TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

T. SÕRMUS · G VAINIKKO

HARILIKUD DIFERENTSIAAL-VÕRRANDID

II

TARTU 1967

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise analüüsi kateeder

T. SÕRMUS · G. VAINIKKO

HARILIKUD DIFERENTSIAAL-VÕRRANDID

II

TARTU 1967

III. HARILIKE DIFERENTSIAAL-VÕRRANDITE SÜSTEEMID.

§ 1. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMI NOORMAALKUJU JA SÜMMEETRILINE KUJU.

1. Käesolevas peatükis vaatleme diferentsiaalvõrrandeid, milles on mitu otsitavat funktsiooni. Sealjuures peavad need otsitavad rahuldama korraga mitut võrrandit (enamasti niimitut võrrandit, kui suur on otsitavate arv), s. t. meil on tegemist diferentsiaalvõrrandite süsteemiga. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi kõige üldisem kuju on järgmine:

$$F_i\,(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots$$
$$\ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m). \quad (1)$$

Siin on otsitavateks m funktsiooni $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ja süsteem ise koosneb ka m võrrandist, millest igaüks seob sõltumatut muutujat x, otsitavaid funktsioone ja nende tuletisi. Otsitavate y_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ kõrgemat järku tuletised $y_i^{(n_i)}$ võivad osas võrrandites ka puududa, kuid igaüks neist esineb ilmsi vähemalt ühes võrrandis. Arvu $n=n_1+\ldots$ $\ldots+n_m$ nimetatakse süsteemi järguks. Süsteemi (1) lahendina mõistame m funktsioonist koosnevat süsteemi $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$, mille asendamisel võrranditesse (1) otsitavate $y_1, y_2, \ldots, y_m$ kohale muutuvad need võrrandid samasusteks x suhtes.

Meil ei ole vajadust uurida diferentsiaalvõrrandite süsteeme üldisel kujul (1). Nimelt saab iga süsteemi täiesti avaratel eeldustel taandada nn. normaalkujule ehk normaalseks süsteemiks, mille võrrandites esinevad ainult esimest järku tuletised otsitavatest funktsioonidest, kusjuures võrrandid on ilmutatud tuletiste suhtes:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{2}$$

Vaatlemegi nüüd, kuidas teisendada üldist süsteemi (1) normaalkujule. Kirjutiste lühendamiseks piirdume juhuga $m=2$, $n_1 = n_2 = 2$, s. t. juhuga, kui kaks otsitavat funktsiooni y ja z tuleb määrata süsteemist

$$F(x,y,y',y'',z,z',z'') = 0, \quad G(x,y,y',y'',z,z',z'')=0. \tag{1'}$$

Esimese sammuna ilmutame süsteemi y'' ja z'' suhtes:

$$y'' = f(x,y,y',z,z'), \quad z'' = g(x,y,y',z,z')$$

(selline ilmutamine on võimalik, kui $\frac{D(F,G)}{D(y'',z'')} \neq 0$). Tuues seejärel sisse uued funktsioonid

$$y_1 = y', \quad z_1 = z',$$

saame süsteemi (1') asendada normaalse süsteemiga y, y_1, z, z_1 suhtes:

$$y' = y_1, \ y_1' = f(x, y, y_1, z, z_1), \quad z' = z_1, \ z_1' = g(x, y, y_1, z, z_1). \quad (1'')$$

Süsteemid (1') ja (1") on samaväärsed järgmises mõttes (põhjendada!): kui $y(x)$, $z(x)$ on süsteemi (1') lahendiks, siis $y(x)$, $y_1(x) = y'(x)$, $z(x)$, $z_1(x) = z'(x)$ on süsteemi (1") lahendiks ja, vastupidi, kui $y(x)$, $y_1(x)$, $z(x)$, $z_1(x)$ on süsteemi (1") lahendiks, siis $y(x)$, $z(x)$ on süsteemi (1') lahendiks.

Täiesti analoogiliselt on süsteem (1) taandatav normaalkujule ka üldjuhul (vt. näit. /1/ või /3/, /4/).

Geomeetriliselt kujutab süsteemi (2) lahend $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ endast kõverat $(n+1)$-mõõtmelises ruumis $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, seetõttu nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendit ka integraalkõveraks. Tingimusi $y_i(x_0) = y_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ võib lugeda nii: integraalkõver kulgeb läbi punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$.

Võib anda geomeetrilise interpretatsiooni ka n-mõõtmelise ruumi $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ alusel. Väga huvitava mehhaanikalise interpretatsiooni süsteemile (2) leiab lugeja õpikust /1/.

Meil tuleb edaspidi korduvalt kasutada järgmist l a h e n d i o l e m a s o l u j a ü h e s u s e t e o r e e m i ; kui süsteemi (2) paremad pooled f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ja nende osatuletised $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

on määratud ja pidevad piirkonnas[1] D, siis kulgeb läbi selle piirkonna iga punkti parajasti üks integraalkõver. Teoreemi tõestuse toome ära §-s 5.

Mõistes üldlahendina kõigi piirkonnas D paiknevate integraalkõverate hulka, võime lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi põhjal väita, et süsteemi (2) üldlahend sõltub n suvalisest konstandist:

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tõepoolest, vaatleme punkte $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0) \in D$. Loeme x_0 fikseerituks ja muudame suurusi $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ (nii, et punkt $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ jääks piirkonda D). Suuruste $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ erinevate väärtuste korral saame erinevad integraalkõverad, mis kulgevad läbi vastavate punktide $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$. Niisiis võime $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ vaadelda kui n sõltumatut suvalist konstanti üldlahendi avaldises:

$$y_i = \psi_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Üldlahendi analüütiline avaldis ei ole üheselt määratud. Asendades $y_j^0 = \omega_j(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, kus ω_j on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid, sellised et $\frac{D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{D(c_1, c_2, \ldots, c_n)} \neq 0$, võime üldlahendi esitada kujul

---

[1] Piirkonnana mõistame lahtist sidusat hulka, s. t. hulka, mis koos iga oma punktiga sisaldab ka selle punkti küllalt väikese ümbruse (lahtisus) ja mille igat kahte punkti saab ühendada pideva kõveraga nii, et ka selle kõvera kõik punktid asuksid vaadeldavas hulgas (sidusus).

$$y_i = \psi_i\,(x, \omega_1(c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \omega_n(c_1, c_2, \ldots c_n)) =$$
$$= \varphi_i\,(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (\, i = 1, 2, \ldots, n\,)\,.$$

2. **Mõnikord esitatakse diferentsiaalvõrrandite süsteem nn. sümmeetrilisel kujul.** Kirjutame süsteemi (2) i-nda võrrandi $\frac{dy_i}{dx} = f_i$ kujul $\frac{dy_i}{f_i} = dx$. Kuna viimase võrrandi paremaks pooleks on dx mistahes $i = 1, 2, \ldots, n$ korral, siis

$$\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,\ldots,y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x,y_1,\ldots,y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x,y_1,\ldots,y_n)} = \frac{dx}{1}\,. \qquad (2')$$

See ongi süsteemi (2) sümmeetriline kuju. Pidades süsteemi (2') vaid süsteemi (2) teiseks kirjutusviisiks, võime mõtestada süsteemi (2') ka juhul, kui osa nimetajaist on nullid. Näiteks, kui esimene nimetajaist on null, s. t. kui $f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$, siis on süsteemi (2) esimeseks võrrandiks $\frac{dy_1}{dx} = 0$, millest $dy_1 = 0$, $y_1 = C_1$ (C_1 - suvaline konstant). Niisiis ei tähenda nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis (2') midagi muud, kui et vastava muutuja diferentsiaal on null, muutuja ise aga konstantne.

Erinevalt süsteemist (2), kus sõltumatu muutuja osas on x , võime sümmeetrilises süsteemis (2') vaadelda sõltumatu muutujana ükskõik millist muutujatest x , $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ülejäänud muutujaid aga lugeda selle väljavalitud muutuja funktsioonideks. (Just see ongi põhjuseks, miks süsteemi sümmeetriline kuju on mõnikord otstarbekohasem normaalkujust.)

Seetõttu on loogiline muutujaid tähistada sümmeetriliselt: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (me vähendasime muutujate, seega ka võrrandite arvu 1 võrra, võrreldes süsteemiga (2')). Peale selle on loogiline loobuda ka nõudest, et üks nimetajaist on 1, ja anda sümmeetriline süsteem üldiselt järgmiselt:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}. \tag{3}$$

Erinevalt süsteemist (2') on nüüd võimalik, et mõnes punktis $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ on kõik nimetajad korraga nullid. Selliseid punkte nimetatakse iseärasteks. Lihtne on näha, et igas mitteiseärases punktis on sümmeetriline süsteem esitatav ka normaalkujul. Tõepoolest, kui vaadeldavas punktis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ näiteks $a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, siis võrranditest $\frac{dx_i}{a_i} = \frac{dx_n}{a_n}$ leiame, et

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3'}$$

See ongi normaalne süsteem, milles sõltumatuks muutujaks on x_n, otsitavateks funktsioonideks aga $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Kui funktsioonid $a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on pidevalt diferentseeruvad, siis on sama omadus ka võrrandite (3') parematel pooltel ja me saame normaalsele süsteemile (3') rakendada lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi. Formuleerides selle teoreemi ümber sümmeetrilise süsteemi (3) jaoks, saame järgmise tulemuse: kui funktsioonid $a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on pidevalt diferentseeruvad $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ruumi piirkonnas D, siis kulgeb läbi selle piirkonna iga mitteiseärase punkti $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ parajasti üks süsteemi (3) integraalkõver.

§ 2. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMI LAHENDAMINE ÜHELE KÕRGEMAT JÄRKU VÕRRANDILE TAANDAMISE TEEL.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemide üks põhilisi lahendusmeetodeid seisneb nende taandamises ühele kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandile. Kui viimane osutub kvadratuurides lahenduvaks, siis on lihtne leida ka süsteemi lahendit.

1. Olgu vaja lahendada teist järku süsteem

$$F(x,y,y',z,z')=0\,, \qquad G(x,y,y',z,z')=0\,. \tag{1}$$

Oletame, et meil õnnestus süsteem ilmutada z ja z' suhtes:

$$z = \varphi(x, y, y')\,, \qquad z' = \psi(x, y, y')\,. \tag{1'}$$

Diferentseerime esimest võrrandit:

$$z' = \varphi'_x(x, y, y') + \varphi'_y(x, y, y')\,y' + \varphi'_{y'}(x,y,y')\cdot y''\,.$$

Siit ja süsteemi (1') teisest võrrandist elimineerime z':

$$\psi(x,y,y') = \varphi'_x(x,y,y') + \varphi'_y(x,y,y')y' + \varphi'_{y'}(x,y,y')y''\,.$$

Me saime teist järku hariliku diferentsiaalvõrrandi y suhtes. Leidnud tema lahendi $y = \omega(x, c_1, c_2)$, saame (1') esimesest võrrandist $z = \varphi(x, \omega(x, c_1, c_2), \omega'(x,c_1,c_2))$ ning süsteemi (1) lahendiks ongi

2.

$$y = \omega(x, c_1, c_2), \quad z = \varphi(x, \omega(x, c_1, c_2), \omega'(x, c_1, c_2)).$$

Täiesti analoogiliselt toimime, kui süsteem (1) on lihtsamini ilmutatav y ja y' suhtes.

<u>Näide 1.</u> $y' = \frac{y^2}{z}$, $z' = \frac{1}{2} y$. See süsteem on lihtsalt ilmutatav z ja z' suhtes:

$$z = \frac{y^2}{y'}, \quad z' = \frac{1}{2} y.$$

Elimineerides z ja z' eespool kirjeldatud viisil, saame võrrandi

$$\frac{3}{2} yy'^2 - y^2 y'' = 0,$$

mille lahendiks on

$$y = \frac{1}{(c_1 x + c_2)^2} \text{ ja } y = c.$$

Esimesele neist vastab süsteemi lahend

$$y = \frac{1}{(c_1 x + c_2)^2}, \quad z = -\frac{1}{2c_1(c_1 x + c_2)};$$

teine ei võimalda seosest $z = \frac{y^2}{y'}$ määrata z, sest $y' = 0$. Kuid vahetu kontrolli abil veendume, et $c = 0$ korral saame siiski süsteemile lahendi $y = 0$, $z = \bar{c}$ ($\bar{c}$ - suvaline konstant).

2. Kui süsteemi järk on suurem kahest, siis on ühele võrrandile taandamist parem teostada normaalkujust lähtudes. Vaatlemegi ühte võimalikku skeemi normaalse süsteemi

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

taandamiseks ühele võrrandile. Funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olgu n korda pidevalt diferentseeruvad. Diferentseerime süsteemi (2) esimest võrrandit x järgi, vaadeldes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kui lahendit:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n .$$

Me asendasime y_i' võrrandite (2) põhjal. Tähistades

$$F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n$$

(see on meile tuntud funktsioon argumentidest $x, y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$), kirjutame y_1'' avaldise lühemalt nii:

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) .$$

Seda võrrandit uuesti diferentseerides leiame täiesti analoogiliselt, et

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) ,$$

kus

$$F_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n .$$

Selliselt jätkates jõuame lõpuks võrrandini

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) , \tag{3}$$

kus

$$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} f_n .$$

Järgmise sammuna püüame muutujad $y_2, y_3, \ldots, y_n$ avaldada

$x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ kaudu. Vastav asendus võrrandis (3) annabki siis harilikku n-järku diferentsiaalvõrrandi y_1 määramiseks.

Moodustame järgmise süsteemi eespool leitud seostest:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{4}$$

Teatavasti saame nendest n-1 seostest ilmutada n-1 muutujat $y_2, y_3, \ldots, y_n$, kui funktsioonide $f_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ jakobiaan $y_2, y_3, \ldots, y_n$ suhtes erineb $y_2, y_3, \ldots, y_n$ vaadeldavate väärtuste korral nullist:

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)} \neq 0 ; \tag{5}$$

me eeldame, et see tingimus on täidetud. Seostest (4) leiame $y_2, y_3, \ldots, y_n$ vajalikud avaldised

$$y_i = \varphi_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \tag{4'}$$

mille asendamisel seosesse (3) saamegi diferentsiaalvõrrandi y_1 määramiseks:

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \ldots \\ \ldots, \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})). \end{aligned} \tag{6}$$

Esitatud arutlused võib kokku võtta lauseks: kui $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ on süsteemi (2) lahendiks ning on täidetud tingimus (5), siis $y_1(x)$ on võrrandi (6) lahendiks ning $y_2(x)$, $y_3(x),\ldots,y_n(x)$ rahuldavad seoseid (4'). Ei ole raske tõestada ka vastupidist väidet: kui $y_1(x)$ on võrrandi (6) lahendiks, siis on süsteemi (2) lahendiks $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$, kus $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ on määratud $y_1(x)$ kaudu seostega (4'). Selle väite tõestusel me ei peatu; lugeja võib tõestuse leida õpikutest /1/ või /3/, /4/.

Me veendusime, et üldiselt on n-järku süsteem samaväärne ühe n-järku võrrandiga. Praktiliseks kasutamiseks ei ole esitatud skeem küll alati kõige parem, kuid ta illustreerib küllaltki selgelt fakti, et ühele võrrandile taandamisel on põhilisteks operatsioonideks võrrandite diferentseerimine ja muutujate elimineerimine. Mõnikord on otstarbekam diferentseerida mitte süsteemi esimest, vaid mõnda teist võrrandit või koguni mitut võrrandit rööbiti. Selliselt võib lahendada ka süsteeme, milles esinevad kõrgemat järku tuletised.

Näide 2. $y'' = 4y - z' - 12$, $z'' = z + 10y' - 7$. Diferentseerime esimest võrrandit kaks korda, teist võrrandit üks kord: $y^{(4)} = 4y'' - z'''$, $z''' = z' + 10y''$. Siit $y^{(4)} = -6y'' - z'$. Esimese võrrandi põhjal asendame $z' = 4y - 12 - y''$. Saame neljandat järku võrrandi

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 12,$$

mille üldlahendiks on

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 3.$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel leiame, et $y''' = 4y' - z''$; teise võrrandi põhjal asendame z''. Me saame $z = -y''' - 6y' + 7$ ehk, asendades y,

$$z = 5c_1 \sin x - 5c_2 \cos x + 4c_3 \sin 2x - 4c_4 \cos 2x + 7 .$$

Koos võetuna annavadki y ja z avaldised süsteemi üldlahendi.

Märgime lõpuks, et mitte alati ei ole süsteem taandatav ühele kõrgemat järku võrrandile - mitte alati ei osutu tingimus (5) täidetuks. Näiteks ei saa süsteemi $y' = f(x,y), z' = g(x,z)$ taandada ühele teist järku võrrandile. Viimane süsteem koosneb sisuliselt kahest teineteisest sõltumatust võrrandist.

§ 3. ESIMESED INTEGRAALID JA INTEGREERUVAD KOMBINATSIOONID.

1. Rahuldagu normaalne diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y_i' = f_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (1)$$

piirkonnas D lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi nõudeid (vt. § 1). Olgu süsteemi üldlahendiks

$$y_i = \varphi_i(x,c_1,c_2,\dots,c_n) \quad (i = 1,2,\dots,n) . \qquad (2)$$

Ilmutades need seosed $c_1, c_2,\dots,c_n$ suhtes (saab näidata, et selline ilmutamine on tõepoolest võimalik - vt. näit. /1/), esitame üldlahendi

$$c_i = \psi_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \quad (i = 1,2,\dots,n). \qquad (2')$$

Funktsioone

$$\psi_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (3)$$

nimetatakse susteemi (1) esimesteks integraalideks.[1] Süsteemil (1) on esimesi integraale lõpmata palju: üldlahendi erinevatele analüütilistele avaldistele (2) vastavad erinevad funktsioonid (3) (esimesed integraalid).

Kui esimeses integraalis (3) asendada $y_i (i = 1,2,\dots,n)$ lahendiga (2), siis konstruktsiooni põhjal

$$\psi_i(x, \varphi_1(x,c_1,c_2,\dots,c_n),\dots,\varphi_n(x,c_1,c_2,\dots,c_n)) \equiv c_i ,$$

s. t. piki integraalkõveraid on esimene integraal konstantne. See omadus iseloomustabki täielikult esimesi integraale ja võimaldab neile anda üldlahendist sõltumatu definitsiooni:

Mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \tag{4}$$

nimetatakse süsteemi (1) esimeseks integraaliks, kui ta on konstantne piki süsteemi (1) iga integraalkõverat. Teiste sõnadega, (4) on esimeseks integraaliks, kui $y_1,y_2,\dots,y_n$ asendamisel süsteemi mistahes lahendiga $y_1(x),y_2(x),\dots$ $\dots,y_n(x)$ saame samasuse

$$\psi(x,y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)) \equiv c ; \tag{4'}$$

erinevatele lahenditele võivad muidugi vastata konstandi c erinevad väärtused.

---

[1] Sageli nimetatakse esimeseks integraaliks ka avaldist $\psi_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n) = c_i$. Muide, hilisemal näidete käsitlemisel on ka meil parem mõista esimeste integraalidena selliseid avaldisi.

Teoreem 1. Pidevalt diferentseeruv funktsioon (4) on süsteemi (1) esimeseks integraaliks siis ja ainult siis, kui

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}f_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}f_n\equiv 0 \qquad (5)$$

(kõigi funktsioonide argumentideks on siin $(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\in D$ ja samasus peab kehtima kogu piirkonnas D).

T õ e s t u s . Olgu (4) esimeseks integraaliks. Asendades $y_1,y_2,\ldots,y_n$ mingi lahendiga $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$, saame samasuse (4'), mille diferentseerimisel leiame

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}y_1'(x)+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}y_2'(x)+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}y_n'(x)\equiv 0\,. \qquad (4'')$$

Asendades $y_i'(x)$ süsteemi (1) põhjal, näeme, et samasus (5) kehtib piki integraalkõveraid, s. t. juhul, kui kõigi samasuses (5) esinevate funktsioonide argumentideks on $(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))$. Kuid mistahes punkti $(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\in D$ läbib lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi põhjal integraalkõver, järelikult kehtib (5) piirkonna D igas punktis. Teoreem on ühes suunas tõestatud.

Tõestame teoreemi vastupidises suunas. Kehtigu piirkonnas D samasus (5). Siis kehtib see samasus muuhulgas ka piki mistahes integraalkõverat $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$, s. t. kui samasuses (5) esinevate funktsioonide argumentideks on $(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))$. Kuid piki integraalkõverat kehtivad samasused $f_i\equiv y_i'(x)$ ja me saame samasuse (4"), millest järeldub samasus (4'), s. t. (4) on esimeseks integraaliks. Teoreem on tõestatud.

Paneme tähele, et kui funktsioonid $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ on esimesteks integraalideks, siis on mistahes pidevalt diferentseeruva mittekonstantse funktsiooni $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ korral esimeseks integraaliks ka liitfunktsioon

$$\Phi(\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \psi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)) . \quad (6)$$

Tõepoolest, piki integraalkõverat omandavad funktsioonid ψ_i konstantse väärtuse c_i, funktsioon (6) aga seega konstantse väärtuse $\Phi(c_1, c_2, \ldots, c_k)$, m.o.t.t.

2. Me ütleme, et <u>esimesed integraalid</u>

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7)$$

<u>on piirkonnas $D_1 \subset D$ sõltumatud</u>, kui jakobiaan

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

erineb piirkonnas D_1 nullist. Sõltumatud on näiteks üldlahendi (2) alusel konstrueeritud esimesed integraalid (3), sest kui neile vastav jakobiaan (8) oleks null, siis seostelt (2') ei oleks võimalik tagasi minna seostele (2). On lihtne näha ka vastupidist (põhjendada!): kui esimesed integraalid (7) on sõltumatud, siis on süsteemi (1) üldlahend leitav $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ilmutamisel seostest

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

(Ilmutamine on võimalik tänu sellele, et jakobiaan (8) erineb nullist.) Seega on süsteemi (1) üldlahendi leidmise ülesanne samaväärne n sõltumatu esimese integraali leidmise ülesandega.

Teoreem 2. Süsteemi (1) iga esimene integraal $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on sõltumatute esimeste integraalide (7) kaudu esitatav kujul

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \tag{9}$$
$$= \Phi(\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)),$$

kus $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ on mingi pidevalt diferentseeruv funktsioon.

T õ e s t u s . Teoreemi 1 põhjal mistahes $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D_1$ korral

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n = 0 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n = 0 ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n = 0 .$$

Neid tingimusi tõlgendame kui lineaarset homogeenset algebralist võrrandisüsteemi, millel on olemas mittetriviaalne lahend $1, f_1, f_2, \ldots, f_n$. Järelikult peab süsteemi determinant olema null, s. t.

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi)}{D(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 0$$

iga $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D_1$ korral. Nagu on teada matemaatilise analüüsi kursusest, tähendab viimase jakobiaani samaselt võrdumine nulliga, et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi$ on funktsionaalselt sõltuvad, s. t. leidub selline funktsioon F, et

$$F(\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi) \equiv 0 \quad ((x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D_1) .$$

Ilmutades selle sõltuvuse ψ suhtes, jõuamegi seoseni (9); ilmutamine on võimalik, sest vaadeldava jakobiaani üks n-järku miinoritest - nimelt miinor (8) - erineb teoreemi eelduse kohaselt nullist. Teoreem on tõestatud.

3. Eelmises paragrahvis käsitletud taandamismeetodi kõrval kasutatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamiseks sageli ka nn. integreeruvate kombinatsioonide meetodit ehk, lühemalt, kombineerimismeetodit. See seisneb süsteemi võrrandite teisendamises kujule, millest on lihtne leida esimesi integraale. (Integreeruvateks kombinatsioonideks nimetataksegi neid süsteemi teisendamisel saadud võrrandeid.) Kombineerimismeetodi kohta on raske esitada mingit üldist teooriat ja me piirdume mõne näitega meetodi rakendamise kohta.

Näide 1. $y' = z$, $z' = y$. Liites need võrrandid liikmeti, saame $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = y + z$ ehk $\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$. See ongi üheks integreeruvaks kombinatsiooniks, millest leiame esimese integraali

$$\ln|y+z| = x + \ln c_1 \quad \text{ehk} \quad y + z = c_1 e^x .$$

Lahutades esimesest võrrandist teise, saame integreeruva kombinatsiooni $\frac{d(y-z)}{y-z} = -dx$, mille integreerimisel leiame veel ühe esimese integraali

$$\ln|y-z| = -x + \ln c_2 \quad \text{ehk} \quad y - z = c_2 e^{-x} .$$

Esimesed integraalid $y + z = c_1 e^x$ ja $y - z = c_2 e^{-x}$ on sõltumatud (kontrollida!) ja ilmutatavad y ja z suhtes:

$$y = \frac{1}{2}(c_1 e^x + c_2 e^{-x}), \quad z = \frac{1}{2}(c_1 e^x - c_2 e^{-x}) .$$

Viimased funktsioonid esitavad süsteemi üldlahendi.

<u>Näide 2.</u> $y' = \frac{y^2}{z^2}$, $z' = \frac{y}{z}$. Korrutame esimest võrrandit z-ga, teist y-ga ja lahutame seejärel esimesest võrrandist teise. Saame integreeruva kombinatsiooni $zy' - yz' = 0$ ehk $d(\frac{y}{z}) = 0$, kust $\frac{y}{z} = c_1$. Asendades $y = c_1 z$ süsteemi teise võrrandisse, saame $z' = c_1$, $z = c_1 x + c_2$. Süsteemi üldlahendiks on seega $y = c_1(c_1 x + c_2)$, $z = c_1 x + c_2$.

Viimases näites leidsime ainult ühe esimese integraali $\frac{y}{z} = c_1$, kuid see võimaldas meil asendada süsteem esimest järku võrrandiga. Ka üldjuhul võimaldab süsteemi (1) esimese integraali teadmine vähendada tundmatute ja võrrandite arvu süsteemis ühe võrra. Selleks avaldame esimesest integraalist $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c$ ühe otsitavatest $y_1, y_2, \ldots, y_n$, näiteks y_n:

$$y_n = \omega(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, c) .$$

Seejärel asendame y_n avaldise süsteemi $n-1$ esimesse võrrandisse. Tulemuseks saame $n-1$ järku süsteemi, milles on otsitavateks $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

§ 4. SÜMMEETRILISE SÜSTEEMI ESIMESED INTEGRAALID. LINEAARNE JA KVAASILINEAARNE OSATULETISTEGA VÕRRAND.

