline lahendamine annab enamikul juhtumeil ainult ligikaudse lahendi. Kuigi graafikult saadavast täpsusest sageli piisab (pealegi on ligikaudset lahendit võimalik järk-järgult parandada), on selline lahendusviis seotud suure ajakuluga ja seepärast ta lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamisel suurt rakendust ei leia. On olemas võtteid, mis võimaldavad leida kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi täpse lahendi. Nende võtetega tutvume järgnevais paragrahvides.

§ 9. KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE LIITMISVÕTTEGA.

Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi lahendamise juhtivaks põhimõtteks on see, et teatavate võtetega üks kahest tundmatust kõrvaldatakse (elimineeritakse). Selle tulemusel saadakse ühe tundmatuga võrrand. Pärast selle lahendamist saab leida ka teise tundmatu väärtuse. Üheks selliseks lahendamise võtteks on liitmisvõte. Enne liitmisvõtte kasutamist tuleb anda võrrandisüsteemile nn. normaalkuju, s. t. tundmatud liikmed viiakse kõik ühele poole võrdsusmärki ja nad kirjutatakse mõlemas võrrandis ühes ja samas järjekorras. Teisele poole võrdsusmärki jääb ainult tundmatust vaba liige.

Näide. Anda normaalkuju võrrandisüsteemile:

$$\begin{cases} 5(x+2)=5(y+1)+23 \\ 3(x-2)+5(y-1)=19 \end{cases}$$

Lahendus.

$$\begin{cases} 5x+10=5y+5+23 \\ 3x-6+5y-5=19 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-5y=5+23-10 \\ 3x+5y=19+6+5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-5y=18 \\ 3x+5y=30 \end{cases}$$

Kui on antud kaks võrdset suurust ning kummalegi nendest liita võrdsed suurused, siis saab jälle võrdsed suurused. Toetudes sellele tõsiasjale, võib võrrandisüsteemi võrrandite vastavad pooled liita ja saadud tulemused ühendada võrdsusmärgiga.

Erilist tähtsust omab võrrandite vastavate poolte liitmisel see juhtum, kui normaalkujulises võrrandisüsteemis ühe tundmatu kordajad on teineteise vastandarvud (vt. § 1, p. 1). Üheks selliseks süsteemiks on eelmises näites saadud võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 5x-5y=18 \\ 3x+5y=30, \end{cases}$$

kus tundmatu y kordajad on teineteise vastandarvud 5 ja -5. Sellisel puhul võrrandite vastavate poolte liitmisel see tundmatu kõrvaldub (elimineerub) ja me saame ühe tundmatuga võrrandi. Tõepoolest, liites selle süsteemi võrrandite vastavad pooled, saame:

$$5x-5y+3x+5y=48;\ 8x=48,$$

millest $x=6$. Leitud arv ongi üheks arvuks seda süsteemi rahuldavas arvupaaris. Teise arvu (y väärtuse) leidmiseks asendame ühes võrrandis, näiteks esimeses, tähe x tema leitud väärtusega 3. Saame:

$$5\cdot 6-5y=18,$$

mis on jällegi ühe tundmatuga võrrandi y suhtes. Siit leiamegi y väärtuse:

$$-5y=18-30;\ -5y=-12;\ y=2{,}4$$

Kontrollime, kas saadud arvud rahuldavad antud süsteemi.
Esimene võrrand: $5\cdot 6-5\cdot 2{,}4=30-12=18$. Rahuldatud!
Teine võrrand: $3\cdot 6+5\cdot 2{,}4=18+12=30$. Rahuldatud!
Seega lahendasime antud võrrandisüsteemi **liitmisvõttega**.

Vastus.

$$\begin{cases} x=6 \\ y=2{,}4 \end{cases}$$

Näide. Lahendada liitmisvõttega võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 7x-3y=15 \\ 5x+6y=27 \end{cases}$$

Lahendus. Antud süsteemis kummagi tundmatu kordajad ei ole vastandarvud. Küll on aga näha, et kui esimese võrrandi mõlemaid pooli korrutada kahega, siis y kordajad muutuvad vastandarvudeks. Pärast korrutamist saame antud süsteemile uue kuju:

$$\begin{cases} 14x-6y=30 \\ 5x+6y=27 \end{cases}$$

Liidame selle süsteemi võrrandite vastavad pooled:

$$\begin{cases} 14x-6y=30 \\ 5x+6y=27 \end{cases}$$
$$19x\quad\ =57,$$

millest

$$x=3$$

Asetame näiteks teises võrrandis tähe x tema leitud väärtusega, saame:

$$5\cdot 3+6y=27;\ 6y=27-15;\ 6y=12$$
$$y=2$$

Kirjalikul lahendamisel vormistatakse eespool toodud lahenduskäik koos kontrolliga järgmiselt:

$$\begin{cases} 7x-3y=15 \\ 5x+6y=27 \end{cases} \Big| \cdot 2 \qquad \begin{cases} 14x-6y=30 \\ 5x+6y=27 \end{cases}$$
$$19x\quad\ =57;\ x=3$$

$$5\cdot 3+6y=27;\ 6y=12;\ y=2$$

Kontroll.[1]

$$V_1 = 7 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 21 - 6 = 15;\ P_1 = 15;$$
$$V_1 = P_1$$
$$V_2 = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 15 + 12 = 27;\ P_2 = 27;$$
$$V_2 = P_2$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Märkus. Nii nagu ühe tundmatuga võrrandi lahendi kontroll, tuleb ka süsteemi lahendi kontroll teha antud süsteemi järgi. Kontrollida tuleb mõlemaid võrrandeid.

Näide 3. Lahendada liitmisvõttega võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 6x + 7y = -8 \\ 8x + 9y = -10 \end{cases}$$

Lahendus. Sellise süsteemi lahendamisel on otstarbekas korrutada mõlema võrrandi pooli selliste arvudega, et ühe tundmatu kordajad muutuksid vastandarvudeks. Tundmatu x elimineerimiseks korrutame esimese võrrandi pooli (-4)-ga ja teise võrrandi pooli 3-ga. Saame:

$$\begin{cases} 6x + 7y = -8 \\ 8x + 9y = -10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot (-4) \\ \cdot 3 \end{array} \quad \begin{cases} -24x - 28y = 32 \\ 24x + 27y = -30 \end{cases}$$
$$-y = 2$$
$$y = -2$$

$$6x + 7 \cdot (-2) = -8;\ 6x - 14 = -8;\ 6x = 6;\ x = 1$$

Kontroll.

$$V_1 = 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) = 6 - 14 = -8;\ P_1 = -8$$
$$V_1 = P_1$$
$$V_2 = 8 \cdot 1 + 9 \cdot (-2) = 8 - 18 = -10;\ P_2 = -10$$
$$V_2 = P_2$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

[1] Lühiduse mõttes tähistame esimese võrrandi vasaku ja parema poole arvulised väärtused vastavalt tähtedega V_1 ja P_1; teise võrrandi puhul V_2 ja P_2.

Näide 4. Lahendada liitmisvõttega võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} - 2 = \frac{y-2}{3} \\ \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4. \end{cases}$$

Lahendus. Esmalt anname süsteemile võrrandite teisendamise teel normaalkuju.

Esimene võrrand:

$$\frac{\overset{3}{\smile}{x+3}}{2} - \overset{6}{\smile}{2} = \frac{\overset{2}{\smile}{y-2}}{3} \Big| \cdot 6$$

$$3(x+3) - 12 = 2(y-2);\ 3x+9-12 = 2y-4;$$
$$3x-2y = -4-9+12;\ 3x-2y = -1.$$

Teine võrrand:

$$\frac{\overset{3}{\smile}{x-1}}{4} + \frac{\overset{4}{\smile}{y+1}}{3} = \overset{12}{\smile}{4} \Big| \cdot 12$$

$$3(x-1)+4(y+1) = 48;\ 3x-3+4y+4 = 48;$$
$$3x+4y = 48+3-4;\ 3x+4y = 47.$$

Nüüd lahendame normaalkujulise süsteemi:

$$\begin{cases} 3x-2y = -1 \\ 3x+4y = 47 \end{cases} \Big| \cdot(-1) \quad \begin{cases} -3x+2y = 1 \\ 3x+4y = 47 \end{cases}$$

$$6y = 48$$
$$y = 8$$

$$3x - 2 \cdot 8 = -1;\ 3x = 15;\ x = 5$$

Kontroll.

$$V_1 = \frac{5+3}{2} - 2 = 4-2 = 2$$

$$P_1 = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$V_1 = P_1$$

$$V_2 = \frac{5-1}{4} + \frac{8+1}{3} = 1+3 = 4$$

$$P_2 = 4$$
$$V_2 = P_2$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

119. Lahendada liitmisvõttega järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x+y=23 \\ x-y=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=11 \\ 3x-y=9 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+5y=7 \\ x-3y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+2y=27 \\ 3x+4y=59 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x+3y=100 \\ 3x-y=20 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 3x-7y=98 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 7x+4y=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 8x+11y=150 \\ 15x+7y=145 \end{cases}$

120. Lahendada peast:

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-y=18 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=5 \\ -x+3y=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x-2y=13 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x-y=-1 \\ 5x+y=31 \end{cases}$

121. Lahendada liitmisvõttega alljärgnevad võrrandisüsteemid, andes neile eelnevalt normaalkuju:

1) $\begin{cases} x=8y-36 \\ y=2x-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x-5}{5}+3y-8=-\frac{2x-7y+2}{3} \\ 5x+9y=62 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-9}{3}-\frac{3x-y}{10}=\frac{3y-x}{15}+9 \\ \frac{x-16}{14}+\frac{2x-15}{5}=-\frac{x+5y}{7} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x+5y+9=0 \\ 4x+3y+7=0 \end{cases}$

Kordamiseks.

122. Kolhoosi kolmes aidas on kokku 50 tonni teri. Esimeses aidas on 8 tonni rohkem kui teises, kolmandas aga 5 tonni vähem kui esimeses. Mitu tonni teri on igas aidas? (*21 t; 13 t; 16 t.*)

123. 38 kg esimese ja teise sordi kauba eest maksti 17 rbl. 1 kg esimese sordi kaupa maksis 52 kop., aga 1 kg teise sordi kaupa maksis 40 kop. Mitu kilogrammi kaupa osteti kumbagi sorti? (*15 kg; 23 kg.*)

124. Avaldada x:

1) $3x-2y=7$; 2) $2x-a=35$; 3) $\frac{2x+7}{a}=42$;

4) $\frac{2a+b}{2}=\frac{3x-5}{3}$; 5) $3x+7a=3b$; 6) $\frac{4x-3y}{5}=6x+5$.

125. Lihtsustada avaldised:

1) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$

2) $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right):\left(\frac{x+a}{a}-\frac{x-a}{x}\right)$

3) $\left(\frac{2a}{a+1}-\frac{2}{1-a}+\frac{4a}{a^2-1}\right)\cdot\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1}\right)$

§ 10. KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE ASENDUSVÕTTEGA.

Võrrandisüsteemi lahendamist asendusvõttega õpime tundma alljärgnevate näidete abil.

N ä i d e 1. Lahendada asendusvõttega võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 4x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

L a h e n d u s. Esimene samm võrrandisüsteemi lahendamisel asendusvõttega seisneb selles, et ü h e s t v õ r r a n d i s t a v a l d a t a k s e ü k s t u n d m a t u t e i s e k a u d u. Antud näites on lihtne avaldada esimesest võrrandist y:

$$y=2-4x$$

Nüüd a s e n d a m e t e i s e s võrrandis (sellest ka nimetus: a s e n d u s v õ t e) tähe y tema jaoks esimesest võrrandist saadud avaldisega $2-4x$. Teine võrrand muutub siis ü h e t u n d m a t u g a võrrandiks, sest y elimineerub:

$$2x+3(2-4x)=5$$

Lahendame saadud ühe tundmatuga võrrandi:

$$2x+6-12x=5; \quad -10x=5-6; \quad -10x=-1; \quad x=0{,}1$$

Teise tundmatu väärtuse arvutamine võib toimuda samuti nagu liitmisvõtte korralgi, kuid otstarbekohane on kasutada tema leidmiseks seda võrrandit, kus y on avaldatud x kaudu, s. t. võrrandit

$$y=2-4x$$

Siit saame:

$$y=2-4\cdot 0{,}1=2-0{,}4=1{,}6$$

K o n t r o l l.

$$V_1=4\cdot 0{,}1+1{,}6=0{,}4+1{,}6=2; \quad P_1=2$$
$$V_1=P_1$$

$$V_2 = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 1{,}6 = 0{,}2 + 4{,}8 = 5;\ P_2 = 5$$
$$V_2 = P_2$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = 0{,}1 \\ y = 1{,}6 \end{cases}$$

Märkus. Küsimus, kumb antud võrrandeist võtta ühe tundmatu avaldamiseks ja missugune tundmatu avaldada teise kaudu, oleneb ülesande lahendajast. Otstarbekas on loomulikult kasutada seda võimalust, mis on lihtsam, kuigi eesmärgile viivad mõlemad. Nii võib eelmises näites avaldada ka esimesest võrrandist x ja asendada teises võrrandis täht x leitud avaldisega:

$$x = \frac{2-y}{4}$$

Näites valitud lahenduskäik on ilmselt lihtsam.

Näide 2. Lahendada asendusvõttega võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 7x - 5y = -5 \end{cases}$$

Lahendus. Avaldame esimesest võrrandist x:

$$2x = 8 + 3y$$
$$x = \frac{8+3y}{2}$$

Asendame teises võrrandis tähe x esimesest võrrandist leitud avaldisega:

$$7 \cdot \frac{8+3y}{2} - 5y = -5$$

Lahendame saadud võrrandi y suhtes:

$$\frac{56+21y}{2} - 5y = -5 \mid \cdot 2$$

$$56 + 21y - 10y = -10;\ 11y = -66;\ y = -6.$$

Leiame x väärtuse:

$$x = \frac{8+3y}{2} = \frac{8+3 \cdot (-6)}{2} = \frac{8-18}{2} = -5$$

Kontroll.

$$V_1 = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-6) = -10 + 18 = 8;\ P_1 = 8$$
$$V_1 = P_1$$
$$V_2 = 7 \cdot (-5) - 5 \cdot (-6) = -35 + 30 = -5;\ P_2 = -5$$
$$V_2 = P_2$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -6 \end{cases}$$

Näide 3. Lahendada asendusvõttega võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 3x-4=2y \\ x=7-5y. \end{cases}$$

Lahendus. Et teises võrrandis x ongi juba avaldatud y kaudu, siis teeme kohe vastava asenduse esimeses võrrandis. Lahenduskäik on järgmine:

$$3\cdot(7-5y)-4=2y;\ 21-15y-4=2y;$$
$$17=17y;\ y=1$$
$$x=7-5y=7-5\cdot 1=2$$

Kontroll.

$$V_1=3\cdot 2-4=2;\ P_1=2\cdot 1=2$$
$$V_1=P_1$$
$$V_2=2;\ P_2=7-5\cdot 1=2$$
$$V_2=P_2$$

Vastus.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Näide 4. Lahendada asendusvõttega võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \frac{1-y}{1-9x}=-1 \\ \frac{x}{2x-10}+\frac{4}{5-x}=\frac{y}{3x-15}. \end{cases}$$

Lahendus. Esmalt lihtsustame mõlemad võrrandid. Selleks korrutame kummagi võrrandi pooled vastavas võrrandis olevate murdude ühise nimetajaga.

Esimene võrrand:

$$\frac{1-y}{1-9x}=-1\ |\cdot(1-9x)$$
$$1-y=-1+9x;\ 9x+y=2$$

Teine võrrand:

$$\frac{x}{2(x-5)}+\frac{4}{5-x}=\frac{y}{3(x-5)}$$
$$\frac{\overset{3}{x}}{2(x-5)}-\frac{\overset{6}{4}}{x-5}=\frac{\overset{2}{y}}{3(x-5)}\ \Big|\cdot 6(x-5)$$
$$3x-24=2y$$
$$3x-2y=24$$

Saime süsteemi:

$$\begin{cases} 9x+y=2 \\ 3x-2y=24, \end{cases}$$

mille lahendame asendusvõttega.

Avaldame esimesest võrrandist y:

$$y=2-9x$$

Asendades saadud avaldisega teises võrrandis tähe y, saame edasi:

$$3x-2(2-9x)=24;\ 3x-4+18x=24;$$

$$21x=28;\ x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

$$y=2-9x=2-9\cdot 1\frac{1}{3}=2-12=-10$$

Kontroll.

$$V_1=\frac{1-(-10)}{1-9\cdot 1\frac{1}{3}}=\frac{11}{-11}=-1;\ P_1=-1$$

$$V_1=P_1$$

$$V_2=\frac{1\frac{1}{3}}{2\cdot 1\frac{1}{3}-10}+\frac{4}{5-1\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{2\frac{2}{3}-10}+\frac{4}{3\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{\frac{4}{3}}{-\frac{22}{3}}+\frac{4}{\frac{11}{3}}=-\frac{4}{22}+\frac{12}{11}=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$$

$$P_2=\frac{-10}{3\cdot 1\frac{1}{3}-15}=\frac{-10}{4-15}=\frac{10}{11}$$

$$V_2=P_2$$

Vastus.

$$\begin{cases} x=1\frac{1}{3} \\ y=-10 \end{cases}$$

126. Lahendada alljärgnevad võrrandisüsteemid asendusvõttega:

1) $\begin{cases} x-y=3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=10 \\ y=x-2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 9x-y=81 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-5=5y \\ 3x-2y=54 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x+5y=21 \\ 6x=y-33 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 8x-5y=7 \\ 5y=6x+1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 6x-5y=3 \\ 3x+10y=3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 3x+4y=51 \\ 4x+3y=47 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x+4y=253 \\ y=5x \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 3y-8x=15 \\ 7x-2y=0 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 5x-7y=39 \\ 4x+3y=14 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 0{,}2x+4y=12{,}3 \\ x=0{,}5y \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 5x+6y=13 \\ 7x+18y=-1 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 3x+8y=-1 \end{cases}$

127. Lahendada alljärgnevad võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y=11 \\ 5x-3y=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x-3y=15 \\ 5x+6y=27 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 7x-5y=-5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 24x-5y=75 \\ 18x+25y=315 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x-7y=90 \\ 5x+4y=24 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x-8y+3x+14=14x-7y-13 \\ x+52+18y-4x=9x-11y+10x+51 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 12x+25y+35=5x-2y+27 \\ 8x-9x-1=3x+24y+41 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 10x-(3y+8)=7x-(2y-4x)+4x-29 \\ 4x-(5-9y)+8=13x-(5+6y)+25y-4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} (5x+3)(x-7)+233=5(x+1)(x-1)-3(8-y) \\ y(6y-5)-7(2x-y)=6(y+8)^2-26 \end{cases}$

11) $\begin{cases} (x-5)(y-1)=(x-8)(y+5) \\ (x-3)(y-2)=(x-7)(y+2) \end{cases}$

12) $\begin{cases} (x-3)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{cases}$

13) $\begin{cases} 5x+9y=52 \\ \frac{3x-5}{5}+3y-8=-\frac{2x-7y+2}{3} \end{cases}$

14) $\begin{cases} \frac{x-9}{3}-\frac{3x-y}{10}=\frac{3y-x}{15}+9 \\ \frac{x-16}{14}+\frac{2x-15}{5}=-\frac{x+5y}{7} \end{cases}$

15) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5}+\frac{5x-3y}{3}=x+1 \\ y+1=\frac{2x-3y}{3}+\frac{4-3y}{2} \end{cases}$

16) $\begin{cases} \frac{2x-y+3}{3}-\frac{x-2y+3}{4}=4 \\ \frac{4x-2y-9}{3}-4=-\frac{3x-4y+3}{4} \end{cases}$

17) $\begin{cases} \frac{3x+4y}{5}-\frac{14x-3y}{15}=\frac{7y-x}{10}+\frac{y-x}{2} \\ \frac{4x+3y-3}{7}+\frac{5x-2y+7}{14}=\frac{9y-5x}{21}+\frac{3y}{4} \end{cases}$

18) $\begin{cases} \frac{15x+7y}{16}-\frac{3x-y}{4}=-1 \\ 3x-\frac{10-y}{6}=2-y \end{cases}$

19) $\begin{cases} \frac{x-y}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x-y}{4} \\ \frac{x+y}{2}=4{,}5+\frac{y-1}{3} \end{cases}$

128. Lahendada alljärgnevad võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} \frac{5}{2x+y}=\frac{7}{x+2y} \\ \frac{7}{3y-2}=\frac{5}{2y-1} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{3x+1}-\frac{2}{1+3y}=0 \\ \frac{1}{x+7}=\frac{1}{3-y} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{5-2x}{1-3y}=\frac{3}{2} \\ y-x=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x+1}{x+11}=\frac{y+8}{y+13} \\ \frac{x-3}{x-2}=\frac{y-1}{y+3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x+y+1}{x-y+5}=2 \\ \frac{x+y-1}{x-y+1}=3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{8}=\frac{1}{3} \\ \frac{16}{y}-\frac{5}{x}=\frac{6}{xy} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{y-6}{x-4}-\frac{y+6}{x+4}=\frac{10}{16-x^2} \\ \frac{5}{x^2-3x}-\frac{3}{xy-3y}=\frac{10}{xy} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x-\frac{xy+13}{y+6}=2 \\ y-\frac{xy-13}{x+4}=2 \end{cases}$

129. Lahendada alljärgnevad võrrandisüsteemid, kasutades arvutamisel lükatit:

1) $\begin{cases} 3{,}8x-7{,}5y=1{,}4 \\ 4{,}1x+3{,}2y=1{,}05 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1{,}56y=0{,}38x+15 \\ x-3{,}6y=7{,}8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2{,}87y+0{,}05x=0{,}87 \\ x-y=1{,}8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 15{,}6x=3{,}8y \\ 4{,}8x-5{,}7=13{,}4y \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x-0{,}78}{2}+\frac{3y-0{,}4x}{5}=1{,}2x \\ \frac{3{,}8-4{,}7y}{3}-\frac{x-y}{6}=0{,}3y \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x-y}{3}-\frac{3{,}2-x}{5}=\frac{4{,}7x}{15} \\ x=1{,}87y-1{,}11 \end{cases}$

Kordamiseks.

130. Kuidas arvutatakse ristküliku, ruudu, rööpküliku, kolmnurga, trapetsi, korrapärase hulknurga pindala?

131. Kuidas arvutatakse risttahuka, püstprisma, püramiidi, silindri, koonuse, kera ruumala?

132. Kuidas arvutatakse silindri ja koonuse täispindala? Kera pindala?

133. Kuidas arvutatakse ühtlaselt liikuva keha liikumise kiirust, kui on teada keha poolt läbitud tee pikkus ja selle läbimiseks kulunud aeg?

134. Missugune on kahekohalise naturaalarvu üldkuju, kui selle arvu kümneliste number on x ja üheliste number on y?

135. Kahekohalise naturaalarvu üheliste number on n ja kümneliste number on üheliste numbrist 3 võrra vähem. Esitada see naturaalarv üldkujul.

136. Leida lükati abil:

a) 28% arvudest 32; 56,7; 42,1; 25,4; 16,8; 3,45;

b) arv, kui 45% temast on 11; 25; 14,7; 32,1; 108; 567;

c) mitu protsenti on 4 5-st; 3 7-st; 3,8 4,9-st; 56,7 108-st?

§ 11. ÜLESANNETE LAHENDAMINE KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI ABIL.

Eelmistes paragrahvides õppisime tundma võtteid, mis võimaldavad lahendada kahe tundmatuga lineaarset võrrandsüsteemi eeldusel, et süsteem on a n t u d. Igapäevases elus esineb sageli probleeme, mida saab lahendada kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi abil. Sel juhtumil ei ole süsteem antud, nagu

eespool, vaid süsteem tuleb ülesande tingimuste põhjal koostada ja siis lahendada juba tundmaõpitud võtetega.

Võrrandisüsteemi koostamiseks (nagu ühegi tundmatuga võrrandi koostamiseks) ülesande tingimuste järgi ei ole võimalik anda üldist eeskirja. Süsteemide koostamist õpime tundma alljärgnevate näidete varal.

Näide 1. Kolhoosi karja jaoks on varutud teatud hulk silo, millest peab jätkuma loomade toitmiseks ettenähtud ajavahemiku jooksul. Kui iga päev tarvitada 1,2 tonni silo, siis tuleks olemasolevast silo hulgast 18 tonni puudu; kui aga tarvitada iga päev 0,9 tonni silo, siis jääks ettenähtud ajavahemiku lõpuks 36 tonni silo järele. Mitu tonni silo on varutud ja mitmeks päevaks peab sellest jätkuma?

Lahendus. Olgu varutud x tonni silo, millest peab jätkuma y päevaks. Kui iga päev tarvitatakse 1,2 tonni silo, siis on y päeva jaoks tarvis $1{,}2y$ tonni silo. Ülesande tingimuste järgi jääb sellise tarvitamise korral olemasolevast silohulgast 18 tonni puudu, järelikult on sellise tarvitamise korral vajalik silohulk olemasolevast silohulgast 18 tonni võrra suurem, s. o. $x+18$ tonni. Seega saame võrrandi:

$$1{,}2y=x+18$$

Kui iga päev tarvitada 0,9 tonni silo, siis on y päeva jaoks vaja $0{,}9y$ tonni, mis on aga olemasolevast silohulgast 36 tonni võrra vähem, s. o. $x-36$ tonni. Seega saame teise võrrandi:

$$0{,}9y=x-36$$

Saadud kaks võrrandit moodustavad võrrandisüsteemi (sest neile otsitakse ühist lahendit, — vt. § 8 p. 1)

$$\begin{cases} 1{,}2y=x+18 \\ 0{,}9y=x-36 \end{cases}$$

Lahendame selle süsteemi asendusvõttega.

Esimesest võrrandist

$$x=1{,}2y-18$$

Edasi saame:

$$0{,}9y=1{,}2y-18-36;\ 0{,}3y=54$$

$$y=\frac{54}{0{,}3}=180 \text{ (päeva)}$$

$$x=1{,}2y-18=1{,}2\cdot 180-18=198 \text{ (tonni)}$$

Kontroll. Kontrolli tuleb teostada ülesande teksti järgi (mitte võrrandisüsteemi järgi, sest see võib olla valesti koostatud).

Antud ülesande korral toimub see järgmiselt: kui 180 päevaks on varutud 198 tonni silo ja iga päev tarvitada 1,2 tonni, siis 180 päeva jaoks oleks vaja $180 \cdot 1{,}2 = 216$ tonni. See on olemasolevast silohulgast $216 - 98 = 18$ tonni võrra suurem, nagu ülesandes öeldud. Kui iga päev tarvitada 0,9 tonni, siis oleks 180 päeva jaoks vaja $180 \cdot 0{,}9 = 162$ tonni, mis on olemasolevast silohulgast $198 - 162 = 36$ tonni võrra vähem, nagu ülesandes öeldud.

Vastus. Karja jaoks on varutud 198 tonni silo, millest peab jätkuma 180 päevaks.

Näide 2. Sõiduauto sõidab igas tunnis 18 km võrra rohkem kui veoauto, mistõttu ta läbib 5 tunni ja 20 minutiga 96 km võrra pikema tee kui veoauto. Leida kummagi auto liikumise kiirus.

Lahendus. Olgu sõiduauto kiirus $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja veoauto kiirus $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Esimene võrrand:

$$x - y = 18$$

Sõiduauto läbib 5 tunni ja 20 minutiga, s. o. $5\frac{1}{3}$ tunniga $5\frac{1}{3}\,x$ km; veoauto läbib sama aja jooksul $5\frac{1}{3}\,y$ km.
Teine võrrand:

$$5\tfrac{1}{3}\,x - 5\tfrac{1}{3}\,y = 96$$

Seega saame süsteemi:

$$\begin{cases} x - y = 18 \\ 5\frac{1}{3}\,x - 5\frac{1}{3}\,y = 96, \end{cases}$$

mille lahendi

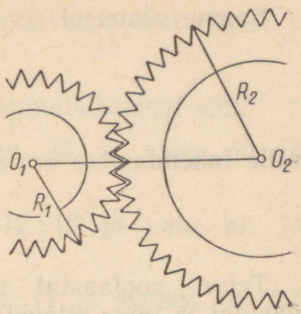
$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 42 \end{cases}$$

leidmine jääb raamatu kasutaja ülesandeks.

Kontroll. Autode kiiruste vahe on $60 - 42 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, nagu ülesandes öeldud. $5\frac{1}{3}$ tunniga läbitud teepikkuste vahe on $5\frac{1}{3} \cdot 60 - 5\frac{1}{3} \cdot 42 = 5\frac{1}{3} \cdot 18 = 96$ km, — samuti nagu ülesandes öeldud.

Vastus. Sõiduauto kiirus on $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja veoauto kiirus on $42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Näide 3. Joonisel 49 kujutatud hammasülekanne, mille ülekandearv[1] on 3:5. Nende hammasrataste telgedevaheline kaugus O_1O_2 on 152 mm. Arvutada kummagi hammasratta raadius, kui hamba kõrgus on 8 mm.



Joon. 49.

Lahendus. Olgu vähema hammasratta raadius R_1 ja suurema raadius R_2. Saame esimese võrrandi:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{5} \text{ ehk } 3R_2 = 5R_1$$

Joonise 49 põhjal saame veel teise võrrandi:

$$R_1 + R_2 - 8 = 152 \text{ ehk } R_1 + R_2 = 160$$

Nüüd saame süsteemi:

$$\begin{cases} 3R_2 = 5R_1 \\ R_1 + R_2 = 160 \end{cases}$$

Leida selle süsteemi lahend

$$\begin{cases} R_1 = 60 \\ R_2 = 100 \end{cases}$$

ja teha kontroll!

Näide 4. Kaks teineteisega sotsialistlikus võistluses olevat ettevõtet tootsid esimesel poolaastal kokku 7500 masinat. Teisel poolaastal suurendas üks ettevõte oma toodangut 20% võrra ja teine 25% võrra; nad tootsid siis kokku 9145 masinat. Mitu masinat tootis kumbki ettevõte esimesel poolaastal ja mitu teisel poolaastal?

Lahendus. Oletame, et üks ettevõte tootis esimesel poolaastal x masinat ja teine y masinat. Seega esimene võrrand:

$$x + y = 7500$$

Esimene ettevõte suurendas teisel poolaastal oma toodangut 20% võrra; 20% x-st on $\frac{20x}{100} = 0{,}2x$. Esimene ettevõte tootis teisel poolaastal seega $x + 0{,}2x = 1{,}2x$ masinat. Teine ettevõte tootis teisel poolaastal $1{,}25y$ masinat. Seega teine võrrand:

$$1{,}2x + 1{,}25y = 9145$$

[1] Hammasülekande-arv on hammasrataste hammaste arvude suhe, mis on ühtlasi ka vastavate hammasrataste diameetrite või raadiuste suhe.

Saame süsteemi:

$$\begin{cases} x+y=7500 \\ 1{,}2x+1{,}25y=9145, \end{cases}$$

mille lahendamine annab

$$\begin{cases} x=4600 \\ y=2900 \end{cases}$$

Teisel poolaastal tootis esimene ettevõte $1{,}2 \cdot 4600=5520$ masinat ja teine ettevõte $1{,}25 \cdot 2900=3625$ masinat.

Kontroll!

Vastus. Üks ettevõte tootis esimesel poolaastal 4600 masinat ja teisel poolaastal 5520 masinat; teine ettevõte — vastavalt 2900 ja 3625 masinat.

Näide 5. On kaht liiki pronksi: esimene vasesisaldusega 40% ja teine vasesisaldusega 60%. Mitu kilogrammi pronksi kummastki liigist on vaja kokku sulatada, et saada 10 kg pronksi, milles vaske on 45%?

Lahendus. Olgu vaja x kg pronksi esimesest liigist ja y kg pronksi teisest liigist. Esimene võrrand:

$$x+y=10.$$

Edasi saame, et x kg pronksi esimesest liigist sisaldab $0{,}4x$ kg vaske; y kg pronksi teisest liigist sisaldab $0{,}6y$ kg vaske. Segu peab sisaldama aga $10 \cdot 0{,}45=4{,}5$ kg vaske. Nii on teine võrrand:

$$0{,}4x+0{,}6y=4{,}5$$

ehk

$$4x+6y=45$$

Saame süsteemi:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 4x+6y=45, \end{cases}$$

mille lahend on

$$\begin{cases} x=7{,}5 \\ y=2{,}5 \end{cases}$$

Kontroll. $x+y=7{,}5+2{,}5=10$

7,5 kg esimese liigi pronksi sisaldab $0{,}4 \cdot 7{,}5=3$ kg vaske;
2,5 kg teise liigi pronksi sisaldab $0{,}6 \cdot 2{,}5=1{,}5$ kg vaske.
Kokku on vaske $3+1{,}5=4{,}5$ kg.

Vastus. Vaja on võtta 7,5 kg pronksi esimesest liigist ja 2,5 kg teisest liigist.

Lahendada alljärgnevad ülesanded võrrandisüsteemi abil.

137. Leida kaks arvu, mille summa on 93 ja vahe on 19. (*37* ja *56*)

138. Leida kaks arvu, mille suhe on 12 : 19 ja vahe on 14. (*24* ja *38*)

139. Leida kaks arvu, mille suhe on 13 : 11 ja summa on 216. (*117* ja *99*)

140. Leida ristküliku mõõtmed, kui ristküliku ümbermõõt on 56 cm ja kahe lähiskülje vahe on 4 cm. (*12 cm×16 cm.*)

141. Leida ristkülikukujulise maatüki pindala, kui maatüki ümbermõõt on 60 m ja kahe lähiskülje vahe on 4 m. (*896 m².*)

142. Leida trapetsi alused, kui trapetsi kesklõik on 4,4 cm ja aluste vahe on 2,4 cm. (*3,2 cm; 5,6 cm.*)

143. Leida rööpküliku küljed järgmistel tingimustel: rööpküliku ümbermõõt on 22 cm; kui rööpküliku vähemaid külgi suurendada 1 cm võrra ja suuremaid külgi vähendada kaks korda, siis on rööpküliku ümbermõõt 16,4 cm. (*3,4 cm; 7,6 cm.*)

144. Leida koonuse külje ja põhja pindala, kui koonuse täispindala on 61,2 cm² ning külje ja põhja pindala vahe on 16,2 cm². (*38,7 cm²; 22,5 cm².*)

145. Kahe ringi diameetrite vahe on 3,00 m; diameetrite summa on 11,4 m. Leida nende ringide ümbermõõt ja pindala. (*22,6 m; 13,2 m; 40,8 m²; 13,8 m².*)

146. Kahe ringi diameetrite vahe on 3,0 m; ringide ümbermõõtude summa on 104 m. Leida ringide diameetrid. (*18,1 m; 15,1 m.*)

147. Leida koonuse moodustaja *l* ja põhja raadius *R*, kui koonuse täispindala on 48,0 dm² ning põhja pindala on külje pindalast 50%. (*R≈2,25 dm; l≈4,51 dm.*)

148. Silindrikujulise kaaneta piimanõu valmistamiseks kulus 37,0 dm² (valtsimiskulusid mitte arvestada) plekki. Leida piimanõu läbimõõt ja kõrgus, kui põhja pindala moodustab külje pindalast 11,5%.

149. Kahekohalise arvu ristsumma on 13. Kui selles arvus numb-

rid vahetada, siis saab arvu, mis on esialgsest arvust 9 võrra suurem. Leida see arv. (*67*)

150. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saab arvu, mis on antud arvust 45 võrra vähem. Leida see arv.

151. Kahekohalise arvu ristsumma on 16. Kui selle arvu kolme võrra vähendatud üheliste number võtta uue arvu kümneliste numbriks ja ühe võrra suurendatud kümneliste number võtta uue arvu üheliste numbriks, siis saab arvu, mis on antud arvust 11 võrra vähem. Leida antud arv. (*79.*)

152. Kui murru lugejat suurendada viie võrra ja nimetajat vähendada kahe võrra, siis on murru väärtus 4. Kui aga lugejat vähendada ühe võrra ja nimetajat suurendada kahe võrra, siis on murru väärtus $\frac{1}{3}$. Mis murd see on? $\left(\frac{3}{4}.\right)$

153. Kui murru lugejat suurendada ühe võrra ja nimetajat vähendada ühe võrra, siis on murru väärtus 1. Kui murru lugejat vähendada 1 võrra ja nimetajat suurendada kolme võrra, siis on murru väärtus $\frac{1}{4}$. Mis murd see on?

154. Jõelaev, liikudes pärivoolu, vajab 46,8 km pikkuse vahemaa läbimiseks 3 tundi 36 min.; sama vahemaa läbimiseks vastuvoolu kulub aga 5 tundi 12 min. Leida voolu kiirus ja laeva kiirus seisvas vees. $\left(2\frac{\text{km}}{\text{h}};\ 11\frac{\text{km}}{\text{h}}.\right)$

155. Lennuk vajab 140 km pikkuse teelõigu läbimiseks pärituult 15 min., vastutuult aga 21 min. Leida tuule kiirus ja lennuki kiirus tuulevaikse ilmaga.

156. Ülekandearv kahe hambuva hammasratta korral on 11 : 7. Kui kummagi hammasratta hammaste arvu vähendada 4 hamba võrra, siis on ülekandearv 5 : 3. Mitu hammast on kummalgi hammasrattal? (*44; 28.*)

157. Kaheastmelise rihmaseibi suurem raadius on 6 cm võrra suurem kui vähema raadius. Leida raadiused, kui diameetrite suhe on 4 : 5.

158. NSV Liidus lasti esimene Maa kunstlik kaaslane üles 4. nov. 1957. a., Ameerika Ühendriikides aga 31. jaan. 1958. a. Nende kaaslaste kaal oli kokku 97,6 kg. Kui Ameerikas väljalastud kaaslase kaal oleks olnud 5 korda suurem, siis ta oleks ikkagi olnud Nõukogude Liidus väljalastud kaaslasest 13,6 kg võrra kergem. Leida kummagi kaaslase kaal. (*83,6 kg; 14 kg.*)

159. 15. mail 1958. a. lasti NSV Liidus üles kolmas Maa kunstlik kaaslane, mille kaal (konteiner koos teadusliku aparatuuriga) oli 1327 kg. Kui teadusliku aparatuuri kaal oleks olnud 50% võrra suurem ja konteineri kaal 41 kg võrra suurem, siis oleks kaaslase kogukaal olnud 1652 kg. Leida teadusliku aparatuuri ja konteineri kaal. (*968 kg; 359 kg.*)

160. 56 lehma ja 62 lamba söötmiseks kulub iga päev 187 kg jõusööta. Kui lehmade arvu suurendada 4 võrra ja lammaste arvu vähendada 2 võrra, siis kulub samade söödanormide puhul iga päev 198 kg jõusööta. Kui palju jõusööta on ette nähtud iga lehma ja iga lamba jaoks päevas? (ligikaudu *2,9 kg ja 0,4 kg.*)

161. Kolhoosi laudas on 40 lüpsilehma. Nende nn. silotüübilisel söötmisel kuluks iga päev silo ja heina kokku 1760 kg. Heinavarude vähesuse tõttu tuli aga päevast heinanormi vähendada 1 kg võrra iga lehma kohta. Vastavalt sellele suurendati silonormi arvestusega, et 1 kg heinu on samaväärne 3,5 kg siloga. Selle tulemusena kulus nüüd iga päev silo ja heina kokku 1860 kg. Mitu kilogrammi silo ja mitu kilogrammi heinu peab iga lehm saama silotüübilisel söötmisel päevas? (*40 kg silo, 4 kg heinu.*)

162. Kaks ekskavaatorit tüübist Э-252 kaaluvad kokku 500 kg võrra vähem kui üks ekskavaator tüübist Э-505. Nimetatud ekskavaatorid kaaluvad kokku 29,3 tonni. Leida mõlema ekskavaatori kaal. (*9,6 t; 19,7 t.*)

163. Kaks teraviljakombaini koristavad koos töötades 3 tunniga vilja 11,4 hektarilt. Kui esimene kombain töötaks 4 tundi ja teine 5 tundi, siis koristataks saak 17,2 hektarilt. Mitu hektarit teravilja koristab kumbki kombain tunnis? $\left(2\frac{\text{ha}}{\text{h}};\ 1{,}8\frac{\text{ha}}{\text{h}}.\right)$

164. Keemialaboratooriumile muretseti kaht liiki reaktiive: 15 kg reaktiivi *A* ja 20 kg reaktiivi *B* ning nende eest maksti 75,1 rbl. Teistkordsel tellimisel saadi 20 kg reaktiivi *A* ja 15 kg reaktiivi *B* ning nende eest maksti 15 rbl. rohkem kui eelmisel korral. Leida kummagi reaktiivi kilogrammi hind. (*0,86 rbl.; 3,86 rbl.*)

165. 2,5 meetrit esimese sordi riiet ja 3 meetrit teise sordi riiet maksab kokku 43 rbl. 30 kop. 1,6 meetrit esimese sordi riiet ja 2,5 meetrit teise sordi riiet maksab kokku 32 rbl. 12 kop. Leida kummagi riide meetri hind. (*8,2 rbl. ja 7,6 rbl.*)

166. 2 kg makarone ja 1,5 kg tangu maksab 1,06 rbl. 3 kg maka-

rone ja 2 kg tangu maksab aga 1,53 rbl. Arvutada makaronide ja tangu kilogrammi hind.

167. Instituut tahtis osta 2 fotoaparaati ja ühe suurendusaparaadi, mille eest oleks tulnud maksta kokku 132 rbl. Et aga fotoaparaadi hinda alandati 10% ja suurendusaparaadi hinda 12,5%, siis tuli tegelikult nende eest maksta 118 rbl. Leida fotoaparaadi ja suurendusaparaadi hind enne hinnaalandust. (*50 rbl.* ja *32 rbl.*)

168. On kaht sorti värvi: esimese sordi kilogramm maksab 1,40 rbl., teise sordi kilogramm 1,30 rbl. Mitu kilogrammi värvi peab maaler kummastki sordist võtma, et saada 10 kg segu kilogrammi hinnaga 1,36 rbl.? (*6 kg I s.* ja *4 kg II s.*)

169. On kaht sorti värvi: esimese sordi kilogramm maksab 1,60 rbl., teise sordi kilogramm 1,30 rbl. Nende segamisel saadi värv kilogrammi hinnaga 1,50 rbl. Kui oleks esimese sordi värvi võetud 14 kg vähem ja teise sordi värvi 8 kg enam, siis oleks segu kilogrammi hind olnud 1,40 rbl. Mitu kilogrammi värvi võeti kummastki sordist? (*24 kg I s.* ja *12 kg II s.*)

170. Mitu kilogrammi tuleb võtta puhast vaske ja mitu kilogrammi 45-protsendilise vasesisaldusega pronksi, et nende kokkusulatamisel saada a) 50 kg pronksi, milles on 50% vaske?; b) 80 kg pronksi, mis sisaldab 70% vaske? [a) *45,5 kg pronksi* ja *4,5 kg vaske;* b) *43,7 kg pronksi* ja *36,3 kg vaske.*]

171. Kui palju tuleb võtta 80%-list hapet ja 50%-list hapet, et saada a) 1 kg 60%-list hapet?; b) 5 kg 70%-list hapet? [a) $\frac{1}{3}$ *kg 80%-list* ja $\frac{2}{3}$ *kg 50%-list;* b) $3\frac{1}{3}$ *kg 80%-list* ja $1\frac{2}{3}$ *kg 50%-list.*]

172. Isa ja tütar on kokku 44 aastat vanad. Nelja aasta eest oli isa tütrest 8 korda vanem. Leida isa ja tütre vanus. (*36 a.; 8 a.*)

173. Isa on 9 aasta pärast 3 korda ja 22 aasta pärast ainult 2 korda vanem kui poeg. Kui vanad on nad praegu?

174. Anna ja Jaan on kokku 52 aastat vanad. Anna on kolm korda nii vana kui Jaan oli siis, kui Anna oli kaks korda vanem Jaani praegusest vanusest. Kui vanad on Anna ja Jaan? (*Anna on 36-a., Jaan on 16-a.*)

Üldiseks kordamiseks.

175. Leida viis lahendit järgmistele võrranditele:
1) $3x-7y=3$; 2) $27x+32y=-5$; 3) $0{,}3x-3{,}2y=1{,}8$

176. Millistes punktides lõikavad alljärgnevate võrrandite graafikud koordinaattelgi?
1) $x-y=3$; 2) $2x+3y=4$; 3) $15x+19y=38$

177. Ehitada alljärgnevate võrrandite graafikud:
1) $3x-4y=9$; 2) $2y=5x+4$; 3) $3{,}8x-4{,}9y=10{,}5$

178. Lahendada graafiliselt alljärgnevad võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 8x+7y=37 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x=y+5 \\ 2y-7=3x \end{cases}$

179. Lahendada liitmisvõttega:

1) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x+7y=8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+y=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3 \\ y-x=5 \end{cases}$

180. Lahendada asendusvõttega:

1) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 7x+8y=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-5y=6 \\ x+y=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8x-7y=25 \\ 3x-4y=8 \end{cases}$

181. Lahendada alljärgnevad võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+3}=\dfrac{x+5}{y+7} \\ \dfrac{4x-3}{2y+3}=\dfrac{10x-1}{5y+14} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{x-1}-\dfrac{2y+7}{y+3}=2 \\ 6x-5y=22 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (5x+8)(4y-3)=(2x+7)(10y-17) \\ (3x+9)(6y-7)=(2x+5)(9y-8) \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3{,}2x=7{,}5y+0{,}8 \\ 1{,}5x+0{,}8y=7{,}3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 15{,}5x-18{,}5y=11{,}5 \\ 21{,}7x-25{,}9y=16{,}1 \end{cases}$

182. Turist peab jõudma linnast A linna B ettenähtud aja jooksul. Kui ta liiguks kiirusega $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis ta jõuaks sihtpunkti 2 tundi varem; kui ta liiguks kiirusega $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis ta hilineks 1 tund ja 12 minutit. Leida linnadevaheline kaugus ja aeg, mille jooksul turist peab selle läbima.

183. Kui antud täisnurkse kolmnurga üht kaatetit suurendada 2 cm võrra ja teist 3 cm võrra, siis suureneb kolmnurga

pindala 50 cm² võrra. Kui aga kumbagi kaatetit vähendada 2 cm võrra, siis pindala väheneb 32 cm² võrra. Leida antud kolmnurga kaatetid.

184. Lihtsustada avaldised ja arvutada nende väärtused tähtede antud väärtuste järgi:

1) $\frac{a+b}{2c+2d} \cdot \frac{3c+3d}{a-b}$, kui $a=-0{,}87$; $b=1{,}23$

2) $\frac{5a-3b}{4(a-b)} + \frac{a+4b}{2(a-b)} - \frac{5a-2b}{a-b}$

3) $\frac{7}{x-y} \cdot \frac{x^2-2xy+y^2}{21}$, kui $x=\frac{1}{3}$; $y=-\frac{5}{6}$

4) $\frac{1}{2a-2b} - \frac{1}{2a+2b} - \frac{b}{a^2-b^2}$

5) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{a}{a-b}$, kui $a=4{,}52$; $b=-1{,}48$

185. Eraldada alljärgnevais avaldistes täisruut (s. t. mingi summa või vahe ruut):

1) $a^2+x-2ab+b^2$;
2) $36x^2-5ax^2+12ax+a^2$;
3) $m^2-n^2-mx+\frac{x^2}{4}$;
4) $64a^2-ab^2+cd^2-4ab+\frac{b^2}{16}$

Näide. $9x^2-xy+3ax+\frac{a^2}{4} = \left(3x+\frac{a}{2}\right)^2-xy$

186. Täiendada alljärgnevaid avaldisi nii, et neist tekiks täisruut:

1) a^2+2ab; 2) x^2-2xy; 3) x^2+4x; 4) $25-10m$;
5) $36a^2-12ax$; 6) $49a^2+9b^2$; 7) x^2+bx; 8) m^2+nm

Näide. $25x^2+10x$; $25x^2+10x+1=(5x+1)^2$

Kodune kontrolltöö nr. 2.

1. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 3x+y=-5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-5y=-8 \\ x+3y=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 87x-92y=210 \\ 37x+41y=-105 \end{cases}$

2) Ilma graafikuid joonestamata selgitada, millised alljärgnevaist süsteemidest omavad ühe lahendi ja millised ei oma seda. Põhjendus!

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 2x+9y=5+6y \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+5y=4 \\ 2x+5y=3 \end{cases}$

3. Lahendada liitmisvõttega:

1) $\begin{cases} 5x+6y=7 \\ 3x-6y=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$

4. Lahendada asendusvõttega:

1) $\begin{cases} x-3y=3 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 21x-y=-32 \\ 4x-5y=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-5y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$

5. Lahendada võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 0{,}75x+3{,}8y=-5{,}3 \\ 1{,}83x-4{,}7y=12{,}8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y+1}{x-y-7}=\frac{1}{2} \\ \frac{2x+3y-4}{3x+4y+4}=\frac{1}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3x+2{,}5}{x+0{,}5}-\frac{4y+6{,}5}{2y+2{,}5}=1 \\ 3x-2y=2{,}5 \end{cases}$

6. Kaks töölist said 12 päeva eest töötasu kokku 114 rbl. Kui palju teenib kumbki tööline päevas, kui üks teenib kümne päevaga niisama palju kui teine üheksa päevaga?

7. Osteti 4 m üht sorti riiet ja 5 m teist sorti riiet ning maksti kokku 64 rbl. Pärast seda, kui esimese sordi hinda alandati 12% ja teise sordi hinda 15%, maksti 3 m esimese sordi ja 2 m teise sordi riide eest kokku 31 rbl. 36 kop. Leida kummagi sordi riide meetri hind enne hinnaalandust. (*7,5 rbl.* ja *6,8 rbl.*)

III PEATÜKK.

RUUTFUNKTSIOON JA RUUTVÕRRAND.

§ 12. RUUTFUNKTSIOONI DEFINITSIOON. ÜLDISI MÕISTEID.

Ülesanne. Pargis oleva ristkülikukujulise haljasala üks külg on teisest kaks korda suurem. Haljasala pindala suurendamiseks suurendatakse tema lühemat külge 8 m võrra ja pikemat külge 5 m võrra. Avaldada uue haljasala pindala.

Lahendus. Tähistame antud haljasala vähema külje pikkuse tähega t; suurema külje pikkus on siis $2t$. Uue haljasala ühe külje pikkus on $t+8$ meetrit ja teise külje pikkus on $2t+5$ meetrit. Uue ristküliku pindala S avaldub siis järgmiselt:

$$S=(t+8)(2t+5)=2t^2+21t+40.$$

Tulemusest näeme, et uue haljasala pindala $S=2t^2+21t+40$ ei ole jääv suurus, vaid ta sõltub antud haljasala vähemast küljest t: kui muutub t, siis muutub ka S, nii et igale t väärtusele vastab S kindel väärtus. Seega on muutuv suurus S teise muutuva suuruse t funktsioon (vt. § 3 p. 3). Antud juhtumil nimetatakse seda funktsiooni **ruutfunktsiooniks.**

Tähistades argumendi tähega x, funktsiooni tähega y ja jäävaid arve (antud näites 2, 21 ja 40) tähtedega a, b, ja c, anname ruutfunktsioonile järgmise definitsiooni:

Muutuvat suurust y nimetatakse teise muutuva suuruse x ruutfunktsiooniks, kui seda funktsiooni saab esitada valemiga:

$$y=ax^2+bx+c$$

Liige ax^2 on ruutfunktsiooni ruutliige, a on ruutliikme kordaja; bx on lineaarliige, b on lineaarliikme kordaja; c on vabaliige.

Näide. Funktsioon $y=3x^2-5x+6$ on ruutfunktsioon ruutliikmega $3x^2$ (ruutliikme kordaja on 3), lineaarliikmega $-5x$ (lineaarliikme kordaja on -5) ja vabaliikmega 6.

Valem $y=ax^2+bx+c$ esitab ruutfunktsiooni üldkuju. Kui selles valemis puuduvad lineaarliige ja vabaliige või üks nendest,

siis saame ruutfunktsiooni *erikujud*. (Ruutliige ei saa ruutfunktsioonis kunagi puududa.)

Kui $b=0$ ja $c=0$, siis saame ruutfunktsiooni erikuju:

$$y=ax^2$$

Näited. $y=1{,}5x^2$; $y=-3x^2$; $S=0{,}87t^2$.

Kui $b=0$, siis saame ruutfunktsiooni erikuju:

$$y=ax^2+c$$

Näited. $y=5x^2+25$; $y=-7x^2+38$; $m=135n^2-31$

Millise erikuju saame siis, kui $c=0$?

Ruutfunktsiooni üksikasjalikumat tundmaõppimist alustame tema erikujudest, kuni lõpuks jõuame üldkujuni.

187. Nimetada alljärgnevais ruutfunktsioonides ruutliige ja selle kordaja, lineaarliige ja selle kordaja, vabaliige:

1) $y=3x^2-6x+7$; 2) $y=x^2+2x-1$;
3) $y=-x^2-x+3$; 4) $y=(x-5)(3-x)$;
5) $y=(2x-1)(3x+1)+5$; 6) $y=-32-x(x-33)+31$.

Näpunäide. Viimases kolmes ülesandes teha eelnevalt lihtsustused.

188. Millised alljärgnevaist ruutfunktsioonidest on üldkujulised, millised erikujulised?:

1) $y=5x^2+7x-6$;
2) $y=-3x^2-5x$;
3) $y=-x^2+3$;
4) $y=(x-2)(x+2)$;
5) $m=n(n-5)$;
6) $p=(2-q)(q+2)-3q+3$.

§ 13. FUNKTSIOON $y=ax^2$.

Vaatleme näitena järgmisi funktsioone:

1) $y=x^2$ $(a=1)$; 2) $y=\frac{1}{2}x^2$ $\left(a=\frac{1}{2}\right)$;
3) $y=2x^2$ $(a=2)$; 4) $y=-\frac{1}{2}x^2$ $\left(a=-\frac{1}{2}\right)$;
5) $y=-2x^2$ $(a=-2)$

Nende funktsioonide uurimiseks koostame nende väärtuste tabelid. Tabelite järgi ehitame iga vaadeldava funktsiooni graafiku. Ruumi kokkuhoiu huvides paigutame kõigi viie funktsiooni

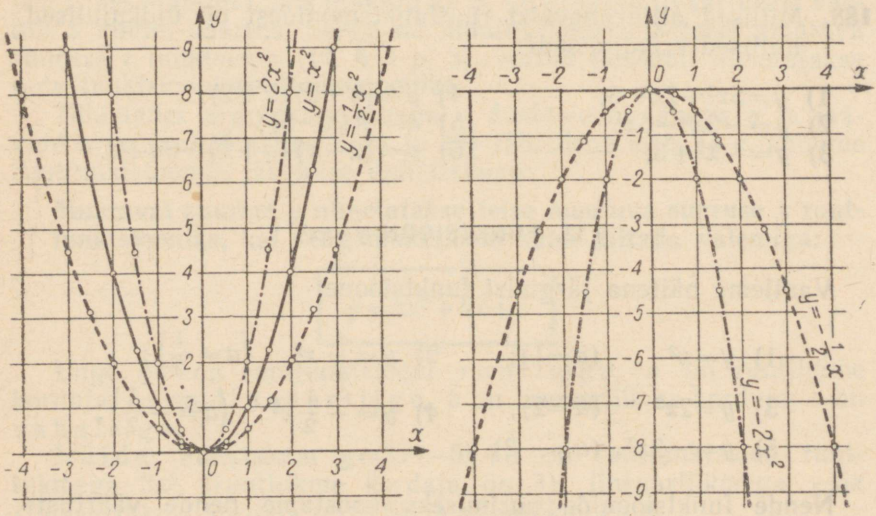
väärtused ühte tabelisse, nii et esimeses reas on argumendi väärtused, teises reas on funktsiooni $y=x^2$ väärtused, kolmandas reas on funktsiooni $y=\frac{1}{2}x^2$ väärtused jne.

x	−4	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
$y=x^2$	16	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	16
$x=\frac{1}{2}x^2$	8	4,5	3,13	2	1,13	0,5	0,13	0	0,13	0,5	1,13	2	3,13	4,5	8
$y=2x^2$	32	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	32
$y=-\frac{1}{2}x^2$	−8	−4,5	3,13	−2	−1,13	−0,5	−0,13	0	−0,13	−0,5	−1,13	−2	−3,13	−4,5	−8
$y=-2x^2$	−32	−18	−12,5	−8	−4,5	−2	−0,5	0	−0,5	−2	−4,5	−8	−12,5	−18	−32

Graafik. Graafikud nendele funktsioonidele, mille puhul $a>0$, on joonisel 50 *a* ja graafikud nendele funktsioonidele, mille puhul $a<0$, on joonisel 50 *b*.

Nende funktsioonide graafikuiks on kõverjooned, mis kannavad ühist nimetust — **parabool.** Funktsiooni $y=x^2$ graafikut nimetatakse **põhiparabooliks.**

Märkus. Et põhiparabooliga tuleb edaspidi sageli kokku puutuda, siis soovitame lugejal valmistada põhiparabooli papist šabloon, kui mõlemal teljel on ühikuks 1 cm. Šablooni järgi on lihtne joonestada parabooli.



Joon. 50

Kui $a>0$ (joon. 50 *a*), siis on parabooli harud suunatud ülespoole — parabool on n õ g u s. Kui $a<0$ (joon. 50 *b*), siis on parabooli harud suunatud allapoole — parabool on k u m e r. Nõgusa parabooli kõige madalamat punkti (punkt O joonisel 50 *a*) ja kumera parabooli kõige kõrgemat punkti (punkt O joonisel 50 *b*) nimetatakse ühise nimetusega parabooli **haripunktiks.** Funktsiooni $y=ax^2$ korral on parabooli haripunkt koordinaatteljestiku nullpunktis.

Kokkuvõttes:

funktsiooni $y=ax^2$ graafikuks on parabool, mille haripunkt on koordinaatteljestiku nullpunktis. Kui $a>0$, siis on parabool nõgus, kui $a<0$, siis on parabool kumer.

Joonisel 50 *a* kujutatud paraboolide kõik punktid, välja arvatud haripunkt, asetsevad ü l a l p o o l *x*-telge. See tähendab, et funktsiooni *y* väärtused on positiivsed argumendi *x* iga väärtuse korral, välja arvatud $x=0$.

See tõsiasi selgub ka valemi $y=ax^2$ analüüsimisel, kui $a>0$. Tõepoolest, kui $x=0$, siis $y=a\cdot 0=0$. Kui aga argumendi väärtus on nullist erinev, siis on tema ruut alati positiivne. Kahe positiivse arvu *a* ja x^2 korrutis, mis annab funktsiooni *y* väärtuse, on siis ka positiivne.

Kasutaja ülesanne on uurida funktsiooni väärtusi, kui $a<0$ (joon. 50 *b*).

189. Auto liikumist mõjutab pidurdavalt õhutakistus *F*, mida sõiduauto «Moskvitš» korral arvutatakse valemi

$$F=0{,}0046\ v^2$$

järgi, kus *v* tähistab auto kiirust $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ ja *F* tähistab õhutakistust (kg).

Mis on selles valemis argumendiks? Funktsiooniks? Milliseid väärtusi argument selles valemis ei saa omada? Ehitada graafik, mis näitab õhutakistuse sõltuvust auto kiirusest; mõõtkava: 1 cm $\triangleq$ $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 1 cm $\triangleq$ 1 kg.

