

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

K. Soonets

*Valitud küsimusi
teoreetilisest
mehhaanikast*

///

TARTU 1963

27.10.52.

A-23770

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI

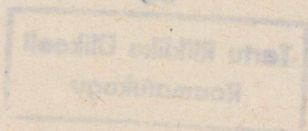
Teoreetilise mehhaanika kateeder

K. Soonets

VALITUD KÜSIMUSI
TEOREETILISEST MEHHAANIKAST

III

Dünaanika üldvõrrand ja selle rakendusi



Tartu 1963

27.10.63a.

Тартуский государственный университет
ЭССР, Тарту, ул. Эликооли, 18

К. Соонетс

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ

III

Общее уравнение динамики и его
применения
На эстонском языке

Vastutav toimetaja E. Jõgi
Korrektor A. Norberg

TRU rotaprint 1963. Trükipoognaid 3,2.
Arvutuspoognaid 2,6. Trükiarv 300.
NB 00416. Tell. nr. 959.

Hind 8 kop.

2

Tartu Riikliku Olikeoli
Raamatukogu

84487

E e s s õ n a.

Käsolev väljaanne kuulub TRÜ teoreetilise mehhaanika kateedri poolt väljaantavate õppevahendite sarja.

Sarja käsolevas vihikus leiavad käsitlemist võimalike nihutuste printsiip, d'Alemberti printsiip ja dünaamika üldvõrrand koos näidetega. Nimetatud printsiipide sisu paremaks mõistmiseks ja omandamiseks on soovitatav tutvuda sama küsimuste ringi puudutavate näidetega TRÜ rotaprindi väljaandel ilmunud õppevahendist "Näidisülesandeid teoreetilisest mehhaanikast" II (autorid L.Roots ja K.Soonets).

Väljaande koostamisel on silmas peetud TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna matemaatika, pedagoogilise ja füüsika osakonna üliõpilaste vajadusi.

Autor. *

§ 1. SEOSSED.

Mehhaanilise süsteemi all mõistetakse materiaalsete punktide kogu, milles iga materiaalse punkti asukoht ja liikumine sõltub süsteemi teiste punktide asukohast ja liikumisest. Iga mehhanism või masin kujutab endast mehhaanilist süsteemi. Siin toimub süsteemi punktide vastastikune mõjutamine geomeetriliste kitsenduste kaudu - süsteemi punktide vahel on geomeetiline seos. Päikesesüsteemi kuuluvate kehade vastastikuseid asukohti ja liikumist mõjutavad kehade vastastikused tõmbetungid - süsteemi osade vahel on dünaamiline seos. Emajõel sõitvad mootorpaadid koos vaadelduna ei moodusta mehhaanilist süsteemi, sest nende liikumise vahel puudub praktiliselt igasugune vastastikune mõju.

Vaatleme n punktist koosneva süsteemi liikumist. Süsteemi punktide asukohti antud ristkoordinaadistikus määrame kohavektoritega $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Punktide kiirused on $\vec{v}_i \equiv \dot{\vec{r}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$, kus $i = 1, 2, \dots, n$. Igasuguseid süsteemi punktide liikumist kitsendavaid geomeetrilisi tingimusi nimetatakse seosteks. Matemaatiliselt väljendatakse seoste olemasolu võrrandite või võrratustega, mis seovad punktide koordinaate, kiirusi ja aega t :

$$f(t; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_n) = 0$$

ehk lühemalt,

$$f(t; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n; \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n) = 0.$$

Neid võrrandeid nimetame seosvõrranditeks.

Edaspidi kasutame lühendatud kirjutusviisi:

$$f(t; x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0 \quad (1)$$

ehk

$$f(t, \vec{r}_i, \vec{v}_i) = 0. \quad (1^a)$$

Peame silmas, et võrrandi (1) vasak pool kujutab endast tegelikult aja t ja kõigi punktide koordinaatide funktsiooni - üldiselt $6n + 1$ argumendi funktsiooni.

Kui seosvõrrand ei sisalda kiirusi \vec{v} , nimetatakse seost geomeetriliseks ehk holonoomseks. Holonoomne seos väljendub võrrandiga

$$f(t, x_i, y_i, z_i) = 0. \quad (2)$$

Üldjuhul nimetatakse seost, millele vastab seosvõrrand kujul (1), diferentsiaalseks ehk kinemaatiliseks. Seose nimetus on tulnud sellest, et seosvõrrand sisaldab koordinaatide tuletisi aja järgi. Geomeetriline seos kitsendab süsteemi asendi muutusi, kinemaatiline seos loob kitsendusi süsteemi punktide kiirustele. Geomeetrilise seose (2) diferentseerimisel aja järgi saame võrrandi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) = 0. \quad (3)$$

Võrrand (3) kujutab endast kinemaatilist seost; süsteemi punktide kiiruste komponendid peavad igal hetkel rahuldama seda võrrandit. Kinemaatilist seost, mis on integreerimise teel taandatav kujule (2), nimetatakse integreeruvaks. Kui seosvõrrandist ei ole võimalik kaotada koordinaatide tuletisi, räägitakse mitteintegreeruvast kinemaatilisest seosest ehk mitteholonoomsest seosest.

Statsionaarseks nimetatakse seost, mis ei muutu aja jooksul. Seosvõrrand ei sisalda siis aega t ilmutatud kujul, s. t.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Kui seosvõrrand sisaldab aega t ilmutatud kujul, s. t. $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$, on tegemist mittestatsionaarse seosega.

Materiaalsete punktide süsteemile on harilikult rakendatud rohkem kui üks seos. Kui on tegemist ainult holonoomsete ja kinemaatiliste integreeruvate seostega, nimetatakse süsteemi ennast holonoomseks. Kinemaatiliste mitteintegreeruva-

te seoste korral r higitakse mittehologoomsest süsteemist. Ainult statsionaarsete seoste mõjumisel nimetatakse süsteemi skleronoomseks; kui esineb ka mittestatsionaarseid seoseid - reonoomseks.

Kui seose olemasolu on väljendatav võrratuse

$$f(t, x_i, y_i, z_i) \geq 0$$

abil, r higitakse vabastavast seosest. V rduste abil väljendatavaid seoseid nimetatakse seevastu mittevabastavateks. Vabastava seose korral võib süsteem  leminikul ühest asendist teise vabaneda seosest.

Illustreerime loodud mõisteid näidetega.

1. Matemaatiline pendel. Olgu pendli pikkus l ; seosvõrrandiks saame

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Kui $l = l(t)$, s. t. pendli pikkus muutub, on tegemist mittestatsionaarse hologoomse seosega; kui $l = \text{const}$, on seos statsionaarne.

2. Materiaalse punkti liikumine m dda liikumatut pinda.

Pinna võrrand olgu antud kujul

$$f(x, y, z) = 0.$$

Punkti koordinaadid peavad igal hetkel rahuldama pinna võrrandit - punkti koordinaatide muutumine on kitsendatud.

Seosv rrandiks on pinna võrrand.

On tegemist hologoomse statsionaarse seosega.

3. Vaatleme kaht materiaalist punkti, mis on ühendatud absoluutselt j higa kaaluta vardaga. Punktid saavad liikuda ainult nii, et nende omavaheline kaugus d j h b muutumatuks. Seosv rrand esitub kujul

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - d^2 = 0$$

ehk

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 - d^2 = 0.$$

Kirjeldataud konstruktsioon on hologoomse skleronoomse süsteemi näiteks. Absoluutselt kindlat keha võime kujutleda samuti koosnevana lõpmata suurest arvust kaaluta j lkade varrastega ühendatud punktide paaridest. Seega võib kindlat keha lugeda

holonoomseks skleronoomseks materiaalsete punktide süsteemiks.

4. Toimugu suusa libisemine tasasel teel selliselt, et külglibisemine puudub. Siis on suusa kiirus kogu aeg sihitud piki suuska. Leiame suusa liikumist kitsendavad seosvõrrandid.

Suusa asemel võime vaadelda jäika varrast. Varda keskpunkti kiirus on sihitud piki varrast, kusjuures varda liikumine toimugu xy -tasapinnas. Varda otspunktide liikumist kitsendavatele seostele vastavad seosvõrrandid (kontrollida!):

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - d^2 = 0,$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2}.$$

Viimane võrrand määrab kinemaatilise mitteintegreeruva seose ja seega on süsteem mitteholonoomne.

Mitteholonoomsed seosed esinevad samuti näiteks kelgu libisemisel mööda jääd (külglibisemine puudub), mänguhobusega sõitmisel, juhtivate mürskude lendamisel.

5. Olgu kaks materiaalset punkti ühendatud venimatu niidiga. Punktid ei saa teineteisest eemalduda rohkem kui niidi pikkuse l kaugusele. Matemaatiliselt väljendub sellise seose olemasolu võrratuse kujul

$$l^2 - (y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \geq 0.$$

Pinguletõmbamata niidi korral puudub seos niidi otstes asuvate punktide vahel - punktid saavad teineteise suhtes vabalt liikuda.

§ 2. VÕIMALIKUD NIHUTUSED.

Vaatleme n materiaalsest punktist koosnevat mehhaanilist süsteemi, mille punktide liikumine on kitsendatud κ holonoomse mitteväbastava seosega:

$$f_{\alpha}(t, x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (4)$$

ehk

$$f_{\alpha}(t, \vec{r}_i) = 0, \quad \text{kus } \alpha = 1, 2, \dots, \kappa. \quad (4^a)$$

Süsteemile rakendatud tungide mõjul toimub süsteemi liikumine kooskõlas seostega. See tähendab, et igal hetkel rahuldavad punktide kohavektorid \vec{r}_i seosvõrrandeid ja liikumise diferentsiaalvõrrandeid. Siis rahuldavad ka hetkele $t+dt$ vastavad punktide kohavektorid $\vec{r}_i + d\vec{r}_i$ võrrandeid (4a):

$$f_{\alpha}(t+dt, \vec{r}_i + d\vec{r}_i) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \kappa).$$

Ajavahemiku dt jooksul muudavad süsteemi punktid antud tungide mõjul oma asukohta ruumis $d\vec{r}_i$ võrra. Vektorid

$$d\vec{r}_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j} + dz_i \vec{k}$$

kujutavad süsteemi punktide tõelisi elementaarseid nihutusi, olles üheselt määratud süsteemis mõjuvate seostega ja süsteemile rakendatud tungidega.

Lisaks tõelistele nihutustele on mehhaanikas osutunud väga otstarbekateks nn. võimalike nihutuste ehk virtuaalsete nihutuste mõiste.

Materiaalse punkti niisugust lõpmata väikest nihutust, mis on kooskõlas antud hetkel eksisteerivate seostega, nimetatakse punkti võimalikuks nihutuseks. Süsteemi punktide võimalike nihutuste kompleks määrab kogu süsteemi võimaliku nihutuse.

Süsteemi punktide võimalikke nihutusi tähistatakse sümboliga δ , et neid eristada tõelistest elementaarsetest nihutustest. Seega

$$\delta \vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k},$$

kus $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ on punkti võimalikud nihutused vastavate koordinaattelgede sihis ehk nn. koordinaatide variatsioonid.

