

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Hartvig Tooming
**McAlisteri P -teoreem inverssete poolrühmade
kohta**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Alvin Lepik

TARTU 2026

MCALISTERI P -TEOREEM INVERSSETE POOLRÜHMADE KOHTA

Bakalaureusetöö

Hartvig Tooming

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös antakse üksikasjalik tõestus P -teoreemile, mida esimesena tõestas D. B. McAlisteri oma artiklis „Groups, semilattices and inverse semigroups“ ja mis võimaldab kirjeldada E -unitaarseid inversseid poolrühmi teiste algebraliste struktuuride abil.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Inversne poolrühm, poolvõre, rühm, rühma toime, idempotent, järjestusseos.

MCALISTER'S P-THEOREM FOR INVERSE SEMIGROUPS

Bachelor thesis

Hartvig Tooming

Abstract

In this bachelor's thesis, a detailed proof of the P-theorem, first proven by D. B. McAlister in his article *Groups, Semilattices and Inverse Semigroups*, is provided. This theorem enables the description of E -unitary inverse semigroups through other algebraic structures.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Key Words: Inverse semigroup, semilattice, group, group action, idempotent, order relation.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Definitsioonid ja abitulemused	4
2 P -poolrühmad ja McAlisteri P -teoreemi tarvilikkuse tõestus	14
3 McAlisteri P -teoreemi piisavuse tõestus	18
Kokkuvõte	27
Viited	28

Sissejuhatus

Käesolevas töös tõestame McAlisteri P -teoreemi inverssete poolrühmade kohta. Teoreem on sõnastatud kujul

Teoreem ([1, Teoreem 5.9.2]). *Olgu G rühm, X osaliselt järjestatud hulk, mis on ka vasakpoolne G -polügoon ja Y hulga X alamhulk nii, et kolmik (G, X, Y) on McAlisteri kolmik. Siis P -poolrühm $P(G, X, Y)$ on E -unitaarne inversne poolrühm ja iga E -unitaarne inversne poolrühm on isomorfne mingi P -poolrühmaga.*

Teoreemile andis esimesena tõestuse D. B. McAlister artiklites *Groups, Semilattices and Inverse Semigroups. I, II* [3],[4] 1973. ja 1974. aastal.

Käesoleva referatiivse töö eesmärk on tõestada üksikasjalikult McAlisteri P -teoreem. Järgime tõestust, mille avaldas J. M. Howie raamatus *Fundamentals of Semigroup Theory* [1].

Töö on jagatud kolmeks osaks. Esimeses osas sõnastame vajaminevad definitsioonid ja abitulemused. Alustame poolrühma ja inverssuse ja loomuliku osalise järjestuse defineerimisest. Defineerime idempotendid ja E -unitaarsed inverssed poolrühmad. Vaja läheb ka rühma ja poolvõre definitsioone. Lõpuks defineerime ka vasakpoolse ja parempoolse peaideaali ja vähima rühmakongruentsi. Tõestame, et parempoolseid peaideaale saab kujutada üheselt idempotentide kaudu ja vähima rühmakongruentsi faktorpoolrühm on rühm.

Teises peatükis defineerime McAlisteri kolmiku ja P -poolrühma. Peatüki lõpus tõestame McAlisteri teoreemi tarvilikkuse.

Kolmandas peatükis konstrueerime suvalise E -unitaarse inversse poolrühma põhjal P -poolrühma ja tõestame, et tegu on isomorfsete poolrühmadega.

1 Definiitsioonid ja abitulemused

Definiitsioon 1. Poolrühmaks nimetatakse hulka S koos sellel defineeritud assotsiatiivse kahekohalise algebralise tehtega $\cdot$. See tähendab, et iga $a, b \in S$ korral kehtib

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Loeme tähistused $a \cdot b$ ja ab samaväärseteks.

Definiitsioon 2. Poolrühma S elementi a' nimetatakse elemendi a **inversseks elemendiks**, kui kehtivad võrdused $aa'a = a$ ja $a'aa' = a'$.

Definiitsioon 3. Poolrühma S nimetatakse **regulaarseks**, kui igal tema elemendil leidub inversne element.

Definiitsioon 4. Poolrühma S nimetatakse **inversseks**, kui iga tema elemendil leidub täpselt üks inversne element.

Edaspidi tähistame inversse poolrühma S elemendi a inversset elementi a^{-1} .

Definiitsioon 5. Poolrühma elementi e nimetatakse **idempotendiks**, kui kehtib $e^2 = e$. Kõigi poolrühma S idempotentide hulka tähistatakse $E(S)$ või E , kui poolrühm S on kontekstist teada.

Teoreem 1 ([1, Teoreem 5.1.1]). *Regulaarne poolrühm on inversne parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad.*

Definiitsioon 6. Loomulikuks osaliseks järjestuseks inversses poolrühmas S nimetatakse sellist järjesstuseseost $\leq$, mille puhul

$$s \leq t \iff (\exists e \in E)(s = te).$$

Märkus 1. Samaväärne definiitsioon on ka

$$s \leq t \iff (\exists f \in E)(s = ft).$$

Tõepoolest, kui

- i) elemendid $s, t \in S$ on sellised, et $s \leq t$, siis leidub idempotent $e \in E$ nii, et $s = te$ ja võttes $f = tet^{-1}$ näeme, et

$$\begin{aligned} f^2 &= (tet^{-1})(tet^{-1}) = te(t^{-1}t)et^{-1} = t(t^{-1}t)ee^{-1} = tet^{-1} \text{ ja} \\ s &= te = t(t^{-1}t)e = te(t^{-1}t) = ft. \end{aligned}$$

ii) elemendid $s, t \in S$ on sellised, et leidub idempotent $f \in E$ nii, et $s = ft$, siis võttes $e = t^{-1}ft$ näeme, et

$$\begin{aligned} e^2 &= (t^{-1}ft)(t^{-1}ft) = t^{-1}f(tt^{-1})ft = t^{-1}(tt^{-1})fft = t^{-1}ft = e \text{ ja} \\ s &= ft = f(tt^{-1})t = (tt^{-1})ft = te. \end{aligned}$$

Definitsioon 7. Inversset poolrühma S nimetatakse **E -unitaarseks**, kui suvalise elemendi $s \in S$ ja suvalise idempotendi $e \in E(S)$ korral jäeldub võrratusest $e \leq s$, et element s on idempotent.