Selgitada graafiku abil:

1) Kui suur on auto kiirus, kui õhutakistus on 3 kg; 5 kg; 6,5 kg; 8 kg; 10 kg?
2) Kui suur on õhutakistus, kui auto kiirus on $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $40\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

190. Ehitada graafik, mis näitab ringi pindala sõltuvust diameetrist.

191. Ehitada ühes ning samas teljestikus alljärgnevate funktsioonide graafikud:
1) $y=0{,}8x^2$; 2) $y=1{,}5x^2$; 3) $y=-0{,}5x^2$; 4) $y=-1{,}5x^2$

Kordamiseks.

192. Arvutada
2^2; 5^2; $3{,}7^2$; $(-6)^2$; $(-4)^2$; $(-12)^2$; $(-20)^2$; -5^2; -7^2; -15^2; $-(-3)^2$; $-(-9)^2$; $-[-(-10)^2]$; $-[-(-10^2)]$; $-[-(-10)]^2$; $\{-[-(-10)]\}^2$

193. 5-ga lõppevate kahekohaliste arvude ruute on kerge leida peast järgmiselt:
$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$, s. t. ruututõstetava arvu täiskümneliste arv tuleb korrutada ühe võrra suurema arvuga ja saadud korrutisele kirjutada lõppu juurde 25.

Näide: $25^2=625$, sest $2\cdot 3=6$
$55^2=3025$, sest $5\cdot 6=30$

Leida peast järgmiste arvude ruudud:
15; 35; 45; 65; 75; 85; 95.

194. Milline võib olla ruututõstetava täisarvu üheliste number, kui selle arvu ruudu üheliste number on 1; 4; 5; 6; 9; 0?

195. Kas mingi täisarvu ruudu üheliste number saab olla 2; 3; 7; 8? Põhjendus!

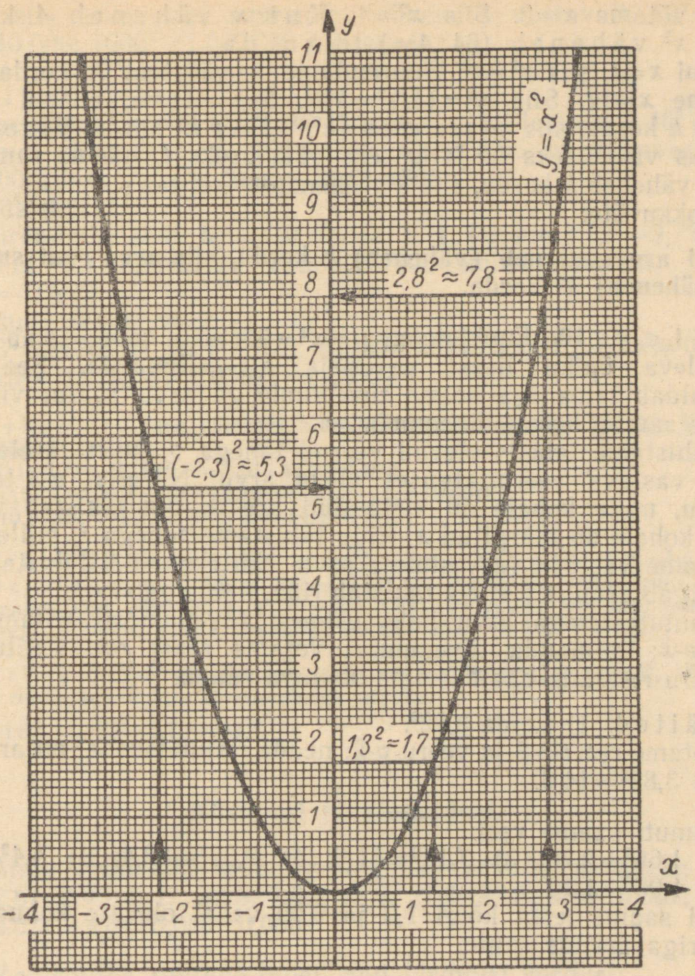
196. Mis on positiivse arvu absoluutväärtus? Negatiivse arvu absoluutväärtus?

197. Leida alljärgnevate arvude absoluutväärtused:
5; 10; 378; $-4{,}75$; -792; $-34{,}5$.

§ 14. RUUTUDE TABEL

1. Ruutude leidmine graafikult. Joonisel 51 on ehitatud funktsiooni $y=x^2$ graafik. Selle graafiku abil argumendi väärtuste järgi funktsiooni väärtuste leidmine on arvude ruutude graafiline leidmine.

Näiteid. 1) Kui $x=2$, siis $y=x^2=4$
2) kui $x=1{,}3$, siis $y=x^2\approx 1{,}7$
3) kui $x=-2{,}3$, siis $y=x^2\approx 5{,}3$



Joon. 51

2. Funktsiooni $y=x^2$ omadus. Et arvu ruutu on arvutustöös sageli vaja kasutada, siis on töö lihtsustamiseks koostatud funktsiooni $y=x^2$ väärtuste tabel ehk ruutude tabel. Enne selle tabeli kasutamist peame tundma funktsiooni $y=x^2$ üht omadust; nimelt vaatame, kuidas muutub funktsioon, kui argument suureneb (väheneb) mingi arv korda.

Kui $x=2$, siis $x^2=4$. Suurendame x väärtust näiteks 3 korda, s. t. võtame $x=6$. Siis $x^2=36$. Seega näeme, et kui x suureneb 3 korda, siis x^2 suureneb (36:4=) 9 korda.

Kui $x=8$, siis $x^2=64$. Vähendame x väärtust näiteks 4 korda,

s. t. võtame $x=2$. Siis $x^2=4$. Kui x väheneb 4 korda, siis x^2 väheneb $(64:4=)$ 16 korda.

Kui $x=t$, siis $x^2=t^2$. Suurendame x väärtust k korda, s. o. võtame $x=kt$. Siis $x^2=(kt)^2=k^2t^2$. Siit näeme, et kui x suureneb k korda, siis x^2 suureneb $(k^2t^2:t^2=)$ k^2 korda. Võttes x esimeseks väärtuseks kt ja teiseks väärtuseks t, näeme samuti, et kui x väheneb k korda, siis x^2 väheneb k^2 korda.

Kokkuvõte:

kui arv suureneb (väheneb) k korda, siis arvu ruut suureneb (väheneb) k^2 korda.

3. $1 \leqslant x < 10$. Funktsiooni $y=x^2$ väärtuste tabeli leiab lugeja käesoleva õpiku lisast pealkirja all «Ruudud». See tabel võimaldab leida iga kolme tüvenumbriga arvu ruutu; viimased saame samuti kolme tüvenumbriga.

Tähistame tabelis olevad veerud tähega v, mille järele kirjutame vastava veeru alguses oleva arvu. Näiteks, v-3 tähistab veergu, mille kohale on kirjutatud arv 3; v-x tähistab veergu, mille kohale on märgitud x. Ridu tähistame tähega r, mille järele kirjutame vastava rea esimese arvu. Näiteks, r-3,9 tähistab rida, mis algab arvuga 3,9; r-x tähistab rida, mis algab x-ga.

Ruututõstetava arvu kaks esimest tüvenumbrit võtame veerust v-x; kolmanda tüvenumbri võtame reast r-x. Valitud rea ja veeru ristumiskohalt leiame otsitava ruudu.

Näited. 1) Leida $3{,}82^2$.

Võtame rea r-3,8 ja veeru v-2; nende ristumiskohal on arv 14,6. Seega $3{,}82^2=14{,}6$.

Samuti saame veel:

2) $1{,}66^2=2{,}76$; 3) $7{,}14^2=51{,}0$; 4) $9{,}08^2=82{,}4$; 5) $4{,}4^2=19{,}4$; 6) $1{,}05^2=1{,}10$

Nii saame leida kõigi 1,0 ja 9,99 vahel olevate kolme tüvenumbriga arvude ruute.

198. Kontrollida ruutude tabeli abil järgmisi võrdusi:
$2{,}3^2=5{,}29$; $1{,}2^2=1{,}44$; $1{,}7^2=1{,}89$; $3{,}5^2=12{,}2$; $8{,}7^2=75{,}7$; $1{,}25^2=1{,}56$; $3{,}42^2=11{,}7$; $7{,}87^2=61{,}9$.

199. Leida ruutude tabeli abil järgmiste arvude ruudud:
1,8; 3,2; 7,8; 2,34; 3,78; 6,54; 9,89; 5,01; 6,08; 1,09.

4. $x<1$; $x\geqslant 10$. Kui ruututõstetav arv ei kuulu eespool vaadeldud vahemikku, s. t. kui ruututõstetav arv on vähem kui 1,0 või suurem kui 9,99, siis tuleb seda arvu suurendada või vähendada (koma nihutamisel) vastavalt vajadusele 10; 100; 1000 jne. korda, nii et pärast seda saadud uus arv kuuluks sellesse vahemikku. Siis leiame selle suurendatud või vähendatud arvu ruudu ja arvestame, et kui arv suurenes (vähenes) 10; 100; 1000; jne.

korda, siis arvu ruut suureneb (väheneb) vastavalt $10^2=100$; $100^2=10\,000$; $1000^2=1\,000\,000$ jne. korda.

Näited. 1) Leida $24{,}6^2$.

Vähendame seda arvu 10 korda, s. t. leiame $2{,}46^2=6{,}05$. Arvu ruut vähenes seega 100 korda, nii et 6,05 on otsitavast ruudust 100 korda vähem. Seega $24{,}6^2=605$.

2) Leida $0{,}312^2$.

Suurendame seda arvu 10 korda, s. t. leiame $3{,}12^2=9{,}73$. Leitud ruut on otsitavast ruudust 100 korda suurem, nii et $0{,}312^2=0{,}0973$.

Samuti saame veel:

3) $82{,}3^2=6770$; 4) $19{,}4^2=376$; 5) $593^2=352\,000$; 6) $0{,}13^2=0{,}0169$; 7) $0{,}475^2=0{,}226$; 8) $0{,}0567^2=0{,}00321$

Märkus 1. Vigade vältimiseks võib esialgsel õppimisel toimida ka järgmiste näidete kohaselt:

$0{,}67^2=(0{,}1\cdot 6{,}7)^2=0{,}1^2\cdot 6{,}7^2=0{,}01\cdot 44{,}9=0{,}449$;

$0{,}0876^2=(0{,}01\cdot 8{,}76)^2=0{,}01^2\cdot 8{,}76^2=0{,}0001\cdot 76{,}7=0{,}00767$.

$37{,}9^2=(10\cdot 3{,}79)^2=10^2\cdot 3{,}79^2=100\cdot 14{,}4=1440$

Märkus 2. Jämedaid vigu võimaldab ka vältida otsitava ruudu ligikaudne hinnang. Näiteks leides $23{,}7^2$ on ilmne, et otsitav ruut on 400 ja 900 vahel, sest $20^2=400$ aga $30^2=900$. Otsitava ruudu leidmisel tabeli abil ei ole seega võimalik saada vastuseks näiteks 56,2, vaid $23{,}7^2=562$.

Märkus 3. Kui antud arvus on enam kui kolm tüvenumbrit, siis tuleb ta enne ümardada kolme tüvenumbriga arvuks.

Näide. $5{,}782^2\approx 5{,}79^2=33{,}5$.

Küsimusi ja ülesandeid.

200. Anda ligikaudne hinnang järgmiste arvude ruutudele: 2,87; 3,45; 6,47; 8,95; 7,02; 15,2; 27,6; 89,5; 0,89; 0,567; 0,105; 0,62; 0,479; 0,056; 0,069.

201. Kontrollida ruutude tabeli abil järgmisi võrdusi:
$10{,}5^2=110$; $13{,}9^2=193$; $29{,}5^2=870$; $87{,}4^2=7640$;
$0{,}23^2=0{,}0529$; $0{,}476^2=0{,}227$; $0{,}975^2=0{,}951$;
$0{,}103^2=0{,}0106$; $0{,}0327^2=0{,}00107$; $0{,}00794^2=0{,}0000630$;
$0{,}000134^2=0{,}0000000180$.

202. Leida ruutude tabeli abil järgmiste arvude ruudud: 10,9; 12,8; 23,7; 30,4; 75,6; 98,7; 102; 0,375; 0,492; 0,875; 0,056; 0,06783; 0,00573; 0,4786; 0,05897; 12,756; 1,378; 0,03274.

203. Vabalt langeva keha poolt läbitud tee pikkust olenevalt langemise ajast arvutatakse valemi

$$h=4{,}9t^2$$

järgi, kus t tähistab langemise aega (sekundites) ja h tähistab langemisel läbitud tee pikkust (meetrites).

Kasutades ruutude tabelit, arvutada, kui palju on langenud keha, kui langemise algusest on möödunud 1 s; 2 s; 3,2 s; 4,5 s; 7,89 s; 12,3 s; 1,5 min.; 4,3 min.

Kordamiseks.

204. Mis on alljärgnevate arvude tüvenumbriteks?
0,756; 0,0870; 502; 321; 1789; 1002; 0,0010050.

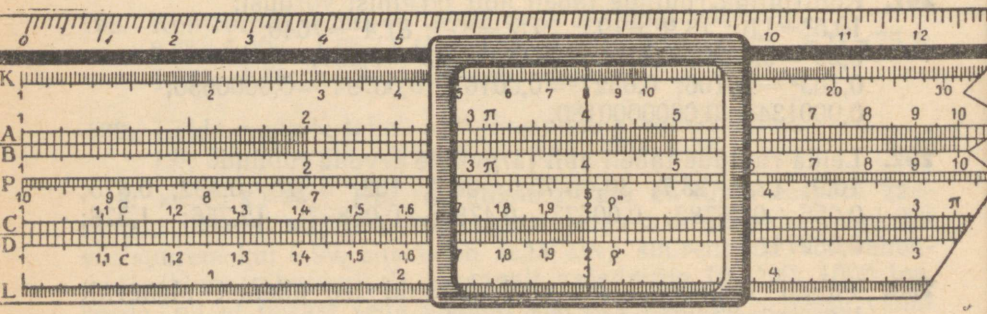
205. Arvutada lükati abil

1) $3{,}87 \cdot 5{,}65$; $12{,}7 \cdot 14{,}5$; $0{,}87 \cdot 325$; $0{,}105 \cdot 13{,}7$; $0{,}885 \cdot 0{,}79$;
2) $12{,}8 : 3{,}45$; $324 : 157$; $4{,}84 : 8{,}58$; $5{,}32 : 0{,}56$; $0{,}675 : 0{,}47$;
3) $3{,}27 \cdot 3{,}27$; $5{,}67 \cdot 5{,}67$; $12{,}9 \cdot 12{,}9$; $0{,}78 \cdot 0{,}78$; $0{,}91 \cdot 0{,}91$.

§ 15. RUUTUDE LEIDMINE LÜKATI ABIL.

1. Ruutude skaala. Lükati abil võib arvu ruute leida nagu kahe võrdse teguri korrutisi (vt. ülesanne 205-3). Tunduvalt lihtsamalt saab leida arvude ruute aga siis, kui tunneme lükati A-skaala ehk ruutude skaala (joon. 52) ehitust. Samasugune skaala on veel keele ülaserval B-skaala näol, nii et A-skaalaga tutvumiseks on otstarbekas lükata keel sellisesse asendisse, et A-1 ja B-1 on kohakuti.

A-skaalale on numbrite abil märgitud 1, 2, 3, ... , 80, 90, 100. Et osata sellel skaalal märkida ja lugeda ka teisi arve, tuleb hoolega tutvuda skaala ehitusega ja kindlaks teha, millise arvulise väärtusega on iga kõige vähem kriipsuvahe skaala erinevail osadel (vt. joonised 53, 54 ja 55).



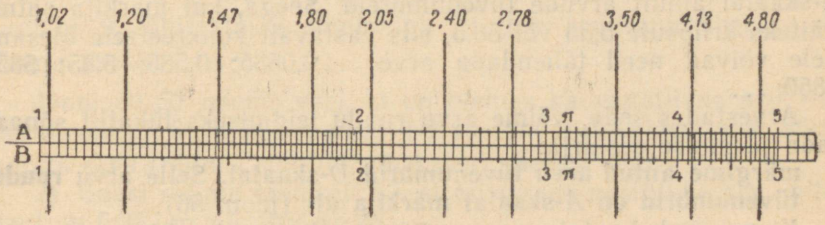
Joon. 52

2. Ruutude leidmine. Märgime *D*-skaalal *D*-2; *A*-skaalal on märkija all *A*-4,00 (joon. 52). Samal ajal paneme tähele, et $2^2=4$. Märgime *D*-skaalal *D*-3; A-skaalal on märkija all *A*-9,00 ($3^2=9$). Samuti näeme, et kohakuti on veel *D*-4 ja *A*-16,0, ($4^2=16$); *D*-5 ja *A*-25,0 ($5^2=25$); *D*-6 ja *A*-36,0, ($6^2=36$); *D*-1,5 ja *A*-2,25 ($1{,}5^2=2{,}25$); *D*-1,9 ja *A*-3,61 ($1{,}9^2=3{,}61$); *D*-6,7 ja *A*-44,9, ($6{,}7^2\approx44{,}9$).

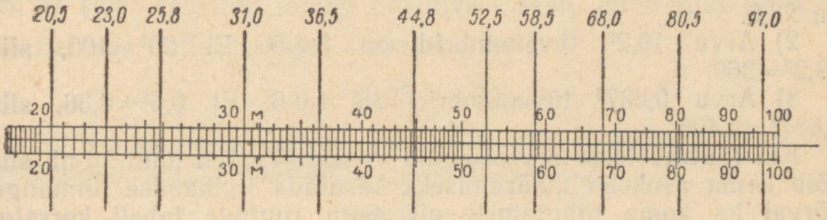
Neist näidetest järeldub *A*-skaala omadus. Kui vaadelda *A*-skaala ja *D*-skaala mistahes kaht kohakuti olevat kriipsu, siis *A*-skaala kriipsule vastav arv on *D*-skaala kriipsule vastava arvu ruut.

Seepärast nimetataksegi *A*-skaalat r u u t u d e s k a a l a k s.

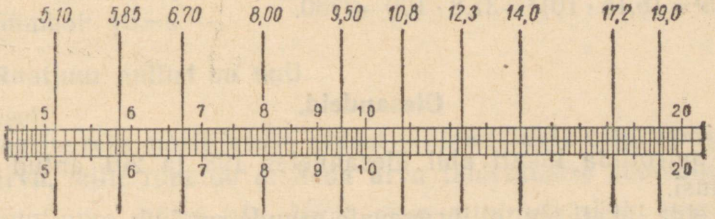
Nii nagu lükati põhiskaaladel (*C* ja *D*), arvestatakse ka



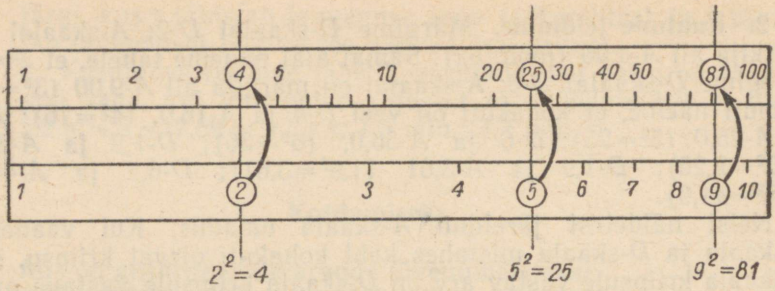
Joon. 53



Joon. 54



Joon. 55



Joon. 56

A-skaalal ainult arvude tüvenumbreid. Seega, kui märkija satub näiteks kriipsule 5,85 või 58,5, siis vastavalt konkreetsele ülesandele võivad need tähendada arve ... 0,0585; 0,585; 5,85; 585; 5850; ...

Arvestades seda, võime arvu ruudu leidmiseks lükatilt sõnastada järgmise eeskirja:

märgime antud arvu tüvenumbrid *D*-skaalal. Selle arvu ruudu tüvenumbrid on *A*-skaalal märkija all (joon. 56).

Koma asukoha tulemuses määrame ligikaudse hinnangu teel.

Näiteid. 1) Arvu $5{,}35^2$ tüvenumbrid on 2-8-6. Et $5^2=25$, siis on ilmne, et see arv ei saa olla näiteks 2,86 või 286, vaid ta on 28,6.

2) Arvu $19{,}2^2$ tüvenumbrid on 3-6-9. Et $20^2=400$, siis $19{,}2^2=369$.

3) Arvu $0{,}637^2$ tüvenumbrid on 4-0-6. Et $0{,}6^2=0{,}36$, siis $0{,}637^2=0{,}406$.

Kui ruututõstetav arv ei kuulu vahemikku 1-st kuni 10-ni, siis võib koma asukoha määramiseks kasutada ligikaudse hinnangu kõrval ka koma nihutamist nii nagu ruutude tabeli korralgi (§ 14 p. 4).

Näiteid. 1) $0{,}637^2=(6{,}37\cdot 0{,}1)^2=40{,}6^2\cdot 0{,}01=0{,}406$;
2) $0{,}0667^2\approx(6{,}67\cdot 0{,}01)^2=44{,}5\cdot 0{,}0001=0{,}00445$;
3) $61{,}5^2=(6{,}15\cdot 10)^2=37{,}8\cdot 100=3780$.

Ülesandeid.

206. Kontrollida lükati abil ülesannetes 198 ja 201 antud võrdusi.

207. Leida lükati abil alljärgnevate arvude ruudud:
1) 1,2; 2,3; 2,85; 3,05; 3,26; 4,15; 5,02; 6,37; 7,89; 9,45.

2) 11,5; 12,4; 24,0; 32,7; 31,4; 42,5; 50,5; 61,9; 87,58; 92,5.
3) 0,105; 0,232; 0,0485; 0,0327; 0,00129; 0,765; 0,00095.
4) 1,02; 10,5; 11,89; 124; 327; 8,75; 0,329; 0,1598.

208. Leida ruudu pindala, kui ruudu külg on 1,05 cm; 2,23 m; 14,7 cm; 0,38 m; 0,0565 m; 137 mm.

§ 16. RUUTJUUR.

1. Ruutjuure leidmine graafikult. Funktsiooni $y=x^2$ graafiku (joon. 51) abil x järgi y leidmine tähendab arvu järgi tema ruudu leidmist; y järgi x leidmine tähendab aga pöördülesande lahendamist: arvu ruudu järgi arvu enda leidmist.

Näiteid. 1) Jooniselt 57 näeme, et selline positiivne arv, mille ruut on 9, on 3. Tõepoolest: $3^2=9$. Positiivset arvu, mille ruut on 9, tähistatakse sümboliga $\sqrt{9}$ (loe: «ruutjuur üheksast»). Seega $\sqrt{9}=3$.

Jooniselt 57 näeme veel, et on olemas ka negatiivne arv -3, mille ruut on 9. Seda arvu kui $+3$ vastandarvu tähistatakse sümboliga $-\sqrt{9}$ (miinus ruutjuur üheksast). Seega $-\sqrt{9}=-3$.

2) Edasi selgub jooniselt 57, et niisugune positiivne arv, mille ruut on 6,25, on 2,5; $2{,}5^2=6{,}25$.

Sümbol: $\sqrt{6{,}25}=2{,}5$,

nii et $\sqrt{6{,}25}$ tähistab jällegi positiivset arvu, mille ruut on 6,25.

Eelmise näite eeskujul saame ka, et

$$-\sqrt{6{,}25}=-2{,}5.$$

3) Niisugune positiivne arv, mille ruut võrdub 10,2 on 3,2. Tõepoolest, kontroll näitab, et $3{,}2^2=10{,}24\approx 10{,}2$.

$$\sqrt{10{,}2}\approx 3{,}2.$$

$\sqrt{10{,}2}$ tähistab sellist positiivset arvu, mille ruut on 10,2. Millega võrdub $-\sqrt{10{,}2}$?

4) Selline arv, mille ruut on null, saab olla ainult null.

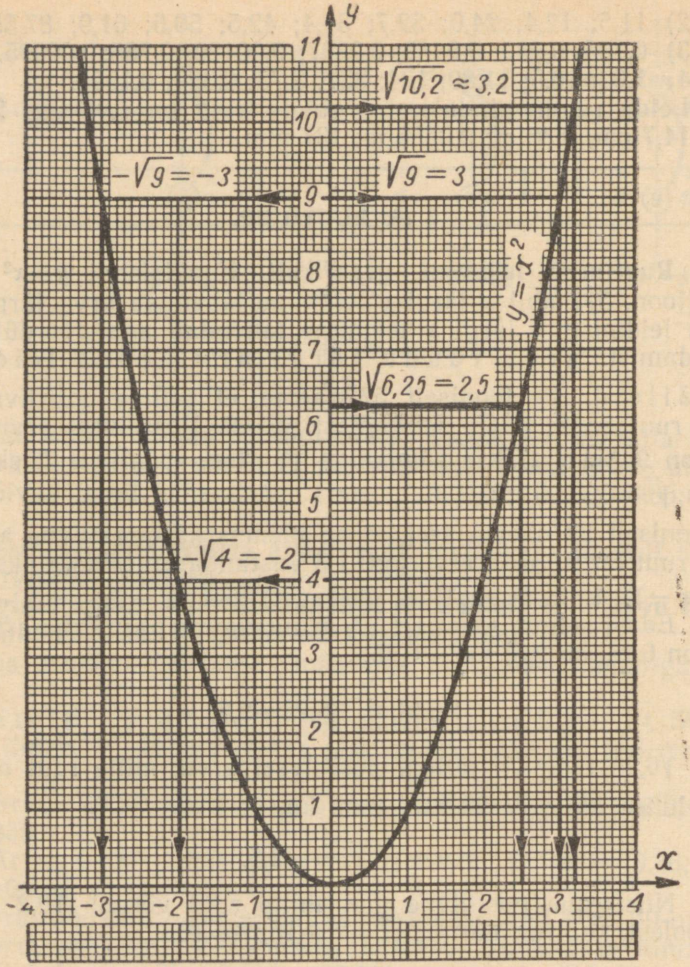
Sümbol: $\sqrt{0}=0$.

Ruutjuur nullist on null.

Üldiselt:

ruutjuureks positiivsest arvust a nimetatakse sellist positiivset arvu, mille ruut on a. Seda arvu tähistatakse sümboliga $\sqrt{a}$.

Ruutjuure märgi all olevat arvu a nimetatakse **juuritavaks arvuks** ehk lühidalt **juuritavaks.**



Joon. 57

Arvestades ruutjuure definitsiooni ja seda, et $\sqrt{0}=0$, võime öelda, et kui $a \geqslant 0$, siis

$$(\sqrt{a})^2 = a; \text{ samuti } \sqrt{a^2} = a.$$

Näiteid.

$$(\sqrt{4})^2 = \sqrt{4^2} = 4; \quad (\sqrt{3})^2 = \sqrt{3^2} = 3;$$

$$(\sqrt{17})^2 = \sqrt{17^2} = 17$$

Ruutjuure definitsiooni põhjal saame ka, et kui $a>0$, siis

$$\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=a.$$

Näiteid.

$$\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{7^2}=7; \quad \sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$$

Kokkuvõttes võime seega öelda, et kui a tähistab mistahes arvu (kas positiivset arvu, negatiivset arvu või nulli), siis

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Näiteid.

$$\sqrt{13^2}=|13|=13; \quad \sqrt{(-8)^2}=|-8|=8$$

Ruutjuurt negatiivsest arvust ei ole olemas, sest ei ole arvu, mille ruut on negatiivne.

Seega ei oma mõtet näiteks sümbol $\sqrt{-9}$, sest pole arvu, mille ruut on -9. Samuti on mõttetu ka sümbol $(\sqrt{-5})^2$, sest $\sqrt{-5}$ ei ole olemas ja seega pole olemas ka tema ruutu.

2. Proovimine. Ruutjuurt antud arvust on võimalik leida proovimisel. Eriti lihtne on seda teha siis, kui juuritav arv on mingi täisarvu täpne ruut.

Näide. $\sqrt{1369}=x$.

Peast tehtav ligikaudne hinnang ütleb, et

$$30<\sqrt{1369}<40,$$

sest $30^2=900<1369$, aga $40^2=1600>1369$. Edasi leiame peast, et $35^2=1225<1369$. Seega

$$35<\sqrt{1369}<40.$$

Et juuritava arvu üheliste number on 9, siis on ainus võimalus: $\sqrt{1369}=37$. Tõepoolest, $37^2=1369$.

Ka siis, kui juuritav arv ei ole mingi tuntud arvu täpne ruut, on ruutjuure ligikaudseid väärtusi ehk lähendeid võimalik leida proovimisel.

Näide. $\sqrt{5}=x$

Peast proovimine näitab, et

$$2<\sqrt{5}<3,$$

sest $2^2=4<5$, aga $3^2=9>5$. Peast proovimine näitab veel, et $2{,}5^2=6{,}25>5$. Seega on $\sqrt{5}$ määratud täpsusega 0,5:

$$2<\sqrt{5}<2{,}5.$$

Nüüd proovime ruutude tabeli abil järgemööda arve: 2,1;

2,2; ... Selgub, et $2{,}2^2=4{,}84<5$, kuid $2{,}3^2=5{,}29>5$. $\sqrt{5}$ on määratud täpsusega 0,1:

$$2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3.$$

Seega võime kirjutada: $\sqrt{5}\approx 2{,}2$ (puuduga) või $\sqrt{5}\approx 2{,}3$ (liiaga); kummalgi juhtumil ei ole viga suurem kui 0,1.

Täpsema lähendi saamiseks proovime arve 2,21; 2,22; 2,23, ... Selgub, et $2{,}23^2=4{,}98<5$, kuid $2{,}24^2=5{,}02>5$. Nüüd on $\sqrt{5}$ määratud täpsusega 0,01:

$$2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24,$$

nii et $\sqrt{5}\approx 2{,}23$ (puuduga) või $\sqrt{5}\approx 2{,}24$ (liiaga); viga ei ole kummalgi puhul enam suurem kui 0,01.

Sellist mõttekäiku jätkates võime leida otsitava ruutjuure üha täpsemaid lähendeid. Sel puhul öeldakse, et me läheneme järk-järgult $\sqrt{5}$ täpsele väärtusele. Edasise täpsustamise jaoks oleks aga vaja täpsemaid ruutude tabeleid.

209. Leida proovimise teel alljärgnevad ruutjuured:

$\sqrt{4}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{900}$; $\sqrt{1600}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{484}$; $\sqrt{576}$; $\sqrt{1024}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$.

210. Arvutada:

$(\sqrt{3})^2$; $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt{18})^2$; $(\sqrt{0{,}7})^2$; $(\sqrt{0{,}13})^2$; $\sqrt{6^2}$; $\sqrt{11^2}$; $\sqrt{15^2}$; $\sqrt{37^2}$; $\sqrt{135^2}$; $\sqrt{3897^2}$; $\sqrt{0{,}35^2}$; $\sqrt{0{,}1598^2}$; $(-\sqrt{2})^2$; $(-\sqrt{8})^2$; $(-\sqrt{17})^2$; $(-\sqrt{0{,}89})^2$; $-\sqrt{5^2}$; $-\sqrt{30^2}$; $-\sqrt{8^2}$; $-\sqrt{87{,}5^2}$; $\sqrt{(-14)^2}$; $\sqrt{(-9)^2}$; $\sqrt{(-39)^2}$; $\sqrt{(-37{,}9)^2}$.

211. Missugused alljärgnevaist sümboleist ei oma mõtet? Põhjendus!

$\sqrt{9}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-16}$; $(\sqrt{-5})^2$; $\sqrt{(-7)^2}$; $(\sqrt{-25})^2$; $-\sqrt{(-36)^2}$; $-\sqrt{a^2}$; $\sqrt{(-a)^2}$; $(\sqrt{a})^2$; kui $a>0$; $(\sqrt{a})$, kui $a<0$; $\sqrt{-a^2}$.

212. a) Kirjutada ruutudena järgmised arvud:

3; 5; 13; 27; 43; 1379; 0,21; 0,5

Näide.

$8=(\sqrt{8})^2$

b) Lahutada teguriteks:

x^2-5; x^2-7; $4m^2-10$; $6b^2-2$; $2b^2-5$

Näide. $a^2-6=a^2-(\sqrt{6})^2=(a-\sqrt{6})(a+\sqrt{6})$

213. Leida alljärgnevad ruutjuured:

$\sqrt{(8-5)^2}$; $\sqrt{(12-20)^2}$; $\sqrt{(3a-2a)^2}$; $\sqrt{(5m-3m)^2}$;

$\sqrt{(a-2a)^2}$; $\sqrt{(2m-8m)^2}$; $\sqrt{(a-b)^2}$, kui $a>b$; $\sqrt{(x-y)^2}$, kui $y>x$

3. Newtoni meetod. Vaatleme siinjuures veel üht võtet (Newtoni meetodit) [1] ruutjuure lähendite arvutamiseks. Vaadeldavat võtet saab muuseas kasutada ruutjuure arvutamiseks ka arvutusmasina abil.

Näide. Olgu vaja leida $\sqrt{11}$ täpsusega 0,01.

Jooniselt 57 näeme, et $\sqrt{11}\approx 3{,}3$. Arvu 3,3 nimetame otsitava ruutjuure esimeseks lähendiks. (Esimese lähendi võib leida ka proovimisel). Otsitava ruutjuure täpset väärtust võib siis esitada kujul

$$\sqrt{11}=3{,}3+\alpha,$$

kus α tähistab mingit seni veel tundmata väikest murdarvu, mida nimetatakse esimese lähendi paranduseks. Tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$(\sqrt{11})^2=(3{,}3+\alpha)^2;\quad 11=3{,}3^2+6{,}6\,\alpha+\alpha^2$$
$$11=10{,}9+6{,}6\,\alpha+\alpha^2$$

Et α tähistas väikest (nullile lähedast) murdu, siis on α^2 veelgi vähem ja me võime seepärast jätta α^2 arvestamata:

$$11\approx 10{,}9+6{,}6\,\alpha,$$

millest

$$\alpha\approx\frac{11-10{,}9}{6{,}6}=\frac{0{,}1}{6{,}6}\approx 0{,}0152,$$

nii et $\sqrt{11}\approx 3{,}3+0{,}0152=3{,}3152\approx 3{,}32$. Saadud väärtuse 3,32 võtame otsitava juure teiseks lähendiks, mille parandust tähistame tähega β. Seega

$$\sqrt{11}=3{,}32+\beta,$$

millest pärast ruututõstmist ja β^2 arvestamata jätmist leiame, et $\beta\approx 0$. Seega on nõutava täpsusega $\sqrt{11}=3{,}32$. Täpsema ruutude tabeli kasutamisega (või ruutude arvutamisega) võib sellise järkjärgulise parandamise teel leida otsitava ruutjuure lähendeid mistahes vajaliku täpsusega.

4. Ruutjuur korrutisest. Vaatame, kuidas leida ruutjuurt kahe arvu korrutisest.

Näiteid. 1) $\sqrt{4\cdot 16}=\sqrt{64}=8$. Samale tulemusele jõuame ka

[1] I. Newton (1643—1727) — inglise füüsik, matemaatik, astronoom.

siis, kui leiame ruutjuure kummastki juuritava tegurist eraldi ja tulemused korrutame. Tõepoolest: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}=2\cdot 4=8$. Samuti saame veel:

2) $\sqrt{9\cdot 25}=\sqrt{225}=15$; $\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}=3\cdot 5=15$

3) $\sqrt{0{,}25\cdot 36}=\sqrt{9}=3$; $\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{36}=0{,}5\cdot 6=3$

Et leida ruutjuurt kahe positiivse arvu korrutisest, võib leida ruutjuure eraldi mõlemast tegurist ja tulemused korrutada.

Sümbol: $\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$

Märkus. Saadud valem laieneb ka enam kui kahest tegurist koosneva korrutise kohta.

Näide.

$$\sqrt{9\cdot 25\cdot 4}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{4}=3\cdot 5\cdot 2=30$$

Lugedes korrutise juurimise eeskirja paremalt vasakule, on otstarbekas seda kasutada ruutjuurte korrutamisel. Selleks et korrutada ruutjuuri, võib enne korrutada juuritavad arvud ja siis leida ruutjuur saadud korrutisest.

Näiteid. 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$

2) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{128}=\sqrt{0{,}5\cdot 128}=\sqrt{64}=8$

214. Arvutada:

$\sqrt{16\cdot 25}$; $\sqrt{4\cdot 9}$; $\sqrt{36\cdot 49}$; $\sqrt{81\cdot 64}$; $\sqrt{0{,}16\cdot 0{,}25}$; $\sqrt{4m^2}$;

$\sqrt{25x^2}$; $\sqrt{49y^2}$; $\sqrt{9a^2b^2}$; $\sqrt{0{,}09\cdot m^2\cdot 16n^2}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$;

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{24{,}5}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{33\frac{1}{3}}$

5. Ruutjuur jagatisest. Vaatame ruutjuure leidmist kahe arvu jagatisest.

Näiteid. 1) $\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{2{,}25}=1{,}5$. Samale tulemusele jõuame ka siis, kui leiame eraldi ruutjuure jagatavast ja jagajast ning jagame esimese tulemuse teisega. Veendume selles:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Samuti saame näiteks:

2) $\sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$; $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$;

3) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$; $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Et leida ruutjuurt positiivsete arvude jagatisest, võib leida eraldi ruutjuure jagatavast ja jagajast ning jagada esimese tulemuse teisega.

Sümbol: $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

Saadud võrduse lugemine paremalt vasakule võimaldab arvutada ruutjuure jagatist.

Näiteid. 1) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$

2) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{200}} = \sqrt{\frac{50}{200}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

215. Arvutada

$$\sqrt{\frac{64}{25}};\ \sqrt{\frac{25}{36}};\ \sqrt{4:9};\ \sqrt{0{,}25:4};\ \sqrt{36m^2:16};$$

$$\sqrt{98}:\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$$

6. Ruutjuure omadus. Lõpuks näitame, et

kui antud arv suureneb (väheneb) k^2 korda, siis ruutjuur sellest arvust suureneb (väheneb) k korda.

Näiteid. 1) $\sqrt{16} = 4$. Suurendame antud arvu (16) 100 korda, s. t. leiame $\sqrt{1600}$. Nagu proovimine näitab, on $\sqrt{1600} = 40$. Näeme, et kui antud arv suureneb (1600 : 16 =) 100 korda, siis ruutjuur suurenes (40 : 4 =) 10 korda.

2) $\sqrt{64} = 8$. Vähendame antud arvu 4 korda, s. t. leiame $\sqrt{16} = 4$. Kui antud arv väheneb (64 : 16 =) 4 korda, siis ruutjuur vähenes (8 : 4 =) 2 korda.

3) Olgu $\sqrt{a} = x$. Suurendame antud arvu a k^2 korda. Siis saame $\sqrt{k^2 a} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{a} = kx$, mis ütleb, et ruutjuur suurenes k korda.

216. Teades, et $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, arvutada ruutjuur järgmistest arvudest: $4 \cdot 5$; $9 \cdot 5$; $16 \cdot 5$; $25 \cdot 5$; $64 \cdot 5$; $100 \cdot 5$; $10\,000 \cdot 5$

217. Teades, et $\sqrt{1570} \approx 39{,}6$, arvutada ruutjuur järgmistest arvudest:

$$\frac{1570}{4};\ \frac{1570}{9};\ \frac{1570}{16};\ \frac{1570}{64};\ \frac{1570}{100};\ \frac{1570}{10\,000}$$

§ 17. RUUTJUURE TABEL.

1. $\mathbf{1 \leqslant x < 100}$. Käesoleva õpiku lisas pealkirja all «Ruutjuured» on antud ruutjuurte tabel. Selle tabeli abil saab leida kolme tüvenumbriga ruutjuurt igast kolme tüvenumbriga arvust x.

Näiteid. 1) Leida $\sqrt{7{,}87}$.

Juuritava kaks esimest tüvenumbrit leiame veerust v-x; kolmanda tüvenumbri leiame reast r-x. Otsitava ruutjuure murdosa 81 on rea r-7,8 ja veeru v-7 ristumiskohal; täisosa on ruumi kokkuhoiu mõttes kirjutatud ainult veergu v-0, nii et selles veerus antud mingi arvu täisosa kehtib kogu vastava rea kohta. Antud näites on otsitava ruutjuure täisosa 2 ja seega $\sqrt{7{,}87} = 2{,}81$.

Samuti saame veel:

2) $\sqrt{9{,}26} = 3{,}04$; 3) $\sqrt{8{,}2} = \sqrt{8{,}20} = 2{,}86$; 4) $\sqrt{34{,}2} = 5{,}85$;

5) $\sqrt{45} = \sqrt{45{,}0} = 6{,}71$; 6) $\sqrt{99{,}9} = 9{,}99$

218. Kontrollida tabeli abil järgmisi võrdusi:

$\sqrt{2{,}37} = 1{,}54$; $\sqrt{27} = 5{,}20$; $\sqrt{3{,}95} = 1{,}99$; $\sqrt{87{,}1} = 9{,}33$;

$\sqrt{2{,}08} = 1{,}44$; $\sqrt{20{,}1} = 4{,}48$; $\sqrt{34{,}9} = 5{,}91$; $\sqrt{90} = 9{,}49$

219. Leida tabeli abil ruutjuured järgmistest arvudest:

1,02; 1,13; 2; 3; 3,1; 3,13; 7,28; 5,07; 9,55; 10,3; 12,7; 24,6; 32; 33,1; 57,8; 67,5; 89,5; 98,9

2. $\mathbf{x < 1;\ x \geqslant 100}$. Kui juuritav arv ei kuulu vahemikku 1,0-st kuni 99,9, siis suurendame või vähendame vastavalt vajadusele seda arvu 100, 10 000, ... korda (nihutame koma kas vasakule või paremale 2, 4, 6, ... kohta), nii et pärast seda kuuluks juuritav arv nimetatud vahemikku. Nüüd peame aga arvestama seda, et kui juuritav suureneb (väheneb) 100, 10 000, ... korda, siis ruutjuur suureneb (väheneb) vastavalt 10, 100, ... korda (vt. § 16 p. 6).

Oluline on siinjuures meeles pidada, et juuritavas võib koma

nihutada ainult paarisarv (2, 4, 6 ...) kohtade võrra kas paremale või vasakule. Ruutjuures nihkub siis koma samas suunas vastavalt 1, 2, 3, ... koha võrra. Ruutjuure õige väärtuse saamiseks tuleb temas koma nihutada vastavalt 1, 2, 3, ... koha võrra tagasi.

Näiteid. 1) Leida $\sqrt{327}$.

Antud juuritavat 327 tabelis ei ole; tabelis on 3,27 ja 32,7. Et juuritavas võib koma nihutada ainult paarisarv kohtade võrra, siis vähendame antud juuritavat 100 korda ja leiame $\sqrt{3,27}=1,81$. Leitud arv 1,81 on nüüd otsitavast arvust 10 korda (mitte 100 korda!) vähem, nii et $\sqrt{327}=18,1$.

Esialgsel õppimisel võib tehtud arutelu kirjutada ka nii (vt. § 16 p. 4): $\sqrt{327}=\sqrt{100\cdot 3,27}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{3,27}=10\cdot 1,81=18,1$.

2) Leida $\sqrt{3270}$.

Vähendame juuritavat 100 korda ja leiame $\sqrt{32,7}=5,72$. Leitud arv 5,72 on otsitavast ruutjuurest 10 korda vähem, nii et $\sqrt{3270}=57,2$

Teisiti arvutades: $\sqrt{3270}=\sqrt{100\cdot 32,7}=10\cdot 5,72=57,2$.

3) Leida $\sqrt{32\,700}$.

Vähendame juuritavat 10000 korda ja leiame $\sqrt{3,27}=$ $=1,81$. Leitud arv 1,81 on otsitavast ruutjuurest 100 korda vähem. Tähendab, $\sqrt{32\,700}=181$.

Teisiti kirjutades: $\sqrt{32\,700}=\sqrt{10\,000\cdot 3,27}=100\cdot 1,81=181$.

4) Leida $\sqrt{0,874}$.

Suurendame juuritavat 100 korda: $\sqrt{87,4}=9,35$. Leitud arv 9,35 on otsitavast ruutjuurest 10 korda suurem. Seega $\sqrt{0,874}=0,935$.

Teisiti: $\sqrt{0,874}=\sqrt{0,01\cdot 87,4}=\sqrt{0,01}\cdot\sqrt{87,4}=0,1\cdot 9,35=0,935$.

Koma nihutamist juuritavas võib tabelite õppimisel märkida ka ülakoma abil. Nii saame näiteks

5) $\sqrt{0,08'74}=0,296$; 6) $\sqrt{0,00'87'4}=0,0935$

7) $\sqrt{0,01'05}=0,102$; 8) $\sqrt{1'53}=12,4$; 9) $\sqrt{8'40}=29,0$

10) $\sqrt{0,00005}=\sqrt{0,00'00'50'}=0,00707$

Peamiselt eksitakse ruutjuurte tabeli kasutamisel just siis, kui juuritav ei kuulu vahemikku 1-st kuni 99,9-ni, sest otsitav ruutjuur leitakse tabelist valelt kohalt. Näiteks selle asemel, et saada $\sqrt{307}=17{,}5$ (õige!), saadakse $\sqrt{307}=55{,}4$ (vale!), sest viimane ruutjuur on leitud valelt kohalt. Et selliseid vigu vältida, on soovitatav juhinduda järgmisest näpunäitest, mis selgub ka eespool antud näidete 5—10 vaatlemisel.

Jaotame juuritava arvu, komast alates, ülakomade abil rühmadeks, kaks numbrit rühmas. Kui esimeses vasakpoolses tüvenumbreid sisaldavas rühmas on üks tüvenumber, siis tuleb otsitav ruutjuur leida tabeli esimesest poolest (vahemikust 1,00 kuni 9,99); kui selles rühmas on kaks tüvenumbrit, siis tuleb otsitav ruutjuur leida tabeli teisest poolest (vahemikust 10,0 kuni 99,9).

Nii saame: 11) $\sqrt{3'27}=18{,}1$ (esimene pool); 12) $\sqrt{15'90}=39{,}9$ (teine pool); 13) $\sqrt{0{,}56'5}=0{,}752$ (teine pool); 14) $\sqrt{0{,}6}=$ $=\sqrt{0{,}60'}=0{,}775$ (teine pool); 15) $\sqrt{0{,}023}=0{,}152$ (esimene pool).

Kui juuritav on ühest vähem, siis koma asukoha määramisel tulemuses (ruutjuures) on kasulik silmas pidada järgmist: *ruutjuure täisosa on null; koma järele tuleb ruutjuures kirjutada veel nii mitu nulli, kui mitu rühma juuritavas koma ja esimese tüvenumbri vahel koosnevad ainult nullidest.*

Seega siis, $\sqrt{0{,}00'00'05'8}$ puhul võime juba enne tabelisse vaatamist kirjutada vastusesse 0,00, sest juuritavas on koma ja esimese tüvenumbri (5) vahel kaks rühma, mis koosnevad ainult nullidest. Tabelist leitud tüvenumbrid 2-4-1 kirjutame nullidele veel järele ja saame, et $\sqrt{0{,}0000058}=0{,}00241$.

Nii $\sqrt{0{,}00'56'7}$, $\sqrt{0{,}89'5}$, $\sqrt{0{,}00'00'00'01'02}$ ja $\sqrt{0{,}00'00'00'195}$ puhul võime tulemustesse kirjutada vastavalt: 0,0; 0; 0,000; 0,000 ja siis leida tabelist vajalikud tüvenumbrid.

Missugused on nende ruutjuurte tüvenumbrid?

Märkus 1. Nii nagu ruutude leidmiselgi, võimaldab ka ruutjuurte leidmisel vältida jämedaid vigu otsitava ruutjuure ligikaudne hinnang.

Märkus 2. Kui juuritavas on enam kui kolm tüvenumbrit, siis tuleb juuritav eelnevalt ümardada kolme tüvenumbriga arvuks.

Näide. $\sqrt{379{,}23}\approx\sqrt{379}=19{,}5$

220. Anda ligikaudne hinnang järgmistele ruutjuurtele:

$\sqrt{58{,}7}$; $\sqrt{138}$; $\sqrt{87{,}5}$; $\sqrt{1490}$; $\sqrt{1000}$; $\sqrt{0{,}37}$; $\sqrt{0{,}895}$; $\sqrt{0{,}95}$; $\sqrt{0{,}9}$; $\sqrt{0{,}042}$

221. Kontrollida tabeli abil järgmisi võrdusi:

$\sqrt{0{,}87}=0{,}933$; $\sqrt{0{,}0516}=0{,}227$; $\sqrt{0{,}003}=0{,}0548$;

$\sqrt{394}=19{,}8$; $\sqrt{1327}=36{,}5$; $\sqrt{2950}=54{,}3$; $\sqrt{15\,800}=126$

222. Leida tabeli abil ruutjuured järgmistest arvudest:

1) 123; 245; 327; 787,6; 1035; 1396; 1780; 7950; 8000; 394 000; 58 000; 10 567

2) 0,35; 0,427; 0,395; 0,87; 0,9; 0,052; 0,06; 0,0756; 0,0873; 0,0901; 0,0032; 0,00105; 0,000379; 0,0000301

3) 32,76; 5,82; 333; 2870; 0,49; 0,5; 0,0625; 0,007; 0,00000529; 31,97; 0,15; 125,9; 0,0276; 0,689

3. Ülesanne. Leida ringi raadius, kui ringi pindala on 57,3 m².

Lahendus. Ringi pindala valemi järgi $\pi R^2=57{,}3$, millest

$$R^2=\frac{57{,}3}{\pi}=\frac{57{,}3}{3{,}14}=18{,}2$$

Et ringi raadiuse pikkuseks peab olema selline arv, mille ruut on 18,2, siis

$$R=\sqrt{18{,}2}=4{,}27 \text{ (m)}$$

Vastus. Ringi raadius on 4,27 m

223. Leida ruudu külg, kui ruudu pindala on:
4 cm²; 5,12 m²; 28,9 dm²; 325 m²; 0,78 m²; 0,932 km²

224. Rööpküliku alus on 13,4 ja kõrgus on 6,70 m. Kui suur külg on ruudul, mille pindala on võrdne antud rööpküliku pindalaga? Kui suur on selle ruudu ümbermõõt? (*9,48 cm*; *37,9 cm*).

225. Kolmnurga alus on 27,5 m ja kõrgus on 15,6 m. Kui suur külg on ruudul, mille pindala on võrdne antud kolmnurga pindalaga? (*14,6 m*)

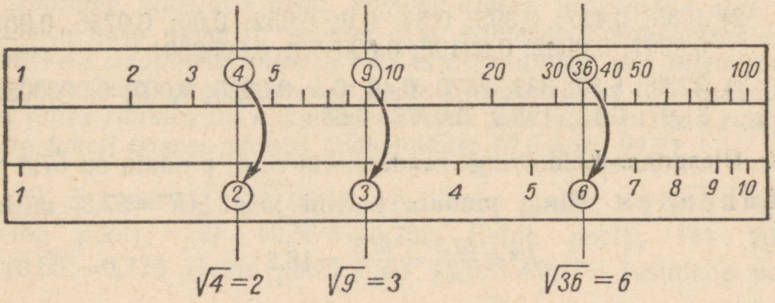
226. Ringikujulise lillepeenra pindala on 14 m². Leida selle lillepeenra läbimõõt ja ümbermõõt. (*4,3 m*; *13 m*)

227. Silindrikujulise 15,0 liitrise piimanõu kõrgus on 53 cm. Leida piimanõu põhja raadius. (*9,5 cm*)

Näpunäide. Piimanõu ruumala ja kõrguse järgi saab leida põhja pindala; viimase järgi leiame raadiuse.

§ 18. RUUTJUURE LEIDMINE LÜKATI ABIL.

Ruutjuure leidmine tähendab arvu ruudu järgi arvu enda leidmist. Siit järeldub otseselt ruutjuurte leidmise võimalus ka lükatilt. Selleks märgime juuritava arvu ruutude skaalal (*A*-skaalal), sest juuritav arv on otsitava arvu ruut. Otsitav ruutjuur (täpsemalt, selle tüvenumbrid) on *D*-skaalal märkija all (joon. 58). Koma asukoha määrame ligikaudse hinnangu järgi.



Joon. 58

Näiteid. Märgime *A*-4; märkija all *D*-skaalal on *D*-2,00 ($\sqrt{4}=2$). Samuti näeme, et kohakuti on veel *A*-16 ja *D*-4,00 ($\sqrt{16}=4$); *A*-49 ja *D*-7,00 ($\sqrt{49}=7$); *A*-28 ja *D*-5,29 ($\sqrt{28}\approx5{,}29$); *A*-52,4 ja *D*-7,24 ($\sqrt{52{,}4}\approx7{,}24$)

Kui juuritav arv ei kuulu vahemikku 1-st kuni 100-ni, siis toimime nii, nagu ruutjuurte tabeli kasutamiselgi. Nimelt, *jaotame koma nihutamise teel paarisarv kohtade võrra juuritava rühmadeks; kui esimeses vasakpoolses tüvenumbreid sisaldavas rühmas on üks tüvenumber, siis märgime juuritava A-skaala esimesel poolel; kui selles rühmas on kaks tüvenumbrit, siis märgime juuritava A-skaala teisel poolel.*

Näiteid. $\sqrt{6'85}=26{,}2$ (esimene pool: $\sqrt{6{,}85}\approx2{,}62$); $\sqrt{36'50}=60{,}4$ (teine pool: $\sqrt{36{,}5}=6{,}04$); $\sqrt{0{,}28'5}=0{,}534$ (teine pool: $\sqrt{28{,}5}=5{,}34$); $\sqrt{0{,}04'96}=0{,}223$ (esimene pool: $\sqrt{4{,}96}=2{,}23$); $\sqrt{0{,}00'00'05'25}=0{,}00229$ (esimene pool: $\sqrt{5{,}25}=2{,}29$); $\sqrt{0{,}7}=\sqrt{0{,}70'}=0{,}837$ (teine pool: $\sqrt{70}=8{,}37$).

Ülesandeid.

228. Kontrollida lükati abil ülesannetes 218 ja 221 antud võrdused.

229. Leida lükati abil ruutjuured alljärgnevaist arvudest:

1) 2; 3; 5; 7; 8; 12; 17; 23; 35; 42; 67; 75; 82; 97

2) 3,2; 4,5; 5,25; 10; 1,32; 1,04; 12,5; 27,8; 52.79; 87,5; 1,57; 1,478; 2,40; 3,05; 4,02; 10,5; 13,4; 16,787; 95,6; 99,0

3) 1,05; 10,5; 105; 1050; 287; 495; 628; 956; 1327; 2560; 0,327; 0,105; 0,679; 0,081; 0,0081; 0,9; 0,7; 0,82

4) 6; 60; 600; 0,6; 0,06; 0,006; 327; 0,327; 5,68; 6750; 0,00056; 0,012; 0,1; 0,2; 0,02; 23,796; 15 678; 9500

§ 19. FUNKTSIOON $y=ax^2+c$.

1. Ülesanne. Ristkülikukujulises aias mõõtmetega 28 m×35 m on ringikujuline tiik raadiusega x meetrit. Avaldada aia veevaba pindala aarides.

Lahendus. Aia kogupindala on $28\text{ m}\cdot 35\text{ m}=980\text{ m}^2=9{,}8$ a. Aias oleva tiigi pindala ruutmeetrites on $\pi x^2\approx 3{,}14x^2$ ehk $0{,}0314x^2$ aari. Aia veevaba pindala

$$y=9{,}8-0{,}0314x^2=-0{,}0314x^2+9{,}8 \text{ (aari)}$$

Lugeja ülesanne on kontrollida saadud valemi õigsust, kui $x=2$ m; 5 m

Näeme, et antud ülesanne viis paragrahvis 12 saadud ruutfunktsiooni erikujule $y=ax^2+c$. Antud näites $a=-0{,}0314$; $c=9{,}8$.

2. Graafik. Ruutfunktsiooni vaadeldava erikuju täpsemaks tundmaõppimiseks meenutame enne, et funktsiooni $y=ax^2$ graafikuks on parabool, mille haripunkt on koordinaatide alguspunktis. Kui $a>0$, siis on parabool nõgus; kui $a<0$, siis on parabool kumer (§ 13, p. 2).

Vaadeldes nüüd näiteks funktsioone $y=1{,}5x^2+3$ ja $y=1{,}5x^2-4$, võime juba ette kujutada, millised jooned on nende funktsioonide graafikuiks. Tõepoolest, võrreldes funktsiooni $y=1{,}5x^2+3$ funktsiooniga $y=1{,}5x^2$, on ilmne, et funktsiooni $y=1{,}5x^2+3$ kõik väärtused on funktsiooni $y=1{,}5x^2$ vastavaist väärtustest 3 võrra suuremad; seega peab funktsiooni $y=1{,}5x^2+3$ graafikuks olema ka parabool, mis on saadud paraboli[1] $y=1{,}5x^2$ nihutamisel 3 ühiku võrra y-telje positiivses suunas.

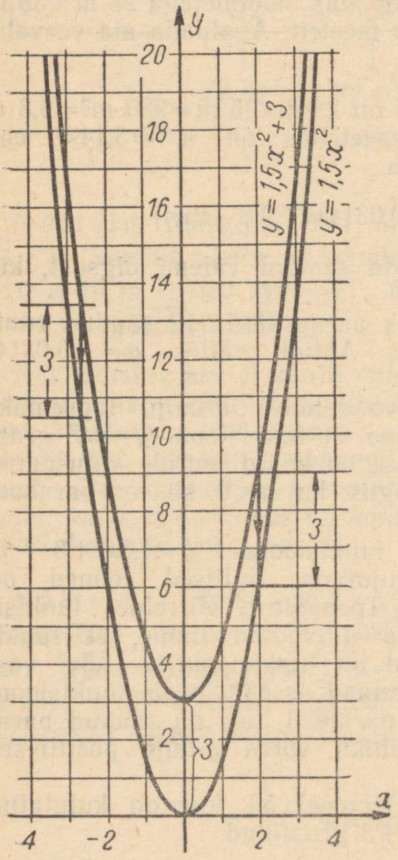
Selle arutelu õigsus ilmneb joonisel 59, kus on kujutatud funktsioonide $y=1{,}5x^2$ ja $y=1{,}5x^2+3$ graafikud.

[1] Väljend parabool $y=1{,}5x^2$ tähendab parabooli, mis on funktsiooni $y=1{,}5x^2$ graafikuks.

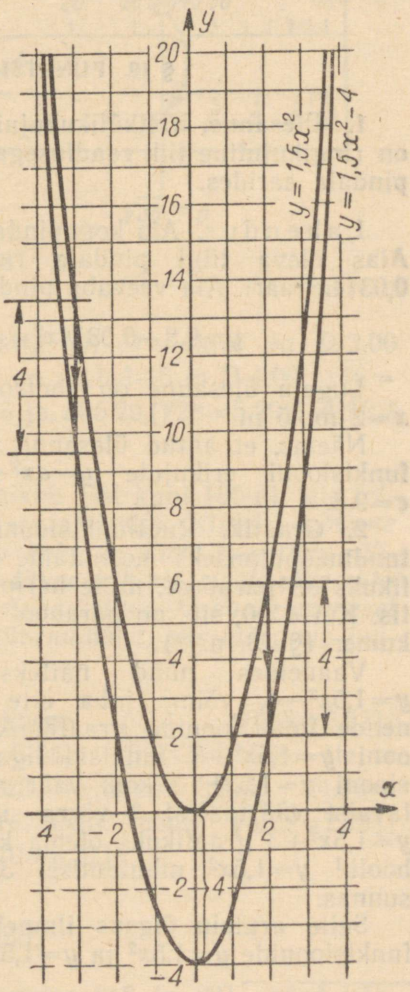
Võrreldes funktsiooni $y=1{,}5x^2-4$ funktsiooniga $y=1{,}5x^2$ võime öelda, et funktsiooni $y=1{,}5x^2-4$ graafik on parabool, mis on saadud parabooli $y=1{,}5x^2$ nihutamisel 4 ühiku võrra y-telje negatiivses suunas (joon. 60).