Kui hetkele t vastavad süsteemi punktide kohavektorid rahuldavad seosvõrrandeid (4a), siis peavad samal hetkel t rahuldama võrrandeid (4a) ka süsteemi uuele, eelmisest asendist lõpmata vähe erinevale asendile vastavate punktide kohavektorid $\vec{r}_i + \delta \vec{r}_i$, s.t.

$$f_\alpha(t, \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i) = 0$$

ehk

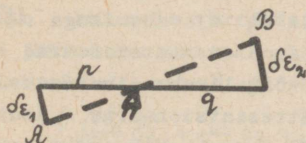
$$f_\alpha(t, x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Võimalik nihutus $\delta \vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ on geomeetriline mõiste, mis pole seotud süsteemi punktide tõelise liikumisega; ta on kooskõlas seoste struktuuriga. Punkti võimalik nihutus $\delta \vec{r}$ saadakse aja funktsiooni $\vec{r} = \vec{r}(t)$ muutumisel funktsiooni enda kuju muutumise arvel $\delta \vec{r}$ võrra argumendi t muutumatuks jättes. Tõeline nihutus $d\vec{r}$ kujutab funktsiooni $\vec{r} = \vec{r}(t)$ muutust argumendi t muutumise arvel dt võrra.

Selgitame võimaliku nihutuse mõistet näidetega.

1. Vaba materiaalse punkti korral on iga elementaarne nihutus punkti võimalikuks nihutuseks. Tegelikult realiseerub lõpmata paljudest võimalikest nihutustest punktile rakendatud tungide mõjul ainult üks - tõeline nihutus. Kui punkt asub liikumatul pinnal, siis on punkti võimalikeks nihutusteks iga lõpmata väike nihutus antud pinnal või joonel.

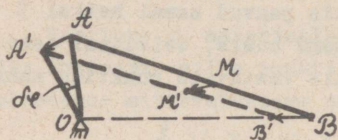
2. Kangi võimalikuks nihutuseks on lõpmata väike pöörnurga $\delta \varphi$ võrra ümber punkti O (joonis 1). Kangi otspunktide A ja B võimalikud nihutused $\delta \varepsilon_1$ ning $\delta \varepsilon_2$ on raadiustega p ja q tõmmatud ringjoonte kesknurgale $\delta \varphi$ vastavad kõõlud. Nurga $\delta \varphi$ väiksuse tõttu võime kõõlud lugeda võrdseteks ringjoonte kaartega ning seega



$$\delta \varepsilon_1 = p \cdot \delta \varphi, \quad \delta \varepsilon_2 = q \cdot \delta \varphi.$$

Joonis 1.

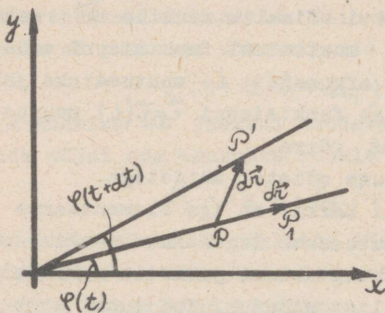
3. Väntmehhanismi kolme punkti A, M ja B võimalikud nihutused, mis vastavad vända OA elementaarsele pöördele $\delta\varphi$



võrra, on näha joonisel 2. Paneme tähele, et nii selles kui ka eelmises näites ei ole süsteemi punktide võimalikud nihutused üksteisest sõltumatud.

Joonis 2.

4. Joonisel 3 on esitatud süsteem, kus xy-tasapinnas pöörleval vardal asuv masspunkt võib libiseda piki varrast.



Joonis 3.

Punkti üheks võimalikuks nihutuseks on vardasihiline nihutus $\overrightarrow{PP_1} = \delta\vec{r}$, mis vastab pöörleva varda asendile hetkel t . Nihutus $\delta\vec{r}$ on kooskõlas punktile mõjuva seosega hetkel t : punkt asub endiselt vardal. Nihutus $\overrightarrow{PP'} = d\vec{r}$ ei ole enam punkti võimalik nihutus: punkti P' kohavektor $\vec{r} + d\vec{r}$ on kooskõlas seo-

sega hetkel $t + dt$, kuid mitte enam hetkel t . Kui varras ei pöörleks, oleks hetkel t nii punkt P kui ka lõpmata ligidalt asuv P_1 materiaalse punkti võimalikuks asukohaks. Tegelikult võib aga materiaalse punkti tõeline liikumine olla selline, et ta jõuab punktist P punkti P_1 ajavahemikuga dt . Seega mittepöörleva varda korral - seos on statsioonarne - oleks punkti tõeline nihutus üheks võimalikuks nihutuseks. Kui varras aga pöörleb - seos on mittestatsioonarne - osutub materiaalse punkti viimine punkti P_1 ajavahemiku dt jooksul võimalikuks, kuna varras on jõudnud juba uude asendisse.

5. Toimugu punkti liikumine mööda kera pinda, kusjuures

kera raadius $R=R(t)$. Hetkele t_1 vastavateks punkti võimalikeks nihutusteks on punkti kõik mõeldavad lõpmata väikesed nihutused kera pinnal raadiusega $R(t_1)$. Muutumatu raadiusega kera korral, s.t., kui punkti liikumist kitsendab statsionaarne seos, oleks punkti tõeline nihutus üks võimalikest nihutustest.

Kokku võttes võime ütelda: statsionaarsete seoste korral kuulub süsteemi tõeline nihutus ühena lõpmata hulga võimalike nihutuste hulka. Mittestatsionaarsete seoste juhul leiame hetkele t vastavad süsteemi võimalikud nihutused sel teel, et loeme alates hetkest t seoseid statsionaarseteks: aeg t on fikseeritud parameetriks, seoseid kujutleme "tardunutena".

§ 3. MEHHAANILISE SÜSTEEMI VABADUSASTMED.

Olgu süsteemile mõjumas κ holonoomset seost tüüpi (4), s.t.

$$f_{\alpha}(t, x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \kappa).$$

Diferentseerime võrrandeid (4) aja t järgi, saades seega kinemaatilised seosed:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \kappa). \quad (5)$$

Punktide tõelised nihutused $d\vec{r}_i$ rahuldavad võrrandeid (4) ehk nendega samaväärseid võrrandeid (5), s.t. seosvõrrandid (4) ehk (5) loovad kitsendusi süsteemi punktide nihutustele. Võrrandeid (5) rahuldavad ka punktide võimalikud nihutused $\delta\vec{r}_i$, kui neis võrrandis lugeda aeg t muutumatuks - seosed jäävad muutumatuks alates hetkest t . Sellisel juhul tuleb võtta $dt=0$ ja jõuame võrranditeni

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \kappa). \quad (6)$$

Kui seosed on statsionaarsed, puuduvad võrrandis (5) osatuletised aja järgi. Võrreldes sellisel juhul võrrandeid

(5) ja (6), veendume järjekordselt, et statsionaarsete seoste juhul on süsteemi tõeline nihutus üks samale hetkele vastavatest süsteemi võimalikest nihutustest.

Võrranditest (6) järeldub, et süsteemi punktide võimalikud nihutused $\delta \vec{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ ei ole üksteisest sõltumatud. Nad asetavad β_n koordinaadi võimalikule nihutusele $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ κ lisatingimust. Järelikult võime $\beta_n - \kappa$ koordinaatide võimalikku nihutust valida üksteisest sõltumatult, kuna ülejäänud κ nihutust leiame sõltumatute võimalike nihutuste lineaarsete kombinatsioonidena võrrandest (6).

Arvu

$$v = \beta_n - \kappa$$

nimetatakse süsteemi vabadusastmete arvuks. Süsteemi vabadusastmete arv määratakse vabalt valitavate ja üksteisest sõltumatute võimalike nihutuste projektsioonide arvuga. Vabadusastmete arv võrdub süsteemi punktide koordinaatide ja seosvõrrandite arvu vahega.

Käsitleme mõningaid näiteid.

1. Pinnal asuval punktil on 2 vabadusastet: punkti asukoha määrab 3 koordinaati, seosvõrrandiks on pinna võrrand.

2. Punkti liikudes antud joonel on tal üks vabadusaste - seosvõrrandiks on kahe antud joont mööda lõikuva pinna võrrandid.

3. Võib näidata, et vabal kindlal kehal on 6 vabadusastet. Tõepoolest, kindla keha asend on määratud kolme tema punktiga ($\beta_n = 9$). Punktidevahelised kaugused on muutumatud. Seosvõrrandeid saame 3.

4. Ühe kinnispunktiga kindlal kehal on 3 vabadusastet. Eelmises näites toodud kolmele seosele lisandub veel kolm seost - kinnispunkti koordinaadid on konstantsed.

5. Vântmehhanismil on 1 vabadusaste - kõigi punktide võimalikud nihutused saame avaldada näiteks väнда elementaarse pöörde $\delta \varphi$ kaudu (vt. joonis 2). Analoogiline olukord on kangi juhul (joonis 1). Suur osa masinaid ja mehhanisme on ühe vabadusastmega.

Märkus: Mitme muutuja funktsiooni variatsioonide mõiste ja varieerimise eeskirjad antakse variatsiooniarvutuse kursuses.

Märgime ainult, et funktsiooni varieerimisel kehtivad samad eeskirjad nagu diferentseerimisel, kui lugeda aeg konstantseks.

§ 4. IDEAAALSED SEOSED.

Olgu tegemist mehhaanilise süsteemiga, millele on rakendatud tungid ja mille liikumine on kitsendatud seostega. Intuitiivselt võime ütelda, et seoste puudumisel, kuid samade tungide mõjul toimuks süsteemi liikumine teisiti kui seoste eksisteerimisel. Süsteemi punktide kiirused ja kiirendused oleksid teistsugused. Mehhaanika põhiseadustest on aga teada, et igasuguse kiirenduse allikaks on tung. Kujutleme seosed eemaldatuna ja nende mõju süsteemile asendatuna selliste tungidega, et süsteemi punktide liikumine ei erineks nende tõelisest liikumisest. Tungi või tunge, millega seosed mõjuvad süsteemi punktile, nimetatakse seoste reaktsioontungideks ehk reaktsioonideks. Seoste asendamise võimalikkust reaktsioontungidega tuntakse mehhaanikas seostest vabastamise printsiibi nime all.

Reaalsetest seostest lähtudes luuakse abstraktsioon nn. ideaalsete seoste näol.

Seoseid nimetatakse ideaalseteks, kui seoste reaktsioontungide tööde summa süsteemi mis tahes võimalikel nihutustel on null. Matemaatiliselt võime ideaalseid seoseid defineerida võrdusega

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (7)$$

ehk projektsioonides koordinaattelgedele

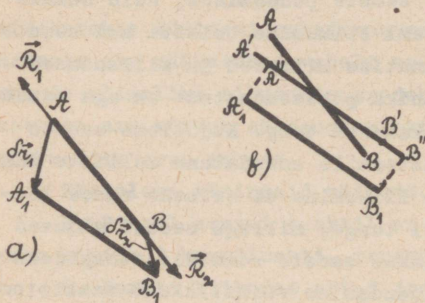
$$\sum_{i=1}^n (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0; \quad (7a)$$

kus $\vec{R}_i = (R_{ix}, R_{iy}, R_{iz})$ on süsteemi punktile rakendatud reaktsioontungid.

Toome mõningaid näiteid ideaalsete seoste kohta.

1. Punkti liikumisel absoluutselt siledal pinnal on pinna reaktsioon \vec{R} suunatud risti pinnaga, sest pind ei takista punkti liikumist puutuja sihis. Seega $\vec{R} \perp \delta\vec{r}$ ja reaktsioontungi töö punkti mis tahes võimalikul nihutusel on null. Absoluutselt sile pind on ideaalne seos. Samuti kujutab absoluutselt sile kõver ideaalset seost.