Näide 1. Bitsükliline poolrühm B on poolrühm, mille elemendid on hulgas $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, kus $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja korrutamine on defineeritud nii:

$$(\forall m, n, p, q \in \mathbb{N}_0)((m, n)(p, q) = (m + p - \min(n, p), n + q - \min(n, p))).$$

Näitame, et poolrühm B on inversne. Selleks otsime suvalise elemendi $(m, n) \in B$ inversset elementi. Olgu tema inversne element $(p, q) \in B$. Tähistame

$$r := \min(n, p)$$

ja saame, et

$$\begin{aligned} (m, n) &= (m, n)(p, q)(m, n) = (m + p - r, n + q - r)(m, n) \\ &= (2m + p - r - \min(n + q - r, m), (2n + q - r - \min(n + q - r, m))), \\ (p, q) &= (p, q)(m, n)(p, q) = (p, q)(m + p - r, n + q - r) \\ &= (m + 2p - r - \min(q, m + p - r), n + 2q - r - \min(q, m + p - r)). \end{aligned}$$

Selle põhjal saame, et peavad kehtima võrrandid

$$\begin{aligned} m + p - r - \min(n + q - r, m) &= 0, \\ n + q - r - \min(n + q - r, m) &= 0, \\ m + p - r - \min(q, m + p - r) &= 0, \\ n + q - r - \min(q, m + p - r) &= 0. \end{aligned}$$

i) Oletame kõigepealt, et $n < p$, mistõttu $r = n$. Siis saame teisest võrrandist, et $q = \min(q, m)$, kust jäeldub, et $q \leq m$. Võrreldes kahte esimest võrrandit näeme, et peab kehtima $m + p = n + q$, kuid $n < p$ ja $q \leq m$ tõttu saame $n + q < m + p$, mis on vastuolu.

- ii) Oletame nüüd, et $p < n$, mistõttu $r = p$. Siis saame kolmandast võrrandist, et $m = \min(q, m)$, kust järeldub, et $m \leq q$. Võrreldes kolmandat ja neljandat võrrandit saame, et peab kehtima $m + p = n + q$, kuid $p < n$ ja $m \leq q$ tõttu saame $m + p < n + q$, mis on vastuolu.
- iii) Oletame, et $n = p$, siis saame esimest ja teist võrrandit omavahel võrreldes, et $m + p = n + q$, kust saame, et $q = m + p - n = m$.

Näitame, et (n, m) on tõepoolest elemendi (m, n) inversne element.

$$\begin{aligned}
(m, n)(n, m)(m, n) &= (m + n - \min(n, n), m + n - \min(n, n))(m, n) \\
&= (m, m)(m, n) \\
&= (m + m - \min(m, m), m + n - \min(m, m)) \\
&= (m, n), \\
(n, m)(m, n)(n, m) &= (n, m)(m, m) \\
&= (m + n - \min(m, m), m + m - \min(m, m)) \\
&= (n, m).
\end{aligned}$$

Kuna iga elemendi $(m, n) \in B$ korral leidub täpselt üks selline inversne element $(n, m) \in B$, siis poolrühm B on inversne.

Leiame, mis kujul on poolrühmas B idempotendid. Olgu $(p, q) \in B$ idempotent. Siis peab kehtima, et

$$(p, q) = (p, q)(p, q) = (2p - \min(p, q), 2q - \min(p, q)).$$

Sellest järeldub, et peab kehtima

$$p = \min(p, q) = q,$$

mistõttu idempotendid on kujul (p, p) , kus $p \in \mathbb{N}_0$.

Näitame, et inversne poolrühm B on E -unitaarne. Olgu $(m, n) \in B$ ja $(p, p) \in E(B)$ sellised, et $(p, p) \leq (m, n)$. Siis peab leiduma selline idempotent $(q, q) \in E(B)$, et

$$(p, p) = (m, n)(q, q) = (m + q - \min(n, q), n + q - \min(n, q)).$$

Saame, et siis peab kehtima

$$m + q - \min(n, q) = p = n + q - \min(n, q),$$

kust järeldub, et $m = n$ ja seega $(m, n) = (m, m)$ on idempotent. Sellega on näidatud, et bitsükliline poolrühm B on E -unitaarne inversne poolrühm.

Näide 2. Olgu meil inversne poolrühm S , mille Cayley tabel on

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	a	a
c	a	a	a	b	c
d	a	d	e	a	a
e	a	a	a	d	e

Tegu on inversse poolrühmaga, mis pole E -unitaarne. Näeme, et $a = de$, $a = a^2$, $e = e^2$. E -unitaarsuseks peaks element d olema idempotent, kuid näeme, et $d^2 = a$.

Definitsioon 8. Osaliselt järjestatud hulka $(P, \leq)$, mille iga kahe elemendi a ja b korral leidub nende alumine raja $a \wedge b$ selles hulgas, nimetatakse (**alumiseks**) **poolvõreks**.

Lause 1. Olgu S poolrühm. Olgu seos $\leq$ hulgal $E(S)$ defineeritud nii, et

$$e \leq f \iff e = ef = fe.$$

Siis $\leq$ on osaline järjestus hulgal $E(S)$, kusjuures ta on poolrühma S loomuliku osalise järjestuse ahend idempotentide alamhulgal. Veel enam, kui poolrühm S on inversne, siis $(E(S), \leq)$ on alumine poolvõre.

Tõestus. Olgu S poolrühm, E tema idempotentide hulk ja $e \in E$. Siis kehtib $e = e^2$ ja järelikult $e \leq e$ ning seos $\leq$ on refleksiivne. Olgu nüüd $f \in E$ selline, et $e \leq f$ ja $f \leq e$. Siis $e = ef = f$ ja järelikult on seos $\leq$ antisümmeetriline. Olgu nüüd $e, f, g \in E$ sellised, et kehtivad $e \leq f$ ja $f \leq g$. Saame, et

$$\begin{aligned} e &= ef = e(fg) = (ef)g = eg, \\ e &= fe = (gf)e = g(fe) = ge. \end{aligned}$$

Järelikult $e \leq g$ ning seos $\leq$ on transitiivne.

Näitame, et seos $\leq$ on poolrühma S loomuliku osalise järjestuse $\leq'$ ahend. Olgu kõigepealt $e, f \in E$ sellised, et $e \leq' f$. Siis leiduvad sellised $g, h \in E$, et $e = fg$ ja $e = hf$. Korrutades esimest võrdust vasakult ja teist võrdust paremalt elemendiga f saame, et

$$\begin{aligned} fe &= ffg = fg = e, \\ ef &= hff = hf = e. \end{aligned}$$

Seega oleme saanud, et $e = ef = fe$ ja järelikult kehtib

$$e \leq' f \Rightarrow e \leq f.$$

Oletame nüüd vastupidi, et $e \leq f$. Siis kehtib, et $e = ef = fe$. Peame näitama, et leidub mingi $g \in E$ nii, et $e = fg$. Aga selline g leidub kindlasti, sest saame võtta $g = e \in E$. Järelikult kehtib ka

$$e \leq f \Rightarrow e \leq' f$$

ja seos $\leq$ on poolrühma S loomuliku järjestuse ahend.