Kuidas asetsevad funktsioonide $y=-\frac{1}{2}x^2$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ graafikud teineteise suhtes (joon. 61)?

Kokkuvõte. **Funktsiooni $y=ax^2+c$ graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=ax^2$ nihutamisel $|c|$ ühiku**



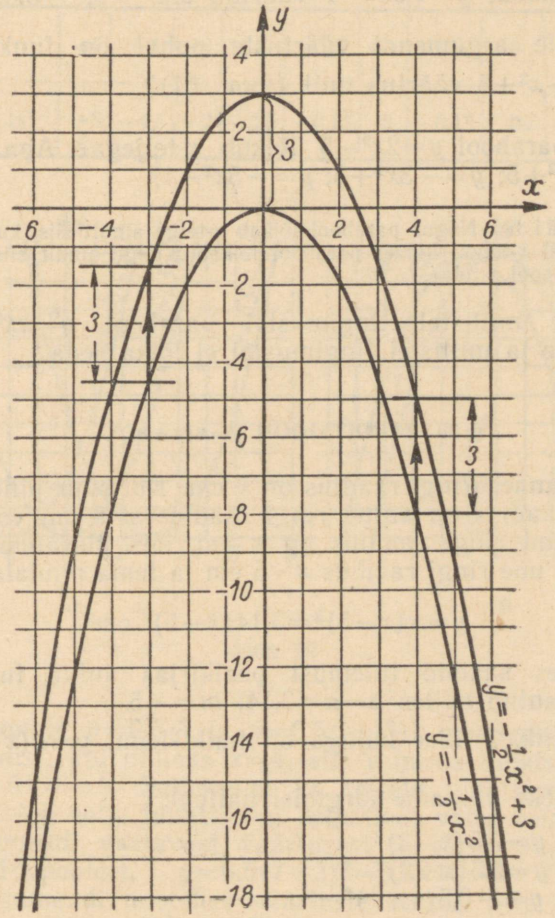
Joon. 59



Joon. 60

võrra y-telje positiivses suunas, kui $c>0$ ja $|c|$ ühiku võrra y-telje negatiivses suunas, kui $c<0$.

Siit järeldub: 1) Parabooli $y=ax^2+c$ haripunkti koordinaadid on $(0; c)$. 2) Kui $a>0$, siis on parabool $y=ax^2+c$ nõgus; kui $a<0$, siis on parabool kumer.



Joon. 61

Küsimusi ja ülesandeid.

230. Ehitada alljärgnevate funktsioonide graafikud:
1) $y=x^2+0{,}5$; 2) $y=-x^2+3$; 3) $y=2x^2+0{,}5$;
4) $y=-x^2-2$
Kus võimalik, kasutada põhiparabooli šablooni.

231. Nimetada alljärgnevate paraboolide haripunkti koordinaadid:
1) $y=3x^2+5$; 2) $y=-2x^2+7$; 3) $y=4{,}5x^2-5$;
4) $y=-8x^2-3$
Missugune neist paraboolidest on nõgus? Kumer?

232. Leida joonisel 60 argumendi need väärtused, mille puhul funktsiooni $y=1{,}5x^2-4$ väärtus on: -4; $-3{,}5$; 2; 9,5; 14

233. Milliste argumendi väärtuste puhul on funktsiooni $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ väärtus null (joon. 61)?

234. Kas parabool $y=2x^2-5$ lõikub x-teljega? Aga paraboolid $y=2x^2+5$; $y=-3x^2+5$; $y=-5x^2-1$?

Näpunäide. Nõgus parabool lõikab x-telge ainult siis, kui ta haripunkt asetseb allpool x-telge; kumer parabool lõikab x-telge ainult siis, kui ta haripunkt on ülalpool x-telge.

235. Leida, millistel tingimustel parabool $y=ax^2+c$ lõikab x-telge ja millistel tingimustel ei lõika seda.

§ 20. FUNKTSIOON $y=a(x+m)^2$.

1. Ülesanne. Ringi raadius on x cm. Kui suur pindala on ringil, mille raadius on antud ringi raadiusest 5 cm võrra vähem?

Kui antud ringi raadius on x cm, siis ülesande tingimuste kohaselt on uue ringi raadius $x-5$ cm ja tema pindala

$$y=\pi(x-5)^2\approx 3{,}14(x-5)^2 \text{ cm}^2$$

Võrreldes saadud tulemust pealkirjas antud funktsiooniga, näeme, et antud näites $a=\pi\approx 3{,}14$; $m=-5$

2. Graafik. Millise kujuga on funktsiooni $y=a(x+m)^2$ graafik?

Selgituseks vaatame järgmisi näiteid:

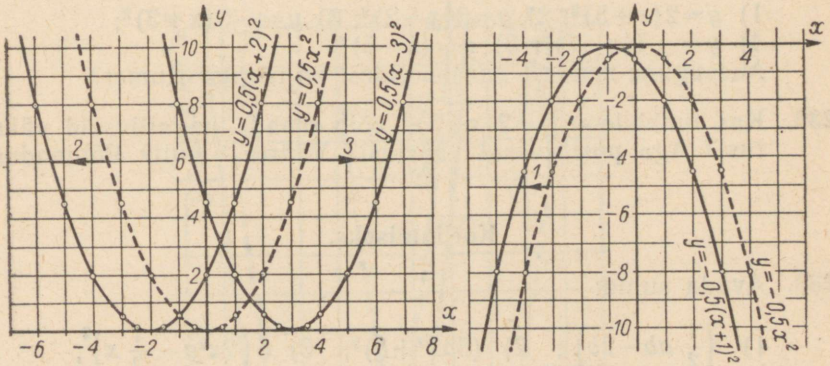
1) $y=0{,}5(x-3)^2$
2) $y=0{,}5(x+2)^2$
3) $y=-0{,}5(x+1)^2$

Allpool on esitatud nende funktsioonide väärtuste tabelid; graafikud on kujutatud joonisel 62 *a* ja 62 *b*:

x	-1	0	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7
$y=0{,}5(x-3)^2$	8	4,5	2	0,5	0,13	0	0,13	0,5	2	4,5	8

x	-6	-5	-4	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	2
$y=-0{,}5(x+1)^2$	8	4,5	2	0,5	0,13	0	0,13	0,5	2	4,5	8

x	-5	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1	2	3
$y=-0{,}5(x+1)^2$	-8	$-4{,}5$	-2	$-0{,}5$	$-0{,}13$	0	$-0{,}13$	$-0{,}5$	-2	$-4{,}5$	-8



a *b*

Joon. 62

Funktsioonide $y=0{,}5x^2$ ja $y=0{,}5(x-3)^2$ võrdlemisel paneme tähele järgmist: kui näiteks $x=4$, siis esimese funktsiooni väärtus on $y=0{,}5\cdot 16=8$. Selleks et ka teisele funktsioonile saada väärtus 8, tuleb selle funktsiooni argument võtta esimese funktsiooni argumendi vastavast väärtusest 3 võrra suurem, s. o. $4+3=7$. Tõepoolest, $y=0{,}5(7-3)^2=0{,}5\cdot 16=8$. Nii võiks arutleda argumendi mistahes väärtuste korral. Siit järeldub, et funktsiooni $y=0{,}5(x-3)^2$ graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=0{,}5x^2$ nihutamisel 3 ühiku võrra x-telje positiivses suunas (joon. 62 *a*).

Samasuguse mõttekäiguga saame, et funktsiooni $y=0{,}5(x+2)^2$ graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=0{,}5x^2$ nihutamisel 2 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas (joon. 62 *a*); funktsiooni $y=-0{,}5(x+1)^2$ graafik saadakse aga parabooli $y=-0{,}5x^2$ nihutamisel 1 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas (joon. 62 *b*).

Kokkuvõte. **Funktsiooni $y=a(x+m)^2$ graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=ax^2$ nihutamisel $|m|$ ühiku võrra x-telje positiivses suunas, kui $m<0$ ja $|m|$ ühiku võrra x-telje negatiivses suunas, kui $m>0$.**

Siit järeldub: 1) Parabooli $y=a(x+m)^2$ haripunkti koordinaadid on $(-m;\ 0)$. 2) Kui $a>0$, siis on parabool $y=a(x+m)^2$ nõgus; kui $a<0$, siis on parabool kumer.

236. Ehitada alljärgnevate funktsioonide graafikud:

1) $y=1{,}5(x+3)^2$; 2) $y=-1{,}5(x-3)^2$; 3) $y=(x+4)^2$;
4) $y=-(x-2)^2$

237. Nimetada alljärgnevate paraboolide haripunkti koordinaadid:
1) $y=2(x+5)^2$; 2) $y=3(x-2)^2$; 3) $y=-5(x+3)^2$;
4) $y=-4(x-7)^2$; 5) $y=(x-5)^2$
Missugune nendest paraboolidest on nõgus? Kumer?

238. Kas funktsioon $y=2(x+3)^2$ võib omada negatiivseid väärtusi? Aga positiivseid väärtusi? Väärtust null? Põhjendus!

Kordamiseks.

239. Avada sulud:

1) $\left(\frac{1}{2}ab-2b\right)^2$; 2) $(3ax^2+b)^2$; 3) $5\left(2x^2y-\frac{1}{2}x\right)^2$;

4) $-3\left(\frac{1}{3}mn+\frac{1}{2}m\right)^2$

Sõnastada kahe arvu summa ja vahe ruudu arvutamise reegel.

240. Avaldada alljärgnevad avaldised kahe arvu summa või vahe ruuduna:

1) $4a^2+4ab+b^2$; 2) $9a^2b^2-12abc+4c^2$;
3) $\frac{1}{4}m^4n^2+2m^2n+4n^2$; 4) x^2-4x+4; 5) $2x^2+8a+8$

§ 21. FUNKTSIOON $y=a(x+m)^2+n$.

Vaatleme järgmisi näiteid:
1) $y=1{,}5(x+3)^2-4$
2) $y=-0{,}5(x-2)+5$

Ilma nende funktsioonide graafikuid joonestamata on õpitu põhjal juba võimalik neid graafikuid kirjeldada.

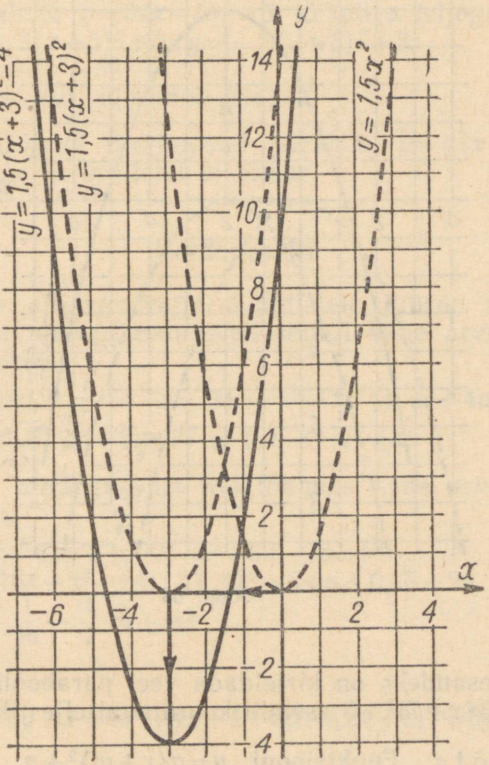
Paragrahvi 19 põhjal võime öelda, et funktsiooni

$$y=1{,}5(x+3)^2-4$$

graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=1{,}5(x+3)^2$ nihutamisel 4 ühiku võrra y-telje negatiivses suunas. Paragrahvi 20 põhjal võime aga öelda, et funktsiooni

$$y=1{,}5(x+3)^2$$

graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=1{,}5x^2$ nihutamisel 3 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas.



Joon. 63

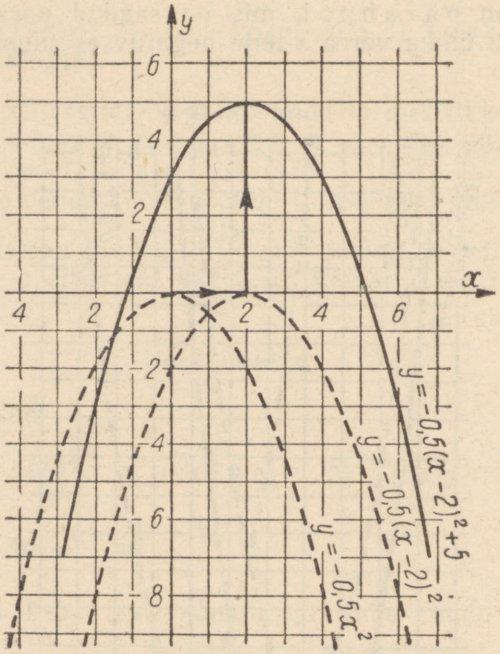
Järeldus. Funktsiooni $y=1{,}5(x+3)^2-4$ graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=1{,}5x^2$ nihutamisel 3 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas ja 4 ühiku võrra y-telje negatiivses suunas.

Tehtud arutelu peegeldub joonisel 63, kus on esitatud funktsioonide $y=1{,}5x^2$, $y=1{,}5(x+3)^2$ ja $y=1{,}5(x+3)^2-4$ graafikud.

Samasuguse aruteluga saame, et funktsiooni

$$y=-0{,}5(x-2)^2+5$$

graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=-0{,}5x^2$ nihutamisel 2 ühiku võrra x-telje positiivses suunas ja 5 ühiku võrra y-telje positiivses suunas (joon. 64).



Joon. 64

Lugeja ülesandeks on kirjeldada veel paraboolide $y=-2(x-5)^2-6$; $y=3(x+7)^2+5$ asendit koordinaatteljestikus.

Kokkuvõte. **Funktsiooni $y=a(x+m)^2+n$ graafikuks on parabool, mis on saadud parabooli $y=ax^2$ nihutamisel: 1) $|m|$ ühiku võrra x-telje positiivses suunas, kui $m<0$; negatiivses suunas, kui $m>0$. 2) $|n|$ ühiku võrra y-telje positiivses suunas, kui $n>0$; negatiivses suunas, kui $n<0$.**

Järeldus. 1) Parabooli $y=a(x+m)^2+n$ haripunkti koordinaadid on $(-m;\ n)$. 2) Kui $a>0$, siis on parabool nõgus; kui $a<0$, siis on parabool kumer.

241. Ehitada järgnevate funktsioonide graafikud:

1) $y=0{,}5(x+4)^2+3$; 2) $y=0{,}5(x-4)^2+3$
3) $y=0{,}5(x-4)^2-3$; 4) $y=0{,}5(x+4)^2-3$
5) $y=-0{,}5(x+4)^2+3$; 6) $y=-0{,}5(x-4)^2+3$
7) $y=-0{,}5(x-4)^2-3$; 8) $y=-0{,}5(x+4)^2-3$

242. Nimetada alljärgnevate paraboolide haripunkti koordinaadid:

1) $y=3(x+7)^2-2$; 2) $y=-3(x-5)^2-2$
3) $y=5(x+4)^2+8$; 4) $y=-4(x-5)^2+3$
5) $y=-3x^2+5$; 6) $y=4x^2-5$; 7) $y=2(x+3)^2$
8) $y=-4(x-5)^2$

243. Kas parabool $y=3(x-5)^2-5$ lõikub x-teljega? Aga paraboolid $y=3(x-5)^2+5$; $y=-2(x+3)^2+3$; $y=-2(x+3)^2-3$?
Põhjendus! (vt. ülesanne 234).

244. Leida, millistel tingimustel parabool $y=a(x+m)^2+n$ lõikab x-telge ja millistel ei lõika.

Kordamiseks.

245. Kirjutada alljärgnevaile avaldistele juurde üks liige nii, et need avaldised muutuvad mingi kahe arvu summa või vahe ruuduks:

1) x^2+10x; 2) $-6x+x^2$; 3) $\frac{1}{4}x^2-x$; 4) a^2+4a;
5) a^2+3a; 6) a^2+2a; 7) a^2+a; 8) a^2-a.

246. Eraldada alljärgnevais hulkliikmeis kahe arvu summa või vahe ruut:

1) $x^2+2x-5xy+1$; 2) $a^2+6a-7ab+9$
3) $5xy-16x+x^2+64$; 4) $4x^2-5mn+0{,}25-2x$
5) $2mn+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}m+m^2$

Näide.

$4x^2+4x+5y+1=4x^2+4x+1+5y=(2x+1)^2+5y$

§ 22. FUNKTSIOON $y=ax^2+b+c$.

Näitame alljärgnevate näidete varal, et funktsioonile

$$y=ax^2+bx+c$$

saab temast täisruudu eraldamisel anda eespool õpitud kuju

$$y=a(x+m)^2+n.$$

Vastavat teisendust nimetatakse **täisruudu eraldamise võtteks.**

Näide 1. $y=2x^2+12x+10$.

Võtame ruutliikme ja lineaarliikme omaette rühmaks ning toome sellest rühmast ruutliikme kordaja sulgude ette:

$$y=(2x^2+12x)+10=2(x^2+6x)+10.$$

Nüüd täiendame viimastes sulgudes oleva kaksliikme täisruuduks. Selleks paneme tähele, et x^2 saab vaadata kui «esimese arvu ruutu», korrutist $6x$ saab siis vaadata kui «kahekordset esimese ja teise arvu korrutist», nimelt $2\cdot 3x$. Nüüd näeme, et «teiseks arvuks» peab olema 3 ja «teise arvu ruuduks» seega $3^2=9$. «Teise arvu ruut» 9 aga puudub sulgudes olevas kaksliikmes. Liidame puuduva «teise arvu ruudu», s. o. 9 sellele kaksliikmele juurde. Et võrdus jääks kehtima, peame ka lahutama sama arvu. Saame

$$y=2(x^2+6x)+10=2(\underbrace{x^2+2\cdot 3x+9}_{(x+3)^2}-9)+10.$$

Et nüüd nurksuluga märgitud kolmliige on $(x+3)^2$, siis saame pärast selle sulgudega eraldamist:

$$y=2(x^2+2\cdot 3x+9-9)+10=2[(x+3)^2-9]+10,$$

millest pärast nurksulgude avamist saame:

$$y=2(x+3)^2-18+10;\ y=2(x+3)^2-8$$

Nii olemegi saanud antud funktsioonile uue kuju, nii et

$$y=2x^2+12x+10=2(x+3)^2-8$$

Viimase tulemuse põhjal otsustame, et funktsiooni $y=2x^2+12x+10$ graafikuks on nõgus parabool haripunktiga $(-3;\ -8)$ (vt. § 21).

Koostanud funktsiooni $y=2x^2+12x+10$ väärtuste tabeli:

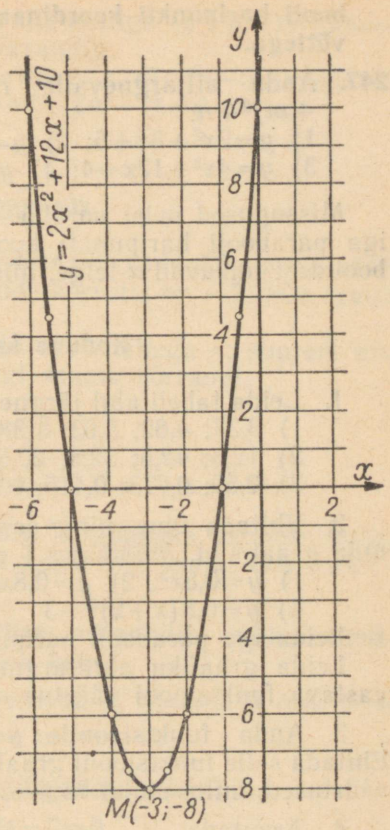
x	-6	$-5{,}5$	-5	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	0
$2x^2$	72	60,5	50	32	24,5	18	12,5	8	2	0,5	0
$12x$	-72	-66	-60	-48	-42	-36	-30	-24	-12	-6	0
$2x^2+12x+10$	10	4,5	0	-6	$-7{,}5$	-8	$-7{,}5$	-6	0	4,5	10

ja ehitanud selle järgi funktsiooni graafiku (joon. 65), näeme, et tõepoolest on saadud nõgusa parabooli haripunktiks punkt M $(-3;\ -8)$.

Näide 2. $y=-0{,}5x^2+2x+3=(-0{,}5x^2+2x)+3=-0{,}5(x^2-4x)+3=-0{,}5(x^2-2\cdot 2x)+3=-0{,}5(\underbrace{x^2-2\cdot 2x+4}_{(x-2)^2}-4)+3=-0{,}5[(x-2)^2-4]+3=-0{,}5(x-2)^2+2+3=-0{,}5(x-2)^2+5$

Tulemusest selgub, et funktsiooni $y=-0{,}5x^2+2x+3$ graafikuks on kumer parabool haripunktiga (2; 5).

Lugeja ülesanne on ehitada selle funktsiooni graafik, andes x täisarvulisi väärtusi vahemikust $-2\leqslant x\leqslant 6$.



Joon. 65

Näide 3. Leida parabooli $y=3x^2+3x+1\frac{3}{4}$ haripunkti koordinaadid. Kas see parabool on nõgus või kumer? Kas see parabool lõikab x-telge või ei?

Haripunkti koordinaatide leidmiseks eraldame antud funktsioonist täisruudu:

$$y=(3x^2+3x)+1\tfrac{3}{4}=3(x^2+x)+1\tfrac{3}{4}=3(x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x)+1\tfrac{3}{4}=$$

$$=3\Big(\underbrace{x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}-\tfrac{1}{4}\Big)+1\tfrac{3}{4}=3\left[\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]+1\tfrac{3}{4}=$$

$$=3\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{3}{4}+1\tfrac{3}{4}=3\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+1$$

Vastus. Parabooli haripunkti koordinaadid on $(-\frac{1}{2};\ 1)$. Parabool on nõgus, sest $a=3>0$. Parabool ei lõika x-telge (vt. ülesanne 243).

Kokkuvõte.

Ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafikuks on parabool. See parabool on nõgus, kui $a>0$, ja kumer, kui $a<0$. Para-

booli haripunkti koordinaate saab leida täisruudu eraldamise võttega.

247. Anda alljärgnevaile ruutfunktsioonidele kuju $y=a(x+m)^2+n$:

1) $y=2x^2+8x+5$; 2) $y=-3x^2+54x-200$

3) $y=4x^2+12x+4$; 4) $y=-8x^2+8x+6$

Missugused neist paraboolidest on nõgusad? Kumerad? Leida iga parabooli haripunkti koordinaadid. Missugused neist paraboolidest lõikavad x-telge, missugused mitte? Põhjendus!

Kodune kontrolltöö nr. 3.

1. Leida tabeli abil järgnevate arvude ruudud:

1) 3,37; 4,82; 5,63; 1,38; 1,07; 3,089; 9,973

2) 12,3; 42,5; 32,8; 20,5; 19,48; 13,795; 78,67

3) 0,52; 0,673; 0,415; 0,032; 0,0417; 0,0083; 0,06793

2. Ehitada ühes ning samas teljestikus järgmiste funktsioonide graafikud. Mõõtkava 1 cm $\triangleq$ 1:

1) $y=0{,}8x^2$; 2) $y=0{,}8x^2-3$; 3) $y=0{,}8(x+2)^2$

4) $y=0{,}8(x+2)^2-3$

Leida iga parabooli haripunkti koordinaadid.

Leida graafiku abil argumendi need väärtused, mille puhul vastava funktsiooni väärtus on null.

3. Anda funktsioonile $y=x^2-4x+1$ kuju $y=a(x+m)^2+n$. Ehitada selle funktsiooni graafik. Leida graafikult argumendi need väärtused, mille puhul funktsiooni väärtus võrdub nulliga.

4. Arvutada:

$(\sqrt{37})^2$; $\sqrt{12^2}$; $(-\sqrt{5})^2$; $\sqrt{(-34)^2}$; $-(\sqrt{1{,}7})^2$

5. Missugused alljärgnevaist sümbolitest ei oma mõtet?

$\sqrt{100}$; $\sqrt{-81}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $(\sqrt{-5})^2$; $\sqrt{a-5}$, kui $a>5$; $\sqrt{x-9}$, kui $x<9$.

6. Leida ruutjuurte tabeli abil ruutjuured alljärgnevaist arvudest:

1) 3,8; 4,7; 5,62; 13,4; 18,87; 32,5

2) 137; 325; 467; 1470; 3279; 1800

3) 0,47; 0,326; 0,07; 0,0845; 0,0349; 0,0052

Kordamiseks.

248. Lahutada teguriteks alljärgnevad avaldised (vt. ülesanne 212):

1) x^2-9; 2) $4x^2-16$; 3) $(x+3)^2-4$; 4) $(x-5)^2-25$

5) x^2-3; 6) $9x^2-7$; 7) $(x-5)^2-13$; 8) $(x+4)^2-2$

249. Millisel tingimusel võrdub korrutis nulliga (§ 1 p. 1)? Lahendada selle tingimuse põhjal võrrandid:

1) $3x=0$; 2) $5m=0$; 3) $(y-5)y=0$; 4) $(x-5)(x+2)=0$
5) $(2x-4)(x+3)=0$; 6) $(3m+5)(2m-7)=0$
7) $(x-5)(x+3)(x-7)=0$

§ 23. RUUTVÕRRAND.

1. Definitsioon. Lahendame järgmise ülesande. Üks arv on teisest nelja võrra suurem. Nende arvude korrutis on -3. Mis arvud need on?

Lahendamiseks tähistame vähema arvu tähega x; suurem arv on siis $x+4$. Ülesande tingimuste järgi saame võrrandi:

$$x(x+4)=-3$$

ehk

$$x^2+4x=-3.$$

Et saadud võrrandis on tundmatu kõrgeimaks astmeks kaks, siis nimetatakse seda võrrandit teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks. Üldiselt:

ruutvõrrandiks nimetatakse sellist võrrandit, milles tundmatu kõige kõrgemaks astmeks on kaks.

Märkus. Toodud definitsioonis tuleb eeldada, et tundmatu ei esine jagajas. Nii näiteks võrrand $\frac{1}{x-1}=x^2+2$ ei ole ruutvõrrand.

Ruutvõrrandiks on näiteks veel järgmised võrrandid:

1) $2x^2+3x-2=0$
2) $0{,}3-\frac{2}{3}x=7{,}5x^2-x$
3) $x(3x+2)=5$

Viimasele võrrandile saame pärast sulgude avamist kuju $3x^2+2x=5$, millest selgub, et antud võrrand on tõepoolest ruutvõrrand.

Ruutvõrrandi lahendiks nimetatakse arvu, mis seda võrrandit rahuldab, s. t. sellist arvu, mille asetamine võrrandisse tundmatu asemele annab pärast vajalike tehete teostamist võrrandi mõlemale poolele ühesuguse väärtuse. Nii on eespool antud ülesande põhjal saadud ruutvõrrandi $x^2+4x=-3$ lahenditeks arvud -3 ja -1, sest

$$(-3)^2+4\cdot(-3)=9-12=-3.$$

Samuti

$$(-1)^2+4\cdot(-1)=1-4=-3.$$

Kerge on veenduda, et mõlemad arvud rahuldavad ka antud ülesande tingimusi.

250. On antud arvud -3; -1; 0; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 5. Kontrollida, missugused neist on ruutvõrrandite $x^2=3x-2$ ja $x(3x+8)=3$ lahenditeks.

Ruutvõrrandi lahendi leidmist nimetatakse ruutvõrrandi **lahendamiseks.**

2. Ruutvõrrandi normaalkuju. Allpool näeme, et ruutvõrrandi lahendamiseks on otstarbekas teisendada võrrand nii, et selle kõik liikmed asetsevad ühel pool (tavaliselt vasakul) võrdusmärki tundmatu astendaja kahanemise järjekorras. Sellisel kujul kirjutatud ruutvõrrandit nimetatakse **normaalkujuliseks ruutvõrrandiks.** Nii näiteks võrrand $5x^2-2x-3=0$ on normaalkujuline ruutvõrrand, kuid võrrand $2x-\frac{1}{3}=x^2$ ei ole normaalkujuline. Miks?

Tähistades normaalkujulises ruutvõrrandis olevad arvud tähtedega a, b ja c, saame ruutvõrrandi normaalkujuks üldiselt:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Normaalkujulise ruutvõrrandi liige ax^2 on r u u t l i i g e (a on ruutliikme kordaja); liige bx on l i n e a a r l i i g e (b on lineaarliikme kordaja); c on v a b a l i i g e. Nii on ülaltoodud ruutvõrrandi $5x^2-2x-3=0$ ruutliikmeks $5x^2$, lineaarliikmeks $-2x$ ja vabaliikmeks -3.

M ä r k u s. Ruutvõrrandi normaalkujus loetakse ruutliikme kordaja a alati positiivseks arvuks; kui $a<0$, siis korrutatakse võrrandi mõlemaid pooli (-1)-ga.

251. Anda normaalkuju alljärgnevaile ruutvõrrandeile ja leida iga võrrandi ruutliige, lineaarliige ja vabaliige:

1) $x(x-5)=x+3$; 2) $(2x-1)^2-8x^2=(x+2)^2$;

3) $\frac{1}{2}=(x-3)^2$; 4) $5x(x^2-1)=5x^2(x+2)-3x$

3. Täielikud ja mittetäielikud ruutvõrrandid. Kui ruutvõrrandi normaalkujus esinevad kõik liikmed: ruutliige, lineaarliige ja vabaliige, siis nimetatakse ruutvõrrandit **täielikuks ruutvõrrandiks.** Kui aga ruutvõrrandis puudub kas lineaarliige, vabaliige või mõlemad, siis on võrrand **mittetäielik ruutvõrrand.**

Kui $b=0$, siis saame mittetäieliku ruutvõrrandi: $ax^2+c=0$

N ä i d e. $4x^2-9=0$

Kui $c=0$, siis saame mittetäieliku ruutvõrrandi: $ax^2+bx=0$

N ä i d e. $5x^2-6x=0$

Kui $b=0$ ja $c=0$, siis saame mittetäieliku ruutvõrrandi: $ax^2=0$

Näide. $5x^2=0$

252. Teisendada alljärgnevad võrrandid normaalkujuliseks ja selgitada, missugused neist on täielikud, missugused mittetäielikud ruutvõrrandid:

1) $3x(x-5)=7$; 2) $(3-x)(3x-7)=\frac{1}{2}(x^2-25)$

3) $(x+5)^2-(2x-8)^2$; 4) $x(3x-5)=0$

5) $5x^2-3x=x(x-3)$; 6) $5x^2+2x=2(x+7)$

§ 24. RUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE.

1. Graafiline meetod. Vaatleme näiteks normaalkujulist ruutvõrrandit

$$2x^2+3x-2=0.$$

Tähistame selle võrrandi vasakul poolel oleva avaldise tähega y, nii et

$$y=2x^2+3x-2.$$

Tulemusest selgub, et antud võrrandi vasakul poolel olevat avaldist võib vaadata ruutfunktsioonina, mille argumenti tähistab x. Andes x-le väärtusi, on võimalik arvutada funktsiooni vastavaid väärtusi. Näiteks, kui $x=-3$, siis $y=2\cdot(-3)^2+3\cdot(-3)-2=18-9-2=7$; kui $x=0$, siis $y=-2$ jne. Funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 66, millelt selgub, et parabool lõikab x-telge kahes punktis; ühe punkti abstsissiks on -2 ja teise punkti abstsissiks on 0,5. See tähendab, et on olemas kaks argumendi väärtust: $x_1=-2$ ja $x_2=0{,}5$, millele vastav funktsiooni väärtus on null. Need argumendi väärtused ongi antud ruutvõrrandi lahenditeks, sest nad rahuldavad seda võrrandit. Tõepoolest: $2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-2=8-6-2=0$; $2\cdot0{,}5^2+3\cdot0{,}5-2=0{,}5+1{,}5-2=0$.

Toodud arutelust järeldubki, et ruutvõrrandit on võimalik lahendada (eeldusel, et lahendid on olemas) graafilisel teel. Selleks tuleb ehitada vastava ruutfunktsiooni graafik ja leida sellelt graafiku ja abstsisstelje lõikepunktide abstsissid. Üldiselt:

ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ graafiline lahendamine tähendab parabooli $y=ax^2+bx+c$ ja x-telje lõikepunktide abstsissi leidmist.

Samuti on võimalik arutleda ka mittetäielike ruutvõrrandite korral. Nii näiteks tähendab ruutvõrrandi $ax^2+c=0$ graafiline lahendamine parabooli $y=ax^2+c$ ja x-telje lõikepunktide abstsissi leidmist.

253. Lahendada graafiliselt ruutvõrrandid:

1) $x^2-4x+3=0$; 2) $2x^2-5=0$.

Et ruutvõrrandi graafiline lahendamine on enamasti seotud suure arvutustöö ja ajakuluga, siis vaatleme veel teisi võtteid ruutvõrrandi lahendite leidmiseks.

2. Täisruudu eraldamine. Ruutvõrrandi lahendeid on võimalik leida ka arvutamisel, kasutades selleks täisruudu eraldamise võtet (vt. § 22).

Näide 1. Olgu antud võrrand $x^2+4x=-3$ (§ 23, p. 1) ehk $x^2+4x+3=0$. Eraldame selle vasakust poolest täisruudu:

$$(x^2+4x)+3=0$$
$$(x^2+2\cdot 2x)+3=0$$
$$\underbrace{(x^2+2\cdot 2x+4}_{(x+2)^2}-4)+3=0$$
$$(x+2)^2-4+3=0$$
$$(x+2)^2-1=0$$

Lahutame saadud võrrandi vasaku poole teguriteks (vt. ülesanne 248):

$$(x+2+1)(x+2-1)=0$$
$$(x+3)(x+1)=0$$

Viimane võrrand on rahuldatud, kui esimene tegur on null, ja ka siis, kui teine tegur on null (vt. ülesanne 249):

1) $x+4=0$, millest $x_1=-3$
2) $x+1=0$, millest $x_2=-1$

Nii leidsime arvutamisel ruutvõrrandi lahendid, mille õigsuses veendusime eelmise paragrahvi punktis 1.

Näide 2. $4x^2-4x-15=0$

$$4(x^2-x)-15=0$$
$$4(x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x)-15=0$$
$$4\Big(\underbrace{x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}-\tfrac{1}{4}\Big)-15=0$$
$$4\Big[\Big(x-\tfrac{1}{2}\Big)^2-\tfrac{1}{4}\Big]-15=0$$

Avame nurksulud:

$$4(x-\tfrac{1}{2}-1)-15=0$$

Koondame ja jagame võrrandi mõlemad pooled 4-ga:

$$4(x-\tfrac{1}{2})^2-16=0;\ |:4$$
$$(x-\tfrac{1}{2})^2-4=0$$

Lahutame viimase võrrandi vasaku poole teguriteks ja kasutame korrutise nulliga võrdumise tingimust:

$$(x-\tfrac{1}{2}+2)(x-\tfrac{1}{2}-2)=0$$

$$(x+1\tfrac{1}{2})(x-2\tfrac{1}{2})=0$$

1) $x+1\frac{1}{2}=0$, millest $x_1=-1\frac{1}{2}$

2) $x-2\frac{1}{2}=0$, millest $x_2=2\frac{1}{2}$

Kontroll. 1) $4\cdot(-1\frac{1}{2})^2-4\cdot(-1\frac{1}{2})-15=4\cdot 2\frac{1}{4}+6-15=$

$=9+6-15=0$. Rahuldatud!

2) $4\cdot(2\frac{1}{2})^2-4\cdot 2\frac{1}{2}-15=4\cdot 6\frac{1}{4}-10-15=$

$=25-10-15=0$.

Rahuldatud!

Vastus. $x_1=-1\frac{1}{2}$; $x_2=2\frac{1}{2}$

254. Lahendada alljärgnevad ruutvõrrandid täisruudu eraldamise võttega.

1) $x^2+6x+5=0$; 2) $x^2-2x-3=0$; 3) $x^2+8x+15=0$
4) $2x^2+3x+1=0$; 5) $x^2-x-6=0$; 6) $2x^2-7x+6=0$

3. Ruutvõrrandi lahendivalem. Kõige otstarbekam on ruutvõrrandi lahendamiseks kasutada l a h e n d i v a l e m i t, mille allpool tuletame.

Olgu antud ruutvõrrand

$$ax^2+bx+c=0.$$

Leiame selle lahendid täisruudu eraldamise võttega, vaadates võrrandi kordajaile kui antud arvudele. Võtame ruutliikme ja lineaarliikme omaette rühmaks ja toome sellest rühmast ruutliikme kordaja sulgude ette:

$$(ax^2+bx)+c=0$$

$$a(x^2+\tfrac{b}{a}x)+c=0$$

Täiendame sulgavaldist nii, et sinna tekiks täisruut. Selleks esitame murru $\frac{b}{a}$ kujul $2\cdot\frac{b}{2a}$:

$$a(x^2+2\cdot\tfrac{b}{2a}x)+c=0$$

Nüüd näeme, et täisruudus olevaks «teiseks arvuks» tuleb võtta $\frac{b}{2a}$. «Teise arvu ruut» on siis $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$. Liidame sulgudes olevale kaksliikmele selle ruudu. Et võrdus jääks kehtima, peame sama ruudu ka lahutama:

$$a\underbrace{\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0.$$

Pärast loogelise suluga märgitud täisruudu eraldamist saame:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=0.$$

Avame nurksulud, saame:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{ab^2}{4a^2}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

ehk

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)=0.$$

Viime teise sulgavaldise ühisele nimetajale ja jagame võrrandi mõlemad pooled a-ga:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0\,|:a$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Viimase võrrandi vasakul pool oleva murru $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ kirjutame ruuduna (vt. ülesanne 212):

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$

Võrrandi vasaku poole kui ruutude vahe lahutame teguriteks:

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Korrutise nulliga võrdumise tingimuse põhjal saame edasi:

1) $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$

millest leiame ühe lahendi:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (1)$$

2) $x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0,$

millest leiame teise lahendi:

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2)$$

Tavaliselt võetakse mõlema lahendi arvutamises valemid (1) ja (2) kokku ühte valemisse, mille tulemusel saame ruutvõrrandi

$$ax^2+bx+c=0$$

lahendivalemi järgmisel kujul:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Asendades valemis olevad tähed a, b, c iga võrrandi korral vastavate arvudega, võimegi leida ruutvõrrandi lahendid.

Vähema lahendi (mida kokkuleppeliselt tähistame tähega x_1) arvutamisel võetakse lugejas olevast kahest märgist $-$, suurema lahendi x_2 arvutamisel aga $+$.

Näide 1. Lahendada ruutvõrrand $4x^2+7x-2=0$.

Kõigepealt paneme tähele, et antud näites $a=4$; $b=7$; $c=-2$.

Paigutades lahendivalemis tähtede asemele vastavad arvud, saame:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2-4\cdot 4\cdot(-2)}}{2\cdot 4} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 \pm 9}{8},$$

millest

$$x_1 = \frac{-7-9}{8} = \frac{-16}{8} = -2 \text{ ja } x_2 = \frac{-7+9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Kontroll. 1) $4\cdot(-2)^2+7(-2)-2=16-14-2=0;$

2) $4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\cdot\frac{1}{4}-2=\frac{4}{16}+\frac{7}{4}-2=\frac{8}{4}-2=0$

Vastus. $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{4}$

Näide 2. $-2x^2-5x+3=0$.

Pärast võrrandi mõlema poole korrutamist (-1)-ga saame võrrandi $2x^2+5x-3=0$, kus $a=2$; $b=5$; $c=-3$. Lahendivalemi abil lahendades saame:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4}$$

$$x_1=\frac{-5-7}{4}=-3;\quad x_2=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$$

Kontroll!

Vastus. $x_1=-3;\ x_2=\frac{1}{2}$

Märkus. Antud võrrandi võib lahendada ka ilma mõlemaid pooli eelnevalt korrutamata (-1)-ga. Siis tuleb aga lahendivalemi kasutamisel arvestada, et $a=-2;\ b=-5;\ c=3$

Näide 3. $x^2-5x+3=0$:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-12}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

Ruutjuurte tabeli (või lükati) abil saame, et $\sqrt{13}\approx 3{,}61$ ja seega

$$x=\frac{5\pm 3{,}61}{2};\quad x_1=\frac{5-3{,}61}{2}=\frac{1{,}39}{2}=0{,}695$$

$$x_2=\frac{5+3{,}61}{2}=\frac{8{,}61}{2}\approx 4{,}31$$

Et rõhuv enamus tabelis (lükatii) antud arve on ligikaudsed, siis ei ole ka saadud lahendid täpsed. Seda näitab ka kontroll:

1) $0{,}695^2-5\cdot 0{,}695+3=0{,}01\neq 0$
2) $4{,}31^2-5\cdot 4{,}31+3=0{,}05\neq 0$

Vastus. $x_1\approx 0{,}695;\ x_2\approx 4{,}31$

Näide 4. Lahendada võrrand $(3x-2)(2x-1)=x$

Esmalt anname võrrandile normaalkuju:

$$6x^2-3x-4x+2-x=0$$
$$6x^2-8x+2=0\ |:2$$
$$3x^2-4x+1=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}$$

$$x_1=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3};\quad x_2=\frac{4+2}{6}$$

Kontroll (algvõrrandi kaudu!).

1) Vasak pool $V=\left(3\cdot\frac{1}{3}-2\right)\left(2\cdot\frac{1}{3}-1\right)=(-1)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$;

Parem pool $P=\frac{1}{3}$

$$V=P$$

2) $V=(3\cdot 1-2)(2\cdot 1-1)=1\cdot 1=1$; $P=1$

$$V=P$$

255. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1) $x^2-2x-15=0$ 2) $x^2-5x+6=0$
3) $x^2+19x+90=0$ 4) $x^2-2x-48=0$
5) $x^2+4x-45=0$ 6) $x^2+7x+10=0$
7) $3x^2+2x-8=0$ 8) $5x^2-8x+3=0$
9) $2x^2-7x+6=0$ 10) $4x^2-17x-15=0$
11) $3x^2+11x+6=0$ 12) $4x^2+x-3=0$
13) $20x^2+x-12=0$ 14) $6x^2+5x-56=0$
15) $6x^2+7x-3=0$ 16) $2z^2-11z+14=0$
17) $3y^2+23y-70=0$ 18) $10m^2+49m-5=0$

256. Lahendada järgnevad ruutvõrrandid, kasutades lahendamisel vajalike korrutiste, jagatiste, ruutude ja ruutjuurte leidmiseks lükatit:

1) $x^2-5x-3=0$; 2) $2x^2-3x=1$; 3) $3x^2+8x+2=0$
4) $3{,}5x^2-1{,}2x-3=0$; 5) $1{,}5x^2+8x+0{,}7=0$
6) $5{,}12x^2+17{,}2x+3{,}73=0$; 7) $1{,}32x^2+3{,}87x+2=0$
8) $0{,}7x^2-0{,}62x-1{,}37=0$; 9) $12{,}3x^2+13{,}7x+2{,}5-0$

257. Lahendada alljärgnevad võrrandid:

1) $(3x-1)(x+2)=20$; 2) $(x-4)(4x-3)+3=0$
3) $(3x+2)(3x-2)=21$; 4) $(4+x)(x+2)-$
$-(2x-5)(3x-8)+18=0$; 5) $(x-4)^2-(2x-11)^2=3$

6) $\frac{(x+3)^2}{5}+1-\frac{(3x-1)^2}{5}=\frac{x(2x-3)}{2}$

7) $6x+\frac{(3+5x)^2}{2}=\frac{8-2x}{5}-\frac{(x+3)(x+7)}{2}$

8) $x-7+\frac{(x-6)^2}{3}=\frac{(x+4)^2}{2}-\frac{(x+2)(x+6)}{6}$

4. Mittetäielikud ruutvõrrandid. Et mittetäielikud ruutvõrrandid on täieliku ruutvõrrandi erijuhtumid, siis saab neid lahendada täieliku ruutvõrrandi lahendivalemi järgi.

Näide. $5x^2-6x=0$ (siin $a=5$; $b=-6$; $c=0$):

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 5\cdot 0}}{10}=\frac{6\pm\sqrt{36}}{10}=\frac{6\pm 6}{10}$$

$$x_1 = \frac{6-6}{10} = \frac{0}{10} = 0; \quad x_2 = \frac{6+6}{10} = \frac{12}{10} = 1{,}2.$$

Kuigi põhimõtteliselt on võimalik kasutada täieliku ruutvõrrandi lahendivalemit ka mittetäieliku ruutvõrrandi lahendamiseks, ei ole see praktiliselt otstarbekas. Olgu antud võrrand

$$1)\ ax^2 + c = 0.$$

Selle lahendus on järgmine:

$$ax^2 = -c; \quad x^2 = -\frac{c}{a}; \quad x^2 = \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$$

$$x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = 0; \quad \left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0$$

$$a)\ x + \sqrt{-\frac{c}{a}} = 0; \quad x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$b)\ x - \sqrt{-\frac{c}{a}} = 0; \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Tulemusest nähtub, et antud võrrand lahendub ainult siis, kui a ja c on isemärgilised, sest vastasel korral tuleb ruutjuure märgi alla negatiivne arv; ruutjuurt negatiivsest arvust pole aga olemas.

Näide 1. $2x^2 - 5 = 0; \quad 2x^2 = 5; \quad x^2 = \frac{5}{2}$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}; \quad x_1 \approx -1{,}58; \quad x_2 \approx 1{,}58$$

Näide 2. $2x^2 + 32 = 0; \quad x^2 = -\frac{32}{2} = -16$

Võrrand ei lahendu.

2) $ax^2 + bx = 0.$

$$x(ax + b) = 0$$

$$a)\ x = 0; \quad x_1 = 0$$

$$b)\ ax + b = 0; \quad ax = -b; \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Näide. $4x^2 + 3x = 0; \quad x(4x + 3) = 0$

$$a)\ x = 0; \quad x_1 = 0$$

$$b)\ 4x + 3 = 0; \quad 4x = -3; \quad x_2 = -\frac{3}{4}$$

3) $ax^2 = 0$

$$x^2 = \frac{0}{a} = 0; \quad x_{1,2} = 0$$

258. Lahendada alljärgnevad mittetäielikud ruutvõrrandid:

1) $x^2-9=0$	2) $4x^2-25=0$	3) $9x^2-4=0$
4) $5x^2=4$	5) $3x^2=7$	6) $5x^2-7x=0$
7) $8x^2+9x=0$	8) $3x^2+14x=0$	9) $3x^2=27$
10) $5x^2=0$	11) $7x^2-21x=0$	12) $5x^2=8x$

§ 25. RUUTVÕRRANDI DISKRIMINANT.

Nagu teada, võib ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafik — parabool — asetseda, olenevalt kordajate a, b ja c väärtustest, abstsisstelje suhtes kolmel viisil: parabool võib abstsisstelge lõigata kahes punktis (joon. 65 ja joon. 66); parabool võib abstsisstelge puudutada ainult ühes punktis (joon. 63 ja joon. 64 punktiirjoontega joonestatud paraboolid); parabool võib asetseda ka nii, et ta ei lõika ega puuduta abstsisstelge (joon. 59, parabool $y=1{,}5x^2+3$).

Arvestades ruutvõrrandi graafilise lahendamise mõtet (§ 24 p. 1), et ruutvõrrandi lahendamine tähendab ikka teatava parabooli ja abstsisstelje l õ i k e p u n k t i d e abstsissi leidmist, järeldub, et mõnel ruutvõrrandil võivad lahendid hoopis puududa.

Vaatame, kuidas see graafikute põhjal tehtud tähelepanek kajastub ruutvõrrandi lahendivalemis.

Võtame näiteks kolm ruutvõrrandit:

1) $x^2+2x-3=0$
2) $x^2+2x+1=0$
3) $x^2+2x+5=0$

Nende võrrandite lahendamisel saame vastavalt:

1) $x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}$; $x_1=-3$; $x_2=1$

Ruutvõrrandil on kaks e r i n e v a t lahendit.

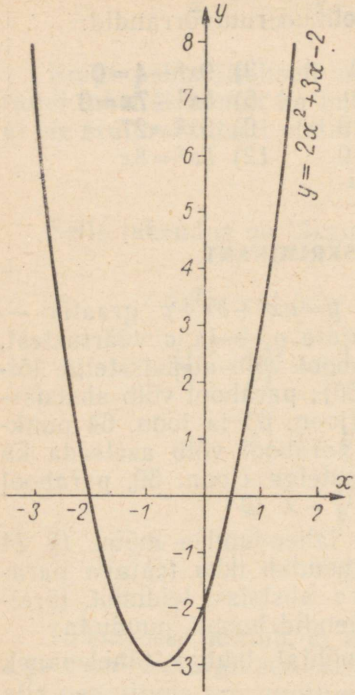
2) $x=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{-2\pm0}{2}$; $x_1=\frac{-2-0}{2}=-1$; $x_2=\frac{-2+0}{2}=-1$

Ruutvõrrandil on kaks v õ r d s e t lahendit.

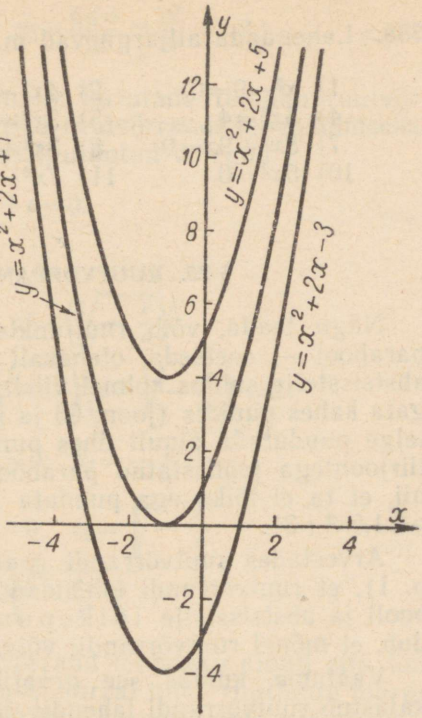
3) $x=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}$

Et ruutjuurt negatiivsest arvust ei ole olemas (§ 16 p. 1), siis viimasel puhul ruutvõrrandil lahendid p u u d u v a d.

Vastavate ruutfunktsioonide graafikud on esitatud joonisel 67. Näidetest selgub, et ruutvõrrandi lahendite arv ja lahenduvus



Joon. 66



Joon. 67

üldse oleneb sellest, millise märgiga on ruutvõrrandi lahendivalemis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ruutjuure märgi all olev avaldis b^2-4ac. Seda avaldist nimetatakse ruutvõrrandi **diskriminandiks** ning tähistatakse tähega D, nii et

$$D = b^2-4ac.$$

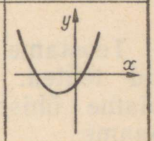
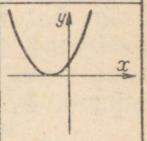
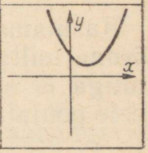
Kui $D>0$, siis on ruutvõrrandil kaks erinevat lahendit.
Kui $D=0$, siis on ruutvõrrandil kaks võrdset lahendit [1].
Kui $D<0$, siis ei ole ruutvõrrandil lahendit olemas.
Seda küsimust illustreerib kokkuvõtlikult joonis 68 (eeldusel, et ruutliikme kordaja $a>0$).

[1] Väljendi «võrdsed lahendid» asemel tarvitatakse ka «kokkulangevad lahendid». Kui kujutleda näiteks, et joonisel 67 antud parabool $y=x^2+2x-3$ nihkub y-telje positiivses suunas 4 ühiku võrra, siis parabooli ja abstsisstelje lõikepunktid lähenevad teineteisele, kuni lõpuks langevad kokku punktis $x_{1,2}=-1$. Sellest ka nimetus «kokkulangevad lahendid».

Näide. Ruutvõrrandil $3x^2+2x+3=0$ puudub lahend, sest $D=2^2-4\cdot3\cdot3=4-36=-32<0$.

259. Ilma võrrandit lahendamata otsustada, missuguseil alljärgnevaist võrrandeist on kaks erinevat lahendit, kaks võrdset lahendit, missuguseil ei ole ühtki lahendit:

1) $x^2-3x-3=0$; 2) $3x^2+2x+1=0$; 3) $4x^2+8x+1=0$
4) $4x^2-12x+9=0$; 5) $3x^2-5x+8=0$; 6) $2x^2-5x-3=0$

D	Graafik
$b^2-4ac>0$	
$b^2-4ac=0$	
$b^2-4ac<0$	

Joon. 68

Kordamiseks.

260. 1) Missuguseil alljärgnevaist avaldistest puudub mõte tähtede antud väärtustel?:

a) $\frac{3}{x-5}$, kui $x=2$; b) $\frac{3a}{a^2+5}$, kui $a=0$;

c) $\frac{x-1}{x-2}$, kui $x=2$; d) $\frac{b^2+5}{b^2-4}$, kui $b=-2$

2) Missugusel tingimusel on kahe arvu jagatis võrdne nulliga?

3) Millistel tähtede väärtustel on alljärgnevad murrud võrdsed nulliga?:

a) $\frac{x}{3}$; b) $\frac{x-5}{5}$; c) $\frac{2x+6}{1{,}5}$; d) $\frac{3x+9}{a}$

§ 26. MURDVÕRRANDITE LAHENDAMINE.

Murdvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas.

Näide 1:

$$\frac{2x+1}{2x-6}=\frac{3}{x-3}+\frac{3}{2x^2-6x}$$

Lahendame selle võrrandi kahel viisil.

Esimene viis. Viime võrrandi kõik liikmed vasakule poole võrdsusmärki. Saame:

$$\frac{2x+1}{2x-6}-\frac{3}{x-3}-\frac{3}{2x^2-6x}=0$$

Teostame vasakul poolel olevate murdudega võrrandis näidatud tehted. Selleks lahutame murdude nimetajad teguriteks, leiame ühise nimetaja $2x(x-3)$ ja sobivad laiendustegurid. Saame:

$$\frac{x}{2x+1}-\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}=0;\quad \frac{2x^2+x-6x-3}{2x(x-3)}=0;$$
$$\frac{2x(x-3)}{2x^2-5x-3}=0$$

Kasutame murru nulliga võrdumise tingimust: murd on võrdne nulliga, kui lugeja on null ja nimetaja ei ole null (sest nulliga ei saa jagada). Seega saame antud tingimuse esimese poole põhjal (lugeja on null) võrrandi:

$$2x^2-5x-3=0,$$

millest

$$x_1=-\frac{1}{2}\quad \text{ja}\quad x_2=3.$$

Nüüd on vaja kontrollida, kas leitud arvude hulgas ei ole selliseid, mis ei täida murru nulliga võrdumise tingimuse teist poolt (nimetaja ei ole null), s. t. selliseid, mis muudavad nimetaja nulliks. Kui selliseid arve leidub, siis need ei saa olla antud võrrandi lahenditeks ja neid nimetatakse *võõrlahenditeks*. Kontroll tuleb teha lähtevõrrandi kaudu, sest siis saab avastada vigu, mis võivad lähtevõrrandi teisendamisel tekkida.

Kui $x=-\frac{1}{2}$, siis ei ole lähtevõrrandis ükski nimetaja (järelikult ka ühine nimetaja, kui see on leitud õigesti) võrdne nulliga. Seepärast võib $-\frac{1}{2}$ olla antud võrrandi lahendiks. Kontrollime seda.

$$V=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-6}=\frac{-1+1}{-1-6}=\frac{0}{7}=0;$$

$$P=\frac{3}{-\frac{1}{2}-3}+\frac{3}{2\cdot\frac{1}{4}-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{-\frac{7}{2}}+\frac{3}{\frac{7}{2}}=0$$

$$V=P$$

Kui $x=3$, siis on lähtevõrrandis kõigi murdude nimetajad võrdsed nulliga. Arv 3 on antud võrrandi võõrlahend ja teda pole mõtet enam kontrollida.

Vastus. $x=-\frac{1}{2}$

Teine viis. Lahutame antud võrrandis murdude nimetajad teguriteks, leiame murdude ühise nimetaja ja korrutame sellega võrrandi mõlemaid pooli:

$$\frac{2x+1}{2(x-3)}^{x} = \frac{3}{x-3}^{2x} + \frac{3}{2x(x-3)}^{1} \quad | \cdot 2x(x-3)$$

Esimese lahendusviisi puhul panime tähele, et antud murdvõrrandi lahendamine taandus sellise võrrandi lahendamisele, mis tekkis teisenduste käigus saadud murru lugeja võrdsustamisel nulliga. Seepärast võib pärast lugejate korrutamist laiendusteguritega kohe loobuda nimetajaist, ja me saame

$$2x^2+x=6x+3; \quad 2x^2-5x-3=0,$$

millest $x_1=-\frac{1}{2}$ ja $x_2=3$

Lahendite kontroll toimub samuti nagu esimese lahendusviisi korral.

Vastus. $x=-\frac{1}{2}$

Et teine lahendusviis on enam kasutatav, siis teeme sellest järgmise kokkuvõtte.

Murdvõrrandi lahendamiseks leitakse kõigi murdude ühine nimetaja ja sellega korrutatakse võrrandi mõlemaid pooli. Sel teel saadakse võrrand, mis ei sisalda tundmatut nimetajas, ja lahendatakse see. Saadud lahendite seast kõrvaldatakse võõrlahendid, s. o. arvud, mille asetamisel antud võrrandisse kas või ühegi murru nimetaja muutub nulliks. Teiste lahendite sobivust tuleb kontrollida lähtevõrrandi kaudu tavalises korras.

Näide 2. Lahendada võrrand:

$$\frac{30-5x}{x-2} = \frac{50-10x}{3x-12} - \frac{66-11x}{3x-12}$$

Lahendus.

$$\frac{30-5x}{x-2}^{3x-12} = \frac{50-10x}{3(x-4)}^{x-2} - \frac{66-11x}{3(x-4)}^{x-2} \quad | \cdot 3(x-2)(x-4)$$

$$90x-15x^2-360+60x=50x-10x^2-100+20x-66x+$$
$$+11x^2+132-22x; \quad -16x^2+168x-392=0 \quad | : (-8)$$
$$2x^2-21x+49=0$$

$$x=\frac{21\pm\sqrt{441-392}}{4}=\frac{21\pm7}{4}$$

$$x_1=\frac{14}{4}=3{,}5; \quad x_2=7$$

Kontroll. Leitud arvude asetamisel antud võrrandis olevate murdude nimetajasse x asemele ei muutu ükski nimetaja võrdseks nulliga. Seega võivad mõlemad arvud olla antud võrrandi lahenditeks.

$$V_1=\frac{30-5\cdot 3{,}5}{3{,}5-2}=\frac{30-17{,}5}{1{,}5}=\frac{12{,}5}{1{,}5}=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$$

$$P_1=\frac{50-10\cdot 3{,}5}{3\cdot 3{,}5-12}-\frac{66-11\cdot 3{,}5}{3\cdot 3{,}5-12}=\frac{15}{-1{,}5}-\frac{27{,}5}{-1{,}5}=$$

$$=-10+\frac{55}{3}=8\frac{1}{3}$$

$$V_1=P_1$$

$$V_2=\frac{30-5\cdot 7}{7-2}=\frac{30-35}{5}=-1$$

$$P_2=\frac{50-10\cdot 7}{3\cdot 7-12}-\frac{66-11\cdot 7}{3\cdot 7-12}=\frac{-20}{9}-\frac{-11}{9}=-\frac{20}{9}+\frac{11}{9}=-1$$

$$V_2=P_2$$

Vastus. $x_1=3{,}5$; $x_2=7$

261. Missugused arvud ei saa ilmselt olla alljärgnevate murdvõrrandite lahenditeks?:

1) $\frac{1}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{x}{x^2-9}$ 2) $\frac{3x+1}{3x(x^2-16)}-\frac{x-1}{x-4}=\frac{5x}{x+4}$

3) $\frac{x+2}{2x-4}+\frac{x-1}{x+5}=1$ 4) $\frac{3x+7}{x(x+1)}=\frac{1}{2x+6}$

262. Lahendada murdvõrrandid:

1) $2x+\frac{1}{2}=3$ 2) $\frac{x}{4}+\frac{25}{x}=3$ 3) $\frac{x+11}{x+3}=\frac{2x+1}{x+5}$

4) $\frac{7x-5}{10x-3}=\frac{5x-3}{6x+1}$ 5) $\frac{5x-1}{9}+\frac{3x-1}{9}+\frac{3x-1}{5}=\frac{2}{x}+x-1$

6) $\frac{5x-7}{9}+\frac{14}{2x-3}=x-1$ 7) $\frac{x}{3x-3}-\frac{2}{3x-9}=\frac{4}{3(x-1)(x+3)}$

8) $\frac{2x}{3x-1}+\frac{x-1}{3x-1}=\frac{2}{x}$ 9) $\frac{2x+2}{18}+\frac{12}{x+4}=\frac{x-4}{4}+\frac{x-2}{6}$

10) $\frac{7}{2x-3}+\frac{5}{x-1}=12$ 11) $\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x(2x-7)}=\frac{3}{(2x-7)(x-5)}$

12) $\frac{7}{x+1}+\frac{x+4}{2x-2}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$ 13) $\frac{13-x}{3+x}+\frac{6}{x^2-9}=\frac{3}{x+3}-\frac{2}{3-x}$

14) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$ 15) $\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2x+2}$

§ 27. ÜLESANNETE LAHENDAMINE RUUTVÕRRANDI ABIL.