2. Absoluutselt jäik kaaluta varras kujutab varda otsesse kinnitatud kahe materiaalse punkti jaoks ideaalset seost. Näitame seda (vt. joonis 4). Mõjugu punktid A ja B teineteisele tungidega \vec{N}_1 ja \vec{N}_2 .



Joonis 4.

tungiga $\vec{R}_1 = \vec{N}_2$. Analoogilise arutlusega jõuame tungini $\vec{R}_2 = \vec{N}_1$. Tungid \vec{R}_1 ja \vec{R}_2 kujutavadki endast varda reaktsioontunge, kusjuures Newtoni III seaduse põhjal $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$.

Varda AB otspunktide võimalikud nihutused olgu (joonis 4b)

$$\vec{AA}_1 = \delta\vec{r}_1, \quad \vec{BB}_1 = \delta\vec{r}_2.$$

Varda saame asendist AB viia asendisse A_1B_1 järgmiselt. Esmalt pöörame varrast tema keskpunkti ümber, kuni $A'B' \parallel A_1B_1$. Selle pöörde ulatuses tungid \vec{R}_1 ja \vec{R}_2 tööd ei tee: rakenduspunktide nihutused on risti tungi mõjusirgega. Nüüd nihutame varda asendisse $A''B''$. Tungide \vec{R}_1 ja \vec{R}_2 tööde summa on null, sest ühe tungi töö on negatiivne, teisel positiivne. Lõpuks nihutame varda paralleelselt iseendaga asendist $A''B''$

Reaktsioontungide leidmiseks kasutame nn. lõigete meetodit, mis seisneb järgnevas. Teostame mõttes vardas lõike ab ja kujutleme varda ühe osa (näiteks parema) eemaldatuna. Et allesjäänud vasak osa säilitaks oma esialgse tegeliku asendi, peame varda parempoolse osa mõju vasakpoolsele asendama teatud

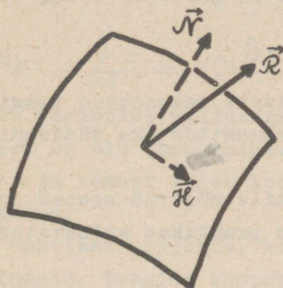
lõppasendisse $A_1 B_1$ - sellel nihutusel \vec{R}_1 ja R_2 järele tööd ei tee. Seega tõepoolest

$$\vec{R}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0 ,$$

mis tõestabki meie väite.

3. Tuginedes eelnevale näitele ja esimeses punktis toodud näitele 3, võime järeldada, et absoluutselt kindel keha on ideaalsete seostega masspunktide süsteem.

4. Karedat pinda või joont võime lugeda ideaalseks seoseks, kui hõõrdumistungid arvata välistungide hulka. Lahutame pinna kogureaktsiooni \vec{R} joonisel 5 näidatud viisil kaheks



Joonis 5.

komponendiks, millest \vec{N} kujutab pinna normaalreaktsiooni ja \vec{H} pinna puutu-
tasapinnas mõjuvat hõõrdumis-
tungi. Hõõrdumistungi suurust
saab hinnata pinna normaal-
reaktsiooni kaudu Coulomb'i
hõõrdumisseaduste abil.

Analoogiliselt arutleme
kareda kõvera juhul.

§ 5. VÕIMALIKE NIHUTUSTE PRINTSIIP.

Olgu tegemist mehhaanilise süsteemiga, mille punktidele on rakendatud tungid ja mille liikumine on kitsendatud seostega. Millistel tingimustel on süsteem tasakaalus, s.t., millal on süsteemi kõik punktid neile rakendatud tungide ja seoste mõju all tasakaalus? Vastuse sellele küsimusele annab võimalike nihutuste printsiip - staatika kõige üldisem printsiip, mis on mehhaanika arengus etendanud väga tähtsat osa. Võimalike nihutuste printsiibi formuleeris üldkujul esimesena

Johann Bernoulli 1717.a. Printsiiibi näitlik, kuid mitte range tõestus pärineb Lagrange'ilt, range tõestus kuulub Ampere'ile 1806.a.

Võimalike nihutuste printsiiip on järgmine: tasakaalu tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks süsteemi antud asendis on süsteemi punktidele rakendatud tungide tööde summa võrdumine nulliga nende tungide rakenduspunktide mis tahes võimalikul nihutusel.

Analüütiliselt väljendub võimalike nihutuste printsiiip kujul

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (8)$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0, \quad (9)$$

kus $F_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ on süsteemi punktidele rakendatud tungid ja $\delta \vec{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ - tungide rakenduspunktide (ka süsteemi punktide) võimalikud nihutused.

Tõestamisel eeldame, et süsteemile mõjuvad seosed on ideaalsed ja statsionaarsed - enamus praktikas esinevatest seostest on tõe poolset sellised.

Tõestame tingimuse tarvilikkuse. Olgu süsteem tasakaalus - siis on ka süsteemi kõik punktid tasakaalus. Punkt saab aga tasakaalus olla ainult siis, kui kõigi temale rakendatud tungide ja reaktsioontungide \vec{R}_i summa on null, seega

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 ;$$

kuid siis ka nende tungide resultandi töö vastava punkti võimalikul nihutusel

$$(\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 .$$

Liidame süsteemi kõigile punktidele rakendatud tungide tööd; saame

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 .$$

Eelduse kohaselt on seosed ideaalsed ja vastavalt valemile (7); saamegi

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

- printsiibi tarvilikkus on tõestatud.

Piisavuse tõestamisel loeme tingimuse (8) täidetuks. Oletame vastuvõtlikult, et süsteem siiski ei ole tasakaalus. Sellisel juhul hakkab süsteem liikuma ning sooritab lõpmata väikese ajavahemiku jooksul tõelise nihutuse. Viimane kuulub statsionaarsete seoste korral võimalike nihutuste hulka. Kuna süsteemi punktide nihutused toimuvad \vec{F}_i ja \vec{R}_i resultantvektori suunas, siis tungide tööde summa on positiivne, s. t.

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i > 0.$$

Võttes jälle arvesse, et seosed on ideaalsed, jõuame tulemusele

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i > 0,$$

mis on vastuolus eeldusega. Vastuoluni jõudsimet oletusega, et süsteem ei ole tasakaalus. Selline oletus osutus seega ebaõigeks ja temast tuleb loobuda - ka printsiibi piisavus on tõestatud.

Vaatleme erijuhtu, kus süsteemile mõjuvad konservatiivsed tungid. Tungide komponendid avalduvad siis süsteemi potentsiaalse energia U osatuletiste kaudu

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Võrrand (9) teisendub nüüd kujule

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0.$$

Analoogiliselt n muutuva funktsiooni täisdiferentsiaalile nimetatakse viimast summat n muutuva funktsiooni variatsiooniks ja kirjutatakse lühendatult kujul δU .

Võrdus

$$\delta U = 0$$

väljendab potentsiaalse energia U statsionaarsuse tingimust (analoogiliselt funktsiooni täisdiferentsiaali võrdumisele nulliga). Saadud tulemus tähendab, et statsionaarsete ideaalsete seoste ja konservatiivsete välistungide korral omab süsteemi

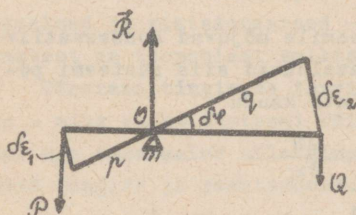
potentsiaalsete energia tema tasakaaluasendis statsionaarse väärtuse.

Võimalike nihutuste printsiibist lähtudes saab tuletada materiaalsete punktide süsteemi tasakaaluvõrrandid.

§ 6. NÄITEID VÕIMALIKE NIHUTUSTE PRINTSIIBI RAKENDAMISE KOHTA.

Kõsitleme mõningaid klassikalisi ülesandeid, mille lahendamise võimalike nihutuste printsiibi abil osutub väga lihtsaks.

1. Kangi tasakaal.



Joonis 6.

Punktis 2 avaldasime kangi otspunktide võimalikud nihutused kangi lõpmata väikese pöördenurga $\delta\varphi$ kaudu järgmiselt:

$$\delta\epsilon_1 = r \cdot \delta\varphi,$$

$$\delta\epsilon_2 = q \cdot \delta\varphi.$$

Seega on tungide P ja Q rakenduspunktide võimalikud nihutused teada. Reaktsioonitungi \vec{R} rakenduspunkt ei nihku.

Tungide tööd võimalikel nihutustel on

$$P \cdot \delta\epsilon_1 \cdot \cos(\delta\varphi)$$

ja

$$-Q \delta\epsilon_2 \cdot \cos(\delta\varphi).$$

(tungi \vec{Q} töö on negatiivne, kuna \vec{Q} ja $\delta\vec{\epsilon}_2$ vaheline nurk on nürinurk). Kangi tasakaalu korral on kangile mõjuvate tungide tööde summa nende rakenduspunktide võimalikel nihutustel null, s. t.

$$P \cdot \delta \varepsilon_1 \cos(\delta \varphi) - Q \delta \varepsilon_2 \cos(\delta \varphi) = 0$$

ehk

$$(P_1 - Q_1) \delta \varphi = 0.$$

Kuna üldiselt $\delta \varphi \neq 0$, peab

$$P_1 - Q_1 = 0.$$

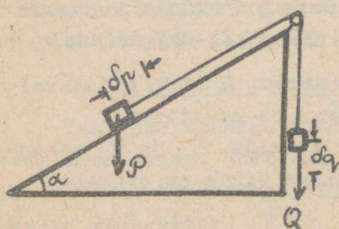
Tasakaalutingimuse võime esitada kujul

$$P_1 = Q_1$$

- kang on tasakaalus, kui kangile mõjuvate tungide momentide suurused kangi toetuspunkti suhtes on võrdsed.

2. Kaldpind.

Olgu kaldpind ideaalselt sile, plokk A lõpmata väike ning hõõrdumise ploki ja venimatu niidi vahel puudugu (joonis 7). Uurime, millal on niidi otstes kinnitatud koormad P ja Q tasakaalus.



Joonis 7.

rakenduspunkti nihutuse $\delta \vec{r}$

Süsteemi tasakaalu korral saame võimalike nihutuste printsiibi järgi võrrandi

$$Q \delta q - P \sin \alpha \delta r = 0.$$

Kuna $\delta r = \delta q \neq 0$, saame lõplikult

$$Q = P \sin \alpha$$

- kaldpinnal asuva koorma tasakaalustamine on seda kergem,

Anneme süsteemile võimaliku nihutuse. Koorma Q nihutuse valime vertikaalsihis, koorem P nihkub siis piki kaldpinda üles. Tungide P ja Q töö nende rakenduspunktide võimalikel nihutustel on

$$-P \delta r \sin \alpha$$

ja

$$Q \delta q$$

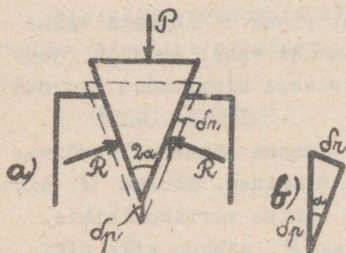
(raskustungi \vec{P} töö on negatiivne, kuna tungi \vec{P} ja tema vahel on nürinurk).

mida väiksem on kaldpinna kaldenurk.

3. Kiil.

Kiilu tipunurgaga 2α surutakse puusse tungiga P . Kui suurt survet kannavad kiilu külgtahud üle puule? Hõõrdumise kiilu ja puuhalu vahel jätame arvestamata.