1. Vaatleme sümmeetrilist diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n)}. \quad (1)$$

Olgu piirkonnas D täidetud lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi nõuded (vt. § 1), s. t. funktsioonid $a_i (i = 1,2,\ldots,n)$ olgu piirkonnas D pidevalt diferentseeruvad, kusjuures igas punktis $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in D$ olgu vähemalt üks nendest funktsioonidest nullist erinev.

Kuna me loeme süsteemis (1) muutujaid $x_1,x_2,\ldots,x_n$ samaväärseteks, on loogiline ka üldlahend anda sümmeetrilisel kujul:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1, \\ \psi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_{n-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Funktsioone $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ nimetatakse süsteemi (1) esimesteks integraalideks. Üldlahendist sõltumatult võib süsteemi e s i m e s t i n t e g r a a l i defineerida kui mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, mis on konstantne piki süsteemi (1) integraalkõveraid. Selliselt defineeritud esimesed integraalid on esimesteks integraalideks ka eelmise paragrahvi mõttes, kui vaid süsteem (1) viia normaalkujule. See võimaldab kanda eelmise paragrahvi tulemused üle ka sümmeetrilisele süsteemile (1).

Olgu punktis $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\in D$ nullist erinev näiteks $a_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Selle punkti ümbruses on siis süsteem (1) esitatav normaalkujul

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{a_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{a_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \quad (i = 1,2,\ldots,n-1), \qquad (1')$$

kus x_n on sõltumatu muutuja, $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ otsitavad funktsioonid. Teoreemi 1 § 3 põhjal on $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ süsteemi (1') esimeseks integraaliks parajasti siis, kui

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{a_1}{a_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{a_2}{a_n}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_n}\equiv 0$$

(see on samasus (5§3) süsteemi (1') jaoks). Anname sellele samasusele sümmeetrilise kuju, korrutades teda a_n-ga:

$$a_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+a_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0 \quad ((x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D). \quad (3)$$

Kui mõnes punktis $(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1)\in D$ on $a_n = 0$, kuid näiteks $a_{n-1}\neq 0$, jõuame täiesti analoogiliste arutluste varal taas samasuseni (3). Seega oleme tõestanud järgmise tulemuse:

<u>Teoreem 1</u>. Mittekonstantne pidevalt diferentseeruv funktsioon $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ on süsteemi (1) esimeseks

integraaliks parajasti siis, kui kehtib samasus (3).

Täiesti analoogiliselt nagu eelmiseski paragrahvis veendume, et kui funktsioonid $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ on süsteemi (1) esimesteks integraalideks, siis on esimeseks integraaliks ka

$$\Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

kus $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_k)$ on suvaline mittekonstantne pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Me ütleme, et esimesed integraalid $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ on sõltumatud piirkonnas $D_1 \subset D$, kui iga punkti $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D_1$ korral on vähemalt üks jakobiaanidest

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}})} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n)$$

nullist[1] erinev. Sõltumatud on näiteks üldlahendi (2) alusel leitud esimesed integraalid $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$. Ka vastupidi: kui esimesed integraalid $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ on sõltumatud, siis on nende alusel moodustatud seosed (2) süsteemi (1) üldlahendiks.

<u>Teoreem 2</u>. Süsteemi (1) iga esimene integraal ψ on sõltumatute esimeste integraalide $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ kaudu esitatav kujul

---

[1] Nagu näha võrratustest $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n$, saame naturaalarvud $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, kui jätame arvude $1, 2, \dots, n$ hulgast ühe arvu kõrvale.

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = \Phi(\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)) .$$

Selle teoreemi tõestus on täiesti analoogiline teoreemi 2 § 3 tõestusega. (Tõestada iseseisvalt!)

2. Võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema osatuletiste ja sõltumatute muutujatega, nimetatakse osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi järgu ja lahendi mõisted defineeritakse analoogiliselt harilikku diferentsiaalvõrrandi vastavate mõistetega. Esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kõige üldisemalt esitatav kujul

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 . \quad (4)$$

Kui võrrandis (4) otsitav funktsioon sõltub kahest muutujast, on tavaks tähistada $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u = z$, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Niisugusel juhul taandub võrrand (4) järgmiseks

$$F(x,y,z,p,q) = 0 . \quad (5)$$

Võrrandi (5) lahendit

$$z = \varphi(x,y) \quad (6)$$

kui kahe muutuja funktsiooni võib geomeetriliselt tõlgendada xyz-ruumi pinnana, mis kannab integraalpinna nimetust. Teame, et iga pinna $z = \varphi(x,y)$ puutetasand punktis (x,y,z) on määratud normaalisihilise vektoriga $(-p,-q,1)$. Seega seob diferentsiaalvõrrand (5) integraalpinna suvalise punkti koordinaate sellele punktile vastava normaalisihilise vektori komponentidega.

Eelnevast teame, et hariliku n-järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sõltub argumendist ja n suvalisest konstandist. Esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi korral võib lahend sõltuda ühest suvalisest funktsioonist. Kinnitame öeldut näidetega.

Näide 1. Vaatleme võrrandit $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Funktsiooni $z(x,y)$ puhul tähendab see, et z ei sõltu muutujast x. Järelikult

$$z = c(y) ,$$

kus $c(y)$ on suvaline funktsioon muutujast y. Sellega on leitud ka vaadeldava võrrandi lahend, sest iga funktsiooni $c(y)$ korral rahuldab $z = c(y)$ antud võrrandit samaselt.

Näide 2. $x\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$. Vaatleme muutujat x parameetrina ja lahendame võrrandi hariliku diferentsiaalvõrrandina:

$$\frac{1}{z}\,\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x}, \qquad \ln|z| = -\frac{y}{x} + \ln|C(y)|.$$

Integreerimise konstant C võib sõltuda y-st, sest lugesime muutujat y integreerimisel konstantseks. Seega

$$z = C(y)e^{-\frac{y}{x}}.$$

Asendades leitud funktsiooni lähtevõrrandisse, näeme, et ta rahuldab seda samaselt. Nii on $z = C(y)e^{-\frac{y}{x}}$ iga funktsiooni $C(y)$ korral antud diferentsiaalvõrrandi lahendiks. Hariliku diferentsiaalvõrrandi üldlahendi definitsiooni aluseks olid võetud Cauchy algtingimused. Viimaseid saab püstitada ka I järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks.

Lahendugu võrrand (5) osatuletise p suhtes, s. o. taandugu (5) võrrandiks

$$p = f(x,y,z,q) \ . \tag{6}$$

Niisugusel juhul mõistetakse tingimusi

$$x = x_0 \ , \quad z = \psi(y) \ , \tag{7}$$

kus $\psi(y)$ on kindel funktsioon muutujast y, Cauchy algtingimustena ehk lihtsalt algtingimustena. Cauchy ülesanne ehk algtingimustega ülesanne seisneb nüüd selles, et võrrandile (6) otsitakse niisugust lahendit, mis muutub antud funktsiooniks $\psi(y)$ väärtuse $x = x_0$ korral. Geomeetriliselt seisneb Cauchy ülesanne niisuguse integraalpinna leidmises, mis läbib võrranditega (7) määratud kõverat.

Tingimusi (7) võib esitada ka üldisemalt:

$$x = x(t) \ , \quad y = y(t) \ , \quad z = z(t)$$

või

$$z = \varphi(y) \ , \quad x = \tau(y) \ , \text{ jt.}$$

Algtingimuste üldisem esitus on eriti vajalik siis, kui Cauchy ülesandes vaadeldakse antud diferentsiaalvõrrandit kujul (5). Erinevalt tingimustest (7) ei tarvitse viimaste võrranditega antud ruumiline kõver olla tasandiline.

Esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üld- ja erilahendi definitsioon on analoogiline hariliku esimest järku diferentsiaalvõrrandi vastavate mõistete definitsiooniga. Peab ainult arvestama, et osatuletistega võrrandi üldlahend sõltub ühest suvalisest funktsioonist (mitte enam ühest suvalisest konstandist).

Osatuletistega võrrandi erilahendi leidmine antud algtingimuste korral taandub võrrandi üldlahendis esineva suvalise funktsiooni määramisele. Viimane peab olema määratud nii, et algtingimused oleksid rahuldatud.

Näide 3. Otsime võrrandile $q = z$ niisugust lahendit, mis rahuldaks algtingimusi $x = t^2$, $y = 1$, $z = \sqrt{t}$.

Arvestades, et $z \neq 0$ (meid huvitab mittetriviaalne lahend), saame

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = 1 .$$

Lugedes muutuja x parameetriks ja lahendades võrrandi hariliku diferentsiaalvõrrandina, saame

$$\ln|z| = y + \ln|C(x)| ,$$

millest järeldub, et

$$z = C(x)e^y ,$$

kus $C(x)$ on suvaline funktsioon x-st. Leitud lahend on lähtevõrrandi üldlahend. Arvestades lisaks algtingimusi, saame $z^4 = x$ kui $y = 1$. Seega $\sqrt[4]{x} = eC(x)$ ja otsitavaks funktsiooniks on $C(x) = \frac{1}{e}\sqrt[4]{x}$. Funktsioon

$$z = \sqrt[4]{x}\, e^{y-1}$$

on seega otsitav erilahend. (Näita, et leitud funktsioon rahuldab nii antud võrrandit kui ka algtingimusi!)

Näide 4. Võrrandile $p - xy = 0$ leida niisugune lahend, mis rahuldaks tingimusi $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

Loeme võrrandis muutuja y parameetriks ja lahendame võrrandi siis hariliku diferentsiaalvõrrandina:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy, \quad z = y\frac{x^2}{2} + C(y).$$

Suvalise funktsiooni $C(y)$ määramisel leitud üldlahendist arvestame algtingimusi, nii et

$$1 = y\,\frac{1-y^2}{2} + C(y) \quad \text{ehk} \quad C(y) = 1 - y\,\frac{1-y^2}{2}.$$

Otsitavaks erilahendiks on seega funktsioon

$$z = y\,\frac{x^2}{2} + 1 - y\,\frac{1-y^2}{2}.$$

3. Vaatleme esimest järku osatuletistega võrrandit

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = f. \qquad (8)$$

Siin on otsitavaks n-muutuja funktsioon $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; kordajad a_i ja vabaliige f on antud. Kui kordajad ja vabaliige sõltuvad ainult sõltumatutest muutujatest $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siis nimetatakse võrrandit (8) lineaarseks osatuletistega võrrandiks, kui nad aga sõltuvad peale selle veel otsitavast funktsioonist u (kuid mitte selle tuletistest!), siis nimetatakse võrrandit (8) kvaasilineaarseks osatuletistega võrrandiks. Vastavalt sellele, kas $f \equiv 0$ või $f \not\equiv 0$, nimetatakse võrrandit (8) homogeenseks või mittehomogeenseks.

Vaatleme algul lineaarse homogeense võrrandi

$$a_1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+a_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (9)$$

lahendamist. Seame võrrandile (9) vastavusse sümmeetrilise süsteemi (1); kordajad a_i rahuldavad paragrahvi algul esitatud nõudeid. Samasust (3) võime tõlgendada nii: $u = \psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ on võrrandi (9) lahendiks. Meenutame (vt. teoreemi 1), et samasuse (3) kehtivus oli tarvilik ja piisav selleks, et $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ oleks süsteemi (1) esimeseks integraaliks. Sellega oleme jõudnud tulemusele: süsteemi (1) esimesed integraalid on lineaarse homogeense võrrandi (9) lahenditeks ja, vastupidi, võrrandi (9) lahendid on süsteemi (1) esimesteks integraalideks. Erandiks on vaid võrrandi (9) lahend $u \equiv \text{const}$, mis kui konstantne funktsioon ei saa olla esimeseks integraaliks. Teoreemi 2 põhjal on võrrandi (9) iga lahend esitatav kujul

$$u=\Phi(\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)), \qquad (10)$$

kus $\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$ on süsteemi (1) sõltumatud esimesed integraalid, Φ aga mingi pidevalt diferentseeruv funktsioon; muuhulgas saame siit ka võrrandi (9) lahendi $u \equiv \text{const}$, kui võtame $\Phi \equiv \text{const}$. Seega oleme tõestanud järgmise teoreemi:

Teoreem 3. Lineaarse homogeense võrrandi (9) üldlahendiks on (10), kus $\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$ on süsteemi (1) sõltumatud esimesed integraalid, $\Phi(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})$ aga suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Kvaasilineaarse võrrandi

$$a_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=$$

$$=f(x_1,\dots,x_n,u) \qquad (11)$$

taandame lineaarsele homogeensele võrrandile. Otsime võrrandi (11) lahendit ilmutamatult:

$$v(x_1,\dots,x_n,u)=0\,. \qquad (12)$$

Diferentseerides seda seost x_i järgi, leiame, et

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\,,\ \text{millest}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial v}{\partial u}\quad (i=1,2,\dots,n)\,. \qquad (13)$$

Asendanud viimased avaldised võrrandisse (11), saame teisendades

$$a_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}+$$

$$+f(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0\,. \qquad (11')$$

See on lineaarne homogeenne võrrand $v(x_1,\dots,x_n,u)$ suhtes. Teoreemi 3 põhjal on ta üldlahendiks

$$v=\Phi(\psi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_n,u))\,, \qquad (14)$$

kus Φ on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon,

$\psi_1, \ldots, \psi_n$ aga sümmeetrilise süsteemi

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\ldots,x_n,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n,u)} = \frac{du}{f(x_1,\ldots,x_n,u)} \quad (15)$$

sõltumatud esimesed integraalid (me eeldame, et kordajad a_i ja vabaliige f on pidevalt diferentseeruvad ja et kordajad ei ole vaadeldava piirkonna D_1 üheski punktis korraga nullid). Konstruktsiooni põhjal võime arvata, et võrrandi (11) üldlahendiks (ilmutamata kujul) on

$$\Phi(\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u)) = 0 \, . \quad (16)$$

See väide on õige, kuid vajab veel põhjendamist, sest me oleme üle sõitnud ühest raskelt märgatavast karist: et saada kõiki võrrandi (11) lahendeid, peavad funktsioonid $v(x_1,\ldots,x_n,u)$ rahuldama võrrandit (11') mitte igas punktis $(x_1,\ldots,x_n,u) \in D_1$, vaid ainult sellistes punktides, milles on täidetud tingimus (12). Lahend (14) aga rahuldab võrrandit (11') iga $(x_1,\ldots,x_n,u) \in D_1$ korral, s. o. mõnevõrra rangemat nõuet. Kas me sellega ei kaota osa võrrandi (11) lahenditest? Sellele küsimusele vastamiseks modifitseerime pisut eelnevaid arutlusi ja sõidame uuesti üle kari, suunates talle nüüd kogu tähelepanu.

Hakkame otsima võrrandi (11) lahendeid mitte kujul (12), vaid üheparameetriliste parvedena

$$v(x_1,\ldots,x_n,u) = c \, . \quad (12')$$

Sellega säilivad seosed (13), aga koos nendega säilib ka võrrand (11'). Kuid nüüd peab võrrand (11') olema rahuldatud juba mistahes $(x_1,\ldots,x_n,u) \in D_1$ korral. Tõepoolest, seame mistahes punktile $(x_1^0,\ldots,x_n^0,u_0) \in D_1$ vastavusse $c_0 = v(x_1^0,\ldots,x_n^0,u_0)$. Et (12') oleks võrrandi (11) lahendiks $c = c_0$ korral, peab võrrand (11') olema rahuldatud sellistes punktides $(x_1,\ldots,x_n,u) \in D_1$, milles on täidetud tingimus $v(x_1,\ldots,x_n,u) = c_0$, s. o. muuhulgas ka punktis $(x_1^0,\ldots,x_n^0,u_0)$. Viimase punkti suvalisuse tõttu peabki (11') olema rahuldatud kogu piirkonnas D_1.

Niisiis vastab võrrandi (11) lahendite üheparameetrilisele parvele (12') võrrandi (11') lahend $v(x_1,\ldots,x_n,u)$ ja vastupidi. Võrrandi (11') kõik lahendid sisalduvad aga avaldises (14). Järelikult sisalduvad võrrandi (11) kõik lahendid avaldises

$$\Phi(\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u)) = c\,.$$

Kuid funktsiooni Φ suvalisuse tõttu on see avaldis samaväärne avaldisega (16). Nüüd võime täie kindlusega väita:

Teoreem 4. Kvaasilineaarse võrrandi (11) üldlahendiks (ilmutamata kujul) on (16), kus $\psi_1,\ldots,\psi_n$ on sümmeetrilise süsteemi (15) sõltumatud esimesed integraalid, $\Phi(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ aga suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

4. Nagu selgus, taandub lineaarsete ja kvaasilineaarsete osatuletistega võrrandite lahendamine sümmeetriliste süsteemide esimeste integraalide otsimisele. Eelmises paragrahvis nägime, et normaalse süsteemi korral on esimesi integraa-

le hea leida kombineerimismeetodil. See meetod on rakendatav ka sümmeetrilistele süsteemidele, ilma et oleks vaja üle minna normaalkujule. Meetodi olemus selgub järgnevate näidete varal.

Näide 5. $x(y^2-z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(x^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 .$

See on lineaarne homogeenne osatuletistega võrrand. Temale vastab süsteem

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(x^2 + z^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} .$$

Korrutame murdude lugejaid ja nimetajaid vastavalt x, y ja z-ga:

$$\frac{x\,dx}{x^2(y^2 - z^2)} = \frac{y\,dy}{-y^2(x^2 + z^2)} = \frac{z\,dz}{z^2(x^2 + y^2)} .$$

Nimetajate summaks on $x^2(y^2 - z^2) - y^2(x^2 + z^2) + z^2(x^2 + y^2) = 0$. Järelikult on ka lugejate summa null: $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$. Siit

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1 .$$

Jagame nüüd süsteemi lugejaid ja nimetajaid vastavalt $-x, y$ ja z-ga:

$$\frac{-\dfrac{dx}{x}}{-(y^2 - z^2)} = \frac{\dfrac{dy}{y}}{-(x^2 + z^2)} = \frac{\dfrac{dz}{z}}{x^2 + y^2} .$$

Nimetajate summa on jälle null, järelikult $-\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dz}{z} = 0$, millest

$$-\ln|x| + \ln|y| + \ln|z| = \ln c_2 \quad \text{ehk} \quad \frac{yz}{x} = c_2 .$$

Meie leidsime kaks sõltumatut esimest integraali (kontrollida sõltumatust!) $x^2 + y^2 + z^2$ ja $\frac{yz}{x}$ ning vaadeldava osatuletistega võrrandi üldlahendiks on

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2, \frac{yz}{x}) .$$

Näide 6. $x \frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = u$. See on kvaasilineaarne osatuletistega võrrand (vabaliige sõltub otsitavast funktsioonist u). Temale vastavat sümmeetrilist süsteemi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{du}{u}$$

on lihtne lahendada järgmiselt. Süsteemi esimesest ja teisest suhtest $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2}$ leiame, et $y = x(x + c_1)$ ehk $\frac{y - x^2}{x} = c_1$. Süsteemi esimesest ja kolmandast suhtest $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$ leiame, et $\frac{u}{x} = c_2$. Seega oleme leidnud kaks sõltumatut esimest integraali $\frac{y - x^2}{x}$ ja $\frac{u}{x}$ ning vaadeldava osatuletistega võrrandi üldlahendiks on

$$\Phi\left(\frac{y - x^2}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0 .$$

Seda võrrandit on võimalik ilmutada u suhtes ja me saame üldlahendi ilmutatud kujul

$$u = x\varphi\left(\frac{y - x^2}{x}\right),$$

kus $\varphi(z)$ on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

5. Vaatleme lõpuks näiteid lineaarse ja kvaasilineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmise kohta.

Näide 7. Otsime lahendit algtingimustega ülesandele:

$$\sqrt{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$x = 1, \quad u = y - z.$$

Eelmises artiklis kirjeldatud viisil leiame üldlahendi antud homogeensele lineaarsele diferentsiaalvõrrandile. Viimasele vastab süsteem

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

mille sõltumatud esimesed integraalid $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1$ ja $\sqrt{z} - \sqrt{x} = C_2$ saame võrrandite $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$ ja vastavalt $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dz}{\sqrt{z}}$ lahendamisel.

Vaadeldava osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$u = \varphi(\sqrt{y} - \sqrt{x}, \sqrt{z} - \sqrt{x}),$$

kus $\varphi(v_1, v_2)$ on suvaline funktsioon muutujatest v_1 ja v_2. Antud algtingimustele vastava lahendi leidmiseks otsime nüüd sobivat funktsiooni $\varphi(v_1, v_2)$. Selleks koostame süsteemi

$$\begin{cases} C_1 = \sqrt{y} - \sqrt{x} \,, \\ C_2 = \sqrt{z} - \sqrt{x} \,, \\ x = 1 \,, \\ u = y - z \,, \end{cases} \qquad (\bullet)$$

millele vastavalt määrame sõltuvuse $u = \varphi(C_1, C_2)$.

Süsteemi $(\bullet)$ viimane **võrrand** ütleb, et $y - z =$ $= \varphi(C_1, C_2)$. Siit ja $(\bullet)$ kolmest esimesest võrrandist **elimineerime muutujad** x, y, z . Selleks avaldame süsteemist y ja z **ning** arvestame, et $x = 1$. Saame $y = (1 + C_1)^2$ ja $z = (1 + C_2)^2$. Elimineerimise tulemuseks on seos

$$\varphi(C_1, C_2) = (1 + C_1)^2 - (1 + C_2)^2$$

ehk

$$\varphi(C_1, C_2) = C_1^2 - C_2^2 + 2(C_1 - C_2) \,.$$

Seega otsitav funktsioon

$$\varphi(v_1, v_2) = v_1^2 - v_2^2 + 2(v_1 - v_2)$$

ja erilahend

$$u = (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 - (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + 2[(\sqrt{y} - \sqrt{x}) - (\sqrt{z} - \sqrt{x})]$$

ehk

$$u = y - z + 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{z} - \sqrt{y}) \,.$$

(Näita, et leitud funktsioon rahuldab nii antud diferentsiaalvõrrandit, kui ka algtingimusi!)

<u>Näide 8</u>. $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$, $x = y = z = t$. See on algtingimustega ülesanne mittehomogeense kvaasilineaarse diferentsiaalvõrrandi jaoks. Otsime üldlahendit antud diferent-

siaalvõrrandile. Selleks lahendame **lähtevõrrandile vastava** süsteemi:

$$\frac{dx}{\frac{1}{z}} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{\frac{z}{x}} .$$

Viimase **sõltumatuteks esimesteks integraalideks** $\frac{z}{x^2} = C_1$ ja $\frac{1}{y} + \frac{zx}{3} = C_2$ on **võrrandite** $zdx = \frac{x}{z}\,dz$ **ja vastavalt** $C_1x^2dx = \frac{dy}{y^2}$ üldlahendid. **Lähtevõrrandi üldlahend avaldub leitud esimeste integraalide kaudu seosega**

$$\Phi\left(\frac{z}{x^2}, \frac{1}{y} + \frac{zx}{3} \right) = 0 ,$$

kus $\Phi(v_1,v_2)$ **on oma argumentide suvaline funktsioon.**

Algtingimustele vastava erilahendi leiame seose $\Phi(C_1,C_2) = 0$ **konkretiseerimisel, kui arvestame süsteemi**

$$\begin{cases} C_1 = \frac{z}{x^2} , \\ C_2 = \frac{1}{y} + \frac{zx}{3} , \\ x = y = z = t . \end{cases} \qquad (**)$$

Viimasest saame $C_1 = \frac{1}{t}$ ja $C_2 = \frac{1}{t} + \frac{t^2}{3}$, **mis näitab** (elimineeri t **saadud seostest), et otsitavaks sõltuvuseks** on $C_2 = C_1 + \frac{1}{3C_1^2}$ ehk $C_2 - C_1 - \frac{1}{3C_1^2} = 0$. **Arvestades lõpuks kahte esimest seost süsteemist** (**), **näeme, et otsitav erilahend on määratud võrrandiga**

$$x^6y + 3z^3y - x^3z^3 - 3x^2z^2 = 0 ,$$

mille saame võrrandi

$$\frac{1}{y} + \frac{zx}{3} - \left(\frac{z}{x^2} + \frac{x^4}{3z^2} \right) = 0$$

lihtsustamisel.

Märkus. On oluline lisada, et peale üld- ja erilahendi esineb esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrranditel veel lahendeid, mis sõltuvad kahest suvalisest konstandist. Niisuguste lahendite ja Cauchy algtingimuste kaudu defineeritakse esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi täisintegraali mõiste. Täisintegraali abil saab leida osatuletistega diferentsiaalvõrrandile nii erilahendeid kui ka üldlahendeid. (Selle kohta täpsemalt vt. põhiõpik /1/.)

§ 5. LAHENDI OLEMASOLU JA ÜHESUSE TEOREEM.

Käesolevas paragrahvis tõestame §-s 1 sõnastatud teoreemi normaalse diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahenduvusest. Normaalsete süsteemide käsitlemisel on hea kasutada vektorsümboolikat, millega me kõigepealt tutvumegi.