Näide 1. Ristküliku üks külg on teisest 3 korda suurem. Kui suuremat külge vähendada kaks korda ja vähemat külge suurendada 3 cm võrra, siis ristküliku pindala väheneb 15 cm² võrra. Leida esialgse ristküliku küljed.

Lahendus. Olgu esialgse ristküliku lühem külg x cm; suurem külg on siis $3x$ cm ja ristküliku pindala on $x \cdot 3x = 3x^2$ cm². Uue ristküliku üks külg on $\frac{3x}{2}$ cm ja teine külg on $(x+3)$ cm ning tema pindala on seega $\frac{3x}{2}(x+3)$ cm², mis on esialgse ristküliku pindalast 15 cm² võrra vähem. Siit võrrand:

$$3x^2 - \frac{3x}{2}(x+3) = 15.$$

Pärast võrrandi mõlema poole korrutamist kahega saame:

$$6x^2 - 3x(x+3) = 30 \mid : 3; \quad 2x^2 - x(x+3) = 10;$$
$$2x^2 - x^2 - 3x = 10; \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{3-7}{2} = -2; \quad x_2 = \frac{3+7}{2} = 5$$

Kontroll. Et x tähistas ristküliku külje pikkust, mis väljendub alati positiivse arvuga, siis saadud võrrandi esimene lahend $x_1 = -2$ ei ole ülesande lahendiks. (Ta on küll aga saadud võrrandi lahendiks, nagu kontrollimisel võib veenduda.)

Kontrollime teist lahendit $x_2 = 5$ (cm).

Kui esialgse ristküliku vähem külg on 5 cm, siis suurem külg on $3 \cdot 5 = 15$ cm ja selle ristküliku pindala on $5 \cdot 15 = 75$ cm². Uue ristküliku üks külg on $15 : 2 = 7{,}5$ cm ja teine külg on $5 + 3 = 8$ cm ning pindala $7{,}5 \cdot 8 = 60$ cm², mis on 15 cm² vähem esialgse ristküliku pindalast, nagu peabki olema.

Vastus. Esialgse ristküliku küljed on 5 cm ja 15 cm.

Mõnikord võivad ka mõlemad koostatud ruutvõrrandi lahendid rahuldada ülesande tingimusi.

Näide 2. Kolhoosis planeeriti ühes laudas oleva lehmade grupi jaoks 120 tonni maisisilo aastas. Maisipõllult saadi aga 144 tonni silo. Seetõttu võis igale lehmale anda 500 kg silo rohkem kui planeeritud, olgugi et lauta tuli 2 lehma juurde. Mitu tonni silo planeeriti iga lehma kohta?

Lahendus. Oletame, et iga lehma jaoks planeeriti x tonni silo. 120 tonnist silost oleks siis jätkunud $\frac{120}{x}$ lehmale. Tegelikult anti igale lehmale $x+0{,}5$ tonni silo, mistõttu 144 tonnist silost jätkus $\frac{144}{x+0{,}5}$ lehmale. Viimane lehmade arv on esialgsest lehmade arvust aga kahe võrra suurem. Seega saame võrrandi:

$$\frac{144}{x+0{,}5} - \frac{120}{x} = 2.$$

Selle võrrandi lahendamine on järgmine:

$$144x - 120(x+0{,}5) = 2x(x+0{,}5)$$
$$144x - 120x - 60 = 2x^2 + x$$
$$2x^2 - 23x + 60 = 0$$
$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529-480}}{4} = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{23-7}{4}$$
$$x_1 = \frac{23-7}{4} = \frac{16}{4} = 4; \quad x_2 = \frac{23+7}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

Kontroll. 1) Kui iga lehma jaoks planeeriti 4 tonni silo, siis oleks planeeritud silo hulgast jätkunud $120:4=30$ lehmale. Tegelikult anti igale lehmale 4,5 tonni silo, millest jätkus $144:4{,}5=32$ lehmale; viimane lehmade arv ongi esialgsest lehmade arvust kahe võrra suurem, nagu ülesandes öeldud.

2) Kui igale lehmale planeeriti 7,5 tonni silo, siis oleks laudas olnud $120:7{,}5=16$ lehma. Tegelikult anti 8 tonni, mille tõttu lehmi pidi laudas olema $144:8=18$; seega ka kahe võrra rohkem kui esialgu.

Vastus. Iga lehma jaoks planeeriti kas 4 tonni silo või 7,5 tonni silo.

Märkus. Kuigi 7,5 tonni on tegeliku elu seisukohalt ratuke suur, on ta ikkagi ülesande tingimusi rahuldavaks lahendiks.

Näide 3. 10 ja 20 vahel olev täisarv on korrutatud ühekohalise arvuga, mis väljendub esimese arvu üheliste numbriga. Leida see arv 10 ja 20 vahelt, kui nimetatud korrutis on 119.

Lahendus. Olgu otsitava arvu üheliste number x; see arv avaldub siis kujus $10+x$. Ülesande kohaselt tuleb seda arvu korrutada arvuga x, kusjuures

$$x(10+x) = 119.$$

Selle võrrandi lahendid on $x_1 = -17$; $x_2 = 7$.

Kontroll. 1) Et otsitava arvu üheliste number ei saa olla negatiivne (pealegi kahekohaline arv!), siis $x_1 = -17$ langeb vaatluse alt välja.

2) Kui $x_2 = 7$, siis otsitav arv on 17, sest $7 \cdot 17 = 119$

Vastus. Otsitav arv on 17.

RUUTVÕRRANDI ABIL LAHENDUVAID ÜLESANDEID.

263. Üks positiivne arv on teisest 7 võrra suurem. Leida need arvud, kui nende korrutis on 330.

264. Üks negatiivne arv on teisest 2 võrra vähem. Leida need arvud, kui nende korrutis on 143.

265. Üks arv on teisest 6 võrra suurem. Leida need arvud, kui nende korrutis on 567. (*27* ja *21* või -21 ja -27.)

266. Arvu ja tema ruudu summa on 132. Mis arv see on? (*11* või -12.)

267. Arvu ruudu ja arvu vahe on 156. Mis arv see on?

268. Kahe järjestikuse positiivse täisarvu korrutis on 462. Mis arvud need on?

269. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on 240. Mis arvud need on?

270. Leida kolm järjestikust täisarvu, nii et kahe vähema arvu ruutude summa võrdub suurema arvu ruuduga. (*3*, *4* ja *5* või -1, *0* ja *1*.)

271. Leida kolm järjestikust paarisarvu, nii et kahe vähema arvu ruutude summa võrduks suurema arvu ruuduga.

Näpunäide. Kõige vähem paarisarv tähistada $2x$.

272. Kas on olemas kolm järjestikust paaritut arvu, nii et kahe vähema arvu ruutude summa võrduks suurema arvu ruuduga? (*Ei ole.*)

273. Ristkülikukujulise maatüki üks külg on teisest 8 m võrra suurem. Leida maatüki mõõtmed, kui ta pindala on 31,2 a.

274. Trapetsi aluste summa on 12 m võrra suurem trapetsi kõrgusest. Leida trapetsi kõrgus, kui trapetsi pindala on 54 m².

275. Murru lugeja on nimetajast ühe võrra vähem. Kui lugejaga liita 6 ja nimetajaga 3, siis saadakse antud murrust 2 korda suurem murd. Leida esialgne murd. $\left(\frac{2}{3}.\right)$

276. Murru lugeja on nimetajast ühe võrra vähem. Kui lugejat suurendada 2 võrra ja nimetajat vähendada 2 võrra, siis saadakse arv, mis on esialgsest murrust $1\frac{1}{5}$ võrra suurem. Leida esialgne murd. $\left(\frac{4}{5}\right)$

277. Teatri külastamiseks kavatseti osta teatav hulk ühesuguse hinnaga pileteid, kokku 15,6 rbl. eest. Et kassas soovitud pileteid ei olnud, siis tuli osta 10 kop. võrra kallimaid pileteid. Nüüd saadi aga selle rahasumma eest 1 pilet vähem, kui oli kavatsetud. Mitu piletit kavatseti osta? (*13 piletit.*)

278. Õpilane kavatses osta 3 rbl. eest teatava hulga ühesuguseid lennukimudeli detaile. Varem oli iga detail 5 kop. võrra kallim, nii et õpilane oleks siis saanud osta neid 2,75 rbl. eest ühe võrra vähem, kui ta nüüd kavatses osta. Mitu detaili kavatses õpilane osta?

279. Foto mõõtmetega 12 cm × 18 cm on asetatud ühtlase laiusega liistust valmistatud raami. Leida liistu laius, kui vaatajapoolse raamiosa pindala on võrdne foto pindalaga. (*3 cm.*)

280. Ristkülikukujulises aias mõõtmetega 49 m × 30 m on bassein, millel on samuti ristküliku kuju. Kõik basseini ääred on aeda piiravast tarast võrdseil kaugustel. Leida basseini mõõtmed, kui tema pindala on $\frac{4}{7}$ kogu aia pindalast.

281. Brigaad sai kokku 250 rbl. Oleks brigaadis olnud 2 töölist vähem ja kui iga tööline oleks saanud 10 rbl. rohkem, siis nad oleksid saanud kokku 180 rbl. Mitu töölist oli brigaadis?

282. Metsatööliste brigaad pidi valmistama teatud tähtajaks 90 m^3 puid. Et iga päev valmistati 4 m^3 puid enam kui plaanis, siis oli üks päev enne tähtaega valmistatud juba 95 m^3 puid. Mitu päeva pidi brigaad plaanikohaselt töötama?

283. Kolhoosnik, töötades hobuniidumasinal, pidi teatava ajaga niitma 2,8 ha suuruse heinamaa. Masinarikke tõttu pidi aga töö vahepeal 1 tund seisma. Seetõttu jõudis kolhoosnik keskmiselt niita igas tunnis 5 aari vähem kui kavatsetud. Kui palju pidi ta plaanikohaselt niitma tunnis?

284. Kolhoos sai teatava suurusega põllutükilt 126 ts teri. Järgmisel aastal kasutati enam väetisi, mille tulemusel keskmine hektarisaak tõusis 5 ts võrra, nii et saadi 138 ts teri 1 ha võrra vähemalt põllult kui eelmisel aastal. Kui suur põllutükk oli külvi all kummalgi aastal?

285. Kaks turisti väljuvad korraga ühest ning samast punktist 30 km kaugusel asuva linna suunas. Üks neist läbib igas tunnis 1 km võrra pikema tee kui teine ja jõuab seepärast linna 1 tund varem kui teine. Leida kummagi turisti liikumise kiirus. $\left(5\frac{km}{h};\ 6\frac{km}{h}.\right)$

286. Kaks matkajat alustasid samaaegselt liikumist teineteisele vastu, üks punktist A, teine punktist B. 3 tunni pärast nad kohtusid. Mitu tundi vajas kumbki matkaja vahemaa AB läbimiseks, kui esimene jõuab punkti B 2,5 tundi hiljem kui teine punkti A?

287. Matkaja käis ära 8 km pikkuse tee teatava kiirusega. Pärast seda ta suurendas liikumise kiirust $1\frac{km}{h}$ võrra ja läbis veel 5 km. Kui ta oleks kogu tee läbinud sellise kiirusega nagu viimased 5 km, siis oleks ta olnud teel 24 min. vähem. Leida matkaja esialgne kiirus.

288. Rongi keskmist sõidukiirust tõsteti $9\frac{km}{h}$ võrra, mistõttu rong läbib nüüd 180 km pikkuse tee 40 min. võrra kiiremini kui enne. Mitu tundi kulutab rong nüüd selle tee läbimiseks?

289. Sõiduplaani järgi pidi rong ühtlase kiirusega läbima 20 km pikkuse teelõigu ettenähtud aja jooksul. Rong läbis poole teed graafiku kohaselt ja pidi siis 3 min. semafori all peatuma. Et jõuda õigeks ajaks sihtpunkti, suurendas ta planeeritud kiirust $10\frac{km}{h}$ võrra. Kui suur oli planeeritud kiirus? $\left(40\frac{km}{h}.\right)$

290. Kodust kooli on 400 m. Vanem õde teeb sellel teel 300 sammu vähem kui noorem õde, sest tema samm on noorema õe sammust 30 cm võrra pikem. Leida kummagi õe samma pikkus.

291. Pärast hinnaalandust tuli maksta 60 kg kauba eest 6 rbl. rohkem kui enne 45 kg sama kauba eest. Kui palju maksis 1 kg kaupa enne ja pärast hinnaalandust, kui hinnaalandusega saab 6 rbl. eest 1 kg enam kaupa kui enne? (Enne: *1,20 rbl.* või *0,67 rbl.*; pärast vastavalt: *1,00 rbl.* või *0,60 rbl.*)

Näpunäide. Kui enne hinnaalandust maksis kaup $x\frac{\text{rbl.}}{\text{kg}}$, siis pärast hinnaalandust maksis ta $\frac{6}{\frac{6}{x}+1}\frac{\text{rbl.}}{\text{kg}}$.

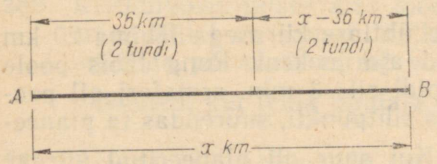
292. Üks jõetramm lahkub kell 12.00 sadamast A sadama B suunas kiirusega $18\frac{km}{h}$. Kell 14.00 kohtab ta teist trammi, mis lahkus kell 12.00 sadamast B sadama A suunas. Leida sadamate vaheline kaugus, kui esimene jõuab sadamasse B 1 tund 40 min. varem kui teine sadamasse A. (*60 km.*)

Näpunäiteks vt. joonis 69.

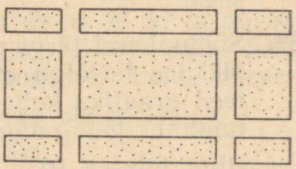
293. Silindrikujulise ilma kaaneta plekknõu valmistamiseks kulus 35 dm^2 plekki. Arvutada selle nõu läbimõõt ja kõrgus, kui on teada, et kõrgus on läbimõõdust 0,60 dm võrra suurem.

294. Koonusekujulise katuse valmistamiseks kulus 20,0 m^2 plekki, millest 3,5% kulus jätkukohtadele. Arvutada selle katuse läbimõõt mõõdetuna räästa servast, kui kaugus räästa servast katuse tipuni on läbimõõdust 1 m võrra lühem. (*4,0 m.*)

295. Pargi all on ristkülikukujuline maatükk mõõtmetega 120 m × ×160 m. Parki kavatsetakse rajada ühelaiused teed nii, nagu on näidatud joonisel 70. Kui suur võib olla tee laius, kui teede all olev pindala ei tohi ületada 6% kogu aia pindalast?



Joon. 69



Joon. 70

296. Ristkülikukujulisest papitükist, mille pikkus on 6 cm võrra suurem laiusest, tahetakse valmistada ilma kaaneta karp ruumalaga 216 cm^3. Selleks lõigatakse papitüki igast nurgast välja ruudud, mille pindala on kokku 36 cm^2. Leida antud papitüki mõõtmed.

§ 28. TAANDATUD RUUTVÕRRANDI LAHENDITE OMADUSED.

1. Taandatud ruutvõrrand. Taandatud ruutvõrrandiks nimetatakse sellist ruutvõrrandit, mille ruutliikme kordaja on üks.

Näit. $x^2-5x+6=0$ ja $x^2-0{,}8x-7=0$.

Iga taandamata ruutvõrrandit saab teisendada taandatud ruutvõrrandiks. Nimelt, kui ruutvõrrandi ruutliikme kordaja ei ole

üks, siis jagame selle võrrandi mõlemad pooled ruutliikme kordajaga ja saamegi taandatud ruutvõrrandi.

Näiteid. 1) $3x^2-6x-12=0 \mid :3$
$x^2-2x-4=0$

2) $4x^2+5x+3=0 \mid :4$
$x^2+1{,}25x+0{,}75=0$

Tähistades taandatud ruutvõrrandi lineaarliikme kordaja tähega p ja vabaliikme tähega q, saame taandatud ruutvõrrandile järgmise üldkuju:

$$x^2+px+q=0.$$

297. Taandada alljärgnevad ruutvõrrandid:

1) $3x^2-6x-18=0$; 2) $2x^2+5x+2=0$;
3) $-4x^2+7x-9=0$.

2. *Viëta*[1] *teoreem.* Alljärgnevas tabelis on lahendatud viis taandatud ruutvõrrandit ning leitud nende lahendite summa ja korrutis.

Võrrand	p	q	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$x^2-5x+6=0$	-5	6	2	3	5	6
$x^2+4x+3=0$	4	3	-1	-3	-4	3
$x^2-x-6=0$	-1	-6	-2	3	1	-6
$x^2+2x-8=0$	2	-8	-4	2	-2	-8
$x^2-1{,}5x+0{,}5=0$	$-1{,}5$	0,5	0,5	1	1,5	0,5

Kõigist toodud näidetest ilmneb, et taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub lineaarliikme kordaja vastandarvuga, kuid lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Kas see on juhuslik tähelepanek või on üldine seaduspärasus? Küsimusele vastamiseks leiame taandatud ruutvõrrandi lahendite summa ja korrutise üldkujul.

Lahendades võrrandi $x^2+px+q=0$ ruutvõrrandi lahendivalemi järgi, saame

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

millest

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ ja } x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

[1] François Viëta (ka Viète, 1540—1603) — prantsuse matemaatik.

Lahendite summa:

$$x_1+x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=$$

$$=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-2p}{2}=-p$$

Seega

$$\boxed{x_1+x_2=-p}$$

Lahendite korrutis:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\cdot\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=$$

$$=\frac{(-p-\sqrt{p^2-4q})\ (-p+\sqrt{p^2-4q})}{4}$$

Rakendades viimase murru lugeja lihtsustamiseks kahe arvu summa ja vahe korrutise valemit, saame edasi:

$$x_1\cdot x_2=\frac{(-p)^2-(\sqrt{p^2-4q})^2}{4}=\frac{p^2-(p^2-4q)}{4}=\frac{p^2-p^2+4q}{4}=q,$$

nii et

$$\boxed{x_1x_2=q}$$

Nii olemegi tõestanud teoreemi:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa on võrdne lineaarliikme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis on võrdne vabaliikmega.

See teoreem kannab Viëta teoreemi nime.

Kui tahame Viëta teoreemi rakendada taandamata võrrandi kohta, siis tuleb see võrrand e e l n e v a l t t a a n d a d a.

N ä i d e. $3x^2+12x-17=0\ |:3$

$$x^2+4x-5\frac{2}{3}=0.$$

Antud võrrandi lahendite summa on -4 ja korrutis on $-5\frac{2}{3}$ (mitte -12 ja -17).

298. Otsustada, kui suur on alljärgnevate ruutvõrrandite lahendite summa ja korrutis:

1) $x^2-4x+3=0$ $\qquad$ $x^2+2x-8=0$

$x^2-3x-10=0$ $\qquad$ $x^2+15x+56=0$

2) $x^2-3x+2=0$ $\quad x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}=0$

$x^2+0{,}8x+0{,}12=0$ $\quad x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}=0$

3) $2x^2+4x-5=0$ $\quad$ 4) $0{,}7x^2-0{,}14x-0{,}28=0$

$3x^2-5x+1=0$ $\quad 3x^2+9x+2=0$

$6x^2+2x-0{,}5=0$ $\quad 2x^2-1{,}3x+0{,}01=0$

$4x^2-5x+1=0$ $\quad 5x^2-\frac{1}{2}x-5=0$

3. Lahendite märgid. Viëta teoreem võimaldab ruutvõrrandi vabaliikme märgi järgi otsustada, kas antud võrrandi lahendid on samamärgilised või isemärgilised. Lineaarliikme kordaja märgi järgi saab otsustada, kas samamärgilised lahendid on positiivsed või negatiivsed või kui nad on isemärgilised, siis kumb lahend on suurema absoluutväärtusega.

Näiteid. 1) Võrrandi $x^2-9x+20=0$ lahendid on samamärgilised, sest nende korrutis on positiivne (20). Need lahendid on mõlemad positiivsed, sest nende summa on positiivne (9).

2) Võrrandi $x^2+2x-15=0$ lahendid on isemärgilised, sest nende korrutis on negatiivne (-15). Negatiivne lahend on suurema absoluutväärtusega, sest nende summa on negatiivne (-2).

299. Missugustel ülesandes 298 toodud võrranditel on isemärgilised lahendid? Missuguste võrrandite samamärgilised lahendid on positiivsed? Negatiivsed? Missugune vastava võrrandi isemärgilisest lahendist on suurema absoluutväärtusega?

§ 29. RUUTVÕRRANDI KOOSTAMINE ANTUD LAHENDITE JÄRGI.

Viëta teoreem võimaldab kergesti koostada ruutvõrrandit, mille lahendid on antud, sest nende lahendite järgi saab leida ruutvõrrandi kordajaid.

Näide 1. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on $x_1=3$ ja $x_2=5$.

Lahendus. Otsitava ruutvõrrandi vabaliige $q=x_1\cdot x_2=$ $=3\cdot 5=15$; lineaarliikme kordaja vastandarv $-p=x_1+x_2=$ $=3+5=8$, nii et $p=-8$. Otsitav võrrand on seega

$$x^2-8x+15=0$$

Näide 2. Koostada ruutvõrrand, mille lahendid on $x_1=2$ ja $x_2=-3{,}5$.

Lahendus. $q=x_1 \cdot x_2=2 \cdot (-3{,}5)=-7$;
$-p=x_1+x_2=2-3{,}5=-1{,}5$; $p=1{,}5$.

Otsitav võrrand:

$$x^2+1{,}5x-7=0$$

Pärast saadud võrrandi mõlema poole korrutamist kahega saame täisarvuliste kordajatega ruutvõrrandi:

$$2x^2+3x-14=0$$

Vaadeldava küsimuse üldiseks lahendamiseks oletame, et $x_1=m$ ja $x_2=n$. Siis $q=mn$ ja $-p=m+n$; $p=-(m+n)$.
Otsitav võrrand:

$$x^2-(m+n)x+mn=0$$

300. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on:

1) 2 ja 5; 3 ja 6; -4 ja -3; -2 ja 6
2) -3 ja 1; 1 ja -3; 0 ja 2; -1 ja 1
3) $-3{,}2$ ja 8,9; $-5{,}6$ ja 0; 6,7 ja 42; 5,3 ja 5,3

301. Koostada täisarvuliste kordajatega ruutvõrrand, mille lahenditeks on:

1) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$ ja $1\frac{2}{5}$; $-0{,}8$ ja $-0{,}5$
2) $\frac{5}{6}$ ja 0,2; 4,5 ja $-1{,}5$; $-\frac{2}{3}$ ja 0
3) $-0{,}6$ ja 0,12; $-\frac{4}{5}$ ja $\frac{4}{5}$; 6,7 ja 10,2

Kordamiseks.

302. Lahutada teguriteks:

1) a^2+ab; 2) $3a^2bc-9abc+12abc$; 3) $25x^2y^4-16$;
4) $4x^2-12x+9$; 5) $a^2+ab-3a-3b$; 6) $x^2y-xy-1$

§ 30. RUUTKOLMLIIKME TEGURITEKS LAHUTAMINE.

Kui ruutfunktsioonis $y=ax^2+bx+c$ ei ole ükski kordaja null, siis nimetatakse seda ruutfunktsiooni ka **ruutkolmliikmeks** (ruuttrinoomiks).

Ruutkolmliikmed on näiteks: $3x^2-6x-7$; x^2+5x+6.

Lisaks hulkliikme teguriteks lahutamise varemõpitud võtetele õpime alljärgnevas veel ühe võtte, mida saab kasutada ruutkolmliikme $y=ax^2+bx+c$ teguriteks lahutamisel.

Toome esmalt ruutkolmliikmest ruutliikme kordaja sulgude ette:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Sulgudes olevale ruutkolmliikmele $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ võime vaadata kui taandatud ruutvõrrandi $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ vasakule poolele. Tähistades selle ruutvõrrandi lahendid tähtedega x_1 ja x_2, saame Viëta teoreemi kohaselt, et $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ja $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ehk $-(x_1+x_2)=\frac{b}{a}$. Asendades ruutkolmliikme $y=a\left(x^2+\right.$ $\left.+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ sulgudes olevad kordajad vastavate avaldistega, saame:

$$y=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2).$$

Lahutame viimastes sulgudes oleva hulkliikme teguriteks rühmitamisvõttega (§ 1, p. 3):

$$y=a[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)]=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Seega

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Tähed x_1 ja x_2 tähistasid taandatud ruutvõrrandi $x^2+\frac{b}{a}+$ $+\frac{c}{a}=0$ lahendeid. Need samad lahendid on ka ruutvõrrandil $ax^2+bx+c=0$, sest see võrrand on saadud eelmisest tema mõlema poole korrutamisel a-ga (§ 1 p. 5).

Seega võime öelda:

ruutkolmliige ax^2+bx+c lahutub teguriteks kujul $a(x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid.

Näide 1. Lahutada teguriteks ruutkolmliige $2x^2-7x+5$. Lahenduseks leiame esmalt ruutvõrrandi $2x^2-7x+5=0$ lahendid:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{7\pm3}{4}$$

$$x_1=1;\ x_2=2{,}5$$

Ülalantud eeskirja järgi saame

$$2x^2-7x+5=2(x-1)(x-2{,}5)$$

Näide 2. Lahutada teguriteks ruutkolmliige m^2-m-6.

Lahendus. $m^2-m-6=0$;

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2}$$

$$m_1=-2;\ m_2=3;$$
$$m^2-m-6=1[m-(-2)](m-3)=(m+2)(m-3).$$

Näide 3. Lahutada teguriteks ruutkolmliige $-2x^2+9x+5$.

Lahendus.

$-2x^2+9x+5=0\ |\cdot(-1)$;
$2x^2-9x-5=0$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{9\pm11}{4}$$

$x_1=-0{,}5;\ x_2=5$
$-2x^2+9x+5=-2(x+0{,}5)(x-5)=2(x+0{,}5)(5-x)$

303. Lahutada teguriteks alljärgnevad ruutkolmliikmed:

1) $x^2-11x+30$; $x^2-9x+20$; $k^2+7k+12$; n^2+3n+2; $l^2+3l-10$

2) $2m^2+m-1$; $3p^2-5p+2$; $2x^2-13x+15$; $2x^2-3x+7$; $3x^2-2x+5$

3) $-2x^2+7x-3$; $-x^2-9x-18$; $-x^2-4x+5$; $-6x^2-7x+3$; $-20x^2-x+12$

304. Taandada alljärgnevad murrud:

1) $\frac{x-2}{x^2-7x+10}$ 2) $\frac{(x+3)^2}{x^2+2x-3}$ 3) $\frac{x^2-16}{x^2+2x-24}$

4) $\frac{a^2+7a-8}{a^2+2a-3}$ 5) $\frac{3x^2+4x-4}{2x^2+5x+2}$ 6) $\frac{2a^2+8a-90}{3a^2-36a+105}$

Kordamiseks.

305. Lahendada asendusvõttega alljärgnevad võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+y=9 \\ 4x-5y=-7 \end{cases}$

§ 31. LIHTSAMAD KAHE TUNDMATUGA RUUTVÕRRANDISÜSTEEMID.

Lihtsamais kahe tundmatuga ruutvõrrandisüsteemides on üks võrrand ruutvõrrand, s. o. selline võrrand, milles esinevad kas ühe või mõlema tundmatu ruudud, tundmatute esimeste astmete korrutis või nii tundmatute ruudud kui ka nende esimeste

astmete korrutis; teine võrrand on aga lineaarne võrrand. Näiteks on niisuguseks süsteemiks

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+2xy=10 \end{cases}$$

Nii nagu lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamisel (§ 9), on ka ruutvõrrandisüsteemide lahendamise põhimõtteks see, et üks tundmatu elimineeritakse, mille tulemusel saadakse ühe tundmatuga võrrand.

Vaatluse all olevate ruutvõrrandisüsteemide lahendamisel kasutatakse ühe tundmatu elimineerimiseks enamasti asendusvõtet.

Näide 1. Ma mõtlesin kaks arvu, mille ruutude summa on 34. Kui esimese arvu kahekordsele liita teine arv, siis saame 11. Mis arvud ma mõtlesin?

Lahendus. Tähistame esimese arvu tähega x ja teise arvu tähega y. Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ 2x+y=11 \end{cases}$$

Saadud süsteemi lahendamiseks avaldame lineaarsest võrrandist ühe tundmatu, näiteks y. Saame:

$$y=11-2x$$

Saadud avaldise paigutame ruutvõrrandisse tähe y asemele:

$$x^2+(11-2x)^2=34$$

Saime ühe tundmatuga ruutvõrrandi. Lahendame selle:

$$x^2+121-44x+4x^2=34$$
$$5x^2-44x+87=0$$

$$x=\frac{44\pm\sqrt{1936-1740}}{10}=\frac{44\pm\sqrt{196}}{10}=\frac{44\pm14}{10}$$

$$x_1=3; \quad x_2=5\frac{4}{5}$$

Et x jaoks saime kaks väärtust, siis saame kaks väärtust ka y jaoks. Need leiame võrdusest $y=11-2x$:

$$y_1=11-2x_1=11-2\cdot3=5$$
$$y_2=11-2x_2=11-2\cdot5\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$$

Nii leidsime, et saadud võrrandisüsteemi rahuldab kaks arvupaari ehk sellel süsteemil on kaks lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 5\frac{4}{5} \\ y_2 = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Kontroll näitab, et mõlemad lahendid rahuldavad ülesande tingimusi. Tõepoolest:

1) $3^2+5^2=9+25=34$
$2\cdot 3+5=6+5=11$

2) $\left(5\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{29}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{841}{25}+\frac{9}{25}=\frac{850}{25}=34$

$2\cdot 5\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=11\frac{3}{5}-\frac{3}{5}=11$

Vastus. Mõeldud arvud olid kas 3 ja 5 või $5\frac{4}{5}$ ja $-\frac{3}{5}$

Näide 2. Ristküliku ümbermõõt on 22 cm, pindala 30 cm^2. Leida ristküliku küljed.

Lahendus. Olgu ristküliku üks külg x cm ja teine külg y cm. Saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 2x+2y=22 \\ xy=30 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x+y=11 \\ xy=30 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist

$$x=11-y$$

Asendus teise võrrandisse annab ühe tundmatuga võrrandi:

$$(11-y)y=30; \quad 11y-y^2-30=0$$
$$y^2-11y+30=0,$$

millest

$$y_1=5 \text{ ja } y_2=6$$

Leiame teise tundmatu:

$$x_1=11-y_1=11-5=6$$
$$x_2=11-y_2=11-6=5$$

Võrrandisüsteem omab seega kaks lahendit:

$$\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=6 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=6 \end{cases}$$

Kontroll näitab, et mõlemad lahendid rahuldavad ka ülesande tingimusi. Et aga ei olnud kokkulepet, missuguse külje

pikkuse (kas pikema või lühema) tähistame x-ga ja missuguse y-ga, siis tuleb ülesande sisu kohaselt lugeda mõlemad lahendid kokkulangevaks.

Vastus. Ristküliku üks külg on 5 cm ja teine külg on 6 cm.

Näide 3. Eesti NSV põllumajandustöötajate 1964. a. sotsialistlike kohustuste kohaselt pidi Harju rajoon saama keskmiselt igalt hektarilt 5 ts teri rohkem kui Haapsalu rajoon. Et Haapsalu rajoon jõuaks Harju rajooni tasemele, peaks ta iga tsentneri terade saamiseks kasutama 0,0167 ha vähem maad, kui oli ette nähtud sotsialistlike kohustuste kohaselt. Mitu tsentnerit teri kohustus saama kumbki rajoon hektarilt?

Lahendus. Oletame, et Harju rajoon kohustus saama igalt hektarilt x ts teri ja Haapsalu rajoon y ts. Esimene võrrand:

$$x-y=5$$

Harju rajoon saab ühe tsentneri teri maatükilt, mille suurus on $\frac{1}{x}$ ha; Haapsalu rajoon vajab 1 ts saamiseks aga $\frac{1}{y}$ ha maad. Ülesande järgi on nende maatükkide vahe 0,0167 ha. Teine võrrand:

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=0{,}0167$$

Seega saame süsteemi

$$\begin{cases} x-y=5 \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=0{,}0167 \end{cases}$$

Pärast murdude kaotamist saame sellele süsteemile järgmise kuju:

$$\begin{cases} x-y=5 \\ x-y=0{,}0167xy \end{cases}$$

Esimesest võrrandist $x=5+y$. Tehes asenduse teise võrrandisse, saame:

$$5=0{,}0167y(5+y);\quad 5=0{,}0835y+0{,}0167y^2$$
$$0{,}0167y^2+0{,}0835y-5=0 \mid \cdot 100$$
$$1{,}67y^2+8{,}35y-500=0$$
$$y=\frac{-8{,}35\pm\sqrt{69{,}7+3340}}{3{,}34}=\frac{-8{,}35\pm\sqrt{3410}}{3{,}34}=\frac{-8{,}35\pm 58{,}4}{3{,}34}$$
$$y_1=-20{,}0;\quad y_2=15{,}0.$$

Et $y_1=-20{,}0$ ilmselt ei sobi ülesande lahendiks, siis x väärtuse leidmiseks võtame $y=15{,}0$, mistõttu $x=5+y=20$.

Kontroll!

Vastus. Harju rajoon kohustus saama igalt hektarilt 20,0 tsentnerit teri, Haapsalu rajoon aga 15,0 tsentnerit.

Näide 4. Lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x^2+y^2-2xy-y=26 \end{cases}$$

Avaldame lineaarsest võrrandist ühe tundmatu (x) ja asetame selle teise võrrandisse:

$$x=4-2y$$
$$2(4-2y)^2+y^2-2y(4-2y)-y=26$$
$$2(16-16y+4y^2)+y^2-8y+4y^2-y=26$$
$$32-32y+8y+y^2-8y+4y^2-y-26=0$$
$$13y^2-41y+6=0,$$

millest

$$y_1=\frac{2}{13} \text{ ja } y_2=3$$

$$x_1=4-2y_1=4-\frac{4}{13}=3\frac{9}{13}$$

$$x_2=4-2y_2=4-6=-2$$

$$\begin{cases} x_1=3\frac{9}{13} \\ y_1=\frac{2}{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=3 \end{cases}$$

Kontroll!

Toodud näidetest kokkuvõtet tehes võime öelda, et lihtsamaid kahe tundmatuga ruutvõrrandisüsteeme saab lahendada asendusvõttega sel teel, et lineaarsest võrrandist[1] avaldatakse üks tundmatu teise kaudu ja saadud avaldis paigutatakse ruutvõrrandisse vastava tundmatu asemele. Sel teel saadakse ühe tundmatuga ruutvõrrand, mis annab vastava tundmatu kaks väärtust. Teise tundmatu vastavad väärtused leitakse sellest võrdusest, kus see tundmatu on avaldatud esimese kaudu. Nii saame võrrandisüsteemile kaks lahendit. Saadud lahendite õigsust tuleb kontrollida. Eriti oluline on kontroll siis, kui võrrandisüsteem on koostatud ülesande teksti järgi, sest leitud kahest lahendist sageli ainult üks rahuldab ülesande tingimusi.

Mõnel juhtumil saab ruutvõrrandisüsteemi lahendada ka liitmisvõttega.

Näide 5.

$$\begin{cases} x^2+3y=27 \\ x-3y=-15 \end{cases}$$

[1] Põhimõtteliselt võiks ühe tundmatu avaldada ka ruutvõrrandist, kuid siis läheb lahenduskäik tunduvalt keerulisemaks.

Süsteemist on näha, et kui liidame mõlemate võrrandite vastavad pooled, siis tundmatu y elimineerub:

$$\begin{cases} x^2+3y=27 \\ x-3y=-15 \end{cases}$$

$$x^2+x=12$$
$$x^2+x-12=0,$$

millest

$$x_1=-4 \text{ ja } x_2=3.$$

Asendades lineaarses võrrandis tähe x esiteks -4-ga ja siis 3-ga, saame teise tundmatu väärtuseks

$$y_1=3\frac{2}{3} \text{ ja } y_2=6.$$

Süsteemi lahendid on seega

$$\begin{cases} x_1=-4 \\ y_1=3\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=6 \end{cases}$$

Mõnikord tuleb võrrandisüsteemi eelnevalt lihtsustada.

Näide 6. Lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \frac{(x+y+1)(x+y-1)}{xy+57}=3 \\ \frac{1}{2x}-\frac{1}{2y}=-\frac{1}{xy} \end{cases}$$

Lihtsustame esimese võrrandi:

$$(x+y+1)(x+y-1)=3(xy+57)$$
$$x^2+xy-x+xy+y^2-y+x+y-1=3xy+171$$
$$x^2+y^2-xy=172$$

Lihtsustame teise võrrandi:

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{2y}=-\frac{1}{xy} \quad | \cdot 2xy$$

$$y-x=-2.$$

Seega saame süsteemi:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=172 \\ y-x=-2. \end{cases}$$

mille lahendite

$$\begin{cases} x_1=-10 \\ y_1=-12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=16 \\ y_2=14 \end{cases}$$

leidmine jääb lugeja ülesandeks.

306. Lahendada võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x+y=12 \\ xy=35 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=65 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=10 \\ xy=12 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-2y=6 \\ xy=20 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ xy=-6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=40 \\ y-x=-4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2y-x=5 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} y^2-x^2=21 \\ 3y+x=13 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x-y=-10 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x^2+y^2=9 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x^2+2y=14 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2y^2-x=3 \\ y+2x=12 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3x^2-2y=-1 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x^2-3y=-4 \\ y+2x=0 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=-16 \\ x+y=5 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 3x^2+4y-x+y=20 \\ x+y=3 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x^2+2y^2-xy=44 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x^2+y^2+xy+x+y=32 \\ y-x=11 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} 3x^2-4y^2-xy-y=-1 \\ y-5x=6 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x^2-3y^2-2x+y=-32 \\ 3x+2y=17 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ \frac{x}{y}=2y \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ \frac{1}{xy}=1 \end{cases}$ 25) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{11}{xy} \end{cases}$ 26) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ \frac{x-2}{y+3}=1 \end{cases}$

27) $\begin{cases} \frac{x^2+y^2+1}{y^2+x+1}=\frac{3}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)}=\frac{1}{2} \\ \frac{x-y}{x+y}=\frac{2}{5} \end{cases}$

29) $\begin{cases} \frac{(x+y-1)(2x+y-1)}{xy+5}=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{xy} \end{cases}$ 30) $\begin{cases} \frac{(2x-y)(x+y)}{2xy+13}=-1 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=-\frac{13}{xy} \end{cases}$

307. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 24 cm ja hüpotenuus on 10 cm. Arvutada kaatetid.

308. Ristküliku ümbermõõt on 34 cm ja tema diagonaal on 13 cm. Arvutada ristküliku küljed.

309. Ristküliku pindala on 72 cm² ja tema ümbermõõt on 34 cm. Arvutada ristküliku küljed.

310. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 16 cm. Arvutada selle kolmnurga küljed, kui alusele ehitatud kõrgus on 6,32 cm.

311. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 40 cm. Arvutada selle kolmnurga küljed, kui tema alusele ehitatud kõrgus on haarast 3 cm võrra lühem.

312. Rombi ümbermõõt on 24 cm. Arvutada rombi diagonaalid, kui nende summa on 15 cm.

313. Rombi ümbermõõt on 36 cm. Arvutada rombi diagonaalid ja pindala, kui diagonaalide vahe on 14 cm.

314. Rombi pindala on 48 cm^2. Arvutada rombi diagonaalid ja küljed, kui diagonaalide summa on 20 cm.

315. Trapetsil, mille kõrgus on 4,8 cm, on niisama suur pindala kui ristkülikul, mille küljed on võrdsed trapetsi alustega. Leida trapetsi alused, kui trapetsi kesklõik on 5 cm.

316. Teravilja kindlustamiseks haiguste vastu kasutatakse seemne puhtimist granosaaniga. Ühe tonni rukki puhtimiseks kulub 0,5 kg granosaani vähem kui ühe tonni odra puhtimiseks. Mitu kilogrammi granosaani kulub kummagi teravilja ühe tonni puhtimiseks, kui kahe kilogrammi granosaaniga saab puhtida 0,67 tonni rukist rohkem kui otra? (*1 kg; 0,5 kg.*)

317. 4 m^3 põhku kaalub niisama palju kui 3 m^3 heinu. 100 kg heinu omab $\frac{1}{3}$ m^3 vähema ruumala kui 100 kg põhku. Mitu kilogrammi kaalub 1 m^3 heinu ja 1 m^3 põhku? (*100 kg; 75 kg.*)

318. Kaubarong kulutab 240 km pikkuse vahemaa läbimiseks 50% võrra rohkem aega kui reisirong. Kui reisirongi kiirust suurendada 20 $\frac{km}{h}$ võrra, siis kuluks tal sama vahemaa läbimiseks 3 tundi vähem kui kaubarongil. Kui palju aega kulub kummalgi rongil 240 km läbimiseks? (*4 t., 6 t.*)

319. Sõiduauto «Moskvitš-407» maksimaalne bensiinikulu 100 km läbimiseks talvel on 1,0 l suurem kui suvel. Arvutada auto bensiinikulu 100 km läbimiseks suvel ja talvel, kui on teada, et 1,1 liitri bensiiniga sõidab auto talvel 1 km võrra vähem kui suvel. (*10 l, 11 l.*)

320. Kui sõiduauto «Volga» liigub esimese käiguga, siis mootori väntvõll teeb igas ajaühikus 14,2 korda rohkem pöördeid kui auto rattad.

Arvutada: a) mitu pööret sekundis teeb mootori väntvõlli ja mitu pööret teevad samal ajal auto rattad, kui väntvõlli 100 pöörde tegemiseks kulub 56 sekundit vähem aega kui rataste 100 pöörde tegemiseks?

b) kui suur on auto liikumise kiirus, kui ratta läbimõõt on 0,71 m? [a) *24 pööret, 1,7 pööret*; b) $14\frac{km}{h}$.]

Kodune kontrolltöö nr. 4.

A.

1. Lahendada võrrandid:

   1) $x^2-12x+35=0$ 2) $x^2-14x-15=0$
   3) $25x^2-15x-4=0$ 4) $25x^2+50x+24=0$
   5) $(2x-3)(x-5)=16$ 6) $\frac{x^3-10x^2+1}{x^2-6x+9}=x-3$

2. Täisnurkse kolmnurga pindala on 24 cm². Kui pikad on selle kolmnurga kaatetid, kui nende vahe on 2 cm?

3. 225 km pikkuse tee läbimiseks kulutab veoauto 3,5 tundi rohkem aega kui sõiduauto. Arvutada kummagi auto kiirus, kui sõiduauto läbib igas tunnis 26,25 kilomeetrit rohkem kui veoauto.

B.

1. Koostada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

   1) 3 ja 8
      −2 ja −7
      −5 ja 6

   2) 2 ja 0
      −0,7 ja 1,3
      $\frac{3}{4}$ ja −5

2. Taandada murrud:

   1) $\frac{x+3}{x^2+x-6}$; 2) $\frac{(x-5)^2}{5x^2-24x-5}$; 3) $\frac{2a^2+3a-2}{2a^2-3a+1}$

3. Lahendada võrrandisüsteemid:

   1) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x^2-2y^2=-17 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+5y=3 \\ x^2+xy=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2x+y}{xy-1} = \frac{1}{y-x} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{xy} \end{cases}$

4. Ristküliku ümbermõõt on 3,4 m ja diagonaal 1,3 m. Leida ristküliku pindala.

5. Saalis olev tooliridade arv on 7 võrra suurem igas reas olevast toolide arvust. Kui toolide arvu igas reas suurendada 2 võrra ja ridade arvu vähendada ühe võrra, siis oleks saalis 480 tooli. Mitu rida toole on saalis ja mitu tooli igas reas?

Üldiseks kordamiseks.

321. Koordinaatteljestikus on antud nelinurkse maatüki plaan, nii et nelinurga tippude koordinaadid on: (3; 3), (8; −1), (3; −5), (−2; −1). Arvutada selle nelinurga pindala plaanil ja looduses, kui mõlemal teljel on kujutusühikuks 1 cm = 1 cm ja kui plaani mastaap on 1 : 1000.

322. Mis liiki funktsionaalne sõltuvus valitseb alljärgnevais valemeis x ja y vahel?

$xy=5$; $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}$; $\frac{x}{y}=\frac{5}{6}$; $\frac{2x+y}{5}=x-5$;

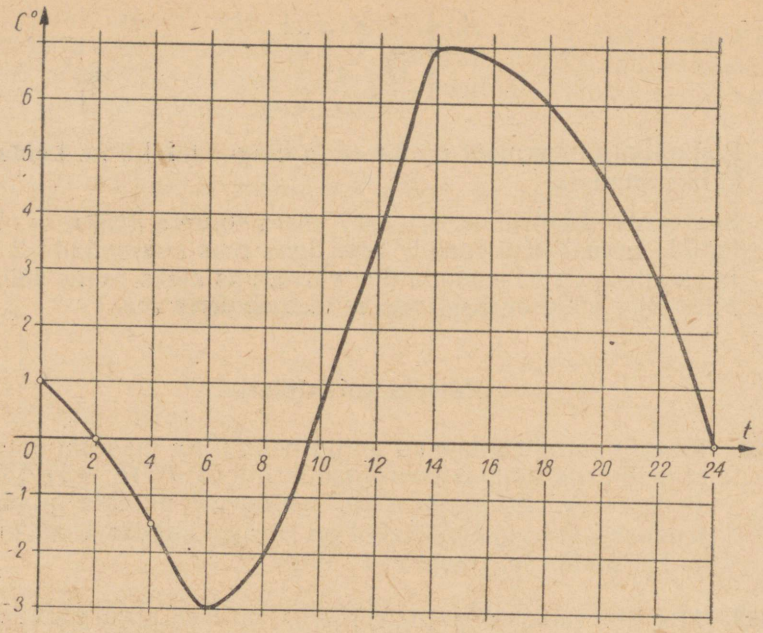
$\frac{y}{x}=\frac{x}{5}$; $\frac{y+5}{x-2}=\frac{x+5}{3}$; $\frac{3y-5}{x+2}=\frac{2x-5}{3}$.

323. Joonisel 71 on kujutatud graafik, mis näitab õhu temperatuuri sõltuvust ajast ühe ööpäeva jooksul.

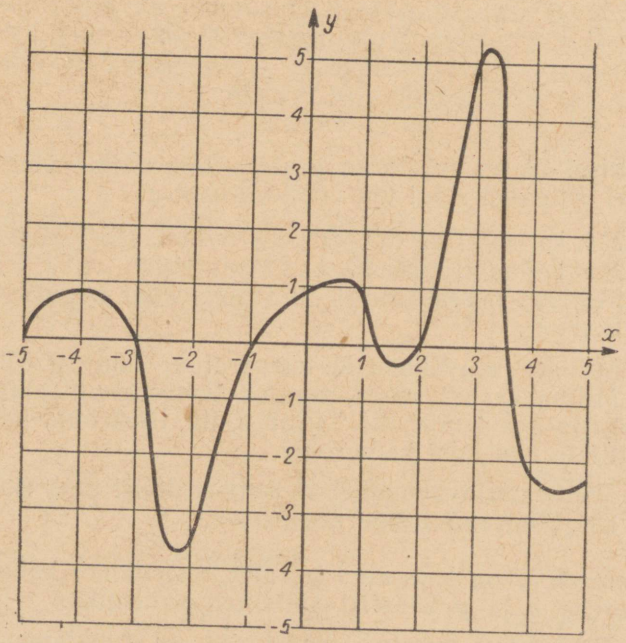
1) Mis kellaajal on temperatuur minimaalne? Maksimaalne?
2) Mis kellaajal näitas kraadiklaas null?
3) Milliseil ajavahemikel oli temperatuur negatiivne? Positiivne?
4) Millistel ajavahemikel temperatuur langes? Tõusis?
5) Mitme kraadi võrra muutus temperatuur ajavahemikul kella 8-st kuni kella 14-ni? Kella 16-st kuni kella 22-ni? Kella 2-st kuni kella 6-ni?
6) Millistel ajavahemikel oli temperatuuri tõus (langemine) kõige kiirem? Kõige aeglasem?

324. Joonisel 72 on kujutatud graafik, mis näitab kahe muutuva suuruse x ja y vahelist sõltuvust vahemikus $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

1) Millistel argumendi väärtustel on funktsiooni väärtus minimaalne? Maksimaalne? Kui suur nimelt?



Joon. 71



Joon. 72

2) Millistel argumendi väärtustel on funktsiooni väärtus null?
3) Millistel argumendi väärtustel on funktsiooni väärtus positiivne? Negatiivne?
4) Millistel argumendi väärtustel funktsiooni väärtused kasvavad? Kahanevad?
5) Kuidas muutub funktsiooni väärtus vahemikus $-2 \leqslant x \leqslant 1$? Vahemikus $2 \leqslant x \leqslant 3$? Vahemikus $-5 \leqslant x \leqslant 2$?
6) Millistel argumendi väärtustel funktsiooni väärtus kasvab (kahaneb) kõige kiiremini? Kõige aeglasemalt?

325. Isoleeritud elektrijuhtme liigse kuumenemise vältimiseks on ette nähtud maksimaalne lubatav voolutugevus, mis oleneb juhtme ristlõike pindalast. Alljärgnevas tabelis on näidatud lubatava voolutugevuse I sõltuvus vaskjuhtme ristlõike pindalast S:

S (mm²)	0,50	0,75	1,0	1,5	2,5	4,0	6,0	10	16	25	35	50	70
I (amper)	10	13	15	20	27	36	46	68	90	125	150	190	240

Valida koordinaattelgedele sobivad kujutusühikud ja ehitada selle sõltuvuse graafik.

1) Juhtmes on vool, mille tugevus võib ulatuda: a) 50 A; b) 70 A; c) 100 A; d) 140 A; e) 200 A. Millise ristlõikega juhe tuleb igal juhtumil valida?
2) On olemas juhe, mille ristlõike pindala on: a) 3 mm²; b) 8 mm²; c) 15 mm²; d) 40 mm²; e) 0,5 cm². Milline on lubatav voolutugevus igal üksikul juhtumil?
3) On olemas juhe, mille diameeter on: a) 2,0 mm; b) 2,52 mm; c) 3,5 mm; d) 4,5 mm; e) 8 mm. Milline on lubatav voolutugevus igal üksikul juhtumil?

326. Ehitada ühes ning samas teljestikus graafikud funktsioonidele:

a) $y=2x$; $y=-x+3$
b) $y=-1{,}5x$; $y=0{,}5x-3$
c) $y=-2x+2$; $y=0{,}5x-2$

Vastata kõigil juhtumeil järgmistele küsimustele:
1) Millisel argumendi väärtusel on mõlemad funktsioonid võrdsed?
2) Millisel argumendi väärtusel on funktsioonide väärtused võrdsed nulliga?

3) Nimetada kolm argumendi väärtust, mille puhul a) esimese funktsiooni väärtus on vähem kui teise funktsiooni väärtus; b) suurem kui teise funktsiooni väärtus.

4) Nimetada kolm argumendi väärtust, mille puhul a) esimese funktsiooni väärtused on positiivsed; b) teise funktsiooni väärtused on positiivsed; c) esimese funktsiooni väärtused on negatiivsed; d) teise funktsiooni väärtused on negatiivsed.

327. Ilma graafikuid joonestamata selgitada, kumb sulgudes antud sõna on õige, kumb väär.

Kui argument kasvab, siis
1) funktsioon $y=2x$ (kasvab, kahaneb)
2) funktsioon $y=-3x$ (kasvab, kahaneb)
3) funktsioon $y=-2x+3$ (kasvab, kahaneb)
4) funktsioon $y=2x-5$ (kasvab, kahaneb)

328. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} y=x-1 \\ x+y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3=2y \\ 3x-y=4 \end{cases}$

329. Lahendada võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+2y=20 \\ x-y=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+8y=25 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(x-1)=4y+1 \\ 5(y-1)=x+1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5(3x+y)-8(x-6y)=200 \\ 20(2x-3y)-13(x-y)=520 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4}+\frac{y-3}{3}=2y-x \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 4(0{,}1x+1)+5=1{,}1y \\ \frac{11+0{,}3y-x}{x}-5=4\left(\frac{1}{x}-1\right) \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{x-1}{x+15}=\frac{y-6}{y+2} \\ \frac{x-3}{x}=\frac{y-4}{y-1} \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \frac{0{,}2x+0{,}1y}{2}-\frac{4x-y}{10}-\frac{3x+0{,}5y}{30}+\frac{x-y}{5} \\ \frac{3x+2y-1}{8}=3-\frac{0{,}8x-5y}{41} \end{cases}$

330. Ehitada ühes ning samas teljestikus kahe alljärgneva funktsiooni graafikud (kasutades põhiparabooli šablooni):

1) $y=x^2$ ja $y=x+1$ 2) $y=x^2$ ja $y=-2x+1$
3) $y=x^2$ ja $y=1{,}5x+2$ 4) $y=x^2$ ja $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

Selgitada graafiku abil iga funktsiooni paari kohta:

1) Missugustel argumendi väärtustel on mõlema funktsiooni väärtused võrdsed? 2) Missuguse võrrandi lahendamist tähendab igakord eelmisele küsimusele vastamine?

331. Kuidas saab põhiparabooli ja sirge abil lahendada järgmisi ruutvõrrandeid (vt. ülesanne 330)?:

1) $x^2-2x-1=0$ 2) $x^2+2x-1=0$ 3) $x^2+1{,}5x-3=0$
4) $2x^2-5x+3=0$ 5) $3x^2-2x-1=0$ 6) $2x^2-4x-1=0$

332. Joonisel 73 on esitatud funktsiooni $y=2x^2-6x+1$ graafik. Lahendada selle graafiku abil alljärgnevad ülesanded:

1) leida y, kui $x=-0{,}5$; 0; 1; 1,5; 2,2; 2,8; 3,1;
2) leida x, kui $y=5$; 4,5; 3,2; 0,5; $-1{,}5$; $-3{,}1$.
3) Lahendada võrrandid:

a) $2x^2-6x+1=2$ b) $2x^2-6x+1=-1$
c) $2x^2-6x+1=0$ d) $2x^2-6x+1=2{,}5$

333. Ehitada funktsiooni $y=-1{,}2x^2-4{,}3x-1{,}5$ graafik. Vajalikud arvutused korraldada alljärgnevasse skeemi.

x	.....
x^2	.....,
$-1{,}2x^2$	.....
$-4{,}3x$	.....
$-1{,}2x^2-4{,}3x$	.....
$-1{,}2x^2-4{,}3x-1{,}5$	.....

Saadud graafiku abil lahendada järgmised ülesanded:

1) leida y, kui $x=-3{,}5$; $-3{,}2$; $-2{,}4$; $-1{,}3$; 0; 0,5;

2) leida x, kui $y=2{,}1$; 1,5; 0,8; 0,3; $-1{,}5$; $-2{,}1$.

3) Lahendada võrrandid:

a) $-1{,}2x^2-4{,}3x-1{,}5=1{,}8$; b) $1{,}2x^2+4{,}3x+1{,}5=-1$

334. Lihtsustada avaldised:

1) $\dfrac{4r^2-x^2}{(r-s)^2}:\dfrac{6r+3s}{r-s}$ 2) $\dfrac{a^4-2a^2b^2+b^2}{3c(a+b)}:\dfrac{a^2-b^2}{9c^2}$

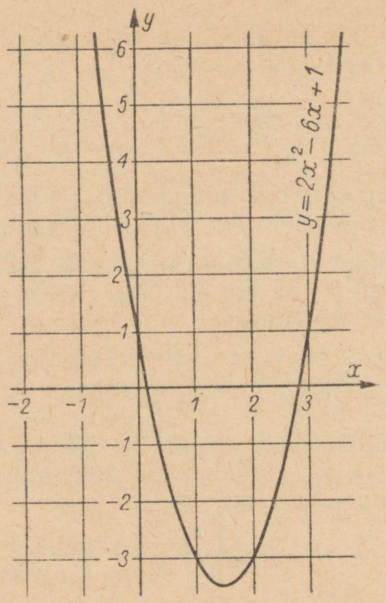
3) $\dfrac{2x-3}{3x-3}-\dfrac{3x-1}{4x+4}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 4) $\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

5) $\left(\dfrac{1}{2a-b}+\dfrac{3b}{b^2-4a^2}-\dfrac{2}{2a+b}\right):\left(\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right)$

6) $\left[\dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}\cdot\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)-\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\cdot\dfrac{a^2+c^2}{a^2c^2}\right]:\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

335. Taandada murrud:

1) $\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$ 2) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x-14}$ 3) $\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-13x+6}$



Joon. 73

336. Lahendada võrrandid:

1) $\frac{x(2x-3)}{2}+\frac{(3x-1)^2}{5}=\frac{(x+3)^2}{5}+1$

2) $\frac{5}{y+2}+\frac{9}{2y+3}=2$; 3) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{1-x}-\frac{6}{1-x^2}$

4) $\frac{3m}{2m-1}-\frac{39}{2m+1}=5-\frac{45}{4m^2-1}$

5) $\frac{x+5}{x+1}+\frac{3x+1}{x^2+3x+2}=2{,}5$

N ä p u n ä i d e. Lahutada vasakul pool oleva teise murru nimetaja teguriteks.

337. Lahendada võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} xy=4 \\ 3x+y=24{,}5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 20x^2+20y^2=13 \\ y-x=0{,}9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=31 \\ x=2{,}5y \end{cases}$

338. Arvutada:

1) $15\frac{3}{8}:\left(2\frac{1}{2}+0{,}125-\left(6\frac{1}{2}-1\frac{3}{25}\cdot 3{,}125\right)\right.$

2) $101{,}26-5\cdot(14{,}7:0{,}75-0{,}7:2\frac{1}{3}+0{,}15)$

3) $\dfrac{68\frac{4}{5}:0{,}86-1338:44{,}6}{\left(22\frac{3}{7}+43\frac{5}{7}:17\right)\cdot 0{,}1}$

4) $2\frac{1}{2}+0{,}039:[0{,}05\cdot(2{,}31:0{,}077)]-2{,}526.$

339. Leida 5% 20-st; 61% 32-st; 45% 35-st; 12,7% 48-st; 0,79% 5,7-st; 30,5% 1,83-st.

340. Leida arv, millest 60% on 30; 40% on 50; 32% on 18; 78% on 4,9; 3,2% on 15; 4,9% on 0,52.

341. Mitu protsenti moodustab 3 6-st; 5 8-st; 32 56-st; 4,2 5,6-st; 8,9 52,5-st; 16,2 137-st; 0,89 1,85-st?

342. Mitme protsendi võrra on 7 suurem kui 5? 13 suurem kui 8? 32,7 suurem kui 21,2? 167 suurem kui 87,5? 0,562 suurem kui 0,452?