Olgu nüüd poolrühm S inversne ja olgu $e, f \in E$. Siis idempotentide korrutamise kommutatiivsuse tõttu kehtivad

$$\begin{aligned} ef &= e^2f = e(ef) = e(fe) = (ef)e, \\ ef &= ef^2 = (ef)f = (fe)f = f(ef), \end{aligned}$$

mistõttu $ef \leq e, f$. Võtame suvalise $g \in E$ nii, et $g \leq e, f$. Kuna

$$g = ge = eg = gf = fg,$$

siis saame, et

$$\begin{aligned} g &= gf = (ge)f = g(ef), \\ g &= eg = e(fg) = (ef)g, \end{aligned}$$

mistõttu $g \leq ef$. Oleme saanud, et $e \wedge f = ef$ ja seega idempotentide hulk on poolvõre. $\square$

Definitsioon 9. Rühmaks nimetatakse hulka G koos sellel defineeritud kaheko-
halise algebralise tehete $\cdot$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

G1) tehe $\cdot$ on assotsiatiivne;

G2) leidub element $1 \in G$ nii, et iga elemendi $g \in G$ korral $1 \cdot g = g = g \cdot 1$;

G3) iga elemendi $g \in G$ korral leidub element $g^{-1} \in G$ nii, et $g \cdot g^{-1} = 1 = g^{-1} \cdot g$.

Elementi 1 tingimuses **G1** nimetatakse ühikelemendiks ja elementi g^{-1} tingimu-
ses **G2** elemendi g pöördlemendiks. Suvaliste elementide $g, h \in G$ korral loeme
tähistused $g \cdot h$ ja gh võrdseteks.

Definitsioon 10. Olgu G rühm ja X mingi hulk. Hulka X nimetatakse **vasak-
poolseks polügooniks** üle rühma G ehk **vasakpoolseks G -polügooniks**, kui
on antud kujutus $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$ nii, et

i) iga $g, h \in G$ ja $x \in X$ korral $g(hx) = (gh)x$;

ii) iga $x \in X$ korral $1x = x$.

Tähistame vasakpoolset G polügooni ${}_GX$.

Definitsioon 11 ([1]). Olgu X osaliselt järjestatud hulk. Tema alamhulka Y ni-
metatakse hulga X **järjestusideaaliks**, kui iga $A \in Y$ ja $B \in X$ korral järel-
dub võrratusest $B \leq A$, et $B \in Y$.

Definitsioon 12 ([1]). Olgu H poolrühma S alamhulk. Hulga H **sulundiks** ni-
metatakse hulka

$$H\omega = \{s \in S : (\exists h \in H) (h \leq s)\}.$$

Definitsioon 13 ([2]). Ekvivalentsiseost ρ nimetatakse **kongruentsiks** poolrüh-
mal S , kui iga $a, b, c, d \in S$ korral kehtib implikatsioon

$$(a, b), (c, d) \in \rho \Rightarrow (ac, bd) \in \rho.$$

Definitsioon 14 ([5]). Poolrühma S elemendi a poolt tekitatud **vasakpoolseks
peaideaaliks** nimetatakse hulka

$$S^1a = Sa \cup \{a\}, \text{ kus } Sa = \{sa : s \in S\}.$$

Poolrühma S elemendi a poolt tekitatud **parempoolseks peaideaaliks** nimetatakse hulka

$$aS^1 = aS \cup \{a\}, \text{ kus } aS = \{as : s \in S\}.$$

Märkus 2. Kui poolrühm S on inversne, siis iga $a \in S$ korral $S^1a = Sa$, sest $a = (aa^{-1})a \in Sa$, ja $aS^1 = aS$, sest $a = a(a^{-1}a) \in aS$.

Järgneva lause eeskujuks on [1, Teoreem 5.1.1].

Lause 2. *Inversses poolrühmas S esitub iga parempoolne peaideaal üheselt kujul eS , kus $e \in E$ on idempotent.*

Tõestus. Olgu S inversne poolrühm ja E tema idempotentide poolvõre. Olgu $a \in S$ suvaline element ja aS^1 tema poolt tekitatud parempoolne peaideaal. Kuna S on inversne poolrühm, siis märkuse 2 tõttu $aS^1 = aS$. Peame leidma sellise idempotendi $e \in E$, et $aS = eS$. Defineerime $e := aa^{-1}$. Siis iga $as \in aS$ korral

$$as = aa^{-1}as = (aa^{-1})(as) \in aa^{-1}S = eS,$$

seega $aS \subseteq eS$. Ja iga $es \in eS$ korral

$$es = aa^{-1}s = a(a^{-1}s) \in aS,$$

seega $eS \subseteq aS$ ja kokku oleme saanud, et $aS = eS$.

Näitame, et kui $eS = fS$, kus e ja f on idempotendid, siis $e = f$. Kuna $e = ee \in eS = fS$ ja $f = ff \in fS = eS$, siis leiduvad mingid $s, t \in S$ nii, et $e = fs$ ja $f = et$. Nüüd saame, et

$$e = fs = ffs = fe = ef = eet = et = f.$$

□

Greeni seosed $\mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq S \times S$ defineeritakse järgmiselt:

$$a\mathcal{L}b \iff S^1a = S^1b,$$

$$a\mathcal{R}b \iff aS^1 = bS^1.$$

Lause 3 ([1, Lause 5.1.2]). *Olgu S inversne poolrühm. Siis kehtib, et*

$$i) \text{ iga } a, b \in S \text{ korral } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1};$$

ii) iga $a, b \in S$ korral $a\mathcal{L}b$ parajasti siis, kui $a^{-1}a = b^{-1}b$.

Definitsioon 15 ([1]). Vähimaks rühmakongruentsiks inverssel poolrühmal S nimetatakse kongruentsi

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : (\exists e \in E)(ea = eb)\}.$$

Lause 4. Inversse poolrühma S vähim rühmakongruents σ on kongruents.

Tõestus. Olgu S poolrühm. Näitame kõigepealt, et vähim rühmakongruents σ on ekvivalentsiseos. Tegu on refeksiivse seosega, sest suvalise $a \in S$ korral leidub idempotent $aa^{-1} \in E$ ja $a = aa^{-1}a = a$ tõttu $a\sigma a$. Seos σ on sümmeetriline, sest kui $a, b \in S$ on sellised, et $a\sigma b$, siis leidub $e \in E$ nii, et $ea = eb$. Siis ka $eb = ea$ ehk $b\sigma a$. Transitiivsuse näitamiseks võtame suvalised $a, b, c \in S$ nii, et $a\sigma b$ ja $b\sigma c$. Siis seose σ definitsiooni järgi leiduvad sellised $e, f \in E$, et $ea = eb$ ja $fb = fc$. Paneme tähele, et element ef on idempotent ning poolrühma S inverssuse tõttu $ef = fe$. Nüüd saame, et

$$efa = fea = feb = efb = efc,$$

mistõttu $a\sigma c$.