Joonisele 8 on kantud kiilu külgtahkude poolt ülekantavate survete asemel nendega võrdsed, kuid vastupidiselt suunatud puuhalu reaktsioontungide resultandid R , mis on raken-
datud kiilule.



Joonis 8.

Jooniselt 8b on kerge näha, et tungide P ja R raken-
duspunktide nihutused tungide mõjusirge sihis on omavahel
seotud järgmiselt:

$$\delta r = \delta p \cdot \sin \alpha.$$

Viimast seost arvestades saame kiilu tasakaalutingimuse esi-
tada kujul

$$(P - 2R \sin \alpha) \delta p = 0.$$

Kuna üldiselt $\delta p \neq 0$, siis järeldub, et

$$P - 2R \sin \alpha = 0.$$

Kiilu poolt puuhalule ülekantav survetung $N = R$. Seega

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

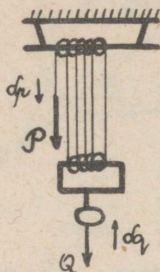
- teravamaga kiiluga on kergem töötada.

Anname kiilule vertikaal-
sihis võimaliku nihutuse
 δp . Kiilule mõjuva reak-
tsioontungi R rakendus-
punkti nihutuse projekt-
sioon tungi R sihile
olgu δr . Kiilu tasakaalu
korral on võimalike nihu-
tuste printsiibi kohaselt
 $P \delta p - R \delta r - R \delta r = 0$

- tungi R töö nihutusel
 δr on negatiivne.

4. Liitplokk.

Leida liitplokiga tõstetava koorma Q tasakaalustamiseks kuluv tung P . Nii liikuvate kui ka liikumatute plokkide arv on n .



Joonis 9.

laskub $\delta r = 2i\delta q$ võrra.

Järelikult koorma kaalu tasakaalustav tung

$$P = \frac{Q}{2n}$$

- koorma tõstmiseks kuluv tung on seda väiksem, mida suurem on plokkide arv liitplokis.

5. Torricelli printsiiip.

Vaatleme mehhaanilist süsteemi, millele mõjub ainult tema raskustung. Süsteemi mass olgu M , punktide kohavektorid antud koordinaatteljestikus $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ning massikeskme kohavektor $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$. Millal on raske süsteem tasakaalus?

Süsteemi punktidele mõjuvad tungid on vastavalt $m_i g$. Süsteemi tasakaalu korral kehtib siis võrrand

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Kui valida z -telg vertikaalsena ja tema ühikvektoriks \vec{k} , siis

$$\vec{g} = g\vec{k}$$

ja

$$\vec{g} \cdot \delta \vec{r}_i = g \delta z_i.$$

Tungi P rakenduspunkti laskumisele δr võrra vastav koorma Q võimalik nihutus olgu δq . Tasakaalutingimus avaldub kujul

$$P \cdot \delta r - Q \delta q = 0.$$

Kui Q tõuseb δq võrra, lüheneb üle plokkide mineva nõõri iga lüli sama palju ja nõõri vaba ots

Nüüd saame

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_i = g \sum_{i=1}^n m_i \delta z_i = 0$$

ehk

$$g \cdot \delta \left(\sum_{i=1}^n m_i z_i \right) = 0 .$$

Teiselt poolt,

$$z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M} ,$$

mida arvestades

$$g \cdot \delta (M z_c) = M g \cdot \delta z_c = 0 .$$

Siit järeldub, et

$$\delta z_c = 0 ,$$

mis väljendabki Torricelli printsiipi:

raske süsteem on tasakaalus siis ja ainult siis, kui süsteemi massikeske ei saa laskuda vertikaalsihhis.

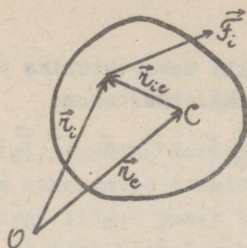
§ 7. TUNGIDE SÜSTEEMI TASAKAALUVÕRRANDID.

Võimalike nihutuste printsiibi abil saab määrata süsteemi tasakaaluasendid. Sageli on aga tegemist olukorraga, kus mehhaanilise süsteemi tasakaaluasend on teada ja tuleb leida tasakaalutingimused süsteemile rakendatud tungidele. Tuletame tungide süsteemi tasakaaluvõrrandid, lähtudes võimalike nihutuste printsiibist.

Vaatleme kindlat keha, millele on rakendatud tungid \vec{F}_i . Olgu valitud xyz -teljestikus tungide $\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ rakenduspunktide kohavektorid $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ja massikeske kohavektor $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$. Kindla keha tasakaalu juhul kehtib võimalike nihutuste printsiibile vastav võrrand (8)

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 ,$$

kus $\delta \vec{r}_i$ on tungide rakenduspunktideks olevate keha punktide võimalikud nihutused.



Joonis 10.

kiirus ja \vec{v}_{ic} punkti kiirus liikumisel masskeskme suhtes.

Statsionaarsete seoste juhul on keha punktide tõelised nihutused ühed võimalikest nihutustest. Valime punktide võimalikeks nihutusteks lõpmata väikesele ajavahemikule δt vastavaid punktide nihutused, s. t.

$$\delta \vec{r}_i = \dot{\vec{r}}_i \delta t = (\dot{\vec{v}}_c + \dot{\vec{r}}_{ic}) \delta t = \delta \vec{v}_c + \dot{\vec{r}}_{ic} \delta t.$$

Võrrand (8) saab nüüd kuju

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (\delta \vec{v}_c + \dot{\vec{r}}_{ic} \delta t) = 0,$$

mille teisendamine annab

$$\delta \vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \delta t \cdot \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_{ic} = 0.$$

Punkti kinemaatikas tõestati, et

$$\dot{\vec{r}}_{ic} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{ic},$$

kus $\vec{\omega}$ on vaadeldava punkti pöörlemise nurkkiirus liikumisel punkti C suhtes. Viimase tulemuse arvestamisel esitub eespool teisendatud võrrand kujul

$$\delta \vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{\omega} \delta t \cdot \sum_{i=1}^n \vec{r}_{ic} \times \vec{F}_i = 0.$$

Nihutused $\delta \vec{v}_c$ ja $\vec{\omega} \delta t$ on vabalt valitavad (δt valik oli meelevaldne) ja seepärast on viimane võrdus võimalik ainult siis, kui

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{ic} \times \vec{F}_i) = 0.$$

Keha mingi punkti kohavektori, keha masskeskme kohavektori ja masskeskmest keha vastavasse punkti viiva vektori \vec{r}_{ic} vahel kehtib seos (joonis 10)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}.$$

Keha punktide kiirused keha liikumisel avalduvad siis kujul

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{v}}_c + \dot{\vec{r}}_{ic},$$

kus $\dot{\vec{v}}_c$ on keha masskeskme

Võtame nüüd arvesse, et

$$\vec{r}_{ic} = \vec{r}_i - \vec{r}_c,$$

kus \vec{r}_i võime lugeda vaadeldava punkti kohavektoriks meelevaldselt valitud nullpunkti O suhtes. Nüüd saame

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_{ic} \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n \vec{r}_c \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0.$$

Kuna $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, siis ka

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0.$$

Jõudsime meelevaldse tungide süsteemi tasakaaluvõrranditeni:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

ehk projektsioonides koordinaattelgedele:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= 0, & \sum_i \text{mom}_x (\vec{F}_i) &= 0, \\ \sum_i y_i &= 0, & \sum_i \text{mom}_y (\vec{F}_i) &= 0, \\ \sum_i z_i &= 0, & \sum_i \text{mom}_z (\vec{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Üldine tungide süsteem on tasakaalus, kui tungide vektorsumma on null ja tungide momentide summa, arvutatuna mis tahes punkti suhtes, on samuti null ehk,

üldine tungide süsteem on tasakaalus, kui tungide projektsioonide summa mis tahes teljele on null ja tungide momentide summa mis tahes telje suhtes on null.

Võrranditega (10) on antud kohe ka kindla keha tasakaalutingimused kehale rakendatud tungide väljas. Tulemusi saab samuti kasutada materiaalsete punktide süsteemi tasakaalu uurimisel. Punktide süsteemi tasakaalu korral on tasakaalus ka süsteemi iga osa - seega võrrandid (10) kehtivad süsteemi kui terviku ning samuti süsteemi iga osa kohta. Punktide süsteemi juhul tuleb võrrandis (10) arvestada kõiki süsteemi punktidele

rakendatud tunge.

§ 8. D'ALEMBERT'I PRINTSIIP.

Olgu tegemist materiaalse punktiga, mille mass on m ja millele rakendatud tungide resultant on \vec{F} . Newtoni II seaduse järgi liigub punkt tungi \vec{F} mõjul sellise kiirendusega \vec{w} , et igal hetkel kehtib võrdus

$$m\vec{w} = \vec{F}.$$

Viime kõik liikmed võrduse ühele poolele; seega

$$\vec{F} + (-m\vec{w}) = 0.$$

Saadud võrdust võime vaadelda punktile rakendatud tungide tasakaalutingimusena, kui vektorit $(-m\vec{w})$ tõlgendada tungina.

Suurust $\vec{J} = -m\vec{w}$

nimetatakse inertstungiks. Paneme tähele, et inertstungi mõjusirge ühtib kiirendusvektori sihiga, suunalt on nad alati vastupidised.

Inertstungi mõistet kasutades võime materiaalse punkti liikumise põhivõrrandi esitada kujul

$$\vec{F} + \vec{J} = 0.$$

Saadud tulemus on tuntud d'Alembert'i printsibi nime all ühe materiaalse punkti jaoks:

punkti liikumise igal hetkel on punktile rakendatud tungid ja inertstung tasakaalus.

Laiendame tulemust materiaalsete punktide süsteemi juhuks. Süsteemi iga punkti jaoks kehtib võrrand

$$\vec{F}_i + \vec{J}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Süsteemi liikumise igal hetkel on kõik süsteemi punktile rakendatud tungid ja inertstungid tasakaalus - see kujutabki d'Alembert'i printsipi materiaalsete punktide süsteemi korral.

D'Alembert'i printsiiip võimaldab dünaamika ülesannete lahendamisel kasutada staatika meetodeid: ta on efektiivne ülesannete lähtevõrrandite koostamisel.

Süsteemile rakendatud tungid ja inertstungid moodustavad tasakaalus oleva tungide süsteemi ning rahuldavad seega üldisi tungide tasakaaluvõrrandeid (10).

Kokkuvõtte: võrrandite koostamisel d'Alembert'i printsii-
bist lähtudes võime kasutada järgmisi tasakaaluvõrrandeid:

1) kõigi süsteemile tegelikult rakendatud tungide ja inertstungide projektsioonide summa mis tahes teljele on null;

2) kõigi nende tungide momentide summa mis tahes punkti
või telje suhtes on null.

Rõhutame, et d'Alembert'i printsiiip ei ole sisuline meh-
haanika printsiiip nagu seda on Newtoni II seadus. Ta annab
ainult ühtse eeskirja rea dünaamika ülesannete lahendamiseks
staatika meetoditega.

§ 9. DÜNAAMIKA ÜLDVÕRRAND.