343. Mitme protsendi võrra on 4 vähem kui 5? 6 vähem kui 8? 3,2 vähem kui 4,2? 31,5 vähem kui 42,7? 85,6 vähem kui 256?

344. Kaup müüdi 12%-lise juurdehindlusega 8 rbl. 96 kop. eest. Leida kauba omahind.

345. Tööline valmistas vahetuses 42 detaili, millega ta ületas vahetuse normi 20% võrra. Leida vahetuse norm.

346. Kast koos kaubaga kaalub 54,7 kg (brutokaal). Kasti kaal (taarakaal) on brutokaalust 9,4%. Leida kauba kaal (netokaal).

347. Pärast seda, kui kombain oli varustatud lisaseadmega aganate ja üle sõela kukkuvate terade kogumiseks, saadi keskmiselt igalt hektarilt täiendavalt 120 kg teri. Arvutada, mitu tsentnerit teri saadi hektarilt enne ja pärast lisaseadme kasutamist, kui lisaseadmega saadi 4 hektarilt niisama palju teri kui enne 4,24 hektarilt.

Mitu protsenti kogutud viljast moodustas kadu ilma lisaseadmeta töötamisel?

348. Kolhoosil on teatav hulk püriidiräbu, millest peab jätkuma ühe põllutüki väetamiseks arvestusega 4 ts räbu hektari kohta. Arvutada, kui palju püriidiräbu on kolhoosil ja kui suur maatükk kavatsetakse väetada, teades, et kui iga hektari kohta külvata 5 ts räbu, siis jätkuks olemasolevast väetise hulgast 1 ha võrra vähema põllutüki väetamiseks.

Mitu kilogrammi taimede poolt omastatavat vaske satub selle püriidi hulgaga põllule, kui püriit sisaldab vaske 0,5%?

349. Üks metallitükk kaalub 119 g ja teine 87 g, kusjuures esimese ruumala on 15 cm^3 võrra vähem teise ruumalast. Leida kummagi metalli erikaal, kui esimese erikaal on $5\frac{g}{cm^3}$ võrra suurem kui teisel.

350. Segati 8 g üht vedelikku ja 18 g teist ning saadi segu erikaaluga $0{,}65\frac{g}{cm^3}$. Leida kummagi vedeliku erikaal, kui esimese erikaal on teise erikaalust $0{,}2\frac{g}{cm^3}$ võrra suurem.

351. 50 g soolalahusele lisati 5 g puhast soola, mille tulemusena saadi 18,2%-line soolalahus. Mitme protsendiline oli esialgne soolalahus?

352. 30%-lise ja 40%-lise happe segamisel saadi 11 kg 35%-list hapet. Mitu kilogrammi võeti kumbagi hapet?

353. Rong pidi semafori all peatuma 6 minutit. Et mitte hilineda, sõitis ta 20 km pikkusel vahemaal 10 km tunnis rohkem kui oli sõiduplaanis ette nähtud. Leida rongi kiirus sellel vahemaal sõiduplaani järgi.

354. Orienteerumisvõistlustel väljusid kaks võistlejat samaaegselt ühest ja samast kohast, — üks põhja suunas kiirusega $4\frac{km}{h}$ ja teine ida suunas kiirusega $3{,}5\frac{km}{h}$. Kui kaugel olid võistlejad teineteisest 1 tunni ja 20 min. pärast?

355. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile ehitatud kõrgus on 9,5 cm; kaatetite projektsioonide vahe on 5,4 cm. Leida selle kolmnurga kõik küljed ja pindala.

356. Ühest punktist on tõmmatud ringjoonele puutuja ja lõikaja, kusjuures lõikaja väline lõik on 9 cm võrra lühem puutujast. Leida lõikaja ja puutuja pikkus, kui nende summa on 84 cm.

357. Täiskoormusega liikumisel on ühe auto maksimaalne kiirus $5\frac{km}{h}$ võrra suurem kui teisel. Leida kummagi auto maksimaalne sõidukiirus, kui esimesel kulub 17,5 km läbimiseks 3 min. rohkem kui teisel 13 km läbimiseks.

358. Kombain CK-3 koristab igas tunnis 0,2 ha võrra suurema põllu kui kombain C-4M. Arvutada, mitu hektarit koristab kumbki kombain tunnis, teades, et kombainil CK-3 kulub 6 ha koristamiseks 1 tund vähem aega kui kombainil C-4M 7,2 ha koristamiseks.

IV PEATÜKK

TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE

§ 32. KORDAMINE.

1. Rööpkülik. Romb.

359. Mis on rööpkülik?

360. Nimetada rööpküliku vastaskülgede ja vastasnurkade omadused.

361. Mis on rööpküliku diagonaal?

362. Nimetada rööpküliku diagonaalide omadused.

363. Kuidas leitakse rööpküliku pindala?

364. Rööpküliku üks nurk on 112°. Kui suured on teised nurgad?

365. Rööpküliku diagonaalide summa on 125 cm ning diagonaalid suhtuvad nagu $2\frac{1}{3} : 3{,}5$. Leida diagonaalid (*50 cm* ja *75 cm.*)

366. Mis on romb?

367. Nimetada rombi diagonaalide omadused.

368. Kuidas avaldub rombi pindala diagonaalide kaudu?

369. Kuidas avaldub rombi pindala aluse ja kõrguse kaudu?

370. Rombi pindala on 6 dm^2 ja üks diagonaal 40 cm. Kui suur on teine diagonaal? (*30 cm.*)

371. Rombikujulise maisipõllu pindala on 16 ha ja ümbermõõt 3,2 km. Leida põllu vastasservade kaugus teineteisest. (*0,2 km.*)

3. Ristkülik. Ruut.

372. Mis on ristkülik?

373. Nimetada ristküliku diagonaalide omadused.

374. Kuidas arvutatakse ristküliku pindala?

375. Nurk ristküliku diagonaalide vahel on 64°. Leida nurgad ristküliku diagonaali ja külgede vahel. (*32°*; *58°*.)

376. Ristküliku diagonaal moodustab ristküliku pikema küljega nurga 38°. Kui suured on nurgad diagonaalide vahel? (*76°*; *104°*.)

377. Ristkülikukujulise põllu pindala on 28,8 ha. Põllu laius on 80% tema pikkusest. Leida põllu ümbermõõt. (*2,16 km.*)

378. Ristküliku ümbermõõt on 840 m. Laius on 75% pikkusest. Kui suur on ristküliku pindala? (*4,32 ha.*)

379. Mis on ruut?

380. Nimetada ruudu diagonaalide omadused.

381. Ruudukujulise mänguplatsi pindala on 1,44 aari. Leida platsi külje pikkus. (*12 m.*)

382. Ruudu diagonaali pikkus on 5,6 m. Leida ruudu pindala ja külje pikkus. (*15,68 m²* ja *3,96 m.*)

383. Ruudu pindala on 72 m². Leida pindalalt kaks korda suurema ruudu külg. (*12 m.*)

3. Kolmnurk.

384. Kuidas liigitatakse kolmnurki nurkade järgi? Külgede järgi?

385. Kui suur on kolmnurga sisenurkade summa?

386. Kuidas nimetatakse täisnurkse kolmnurga külgi, millede vaheline nurk on täisnurk? Kuidas nimetatakse täisnurga vastaskülge?

387. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

388. Leida täisnurkse kolmnurga teine teravnurk, kui üks teravnurk on 47°; 15°; 18°30′; 37°12′.

389. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurkadest on 18° võrra suurem teisest. Leida selle kolmnurga kõik nurgad. (*36°*; *54°*; *90°*.)

390. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurkadest on 60% täisnurgast. Kui suur on teine teravnurk? (*36°*.)

391. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 80% teisest teravnurgast. Leida selle kolmnurga teravnurgad. (*50°*; *40°*.)

392. Kuidas avaldub täisnurkse kolmnurga pindala kaatetite kaudu?

393. Leida täisnurkse kolmnurga pindala, kui tema kaatetid on 4,8 dm ja 35 cm.

394. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 56 cm. Kui suur on teine kaatet, kui kolmnurga pindala on 11,2 dm^2? (*40 cm.*)

395. Leida täisnurkse kolmnurga pindala, kui kaatetite summa on 34 cm ja vahe 14 cm. (*120 cm^2.*)

396. Mis on kolmnurga küljepoolitaja ehk mediaan?

397. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi mediaan võrdub poole hüpotenuusiga.

Näpunäide. Täiendada kolmnurk ristkülikuks.

398. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi mediaan on 5,25 dm. Kui pikk on hüpotenuus?

399. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 40 cm, kaatetite summa 23 cm. Kui pikk on hüpotenuusi mediaan? (*8,5 cm.*)

400. Tõestada, et hüpotenuusi mediaan jaotab kolmnurga kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks.

401. Täisnurkse kolmnurga nurk on 35°. Kui suured nurgad moodustab hüpotenuusi mediaan hüpotenuusiga? (*70°* ja *110°*.)

402. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 24 cm ja 30 cm. Kui suured on nende kolmnurkade pindalad, milleks hüpotenuusi mediaan tükeldab antud kolmnurga? (*180 cm^2; 180 cm^2.*)

403. Võrdhaarse kolmnurga üks nurkadest on 126°. Kui suured on ülejäänud nurgad? (*27°* ja *27°*.)

404. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 58 cm. Sirglõik, mis ühendab aluse ja haara keskpunkte, on 10 cm. Leida selle kolmnurga küljed. (*20* cm; *20* cm; *18* cm.)

405. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga ja tipunurga summa on 138°. Leida selle kolmnurga nurgad. (*42°; 42°; 96°*)

406. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 4,2 dm^2, alus 42 cm. Leida kolmnurga kõrgus. (*2 dm.*)

407. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 143 cm^2 ja haarale tõmmatud kõrgus 22 cm. Kui pikk on haar? (*13 cm.*)

408. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 88 cm ja alus 75% haarast. Leida haara pikkus. (*32 cm.*)

409. Mis on kolmnurga kesklõik? Mis omadus on kolmnurga kesklõigul?

410. Kolmnurga ümbermõõt on 32 cm. Leida selle kolmnurga kesklõikudest moodustatud kolmnurga ümbermõõt.

4. Trapets.

411. Mis on trapets?

412. Kuidas nimetatakse trapetsi paralleelseid külgi? Mitteparalleelseid külgi?

413. Mis on trapetsi kesklõik? Mis omadus on trapetsi kesklõigul?

414. Trapetsi alused on 4,6 dm ja 24 cm. Leida trapetsi kesklõik.

415. Kuidas leitakse trapetsi pindala?

416. Leida trapetsi pindala, kui alused on 6,2 cm ja 3,8 cm ning kõrgus on 36% kesklõigust.

5. Võrdeline sõltuvus. Võrre.

417. Missuguseid suurusi nimetatakse võrdelisteks suurusteks? Tuua näiteid.

418. Missugused alljärgnevaist võrdustest esitavad võrdelist sõltuvust? Miks?

$$a=2b;\ \frac{x}{y}=7{,}5;\ 2a=\frac{5b}{2};\ \frac{3m}{2n}=5n$$

419. Mis on võrre? Sõnastada võrde põhiomadus.

420. Leida x:

$$\frac{3}{7}=\frac{4}{x};\ \frac{x}{8}=\frac{2}{9};\ \frac{3x}{2}=\frac{5}{6};\ \frac{3x-3}{7}=\frac{4}{5};$$

$$\frac{12{,}4}{x-3}=\frac{1{,}5}{x};\ \frac{4x+7}{3}=\frac{2x-4}{5}$$

§ 33. VÕRDELISED LÕIGUD.

1. Lõikude suhe. Kahe lõigu suhe on nende lõikude pikkuste mõõtarvude suhe, kusjuures mõlema lõigu pikkused on mõõdetud ühe ning sama ühikuga.

Näited. 1) Kui $AB=5$ cm ja $CD=3$ cm, siis on nende lõikude suhe

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}$$

2) Kui $KL=3$ dm ja $MN=1$ m, siis suhteks saame:

$$\frac{KL}{MN}=\frac{3}{10}$$

Lõikude suhe ei sõltu ühikust, millega mõlemad lõigud on mõõdetud. Tõepoolest, kui viimases näites mõõta pikkusi näiteks sentimeetrites, saame $KL=30$ cm ja $MN=100$ cm ning lõikude suhteks endise väärtuse:

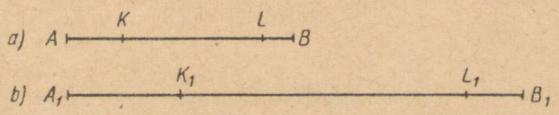
$$\frac{KL}{MN}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$$

421. Leida alljärgnevate lõikude suhted:
1) 3 cm ja 4 cm; 2) 5 m ja 4 m; 3) 5,7 dm ja 60 cm; 4) 3,2 mm ja 8 cm; 5) $12\frac{1}{3}$ m ja 33 dm; 6) $\frac{5}{6}$ cm ja $\frac{4}{5}$ cm

2. Võrdelised lõigud. Kujutagu joonisel 74,a antud sirglõik AB kummipaela, millele on märgitud lõigud AK, KL ja LB. Venitame seda kummipaela näiteks kaks korda pikemaks. Venitatud kummipaela kujutab joonisel 74, b lõik A_1B_1, millel punkt A on saanud asendi A_1, K asendi K_1, L asendi L_1 ja B asendi B_1. Sel puhul öeldakse, et lõigule AK v a s t a b lõik A_1K_1, või lõigud AK ja A_1K_1 on v a s t a v a d lõigud. Samuti on vastavad lõigud veel KL ja K_1L_1, LB ja L_1B_1, AL ja A_1L_1, KB ja K_1B_1, AB ja A_1B_1. Kummipaela AB sellisel venitamisel suureneb selle paela iga lõik kaks korda. Seega siis

$$\frac{A_1K_1}{AK}=\frac{K_1L_1}{KL}=\frac{L_1B_1}{LB}=\frac{A_1B_1}{AB}=2,$$

nii et joonisel 74 on kujutatud rida lõike, kusjuures vastavate lõikude suhe on jääv.



Joon. 74

Lõike nimetatakse võrdelisteks, kui vastavate lõikude suhe on jääv. Jäävat suhet nimetatakse võrdeteguriks.

Vähim lõikude arv, mille korral saab kõnelda lõikude võrdelisusest, on neli. Lõikude võrdelisuse selgitamiseks tuleb võrrelda vastavate lõikude suhteid. Vähim suhete arv, mida saab võrrelda, on ilmselt kaks; järelikult lõike peab olema vähemalt neli.

422. Järgnevas lõikude hulgas on vastavad lõigud tähistatud ühe ning sama tähega (erinevate indeksitega): $a=15$ dm; $a_1=20$ dm; $b=3$ m; $b_1=4$ m; $c=12$ cm; $c_1=16$ cm; $d=2{,}4$ dm; $d_1=32$ cm; $k=50$ cm; $k_1=150$ cm; $l=2$ mm; $l_1=6$ mm. Missugused lõigud selles lõikude hulgas on võrdelised? Kui suur on võrdetegur?

423. On antud kaks kolmnurka, üks külgedega $a=3$ cm; $b=2$ cm ja $c=4$ cm, teine kolmnurk vastavate külgedega $a_1=4{,}5$ cm; $b_1=3$ cm ja $c_1=5$ cm. Kas nende kolmnurkade küljed on võrdelised? (On kaks paari võrdelisi külgi.)

424. Suurema kolmnurga küljed on 28,8 cm; 32,4 cm ja 360 mm. Leida vähema kolmnurga küljed, kui nad on võrdelised suurema kolmnurga külgedega ja kui võrdetegur on 1,8.

Näpunäide. Tähistades vähema kolmnurga küljed tähtedega x, y ja z, saame võrdsete suhete rea:

$$\frac{28{,}8}{x}=\frac{32{,}4}{y}=\frac{36}{z}=1{,}8,$$

millest saab leida otsitavad küljed.

425. On antud kaks võrdeliste külgedega kolmnurka. Ühe küljed on $5\frac{1}{3}$ m, $9\frac{1}{3}$ m ja $11\frac{2}{3}$ m. Leida teise kolmnurga küljed, teades, et suurim neist on $2\frac{1}{3}$ m. ($1\frac{1}{15}$ m, $1\frac{13}{15}$ m, $2\frac{1}{3}$ m.)

426. Ühe kolmnurga küljed on 43,2 cm; 0,35 m ja 25,2 cm. Teise kolmnurga küljed on võrdelised esimese kolmnurga külgedega ja tema pikim külg on 1 dm. Leida teise kolmnurga ümbermõõt.

§ 34. KIIRTETEOREEM.

Olgu antud kaks ühest punktist O lähtuvat kiirt s ja t (joon. 75). Lõikame neid kiiri kahe paralleelse sirgega u ja v. Sel juhtumil tekib antud kiirtel (ehk nurga haaradel) rida lõike: kiirtel s tekivad lõigud OA, OB ja AB, kiirel t tekivad v a s t a v a d lõigud OC, OD ja CD. Nurga haaradel tekkinud lõikude kohta kehtib järgmine teoreem (nn. kiirteteoreem):

kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis tekivad nurga haaradel võrdelised lõigud.

Teoreemi tõestamiseks tuleb lõikude võrdelisuse definitsiooni

kohaselt näidata, et nurga haaradel tekkinud vastavate lõikude suhted on võrdsed. Tõestame, et

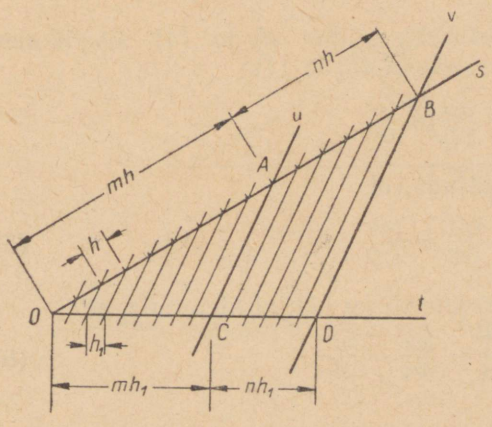
$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

Esiteks tõestame, et

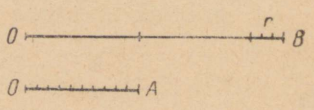
$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \qquad (1)$$

Oletame, et lõiku pikkusega h saab lõigule OA paigutada jäägita järjestikku m korda ja lõigule AB n korda[1] (joonisel 75 on $m=9$ ja $n=6$). Lõigu OA pikkus on siis mh, lõigu AB pikkus on nh ning lõigu OB pikkus $(m+n)h$. Lõikude OB ja OA suhe on

$$\frac{OB}{OA} = \frac{(m+n)h}{mh} = \frac{m+n}{m} \qquad (2)$$



Joon. 75



Joon. 75a

Joonestame lõikude OA ja AB tekkinud jaotuspunktidest paralleelid sirgetele u ja v. Nurga teisel haaral olevad lõigud OC ja

[1] Sellise kolmanda lõigu (eeldusel, et see lõik on olemas), mis mahub kahele antud lõigule mingi täisarv korda, saab alati leida kuitahes suure täpsusega. Näiteks kui on antud kaks lõiku OB ja OA (joon. 75a), siis proovime, mitu korda paigutub vähem lõik suuremale lõigule. Kui OA läheb lõigule OB täisarv korda, ilma jäägita, siis OA ise ongi otsitav lõik. Kui aga OA sellisel järjestikusel paigutamisel tekib jääk r, siis jaotame lõigu OA kümneks võrdseks osaks ja proovime, mitu korda mahub lõik OA : 10 lõigusse OB. Kui mahub täisarv korda, siis ongi otsitavaks lõiguks OA : 10; kui ei, siis esitab lõik OA : 10 otsitavat lõiku ligikaudselt. Täpsema tulemuse saamiseks jaotame lõigu OA sajaks võrdseks osaks ja proovime lõigu OA : 100 sobivust jne. Jätkates mõttes lõigu OA järkjärgulist jaotamist, võime vajaliku lõigu leida kuitahes suure täpsusega.

OD jaotuvad siis ka võrdseiks osadeks, nagu see järeldub trapetsi ja kolmnurga kesklõigu omadustest. (Kui trapetsit lõigata alustega paralleelse sirgega, mis poolitab trapetsi ühe haara, siis see sirge poolitab ka trapetsi teise haara. Kui kolmnurka lõigata ühe küljega paralleelse sirgega, mis poolitab kolmnurga teise külje, siis see sirge poolitab ka kolmnurga kolmanda külje.) Olgu haaral t tekkinud lõigud pikkusega h_1, mis mahub lõigule OC m korda ja lõigule CD n korda. Lõigu OC pikkus on siis mh_1, lõigu CD pikkus nh_1 ja lõigu OD pikkus $(m+n)h_1$. Lõikude OD ja OC suhe on

$$\frac{OD}{OC} = \frac{(m+n)h_1}{mh_1} = \frac{m+n}{m}. \tag{3}$$

Võrdsustest (2) ja (3) järeldub, et

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} \tag{4}$$

Toetudes võrde põhiomadusele, võime võrde (4) siseliikmed (OA ja OD) vahetada; siis saamegi võrde (1):

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

Nüüd on jäänud veel tõestada, et

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \tag{5}$$

Selleks võime esitatud tõestuskäigu põhjal kirjutada, et

$$\frac{OA}{AB} = \frac{mh}{nh} = \frac{m}{n} \tag{6}$$

ja

$$\frac{OC}{CD} = \frac{mh_1}{nh_1} = \frac{m}{n}. \tag{7}$$

Võrdustest (6) ja (7) järeldub, et

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD},$$

millest võrde siseliikmete vahetamisel saamegi võrde (5):

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

Tõestatud võrretest (1) ja (5) järeldubki, et

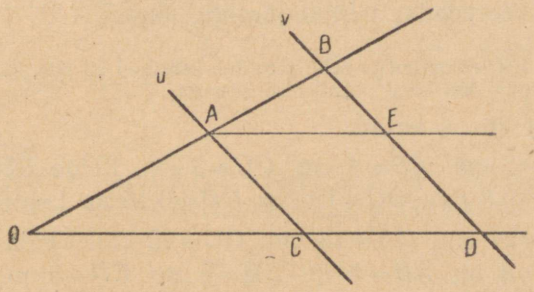
$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

Seega on kiirteteoreem tõestatud.

J ä r e l d u s. Kui nurga haarad lõigata paralleelsete sirgetega, siis tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

Joonisel 76 on nurga O haarad lõigatud kahe paralleelse sirgega u ja v. Sel teel tekib kaks kolmnurka OAC ja OBD, mille külgede võrdelisust ongi vaja järeldada. Selleks tuleb näidata, et kolmnurkade vastavate külgede suhted on võrdsed.

M ä r k u s. Kolmnurkade vastavaiks külgedeks on küljed, mis asetsevad võrdsete nurkade vastas. Seega on joonisel 76 olevate kolmnurkade vastavaiks külgedeks küljed OA ja OB, sest nad asetsevad võrdsete nurkade $\angle OCA = \angle ODB$ (miks?) vastas; samuti OC ja OD, sest nad asetsevad võrdsete nurkade $\angle OAC = \angle OBD$ (miks?) vastas ning AC ja BD, sest nad asetsevad ühe ja sama nurga O vastas.



Joon. 76

Järelduse õigsuse tõestamiseks tuleb seega näidata, et

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{BD}{AC}$$

Et kahe esimese suhte $\frac{OB}{OA}$ ja $\frac{OD}{OC}$ võrdsus ilmnes juba teoreemi tõestamisel (vt. võrre 4), siis jääb veel näidata, et suhe $\frac{BD}{AC}$ on võrdne ühega kahest esimesest. Tõestame, et

$$\frac{BD}{AC} = \frac{OB}{OA}$$

Tõmbame läbi punkti A sirge, mis on paralleelne haaraga OD. sel teel tekkinud nelinurk $AEDC$ on rööpkülik, sest tal on kaks paari paralleelseid vastaskülgi. Seetõttu on $AC = ED$. Nüüd vaatleme nurka OBD, mille haarad BD ja BO on lõgatud paralleelsete sirgetega AE ja OD. Kiirteteoreemi põhjal saame siis, et

$$\frac{BE}{BA} = \frac{ED}{AO}$$

ehk

$$\frac{BE}{BA} = \frac{AC}{AO} \tag{8}$$

ning

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BO} \tag{9}$$

Kõrvutades võrdeid (8) ja (9) järeldame, et

$$\frac{BD}{BO} = \frac{AC}{AO},$$

millest võrde siseliikmeid vahetades saamegi nõutava võrde:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BO}{AO}$$

Seega on teoreemist tehtud järeldus õige.

Märkus. Kiirteteoreem ja selle järeldus kehtivad ka siis, kui nurga haarasid lõigatakse enam kui kahe paralleelse sirgega.

427. Joonisel 76 on antud:

a) $OA = 6$ cm; $AB = 4$ cm; $OC = 8$ cm. Leida CD. (*5,34 cm*)

b) $OA = 0{,}8$ dm; $OC = 12$ cm; $CD = 0{,}15$ m. Leida AB.

c) $OC = 24$ cm; $OA = 18$ cm; $OC = 12$ cm. Leida OD ja CD.

d) $OA = 8$ m; $AB = 4$ m; $BD = 6$ m; $CD = 3$ m. Leida AC, AD ja AE.

e) $OD = 12\frac{3}{5}$ dm; $BD = 16\frac{1}{5}$ dm; $OC = 68$ cm; $OA = 0{,}4$ m. Leida OB, AC, AB ja CD.

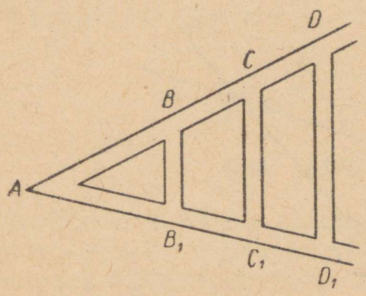
428. Kolmnurga küljed on 8,4 cm; 5,6 cm ja 4,5 cm. Kolmnurka lõikab sirge, mis on paralleelne pikima küljega ning eraldab 5,6 cm pikkusest küljest lõigu pikkusega 2 cm. Kui pikkadeks lõikudeks jaotub külg pikkusega 4,5 cm? (*1,61 cm* ja *2,89 cm*.)

429. Kolmnurgas, mille küljed on 4 cm, 6 cm ja 8 cm, on tõmmatud sirge paralleelselt lühima küljega nii, et tekkinud vähema kolmnurga kõige pikem külg on 3 cm. Arvutada vähema kolmnurga teiste külgede pikkused (*2,25 cm* ja *1,5 cm*.)

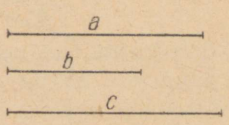
430. Trapetsi alused on 4 cm ja 8,2 cm, haarad 2,4 cm ja 3 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid? (*2,29 cm* ja *2,86 cm*.)

431. Kohast A lähtuvad tänavad AB ja AC, kusjuures $AB = 135$ m ja $AC = 120$ m. Tänava AB punktist M, mis asetseb punktist A 99 m kaugusel, tahetakse ehitada ühendustänav tänavaga AC nii, et see oleks paralleelne tänavaga BC. Kui kaugel punktist A lõikaks uus tänav tänavat AC?

432. Jaamast A väljuvad sirgjoonelised tänavad AD ja AD_1, mis on ühendatud paralleeltänavatega BB_1, CC_1 ja DD_1. Tänava AD pikkus on 1,08 km, tänava AD_1 osad on $AB_1=420$ m, $B_1C_1=280$ m ja $C_1D_1=240$ m. Leida AB, BC ja CD (joon. 77).



Joon. 77



Joon. 78

433. Joonisel 78 on antud kolm lõiku a, b ja c. Mõõta need lõigud ja arvutada sellise neljanda lõigu pikkus x, et

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$

§ 35. KIIRTETEOREEMI KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETES.

E e l m ä r k u s. Konstruktsioonülesande all mõeldakse sellist ülesannet, kus antud kujundite järgi tuleb joonestada (konstrueerida) otsitav kujund. Joonestamisvahenditena on lubatud kasutada ainult sirklit ja joonlauda.

Ülesandes 433 oli antud kolm lõiku a, b ja c. Pärast nende lõikude mõõtmist osutus võimalikuks a r v u t a d a sellise neljanda lõigu pikkust, et need neli lõiku oleksid võrdelised. Niisugust ülesannet nimetatakse n e l j a n d a v õ r d e l i s e leidmiseks.

Antud lõikude neljandat võrdelist on võimalik ka k o n s t r u e e r i d a, kasutades selleks kiirteteoreemi.

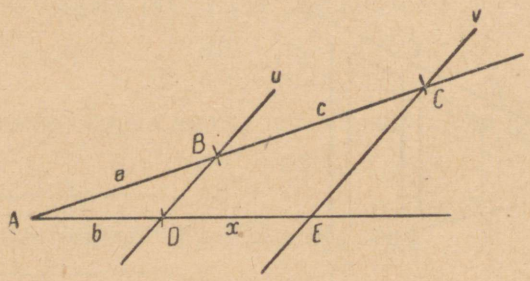
Konstrueerime joonisel 78 antud lõikude neljanda võrdelise x nii, et

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$

Selleks ehitame vabalt mingi nurga, mille tipp olgu A (joon. 79). Selle nurga ühele haarale kanname sirkli abil järjestikku lõigud a ja c, teisele haarale lõigu b: $AB=a$, $BC=c$, $AD=b$. Läbi punktide B ja D ehitame sirge u ja läbi punkti C

sirge $v \parallel u$. Sirge v lõikab nurga teist haara punktis E. Lõik DE ongi otsitav lõik x, sest kiirteteoreemi põhjal on nüüd

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$



Joon. 79

Lugeja võib mõõtmisega kontrollida, et $x = DE$ on niisama pikk, kui ülesandes 433 arvutatud neljas võrdeline.

Märkus. Esitatud konstruktsioonülesande lahendamine on lõigu $\frac{bc}{a}$ konstrueerimine võrde järgi:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \text{ kust } x = \frac{bc}{a}.$$

434. Joonisel 78 antud lõikude järgi konstrueerida neljas lõik x nii, et

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{x}.$$

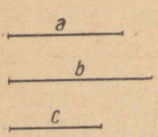
435. Joonisel 80 on antud kolm lõiku a, b ja c.

Konstrueerida: a) $\frac{ab}{c}$; b) $\frac{ac}{b}$; c) $\frac{bc}{a}$.

Näpunäide. Kui $x = \frac{ab}{c}$, siis

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c} \text{ ehk } \frac{a}{x} = \frac{c}{b}.$$

436. On antud kolm lõiku: $a = 1$ cm; $b = 2$ cm ja $c = 3$ cm. Konstrueerida nende lõikude neljas võrdeline x nii, et



Joon. 80

a) $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; b) $\frac{x}{b} = \frac{c}{a}$; c) $\frac{c}{x} = \frac{b}{a}$

Kontrollida konstruktsiooni täpsust arvutamise teel.

437. On antud kaks lõiku: $m=2$ cm ja $n=3$ cm.

Konstrueerida lõigud:

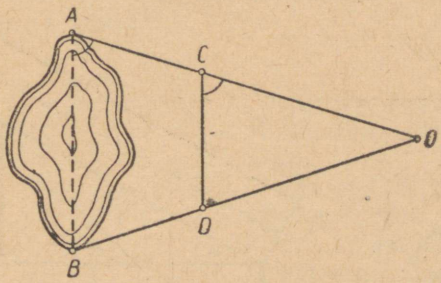
a) $\frac{m^2}{n}$; b) $\frac{n^2}{m}$

Näpunäide. Kui $x=\frac{m^2}{n}$, siis

$$\frac{x}{m}=\frac{m}{n}$$

§ 36. TERAVNURGA SIINUS.

1. Otsene ja kaudne mõõtmine. Igapäevases elus tuleb mitmesuguseid suurusi mõõta, nagu pikkused, pindala, ruumala, temperatuur jne. Mõõtmised võivad olla kas otsesed või kaudsed. Näiteks kaugushüppaja hüppe pikkust saab mõõta otseselt mõõdulindiga.



Joon. 81

Joonisel 81 on kujutatud järv. Selle läbimõõtu AB pole võimalik otseselt mõõta; küll saab seda aga mõõta kaudselt. Selleks valitakse mingi punkt O, mille kaugus punktidest A ja B on otseselt mõõdetav. Nurga AOB ühel haaral, näiteks AO, märgitakse vaia abil punkt C. Nüüd märgitakse maastikule sihiga AB paralleelne siht, mis läbib punkti C ning lõikab haara OB punktis D: $AB \parallel CD$. Lõik CD on otseselt mõõdetav. Teades lõikude OC, OA ja CD pikkusi, on lõigu AB pikkust kiirteteoreemi järelduse põhjal võimalik arvutada. (Kuidas?)

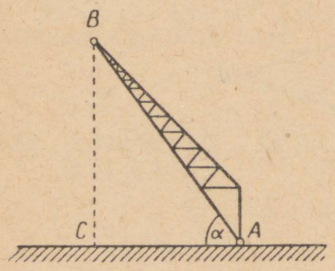
Suuruse kaudsel mõõtmisel mõõdetakse otseselt mitte otsitavat suurust, vaid teatavaid teisi suurusi ja nende kaudu arvutatakse otsitav suurus.

Joonisel 82 on skemaatiliselt kujutatud tõstekraana nool, mille pikkus AB olgu teada (näit. 15 m). Kuidas oleks võimalik

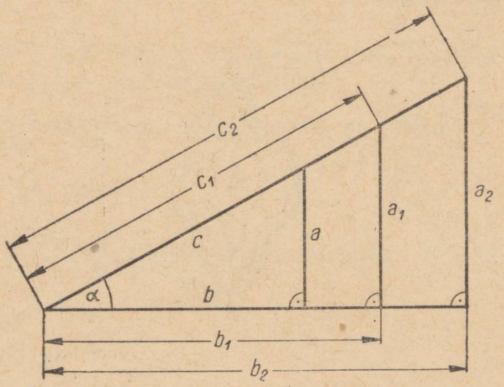
kaudselt mõõta nooleotsa kõrgust BC? On ilmne, et selle kõrgus sõltub nurgast α: kui α väheneb, siis kõrgus väheneb; kui α suureneb, siis kõrgus suureneb. Seega vaadeldava kõrguse määramiseks on vaja tunda seost nurga α, noole pikkuse ja noole otsa kõrguse vahel. Et $\triangle ABC$ on täisnurkne, siis taandub vaadeldav probleem täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi, teravnurga ja selle nurga vastaskaateti vahelise seose uurimisele, mille juurde järgnevalt asumegi. Alles pärast seda lahendame ka ülesande kraana noole otsa kõrgusest (vt. ülesanded 448 ja 449).

2. Teravnurga siinuse definitsioon. Vaatleme täisnurkseid kolmnurki, milledel on ühine teravnurk α (joon. 83). Kiirteteoreemi järelduse põhjal on kolmnurkade küljed võrdelised, s. t. vastavate külgede suhted on võrdsed. Käesolevas punktis vaatleme ainult nurga α vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet; seega võime kirjutada:

$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$$



Joon. 82



Joon. 83

Et kõigis antud teravnurgaga täisnurkseis kolmnurkades on selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe jääv, siis võib seda suhet antud teravnurga korral arvutada mingi vabalt valitud külgedega (kuid antud teravnurgaga) täisnurkse kolmnurga kaudu (sest kõigil teistel sama teravnurgaga täisnurkseil kolmnurkadel on see suhe seesama). Leiamegi mõõtmise abiga mõnede teravnurkade, näiteks 35°, 50° ja 70° vastaskaateti ja hüpotenuusi suhted. Vastavad kolmnurgad on kujutatud joonisel 84: $\triangle ABC$ teravnurgaga $\alpha=35°$; $\triangle AB_1C_1$ teravnurgaga $\alpha_1=50°$ ja kolmnurk AB_2C_2 teravnurgaga $\alpha_2=70°$. Töö lihtsustamiseks on nende kolmnurkade hüpotenuusid võrdsed (5 cm). Mõõtmisel selgub, et α vastaskaatet $BC=2{,}9$ cm; α_1 vastaskaatet $B_1C_1=3{,}8$ cm ja α_2

vastaskaatet $B_2C_2 = 4{,}7$ cm. Arvutades iga kord teravnurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhted, saame:

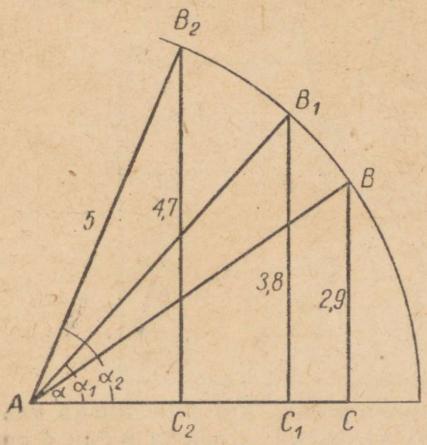
nurgale $\alpha = 35°$ vastab suhe $\frac{2{,}9}{5} = 0{,}58$

„ $\alpha_1 = 50°$ „ „ $\frac{3{,}8}{5} = 0{,}76$

„ $\alpha_2 = 70°$ „ „ $\frac{4{,}7}{5} = 0{,}94$

Siit näeme, et kui täisnurkse kolmnurga teravnurk muutub, siis muutub ka selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe; teisiti öeldes: täisnurkse kolmnurga teravnurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe sõltub selle teravnurga suurusest nii, et teravnurga igale väärtusele vastab selle suhte üks kindel väärtus. Seega **täisnurkses kolmnurgas teravnurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe on selle teravnurga funktsioon** (vt. § 3 p. 3). Seda funktsiooni nimetatakse teravnurga **siinuseks.** Seega:

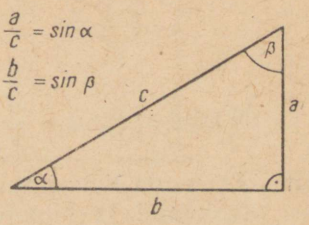
teravnurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse selle teravnurga siinuseks.



Joon. 84

Nurga α siinust tähistatakse sümboliga $\sin\alpha$ (loe: siinus alfa).

Kasutades joonisel 85 antud tähistust (ka edaspidi peame kinni samast tähistusest), võime teravnurga siinuse definitsiooni kirjutada sümbolite abil:



Joon. 85

$$\boxed{\frac{a}{c} = \sin\alpha} \qquad \boxed{\frac{b}{c} = \sin\beta}$$

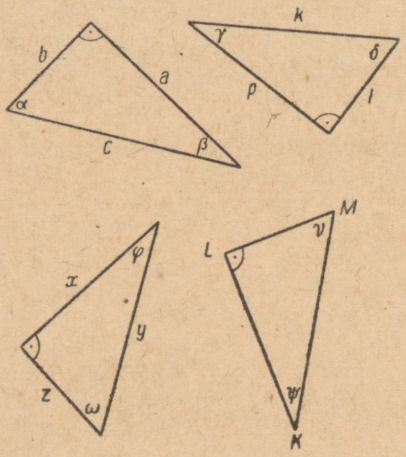
Joonise 84 põhjal võime nüüd kirjutada:

$$\sin 35° \approx \frac{2{,}9}{5} = 0{,}58$$

$$\sin 50° \approx \frac{3{,}8}{5} = 0{,}76$$

$$\sin 70° \approx \frac{4{,}7}{5} = 0{,}94$$

438. Joonisel 86 on antud rida täisnurkseid kolmnurki. Avaldada nendest kolmnurkadest: $\sin\alpha$; $\sin\beta$; $\sin\gamma$; $\sin\delta$; $\sin\varphi$; $\sin\omega$; $\sin\nu$; $\sin\psi$.[1]



Joon. 86

Näide. $\sin\omega = \frac{x}{y}$

439. Arvutada lükati abil teravnurga siinus, kui selle nurga vastaskaatet ja hüpotenuus on vastavalt: 5 cm ja 8 cm; 4 cm ja 5 cm; 12,3 m ja 15,6 m; 25,7 m ja 326 dm; 156 mm ja 27 cm.

440. Joonestada täisnurksed kolmnurgad teravnurgaga
a) 30°; b) 45°; c) 50°; d) 70°.
Mõõta jooniselt vajalikud lõigud ja arvutada $\sin 30°$, $\sin 60°$, $\sin 45°$, $\sin 50°$, $\sin 40°$, $\sin 70°$, $\sin 20°$.

[1] φ, ω, ν, ψ — kreeka aifabeedi tähed; loe vastavalt: fii, oomega, nüü, psii.

Selleks et teravnurga siinust kasutada ülesannete lahendamisel, on vaja osata leida selle funktsiooni väärtusi. Üheks võimaluseks on nende väärtuste leidmine graafikult.

§ 37. TERAVNURGA SIINUSE GRAAFIK.

Siinuse graafiku ehitamiseks koostame siinuse väärtuste tabeli argumendi (teravnurga) väärtustel 10°, 20°, 30°, ..., 70°, 80°. Selleks tuleb ehitada täisnurksed kolmnurgad teravnurgaga 10°, 20°, ..., 80°, mõõta nendes kolmnurkades antud nurga vastaskaatet ja hüpotenuus ja arvutada nende suhe; see ongi siinuse vastavaks väärtuseks. Arvutuse lihtsustamiseks võtame kõigile kolmnurkadele võrdse hüpotenuusi 10 cm. Vajalikud kolmnurgad on kujutatud joonisel 87, kus $\angle B_1AC_1=10°$; $\angle B_2AC_2=20°$; ...; $\angle B_8AC_8=80°$. Nii saame:

$$\sin 10°=\frac{B_1C_1}{AB_1}$$

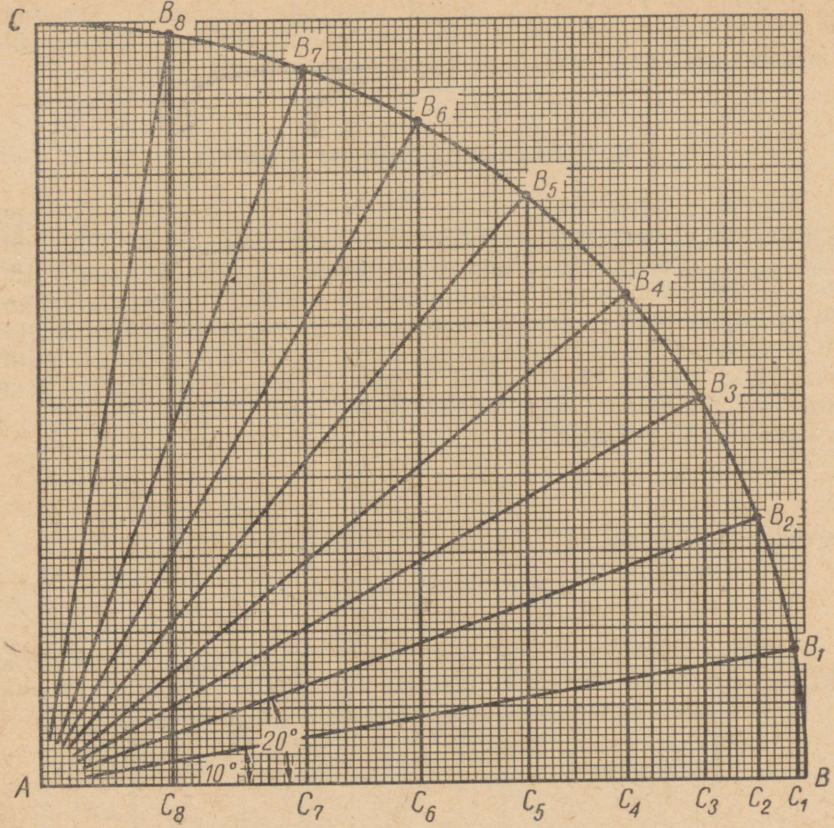
Jooniselt mõõdame, et $B_1C_1=1{,}7$ cm ja seega

$$\sin 10°=\frac{1{,}7}{10}=0{,}17.$$

Sellise arvutuse teeme ka järgmiste kolmnurkade AB_2C_2; AB_3C_3; ...; AB_8C_8 korral. Tulemused on esitatud järgmises tabelis.

Kolmnurk	Teravnurk α	Nurga vastaskaatet (cm)	Hüpotenuus (cm)	$\sin\alpha$
AB_1C_1	10°	1,7	10	0,17
AB_2C_2	20°	3,4	10	0,34
AB_3C_3	30°	5,0	10	0,50
AB_4C_4	40°	6,4	10	0,64
AB_5C_5	50°	7,7	10	0,77
AB_6C_6	60°	8,7	10	0,87
AB_7C_7	70°	9,4	10	0,94
AB_8C_8	80°	9,8	10	0,98

Enne graafiku ehitamist paneme veel tähele järgmist (joon. 87): Kujutleme, et joonisel olev punkt B_1 hakkab liikuma mööda ringjoone kaart, lähenedes punktile B. Kolmnurga AB_1C_1 teravnurga B_1AC_1 suurus hakkab siis vähenema, lähenedes nullile, samuti hakkab vähenema selle nurga vastaskaateti B_1C_1 pikkus, lähenedes samuti nullile. Hüpotenuus jääb aga muutumatuks. Seega hakkab ka nurga siinus vähenema, lähenedes nullile, sest kui murru lugeja (B_1C_1) läheneb nullile, aga nimetaja (hüpotenuus) ei muutu,



Joon. 87

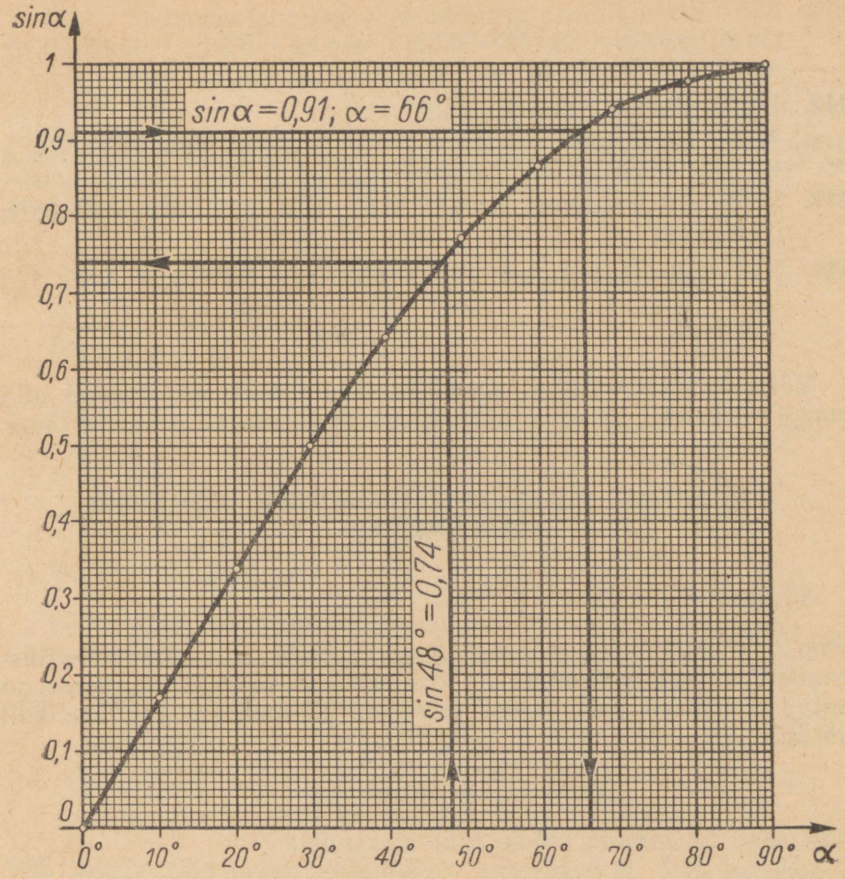
siis murru väärtus läheneb nullile. Seepärast loetakse sin 0° võrdseks nulliga:

$$\sin 0° = 0.$$

Kujutleme, et punkt B_8 liigub mööda ringjoone kaart lähenedes punktile C. Kolmnurga AB_8C_8 teravnurga B_8AC_8 suurus hakkab siis suurenema, lähenedes 90°-le. Selle nurga vastaskaateti pikkus hakkab ka suurenema, lähenedes hüpotenuusi pikkusele. Vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe, s. o. teravnurga siinuse väärtus läheneb siis ühele. Seepärast loetakse sin 90° võrdseks ühega:

$$\sin 90° = 1.$$

Nüüd ehitame nurga siinuse graafiku, kandes abstsissteljele argumendi (nurga) väärtused mõõtkavas 1 cm $\triangleq$ 10° ja ordinaatteljele funktsiooni ($\sin \alpha$) väärtused mõõtkavas 10 cm $\triangleq$ 1 (joon. 88).



Joon. 88

Nurga siinuse graafikuks on kõver, mida nimetatakse s i n u s o i d i k s.

Saadud graafiku abil, nii nagu iga funktsiooni graafiku abil, on võimalik lahendada kaht liiki ülesandeid: leida argumendi (nurga) väärtuse järgi funktsiooni (siinuse) väärtusi ja ümberpöördult: funktsiooni (siinuse) väärtuste järgi argumendi (nurga) väärtusi.

N ä i d e. Kui $\alpha = 48°$, siis leiame graafikult, et $\sin \alpha = 0{,}74$. Kui $\sin \alpha = 0{,}91$, siis leiame graafikult, et $\alpha = 66°$.

Graafikult selgub, et kui nurk kasvab 0°-st kuni 90°-ni, siis nurga siinus kasvab nullist üheni.

441. Kontrollida siinuse graafiku abil järgmisi võrdusi:
$\sin 25° = 0{,}42$; $\sin 56° = 0{,}83$; $\sin 32° = 0{,}53$; $\sin 6° = 0{,}10$; $\sin 22° = 0{,}37$; $\sin 53° = 0{,}80$.

442. Leida siinuse graafiku abil:
$\sin 8°$; $\sin 12°$; $\sin 19°$; $\sin 35°$; $\sin 67°$; $\sin 52°$; $\sin 11°$; $\sin 37°$; $\sin 29°$; $\sin 50°$; $\sin 60°$; $\sin 85°$.

443. Leida x, kui $\sin x = 0{,}81$; 0,32; 0,45; 0,60; 0,72; 0,12; 0,07; 0,09; 0,12; 0,61.

444. Kas võib teravnurga siinus olla 0,81; 1,02; 1,52; 0,19; $1\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $2\frac{2}{3}$?

Välja kirjutada antud arvudest need arvud, mis võivad olla nurga siinusteks, ja leida nendele vastavad nurgad graafiku järgi.

§ 38. SIINUSE KASUTAMINE TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMISEL.

Võrdus $\frac{a}{c} = \sin \alpha$

seob omavahel kolme suurust: teravnurka α, selle nurga vastaskaatetit a ja hüpotenuusi c. Kui nendest kolmest suurusest on antud mistahes kaks suurust, siis saab kolmanda leida. Järelikult võrduse

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha$$

abil saab lahendada kolme liiki ülesandeid.

1. On antud a ja c. Leida α.

   Näide. $a = 5{,}6$ cm; $c = 8{,}7$ cm. Leida α.

   Lahendus.

   $$\frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{5{,}6}{8{,}7} \approx 0{,}64$$

   Graafikult leiame, et $\alpha = 40°$.

   Vastus. $\alpha = 40°$.

2. On antud c ja α. Leida a.

   Näide. $c = 16$ m; $\alpha = 48°$. Leida a.

   Lahendus.

   $$\frac{a}{c} = \sin \alpha.$$

Siit

$$a = c \sin \alpha;\ a = 16 \cdot \sin 48° = 16 \cdot 0{,}74 \approx 12 \text{ cm}$$

Vastus. $a = 12$ cm

Märkus. Ülesannete lahendamisel, kus kasutatakse nurga siinuse graafikult leitud väärtusi tuleb arvestada, et graafikult saab siinuse väärtuse leida vaid ligikaudselt, kahe tüvenumbriga, ja juhinduda ligikaudselt arvutamise reeglitest (§ 1, p. 6).

3. On antud a ja α. Leida c.

Näide. $a = 27{,}6$ m; $\alpha = 32°$. Leida c.

Lahendus.

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha.$$

Siit

$$c = \frac{a}{\sin \alpha};\ c = \frac{27{,}6}{\sin 32°} = \frac{27{,}6}{0{,}53} \approx 52 \text{ cm}$$

Vastus. $c = 52$ cm

Ülesanded, mille lahendamisel saab kasutada teravnurga siinust, taanduvad ikka ühele toodud kolmest juhtumist.

445. Joonisel 86 kujutatud kolmnurkadest avaldada:
1) kaatet b hüpotenuusi c ja $\sin \beta$ kaudu
2) kaatet l hüpotenuusi k ja $\sin \gamma$ kaudu
3) kaatet x hüpotenuusi y ja $\sin \omega$ kaudu
4) hüpotenuus KM kaateti LM ja $\sin \psi$ kaudu

446. Leida täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on vastavalt:
a) 12 cm ja 8 cm; b) 24 dm ja 20 dm; c) 56 cm ja 4,2 dm; d) 29 m ja 16 m; e) 16,7 dm ja 98 cm

447. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 18{,}2$ cm ja nurk $\alpha = 41°$. Leida selle nurga vastaskaatet.

448. Kraana noole pikkus $l = 15$ m (joon. 82). Noole tõusunurk horisontaalse maapinna suhtes on $\alpha = 70°$. Kui kõrgel on noole ots maapinnast? (*14 m*)

449. Kui pikk peab olema kraana nool, et noole tõusunurga $\alpha = 35°$ korral oleks noole ots maapinnast $h = 12$ m kõrgusel (joon. 82)? (*21 m*)

450. Võrdhaarse kolmnurga haar on 5 cm ja alusnurk 72°. Leida alusele joonestatud kõrgus. (*14* cm)

Näpunäide. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja jaotab selle kolmnurga kaheks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks.

451. Võrdhaarse kolmnurga üks nurkadest on 136°, haara pikkus on 12 cm. Kui pikk on kolmnurga alus? (*22 cm*)

452. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 32 cm. Haarade keskpunkte ühendav sirglõik on 6 cm ning alusnurk 68°. Leida kolmnurga kõrgus ja pindala. (*9,4 cm; 56 cm²*)

453. Maja seinale toetub 14,5 m pikkune redel, mis moodustab maapinnaga nurga 62°. Kui kõrgele ulatub redeli ülemine ots? (*13 m*)

454. Arvutada võrdhaarse kolmnurga haar, kui kõrgus on 7,5 m ja alusnurk $\alpha=64°$. (*8,3 m*)

455. Arvutada rombi külje pikkus, kui rombi kõrgus on 4,4 dm ja teravnurk 45°. (*6,2 dm*)

456. Arvutada rombi ümbermõõt, kui rombi kõrgus on 2,7 m ja nürinurk 118°. (*12 m*)

457. Leida trapetsi haarad, kui trapetsi kõrgus $h=2{,}5$ dm ja pikema aluse lähisnurgad on $\alpha=65°$ ja $\beta=52°$. (*2,8 dm; 3,2 dm*)

§ 39. TERAVNURGA KOOSINUS.

1. Ülesanne. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk $\alpha=20°$. Arvutada selle nurga lähiskaatet b, kui hüpotenuus $c=12$ cm (joon. 89).

Lahendus. Leiame teise teravnurga:

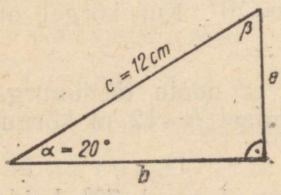
$$\beta=90°-\alpha=90°-20°=70°.$$

Nüüd saame kaateti b leidmiseks kasutada nurga β siinust:

$$\frac{b}{c}=\sin\beta,$$

millest

$$b=c\sin\beta=12\cdot\sin 70°=$$
$$=12\cdot 0{,}94\approx 11 \text{ cm}$$



Joon 89.

Vastus. $b\approx 11$ cm

Toodud ülesannet saab lahendada ka teist teravnurka leidmata. Selleks õpime tundma uut nurga funktsiooni.

2. **Teravnurga koosinuse definitsioon.** Eelmises paragrahvis (p. 2) selgus, et võrdse teravnurgaga täisnurksetes kolmnurkades on vastavate külgede suhted võrdsed (joon. 83). Seega on ka nurga α lähiskaateti ja hüpotenuusi suhe antud α korral jääv:

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}.$$

Kui muutub teravnurk, siis muutub ka selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhe, järelikult see suhe on teravnurga funktsioon. Seda funktsiooni nimetatakse teravnurga k o o s i n u s e k s. Seega

teravnurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse selle tervnurga koosinuseks.

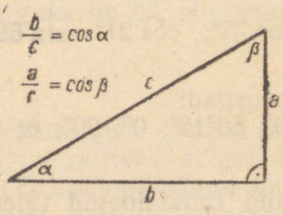
Kui teravnurk on α, siis selle nurga koosinuse sümboliks on $\cos\alpha$ (loe: koosinus alfa). Seega võime koosinuse definitsiooni väljendada sümbolites järgmiselt:

$$\boxed{\frac{b}{c} = \cos\alpha} \qquad \boxed{\frac{a}{c} = \cos\beta}$$ (joon. 90).

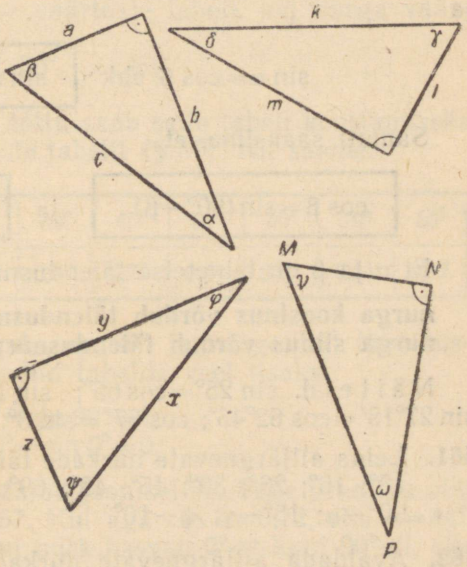
458. Joonisel 91 on antud rida täisnurkseid kolmnurki. Avaldada nendest kolmnurkadest:
$\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\delta$; $\cos\gamma$; $\cos\psi$; $\cos\varphi$; $\cos\nu$; $\cos\omega$.

N ä i d e. $\cos\omega = \frac{PN}{PM}$

459. Arvutada teravnurga koosinus, kui selle nurga lähiskaatet ja hüpotenuus on vastavalt:
3 cm ja 4 cm; 5 cm ja 8 cm; 37 dm ja 39 dm; 15,6 dm ja 179 cm; 3,2 m ja 49 dm; 53 mm ja 9,5 cm



Joon. 90.



Joon. 91.

460. Joonestada täisnurksed kolmnurgad teravnurgaga:
a) 25°; b) 30°; c) 60°; d) 55°; e) 80°.
Mõõta jooniselt vajalikud lõigud ja arvutada:
cos 25°; cos 30°; cos 60°; cos 55°; cos 80°; sin 65°; sin 30°; sin 35°; sin 10°.