1. Vaatleme vektorit

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

mille komponentideks on sõltumatu muutuja x funktsioonid $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Sellist vektorit me nimetame tavaliselt vektorfunktsiooniks (vahel, kui see ei tekita arusaamatusi, ka lihtsalt funktsiooniks). Vektorfunktsioonidele kanname üle lineaaralgebra tehted (s. t. vektorite liitmise, skalaariga korrutamise jt.), aga ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse tehted ja paljud muud mõisted, mis analüüsi kursuses defineeritakse (skalaarsete) funktsioonide jaoks. Näiteks me ütleme, et vektorfunktsioon on pidev, kui kõik tema komponendid on pidevad funktsioonid. Vektorfunktsioon on diferentseeruv, kui kõik tema komponendid on diferentseeruvad, kusjuures tuletise defineerime kui vektorfunktsiooni

$$\mathbf{y}'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)) .$$

Analoogiliselt

$$\int \mathbf{y}(x)dx = (\int y_1(x)dx, \int y_2(x)dx, \ldots, \int y_n(x)dx) .$$

Me ütleme, et vektorfunktsioonide jada

$$\mathbf{y}^k(x) = (y_1^k(x), y_2^k(x), \ldots, y_n^k(x)) \quad (k = 0,1,2,\ldots; \text{ k on siin indeks})$$

koondub ühtlaselt lõigul $[a,b]$ vektorfunktsiooniks $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$, kui komponentidest moodustatud jadad koonduvad ühtlaselt:

$$\lim_{k \to \infty} \max_{a \leq x \leq b} | y_i^k(x) - y_i(x) | = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n) .$$

Täiesti analoogiliselt defineeritakse vektorfunktsioonide rea koondumine.

Teatavasti on analüüsi üheks põhiliseks mõisteks arvu absoluutväärtus. Selle mõiste üldistust vektoritele nimetatakse vektori normiks ja seda üldistust võib teostada mitut moodi. Meil on hea defineerida <u>vektori</u> $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ <u>norm</u> $|\mathbf{C}|$ komponentide absoluutväärtuste summana.[1]

$$|\mathbf{C}| = |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| .$$

Olgu $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ja $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ mingid vektorid, λ aga mingi reaalarv. Siis

---

[1] Juhul, kui vektori $\mathbf{C}$ komponendid on kompleksarvud, defineerime normi $|\mathbf{C}|$ komponentide moodulite summana.

$$|\mathbf{C}+\mathbf{D}| \leq |\mathbf{C}| + |\mathbf{D}|, \quad |\lambda \mathbf{C}| = |\lambda| |\mathbf{C}|.$$

Tõepoolest, $\mathbf{C}+\mathbf{D} = (c_1+d_1, c_2+d_2, \ldots, c_n+d_n)$,

$\lambda \mathbf{C} = (\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_n)$ ning

$$|\mathbf{C}+\mathbf{D}| = \sum_{i=1}^{n} |c_i + d_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|c_i| + |d_i|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |c_i| + \sum_{i=1}^{n} |d_i| = |\mathbf{C}| + |\mathbf{D}|,$$

$$|\lambda \mathbf{C}| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda c_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |c_i| = |\lambda| |\mathbf{C}|, \text{ m.o.t.t.}$$

Vastavalt vektori normi definitsioonile on vektorfunktsiooni $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ normiks mittenegatiivne funktsioon

$$|\mathbf{y}(x)| = \sum_{j=1}^{n} |y_j(x)| .$$

Veendume, et

$$\left| \int_{x_0}^{x} \mathbf{y}(x)dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |\mathbf{y}(x)| \, dx \right| . \qquad (0)$$

Tõepoolest,

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{y}(x)dx = \left(\int_{x_0}^{x} y_1(x)dx, \int_{x_0}^{x} y_2(x)dx, \ldots, \int_{x_0}^{x} y_n(x)dx \right)$$

ning normi definitsiooni ja absoluutväärtuse omaduste kohaselt

$$\left|\int_{x_0}^{x}\mathbf{y}(x)dx\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{x_0}^{x} y_j(x)dx\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{x_0}^{x} |y_j(x)|dx\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{n}|y_j(x)|\,dx\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left|\mathbf{y}(x)\right|dx\right|, \text{ m.o.t.t.}$$

Soovitame lugejal veel kord läbi vaadata esitatud tuletuskäik ning hoolega tähele panna, mida tähendab igal konkreetsel juhul püstkriips - kas absoluutväärtust või normi.

Me ütleme, et vektorfunktsioonide rida $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{y}^k(x)$ on lõigul $[a,b]$ majoreeritav arvreaga $\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k$, kui

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\mathbf{y}^k(x)\right| \leqslant \eta_k \quad (k = 0,1,2,\dots).$$

Analüüsist tuntud Weierstrassi teoreem kehtib ka vektorfunktsioonide korral: kui vektorfunktsioonide rida $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{y}^k(x)$ on lõigul $[a,b]$ majoreeritav koonduva arvreaga, siis see koondub ühtlaselt lõigul $[a,b]$.

Tõepoolest, olgu $\mathbf{y}^k(x) = (y_1^k(x), y_2^k(x), \dots, y_n^k(x))$.
Kuna

$$|y_i^k(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|y_j^k(x)| = \left|\mathbf{y}^k(x)\right| \qquad (i = 1,2,\dots,n),$$

siis on ka komponentidest moodustatud read $\sum_{k=0}^{\infty} y_i^k(x)$ lõigul $[a,b]$ majoreeritavad koonduva arvreaga ning koonduvad Weierstrassi teoreemi põhjal ühtlaselt lõigul $[a,b]$. See aga tähendabki, et rida $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{y}^k(x)$ koondub ühtlaselt lõigul

6.

$[a,b]$, m.o.t.t. Kui sealjuures vektorfunktsioonid $\mathbf{y}^k(x)$ on pidevad, siis on komponentidest moodustatud ridade summadeks pidevad funktsioonid, mis toob endaga kaasa vektorfunktsiooni $\mathbf{y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}^k(x)$ pidevuse.

Sellega muidugi ei piirdu loetelu analüüsi tulemustest, mis on ülekantavad vektorfunktsioonidele. Me esitasime vaid need tulemused, mida meil käesolevas paragrahvis vaja läheb.

Olgu antud normaalne diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y_i' = f_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \quad (i = 1,2,\dots,n) . \tag{1}$$

Vaadeldes siin $y_1,y_2,\dots,y_n$ kui vektorfunktsiooni $\mathbf{y} = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ komponente, kirjutame need võrrandid ümber nii:

$$y_i' = f_i(x,\mathbf{y}) \quad (i = 1,2,\dots,n) .$$

Viimased tingimused tähendavad, et vektorfunktsioonide $\mathbf{y}' = (y_1',y_2',\dots,y_n')$ ja

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) = (f_1(x,\mathbf{y}),\ f_2(x,\mathbf{y}),\dots,f_n(x,\mathbf{y}))$$

vastavad komponendid on võrdsed. Järelikult on võrdsed ka vektorfunktsioonid ise:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}) . \tag{1'}$$

Niisiis on iga normaalne süsteem (1) vektorsümboolikas esitatav võrrandina (1'), mis väliselt ühtib esimest järku võrrandiga normaalkujul. Ei tohi aga unustada, et nüüd on $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$ ja $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ mitte skalaarsed funktsioonid, vaid vektorfunktsioonid, nii et sisuliselt tähendab võrrand (1') süsteemi (1).

Defineerime vektorfunktsiooni $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ osatuletise vektorfunktsiooni $\mathbf{y}$ suhtes kui Jacobi maatriksi

$$\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{matrix} \right\| .$$

Me ütleme, et $\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$ **on pidev, kui kõik maatriksi elemendid on pidevad.**

2. Kasutades vektorsümboolikat, võime §-s 1 formuleeritud teoreemi lahendi olemasolust ja ühesusest ümber sõnastada kujul, mis väliselt ühtib vastava teoreemiga esimest järku võrrandi jaoks:

<u>Teoreem 1</u>. Kui süsteemi (1') parem pool $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ ja **selle osatuletis** $\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$ **on määratud ja pidevad** $(x,\mathbf{y})$**-ruumi piirkonnas** D **, siis kulgeb läbi selle piirkonna iga punkti** $(x_0,\mathbf{y}^0)$ **parajasti üks integraalkõver, s. t. süsteemil (1') on üks ja ainult üks lahend** $\mathbf{y}(x)$ **, mis rahuldab algtingimust**

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^0 \tag{2}$$

Tõestuse jagame etappideks.

1. e t a p p . Piirkonnana, **nagu kord juba märgitud, mõistame lahtist sidusat** hulka. Hulga **D lahtisuse tõttu** sisaldub **temas koos iga** punktiga $(x_0,\mathbf{y}^0) \in D$ **ka küllalt**

väike ristkülik R keskpunktiga $(x_0, \mathbf{y}^0)$. Olgu see ristkülik määratud võrratustega

$$|x - x_0| \leq \alpha, \ |\mathbf{y} - \mathbf{y}^0| \leq \beta.$$

Funktsioonid $f_i(x,\mathbf{y})$ ja $\dfrac{\partial f_i(x,\mathbf{y})}{\partial y_j}$ kui pidevad funktsioonid kinnisel hulgal R on sellel hulgal tõkestatud:

$$|f_i(x,\mathbf{y})| \leq A, \ \left|\frac{\partial f_i(x,\mathbf{y})}{\partial y_j}\right| \leq B \quad (i,j = 1,2,\ldots;(x,\mathbf{y})\in R).$$

Kuna normi definitsiooni kohaselt $\left|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})\right| = \sum_{i=1}^{n}|f_i(x,\mathbf{y})|$, siis saame nendest võrratustest järeldada kõigepealt, et ka $\left|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})\right|$ on tõkestatud:

$$\left|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})\right| \leq M \quad (M = n\,A\ ;\ (x,\mathbf{y}) \in R).$$

Edasi järeldub nendest võrratustest, et $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ rahuldab ristkülikus R muutuja $\mathbf{y}$ järgi Lipschitz'i tingimust:

$$\left|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}^1) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y}^2)\right| \leq N\left|\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2\right| \quad ((x,\mathbf{y}^1),(x,\mathbf{y}^2) \in R). \tag{3}$$

Tõepoolest, Lagrange'i lause põhjal

$$f_i(x,y_1^1,y_2^1,\ldots,y_n^1) - f_i(x,y_1^2,y_2^2,\ldots,y_n^2) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y_j^1 - y_j^2), \tag{3'}$$

kus osatuletiste $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ argumentideks on punktide $(x,y_1^1,y_2^1,\ldots,y_n^1)$ ja $(x,y_1^2,y_2^2,\ldots,y_n^2)$ mingi vahepealne punkt. Ilmselt kuulub ka viimane ristkülikusse R, mistõttu võrduses (3') $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \leqslant B$. Võttes võrduse (3') mõlemast poolest absoluutväärtused, leiame

$$\left| f_i(x,\mathbf{y}^1) - f_i(x,\mathbf{y}^2) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y_j^1 - y_j^2) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \left| y_j^1 - y_j^2 \right| \leqslant B \sum_{j=1}^{n} \left| y_j^1 - y_j^2 \right| = B \left| \mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2 \right| ,$$

mistõttu

$$\left| \mathbf{f}(x,\mathbf{y}^1) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y}^2) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| f_i(x,\mathbf{y}^1) - f_i(x,\mathbf{y}^2) \right| \leqslant n\,B \left| \mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2 \right| .$$

Jõudsimegi võrratuseni (3), milles $N = nB$ . .

Me näitame edaspidi lahendi olemasolu ja ühesust lõigul $|x - x_0| \leqslant h$, kus

$$h = \min\left\{ \alpha ,\ \frac{\beta}{M} \right\} .$$

2. etapp. Veendume, et võrrand (1') (süsteem (1')) on algtingimusel (2) samaväärne integraalvõrrandiga (integraalvõrrandite süsteemiga)

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(x,\mathbf{y})\,dx . \qquad (4)$$

Tõepoolest, kui $\mathbf{y}(x)$ on võrrandi (1) lahendiks algtingimusel (2), siis samasuse

$$\mathbf{y}'(x) \equiv \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x))$$

integreerimisel rajades (x_0,x) saame samasuse

$$\mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x))\,dx .$$

Asendades siin $y(x_0)$ algtingimuse (2) põhjal, näeme, et $y(x)$ on ka integraalvõrrandi (4) lahendiks.

Olgu nüüd, vastupidi, $y(x)$ integraalvõrrandi (4) pidevaks lahendiks, s. t. kehtigu samasus

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx .$$

Võttes siin $x = x_0$, saavad integraali rajad võrdseteks, mistõttu $y(x_0) = y^0$ - algtingimus (2) on rahuldatud. Samasuse diferentseerimisel näeme, et ka võrrand (1') on rahuldatud.

3. e t a p p . Integraalvõrrandi (4) lahendame iteratsioonimeetodil, võttes alglähendiks $y = y^0$:

$$
\begin{aligned}
y^1 &= y^0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^0)dx , \\
y^2 &= y^0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^1(x))dx , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{k+1} &= y^0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^k(x))dx , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Veendume induktsioonimeetodi abil, et lähendid $y^k (k = 0,1,2,\ldots)$ on määratud ja pidevad lõigul $|x - x_0| \leqslant h$ ning paiknevad täielikult ristkülikus[1] R .

Integreerimisel säilitavad funktsioonid teatavasti pi-

[1] S. t. $|x - x_0| \leqslant h$ korral paikneb punkt $(x, y^k(x))$ ristkülikus R .

devuse. Kuna $|x - x_0| \leq h$ korral $(x, y^0) \in R \subset D$, siis on y^1 määratud ja pidev sellel lõigul ning

$$\left|y^1(x) - y^0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y^0)dx\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(x, y^0)\right| dx\right| \leq M \left|\int_{x_0}^{x} dx\right| =$$

$$= M|x - x_0| \leq Mh \leq M \cdot \frac{\beta}{M} = \beta,$$

s. t. paikneb ristkülikus R.

Oletame, et y^k on määratud ja pidev lõigul $|x - x_0| \leq h$ ning paikneb ristkülikus R. Siis $|x - x_0| \leq h$ korral $(x, y^k(x)) \in R \subset D$ ning y^{k+1} avaldisest (5) on näha, et ka y^{k+1} on määratud ja pidev lõigul $|x - x_0| \leq h$. Jääb üle veel näidata, et ta paikneb ristkülikus R:

$$\left|y^{k+1}(x) - y^0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y^k(x))dx\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(x, y^k(x))\right| dx\right| \leq$$

$$\leq M \left|\int_{x_0}^{x} dx\right| \leq \beta.$$

4. e t a p p. Näitame, et lähendite jada $y^0, y^1, \ldots$ $\ldots, y^k, \ldots$ koondub ühtlaselt lõigul $|x - x_0| \leq h$. Kuna vaadeldav jada on parajasti osasummade jadaks reale

$$y^0 + (y^1 - y^0) + (y^2 - y^1) + \ldots + (y^{k+1} - y^k) + \ldots, \qquad (6)$$

siis piisab rea (6) ühtlase koondumise näitamisest lõigul $|x - x_0| \leq h$. Hindame rea liikmete norme. Eespool on leitud, et

$$\left|y^1 - y^0\right| \leq M|x - x_0|.$$

Lähtudes lähendite y^2 ja y^1 avaldistest (vt. eespool), hindame normi $|y^2 - y^1|$:

$$|y^2 - y^1| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y^1) - f(x, y^0)]\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y^1) - f(x, y^0)|\, dx \right| \leq N \left| \int_{x_0}^{x} |y^1 - y^0|\, dx \right| \leq$$

$$\leq MN \left| \int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx \right| = \frac{MN}{2!} |x - x_0|^2 .$$

Normide $|y^1 - y^0|$ ja $|y^2 - y^1|$ hinnangute põhjal teeme induktiivse oletuse

$$|y^k - y^{k+1}| \leq \frac{MN^{k-1}}{k!} |x - x_0|^k$$

ja kontrollime seda:

$$|y^{k+1} - y^k| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y^k) - f(x, y^{k-1})]\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y^k) - f(x, y^{k-1})|\, dx \right| \leq N \left| \int_{x_0}^{x} |y^k - y^{k-1}|\, dx \right| \leq$$

$$\leq N \frac{MN^{k-1}}{k!} \left| \int_{x_0}^{x} |x - x_0|^k\, dx \right| = \frac{MN^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1} .$$

Induktiivne oletus osutus õigeks. Niisiis on rida (6) lõigul $|x - x_0| \leq h$ majoreeritav arvreaga

$$|y^0| + Mh + \frac{MN}{2!} h^2 + \ldots + \frac{MN^k}{(k+1)!} h^{k+1} + \ldots \quad . \quad (6')$$

D'Alembert'i koonduvustunnuse abil on lihtne näidata (teha seda!), et rida (6') koondub. Weierstrassi teoreemi põhjal koondub rida (6) ise siis lõigul $|x - x_0| \leqslant h$ ühtlaselt. Nagu juba öeldud, koondub koos reaga (6) ühtlaselt ka lähendite jada $\mathbf{y}^k(x)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$.

Kuna lähendid $\mathbf{y}^k(k)$ olid pidevad lõigul $|x - x_0| \leqslant h$ ja paiknesid ristkülikus R, siis on samad omadused ka piirfunktsioonil (vektorfunktsioonil)

$$\mathbf{y}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^k(x) .$$

Edasi: sellest, et vektorfunktsioon $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ on ristkülikus R ühtlaselt pidev, järeldub, et jada $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}^k(x))$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ koondub lõigul $|x - x_0| \leqslant h$ ühtlaselt vektorfunktsiooniks $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$. See võimaldab seoses (5) minna piirile $k \to \infty$ integraali märgi all ja me saame tulemuseks samasuse

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))dx ,$$

s. t. $\mathbf{y}(x)$ on võrrandi (4) lahendiks. Koos sellega on $\mathbf{y}(x)$ ka diferentsiaalvõrrandi (1') lahendiks algtingimusel (2). Lahendi olemasolu on tõestatud.

5. e t a p p . Näitame, et leitud lahend on ainus. Selleks viime vastuollu oletuse, et läbi punkti $(x_0, \mathbf{y}^0)$ kulgeb kaks teineteisest erinevat lahendit $\mathbf{y}(x)$ ja $\tilde{\mathbf{y}}(x)$.

Üldsust kitsendamata võime eeldada, et selliseid x väärtusi, mille korral $\mathbf{y}(x) \neq \tilde{\mathbf{y}}(x)$, leidub punkti x_0

7.

kuitahes väikeses ümbruses. Võttes ette suvalise arvu $\varepsilon > 0$, on siis

$$\alpha = \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} |y(x) - \tilde{y}(x)| > 0 .$$

Olgu x_1 selline x väärtus ($|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$), milles see maksimum α saavutatakse: $|y(x_1) - \tilde{y}(x_1)| = \alpha$. Kuna (vt. tõestuse 2. etappi)

$$y(x_1) = y^0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx, \quad \tilde{y}(x_1) = y^0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \tilde{y}(x))dx,$$

siis

$$\alpha = |y(x_1) - \tilde{y}(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))]dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x_1} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| dx \right| \underset{(3)}{\leq} N \left| \int_{x_0}^{x_1} |y(x) - \tilde{y}(x)| dx \right| \leq$$

$$\leq N\alpha \left| \int_{x_0}^{x_1} dx \right| = N\alpha |x_1 - x_0| \leq N\alpha\varepsilon .$$

Jagades saadud võrratuse α-ga, saame $1 \leq N\varepsilon$. Arv $\varepsilon > 0$ oli aga suvaline. Võttes $\varepsilon < \frac{1}{N}$, jõuame vastuolulise võrratuseni $1 < 1$. Vastuolu tekkis sellepärast, et eeldasime kahe teineteisest erineva, läbi ühe ja sama punkti kulgeva lahendi olemasolu.

Teoreem on täielikult tõestatud.

<u>Märkus</u>. Osatuletise $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ pidevust kasutasime vaid võrratuse (3) tuletamiseks. Seega võib teoreemi sõnastuses eelduse $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ pidevusest asendada mõnevõrra avarama eeldusega, et $f(x,y)$ rahuldab y järgi Lipschitzi tingimust (3).

Anname tõestuseta järgmise tulemuse.

Teoreem 2. Kui süsteemi (1') parem pool $f(x,y)$ on pidev (x,y) - ruumi piirkonnas D, siis kulgeb läbi selle piirkonna iga punkti (x_0, y^0) vähemalt üks integraalkõver.

Lahendi ühesust nii üldistel eedlustel väita ei saa.

§ 6. LAHENDI JÄTKAMINE. MAKSIMAALNE LAHEND.

Olgu diferentsiaalvõrrandi (diferentsiaalvõrrandite süsteemi)

$$y' = f(x,y)$$

parem pool $f(x,y)$ ja selle osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ määratud ja pidevad (x,y) - ruumi piirkonnas D. Eelmises paragrahvis tõestatud teoreemi kohaselt kulgeb siis läbi piirkonna D iga punkti (x_0, y^0) parajasti üks integraalkõver; see integraalkõver, nagu teoreemi tõestuse käigus selgus, on määratud teatud küllalt väikesel lõigul $|x - x_0| \leq h$. Lihtne arutlus veenab meid, et tegelikult on integraalkõvera määramispiirkond avaram. Tõepoolest, integraalkõver $y(x)$ $(|x - x_0| \leq h)$ paikneb täielikult teatavas ristkülikus R, mis omakorda asus piirkonna D sees. Järelikult on integraalkõvera $y(x)$ otspunktid $(x_0 - h, y(x_0 - h))$ ja $(x_0 + h, y(x_0 + h))$ piirkonna D punktideks. Lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi põhjal kulgeb näiteks läbi punkti $(x_0 + h, y(x_0 + h))$ parajasti üks integraalkõver $\tilde{y}(x)$, ta on määratud teatayal lõigul $|x - (x_0 + h)| \leq \tilde{h}$. Punktist $x_0 + h$ vasakul ühtivad lahendid $y(x)$ ja $\widetilde{y}(x)$ (vastasel korral satuksime vastuollu lahendi ühesusega). Sellega oleme lahendi $y(x)$ jätkanud lõigult $[x_0-h, x_0+h]$ lõigule $[x_0 - h, x_0 + h + \tilde{h}]$. Seda avarama määramispiirkonnaga lahendit võime omakorda jätkata jne.

Toodud arutlustest on selge, et läbi ühe ja sama punkti (x_0, y^0) kulgevaid integraalkõveraid on otstarbekohane eristada nende määramispiirkonna järgi, s. t. lugeda lahendeid $y^1(x)$ ja $y^2(x)$ ($y^1(x_0) = y^2(x_0) = y^0$) erinevateks, kui nende määramispiirkonnad on erinevad. Seoses sellega peame lahendi ühesust nüüd tõlgendama nii: kui läbi ühe ja sama punkti kulgeb mitu lahendit, siis nad ühtivad nende määramispiirkondade ühisosal.

Olgu antud kaks lahendit $y^1(x)$ ja $y^2(x)$, mis kumbki läbivad punkti (x_0, y^0) ja millede määramispiirkondadeks on vastavalt vahemikud[1] (a_1, b_1) ja (a_2, b_2). Defineerime neid ühendava lahendi $y(x)$ järgmiselt: $y(x)$ määramispiirkonnaks on vahemik

$$(a,b)\ ,\quad a = \min\{a_1, a_2\},\ b = \max\{b_1, b_2\},$$

ning $y(x)$ väärtusteks selles vahemikus on

$$y(x) = \begin{cases} y^1(x), & \text{kui } a_1 < x < b_1 , \\ y^2(x), & \text{kui } a_2 < x < b_2 . \end{cases}$$

---

[1] Muidugi võiksid nende lahendite määramispiirkondadeks olla ka lõigud või poollõigud. Integraalkõvera loomulikuks määramispiirkonnaks on siiski vahemik, mitte aga lõik, - kasvõi sel lihtsal põhjusel, et vahemikus määratud funktsiooni korral võib rääkida tema tuletisest vahemiku igas punktis, kuna aga lõigu korral on lõigu otspunktides võimalik rääkida vaid ühepoolsetest tuletistest.

Esimesel pilgul võib $y(x)$ definitsioon tunduda vastuolulisena: vahemike (a_1,b_1) ja (a_2,b_2) ühisosal on $y(x)$ antud kahel viisil. Kuid tegelikult ei ole siin mingit vastuolu, sest vahemike ühisosal ühtivad $y^1(x)$ ja $y^2(x)$ lahendi ühesuse tõttu. Selliselt defineeritud lahend $y(x)$ on lahendite $y^1(x)$ ja $y^2(x)$ jätkuks.

Üldiselt öeldakse, et lahend $\tilde{y}(x)$ on lahendi $y(x)$ jätkuks, kui $\tilde{y}(x)$ määramispiirkond sisaldab $y(x)$ määramispiirkonda ning $y(x)$ määramispiirkonnal need kaks lahendit ühtivad. Iga lahend on iseenda (triviaalseks) jätkuks. Läbi punkti (x_0,y^0) kulgevat lahendit nimetatakse maksimaalseks, kui ta on jätkuks kõigi seda punkti läbivate lahendite suhtes. Teiste sõnadega: maksimaalne lahend on selline, mida ei ole võimalik (mitte triviaalselt) jätkata. Ilmselt saab iga $(x_0,y^0) \in D$ korral leiduda mitte üle ühe seda punkti läbiva maksimaalse lahendi (põhjendada!). Ei ole raske tõestada ka maksimaalse lahendi olemasolu.

Tõepoolest, vaatleme kõikvõimalikke lahendeid $\{y^{\alpha}(x)\}$, mis läbivad punkti (x_0,y^0) ja millest igaüks on määratud mingis oma vahemikus (a_α,b_α). Tähistame

$$a = \inf_\alpha a_\alpha, \quad b = \sup_\alpha b_\alpha$$

ja defineerime vahemikus (a,b) lahendi $y(x)$ järgmiselt: kui $x \in (a_\alpha,b_\alpha)$, siis $y(x) = y^{\alpha}(x)$. Lahendi ühesuse tõttu ei sõltu $y(x)$ väärtus sellest, millise konkreetse vahemiku $(a_\alpha,b_\alpha) \ni x$ me välja valisime. Kuna aga alumise ja ülemise raja definitsiooni kohaselt langeb iga $x (a<x<b)$

teatavasse vahemikku (a_α, b_α), siis on lahend $y(x)$ tõepoolest määratud kogu vahemikus (a,b). Vahemik (a,b) on suurim vahemikest, millel punkti (x_0, y^0) läbiv lahend saab olla määratud - kui ta seda ei oleks, satuksime vastuollu arvude a ja b definitsiooniga. Seetõttu olekski $y(x)$ maksimaalseks lahendiks, kui ta vaid ei ole jätkatav lõigule $[a,b]$ või ühele poollõikudest $[a,b)$ ja $(a,b]$. Selline jätkamine ei ole aga enam võimalik. Näiteks tähendab $y(x)$ jätkatavus poollõigule $(a,b]$, et eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x \nearrow b} y(x) = y(b)$, kusjuures $(b, y(b)) \in D$. Siis aga läbiks punkti $(b, y(b))$ lahend, mis oleks määratud teatud küllalt väikesel lõigul $|x - b| \leq h$, ning $y(x)$ oleks sellega jätkatav ka poollõigule $(a, b + h]$, seda enam aga vahemikule $(a, b + h)$. See on aga taas vastuolus b definitsiooniga. Niisiis on $y(x)$ maksimaalseks lahendiks ja vahemik (a,b) tema määramispiirkonnaks. Sõnastame tõestatud tulemuse teoreemina:

<u>Teoreem 1.</u> Iga punkti $(x_0, y^0) \in D$ korral leidub parajasti üks seda punkti läbiv maksimaalne lahend.