Selleks, et näidata, et σ on kongruents, tõestame kõigepealt, et suvaliste $a, b \in S$ korral leidub idempotent $e \in E$ nii, et $ea = eb$ parajasti siis, kui leidub idempotent $f \in E$ nii, et $af = bf$. Oletame esialgu, et $a, b \in S$ ja $e \in E$ on sellised, et $ea = eb$. Paneme tähele, et element $a^{-1}ea$ on idempotent:

$$(a^{-1}ea)(a^{-1}ea) = a^{-1}e(aa^{-1})ea = a^{-1}(aa^{-1})eea = a^{-1}ea.$$

Võtame $f = a^{-1}ea \in E$. Siis näeme, et

$$af = aa^{-1}ea = eaa^{-1}a = ea,$$

$$bf = ba^{-1}ea = ba^{-1}eb = b(ea)^{-1}b = b(eb)^{-1}b = bb^{-1}eb = ebb^{-1}b = eb = ea.$$

Olgu nüüd $a, b \in S$ ja $f \in E$ sellised, et $af = bf$. Näeme, et (afa^{-1}) on idempotent, sest

$$(afa^{-1})(afa^{-1}) = af(a^{-1}a)fa^{-1} = a(a^{-1}a)ffa^{-1} = afa^{-1}.$$

Võtame nüüd $e = afa^{-1}$ ja näeme, et

$$\begin{aligned} ea &= afa^{-1}a = aa^{-1}af = af, \\ eb &= afa^{-1}b = bfa^{-1}b = b(af)^{-1}b = b(bf)^{-1}b = bfb^{-1}b = bb^{-1}bf = bf = af. \end{aligned}$$

Nüüd tõestame, et seos σ on kongruents. Olgu $a, b, c, d \in S$ sellised, et $a\sigma b$ ja $c\sigma d$. Siis leiduvad sellised $e_1, e_2 \in E$, et $e_1a = e_1b$ ja $e_2c = e_2d$. Teisest võrdusest saame, et leidub mingi selline idempotent $f \in E$, et $cf = df$. Siis saame, et kehtib

$$(e_1ac)f = (e_1a)(cf) = (e_1b)(df) = (e_1bd)f.$$

Sellest järeldub, et peab leiduma mingi $e_3 \in E$ nii, et

$$e_3(e_1ac) = e_3(e_1bd).$$

Võttes nüüd idempotendiks $e = e_3e_1 \in E$ oleme saanud, et

$$e(ac) = e(bd),$$

järelikult $(ac)\sigma(bd)$ ja σ on kongruents. □

Lause 5. *Olgu S inversne poolrühm ja σ vähim rühmakongruents. Siis faktorpoolrühm S/σ on rühm.*

Tõestus. Tõestame, et faktorpoolrühm S/σ täidab kõiki rühma tingimusi. Võtame suvalised $[a], [b], [c] \in S/\sigma$. Siis

$$[a]([b][c]) = [a][bc] = [a(bc)] = [(ab)c] = [ab][c] = ([a][b])[c],$$

seega faktorpoolrühma klasside korrutamine on assotsiatiivne.

Näitame, et faktorpoolrühmas leidub ühikelement. Selleks näitame kõigepealt, et kõik poolrühma idempotendid kuuluvad ühte ja samasse klassi. Olgu $e, f \in E$ suvalised. Siis leidub idempotent $ef \in E$ nii, et

$$(ef)e = (fe)e = fee = fe = ef = e f f = (ef)f,$$

järelikult $e\sigma f$ ja $[e] = [f]$. Tähistame klassi, kuhu kuuluvad kõik idempotendid, tähehisega 1. Olgu nüüd $[a] \in S/\sigma$ suvaline. Siis paneme tähele, et suvalise idempotendi

$e \in E$ korral

$$ea = eea = e(ea),$$

$$ae = aee = (ae)e,$$

järelikult $(ea)\sigma a$ ja $(ae)\sigma a$. Sellest aga järeldub, et

$$[a] \cdot 1 = [a][e] = [ae] = [a] = [ea] = [e][a] = 1 \cdot [a].$$

Seega klass, kuhu kuuluvad kõik idempotendid, on ühikelement.

Kuna suvalise $a \in S$ korral aa^{-1} ja $a^{-1}a$ on idempotendid, siis

$$[a][a^{-1}] = [aa^{-1}] = 1 = [a^{-1}a] = [a^{-1}][a].$$

See tähendab, et $[a]^{-1} = [a^{-1}]$. □

Teoreem 2 ([1, Teoreem 5.3.5]). *Olgu S inversne poolrühm, E tema idempotentide poolvõre ja olgu σ vähim rühmakongruents poolrühmal S . Siis*

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : ab^{-1} \in E\omega\}.$$

2 P -poolrühmad ja McAlisteri P -teoreemi tarvilikkuse tõestus

Definitsioon 16. Olgu G rühm. Olgu X osaliselt järjestatud hulk, mis on ka vasakpoolne G -polügoon. Olgu Y hulga X alamhulk. **McAlisteri kolmikuks** nimetatakse kolmikut (G, X, Y) , kui on täidetud järgmised tingimused:

MT1) iga $g \in G$ korral

$$(\forall A, B \in X) (A \leq B \iff gA \leq gB);$$

MT2) iga $g \in G$ korral

$$(\forall B \in X) (\exists A \in X) (gA = B);$$

MT3) alamhulk Y on alumine poolvõre ja hulga X järjestusideaal;

MT4) kehtib $GY = X$, kus $GY = \{gA \in X : g \in G, A \in Y\}$;

MT5) iga $g \in G$ korral kehtib $gY \cap Y \neq \emptyset$.

Märkus 3. Näitame järgmises peatükis, kuidas selliseid kolmikuid leida saab.

Olgu (G, X, Y) McAlisteri kolmik. Moodustame hulga

$$P(G, X, Y) = \{(A, g) \in Y \times G : g^{-1}A \in Y\}.$$

Lemma 1 ([2]). Olgu $(A, g), (B, h) \in P(G, X, Y)$. Siis leidub $A \wedge gB \in X$ ja kehtib $(A \wedge gB, gh) \in P(G, X, Y)$.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $A \wedge gB \in X$. Kuna $(A, g) \in P(G, X, Y)$, siis selle hulga definitsiooni järgi $g^{-1}A \in Y$. Kuna alamhulk Y on poolvõre ja $B \in Y$, siis eksisteerib $g^{-1}A \wedge B \in Y$. Tähistame $C := g^{-1}A \wedge B$. Alumise raja definitsiooni järgi $C \leq g^{-1}A$ ja $C \leq B$ ja edasi saame, et $gC \leq A$ ja $gC \leq gB$.

Võtame suvalise $D \leq A, gB$. Sellisel juhul saame, et kehtivad $g^{-1}D \leq g^{-1}A$ ja $g^{-1}D \leq B$. Siis aga C definitsiooni järgi kehtib, et $g^{-1}D \leq C$ ehk $D \leq gC$. Järelikult eksisteerib A ja gB alumine raja gC .

Selleks, et tõestada, et $(A \wedge gB, gh) \in P(G, X, Y)$, piisab hulga $P(G, X, Y)$ definitsiooni kaudu näidata, et $(gh)^{-1}(A \wedge gB) \in Y$. Näeme, et

$$(gh)^{-1}(A \wedge gB) = h^{-1}(g^{-1}(A \wedge gB)) \leq h^{-1}(g^{-1}(gB)) = h^{-1}B \in Y.$$

Alamhulk Y on hulga X järjestusideaal, seega kehtibki, et $(gh)^{-1}(A \wedge gB) \in Y$. $\square$

Lemma 1 tõttu saame defineerida hulgal $P(G, X, Y)$ korrutamise

$$(A, g)(B, h) = (A \wedge gB, gh),$$

kus $(A, g), (B, h) \in P(G, X, Y)$.