3. Täiendusnurgad. Teame, et kolmnurga sisenurkade summa on 180°. Sellest järeldame, et täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa on 90°:

$$\alpha+\beta=90^\circ \text{ (joon. 90)}.$$

Kaht nurka, millede summa on 90°, nimetatakse teineteise täiendusnurkadeks (90°-ni).

Näiteks on teineteise täiendusnurgad: 15° ja 75°; 30° ja 60°; 40° ja 50°; 27° ja 63°; 10°17′ ja 79°43′.

Niisiis on täisnurkse kolmnurga teravnurgad teineteise täiendusnurgad.

Jooniselt 90 saame:

$$\frac{b}{c}=\cos\alpha; \qquad \frac{a}{c}=\cos\beta;$$

$$\frac{b}{c}=\sin\beta; \qquad \frac{a}{c}=\sin\alpha.$$

Siit järeldame, et

$$\cos\alpha=\sin\beta \text{ ehk } \boxed{\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)}$$

ja

$$\sin\alpha=\cos\beta \text{ ehk } \boxed{\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)}$$

Samuti saaksime, et

$$\boxed{\cos\beta=\sin(90^\circ-\beta)} \text{ ja } \boxed{\sin\beta=\cos(90^\circ-\beta)}$$

Et α ja β on teineteise täiendusnurgad, siis võime öelda:

nurga koosinus võrdub täiendusnurga siinusega ja vastupidi: nurga siinus võrdub täiendusnurga koosinusega.

N ä i t e i d. $\sin 25^\circ=\cos 65^\circ$; $\sin 15^\circ=\cos 75^\circ$; $\cos 21^\circ=\sin 69^\circ$; $\sin 27^\circ15'=\cos 62^\circ45'$; $\cos 87^\circ=\sin 3^\circ$.

461. Leida alljärgnevate nurkade täiendusnurgad:
13°; 16°; 23°; 30°; 45°; 49°; 69°; 32°30′; 56°12′; 0°; 90°; α; β; $90^\circ-\alpha$; $15^\circ-\gamma$; $\psi-10^\circ$.

462. Avaldada alljärgnevate nurkade antud funktsioonid täiendusnurkade funktsioonidena:

a) $\sin 77°$ d) $\sin 34°32'$
b) $\sin 61°$ e) $\cos 56°38'$
c) $\cos 32°$ f) $\cos 16°16'$

463. Leida alljärgnevad koosinused, kasutades selleks siinuse graafikut (joon. 88):

$\cos 25°$; $\cos 30°$; $\cos 43°$; $\cos 45°$; $\cos 52°$; $\cos 65°$.

N ä i d e. $\cos 48° = \sin 52° = 0{,}79$.

464. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

a) $\dfrac{\sin 40°}{\cos 50°} + \dfrac{\sin 70°}{\cos 20°}$

b) $\dfrac{\sin 47°20'}{\cos 42°40'} + \dfrac{\sin 15° \cos 46°}{\sin 44° \cos 75°}$

c) $\dfrac{\sin 35° \cos 78°}{\sin 12° \cos 55°}$

d) $\dfrac{3 \sin 20° \cos 80° \sin 45°}{2 \cos 45° \cos 70° \sin 10°}$

N ä p u n ä i d e. Leida avaldistes täiendusnurk ja asendada üks funktsioon teisega nii, et avaldisse jääks kahe funktsiooni asemele ainult üks funktsioon (kas siinus või koosinus).

§ 40. TERAVNURGA KOOSINUSE GRAAFIK.

Koostame esiteks koosinuse väärtuste tabeli, kui nurga väärtusteks on:

$$10°, 20°, 30°, \ldots, 80°.$$

Täiendusnurkade omaduse tõttu saab selle tabeli koostamiseks kasutada nende nurkade siinuste tabelit (§ 37). Nii saame:

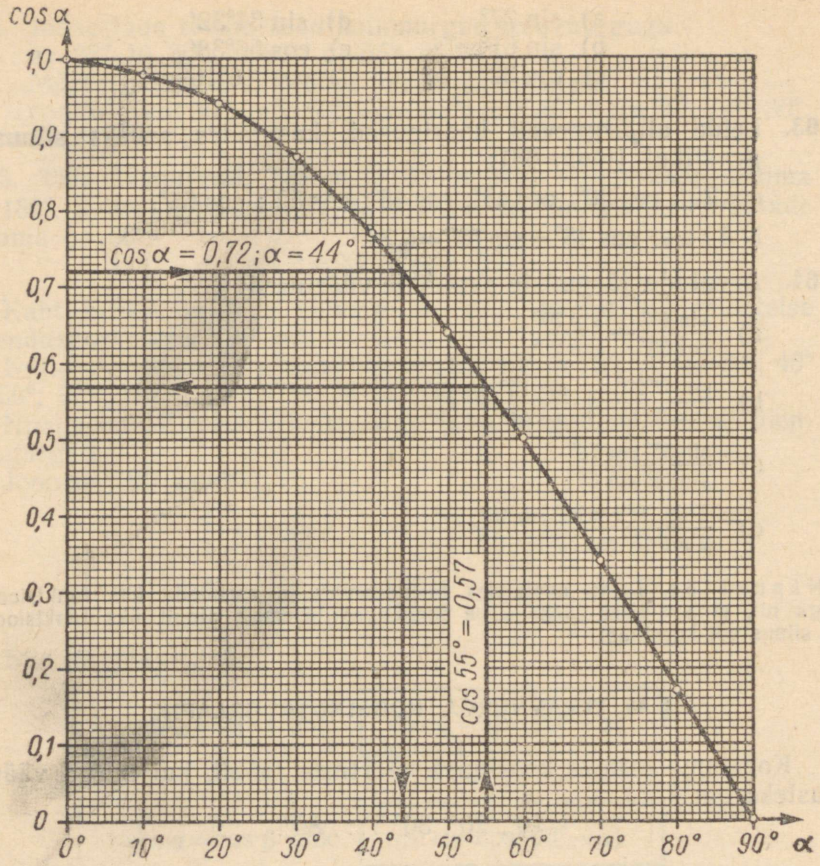
α	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17

Et nurga $0°$ täiendusnurgaks on $90°$ ja nurga $90°$ täiendusnurgaks on $0°$, siis saame toodud tabelile veel lisaks:

$$\cos 0° = \sin 90° = 1;$$
$$\cos 90° = \sin 0° = 0.$$

Koosinuse graafik on kujutatud joonisel 92. Selle graafiku abil leiame näiteks, et $\cos 55° = 0{,}57$. Kui aga $\cos\alpha = 0{,}72$, siis $\alpha = 44°$.

Graafikult näeme ka, et kui nurk kasvab $0°$-st kuni $90°$-ni, siis nurga koosinus väheneb ühest nullini.



Joon. 92

465. Leida graafiku abil:

a) cos 28°
b) cos 74°
c) cos 35°
d) cos 61°
e) cos 56°
f) cos 82°

466. Leida nurk α, kui

a) $\cos \alpha = 0{,}63$
b) $\cos \alpha = 0{,}8$
c) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$
d) $\cos \alpha = \frac{5}{8}$
e) $\cos \alpha = 0{,}91$
f) $\cos \alpha = 0{,}27$

467. Millised alltoodud arvudest võivad olla teravnurga koosinusteks?:

0,71; 0,82; 0,17; 1,07; 1,82; 2,53; 0,61.

Kirjutada siit välja need arvud, mis võivad olla teravnurga koosinusteks, ja leida nendele vastavad nurgad.

§ 41. KOOSINUSE KASUTAMINE TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMISEL.

Võrdus $\frac{b}{c} = \cos \alpha$

seob omavahel kolme suurust: teravnurka α, selle nurga lähiskaatetit b ja hüpotenuusi c. Kui neist suurustest mingid kaks on antud, siis kolmas suurus on leitav. Seega saab selle võrduse abil lahendada kolme liiki ülesandeid.

1. On antud b ja c. Leida α.

   Näide. $b = 12{,}8$ cm; $c = 15{,}2$ cm. Leida α.

   Lahendus.

   $$\frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{12{,}8}{15{,}2} \approx 0{,}84$$

   Koosinuse graafikult leiame, et $\alpha = 33°$.

   Vastus. $\alpha = 33°$.

2. On antud c ja α. Leida b.

   Näide. $c = 12$ cm; $\alpha = 20°$. Leida b (vt. § 38 p. 1).

   Lahendus.

   $$\frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad b = c \cdot \cos \alpha = 12 \cdot \cos 20°$$

   Graafikult leiame, et $\cos 20° = 0{,}94$. Seega

   $$b = 12 \cdot 0{,}94 = 11{,}3 \approx 11 \text{ cm}$$

   Vastus. $b \approx 11$ cm.

3. On antud b ja α. Leida c.

   Näide. $b = 27{,}8$ m; $\alpha = 56°$. Leida c.

   Lahendus.

   $$\frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad c = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{27{,}8}{\cos 56°} = \frac{27{,}8}{0{,}56} \approx 50 \text{ m}$$

   Vastus. $c \approx 50$ m.

468. Joonisel 91 kujutatud kolmnurkadest avaldada:

1) kaatet b hüpotenuusi c ja nurga α kaudu

2) hüpotenuus c kaateti a ja nurga β kaudu
3) hüpotenuus k kaateti m ja nurga δ kaudu
4) kaatet y hüpotenuusi x ja nurga φ kaudu
5) hüpotenuus MP kaateti MN ja nurga ν kaudu

469. Leida täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui ühe teravnurga lähiskaatet ja hüpotenuus on vastavalt:
1) 5,6 cm ja 7,4 cm; 2) 3,9 m ja 6,4 m; 3) 42 cm ja 5,6 dm; 4) 11,3 m ja 17,9 m

470. Täisnurkses kolmnurgas on antud:
a) $a=32{,}5$ m; $\beta=21°$. Leida c.
b) $c=137$ dm; $\alpha=68°$. Leida b.
c) $b=11{,}2$ m; $\alpha=14°$. Leida c.

471. Võrdhaarse kolmnurga haar $c=11{,}5$ cm ja alusnurk $\alpha=61°$. Kui pikk on alus? (*11 cm*)

472. Võrdhaarse trapetsi haar $c=8{,}2$ cm ja ta moodustab pikema alusega nurga 63°. Kui suur on pikem alus, kui lühem alus $b=4{,}7$ cm? (*12,1 cm*)

473. Võrdhaarse trapetsi haar $a=5{,}8$ dm ja ta moodustab pikema alusega $b=14{,}3$ dm nurga $\alpha=71°$. Kui pikk on lühem alus?

474. Koonuse moodustaja $m=8{,}4$ cm ja ta kaldenurk põhja suhtes $\alpha=59°$. Arvutada koonuse külgpindala. (*110 cm²*)

475. Arvutada võrdhaarse kolmnurga haar ja pindala, kui kolmnurga kõrgus $h=4{,}4$ dm ja alusnurk $\alpha=47°$. (*6,0 dm; 18 dm²*)

476. Leia rombi diagonaalid, kui rombi külg on 8,9 cm ja nürinurk on 118°.

§ 42. SIINUSTE JA KOONUSTE TABEL.

1. $\alpha\leqslant 45°$. Töö kergendamiseks on koostatud nurkade siinuste ja koosinuste tabelid. Ühe sellise tabeli leiab lugeja õpiku lisas pealkirja all «Nurgafunktsioonid». Sellest tabelist saab leida siinuse ja koosinuse väärtusi (kolme tüvenumbriga), mis vastavad täiskraadides antud nurkadele 0°-st kuni 90°-ni. Nurga väärtused 0°-st kuni 45°-ni on paigutatud tabeli esimesse veergu ($\alpha°$) nurga kasvamise järjekorras ülalt alla. Neile nurkadele vastavad siinused leiame tabeli teisest veerust, mille pealkirjaks on $\sin\alpha$; koosinused leiame aga kolmandast veerust, mille kohale on ülal kirjutatud $\cos\alpha$. Ruumi kokkuhoiu mõttes on tabelis esitatud ainult funktsiooni väärtuste murdosad (pärast koma olevad numbrid), null ja koma aga on ära jäetud.

Tabelist leiame näiteks, et

$\sin 22° = 0{,}375$; $\cos 22° = 0{,}927$; $\sin 35° = 0{,}574$
$\cos 35° = 0{,}819$; $\sin 2° = 0{,}035$; $\cos 2° = 0{,}999$

Kui nurga antud väärtus sisaldab ka minuteid, siis tuleb see väärtus eelnevalt ümardada täiskraadideks; kui minuteid on vähem kui 30, siis võtame nurga väärtuse puuduga; kui minuteid on 30 või rohkem, siis võtame nurga väärtuse liiaga.

N ä i d e. $\sin 27°18' \approx \sin 27° = 0{,}454$; $\cos 41°31' \approx \cos 42° = 0{,}743$.

Tabeli vaadeldav osa võimaldab lahendada ka pöördülesanne: leida siinuse või koosinuse antud väärtuse järgi vastav nurk.

N ä i d e 1. $\sin \alpha = 0{,}469$. Leida α.

L a h e n d u s. Leiame tabelist arvu 0,469. Sellele vastav nurga väärtus esimeses veerus on 28°.

V a s t u s. $\alpha = 28°$.

N ä i d e 2. $\cos \alpha = 0{,}855$. Leida α.

L a h e n d u s. Selgub, et arvu 0,855 ei ole tabelis. Sel korral leiame tabelist arvu, mis on antud arvule kõige lähemal. Selleks arvuks on 0,857 ning vastav nurk on 31°. Selle loemegi otsitava nurga ligikaudseks väärtuseks.

V a s t u s. $\alpha = 31°$.

Tabelist leiame veel:
kui $\sin \alpha = 0{,}612$, siis $\alpha = 38°$
kui $\cos \alpha = 0{,}991$, siis $\alpha = 8°$

477. Leida tabelist järgmiste funktsioonide väärtused:
$\sin 25°$; $\sin 32°$; $\cos 7°$; $\cos 13°$; $\sin 15°39'$;
$\cos 42°29'$; $\cos 30°15'$; $\sin 1°$; $\sin 5°30'$.

478. Leida tabeli abil nurk α, kui
$\sin\alpha = 0{,}087$; $\sin \alpha = 0{,}242$; $\cos \alpha = 0{,}946$; $\cos \alpha = 0{,}799$;
$\sin \alpha = 0{,}532$; $\sin \alpha = 0{,}277$; $\cos \alpha = 0{,}862$; $\cos \alpha = 0{,}750$.

2. $\alpha \geqslant 45°$. Nurga väärtused 45°-st kuni 90°-ni on paigutatud tabeli viimasesse veergu nurkade kasvamise järjekorras a l t ü l e s nii, et esimese ja viimase veeru ühes ning samas reas on teineteise täiendusnurgad.

Nii näiteks on samas reas nurgad 9° ja 81° ($9° + 81° = 90°$); 14° ja 76° ($14° + 76° = 90°$) jne.

Et aga $\sin 9° = \cos 81°$, samuti $\sin 14° = \cos 76°$, jne. siis on viimases veerus olevate nurkade koosinuste väärtused tabeli teises veerus (samas, kus on esimeses veerus olevate nurkade siinused).

Selle tähiseks on teise veeru alla kirjutatud $\cos\alpha$. Samal põhjusel on viimases veerus olevate nurkade siinused tabeli kolmandas veerus (samas, kus on esimeses veerus olevate nurkade koosinused). Selle tähiseks on kolmanda veeru alla kirjutatud $\sin\alpha$. Seega tuleb meeles pidada, et kui nurga valime viimasest veerust, siis funktsiooni nimetus tuleb ka valida viimasest reast. Nii leiame tabelist:

$\sin 62° = 0{,}883$; $\sin 53° = 0{,}799$; $\sin 87° = 0{,}999$
$\sin 58°42' \approx \sin 59° = 0{,}857$; $\cos 47° = 0{,}682$
$\cos 55° = 0{,}574$; $\cos 72°16' \approx \cos 72° = 0{,}309$.

Tabelist leiame ka:

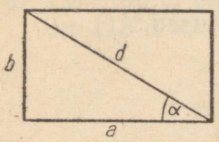
kui $\sin\alpha = 0{,}927$, siis $\alpha = 68°$; kui $\sin\alpha = 0{,}777$, siis $\alpha = 51°$;
kui $\cos\alpha = 0{,}342$, siis $\alpha = 70°$; kui $\cos\alpha = 0{,}487$; siis $\alpha = 61°$

479. Leida tabelist järgmiste funktsioonide väärtused:
$\sin 46°$; $\sin 52°$; $\sin 67°$; $\sin 85°$; $\sin 76°13'$; $\sin 89°$;
$\cos 49°$; $\cos 57°$; $\cos 60°$; $\cos 73°49'$; $\cos 57°12'$;
$\sin 17°$; $\cos 32°$; $\sin 45°$; $\cos 0°$; $\sin 64°15'$; $\cos 12°19'$.

480. Leida tabelist nurk α, kui

$\sin\alpha = 0{,}988$; $\sin\alpha = 0{,}940$; $\sin\alpha = 0{,}875$; $\sin\alpha = 0.889$
$\sin\alpha = 0{,}769$; $\cos\alpha = 0{,}423$; $\cos\alpha = 0{,}225$; $\cos\alpha = 0{,}619$
$\cos\alpha = 0{,}689$; $\sin\alpha = 0{,}756$; $\cos\alpha = 0{,}932$; $\sin\alpha = 0{,}915$
$\cos\alpha = 0{,}497$; $\sin\alpha = 0{,}150$; $\cos\alpha = 0{,}793$; $\cos\alpha = 0{,}111$

Edaspidi kasutame ülesannete lahendamisel ikka siinuse ja koosinuse tabeleid.



Joon. 93

Näide. Ristküliku diagonaal $d = 4{,}8$ dm moodustab ristküliku pikema küljega nurga $\alpha = 38°$. Leida ristküliku pindala (joon. 93).

Lahendus.

$$\frac{a}{d} = \cos\alpha;$$

$$a = d\cos\alpha = 4{,}8 \cdot \cos 38° = 4{,}8 \cdot 0{,}788 = 3{,}78 \text{ dm}$$

$$\frac{b}{d} = \sin\alpha;$$

$$b = d\sin\alpha = 4{,}8 \cdot \sin 38° = 4{,}8 \cdot 0{,}616 = 2{,}96 \text{ dm}$$

$$S = ab = 3{,}78 \cdot 2{,}96 = 11{,}2 \text{ dm}^2$$

Vastus. Ristküliku pindala on 11,2 dm².

481. Arvuta võrdhaarse kolmnurga haar, kui kolmnurga kõrgus $h = 7{,}5$ m ja alusnurk $\alpha = 47°$. (*10,3 m*)

482. Arvutada rombi külje pikkus, kui rombi kõrgus $h=4{,}4$ dm ja teravnurk $\alpha=46°$.

483. Arvutada rombi ümbermõõt, kui rombi kõrgus on 2,7 m ja nürinurk 118°.

484. Leida trapetsi haarad, kui trapetsi kõrgus $h=2{,}5$ dm ja pikema aluse lähisnurgad on $\alpha=65°$ ja $\beta=55°$.

485. Arvutada võrdhaarse kolmnurga külg, kui kolmnurga kõrgus on 10,8 cm.

486. Arvutada koonuse moodustaja, kui koonuse kõrgus on 6,6 dm ning nurk moodustaja ja põhja vahel on 56°.

487. Koonuse moodustaja $l=0{,}72$ m ja ta kaldenurk põhja suhtes $\alpha=62°$. Leida koonuse ruumala. (*0,076* m^3).

488. Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius $R=3{,}7$ dm ja teravnurk $\alpha=41°$. Leida selle kolmnurga kaatetid.

Näpunäide. Hüpotenuus on ringi diameetriks.

489. Rombi külg $a=52$ cm ja teravnurk $\alpha=82°$. Arvutada rombi diagonaalid.

490. Ringi raadius $r=3{,}8$ dm. Kui kaugel asub kõõl ringi keskpunktist, kui kõõlule vastav kaar on 128°? (*3,42* dm)

491. Leida täisnurkse kolmnurga nurgad, kui üks kaatetitest on 0,72 dm ja hüpotenuus 12 cm.

492. Leida täisnurkse kolmnurga nurgad, kui üks kaatetitest on 2,5 m ja hüpotenuus 32 dm.

493. Leida nurk, mille ristküliku $ABCD$ diagonaal $AC=52$ cm ning moodustab ristküliku küljega $BC=38$ cm.

494. Kui suur on võrdhaarse kolmnurga alusnurk, kui haar on 1,8 m ja kõrgus 9 dm?

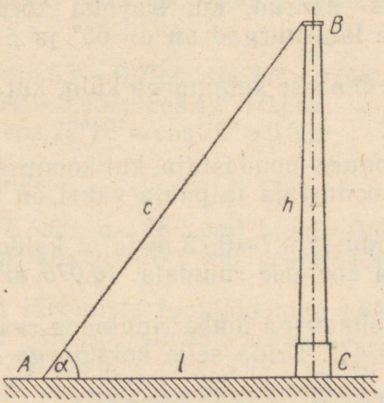
495. Leida võrdhaarse trapetsi nurgad, kui trapetsi haar $c=5{,}8$ cm ja kõrgus $h=4{,}2$ cm.

496. Leida trapetsi nurgad, kui haarad on 6,4 dm ja 69 cm ning trapetsi kõrgus $h=0{,}41$ m.

497. Kõõlule $a=8{,}4$ cm vastab kaar 134°. Kui suur on ringjoone raadius? (*4,57 cm*)

§ 43. TERAVNURGA TANGENS JA KOOTANGENS.

1. Ülesanne. Vabriku korsten heidab rõhtsale maapinnale varju pikkusega $l=22{,}5$ m. Leida korstna kõrgus h, kui päikesekiired moodustavad maapinnaga nurga $\alpha=54°$ (joon. 94).



Joon. 94

Lahendus.

$$\frac{h}{c}=\sin\alpha;\quad h=c\sin\alpha$$

Et c ei ole antud, siis tuleb ta avaldada andmete kaudu:

$$\frac{l}{c}=\cos\alpha;\quad c=\frac{l}{\cos\alpha}$$

Nüüd asendame võrduses $h=c\sin\alpha$ tähe c leitud avaldisega $\frac{l}{\cos\alpha}$. Saame:

$$h=\frac{l}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha=l\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=22{,}5\cdot\frac{\sin 54°}{\cos 54°}$$

Tabelist leiame, et $\sin 54°=0{,}809$ ja $\cos 54°=0{,}588$.
Seega

$$h=22{,}5\cdot\frac{0{,}809}{0{,}588}=30{,}9\text{ m}$$

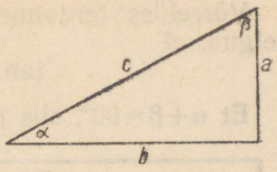
Vastus. Korstna kõrgus on 30,9 m.

2. Teravnurga tangens ja kootangens, nende omadused. Eelmises ülesandes selgus, et teravnurga α vastaskaateti (h) leidmiseks selle nurga lähiskaateti (l) järgi (joon. 94), tuli antud lähis-

kaatet korrutada antud nurga siinuse ja koosinuse suhtega. Avaldame selle suhte kolmnurga külgede kaudu.

Jooniselt 95 saame:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha.$$



Joon. 95

Jagame esimese võrduse pooled teise võrduse vastavate pooltega. Siis saame:

$$\frac{a \cdot c}{c \cdot b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ehk

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

Tulemusest näeme, et teravnurga siinuse ja koosinuse suhe võrdub selle nurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhtega. Et selle suhte väärtusi läheb vaja ülesannete lahendamisel (vt. p. 1), siis vaadeldakse matemaatikas teravnurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhet omaette funktsioonina, mida nimetatakse teravnurga t a n g e n s i k s.

Teravnurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhet nimetatakse selle nurga tangensiks.

Kui nurk on α, siis selle nurga tangensi sümboliks on $\tan\alpha$ (loe: tangens alfa). Nüüd võime tangensi definitsiooni väljendada ka sümbolites järgmiselt:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \tan\alpha} \qquad \boxed{\frac{b}{a} = \tan\beta} \qquad \text{(joon. 95).}$$

Eespooltoodust ilmneb ka teravnurga tangensi omadus:

teravnurga tangens võrdub selle nurga siinuse ja koosinuse suhtega.

Mõnel juhtumil on otstarbekas vaadelda omaette funktsioonina ka teravnurga lähiskaateti ja vastaskaateti suhet.

Teravnurga lähiskaateti ja vastaskaateti suhet nimetatakse selle nurga kootangensiks.

Nurga α kootangensit tähistatakse sümboliga $\cot\alpha$ (loe: kootangens alfa). Kootangensi definitsiooni sümbolites väljendades saaksime:

$$\boxed{\frac{b}{a} = \cot\alpha} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \cot\beta} \qquad \text{(joon. 95).}$$

Võrreldes teravnurga tangensi ja kootangensi definitsioone, selgub, et

$$\tan\alpha=\cot\beta \text{ ja } \cot\alpha=\tan\beta.$$

Et $\alpha+\beta=90°$, siis $\beta=90°-\alpha$ ja

$$\boxed{\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)} \quad \text{ning} \quad \boxed{\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)}$$

Samuti saame, et

$$\boxed{\tan\beta=\cot(90°-\beta)} \quad \text{ja} \quad \boxed{\cot\beta=\tan(90°-\beta)}$$

Teravnurga tangens võrdub täiendusnurga kootangensiga ja vastupidi: teravnurga kootangens võrdub täiendusnurga tangensiga.

Lugeja ülesandeks jäägu tuletada teravnurga kootangensi järgmine omadus:

teravnurga kootangens võrdub selle nurga koosinuse ja siinuse suhtega.

498. Joonisel 96 on antud rida täisnurkseid kolmnurki. Avaldada neist kolmnurkadest kõigi teravnurkade tangensid ja kootangensid.

Näide. $\tan\gamma=\frac{d}{f}$; $\cot\nu=\frac{BC}{AB}$

499. Arvutada täisnurkse kolmnurga teravnurkade tangens ja kootangens, kui kolmnurga kaatetid on:

3 cm ja 5 cm; 4,2 cm ja 1,7 cm; 12,7 m ja 18,6 m; 15,6 cm ja 189 mm; 16,4 m ja 120 dm; 0,83 m ja 8,3 dm

500. Joonestada täisnurkne kolmnurk teravnurgaga

a) 25°; b) 30°; c) 45°; d) 60°; e) 75°

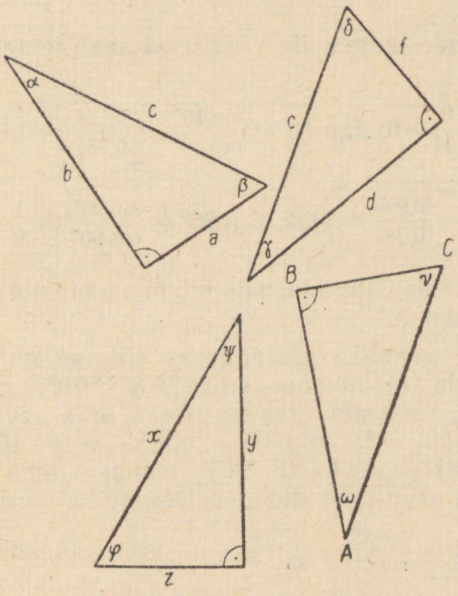
Teostada vajalikud mõõtmised ja arvutada nende kolmnurkade teravnurkade tangensid ja kootangensid.

501. Toetudes tangensi ja kootangensi omadusele, arvutada siinuse ja koosinuse tabeli abil:

tan 23°; cot 23°; tan 15°; cot 15°; tan 32°; cot 32°; tan 50°; cot 50°; tan 65°; cot 65°.

Näide. $\tan 27° = \frac{\sin 27°}{\cos 27°} = \frac{0{,}454}{0{,}891} = 0{,}510$

$\cot 39° \frac{\cos 39°}{\sin 39°} = \frac{0{,}777}{0{,}629} = 1{,}23$



Joon. 96

502. Avaldada alljärgnevate nurkade antud funktsioonid täiendusnurkade funktsioonidena:

a) $\tan 37°$ d) $\cot 31°$
b) $\tan 49°$ e) $\cot 28°32'$
c) $\tan 85°$ f) $\cot 5°39'$

503. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

a) $\frac{\tan 50°}{\cot 40°} + \frac{\tan 60°}{\cot 30°}$; b) $\frac{\tan 32°56'}{\cot 57°04'} - \frac{\cot 57°15'}{\tan 32°45'}$

c) $\frac{\sin 81° \cdot \cos 21° \cdot \tan 48° \cdot \cot 33°}{\tan 57° \cdot \cot 42° \cdot \sin 69° \cdot \cos 9°}$

§ 44. TERAVNURGA TANGENSI JA KOOTANGENSI GRAAFIKUD.

Tangensi ja kootangensi graafiku ehitamiseks saab kasutada siinuste ja koosinuste tabeleid. Tangensi graafiku ehitamiseks on sobiv võtta nurga väärtuseks 0°; 10°; 20°; ...; 50°; 55°; 60°; ...; 80°; 85°; 90°.

Nende nurkade tangensite väärtused saab leida siinuse ja koosinuse suhtena:

$$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0;\quad \tan 10° = \frac{\sin 10°}{\cos 10°} = \frac{0{,}174}{0{,}985} \approx 0{,}18$$

jne.

$$\tan 85° = \frac{\sin 85°}{\cos 85°} = \frac{0{,}996}{0{,}087} \approx 11{,}4;\quad \tan 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0}$$

Et nulliga ei saa jagada, siis sümbolil tan 90° puudub arvu tähendus.

Kootangensi graafiku ehitamiseks võtame nurga väärtusteks eelmiste nurkade täiendusnurgad 90°; 80°; 70°; ...; 40°; 35°; 30°; ...; 10°; 5°; 0°, sest siis saab kasutada juba arvutatud tangensi väärtusi: $\cot 90° = \tan 0° = 0$; $\cot 80° = \tan 10° = 0{,}18$; ...; $\cot 5° = \tan 85° = 11{,}4$; cot 0° ei oma arvu tähendust. Et cot 0° ei oma arvu tähendust, see selgub ka võrdusest

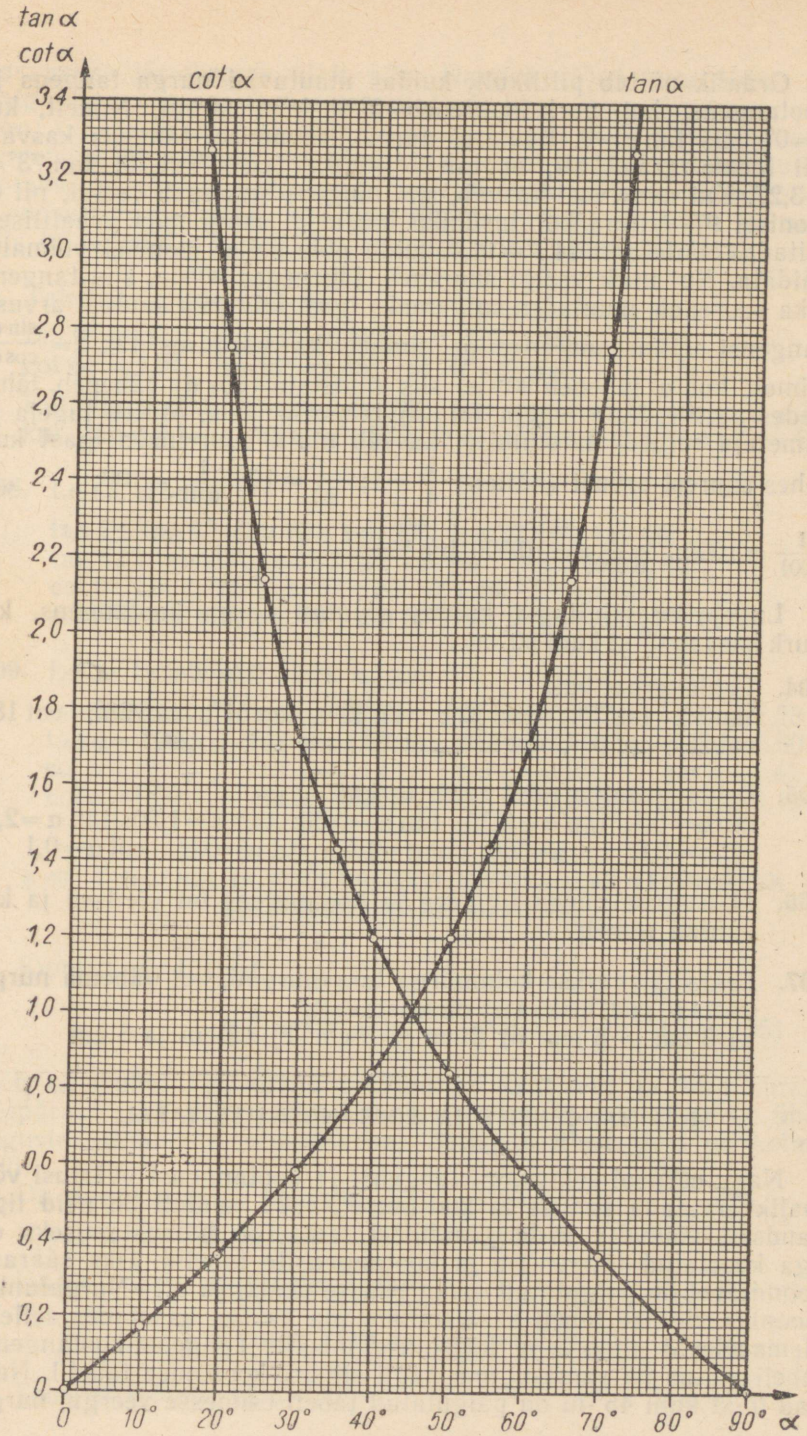
$$\cot 0 = \frac{\cos 0°}{\sin 0°} = \frac{1}{0}\ \text{(ei oma arvu tähendust)}.$$

Lugeja ülesandeks jäägu teha kõik vajalikud arvutused ja täita lüngad alljärgnevas tabelis:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	90°	
tan α	0	0,18								11,4	—	cot α
	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	5°	0°	α

Ruumi kokkuhoiu mõttes on otstarbekas koostada tabel nii, et tangensi ja kootangensi väärtused kirjutatakse ühte ja samasse (keskmisse) ritta. Tangensi väärtustele vastavad nurgad on ülemises reas; kootangensi väärtustele vastavad nurgad on alumises reas.

Saadud tabeli põhjal saab ehitada tangensi ja kootangensi graafikud, mis on kujutatud ühes ning samas teljestikus joonisel 97.


tan α
cot α
cot α
tan α
3,4
3,2
3,0
2,8
2,6
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
α

Joon. 97

Graafik näitab piltlikult, kuidas muutuvad nurga tangens ja kootangens, kui nurk suureneb 0°-st kuni 90°-ni. Nimelt, kui $\alpha = 0°$, siis $\tan \alpha = 0$. Edasisel nurga kasvamisel tangens kasvab. Nii loeme graafikult, et $\tan 35° = 0{,}70$; $\tan 60° = 1{,}73$; $\tan 73° = 3{,}27$. Kui nurk veel kasvab, siis tangens suureneb veelgi, nii et joonisel 97 valitud kujutusühiku korral ei saagi teda graafiliselt esitada. Näiteks $\tan 85° = 11{,}4$, mida pole sellel joonisel võimalik näidata. Kui nurk veelgi suureneb, lähenedes 90°-le, siis tangens ikka suureneb, muutudes suuremaks igast kuitahes suurest arvust. Tangensi selline suurenemine ilmneb ka võrduses $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Nimelt kui α läheneb 90°-le, siis nimetaja ($\cos \alpha$) väheneb, lähenedes nullile, kuid lugeja ($\sin \alpha$) läheneb ühele. Murru lugeja ja nimetaja sellisel muutumisel kasvab murd suuremaks igast kuitahes suurest arvust (näiteks $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{0{,}1} = 10$; $\frac{1}{0{,}01} = 100$; $\frac{1}{0{,}001} = 1000$; $\frac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ jne.).

Lugeja ise selgitagu, kuidas muutub nurga kootangens, kui nurk kasvab 0°-st kuni 90°-ni.

504. Leida graafikult
$\tan 5°$; $\tan 15°$; $\tan 22°$; $\tan 33°$; $\tan 51°$; $\tan 68°$; $\cot 18°$; $\cot 26°$; $\cot 37°$; $\cot 51°$; $\cot 72°$; $\cot 85°$; $\cot 90°$

505. Leida graafiku abil nurk α, kui
$\tan \alpha = 0{,}1$; $\tan \alpha = 0{,}35$; $\tan \alpha = 0{,}68$; $\tan \alpha = 1{,}30$; $\tan \alpha = 2{,}4$; $\cot \alpha = 2{,}6$; $\cot \alpha = 2{,}0$; $\cot \alpha = 1{,}65$; $\cot \alpha = 0{,}82$; $\cot \alpha = 0{,}1$

506. Missuguse nurga tangens ja kootangens on võrdsed ja kui suured nimelt?

507. Leida täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui vähema nurga vastas- ja lähiskaatet on vastavalt:
a) 3 cm ja 5 cm; b) 6 cm ja 8 cm; c) 12 cm ja 6 cm

§ 45. TANGENSITE JA KOOTANGENSITE TABEL.

Nagu eespool selgus, on tangensi ja kootangensi väärtusi võimalik arvutada siinuse ja koosinuse kaudu, samuti on neid ligikaudselt võimalik leida graafilisel teel. Töö hõlbustamiseks on aga koostatud tangensite ja kootangensite tabelid. Üks säärane koondtabel on paigutatud õpiku lisasse pealkirja all «Nurgafunktsioonid». Sellise tabeli saab valmistada ka ise, kasutades selleks olemasolevat siinuse ja koosinuse tabelit. Tangensi-kootangensi tabeli ehitus on samasugune nagu siinuse-koosinuse tabelil. Nurgad 0°-st kuni 45°-ni on paigutatud tabeli esimesse veergu, nurga

kasvamise järjekorras ülalt alla. Nurgad 45°-st kuni 90°-ni on paigutatud viimasesse veergu, nurkade kasvamise järjekorras alt üles; nii on esimese ja viimase veeru samas reas olevad nurgad teineteise täiendusnurgad. Siingi tuleb meeles pidada, et kui nurga võtame esimesest veerust, siis vajalik funktsiooni nimetus tuleb ülemisest reast võtta; kui aga võtame nurga viimasest veerust, siis tuleb vajalik funktsiooni nimetus võtta alumisest reast.

Tabelist leiame näiteks:

$\tan 9° = 0{,}158$; $\tan 36° = 0{,}727$; $\cot 39° = 1{,}23$
$\cot 44° = 1{,}04$; $\tan 56° = 1{,}48$; $\cot 70° = 0{,}364$

Kui $\tan\alpha = 0{,}510$, siis $\alpha = 27°$; kui $\cot\alpha = 1{,}64$, siis $\alpha = 32°$
kui $\tan\alpha = 1{,}90$, siis $\alpha = 62°$; kui $\cot\alpha = 0{,}445$, siis $\alpha = 66°$

508. Leida tabelist

$\tan 2°$; $\tan 4°$; $\tan 10°$; $\tan 29°$; $\tan 32°16'$; $\tan 49°$
$\tan 62°$; $\tan 70°$; $\tan 80°39'$; $\tan 85°$; $\tan 89°$; $\tan 45°$
$\cot 5°$; $\cot 25°05'$; $\cot 41°$; $\cot 42°$; $\cot 45°$; $\cot 49°$
$\cot 57°$; $\cot 69°$; $\cot 80°$; $\cot 87°$; $\cot 15°15'$; $\cot 37°47'$

509. Leida tabeli abil nurk α, kui

$\tan\alpha = 0{,}532$;	$\tan\alpha = 0{,}675$;	$\tan\alpha = 0{,}937$;	$\tan\alpha = 1{,}23$
$\tan\alpha = 1{,}45$;	$\tan\alpha = 1{,}80$;	$\tan\alpha = 1{,}89$;	$\tan\alpha = 5{,}60$
$\cot\alpha = 19{,}1$;	$\cot\alpha = 7{,}12$;	$\cot\alpha = 3{,}06$;	$\cot\alpha = 1{,}45$
$\cot\alpha = 1{,}00$;	$\cot\alpha = 0{,}905$;	$\cot\alpha = 0{,}625$;	$\cot\alpha = 0{,}194$

§ 46. TANGENSI JA KOOTANGENSI KASUTAMINE TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMISEL.

Kumbki võrdustest

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha \text{ ja } \frac{b}{a} = \cot\alpha \qquad \text{(joon. 95)}$$

seob omavahel täisnurkse kolmnurga kaateteid ja teravnurka. Seepärast saab kasutada nii tangensit kui ka kootangensit ühesuguste ülesannete lahendamisel. Selliseid ülesandeid on kolme liiki:

1) On antud a ja b. Leida α.

Näide. $a = 8{,}9$ cm ja $b = 12{,}3$ cm. Leida α.

Lahendus. a) tangensi abil:

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha; \quad \tan\alpha = \frac{8{,}9}{12{,}3} = 0{,}724$$

Tabelist leiame, et $\alpha = 36°$.

b) kootangensi abil:

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha;\ \cot \alpha = \frac{12{,}3}{8{,}9} = 1{,}38$$

Tabelist leiame, et $\alpha = 36°$.

Vastus. $\alpha = 36°$.

2) On antud b ja α. Leida a.

Lahendus. a) tangensi abil:

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha;\ a = b \tan \alpha = 15{,}6 \cdot \tan 39° = 15{,}6 \cdot 0{,}810 = 12{,}6 \text{ cm}$$

b) kootangensi abil:

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha;\ a = \frac{b}{\cot \alpha} = \frac{15{,}6}{\cot 39°} = \frac{15{,}6}{1{,}23} = 12{,}7 \text{ cm}$$

Saadud vastuste väike erinevus on tingitud tabeli arvude ligikaudsusest.

Vastus. $a = 12{,}6$ cm.

3) On antud a ja α. Leida b.

Näide. $a = 27{,}8$ m; $\alpha = 52°$. Leida b.

Lahendus. a) tangensi abil:

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha;\ b = \frac{a}{\tan \alpha} = \frac{27{,}8}{\tan 52°} = \frac{27{,}8}{1{,}28} = 21{,}7 \text{ m}$$

b) kootangensi abil:

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha;\ b = a \cot \alpha = 27{,}8 \cdot \cot 52° = 27{,}8 \cdot 0{,}781 = 21{,}7 \text{ m}$$

Vastus. $b = 21{,}7$ m.

Märkus. Kas valida ülesande lahendamiseks tangens või kootangens, see oleneb ülesandest. Tavaliselt valitakse selline funktsioon, et ei oleks vaja funktsiooni väärtusega jagada. Seega tuleb esitatud ülesannete juures teise tüübi puhul eelistada lahendust tangensi abil ja kolmanda tüübi juures lahendust kootangensi abil.

510. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 4{,}5$ m ja ta lähisnurk $\beta = 38°$. Kui suur on vastaskaatet?

511. Ristküliku diagonaal moodustab küljega $a = 34{,}5$ cm nurga $\beta = 48°$. Kui suur on ristküliku teine külg?

512. Võrdhaarse kolmnurga alus on 46,4 cm ja alusnurk 57°. Kui suur on kolmnurga kõrgus?

513. Rombi teravnurk on 64° ja pikem diagonaal 16,2 cm. Kui pikk on rombi lühem diagonaal? (*10,1 cm*)

514. Võrdhaarse trapetsi alused on 54 cm ja 26 cm ning teravnurk $\alpha = 50°$. Leida trapetsi kõrgus. (*16,7 cm*)

515. Telefonipost heidab varju, mille pikkus on 4,2 m. Päikesekiir moodustab maapinnaga nurga 55°. Leida telefoniposti kõrgus.

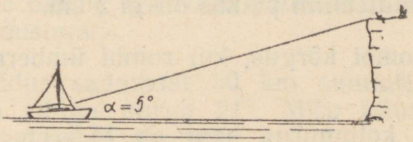
516. Võrdhaarse trapetsi nurk $\alpha = 62°$, lühem alus $b = 10$ cm ja trapetsi kõrgus $h = 15$ cm. Leida pikem alus. (*25,9 cm*)

517. Võrdhaarse trapetsi teravnurk $\alpha = 58°$, pikem alus on 48 cm ja kõrgus 10,5 cm. Kui pikk on lühem alus?

518. Trapetsi haarad on 12,5 cm ja 1,6 dm ning aluse lähisnurgad 62° ja 50°. Leida trapetsi pikem alus, kui lühem alus on 0,2 m.

519. Koonuse kõrgus $h = 17{,}5$ cm ja moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 67°. Kui suur on koonuse ruumala? (*1010 cm³*)

520. 40 m kõrguse paekalda äär paistab merel olevast paadist 5°-se nurga all (joon. 98). Kui kaugel on paat kaldast?



Joon. 98

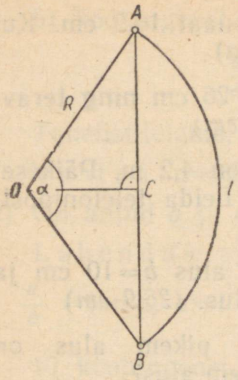
*

Eelmistes paragrahvides õppisime tundma teravnurga funktsioone — siinust, koosinust, tangensit ja kootangensit ning näitasime, kuidas neid rakendada ülesannete lahendamisel. Neid funktsioone nimetatakse ühise nimetusega **trigonomeetrilisteks**[1] funktsioonideks.

Allpool on antud rida ülesandeid, milledes pole ette teada, missugust funktsiooni on vaja kasutada. Selle selgitab alles ülesande lähem uurimine.

Näide. Kaks punkti, mille sirgjooneline kaugus teineteisest on

[1] Kreeka k. *trigonon* — kolmnurk; *metreo* — mõõdan. Trigonomeetria — matemaatika osa, mis uurib trigonomeetriliste funktsioonide omadusi ja nende rakendamist.



Joon. 99

12,5 km, on vaja ühendada raudteega. Pinnase iseloomu tõttu tuleb nende punktide vaheline raudtee ehitada ringjoone kaarena (vähem kui poolringjoon), mille raadius on 8 km. Arvutada raudteeliini pikkus.

Lahendus (joon. 99). On vaja arvutada ringjoone kaare pikkus l:

$$l = \frac{\pi R\alpha}{180}$$

Nagu valemist näha, on vaja teada kesknurka α, mida aga andmetes ei ole.

Nurga α saab leida kolmnurgast OAC, milles

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{R} = \frac{6{,}25}{8} = 0{,}781.$$

Siinuste tabelist $\frac{\alpha}{2} = 51°$, millest $\alpha = 102°$.

$$l = \frac{\pi R\alpha}{180} = \frac{3{,}14 \cdot 8 \cdot 102}{180} = 14{,}2 \text{ km}$$

Vastus. Raudteeliini pikkus on 14,2 km.

521. Arvutada rombi kõrgus, kui rombi ümbermõõt on 64,8 dm ja nurk 132°.

522. Võrdhaarse kolmnurga haar on 14,6 cm ja alusnurk 56°. Leida selle kolmnurga pindala.

523. Võrdhaarse trapetsi alused on 45,2 cm ja 14,8 cm. Kui pikk on haar, kui ta moodustab alusega nurga 65°. (*36 cm*)

524. Leida rööpküliku pindala, kui rööpküliku küljed on 6,8 dm ja 8,9 dm ja teravnurk 62°.

525. Arvutada rombi pindala, kui rombi ümbermõõt on 84,8 cm ja nürinurk 146°.

526. Võrdhaarse trapetsi alused on 34,2 cm ja 2,42 dm. Leida trapetsi ümbermõõt, kui haar moodustab pikema alusega nurga 62°.

527. Leida trapetsi haarad, kui nad moodustavad alusega nurgad 65° ja 54°, trapetsi kõrgus $h = 6{,}4$ cm.

528. Arvutada koonuse moodustaja, kui nurk moodustaja ja kõrguse vahel on 33° ning põhja raadius 12,8 cm.

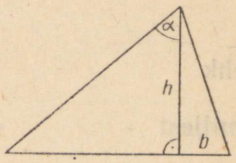
529. Rombi lühem diagonaal on 42,6 cm ja teravnurk 44°. Leida pikem diagonaal.

530. Ringisse on joonestatud täisnurkne kõõlkolmnurk, mille kaatet on 5,6 dm ja ta vastasnurk 38°. Leida ringi ümbermõõt ja pindala.

531. Täisnurkse trapetsi alused on 36,6 cm ja 63,4 cm. Haara ja aluse vaheline nurk on 62°. Leida trapetsi pindala.

532. Rööpküliku diagonaal on risti ühe küljega. Diagonaali ja teise külje vaheline nurk on α. Leida rööpküliku pindala, kui lühem diagonaal võrdub 32,4 cm ja nurk $\alpha=37°$.

533. Arvutada joonisel 100 kujutatud kolmnurga ümbermõõt ja pindala, kui $\alpha=48°$, $h=17{,}8$ cm; $b=4{,}5$ cm.



Joon. 100

534. Raudteetammi laius ülalt on a ja alt b meetrit. Tammi nõlvad moodustavad rõhttasapinnaga nurga α. Arvutada tammi kõrgus, kui $a\approx 11{,}0$ m; $b=24{,}5$ m ja $\alpha=25°$. (*3,15 m*)

535. Mägiraudtee tõuseb iga 50 m pikkuse teelõigu kohta 0,5 m. Leida tee tõusunurk.

536. Laev eemaldus sadamast 50 km suunas, mis moodustab põhja-lõuna sihiga nurga 21°. Mitu kilomeetrit eemaldus laev sadamast põhja suunas?

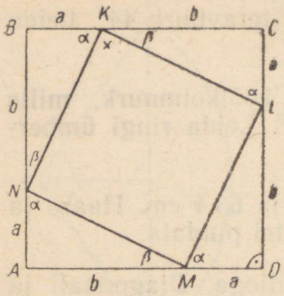
§ 47. PÜTAGORASE[1] TEOREEM

Eelmistes paragrahvides õppisime tundma seoseid täisnurkse kolmnurga nurkade ja külgede vahel. Edasi õpime tundma seoseid, mis ei sisalda täisnurkse kolmnurga nurki, vaid sisaldavad ainult joonelemente, s. t. selliseid elemente, mida mõõdetakse pikkusühikutega (näiteks küljed, kõrgus jne.)

Joonisel 101 on kujutatud ruut $ABCD$, mille külg võrdub kahe lõigu a ja b summaga. Ühendame külgede jaotuspunktid joonisel näidatud viisil sirglõikudega. Siis tekib antud ruudusse nelinurk $KLMN$. Tõestame, et seegi nelinurk on ruut. Selleks on tarvis näidata, et tema kõik küljed on võrdsed ja nurgad on täisnurgad. Külgede võrdsus tuleneb sellest, et

$$\triangle KCL=\triangle LDM=\triangle MAN=\triangle NBK,$$

[1] Pütagoras — Antiik-Kreeka matemaatik (6. saj. e. m. a.).



Joon. 101

sest need on vastavalt võrdsete kaatetitega täisnurksed kolmnurgad.

Tähistame nende täisnurksete kolmnurkade võrdsed teravnurgad vastavalt tähtedega α ja β ning nelinurga $KLMN$ nurga tähega x. Nurgad α ja β on teineteise täiendusnurgad, nii et $\alpha+\beta=90°$. Vaatleme nüüd nurki, mille tipp on punktis K. Jooniselt selgub, et

$$\alpha+x+\beta=180°$$

ehk

$$(\alpha+\beta)+x=180°$$

ehk

$$90°+x=180°,$$

millest

$$x=90°$$

Selline arutelu kehtib nelinurga $KLMN$ iga nurga kohta, järelikult see nelinurk on tõesti ruut; olgu tema külje pikkus c.

Antud ruudu $ABCD$ pindala on $(a+b)^2$, kuid teiselt poolt võrdub selle ruudu pindala ruudu $KLMN$ ja nelja võrdse täisnurkse kolmnurga pindalade summaga. Ruudu $KLMN$ pindala on c^2 ja iga täisnurkse kolmnurga pindala on $\frac{ab}{2}$. Seega saame võrduse:

$$(a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{ab}{2}$$

ehk

$$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab,$$

millest

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

Jooniselt näeme, et a ja b on täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused ja c hüpotenuusi pikkus. Niisiis oleme tõestanud, et

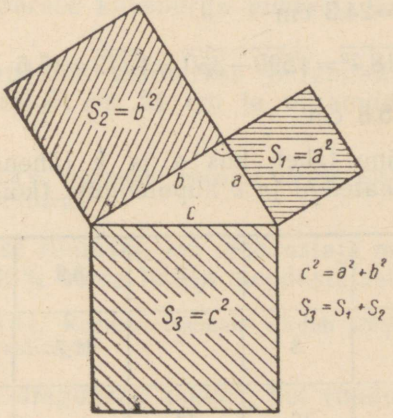
täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga.

See lause kannabki Pütagorase teoreemi nime.

Arvu a^2 võib vaadelda ruudu pindalana, kui ruudu külje pikkus on a. Samuti võib arve b^2 ja c^2 vaadelda ruutude pindaladena, kui ruudu külje pikkuseks on vastavalt b ja c. Seetõttu võib Pütagorase teoreemi sõnastada ka järgmiselt:

kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summa võrdub hüpotenuusile ehitatud ruudu pindalaga (joon. 102).

Pütagorase teoreem seob täisnurkse kolmnurga kolme külge. Siit järeldub, et kui täisnurkse kolmnurga kaks külge on antud, siis saab kolmandat ikka leida.



Joon. 102

Näide 1. $a=3$ cm; $b=4$ cm. Leida c.

Lahendus. Vahetades võrduses

$$a^2+b^2=c^2$$

vasaku ja parema poole, saame:

$$c^2=a^2+b^2,$$

millest

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

Seega $c=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ cm

Vastus. $c=5$ cm.

Näide 2. $b=8{,}7$ cm ja $c=11$ cm. Leida a.

Lahendus.

$$a^2+b^2=c^2;\ a^2=c^2-b^2$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$a=\sqrt{11^2-8{,}7^2}=\sqrt{121-75{,}7}=\sqrt{45{,}3}=6{,}73 \text{ cm}$$

Vastus $a=6{,}73$ cm.

Näide 3. $a=18{,}7$ cm; $c=243$ mm. Leida b.

Lahendus.

$a^2+b^2=c^2$; $b^2=c^2-a^2$

$b=\sqrt{c^2-a^2}$

$c=243$ mm $=24{,}3$ cm

$b=\sqrt{24{,}3^2-18{,}7^2}=\sqrt{590-350}=\sqrt{240}=15{,}5$ cm

Vastus. $b=15{,}5$ cm.

537. Täita järgmine tabel, kus a ja b tähendavad täisnurkse kolmnurga kaateteid ja c hüpotenuusi (kõik sentimeetrites):

a	5		12	8,9	32,3	
b	11	8		11,7		3,27
c		10	13		49,7	7,56

538. Redel ulatub aknani, mille kõrgus maapinnast on 12 m. Kui pikk on redel, kui ta alumine ots asub majast 5 m kaugusel?

539. Ristkülikukujulise põllu pindala on 3 ha. Põllu pikkus on 0,2 km. Kui pikk on diagonaal? (*250 m*)

540. Rombi diagonaalid on 16 cm ja 30 cm. Kui suur on rombi ümbermõõt? (*68 cm*)

541. Rombi ümbermõõt on 136 cm ja üks diagonaalidest 60 cm. Kui suur on rombi pindala?

542. Rombi pindala on 24 aari, üks tema diagonaalidest on 80 m. Kui suur on rombi ümbermõõt? (*400 m*)

543. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 360 cm² ja kõrgus 40 cm. Kui suur on kolmnurga ümbermõõt? (*377 cm*)

544. Leida võrdhaarse trapetsi pindala, kui ta alused on 34 cm ja 10 cm ning haar 15 cm. (*207 cm²*)

545. Leida võrdhaarse trapetsi ümbermõõt, kui ta pindala on 252 cm², alused aga 30 m ja 12 m.

546. Võrdkülgse kolmnurga külg on 18 cm. Kui suur on selle kolmnurga kõrgus?

547. Leida võrdkülgse kolmnurga külg, kui kolmnurga kõrgus on 9 cm. (*10,4 cm*)

548. Leida korrapärase kuusnurga apoteem, kui kuusnurga külg $a=10$ cm.

549. Leida korrapärase kuusnurga apoteem tema külje $a=20$ cm järgi.

550. Leida korrapärase kuusnurga pindala, kui ta külje pikkus on 6 cm.

551. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui ta põhja ümbermõõt on 24 cm ja püramiidi apoteem 5 cm. (*48 cm*^{3})

Näpunäide. Püramiidi ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse kolmandiku korrutisega.

552. Leida koonuse ruumala, kui moodustaja $m=30$ cm ja põhja raadius on 40% võrra lühem moodustajast. (*8,1 dm*^{3})

Näpunäide. Koonuse ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse kolmandiku korrutisega.

553. Leida ruudu diagonaali pikkus, kui ruudu külg on 4,8 cm.

554. Leida hüpotenuusi pikkus, kui kaatetite summa on 28 cm ja nende vahe 0,4 dm.

555. Leida täisnurkse kolmnurga pindala, kui hüpotenuus on 37 cm ja üks kaatetitest 12 cm.

556. Leida kolmnurga pindala, kui tema küljed on 17 cm ja 25 cm ja kolmandale küljele tõmmatud kõrgus 15 cm. (*210 cm*^{2})

557. Täisnurkse trapetsi diagonaalid on 25 ja 17 cm. Trapetsi kõrgus 15 cm. Leida trapetsi pindala. (*210 cm*^{2})

558. Trapetsi haarad on 13 cm ja 20 cm, lühem alus 10 cm ja kõrgus 12 cm. Leida trapetsi pindala.

559. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 7,5 cm ja 10 cm. Kui suured on selle kolmnurga teravnurkade siinused?

560. Leida täisnurkse kolmnurga teravnurkade koosinused, kui kolmnurga kaatetid on 8 cm ja 15 cm.

§ 48. PÜTAGORASE TEOREEMI KASUTAMINE MONEDE LOIKUDE KONSTRUEERIMISEL.

1. $x=\sqrt{a^2+b^2}$. Joonisel 103 on antud kaks lõiku: $a=2$ cm ja $b=3$ cm. Nende andmete põhjal saab alati arvutada kolmanda lõigu pikkuse x, nii et $x=\sqrt{a^2+b^2}$

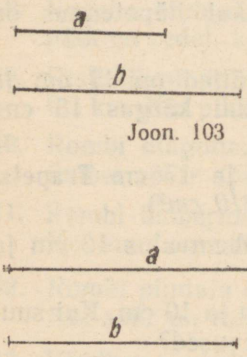
$$x=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}=3{,}61 \text{ cm}$$

Sellist lõiku, mille pikkus on $\sqrt{a^2+b^2}$ saab ka konstrueerida Pütagorase teoreemi põhjal. Selleks tuleb ehitada täisnurkne kolmnurk, mille kaatetiteks on a ja b. Saadud kolmnurga hüpotenuus ongi siis otsitav lõik.

Konstruktsiooni teostame sirkli ja joonlaua abil (joon. 104). Võtame vabalt sirge s ja ehitame sellele mingist punktist A ristsirge t. Alates punktist A kanname ühele ristsirgele lõigu $a=AB$ ja teisele sirgele lõigu $b=AC$. Punkte B ja C ühendav sirglõik ongi otsitav lõik x, sest Pütagorase teoreemi põhjal $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

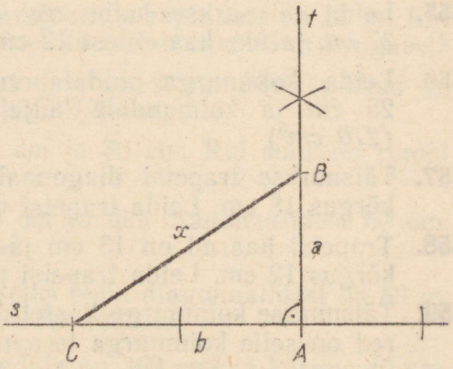
Lugeja võib mõõtmisega veenduda, et $x\approx3{,}6$ cm, nagu arvutamiselgi oli saadud.