Intuitsioon ütleb meile, et kui piirkond D on tõkestatud ja maksimaalse lahendi $y(x)$ määramispiirkonnaks on vahemik (a,b), siis $x \searrow a$ ja $x \nearrow b$ korral peab punkti $(x, y(x))$ kaugus piirkonna D rajast lähenema nullile. Et see tõepoolest nii on, seda on täie rangusega lihtne järeldada järgmisest teoreemist.

<u>Teoreem 2</u>. Olgu $y(x)$ maksimaalseks lahendiks ja vahemik (a,b) tema määramispiirkonnaks. Milline ka ei

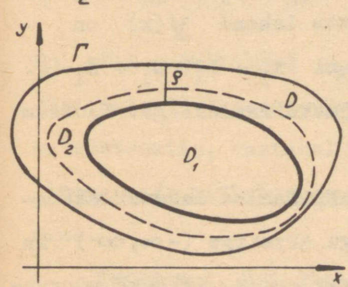
oleks kinnine tõkestatud hulk $D_1 \subset D$, leiduvad sellised arvud $a_1 (a_1 > a)$ ja $b_1 (b_1 < b)$, et $x < a_1$ ja $x > b_1$ korral asub punkt $(x, \mathbf{y}(x))$ väljaspool hulka D_1.

T õ e s t u s. Näitame sellise arvu $b_1 (b_1 < b)$ olemasolu, et $x > b_1$ korral $(x, \mathbf{y}(x)) \notin D_1$; arvu a_1 jaoks on tõestus analoogiline. Kui $b = \infty$, on see väide ilmne: tõkestatud hulga D_1 punktidele vastavad abtsissid x on tõkestatud, mistõttu leidubki selline küllalt suur arv b_1, et $x > b_1$ korral $(x, \mathbf{y}(x)) \notin D_1$. Seetõttu peame vaatlema vaid juhtu, kui $b < \infty$.

Tähistame sümboliga ϱ hulga D_1 kaugust piirkonna D rajast Γ, s. t.

$$\varrho = \inf_{(x,\mathbf{y}) \in \Gamma, (x_1, \mathbf{y}^1) \in D_1} \left[(x - x_1)^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{y}^1|^2 \right]^{1/2}.$$

Teoreemi eeldused kindlustavad, et $\varrho > 0$. Vaatleme hulka D_2, mis koosneb sellistest $(x, \mathbf{y})$-ruumi punktidest, mille kaugus hulgast D_1 ei ületa $\frac{\varrho}{2}$. Ilmselt on D_2 ka kinnine tõkestatud hulk ning sisaldub piirkonnas D (põhjendada!). Funktsioon $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ kui pidev funktsioon kinnisel tõkestatud hulgal D_2 on sellel hulgal tõkestatud:



Joon. 1.

$$|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})| \leqslant M \quad ((x, \mathbf{y}) \in D_2). \tag{1}$$

Olgu (x_1, y^1) suvaline punkt hulgast D_1. Ehitame ristküliku R_1:

$$|x - x_1| \leq \alpha, \quad |y - y^1| \leq \beta .$$

Kui $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \leq \frac{\varrho}{2}$, siis $R_1 \subset D_2$; see võrratus on täidetud, kui näiteks võtta $\alpha = \beta = \frac{\varrho}{4}$. Seega on $\alpha = \beta = \frac{\varrho}{4}$ korral ristküliku R_1 punktides rahuldatud võrratus (1) ja (vt. ptk. III, teoreemi 1 § 5 tõestust) läbi punkti (x_1, y^1) kulgev integraalkõver on määratud lõigul $|x - x_1| \leq h_1$, kus

$$h_1 = \min\left\{\alpha, \ \frac{\beta}{M}\right\} = \min\left\{\frac{\varrho}{4}, \frac{\varrho}{4M}\right\} .$$

Rõhutame asjaolu, et h_1 ei sõltu punkti $(x_1, y^1) \in D_1$ valikust (meie konstruktsioonis oli $(x_1, y^1) \in D_1$ suvaline).

Veendume, et teoreemis väidetavaks arvuks b_1 võib võtta $b_1 = b - h_1$. Tõepoolest, kui mingi $x_1 > b_1$ korral $(x_1, y(x_1)) \in D_1$, siis läbi selle punkti kulgev lahend on määratud lõigul $|x - x_1| \leq h_1$, mistõttu lahend $y(x)$ on jätkatav "paremale" kuni x väärtuseni $x_1 + h_1 > b_1 + h_1 = b$. See on aga vastuolus lahendi $y(x)$ maksimaalsusega. Teoreem on tõestatud.

Nendime lõpuks veel fakti, et maksimaalse lahendi määramispiirkonnaks ei pea alati olema kogu arvsirge $(-\infty, \infty)$ ka siis, kui piirkonnaks D on kogu (x,y)-ruum. Näiteks võrrandi $(n = 1)$

$$y' = y^2$$

parem pool rahuldab lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi nõudeid kogu (x,y)-tasandil, kuid punkti $(-1,1)$ läbiv maksimaalne lahend $y = -\frac{1}{x}$ on määratud vaid vahemikus $(-\infty,0)$.

§ 7. LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMID, LAHENDI OLEMASOLU JA ÜHESUSE TEOREEM NENDE JAOKS.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi nimetatakse lineaarseks, kui otsitavad funktsioonid ja nende tuletised esinevad tema võrrandites lineaarselt, kusjuures kordajateks on kas konstandid või üldiselt funktsioonid. Normaalkujul esitatud lineaarne diferentsiaalvõrrandite süsteem on järgmine:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x)\,, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x)\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Kui kõik vabaliikmed $g_i(x)$ on samaselt nullid, nimetatakse süsteemi (1) <u>lineaarseks homogeenseks</u> diferentsiaalvõrrandite süsteemiks, vastasel korral aga, kui vähemalt üks $g_i(x) \not\equiv 0$, <u>lineaarseks mittehomogeenseks</u> diferentsiaalvõrrandite süsteemiks.

<u>Teoreem 1</u>. Kui lineaarse diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1) kordajad $a_{ij}(x)$ ja vabaliikmed $g_i(x)$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ on määratud ja pidevad vahemikus (a,b), siis on süsteemil parajasti üks lahend, mis on määratud kogu vahemikus (a,b) ja rahuldab antud algtingimusi

8.

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0 , \qquad (2)$$

kus x_0 on suvaline arv vahemikust (a,b), arvud $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ aga täiesti suvalised.

T õ e s t u s . Tänu teoreemi eeldustele on süsteemi (1) võrrandite paremad pooled

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \dots + a_{in}(x)y_n + g_i(x)$$

ja nende osatuletised

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x) \qquad (i,j = 1,2,\dots,n)$$

määratud ja pidevad piirkonnas D :

$$a < x < b, \ -\infty < y_j < \infty \ (j = 1,2,\dots,n) .$$

Rakendades lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi (vt. ptk. III, § 1 või § 5), saamegi väita, et läbi antud punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ kulgeb parajasti üks (maksimaalne) integraalkõver, s. t. süsteemil on parajasti üks lahend, mis rahuldab algtingimusi (2). Jääb üle vaid näidata, et süsteemi (1) maksimaalsed lahendid on määratud kogu vahemikus (a,b).

Viimase väite tõestuse anname paragrahvi lõpus, vahepeal aga vaatleme süsteemi (1) esitust vektorsümboolikas ja mõningaid sellega seotud küsimusi.

Toome sisse tähised süsteemi (1) kordajate maatriksi ja vabaliikmete vektori jaoks:

$$A(x) = \begin{Vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)) .$$

Korrutis $A(x)\mathbf{y}$ tähendab siis vektorfunktsiooni, mille saame maatriksi $A(x)$ rakendamisel vektorfunktsioonile $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Vektorfunktsiooni $A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ i-ndaks komponendiks on

$$a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \dots + a_{in}(x)y_n + g_i(x) \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

s. o. parajasti süsteemi (1) i-nda võrrandi parem pool. Järelikult on lineaarne diferentsiaalvõrrandite süsteem (1) vektorsümboolikas esitatav kujul

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x) , \qquad (1')$$

mis väliselt ühtib esimest järku lineaarse võrrandiga. Sisuline erinevus, võrreldes esimest järku võrrandiga, on selles, et $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{g}$ on nüüd vektorfunktsioonid, $A(x)$ aga maatriks (maatriksfunktsioon).

2. Maatriksfunktsioonidele, nagu vektorfunktsioonidelegi (vt. ptk. III, § 5.1), kanname üle lineaaralgebra tehted (s. t. maatriksite liitmise ja korrutamise omavahel, skalaariga korrutamise jne.) ja mõned analüüsi mõisted ja tehted. Näiteks me ütleme, et maatriksfunktsioon on pidev, kui kõik tema elemendid on pidevad funktsioonid. Analoogiliselt:

maatriksfunktsioon $A(x) = (a_{ij}(x))$ on diferentseeruv, kui kõik tema elemendid on diferentseeruvad; sealjuures defineerime $A(x)$ tuletise kui maatriksfunktsiooni $A'(x) = (a'_{ij}(x))$. Maatriksfunktsioonide jada $A_k(x) = (a^k_{ij}(x))$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ koondub ühtlaselt, kui vastavatest elementidest moodustatud jadad $a^k_{ij}(x)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ koonduvad ühtlaselt jne.

Kui $A(x)$ ja $B(x)$ on pidevalt diferentseeruvad maatriksfunktsioonid, $\mathbf{y}(x)$ aga pidevalt diferentseeruv vektorfunktsioon, siis

$$[A(x) + B(x)]' = A'(x) + B'(x),$$

$$[A(x)B(x)]' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x),$$

$$[A(x)\mathbf{y}(x)]' = A'(x)\mathbf{y}(x) + A(x)\mathbf{y}'(x).$$

Jättes esimese ja kolmanda seose tõestuse lugeja hooleks, tõestame teise. Olgu $A(x)$, $B(x)$ ja $C(x) = A(x)B(x)$ elementideks vastavalt $a_{ij}(x), b_{ij}(x)$ ja $c_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$. Maatriksite korrutamise reegli kohaselt

$$c_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)b_{kj}(x),$$

millest

$$c'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik}(x)b_{kj}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)b'_{kj}(x).$$

Viimase võrduse vasakul pool on $C'(x) = [A(x)B(x)]'$ element, kuna aga paremal pool on esimeseks liidetavaks parajasti $A'(x)B(x)$ element ja teiseks liidetavaks $A(x)B'(x)$ element, m.o.t.t.

Maatriksi $A = (a_{ij})(i,j = 1,2,\dots,n)$ normi $|A|$ defineerime kui elementide absoluutväärtuste summa:[1]

$$|A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Olgu A ja B maatriksid, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektor, λ aga reaalarv. Jätame lugeja tõestada, et

$$|A + B| \leq |A| + |B| ,$$

$$|AB| \leq |A|\,|B| ,$$

$$|A\mathbf{c}| \leq |A|\,|\mathbf{c}| ,$$

$$|\lambda A| = |\lambda|\,|A| .$$

Näitena tõestame vaid kolmanda võrratuse. Vektori

$$A\mathbf{c} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}c_j\right)$$

normiks on definitsiooni kohaselt (vt. ptk. III, § 5.1) komponentide absoluutväärtuste summa, s. t.

$$|A\mathbf{c}| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|c_j| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |c_k| =$$

$$= |A| \max_{1 \leq k \leq n} |c_k| \leq |A| \sum_{k=1}^{n} |c_k| = |A|\,|\mathbf{c}|, \quad \text{m.o.t.t.}$$

Me ütleme, et maatriksfunktsioonide rida $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$ on lõigul $[a,b]$ majoreeritav arvreaga $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k$, kui

$$\max_{a \leq x \leq b} |A_k(x)| \leq \eta_k \qquad (k = 0,1,2,\dots) .$$

[1] Juhul, kui maatriksi A elemendid on kompleksarvud, defineerime normi $|A|$ kui elementide moodulite summa.

Weierstrassi teoreem kandub üle ka maatriksfunktsioonidele (põhjendada!): kui maatriksfunktsioonide rida on lõigul $[a,b]$ majoreeritav koonduva arvreaga, siis koondub see ühtlaselt lõigul $[a,b]$. Analüüsi kursusest kandub üle ka teoreem rea liikmeti diferentseerimisest (põhjendada!): kui maatriksfunktsioonid $A_k(x)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ on pidevalt diferentseeruvad ning read $\sum_{k=o}^{\infty} A_k(x) = A(x)$ ja $\sum_{k=o}^{\infty} A_k'(x) = B(x)$ koonduvad ühtlaselt, siis $B(x) = A'(x)$.

Enamus siin maatriksfunktsioonide kohta öeldust leiab rakenduse alles järgnevates paragrahvides.

3. Paneme tähele, et iga $x \in (a,b)$ asub ühtlasi teatavas lõigus $[a_1,b_1] \subset (a,b)$. Seetõttu: kui mingi funktsioon on määratud igal lõigul $[a_1,b_1] \subset (a,b)$, siis on see funktsioon määratud kogu vahemikus (a,b) ja teoreemi 1 tõestuse lõpuleviimiseks piisab järgmise lemma kehtivuse näitamisest:

<u>Lemma</u>. Kui süsteemi (1') kordajate maatriks $A(x)$ ja vabaliikmete vektor $\mathbf{g}(x)$ on määratud ja pidevad lõigul $[a_1,b_1]$, siis on selle võrrandi iga lahend jätkatav kogu lõigule $[a_1,b_1]$.

T õ e s t u s . Olgu $(x_o,\mathbf{y}^o)$ suvaline punkt, selline, et $a_1 < x_o < b_1$. Vaatleme ristkülikut R :

$$|x - x_o| \leq \alpha, \ |\mathbf{y} - \mathbf{y}^o| \leq \beta,$$

kus $\alpha = \min\{x_o - a, b - x_o\}$; β väärtuse fikseerime hiljem. Lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi tõestusest teame (vt. ptk. III, § 5), et läbi punkti $(x_o,\mathbf{y}^o)$ kulgev integraalkõver on määratud lõigul $|x - x_0| \leq h$, kus

$$h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}, \qquad M = \max_{(x,\mathbf{y})\in R} |A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)|.$$

Hindame suurust $\frac{\beta}{M}$. Funktsioonid $|A(x)| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)|$ ja $|\mathbf{g}(x)| = \sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|$ kui pidevad funktsioonid lõigul $[a_1, b_1]$ on sellel lõigul tõkestatud:

$$|A(x)| \leq M_1, \quad |\mathbf{g}(x)| \leq M_2.$$

Kuna $A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x) = A(x)(\mathbf{y} - \mathbf{y}^0) + A(x)\mathbf{y}^0 + \mathbf{g}(x)$, siis $(x,\mathbf{y}) \in R$ korral

$$|A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)| \leq |A(x)||\mathbf{y} - \mathbf{y}^0| + |A(x)||\mathbf{y}^0| + |\mathbf{g}(x)| \leq$$

$$\leq M_1\beta + M_1|\mathbf{y}^0| + M_2,$$

s. t. $M \leq M_1\beta + M_1|\mathbf{y}^0| + M_2$ ja

$$\frac{\beta}{M} \geq \frac{\beta}{M_1\beta + M_1|\mathbf{y}^0| + M_2}.$$

Ristküliku R mõõtme β suurendamine toob endaga kaasa ka arvu M suurenemise. Kuid piirprotsessis $\beta \to \infty$ läheneb viimase võrratuse parem pool positiivsele suurusele $\frac{1}{M_1}$. Järelikult küllalt suure β korral $\frac{\beta}{M} \geq \frac{1}{2M_1}$; edaspidi loemegi, et β on selliselt fikseeritud. Meile on väga tähtis, et suurus $\delta = \frac{1}{2M_1}$ ei sõltu mingil viisil punkti $(x_0, \mathbf{y}^0)$ valikust - see punkt oli meie arutlustes suvaline.

Niisiis on iga $(x_0, \mathbf{y}^0)$ korral seda punkti läbiv lahend määratud lõigul $|x - x_0| \leq h$, kus

$$h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\} = \min\left\{x_0 - a, b - x_0, \frac{\beta}{M}\right\} \geq \min\left\{x_0 - a, b - x_0, \frac{1}{2M_1}\right\}.$$

Viimast tulemust saame tõlgendada nii: iga lahend on jätkatav (vasakule ja paremale) kas lõigu $[a_1, b_1]$ otspunktini või kui see ei vii välja lõigust $[a_1, b_1]$, vähemalt suuruse $\delta = \frac{1}{2M_1}$ võrra. Seda lauset korduvalt rakendades veendumegi, et iga lahend on jätkatav kogu lõigule $[a_1, b_1]$. Lemma on tõestatud.

§ 8. LINEAARNE HOMOGEENNE DIFERENTSIAAL-VÕRRANDITE SÜSTEEM.

1. Olgu lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$y_i' = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \ldots + a_{in}(x)y_n \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

kordajad $a_{ij}(x)$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ määratud ja pidevad vahemikus (a,b). Vektorsümboolikas on see süsteem esitatav kujul

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}, \tag{1}$$

kus $A(x)$ on kordajatest moodustatud maatriks.

Olgu vektorfunktsioonid

$$\mathbf{y}^i = (y_1^i, y_2^i, \ldots, y_n^i) \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

süsteemi (1) erilahendiks, s. t. $(\mathbf{y}^i)' = A(x)\mathbf{y}^i$. Siis on süsteemi (1) lahendiks ka vektorfunktsioon $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i$, kus $C_1, C_2, \ldots, C_n$ on suvalised konstandid. Tõepoolest,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i\Big)' = \sum_{i=1}^{n} C_i(\mathbf{y}^i)' = \sum_{i=1}^{n} C_i A(x)\mathbf{y}^i = A(x)\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i ,$$

m.o.t.t.

Kuna $\mathbf{y}$ avaldises on n suvalist konstanti, siis võib loota, et ta teatud tingimustel on süsteemi (1) üldlahendiks. Allpool näemegi, et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i$ on üldlahendiks, kui vaid erilahendid $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ on lineaarselt sõltumatud järgneva definitsiooni mõttes.

Vektorfunktsioone $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k$ nimetatakse lineaarselt sõltuvateks vahemikus (a,b), kui leiduvad sellised konstandid $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, mis ei ole korraga nullid, et kehtib samasus

$$\alpha_1 \mathbf{y}^1(x) + \alpha_2 \mathbf{y}^2(x) + \ldots + \alpha_k \mathbf{y}^k(x) \equiv 0 \quad (a<x<b) .$$

Kui viimane samasus kehtib vaid $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ korral, siis vektorfunktsioone $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks vahemikus (a,b) .

Erilahendite (2) lineaarse sõltuvuse või sõltumatuse kontrolliks defineerime nn. Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \ldots & y_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{vmatrix} ,$$

mille i-ndaks veeruvektoriks on $\mathbf{y}^i$.

Teoreem 1. Kui erilahendid (2) on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a,b), siis $W(x) \equiv 0$ $(a < x < b)$. Kui erilahendid (2) on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a,b), siis $W(x) \neq 0$ iga $x \in (a,b)$ korral.

T õ e s t u s . Oletame, et vektorfunktsioonid (2) on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a,b), s. t. leiduvad sellised konstandid $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n| \neq 0)$, et

$$\alpha_1 \mathbf{y}^1(x) + \alpha_2 \mathbf{y}^2(x) + \ldots + \alpha_n \mathbf{y}^n(x) \equiv 0 \quad (a < x < b) .$$

Kirjutame selle samasuse komponentide kaupa:

$$\alpha_1 y_i^1(x) + \alpha_2 y_i^2(x) + \ldots + \alpha_n y_i^n(x) \equiv 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n) .$$

Viimaseid tingimusi tõlgendame nii: lineaarsel homogeensel algebralisel võrrandisüsteemil on olemas mittetriviaalne lahend $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Järelikult on iga $x \in (a,b)$ korral süsteemi determinant võrdne nulliga. Kuid süsteemi determinandiks on parajasti $W(x)$. Niisiis $W(x) = 0$ iga $x \in (a,b)$ korral. Teoreemi esimene väide on tõestatud.

Olgu nüüd erilahendid (2) lineaarselt sõltumatud vahemikus (a,b); me peame näitama, et $W(x) \neq 0$ iga $x \in (a,b)$ korral. Oletame väitevastaselt, et teatava $x_0 \in (a,b)$ korral $W(x_0) = 0$. Moodustame homogeense võrrandisüsteemi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ suhtes:

$$\alpha_1 y_i^1(x_0) + \alpha_2 y_i^2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_i^n(x_0) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Kuna süsteemi determinandiks on $W(x_0)$ ja meie oletuse kohaselt $W(x_0) = 0$, siis on sellel süsteemil mittetriviaalne lahend $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$. Selle, et $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$ on süsteemi lahendiks, võime vektorsümboolikas kirjutada nii:

$$\bar{\alpha}_1 y^1(x_0) + \bar{\alpha}_2 y^2(x_0) + \ldots + \bar{\alpha}_n y^n(x_0) = 0 ; \qquad (3)$$

lahendi mittetriviaalsus tähendab, et

$$|\bar{\alpha}_1| + |\bar{\alpha}_2| + \ldots + |\bar{\alpha}_n| \neq 0 . \qquad (3')$$

Vektorfunktsioon

$$\bar{y} = \bar{\alpha}_1 y^1 + \bar{\alpha}_2 y^2 + \ldots + \bar{\alpha}_n y^n$$

on ka diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1) lahendiks. Tingimuse (3) tõttu $\bar{y}(x_0) = 0$. Kuid sama algtingimust rahuldab ka süsteemi (1) lahend $y \equiv 0$. Lahendi ühesuse tõttu ühtivad need kaks lahendit kogu vahemikus (a,b) :

$$\bar{\alpha}_1 y^1(x) + \bar{\alpha}_2 y^2(x) + \ldots + \bar{\alpha}_n y^n(x) \equiv 0 \quad (a < x < b) .$$

Koos tingimusega (3') tähendab viimane samasus, et erilahendid (2) on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a,b), mis on aga vastuolus meie eeldusega. Vastuolu tekkis oletusest, et $W(x_0) = 0$. Järelikult $W(x) \neq 0$ iga $x \in (a,b)$ korral. Teoreem on tõestatud.

Teoreemi esimese osa tõestuses me ei kasutanud kusagil asjaolu, et vektorfunktsioonid (2) on süsteemi (1) erilahenditeks, ja see väide kehtib mistahes vektorfunktsioonide korral. Teoreemi teine osa on seevastu õige ainult siis, kui vektorfunktsioonid (2) on süsteemi (1) erilahenditeks. Näiteks on $n = 2$ korral vektorfunktsioonid $y^1 = (x,0)$ ja $y^2 = (x^2,0)$ lineaarselt sõltumatud (kontrollida!), kuid

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 .$$

(Teoreemi 1 põhjal ei saa need vektorfunktsioonid olla lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandite süsteemi erilahenditeks.)

2. Kui n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1) n erilahendit $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ on lineaarselt sõltumatud, siis öeldakse, et nad moodustavad <u>erilahendite fundamentaalsüsteemi</u>, maatriksfunktsiooni

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{Vmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \ldots & y_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{Vmatrix}$$

aga nimetatakse <u>fundamentaalmaatriksiks</u>. Fundamentaalmaatriksi veeruvektoriteks on erilahendid $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ (kusjuures on oluline, et need erilahendid oleksid lineaarselt sõltumatud). Kuna $\det \mathbf{Y}(x) = W(x)$ ja teoreemi 1 põhjal $W(x) \neq 0$ kogu vahemikus (a,b), siis fundamentaalmaatriks on kogu vahemikus (a,b) regulaarne[1] ja eksisteerib pöördmaatriks $\mathbf{Y}^{-1}(x)$.

Kas süsteemil (1) on üldse olemas n sõltumatut erilahendit? Teiste sõnadega, kas fundamentaalmaatriks ja erilahendite fundamentaalsüsteem eksisteerivad? Sellele küsimusele vastamiseks valime suvaliseks konstantseks regulaarseks maatriksiks $C = (C_{ij})$ ja võtame vaatluse alla selliseid erilahendid (2), mis rahuldavad algtingimusi

---

[1] Meenutame, et maatriksit C nimetatakse regulaarseks, kui $\det C \neq 0$.

$$y_1^1(x_0) = C_{11}, y_2^1(x_0) = C_{12}, \ldots, y_n^1(x_0) = C_{1n} .$$

Siis $W(x_0) = \det C \neq 0$ ja teoreemi 1 põhjal ongi erilahendid (2) lineaarselt sõltumatud. Niisiis on süsteemil (1) isegi lõpmata palju fundamentaalmaatrikseid ja erilahendite fundamentaalsüsteeme: erinevatele regulaarsetele maatriksitele C vastavad erinevad fundamentaalmaatriksid (sest konstruktsiooni põhjal $\mathbf{Y}(x_0) = C$).

Teoreem 2. Moodustagu süsteemi (1) erilahendid $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{y}^n$ fundamentaalsüsteemi ja olgu $\mathbf{Y}$ neile vastavaks fundamentaalmaatriksiks. Süsteemi (1) üldlahend avaldub siis kujul

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i \tag{4}$$

ja

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{c}, \tag{4'}$$

kus $C_1, C_2, \ldots, C_n$ on suvalised konstandid, $\mathbf{c} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ aga suvaline konstantne vektor.