Lause 6. Olgu (G, X, Y) McAlisteri kolmik. Siis ülal defineeritud tehete P -poolrühmal $P(G, X, Y)$ on järgmised omadused:

OM1) P -poolrühmal $P(G, X, Y)$ defineeritud tehe on assotsiatiivne;

OM2) P -poolrühm $P(G, X, Y)$ on regulaarne;

OM3) P -poolrühma $P(G, X, Y)$ idempotendid esituvad kujul $(A, 1)$, kus element A on mingi hulga Y element;

OM4) P -poolrühma $P(G, X, Y)$ idempotendid kommuteeruvad;

OM5) P -poolrühm $P(G, X, Y)$ on inversne;

OM6) loomulik osaline järjestus P -poolrühmas $P(G, X, Y)$ on kujul

$$(\forall (A, g), (B, h) \in P(G, X, Y))((A, g) \leq (B, h) \iff A \leq B \text{ ja } g = h).$$

Tõestus. Olgu (G, X, Y) McAlisteri kolmik ja $P(G, X, Y)$ vastav hulk ülal defineeritud tehetele.

OM1) Võtame suvalised elemendid $(A, g), (B, h), (C, i) \in P(G, X, Y)$. Näeme, et

$$\begin{aligned}
(A, g)((B, h)(C, i)) &= (A, g)(B \wedge hC, hi) \\
&= (A \wedge g(B \wedge hC), g(hi)) \\
&= (A \wedge gB \wedge ghC, ghi) \\
&= ((A \wedge gB) \wedge (gh)C, (gh)i) \\
&= (A \wedge gB, gh)(C, i) \\
&= ((A, g)(B, h))(C, i).
\end{aligned}$$

OM2) Olgu $(A, g) \in P(G, X, Y)$ suvaline. Kuna kehtib $(g^{-1})^{-1}g^{-1}A = A \in Y$, siis leidub poolrühmas $P(G, X, Y)$ element $(g^{-1}A, g^{-1})$. Näeme, et ta on elemendi (A, g) inversne element, sest

$$\begin{aligned}
(A, g)(g^{-1}A, g^{-1})(A, g) &= (A \wedge g(g^{-1}A), gg^{-1})(A, g) \\
&= (A, 1)(A, g) \\
&= (A \wedge 1A, 1g) \\
&= (A, g), \\
(g^{-1}A, g^{-1})(A, g)(g^{-1}A, g^{-1}) &= (g^{-1}A, g^{-1})(A, 1) \\
&= (g^{-1}A \wedge g^{-1}A, g^{-1}1) \\
&= (g^{-1}A, g^{-1}).
\end{aligned}$$

OM3) Oletame, et $(A, g) \in P(G, X, Y)$ on idempotent. Siis kehtib, et

$$(A, g) = (A, g)(A, g) = (A \wedge gA, g^2),$$

millest järeldub, et $g = g^2$, aga kuna rühmas G on vaid üks idempotent, mis on ühikelement, siis $g = 1$. Nüüd saame ka, et $g = 1$ korral

$$A \wedge gA = A \wedge 1A = A.$$

Järelikult esituvad poolrühma $P(G, X, Y)$ idempotendid kujul $(A, 1)$, kus A on mingi poolvõre Y element.

OM4) Olgu $(A, 1), (B, 1) \in P(G, X, Y)$ mingid idempotendid. Siis näeme, et

$$(A, 1)(B, 1) = (A \wedge 1B, 1 \cdot 1) = (A \wedge B, 1) = (B \wedge 1A, 1 \cdot 1) = (B, 1)(A, 1).$$

OM5) Kuna $P(G, X, Y)$ on regulaarne ja tema idempotendid kommuteeruvad, siis teoreemi 1 tõttu on $P(G, X, Y)$ inversne poolrühm.

OM6) Olgu $(A, g), (B, h) \in P(G, X, Y)$ sellised, et kehtib $(A, g) \leq (B, h)$ loomuliku osalise järjestuse mõttes. Siis leidub mingi idempotent $(C, 1) \in P(G, X, Y)$, et

$$(A, g) = (C, 1)(B, h) = (C \wedge 1B, 1h) = (C \wedge B, h) \Rightarrow A \leq B \text{ ja } g = h.$$

Olgu nüüd $(A, g), (B, h) \in P(G, X, Y)$ sellised, et $A \leq B$ ja $g = h$. Paneme tähele, et

$$1^{-1}A = 1A = A \in Y,$$

seega poolrühmas $P(G, X, Y)$ leidub idempotent $(A, 1)$. Sellest saame järeldada, et

$$(A, 1)(B, h) = (A, 1)(B, g) = (A \wedge 1B, 1g) = (A \wedge B, g) = (A, g).$$

Oleme näidanud, et loomulik osaline järjestus esitub kujul

$$(\forall (A, g), (B, h) \in P(G, X, Y))((A, g) \leq (B, h) \iff A \leq B \text{ ja } g = h).$$

□

Tõestame McAlisteri P -teoreemi tarvilikkuse.

Teoreem 3. *Olgu X mingi osaliselt järjestatud hulk, Y tema alamhulk ja G rühm nii, et nad moodustavad McAlisteri kolmiku (G, X, Y) . Siis P -poolrühm $P(G, X, Y)$ on E -unitaarne inversne poolrühm.*

Tõestus. Olgu $P(G, X, Y)$ P -poolrühm ja E tema idempotentide poolvõre. Lause 6 põhjal teame, et $P(G, X, Y)$ on inversne poolrühm ja tema idempotendid esituvad kujul $(A, 1)$, kus $A \in Y$ on suvaline. Olgu $(B, g) \in P(G, X, Y)$ ja $(A, 1) \in E$ suvalised. Siis loomuliku osalise järjestuse kuju tõttu kehtib implikatsioon

$$(A, 1) \leq (B, g) \Rightarrow g = 1,$$

kust järeldub, et $(B, g) \in E$. Seega $P(G, X, Y)$ on E -unitaarne inversne poolrühm.

□

3 McAlisteri P -teoreemi piisavuse tõestus

Lause 7. *Olgu S inversne poolrühm ja E tema idempotentide poolvõre. Olgu σ vähim rühmakongruents poolrühmal S . Järgnevad väited on samaväärsed:*

- i) poolrühm S on E -unitaarne;*
- ii) kehtib $E\omega = E$;*
- iii) kehtib $\sigma \cap \mathcal{L} = 1_S$.*

Tõestus.

- i) $\Rightarrow$ ii)* Oletame, et S on E -unitaarne. Võtame suvalise $a \in E\omega$. Siis leidub idempotent e nii, et $e \leq a$. Kuna poolrühm S on E -unitaarne, siis $a \in E$. Oleme näidanud, et $E\omega \subseteq E$. Vastupidine sisalduvus kehtib, sest iga $e \in E$ korral $e \leq e$ ja seega $e \in E\omega$.
- ii) $\Rightarrow$ iii)* Oletame, et $E\omega = E$ ja $a, b \in S$ on sellised, et $a\sigma b$ ja $a\mathcal{L}b$. Lause 3 tõttu saame, et siis $a^{-1}a = b^{-1}b$. Teoreemi 2 tõttu saame, et $ab^{-1} \in E\omega = E$. Siis peab kehtima, et

$$ab^{-1} = (ab^{-1})(ab^{-1}) = (ab^{-1})^{-1}ab^{-1} = ba^{-1}ab^{-1}$$

ja järelikult ka

$$a = aa^{-1}a = ab^{-1}b = ba^{-1}ab^{-1}b = bb^{-1}bb^{-1}b = b,$$

mistõttu $\sigma \cap \mathcal{L} = 1_S$.