Dünaamika üldvõrrand on võimalike nihutuste printsiiibi ja d'Alembert'i printsiiibi sünteesiks. D'Alembert'i print-
siiibi järgi on igal hetkel kõik süsteemile mõjuvad tungid
(nende hulgas ka reaktsioontungid) ja inertstungid tasakaalus.
Võimalike nihutuste printsiiip väljendab aga tasakaalu tarvi-
likku ja piisavat tunnust. D'Alembert'i printsiiibi kohaselt
on süsteemi punktidele rakendatud tungid \vec{F}_i ja inertstungid
 \vec{J}_i tasakaalus - seega rahuldavad nad võimalike nihutuste
printsiiibis väljendatud tingimust

$$\sum_i (\vec{F}_i + \vec{J}_i) \cdot \delta \vec{x}_i = 0.$$

Inertstungid \vec{J}_i avalduvad süsteemi punktide kohavekto-
rite teist järku tuletiste $\vec{n}_i = (\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i)$ kaudu järgmiselt:

$$\vec{J}_i = -m_i \vec{n}_i.$$

Tungide tööde summa avaldise võime nüüd esitada uuel kujul. Jõuame dünaamika üldvõrrandini

$$\sum_i (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (12)$$

ehk

$$\sum_i [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0. \quad (13)$$

Dünaamika üldvõrrandis väljendub üldine mehhaanika printsiip: ideaalsete seoste korral toimub süsteemi liikumine nii, et igal ajahetkel on süsteemile rakendatud tungide ja inerts-tungide tööde summa nende rakenduspunktide mis tahes võimalikel nihutustel võrdne nulliga.

Ideaalsete seoste käsitlemisel vaadeldud näidete 2 ja 3 põhjal võime ütelda, et kindla keha juhul langevad dünaamika üldvõrrandist välja keha sisetungid.

Dünaamika üldvõrrand on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et seostega kooskõlas olev liikumine vastaks antud tungidele. Dünaamika üldvõrrandist ja seosvõrranditest saab määrata süsteemi kõigi punktide liikumise ning seejärel seoste reaktsioontungid Newtoni II seadusest. Kirjeldatud lahendus-käiku realiseeritakse matemaatiliselt kahel viisil: määrata kordajate meetodil (Lagrange'i I liiki võrrandid) või üldistatud koordinaatide meetodil (Lagrange'i II liiki võrrandid).

Dünaamika üldvõrrandi kujul (13) esitas esmakordselt Lagrange oma kuulsas töös "Analüütiline mehhaanika" 1788.a.

Kirjeldatud tee dünaamika üldvõrrandi saamiseks on ajalooline. Dünaamika üldvõrrandit saab tuletada ka otseselt, d'Alembert'i printsiibile toetumata. Dünaamika üldvõrrandile võib üles ehitada kogu mehhaanika - temast lähtudes saab tuletada kõik punkti ja süsteemi dünaamika põhilauseid ning liikumise diferentsiaalvõrrandid.

§ 10. DÜNAAMIKA PÕHILAUSETE TULETAMINE
DÜNAAMIKA ÜLDVÕRRANDIST.

Tuletame dünaamika üldvõrrandist lähtudes impulss- ja pöördimpulsslause ning energialause.

1. Impulsslause. Olgu seosed sellised, et süsteemi kõik punktid saavad translatoorselt nihkuda vähemalt ühes sihis l . Valime süsteemi kõigi punktide võimalike nihutusena vaadeldaval sihil võrdsed nihutused, s.t.

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{r} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Sel juhul võime võrrandi (12) esitada kujul

$$\delta \vec{r} \cdot \sum_i (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) = 0,$$

kust järeldub, et

$$\delta \vec{r} \cdot \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \delta \vec{r} \cdot \sum_i \vec{F}_i.$$

Meil on teada, et

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{Q}},$$

kus vektor \vec{Q} on süsteemi lineaarne impulss.

Jõuame tulemuseni

$$\delta \vec{r} \cdot \dot{\vec{Q}} = \delta \vec{r} \cdot \sum_i \vec{F}_i.$$

Tähistades vektori projektsiooni sihile l sama tähega indeksiga vastava suuruse juures ja tähistades $|\delta \vec{r}| = \delta l$, võime viimase võrrandi esitada kujul

$$\delta l \cdot \dot{Q}_l = \delta l \cdot \sum_i F_{il}$$

ehk

$$\dot{Q}_l = \sum_i F_{il}.$$

(14)

Tulemus kujutabki endast impulsslausele vastavat võrrandit projektsioonides mingile teljele l .

Erinevus kursuse varasemas osas saadud impulsslause formulatsioonist seisab selles, et käesoleval juhul sisaldab võrrandi (14) parem pool ka süsteemi sisetunge. Kuid see eri-

nevus on ainult väline, sest sisetungide summa langeb sealt välja - see on null.

2. Pöördimpulsslause. Olgu seosed sellised, et süsteem saab pöörduda ümber mingi telje l . Süsteemi punktide nihutused ajavahemiku δt jooksul valime sellised, et süsteemi kõik punktid pöörduvad ümber antud telje sama nurga võrra. Kirjeldatud nihutused kuuluvad siis ka punktide võimalike nihutuste hulka ja valimegi

$$\delta \vec{r}_i = \vec{r}_i \delta t.$$

Punktide joonkiirused \vec{v}_i avalduvad pöörlemistelje sihilise nurkkiirusvektori $\vec{\omega}$ kaudu

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i,$$

mida arvestades saame

$$\delta \vec{r}_i = (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \delta t.$$

Dünaamika üldvõrrand esitub kujul

$$\delta t \cdot \sum_i [(\vec{F}_i - m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_i] = 0.$$

Vektorite segakorrutises võime tegurid tsükliliselt ümber paigutada. Meie juhul saame

$$\sum_i [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i \times (\vec{F}_i - m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i)] = 0.$$

Kuna nurkkiirus $\vec{\omega}$ on kõigile punktidele ühine, võime viimase avaldise teisendada kujule

$$\vec{\omega} \cdot \sum_i [\vec{r}_i \times (\vec{F}_i - m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i)] = 0.$$

Meil on teada, et

$$\sum_i (\vec{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i) = \frac{d\vec{G}}{dt},$$

kus \vec{G} on süsteemi pöördimpulss valitud tsentri suhtes. Jätkame tulemusele

$$\vec{\omega} \cdot \vec{G} = \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i).$$

Vektorite skalaarkorrutise mõiste järgi saame

$$\omega \cdot \dot{G}_l = \omega \cdot \left[\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)_l \right],$$

kust

$$\dot{G}_l = \sum_l \text{mom}_l (\vec{F}_i). \quad (15)$$

Tulemus väljendabki pöördimpulsslauset. Võrrandi (15) paremalt poolt langeb ära süsteemi sisetungide momentide summa - see on null.

3. Energialause. Eeldame, et seosed on statsionaarsed, siis kuuluvad süsteemi võimalike nihutuste hulka ka tšelised nihutused. Valime punktide võimalike nihutustena nende tšelised nihutused, s.t. $\delta \vec{r}_i = d\vec{r}_i$ ($i=1,2,\dots,n$). Tšelised nihutused rahuldavad dünaamika üldvõrrandit

$$\sum_i (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot d\vec{r}_i = 0.$$

Teisendame summa teist osa. Saame

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i m_i \frac{d(\dot{\vec{r}}_i)^2}{2} = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2\right) = d\mathcal{T},$$

kus \mathcal{T} on süsteemi kineetiline energia. Jõuamegi energia-lauseni

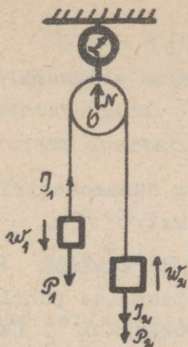
$$d\mathcal{T} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i. \quad (16)$$

§ 11. NÄITEID D'ALEMBERT'I PRINTSIIBI JA DÜNAAMIKA ÜLDVÕRRANDI RAKENDAMISE KOHTA.

Alustame näidetega d'Alembert'i printsiibi rakendamise kohta.

Näide 1. Üle dünamomeetri konksu külge kinnitatud ploki on pandud venimatu ja kaaluta niit, mille otstes on kinnitatud koormad kaaluga P_1 ja P_2 ($P_1 > P_2$). Leida dünamomeetri näit ja kiirendus, millega raskused liiguvad. Ploki ja niidi vahelist hõõrdumist ning ploki kaalu ei arvesta.

Koormate kiirenduste \vec{w}_1 ja \vec{w}_2 suunad ning süsteemile mõjuvad tungid on näha joonisel 11. Süsteemile on rakendatud raskustungid \vec{P}_1 ja \vec{P}_2 ning reaktsioontung \vec{N} . Tungi \vec{N} suurus võrdubki dünamomeetri näiduga. Lisaks tegelikult



Joonis 11.

võrdsete kiirendustega, s.t. $w_1 = w_2 = w$. Siis avalduvad inertstungid ka kiirenduse w kaudu:

$$J_1 = \frac{P_1}{g} w_1 = \frac{P_1}{g} w,$$

$$J_2 = \frac{P_2}{g} w_2 = \frac{P_2}{g} w.$$

Et üks tasakaaluvõrrand sisaldab käesoleval juhul 2 tundmatut (N ja w), koostame ka tungide momentide tasakaaluvõrrandi. Arvutame momendid ploki tsentri suhtes (siis langeb saadavast võrrandist üks tundmatu välja); tasakaalu korral

$$P_1 - J_1 = P_2 + J_2$$

- võrduse mõlemad pooli on jagatud ploki raadiusega, mis on tungide õlaks. Nüüd asendame saadud võrrandis inertstungid oma avaldistega kiirenduse w kaudu

$$\begin{cases} P_1 + P_2 - N - \frac{P_1}{g} w + \frac{P_2}{g} w = 0 \\ P_1 - \frac{P_1}{g} w = \frac{P_2}{g} w + P_2 \end{cases}$$

mõjuvatele tungidele lisame liikuvaltele koormatele veel inertstungid \vec{J}_1 ja \vec{J}_2 . D'Alembert'i printsiibi kohaselt on tungid $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{N}, \vec{J}_1$ ja \vec{J}_2 tasakaalus. Koostame tasakaaluvõrrandid. Leiame tungide projektsioonid vertikaalsihile ja võrrutame nende summa nulliga:

$$P_1 + P_2 - N - J_1 + J_2 = 0.$$

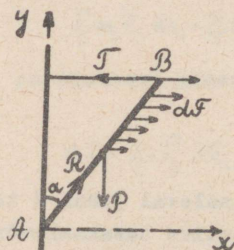
Kuna koormad on niidiga ühendatud, liiguvad nad suuruselt

$$w = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} g,$$

$$N = \frac{4P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

Kui valida näiteks $P_1 = 5 \text{ kg}$, $P_2 = 3 \text{ kg}$, on dünamomeetri näit 7,5 kg, mis on väiksem koormate kogukaalust.

Näide 2. Varras pikkusega $AB = \ell$ ja kaaluga P on kinnitatud šarniiri abil punktis A vertikaalse pöörleva völli külge. Völli pöörleb jääva nurkkiirusega ω . Leida tõmme niidis, mis hoiab varrast völli suhtes kaldu nurga α all.



Joonis 12.

Vardale mõjuvad raskus-
tung P , reaktsioontung R
šarniiris A ja varrast hoid-
va niidi reaktsioontung T ,
mis suuruselt võrdub niidi
otsitava tõmbega (suunalt
on nad teineteisele vastu-
pidised). Lisame pöörleva
varda elementidele veel inerts-
tungid dF , milleks käes-
oleval juhul on ainult kesk-
tõrjetungid (ühtlase pöörle-

mise tõttu on kiirenduse tangentsiaalne komponent null). Pöör-
lemisteljest kaugusel x asuvale vardale elementile pikkusega
 dl ja massiga dm mõjub inertstung dF , mille suurus
on

$$dF = w_n \cdot dm = \omega^2 x dm.$$

Tungi T leidmiseks kasutame momentide võrrandit. Arvu-
tame kõigi vardale mõjuvate tungide momendid punkti A suhtes - siis on šarniiri reaktsioontungi R moment null ja tundmatu R ei esine saadavas võrrandis. Saame võrrandi

$$Tl \cos \alpha - P \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha - \int_{(F)} y \cdot dF = 0,$$

kus inertstungide momentide summeerimine tuleb teostada üle kõigi inertstungide.