2. $x=\sqrt{a^2-b^2}$. Joonisel 105 on antud kaks lõiku $a=4$ cm ja $b=3$ cm. Konstrueerida kolmas lõik x nii, et $x=\sqrt{a^2-b^2}$.



Joon. 103

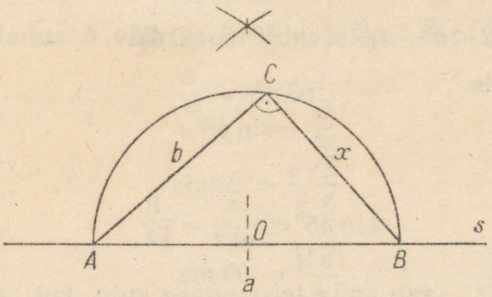
Joon. 105



Joon. 104

Lõigu x konstrueerimine toimub samuti Pütagorase teoreemi põhjal. Selleks on vaja ehitada täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuusiks on a ja üheks kaatetiks b; teine kaatet ongi siis otsitav lõik. Konstruktsioon on esitatud joonisel 106. Võtame vabalt sirge s, millele kanname lõigu $a=AB$. Leiame selle lõigu keskpunkti O ja joonestame poolringi, mille raadiuseks on OA. Nüüd kanname

teise antud lõigu b, alates punktist A (või B) kõõluna joonisele. Saame $b=AC$. Punkte B ja C ühendav sirglõik ongi otsitav lõik, sest kolmnurk ABC on Talese teoreemi põhjal (diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk) täisnurkne kolmnurk, millest $x=\sqrt{a^2-b^2}$.



Joon. 106

561. Konstrueerida lõik $x=\sqrt{a^2+b^2}$, kui:

a) $a=3{,}5$ cm ja $b=4{,}1$ cm; b) $a=4{,}8$ cm ja $b=5{,}3$ cm

Kontrollida konstruktsiooni tulemust arvutamise teel.

562. Konstrueerida lõik $x=\sqrt{m^2-n^2}$, kui:

a) $m=5$ cm ja $n=3$ cm; b) $m=4{,}8$ cm ja $n=3{,}6$ cm

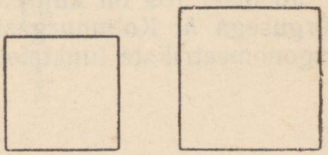
Kontrollida konstruktsiooni tulemust arvutamise teel.

563. Joonisel 107 on antud kaks ruutu. Konstrueerida:

a) kolmas ruut, mille pindala võrdub antud ruutude pindalade summaga;

b) kolmas ruut, mille pindala võrdub antud ruutude pindalade vahega.

Näpunäide. Vt. joonist 102.



Joon. 107

§ 49. PÜTAGORASE TEOREEMI KASUTAMINE MÕNEDE NURKADE TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE ARVUTAMISEL.

Toetudes Pütagorase teoreemile, on mõnede nurkade trigonomeetrilisi funktsioone lihtne arvutada. Sellisteks nurkadeks on 45°, 30° ja 60°.

Joonisel 108 on kujutatud ruut küljega a ja diagonaaliga d. Kolmnurgast ABC saab leida sin 45°, cos 45°, tan 45° ja cot 45°.

Pütagorase teoreemi põhjal

$d^2=a^2+a^2$; $d^2=2a^2$, kust

$d=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2}=a\sqrt{2}$ (vt. § 16, p. 4).

Edasi saame:

$$\frac{a}{d}=\sin 45°,$$

millest

$$\sin 45°=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Murrule $\frac{1}{\sqrt{2}}$ saab anda teistsuguse kuju, kui laiendame seda murdu laiendajaga $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Niisiis

$$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Arusaadavalt ka

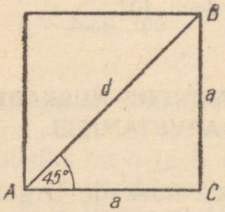
$$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Jooniselt 108 selgub kohe ka, et

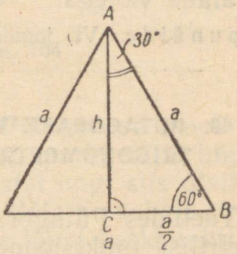
$$\tan 45°=1 \text{ ning } \cot 45°=1$$

Joonisel 109 on kujutatud võrdkülgne kolmnurk küljega a ja kõrgusega h. Kolmnurgast ABC saab leida nurkade 30° ja 60° trigonomeetriliste funktsioonide väärtused. Nimelt

$$\frac{h}{a}=\sin 60°.$$



Joon. 108



Joon. 109

Pütagorase teoreemi järgi aga

$$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(vt. § 16, p. 5).

Asetades leitud b väärtuse võrdusse

$$\frac{h}{a}=\sin 60°,$$

saame

$$\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2\cdot a}$$

ehk

$$\boldsymbol{\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Kolmnurgast ABC saame veel, et

$$\frac{a}{2a}=\sin 30°,$$

millest

$$\boldsymbol{\sin 30°=\frac{1}{2}}$$

Täiendusnurkade omaduse põhjal teame, et

$$\cos 60°=\sin 30° \text{ ja } \cos 30°=\sin 60°$$

Seega

$$\boldsymbol{\cos 60°=\frac{1}{2}} \text{ ja } \boldsymbol{\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Avaldades tangensi siinuse ja koosinuse kaudu, leiame, et

$$\tan 60°=\frac{\sin 60°}{\cos 60°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

ehk

$$\boldsymbol{\tan 60°=\sqrt{3}}$$

Samuti saame, et

$$\tan 30°=\frac{\sin 30°}{\cos 30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Laiendades saadud murdu laiendajaga $\sqrt{3}$, saame:

$$\boldsymbol{\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Täiendusnurkade omadust kasutades leiame, et

$$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ja} \quad \cot 30° = \sqrt{3}.$$

Varemõpitu põhjal teame ka nurkade 0° ja 90° vastavate trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi. Arvestades ka neid, koostame lõpuks järgmise kokkuvõtliku tabeli:

Funkts.	α				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
cot	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Selles tabelis leiduvaid funktsioonide väärtusi tuleb teada peast!

564. Arvutada võrdkülgse kolmnurga pindala, kui kolmnurga külg $a = 15{,}2$ cm.

565. Rombi teravnurk on 60° ja külg 7,8 cm. Arvutada rombi pindala.

566. Rööpküliku nürinurk on 120°. Arvutada rööpküliku pindala, kui rööpküliku küljed on 16,7 cm ja 1,4 dm.

567. Rööpküliku pindala on 289 cm² ja üks külg 14,6 m. Arvutada rööpküliku teine külg, kui antud külje lähisnurk on 45°. (*28 cm*)

568. Arvutada ruudu pindala, kui ruudu diagonaal on 19,5 cm.

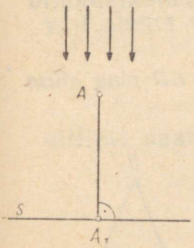
569. Arvutada korrapärase kuusnurga pindala, kui kuusnurga apoteem on 8,7 cm.

§ 50. SIRGLÕIGU PROJEKTSIOON SIRGEL.

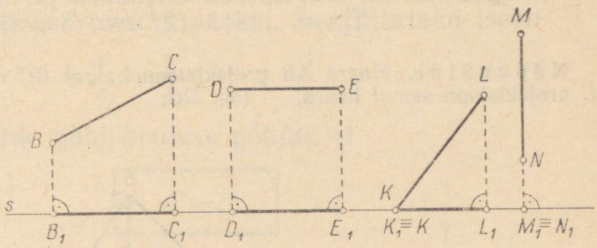
Joonisel 110 on antud sirge s ja punkt A väljaspool seda sirget. Kujutleme, et punkti A asemel on tegemist mingisuguse esemega, näiteks tennisepalliga. Langegu sellele esemele paralleelsed

valguskiired, mis on risti sirgega s. Sirgel s tekib siis selle eseme vari, mis joonisel on tähistatud punktiga A_1. Matemaatikas öeldakse sel puhul, et punkt A_1 on punkti A projektsioon sirgel s. Punkti A projektsiooni leiame, kui tõmbame sellest punktist ristlõigu sirgeni s. Selle ristlõigu aluspunkt sirgel s ongi punkti A projektsioon. Sirget s nimetatakse **projektsiooni kandjaks**. Niisiis

punkti projektsiooniks sirgel nimetatakse sellest punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu aluspunkti.



Joon. 110



Joon. 111

Joonisel 111 on antud sirge s ja sirglõigud BC, DE, KL ja MN. Selleks, et leida näiteks sirglõigu BC projektsioon, tuleb leida selle lõigu kõigi punktide projektsioonid sirgel s. Leidnud esmalt lõigu otspunktide B ja C projektsioonid B_1 ja C_1, on ilmne, et kõigi B ja C vahel olevate punktide projektsioonid langevad sirgele s punktide B_1 ja C_1 vahele. Seepärast piisab sirglõigu projektsiooni leidmiseks sirglõigu otspunktide projektsioonide leidmisest. Järelikult lõigu BC projektsiooniks sirgel s on lõik B_1C_1. Samuti arutledes veendume, et lõigu DE projektsiooniks on D_1E_1 ning lõigu KL projektsiooniks K_1L_1. Viimasel juhtumil langevad punktid K ja K_1 ühte; seda asjaolu märgitakse sümbolites nii: $K_1 \equiv K$ (loe: punkt K_1 on samane punktiga K). Lõigu MN projektsiooniks on aga punkt $M_1 \equiv N_1$, sest selle lõigu kõigi punktide projektsioonid langevad ühte ja samasse punkti.

570. Kuidas oleneb antud sirglõigu projektsiooni pikkus selle sirglõigu asendist projektsiooni kandja suhtes? Millise asendi puhul on projektsioon suurima pikkusega? Vähima pikkusega?

571. Sirglõigu pikkus on 5,7 cm ja ta pikendus moodustab teise sirgega s nurga 15° (joon. 112). Kui pikk on selle sirglõigu projektsioon sirgel s?

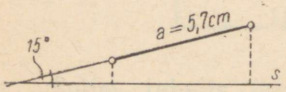
572. Kolmnurga ABC küljed on: $AB=26$ cm ja $BC=25$ cm (joon. 113). Kolmandale küljele tõmmatud kõrgus $BD=24$ cm. Kui pikad on antud külgede projektsioonid (AD ja CD) küljel AC? (*10 cm* ja *7 cm*)

573. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk $\alpha=62°$ ja haar 14,5 cm. Kui pikad on haarade projektsioonid alusel? (*6,8 cm*)

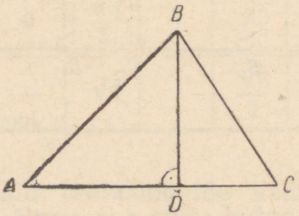
574. Võrdhaarse trapetsi haar on 41 cm ja kõrgus 9 cm. Leida haarade projektsioonid trapetsi pikemal alusel. (*40 cm*)

575. Võrdhaarse kolmnurga haar on 29 cm ja haarale tõmmatud kõrgus 20 cm. Kui suured on haara ja aluse projektsioonid teisel haaral (joon. 114)? (*21 cm; 8 cm*)

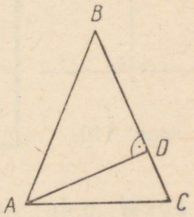
Näpunäide. Haara AB projektsioon haaral BC on lõik BD ning aluse AC projektsioon samal haaral — lõik DC.



Joon. 112



Joon. 113



Joon. 114

576. Võrdhaarse kolmnurga haar on 28 cm ja tipunurk $\alpha=64°$. Leida haara ja aluse projektsioonid teisel haaral.

577. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus $h=24$ cm ja üks kaatetitest $a=30$ cm. Kui pikk on selle kaateti projektsioon hüpotenuusil?

§ 51. EUKLEIDESE TEOREEM.

Joonisel 115 on kujutatud täisnurkne kolmnurk ABC, mille hüpotenuusile tõmmatud kõrgus CD olgu h ning kaatetite projektsioonid hüpotenuusil f ja g. Tõestame järgmise teoreemi (Eukleidese[1] teoreem):

täisnurkse kolmnurga kaateti ruut võrdub selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega.

[1] Eukleides — Antiik-Kreeka matemaatik, esimese süstemaatilise geomeetria kursuse looja (300 a. e. m. a.).

Et tõestus ka mõlema kaateti kohta on ühesugune, siis tõestame teoreemi ainult ühe kaateti, näiteks a kohta. Niisiis tuleb näidata, et $a^2=fc$.

Kolmnurgast ABC saame:

$$\frac{a}{c}=\cos\beta.$$

Kolmnurgast BCD saame:

$$\frac{f}{a}=\cos\beta.$$

Et kahe viimase võrduse paremad pooled on võrdsed, siis peavad olema võrdsed ka vasakud pooled. Seetõttu

$$\frac{a}{c}=\frac{f}{a},$$

millest saame võrde põhiomaduse põhjal, et

$$\boxed{a^2=fc}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Samuti saaksime teise kaateti kohta, et

$$\boxed{b^2=gc}$$

Viimast kaht võrdust võime kirjutada ka teisiti:

$$a=\sqrt{fc} \text{ ja } b=\sqrt{gc}$$

Ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetatakse nende arvude **geomeetriliseks keskmiseks.** Näiteks on arvude 4 ja 9 geomeetriline keskmine $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$; arvude 6 ja 10 geomeetriline keskmine on $\sqrt{6\cdot 10}=\sqrt{60}=7{,}75$.

Toetudes geomeetrilise keskmise mõistele, võime Eukleidese teoreemile anda veel teise sõnastuse:

täisnurkse kolmnurga kaatet on oma projektsiooni ja hüpotenuusi geomeetriline keskmine.

578. Kui pikk on kaatet a, kui hüpotenuus $c=25$ cm ja kaateti a projektsioon $f=16$ cm?

579. Leida kaateti a projektsioon, kui hüpotenuus $c=32$ cm ja kaatet $a=8$ cm.

580. Kui pikk on hüpotenuus c, kui kaatet $b=50$ m ja selle kaateti projektsioon $g=20$ m?

581. Arvutada täisnurkse kolmnurga teine kaatet, kui üks kaatet on 8 cm ja selle kaateti projektsioon 4 cm. (*13,9 cm*)

582. Arvutada täisnurkse kolmnurga pindala, kui selle kolmnurga hüpotenuus on 12 cm ja ühe kaateti projektsioon 5 cm. (*35,5 cm²*)

583. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 5 cm ja 8 cm. Arvutada kolmnurga kaatetid. (*8,06 cm; 10,2 cm*)

Näpunäide. $f+g=c$.

584. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 8,7 cm ja 5,3 cm. Arvutada kolmnurga pindala.

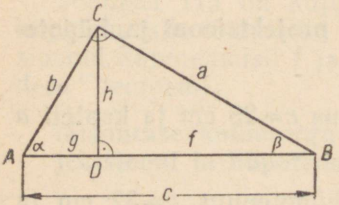
585. Täita järgmine tabel:

a (cm)	3	5	4,5			
b (cm)	4			5,6		
c (cm)		8				17,9
f (cm)			3,5		8,7	6,5
g (cm)				4,1	6,3	

§ 52. KÕRGUSETEOREEM.

Kolmnurgast BCD (joon. 115) saame:

$$\frac{h}{f}=\tan\beta. \qquad (1)$$



Joon. 115

Kolmnurgast ADC saame:

$$\frac{g}{h}=\cot\alpha.$$

Et α ja β on teineteise täiendusnurgad, siis $\cot\alpha=\tan\beta$ ja seega saame viimase võrduse asemele:

$$\frac{g}{h}=\tan\beta. \qquad (2)$$

Võrdusest (1) ja (2) järeldub, et

$$\frac{h}{f} = \frac{g}{h},$$

millest

$$\boxed{h^2 = fg}$$

Saadud võrduses väljendubki teoreem täisnurkse kolmnurga kõrgusest ehk lühidalt kõrguseteoreem:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrguse ruut võrdub kaatetite projektsioonide korrutisega.

Võrdusest $h^2 = fg$ saame, et

$$h = \sqrt{fg}$$

Seega võime kõrguseteoreemi sõnastada ka teisiti:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.

586. Kui pikk on täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus, kui kaatetite projektsioonid on 24 cm ja 6 cm?

587. Kui pikk on hüpotenuusile tõmmatud kõrgus, kui hüpotenuus on 65 cm ja ühe kaateti projektsioon 45 cm?

588. Kui pikk on hüpotenuus, kui temale tõmmatud kõrgus on 15 cm ning ühe kaateti projektsioon 9 cm?

589. Leida täisnurkse kolmnurga pindala, kui kaatetite projektsioonid on 6 cm ja 54 cm.

590. Täisnurkse kolmnurga pindala on 405 cm^2 ja hüpotenuus 45 cm. Leida kaatetite projektsioonid.

Kokkuvõte. Täisnurkse kolmnurga joonelementide vaheliste seoste osas õppisime tundma kolme teoreemi: Pütagorase teoreemi, Eukleidese teoreemi ja kõrguseteoreemi. Sümbolites (joon. 115):

1. $a^2 + b^2 = c^2$ (Pütagorase teoreem)
2. $a^2 = fc$ } (Eukleidese teoreem)
3. $b^2 = gc$ }
4. $h^2 = fg$ (kõrguseteoreem)

Lisaks nendele kasutatakse veel järgmisi seoseid (joon. 115):

5. $a^2 = b^2 + f^2$ (Pütagorase teoreem kolmnurgast BCD)
6. $b^2 = h^2 + g^2$ („ „ „ ACD)
7. $f + g = c$ (Kaatetite projektsioonide summa võrdub hüpotenuusiga)

Antud seitsmes valemis on seotud omavahel täisnurkse kolmnurga kuus joonelementi. Kui nendest elementidest mistahes kaks elementi on antud, siis ülejäänud neli elementi saab toodud valemite abil alati leida.

Näide 1. On antud: $b=15{,}8$ cm; $h=10{,}5$ cm. Leida täisnurkse kolmnurga teised joonelemendid (joon. 115).

Lahendus. Leiame valemite 1—7 hulgast niisuguse, milles esinevad antud elemendid b ja h. Selliseks sobib valem 6, millest

$$g=\sqrt{b^2-h^2}$$

$$g=\sqrt{250-110}=\sqrt{140}=11{,}8 \text{ cm}$$

Ülesande edasisel lahendamisel kasutame valemit, milles esineb üks antud suurus ja äsja leitud suurus g. Selleks sobib valem 4, millest

$$f=\frac{h^2}{g}=\frac{110}{11{,}8}=9{,}32 \text{ cm}$$

Hüpotenuusi c leiame valemist 7:

$$c=f+g=11{,}8+9{,}32=21{,}1 \text{ cm}$$

ning lõpuks kaateti a valemist 2:

$$a=\sqrt{fc}=\sqrt{9{,}32\cdot 21{,}1}=\sqrt{197}=14{,}0 \text{ cm}$$

Vastus. $g=11{,}8$ cm; $f=9{,}32$ cm; $c=21{,}1$ cm; $a=14{,}0$ cm.

Näide 2. On antud: $c=25$ cm ja $h=12$ cm. Leida täisnurkse kolmnurga ülejäänud joonelemendid.

Lahendus. Seekord valemite 1—7 seas pole sellist, mis sisaldab korraga suurused c ja h. Nüüd tuleb võtta kaks valemit, milledest ühes esineb üks antud suurus ja teises teine; ülejäänud kaheks suuruseks aga peavad mõlemas valemis olema ühed ja samad joonelemendid. Sellised kaks valemit koos moodustavad siis kahe tundmatuga võrrandisüsteemi. Antud näite puhul moodustavad sobiva paari valemid 4 ja 7:

$$\begin{aligned} h^2&=fg \\ f+g&=c \end{aligned}$$

Asendades nendes valemites antud suurused (h ja c) arvudega, saame kahe tundmatuga ruutvõrrandisüsteemi tähtede f ja g suhtes (vt. § 31):

$$\begin{cases} fg=144 \\ f+g=25 \end{cases}$$

Lahendame selle süsteemi asendusvõttega.

Teisest võrrandist

$$f=25-g.$$

Asendus esimesse võrrandisse muudab selle ühe tundmatuga võrrandiks g suhtes:

$$(25-g)g=144;\ 25g-g^2=144$$
$$g^2-25g+144=0$$

$$g=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{2}=\frac{25\pm7}{2}$$

$$g_1=9;\ g_2=16$$

Saime g-le kaks väärtust. Seetõttu saame ka f kaks väärtust:

$$f_1=25-g_1=25-9=16$$
$$f_2=25-g_2=25-16=9$$

Niisiis

$$\begin{cases}f_1=16\\g_1=9\end{cases}\qquad\begin{cases}f_2=9\\g_2=16\end{cases}$$

Et mõlemad leitud arvupaarid erinevad teineteisest ainult arvude (kaatetite projektsioonide) järjekorra poolest, siis on siin sisuliselt tegemist üheainsa lahendiga. Olgu $f=16$ cm ja $g=9$ cm.

Ülesannet edasi lahendades saame:

$$a=\sqrt{h^2+f^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20\text{ cm}$$
$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{625-400}=\sqrt{225}=15\text{ cm}$$

Vastus. $f=16$ cm; $g=9$ cm; $a=20$ cm; $b=15$ cm.

Märkus. Käesolevas õpikus õppisime lahendama ainult selliseid ruutvõrrandisüsteeme, kus teine võrrand oli lineaarne (vt. § 31). Seepärast tuleb alljärgnevais ülesannetes süsteemi üheks valemiks võtta ikka valem 7.

591. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 3 cm ja 4 cm. Leida ülejäänud joonelemendid.

592. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on vastavalt 8,3 cm ja 5,6 cm. Leida ülejäänud joonelemendid.

593. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 4,5 cm ja 5,8 cm. Leida ülejäänud joonelemendid.

594. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on 12,5 cm ja ühe kaateti projektsioon on 8 cm. Leida ülejäänud joonelemendid.

595. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 20 cm ja selle kaateti projektsioon on 15 cm. Leida ülejäänud joonelemendid.

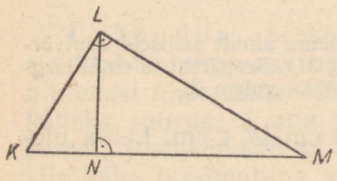
596. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on 9 cm ja hüpotenuus 25 cm. Leida ülejäänud joonelemendid.

597. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 5 cm ja teise kaateti projektsioon on 6 cm. Leida ülejäänud joonelemendid.

598. Täita järgmine tabel (kõik andmed on sentimeetrites):

a	3,2					4,5			16,5
b					21,3		41,1		
c			26,7	13,0				18	25,1
f	2,1		18,4				11,2		
g		6,4			32,5	6,5			
h		4,5		5,2				9	

599. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on 24 cm. Arvutada selle kolmnurga kõik joonelemendid, kui kaatetite projektsioonide vahe on 14 cm.

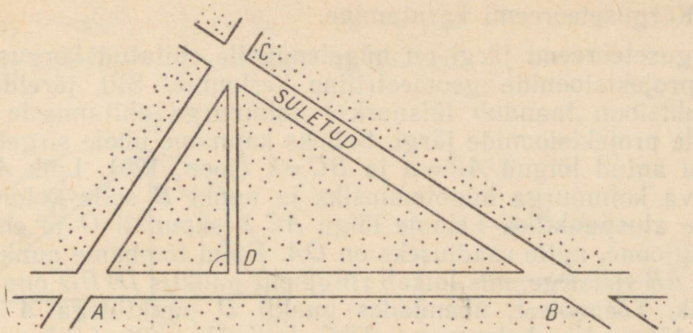


Joon. 116

600. On antud täisnurkne kolmnurk KLM (joon. 116), kus $KL = 8{,}5$ cm ja $LM = 12{,}5$ cm. Mitu protsenti on kolmnurga LMN pindala kolmnurga KLM pindalast? *(68%)*

601. Joonisel 117 on kujutatud täisnurkse kolmnurga kujuline haljasala, mis on piiratud tänavatega. Et tänav BC on remondi tõttu suletud, siis toimub sõidukite liiklus punktist C punkti B mööda tänavaid CA ja AB. Jalakäijad võivad aga kasutada haljasala läbivat rada, mis kulgeb punktist C risti tänavaga AB. Arvutada, kui palju on tänava remondi tõttu pikenenud punktist C punkti B liikuvate sõidukite ja jalakäijate tee, kui $BC = 300$ m ja $CD = 180$ m.

602. Võrdhaarse trapetsi diagonaal on risti haaraga. Trapetsi alused on 12 cm ja 9 cm. Arvutada trapetsi pindala. *(41,6 cm²)*

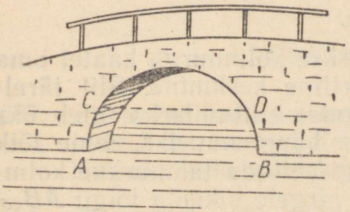


Joon. 117

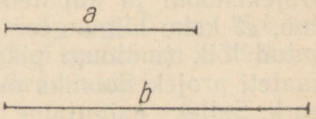
603. Oja voolab torukujuliselt võlvitud silla alt läbi (joon. 118). Suvel madalvee perioodil on oja laius silla all suurim, $AB=2{,}5$ m. Sügisel vihmade perioodil vesi tõuseb nii, et oja laius silla all on $CD=2{,}0$ m. Arvutada nende andmete põhjal veepinna tõus ojas. (*0,75 m*)

§ 53. KAHE LÕIGU GEOMEETRILISE KESKMISE KONSTRUEERIMINE.

Joonisel 119 on antud kaks lõiku: $a=2{,}5$ cm ja $b=4$ cm. Seame ülesandeks leida kolmas lõik x, mis oleks antud lõikude geomeetriline keskmine.



Joon. 118



Joon. 119

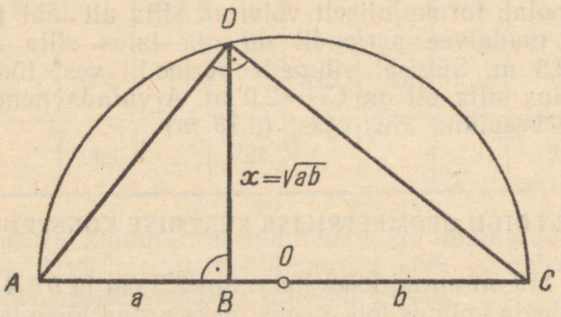
Otsitava pikkuse x võiks leida arvutamisega järgmiselt: $x=\sqrt{ab}=\sqrt{4\cdot 2{,}5}=2\sqrt{2{,}5}=3{,}16\approx 3{,}2$ cm.

Antud lõikude geomeetrilise keskmise saab aga leida ka konstrueerimisel, s. t. ilma arvutusteta ning isegi antud lõigupikkuste mõõtarve teadmata. Selleks on kaks võimalust.

1. Kõrguseteoreemi kasutamine.

Kõrguseteoreemi järgi on hüpotenuusile ehitatud kõrgus kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine. Siit järeldub, et konstruktsioon taandub täisnurkse kolmnurga ehitamisele tema kaatetite projektsioonide järgi. Selleks kanname ühele sirgele järjestikku antud lõigud $AB=a$ ja $BC=b$ (joon. 120). Lõik AC on ehitatava kolmnurga hüpotenuusiks ja punkt B selle kolmnurga kõrguse aluspunktiks. Leiame lõigu AC keskpunkti O ja ehitame poolringjoone, mille raadiuseks on OA. Nüüd tõmbame punktist B sirgele AB ristsirge, mis lõikab ringjoont punktis D. BD ongi otsitav lõik. Tõepoolest, ühendades punkti D punktidega A ja C, saame täisnurkse kolmnurga ADC (miks?), millest kõrguseteoreemi põhjal $x=\sqrt{ab}$.

Mõõtmisel võib veenduda, et $x\approx 3{,}2$ cm.



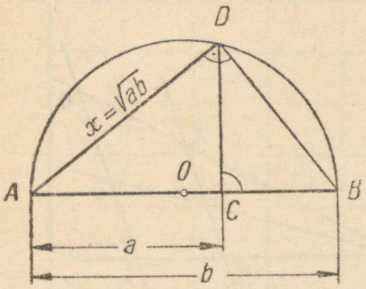
Joon. 120

2. Eukleidese teoreemi kasutamine.

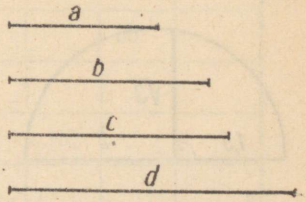
Eukleidese teoreemi järgi on täisnurkse kolmnurga kaatet oma projektsiooni ja hüpotenuusi geomeetriline keskmine. Siit järeldub, et kahe lõigu geomeetrilise keskmise ehitamiseks tuleb üks antud lõik (muidugi pikem lõik) võtta hüpotenuusiks, teine lõik kaateti projektsiooniks ning nende järgi ehitada täisnurkne kolmnurk. Selleks paigutame vabalt võetud sirgele pikema lõigu $AB=b$ (joon. 121). Punktist A kanname lõigule AB veel lõigu $AC=a$. Lõik AB on ehitatava kolmnurga hüpotenuus, punkt C kolmnurga kõrguse aluspunkt ja lõik AC ühe kaateti projektsioon. Leiame lõigu AB keskpunkti O ja ehitame poolringjoone raadiusega AO. Punktist C tõmbame sirgjoonele AB ristsirge; lõigaku see ringjoont punktis D. Lõik AD ongi siis otsitav geomeetriline keskmine (miks?).

604. Joonisel 122 on antud 4 sirglõiku. Konstrueerida lõik x nii, et:

a) $x=\sqrt{ab}$; b) $x=\sqrt{ac}$; c) $x=\sqrt{ad}$
d) $x=\sqrt{bc}$; e) $x=\sqrt{bd}$; f) $x=\sqrt{cd}$



Joon. 121



Joon. 122

605. Joonestada vabalt ristkülik ja joonestada siis ruut, mille pindala on võrdne ristküliku pindalaga.

Näpunäide. Kui ristküliku külgedeks on a ja b, ning otsitava ruudu küljeks x, siis pindalade võrdsuse tõttu $x^2=ab$, millest $x=\sqrt{ab}$.

606. Leida konstruktsiooni teel järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{4}$; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\sqrt{8}$

Näpunäide. Esitada juuritav kahe teguri korrutisena, näiteks $\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 1{,}5}$ või $\sqrt{3}=\sqrt{1\cdot 3}$=jm. Valida ühikuks sobiv lõik ja konstrueerida kahe lõigu geomeetriline keskmine (joon. 123).

Ülesandeid kordamiseks.

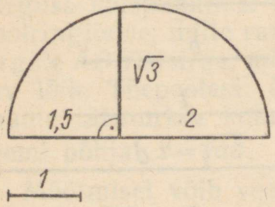
607. On antud kaks kolmnurka: ühe küljed on 13,5 cm; 15,6 cm ja 18,7 cm, teise vastavad küljed on 21,6 cm; 25 cm ja 29,9 cm. Kas nende kolmnurkade küljed on võrdelised?

608. On antud kaks võrdeliste külgedega kolmnurka, kusjuures ühe küljed on $2\frac{1}{2}$ m; $3\frac{1}{5}$ m ja 4 m. Leida teise kolmnurga ümbermõõt, teades, et selle kolmnurga suurim külg on 2 m.

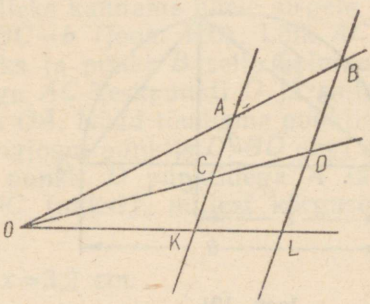
609. Leida jooniselt 124 kõik võrdeliste külgedega kolmnurkade paarid.

610. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on 27° ja hüpotenuus 15,2 cm. Leida selle kolmnurga teine teravnurk, küljed ja pindala.

611. Ringis diameetriga 10 cm on ehitatud kõõl, mis toetub kaarele 120°. Kõõlu otspunktid A ja B on ühendatud ringi keskpunktiga O. Mitu protsenti on kolmnurga OAB pindala ringi pindalast? Mitu protsenti on kolmnurga OAB pindala sektori OAB pindalast?



Joon. 123



Joon. 124

612. Rööpküliku lühem diagonaal $d=12$ cm on risti rööpküliku lühemate külgedega ning moodustab pikema küljega nurga $\alpha=25°$. Arvutada rööpküliku pindala.

613. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on 12 cm ja üks teravnurk 30°. Arvutada selle kolmnurga teine teravnurk, kõik puuduvad joonelemendid (kaatetid, hüpotenuus, kaatetite projektsioonid) ja pindala.

614. Täisnurkse kolmnurga pindala on 24 cm^2 ja üks kaatet 6 cm. Arvutada selle kolmnurga puuduvad joonelemendid ja nurgad.

615. Täita tabel täisnurkse kolmnurga kohta, arvestades, et pikkused on antud sentimeetrites (lk. 237):

Kodune kontrolltöö nr. 5.

1. Alevist kolhoosi keskusse võib minna kas kahe täisnurga all lõikuvat maanteed mööda või otse läbi metsa. Alevist väljusid kolhoosi keskuse suunas üheaegselt jalakäija mööda metsateed ja hobusemees mööda maanteed. Kes jõuab enne kolhoosi, kui jalakäija liikumise kiirus on $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$, hobuse liikumise kiirus on $7\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja kui metsatee pikkus on 10 km ning moodustab maanteega nurga 41°?

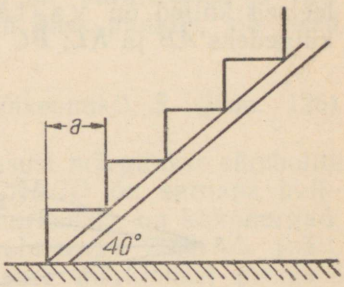
2. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 70% teisest. Leida selle kolmnurga teravnurgad.

a	3					20		
b	4			12				
c		6,5			8		15,6	15
α			30°					
β							60°	
f		3,2						
g						15		
h			7		3			
S (cm²)				60				45

3. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=22,5$ cm ja teise kaateti projektsioon hüpotenuusil on 24 cm. Leida selle kolmnurga pindala.

4. Leida täisnurkse trapetsi pindala, kui trapetsi lühem alus on 7,5 dm ning diagonaalid 1,25 m ja 260 cm.

5. Nelinurga-kujulise põllutüki kaks vastasnurka on täisnurgad. Ülejäänud nurkade tippe ühendav diagonaal on 0,8 km ja moodustab ühest tipust lähtuvate külgedega nurgad 39° ja 42°. Leida põllu pindala hektarites.



Joon. 125

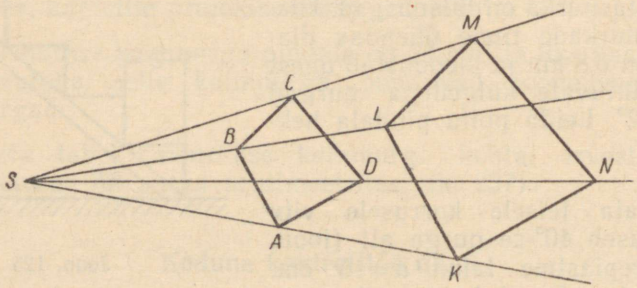
6. Maja teisele korrusele viiv trepp tõuseb 40°-se nurga all (joon. 125). Trepiastme laius $a=16$ cm. Mitu astet on trepil, kui teise korruse põrand on 2,68 m kõrgusel esimese korruse põrandast?

V PEATÜKK

SARNASED HULKNURGAD

§ 54. HULKNURKADE SARNASUSTEISENDUS.

1. Sarnasuse mõiste. Olgu antud hulknurk $ABCD$ (joon. 126). Märgime väljaspool hulknurka vabalt punkti S ja tõmbame sellest punktist kiired läbi antud hulknurga iga tipu. Märgime ühel kiirel, näiteks kiirel SA punkti K. Edasi ehitame $KL \parallel AB$; $LM \parallel BC$ ja $MN \parallel CD$. Lõpuks ühendame punktid K ja N. Kiirteteoreemi põhjal saab näidata, et ka $KN \parallel AD$. Sel teel tekkis joonisele veel teine hulknurk $KLMN$. Hulknurkade $ABCD$ ja $KLMN$ nurgad, mille tipud asetsevad ühel ning samal kiirel, on vastavad nurgad. Nii on vastavad nurgad: $\angle ABC$ ja $\angle KLM$; $\angle BCD$ ja $\angle LMN$; $\angle CDA$ ja $\angle MNK$; $\angle DAB$ ja $\angle NKL$. Hulknurkade paralleelsed küljed on vastavad küljed. Niisiis on vastavateks külgedeks AB ja KL; BC ja LM; CD ja MN; DA ja NK.



Joon. 126

Tõestame, et joonisel 126 olevate hulknurkade vastavad nurgad ning ka vastavate külgede suhted on võrdsed, s. t. küljed on võrdelised (vt. § 33, p. 2):

$$\frac{KL}{AB} = \frac{LM}{BC} = \frac{MN}{CD} = \frac{NK}{DA}$$

Nende hulknurkade vastavate nurkade võrdsus on ilmne, sest kõik need nurgad on vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste

haaradega. Seega jääb veel tõestada hulknurkade külgede võrdelisus.

Selle tõestuseks rakendame kiirteteoreemi järeldust (vt. §34) kolmnurga paaridele SKL ja SAB; SLM ja SBC; SMN ja SCD; SNK ja SDA. Siis saame võrdsete suhete rea

$$\frac{KL}{AB}=\frac{SL}{SB}=\frac{LM}{BC}=\frac{SM}{SC}=\frac{MN}{CD}=\frac{SN}{SD}=\frac{NK}{DA},$$

millest järeldubki vastavate külgede võrdelisus:

$$\frac{KL}{AB}=\frac{LM}{BC}=\frac{MN}{CD}=\frac{NK}{DA}.$$

Kaks hulknurka on sarnased, kui nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed ja küljed võrdelised.

Sarnaste hulknurkade vastavate külgede suhet nimetatakse **sarnasusteguriks** (tähistatakse tähega k). Sarnasustegur näitab, mitu korda on ühe hulknurga iga külg teise, temaga sarnase hulknurga vastavast küljest suurem või vähem.

Niisiis on joonisel 126 kujutatud hulknurgad $ABCD$ ja $KLMN$ sarnased. Kasutades sarnasuse mõistet, võime nüüd tehtud arutluse tulemusena sõnastada järgmise teoreemi:

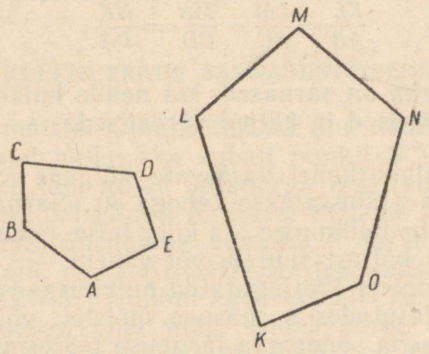
kui kahe hulknurga vastavad küljed on paralleelsed ja vastavaid tippe läbivad sirged lõikuvad ühes punktis, siis need hulknurgad on sarnased.

Vastavaid tippe läbivate sirgete lõikepunkti S (joon. 126) nimetatakse **sarnasuse keskpunktiks.**

Hulknurkade $ABCD$ ja $KLMN$ sarnasust märgitakse sümbolite abil nii: $ABCD \sim KLMN$ (loe: hulknurk $ABCD$ on sarnane hulknurgaga $KLMN$). Kui sarnasteks hulknurkadeks on kolmnurgad, siis märgitakse tähekolmiku ette ka kolmnurga tähis $\triangle$ (näit. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$). Hulknurkade sarnasuse märkimisel peetakse kinni tavast, et vastavate nurkade tippude tähised kirjutatakse ühes ning samas järjekorras. Sel teel on võimalik hulknurkade sarnasuse sümbolilise üleskirjutuse põhjal juba otsustada, missugused küljed on vastavaiks külgedeks. Näiteks võib kirjutise $ABCDE \sim KLMNP$ põhjal öelda, et vastavad küljed on AB ja KL; BC ja LM; ...; EA ja PK.

Hulknurkade sarnasuse üle otsustamisel tuleb alati selgitada, missugused hulknurkade nurgad on vastavad nurgad ja missugused küljed on vastavad küljed. Joonisel 126 kujutatud hulknurkade kohta öeldakse, et nad on sarnasusasendis. Sarnasusasendis olevate hulknurkade vastavaid nurki ja külgi on lihtne leida: nurgad, mille haarad on vastavalt paralleelsed, ongi vastavad nurgad; paralleelsed küljed on vastavad küljed. Kui

hulknurgad ei ole sarnasusasendis (nagu joonisel 127), siis tuleb esiteks selgitada, millised nurgad on vastavad nurgad (toetudes sellele, et vastavad nurgad on võrdsed) ja siis selgitada, millised küljed on vastavad küljed. Olgu teada, et joonisel 127 on $\angle A = \angle N$; $\angle B = \angle O$; $\angle C = \angle K$; $\angle D = \angle L$; $\angle E = \angle M$. Tahtes näiteks teada, milline külg teises hulknurgas vastab küljele CD esimeses hulknurgas, paneme tähele, et $\angle C = \angle K$ ja $\angle D = \angle L$. Küljele CD vastab seega külg KL. Nii võib leida kõik vastavate külgede paarid. Jäägu see lugeja ülesandeks.

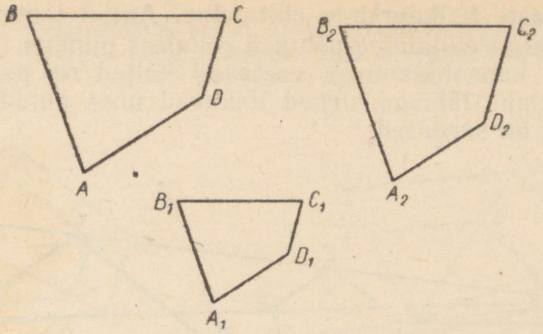


Joon. 127

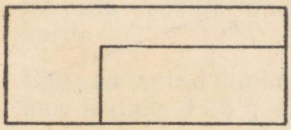
Sarnased hulknurgad on ühesuguse kujuga, kuid erineva suurusega. Seejuures tuleb rõhutada, et hulknurkade sarnasuse korral peab olema täidetud kaks tingimust: 1) vastavate nurkade võrdsus ja 2) külgede võrdelisus. Kui üks neist tingimustest ei ole täidetud, siis ei ole hulknurgad sarnased. Joonisel 128 on kujutatud kolm nelinurka, kus $\angle A = \angle A_1 = \angle A_2$; $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$; ...; $\angle D = \angle D_1 = \angle D_2$. Lugeja võib mõõtmise teel veenduda, et hulknurkade $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ vastavate külgede suhted on võrdsed (mõõtmisvigade piirides), kuid hulknurkade $ABCD$ ja $A_2B_2C_2D_2$ vastavate külgede suhted ei ole võrdsed. Seega $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$, kuid hulknurgad $ABCD$ ja $A_2B_2C_2D_2$ ei ole sarnased.

Olgu lõpuks märgitud, et sarnasuse mõistel on igapäevases tarbekeeles märksa laiem ja ebamäärasem tähendus kui sarnasuse mõistel matemaatikas. Näiteks väljendis «õde ja vend on väga sarnased», ei saa sarnasuse mõistet samastada sarnasuse matemaatilise mõistega.

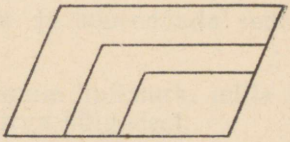
616. Selgitada, kas joonisel 129 olevad ristkülikud on sarnased. Aga joonisel 130 olevad rööpkülikud? Joonisel 131 olevad nelinurgad (vastavad nurgad on tähistatud ühe ning sama tähega?)



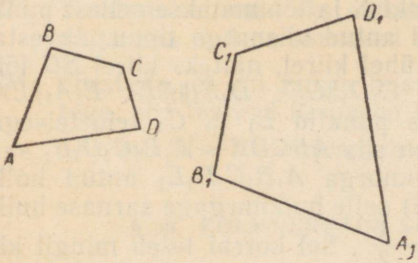
Joon. 128



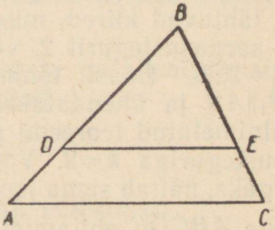
Joon. 129



Joon. 130



Joon. 131



Joon. 132

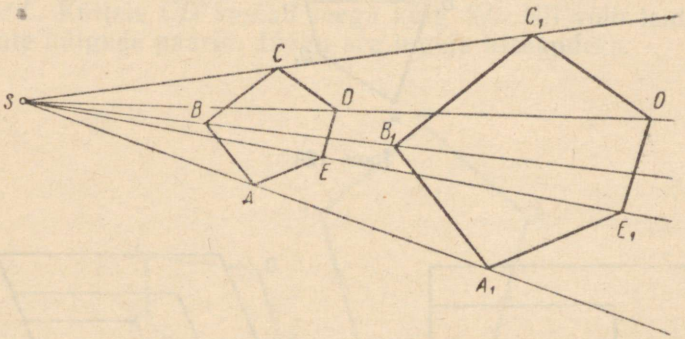
617. Joonisel 132 on $DE \parallel AC$. Tõestada, et $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.

Näpunäide. Vt. kiirteteoreemi järeldust § 34.

618. Ühe hulknurga küljed on 2,8 m, 42 dm, 350 cm, 5,6 m ja 49 dm. Temaga sarnase hulknurga lühim külg on 1,4 cm. Kui suured on teised hulknurga küljed?

619. Ühe nelinurga küljed on 11,2 m, 119 dm, 980 cm ja 9,1 m. Temaga sarnase hulknurga pikim külg on 5,6 m. Leida hulknurga teised küljed ja hulknurkade ümbermõõtude suhe.

2. Sarnaste hulknurkade ehitamine. Antud hulknurgaga sarnase hulknurga ehitamine põhineb eelmises punktis tõestatud teoreemil: kui kahe hulknurga vastavad küljed on paralleelsed ja vastavaid tippe läbivad sirged lõikuvad ühes punktis, siis need hulknurgad on sarnased.



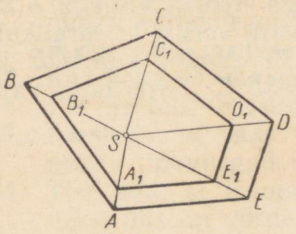
Joon. 133

Joonisel 133 on näidatud viisnurgaga $ABCDE$ sarnase viisnurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ ehitamine, kui sarnasustegur $k=2$. Selleks valitakse vabalt sarnasuskeskpunkt S ja tõmmatakse sellest punktist lähtuvad kiired, mis läbivad antud viisnurga tippu. Arvestades sarnasustegurit 2, võetakse ühel kiirel, näiteks kiirel SC lõik $SC_1=2SC$. Edasi tõmmatakse $C_1D_1 \| CD$; $D_1E_1 \| DE$; $E_1A_1 \| EA$; $A_1B_1 \| AB$ ja ühendatakse lõpuks punktid B_1 ja C_1 teineteisega. Ülalnimetatud teoreemi põhjal on siis $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$ sarnasusteguriga $k=2$. Võttes hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ antud hulknurgaks, näitab sama joonis (133) selle hulknurgaga sarnase hulknurga $ABCDE$ ehitamist, kui $k=\frac{1}{2}$. Sel korral tuleb mingil kiirel, näiteks kiirel SA_1 valida punkt A, nii et $SA=\frac{1}{2}SA_1$ ja tõmmata siis $AB \| A_1B_1$; $BC \| B_1C_1$; $CD \| C_1D_1$; $DE \| D_1E_1$ ning ühendada lõpuks punktid E ja A teineteisega.

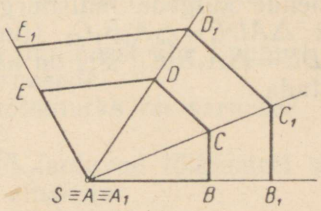
Antud hulknurgaga sarnase hulknurga ehitamist nimetatakse **sarnasusteisenduseks.** Kui sarnasustegur $k>1$, siis tähendab sarnasusteisendus antud hulknurga k-kordset suurendamist; kui $k<1$, siis k-kordset vähendamist. Kui $k=1$, siis teisendub antud hulknurk iseendaga võrdseks hulknurgaks; seega on hulknurkade võrdsus sarnasuse erijuhtumiks.

Märkus 1. Hulknurga k-kordne suurendamine (vähendamine) tähendab selle hulknurga külgede (mitte pindala!) k-kordset suurendamist (vähendamist). Hulknurga pindala muutumine sarnasusteisendusel selgub § 58.

Märkus 2. Sarnasuskeskpunkti valik sarnasusteisendusel on vaba. See punkt võib olla väljaspool antud hulknurka, kuid ta võib olla ka hulknurga sees või hulknurka piiraval kontuuril (piirjoonel) (joon. 134, 135).



Joon. 134



Joon. 135

620. Ehitada vabalt mingi nelinurk ja suurendada seda kaks korda.

621. Ehitada antud hulknurgaga sarnane hulknurk, mille küljed moodustaksid 75% antud hulknurga külgedest.

622. Filmikaadrit 9 cm × 12 cm suurendati kolm korda. Leida pildi mõõtmed. Mitu korda on pildi pindala suurem filmikaadri pindalast.

623. Tõestada, et kui kaks antud hulknurka on sarnased kolmandaga, siis nad on sarnased omavahel.

624. Tõestada, et kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis tekivad sarnased kolmnurgad.

Näpunäide. Vt. kiirteteoreemi järeldust § 34.

§ 55. KOLMNURKADE SARNASUSE TUNNUSED.

Matemaatikas ja selle rakendustes tuleb sageli kasutada sarnaseid kolmnurki. Seepärast on tähtis tundma õppida tunnuseid, mille järgi võib otsustada, et antud kolmnurgad on sarnased.

1. I tunnus.

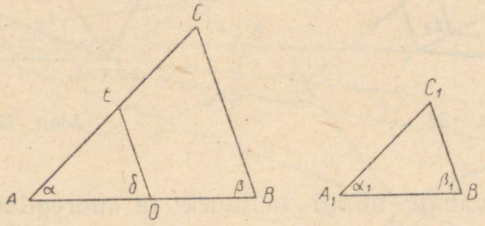
Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga.

Eeldus. $\alpha=\alpha_1$; $\beta=\beta_1$ (joon. 136).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus. Tõestuseks kanname kolmnurga $A_1B_1C_1$ külje A_1B_1 kolmnurga ABC vastavale küljele. Saame $AD=A_1B_1$. Nüüd tõm-

bame $DE \parallel BC$. Siis on $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (kiirteteoreemi põhjal). Näitame, et $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$. Selleks paneme tähele, et $\delta = \beta$ (miks?). Et aga $\beta = \beta_1$ (eeldus), siis ka $\delta = \beta_1$. Seega on kolmnurga ADE üks külg AD võrdne kolmnurga $A_1B_1C_1$ küljega A_1B_1 ja nende külgede lähisnurgad on vastavalt võrdsed. Järelikult ongi $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$ (tunnus NKN). Et $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ja $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$, siis on ka $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Seda oligi vaja tõestada.



Joon. 136

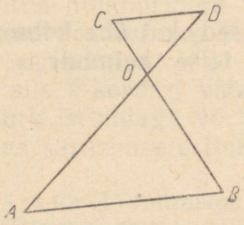
625. Näidata, et kõik võrdkülgsed kolmnurgad on sarnased.

626. Näidata, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga teravnurk võrdub teise kolmnurga teravnurgaga.

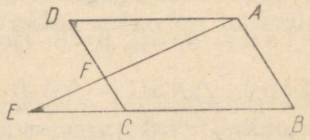
627. Joonisel 137 on $AB \parallel CD$. Tõestada, et $\triangle ABO \sim \triangle DCO$. Välja kirjutada nende kolmnurkade vastavate külgede suhted.

628. Joonisel 138 olev nelinurk $ABCD$ on rööpkülik. Tõestada, et $\triangle AFD \sim \triangle EFC$. Välja kirjutada nende kolmnurkade vastavate külgede suhted.

629. Joonisel 115 on antud täisnurkne kolmnurk ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgusega. Leida sellelt jooniselt kolm sarnaste kolmnurkade paari. Välja kirjutada igas paaris vastavate külgede suhted. Tuletada sel teel Eukleidese ja kõrguseteoreem.



Joon. 137



Joon. 138

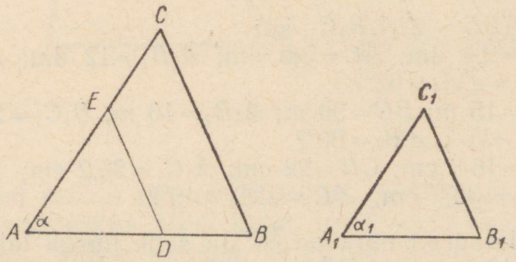
630. Kas kolmnurgad on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on 50° ja 75° ja teise kolmnurga kaks nurka 50° ja 55°?

631. Ühe kolmnurga kaks sisenurka on 48° ja 62°. Teise kolmnurga välisnurgad võrduvad 110° ja 132°. Kas need kolmnurgad on sarnased?

632. Kas kaks võrdhaarset kolmnurka, milledest ühe tipunurk on 124° ja teise alusnurk 28°, on sarnased?

633. Tõestada, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui nende tipunurgad on võrdsed.

634. Tõestada, et trapetsi diagonaalid jaotuvad lõikumisel osadeks, mis on võrdelised trapetsi alustega.



Joon. 139

2. II tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks nurk on võrdne teise kolmnurga ühe nurgaga ja nende nurkade lähisküljed on võrdelised.

Eeldus. $\alpha=\alpha_1$; $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$ (joon. 139).

Väide. $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus. Tõestuseks kanname kolmnurgast $A_1B_1C_1$ nurga α_1 ühe lähiskülje, näiteks A_1B_1 kolmnurga ABC vastavale küljele, saame $AD=A_1B_1$. Tõmbame $DE\parallel BC$, mille tulemusel $\triangle ABC\sim$ $\sim\triangle ADE$. Tõestame, et $\triangle ADE=\triangle A_1B_1C_1$. Et $\triangle ABC\sim\triangle ADE$, siis

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$$

ehk

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{A_1B_1}$$

Võrreldes viimast võrret eelduses antud võrdega, järeldame, et

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

millest $AE = A_1C_1$. Seega on kolmnurkades ADE ja $A_1B_1C_1$: $\alpha = \alpha_1$ (eeldus); $AD = A_1B_1$ (konstruktsiooni põhjal); $AE = A_1C_1$ (tõestuse põhjal). Järelikult ongi $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$ (tunnus *KNK*). Et $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ja $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$, siis on ka $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

635. Tõestada, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaatetid on võrdelised teise kolmnurga kaatetitega.

636. Kas $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, kui

1) $AB = 2{,}4$ dm; $AC = 3{,}6$ dm; $A_1B_1 = 12$ dm; $A_1C_1 = 18$ dm; $\angle A = \angle A_1 = 62°$?
2) $AB = 15$ m; $BC = 30$ m; $A_1B_1 = 10$ m; $B_1C_1 = 20$ m; $\angle B = 75°$; $\angle B_1 = 60°$?
3) $AC = 16.8$ cm; $CB = 22$ cm; $A_1C_1 = 25{,}2$ cm; $C_1B_1 = 35{,}2$ cm; $\angle C = \angle C_1 = 40°$?

637. Ühe kolmnurga nurk on 65° ja selle nurga lähisküljed võrduvad 13,2 cm ja 15,6 cm. Teise kolmnurga kahe nurga summa on 115° ja nende nurkade vastasküljed 18,5 cm ja 21,8 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

638. Kolmnurga ABC küljel AB on võetud punkt M nii, et $BM : BA = 4{,}2 : 7$. Läbi punkti M on tõmmatud sirge MN, mis jaotab BC osadeks: $BN = 33{,}6$ dm ja $CN = 2{,}24$ dm. Kas tekkinud kolmnurgad on sarnased?

3. III tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga külgedega.

Eeldus.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$ (joon. 140).

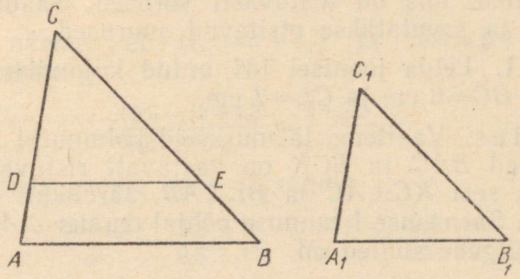
Väide. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus. Tõestuseks kanname kolmnurga $A_1B_1C_1$ ühe külje, näiteks A_1C_1 kolmnurga ABC vastavale küljele. Saame $CD = C_1A_1$. Tõmbame $DE \parallel AB$; siis on $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Näitame jällegi, et $\triangle DEC = \triangle A_1B_1C_1$. Et $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, siis

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CD}$$

Võrreldes saadud võrdsete suhete rida eelduses antud võrdsete suhete reaga, näeme, et nende ridade viimased suhted on võrdsed (sest $CD=C_1A_1$). Järelikult on ka teised suhted võrdsed:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AB}{DE} \quad \text{ja} \quad \frac{BC}{B_1C_1}=\frac{BC}{CE}$$



Joon. 140

Viimasest kahest võrdest järeldub, et $A_1B_1=DE$ ja $B_1C_1=EC$. Seega on kolmnurga DEC kolm külge vastavalt võrdsed kolmnurga $A_1B_1C_1$ kolme küljega; järelikult $\triangle DEC=\triangle A_1B_1C_1$ (tunnus KKK). Et $\triangle ABC\sim\triangle DEC$ ja $\triangle DEC=\triangle A_1B_1C_1$, siis on ka $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$.

639. Kas kaks kolmnurka on sarnased, kui nende küljed on antud järgmiselt:

1) 3 m; 4 m; 2 m ja 9 m; 12 m; 6 m
2) 2,5 dm; 35 cm; 40 cm ja 50 cm; 8 dm; 70 cm
3) 6,6 m; 3,2 m; 7,4 m ja 4,8 cm; 9,9 cm; 11,1 cm
4) 23,2 cm; 3,3 dm; 5,1 dm ja 16,5 cm; 23,6 cm; 33 cm
5) 3,2 cm; 4,8 cm; 6,4 cm ja 1,2 dm; 0,16 m; 8 cm

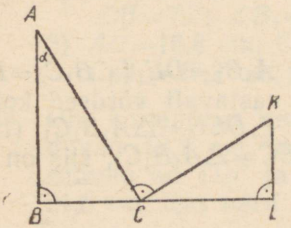
640. Kahe kolmnurga küljed on vastavalt:
a, b, c ja a_1, b_1, c_1. Kas need kolmnurgad on sarnased, kui $a:a_1=2:5$; $c=5$ cm; $c_1=12{,}5$ cm; $b=8$ cm; $b_1=20$ cm?

641. Kahe kolmnurga küljed on vastavalt: a, b, c ja a_1, b_1, c_1. Kas need kolmnurgad on sarnased, kui $a:a_1=4:5$; $c=8$ cm; $c_1=10$ cm; $b_1+b=36$ cm; $b_1-b=4$ cm?