- iii) $\Rightarrow$ i)* Oletame, et kehtib $\sigma \cap \mathcal{L} = 1_S$. Fikseerime mingid $e, ea \in E$. Näeme, et $(a, a^{-1}a) \in \mathcal{L}$, sest

$$\begin{aligned} (\forall sa \in Sa) \quad sa &= (sa)(a^{-1}a) \in Sa^{-1}a, \\ a &= aa^{-1}a \in Sa^{-1}a, \\ (\forall sa^{-1}a \in Sa^{-1}a) \quad s(a^{-1}a) &= (sa^{-1})a \in Sa, \\ a^{-1}a &\in Sa. \end{aligned}$$

Kuna $a \geq ea \in E$, siis $a \in E\omega$. Teoreemi 2 järgi $a\sigma i$ iga $i \in E$ korral, seega ka $(a, a^{-1}a) \in \sigma$. Siis aga kehtib, et

$$(a, a^{-1}a) \in \sigma \cap \mathcal{L},$$

järelikult $a = a^{-1}a \in E$ ja S on E -unitaarne.

□

Märkus 4. Väitega $\sigma \cap \mathcal{L} = 1_S$ samaväärne on $\sigma \cap \mathcal{R} = 1_S$.

Järgnevalt konstrueerime suvalise E -unitaarse inversse poolrühma põhjal McAlisteri kolmiku. Olgu S suvaline E -unitaarne poolrühm ja E tema idempotentide poolvõre. Olgu σ vähim rühmakongruents. Defineerime McAlisteri kolmiku esimeseks elemendiks rühma $G = S/\sigma$, mille elemente tähistame iga $s \in S$ korral $[s]$.

Defineerime iga $s \in S$ korral elemendid

$$s^0 = (s^{-1}s, [s]) \in E \times G.$$

Paneme tähele, et kui suvaliste $s, t \in S$ korral kehtib $s^0 = t^0$, siis kehtivad ka implikatsioonid

$$\begin{aligned} s^{-1}s = t^{-1}t &\Rightarrow s\mathcal{L}t, \\ [s] = [t] &\Rightarrow s\sigma t. \end{aligned}$$

Lause 7 põhjal näeme, et kuna poolrühm S on E -unitaarne, siis $\sigma \cap \mathcal{L} = 1_S$ ja seega $s = t$. Seega oleme näidanud, et suvaliste $s, t \in S$ korral kehtib implikatsioon

$$s^0 = t^0 \Rightarrow s = t.$$

Tähistame suvalise alamhulga $T \subseteq S$ korral

$$T^0 = \{t^0 | t \in T\} \subseteq E \times G.$$

Olgu $\mathbf{R}$ kõigi poolrühma S parempoolsete peaideaalide hulk. Defineerime

$$Y = \{A^0 | A \in \mathbf{R}\}$$

ja paneme tähele, et tegu on poolvõrega. Tõepoolest kuna iga parempoolset pea-

ideaali saab esitada üheselt kujul eS , kus $e \in E$ on idempotent, siis iga hulga Y element $(eS)^0$ on üksüheses vastavuses mingi idempotendiga $e \in E$. Seega esitub hulk Y kujul

$$Y = \{(eS)^0 | e \in E\}$$

ja tema elemendid iga idempotendi $e \in E$ korral kujul

$$\begin{aligned} (eS)^0 &= \{(es)^0 | s \in S\} = \{((es)^{-1}(es), [es]) | s \in S\} \\ &= \{(s^{-1}ees, [e][s]) | s \in S\} = \{(s^{-1}es, [s]) | s \in S\}. \end{aligned}$$

Lisaks näeme, et poolvõrede $(Y, \cap)$ ja $(E, \cdot)$ vahel on poolvõrede isomorfism, sest

$$efS = eS \cap fS.$$

Märkus 5. Võrdus $efS = eS \cap fS$ kehtib sellepärast, et

- i) suvalise $efs \in efS$ korral $efs \in eS$ ja poolrühma S inverssuse tõttu idempotendid kommuteeruvad ning $efs = fes \in fS$, järelikult $efs \in eS \cap fS$;
- ii) suvalise $es \in eS \cap fS$ korral leidub selline $t \in S$, et $es = ft$ ja saame, et

$$es = e^2s = eft \in efS.$$

Defineerime tehte

$$\cdot : G \times (E \times G) \rightarrow (E \times G), g(e, h) = (e, gh), g \in G, (e, h) \in E \times G$$

ja hulga X

$$X = GY = \{gA^0 | g \in G, A^0 \in Y\}.$$

Näeme, et kuna kuna rühmas G leidub ühikelement 1, siis

$$Y = 1Y \subseteq GY = X.$$

Näeme, et ülal defineeritud tehte põhjal saame moodustada polügooni ${}_GX$, kui defineerime iga $g \in G$ ja $hA^0 \in X$ korral

$$g(hA^0) = (gh)A^0.$$

Tõepoolest on täidetud polügooni tingimused:

i) iga $g, h \in G$ ja $iA^0 \in X$ korral

$$g(h(iA^0)) = g((hi)A^0) = (g(hi))A^0 = ((gh)i)A^0 = (gh)(iA^0);$$

ii) iga $gA^0 \in X$ korral $1(gA^0) = (1g)A^0 = gA^0$.

Võib juhtuda, et leiduvad sellised $h, i \in G$ ja $A^0, B^0 \in Y$, et $hA^0 = iB^0$. Polügooni definitsiooni korrektsuseks peame näitama, et iga $g \in G$ korral $(gh)A^0 = (gi)B^0$. Näeme, et

$$A^0 = h^{-1}(iB^0) = (h^{-1}i)B^0 = (h^{-1}g^{-1}gi)B^0 = ((gh)^{-1}(gi))B^0 = (gh)^{-1}((gi)B^0),$$

kust saame, et kehtib

$$(gh)A^0 = (gi)B^0.$$

Lemma 2. Ülal defineeritud hulkade Y ja X korral on Y hulga X järjestusideaal.