Arvutame inertstungide momentide summa. Paneme tähele, et vardal

$$y = x \cot \alpha,$$

$$dm = \frac{P}{gl} dl = \frac{P}{gl} \cdot \frac{dx}{\sin \alpha}.$$

Nüüd saame leida momentide summa

$$\int_{(F)} y dF = \int_0^{l \sin \alpha} \frac{P \omega^2 \cos \alpha}{gl \sin^2 \alpha} x^2 dx = \frac{P \omega^2 \cos \alpha}{3gl \sin^2 \alpha} x^3 \Big|_0^{l \sin \alpha} = \frac{P}{3g} l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Tulemuse paigutame momentide tasakaaluvõrrandisse, kust leiame niidi tõmbe

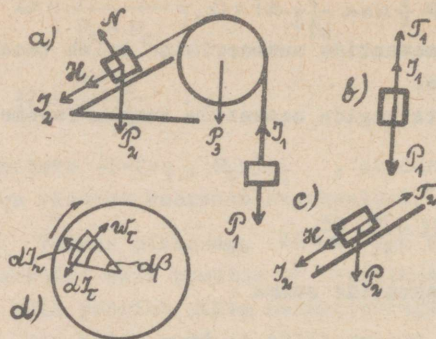
$$T = P \left(\frac{1}{2} \tan \alpha + \frac{l \omega^2}{3g} \sin \alpha \right).$$

----- x -----

Läheme üle dünaamika üldvõrrandi rakendamisele.

Näide 3. Üle ploki mineva kaaluta venimatu niidi ots-
tesse on kinnitatud koormad kaaludega P_1 ja P_2 (joonis 13).
Koorma P_1 laskumisel tõuseb koorem P_2 mööda kaldpinda, mil-
le kaldenurk horisondi suhtes on α . Plokiks on ühtlane ke-
tas raadiusega r ja tema kaal on P_3 . Kaldpinna ja temal
libiseva koorma vaheline hõõrdumiskoeffitsient on f . Leida
koormate kiirendus w_1 ja w_2 ning tõmbetungi suurused kum-
maski niidi harus.

Süsteemile mõjuvad järgmised välisvõimud: koormate kaal
 P_1 ja P_2 , ploki kaal P_3 , ploki telje reaktsioonitugi
(joonisele pole kantud), kaldpinna normaalreaktsioon N ja
hõõrdumistugi H . Lugesdes ploki pöörlemise ümber oma telje
hõõrdumisvabaks, on tegemist ploki telje näol ideaalse seo-
siga ja tema reaktsioonitungi töö on alati null. Karenda kald-



Joonis 13.

pinna muutsime ideaalseks seoseks sel viisil, et lahutasime kaldpinna kogureaktsiooni kaldpinnaga paralleelseks hõõrdumistungiks ja normaalsihiliseks reaktsioontungiks. Lugeses hõõrdumistungi töötavate välistungide hulka, kujutabki kaldpind ideaalset seost (tung N koorma nihkumisel tööd ei tee).

Lisame inertstungid. Koormatele mõjuvad inertstungid

$$\vec{J}_1 = -\frac{P_1}{g} \vec{w}_1, \quad \vec{J}_2 = -\frac{P_2}{g} \vec{w}_2.$$

Pöörleva ketta massielemendile dm , mis asub ketta tsentrist kaugusel ρ , mõjuva inertstungi $d\vec{J}$ lahutame raadiuse-sihiliseks komponendiks $d\vec{J}_n$ ja sellega ristiselsvaks tangentsiaalseks komponendiks $d\vec{J}_t$.

Anneme rippuvale koormale võimaliku nihutuse δh vertikaalselt alla. Kaldpinnal asuv koorem saab sama suure võimaliku nihutuse. Ketta punktide võimalikud nihutused on ringjoonte kaared raadiustega ρ , kusjuures ketta pöördenurk olgu $\delta\varphi$. Dünaamika üldvõrrandiga väljenduv tungide tasakaalutingimus näeks käesoleval juhul välja järgmiselt (tungid $d\vec{J}_n$ ketta pöörlemisel tööd ei tee):

$$(P_1 - J_1) \delta h - (P_2 \sin \alpha + H + J_2) \delta h - \int \rho \cdot \delta\varphi \cdot dJ_t = 0.$$

Leiame esmalt ketta inertstungide tööde summa. Olgu ketta

pöörlemise nurkkiirendus ε ; siis (vt. joonis 13 d)

$$w_t = g\varepsilon$$

ja

$$dJ_t = dm \cdot w_t = dm \cdot g\varepsilon = \frac{P_3}{g r^2} g d\rho d\beta g\varepsilon = \frac{P_3 \varepsilon}{\pi g r^2} \rho^2 d\rho d\beta.$$

Nüüd saame

$$\int_{(J_t)} dJ_t \cdot \rho d\varphi = \delta\varphi \cdot \frac{P_3 \varepsilon}{\pi g r^2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^r \rho^3 d\rho = \delta\varphi \cdot \frac{P_3 r^2 \varepsilon}{2g}.$$

Edasi paneme tähele, et

$$H = f P_2 \cos \alpha ;$$

$$|\vec{w}_1| = |\vec{w}_2| = w ;$$

$$r \delta\varphi = \delta h .$$

Kõike seda arvestades teisendame lähtevõrrandi kujule

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g} w - P_2 \sin \alpha - f P_2 \cos \alpha - \frac{P_2}{g} w - \frac{P_2}{2g} w \right) \delta h = 0.$$

Siit leiame kiirenduse w , võttes arvesse, et $\delta h \neq 0$. Otsitav kiirendus on seega

$$w = \frac{P_1 - P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{P_1 + P_2 + \frac{1}{2} P_2} g . \quad (17)$$

Niidi vasak- ja parempoolses harus mõjuva tõmbe suuruse leiame lõigete meetodil (vt. joonis 13b ja 13c). Nõutaks rippuva koorma juhul lõikame mõttes niidi koorma juurest katki ja asendame niidi mõju koormale tungiga T_1 . Niidi tõmbe suurus on sama, ainult suund on vastupidine. Tungi T_1 leiame d'Alembert'i printsiibi abil, vaadeldes koorma tasakaalu tungide \vec{P}_1 , \vec{T}_1 , \vec{T} , mõjul. Siis

$$T_1 = P_1 - \frac{P_1}{g} w .$$

Analoogiliselt leiame niidi vasakus harus mõjuva tõmbe T_2 :

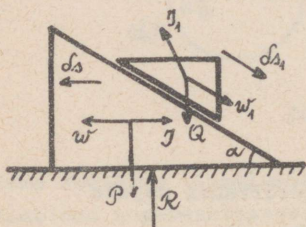
$$T_2 = P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha) + \frac{P_2}{g} w .$$

Kiirendus w on määratud valemiga (17).

Analüüsigi erijuhtu, kui kaldpind puudub ja raskused

ripuvad vertikaalsete niitide otsas (s.t. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $f = 0$)!

Näide 4. Prisma kaaluga Q libiseb mööda teise prisma tahku. Alumise prisma kaal on P ja tema kaldtahk moodustab horisontaalse sihiga nurga α . Leida prisma P kiirendus w , kui süsteemi liikumine algas paigalseisust ja prismade tahud ning liikumatu alus on hõõrdumisvabad (joonis 14).



Joonis 14.

Prisma Q libiseb piki prisma kaldtahku (relatiivne liikumine), nihkudes samaaegselt koos prisma P vasakule (ülekandeliikumine). Prisma Q kiirendus \vec{w}_2 on seega relatiivse kiirenduse \vec{w}_1 ja ülekandekiirenduse summa

$$\vec{w}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}.$$

Süsteemile mõjuvad järgmised välistungid: prismade kaalud P ja Q ning aluse reaktsioon R . Rakendame süsteemile ka inerts-

tungid

$$\vec{J} = -\frac{P}{g}\vec{w}, \quad \vec{J}_1 = -\frac{Q}{g}\vec{w}_2 = -\frac{Q}{g}(\vec{w}_1 + \vec{w}).$$

Anneme prisma P punktidele võimaliku nihutuse $\delta \vec{s}_1$. Prisma Q punktide võimalik nihutus $\delta \vec{s}_2$ on vaadeldav kahe nihutuse summana - ta teostab liitliikumist, s.t.

$$\delta \vec{s}_2 = \delta \vec{s}_1 + \delta \vec{s}.$$

Dünaamika üldvõrrandi kohaselt on käesoleval juhul õige võrrand

$$(\vec{P} + \vec{J}) \cdot \delta \vec{s} + (\vec{Q} + \vec{J}_1) \cdot \delta \vec{s}_2 = 0. \quad (18)$$

Liikumatu alus kujutab ideaalset seost ja \vec{R} töö on null. Arvutame vajalikud vektorite skalaarkorrutised:

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{s} = 0; \quad \vec{J} \cdot \delta \vec{s} = -\frac{P}{g} w \delta s;$$

$$\vec{Q} \cdot \delta \vec{s}_2 = \vec{Q} \cdot (\delta \vec{s}_1 + \delta \vec{s}) = Q \sin \alpha \delta s_1, \quad (\text{sest } \vec{Q} \perp \delta \vec{s});$$

$$\vec{J}_1 \cdot \delta \vec{s}_2 = -\frac{Q}{g} (\vec{w}_1 + \vec{w}) \cdot (\delta \vec{s}_1 + \delta \vec{s}) = -\frac{Q}{g} (w_1 \delta s_1 - w_1 \delta s \cos \alpha - w \cos \alpha \delta s_1 + w \delta s).$$

Võrrand (18) on nüüd esitatav kujul

$$\left[-\frac{P+Q}{g} w + \frac{Q}{g} \cos \alpha w_1 \right] \cdot \delta s + \left[Q \sin \alpha + \frac{Q}{g} (w \cos \alpha - w_1) \right] \cdot \delta s_1 = 0.$$

Võimalikud nihutused δs ja δs_1 on teineteisest sõltumatud.

Valime üks kord

$$\delta s = 0, \quad \delta s_1 \neq 0$$

ja teine kord

$$\delta s_1 = 0, \quad \delta s \neq 0.$$

Variatsioonide δs ja δs_1 kordajad peavad seega mõlemad võrduma nulliga, s. t.

$$\begin{cases} -\frac{P+Q}{g} w + \frac{Q}{g} \cos \alpha w_1 = 0 \\ Q \sin \alpha + \frac{Q}{g} (w \cos \alpha - w_1) = 0. \end{cases}$$

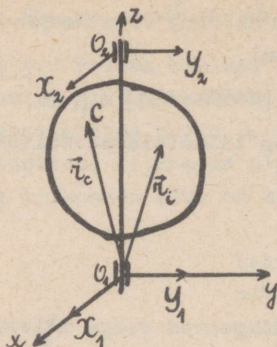
Sellest võrrandsüsteemist leiame otsitava kiirenduse

$$w = \frac{Q \sin 2\alpha}{2(P + Q \sin^2 \alpha)} g.$$

§ 12. PÖÖRLEVA KEHA TELJE REAKTSIOONID.