T õ e s t u s . Paragrahvi algul me juba veendusime, et vektorfunktsioon (4) on süsteemi (1) lahendiks. On vaja näidata, et ta sisaldab kõiki süsteemi (1) lahendeid.

Olgu $\tilde{\mathbf{y}}(x)$ süsteemi (1) erilahendiks ja $(x_0, \mathbf{y}^0)$ mingi punkt, mida see lahend läbib. Kui meil õnnestub määrata konstantide C_i väärtused $\hat{C}_i$ nii, et ka $\hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i \mathbf{y}^i$ kulgeks läbi sama punkti $(x_0, \mathbf{y}^0)$, siis lahendi ühesuse tõttu $\tilde{\mathbf{y}}(x) \equiv \hat{\mathbf{y}}(x)$, s. t. vektorfunktsioon (4) sisaldab erilahendit $\widetilde{\mathbf{y}}(x)$. Läbi punkti $(x_o, \mathbf{y}^o)$ kulgemine tähendab, et

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i \mathbf{y}^i(x_o) = \mathbf{y}^o .$$

Kirjutades selle tingimuse välja komponentide kaupa, saame $C_1, C_2, \ldots, C_n$ määramiseks võrrandisüsteemi

$$C_1 y_j^1(x_o) + C_2 y_j^2(x_o) + \ldots + C_n y_j^n(x_o) = y_j^o \quad (j=1,2,\ldots,n) ,$$

mille determinandiks on $W(x_o)$. See süsteem on üheselt lahenduv, sest teoreemi eelduste kohaselt $W(x_o) \neq 0$. Niisiis on konstantide sobivad väärtused $\hat{C}_i$ üheselt määratavad ja lahend (4) sisaldab vaadeldavat erilahendit $\widetilde{\mathbf{y}}(x)$, viimase suvalisuse tõttu aga ka kõiki süsteemi (1) erilahendeid.

Me oleme tõestanud, et vektorfunktsioon (4) on süsteemi (1) üldlahendiks. Komponentide kaupa välja kirjutatult on üldlahendiks:

$$y_i = C_1 y_i^1 + C_2 y_i^2 + \ldots + C_n y_i^n \qquad (i = 1,2,\ldots,n) .$$

Analoogiliselt on esitatav (4'), kui me kirjutame ta komponentide kaupa. Seega on (4') lihtsalt (4) teiseks kirjutusviisiks ja esitab samuti üldlahendit. Teoreem on tõestatud.

Lihtne on näha, et süsteemi (1) fundamentaalmaatriks $\mathbf{Y}(x)$ rahuldab tingimust $\mathbf{Y}'(x) = A(x)\mathbf{Y}(x)$. (Kirjutage vasaku ja parema poole i-s veerg ja veenduge, et nende võrdsuse tingimus tähendab, et $\mathbf{Y}(x)$ i-s veerg $\mathbf{y}^i$ on süsteemi (1) erilahendiks.) Seetõttu võime fundamentaalmaatrikseid defineerida ka kui maatriksdiferentsiaalvõrrandi

$$\mathbf{Y}' = A(x)\mathbf{Y} \qquad (5)$$

regulaarseid lahendeid (piisab nõuda, et $\det \mathbf{Y}(x) \neq 0$ kasvõi ühes punktis $x_0 \in (a,b)$, - siis teoreemi 1 põhjal $\det \mathbf{Y}(x) \neq 0$ kogu vahemikus (a,b)).

Teoreem 3. Kui $\mathbf{Y}(x)$ on süsteemi (1) fundamentaalmaatriksiks, siis on mistahes konstantse regulaarse maatriksi $\mathbf{C}^*$ korral süsteemi (1) fundamentaalmaatriksiks ka $\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}^*$.

T õ e s t u s . Samasust $\mathbf{Y}'(x) = A(x)\mathbf{Y}(x)$ korrutame paremalt maatriksiga $\mathbf{C}^*$:

$$\mathbf{Y}'(x)\,\mathbf{C}^* = A(x)\,\mathbf{Y}(x)\,\mathbf{C}^*.$$

Kirjutades saadud samasuse ümber kujul $(\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}^*)' = A(x)(\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}^*)$, näeme, et $\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}^*$ on maatriksdiferentsiaalvõrrandi (5) lahendiks; $\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}^*$ on regulaarne, sest $\mathbf{Y}(x)$ ja $\mathbf{C}^*$ on teoreemi eelduse kohaselt regulaarsed ja regulaarsete maatriksite korrutis on regulaarne. Teoreem on sellega tõestatud.

Märgime, et $\mathbf{C}^*\mathbf{Y}(x)$ üldiselt ei ole fundamentaalmaatriksiks.

Juhime lõpuks tähelepanu faktile, et kuigi süsteemil (1) on lõpmata palju fundamentaalmaatrikseid, on iga fundamentaalmaatriksi abil võimalik taastada süsteemi, mille fundamentaalmaatriksiks ta on. Tõepoolest, korrutades samasuse $\mathbf{Y}'(x) = A(x)\mathbf{Y}(x)$ mõlemat poolt paremalt maatriksiga $\mathbf{Y}^{-1}(x)$, saame

$$A(x) \equiv \mathbf{Y}'(x)\mathbf{Y}^{-1}(x).$$

Seega määrab fundamentaalmaatriks üheselt süsteemi (1) kordajate maatriksi $A(x)$, koos sellega aga ka süsteemi (1), m.o.t.t.

§ 9. LINEAARNE HOMOGEENNE KONSTANTSETE KORDAJATEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEM (MÕNED ARVUTUSSKEEMID).

1. Vaatleme lineaarset homogeenset diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1,2,\ldots,n), \quad (1)$$

mille kordajad a_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ on konstantsed. Korrates selle süsteemi jaoks ptk. III, § 2.2 analoogilised arutlused (teha seda!), veendume, et süsteem (1) on üldiselt taandatav ühele konstantsete kordajatega lineaarsele homogeensele diferentsiaalvõrrandile

$$y_1^{(n)} + q_1y_1^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}\, y_1' + q_ny_1 = 0 , \quad (2)$$

kusjuures $y_2,\ldots,y_n$ avalduvad y_1 ja selle tuletiste kaudu lineaarselt:

$$y_i = \beta_{i0}y_1 + \beta_{i1}y_1' + \ldots + \beta_{i,n-1}y_1^{(n-1)} \quad (i= 2,\ldots,n), \quad (3)$$

kus β_{ij} on mingid konstandid. Võrrandi (2) lahendid avalduvad kujul

$$y_1 = e^{\lambda_j x}$$

või üldisemalt, kui võrrandi (2) karakteristlik väärtus λ_j on m-kordne,

$$y_1 = p_{11}e^{\lambda_j x} + p_{12}xe^{\lambda_j x} + \ldots + p_{1m}x^{m-1}e^{\lambda_j x} .$$

Kuna viimaste avaldiste tuletised on sama tüüpi avaldised (muutuvad ainult kordajad), siis (3) põhjal avalduvad analoogiliselt ka $y_2,\ldots,y_n$:

$$y_i = p_i e^{\lambda_j x} \quad (i = 1,2,\ldots,n) , \qquad (4)$$

või

$$y_i = p_{i1}e^{\lambda_j x} + p_{i2}xe^{\lambda_j x} + \ldots + p_{im}x^{m-1}e^{\lambda_j x} \quad (i=1,2,\ldots,n). \qquad (4')$$

Kui me leiame võrrandi (2) üldlahendi, siis on seoste (3) abil lihtne moodustada süsteemi (1) üldlahendit.

Näide 1. $y' = z,\ z' = -y$. Diferentseerime esimest võrrandit ja asendame z' teise võrrandi põhjal: $y'' + y = 0$. Siit

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ja esimese võrrandi põhjal

$$z = y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Koos esitavad y ja z avaldised süsteemi üldlahendi.

2. Nüüd, kui me teame, millisel kujul otsida võrrandisüsteemi (1) lahendeid, anname arvutuseeskirja, milles ei kasutata ühele võrrandile taandamist. Uurime, millist tingimust peavad rahuldama λ ja kordajad p_i, et (vrd. (4))

$$y_i = p_i e^{\lambda x} \quad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (5)$$

oleks süsteemi (1) lahendiks. Asendame need avaldised süsteemi (1):

$$\lambda p_1 e^{\lambda x} = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n)\, e^{\lambda x} ,$$

$$\lambda p_2 e^{\lambda x} = (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{2n}p_n)\, e^{\lambda x} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda p_n e^{\lambda x} = (a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n)\, e^{\lambda x} .$$

Korrutame samasused $e^{-\lambda x}$-ga ja toome kõik liikmed ühele poole:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0 , \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)p_n = 0 . \end{cases} \tag{6}$$

Me saime $p_1, p_2, \ldots p_n$ määramiseks lineaarse homogeense algebralise võrrandisüsteemi. Kuna meid huvitavad ainult süsteemi mittetriviaalsed lahendid, peame nõudma, et süsteemi determinant oleks võrdne nulliga:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{Vmatrix} = 0 . \tag{7}$$

Viimase tingimuse vasakul pool on n-astme polünoom λ suhtes. Järelikult on võrrandil (7) n (reaalset või kompleksset) lahendit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, millede hulgas võib olla ka omavahel võrdseid.

Võrrandit (7) nimetatakse süsteemi (1) **karakteristlikuks võrrandiks**, selle lahendeid $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ aga süsteemi (1) __karakteristlikeks väärtusteks__. Võttes süsteemis (6) $\lambda = \lambda_j$, saame leida selle süsteemi mittetriviaalse lahendi $p_1^j, p_2^j, \ldots, p_n^j$ ja (5) annab süsteemi (1) erilahendi $\mathbf{y}^j$:

$$y_1^j = p_1^j e^{\lambda_j x},\ y_2^j = p_2^j e^{\lambda_j x},\ \ldots,\ y_n^j = p_n^j e^{\lambda_j x}.$$

Oletame, et karakteristlikud väärtused $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on kõik ühekordsed, s. t. nende hulgas ei ole omavahel võrdseid. Sellisel juhul saame ülalkirjeldatud viisil moodustada n erinevat erilahendit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1 &= (p_1^1 e^{\lambda_1 x},\ p_2^1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, p_n^1 e^{\lambda_1 x}), \\ \mathbf{y}^2 &= (p_1^2 e^{\lambda_2 x},\ p_2^2 e^{\lambda_2 x}, \ldots, p_n^2 e^{\lambda_2 x}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{y}^n &= (p_1^n e^{\lambda_n x},\ p_2^n e^{\lambda_n x}, \ldots, p_n^n e^{\lambda_n x}). \end{aligned} \tag{8}$$

Näitame, et nad moodustavad erilahendite fundamentaalsüsteemi süsteemi (1) jaoks. On vaja kontrollida vaid, et need erilahendid on lineaarselt sõltumatud. Selleks uurime, kas samasus

$$\alpha_1 \mathbf{y}^1 + \alpha_2 \mathbf{y}^2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{y}^n \equiv 0$$

saab kehtida juhul, kui mõni kordajatest $\alpha_j \neq 0$. Kirjutame selle samasuse i-ndate komponentide jaoks:

$$\alpha_1 p_i^1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 p_i^2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_n p_i^n e^{\lambda_n x} \equiv 0.$$

Kuid funktsioonid $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ on lineaarselt sõltumatud (vt. ptk. II, § 3 art. 2), seetõttu on kõik kordajad viimases samasuses võrdsed nulliga:

$$\alpha_j p_i^j = 0 \quad (i,j = 1,2,\dots,n) .$$

Iga j korral on vähemalt üks arvudest p_i^j $(i = 1,2,\dots,n)$ nullist erinev, sest vastasel korral oleks meil tegemist süsteemi (6) triviaalse lahendiga. Järelikult $\alpha_j = 0$ iga $j = 1,2,\dots,n$ korral ja erilahendid $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2,\dots,\mathbf{y}^n$ on lineaarselt sõltumatud, m.o.t.t.

<u>Näide 2.</u> $y_1' = y_1 + 4y_2, y_2' = y_1 + y_2$. Karakteristlikuks võrrandiks on

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ehk} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 ,$$

karakteristlikeks väärtusteks $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 3$. Neile vastavad erilahendid kujul $\mathbf{y}^1 = (p_1^1 e^{-x}, p_2^1 e^{-x})$ ja $\mathbf{y}^2 = (p_1^2 e^{3x}, p_2^2 e^{3x})$. Süsteem (6) kordajate leidmiseks on antud juhul järgmine :

$$\begin{cases} (1-\lambda)\, p_1 + 4p_2 = 0 , \\ \quad p_1 + (1-\lambda) p_2 = 0 . \end{cases}$$

Paneme tähele, et $\lambda = \lambda_1$ ja $\lambda = \lambda_2$ korral on süsteemi võrrandid teineteisest sõltuvad, sest süsteemi determinant on siis võrdne nulliga ja me võime ühe võrranditest, näiteks teise, kõrvale heita. Niisiis peavad p_1 ja p_2 rahuldama $\lambda = \lambda_1 = -1$ korral ainsat tingimust $2p_1^1 + 4p_2^1 = 0$, millest, võttes $p_1^1 = 1$, leiame, et $p_2^1 = -1/2$. Esimeseks erilahendiks on seega

$$\mathbf{y}^1 = (e^{-x}, -\frac{1}{2} e^{-x}) .$$

Analoogiliselt leiame, et karakteristlikule väärtusele $\lambda_2 = 3$ vastab erilahend

$$\mathbf{y}^2 = (e^{3x}, \frac{1}{2} e^{3x}) .$$

Süsteemi üldlahendiks on $\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2$ ehk, komponentide kaupa välja kirjutatult

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} ,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} .$$

3. Kui kompleksne vektorfunktsioon $\mathbf{y} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ (i - imaginaarühik) on lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandite süsteemi $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ lahendiks, siis on lahenditeks ka reaalosa $\mathbf{u}$ ja imaginaarosa $\mathbf{v}$. Tõepoolest, kirjutades samasuse $(\mathbf{u} + i\mathbf{v})' = A(x)(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$ ümber kujul $\mathbf{u}' + i\mathbf{v}' = A(x)\mathbf{u} + iA(x)\mathbf{v}$, saame kompleksarvude võrdsuse definitsiooni kohaselt samasused $\mathbf{u}' = A(x)\mathbf{u}$, $\mathbf{v}' = A(x)\mathbf{v}$, m.o.t.t.

Eelmises punktis tehtud arutlused ei sõltunud sellest, kas karakteristlikud väärtused on reaalsed või komplekssed. Vaatleme nüüd lähemalt komplekssete karakteristlike väärtuste juhtu. Olgu näiteks λ_1 kompleksne:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0) .$$

Siis $\lambda = \lambda_1$ korral on ka süsteemi (6) lahend kompleksne:

$$p_k^1 = \gamma_k + i\delta_k \qquad (k = 1,\dots,n) ; \qquad (9)$$

λ_1-le vastavaks süsteemi (1) erilahendiks (vt. (8)) on

$$\mathbf{y}^1 = \left((\gamma_1 + i\delta_1)e^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots, (\gamma_n + i\delta_n)e^{(\alpha+i\beta)x}\right)$$

Eraldame komponentides reaal- ja imaginaarosa:

$$(\gamma_k + i\delta_k)e^{(\alpha+i\beta)x} = (\gamma_k + i\delta_k)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}(\gamma_k\cos\beta x - \delta_k\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\delta_k\cos\beta x + \gamma_k\sin\beta x).$$

Koos sellega saame ka $\mathbf{y}^1$ kirjutada kujul $\mathbf{y}^1 = \mathbf{u}^1 + i\,\mathbf{v}^1$, kus

$$\mathbf{u}^1 = \left((\gamma_1\cos\beta x - \delta_1\sin\beta x)e^{\alpha x}, \ldots, (\gamma_n\cos\beta x - \delta_n\sin\beta x)e^{\alpha x}\right),$$

$$\mathbf{v}^1 = \left((\delta_1\cos\beta x + \gamma_1\sin\beta x)e^{\alpha x}, \ldots, (\delta_n\cos\beta x + \gamma_n\sin\beta x)e^{\alpha x}\right).$$

Niisiis vastavad komplekssele karakteristlikule väärtusele $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kaks reaalset erilahendit $\mathbf{u}^1$ ja $\mathbf{v}^1$.

Reaalsete kordajatega algebralise võrrandi (muuhulgas ka karakteristliku võrrandi (7)) kompleksed lahendid esinevad teatavasti paarikaupa kaaskompleksidena. Nii on koos λ_1-ga karakteristlike väärtuste hulgas ka tema kaaskompleks $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$. Kui võtame süsteemis (6) $\lambda = \bar{\lambda}_1$, asendame otsitavad p_i lahendiga (9) ja leiame seejärel süsteemi võrranditest kaaskompleksid, näeme, et karakteristlikule väärtusele $\bar{\lambda}_1$ vastab süsteemi (6) lahend, mis on kaaskompleks (9)-st:

$$\bar{p}_k^1 = \gamma_k - i\delta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Järelikult vastab $\bar{\lambda}_1$-le süsteemi (1) kompleksne erilahend

$$\left((\gamma_1 - i\delta_1)e^{(\alpha-i\beta)x}, \ldots, (\gamma_n - i\delta_n)e^{(\alpha-i\beta)x}\right).$$

Jätame lugeja kontrollida, et selle lahendi reaal- ja imaginaarosa annavad meile taas eespool juba leitud erilahendid $\mathbf{u}^1$ ja $-\mathbf{v}^1$.

Seega ei ole komplekse karakteristliku väärtuse korral vaja leida mõlemale kaaskompleksile vastavaid (komplekseid) erilahendeid, vaid piisab leida nendest ainult üks ja eraldada sellest seejärel reaal- ja imaginaarosa.

Näide 3. $y_1' = -7y_1 + y_2,\ y_2' = -2y_1 - 5y_2$. Analoogiliselt eelnevale näitele leiame, et $\lambda_1 = -6 + i$, $\lambda_2 = -6-i$ ja et λ_1-le vastavaks kompleksseks erilahendiks on

$$\mathbf{y} = (e^{(-6+i)x},\ (1+i)e^{(-6+i)x}) \quad \text{ehk} \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}^1 + i\mathbf{y}^2,$$

kus

$$\mathbf{y}^1 = (e^{-6x}\cos x,\ e^{-6x}(\cos x - \sin x)),$$

$$\mathbf{y}^2 = (e^{-6x}\sin x,\ e^{-6x}(\cos x + \sin x)).$$

Süsteemi üldlahendiks on $\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2$ ehk

$$y_1 = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x),$$

$$y_2 = e^{-6x}\left[C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)\right].$$

4. Juhul, kui süsteemi (1) karakteristlike väärtuste $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hulgas esineb kordseid, ei ole eelmises kahes punktis kirjeldatud viisil võimalik leida n sõltumatut erilahendit.

Olgu süsteemi (1) karakteristlik väärtus λ_j m-kordne. On vaja leida m lineaarselt sõltumatut erilahendit, mis vastaksid sellele karakteristlikule väärtusele λ_j. Neid on hea leida järgmiselt: me asetame avaldised (4') süsteemi (1) ja määrame seejärel kordajad p_{ij} nii, et süsteem oleks rahuldatud. Märgime tõestuseta, et selliselt jäävad määramatuteks parajasti m kordajat (nad võivad omandada suvalisi väärtusi), ülejäänud kordajad aga avalduvad nende kaudu. Andes määramatutele kordajatele arvulisi väärtusi, saamegi m sõltumatut erilahendit. Kuidas sooritada praktilisi arvutusi, see selgub järgneva näite varal.

Näide 4. $y_1' = -y_1 + y_2, y_2' = -y_2 + 4y_3, y_3' = y_1 - 4y_3$.

Vektorsümboolikas on see süsteem kirjutatav kujul $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, kus $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$,

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{Vmatrix}.$$

Jäägu lugeja arvutada, et karakteristlikeks väärtusteks on $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ ja et ühekordsele karakteristlikule väärtusele $\lambda_1 = 0$ vastab (konstantne) erilahend

$$\mathbf{y}^1 = (4,4,1).$$

Kahekordsele karakteristlikule väärtusele $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ vastavaid lahendeid otsime kujul (vrd. (4')) $\mathbf{y} = \mathbf{p}e^{-3x} + \mathbf{q}xe^{-3x}$, kus $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Asendame süsteemi ja teisendame:

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{p}e^{-3x} + \mathbf{q}xe^{-3x}) = A(\mathbf{p}e^{-3x} + \mathbf{q}xe^{-3x}),$$

$$-3\mathbf{p}e^{-3x} + \mathbf{q}e^{-3x} - 3\mathbf{q}xe^{-3x} = e^{-3x}A\mathbf{p} + xe^{-3x}A\mathbf{q},$$

$$e^{-3x}\left[(A + 3E)\mathbf{p} - \mathbf{q} + x(A + 3E)\mathbf{q}\right] = 0;$$

(E on ühikmaatriks). Viimane tingimus on samasus x suhtes parajasti siis, kui

$$(A + 3E)\mathbf{q} = 0\ , \quad (A + 3E)\mathbf{p} = \mathbf{q}\ .$$

Seega $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ peab rahuldama võrrandisüsteemi

$$2q_1 + q_2 = 0,\ 2q_2 + 4q_3 = 0,\ q_1 - q_3 = 0, \qquad (10)$$

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ aga süsteemi

$$2p_1 + p_2 = q_1,\ 2p_2 + 4p_3 = q_2,\ p_1 - p_3 = q_3\ . \qquad (11)$$

Süsteemis (10) on teine võrrand sõltuv esimesest ja kolmandast ja me leiame, et

$$q_3 = q_1, q_2 = -2q_1\ .$$

Asendades q_3 ja q_2 leitud väärtused süsteemi (11), saab esimene võrrand sõltuvaks teisest ja kolmandast ja me heidame ta kõrvale; ülejäänud kahest võrrandist leiame, et

$$p_1 = p_3 + q_1,\ p_2 = -2p_3 - q_1\ .$$

Nüüd on meil kõik kordajad avaldatud kahe määramatu kordaja p_3 ja q_1 kaudu.

Võttes $p_3 = 1$, $q_1 = 0$, leiame $p_1 = 1$, $p_2 = -2$, $q_2 = q_3 = 0$ ja neile vastava erilahendi

$$\mathbf{y}^2 = (e^{-3x}, -2e^{-3x}, e^{-3x})\ .$$

Võttes $p_3 = 0$, $q_1 = 1$, leiame $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $q_2 = -2$, $q_3 = 1$ ja

$$\mathbf{y}^3 = (e^{-3x} + xe^{-3x}, -e^{-3x} - 2xe^{-3x}, xe^{-3x})\ .$$

Süsteemi üldlahendiks on $\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 + C_3\mathbf{y}^3$ ehk

$$y_1 = 4C_1 + C_2e^{-3x} + C_3(1 + x)e^{-3x}\ ,$$

$$y_2 = 4C_1 - 2C_2e^{-3x} - C_3(1 + 2x)e^{-3x},$$

$$y_3 = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x} .$$

Juhime tähelepanu asjaolule, et otsides süsteemi (1) m-kordsele karakteristlikule väärtusele λ_j vastavaid lahendeid kujul (4'), võib juhtuda, et kõik pealiikmete kordajad võrduvad nulliga: $p_{im} = 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ ja me saame erilahendid, milles x aste on madalam kui $m - 1$. (Selline olukord saab esineda, kui süsteem (1) ei ole taandatav ühele kõrgemat järku võrrandile.) Võib koguni juhtuda, et nullist erinevateks osutuvad ainult kordajad p_{i1} $(i = 1,2,\dots,n)$, s. t. süsteemi (1) erilahendid avalduvad kujul (8) sellest hoolimata, et karakteristlik väärtus λ_j on kordne. Näiteks süsteemil $y_i' = 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ on n-kordne karakteristlik väärtus $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, kuid erilahendite fundamentaalsüsteemiks on $\mathbf{y}^1 = (1,0,\dots,0)$, $\mathbf{y}^2 = (0,1,\dots,0),\dots,$ $\mathbf{y}^n = (0,0,\dots,1)$.

Juhul, kui kordne karakteristlik väärtus on kompleksne, toimime samuti kui ühekordse karakteristliku väärtuse puhul: leiame ühele kaaskompleksidest vastavad (komplekssed) erilahendid ja eraldame nendest seejärel reaal- ja imaginaarosad.

§ 10. LINEAARSE HOMOGEENSE KONSTANTSETE KORDAJATEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMI FUNDAMENTAALMAATRIKS JA ERILAHENDITE FUNDAMENTAALSÜSTEEM.

1. Välja arvatud ühekordsete karakteristlike väärtuste juhtum, jäi eelmises paragrahvis rangelt põhjendamata, milline on lineaarse homogeense konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{1}$$

erilahendite fundamentaalsüsteem. Selle lünga kõrvaldame käesolevas paragrahvis.

Enne järgnevate ridade juurde asumist soovitame lugejal meenutada fundamentaalmaatriksi kaht definitsiooni ja veel kord hoolsalt läbi lugeda ptk. III, § 7.2.

Olgu A konstantne n-järku maatriks, A^k - tema k-s aste, $E = A^0$ -ühikmaatriks. Vaatleme rida

$$E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!}\,; \tag{2}$$

see on maatriksfunktsioonide rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k(x)$, milles $B_k(x) = \frac{x^k A^k}{k!}$. Maatriksi normi omaduste põhjal $|A^k| \leqslant |A|^k$ ja

$$\left|\frac{x^k A^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^k |A^k|}{k!} \leqslant \frac{|x|^k |A|^k}{k!} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

Seega on rida (2) igal lõigul $|x| \leqslant M$ majoreeritav koonduva arvreaga

$$|E| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k |A|^k}{k!} = |E| - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k |A|^k}{k!} = |E| - 1 + e^{M|A|}.$$

Siit järeldub teatavasti, et rida (2) koondub ühtlaselt lõigul $|x| \leq M$. Rea (2) summat nimetatakse eksponentmaatriksiks ja tähistatakse e^{xA}:

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} ; \qquad (2')$$

nimetus ja tähis tulenevad sellest, et $n = 1$ korral (siis A on reaalarv) esitab rida (2') eksponentfunktsiooni e^{Ax} astmerida.