Tõestus. Võtame suvalised elemendid $g(eS)^0 \in X$ ja $(fS)^0 \in Y$. Oletame, et $g(eS)^0 \subseteq (fS)^0$. Peame näitama, et siis kehtib kuuluvus $g(eS)^0 \in Y$. Näeme kõigepealt, et leidub element $(e, 1) \in (eS)^0$. Siis saame, et

$$(e, g) = g(e, 1) \in g(eS)^0.$$

Kuna $g(eS)^0 \subseteq (fS)^0$, siis leidub selline $u \in fS$, et

$$(u^{-1}u, [u]) = u^0 = (e, g) \in g(eS)^0.$$

Sellest järeldub, et $g = [u]$ ja $e = u^{-1}u$. Nüüd saame, et

$$\begin{aligned} g(eS)^0 &= [u](u^{-1}uS)^0 \\ &= [u]\{(u^{-1}us)^0 | s \in S\} \\ &= [u]\{(s^{-1}u^{-1}uu^{-1}us, [u^{-1}us]) | s \in S\} \\ &= [u]\{(s^{-1}u^{-1}us, [u^{-1}us]) | s \in S\} \\ &= [u]\{((us)^{-1}(us), [u^{-1}us]) | s \in S\} \\ &= \{((us)^{-1}(us), [u][u^{-1}us]) | s \in S\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{((us)^{-1}(us), [uu^{-1}us]) | s \in S\} \\
&= \{((us)^{-1}(us), [us]) | s \in S\} \\
&= \{(us)^0 | s \in S\} \\
&= (uS)^0.
\end{aligned}$$

Nüüd paneme tähele, et kuna $e = u^{-1}u$, siis

$$u = uu^{-1}u = ue \in uS.$$

Seega $uS = uS \cup \{u\} = uS^1$ on parempoolne peaideaal ning oleme saanud sisalduvuse $g(eS)^0 = (uS)^0 \in Y$. $\square$

Lemma 3. Ülal defineeritud polügooni ${}_GX$ korral kehtivad järgmised tingimused

MT1) iga $g \in G$ korral kehtib

$$(\forall A, B \in X)(A \leq B \iff gA \leq gB);$$

MT2) iga $g \in G$ korral kehtib

$$(\forall B \in X)(\exists A \in X)(gA = B).$$

Tõestus. Tõestame kõigepealt tingimuse **MT1)** Võtame suvalise $g \in G$ ja suvalised $h(eS)^0, i(fS)^0 \in X$, kus $h, f \in G$ ja $e, f \in E$.

Oletame esialgu, et

$$\{(s^{-1}es, h[s]) | s \in S\} = h(eS)^0 \subseteq i(fS)^0 = \{(t^{-1}ft, i[t]) | t \in S\}.$$

Teisisõnu iga $s \in S$ korral leidub selline $t \in S$, et $s^{-1}es = t^{-1}ft$ ja $h[s] = i[t]$. Teist võrdust elemendiga g läbi korrutades saame, et $gh[s] = gi[t]$, mistõttu iga $s \in S$ korral leidub selline $t \in S$, et $(s^{-1}es, gh[s]) = (t^{-1}ft, gi[t])$ ja järelikult

$$g(h(eS)^0) = \{(s^{-1}es, gh[s]) | s \in S\} \subseteq \{(t^{-1}ft, gi[t]) | t \in S\} = g(i(fS)^0).$$

Oletame nüüd vastupidiselt, et

$$\{(s^{-1}es, gh[s]) | s \in S\} = g(h(eS)^0) \subseteq g(i(fS)^0) = \{(t^{-1}ft, gi[t]) | t \in S\}.$$

Siis iga $s \in S$ korral leidub selline $t \in S$, et $s^{-1}es = t^{-1}ft$ ja $gh[s] = gi[t]$. Korrutades teise võrduse mõlemat poolt elemendiga g^{-1} saame, et iga $s \in S$ korral leidub selline $t \in S$, et $(s^{-1}es, h[s]) = (t^{-1}ft, i[t])$ ja järelikult

$$h(eS)^0 = \{(s^{-1}es, h[s]) | s \in S\} \subseteq \{(t^{-1}ft, i[t]) | t \in S\} = i(fS)^0.$$

Tõestame nüüd tingimuse **MT2**) Võtame suvalise $g \in G$ ja suvalise $h(eS)^0 \in X$, kus $h \in G$ ja $e \in E$. Peame leidma sellise $i(fS)^0 \in X$, kus $i \in G$ ja $f \in E$, et $g(h(eS)^0) = i(fS)^0$. Kuna

$$g(h(eS)^0) = (gh)(eS)^0,$$

siis saame võtta $i = gh \in G$ ja $f = e \in E$. □

Lemma 4. Ülal defineeritud rühma G ja poolvõre Y puhul kehtib, et iga $g \in G$ korral $gY \cap Y \neq \emptyset$.

Tõestus. Olgu $g \in G$ suvaline. Võtame sellise elemendi $s \in S$, et $[s] = g^{-1}$. Siis saame, et

$$\begin{aligned} g(sS)^0 &= g\{(st)^0 | t \in S\} \\ &= [s]^{-1}\{((st)^{-1}(st), [st]) | t \in S\} \\ &= [s^{-1}]\{(t^{-1}s^{-1}st, [st]) | t \in S\} \\ &= \{(t^{-1}(s^{-1}ss^{-1})st, [s^{-1}][st]) | t \in S\} \\ &= \{((s^{-1}st)^{-1}(s^{-1}st), [s^{-1}st]) | t \in S\} \\ &= (s^{-1}sS)^0 \in Y. \end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et $gY \cap Y \neq \emptyset$. □

Sellega oleme tõestanud, et ülal E -unitaarse inversse poolrühma S põhjal defineeritud kolmik (G, X, Y) on McAlisteri kolmik. Tõestame nüüd McAlisteri teoreemi piisavuse.

Teoreem 4. Iga E -unitaarne inversne poolrühm on isomorfne mingi P -poolrühmaga.

Tõestus. Olgu S E -unitaarne inversne poolrühm. Konstrueerime ülal kirjeldatu põhjal McAlisteri kolmiku (G, X, Y) . Tõestame, et $S \cong P(G, X, Y)$. McAlisteri

P -poolrühma definitsiooni põhjal teame, et iga $s \in S$ ja $g \in G$ korral

$$((sS)^0, g) \in P(G, X, Y) \iff g^{-1}(sS)^0 \in Y.$$

Lemma 4 tõestuse põhjal teame, et tingimus kehtib juhul $g = [s]$. Näitame, et see on ainuke juht. Oletame, et $g^{-1}(sS)^0 \in Y$. Peame näitama, et siis leidub selline $v \in S$, et $((sS)^0, g) = ((vS)^0, [v])$. Olgu $g^{-1}(sS)^0 = (tS)^0 \in Y$. Kuna element $g^{-1}(ss^{-1})^0 \in g^{-1}(sS)^0$, siis peab leiduma selline $u \in tS$, et $u^0 = g^{-1}(ss^{-1})^0$. Kuna

$$\begin{aligned} g^{-1}(ss^{-1})^0 &= g^{-1}((ss^{-1})^{-1}(ss^{-1}), [ss^{-1}]) = g^{-1}(ss^{-1}ss^{-1}, 1) = (ss^{-1}, g^{-1}), \\ u^0 &= (u^{-1}u, [u]), \\ g^{-1}(ss^{-1})^0 &= u^0, \end{aligned}$$

siis saame, et $s = u^{-1}$ ja $g = [u^{-1}]$ ja

$$((sS)^0, g) = ((u^{-1}S)^0, [u^{-1}])$$

ja oleme leidnud sobiliku $v = u^{-1}$.