Olgu antud kindel keha massiga M , mis pöörleb ümber kinnistelje (joonis 15). Laagrite vahekaugus on h . Pöörlemise nurkkiirus olgu $\vec{\omega}$ ja nurkkiirendus $\vec{\epsilon}$. Kehale olgu rakendatud välistungid $\vec{F}_j = (F_{jx}, F_{jy}, F_{jz})$, $j = 1, 2, \dots, \kappa$. Telje laagrites tekivad reaktsioontungid, mis on tingitud välistungidest ning keha pöörlemisest. Koostame võrrandid telje reaktsioonide leidmiseks. Valime kehaga seotud koordinaat-teljestiku nii, et nullpunkt asub alumises laagris O_1 , z -telje suuname piki pöörlemistelge üles ja x -telje ning y -telje valime nii, et tekiks parema käe teljestik. Tähistame välistunge tasakaalustavad toereaktsioonid sümbolitega

$$\vec{R}_{1s} = (X_{1s}, Y_{1s}, Z_{1s}) \quad \text{ja} \quad \vec{R}_{2s} = (X_{2s}, Y_{2s}, Z_{2s}) - \text{neid nimetatakse}$$



Joonis 15.

staatilisteks reaktsioonideks. Keha pöörlemine tingib täiendavad reaktsioonid - need kannavad dünaamiliste reaktsioonide nime. Tähistame neid vektoritega

$$\vec{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1);$$

$$\vec{R}_2 = (X_2, Y_2, Z_2).$$

1. Staatiliste reaktsioonide leidmine. Paigalseisvale kehale rakendatud

tungid ja reaktsioontungid moodustavad tasakaalus oleva tungide süsteemi. Punktis 7 tuletasime tungide tasakaaluvõrrandid. Käesoleval juhul saame staatiliste reaktsioonide komponentide leidmiseks võrrandsüsteemi, võrrutades vastavate projektsioonide summa koordinaattelgedele ja momentide summa samade telgede suhtes nulliga

$$\begin{cases} \sum_j F_{jx} + X_{1s} + X_{2s} = 0 \\ \sum_j F_{jy} + Y_{1s} + Y_{2s} = 0 \\ \sum_j F_{jz} + Z_{1s} + Z_{2s} = 0 \\ \sum_j \text{mom}_x(\vec{F}_j) - h Y_{2s} = 0 \\ \sum_j \text{mom}_y(\vec{F}_j) + h X_{2s} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Pöörlemistelje (z -telg) suhtes staatilised reaktsioonid momenti ei anna, nende mõjusirge läbib pöörlemistelge ja vastava võrrandi koostamine ei anna meile midagi. Momenti telje suhtes loeme positiivseks, kui ta püüab keha pöörata nullpunktist vaadates päripäeva.

2. Dünaamiliste reaktsioonide leidmine. Keha pöörlemisel lisanduvad staatilistele reaktsioonidele veel dünaamilised reaktsioonid. Leiame need d'Alembert'i printsibi abil. Kehale rakendatud väljastungid, staatilised ja dünaamilised reaktsioonid ning keha elementidele mõjuvad inertstungid \vec{J}_i moodustavad tasakaalus oleva tungide süsteemi. Koostame jälle vastavad tasakaaluvõrrandid:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j F_{jx} + \mathcal{X}_{1s} + \mathcal{X}_{2s} + \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \sum_i J_{ix} = 0 \\ \sum_j F_{jy} + y_{1s} + y_{2s} + y_1 + y_2 + \sum_i J_{iy} = 0 \\ \sum_j F_{jz} + z_{1s} + z_{2s} + z_1 + z_2 + \sum_i J_{iz} = 0 \\ \sum_j \text{mom}_x(\vec{F}_j) - h y_{2s} - h y_2 + \sum_i \text{mom}_x(\vec{J}_i) = 0 \\ \sum_j \text{mom}_y(\vec{F}_j) + h \mathcal{X}_{2s} + h \mathcal{X}_2 + \sum_i \text{mom}_y(\vec{J}_i) = 0 \\ \sum_j \text{mom}_z(\vec{F}_j) + \sum_i \text{mom}_z(\vec{J}_i) = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

Inertstungide ja nende momentide summeerimine on teostatud üle kogu keha.

Asume saadud süsteemi lihtsustamisele. Süsteemi (19) arvestades langevad võrranditest (20) (välja arvatud viimane) ära staatilisi reaktsioone ja väljastunge sisaldavad liikmed. Arvutame inertstungide vastavate projektsioonide ja momentide summad.

Inertstungide summa leidmisel lähtume inertstungi definitsioonist:

$$\begin{aligned} \vec{J}_i &= -m_i \vec{\dot{\omega}}_i = m_i \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -m_i \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= -m_i \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = -m_i (\vec{\dot{\omega}} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \vec{v}_i) = \\ &= -m_i [\vec{\dot{\omega}} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]. \end{aligned}$$

Keha mingi elemendi inertstung on \vec{J}_i , selle elemendi mass - m_i , kiirendus - \vec{w}_i , raadiusvektor - $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, kiirus - \vec{v}_i . Inertstungi \vec{J}_i avaldise teisendamisel kasutatakse kinemaatika põhilisi seoseid.

Tungi \vec{J}_i avaldises esineva kahekordse vektorkorrutise teisendamine analüütilisest geometriast tuntud valemi abil

$$\vec{\ell} \times (\vec{m} \times \vec{n}) = (\vec{\ell} \cdot \vec{n}) \vec{m} - (\vec{\ell} \cdot \vec{m}) \vec{n}.$$

Vastavalt sellele saame

$$\vec{J}_i = -m_i (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i) + m_i \omega^2 \vec{r}_i - m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega}.$$

Summeerime keha kõigi elementide inertstungid

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{J}_i &= -\sum_i m_i (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i \omega^2 \vec{r}_i - \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \sum_i m_i \vec{r}_i + \omega^2 \sum_i m_i \vec{r}_i - (\vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i) \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Edasisel lihtsustamisel kasutame süsteemi masskeskme mõistet. Masskeskme kohavektor $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ avaldub järgmiselt:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}.$$

Inertstungide summa avaldise saame nüüd viia kujule

$$\sum_i \vec{J}_i = M [\vec{r}_c \times \vec{\varepsilon} + \omega^2 \vec{r}_c - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_c) \vec{\omega}],$$

kust leiame projektsioonid koordinaattelgedele. Võtame arvesse, et valitud koordinaatteljestikus on vektorite $\vec{\varepsilon}$ ja $\vec{\omega}$ komponendid järgmised:

$$\vec{\varepsilon} = (0, 0, \varepsilon); \quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega).$$

Nüüd

$$\sum_i J_{ix} = M(x_c \omega^2 + y_c \varepsilon); \quad \sum_i J_{iy} = M(y_c \omega^2 - x_c \varepsilon); \quad \sum_i J_{iz} = 0. \quad (21)$$

Koostame ka vastavate momentide avaldised: moment telje suhtes võrdub selle teljemingi punkti suhtes leitud momendi projektsiooniga teljele. Leiame inertstungide momendi nullpunkti suhtes; saame:

$$\begin{aligned} \sum_i \text{mom}_{O_i}(\vec{J}_i) &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{J}_i = \sum_i [m_i \vec{r}_i \times (\vec{r}_i \times \vec{\varepsilon})] + \\ &+ \omega^2 \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{r}_i) - \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) (\vec{r}_i \times \vec{\omega}). \end{aligned}$$

Momendi avaldises esinevad vektorite korrutised leiame üksikult:

$$\vec{r}_i \times (\vec{r}_i \times \vec{\varepsilon}) = (\vec{r}_i \cdot \vec{\varepsilon}) \vec{r}_i - \vec{r}_i^2 \vec{\varepsilon} = z_i \cdot \varepsilon \vec{r}_i - r_i^2 \vec{\varepsilon};$$

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_i = 0;$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = \omega z_i.$$

Momendi avaldis saab nüüd kuju

$$\sum_i \text{mom}_0(\vec{J}_i) = \varepsilon \sum_i m_i z_i \vec{r}_i - \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\varepsilon} + \omega \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i z_i \vec{r}_i \right).$$

Kasutame järgmist tähistusviisi:

kehä inertsmoment pöörlemistelje suhtes

$$\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = C,$$

inertskorrutised

$$\sum_i m_i y_i z_i = D, \quad \sum_i m_i z_i x_i = E.$$

Inertstungide momentide projektsioonid koordinaattelgedele on seega:

$$\begin{cases} \sum_i \text{mom}_x(\vec{J}_i) = E \cdot \varepsilon - D \omega^2 \\ \sum_i \text{mom}_y(\vec{J}_i) = D \cdot \varepsilon + E \omega^2 \\ \sum_i \text{mom}_z(\vec{J}_i) = -C \cdot \varepsilon. \end{cases} \quad (22)$$

Valemeid (19), (21) ja (22) arvestades jõuamegi võrrandi-teni, kust saab leida dünaamilised reaktsioonid:

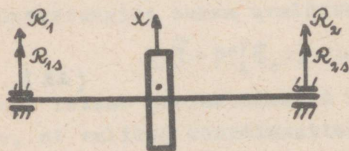
$$\begin{cases} X_1 + X_2 = -M x_c \omega^2 - M y_c \varepsilon \\ Y_1 + Y_2 = -M y_c \omega^2 + M x_c \varepsilon \\ Y_2 = \frac{1}{h} (E \varepsilon - D \omega^2) \\ X_2 = -\frac{1}{h} (D \varepsilon + E \omega^2). \end{cases} \quad (23)$$

Süsteemi (20) kolmandast võrrandist järeldub, et pöörlemiseljele sihis on dünaamiliste reaktsioonide summa null; kuues võrrand dünaamilisi reaktsioone ei sisalda - see on meile juba tuttav kindla keha pöörlemise diferentsiaalvõrrand.

Dünaamiliste reaktsioonide mõju kiirendab masinate pöörlevate detailide ja osade laagrite kulumist. Nad võivad põhjustada isegi masinaosade purunemisi. Tehnikas püütakse dünaamiliste reaktsioonide mõju igati vähendada või täiesti vältida.

Analüüsi, millal pöörleva keha korral dünaamilised reaktsioonid puuduvad!

Näide: Hooratas pöörleb konstantse nurkkiirusega ω . Hooratta kaal on P , raskuskeske asub pöörlemiseljest kaugusel e , sümmeetriatasapinna kaugus kummastki laagrist on a . Leida reaktsioontungid laagrites (joonis 16).



Joonis 16.

Dünaamiliste reaktsioonide leidmiseks valime koordinaatide alguspunkti hooratta ja telje lõikepunkti ning suuname x -telje läbi raskuskeskme. Dünaamiliste reaktsioonide leidmiseks lähtume süsteemist (20). Saame

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = \frac{P}{g} e \omega^2 \\ a(R_1 - R_2) = 0, \end{cases}$$

Staatilised reaktsioonid tasakaalustavad hooratta kaalu - nad on suunatud vertikaalselt üles. Staatilised reaktsioonid leiame süsteemist (19), kust antud juhul saame 2 võrrandit

$$\begin{cases} R_{1s} + R_{2s} = P \\ 2a \cdot R_{2s} = Pa \end{cases},$$

siit

$$R_{1s} = R_{2s} = \frac{P}{2}.$$

kust

$$R_1 = R_2 = \frac{Pe\omega^2}{2g}.$$

Illustreerime tulemusi arvuliste andmetega.