Kuna rea (2') liikmed on pidevad ja rida ise koondub ühtlaselt igal lõigul $|x| \leq M$, siis on maatriksfunktsioon e^{xA} pidev sellel lõigul $|x| \leq M$, M suvalisuse tõttu aga ka kogu reaalteljel $-\infty < x < \infty$.

Rea (2') liikmed on pidevalt diferentseeruvad; rea liikmeti diferentseerimisel saame rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1} A^k}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell A^{\ell+1}}{\ell!} ,$$

mis on samuti igal lõigul $|x| \leq M$ majoreeritav koonduva arvreaga (nimelt reaga $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{M^\ell |A|^{\ell+1}}{\ell!} = |A| e^{M|A|}$), ja koondub seetõttu ühtlaselt. Järelikult esitab see rida e^{xA} tuletist:

$$(e^{xA})' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell A^{\ell+1}}{\ell!} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell A^\ell}{\ell!} = Ae^{xA} .$$

Nagu näha, rahuldab e^{xA} maatriks-diferentsiaalvõrrandit

$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$; maatriksfunktsioon e^{xA} on selle võrrandi regulaarne lahend, sest $x = 0$ korral $e^{xA} = E$ ja $\det e^{xA} = \det E \neq 0$. Sellega oleme tõestanud järgmise tulemuse[1]:

Teoreem 1. Lineaarse homogeense konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1) fundamentaalmaatriks on $\mathbf{Y}(x) = e^{xA}$.

Teoreemi 2 ptk. III, § 8 põhjal on süsteemi (1) üldlahendiks $\mathbf{y} = e^{xA}\mathbf{C}$, kus $\mathbf{C}$ on suvaline konstantne vektor. Muuhulgas, läbi punkti $(0, \mathbf{y}^0)$ kulgevaks erilahendiks on $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}^0$. Tõepoolest, $\mathbf{y}(0) = e^{0A} \cdot \mathbf{y}^0 = E\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}^0$, m.o.t.t.

Teoreemi 3 ptk. III, § 8 põhjal on iga konstantse regulaarse maatriksi C korral süsteemi (1) fundamentaalmaatriks ka maatriksfunktsioon $e^{xA}C$. Fundamentaalmaatriksi veeruvektorid on teatavasti erilahenditeks, mis moodustavad fundamentaalsüsteemi. Seega on süsteemi (1) erilahendite fundamentaalsüsteemi leidmiseks vaja välja kirjutada maatriksfunktsiooni e^{xA} või $e^{xA}C$ veeruvektorid (regulaarse maatriksi C me valime järgnevas nii, et see väljakirjutamine oleks võimalikult lihtne).

Meil läheb edaspidi vaja järgmist abitulemust:

Lemma 1. Kui maatriksid B ja C kommuteeruvad (s. t. kui $BC = CB$) , siis $e^{B+C} = e^B \cdot e^C$.

T õ e s t u s . Eksponentmaatriksi definitsiooni kohaselt

---

[1] Olgu märgitud, et juhul, kui süsteemi kordajate maatriks $A(x)$ ei ole konstantne, ei kehti üldiselt analoogiline tulemus.

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}, \quad e^C = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C^j}{j!},$$

millest

$$e^B \cdot e^C = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{B^i C^j}{i!j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{B^i C^j}{i!j!} .$$

Teiselt poolt, kommuteeruvate maatriksite korral kehtib Newtoni binoomvalem

$$(B + C)^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} B^i C^{k-i} = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} B^i C^j ,$$

mistõttu

$$e^{B+C} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B+C)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} B^i C^j .$$

Võrreldes seda $e^B \cdot e^C$ eespool leitud avaldisega, saamegi meid huvitava seose $e^{B+C} = e^B \cdot e^C$.

2. Meenutame mõningaid mõisteid ja tulemusi algebrast.

Maatriksi A omaväärtusteks nimetatakse reaal- või kompleksarve $\lambda = \lambda_j$, mille korral võrrandisüsteemil $A\mathbf{C} = \lambda \mathbf{C}$ on olemas mittetriviaalne lahend $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Maatriksil A on parajasti n omaväärtust $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (nende hulgas võib olla ka võrdseid; naturaalarv n on maatriksi A järk) ja nad on algebralise võrrandi

$$\det (A - \lambda E) = 0$$

lahenditeks. Lugeja paneb tähele, et viimane võrrand ei ole midagi muud kui süsteemi (1) karakteristlik võrrand (vrd. (7 § 9)). Niisiis on maatriksi A omaväärtused parajasti süsteemi (1) karakteristlikeks väärtusteks.

Algebra kursuse üks tähtsamaid teoreeme väidab, et iga maatriks A on esitatav kujul $A = PJP^{-1}$, kus P on mingi regulaarne maatriks, J aga järgmise kujuga maatriks (maatriksi A Jordani normaalkuju):

$$J = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{Vmatrix};$$

siin on $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ maatriksi A omaväärtused, $\delta_i = 0$ või 1. Täpsemalt, J on esitatav kastdiagonaalmaatriksina

$$J = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_s \end{Vmatrix},$$

mille iga kastikese

$$J_i = \begin{Vmatrix} \lambda_{j_i} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{j_i} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{j_i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{j_i} \end{Vmatrix} \quad (i=1,2,\dots,s)$$

peadiagonaalil on üks ja sama (kordne, kui J_i järk > 1) omaväärtus λ_{j_i}, kõrvaldiagonaal aga koosneb ühtedest. Maatriksi A iga omaväärtus asub vähemalt ühe kastikese peadiagonaalil, võib aga asuda ka mitme kastikese peadiagonaalidel. Kastikene J_i võib olla ka esimest järku: $J_i = \lambda_{j_i}$. Näiteks, kui kõik maatriksi A omaväärtused on ühekordsed, siis on kõik kastikesed esimest järku, s. t. J on diagonaalmaatriks. (Kuid kastikesed võivad olla esimest järku ka kordsete omaväärtuste korral - sellisel juhul vastab kordsele omaväärtusele mitu kastikest.)

Võrreldes J esimese kirjutusviisiga, on nüüd konkretiseeritud, millised arvudest δ_i $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ on võrdsed nulliga, millised ühega.

3. Kuna $(PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1}$ (näidata seda, näiteks induktsiooni abil!), siis

$$e^{xA} = e^{xPJP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(PJP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k\, J^k}{k!} P^{-1} =$$

$$= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^kJ^k}{k!}\right)P^{-1} = Pe^{xJ}P^{-1}$$

ning koos maatriksiga e^{xA} on süsteemi (1) fundamentaalmaatriksiks ka $e^{xA}P = Pe^{xJ}$. Meie lõppeesmärgiks on välja kirjutada süsteemi (1) erilahendite fundamentaalsüsteem - maatriksfunktsiooni

$$Pe^{xJ}$$

veeruvektorid. Selleks peame eelnevalt uurima maatriksfunktsiooni e^{xJ}.

Ilmselt

$$J^k = \left\| \begin{matrix} J_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_s^k \end{matrix} \right\| ,$$

mistõttu

$$e^{xJ} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{x^k J^k}{k!} = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{k=o}^{\infty} \frac{x^k J_1^k}{k!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=o}^{\infty} \frac{x^k J_2^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{k=o}^{\infty} \frac{x^k J_s^k}{k!} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{xJ_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{xJ_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{xJ_s} \end{matrix} \right\| .$$

Olgu maatriksi J_i järk r_i . Esitame J_i summana

$$J_i = \lambda_{j_i} E_i + E_i^{[1]} .$$

Siin on E_i r_i-järku ühikmaatriks, $E_i^{[k]}$ aga tähistab maatriksit, mille saame ühikmaatriksist E_i , nihutades peadiagonaalil olevad ühed k koha võrra paremale (ja kirjutades mujale nullid), nii et muuhulgas

$$E_i^{[1]} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad E_i^{[k]} = 0 \quad k \geqslant r_i \text{ korral.}$$

Kuna maatriksid $\lambda_{j_i} xE_i$ ja $xE_i^{[1]}$ kommuteeruvad (ühikmaatriks kommuteerub iga maatriksiga), siis lemma 1 põhjal

$$e^{xJ_i} = e^{\lambda_{j_i} xE_i + xE_i^{[1]}} = e^{\lambda_{j_i} xE_i} \cdot e^{xE_i^{[1]}}.$$

Kuid $e^{\lambda_{j_i} xE_i} = e^{\lambda_{j_i} x} E_i$ (tõestada!) ja me saame

$$e^{xJ_i} = e^{\lambda_{j_i} x} \cdot e^{xE_i^{[1]}}.$$

Vahetu kontrolli abil veendume, et $(E_i^{[1]})^k = E_i^{[k]}$ $(k=1,2,\dots)$.

Et aga $k \geqslant r_i$ korral $E_i^{[k]} = 0$, siis on $e^{xE_i^{[1]}}$ reaksarenduses vaid lõplik arv liikmeid ning

$$e^{xE_i^{[1]}} = \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{x^k E_i^{[k]}}{k!} = \begin{Vmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \dots & \frac{x^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \frac{x^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Niisiis

$$e^{xJ_i}=e^{\lambda_{j_i}x}\begin{Vmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \ldots & \frac{x^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \ldots & \frac{x^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \frac{x^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Nüüd on meil maatriksfunktsiooni e^{xJ} kuju täielikult kirjeldatud: e^{xJ} on kastdiagonaalmaatriks, mille diagonaalkastides asuvad maatriksid $e^{xJ_1}, e^{xJ_2}, \ldots, e^{xJ_s}$ me äsja leidsime. Olgu $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \ldots, \mathbf{p}^n$ maatriksi P veeruvektoriteks. Pärast mõningat järelemõtlemist veendub lugeja, et maatriksfunktsiooni Pe^{xJ} veeruvektoriteks, seega aga ka süsteemi (1) erilahendite fundamentaalsüsteemiks on:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^1=e^{\lambda_{j_1}x}\mathbf{p}^1, \\ \mathbf{y}^2=e^{\lambda_{j_1}x}(x\mathbf{p}^1+\mathbf{p}^2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \mathbf{y}^{r_1}=e^{\lambda_{j_1}x}\left(\frac{x^{r_1-1}}{(r_1-1)!}\mathbf{p}^1+\frac{x^{r_1-2}}{(r_1-2)!}\mathbf{p}^2+\ldots+x\mathbf{p}^{r_1-1}+\mathbf{p}^{r_1}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{r_1+1}=e^{\lambda_{j_2}x}\mathbf{p}^{r_1+1}, \\ \mathbf{y}^{r_1+2}=e^{\lambda_{j_2}x}(x\mathbf{p}^{r_1+1}+\mathbf{p}^{r_1+2}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \mathbf{y}^{r_1+r_2}=e^{\lambda_{j_2}x}\left(\frac{x^{r_2-1}}{(r_2-1)!}\mathbf{p}^{r_1+1}+\frac{x^{r_2-2}}{(r_2-2)!}\mathbf{p}^{r_1+2}+\ldots+x\mathbf{p}^{r_1+r_2-1}+\mathbf{p}^{r_1+r_2}\right), \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{n-r_s+1} = e^{\lambda_{j_s}x}\mathbf{p}^{n-r_s+1} \\ \mathbf{y}^{n-r_s+1} = e^{\lambda_{j_s}x}(x\mathbf{p}^{n-r_s+1} + \mathbf{p}^{n-r_s+2}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathbf{y}^{n} = e^{\lambda_{j_s}x}(\frac{x^{r_s-1}}{(r_s-1)!}\mathbf{p}^{n-r_s+1} + \frac{x^{r_s-2}}{(r_s-2)!}\mathbf{p}^{n-r_s+2} + \dots + x\mathbf{p}^{n-1} + \mathbf{p}^{n}). \end{cases}$$

Siin vastavad erilahendid $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^{r_1}$ kastikesele J_1, erilahendid $\mathbf{y}^{r_1+1}$, $\mathbf{y}^{r_1+2}$, $\mathbf{y}^{r_1+r_2}$ kastikesele J_2 jne.

Nagu selgus, sõltub fundamentaalsüsteemi moodustavate erilahendite kuju oluliselt süsteemi (1) kordajate maatriksi A Jordani normaalkujust J. Näiteks, kui J on diagonaalmaatriks, s. t. kui kõik kastikesed $J_1, J_2, \dots, J_s$ $(s=n)$ on esimest järku, siis on erilahendite fundamentaalsüsteemiks $\mathbf{y}^i = e^{\lambda_{j_i}x}\mathbf{p}^i$ $(i=1,2,\dots,n)$; meenutame, et selline olukord on võimalik ka kordsete karakteristlike väärtuste korral.

Ühtlasi näeme, et erilahendite fundamentaalsüsteemi leidmise ülesanne taandub üldjuhul puhtalgebralisele ülesandele: on vaja leida maatriksi A normaalkuju J ja maatriks P selline, et $A = PJP^{-1}$. Maatriksite J ja P alusel on kohe võimalik välja kirjutada erilahendite fundamentaalsüsteemi.

§ 11. LINEAARNE MITTEHOMOGEENNE DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEM.

1. Vaatleme lineaarset mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$y_i' = a_{i1}(x)y_1+a_{i2}(x)y_2+\ldots+a_{in}(x)y_n+g_i(x) \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

mille kordajad $a_{ij}(x)$ ja vabaliikmed $g_i(x)$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ olgu pidevad vahemikus (a,b). Kirjutame süsteemi ka vektorsümboolikas:

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x) \,. \tag{1}$$

Teoreem 1. Olgu vektorfunktsioon $\hat{\mathbf{y}}$ süsteemi (1) mingiks erilahendiks ja moodustagu vektorfunktsioonid $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ vastava homogeense süsteemi

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

erilahendite fundamentaalsüsteemi. Süsteemi (1) üldlahendiks on siis

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i \quad (C_1,\ldots,C_n \text{ - suvalised konstandid}).$$

T õ e s t u s . Teoreemi tingimuste kohaselt $\hat{\mathbf{y}}' = A(x)\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{g}(x)$ ja $(\mathbf{y}^i)' = A(x)\mathbf{y}^i$, mistõttu

$$\mathbf{y}' = \hat{\mathbf{y}}' + \sum_{i=1}^{n} C_i(\mathbf{y}^i)' = A(x)\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{g}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i A(x)\mathbf{y}^i =$$

$$= A(x)\left[\hat{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i\right] + \mathbf{g} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g} \,,$$

s. t. $\mathbf{y}$ rahuldab süsteemi (1). Näitame, et tema koosseisu kuuluvad kõik süsteemi (1) erilahendid. Millise erilahendi $\hat{\mathbf{y}}^1$ me ka ei valiks, on vahe $\hat{\mathbf{y}}^1 - \hat{\mathbf{y}}$ homogeense süsteemi (2) erilahendiks, sest

$$(\hat{\mathbf{y}}^1 - \hat{\mathbf{y}})' = (\hat{\mathbf{y}}^1)' - \hat{\mathbf{y}}' = (A(x)\hat{\mathbf{y}}^1 + \mathbf{g}) - (A(x)\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{g}) =$$
$$= A(x)(\hat{\mathbf{y}}^1 - \hat{\mathbf{y}}).$$

Teoreemi 2 § 8 põhjal avaldub homogeense süsteemi (2) erilahend $\hat{\mathbf{y}}^1 - \hat{\mathbf{y}}$ kujul $\hat{\mathbf{y}}^1 - \hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} C_i^1 \mathbf{y}^i$, kus C_i^1 on mingid fikseeritud konstandid. Siit $\hat{\mathbf{y}}^1 = \hat{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{n} C_i^1 \mathbf{y}^i$, s. t. $\hat{\mathbf{y}}^1$ sisaldub $\mathbf{y}$ avaldises, m.o.t.t.

Teoreem 1 on tõestatud. Seda teoreemi võib lühidalt sõnastada nii: mittehomogeense süsteemi üldlahend avaldub mingi erilahendi ja vastava homogeense süsteemi üldlahendi summana. Tõepoolest, $\mathbf{y}_h = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i$ on teoreemi 2 § 8 põhjal homogeense süsteemi (2) üldlahendiks.

Kui homogeense süsteemi (2) erilahendite fundamentaalsüsteem $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ on leitud, siis on mittehomogeense süsteemi (1) üldlahendit võimalik leida suvaliste konstantide varieerimise meetodil (e. Lagrange'i meetodil): homogeense süsteemi üldlahendis $\mathbf{y}_h = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}^i$ asendame suvalised konstandid C_i funktsioonidega $C_i(x)$, mis määrame nii, et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \mathbf{y}^i$ rahuldaks süsteemi (1). Näitame, et see on alati teostatav. Tõepoolest, süsteemi rahuldamise tingimus $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$ on täidetud, kui

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{y}^i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{y}^i)' = A(x)\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{y}^i + \mathbf{g}(x).$$

Kuid

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{y}^i)' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)A(x)\mathbf{y}^i = A(x)\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{y}^i$$

ja pärast sarnaste liikmete koondamist saame

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{y}^i = \mathbf{g}(x)$$

ehk komponentide kaupa kirjutatult

$$C_1'(x)y_j^1 + C_2'(x)y_j^2 + \ldots + C_n'(x)y_j^n = g_j(x) \quad (j=1,2,\ldots,n). \quad (3)$$

See on algebraline võrrandisüsteem $C_1'(x),\ldots,C_n'(x)$ määramiseks. Süsteemi determinant erineb iga $x \in (a,b)$ korral nullist, sest determinandiks on (homogeense süsteemi) lineaarselt sõltumatutele erilahenditele $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ vastav Wronski determinant (vt. teoreemi 1 § 8). Järelikult on süsteem (3) üheselt lahenduv. Leidnud tema lahendi

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

seejärel aga funktsioonid

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \bar{C}_i \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

saame süsteemi (1) üldlahendiks

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{y}^i + \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i \mathbf{y}^i.$$

Siin $\hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{y}^i$ on süsteemi (1) erilahendiks,

$\mathbf{y}_h = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i \mathbf{y}^i$ aga vastava homogeense süsteemi (2) üldlahendiks.

<u>Näide</u>. $y' = z$, $z' = -y + \frac{1}{\cos x}$. Vastava homogeense süsteemi $y' = z$, $z' = -y$ üldlahendiks on

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x ,$$

$$z_h = -C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Mittehomogeense süsteemi üldlahendit otsime kujul

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x ,$$

$$z = -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x .$$

Süsteem (3) otsitavate $C_1'(x)$ ja $C_2'(x)$ määramiseks on järgmine:

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 ,$$

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} .$$

Siit $C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$, $C_2'(x) = 1$ ning

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \bar{C}_1, \ C_2(x) = x + \bar{C}_2 .$$

Seega on vaadeldava mittehomogeense süsteemi üldlahendiks

$$y = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x + \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x ,$$

$$z = -\sin x \ln|\cos x| + x \cos x - \bar{C}_1 \sin x + \bar{C}_2 \cos x .$$

2. Esitame konstantide varieerimise meetodi ka fundamentaalmaatriksist lähtudes. Olgu $\mathbf{Y}(x)$ süsteemile (1) vastava homogeense süsteemi (2) fundamentaalmaatriksiks. Siis on

süsteemi (2) üldlahendiks (vt. teoreemi 2 § 8, ptk. III) $\mathbf{y}_h = \mathbf{Y}\mathbf{C}$, kus $\mathbf{C}$ on suvaline konstantne vektor. Süsteemi (1) üldlahendit otsime kujul $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{C}$, kus $\mathbf{C} = \mathbf{C}(x)$ on vektorfunktsioon, mille määrame tingimusest, et süsteem (1) oleks rahuldatud, s. t. tingimusest

$$(\mathbf{Y}\mathbf{C})' = A(x)\mathbf{Y}\mathbf{C} + \mathbf{g}(x) .$$

Kuna fundamentaalmaatriks $\mathbf{Y}$ rahuldab maatriksdiferentsiaalvõrrandit $\mathbf{Y}' = A(x)\mathbf{Y}$, siis $(\mathbf{Y}\mathbf{C})' = \mathbf{Y}'\mathbf{C} + \mathbf{Y}\mathbf{C}' = A(x)\mathbf{Y}\mathbf{C} + \mathbf{Y}\mathbf{C}'$. Pärast seda asendust ja sarnaste liikmete koondamist on $\mathbf{C}(x)$ määratud võrrandiga

$$\mathbf{Y}\mathbf{C}' = \mathbf{g} .$$

Siit $\mathbf{C}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g}$ ja $\mathbf{C}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds + \bar{\mathbf{C}}$, kus $\bar{\mathbf{C}}$ on suvaline konstantne vektor. Süsteemi (1) üldlahend avaldub kujul

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x) \int_{x_0}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds + \mathbf{Y}(x)\bar{\mathbf{C}} , \qquad (4)$$

kus $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(x) \int_{x_0}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds$ on süsteemi (1) erilahendiks, $\mathbf{y}_h = \mathbf{Y}(x)\bar{\mathbf{C}}$ aga vastava homogeense süsteemi (2) üldlahendiks.

Määrame suvalise vektori $\bar{\mathbf{C}}$ väärtuse nii, et integraalkõver kulgeks läbi punkti $(x_0, \mathbf{y}^0)$. Selleks tuleb üldlahendi avaldises (4) võtta $x = x_0$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0$:

$$\mathbf{y}^0 = \hat{\mathbf{y}}(x_0) + \mathbf{Y}(x_0)\bar{\mathbf{C}} .$$

Kuna ilmselt $\hat{\mathbf{y}}(x_0) = 0$ (integreerimisrajad on võrdsed), siis $\mathbf{y}^{o} = \mathbf{Y}(x_o)\bar{\mathbf{C}}$, millest $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{Y}^{-1}(x_o)\mathbf{y}^{o}$. Sellega oleme tõestanud järgmise tulemuse:

<u>Teoreem 2</u>. Süsteemi (1) lahendiks, mis kulgeb läbi punkti $(x_o, \mathbf{y}^{o})$, on vektorfunktsioon

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x)\int_{x_o}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)ds + \mathbf{Y}(x)\,\mathbf{Y}^{-1}(x_o)\mathbf{y}^{o}, \quad (4')$$

kus $\mathbf{Y}(x)$ on homogeense süsteemi (2) fundamentaalmaatriks.

Kui $\mathbf{y}^{o}$ vaadelda suvalise konstantse vektorina, siis on (4') süsteemi (1) üldlahendiks.

Vaatleme lõpuks veel konstantsete kordajatega mittehomogeenset süsteemi

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(x). \quad (5)$$

Vastava homogeense süsteemi $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ fundamentaalmaatriksiks on $\mathbf{Y}(x) = e^{xA}$ (vt. § 10.1). Et maatriksid xA ja $-xA$ kommuteeruvad, siis lemma 1 § 10 põhjal

$$e^{xA}\,e^{-xA} = e^{xA+(-xA)} = e^{0} = E,$$

s. t. $(e^{xA})^{-1} = e^{-xA}$. Analoogiliselt $e^{xA}\,e^{-st} = e^{(x-s)A}$, $e^{xA}\,e^{-x_oA} = e^{(x-x_o)A}$ ning avaldis (4') võtab kuju

$$\mathbf{y} = e^{xA}\int_{x_o}^{x} e^{-sA}\,\mathbf{g}(s)ds + e^{xA}\,e^{-x_oA}\mathbf{y}^{o} =$$

$$= \int_{x_o}^{x} e^{(x-s)A}\,\mathbf{g}(s)ds + e^{(x-x_o)A}\mathbf{y}^{o}.$$

Teoreemist 2 saame nüüd järgmise tulemuse:

<u>Teoreem 3</u>. Lineaarse mittehomogeense konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5) lahendiks, mis

kulgeb läbi punkti $(x_0, \mathbf{y}^0)$, on vektorfunktsioon

$$\mathbf{y} = \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A}\,\mathbf{g}(s)ds + e^{(x-x_0)A}\mathbf{y}^0 .$$

§ 12. LAHENDI SÕLTUVUS PARAMEETRITEST.

1. Vaatleme diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \quad (i = 1,2,\dots,n)$,

mille paremad pooled sõltuvad peale sõltumatu muutuja x, otsitavate $y_1, y_2, \dots, y_n$ veel parameetritest $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$. Vektorsümboolikas on see süsteem:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) , \tag{1}$$

kus $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ on parameetrite vektor (edaspidi nimetame teda lihtsalt parameetriks). Kogu käesoleva paragrahvi kestel eeldatakse, et $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ ja $\frac{\partial \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{y}}$ on pidevad $(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$-ruumi piirkonnas

$$(x, \mathbf{y}) \in D , \boldsymbol{\mu} \in D_{\boldsymbol{\mu}} . \tag{2}$$

kus D ja $D_{\boldsymbol{\mu}}$ on mingid piirkonnad vastavalt $(x, \mathbf{y})$ ja $\boldsymbol{\mu}$-ruumis.

Fikseerides ajutiselt $\boldsymbol{\mu} \in D_{\boldsymbol{\mu}}$, muutub süsteem (1) normaalseks diferentsiaalvõrrandite süsteemiks, mis rahuldab teoreemi 1 § 5 nõudeid. Järelikult kulgeb läbi antud punkti $(x_0, \mathbf{y}^0) \in D$ parajasti üks integraalkõver. Parameetri $\boldsymbol{\mu}$ erinevate väärtuste korral on üldiselt ka need integraalkõverad erinevad, sest parameetri muutmine muudab süsteemi (1). Teiste sõnadega: punkti (x_0, y^0) läbiv integraalkõver sõltub parameetrist μ. Me tähistame seda integraalkõverat $y(x,\mu)$; punkt $(x_0, y^0) \in D$, mida $y(x,\mu)$ läbib iga $\mu \in D_\mu$ korral, jääb järgnevates arutlustes kogu aeg fikseerituks.

Meid huvitab eeslkõige küsimus, kas $y(x,\mu)$ sõltub parameetrist μ pidevalt. Vastus on jaatav:

Teoreem 1. Süsteemi (1) lahend $y(x,\mu)$ on pidev kui mitmemuutuja funktsioon kogu (x,μ)-ruumi piirkonnas, milles ta on määratud.