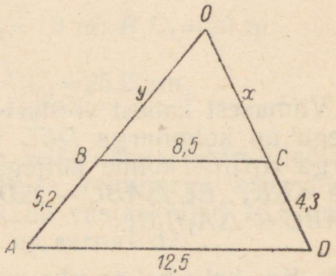
Kolmnurkade sarnasus leiab laialdast rakendamist mitmesuguste ülesannete lahendamisel. Selliste ülesannete lahendamisel on oluline valmistada korralik joonis (juhtumil, kui joonist ei ole antud koos ülesande tekstiga) ja leida sellelt sarnased kolmnurgad, kui neid on. Lahendamisel kirjutatakse välja nende vastavate külgede suhted, mis on teatavasti võrdsed. Saadud võrdustest avaldatakse ja arvutatakse otsitavad suurused.

Näide 1. Leida joonisel 141 antud kujundist lõik KL, kui $AB=10$ cm; $BC=6$ cm ja $CL=7$ cm.

Lahendus. Vaatleme täisnurkseid kolmnurki ABC ja KLC. Nende nurgad BAC ja LCK on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, sest $KC\perp AC$ ja $BL\perp AB$. Järelikult on need nurgad võrdsed. Sarnasuse I tunnuse põhjal on siis $\triangle ABC\sim\triangle CLK$. Vastavate külgede suhted on



Joon. 141



Joon. 142

$$\frac{KL}{CB}=\frac{CL}{AB}=\frac{CK}{AC}$$

Kahest esimesest suhtest saame võrde, millest leiamegi otsitava lõigu:

$$\frac{KL}{BC}=\frac{CL}{AB}$$

$$KL=\frac{BC\cdot CL}{AB}=\frac{6\cdot 7}{10}=4{,}2\text{ cm}$$

Vastus. $KL=4{,}2$ cm.

Näide 2. Trapetsi alused on 12,5 cm ja 8,5 cm, haarad 4,3 ja 5,2 cm. Kui palju on haarasid vaja pikendada, et nad lõikuksid?

Lahendus. Pikendanud trapetsi haarasid kuni lõikumiseni punktis O (joon. 142), tekib kaks sarnast kolmnurka:

$\triangle OBC \sim \triangle OAD$. Otsitavaiks lõikudeks on $OB=y$ ja $OC=x$. Sarnaste kolmnurkade vastavate külgede suhted on võrdsed:

$$\frac{AD}{BC}=\frac{OD}{OC}=\frac{OA}{OB}$$

ehk

$$\frac{12,5}{8,5}=\frac{OD}{x}=\frac{OA}{y}$$

Jooniselt näeme, et $OD=x+4,3$ ja $OA=y+5,2$. Pärast asendamist saame

$$\frac{12.5}{8,5}=\frac{x+4,3}{x}=\frac{y+5.2}{y},$$

millest omakorda saame kaks võrrandit:

$$\frac{x+4,3}{x}=\frac{12,5}{8,5} \quad \text{ja} \quad \frac{y+5.2}{y}=\frac{12,5}{8,5}$$

Lahendame nendest esimese võrrandi:

$$8,5x+8,5\cdot 4,3=12,5x;\ 4x=36,5$$
$$x=9,13$$

Teise võrrandi lahendamine jääb lugeja ülesandeks.

642. Kolmnurga ABC küljel AB on punkt D ja küljel BC punkt E, kusjuures $DE \| AC$. Leida:

1) AC, kui $AD=5$ cm; $DB=3$ cm; $DE=4$ cm. (*10,7 cm*)
2) AB, kui $AD=4$ cm; $DE=6$ cm; $AC=8$ cm. (*16 cm*)

643. Kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ on $\angle A=\angle A_1$ ja $\angle B=\angle B_1$. Leida:

1) A_1B_1 ja B_1C_1, kui $AB=42$ mm; $BC=63$ mm; $CA=36$ mm; $C_1A_1=24$ mm. (28 mm; 42 mm)
2) AB, A_1C_1 ja A_1B_1, kui $BC=3,5$ cm; $AC=2.5$ cm; $B_1C_1=2.8$ cm; $AB+A_1B_1=9$ cm. (*5 cm; 2 cm; 4 cm*)
3) AC, A_1C_1 ja A_1B_1, kui $BC=28$ mm; $AB=42$ mm; $B_1C_1=21$ mm; $AC=A_1C_1=15$ mm. (*60 mm; 45 mm; 31,5 mm*)

644. Kolmnurkades ABC ja DEF on $\angle A=\angle E$ ja $\angle C=\angle D$. Leida:

1) BC, ED ja DF, kui $AB=1,6$ cm; $AC=2$ cm; $EF=1.2$ cm ja külg BC on küljest DF 0,3 cm võrra pikem. (*1,2 cm; 1,5 cm; 0,9 cm*)
2) AB, EF, BC ja DF, kui $CA=6$ mm; $ED=10$ mm ja kui $AB+EF=24$ mm; $BC+DF=32$ mm. (*9 mm; 12 mm; 15 mm; 20 mm*)

645. Trapetsi alused on 16,4 cm ja 12,2 cm; haarad võrduvad 6 cm ja 8 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuvad?

646. Võrdhaarses kolmnurgas, mille haar 8 cm ja alus 5,6 cm, on tõmmatud alusega paralleelne lõik, mille pikkus võrdub 3 cm. Leida tekkinud trapetsi haar.

647. Joonisel 137 on $AB \| CD$. Leida:

1) OC ja OA, kui $AB=8{,}4$ cm; $CD=5{,}6$ cm; $OD=4{,}8$ cm; $OB=5{,}2$ cm

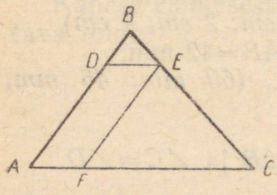
2) OA, OD, OB ja OC, kui $CD=6{,}8$ mm; $AB=17$ mm; $OA+OD=19{,}6$ mm; $OB-OC=9{,}6$ mm (*14 mm; 5,6 mm; 16 mm; 6,4 mm*)

648. Kolmnurga lõikamisel ühe külje paralleeliga tekib trapets, mille alused on 10,6 cm ja 8,2 cm ning haarad 4,2 cm ja 2,8 cm. Leida antud kolmnurga küljed.

649. Kolmnurk on lõigatud sirgega, mis on paralleelne kolmnurga 8,8 cm pikkuse küljega. See sirge jaotab kolmnurga teise külje, mille pikkus on 12,6 cm, osadeks, mis suhtuvad esimese külje poolt alates nagu 4 : 5. Leida kolmnurga sees olev lõikaja lõik. Kas kõik toodud andmed on ülesande lahendamiseks tarvilikud?

650. Võrdhaarse trapetsi alused on 28,6 cm ja 20,8 cm ning diagonaal 24,5 cm. Kui pikkadeks lõikudeks jaotuvad diagonaalid lõikumisel? (*14,2 cm, 10,3 cm*)

651. Võrdhaarse trapetsi diagonaalid jagunevad lõikepunktis osadeks 15,6 ja 7,8 cm. Lühem alus on 6,4 cm. Kui pikk on trapetsi kesklõik?



Joon. 143

652. Kolmnurka ABC on ehitatud rööpkülik (joon. 143). Leida kolmnurga külg AC, kui rööpküliku küljed on 6 cm ja 5 cm ning $AB=17$ cm. (*7,73 cm*)

653. Kolmnurka ABC on ehitatud rööpkülik (joon. 143), mille küljed suhtuvad nagu 1 : 3. Leida rööpküliku küljed, kui $AB=24$ cm ja $AC=36$ cm. (*6,5 cm; 19,5 cm*)

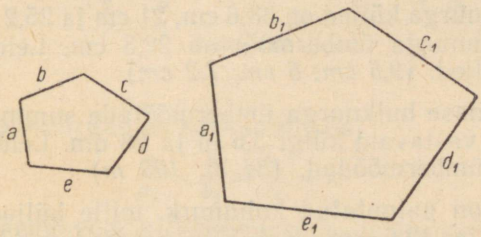
654. On antud kaks sarnast kolmnurka. Ühe kolmnurga küljed on 12,6 cm, 15,2 cm ja 16,8 cm. Arvutada teise kolmnurga küljed, kui sarnasustegur on 1,5. Leida kummagi kolmnurga ümbermõõt ja arvutada nende ümbermõõtude suhe.

655. On antud kaks sarnast kolmnurka. Ühe kolmnurga küljed on 12,6 cm, 16,4 cm ja 18,4 cm. Teise kolmnurga suurim külg on 9,2 cm. Leida kummagi kolmnurga ümbermõõt. Arvutada nende ümbermõõtude suhe ja võrrelda seda vastavate külgede suhtega.

§ 57. SARNASTE HULKNURKADE ÜMBERMÕÕTUDE SUHE.

Ülesannete 654 ja 655 lahendamisel selgus, et seal antud kolmnurkade ümbermõõtude suhe on võrdne vastavate külgede suhtega. Kas see on juhuslikult nõnda või on see sarnaste hulknurkade üldine omadus? Vastuse annab järgmine teoreem.

Sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhtega.



Joon. 144

Joonisel 144 on kujutatud kaks sarnast hulknurka vastavate külgedega a ja a_1; b ja b_1; ...; e ja e_1. Et hulknurgad on sarnased, siis on nende vastavate külgede suhted võrdsed:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\ldots=\frac{e}{e_1}=k,$$

millest

$$a=ka_1$$
$$b=kb_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$e=ke_1$$

Liites nende võrduste vasakud pooled omavahel ja paremad pooled omavahel, saame:

$$a+b+\ldots+e=ka_1+kb_1+\ldots+ke_1$$

ehk

$$a+b+\ldots+e=k(a_1+b_1+\ldots+e_1)$$

Viimase võrduse vasakul poolel on joonisel oleva esimese hulknurga külgede summa ehk selle hulknurga ümbermõõt u.

Võrduse paremal pool sulgudes on teise hulknurga külgede summa ehk teise hulknurga ümbermõõt u_1. Seega

$$u = ku_1,$$

millest

$$\frac{n}{u_1} = k$$

Siit selgubki, et ümbermõõtude suhe on võrdne vastavate külgede suhtega.

656. Kahe sarnase hulknurga üks paar vastavaid külgi on 5 cm ja 8 cm. Leida nende hulknurkade ümbermõõtude suhe.

657. Kahe sarnase hulknurga üks paar vastavaid külgi on 5,3 cm ja 10,6 cm. Vähema hulknurga ümbermõõt on 29,7 cm. Leida suurema hulknurga ümbermõõt. (*59,4 cm*)

658. Ühe kolmnurga küljed on 33,6 cm, 21 cm ja 25,2 cm. Teise, sarnase kolmnurga ümbermõõt on 22,8 cm. Leida teise kolmnurga küljed. (*9,6 cm; 6 cm; 7,2 cm*)

659. Kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude summa on 192 m ja üks paar vastavaid külgi 3,6 m ja 28 dm. Leida nende hulknurkade ümbermõõdud. (*84 m; 108 m*)

660. Traadist on painutatud kolmnurk, mille küljed on 16,8 cm, 10,5 cm ja 12,6 cm. Kui pikast traadist saab painutada temaga sarnase kolmnurga, mille lühim külg on 9 cm?

661. Kahe sarnase kolmnurga ümbermõõtude vahe on 96 cm ja vastavate külgede suhe 1 : 3. Leida nende kolmnurkade ümbermõõdud.

662. Hulknurga üks külgedest on 3,2 cm, temaga sarnase hulknurga vastav külg 4 cm. Kui suur on teise hulknurga ümbermõõt, kui esimese oma on 22,4 cm?

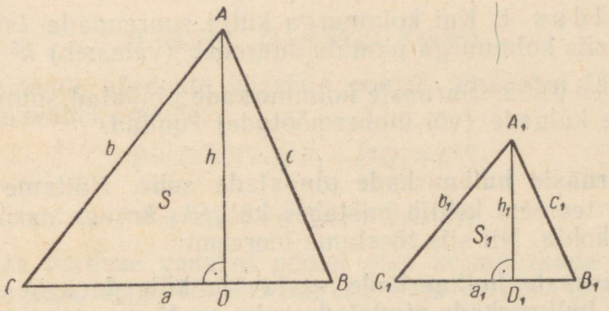
663. Kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude summa on 150 cm ja vastavate külgede suhe on $\frac{3}{2}$. Leida nende hulknurkade ümbermõõdud.

664. Hulknurga küljed on 14,4 cm; 2,16 dm; 0,18 m; 19,2 cm ja 32,4 cm. Temaga sarnase hulknurga ümbermõõt on 44 cm. Leida teise hulknurga küljed.

§ 58. SARNASTE HULKNURKADE PINDALADE SUHE.

Selgitame, kas ka sarnaste hulknurkade pindalade suhtel on mingi iseloomulik omadus, nagu nende ümbermõõtude suhetel. Alustame sarnaste kolmnurkade pindalade suhte uurimisest.

1. Sarnaste kolmnurkade pindalade suhe. Joonisel 145 on antud kaks sarnast kolmnurka, millede vastavad küljed on a ja a_1; b ja b_1; c ja c_1. Külgedele a ja a_1 on tõmmatud kõrgused vastavalt h ja h_1. Kolmnurkade pindalad tähistame tähtedega S ja S_1.



Joon. 145

Et antud kolmnurgad on sarnased, siis

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k \qquad (1)$$

Jooniselt näeme veel, et kolmnurkade sarnasuse I tunnuse põhjal on $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$. Järelikult on

$$\frac{h}{h_1} = \frac{b}{b_1}$$

Arvestades võrduste rida (1) võime siis kirjutada:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{h}{h_1} = k \qquad (2)$$

Et kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega, siis

$$S = \frac{ah}{2} \quad \text{ja} \quad S_1 = \frac{a_1b_1}{2}$$

Leiame pindalade suhte:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a_1b_1}{2}} = \frac{ah}{a_1h_1} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{h}{h_1}$$

Et võrduste rea (2) põhjal

$$\frac{a}{a_1} = k \quad \text{ja} \quad \frac{h}{h_1} = k,$$

siis saame, et

$$\frac{S}{S_1} = k \cdot k = k^2$$

Tulemuse võime sõnastada teoreemina järgmiselt.

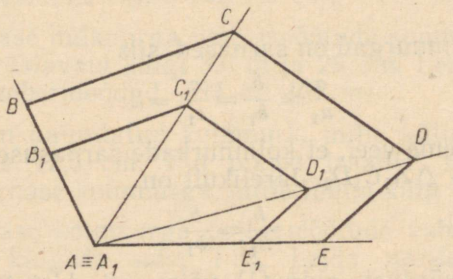
Kui sarnaste kolmnurkade vastavate külgede suhe on k, siis nende kolmnurkade pindalade suhe on k^2.

Järeldus 1. Kui kolmnurga külgi suurendada (vähendada) k korda, siis kolmnurga pindala suureneb (väheneb) k^2 korda.

Järeldus 2. Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede (või ümbermõõtude) ruudud.

2. Sarnaste hulknurkade pindalade suhe. Näitame nüüd, et tõestatud teoreem kehtib mistahes külgede arvuga sarnaste hulknurkade kohta. Nii siis tõestame teoreemi:

kui sarnaste hulknurkade vastavate külgede suhe on k, siis nende hulknurkade pindalade suhe on k^2.



Joon. 146

Joonisel 146 on antud hulknurk $ABCDE$. Samale joonisele on ehitatud antud hulknurga sarnane hulknurk nii, et sarnasuse keskpunktiks on valitud antud hulknurga üks tipp. Sarnasuse tõttu on

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}=k.$$

Sarnasusteisenduse tõttu on tekkinud rida paarikaupa sarnaseid kolmnurki:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1;\quad \triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1;$$
$$\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1$$

Nende kolmnurkade vastavate külgede suhe on samuti k. Eelmise teoreemi põhjal on siis nende $\triangle$-ade pindalade suhe k^2. Tähistades joonisel olevate suuremate kolmnurkade pindalad

tähtedega P, Q ja S vastavate vähemate kolmnurkade pindalad tähtedega P_1, Q_1, S_1, saame:

$$\frac{P}{P_1}=k^2;\ \frac{Q}{Q_1}=k^2;\ \frac{S}{S_1}=k^2,$$

millest

$$P=k^2P_1;\quad Q=k^2A_1;\quad S=k^2S_1$$

Liites nende võrduste vasakud pooled omavahel ja paremad pooled omavahel, saame:

$$P+Q+S=k^2P_1+k^2Q_1+k^2S_1$$

ehk

$$P+Q+S=k^2(P_1+Q_1+S_1)$$

Viimase võrduse vasakul poolel olev kolmnurkade pindalade summa on hulknurga $ABCDE$ pindala U ja võrduse paremal poolel sulgudes olev kolmnurkade pindalade summa on hulknurga $AB_1C_1D_1E_1$ pindala U_1.
Niisiis

$$U=k^2U_1,$$

millest

$$\frac{U}{U_1}=k^2$$

Seda oligi vaja tõestada.

Märkus. Esitatud tõestuskäik kehtib mistahes külgede arvuga sarnaste kolmnurkade kohta.

Järeldus 1. **Kui hulknurga kõiki külgi suurendada (vähendada) k korda, siis hulknurga pindala suureneb (väheneb) k^2 korda.**

Järeldus 2. **Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede (või ümbermõõtude) ruudud.**

Lahendame õpitud teoreemi rakendusena järgmise ülesande: kahe sarnase hulknurga ümbermõõdud suhtuvad nagu 5:4. Arvutada hulknurkade pindalad, kui nende pindalade vahe on 99 cm².

Lahendus. Olgu suurema hulknurga pindala S cm², vähema hulknurga pindala on siis $(S-99)$ cm². Et nende hulknurkade sarnasustegur on $\frac{5}{4}$, siis saame viimase teoreemi põhjal võrrandi

$$\frac{S}{S-99}=\left(\frac{5}{4}\right)^2 \text{ ehk } \frac{S}{S-99}=\frac{25}{16},$$

millest

$$25S-99\cdot 25=16S$$
$$9S=99\cdot 25\ |\ :9$$
$$S=11\cdot 25;\quad S=275$$

Suurema hulknurga pindala on seega 275 cm^2; vähema pindala (275−99=) 176 cm^2.

Vastus: Hulknurkade pindalad on 275 cm^2 ja 176 cm^2.

665. Mitu korda suureneb hulknurga pindala, kui hulknurga kõiki külgi suurendada 2; 3; 4; 10; 1,5; 2,3; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ korda?

666. Mitu korda vähenesid hulknurga küljed, kui hulknurga sarnasusteisendusel hulknurga pindala vähenes 4; 9; 16; 2,25; 1,69; 3; 5 korda?

667. Sarnaste hulknurkade üks paar vastavaid külgi on 3,2 m ja 2,4 m. Leida nende hulknurkade pindalade suhe.

668. Sarnaste hulknurkade pindalade suhe on 19,6. Kuidas suhtuvad nende hulknurkade küljed?

669. On kaks sarnast hulknurka sarnasusteguriga 1,5. Leida suurema hulknurga pindala, kui vähema pindala on 2 m^2. (*4,5 m^2*)

670. Kahe sarnase hulknurga ümbermõõdud on 64 cm ja 16 cm. Kui suur on vähema hulknurga pindala, kui suurema pindala on 320 cm^2? (*20 cm^2*)

671. Sarnaste hulknurkade pindalade suhe on 2,25. Suurema hulknurga ümbermõõt on 27 dm. Kui suur on vähema hulknurga ümbermõõt?

672. Kahe sarnase hulknurga sarnasustegur on 3. Arvutada hulknurkade pindala, kui nende pindalade summa on 300 dm^2. (*270 dm^2; 30 dm^2*)

673. Kahe sarnase hulknurga pindalade summa on 442 dm^2 ja üks paar vastavaid külgi on 17,5 dm ja 10,5 dm. Leida nende hulknurkade pindalad.

674. Kahe sarnase hulknurga ümbermõõdud suhtuvad nagu 2:3. Leida hulknurkade pindalad, kui nende pindalade vahe on 250 m^2.

675. Kahe sarnase hulknurga pindalad on 400 dm^2 ja 16 m^2. Leida vähema hulknurga ümbermõõt, kui suurema ümbermõõt on 68 cm. (*34 cm*)

676. Kahe sarnase ristküliku diagonaalid on 35 cm ja 40 cm. Vähema ristküliku pindala on 539 cm^2. Kui suur on suurema ristküliku pindala?

Näpunäide. Näidata, et sarnaste ristkülikute diagonaalid suhtuvad nagu vastavad küljed.

677. Kolmnurkset muruplatsi ümbritseb ühelaiune kõnnitee, mille sisemise ääre ümbermõõt on 80 m ja väline ümbermõõt 120 m. Tee pindala on 90 m². Kui suur on muruplatsi pindala? (*72 m²*)

678. Pargi lillepeenar on kujult romb, mille diagonaalid on 15 m ja 20 m. Peenart ümbritseb ühelaiune murutiriba, mille väline ümbermõõt võrdub 60 m. Kui suur on murutiriba pindala?

679. On kaks sarnast kolmnurka, millede üks paar vastavaid külgi on 16,8 cm ja 10,6 cm. Suuremas kolmnurgas on antud küljele tõmmatud kõrgus 12,3 cm. Arvutada vähema kolmnurga pindala. (*41,2 cm²*)

680. Kahe sarnase täisnurkse kolmnurga sarnasustegur on 2,9. Arvutada suurema kolmnurga pindala, kui vähema kolmnurga teravnurk on 30° ja selle nurga vastaskaatet 3,2 cm. (*74,5 cm²*)

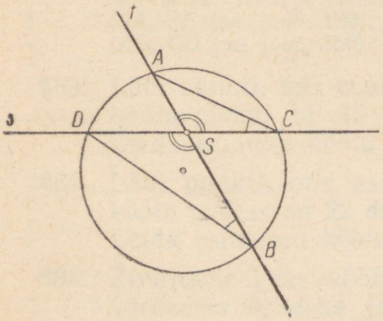
§ 59. RINGJOONE LÕIKAJATE OMADUS.

Toetudes kolmnurkade sarnasusele, saab tõestada ringjoone lõikajate järgmise tähtsa omaduse.

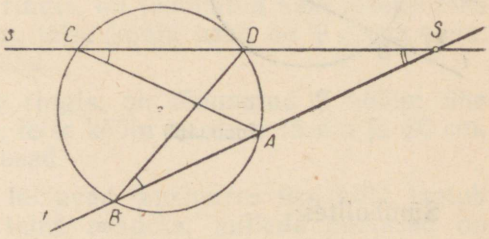
Kui ringjoonel mitteasetsevast punktist *S* on tõmmatud ringjoonele kaks lõikajat, siis on ühel lõikajal punktist *S* kuni ringjooneni võetud lõikude korrutis võrdne teisel lõikajal samal viisil võetud lõikude korrutisega.

Lõikajate *s* ja *t* lõikepunkt *S* võib teoreemi kohaselt asetseda kas seespool ringjoont (joon. 147) või väljaspool ringjoont (joon. 148). Lõikaja *t* osadeks punktist *S* kuni ringjooneni on mõlemal joonisel lõigud *SA* ja *SB* ning lõikaja *s* vastavaiks lõikudeks *SC* ja *SD*. Tuleb tõestada, et mõlemal juhtumil on

$$SA \cdot SB = SD \cdot SC.$$



Joon. 147



Joon. 148

Esitatav tõestus kehtib korraga mõlema joonise kohta.

Ühendame omavahel punktid B ja D ning A ja C. Tekib kaks kolmnurka: SBD ja SAC. Nendes kolmnurkades on: 1) $\angle SBD = \angle SCA$, sest need nurgad on samale kaarele AD toetuvad piirdenurgad; 2) $\angle ASC = \angle DSB$, sest joonisel 147 on nad tippnurgad, aga joonisel 148 ühtivad nurgad. Kolmnurkade sarnasuse esimese tunnuse põhjal on siis $\triangle SAC \sim \triangle SDB$. Et sarnaste kolmnurkade vastavate külgede suhted on võrdsed, siis

$$\frac{SD}{SA} = \frac{SB}{SC},$$

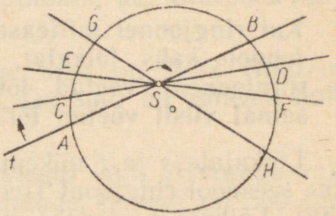
millest

$$SA \cdot SB = SD \cdot SC$$

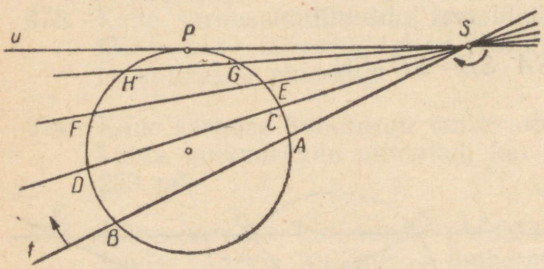
Seda oligi tarvis tõestada.

Tõestatud teoreemi võib tõlgendada ka järgmiselt.

Tõmbame ringjoonele mingi lõikaja t ja valime sellel vabalt mingi punkti S, mis ei asetse ringjoonel. Kujutleme, et lõikaja t pöördub ümber punkti S noolega näidatud suunas (joon. 149 ja joon. 150). Siis jääb lõikaja punktist S kuni ringjooneni võetud lõikude korrutis konstantseks.



Joon. 149



Joon. 150

Sümbolites:

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD = SE \cdot SF = SG \cdot SH \text{ (joon. 149, 150)}$$

Jooniselt 150 näeme veel, et kui lõikaja t, pööreldes ümber punkti S, läheneb puutujale u, siis lõikaja lõigud punktist S kuni ringjooneni lähenevad oma pikkuselt teineteisele (üks suureneb, teine väheneb); kui lõikaja jõuab puutuja asendisse, siis mõlemad lõikaja lõigud saavad võrdseks puutuja lõiguga SP. Järelikult lõikaja lõikude korrutis saab võrdseks puutuja lõigu ruuduga SP^2.

Järeldus. **Kui punktist S tõmmata ringjoonele puutuja ja lõikaja, siis lõikaja lõikude korrutis võrdub puutuja lõigu ruuduga.**

Näide. Ringjoone kaks kõõlu lõikuvad punktis S, mis jaotab ühe kõõlu osadeks pikkusega 3 cm ja 4 cm. Millisteks osadeks jaotub teine kõõl pikkusega 8 cm?

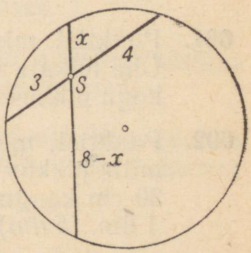
Lahendus. Olgu teise kõõlu ühe osa pikkus x cm, siis teise osa pikkus on $(8-x)$ cm (joon. 151). Õpitud teoreemi põhjal saame võrrandi

$$x(8-x)=3\cdot 4,$$

mille lahendamine annab $x_1=6$; $x_2=2$.

Kõõlu teine osa on siis kas $8-6=2$ cm või $8-2=6$ cm.

Et mõlemad lahendid on sisuliselt ühtivad, siis teine kõõl jaotub osadeks pikkusega 2 cm ja 6 cm.



Joon. 151

681. Kaks ringjoone kõõlu lõikuvad. Lõikepunkt jaotab ühe kõõlu osadeks pikkusega 12 cm ja 5 cm. Teise kõõlu üks osa on 4 cm. Kui pikk on teine osa? (*15 cm*)

682. Ühest ning samast punktist on tõmmatud ringjoonele lõikaja ja puutuja. Lõikaja välisosa on 2 cm ja siseosa on 6 cm. Arvutada puutuja lõik. (*4 cm*)

Märkus. Lõikaja välisosa on lõikaja lõik, mis on väljaspool ringjoont (SA, SE jne. joon. 150); lõikaja siseosa on ringi sees olev lõikaja lõik (AB, CD jne. joon. 150).

683. Läbi punkti, mis asub ringis, on tõmmatud kaks kõõlu. Ühe kõõlu pikkus on 15 cm, teise kõõlu osad on 9 cm ja 4 cm. Leida esimese kõõlu osad.

684. Läbi punkti, mis asub ringis, on tõmmatud 2 kõõlu; ühe kõõlu pikkus on 22 dm, teise kõõlu osad on 15 dm ja 80 cm. Leida esimesed kõõlu osad.

685. Ringjoone kaks kõõlu lõikuvad, kusjuures üks kõõl jaotub võrdseiks osadeks ja teine osadeks, millede pikkused on 2 cm ja 4,5 cm. Leida esimese kõõlu pikkus. (*3 cm*)

686. Läbi punkti, mis asub ringi keskpunktist 4 cm kaugusel, on tõmmatud kõõl. See kõõl jaguneb selles punktis osadeks 4 cm ja 5 cm. Leida ringjoone raadius. (*6 cm*)

687. Läbi punkti, mis asub ringis, on tõmmatud diameeter ja kõõl. Diameetri lõigud suhtuvad nagu 2 : 1, kõõlu lõigud on 8 cm ja 9 cm. Leida ringi raadius. (*9 cm*)

Näpunäide. Kui diameetri üks lõik on x, siis teine lõik on $2x$.

688. Läbi punkti, mis asub ringis, on tõmmatud 2 kõõlu; ühe kõõlu osad suhtuvad nagu 1 : 3, teise kõõlu osad võrduvad 3 cm ja 16 cm. Kui suured on esimese kõõlu osad?

689. Väljaspool ringi asuvast punktist on ringile tõmmatud puutuja ja lõikaja. Kui pikk on puutuja lõik, kui ta on lõikaja välisosast 2 cm ja lõikaja siseosast 1 cm pikem? (*6 cm*)

690. Punktist, mis asub väljaspool ringi, on ringile tõmmatud puutuja ja lõikaja läbi keskpunkti. Puutuja lõigu pikkus on 12 cm, lõikaja välisosa on 6 cm. Kui pikk on ringi raadius? (*9 cm*)

691. Punktist, mis asub väljaspool ringi, on tõmmatud 2 lõikajat. Ühe lõikaja välisosa on 4 cm ja siseosa 23 cm. Teise lõikaja kogu pikkus on 18 cm. Kui pikk on teise lõikaja välisosa?

692. Punktist, mis asub väljaspool ringi, on tõmmatud puutuja, mille pikkus on 3 dm, ja lõikaja, mis asub ringi keskpunktist 30 cm kaugusel. Leida ringi raadius, kui lõikaja välisosa on 1 dm. (*5 dm*)

§ 60. ARVMÕÕT JA JOONMÕÕT.

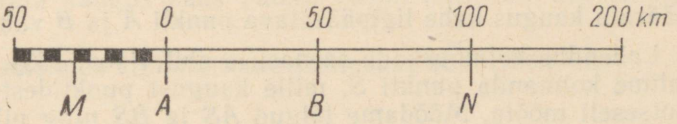
Hulknurkade sarnasus leiab rakendamist maatükkide plaanistamisel. Nimelt, kui maatükk on sellise suurusega, et ei ole vaja arvestada maakera pinna kõverust, siis ehitatakse maatüki plaanistamisel selle maatükiga sarnane vähendatud kujund. Plaanile kirjutatakse juurde plaani arvmõõt kahe täisarvu suhtena, kusjuures suhte esimeseks arvuks on ikka 1. Näiteks 1 : 50; 1 : 100; 1 : 400.

Märkus. Kui suhte teine arv on suurem kui 10 000, siis on tegemist juba maakaardiga, mille valmistamisel on arvestatud ka maapinna kõverust.

Plaani arvmõõt on plaani ja maatüki vastavate pikkuste suhe. Niisiis tähendab arvmõõt 1 : 100, et maatükil on iga pikkus 100 korda suurem plaani vastavast pikkusest.

Seega on maatüki plaanistamine sisuliselt maatüki sarnasusteisendus, kus sarnasusteguriks on plaani arvmõõt.

Peale arvmõõdu kasutatakse ka joonmõõtu ehk joonmastaapi, mis näitab, kui pikk lõik plaanil või kaardil vastab tegelikkuses antud pikkusele. Joonisel 152 on kujutatud joonmõõt, mis näitab, et igale lõigule, mille pikkus kaardil on AB, vastab looduses 50 km. Lõigule MN vastab looduses 130 km.



Joon. 152

693. Joonestada arvmõõdule 1 : 50 000 vastav joonmõõt.

694. Plaanil mõõduga 1 : 100 on ristkülikukujulise toa mõõtmed 5 cm × 4,5 cm. Leida toa pindala tegelikkuses.

695. Kaardil mõõduga 1 : 100 000 on kahe linna vaheline kaugus 189 mm. Leida linnadevaheline kaugus tegelikkuses.

696. Kaardil mõõduga 1 : 500 000 on kahe linna vaheline kaugus otsejoones 12,4 cm. Mitme minutiga läbib selle vahemaa lennuk, mille kiirus on $300\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

697. Matkagrupp koostas matkamarsruudi, mille pikkuseks kaardil mõõduga 1 : 250 000 osutus 160 cm. Päevas otsustati matkata keskmiselt 30 km. Kui kauaks oli planeeritud matk?

698. 1964. a. sügisel toimusid olümpiamängud Jaapanis. Kaardi (1 : 20 000 000) järgi on vahemaa Moskva—Tokio otsejoones 39 cm. Kui kaua tuli sportlastel viibida õhus, kui lennu keskmine kiirus on $650\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

699. Järve pindala on kaardil (1 : 15 000) 48 cm^2. Kui suur on selle järve pindala looduses?

700. Internaatkoolile kuuluv territoorium on 24 ha. Kui suur on selle pindala plaanil mõõtkavaga 1 : 4000?

701. Kahe naaberriigi piiri pikkus on kaardil (1 : 25 000) 32 dm. Kui pikk on nende riikide piirjoon kaardil mõõtkavaga 1 : 400 000?

§ 61. PIKKUSTE KAUDNE MÕÕTMINE.

Paragrahvis 36 p. 1 selgitasime kaudse mõõtmise mõistet. Alljärgnevalt vaatleme, kuidas on võimalik teravnurga trigonomeetrilisi funktsioone ja kolmnurkade sarnasust kasutada kahe punkti vahelise kauguse kaudseks mõõtmiseks. Kaks punkti, millede vahelist kaugust mõõdetakse, võivad mõlemad olla ligipääsetavad, neist võib üks olla ligipääsetav või kumbki punkt pole ligipääsetav.

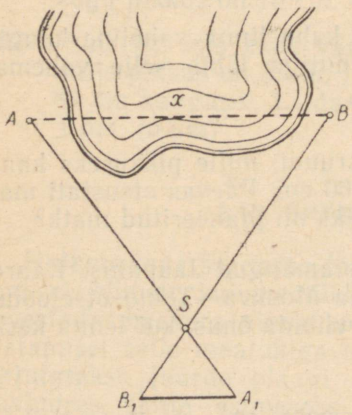
1. Määrata kaugus kahe ligipääsetava punkti A ja B vahel.

1) Lahendus kolmnurkade sarnasuse abil (joon. 153).

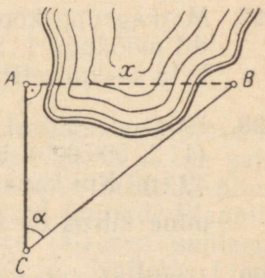
Valime kolmanda punkti S, mille kaugust punktidest A ja B saab otseselt mõõta. Mõõdame lõigud AS ja BS ning pikendame neid üle punkti S. Lõigu AS pikendusele mõõdame lõigu A_1S, mis on lõigust AS mingi arv korda vähem, s. t. $AS:A_1S=k$. Lõigu BS pikendusele mõõdame lõigu B_1S nii, et $BS:B_1S=k$. Sarnasuse II tunnuse põhjal on $\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1$ sarnasusteguriga k. Mõõtnud nüüd lõigu A_1B_1, saame arvutada otsitava pikkuse x:

$$\frac{x}{A_1B_1}=\frac{AS}{A_1S}=k, \text{ millest } x=k\cdot A_1B_1.$$

2) Lahendus teravnurga tangensi abil (joon. 154).



Joon. 153



Joon. 154

Mõõdame punkti A juurde täisnurga (näiteks ekkeri või astrolaabi abil) nii, et AB oleks täisnurga üheks haaraks. Täisnurga teisel haaral võtame vabalt pikkuse AC. Punktis C mõõdame nurga α suundade CA ja CB vahel. Kolmnurgast ABC leiame, et $x=AC\cdot\tan\alpha$.

702. Arvutada lõik x (joon. 153), kui on antud:

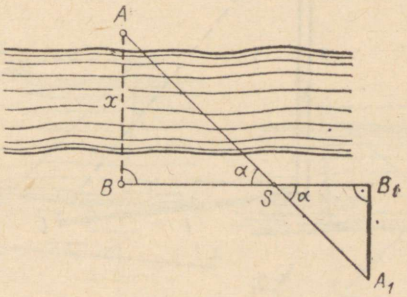
1) $A_1B_1=18{,}5$ m; $AS=120$ m; $A_1S=40$ m
2) $A_1B_1=26{,}5$ m; $BS=210$ m; $B_1S=30$ m

703. Arvutada lõik x (joon. 154), kui on antud:

1) $AC=48$ m; $\alpha=57°$
2) $AC=60$ m; $\alpha=41°$.

2. Määrata kaugus kahe punkti vahel, milledest üks on ligipääsetav.

1) Lahendus kolmnurkade sarnasuse abil (joon. 155).



Joon. 155

Ehitame punktist B sihile AB ristsirge, millele märgime vabalt punktid S ja B_1 nii, et $BS:B_1S=k$, kus k on sobivalt valitud arv. Punktist B_1 tõmbame ristsirge sirgele BB_1. Selle ristsirge ja sirge AS lõikepunkti märgime tähega A_1. Sarnasuse I tunnuse põhjal on $\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1$. Mõõtnud lõigu A_1B_1, saame arvutada otsitava pikkuse x:

$$\frac{x}{A_1B_1}=\frac{BS}{B_1S}=k, \text{ millest } x=k\cdot A_1B_1$$

Märkus. Nurgad B ja B_1 võivad olla ka täisnurgast erinevad võrdsed nurgad.

2) Lahendus teravnurga tangensi abil.
Lahendus selgub jooniselt 155, kus

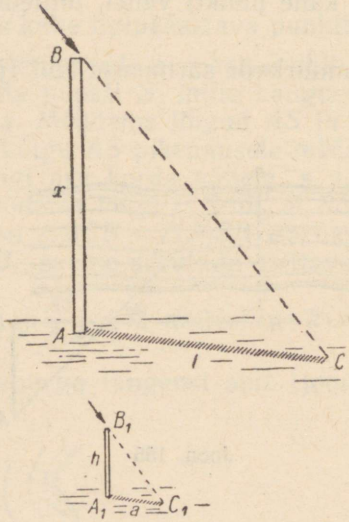
$$x=BS\cdot\tan\alpha$$

Kui kõrguse kaudsel mõõtmisel on mõõdetava eseme (näiteks torni või puu) aluspunkt ligipääsetav, siis saab kasutada kõrguse määramiseks selle eseme varju pikkust (joon. 156). Selleks mõõdetakse antud eseme varju pikkus l ja mingi teada oleva pikkusega (h) kepi varju pikkus a. Kui mõõtmine on teostatud mõlemal

juhtumil ühesuguse kallakuga (või horisontaalsel) maapinnal, siis on $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, millest

$$\frac{a}{l} = \frac{h}{x} \quad \text{ja} \quad x = \frac{hl}{a}$$

Lugeja uurigu veel, kuidas oleks võimalik mõõta joonisel 156 kujutatud posti AB kõrgust, kasutades teravnurga tangensit.



Joon. 156

704. Arvutada lõik x joonisel 155, kui on antud:

1) $A_1B_1 = 32$ m; $BS = 105$ m; $B_1S = 35$ m
2) $A_1B_1 = 23{,}5$ m; $BS = 165$ m; $B_1S = 35$ m

705. Arvutada lõik x joonisel 155, kui on antud:

1) $BS = 85$ m, $\alpha = 38°$; 2) $BS = 127$ m, $\alpha = 59°$

706. Vabriku korstna varju pikkus on 12 m, samal ajal kui 1,8 m pikkuse inimese varju pikkus on 60 cm. Kui kõrge on korsten?

707. Puu varju pikkus on 8 m, samal ajal kui 2 m pikkuse püstkepi varju pikkus on $\frac{3}{4}$ kepi pikkusest. Kui kõrge on puu?

708. Kui päikese kiired langevad horisontaalsele maapinnale 47°-se nurga all, siis heidab raekoja torn varju, mis võrdub 8,5 m. Kui kõrge on raekoja torn?

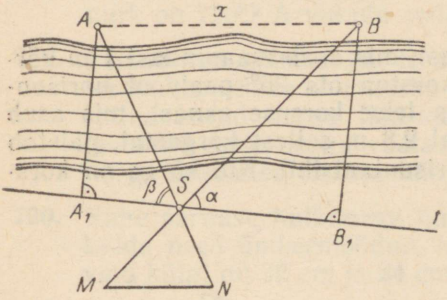
3. Määrata kaugus kahe ligipääsmatu punkti vahel.

1) Lahendus kolmnurkade sarnasuse ja teravnurga koosinuse abil (joon. 157).

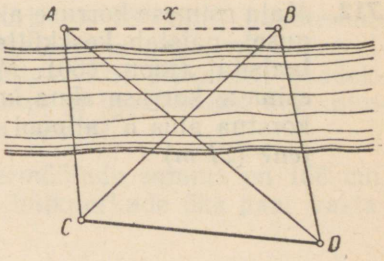
Märgime maapinnale vabalt mingi sirge t, millel leiame kaks punkti A_1 ja B_1 nii, et $\angle AA_1B_1=90°$ ja $\angle BB_1A_1=90°$. Lõigul A_1B_1 valime vabalt mingi punkti S ning mõõdame nurgad α ja β. Mõõdame A_1S ja SB_1 ning arvutame SA ja SB:

$$SA=\frac{A_1S}{\cos\beta};\quad SB=\frac{SB_1}{\cos\alpha}$$

Edasi toimitakse samuti nagu kauguse mõõtmisel kahe ligipääsetava punkti A ja B vahel (vt. joon. 153).



Joon. 157



Joon. 158

2) Lahendame plaanistamise teel (joon. 158).

Märgime maapinnal vabalt mingi lõigu CD ja mõõdame selle pikkuse; mõõdame ka nurgad ACD, BCD, BDC ja ADC. Nende andmete põhjal joonestame nelinurga $ABDC$ plaani sobivas mõõdus $1:n$. Sellelt plaanilt mõõdame looduses olevale lõigule x vastava lõigu x_1. Siis on $x=nx_1$.

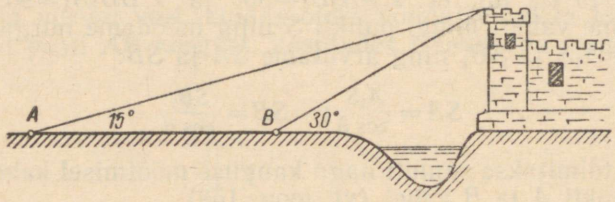
709. Arvutada lõik x joonisel 157, kui on antud:

1) $A_1S=32$ m; $\beta=47°$; $NS=18$ m; $MN=22$ m (49 m)
2) $B_1S=48$ m; $\alpha=42°$; $MS=12$ m; $MN=22$ m

710. Ehitada joonisel 158 kujutatud nelinurga $ABDC$ plaan ja leida x, kui mõõtmisel selgus, et:

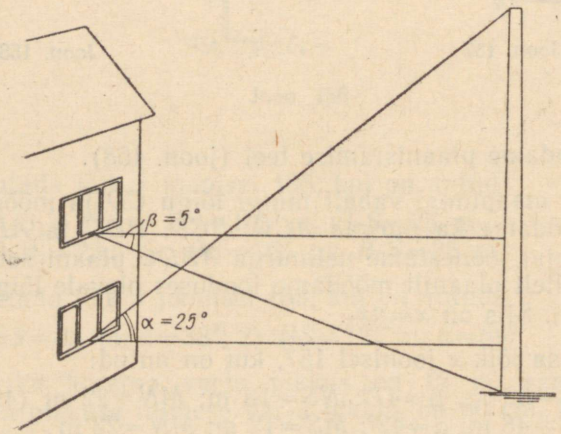
1) $CD=85$ m; $\angle ACD=102°$; $\angle BCD=50°$; $\angle BDC=85°$; $\angle ADC=40°$
2) $CD=123$ m; $\angle ACD=120°$; $\angle BCD=75°$; $\angle BDC=60°$; $\angle ADC=25°$

711. Joonisel 159 on näidatud võte ligipääsmatu torni kõrguse kaudseks mõõtmiseks. Tõestada, et torni kõrgus on $\frac{AB}{2}$ (punktid A ja B on torni alusega ühel sirgel).



Joon. 159

712. Maja esimese korruse aknast, mis asub maapinnast 1 m kõrgusel, paistab keskkütte korstna ots 25° pealpool horisontaalsihti (joon. 160). Maja teise korruse aknast, mis asub esimese korruse akna kohal 2,8 m sellest kõrgemal, paistab korstna alus 5° allpool horisontaalsihti. Kui kõrge on korsten? (*21 m*)



Joon. 160

Kordamiseks.

713. Milliseid hulknurki nimetatakse sarnasteks?

714. Mis on sarnasustegur?

715. Nimetada kolmnurkade sarnasuse tunnused.

716. Milline omadus on sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhtel? pindalade suhtel?

717. Kas kolmnurgad on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on 30° ja 70° ja teise kolmnurga kaks nurka on 70° ja 80°?

718. Võrdhaarse trapetsi alused on 12,4 cm ja 8,4 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid, kui trapetsi nürinurk on 120°? Arvutada selle trapetsi pindala.

719. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on 28° ning hüpotenuus on 28,5 cm. Seda kolmnurka lõigatakse sirgega, mis on paralleelne antud nurga lähiskaatetiga. Kui pikkadeks osadeks jaotavad selle nurga vastaskaatet ja hüpotenuus, kui kolmnurga sees olev lõikaja lõik on 20 cm?

720. Kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude summa on 156 cm. Leida need ümbermõõdud, kui hulknurkade üks paar vastavaid külgi on 32 cm ja 24 cm.

721. Kahe sarnase täisnurkse kolmnurga ümbermõõtude suhe on 4 : 5. Leida kolmnurkade teravnurgad.

722. Kahe sarnase hulknurga pindalade suhe on $\frac{4}{9}$. Leida vähema hulknurga ümbermõõt, kui suurema hulknurga ümbermõõt on 139 m.

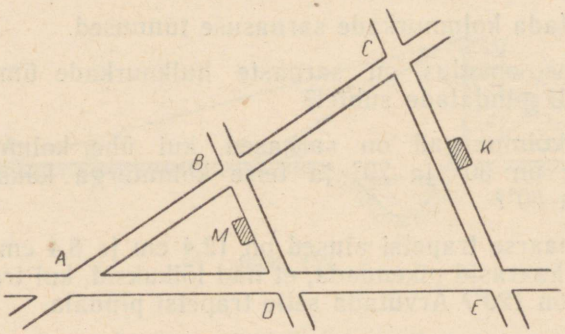
723. Väljaspool ringi olevast punktist on tõmmatud ringjoonele puutuja ja ringi keskpunkti läbiv lõikaja, mis moodustavad omavahel nurga $\alpha = 30°$. Arvutada lõikaja välisosa, kui puutuja lõik on 12 cm.

724. Plaani joonmõõdu järgi on 1 cm $\triangleq$ 50 m. Sellel plaanil on ristkülikukujulise maatüki pindala 12 cm². Mitu hektarit on vastava maatüki pindala looduses?

Kodune kontrolltöö nr. 6.

1. Joonisel 161 on kujutatud tänavad AC ja AE, mis on lõigatud kahe paralleelse tänavaga BD ja CE. Neist $AE = 135$ m; $AD = 90$ m; $AB = 72$ m; $BD = 54$ m. Tänaval BD, 40 m kau-

gusel nurgast B, elab kaks õpilast. Üks neist läheb kooli, mis asub tänaval CE, 50 m kaugusel nurgast E, tänava BC kaudu; teine aga tänava DE kaudu. Kumb neist õpilastest on valinud lühema tee?

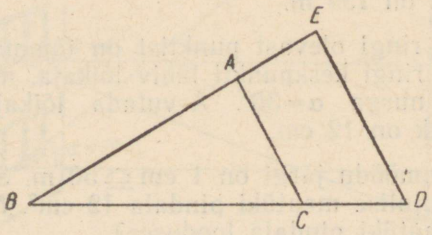


Joon. 161

2. Ringi sektor moodustab veerandi ringist. Sektori kaarel on võetud punkt A, mis asetseb sektorit piiravaist raadiustest 1,2 dm ja 3,5 dm kaugusel. Arvutada sektori raadius ja pindala.

3. Kolmnurgakujulist heinamaatükki ABC (joon. 162) tuli suurendada 44% võrra. Selleks pikendati külge BC ja tõmmati $DE \parallel AC$. Kui pikk on CD, kui $BC = 250$ m?

Näpunäide. Leida sarnasustegur.



Joon. 162

4. Väljaspool ringi asetsevast punktist on tõmmatud puutuja, mille lõik on 9 cm, ja lõikaja, mis asetseb ringi keskpunktist 5 cm kaugusel. Leida ringi raadius, kui lõikaja välisosa on 3 cm.

5. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk on lõigatud kaatetile paralleelse sirgega, mis jaotab teise kaateti teravnurga poolt alates suhtes 1 : 2. Arvutada tekkinud trapetsi pindala, kui kolmnurga hüpotenuus on 28 cm.
6. Võrdhaarse trapetsi diagonaalid jagunevad lõikepunktis osadeks 6,7 cm ja 3,3 cm. Leida trapetsi kesklõik, kui trapetsi lühem alus on 12 cm.

Üldiseks kordamiseks.

725. Milliseid lõike nimetatakse võrdelisteks?

726. Sõnastada kiirteteoreem.

727. Defineerida teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

728. Sõnastada Pütagorase teoreem, Eukleidese teoreem ja kõrguseteoreem.

729. Milliseid hulknurki nimetatakse sarnasteks?

730. Sõnastada kolmnurkade sarnasuse tunnused.

731. Kui hulknurga kõiki külgi suurendada k korda, kuidas muutub siis hulknurga ümbermõõt? Pindala?

732. Milline omadus on ringjoonel mitteasetseval punkti läbivail ringjoone lõikajail?

733. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 56 cm. Haara ja aluse keskpunkte ühendav sirglõik on 8 cm. Kolmnurga üks nurkadest on 124°. Kui suur on kolmnurga pindala?

734. Leida võrdhaarse kolmnurga nurgad ja pindala, kui kolmnurga haar on 26,7 cm ja alusele tõmmatud kõrgus on 18,8 cm.

735. Leida täisnurkse kolmnurga pindala, kui hüpotenuus on 3,2 dm ja nurk 54°.

736. Leida ristküliku pindala, kui ristküliku diagonaal on 44 m ning nurk diagonaali ja külje vahel 38°.

737. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 68° ja haar 28 cm. Leida kolmnurga pindala.

738. Leida võrdhaarse kolmnurga pindala, kui aluse lähisnurk $\alpha = 72°$ ja haar 2,6 dm.

739. Leida täisnurkse kolmnurga pindala, kui teravnurk $\alpha = 56°$ ja kaatet $a = 0{,}12$ dm.

740. Leida rombi pindala, kui rombi külg $a = 34$ cm ja teravnurk $\alpha = 72°$.

741. Rööpküliku üks diagonaalidest on risti küljega, pikem külg on 40 cm ja teravnurk 52°. Kui suur on rööpküliku pindala?

742. Rööpküliku nürinurk on 110° ja pikem külg 36 cm. Leida rööpküliku pindala, kui lühem diagonaal on risti küljega.

743. Võrdhaarse kolmnurga alus on 34 cm ja haarale joonestatud kõrgus 16 cm. Leida aluse ja haara projektsioonid haaral.

744. Võrdhaarse trapetsi diagonaal on d, mis moodustab pikema alusega nurga α. Ävaldada diagonaali projektsioon pikemal alusel. Teostada arvutused, kui $d = 23{,}5$ cm ja $\alpha = 42°$.

745. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 20 cm ja 15 cm. Leida kaatetite projektsioonid hüpotenuusil.

746. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid hüpotenuusil on 18 ja 32 cm. Leida kaatetid.

747. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 12 cm ja teravnurk 40°. Leida selle kolmnurga kõik joonelemendid ja pindala.

748. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 23,5 cm ja sellele tõmmatud kõrgus on 8,2 cm. Leida selle kolmnurga ülejäänud joonelemendid, nurgad ja pindala.

749. 1) Ehitada vabalt kaks mittevõrdset ruutu.
2) Ehitada kolmas ruut, mille pindala võrdub antud ruutude pindalade summaga.
3) Ehitada kolmas ruut, mille pindala võrdub antud ruutude pindalade vahega.

750. Ehitada vabalt kaks erineva pikkusega lõiku ja leida konstruktsiooni teel nende lõikude geomeetriline keskmine.

751. Ehitada vabalt kolm lõiku ja leida konstruktsiooni teel nende neljas võrdeline.

752. On antud kaks sarnast kolmnurka sarnasusteguriga 1,5. Leida vastavaist nurkadest tõmmatud nurgapoolitajate pikkused, kui nende vahe on 4 cm.

753. Läbi ruudu $ABCD$ tipu A on tõmmatud sirge, mis lõikab külge CD punkte E ja külge BC pikendust punktis F. Leida

jooniselt kõik sarnaste kolmnurkade paarid. Leida kolmnurga ABF pindala, kui ruudu külg $CD = 12$ cm jaotub suhtes $1 : 2$.

754. Leida kahe sarnase kolmnurga ümbermõõdud, kui nende kolmnurkade vastavate külgede suhe on $\frac{1}{6} : 0{,}2$ ja ümbermõõtude vahe on 20 m.

755. Rööpkülikut $ABCD$ on lõigatud sirgega, mis läbib rööpküliku tippu D ning lõikab diagonaali AC punktis E ja külje AB pikendust punktis F. Leida BF, kui $AB = 10$ cm; $AE : CE = 4{,}5 : 3$.

756. Kolhoosi kolmnurgakujuline metsalank on piiratud kahe sirgjoonelise maantee ja raudteega, millede pikkused on 8,5 km, 6,5 km ja 7 km. Kolhoosi plaanil on raudtee pikkus 5,6 cm. Kui pikad on plaanil maanteed? Joonestada metsalangi plaan. Kui suur on plaani mõõt?

757. Trapetsis $ABCD$, mille alused on AB ja CD, on $\angle ADC = \angle ACB$. Leida AB ja BC, kui $AD = 7$ cm; $DC = 5$ cm ja $AC = 10$ cm.

SISUKORD.

I PEATÜKK.

Koordinaatide mõiste. Funktsionaalne sõltuvus.

§ 1. Kordamiseks 3
§ 2. Koordinaatteljestik 11
§ 3. Funktsioon ja argument 15
§ 4. Võrdeline sõltuvus 25
§ 5. Lineaarfunktsioon 36
§ 6. Pöördvõrdeline sõltuvus 47
Üldiseks kordamiseks 53
Kodune kontrolltöö nr. 1 55

II PEATÜKK.

Kahe tundmatuga lineaarsed võrrandisüsteemid.

§ 7. Kahe tundmatuga lineaarvõrrand 57
§ 8. Kahe tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem ja selle graafiline lahendamine 63
§ 9. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine liitmisvõttega 71
§ 10. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine asendusvõttega 76
§ 11. Ülesannete lahendamine kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi abil 82
Üldiseks kordamiseks 91
Kodune kontrolltöö nr. 2 92

III PEATÜKK.

Ruutfunktsioon ja ruutvõrrand.

§ 12. Ruutfunktsiooni definitsioon. Üldisi mõisteid 94
§ 13. Funktsioon $y=ax^2$ 95
§ 14. Ruutude tabel 98
§ 15. Ruutude leidmine lükati abil 102
§ 16. Ruutjuur 105
§ 17. Ruutjuurte tabel 112
§ 18. Ruutjuurte leidmine lükati abil 116

§ 19. Funktsioon $y=ax^2+c$ 117
§ 20. Funktsioon $y=a(x+m)^2$ 120
§ 21. Funktsioon $y=(x+m)^2+n$ 122
§ 22. Funktsioon $y=ax^2+bx+c$ 125
Kodune kontrolltöö nr. 3 128
§ 23. Ruutvõrrand 129
§ 24. Ruutvõrrandi lahendamine 131
§ 25. Ruutvõrrandi diskriminant 139
§ 26. Murdvõrrandite lahendamine 141
§ 27. Ülesannete lahendamine ruutvõrrandi abil 145
§ 28. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused 150
§ 29. Ruutvõrrandi koostamine antud lahendite järgi 153
§ 30. Ruutkolmliikme lahutamine teguriteks 154
§ 31. Lihtsamad kahe tundmatuga ruutvõrrandisüsteemid 156
Kodune kontrolltöö nr. 4 164
Üldiseks kordamiseks 165

IV PEATÜKK.

Täisnurkse kolmnurga lahendamine.

§ 32. Kordamine 173
§ 33. Võrdelised lõigud 176
§ 34. Kiirteteoreem 178
§ 35. Kiirteteoreemi kasutamine konstruktsioonülesannetes 183
§ 36. Teravnurga siinus 185
§ 37. Teravnurga siinuse graafik 189
§ 38. Siinuse kasutamine täisnurkse kolmnurga lahendamisel 192
§ 39. Teravnurga koosinus 194
§ 40. Teravnurga koosinuse graafik 197
§ 41. Koosinuse kasutamine täisnurkse kolmnurga lahendamisel . . . 199
§ 42. Siinuste ja koosinuste tabel 200
§ 43. Teravnurga tangens ja kootangens 204
§ 44. Teravnurga tangensi ja kootangensi graafikud 208
§ 45. Tangensite ja kootangensite tabel 210
§ 46. Tangensi ja kootangensi kasutamine täisnurkse kolmnurga lahendamisel 211
§ 47. Pütagorase teoreem 215
§ 48. Pütagorase teoreemi kasutamine mõnede lõikude konstrueerimisel . 220
§ 49. Pütagorase teoreemi kasutamine mõnede nurkade trigonomeetriliste funktsioonide arvutamisel 221
§ 50. Sirglõigu projektsioon sirgel 224
§ 51. Eukleidese teoreem 226
§ 52. Kõrguseteoreem 228
§ 53. Kahe lõigu geomeetrilise keskmise konstrueerimine 233
Ülesandeid kordamiseks 235
Kodune kontrolltöö nr. 5 236

Sarnased hulknurgad.

§ 54. Hulknurkade sarnasusteisendus 238
§ 55. Kolmnurkade sarnasuse tunnused 243
§ 56. Kolmnurkade sarnasuse rakendusi 248
§ 57. Sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhe 251
§ 58. Sarnaste hulknurkade pindalade suhe 252
§ 59. Ringjoone lõikajate omadus 257
§ 60. Arvmõõt ja joonmõõt 260
§ 61. Pikkuste kaudne mõõtmine 262
Kodune kontrolltöö nr. 6 267
Üldiseks kordamiseks 269

Генрихсон Борис Павлович
Тельгмаа Аксель Эдуардович
МАТЕМАТИКА ДЛЯ ВЕЧЕРНИХ ШКОЛ
VIII кл.

На эстонском языке
Обложка Э. Тали
Издательство «Валгус»
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Kunstiline toimetaja H. Keigo
Tehniline toimetaja A. Muna
Korrektor T. Kuusik

Laduda antud 30. VIII 1966. Trükkida antud 25. XI 1966. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 17,25 + lisa. Arvestuspoognaid 14,64. Trükiarv 5000. Tellimise nr. 6289. Hans Heidemanni nimeline trükikoda Tartu, Ülikooli 17/19. I
Trükipaber nr. 2 — Kohila Paberivabrik

Hind 37 kop.

6—6

37 kop.

A-28302

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00411480 9