Näitame, et kujutus

$$\varphi : S \rightarrow P(G, X, Y), \varphi(s) = ((sS)^0, [s])$$

on isomorfism. Eelmise lõigu põhjal nägime, et φ on surjektiivne. Tõestame, et ta on ka inektiivne. Olgu $s, t \in S$ sellised, et $\varphi(s) = \varphi(t)$. Siis peab kehtima, et

$$(sS)^0, [s] = (tS)^0, [t] \text{ ehk } (sS)^0 = (tS)^0 \text{ ja } [s] = [t].$$

Paneme tähele, et saame teha järelduse

$$(sS)^0 = (tS)^0 \Rightarrow sS = tS.$$

Tõepoolest, kui $(sS)^0 = (tS)^0$, siis võttes suvalise $su \in sS$ saame, et

$$\begin{aligned}
su \in sS &\Rightarrow (su)^0 \in (sS)^0 \\
&\Rightarrow (su)^0 \in (tS)^0 \\
&\Rightarrow (\exists v \in S)((su)^0 = (tv)^0) \\
&\Rightarrow (\exists v \in S)(su = tv) \\
&\Rightarrow su \in tS,
\end{aligned}$$

millest järeldub, et $sS \subseteq tS$. Vastupidise sisalduvuse saame, kui vahetada elementide s ja t rollid. Järelikult $sS = tS$.

Viimane võrdus aga tähendab, et $s\mathcal{R}t$. Kuna $[s] = [t]$, siis märkuse 4 tõttu $s = t$.

Näitame, et kujutus φ on homomorfism. Kuna kehtivad

$$\begin{aligned}
\varphi(st) &= ((stS)^0, [st]), \\
\varphi(s)\varphi(t) &= ((sS)^0, [s])((tS)^0, [t]) = ((sS)^0 \cap [s](tS)^0, [st]),
\end{aligned}$$

siis peame näitama, et

$$(stS)^0 = (sS)^0 \cap [s](tS)^0.$$

Olgu kõigepealt $(e, g) \in (sS)^0 \cap [s](tS)^0$. Siis peavad leiduma sellised $u, v \in S$, et

$$(e, g) = (su)^0 \text{ ja } (e, g) = [s](tv)^0.$$

Näeme, et siis $[s]^{-1}(su)^0 = (tv)^0$ ja seega

$$\begin{aligned}
(tv)^0 &= [s]^{-1}((su)^{-1}(su), [su]) \\
&= [s^{-1}](u^{-1}s^{-1}su, [su]) \\
&= (u^{-1}(s^{-1}ss^{-1})su, [s^{-1}][su]) \\
&= ((s^{-1}su)^{-1}(s^{-1}su), [s^{-1}su]) \\
&= (s^{-1}su)^0.
\end{aligned}$$

Sellest järeldub, et $tv = s^{-1}su$ ning edasi saame, et

$$su = ss^{-1}su = stv.$$

Järelikult

$$(e, g) = (su)^0 = (stv)^0 \in (stS)^0.$$

Olgu nüüd $(e, g) \in (stS)^0$. Siis kindlalt $(e, g) \in (sS)^0$. Näitame, et kehtib ka $(e, g) \in [s](tS)^0$. Kuna $(e, g) \in (stS)^0$, siis leidub selline $u \in S$, et $(e, g) = (stu)^0$. Võtame elemendi $v = (st)^{-1}(st)u \in S$. Siis

$$\begin{aligned} (tv)^{-1}(tv) &= v^{-1}t^{-1}tv \\ &= ((st)^{-1}(st)u)^{-1}t^{-1}t(st)^{-1}(st)u \\ &= u^{-1}(st)^{-1}stt^{-1}tt^{-1}s^{-1}stu \\ &= u^{-1}t^{-1}s^{-1}s(tt^{-1}t)t^{-1}s^{-1}stu \\ &= u^{-1}t^{-1}(s^{-1}s)(tt^{-1})s^{-1}stu \\ &= u^{-1}t^{-1}(tt^{-1})(s^{-1}s)s^{-1}stu \\ &= u^{-1}t^{-1}s^{-1}stu \\ &= (stu)^{-1}(stu). \end{aligned}$$

Lisaks näeme, et

$$[v] = [(st)^{-1}(st)u] = [(st)^{-1}(st)][u] = 1[u] = [u].$$

Seega saame kokku, et

$$\begin{aligned} (e, g) &= (stu)^0 \\ &= ((stu)^{-1}(stu), [stu]) \\ &= ((tv)^{-1}(tv), [s][t][u]) \\ &= [s]((tv)^{-1}(tv), [t][v]) \\ &= [s]((tv)^{-1}(tv), [tv]) \\ &= [s](tv)^0 \in [s](tS)^0. \end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et $(e, g) \in (sS)^0 \cap [s](tS)^0$, järelikult φ on isomorfism ja teoreem on tõestatud. $\square$

Kokkuvõte

Töö eesmärgiks oli anda üksikasjalik tõestus McAlisteri P -teoreemile. Näitasime, et McAlisteri kolmiku (G, X, Y) korral on $P(G, X, Y)$ E -unitaarne inversne poolrühm ja et iga E -unitaarne inversne poolrühm on isomorfne mingi P -poolrühmaga $P(G, X, Y)$, kus (G, X, Y) on McAlisteri kolmik.

Teises peatükis näitasime, et suvalise McAlisteri kolmiku (G, X, Y) korral on P -poolrühma $P(G, X, Y)$ definitsioon korrektne ning et $P(G, X, Y)$ on E -unitaarne inversne poolrühm.

Kolmandas peatükis konstrueerisime suvalise E -unitaarse inversse poolrühma S korral McAlisteri kolmiku (G, X, Y) , kus

- i) rühm G esitub kujul G/σ , kus σ on vähim rühmakongruents;
- ii) poolvõre Y on hulk hulkadest A^0 , kus A on poolrühma S parempoolne ideaal ja

$$A^0 = \{s^0 | s \in A\}, s^0 = (s^{-1}s, [s]), [s] \in G/\sigma.$$

- iii) osaliselt järjestatud hulk X on $X = GY$.

Viited

- [1] J. M. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, 2003. ISBN: 0-19-851194-9.
- [2] M. V. Lawson. *Inverse Semigroups*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998. ISBN: 978-981-281-668-9.
- [3] D. B. McAlister. “Groups, semilattices and inverse semigroups”. *Proceedings of a Symposium on Inverse Semigroups and their Generalisations (Northern Illinois Univ., DeKalb, Ill., 1973)* (1973).
- [4] D. B. McAlister. “Groups, semilattices and inverse semigroups. II”. *Transactions of the American Mathematical Society* (1974).
- [5] L. Tart V. Laan. *Sissejuhatas algebra struktuuridesse. konspekt*. 2023. URL: <https://courses.ms.ut.ee/2023/AlgebraStruktuurid/spring/uploads/Main/konspektV1.6.pdf>.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Hartvig Tooming**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose **McAliste-ri P -teoreem inverssete poolrühmade kohta**, mille juhendaja on **Alvin Lepik**, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Hartvig Tooming

27.05.2026