Selle teoreemi asemel tõestame allpool mõnevõrra tugevama teoreemi 2. Paljudes rakendustes vajab vastust järgmine küsimus. Olgu teada, et parameetri μ mingi väärtuse μ^0 korral on lahend $y(x,\mu^0)$ määratud mingil lõigul $[a,b]$; kas $y(x,\mu^1)$ on määratud samal lõigul $[a,b]$, kui μ^1 erineb μ^0-st vähe? Ka selle küsimuse vastus on jaatav:

Teoreem 2. Olgu süsteemi (1) lahend $y(x,\mu^0)$ määratud lõigul $[a,b]$. Siis leidub selline arv $\delta > 0$, et $y(x,\mu)$ on määratud ja pidev (kui mitmemuutuja funktsioon) hulgal

$$\Delta : \quad a \leq x \leq b, \quad |\mu - \mu^0| \leq \delta.$$

Veendume, et sellest teoreemist tõepoolest järeldub teoreem 1. Kui (x_1, μ^1) on punkt $y(x,\mu)$ määramispiirkonnast, siis leidub küllalt väike lõik $[a_1, b_1]$, millel $y(x,\mu^1)$ on määratud, kusjuures $a_1 \leq x_1 \leq b_1$. Teoreemi 2 põhjal on $y(x,\mu)$ pidev hulgal $a_1 \leq x \leq b_1$, $|\mu - \mu^1| \leq \delta$, muuhulgas ka punktis (x_1, y^1), m.o.t.t.

Enne teoreemi 2 tõestuse juurde asumist teeme veel ühe märkuse: $y(x,\mu^1)$ ja $y(x,\mu^0)$ erinevad vähe teineteisest kogu lõigul $[a,b]$, kui vaid suurus $|\mu^1-\mu^0|$ on väike. Täpsemalt,

$$\lim_{\mu\to\mu_0} \max_{a\le x\le b} |y(x,\mu) - y(x,\mu^0)| = 0 .$$

Tõepoolest, $y(x,\mu)$ kui kinnisel hulgal Δ pidev funktsioon on sellel hulgal ühtlaselt pidev: iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline $\eta = \eta(\varepsilon)$, et

$$|y(x_1,\mu^1) - y(x_2,\mu^2)| < \varepsilon ,$$

niipea kui $|x_1 - x_2| + |\mu^1 - \mu^2| < \eta \quad ((x_1,\mu^1),(x_2,\mu^2)\in\Delta)$. Muuhulgas, kui $|\mu - \mu^0| < \eta$, siis iga $x\in[a,b]$ korral

$$|y(x,\mu) - y(x,\mu^0)| < \varepsilon , \quad \text{m.o.t.t.}$$

T e o r e e m i 2 t õ e s t u s . Me näitame, et küllalt väikese $\delta > 0$ korral on integraalvõrrandi

$$y = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y,\mu)dx \qquad (1')$$

lahend määratud ja pidev hulgal Δ . Kuna integraalvõrrandi (1') lahendiks on parajasti $y(x,\mu)$ (vrd. teoreemi 1 § 5 tõestuse 2. etapiga), siis teoreem olekski sellega tõestatud.

Integraalvõrrandi (1') lahendi uurimiseks lahendame selle võrrandi interatsioonimeetodiga, võttes alglähendiks $y(x,\mu^0)$:

$$y^0(x,\mu) = y(x,\mu^0) ,$$
$$y^1(x,\mu) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y^0(x,\mu),\mu)dx ,$$

$$y^2(x,\mu) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f(x, y^1(x,\mu),\mu)dx\,,$$

. . . .

$$y^{k+1}(x,\mu) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f(x, y^k(x,\mu),\mu)dx\,,$$

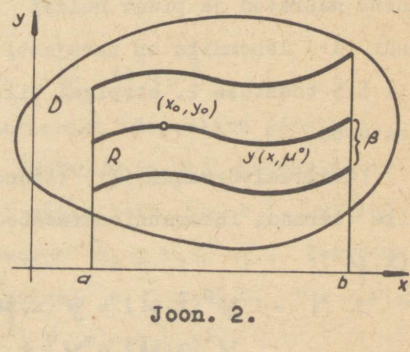
. . . .

Lugeja pani kindlasti tähele analoogiat teoreemi 1 § 5 ptk. III tõestusega; see analoogia jätkub edaspidi. Juhtigem siis tähelepanu ka mõnedele olulisematele erinevustele, võrreldes teoreemi 1 § 5 tõestusega. Esiteks - meil ei ole vaja tõestada lahendi olemasolu ja ühesust, sest see küsimus on meil antud juhul selge. Kogu konstruktsioon on vajalik vaid selleks, et lähendite $y^k(x,\mu)$ abil uurida täpse lahendi omadusi (mille olemasolu ja ühesus on juba ette garanteeritud). Teiseks - erinev on alglähendi valik iteratsioonimeetodis. Tehtud valik peab kindlustama, et kõik lähendid oleksid määratud hulgal Δ ; tehniliselt muutub tõestus sellega mõnevõrra keerulisemaks.

Anname ette mingi arvu $\beta > 0$, mis oleks küllalt väike selleks, et kinnine hulk

R: $a \leq x \leq b, |y - y(x,\mu^\circ)| \leq \beta$

asuks täielikult piirkonna D sees (vt. joon. 2; joonis vastab juhule n = 1).



Joon. 2.

Kogu tõestuse põhiraskus langeb järgmise väite põhjendamisele: küllalt väikese $\delta > 0$ korral on interatsioonimeetodiga leitud lähendid $y^k(x,\mu)$ määratud ja pidevad hulgal Δ, kusjuures

$$\max_{(x,\mu)\in\Delta} |y^k(x,\mu) - y(x,\mu^o)| \leq \beta \qquad (k = 0,1,2,\dots) \qquad (3)$$

ning rida

$$y^o(x,\mu) + \sum_{k=0}^{\infty}[y^{k+1}(x,\mu) - y^k(x,\mu)] \qquad (4)$$

on hulgal Δ majoreeritav koonduva arvreaga. (Võrratust (3) võime lugeda ka nii: $y^k(x,\mu)$ ei välju $(x,\mu)\in\Delta$ korral hulgast R.) Lükates selle väite tõestamise pisut edasi, vaatame, kuidas viia teoreemi tõestust lõpule.

Rea (4) osasummade jadaks on parajasti lähendite jada $y^k(x,\mu)$ $(k = 0,1,2,\dots)$. Et rida (4) on hulgal Δ majoreeritav koonduva arvreaga, siis see osasummade jada $y^k(x,\mu)$ koondub ühtlaselt hulgal Δ. Seetõttu on piirväärtus

$$\tilde{y}(x,\mu) = \lim_{k\to\infty} y^k(x,\mu)$$

ka hulgal Δ pidev (vektor)funktsioon. Edasi näitame täiesti analoogiliselt nagu teoreemi 1 § 5 tõestuse 4. etapi lõpul, et see piirväärtus $\tilde{y}(x,\mu)$ ongi integraalvõrrandi (1') lahendiks, s. t. $\tilde{y}(x,\mu) = y(x,\mu)$. Niisiis on integraalvõrrandi (1') lahend $y(x,\mu)$ pidev hulgal Δ, m.o.t.t.

Teeme mõned ettevalmistavad märkused lähendite $y^k(x,\mu)$ kohta käiva väite tõestamiseks. Olgu $\delta > 0$ küllalt väike arv selleks, et $|\mu - \mu^o| \leq \delta$ korral $\mu \in D_\mu$

edaspidi me asetame δ-le veel ühe kitsenduse, mis võib teda veelgi vähendada. Korrates teoreemi § 5 tõestuse 1. etapi arutlusi, veendume, et $f(x,y,\mu)$ rahuldab kinnisel hulgal $(x,y) \in R$, $|\mu - \mu^{o}| \leq \delta$ muutuja y järgi Lipschitzi tingimust, s. t. $(x,y^{i}) \in R$ $(i = 1,2)$, $|\mu-\mu^{o}| \leq \delta$ korral

$$|f(x,y^{1},\mu) - f(x,y^{2},\mu)| \leq N|y^{1} - y^{2}| \quad (N=\mathrm{const}). \quad (5)$$

Edasi, $f(x,y(x,\mu^{o}),\mu)$, kui kinnisel hulgal Δ pidev funktsioon on sellel hulgal ühtlaselt pidev. Muuhulgas, kui $|\mu - \mu^{o}|$ on küllalt väike, siis iga $x \in [a,b]$ korral

$$|f(x,y(x,\mu^{o}),\mu) - f(x,y(x,\mu^{o}),\mu^{o})| \leq \beta \frac{e^{-N(b-a)}}{b-a}. \quad (6)$$

Edaspidi loeme, et $\delta > 0$ on fikseeritud nii väiksena, et (6) peab paika hulgal Δ. (On võimalik, et see tingimus vähendab δ esialgset väärtust, mida vaatlesime eespool. Meile on tähtis, et võrratus (5) jääb sealjuures kehtima – δ vähendamisel me kitsendame vaid hulka, millel seda võrratust rakendatakse.)

Teoreemi eelduste kohaselt on alglähend $y^{o}(x,\mu) = y(x,\mu^{o})$ määratud (ja endastmõistetavalt ka pidev) lõigul $[a,b]$ ehk vaadeldes teda kui argumentide x ja μ funktsiooni – hulgal Δ; $y^{1}(x,\mu)$ avaldisest järeldub, et ka $y^{1}(x,\mu)$ on määratud ja pidev hulgal Δ. Lahutades $y(x,\mu)$ avaldisest samasuse

$$y(x,\mu^{o}) = y^{o} + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x,\mu^{o}),\mu^{o})dx,$$

leiame, et $(x,\mu) \in \Delta$ korral

$$|y^1(x,\mu) - y(x,\mu^0)| = \Big|\int_{x_0}^{x}[f(x,y(x,\mu^0),\mu) -$$

$$-f(x,y(x,\mu^0),\mu^0)]\,dx\Big| \leq \Big|\int_{x_0}^{x}|f(x,y(x,\mu^0),\mu)-$$

$$-f(x,y(x,\mu^0),\mu^0)|\,dx\Big| \leq \beta\,\frac{e^{-N(b-a)}}{b-a}\Big|\int_{x_0}^{x}dx\Big| =$$

$$= \frac{e^{-N(b-a)}\beta}{b-a}|x-x_0| \leq \beta\, e^{-N(b-a)} < \beta \quad ,$$

s. t. $y^1(x,\mu)$ rahuldab tingimust (3). Kuna $y(x,\mu^0) = y^0(x,\mu)$, saame siit ühtlasi hinnangu rea (4) teise liikme jaoks:

$$|y^1(x,\mu) - y^0(x,\mu)| \leq \beta\, e^{-N(b-a)}; \ ((x,\mu)\in\Delta) \ . \qquad (7)$$

Selle, et $y^1(x,\mu)$ rahuldab tingimust (3), võime teisiti kirja panna nii: $(x,\mu)\in\Delta$ korral $(x, y^1(x,\mu)) \in R$. Siit ja $y^2(x,\mu)$ avaldisest järeldame, et ka $y^2(x,\mu)$ on määratud ja pidev hulgal Δ. Sealjuures $(x,\mu)\in\Delta$ korral

$$|y^2(x,\mu) - y^1(x,\mu)| = \Big|\int_{x_0}^{x}[f(x,y^1(x,\mu),\mu) -$$

$$-f(x,y^0(x,\mu),\mu)]\,dx\Big| \leq \Big|\int_{x_0}^{x}|f(x,y^1(x,\mu),\mu) -$$

$$-f(x,y^0(x,\mu),\mu)|\,dx\Big| \leq N\Big|\int_{x_0}^{x}|y^1(x,\mu) -$$

$$-y^0(x,\mu)|\,dx\Big| \leq N\beta e^{-N(b-a)}\Big|\int_{x_0}^{x}dx\Big| =$$

$$= \beta e^{-N(b-a)}\,\frac{N\,|x-x_0|}{1!} \leq e^{-N(b-a)}\,N(b-a)\,\beta \qquad (7')$$

ning

$$|y^2(x,\mu)-y(x,\mu^0)|=|[y^2(x,\mu)-y^1(x,\mu)]+$$
$$+[y^1(x,\mu)-y^0(x,\mu)]|\leq|y^2(x,\mu)-y^1(x,\mu)|+$$
$$+|y^1(x,\mu)-y^0(x,\mu)|\leq\beta e^{-N(b-a)}[1+N(b-a)]<$$
$$<\beta e^{-N(b-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{N^k(b-a)^k}{k!}=\beta,$$

s. t. ka $y^2(x,\mu)$ rahuldab tingimust (3). See võimaldab läbi viia analoogilised arutlused $y^3(x,\mu)$ jaoks jne.

Rakendades tõestuseks induktsioonimeetodit, oletame, et $y^1(x,\mu)$, $y^2(x,\mu),\ldots,$ $y^\ell(x,\mu)$ on määratud ja pidevad hulgal Δ, rahuldavad tingimust (3), kusjuures $(x,\mu)\in\Delta$ korral

$$|y^{k+1}(x,\mu)-y^k(x,\mu)|\leq\beta e^{-N(b-a)}\frac{N^k|x-x_0|^k}{k!}$$

$$(k=1,2,\ldots,\ell-1)\qquad(7'')$$

(k=0 ja k=1 korral oleme selle võrratuse kehtivust näidanud - vt. (7) ja (7')). Näitame, et samad omadused on siis ka lähendil $y^{\ell+1}(x,\mu)$, kusjuures (7") kehtib ka $k=\ell$ korral.

Tõepoolest, selle, et $y^\ell(x,\mu)$ rahuldab tingimust (3), võime kirja panna nii: $(x,\mu)\in\Delta$ korral $(x,y^\ell(x,\mu))\in R$. Siit ja $y^{\ell+1}(x,\mu)$ avaldisest järeldame, et ka $y^{\ell+1}(x,\mu)$ on määratud ja pidev hulgal Δ. Sealjuures $(x,\mu)\in\Delta$ korral

$$|y^{\ell+1}(x,\mu)-y^\ell(x,\mu)|=|\int_{x_0}^{x}[f(x,y^\ell(x,\mu),\mu)-$$

$$-f(x,y^{\ell-1}(x,\mu),\mu)]\,dx\Big| \leq N\Big|\int_{x_0}^{x} |y^{\ell}(x,\mu)-y^{\ell-1}(x,\mu)|\,dx\Big| \leq$$

$$\leq N\beta e^{-N(b-a)}\frac{N^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\Big|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|^{\ell-1}\,dx\Big| =$$

$$= \beta e^{-N(b-a)}\frac{N^{\ell}|x-x_0|^{\ell}}{\ell!},$$

s. t. (7") kehtib ka $k = \ell$ korral. Edasi,

$$|y^{\ell+1}(x,\mu) - y(x,\mu^0)| = \Big|\sum_{k=0}^{\ell}[y^{k+1}(x,\mu) - y^k(x,\mu)]\Big|$$

ning (7") põhjal leiame, et $(x,\mu)\in\Delta$ korral

$$|y^{\ell+1}(x,\mu) - y(x,\mu^0)| \leq \sum_{k=0}^{\ell}|y^{k+1}(x,\mu) - y^k(x,\mu)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\ell}\beta e^{-N(b-a)}\frac{N^k(b-a)^k}{k!} < \beta e^{-N(b-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{N^k(b-a)^k}{k!} = \beta,$$

s. t. $y^{\ell+1}(x,\mu)$ rahuldab tingimust (3).

Induktiivne oletus osutus õigeks. Järelikult kehtib hinnang (7") iga $k=0,1,2,\ldots$ korral ning rida (4) on hulgal Δ majoreeritav koonduva arvreaga

$$|y^0(x,\mu)| + \sum_{k=0}^{\infty}\beta e^{-N(b-a)}\frac{N^k(b-a)^k}{k!} = |y^0(x,\mu)| + \beta .$$

Väide lähendite $y^k(x,\mu)$ omadustest on tõestatud. Koos sellega on tõestatud ka kogu teoreem 2.

2. Käesolevas punktis uurime lahendi $y(x,\mu)$ diferentseeruvust parameetrite $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$ järgi. Me vaatleme diferentseeruvust ainult μ_1 järgi; endastmõis-

tetavalt kehtivad täiesti analoogilised tulemused ka ülejäänud parameetrite jaoks.

Teoreem 3. Kui funktsioonil $f(x,y,\mu)$ on piirkonnas (2) olemas pidev osatuletis μ_1 järgi, siis on ka lahendil $y(x,\mu)$ olemas pidev osatuletis μ_1 järgi ($\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu_1}$ on pidev kui mitme muutuja funktsioon (x,μ)-ruumi piirkonnas, milles $y(x,\mu)$ on määratud).

T õ e s t u s . Vaatleme kahte lahendit $y(x,\mu)$ ja $y(x,\tilde{\mu})$, mis vastavad parameetrite väärtustele $\mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)$ ja $\tilde{\mu} = (\mu_1+h,\mu_2,\ldots,\mu_m)$ kus h on mingi absoluutväärtuse poolest väike nullist erinev arv. Moodustame funktsioonid

$$u(x,\mu,h) = y(x,\tilde{\mu}) - y(x,\mu), \quad z(x,\mu,h) = \frac{u(x,\mu,h)}{h}. \tag{8}$$

Me peame näitama, et eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{h\to 0} z(x,\mu,h) = \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu_1}$$

ja et see piirfunktsioon on pidev.

Kuna

$$y'(x,\tilde{\mu}) = f(x,y(x,\tilde{\mu}),\tilde{\mu}), \quad y'(x,\mu) = f(x,y(x,\mu),\mu),$$

siis

$$u'(x,\mu,h) = f(x,y(x,\tilde{\mu}),\tilde{\mu}) - f(x,y(x,\mu),\mu). \tag{9}$$

Järgmise sammuna tahame teisendada seda vahet Lagrange'i lause põhjal. Kahjuks ei ole Lagrange'i lause vektorfunktsioonidele vahetult rakendatav ja me peame vahepeal üle minema komponentsümboolikale. Lagrange'i lause põhjal iga $i = 1,2,\ldots,n$ korral

$$f_i(x,\mathbf{y}(x,\tilde{\boldsymbol\mu}),\tilde{\boldsymbol\mu}) - f_i(x,\mathbf{y}(x,\boldsymbol\mu),\boldsymbol\mu) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,\mathbf{y}(x,\boldsymbol\mu)+\theta_i\mathbf{u}(x,\boldsymbol\mu,h),\boldsymbol\mu+\theta_i(h,0,\ldots,0))}{\partial y_j} u_j(x,\boldsymbol\mu,h) +$$

$$+ \frac{\partial f_i(\ldots\ldots)}{\partial \mu_1} h , \tag{10}$$

kus[1] $0 < \theta_i < 1$, $u_j(x,\boldsymbol\mu,h)$ on $\mathbf{u}(x,\boldsymbol\mu,h)$ j-s komponent; $\frac{\partial f_i}{\partial \mu_1}$ argument on sama mis $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ argument. Kui $h \to 0$, siis teoreemi 1 põhjal (vt. $\mathbf{u}(x,\boldsymbol\mu,h)$ definitsiooni (8)) $\mathbf{u}(x,\boldsymbol\mu,h) \to 0$, see aga tähendab omakorda, et avaldises (10) lähenevad osatuletiste argumendid punktile $(x,\mathbf{y}(x,\boldsymbol\mu),\boldsymbol\mu)$. Osatuletiste pidevuse tõttu saame avaldise (10) esitada kujul

$$f_i(x,\mathbf{y}(x,\tilde{\boldsymbol\mu}),\tilde{\boldsymbol\mu}) - f_i(x,\mathbf{y}(x,\boldsymbol\mu),\boldsymbol\mu) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i(x,\mathbf{y}(x,\boldsymbol\mu),\boldsymbol\mu)}{\partial y_j} + \gamma_{ij}(x,\boldsymbol\mu,h)\right] u_j(x,\boldsymbol\mu,h) + \tag{10'}$$

$$+ \left[\frac{\partial f_i(x,\mathbf{y}(x,\boldsymbol\mu),\boldsymbol\mu)}{\partial \mu_1} + \gamma_i(x,\boldsymbol\mu,h)\right] h ,$$

kus $\gamma_{ij}(x,\boldsymbol\mu,h)$ ja $\gamma_i(x,\boldsymbol\mu,h)$ on mingid pidevad funkt-

---

[1] Põhjus, miks Lagrange'i lauset ei saa rakendada vektorfunktsioonidele, seisneb selles, et arvud θ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ on üldiselt erinevad.

Märgime ka, et Lagrange'i lauset on võimalik rakendada vaid siis, kui kõik $(x,\mathbf{y}(x,\tilde{\boldsymbol\mu}),\tilde{\boldsymbol\mu})$ ja $(x,\mathbf{y}(x,\boldsymbol\mu),\boldsymbol\mu)$ vahelised punktid kuuluvad piirkonda (2). Viimane tingimus on täidetud, kui lubame argumentidel $x,\boldsymbol\mu,h$ muutuda vaid küllalt väikeses piirkonnas.

sioonid, sellised, et $h \to 0$ korral $|\gamma_{ij}(x,\mu,h)| \to 0$, $\gamma_i(x,\mu,h) \to 0$. Pöördudes tagasi vektorsümboolikale, võime (10') ümber kirjutada nii:

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\tilde{\mu}),\tilde{\mu}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\mu),\mu) =$$
$$= \left[\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\mu),\mu)}{\partial \mathbf{y}} + \Gamma(x,\mu,h)\right] \mathbf{u}(x,\mu,h) +$$
$$+ \left[\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\mu),\mu)}{\partial \mu_1} + \boldsymbol{\gamma}(x,\mu,h)\right] h\,, \qquad (10'')$$

kus $\Gamma(x,\mu,h)$ on maatriksfunktsioon elementidega $\gamma_{ij}(x,\mu,h)$ ja $\boldsymbol{\gamma}(x,\mu,h)$ on vektorfunktsioon komponentidega $\gamma_i(x,\mu,h)$. Eelneva põhjal

$$|\Gamma(x,\mu,h)| \to 0\,, \quad |\boldsymbol{\gamma}(x,\mu,h)| \to 0\,, \quad \text{kui} \quad h \to 0. \qquad (11)$$

Nüüd leiame (8), (9) ja (10") abil, et

$$\mathbf{z}'(x,\mu,h) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\mu),\mu)}{\partial \mathbf{y}} + \Gamma(x,\mu,h)\right] \mathbf{z}(x,\mu,h) +$$
$$+ \left[\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\mu),\mu)}{\partial \mu_1} + \boldsymbol{\gamma}(x,\mu,h)\right] \qquad (12)$$

Nagu näha, on $\mathbf{z}(x,\mu,h)$ lineaarse diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendiks, mille kordajate maatriks $\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\mu),\mu)}{\partial \mathbf{y}} + \Gamma(x,\mathbf{y},h)$ ja vabaliige $\frac{\partial \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\mu),\mu)}{\partial \mu_1} + \boldsymbol{\gamma}(x,\mu,h)$ on pidevad ja sõltuvad pidevalt parameetritest μ ja h. Parameeter h võis sealjuures omandada absoluutselt väikesi väärtusi, välja arvatud väärtus 0. Kuid (11) tõttu säilitab süsteemi (12) parem pool (ja selle osatuletis $\mathbf{z}$ järgi) pidevuse, kui lubame parameetril h omandada ka väärtust $h = 0$, defineerides $\Gamma(x,\mu,0) \equiv 0$, $\boldsymbol{\gamma}(x,\mu,0) \equiv 0$.

Kuna $y(x,\mu)$ ja $y(x,\tilde{\mu})$ läbivad ühte ja sama punkti (x_0, y^0), siis $h \neq 0$ korral

$$z(x_0,\mu,h) = \frac{y(x_0,\tilde{\mu}) - y(x_0,\mu)}{h} = \frac{y^0 - y^0}{h} = 0 ,$$

s. t. $z(x,\mu,h)$ kulgeb $h \neq 0$ korral läbi punkti $(x_0,0)$; tähistagu $z(x,\mu,0)$ süsteemi (12) seda lahendit, (mis vastab parameetri h väärtusele $h = 0$) ja läbib punkti $(x_0,0)$.

Nüüd siis on $z(x,\mu,h)$ süsteemi (12) lahendiks, mis iga μ ja h korral (muuhulgas ka $h=0$ korral) kulgeb läbi ühe ja sama punkti $(x_0,0)$. Rakendades süsteemile (12) teoreemi 1 tulemust, saame, et $z(x,\mu,h)$ on pidev kui muutujate x, μ ja h funktsioon. Järelikult eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{h \to 0} z(x,\mu,h) = \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu_1} = z(x,\mu,0)$$

ja see piirfunktsioon on pidev, m.o.t.t.

Teoreem 3 on tõestatud. Tõestuse käigus selgus, et $\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu_1} = z(x,\mu,0)$ on lineaarse diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$z' = \frac{\partial f(x,y(x,\mu),\mu)}{\partial y} z + \frac{\partial f(x,y(x,\mu),\mu)}{\partial \mu_1} \qquad (12')$$

lahendiks. Kuna z asendamisel lahendiga $\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu_1}$ saame paremale poolele pideva funktsiooni, siis on ka vasak pool, s. t $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu_1}$ pidev. Teiselt poolt, samasuse $y'(x,\mu) = f(x,y(x,\mu),\mu)$ parem pool, aga järelikult ka vasak pool, on pidevalt diferentseeruv μ_1 järgi, s. t. eksisteerib ja on pidev ka osatuletis $\frac{\partial}{\partial \mu_1} \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial x}$.

Kuna mõlemad segatuletised eksisteerivad ja on pidevad, siis on nad omavahel võrdsed. Võtame arutlused kokku:

Järeldus 1. Teoreemi 3 eeldustel eksisteerivad, on pidevad ja omavahel võrdsed ka teist järku segatuletised $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \mu_1} y(x,\mu)$ ja $\frac{\partial}{\partial \mu_1} \frac{\partial}{\partial x} y(x,\mu)$.