1. Olgu $P=3t$, $e=1\text{mm}$, $n=300 \frac{\text{pöör}}{\text{min}}$.

Siis on staatilised reaktsioonid

$$R_{1s} = R_{2s} = 1500 \text{ kg}$$

ja dünaamilised reaktsioonid

$$R_1 = R_2 = \frac{3000 \cdot 0,1}{2 \cdot 981} \cdot \left(\frac{300 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 \approx 150 \text{ kg}.$$

2. Ketta kaal $P=20\text{kg}$, $e=0,1\text{mm}$, $n=12\,000 \frac{\text{pöör}}{\text{min}}$.

Saame

$$R_{1s} = R_{2s} = 10 \text{ kg},$$

$$R_1 = R_2 = 160 \text{ kg}.$$

Seega dünaamilised reaktsioonid ületavad staatilisi 16 korda. Dünaamilised reaktsioonid kasvavad võrdeliselt nurkkiiruse ruuduga: pöörlemiskiirus mõjutab oluliselt dünaamiliste reaktsioonide suurust.

§ 13. LAGRANGE'I I LIIKI VÖRRANDID.

Olgu tegemist n punktist koosneva mehhaanilise süsteemiga, mille punktidele on rakendatud tungid $F_i = (X_i, Y_i, Z_i)$. Punktis 8 kirjeldasime üldjoontes, kuidas dünaamika üldvõrrandist lähtudes saab määrata süsteemi liikumist ja reaktsioon-tunge. Peatume lähemalt määramata kordajate meetodil.

Süsteemi liikumise määramiseks lähtume dünaamika üldvõrrandist (12)

$$\sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \delta \vec{r}_i = 0.$$

Kui punktide liikumine ei ole seostega kitsendatud, on punkti-de võimalikud nihutused üksteisest sõltumatud meelevaldsed

suurused. Dünaamika üldvõrrand on rahuldatud ainult siis, kui kõigi kordajad on samaaegselt võrdsed nulliga, s. t.

$$m_i \ddot{w}_i = \vec{F}_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Siit saame $3n$ võrrandist koosneva diferentsiaalvõrrandite süsteemi, mille integreerimisel leiame kõigi punktide koor dinaadid aja funktsioonidena:

$$\begin{cases} x_i = x_i(t) \\ y_i = y_i(t) \\ z_i = z_i(t), \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Jõudsime dünaamika põhiülesande lahendamiseni vabade materiaalse te punktide juhul.

Olgu süsteemis mõjumas κ holonoomset seost

$$f_\alpha(t, x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, \kappa).$$

Teatavasti peavad punktide võimalikud nihutused rahuldama seoseid (6), s. t.

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, \kappa).$$

Nüüd ei ole dünaamika üldvõrrandis esinevad suurused $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ enam üksteisest sõltumatud. Võimalikke sõltumatuid nihutusi on vaid $3n - \kappa$ tükki.

Üks mõeldavatest lahendusviisidest võiks olla järgmine. Avaldame seostest (6) mis tahes κ koordinaatide variatsioonini ülejäänute lineaarsete kombinatsioonidena. Saadused asetame dünaamika üldvõrrandisse kujul (13) ja korrastame liikmed koordinaatide variatsioonide järgi. Tulemuses esinevad juba üksteisest sõltumatud koordinaatide variatsioonid; neid on $3n - \kappa$ tükki. Edasine lahenduskiik toimub samuti nagu vabade punktide juhul. Kirjeldatud tee osutub aga ebaotstarbekaks.

Kasutame Lagrange'i poolt soovitatud määramata kordajate meetodit ehk nn. Lagrange'i λ -meetodit. Võtame κ esialgu määramata suurust λ_α ($\alpha=1, 2, \dots, \kappa$). Korrutame iga võrdust (6) vastava λ_α -ga ja liidame nad seejärel kõik dünaamika üld-

võrrandile (13). Jõuame tulemusele

$$\begin{aligned} & \sum_i [(x_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] + \\ & + \sum_\alpha [\lambda_\alpha \sum_i (\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i)] = 0; \end{aligned}$$

muutes kahekordses summas summeerimise järjekorda ja rühmitades liikmeid, saame lõpuks

$$\begin{aligned} & \sum_i [(x_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}) \delta x_i + (y_i - m_i \ddot{y}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}) \delta y_i + \\ & + (z_i - m_i \ddot{z}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}) \delta z_i] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Viimases võrrandis on $3n$ koordinaatide variatsioonist sõltumatuid $3n-k$ tükki. Nüüd valime kordajad λ_α selliselt, et k sõltuvate koordinaatide variatsioonide kordajat muutu- vad nulliks. Ülejäänud $3n-k$ variatsiooni on siis juba ükstei- sest sõltumatud. Võrrandiga (24) on sellisel juhul samaväär- sed võrrandid:

$$\begin{cases} x_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0 \\ y_i - m_i \ddot{y}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} = 0 \\ z_i - m_i \ddot{z}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} = 0, \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Nendest $3n$ võrrandist on k võrrandit saadud λ_α sobiva va- likuga ja ülejäänud $3n-k$ võrrandit tingimusest, et $3n-k$ variatsiooni on üksteisest sõltumatud. Nüüd on meil tegemist $3n+k$ tundmatuga (k määramata kordajat ja punktide $3n$ koordinaati). Et süsteem oleks üheselt lahenduv, lisame saa- dud $3n$ võrrandile k seosvõrrandit. Jõuamegi Lagrange'i I liiki võrranditeni:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} \\ m_i \ddot{y}_i = Y_i + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} \\ m_i \ddot{z}_i = Z_i + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \\ f_{\alpha}(t; x_i, \dots, x_n; y_i, \dots, y_n; z_i, \dots, z_n) = 0, \end{array} \right. \quad (25)$$

kus $i=1, 2, \dots, n$ ja $\alpha=1, 2, \dots, k$.

Süsteemi (25) lahendamisel leiame punktide koordinaadid ja kordajad λ_{α} aja funktsioonidena, s.t.

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(t), \quad (\alpha=1, 2, \dots, k).$$

Newtoni II seaduse ja seostest vabastamise printsiibi põhjal saame võrranditest (25) reaktsioontungide komponendid järgmiselt:

$$R_{ix} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}, \quad R_{iy} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i}, \quad (26)$$

$$R_{iz} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Seega on süsteemi liikumine ja reaktsioontungid määratud - ulesanne on lõplikult lahendatud.

Süsteemi (25) integreerimine on üldiselt keeruline matemaatiline ulesanne ja sellepärast kasutatakse Lagrange'i I liiki võrrandeid vaid juhul, kui süsteemi punktide ja seosvõrrandite arv on väike.

§ 14. MATERIAALSE PUNKTI LIIKUMINE PINNAL.

Olgu antud absoluutselt sile (hõõrdumisvaba) pind, millel liigub materiaalne punkt temale rakendatud tungi $\vec{F}=(X, Y, Z)$ mõjul. Uurime punkti liikumist antud pinnal, lähtudes Lagrange'i I liiki võrranditest.

Seosvõrrandeid on käesoleval juhul üks: pinna võrrand

$$f(x, y, z) = 0.$$

Liikumise diferentsiaalvõrrandid koostame võrrandite (25) põhjal:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad (27)$$

Süsteemist (27) ja pinna võrrandist saab määrata punkti liikumiseaduse ning kordaja λ . Viimase teadmine võimaldab leida ka pinna reaktsioontungi, mille komponentideks on

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Vaatleme näiteks materiaalse punkti liikumist raskustungi mõjul kera pinnal, mille võrrand on

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Sellisel juhul räägitakse, et on tegemist sfäärilise pendliga. Liikumise diferentsiaalvõrrandid omavad nüüd kuju:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2\lambda x \\ m\ddot{y} = 2\lambda y \\ m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z \end{cases} \quad (28)$$

Määrame esimeses järjekorras pinna reaktsiooni suuruse. Selleks korrutame süsteemi (28) võrrandid vastavalt x , y ja z -ga ning liidame; saame:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x^2 + y^2 + z^2) - m(x^2 + y^2 + z^2) = -mgz + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

Kerapinna võrrandi arvestamine annab viimasele võrrandile kuju

$$2\lambda r^2 = mgz - mr^2.$$

Reaktsioontungi R moodul avaldub kujul

$$R = 2\sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2} = 2\lambda r.$$

Kahte viimast seost kõrvutades näeme, et

$$R = \frac{mg}{r} z - \frac{m}{r} v^2.$$

Kuna liikumisseadus on veel leidmata, pole punkti kiirus ka teada. Viimase saamiseks leiame süsteemi (28) ühe esimese integraali - energiaintegraali. Korrutame süsteemi (28) võrrandeid vastavalt suurustega \dot{x} , \dot{y} ja \dot{z} ning liidame; saame

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = -mg\dot{z} + \lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Siit langeb välja kordajat λ sisaldav liige (vt. kera võrrandit!). Nüüd integreerime, arvestades liikumise algandmeid:

hetkel $t=0$ on $z=z_0$ ja $v=v_0$;

saame energiaintegraali

$$\frac{m v^2}{2} + mgz = \frac{m v_0^2}{2} + mgz_0. \quad (1)$$

Energiaintegraali abil elimineerime reaktsioontungi avaldisest kiiruse ruudu ja saame lõplikult

$$R = 3mg \frac{z}{r} - \frac{m v_0^2}{r} - 2mg \frac{z_0}{r}.$$

Punkti liikumise määramiseks leiame süsteemile (28) veel ühe esimese integraali. Selleks korrutame esimest võrrandit y -ga ja teist x -ga ning lahutame teisest esimese; saame

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 0.$$

Tulemuse integreerimine annab seose

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.}$$

1) Analoogilisel teel saab statsionaarsete seoste juhul alati leida süsteemile (25) ühe esimese integraalina energia-integraali.

Punkti liikumine on seega määratav järgmise süsteemi integreerimisel:

$$\begin{cases} \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \text{const.} \\ xy - yx = \text{const.} \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0. \end{cases}$$

Sellisel moodustatud süsteemi integreerimine on hõlpsamalt teostatav sfäärilistes koordinaatides, kusjuures tulemused avalduvad elliptilistes integraalides.

Punkti liikumisel mööda kõverat on liikumise diferentsiaalvõrrandid analoogilised võrranditele (27). Olgu kõver antud kujul:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Punkti liikumise diferentsiaalvõrrandid saame kujul:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial G}{\partial x} \\ m\ddot{y} = Y + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial G}{\partial y} \\ m\ddot{z} = Z + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial G}{\partial z} \end{cases},$$

millele lisanduvad veel kõvera võrrandid: 5 tundmatu leidmiseks on viis võrrandit.

SISUKORD.

	Lk.
Eessõna	3
1. Seosed	4
2. Võimalikud nihutused	8
3. Mehhaanilise süsteemi vabadusastmed	11
4. Ideaalsed seosed	13
5. Võimalike nihutuste printsiip	15
6. Näiteid võimalike nihutuste printsiibi rakendamise kohta	18
7. Tungide süsteemi tasakaaluvõrrandid	22
8. D'Alembert'i printsiip	25
9. Dünaamika üldvõrrand	26
10. Dünaamika põhilause te tuletamine dünaamika üldvõrrandist	28
11. Näiteid d'Alembert'i printsiibi ja dünaamika üldvõrrandi rakendamise kohta	30
12. Pöörleva keha telje reaktsioonid	37
13. Lagrange'i I liiki võrrandid	43
14. Materiaalse punkti liikumine pinnal	47

Hind 8 kop.

A- 23770
84 487

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00467591 6