Kui funktsioonil $f(x,y,\mu)$ on piirkonnas (2) ka pidev teist järku osatuletis μ_1 järgi, siis on süsteemi (12') paremal poolel pidev esimest järku osatuletis μ_1 järgi. Rakendades teoreemi 3 tulemust süsteemile (12'), saame, et selle lahendil $z = \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu_1}$ on olemas pidev osatuletis μ_1 järgi. Siis aga on süsteemi (1) lahendil $y(x,\mu)$ olemas pidev teist järku osatuletis μ_1 järgi. Selliselt arutlusi jätkates jõuame tulemuseni:

Järeldus 2. Kui funktsioonil $f(x,y,\mu)$ on piirkonnas (2) olemas pidevad osatuletised μ_1 järgi kuni järguni k, siis on ka lahendil $y(x,\mu)$ olemas pidevad osatuletised μ_1 järgi kuni järguni k.

Meelespidamise kergendamiseks soovitame lugejal tähele panna, et võrrandisüsteem (12') on lihtsalt saadav võrrandisüsteemist (1) parameetri μ_1 järgi diferentseerimisel, kui asendada süsteemis (1) otsitav y lahendiga $y(x,\mu)$.

§ 13. LAHENDI SÕLTUVUS ALGTINGIMUSTEST. STABIILSUS.

1. Olgu diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

parem pool $f(x,y)$ ja selle osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

määratud ja pidevad $(x,\mathbf{y})$-ruumi piirkonnas D. Läbi iga punkti $(x_0,\mathbf{y}^0) \in D$ kulgeb siis lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi põhjal parajasti üks süsteemi (1) lahend; me tähistame selle lahendi $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$, rõhutades sellega lahendi sõltuvust algväärtustest $x_0,\mathbf{y}^0$. Ilmselt $\mathbf{y}(x_0,x_0,\mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0$.

Kas lahend sõltub algväärtustest pidevalt? Sellele küsimusele vastamiseks teostame muutujate vahetuse

$$t = x - x_0, \quad \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^0.$$

Süsteem (1) omandab kuju

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{f}(t + x_0, \mathbf{z} + \mathbf{y}^0), \tag{1'}$$

$\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ aga läheb üle süsteemi (1') lahendiks

$$\mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}^0) = \mathbf{y}(t + x_0,x_0,\mathbf{y}^0) - \mathbf{y}^0 = \mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0) - \mathbf{y}^0.$$

Süsteemi (1') kuuluvad x_0 ja $\mathbf{y}^0$ parameetritena ning süsteemi parem pool on pidev ja tal on pidev osatuletis $\mathbf{z}$ järgi. Teoreemi 1 § 12 põhjal sõltuvad süsteemi (11') (läbi ühe ja sama punkti kulgevad) lahendid pidevalt parameetritest x_0 ja $\mathbf{y}^0$. Üheks selliseks lahendiks on $\mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}^0)$; see lahend kulgeb iga $x_0,\mathbf{y}^0$ korral läbi punkti (0,0):

$$\mathbf{z}(0,x_0,\mathbf{y}^0) = \mathbf{y}(x_0,x_0,\mathbf{y}^0) - \mathbf{y}^0 = \mathbf{y}^0 - \mathbf{y}^0 = 0.$$

Kuid koos funktsiooniga $\mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}^0)$ on pidev ka

$$\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0) = \mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}^0) + \mathbf{y}^0,$$

s. t. süsteemi (1) lahend sõltub algväärtustest pidevalt.

Edasi, kui $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ on k korda pidevalt diferentseeruv x järgi, siis on süsteemi (1') parem pool k korda pidevalt diferentseeruv parameetri x_0 järgi ning järelduse 2 § 12 põhjal on süsteemi (1') lahendil $\mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}^0)$, koos temaga aga ka süsteemi (1) lahendil $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$, olemas k pidevat osatuletist x_0 järgi. Analoogiliselt toob $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ ℓ-kordne pidev diferentseeruvus $\mathbf{y}$ mingi komponendi y_j järgi endaga kaasa $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ ℓ-kordse pideva diferentseeruvuse $\mathbf{y}^0$ vastava komponendi y_j^0 järgi.

Olgu lahend $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ määratud mingil lõigul $[a,b]$. Teoreemi 2 § 12 põhjal[1] leidub iga $\varepsilon > 0$ jaoks selline $\delta > 0$, et $|\tilde{\mathbf{y}}^0 - \mathbf{y}^0| < \delta$ korral on ka $\mathbf{y}(x,x_0,\tilde{\mathbf{y}}^0)$ määratud kogu lõigul $[a,b]$, kusjuures

$$|\mathbf{y}(x,x_0,\tilde{\mathbf{y}}^0) - \mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)| < \varepsilon \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Järgnevas punktis vaatleme analoogilist küsimust juhul, kui $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ on määratud poolteljel $[x_0,\infty)$.

2. Diferentsiaalvõrrandite teooria rakendustes pakub suurt huvi järgmine probleem: kui $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ on määratud poolteljel $[x_0,\infty)$ ning algväärtused $\mathbf{y}^0$ ja $\tilde{\mathbf{y}}^0$ erinevad teineteisest vähe, kas siis ka $\mathbf{y}(x,x_0,\tilde{\mathbf{y}}^0)$ on määratud poolteljel $[x_0,\infty)$ ning kas lahendite $\mathbf{y}(x,x_0,\tilde{\mathbf{y}}^0)$ ja $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ erinevus jääb $x \geqslant x_0$ kogu aeg väikeseks. Kui vastus on jaatav, öeldakse, et lahend $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ on stabiilne, vastasel korral aga, et lahend $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ on mittestabiilne. Anname täpsema definitsiooni:

---

[1] Endastmõistetavalt tuleb seda teoreemi taas rakendada süsteemi (1') lahendile $\mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}^0)$ ja seejärel pöörduda tagasi $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ juurde.

Poolteljel $[x_0,\infty)$ määratud <u>lahendit</u> $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ <u>nimetatakse stabiilseks</u> (L j a p u n o v i m õ t t e s), kui mistahes $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline $\delta > 0$, et $|\tilde{\mathbf{y}}^0 - \mathbf{y}^0| < \delta$ korral on ka lahend $\mathbf{y}(x,x_0,\tilde{\mathbf{y}}^0)$ määratud poolteljel $[x_0,\infty)$, kusjuures

$$|\mathbf{y}(x,x_0,\tilde{\mathbf{y}}^0) - \mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)| < \varepsilon \quad (x_0 \leq x < \infty) .$$

<u>Lahendit</u> $\mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)$ <u>nimetatakse asümptootiliselt stabiilseks</u>, kui lisaks eelnevale

$$\lim_{x \to \infty} |\mathbf{y}(x,x_0,\tilde{\mathbf{y}}^0) - \mathbf{y}(x,x_0,\mathbf{y}^0)| = 0 .$$

Olgu vaja uurida süsteemi (1) lahendi $\tilde{\mathbf{y}}(x)$ stabiilsust. Esitades uue otsitava funktsiooni

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}(x) ,$$

taandub süsteem (1) kujule

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{y}}(x)) - \mathbf{f}(x, \tilde{\mathbf{y}}(x)) , \qquad (1')$$

kusjuures $\tilde{\mathbf{y}}(x)$ läheb üle süsteemi (1') lahendiks $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (nn. triviaalseks lahendiks). Süsteemi (1) lahend $\tilde{\mathbf{y}}(x)$ on stabiilne siis ja ainult siis, kui süsteemi (1') triviaalne lahend on stabiilne (põhjendada!).

Teostatud lihtne arutlus lubab meil edaspidi piirduda vaid triviaalse lahendi stabiilsuse uurimisega, s. t. lugeda, et vajalik muutujate vahetus on juba teostatud. Süsteemi (1) korral toob see endaga kaasa (üldsust mitte kitsendava) lisaeelduse, et $\mathbf{f}(x,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, sest vastasel korral ei oleks $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ süsteemi (1) lahendiks. Peale selle võime üldsust kitsendamata eeldada, et $x_0 = 0$. Stabiilsuse definitsioon, rakendatuna vaadeldavale juhule, on järgmine: süsteemi (1) triviaalne lahend on stabiilne siis ja ainult siis, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline $\delta > 0$, et $|\mathbf{y}(0)| < \delta$ korral on süsteemi (1) lahendid määratud pooltteljel $[0,\infty)$ ning rahuldavad sellel pooltteljel võrratust $|\mathbf{y}(x)| < \varepsilon$. Kui lisaks sellele $\lim\limits_{x \to \infty} |\mathbf{y}(x)| = 0$, on triviaalne lahend asümptootiliselt stabiilne.

Uurime lineaarse homogeense konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{2}$$

triviaalse lahendi stabiilsust. Olgu λ_k süsteemi (2) karakteristlikuks väärtuseks (maatriksi A omaväärtuseks). Me teame (vt. § 10, ptk. III), et süsteemil (2) on olemas erilahend

$$\mathbf{y}^k(x) = \gamma e^{\lambda_k x}\mathbf{p},$$

kus $\gamma = \mathrm{const}$, $\mathbf{p}$ aga on konstantne vektor. Kui λ_k on reaalne ja $\lambda_k > 0$, siis $x \to \infty$ korral

$$|\mathbf{y}^k(x)| = |\gamma||\mathbf{p}|e^{\lambda_k x} \to \infty;$$

samal ajal on küllalt väikese $|\gamma|$ korral $|\mathbf{y}^k(0)| = |\gamma||\mathbf{p}| < \delta$, kus δ on suvaline etteantud positiivne arv. Seega ei saa $\lambda_k > 0$ korral triviaalne lahend stabiilne olla. Olgu nüüd λ_k kompleksne: $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($\beta_k \neq 0$; i - imaginaarühik). Siis on ka erilahend $\mathbf{y}^k(x)$ kompleksne ja me saame temast eraldada kaks reaalset erilahendit; kumbki nendest avaldub kujul

$$\bar{\mathbf{y}}^k(x) = \gamma e^{\alpha_k x}(\mathbf{q}^1\cos\beta_k x + \mathbf{q}^2\sin\beta_k x),$$

kus q^1 ja q^2 on mingid (reaalsed) konstantsed vektorid. Kui $\alpha_k > 0$, ei ole $\bar{y}^k(x)$ jälle $x > 0$ korral tõkestatud ja triviaalne lahend on mittestabiilne. Ühendades vaadeldud kaks juhtumit ja võttes arvesse karakteristliku väärtuse λ_k suvalisuse, võime tulemuse formuleerida nii: kui vähemalt ühe karakteristliku väärtuse reaalosa on positiivne, siis on süsteemi (2) triviaalne lahend mittestabiilne.

Järelikult on triviaalse lahendi stabiilsuseks tarvilik, et kõigi karakteristlike väärtuste reaalosad oleksid negatiivsed või võrdsed nulliga. Hoolsam lugeja võib erilahendite fundamentaalsüsteemi kujust (vt. § 10) järeldada, et see tingimus ei ole üldiselt piisav. Küll on aga triviaalse lahendi stabiilsuseks ja isegi asümptootiliseks stabiilsuseks piisav, et kõigi karakteristlike väärtuste reaalosad oleksid (rangelt) negatiivsed.

Tõepoolest, süsteemi (2) erilahendid avalduvad kujul (vt. ptk. III § 10.1) $y(x) = e^{xA}\, y(0)$, mistõttu $|y(x)| \leq |e^{xA}|\,|y(0)|$. Nagu näha, on triviaalne lahend asümptootiliselt stabiilne, kui vaid $x \to \infty$ korral $|e^{xA}| \to 0$. Kuid viimane järeldub järgnevast abitulemusest (mida me ka edaspidi kasutame):

Lemma 1. Kui maatriksi A kõigi omaväärtuste reaalosad on negatiivsed, siis leiduvad sellised positiivsed konstandid K ja σ, et $x \geq 0$ korral

$$|e^{xA}| \leq Ke^{-\sigma x}. \qquad (3)$$

T õ e s t u s . Tähistame maatriksi A omaväärtusi

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (k = 1,2,\dots,n)$; (β_k võib olla võrdne nulliga). Lemma eelduse kohaselt on suurus $\alpha = \max\limits_{1\le k\le n} \alpha_k$ negatiivne.

Meenutame nüüd mõningaid ptk. III § 10.3 tulemusi. Kõigepealt, $e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}$, kus J on maatriksi A Jordani normaalkuju. Siit

$$\left|e^{xA}\right| \le |P|\left|e^{kJ}\right|\left|P^{-1}\right| . \tag{3'}$$

Edasi, maatriksfunktsiooni e^{xJ} elemendid $c_{ij}(x)$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$ avaldusid kujul

$$c_{ij}(x) = \gamma_{ij}\, x^{\ell} e^{\lambda_k x} ,$$

kus γ_{ij} on mingi konstant (võib olla võrdne ka nulliga), $\ell = \ell(i,j)$ on mingi n-st väiksem mittenegatiivne astmenäitaja (võib erinevate elementide $c_{ij}(x)$ korral olla erinev, s. t. sõltub i-st ja j-st), $k = k(i,j)$ on mingi arv täisarvude 1,2,...n hulgast.

Kuna $x \geqslant 0$ korral

$$\left|e^{\lambda_k x}\right| = \left|e^{\alpha_k x}(\cos\beta_k x + i\sin\beta_k x)\right| =$$

$$= e^{\alpha_k x}\left|\cos\beta_k x + i\sin\beta_k x\right| =$$

$$= e^{\alpha_k x}\sqrt{\cos^2\beta_k x + \sin^2\beta_k x} = e^{\alpha_k x} \le e^{\alpha x},$$

siis

$$\left|c_{ij}(x)\right| \le \left|\gamma_{ij}\right| x^{\ell}\left|e^{\lambda_k x}\right| \le \left|\gamma_{ij}\right| x^{\ell(i,j)} e^{\alpha x}$$

ja

$$\left|e^{xJ}\right| = \sum_{i,j=1}^{n} \left|c_{ij}(x)\right| \leqslant e^{\alpha x} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\gamma_{ij}\right| x^{\ell(i,j)} \qquad (x \geqslant 0).$$

Tähistame $\sigma = -\frac{\alpha}{2}$; et $\alpha < 0$, siis $\sigma > 0$. Võttes arvesse, et iga $\ell = 0,1,2,\dots$ korral $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\ell} e^{-\sigma x} = 0$ (miks?), saame, et

$$\max_{0 \leqslant x < \infty} e^{-\sigma x} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\gamma_{ij}\right| x^{\ell(i,j)} = K_1 < \infty$$

ja $x \geqslant 0$ korral

$$\left|e^{xJ}\right| \leqslant e^{\alpha x} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\gamma_{ij}\right| x^{\ell(i,j)} =$$

$$= e^{-\sigma x}\left[e^{-\sigma x} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\gamma_{ij}\right| x^{\ell(i,j)}\right] \leqslant K_1 e^{-\sigma x} .$$

Võrratus (3) järeldub nüüd võrratusest (3'). Lemma 1 on tõestatud.

Tõestame veel ühe lemma.

Lemma 2. Kui mingi (skalaarne) funktsioon $u(x)$ rahuldab võrratust

$$u(x) \leqslant \alpha \int_0^x u(s)ds + \beta \qquad (0 \leqslant x < x_1;\ \alpha, \beta = \text{const.}),\ (4)$$

siis

$$u(x) \leqslant \beta e^{\alpha x} \quad (0 \leqslant x < x_1) . \qquad (5)$$

T õ e s t u s . Tähistades $v(x) = \int_0^x u(s)ds$, saame võrratusest (4), et

$$v'(x) \leqslant \alpha v(x) + \beta .$$

Korrutame võrratuse mõlemaid pooli funktsiooniga $e^{-\alpha x}$:

$$v'(x)e^{-\alpha x} - \alpha v(x)e^{-\alpha x} \leq \beta e^{-\alpha x} .$$

Võrratuse vasakul pool on nüüd parajasti $\frac{d}{dx}\left[v(x)e^{-\alpha x}\right]$; integreerime võrratuse mõlemaid pooli rajades $(0,x)$:

$$v(x)e^{-\alpha x}\Big|_0^x \leq -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^x .$$

Kuna $v(0) = 0$, siis rajade asendamisel leiame, et

$$v(x)e^{-\alpha x} \leq \frac{\beta}{\alpha}(1-e^{-\alpha x}) ,$$

kust

$$\int_0^x u(s)ds = v(x) \leq \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1) .$$

Asendades viimase hinnangu võrratusse (4), saamegi võrratuse (5). Lemma 2 on tõestatud.

3. Diferentsiaalvõrrandite teoorias puuduvad seni üldised kriteeriumid lahendi stabiilsuseks. Isegi lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandite süsteemi $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ triviaalse lahendi stabiilsuse üle on võimalik otsustada vaid mõningatel lihtsamatel erijuhtudel. Lihtsamat erijuhtu, kui kordajate maatriks $A(x) = A$ on konstantne, me käsitlesime eespool. Osutub, et ka mittelineaarsetes süsteemides muudab stabiilsuse küsimuse raskeks just sõltumatu muutuja x figureerimine süsteemis. Nagu me peagi näeme, on nn. <u>autonoomsete süsteemide</u> korral, mis ei sisalda ilmsi sõltumatut muutujat, lahendi stabiilsus lihtsalt uuritav.

Vaatlemegi autonoomset diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ehk

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) . \tag{6}$$

Me eeldame, et $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ ja

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{y})}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_n(\mathbf{y})}{\partial y_n} \end{Vmatrix}$$

on määratud ja pidevad piirkonnas $|\mathbf{y}| < \eta$, kus η on mingi positiivne konstant. Lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi põhjal kulgeb siis läbi iga punkti $(x_0, \mathbf{y}^0)$ $(|\mathbf{y}^0| < \eta)$ parajasti üks integraalkõver.

Kuna meid huvitab jälle triviaalse lahendi $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ stabiilsuse küsimus, siis peame eeldama, et $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Teoreem 1. Kui (konstantse) maatriksi $A = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{0})}{d\mathbf{y}}$ kõigi omaväärtuste reaalosad on negatiivsed, siis on autonoomse süsteemi (6) triviaalne lahend $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ asümptootiliselt stabiilne.

T õ e s t u s . Teisendame süsteemi (6) paremat poolt $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{0})$ Lagrange'i lause põhjal. Iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral

$$f_i(\mathbf{y}) = f_i(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{0}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\theta_i \mathbf{y})}{\partial y_j} y_j \quad (0 < \theta_i < 1)$$

ehk

$$f_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial y_j} y_j + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i(\theta_i \mathbf{y})}{\partial y_j} - \frac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial y_j} \right] y_j .$$

Pöördudes tagasi vektorsümboolikale, saame

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} + \Gamma(\mathbf{y})\mathbf{y},$$

kus $\Gamma(\mathbf{y})$ on maatriksfunktsioon elementidega

$$\gamma_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{\partial f_i(\theta_i \mathbf{y})}{\partial y_j} - \frac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial y_j}.$$

Osatuletiste $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ pidevuse tõttu $|\gamma_{ij}(\mathbf{y})| \to 0$, kui $|\mathbf{y}| \to 0$. Järelikult ka

$$|\Gamma(\mathbf{y})| \to 0, \quad \text{kui } |\mathbf{y}| \to 0. \tag{7}$$

Süsteemi (6) võime ümber kirjutada kujul

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \Gamma(\mathbf{y})\mathbf{y}. \tag{6'}$$

Seetõttu on süsteemi (6) lahend $\mathbf{y}(x)$ ühtlasi ka (sellele lahendile vastava) lineaarse süsteemi

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(x), \quad \mathbf{g}(x) = \Gamma(\mathbf{y}(x))\,\mathbf{y}(x)$$

lahendiks, ja kui $\mathbf{y}(x)$ läbib punkti $(0, \mathbf{y}^0)$, siis on ta teoreemi 3 § 11 põhjal esitatav kujul

$$\mathbf{y}(x) = \int_0^x e^{(x-s)A}\mathbf{g}(s)ds + e^{xA}\mathbf{y}^0 .$$

Siit

$$|\mathbf{y}(x)| \leq \int_0^x |e^{(x-s)A}|\,|\mathbf{g}(s)|ds + |e^{xA}|\,|\mathbf{y}^0|.$$

Hinnates norme $|e^{(x-s)A}|$ ja $|e^{xA}|$ lemma 1 põhjal ja arvestades, et $|\mathbf{g}(s)| \leq |\Gamma(\mathbf{y}(s))|\,|\mathbf{y}(s)|$, saame

$$|\mathbf{y}(x)| \leq K \int_0^x e^{-\sigma(x-s)} |\Gamma(\mathbf{y}(s))|\,|\mathbf{y}(s)|\,ds + K|\mathbf{y}^o| e^{-\sigma x}$$

ehk

$$e^{\sigma x} |\mathbf{y}(x)| \leq K \int_0^x e^{\sigma x} |\mathbf{y}(s)|\,|\Gamma(\mathbf{y}(s))|\,ds + K|\mathbf{y}^o|, \tag{8}$$

kus K ja σ on mingid positiivsed konstandid. Me ei kitsenda üldsust, lugedes, et $K \geq 1$.

Seose (7) põhjal leidub selline arv τ $(0 < \tau < \eta)$, et

$$|\Gamma(\mathbf{y})| \leq \frac{\sigma}{2K}, \text{ kui } |\mathbf{y}| \leq \tau . \tag{7'}$$

Olgu

$$|\mathbf{y}^o| < \frac{\tau}{K} . \tag{9}$$

Kuna $K \geq 1$, siis $|\mathbf{y}(0)| = |\mathbf{y}^o| < \tau$ ja $|\mathbf{y}(x)|$ pidevuse tõttu $|\mathbf{y}(x)| < \tau$ ka $x = 0$ küllalt väikeses ümbruses. Olgu $[0, x_1)$ maksimaalne poollõik, millel $|\mathbf{y}(x)| < \tau$ (s.t. $|\mathbf{y}(x)| < \tau$, kui $x \in [0, x_1)$ ja $|\mathbf{y}(x_1)| = \tau$, kui $x_1 < \infty$). Tingimuse (7') tõttu

$$|\Gamma(\mathbf{y}(x))| \leq \frac{\sigma}{2K}, \text{ kui } 0 \leq x < x_1 . \tag{7''}$$

Teeme võrratuses (8) asendused vastavalt tingimustele (9) ja (7"):

$$e^{\sigma x} |\mathbf{y}(x)| \leq \frac{\sigma}{2} \int_0^x e^{\sigma s} |\mathbf{y}(s)|\,ds + \tau \quad (0 \leq x < x_1) .$$

Me saime võrratuse (4), milles $u(x) = e^{\sigma x} |\mathbf{y}(x)|$, $\alpha = \frac{\sigma}{2}$, $\beta = \tau$. Lemma 2 põhjal

$$e^{6x}|\mathbf{y}(x)| \leq \tau e^{\frac{6}{2}x} \qquad (0 \leq x < x_1)$$

ehk

$$|\mathbf{y}(x)| \leq \tau e^{-\frac{6}{2}x} \qquad (0 \leq x < x_1). \qquad (10)$$

Viimasest võrratusest järeldub kohe, et $x_1 = \infty$. Tõepoolest, kui $x_1 < \infty$, siis leiame võrratuses (10) piirile $x \nearrow x_1$ minnes, et $|\mathbf{y}(x_1)| \leq \tau e^{-\frac{6}{2}x_1} < \tau$, mis on vastuolus x_1 definitsiooniga.

Sellega näitasime muuhulgas, et tingimuse (9) täidetuse korral on vastav lahend $\mathbf{y}(x)$ määratud kogu poolteljel $[0,\infty)$. Edasi, asendades võrratustes (9) ja (10) τ väiksema suurusega, saame väita järgmist: milline ka ei ole arv ε $(0 < \varepsilon \leq \tau)$, on $|\mathbf{y}(0)| < \frac{\varepsilon}{K} = \delta$ korral $|\mathbf{y}(x)| \leq \varepsilon e^{-\frac{6}{2}x} \leq \varepsilon$ kogu poollõigul $[0,\infty)$, s. t. süsteemi (6) triviaalne lahend on stabiilne. Kuna $x \to \infty$ korral $e^{-\frac{6}{2}x} \to 0$, siis on ka $|\mathbf{y}(x)| \to 0$ ja triviaalne lahend asümptootiliselt stabiilne.

Teoreem 1 on tõestatud. Anname tõestuseta järgmise tulemuse:

<u>Teoreem 2</u>. Kui maatriksi $A = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{0})}{d\mathbf{y}}$ kas või ühe omaväärtuse reaalosa on positiivne, siis on süsteemi (6) triviaalne lahend mittestabiilne.

Teoreemid 1 ja 2 taandavad süsteemi (6) ehk (6') triviaalse lahendi stabiilsuse uurimise lineaarse homogeense konstantsete kordajatega süsteemi

$$y' = Ay \quad , \quad A = \frac{df(0)}{dy}$$

triviaalse lahendi stabiilsuse uurimisele. Vaadeldud juhtudel ei etenda süsteemi (6') mittelineaarne liige $\Gamma(y)y$ mingit osa stabiilsuse küsimuses. Juhul, kui maatriksi A kõigi omaväärtuste reaalosad on mittepositiivsed, kuid nende hulgas on ka nulliga võrdseid, ei ole selline taandamine enam võimalik: triviaalse lahendi $y = 0$ stabiilsust või mittestabiilsust hakkab oluliselt mõjutama süsteemi (6') mittelineaarne liige $\Gamma(y)y$.

K i r j a n d u s .

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Москва, I950.
2. Фихтенгольц П.М. Основы математического анализа I. Москва, I964.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. Москва, I957.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва, I965.

S i s u k o r d .

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли,18

Т. Сырмус, Г. Вайникко

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

II

На эстонском языке

Vastutav toimetaja E. Jürimäe
Korrektor A. Tõldsepp

TRÜ rotaprint 1967. Trükipoognaid 7,88. Tingtrükipoognaid 7,17. Arvestuspoognaid 5,75. Trükiarv 500. Paber 30x42.1/4. Paljundamisele antud 24. II 1966. MB 00649. Tell. nr. 99.

Hind 16 kop.

Hind 16 kop.